



# Dynamique sur les espaces de représentations de surfaces non-orientables

Frédéric Palesi

## ► To cite this version:

Frédéric Palesi. Dynamique sur les espaces de représentations de surfaces non-orientables. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2009. Français. NNT : . tel-00443930

**HAL Id: tel-00443930**

**<https://theses.hal.science/tel-00443930>**

Submitted on 5 Jan 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)  
préparée à l'Institut Fourier  
Laboratoire de Mathématiques  
UMR 5582 CNRS - UJF*

# Dynamique sur les espaces de représentations de surfaces non-orientables

PALESI Frederic

*Soutenue à Grenoble le 7 décembre 2009 devant le jury :*

|                   |                         |            |
|-------------------|-------------------------|------------|
| Gérard BESSON     | Institut Fourier        | Examineur  |
| Louis FUNAR       | Institut Fourier        | Directeur  |
| William GOLDMAN   | University of Maryland  | Rapporteur |
| Pascal HUBERT     | Université Paul Cézanne | Examineur  |
| François LABOURIE | Université Paris-Sud    | Rapporteur |
| Greg MCSHANE      | Institut Fourier        | Examineur  |
| Richard WENTWORTH | John Hopkins University | Examineur  |

*Au vu des rapports de William GOLDMAN et François LABOURIE*

---

A l'infini, et au-delà ...

”Tout le monde veut vivre au sommet de la montagne,  
sans soupçonner que le vrai bonheur est dans la manière de gravir la pente.”

## Remerciements

Tout d'abord un grand merci à Louis Funar d'avoir accepté d'encadrer cette thèse, et de m'avoir orienté sur le sujet des surfaces non-orientables. Sa grande culture mathématique et sa disponibilité ont été des atouts précieux pendant ces (presque) quatre années.

Je tiens également à remercier chaleureusement William Goldman et François Labourie pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail. Leur travaux ont influencé la grande majorité de ma thèse, et il me font l'honneur d'avoir accepté de rapporter cette thèse.

Je souhaite également remercier les différents membres du jury : Pascal Hubert, avec qui j'ai découvert la recherche en mathématiques lors de mon stage de licence, Gerard Besson et Greg McShane que j'ai eu la chance de pouvoir cotoyer à l'Institut Fourier pendant ces années, et Richard Wentworth pour avoir accepté de rejoindre le jury un peu dans la précipitation.

Les mathématiques sont une activité extrêmement sociale, et cette thèse a largement bénéficié de toutes les conversations que j'ai eu avec les personnes au sein de l'Institut Fourier, et plus généralement avec les membres de la communauté mathématique rencontrés au détour d'une conférence. Il serait trop long de tous les citer, cependant je tiens à adresser un merci particulier à Maxime Wolff qui a accepté de relire un premier manuscrit très mal écrit et bourré d'énormes erreurs. Ses nombreuses critiques constructives ont beaucoup apporté à la qualité de ma rédaction.

J'en profite pour remercier tous les autres doctorants de l'Institut sans qui ces trois années auraient été bien tristes. Une mention toute particulière à mes trois acolytes du Groupe de Travail GraS : Laurent, Antoine et Roland. Les longues après-midi à plancher sur notre problème ouvert ont été parmi les plus efficaces et les plus jouissives de ma thèse. J'espère pouvoir retrouver une telle ambiance de travail dans le futur ...

Je suis conscient que beaucoup de mes amis ne liront que les remerciements, ce paragraphe est pour eux ...

Je remercie (dans le désordre le plus total (et je tiens à m'excuser auprès de tout ceux que j'oublie)) les membres de b-b et des comics : Aurelien pour son appart cette semaine, Guizzmo pour les fleurs d'oranger au parfum d'orient, Jezz pour ses arrachages de cages thoraciques, Phulbert pour toutes ces années de colocs, Tonfa pour sa geekitude, Joan de n'être jamais mort, Juju d'être responsable rien, Framboise et ses Pringles, Kazoo pour ses liens internet, Euzeb pour sa taille patron, Anne de faire ce qu'elle veut, Seraph pour son aigritude, Tab et le fameux Raspoutine, Booli d'être un saltimbanque, Garga d'être dense dans l'ensemble des chansons, Elise pour ses étoiles, Gabi de nous faire aller voir des films, Glau pour ses improvisations pianistiques, Joris pour son poulet à la citronnelle, Rufus pour son nez, Simoun pour sa

main droite, Camila pour son accent, Laurin de nous inviter à l'Elysée, Marine pour son dernier voyage en mini, Marjo d'avoir des chouettes lapins, Pad pour sa maîtrise du droit, Mathilde pour son excellent concept de minibus, Paul pour m'avoir initié à questions pour un champion, Ptilau pour m'avoir laissé sa chambre la semaine dernière, Chris pour le cocktail éponyme, Anatole pour le club éponyme ... je pense aussi aux adeptes de la Nouvelle Star : Mumu, Matthieu, Karim et Will ... et puis aussi à mes amis plus anciens : Bea, Gaele, Eve, Pierre, Fred, Rémi ... et je remercie également tout ceux que j'oublie, sinon ils vont m'en vouloir.

Je remercie également ma famille pour leur soutien inconditionnel. Tout d'abord mes parents, sans qui je ne serais certainement pas là aujourd'hui, et qui m'ont transmis le goût des sciences. Et je remercie également mon frère et mes soeurs, parce que c'est quand même agréable d'être le petit dernier ...

Pour finir, je tiens à remercier de tout mon cœur celle sans qui rien de tout ça n'aurait été possible. Celle qui m'a souvent motivé pour me lever le matin, qui m'a rappelé plus d'une fois de m'inscrire en thèse, qui m'a apporté à manger pendant que je rédigeais, qui a relu consciencieusement les fautes d'orthographe de cette thèse, qui a redessiné certaines figures très moches, qui m'a toujours soutenu pendant ces quatre heureuses années passées ensemble et qui m'a poussé à donner le meilleur de moi-même. Merci Hélène ...

---

# Table des matières

|          |                                                              |           |
|----------|--------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                          | <b>1</b>  |
| 1.1      | Dynamique de l'action du groupe modulaire . . . . .          | 2         |
| 1.1.1    | Mesure sur l'espace de modules . . . . .                     | 3         |
| 1.1.2    | Variété de caractères . . . . .                              | 3         |
| 1.1.3    | Flot de Goldman . . . . .                                    | 5         |
| 1.2      | Composantes connexes . . . . .                               | 6         |
| 1.2.1    | Classe d'obstruction . . . . .                               | 6         |
| 1.2.2    | Résultats obtenus . . . . .                                  | 7         |
| 1.2.3    | Autres composantes . . . . .                                 | 7         |
| <b>2</b> | <b>Préliminaires</b>                                         | <b>9</b>  |
| 2.1      | Surfaces . . . . .                                           | 9         |
| 2.1.1    | Classification des surfaces . . . . .                        | 9         |
| 2.1.2    | Courbes sur la surface . . . . .                             | 12        |
| 2.1.3    | Groupe fondamental . . . . .                                 | 13        |
| 2.2      | Groupe Modulaire . . . . .                                   | 14        |
| 2.2.1    | Définitions . . . . .                                        | 14        |
| 2.2.2    | Générateurs du groupe modulaire . . . . .                    | 15        |
| 2.2.2.1  | Twists de Dehn . . . . .                                     | 15        |
| 2.2.2.2  | Crosscap slides . . . . .                                    | 16        |
| 2.2.2.3  | Théorème de Dehn-Lickorish . . . . .                         | 16        |
| 2.2.3    | Ensemble fini de générateurs . . . . .                       | 17        |
| 2.3      | Représentations des groupes de surface . . . . .             | 18        |
| 2.3.1    | Espace de modules . . . . .                                  | 18        |
| 2.3.2    | Espace de modules relatif . . . . .                          | 19        |
| <b>3</b> | <b>Mesure invariante sur l'espace des représentations</b>    | <b>21</b> |
| 3.1      | Rappels de théorie ergodique . . . . .                       | 22        |
| 3.1.1    | Actions ergodiques . . . . .                                 | 22        |
| 3.1.2    | Espace engendré . . . . .                                    | 23        |
| 3.2      | Mesure invariante sur l'espace des représentations . . . . . | 24        |
| 3.2.1    | Injection dans $G^k$ . . . . .                               | 24        |
| 3.2.2    | Distribution volume . . . . .                                | 24        |
| 3.3      | Mesure sur $G^k$ . . . . .                                   | 25        |
| 3.4      | Invariance de la mesure . . . . .                            | 26        |
| 3.5      | Régularité dans le cas des groupes de surface . . . . .      | 30        |

## TABLE DES MATIÈRES

---

|          |                                                          |           |
|----------|----------------------------------------------------------|-----------|
| 3.5.1    | Un peu d'analyse harmonique . . . . .                    | 31        |
| 3.5.2    | Surfaces orientables . . . . .                           | 32        |
| 3.5.3    | Surfaces non-orientables . . . . .                       | 33        |
| 3.5.4    | Surfaces à bord . . . . .                                | 35        |
| <b>4</b> | <b>Variété de caractères en petite caractéristique</b>   | <b>37</b> |
| 4.1      | Variété de caractères . . . . .                          | 37        |
| 4.1.1    | Fonction trace . . . . .                                 | 38        |
| 4.1.1.1  | Groupe cyclique . . . . .                                | 38        |
| 4.1.1.2  | Caractère d'une représentation . . . . .                 | 39        |
| 4.1.1.3  | Représentations dans $SU(2)$ . . . . .                   | 39        |
| 4.1.2    | Groupe libre à deux générateurs . . . . .                | 40        |
| 4.1.2.1  | Caractères réels . . . . .                               | 41        |
| 4.1.3    | Groupe libre à trois générateurs . . . . .               | 42        |
| 4.1.3.1  | Variété de caractères . . . . .                          | 42        |
| 4.1.3.2  | Caractères réels . . . . .                               | 42        |
| 4.1.4    | Variété de caractères . . . . .                          | 43        |
| 4.2      | Surfaces de caractéristique -1 . . . . .                 | 45        |
| 4.2.1    | Sphère à trois trous . . . . .                           | 45        |
| 4.2.2    | Tore à un trou . . . . .                                 | 45        |
| 4.2.3    | Plan projectif à deux trous . . . . .                    | 48        |
| 4.2.4    | Bouteille de Klein à un trou . . . . .                   | 49        |
| 4.3      | En caractéristique -2 . . . . .                          | 51        |
| 4.3.1    | Plan projectif à trois trous . . . . .                   | 51        |
| 4.3.1.1  | Twist de Dehn selon $T = AAB$ . . . . .                  | 52        |
| 4.3.1.2  | Twist de Dehn selon $U = CAA$ . . . . .                  | 54        |
| 4.3.1.3  | Twist de Dehn selon $W$ . . . . .                        | 56        |
| 4.3.1.4  | Conclusion . . . . .                                     | 58        |
| 4.3.2    | Bouteille de Klein à deux trous . . . . .                | 59        |
| 4.3.2.1  | Twist de Dehn selon $U = BBC$ . . . . .                  | 60        |
| 4.3.3    | Surface de genre trois à un trou . . . . .               | 62        |
| 4.3.3.1  | Twist de Dehn selon $U = BBC$ . . . . .                  | 63        |
| 4.4      | Surface fermée de genre trois . . . . .                  | 65        |
| <b>5</b> | <b>Ergodicité dans le cas général</b>                    | <b>69</b> |
| 5.1      | Décomposition de la surface et flot de Goldman . . . . . | 69        |
| 5.1.1    | Courbe séparante . . . . .                               | 69        |
| 5.1.2    | Courbe non-séparante . . . . .                           | 71        |
| 5.1.3    | Flot de Goldman . . . . .                                | 72        |
| 5.1.3.1  | Flot twist généralisé . . . . .                          | 73        |
| 5.1.3.2  | Fonction invariante . . . . .                            | 74        |
| 5.1.4    | Invariance de la mesure . . . . .                        | 74        |
| 5.2      | Action du cercle et twists de Dehn . . . . .             | 76        |
| 5.2.1    | Action du cercle . . . . .                               | 76        |
| 5.2.1.1  | Courbe séparante . . . . .                               | 77        |
| 5.2.1.2  | Courbe non-séparante . . . . .                           | 78        |
| 5.2.2    | Twist de Dehn . . . . .                                  | 78        |
| 5.2.2.1  | Courbe séparante . . . . .                               | 78        |
| 5.2.2.2  | Courbe non-séparante . . . . .                           | 79        |

|          |                                                                  |            |
|----------|------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.3      | Preuve de l'ergodicité . . . . .                                 | 79         |
| 5.3.1    | Surface orientable . . . . .                                     | 80         |
| 5.3.2    | En genre pair . . . . .                                          | 80         |
| 5.3.2.1  | Décomposition de la surface . . . . .                            | 80         |
| 5.3.2.2  | Bouteille de Klein à deux trous . . . . .                        | 81         |
| 5.3.2.3  | Cas général . . . . .                                            | 82         |
| 5.3.3    | En genre impair . . . . .                                        | 83         |
| 5.3.3.1  | Surface de genre trois à un trou . . . . .                       | 83         |
| 5.3.3.2  | Décomposition de la surface . . . . .                            | 84         |
| <b>6</b> | <b>Composantes connexes de l'espace des représentations</b>      | <b>87</b>  |
| 6.1      | Obstructions et classe d'Euler . . . . .                         | 87         |
| 6.1.1    | Applications d'obstruction . . . . .                             | 87         |
| 6.1.2    | Groupes de surface . . . . .                                     | 88         |
| 6.1.2.1  | Surfaces orientables . . . . .                                   | 88         |
| 6.1.2.2  | Surfaces non-orientables . . . . .                               | 89         |
| 6.1.3    | Classe d'Euler et de Stiefel-Whitney . . . . .                   | 89         |
| 6.1.4    | Surfaces à bord . . . . .                                        | 90         |
| 6.1.4.1  | Revêtement universel . . . . .                                   | 90         |
| 6.1.4.2  | Classe d'obstruction relative . . . . .                          | 91         |
| 6.1.5    | Propriétés d'additivité . . . . .                                | 92         |
| 6.2      | L'application carré . . . . .                                    | 92         |
| 6.2.1    | Propriétés de l'application . . . . .                            | 92         |
| 6.2.2    | Revêtement universel et carré . . . . .                          | 94         |
| 6.3      | Propriétés de relèvement de chemin . . . . .                     | 96         |
| 6.3.1    | Relevé dans le cas hyperbolique . . . . .                        | 96         |
| 6.3.2    | Compatibilité avec l'application carré . . . . .                 | 97         |
| 6.4      | Composantes connexes . . . . .                                   | 101        |
| 6.4.1    | Décomposition de la surface . . . . .                            | 101        |
| 6.4.2    | Preuve du Théorème . . . . .                                     | 103        |
| 6.5      | Autres composantes et espace de Teichmüller . . . . .            | 104        |
| <b>7</b> | <b>Représentations de graphes</b>                                | <b>107</b> |
| 7.1      | Dessins de graphes . . . . .                                     | 107        |
| 7.1.1    | Définitions et notations . . . . .                               | 107        |
| 7.1.2    | Réalisation géométrique et plongement . . . . .                  | 108        |
| 7.1.3    | Nombre de croisements . . . . .                                  | 108        |
| 7.2      | Courbes sur la bouteille de Klein . . . . .                      | 110        |
| 7.3      | Représenter un graphe sur une sous-surface . . . . .             | 111        |
| 7.3.1    | Retirer un crosscap . . . . .                                    | 111        |
| 7.3.2    | Retirer deux crosscaps sur la bouteille de Klein . . . . .       | 113        |
| 7.4      | Estimer le nombre maximum de circuits arêtes-disjoints . . . . . | 114        |
| 7.4.1    | Étude des circuits à un seul côté . . . . .                      | 114        |
| 7.4.2    | Étude des a-circuits . . . . .                                   | 115        |
| 7.5      | Preuve du théorème . . . . .                                     | 117        |
|          | <b>Bibliographie</b>                                             | <b>123</b> |

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Chapitre 1

## Introduction

Les travaux de cette thèse portent principalement sur les espaces de représentations de groupes de surface dans des groupes de Lie et sur l'action naturelle du groupe modulaire sur ces espaces. En particulier, nous étudions la dynamique de cette action lorsque le groupe de Lie est  $SU(2)$  ; nous étudions également le nombre de composantes connexes de l'espace des représentations lorsque le groupe de Lie est  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Ces deux problèmes sont déjà très bien compris pour les surfaces orientables et la nouveauté des résultats présentés dans cette thèse vient du fait que nous considérons le cas des surfaces non-orientables.

Soit  $S$  une surface compacte de caractéristique d'Euler négative, et  $\pi = \pi_1(S)$  son groupe fondamental. L'ensemble  $\text{Hom}(\pi, G)$  des homomorphismes du groupe  $\pi$  dans un groupe de Lie  $G$  est appelé *espace des représentations*. Cet objet algébrique reflète à la fois la topologie de la surface  $S$  et les géométries associées au groupe  $G$ . L'espace  $\text{Hom}(\pi, G)$  possède des symétries naturelles issues des automorphismes de  $\pi$  et de  $G$ , c'est-à-dire une action de  $\text{Aut}(\pi) \times \text{Aut}(G)$  par composition. L'espace quotient de  $\text{Hom}(\pi, G)$  par l'action du groupe  $\text{Inn}(G)$  des automorphismes intérieurs de  $G$ , est appelé *espace de modules* et noté :

$$\mathfrak{X}(\pi, G) = \text{Hom}(\pi, G)/G.$$

L'action de  $\text{Inn}(\pi)$  étant triviale sur l'espace de modules, nous avons une action du groupe des automorphismes extérieurs  $\text{Out}(\pi)$ , qui s'identifie par un théorème classique de Nielsen et Mangler au groupe modulaire  $\Gamma_S = \pi_0(\text{Homeo}(S))$ .

La dynamique de cette action est l'objet de nombreux travaux récents (voir [32] pour un panorama du sujet), et exhibe des comportements très contrastés selon le choix du groupe  $G$ . Pour illustrer cette diversité, donnons deux exemples classiques fondamentaux :

- Lorsque  $M$  est une surface de Riemann orientable de genre  $g$ , le *Jacobien*  $\text{Jac}(M)$  est défini comme l'ensemble des fibrés en droites holomorphes sur  $M$  et il s'identifie à l'espace de modules  $\mathfrak{X}(\pi_1(M), U(1))$  (voir par exemple Narasimhan-Seshadri [64] ou Ramanathan [74]). Le groupe  $U(1)$  étant abélien, l'espace de modules s'identifie au tore  $\mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$ . L'action du groupe modulaire est exactement l'action du groupe symplectique  $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$  sur le tore, qui est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue. [30]
- A l'opposé, l'*espace de Teichmüller* d'une surface  $S$ , s'identifie naturellement (par le théorème d'uniformisation) à l'ensemble des classes d'équivalence des structures hyperboliques marquées sur  $S$ , qui correspond à l'ensemble des classes d'équivalence de

## 1. INTRODUCTION

---

représentations injectives et d'image discrète de  $\pi_1(S)$  dans  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ . Cet ensemble forme une composante connexe de l'espace de modules  $\mathfrak{X}(\pi_1(S), \mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}))$ , qui est homéomorphe à une cellule de dimension  $-3\chi(S)$ . Un résultat classique de Fricke [21] montre que l'action du groupe modulaire sur cette composante est proprement discontinue.

Nous voyons deux directions émerger de ces exemples, selon que le groupe  $G$  choisi est compact ou non-compact.

Lorsque  $G$  est compact, l'espace de modules  $\mathfrak{X}(S, G)$  a un type d'homotopie non-trivial et l'action du groupe modulaire a une dynamique non-triviale. Les propriétés ergodiques de cette action dans le cas orientable sont maintenant bien comprises. Les résultats correspondant au cas où  $S$  est une surface non-orientable sont nouveaux et occupent toute la première partie de cette thèse (Chapitres 3, 4 et 5). Une grande partie de ces résultats se trouve dans l'article [66] soumis pour publication.

Lorsque  $G$  est non-compact, l'espace  $\mathfrak{X}(S, G)$  contient des composantes connexes contractibles sur lesquels le groupe modulaire agit proprement. En général, ces composantes correspondent à des structures géométriques localement homogènes sur  $S$  (l'exemple fondamental est l'espace de Teichmüller qui correspond aux structures hyperboliques). La première difficulté est donc de connaître le nombre de composantes connexes de l'espace des représentations. Le Chapitre 6 est consacré à l'étude du nombre de composantes connexes de l'espace  $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$  lorsque  $S$  est une surface non-orientable. Ce résultat est l'objet principal d'un article soumis pour publication [67].

Le dernier chapitre de cette thèse est consacré à un résultat de théorie topologique des graphes, dont le thème est largement indépendant du reste de la thèse. Il porte sur les représentations optimales de graphes sur des surfaces non-orientables en particulier sur la bouteille de Klein. Il est le sujet d'un article à paraître, effectué en collaboration avec Laurent Beaudou, Antoine Gerbaud et Roland Grappe [2].

Entrons maintenant un peu plus en détail dans chacun des thèmes abordés.

### 1.1 Dynamique de l'action du groupe modulaire

Le résultat principal de l'article de W. Goldman [30], qui a servi de point de départ à notre étude, est l'ergodicité de l'action de  $\Gamma_\Sigma$  sur l'espace  $\mathfrak{X}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2))$  avec  $\Sigma$  une surface orientable fermée. Lorsque  $\Sigma$  est une surface à bord, le groupe modulaire fixe chaque composante de bord  $\partial_i S$ . Ainsi, pour chaque  $i$  on fixe une classe de conjugaison  $c_i \in [G]$  et on définit l'espace de modules relatif à  $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$  par :

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(\Sigma, G) = \{[\rho] \in \mathfrak{X}(\Sigma, G) \mid \rho(C_i) \in c_i\}.$$

Le groupe modulaire agit sur les espaces de modules relatifs. Lorsque  $G = \mathrm{SU}(2)$ , l'ensemble des classes de conjugaison est l'intervalle  $[-2, 2]$ . Le résultat de W. Goldman peut donc s'énoncer de la façon suivante :

**Théorème (Goldman [30])** *Soit  $\Sigma$  une surface orientable de genre  $g$  avec  $m$  composantes de bord et  $\chi(\Sigma) \leq -1$ . Soit  $\mathcal{C} \in [-2, 2]^m$ . Le groupe  $\Gamma_\Sigma$  agit de façon ergodique sur  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(\Sigma, \mathrm{SU}(2))$ .*

Le cas  $m = 0$  correspond à une surface fermée et dans ce cas le théorème montre l'ergodicité de l'action du groupe modulaire sur l'espace de modules  $\mathfrak{X}(\Sigma, \mathrm{SU}(2))$  tout entier.

Ce résultat a ensuite été généralisé par D. Pickrell et E.Z. Xia [68] lorsque  $G$  est un groupe compact connexe quelconque et que la surface est fermée et orientable, et également pour toute surface à bord orientable de genre  $g \geq 1$  [69].

Le point de vue topologique de la dynamique de ces actions est plus subtil puisque nous n'ignorons plus les sous-ensembles de mesure nulle. L'ergodicité assure que presque toutes les orbites sont denses et J. Previte et E.Z. Xia montrent dans [70, 71] qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une orbite  $\Gamma_\Sigma \cdot [\rho]$  soit dense est que l'image de  $\rho$  soit dense dans  $\mathrm{SU}(2)$ , lorsque la surface  $\Sigma$  est orientable de genre strictement positif. Cependant en genre 0, il existe des représentations  $\rho$  d'image dense mais dont l'orbite  $\Gamma_M \cdot [\rho]$  n'est constituée que de deux points [72].

Le premier résultat obtenu dans cette thèse est la généralisation du Théorème précédent aux surfaces non-orientables :

**Théorème 1** *Soit  $M$  une surface non-orientable de genre  $k$  avec  $m$  composantes de bord et  $\chi(M) \leq -2$ . Pour tout  $\mathcal{C} \in [-2, 2]^m$ , l'action du groupe modulaire sur  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(\pi_1(M), \mathrm{SU}(2))$  est ergodique.*

Ce résultat est l'objet principal des chapitres 3, 4 et 5 qui sont relativement indépendants entre eux. Nous commençons par la construction d'une mesure sur l'espace de modules, puis nous étudions les surfaces en petite caractéristique d'Euler en utilisant les coordonnées de la variété de caractères, et finalement nous décomposons une surface générale en sous-surfaces et étudions cette décomposition via le *flot de Goldman*.

### 1.1.1 Mesure sur l'espace de modules

Pour étudier les propriétés ergodiques de l'action de  $\Gamma_S$  sur les espaces  $\mathfrak{X}(S, G)$ , il est nécessaire de définir une mesure  $\Gamma_S$ -invariante sur  $\mathfrak{X}(S, G)$ . Dans le cas où  $S$  est une surface orientable fermée, W. Goldman [27] montre que l'espace de modules (ou en tout cas, sa partie lisse) possède une structure symplectique naturelle, invariante par l'action du groupe modulaire. Cette structure induit une forme volume et une mesure sur l'espace  $\mathfrak{X}(S, G)$ , qui est finie dans le cas où  $G$  est compact [43]. Cette structure est liée dans sa construction à l'existence d'une orientation sur la surface. Ainsi, dans le cas où la surface est non-orientable, l'espace  $\mathfrak{X}(S, G)$  ne possède pas de structure symplectique, la dimension de l'espace pouvant même être impaire.

Il est donc nécessaire de construire une mesure sur l'espace de modules invariante par l'action du groupe modulaire qui n'utilise pas l'orientabilité de la surface et qui corresponde dans le cas orientable à la structure symplectique (ou en tout cas, qui soit dans la même classe de mesure). Plusieurs formes volumes naturelles sur l'espace de modules ont été construites dans cette optique. Citons notamment la construction de Witten [82] qui utilise la torsion de Reidemeister, et celle de L. Jeffrey et N-K. Ho [39] basée sur des arguments plus géométriques liés à la mesure de Haar sur  $G$ . Dans le chapitre 3 nous utilisons les travaux de M. Mulase et M. Penkava [62] qui construisent un volume sur l'espace des représentations en passant par une distribution volume. L'idée est de prendre une mesure tirée-en-arrière de la mesure de Haar sur  $G$  par l'application présentation. Nous approfondissons cette construction pour construire une mesure  $\nu$  sur l'espace de modules et nous montrons le résultat suivant :

**Théorème 2** *Soit  $M$  une surface non-orientable fermée de genre  $k \geq 4$ . La mesure  $\nu$  sur  $\mathfrak{X}(\pi_1(M), \mathrm{SU}(2))$  est bien définie et invariante par l'action du groupe modulaire  $\Gamma_M$ .*

### 1.1.2 Variété de caractères

En général, les espaces  $\mathfrak{X}(\pi_1(S), G)$  ne sont pas des ensembles algébriques, et peuvent même ne pas être des espaces séparés. Cependant, dans le cas où  $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , l'espace de modules

## 1. INTRODUCTION

---

est très proche d'un ensemble algébrique  $X(\pi_1(S))$  appelé variété de caractères que nous introduisons au chapitre 4. Nous étudions tout d'abord le cas où le groupe fondamental  $\pi_1(S)$  est isomorphe à un groupe libre à deux ou trois générateurs (notés respectivement  $F_2$  et  $F_3$ ). L'étude de la variété de caractères  $X(F_2)$  remonte aux travaux de Fricke-Klein [21] et Vogt [81] (voir également [33] pour une exposition récente), qui nous disent que  $X(F_2)$  est isomorphe à l'espace affine  $\mathbb{C}^3$ . La variété de caractères  $X(F_3)$  est une hypersurface de  $\mathbb{C}^7$  donnée par une équation polynomiale (voir également Magnus [56] et Horowitz [42]). Une caractérisation des caractères correspondant aux représentations dans  $SU(2)$  est donnée dans [29] pour  $F_2$  et dans [3] pour  $F_3$  (voir également Morgan-Shalen [61]) et nous permet d'utiliser les coordonnées de la variété de caractère pour comprendre l'espace de modules  $\mathfrak{X}(F_2, SU(2))$ .

Une surface  $S$  telle que  $\pi_1(S) = F_2$  peut être de quatre types différents, deux étant orientables et deux étant non-orientables. Les twists de Dehn ont des expressions polynomiales dans les coordonnées de la variété de caractères, ce qui nous permet d'étudier explicitement la dynamique associée. Lorsque  $S$  est orientable ( $\Sigma_{0,3}$  et  $\Sigma_{1,1}$ ), l'ergodicité de l'action du groupe modulaire est étudiée dans l'article de Goldman [30]. Nous étendons l'étude aux surfaces non-orientables ( $N_{1,2}$  et  $N_{2,1}$ ), et nous montrons que l'action n'est pas ergodique dans ce cas en exhibant une fonction non-constante invariante par l'action du groupe modulaire.

Par ailleurs, une surface non-orientable telle que  $\pi_1(S) = F_3$  peut être de trois types différents (notés  $N_{1,3}$ ,  $N_{2,2}$  et  $N_{3,1}$ ). Comme dans le cas de  $F_2$  nous pouvons exprimer les twists de Dehn dans les coordonnées de la variété de caractères. Avec ces coordonnées, nous montrons le premier cas particulier du Théorème 1 sur le plan projectif à trois trous. Les cas des surfaces  $N_{2,2}$  et  $N_{3,1}$  est également étudié mais la démonstration complète de l'ergodicité dans ces cas là est effectuée dans le chapitre suivant.

Les représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $SU(2)$  ont un caractère réel. Cependant l'ensemble des caractères réels de l'espace des représentations  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{SL}(2, \mathbb{C}))$  contient également les caractères des représentations dans  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ . L'étude complète de l'action du groupe modulaire sur les caractères réels d'un tore à un trou est réalisée par Goldman dans [31]. Cette action est riche et fait apparaître à la fois des composantes où l'action est propre (qui correspondent à des espaces de structures hyperboliques sur la surface) et des composantes où l'action est ergodique, dont la composante contenant les représentations dans  $SU(2)$ . Il existe également des domaines errants correspondant aux espaces de structures hyperboliques sur une sphère à trois trous (qui a le même groupe fondamental que le tore à un trou).

L'étude dans le cas où le groupe  $G = \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ , réalisée par W. Goldman, G. Stanchev, G. McShane et S-P. Tan [35] [34], fait également apparaître des domaines errants qui correspondent dans ce cas aux espaces de structures hyperboliques sur des surfaces non-orientables ayant le même groupe fondamental que le tore à un trou, c'est-à-dire le plan projectif à deux trous et la bouteille de Klein à un trou.

Le cas de la surface non-orientable de genre trois  $N_3$  semble faire apparaître le même type de comportement. A partir des résultats sur la variété de caractères, nous obtenons le résultat suivant qui exprime la variété de caractères comme une hypersurface de  $\mathbb{C}^4$  :

**Proposition 3** *L'application*

$$X(\pi_1(N_3)) \longrightarrow \mathbb{C}^4$$

$$[\rho] \longmapsto \begin{bmatrix} \text{tr}(\rho(A)) \\ \text{tr}(\rho(B)) \\ \text{tr}(\rho(C)) \\ \text{tr}(\rho(ABC)) \end{bmatrix}$$

## 1.1 Dynamique de l'action du groupe modulaire

est injective. Son image est l'ensemble des  $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$  satisfaisant l'équation :

$$2(a^2 + b^2 + c^2 - 4) - abcd = 0. \quad (1.1.1)$$

En étudiant  $\Gamma_{N_3}$  le groupe modulaire de la surface  $N_3$  nous observons que la coordonnée  $d$  est invariante par l'action de  $\Gamma_{N_3}$ . En particulier, cela nous permet d'affirmer que l'action de  $\Gamma_{N_3}$  n'est pas ergodique sur  $\mathfrak{X}(N_3, \mathrm{SU}(2))$ . Néanmoins, le groupe modulaire agit sur les ensembles de niveau  $f_D^{-1}(d)$  et il est intéressant d'étudier les ensembles de niveau correspondant aux caractères réels en considérant l'ensemble  $V_d = f_D^{-1}(d) \cap \mathbb{R}^3$ . Lorsque  $d \in ]-2, 2[$  l'espace  $V_d$  possède une composante connexe compacte contenue dans  $[-2, 2]^3$ . Nous montrons le résultat suivant :

**Théorème 4** *Pour tout  $d \in [-2, 2] \setminus \{0\}$ , l'action du groupe modulaire  $\Gamma_{N_3}$  sur l'ensemble  $V_d \cap [-2, 2]^3$  est ergodique.*

Dans le cas où  $d = 0$ , nous montrons que les orbites sont finies et donc que l'action n'est pas ergodique.

### 1.1.3 Flot de Goldman

Dans [28], W. Goldman définit une  $\mathbb{R}$ -action sur l'espace  $\mathfrak{X}(S, G)$ , en partant d'une courbe fermée simple  $\gamma$  sur une surface  $S$  et d'une fonction  $f$  qui est  $G$ -invariante. Cette  $\mathbb{R}$ -action correspond au flot hamiltonien associé à la fonction  $f_\gamma : [\rho] \mapsto f(\rho(\gamma))$  définie sur  $\mathfrak{X}(\pi_1(S), G)$ .

L'exemple classique d'une fonction invariante sur un groupe de Lie est la fonction trace  $\mathrm{tr}(g)$ . Le flot de Goldman pour une fonction  $G$ -invariante quelconque est périodique sur chaque orbite, mais les périodes diffèrent généralement d'une orbite à l'autre. Dans [46], en travaillant avec une surface orientable et le groupe  $G = \mathrm{SU}(2)$ , L. Jeffrey et J. Weitsman considèrent la fonction invariante  $\cos^{-1}(\mathrm{tr}(g)/2)$ . Le flot de Goldman associé est alors périodique avec la même période pour chaque orbite. Cependant, le flot n'est défini que sur un ouvert dense de l'espace de modules, mais cela n'aura pas d'incidence sur les propriétés ergodiques qui sont définies presque partout. La construction du flot de Goldman sur l'espace de modules associé à une surface non-orientable est en partie présentée par D. Klein [48], et nous donnons au Chapitre 5 une construction générale sans supposer l'orientabilité.

L'intérêt principal de cette notion dans notre étude est de pouvoir exprimer le twist de Dehn selon une courbe en fonction du flot défini par cette courbe. Les orbites du flot sont homéomorphes à des cercles, et le twist de Dehn agit comme une rotation sur ces cercles dont l'angle dépend essentiellement de l'orbite sur laquelle on se place, mais également de la nature de la courbe (séparante ou non-séparante). Pour presque toute orbite, cet angle est un multiple irrationnel de  $\pi$  et la rotation est donc ergodique. Ceci nous permet d'étudier la décomposition ergodique de l'espace de modules par rapport à l'action du twist de Dehn.

En utilisant une courbe particulière sur une surface non-orientable, nous nous ramenons aux cas déjà étudiés qui sont les surfaces orientables et la surface  $N_{1,3}$ . En regroupant les résultats, nous montrons le Théorème 1.

La condition  $\chi(M) \leq -2$  apparaissant dans le théorème est optimale, puisque l'action n'est jamais ergodique pour les surfaces non-orientables de caractéristique  $\chi(M) = -1$ .

Récemment, Goldman et Xia [36] ont donné une nouvelle preuve de l'ergodicité dans le cas orientable en utilisant les travaux de Procesi [73] sur les variétés de caractères. La variété de caractères est engendrée par les fonctions traces, et l'expression des twists de Dehn en fonction des flots de Goldman associés aux fonctions traces leur permet de conclure. Il serait intéressant de donner une interprétation de cette preuve dans le cas non-orientable.

## 1. INTRODUCTION

---

### 1.2 Composantes connexes

Le second travail de cette thèse a porté sur une des propriétés topologiques les plus simples des espaces de représentations, c'est-à-dire le nombre de composantes connexes.

#### 1.2.1 Classe d'obstruction

Lorsque  $G$  est un groupe connexe, une représentation  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow G$  détermine un  $G$ -fibré plat principal sur  $S$ . Ce fibré fait apparaître une classe d'obstruction dans  $H^2(S, \pi_1(G))$  (voir par exemple Steenrod [77] pour une introduction à la théorie de l'obstruction) qui nous donne une application d'obstruction :

$$o_2 : \text{Hom}(\pi_1(S), G) \longrightarrow H^2(S, \pi_1(G)).$$

Cette classe mesure l'obstruction qui existe pour relever une représentation dans  $G$  en une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\tilde{G}$ , le revêtement universel de  $G$ . L'application  $o_2$  est continue et son image est un groupe discret, elle est donc constante sur chaque composante connexe de l'espace des représentations. La question principale est de connaître, pour un élément  $h \in H^2(S, \pi_1(G))$ , le nombre de composantes connexes de l'ensemble  $o_2^{-1}(h)$ .

Le problème est entièrement résolu pour certains groupes de Lie, citons notamment le cas où  $G$  est un groupe compact connexe : les résultats de Jun Li [52] dans le cas orientable et de Nan-Kuo Ho et Chiu-Chu Melissa Liu [40, 41] dans le cas non-orientable se résument de la façon suivante :

**Théorème (J. Li [52], N. Ho et C. Liu [40, 41])** *Soit  $S$  une surface fermée de caractéristique d'Euler  $\chi(S) \leq -1$ , et  $G$  un groupe de Lie compact connexe. Pour tout  $h \in H^2(S, \pi_1(G))$ , l'ensemble  $o_2^{-1}(h)$  est non-vide et connexe. En particulier, l'application  $o_2$  induit une bijection entre les composantes connexes de  $\text{Hom}(\pi_1(S), G)$  et le groupe  $H^2(S, \pi_1(G))$ .*

Le théorème similaire lorsque  $G$  est un groupe de Lie complexe semi-simple a également été montré par Jun Li dans le même article [52] pour une surface orientable. Lorsque la surface est non-orientable et  $G$  complexe semi-simple, aucun résultat n'est connu à ce jour.

La situation apparaît plus compliquée lorsque  $G$  est une forme réelle non-compacte d'un groupe de Lie complexe semi-simple. L'exemple fondamental est le groupe  $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  qui correspond au groupe des isométries du plan hyperbolique préservant l'orientation. Le groupe fondamental de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  est cyclique infini  $\pi_1(\text{PSL}(2, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}$ . Lorsque  $\Sigma$  est une surface orientable, l'application  $o_2$  prend ses valeurs dans  $H^2(\Sigma, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  et correspond à la classe d'Euler du fibré en cercles induit par le  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ -fibré. La classe d'Euler nous donne une application  $e : \text{Hom}(\pi_1(\Sigma), \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \longrightarrow \mathbb{Z}$ .

L'inégalité de Milnor-Wood établit que l'ensemble  $e^{-1}(n)$  est vide lorsque  $|n| > |\chi(\Sigma)|$ . Dans [29], Goldman a montré que lorsque  $|n| \leq |\chi(\Sigma)|$ , l'ensemble  $e^{-1}(n)$  est connexe. Ainsi l'espace des représentations  $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  a exactement  $2\chi(M) + 1$  composantes connexes indexées par la classe d'Euler. Les deux composantes de classes d'Euler maximales correspondent aux représentations fidèles et discrètes et s'identifient à des copies de l'espace de Teichmüller de  $\Sigma$ .

Ces résultats pour  $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  peuvent se généraliser dans deux grandes directions lorsque la surface est orientable. La première consiste à considérer les représentations dans  $\text{SL}(n, \mathbb{R})$  et  $\text{PSL}(n, \mathbb{R})$ . En utilisant des fibrés de Higgs, Hitchin [38] a compté le nombre de composantes connexes et a également identifié une composante homéomorphe à  $\mathbb{R}^{\dim G(2g-2)}$  qui contient une copie de l'espace de Teichmüller, appelée composante de Hitchin. Cette composante

possède des propriétés géométriques importantes, par exemple dans le cas  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ , Choi et Goldman [13, 14] ont montré que les représentations de la composante de Hitchin sont fidèles et discrètes et correspondent à des structures projectives convexes sur la surface. Plus récemment, Labourie [50] a montré que ces représentations sont liées à des structures Anosov sur la surface. Des résultats similaires ont été obtenus par Burger, Iozzi, Labourie et Wienhard [9] dans le cas  $G = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ .

La deuxième direction consiste à remarquer que l'espace homogène associé à  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  est symétrique hermitien. En effet  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$  est identifié avec le plan hyperbolique. De façon plus générale, lorsque  $G$  est un groupe de Lie tel que l'espace homogène associé est hermitien, la partie sans torsion de  $\pi_1(G)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , et l'application  $o_2$  prend une valeur entière appelée invariant de Toledo [80]. Cet invariant satisfait également une inégalité de type Milnor-Wood, et l'étude du nombre de composantes ayant un invariant maximal est l'objet des travaux de Burger, Iozzi et Wienhard [10, 11] en utilisant des méthodes cohomologiques et également de Bradlow, Garcia-Prada, Gothen et Mundet y Riera [5, 6, 7, 8] en utilisant les méthodes des fibrés de Higgs.

### 1.2.2 Résultats obtenus

Les travaux effectués dans cette thèse concernent le cas où  $M$  est une surface non-orientable et  $G$  est le groupe  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Dans ce cas, l'application  $o_2$  prend ses valeurs dans  $H^2(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , et nous l'appelons classe de Stiefel-Whitney d'une représentation. Le résultat nouveau que nous établissons au Chapitre 6 est le suivant :

**Théorème 5** *Soit  $M$  une surface non-orientable fermée avec  $\chi(M) \leq -1$ . L'ensemble  $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$  possède exactement deux composantes connexes correspondant aux ensembles  $o_2^{-1}(n)$  avec  $n \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .*

La preuve de ce résultat se base en partie sur une étude de l'application carrée :

$$\begin{aligned} \tilde{Q} : \tilde{G} &\rightarrow \tilde{G} \\ A &\longmapsto A^2. \end{aligned}$$

L'image de l'application relevée  $\tilde{Q}$  est connexe et sous certaines conditions naturelles les chemins dans l'image de  $\tilde{Q}$  peuvent se relever par l'application  $\tilde{Q}$ .

Une surface non-orientable se décompose en la somme connexe d'une surface orientable et d'un ou deux plans projectifs. Ceci nous permet d'utiliser les résultats connus sur la classe d'Euler, notamment l'existence de chemins reliant deux représentations d'un groupe de surface orientable ayant la même classe d'Euler. En combinant cela avec les résultats sur l'application  $\tilde{Q}$  nous exhibons un chemin reliant deux représentations du groupe de la surface non-orientable ayant la même classe de Stiefel-Whitney, prouvant ainsi que les fibres de  $o_2$  sont connexes.

### 1.2.3 Autres composantes

L'espace de Teichmüller d'une surface non-orientable  $N$ , n'est pas inclus dans l'espace  $\mathfrak{X}(N, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ . En effet, l'holonomie d'une structure hyperbolique le long d'une courbe à un seul coté est donnée par une isométrie qui renverse l'orientation, et donc l'espace de Teichmüller est un sous-ensemble de  $\mathfrak{X}(N, \mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}))$ . De plus, l'espace de Teichmüller est une composante connexe de cet espace de modules.

## 1. INTRODUCTION

---

Il serait intéressant de connaître le nombre de composantes connexes de  $\text{Hom}(\pi_1(N), \text{PGL}(2, \mathbb{R}))$ . Le groupe  $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$  n'étant pas connexe, nous avons une première obstruction non-triviale dans  $H^1(N, \pi_0(\text{PGL}(2, \mathbb{R}))) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$  qui induit une application :

$$o_1 : \text{Hom}(\pi_1(N), \text{PGL}(2, \mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k.$$

L'espace  $\text{Hom}(\pi_1(N), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  est exactement la fibre  $o_1^{-1}(0, \dots, 0)$  tandis que l'espace de Teichmüller est inclus dans  $o_1^{-1}(1, \dots, 1)$ . Dans le cas d'une surface orientable  $\Sigma$ , E.Z. Xia [83] obtient que  $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), \text{PGL}(2, \mathbb{R}))$  possède  $2^{|\chi(\Sigma)|+3} + 2|\chi(\Sigma)| - 1$ . Nous conjecturons que la formule est la même dans le cas d'une surface non-orientable, et nous obtenons le résultat partiel suivant :

**Proposition 6** *Soit  $N$  une surface non-orientable fermée de genre  $k \geq 3$ . L'espace  $\text{Hom}(\pi_1(N), \text{PGL}(2, \mathbb{R}))$  a au moins  $2^k + 1$  composantes connexes.*

## Chapitre 2

# Préliminaires

*Si vous touchez aux maths,  
vous ne devez être ni pressés, ni cupides,  
fussiez-vous roi ou reine.*  
– Euclide

### 2.1 Surfaces

Nous commençons par faire quelques rappels sur la topologie des surfaces, en particulier sur les surfaces non-orientables. Une exposition complète de la théorie des variétés de dimension deux peut être trouvée dans de nombreux livres de topologie. Citons notamment [58] et [78]

#### 2.1.1 Classification des surfaces

Rappelons tout d'abord la définition classique d'une surface :

**Définition 2.1.1** *Une surface est un espace topologique séparé dans lequel chaque point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert du demi-espace supérieur de l'espace euclidien, noté  $H^2 = \{(x, y) | y \geq 0\}$ .*

Les homéomorphismes intervenant dans la définition sont appelés des *cartes locales*. Le bord de  $H^2$  est la droite  $y = 0$ , et l'ensemble des points de la surface qui sont envoyés sur le bord de  $H^2$  par une carte locale est appelé le *bord de  $S$* , noté  $\partial S$ . Le bord de  $S$  est une 1-variété, c'est donc une union disjointe d'ensembles homéomorphes à des cercles  $\mathbb{S}^1$ . Chacun de ces cercles sera désigné comme une *composante de bord* de  $S$ , et sera noté  $\partial_i S$  avec  $i \in \mathbb{N}$ .

Dans tout le reste de cette thèse, on s'intéressera seulement aux surfaces compactes et connexes, considérées à homéomorphisme près. Une surface est *fermée* si son bord est vide, et c'est une *surface-à-bord* si son bord est non-vide.

Le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  possède une orientation qui induit une orientation sur le demi-espace supérieur. Cette orientation fournit une orientation locale sur les voisinages de chaque point de la surface par les cartes locales. On dit qu'une surface est *orientable* si il existe un système de cartes locales tel que l'orientation soit définie de façon consistante sur la surface toute entière, et *non-orientable* sinon.

Nous donnons les premiers exemples basiques de surfaces :

## 2. PRÉLIMINAIRES

---

- la sphère  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  qui est une surface orientable ;
- le tore  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  qui est une surface orientable ;
- le plan projectif réel  $\mathbb{R}P^2$  défini comme le quotient de  $\mathbb{S}^2$  par la relation d'équivalence qui identifie deux points diamétralement opposés. Le plan projectif est une surface non-orientable.

A partir de deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , nous pouvons construire une nouvelle surface définie comme la *somme connexe* de  $S_1$  et  $S_2$ , notée  $S_1 \# S_2$ . Pour cela, nous retirons un disque de chaque surface et recollons les cercles correspondant par un homéomorphisme (voir [58] pour une exposition plus complète).

Avec les trois surfaces définies ci-dessus et l'opération de somme connexe, nous sommes capables de construire toutes les surfaces à homéomorphisme près. Nous rappelons la classification des surfaces fermées :

**Théorème 2.1.2** *Toute surface fermée est homéomorphe à une (et une seule) des surfaces suivantes :*

- la sphère  $\mathbb{S}^2$  ;
- la somme connexe de  $g$  tores, avec  $g \geq 1$  que l'on notera  $\Sigma_g = \#_g(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$  ;
- la somme connexe de  $k$  plans projectifs, avec  $k \geq 1$ , que l'on notera  $N_k = \#_k \mathbb{R}P^2$ .

Une surface est non-orientable si et seulement si elle appartient à la dernière catégorie. Une somme connexe de tores et de plans projectif est une surface non-orientable et est donc homéomorphe à une somme connexe de plans projectifs uniquement. En effet, il existe un homéomorphisme (voir [58]) entre la somme connexe de trois plans projectifs et la somme connexe d'un plan projectif et d'un tore. Géométriquement, faire la somme connexe avec un tore revient à ajouter une anse dont les deux bouts sont attachés au même côté de la surface, tandis que faire la somme connexe avec une bouteille de Klein revient à ajouter une anse dont les deux bouts sont attachés aux côtés opposés de la surface. Si la surface de départ contient un plan projectif, il n'y a pas de notion de côté, et les deux constructions sont équivalentes. Nous obtenons donc les identifications suivantes selon la parité de  $k$  :

$$\begin{aligned} N_{2g+1} &= \Sigma_g \# N_1, \\ N_{2g+2} &= \Sigma_g \# N_2. \end{aligned}$$

**Définition 2.1.3** *Le genre d'une surface est le nombre maximal de tores ou de plans projectifs intervenant dans une décomposition en somme connexe.*

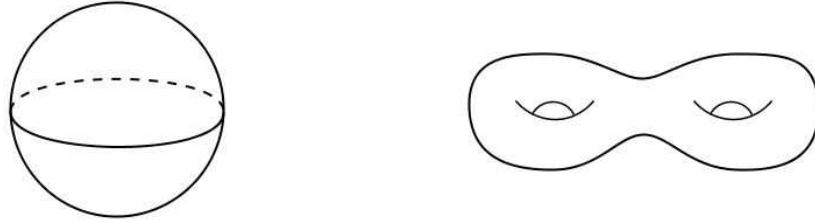
Nous obtenons facilement que le genre de la surface  $\Sigma_g$  est  $g$  et le genre de la surface  $N_k$  est  $k$ . Par extension, le genre de la sphère est 0, et la sphère étant orientable elle sera notée  $\Sigma_0$ .

La caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface se calcule directement à partir de son genre :

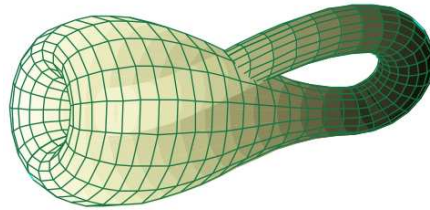
$$\begin{aligned} \chi(\Sigma_g) &= 2 - 2g, \\ \chi(N_k) &= 2 - k. \end{aligned}$$

Une surface orientable se plonge naturellement dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . La représentation graphique usuelle d'une surface orientable est simplement la projection d'un plongement.

Les surfaces non-orientables au contraire, n'admettent pas de plongement dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Une méthode de représentation graphique consiste à considérer une immersion de la surface dans l'espace et de représenter cette immersion comme pour une surface orientable. Cependant,



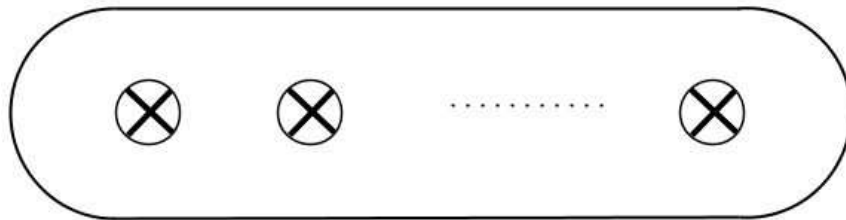
**Figure 2.1:** Sphère et surface orientable de genre 2 plongée dans  $\mathbb{R}^3$



**Figure 2.2:** Immersion d'une bouteille de Klein dans  $\mathbb{R}^3$

cette représentation s'avère inadéquate et trompeuse pour représenter les choses à cause des auto-intersections de la surface.

Nous utiliserons donc la représentation d'un plan projectif comme un *crosscap*, en utilisant la remarque suivante. Le plan projectif est défini comme la sphère dont on identifie les points diamétralement opposés. En coupant le long de l'équateur, nous voyons que le plan projectif est également homéomorphe à un disque fermé dont on identifie les points du bord diamétralement opposés, qu'on appellera un *crosscap*. La surface non-orientable de genre  $k$  est donc homéomorphe à une sphère dont on enlève  $k$  disques ouverts en identifiant les points diamétralement opposés du bord de ces disques. On représentera un crosscap par un cercle marqué d'une croix comme sur la figure suivante.



**Figure 2.3:** Représentation d'une surface non-orientable

Toute surface à bord s'obtient en retirant une union disjointe de disques ouverts d'une surface fermée. On note  $\Sigma_{g,m}$  la surface orientable de genre  $g$  avec  $m$  composantes de bord. De même  $N_{k,m}$  désignera la surface non-orientable de genre  $k$  avec  $m$  composantes de bord. La

## 2. PRÉLIMINAIRES

---

caractéristique d'Euler d'une surface à bord est

$$\chi(\Sigma_{g,m}) = 2 - 2g - m \quad (2.1.1)$$

$$\chi(N_{k,m}) = 2 - k - m. \quad (2.1.2)$$

Usuellement, nous appellerons *ruban de Möbius* la surface  $N_{1,1}$ , et *bouteille de Klein* la surface fermée  $N_2$ .

### 2.1.2 Courbes sur la surface

Une courbe sur la surface  $S$  est une application continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ . La courbe est *simple* si l'application est injective, et *fermée* si  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Dans toute la suite, on confondra une courbe et son image dans  $M$ . Une courbe simple fermée est également appelé un *cercle* et s'identifie à une sous-variété fermée 1-dimensionnelle de  $S$ . Un cercle est dit *à deux côtés* si un voisinage régulier de la courbe dans  $S$  est homéomorphe à un cylindre, et il est dit *à un seul côté* si un voisinage régulier est homéomorphe à un ruban de Möbius. Les cercles à un seul côté n'apparaissent que dans les surfaces non-orientables comme le montre la caractérisation suivante :

**Proposition 2.1.4** *Une surface  $S$  est non-orientable si et seulement si il existe une courbe à un seul côté dans  $S$ .*

Si  $\gamma$  est un cercle à deux côtés sur  $S$ , on note  $S|\gamma$  la surface obtenue en coupant  $S$  le long de  $\gamma$ . Formellement,  $S|\gamma$  est la surface à bord pour laquelle il y a une application d'identification  $i_\gamma : S|\gamma \rightarrow S$  satisfaisant les conditions suivantes :

- la restriction de  $i_\gamma$  à  $i_\gamma^{-1}(S \setminus \gamma)$  est un difféomorphisme ;
- la fibre  $i_\gamma^{-1}(\gamma)$  est constituée de deux composantes  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  dans le bord  $\partial S$ , telles que la restriction de  $i_\gamma$  à chacune d'elles est un difféomorphisme sur  $\gamma$ .

Un cercle est appelé *non-séparant* si la surface  $S|\gamma$  est connexe, et *séparant* si la surface  $S|\gamma$  possède deux composantes connexes. Une courbe est *essentielle* si elle n'est pas contractible dans  $S$ . Un cercle séparant est dit *trivial* si l'une des deux composantes est un disque, un cylindre ou un ruban de Möbius.

On peut classer les courbes sur certaines surfaces selon leurs propriétés. Nous donnons quelques exemples :

Toutes les courbes fermées simples sur  $\mathbb{S}^2$  sont contractibles et homotopes deux à deux. Sur le plan projectif, il existe une seule classe d'homotopie de courbe fermée simple essentielle, qui correspond à un cercle à un seul côté.

Pour la bouteille de Klein  $N_2$ , la classification des courbes fermées simples est donnée par le résultat suivant dû à Lawrencenko et Negami [51] :

**Théorème 2.1.5** *Une courbe fermée simple essentielle sur  $N_2$  est homotope à l'une des quatres courbes  $\{a, b, m, e\}$  définies par :*

- les éléments  $a$  et  $b$  sont deux cercles à un seul côté disjoints ;
- l'élément  $m$  correspond à un cercle à deux côtés non-séparant ;
- l'élément  $e$  correspond à un cercle à deux côtés séparant.

Cette classification pour la bouteille de Klein nous permettra d'établir le Théorème principal du chapitre 7. Pour toutes les autres surfaces (orientables ou non), il y a une infinité de classe d'homotopie de courbe fermée simple essentielle.

### 2.1.3 Groupe fondamental

Soit  $p$  un point de la surface  $S$ . Le groupe fondamental basé en  $p$ , noté  $\pi_1(S, p)$ , est le groupe des classes d'homotopie de courbes fermées basées en un point  $p$ . Lorsque  $S$  est connexe par arcs, deux groupes fondamentaux basés en  $p$  et  $q$  sont isomorphes. Ainsi, par abus de langage, les surfaces considérées ici étant connexes par arcs nous parlerons du groupe fondamental  $\pi_1(S)$  sans préciser le point base.

Nous rappelons que le groupe fondamental de la sphère est trivial et que celui de la surface orientable de genre  $g$  est donné par la présentation suivante :

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle X_1, Y_1, \dots, X_g, Y_g \mid [X_1, Y_1] \cdots [X_g, Y_g] \rangle$$

où  $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$  est le *commutateur* de  $A$  et  $B$ .

Le plan projectif est obtenu en identifiant les points diamétralement opposés du bord d'un disque, ou de façon équivalente, en recollant les deux arêtes du digone suivant conformément aux notations.

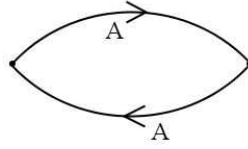


Figure 2.4: Le digone

La surface non-orientable de genre  $k$  est la somme connexe de  $k$  plans projectifs. Elle s'obtient donc à partir du  $2k$ -gone suivant, en recollant les arêtes orientées conformément aux notations.

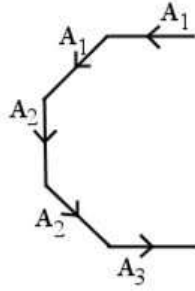


Figure 2.5: Le  $2k$ -gone

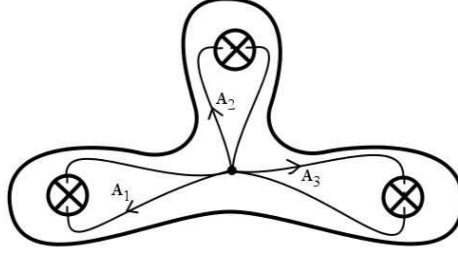
Le groupe fondamental de la surface  $N_k$  admet donc la présentation suivante :

$$\pi_1(N_k) = \langle A_1, \dots, A_k \mid A_1^2 \cdots A_k^2 \rangle.$$

Les arêtes  $A_i$  se lisent sur la représentation graphique de la surface comme indiquées sur la Figure 2.6.

## 2. PRÉLIMINAIRES

---



**Figure 2.6:** Courbes sur la surface

Nous pouvons également utiliser les identités (2.1.1) et (2.1.2) pour obtenir la présentation suivante du groupe fondamental :

$$\begin{aligned}\pi_1(N_{2g+1}) &= \langle X_1, Y_1, \dots, X_g, Y_g, A \mid [X_1, Y_1] \cdots [X_g, Y_g] A^2 \rangle, \\ \pi_1(N_{2g+2}) &= \langle X_1, Y_1, \dots, X_g, Y_g, A, B \mid [X_1, Y_1] \cdots [X_g, Y_g] A^2 B^2 \rangle.\end{aligned}$$

Pour une surface non-orientable de genre  $k$  avec  $m$  composantes de bord notées  $\partial_1 S, \dots, \partial_m S$ . Le groupe fondamental admet la présentation géométrique suivante :

$$\pi_1(N_{k,m}) = \langle A_1, \dots, A_k, C_1, \dots, C_m \mid A_1^2 \cdots A_k^2 C_1 \cdots C_m \rangle$$

Les éléments  $C_1, \dots, C_m$  correspondent aux classes d'homotopie des cercles correspondant aux composantes de bord. Chaque  $\partial_i S$  étant homéomorphe à un cercle, le groupe fondamental  $\pi_1(\partial_i S)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . L'inclusion  $\pi_1(\partial_i S) = \mathbb{Z} \hookrightarrow \pi_1(S)$  envoie un générateur de  $\mathbb{Z}$  sur  $C_i$ .

Nous remarquons que si  $m \neq 0$ , le groupe fondamental est libre en  $k + m - 1$  générateurs.

## 2.2 Groupe Modulaire

### 2.2.1 Définitions

Commençons par la définition suivante :

**Définition 2.2.1** *Le groupe modulaire  $\Gamma_N$  d'une surface non-orientable  $N$  est défini comme le groupe des classes d'isotopie des homéomorphismes de  $N$ .*

Le groupe modulaire  $\Gamma_\Sigma$  d'une surface orientable  $\Sigma$  est défini habituellement comme le groupe des classes d'isotopie des homéomorphismes préservant l'orientation. Si on considère tous les homéomorphismes, on obtient le *groupe modulaire étendu* que l'on notera  $\Gamma_\Sigma^\circ$ . Nous pouvons également étendre cette notion aux surfaces non-orientables en posant  $\Gamma_N^\circ = \Gamma_N$ .

**Définition 2.2.2** *Lorsque la surface  $S$  a un bord non-vide avec des composantes de bord  $\partial_i S$ , le groupe modulaire est défini comme le sous-groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes (préservant l'orientation si la surface est orientable) qui sont l'identité sur chaque composante de bord  $\partial_i S$ .*

Il est important de noter que dans cette définition, les isotopies qui définissent les classes d'équivalence ne sont pas forcément l'identité sur chaque composante de bord (en particulier, les twists de Dehn selon des courbes homotopes aux composantes de bord sont triviaux).

**Remarque 2.2.3** *Dans une partie de la littérature, le groupe défini ci-dessus est appelé groupe modulaire pur. Le groupe modulaire est défini sans fixer le comportement des homéomorphismes sur le bord et contient le groupe modulaire pur comme sous-groupe. Cette définition est plus générale mais n'intervient pas dans notre étude et nous simplifions donc les notations.*

Soit  $S$  une surface et  $x_0$  un point base. Un homéomorphisme  $h : S \rightarrow S$  définit une équivalence d'homotopie et donc un automorphisme  $h_* : \pi_1(S, x_0) \rightarrow \pi_1(S, x_0)$ . Cependant, si le point base  $x_0$  n'est pas fixé, alors l'automorphisme  $h_*$  n'est bien défini qu'à un automorphisme intérieur de  $\pi_1(S)$  près. De plus tout homéomorphisme de  $S$  est isotope à un isomorphisme qui fixe un point.

Ceci nous donne un homomorphisme naturel  $\Gamma_S^\circ \rightarrow \text{Out}(\pi_1(S))$ . Lorsque le bord de  $S$  est non-vide, les éléments de l'image de cet homomorphisme préservent la classe de conjugaison de chaque sous-groupe cyclique correspondant à une composante de bord.

**Théorème 2.2.4** *Soit  $S$  une surface fermée qui n'est pas homéomorphe à une sphère. L'homomorphisme naturel  $\Gamma_S^\circ \rightarrow \text{Out}(\pi_1(S))$  est un isomorphisme.*

Lorsque  $S$  est une surface orientable, ce résultat est dû à Dehn et Nielsen [65] (voir [20, 44] pour une exposition plus récente). Lorsque la surface est non-orientable il est dû à Mangler [57].

Le groupe modulaire d'une surface orientable est un sous-groupe d'indice deux dans  $\text{Out}(\pi_1(\Sigma))$ , que l'on notera  $\text{Out}^+(\pi_1(\Sigma))$ . Dans le cas d'une surface non-orientable, un sous-groupe d'indice deux de  $\Gamma_N = \text{Out}(\pi_1(N))$  analogue est donné par le *sous-groupe des twists* défini un peu plus loin.

## 2.2.2 Générateurs du groupe modulaire

Les exemples principaux d'éléments non-triviaux du groupe modulaire d'une surface non-orientable sont les twists de Dehn et les crosscap slides. Ces éléments vont constituer un ensemble générateur du groupe modulaire.

### 2.2.2.1 Twists de Dehn

Nous définissons ici le twist de Dehn comme la classe d'isotopie d'un homéomorphisme particulier d'une surface  $S$ .

Soit  $\gamma$  un cercle à deux côtés sur  $S$  et  $U$  un voisinage régulier de  $\gamma$  dans  $S$ . Par définition  $U$  est un cylindre homéomorphe à  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$  et on choisit des coordonnées  $(s, t)$  sur ce cylindre. Soit  $\tau$  le difféomorphisme de  $S$  qui est l'identité sur le complémentaire de  $U$  et qui est défini dans  $U$  par la fonction sur les coordonnées :

$$\tau(s, t) = (se^{2i\pi t}, t).$$

Ce difféomorphisme préserve l'orientation du cylindre  $U$ . Ainsi lorsque  $S$  est une surface orientable, ce difféomorphisme préserve l'orientation de la surface. La classe d'isotopie de ce difféomorphisme est un élément de  $\Gamma_S$  appelé *twist de Dehn* selon  $\gamma$  et noté  $\tau_\gamma$ .

**Remarque 2.2.5** *Cette définition n'a pas de sens si  $\gamma$  est une courbe à un seul côté.*

## 2. PRÉLIMINAIRES

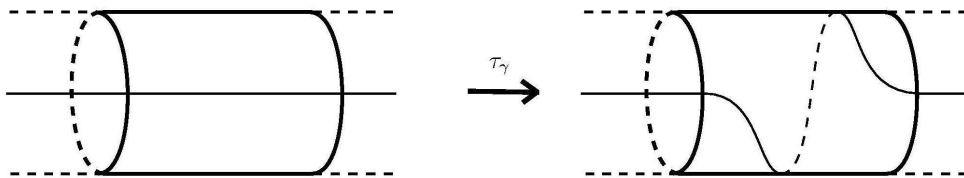


Figure 2.7: Twist de Dehn

Si  $\gamma$  borde un disque, un ruban de Möbius ou bien est homotope à une composante de bord, alors le twist de Dehn  $\tau_\gamma$  est trivial dans  $\Gamma_S$ .

### 2.2.2.2 Crosscap slides

Prenons un ruban de Möbius  $M$  avec un trou, c'est à dire un plan projectif à deux trous. On attache un autre ruban de Möbius  $N$  le long de l'une des composantes de bord de  $M$ . La surface  $K$  ainsi obtenue est une bouteille de Klein à un trou. En faisant glisser  $N$  une fois le long de l'âme de  $M$  (c'est à dire la courbe à un seul côté faisant le tour du ruban de Möbius), nous obtenons un difféomorphisme  $y_K$  de  $K$  qui fixe la composante de bord de  $K$  (cf. la Figure 2.8 ci-dessous). Supposons que ce difféomorphisme est l'identité sur un voisinage du bord de  $K$ . Si  $K$  est plongée dans une surface  $S$ , on peut définir  $y$  comme le difféomorphisme de  $S$  qui est l'identité sur le complémentaire de  $K$  et qui est donné par  $y_K$  à l'intérieur de  $K$ . La classe d'isotopie de  $y$  est appelée un *crosscap slide*. Il est intéressant de noter que l'élément du groupe modulaire  $y^2$  est égal au twist de Dehn selon le bord de  $K$ .

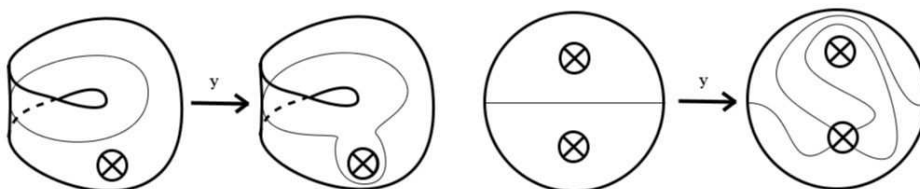


Figure 2.8: Un crosscap slide

**Remarque 2.2.6** *Un crosscap slide n'est défini que pour une surface non-orientable de genre supérieur à deux.*

### 2.2.2.3 Théorème de Dehn-Lickorish

Le théorème suivant est dû à Dehn [17] dans le cas orientable et Lickorish [53] dans le cas non-orientable.

**Théorème 2.2.7** Soit  $S$  une surface fermée qui n'est pas homéomorphe à  $N_1$ . Le groupe engendré par les twists de Dehn est un sous-groupe d'indice deux dans  $\Gamma_S^o$ .

En particulier lorsque  $S$  est une surface orientable, les twists de Dehn engendrent le groupe modulaire  $\Gamma_S$ . Pour une surface non-orientable, le sous-groupe d'indice deux engendré par les twists de Dehn est appelé le *sous-groupe des twists* étudié par Stukow [79]. Dans le cas d'une surface non-orientable, on a le résultat suivant [53]

**Théorème 2.2.8** Le groupe modulaire d'une surface non-orientable est engendré par les twists de Dehn et les crosscap slides.

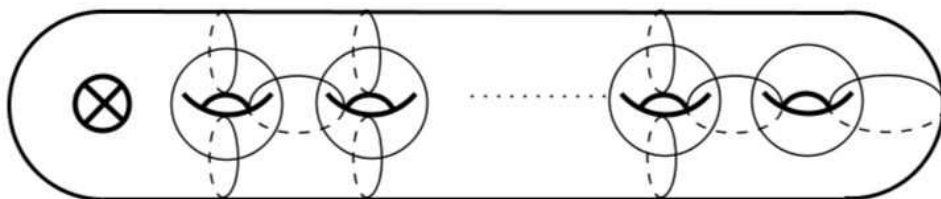
### 2.2.3 Ensemble fini de générateurs

Un nombre fini de twists de Dehn et de crosscap slides est suffisant pour engendrer le groupe modulaire d'une surface non-orientable. Nous donnons ici un ensemble générateur explicite du groupe modulaire.

Le groupe modulaire du plan projectif est trivial.

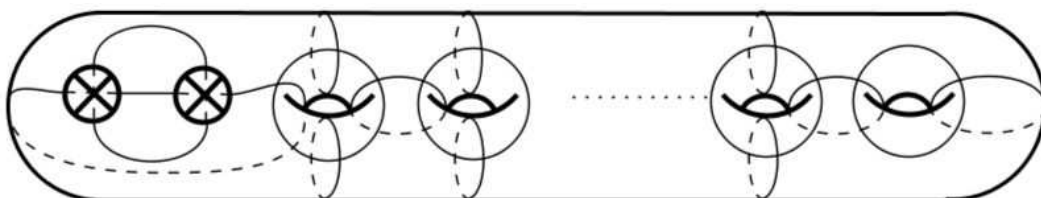
Le groupe modulaire de la bouteille de Klein est engendré par le twist de Dehn selon  $X$  et le crosscap slide  $y$ . (voir Lickorish [53])

En genre supérieur à trois, on considère l'ensemble des cercles donnés par la configuration de la figure 2.9 lorsque le genre de la surface est impair :



**Figure 2.9:** Configuration  $\mathcal{C}$  pour  $k = 2g + 1$

Et lorsque le genre est pair on considère la configuration de la figure 2.10 :



**Figure 2.10:** Configuration  $\mathcal{C}$  pour  $k = 2g + 2$

Le théorème suivant peut être attribué à Lickorish et Chillingworth [12, 53] (voir également Korkmaz [49]).

## 2. PRÉLIMINAIRES

---

**Théorème 2.2.9** *Soit  $N$  une surface non-orientable fermée de genre  $k \geq 3$ . Le groupe modulaire est engendré par l'ensemble  $\{\tau_\gamma, y \mid \gamma \in \mathcal{C}\}$ , où  $y$  est un crosscap slide tel que  $y^2$  est un twist de Dehn selon un cercle séparant  $\gamma$  de sorte que chaque composante du complémentaire  $N \setminus \gamma$  est non-orientable.*

Nous déduisons de ce théorème un corollaire à propos du groupe modulaire de la surface non-orientable de genre trois. Ce résultat nous servira à étudier la dynamique de l'action du groupe modulaire sur l'espace de module associé à la surface non-orientable de genre trois, mais est également d'intérêt indépendant.

**Corollaire 2.2.10** *Soit  $\pi = \langle A, B, C \mid A^2 B^2 C^2 \rangle$ . Un automorphisme de  $\text{Aut}(\pi)$  envoie l'élément  $D = ABC$  sur un conjugué de  $D$  ou de  $D^{-1}$ .*

**Preuve :** Le groupe  $\pi$  est le groupe fondamental de la surface non-orientable de genre trois. D'après le Théorème 2.2.4, le groupe  $\text{Out}(\pi)$  des automorphismes extérieurs de  $\pi$ , est isomorphe au groupe modulaire  $\Gamma$  de la surface  $N_3$ . D'autre part, nous connaissons un ensemble générateur fini du groupe modulaire  $\Gamma$ . Il suffit donc de vérifier pour chaque générateur de  $\Gamma$ , qu'il existe un représentant dans  $\text{Aut}(\pi)$  qui envoie  $D$  sur un conjugué de  $D$  ou de  $D^{-1}$ .

On note  $X = AB$  et  $Y = BC$  dans  $\pi$ . On note  $y$  le crosscap slide de  $A$  à travers  $B$ . Un ensemble générateur de  $\Gamma$  est donné par  $\{\tau_X, \tau_Y, y_{AB}\}$ . Les trois générateurs sont donnés par les automorphismes suivants du groupe  $\pi$  :

$$\begin{array}{lll} \tau_X : A \mapsto AAB & \tau_Y : A \mapsto A & y : A \mapsto AABA^{-1}B^{-1}A^{-1}A^{-1} \\ B \mapsto B^{-1}A^{-1}B & B \mapsto BCC & B \mapsto AAB \\ C \mapsto C & C \mapsto C^{-1}B^{-1}C & C \mapsto C. \end{array}$$

On a alors directement

$$\begin{aligned} \tau_X(D) &= \tau_X(ABC) = (AAB)(B^{-1}A^{-1}B)C = ABC &= D \\ \tau_Y(D) &= \tau_Y(ABC)A(BCC)(C^{-1}B^{-1}C) = ABC &= D \end{aligned}$$

D'autre part

$$y(ABC) = (AABA^{-1}B^{-1}A^{-1}A^{-1})(AAB)C = (AAB)A^{-1}C,$$

et d'après la relation du groupe  $\pi$  on a  $AAB = C^{-1}C^{-1}B^{-1}$ , ce qui nous donne

$$y(D) = (C^{-1}C^{-1}B^{-1})A^{-1}C = C^{-1}(ABC)^{-1}C = C^{-1}D^{-1}C.$$

□

## 2.3 Représentations des groupes de surface

### 2.3.1 Espace de modules

Nous rappelons maintenant les définitions et propriétés des espaces de représentations et de modules. De façon générale, nous pouvons définir les objets qui interviennent ici lorsque  $\pi$  est un groupe de présentation finie :

$$\pi = \langle A_1, \dots, A_n \mid Q_1, \dots, Q_r \rangle.$$

avec les *générateurs*  $A_1, \dots, A_n$  et les *relations*  $Q_1, \dots, Q_r$ . Les relations sont vues comme des éléments du groupe libre en  $n$  générateurs.

Un objet naturel associé au groupe  $\pi$  est l'*espace des représentations* qui est l'ensemble des homomorphismes de  $\pi$  dans un groupe de Lie  $G$ , noté  $\text{Hom}(\pi, G)$ . La topologie usuelle sur l'espace  $\text{Hom}(\pi, G)$  est la topologie compacte-ouverte.

Les symétries naturelles de l'espace  $\text{Hom}(\pi, G)$  viennent des automorphismes de  $\pi$  et de  $G$ . On a une action naturelle du produit  $\text{Aut}(\pi) \times \text{Aut}(G)$  sur l'espace  $\text{Hom}(\pi, G)$  par composition à gauche et à droite :

$$\begin{array}{ccc} (\text{Aut}(\pi) \times \text{Aut}(G)) & \cdot \text{Hom}(\pi, G) & \longrightarrow \text{Hom}(\pi, G) \\ (\tau, \alpha) & \cdot \rho & \longmapsto \alpha \circ \rho \circ \tau^{-1}. \end{array}$$

On note  $\text{Inn}(G)$  l'ensemble des automorphismes intérieurs de  $G$ , c'est à dire l'ensemble des éléments de la forme :

$$\begin{array}{ccc} L_g : G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & ghg^{-1}. \end{array}$$

**Définition 2.3.1** L'*espace de modules* est le quotient de  $\text{Hom}(\pi, G)$  par l'action de  $\text{Inn}(G)$ . On notera cet espace  $\mathfrak{X}(\pi, G) = \text{Hom}(\pi, G)/G$ .

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le groupe  $G$ , on notera simplement  $\mathfrak{X}(\pi)$ . Lorsque  $\pi = \pi_1(S)$  est le groupe fondamental d'une surface  $S$ , on notera également  $\mathfrak{X}(S, G)$  (ou simplement  $\mathfrak{X}(S)$  quand il n'y a pas d'ambiguïté).

Lorsque cela n'est pas précisé, la topologie sur l'espace des modules est la topologie quotient usuelle. L'action des automorphismes intérieurs  $\text{Inn}(\pi)$  de  $\pi$  est absorbée par l'action de  $\text{Inn}(G)$ . En effet si  $L_B$  désigne l'élément de  $\text{Inn}(\pi)$ , défini par  $L_B(A) = BAB^{-1}$  pour tout  $A \in \pi$ . On a alors :

$$(L_B, \text{Id}_G) \cdot \rho = (\text{Id}_\pi, L_{(\rho(B))^{-1}}) \cdot \rho.$$

L'action de  $\text{Inn}(\pi)$  est donc triviale sur les orbites de l'action de  $\text{Inn}(G)$ , et donc sur le quotient  $\mathfrak{X}(\pi)$ . L'action induite de  $\text{Aut}(\pi)$  sur  $\mathfrak{X}(\pi)$  se factorise par le quotient

$$\text{Out}(\pi) = \text{Aut}(\pi)/\text{Inn}(\pi).$$

Lorsque  $\pi = \pi_1(S)$  est un groupe de surface, nous avons vu que le groupe modulaire  $\Gamma_S$  s'identifie à un sous-groupe de  $\text{Out}(\pi)$ . Ceci nous donne l'action naturelle du groupe modulaire sur les espaces de modules. C'est cette action qui sera le principal objet d'étude des chapitres 3, 4 et 5.

### 2.3.2 Espace de modules relatif

Dans le cas où  $\pi$  est le groupe d'une surface à bord, il est naturel de considérer les sous-espaces de  $\mathfrak{X}(\pi, G)$  où le comportement de la représentation au bord est fixé.

Soit  $S$  une surface avec  $m$  composantes de bord, notées  $\partial_1 S, \dots, \partial_m S$ . Les inclusions  $\partial_i S \hookrightarrow S$  induisent des inclusions  $\pi_1(\partial_i S) \hookrightarrow \pi_1(S)$ . Pour tout  $i \leq m$ , on a donc une application

$$\partial_i : \mathfrak{X}(S) \longrightarrow \mathfrak{X}(\partial_i S).$$

On définit l'espace de module  $\mathfrak{X}(\partial S)$  comme le produit

$$\mathfrak{X}(\partial S) = \prod_{i=1}^m \mathfrak{X}(\partial_i S).$$

## 2. PRÉLIMINAIRES

---

Ce qui nous donne une application

$$\partial_{\#} : \mathfrak{X}(S) \longrightarrow \mathfrak{X}(\partial S).$$

L'espace de module  $\mathfrak{X}(S)$  peut alors être considéré comme une famille *d'espaces de modules relatifs* à  $\mathfrak{X}(\partial S)$ . Une composante de bord étant homéomorphe à un cercle, on a immédiatement  $\pi_1(\partial_i S) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} = F_1$ . Ainsi chaque  $\mathfrak{X}(\partial_i(S))$  est identifié à l'ensemble  $[G]$  des classes de conjugaison de  $G$ , et la base de cette famille est un produit  $\mathfrak{X}(\partial S) = [G]^m$ .

De façon plus précise, pour chaque  $i \leq m$  nous notons  $C_i \in \pi_1(S)$  un générateur de  $\pi_1(\partial_i S)$ , et soit  $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$  un élément de  $[G]^m$ . Nous définissons *l'espace de module relatif* à  $\mathcal{C}$  comme

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(S) = \partial_{\#}^{-1}(\mathcal{C}) = \{[\rho] \in \mathfrak{X}(S) \mid \rho(C_i) \in c_i, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m\}.$$

Le groupe modulaire d'une surface à bord fixe la classe de conjugaison des éléments de  $\pi_1(\partial_i S)$ . Nous obtenons donc une action naturelle de  $\Gamma_S$  sur chaque espace  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(S)$ .

## Chapitre 3

# Mesure invariante sur l'espace des représentations

*Si la vie est complexe, c'est  
parce qu'elle a une partie réelle  
et une partie imaginaire.  
– Marius Sophus Lie*

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la construction d'une mesure naturelle sur l'espace de modules  $\mathfrak{X}(\pi_1(S), G)$  qui soit invariante par l'action du groupe modulaire. C'est par rapport à cette mesure que le résultat d'ergodicité du chapitre 5 sera établi.

Dans le cas d'une surface orientable  $\Sigma$ , un résultat classique de W. Goldman [27] nous dit qu'un ouvert dense de l'espace  $\mathfrak{X}(\Sigma, G)$  possède une forme symplectique, en supposant que  $G$  est un groupe de Lie réductif. Cette forme symplectique induit une forme volume et donc une mesure sur l'espace de modules tout entier en posant que la mesure du complémentaire de l'ouvert dense soit nulle.

Dans [82], E. Witten définit et calcule un volume sur l'espace des connexions plates sur une 2-variété (qui s'identifie naturellement à l'espace de modules), sans supposer l'orientabilité, en utilisant la torsion de Reidemeister-Ray-Singer. Ce volume est égal dans le cas orientable au volume symplectique. Cependant, dans le cas non-orientable l'espace de modules ne possède pas de forme symplectique, la dimension de l'espace pouvant prendre des valeurs impaires. L'interprétation du volume calculé par Witten ne peut donc pas s'interpréter de cette façon. Dans [39] N-K. Ho et L. Jeffrey donnent une nouvelle preuve de la formule de Witten en partant de la mesure de Haar sur  $G$ .

Dans [62], M. Mulase et M. Penkava définissent et calculent un volume sur l'espace des représentations en passant par la mesure de Haar et la théorie des distributions et leurs résultats correspondent aux formules précédentes. Nous montrons dans ce chapitre que cette construction peut être approfondie pour construire une mesure sur l'espace de modules qui est invariante par l'action du groupe modulaire. Nous profitons également de ce chapitre pour faire quelques rappels utiles sur la théorie ergodique

## 3.1 Rappels de théorie ergodique

Nous rappelons ici les notions classiques de théorie ergodique. Pour une introduction plus détaillée le lecteur peut se rapporter au livre de A. Katok et B. Hasselblatt [47]. Dans tout ce chapitre,  $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$  désignera un espace probabilisé.

### 3.1.1 Actions ergodiques

**Définition 3.1.1** Une action mesurable d'un groupe  $\Gamma$  sur  $\mathcal{X}$  est une application mesurable

$$\Lambda : \Gamma \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$$

où  $\Gamma \times \mathcal{X}$  est muni de la mesure produit et  $\Lambda$  satisfait les propriétés usuelles d'une action de groupe. Nous noterons  $g \cdot x = \Lambda_g(x) = \Lambda(g, x)$ .

Un sous-ensemble  $A$  de  $\mathcal{X}$  est dit *négligeable* si il est de mesure nulle, et *conégligeable* si son complémentaire dans  $\mathcal{X}$  est de mesure nulle. Pour tout  $g \in \Gamma$  l'application  $\Lambda$  définit une mesure tirée-en-arrière par :

$$((\Lambda_g)_*\mu)(A) = \mu(\Lambda_g^{-1}(A)), \text{ pour tout ensemble } A \in \mathcal{A}.$$

**Définition 3.1.2** La mesure  $\mu$  est dite  $\Gamma$ -invariante si  $(\Lambda_g)_*\mu = \mu$  pour tout  $g \in \Gamma$ .

La mesure est dite *quasi-invariante* si pour tout  $g \in \Gamma$ , les mesures  $(\Lambda_g)_*\mu$  et  $\mu$  ont les mêmes ensembles négligeables.

Par définition, deux mesures ayant les mêmes ensembles négligeables sont dans la même *classe de mesure*. Il en découle qu'une mesure qui est dans la même classe qu'une mesure quasi-invariante, est elle aussi quasi-invariante. La classe d'une mesure quasi-invariante est donc invariante.

**Définition 3.1.3** Une action du groupe  $\Gamma$  sur l'espace  $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ , avec  $\mu$  une mesure quasi-invariante, est dite *ergodique* si tout ensemble mesurable  $\Gamma$ -invariant est négligeable ou conégligeable. Nous dirons également que  $\mu$  est une mesure ergodique pour l'action de  $\Gamma$ .

Nous pouvons donner une caractérisation de l'ergodicité en utilisant des fonctions mesurables plutôt que des ensembles. Une fonction est dite  $\Gamma$ -invariante si pour tout élément  $g$  de  $\Gamma$  et pour tout  $x$  dans  $\mathcal{X}$  on a :

$$f(g \cdot x) = f(x).$$

**Proposition 3.1.4** Soit une action ergodique de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{X}$  et soit  $\mathcal{Y}$  un espace de Borel. Si  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est une fonction mesurable  $\Gamma$ -invariante, alors  $f$  est constante presque partout.

**Preuve :** Supposons que  $f$  n'est pas constante presque partout. Il existe des ensembles mesurables disjoints  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{Y}$  tels que  $f^{-1}(A)$  et  $f^{-1}(B)$  sont tous les deux de mesure non nulle. La fonction  $f$  étant  $\Gamma$ -invariante, les deux ensembles sont  $\Gamma$ -invariants, disjoints et de mesure non-nulle, ce qui contredit l'ergodicité.  $\square$

Lorsque l'espace  $\mathcal{Y}$  de la proposition précédente est l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$ , nous avons la réciproque qui nous donne une caractérisation de l'ergodicité :

**Proposition 3.1.5** *Soit une action mesurable de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{X}$ . Si toute fonction mesurable  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  est constante presque partout, alors l'action de  $\Gamma$  est ergodique.*

**Preuve :** Soit  $A$  un ensemble mesurable  $\Gamma$ -invariant. La fonction caractéristique de  $A$  est une fonction mesurable  $\Gamma$ -invariante. Elle est donc constante presque partout. Comme  $A = \{x \in \mathcal{X} | \mathbf{1}_A(x) = 1\}$ , l'ensemble  $A$  est négligeable ou conégligeable, ce qui prouve l'ergodicité.  $\square$

Une mesure  $\Gamma$ -invariante qui n'est pas ergodique peut se désintégrer en composantes ergodiques. Si  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont des espaces de Borel et  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  une fonction mesurable, on définit  $\{\mu_y\}_{y \in \mathcal{Y}}$  comme la famille de mesure sur  $\mathcal{X}$ , appelée *famille de mesure de désintégration* et déterminée de façon unique presque partout par les conditions :

- $y \mapsto \mu_y(B)$  est une fonction mesurable pour tout  $B \subset \mathcal{X}$ ;
- la mesure  $\mu_y$  est *portée* par la fibre  $F^{-1}(y)$ , c'est à dire que pour  $F_*\mu$ -presque tout  $y \in \mathcal{Y}$ , on a  $\mu_y(\mathcal{X} \setminus F^{-1}(y)) = 0$ ;
- pour toute fonction mesurable  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , on a

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathcal{Y}} \int_{F^{-1}(y)} f(x) d\mu_y(x) d(F_*\mu)(y)$$

Le lemme suivant joue un rôle important dans notre étude et nous renvoyons à ([24], Theorem 5.8) pour une preuve.

**Lemme 3.1.6** *Soit  $\Gamma$  une action mesurable sur  $(\mathcal{X}, \mu)$ , et  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{Z}$  des espaces de Borel. Soit  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  une fonction mesurable et  $\{\mu_y\}_{y \in \mathcal{Y}}$  la famille de mesure de désintégration par rapport à  $F$ .*

*Si pour  $(F_*\mu)$ -presque tout  $y$ , la mesure  $\mu_y$  est ergodique pour l'action de  $\Gamma$ , alors pour toute fonction  $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$  mesurable  $\Gamma$ -invariante, il existe une fonction  $H : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$  mesurable telle que  $h = H \circ F$  presque partout.*

#### 3.1.2 Espace engendré

**Définition 3.1.7** *Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble mesurable et pour  $i \in \{1, \dots, l\}$ , soit  $\mathcal{F}^i$  une décomposition de  $\mathcal{X}$  en une union disjointe d'ensembles mesurables notés  $F_j^i$ , c'est à dire*

$$\mathcal{X} = \bigsqcup_{j \in J_i} F_j^i, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, l\}.$$

*On dit que la famille  $\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^l$  engendre l'ensemble  $\mathcal{X}$  si la propriété suivante est vérifiée :*

*Tout sous-ensemble  $A$  mesurable de  $\mathcal{X}$ , tel que pour tout  $i \in \{1 \dots l\}$  l'ensemble  $A$  est presque partout égal à une union d'ensemble dans  $\mathcal{F}^i$ , est négligeable ou conégligeable.*

Un exemple fondamental est donné par  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^l$  (ou un sous-ensemble ouvert connexe de  $\mathbb{R}^l$ ), et  $\mathcal{F}^i$  est le feuilletage de  $\mathcal{X}$  par des espaces affines qui sont les translatés du sous-espace vectoriel  $V_i \subset \mathbb{R}^l$ , et tels que  $\mathbb{R}^l = V_1 + \dots + V_N$ .

Cette notion est liée aux propriétés ergodiques de la façon suivante

**Lemme 3.1.8** *Soient  $\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^l$  une famille qui engendre l'espace  $\mathcal{X}$  et  $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable. Supposons que pour tout  $1 \leq i \leq l$ , la fonction  $h$  est presque partout égale à une fonction constante sur chaque feuille  $F \in \mathcal{F}^i$ . Alors,  $h$  est constante presque partout.*

### 3. MESURE INVARIANTE SUR L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

---

**Preuve :** Soit  $x$  un élément de  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $1 \leq i \leq l$ , l'ensemble  $h^{-1}([x, x+1])$  est presque partout égal à une union de feuilles  $F_j^i$  de  $\mathcal{F}^i$ , et est donc négligeable ou conégligeable. L'espace  $\mathbb{R}$  est une union dénombrable d'ensembles de la forme  $[x, x+1]$ , donc il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $h^{-1}([a, a+1])$  est conégligeable. Posons  $a_0 = \sup\{a \mid h^{-1}([a, a+1]) \text{ est conégligeable}\} \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , l'ensemble  $h^{-1}([a_0 + \epsilon, a_0 + \epsilon + 1])$  est négligeable. L'ensemble  $h^{-1}([a_0, a_0 + \epsilon])$  est donc conégligeable. On en déduit que  $h^{-1}(\{a_0\})$  est conégligeable, ou de façon équivalente la fonction  $h$  est constante presque partout et égale à  $a_0$ .  $\square$

## 3.2 Mesure invariante sur l'espace des représentations

Pour définir une mesure invariante sur l'espace de module  $\mathfrak{X}(M)$ , nous nous plaçons dans un cadre plus général étudié en partie par Mulase et Penkava [62]. Il s'agit d'utiliser la mesure de Haar sur le groupe  $G$  et considérer une distribution définie à partir de cette mesure.

### 3.2.1 Injection dans $G^k$

Soit  $G$  un groupe de Lie compact. Soit  $\Pi$  un groupe de présentation finie avec  $k$  générateurs et  $r$  relations, noté

$$\Pi = \langle A_1, \dots, A_k \mid q_1(A_1, \dots, A_k), \dots, q_r(A_1, \dots, A_k) \rangle$$

où  $q_1, \dots, q_r$  sont des mots sur  $A_1, \dots, A_k$ . On associe à la présentation  $\Pi$  l'application  $q$  définie comme suit :

$$\begin{aligned} q : G^k &\longrightarrow G^r \\ x &\longmapsto (q_1(x), \dots, q_r(x)). \end{aligned}$$

Pour  $x = (x_1, \dots, x_k) \in G^k$ , l'élément  $q_j(x) \in G$  est obtenu à partir du mot  $q_j$ , en évaluant chaque occurrence de  $A_i$  par l'élément  $x_i \in G$  correspondant.

Une représentation  $\phi$  est entièrement déterminée par l'image des  $k$  générateurs dans le groupe  $G$ . On définit ainsi l'application :

$$\begin{aligned} p : \text{Hom}(\Pi, G) &\longrightarrow G^k \\ \phi &\longmapsto (\phi(A_1), \dots, \phi(A_k)). \end{aligned}$$

Il s'en suit une identification canonique entre  $\text{Hom}(\Pi, G)$  et la fibre  $q^{-1}(1, \dots, 1)$ , donnée par :

$$p(\text{Hom}(\Pi, G)) = q^{-1}(1, \dots, 1).$$

L'idée est de construire une mesure sur  $G^k$  ayant pour support la fibre  $q^{-1}(1, \dots, 1)$ , à partir de la mesure de Haar naturelle sur  $G^k$ . L'espace  $G^k$  étant localement compact, il suffit de construire une forme linéaire continue sur l'ensemble  $C(G^k)$  des fonctions réelles et continues sur  $G^k$ . Le théorème de représentation de Riesz nous permet de justifier de l'existence d'une mesure borélienne régulière sur  $G^k$  à partir de cette forme linéaire.

### 3.2.2 Distribution volume

Soit  $dx$  une mesure de Haar sur  $G$ . Le groupe  $G$  étant compact, la mesure est invariante à la fois à gauche et à droite. On définit tout d'abord une mesure sur  $G^r$  à partir d'une distribution, c'est à dire la donnée d'une forme linéaire continue sur l'espace  $C^\infty(G^r)$  des fonctions infiniment dérivables sur  $G^r$ .

**Définition 3.2.1** La distribution volume est une distribution sur  $G^r$  définie par la forme linéaire continue :

$$\begin{aligned} I_q : C^\infty(G^r) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \int_{G^k} g(q(x)) dx_1 \cdots dx_k. \end{aligned}$$

On peut écrire de façon formelle :

$$I_q(g) = \int_{G^r} f_q(w) g(w) dw_1 \cdots dw_r.$$

On exprime  $f_q$  de façon explicite en utilisant la distribution de Dirac. On définit  $\delta$  la *distribution de Dirac* sur  $G$  comme la fonctionnelle linéaire continue donnée par :

$$\begin{aligned} \delta : C^\infty(G) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \int_G \delta(x) g(x) dx = g(1). \end{aligned}$$

La distribution de Dirac sur  $G^r$  est définie par

$$\delta_r(w_1, \dots, w_r) = \delta(w_1) \cdots \delta(w_r).$$

L'égalité suivante est vraie au sens des distributions :

$$f_q(w) = \int_{G^k} \delta_r(q(x) \cdot w^{-1}) dx_1 \cdots dx_k, \quad \forall w \in G^r.$$

En effet, pour tout  $g \in C^\infty(G^r)$  on a

$$\begin{aligned} I_q(g) &= \int_{G^r} g(w) \left( \int_{G^k} \delta_r(q(x) \cdot w^{-1}) dx_1 \cdots dx_k \right) dw_1 \cdots dw_r \\ &= \int_{G^k} \left( \int_{G^r} g(w) \delta_r(q(x) \cdot w^{-1}) dw_1 \cdots dw_r \right) dx_1 \cdots dx_k \\ &= \int_{G^k} g(q(x)) dx_1 \cdots dx_k. \end{aligned}$$

En général, l'expression  $f_q(w)$  n'a pas de sens, car on ne peut pas donner une évaluation de la distribution en un point. Une distribution est dite *régulière* au point  $w \in G^r$  si il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $w$  tel que la restriction de  $f$  à  $U$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $U$ .

### 3.3 Mesure sur $G^k$

On se place dans le cas où la distribution volume  $f_q$  est régulière au point  $1 \in G^r$ . Dans ce cas, dans un petit voisinage de  $1 \in G^r$ , la distribution  $f_q$  est une fonction  $C^\infty$ . Soit  $\varphi \in C(G^k)$  une fonction continue sur  $G^k$ . La construction précédente se généralise à la forme linéaire continue :

$$\begin{aligned} I_q^\varphi : C^\infty(G^r) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \int_{G^k} g(q(x)) \varphi(x) dx_1 \cdots dx_k = \int_{G^r} f_q^\varphi(w) g(w) dw_1 \cdots dw_r, \end{aligned}$$

### 3. MESURE INVARIANTE SUR L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

---

associée à la distribution

$$f_q^\varphi(w) = \int_{G^k} \delta_r(q(x) \cdot w^{-1}) \varphi(x) dx_1 \cdots dx_k.$$

La fonction  $\varphi$  étant continue sur un ensemble compact, elle est bornée. Donc la régularité de  $f_q$  au point  $1 \in G^r$  entraîne la régularité de  $f_q^\varphi$  au point  $1 \in G^r$  pour toute fonction  $\varphi$  dans  $C(G^k)$ . Ainsi la valeur  $f_q^\varphi(1)$  est bien définie, et de plus cette valeur dépend continuellement de  $\varphi$ .

Par linéarité de l'intégrale, l'application

$$\begin{aligned} J_q : C(G^k) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto f_q^\varphi(1) \end{aligned}$$

est linéaire. Elle définit donc une forme linéaire continue sur  $C(G^k)$ . Nous pouvons appliquer le théorème de représentation de Riesz pour définir une mesure sur  $G^k$ .

**Définition 3.3.1** *La mesure  $\mu_q$  sur  $G^k$  est l'unique mesure borélienne régulière telle que pour toute fonction  $\varphi \in C(G^k)$ , on a  $J_q(\varphi) = \int_{G^k} \varphi(x) d\mu_q(x)$ .*

Par construction, la mesure  $\mu_q$  est entièrement portée par la fibre  $q^{-1}(1, \dots, 1)$ . C'est à dire :

$$\mu_q(G^k \setminus q^{-1}(1, \dots, 1)) = 0$$

La mesure  $\mu_q$  nous permet donc de définir une mesure borélienne régulière sur  $\text{Hom}(\Pi, G)$  comme la mesure tirée en arrière par l'application  $p$ . Par un abus de notation, on notera encore  $\mu_q$  la mesure ainsi définie sur  $\text{Hom}(\Pi, G)$ .

Pour un borélien  $U$  de  $\text{Hom}(\Pi, G)$ , on peut écrire :

$$\mu_q(U) = \int_{G^k} \mathbf{1}_{p(U)}(x) d\mu_q(x) = \int_{G^k} \delta_r(q(x)) \mathbf{1}_{p(U)}(x) dx_1 \cdots dx_k, \quad (3.3.1)$$

où  $\mathbf{1}_E$  désigne la fonction caractéristique de  $E \subset G^k$ .

### 3.4 Invariance de la mesure

Les propriétés d'invariance de la mesure  $\mu_q$  peuvent se déduire de la formule (3.3.1). Cette mesure est définie à partir de la présentation du groupe  $\Pi$  choisie. Cependant la proposition suivante montre que sous des hypothèses naturelles, la mesure ne dépend pas du choix de la présentation.

**Proposition 3.4.1** *Soient  $q$  et  $s$  deux présentations finies d'un même groupe  $\Pi$  :*

$$\Pi = \langle A_1, \dots, A_k | q_1, \dots, q_r \rangle = \langle B_1, \dots, B_l | s_1, \dots, s_t \rangle.$$

*On suppose que  $k - r = l - t$ . Si les distributions volumes  $f_q$  et  $f_s$  associées aux présentations  $q$  et  $s$  sont régulières en  $1_r \in G^r$  et  $1_l \in G^l$  respectivement, alors les mesures  $\mu_q$  et  $\mu_s$  coïncident sur  $\text{Hom}(\Pi, G)$ .*

Supposons dans un premier temps que  $k = l$  et  $r = t$ . Le principe de la preuve est d'exprimer les générateurs  $A_i$  en fonction des générateurs  $B_j$ . Cette expression n'est pas unique dès que le nombre de relations est non nul. Le lemme suivant nous donne l'existence d'une telle expression ayant de bonnes propriétés vis-à-vis de l'application présentation (voir [62] pour une démonstration des deux lemmes suivants).

**Lemme 3.4.2** *Soit  $q$  et  $s$  deux présentations finies d'un même groupe  $\Pi$  :*

$$\Pi = \langle A_1, \dots, A_k | q_1, \dots, q_r \rangle = \langle B_1, \dots, B_k | s_1, \dots, s_r \rangle.$$

Alors pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , il existe deux mots  $a_i(X_1, \dots, X_k)$  et  $b_i(X_1, \dots, X_k)$  tels que les applications induites  $a : G^k \rightarrow G^k$  et  $b : G^k \rightarrow G^k$  associées à ces mots sont bijectives et que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G^k & \xlongequal{\quad} & G^k \xrightarrow{q} G^r \\ a \uparrow \sim & & \sim \downarrow b \\ G^k & \xlongequal{\quad} & G^k \xrightarrow{s} G^r \end{array}$$

est commutatif. De plus les applications  $a$  et  $b$  ainsi obtenues satisfont les propriétés suivantes :

$$q^{-1}(1) = b^{-1}(s^{-1}(1)), \quad \text{et} \quad s^{-1}(1) = a^{-1}(q^{-1}(1)).$$

Les applications  $a$  et  $b$  sont des automorphismes réels analytiques de la variété réelle analytique  $G^k$ , et le lemme suivant montre l'invariance de la mesure de Haar sous ces automorphismes.

**Lemme 3.4.3** *Soit  $b$  un automorphisme analytique de la variété réelle analytique  $G^k$  donné par :*

$$\begin{aligned} b : G^k &\longrightarrow G^k \\ (x_1, \dots, x_k) &\longmapsto (b_1(x_1, \dots, x_k), \dots, b_k(x_1, \dots, x_k)) \end{aligned}$$

où les  $b_i$  sont des mots en  $x_1, \dots, x_k$ . Supposons que l'inverse de  $b$  s'écrive de la même manière.

Alors la forme volume  $\omega^k$  de  $G^k$  correspondant au produit de mesure de Haar  $dx_1 \cdots dx_k$  est invariante sous l'action de l'automorphisme  $b$ , au signe près, c'est-à-dire  $B^* \omega^k = \pm \omega^k$ .

Nous pouvons maintenant donner la preuve de la Proposition 3.4.1 :

**Preuve :** Soient  $q$  et  $s$  deux présentations finies du groupe  $\Pi$  ayant le même nombre de générateurs et de relations, c'est-à-dire  $k = l$  et  $r = s$ , et telles que les distributions volumes associées sont régulières au point  $(1, \dots, 1)$ . Soient  $\{a_i\}_{i=1 \dots k}$  et  $\{b_i\}_{i=1 \dots k}$ , les deux familles de mots données par le Lemme 3.4.2, et  $a$  et  $b$  les automorphismes analytiques de  $G^k$  associés. On note  $p_q$  l'application  $\text{Hom}(\Pi, G) \rightarrow G^k$  donnée par l'image des générateurs  $A_i$  de la présentation  $q$  de  $\Pi$ . On définit  $p_s$  de la même façon par l'image des générateurs  $B_i$ .

Pour tout  $\phi$  élément de  $\text{Hom}(\Pi, G)$ , on a naturellement :

$$p_s(\phi) = (\phi(B_1), \dots, \phi(B_k)) \tag{3.4.1}$$

$$= (\phi(B_1(A_1, \dots, A_k)), \dots, \phi(B_k(A_1, \dots, A_k))) \tag{3.4.2}$$

$$= (B_1(\phi(A_1), \dots, \phi(A_k)), \dots, B_k(\phi(A_1), \dots, \phi(A_k))) \tag{3.4.3}$$

$$= B(\phi(A_1), \dots, \phi(A_k)). \tag{3.4.4}$$

$$p_s(\phi) = b(p_q(\phi)). \tag{3.4.5}$$

### 3. MESURE INVARIANTE SUR L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

---

D'autre part, d'après le Lemme 3.4.2, on a  $q^{-1}(1_r) = b^{-1}(s^{-1}(1_r))$ . Donc pour  $x \in G^k$ , on a  $q(x) = 1_r$  si et seulement si  $s(b(x)) = 1_r$ . Ce qui nous donne :

$$\delta_r(q(x)) = \delta_r(s(b(x))). \quad (3.4.6)$$

Enfin d'après le Lemme 3.4.3, la mesure  $dx_1 \cdots dw_k$  sur  $G^k$  est invariante par l'automorphisme  $b$ . Ainsi pour un borélien  $V$  de  $\text{Hom}(\Pi, G)$ , on a en combinant (3.4.5) et (3.4.6) :

$$\begin{aligned} \mu_s(V) &= \int_{G^k} \delta_r(s(x)) \mathbf{1}_{p_s(V)}(x) dx_1 \cdots dx_k \\ &= \int_{G^k} \delta_r(s(b(b^{-1}(x)))) \mathbf{1}_{b(p_q(V))}(x) dx_1 \cdots dx_k \\ &= \int_{G^k} \delta_r(q(b^{-1}(x))) \mathbf{1}_{p_q(V)}(b^{-1}(x)) dx_1 \cdots dx_k \\ &= \mu_q(V). \end{aligned}$$

Ceci montre la Proposition 3.4.1 dans le cas où les deux présentations ont le même nombre de générateurs et de relations.

Dans le cas général, on peut supposer sans perte de généralité que  $k < l$ . Considérons le groupe donné par la présentation suivante notée  $q'$  :

$$\langle A_1, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_l | q_1, \dots, q_r, q_{r+1}, \dots, q_{r+l-k} \rangle$$

obtenue en rajoutant des nouveaux générateurs  $A_{k+1}, \dots, A_l$  et les relations suivantes :

$$q_{r+1} = A_{r+1}, \dots, q_{r+l-k} = A_l$$

à la présentation  $q$ . Le groupe présenté par  $q'$  est isomorphe au groupe  $\Pi$ .

L'application  $q' : G^l \rightarrow G^{r+l-k}$  peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} q' : G^k \times G^{l-k} &\longrightarrow G^r \times G^{l-k} \\ (x, y) &\longmapsto (q(x), y) = q'(x, y). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} f_{q'}(1_{r+l-k}) &= \int_{G^l} \delta_l(q'(w)) dw \\ &= \int_{G^k \times G^{l-k}} \delta_l(q'(x, y)) dx_1 \cdots dx_k \cdot dy_1 \cdots dy_{l-k} \\ &= \int_{G^k \times G^{l-k}} \delta_l(q(x), y_1, \dots, y_{l-k}) dx_1 \cdots dx_k \cdot dy_1 \cdots dy_{l-k} \\ &= \int_{G^k \times G^{l-k}} \delta_r(q(x)) \cdot \delta_{l-k}(y_1, \dots, y_{l-k}) dx_1 \cdots dx_k \cdot dy_1 \cdots dy_{l-k} \\ &= \int_{G^{l-k}} \left( \int_{G^k} \delta_r(q(x)) dx_1 \cdots dx_k \right) \delta_{l-k}(y_1, \dots, y_{l-k}) dy_1 \cdots dy_{l-k} \\ &= \int_{G^k} \delta_r(q(x)) dx_1 \cdots dx_k \\ &= f_q(1_r). \end{aligned}$$

La distribution  $f_q$  étant régulière au point  $1_r$ , on en déduit que la distribution volume  $f_{q'}$  est régulière au point  $1_{r+l-k} \in G^l$ . D'autre part, cette égalité implique que les deux mesures  $\mu_{q'}$  et  $\mu_q$  coïncident. Comme les deux présentations  $q'$  et  $s$  ont le même nombre de générateurs et relations, on a également  $\mu_{q'} = \mu_s$ , ce qui termine la preuve de la Proposition 3.4.1.  $\square$

Considérons un automorphisme  $\phi$  de  $\Pi = \langle A_1, \dots, A_k | q_1, \dots, q_r \rangle$ . On définit les éléments  $B_i$  comme les images des générateurs  $\phi(A_i)$ . L'ensemble des  $B_i$  est également un ensemble de générateurs pour  $\Pi$ . D'autre part, les  $B_i$  sont tels que  $q_j(B_1, \dots, B_k) = 1$ . D'autre part, l'automorphisme  $\phi^{-1}$  satisfait les mêmes propriétés. En particulier, la mesure ne dépend pas de l'ensemble générateur choisi. En appliquant la proposition 3.4.1 aux deux présentations du groupe  $\Pi$  :

$$\Pi = \langle A_1, \dots, A_k | q_1, \dots, q_r \rangle = \langle B_1, \dots, B_k | q_1, \dots, q_r \rangle.$$

on obtient immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 3.4.4** *Soit  $q$  une présentation de  $\Pi$  telle que  $f_q$  est régulière au point  $1_r \in G^r$ . La mesure  $\mu_q$  sur  $\text{Hom}(\Pi, G)$  est invariante sous l'action de  $\text{Aut}(\Pi)$ .*

Pour obtenir une mesure sur l'espace  $\text{Hom}(\Pi, G)/G$ , nous devons d'abord montrer l'invariance de  $\mu$  par les automorphismes intérieurs de  $G$ .

**Proposition 3.4.5** *Soit  $q$  une présentation du groupe  $\Pi$  telle que la distribution volume  $f_q$  est régulière en  $1_r \in G^r$ . Alors la mesure  $\mu_q$  sur l'espace des représentations  $\text{Hom}(\Pi, G)$  est invariante sous l'action du groupe  $\text{Inn}(G)$  des automorphismes intérieurs de  $G$ .*

**Preuve :** Soient  $g$  un élément de  $G$  et  $L_g$  l'automorphisme intérieur associé défini par :

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g x g^{-1}. \end{aligned}$$

L'automorphisme  $L_g$  agit naturellement sur une représentation  $\phi \in \text{Hom}(\Pi, G)$  de la façon suivante :

$$\forall a \in \Pi, (L_g \cdot \phi)(a) = g \phi(a) g^{-1}.$$

La distribution de Dirac  $\delta$  est invariante par conjugaison et la distribution  $\delta_r$  également. La mesure de Haar est également invariante par conjugaison puisqu'elle est invariante à gauche et à droite du fait de la compacité de  $G$ . Ainsi, pour un borelien  $V$  de l'espace  $\text{Hom}(\Pi, G)$ , on a :

$$\begin{aligned} \mu_q(L_g \cdot V) &= \int_{G^k} \delta_r(q(x)) \mathbf{1}_{p(L_g \cdot V)}(x) dx_1 \cdots dx_k \\ &= \int_{G^k} \delta_r(g^{-1} q(x) g) \mathbf{1}_{gp(V)g^{-1}}(x) dx_1 \cdots dx_k \\ &= \int_{G^k} \delta_r(q(g^{-1} x g)) \mathbf{1}_{p(V)}(g^{-1} x g) dx_1 \cdots dx_k \\ &= \mu_q(V). \end{aligned}$$

Tout élément de  $\text{Inn}(G)$  s'exprime comme un  $L_g$  pour un certain  $g \in G$ , ce qui prouve la proposition.  $\square$

Cette proposition nous permet de construire la mesure sur le quotient  $\text{Hom}(\Pi, G)/G$ .

### 3. MESURE INVARIANTE SUR L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

---

**Définition 3.4.6** Soit  $q$  une présentation du groupe  $\Pi$  telle que la distribution volume  $f_q$  est régulière en  $1_r \in G^r$ . On définit la mesure  $\nu_q$  sur  $\text{Hom}(\Pi, G)/G$  comme le poussé-en-avant de la mesure  $\mu$  par l'application quotient  $Q : \text{Hom}(\Pi, G) \rightarrow \text{Hom}(\Pi, G)/G$ .

C'est à dire que pour tout borélien  $V \subset \text{Hom}(\Pi, G)/G$ , on a :

$$\nu_q(V) = \mu_q(Q^{-1}(V)). \quad (3.4.7)$$

Cette mesure est naturellement  $\text{Out}(\Pi)$ -invariante. De plus elle est indépendante de la présentation choisie tant que la différence entre le nombre de générateurs et le nombre de relations de la présentation est la même que pour la présentation  $q$  de départ.

### 3.5 Régularité dans le cas des groupes de surface

Dans cette section on montre que dans le cas où  $\Pi$  est un groupe de surface, la distribution volume associée à une présentation standard est régulière au point  $1 \in G$ .

On peut munir l'ensemble des distributions du produit de convolution de deux distributions  $f_1$  et  $f_2$  défini par :

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_G f_1(xw^{-1})f_2(w)dw.$$

Une *distribution de classe* est une distribution  $f$  satisfaisant la relation :

$$\int_G f(w^{-1}xw)g(x)dx = \int_G f(x)g(x)dx, \quad \forall g \in C^\infty(G), \forall w \in G.$$

Pour les groupes à une seule relation tels que les groupes de surface avec leur présentation standard, nous avons la proposition suivante :

**Proposition 3.5.1** Si  $\Pi = \langle A_1, \dots, A_k | q \rangle$  est un groupe à une seule relation, alors pour tout groupe de Lie compact  $G$ , la distribution volume donné par la Définition 3.2.1 est une distribution de classe sur  $G$ .

**Preuve :** On utilise l'invariance à gauche et à droite de la mesure de Haar sur  $G$ . Et d'autre part, pour tout mot  $q$  et  $x_1, \dots, x_k, y \in G$ , on a :

$$yq(x_1, \dots, x_k)y^{-1} = q(yx_1y^{-1}, \dots, yx_ky^{-1}).$$

Ainsi, pour  $y \in G$  et  $g \in C^\infty(G)$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_G f_q(ywy^{-1})g(w)dw &= \int_G f_q(w)g(y^{-1}wy)dw \\ &= \int_{G^k} g(y^{-1}q(x_1, \dots, x_k)y)dx_1 \cdots dx_k \\ &= \int_{G^k} g(q(yx_1y^{-1}, \dots, yx_ky^{-1}))dx_1 \cdots dx_k \\ &= \int_{G^k} g(q(x_1, \dots, x_k))dx_1 \cdots dx_k \\ &= \int_G f_q(w)g(w)dw. \end{aligned}$$

□

L'idée est maintenant de trouver une autre expression de la distribution volume associée à la présentation standard d'un groupe de surface. Pour cela, on utilise la décomposition de la distribution en une série de caractères de représentation irréductibles du groupe  $G$ . Pour obtenir la régularité, nous utilisons des arguments issus de la théorie des caractères des groupes compacts et d'analyse harmonique.

#### 3.5.1 Un peu d'analyse harmonique

Nous utilisons ici les représentations irréductibles de groupes de Lie sans rentrer dans les détails. Nous renvoyons au livre de J. Dieudonné [19] pour un traitement complet du sujet et les preuves des faits énoncés.

On note  $\hat{G}$  l'ensemble des classes d'équivalence de représentations complexes irréductibles du groupe  $G$ . Pour une représentation irréductible  $\lambda \in \hat{G}$ , on note  $\chi_\lambda$  son caractère, et  $\dim \lambda$  la dimension de la représentation. L'ensemble

$$\{\chi_\lambda | \lambda \in \hat{G}\}$$

forme une base de Hilbert de l'espace de Hilbert  $L^2(G)$ . Les caractères irréductibles satisfont la relation d'orthogonalité de Schur qui nous donne :

$$\chi_\lambda * \chi_\mu = \begin{cases} \frac{|G|}{\dim \lambda} \chi_\lambda & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Toute fonction  $\phi$  de classe dans  $L^2(G)$  peut se décomposer en une série absolument et uniformément convergente :

$$\phi(x) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} a_\lambda \chi_\lambda(x) \quad (3.5.2)$$

Les coefficients  $a_\lambda$  satisfont la condition de convergence :

$$\sum_{\lambda \in \hat{G}} |a_\lambda|^2 < +\infty.$$

Réciproquement, si la série  $\sum_\lambda a_\lambda \chi_\lambda$  est uniformément et absolument convergente, alors elle définit une fonction de classe dans  $C^\infty(G)$ .

De la même façon, une distribution de classe peut se décomposer en une série de la forme 3.5.2 qui n'est pas absolument convergente en général. Cependant la somme infinie est convergente dans l'espace des distributions de classe muni de la topologie compacte ouverte. La décomposition de la distribution de Dirac  $\delta$  est donnée par :

$$\delta(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{\lambda \in \hat{G}} \dim \lambda \cdot \chi_\lambda(x). \quad (3.5.3)$$

A partir de cette nouvelle définition de la distribution de Dirac et des relations d'orthogonalité de Schur, on peut en déduire la relation de convolution  $\delta * \delta = \delta$ , ce qui nous donne la propriété suivante :

$$\int_G \delta(x) g(x) dx = \int_G \int_G \delta(xw^{-1}) \delta(w) g(x) dw dx. \quad (3.5.4)$$

### 3. MESURE INVARIANTE SUR L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

---

Par l'invariance de la mesure de Haar à gauche et à droite, on peut également écrire

$$\delta(xy) = \int_G \delta(xw^{-1})g(yw)dw. \quad (3.5.5)$$

Passons maintenant aux cas qui nous intéressent directement c'est-à-dire lorsque le groupe  $\Pi$  est un groupe de surface.

#### 3.5.2 Surfaces orientables

Pour une surface orientable  $\Sigma$  de genre  $g$ , on considère la présentation standard :

$$\pi_1(\Sigma) = \langle A_1, B_1, \dots, A_g, B_g \mid [A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g] \rangle.$$

La distribution volume associée, que nous notons  $f_g$ , est donnée par la formule suivante :

$$f_g(w) = \int_{G^{2g}} \delta(q_g(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g) \cdot w^{-1}) dx_1 dy_1 \cdots dx_g dy_g, \text{ pour } w \in G,$$

où  $q_g$  est l'application  $G^{2g} \rightarrow G$  définie par :

$$q_g(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g) = [x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g].$$

En utilisant (3.5.5), on a pour tout  $g, h \geq 1$  :

$$f_{g+h}(w) = f_g * f_h = f_h * f_g.$$

Il vient donc :

$$f_g = \overbrace{f_1 * \cdots * f_1}^{g\text{-fois}}.$$

Ainsi, il suffit de trouver la décomposition de  $f_1$  pour trouver la décomposition de  $f_g$ . Pour cela, nous devons définir une distribution intermédiaire  $\eta_x$  définie comme la fonctionnelle linéaire donnée par :

$$\begin{aligned} \eta_x : C^\infty(G) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \int_G g(yxy^{-1})dy. \end{aligned}$$

C'est une distribution de classe par l'invariance de la mesure de Haar. Au sens des distributions, nous pouvons écrire :

$$\eta_x(w) = \int_G \delta(yxy^{-1}w^{-1})dy. \quad (3.5.6)$$

La décomposition en caractères irréductibles de la distribution  $\eta_x$  est donné par (voir [62]) :

$$\eta_x(w) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} \bar{\chi}_\lambda(x) \chi_\lambda(w). \quad (3.5.7)$$

### 3.5 Régularité dans le cas des groupes de surface

Ainsi, d'après la propriété de convolution de la fonction  $\delta$  (3.5.5), la décomposition de la distribution  $\eta_x$  (3.5.7) et les relations d'orthogonalité de Schur (3.5.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
f_1(w) &= \int_{G^2} \delta(w^{-1}xyx^{-1}y^{-1})dxdy \\
&= \int_{G^2} \left( \int_G \delta(w^{-1}xu)\delta(yx^{-1}y^{-1}u^{-1})du \right) dxdy \\
&= \int_{G^2} \int_G \delta(x(wu^{-1})^{-1})\eta_{x^{-1}}(u)dudx \\
&= \sum_{\lambda \in \hat{G}} \int_{G^2} \delta(x(wu^{-1})^{-1})\bar{\chi}_\lambda(x^{-1})\chi_\lambda(u)dxdx \\
&= \sum_{\lambda \in \hat{G}} \int_G \chi_\lambda(wu^{-1})\chi_\lambda(u)du \\
&= \sum_{\lambda \in \hat{G}} \frac{|G|}{\dim \lambda} \chi_\lambda(w).
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat suivant :

**Proposition 3.5.2** *Pour tout  $g \geq 1$ , la décomposition en caractères irréductibles de la distribution volume  $f_g$  est donnée par :*

$$f_g(w) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} \left( \frac{|G|}{\dim \lambda} \right)^{2g-1} \chi_\lambda(w). \quad (3.5.8)$$

De plus, si la série

$$\sum_{\lambda \in \hat{G}} (\dim \lambda)^{2-2g} \quad (3.5.9)$$

est convergente, alors la décomposition (3.5.8) est uniformément et absolument convergente et la distribution volume est une fonction de classe  $C^\infty$ .

Si on se place dans le cas de  $G = \mathrm{SU}(2)$ , alors d'après [19] on sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il y a une et une seule classe de représentation irréductible  $\lambda$  telle que  $\dim \lambda = n$ . Dans ce cas, on voit que la série (3.5.9) est convergente pour tout  $g \geq 2$  et le volume total de la variété de représentation est donné par :

$$|\mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{SU}(2))| = \zeta(2g-2) \times |\mathrm{SU}(2)|^{2g-1} \quad (3.5.10)$$

où  $\zeta$  représente la fonction zeta de Riemann.

#### 3.5.3 Surfaces non-orientables

Pour une surface non-orientable  $M$  de genre  $k$ , on considère la présentation standard :

$$\pi_1(M) = \langle A_1, \dots, A_k \mid A_1^2 \cdots A_k^2 \rangle.$$

La distribution volume associée, que nous notons  $h_k$ , est donnée par la formule :

$$h_k(w) = \int_{G^k} \delta_r(x_1^2 \cdots x_k^2 \cdot w^{-1}) dx_1 \cdots dx_k, \text{ pour } w \in G.$$

### 3. MESURE INVARIANTE SUR L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

La distribution  $h_k$  est une distribution de classe. Pour montrer la régularité de cette distribution au point  $1 \in G$ , on se sert de l'indicateur de Frobenius-Schur (pour plus de détails voir [23].)

**Définition 3.5.3** Soit  $\lambda$  une représentation de  $G$  ayant pour caractère  $\chi_\lambda$ . On appelle indicateur de Frobenius-Schur le réel :

$$I_{FS}(\lambda) = \frac{1}{|G|} \int_G \chi_\lambda(w^2) dw.$$

L'indicateur de Frobenius-Schur ne peut prendre que trois valeurs : on a  $I_{FS}(\lambda) \in \{-1, 0, 1\}$ . On peut donc décomposer l'ensemble  $\hat{G}$  en l'union disjointe des trois sous-ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \hat{G}_1 &= \left\{ \lambda \in \hat{G} \mid I_{FS}(\lambda) = 1 \right\}, \\ \hat{G}_0 &= \left\{ \lambda \in \hat{G} \mid I_{FS}(\lambda) = 0 \right\}, \\ \hat{G}_{-1} &= \left\{ \lambda \in \hat{G} \mid I_{FS}(\lambda) = -1 \right\}. \end{aligned}$$

On peut alors énoncer la proposition suivante :

**Proposition 3.5.4** La décomposition en caractères de la distribution volume  $h_k$  est donnée par :

$$h_k(w) = \sum_{\lambda \in \hat{G}_1} \left( \frac{|G|}{\dim \lambda} \right)^{k-1} \chi_\lambda(w) - \sum_{\lambda \in \hat{G}_{-1}} \left( -\frac{|G|}{\dim \lambda} \right)^{k-1} \chi_\lambda(w) \quad (3.5.11)$$

De plus, si la série

$$\sum_{\lambda \in \hat{G}_1} (\dim \lambda)^{2-k} + (-1)^{2-k} \sum_{\lambda \in \hat{G}_{-1}} (\dim \lambda)^{2-k} \quad (3.5.12)$$

est convergente, alors la décomposition (3.5.11) est uniformément et absolument convergente et la distribution volume  $h_k$  est une fonction de classe  $C^\infty$ .

**Preuve :** En utilisant (3.5.5), nous obtenons :

$$h_g = \overbrace{h_1 * \dots * h_1}^{g\text{-times}}.$$

Ainsi, il suffit de trouver la décomposition de  $h_1$  pour trouver la décomposition de  $h_k$ .

Soit  $h_1(w) = \sum_\lambda Z_\lambda \chi_\lambda(w)$  la décomposition en caractères irréductibles de la distribution  $h_1$ . Le coefficient  $Z_\lambda$  est donné par (voir Dieudonné [19]) :

$$\begin{aligned} Z_\lambda &= \frac{1}{|G|} \int_G h_1(w) \bar{\chi}_\lambda(w) dw \\ &= \frac{1}{|G|} \int_G \int_G \delta(x^2 w^{-1}) \bar{\chi}_\lambda(w) dw dx \\ &= \frac{1}{|G|} \int_G \bar{\chi}_\lambda(x^2) dx \\ &= \frac{1}{|G|} \int_G \chi_\lambda(x^2) dx \\ &= I_{FS}(\lambda). \end{aligned}$$

### 3.5 Régularité dans le cas des groupes de surface

Il suffit d'utiliser la décomposition  $\widehat{G} = \widehat{G}_{-1} \sqcup \widehat{G}_0 \sqcup \widehat{G}_1$  pour obtenir :

$$h_1(w) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}_1} \chi_\lambda(w) - \sum_{\lambda \in \widehat{G}_{-1}} \chi_\lambda(w).$$

Les relations d'orthogonalité de Schur appliquées  $k-1$  fois à la convolution  $h_g = \overbrace{h_1 * \dots * h_1}^{g\text{-fois}}$  nous permettent de retrouver la formule (3.5.12).  $\square$

Pour  $G = \mathrm{SU}(2)$ , on sait que les dimensions des représentations dans  $\widehat{G}_1$  sont de dimension paire, et les représentations dans  $\widehat{G}_{-1}$  sont de dimension impaire. On a donc

$$h_k(1) = |G|^{k-1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{2-k} + (-1)^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{2-k} \right).$$

Cette série est absolument convergente pour tout  $k \geq 4$ .

#### 3.5.4 Surfaces à bord

Lorsque  $M$  est une surface à bord (orientable ou non), son groupe fondamental est le groupe libre  $F_N$  en  $N = 1 - \chi(M)$  générateurs. La présentation standard de  $F_N$  est la présentation triviale avec  $N$  générateurs et aucune relation :

$$F_N = \langle A_1, \dots, A_N \rangle.$$

Dans ce cas, l'application  $p : \mathrm{Hom}(F_N, G) \rightarrow G^N$  est un isomorphisme, et  $q$  est la fonction triviale. La mesure obtenue par la construction précédente est la mesure de Haar produit sur  $G^N$ . Cette mesure est naturellement  $\mathrm{Out}(F_N)$ -invariante.

### 3. MESURE INVARIANTE SUR L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

---

## Chapitre 4

# Variété de caractères en petite caractéristique

*J'ai autant de plaisir à  
déchiffrer des partitions de Chopin  
que des livres d'équations.*  
– Alain Connes

Dans ce chapitre, nous étudions l'action du groupe modulaire sur l'espace  $\mathfrak{X}(S, \mathrm{SU}(2))$  dans le cas où  $S$  est une surface à bord de caractéristique d'Euler  $\chi(S) = -1$  ou  $-2$ . Dans ce cas, le groupe fondamental  $\pi_1(S)$  est un groupe libre à deux (si  $\chi(S) = -1$ ) ou trois (si  $\chi(S) = -2$ ) générateurs. Pour étudier l'espace  $\mathfrak{X}(S, \mathrm{SU}(2))$ , nous nous plaçons dans un cadre plus général en prenant comme groupe  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , dont  $\mathrm{SU}(2)$  est un sous-groupe, et en définissant la *variété de caractères*. Dans les cas qui nous intéressent ici, la variété de caractères s'exprime de façon relativement simple à l'aide d'un nombre fini (et manipulable) de coordonnées.

Ensuite, nous pouvons exprimer les éléments du groupe modulaire comme des automorphismes polynomiaux dans ces coordonnées. En particulier, nous pourrions montrer que les twists de Dehn agissent comme des rotations sur des sous-ellipses de la variété de caractères. Cela nous permet de montrer les premiers cas d'ergodicité sur les surfaces non-orientables de caractéristique  $-2$ , et également que l'action n'est pas ergodique dans le cas des surfaces non-orientables de caractéristique  $-1$ .

Le cas de la surface fermée non-orientable de genre trois est traité à la fin du chapitre. Son groupe fondamental n'est pas libre, mais est engendré par trois éléments. Nous exprimons alors la variété de caractères comme un sous-ensemble de  $\mathbb{C}^4$  et nous exhibons une fonction non-constante invariante par l'action du groupe modulaire. Nous montrons ensuite que l'action du groupe modulaire est ergodique sur les lignes de niveau de cette fonction.

### 4.1 Variété de caractères

En général, les espaces de modules  $\mathfrak{X}(\pi, G)$  ne sont pas des ensembles algébriques. Cependant dans le cas où le groupe est  $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , l'espace de modules  $\mathfrak{X}(\pi, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  est très proche d'un ensemble algébrique appelé *variété de caractères* étudié par de nombreux auteurs (voir par

## 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

---

exemple [21] [15] [73] [37]). Nous donnons ici un aperçu rapide de la variété de caractère, en insistant sur les groupes libres à deux et trois générateurs essentiellement.

### 4.1.1 Fonction trace

#### 4.1.1.1 Groupe cyclique

Commençons par le cas le plus simple, lorsque le groupe  $\pi$  est libre à un seul générateur, noté  $F_1 = \langle A \rangle$ . L'espace quotient  $\mathfrak{X}(F_1, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  muni de la topologie usuelle n'est pas séparé. En effet, les orbites de l'action de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  par conjugaison sur  $\mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  ne sont pas nécessairement fermées. Par exemple, la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est conjuguée à  $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  pour tout  $t \in \mathbb{C}^*$ . La classe de conjugaison d'une représentation  $\rho : F_1 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  telle que  $\rho(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  n'est donc pas séparée de celle de la représentation triviale.

**Remarque 4.1.1** *Plus généralement, lorsque  $\pi$  est un groupe de présentation finie tel qu'il existe un morphisme non-trivial de  $\pi$  dans  $F_1$ , l'espace de module  $\mathfrak{X}(\pi, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  n'est pas séparé.*

Pour simplifier les choses, nous voulons nous ramener à un espace séparé. Nous considérons donc le *plus gros quotient séparé* de  $\mathfrak{X}(\pi, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ , c'est à dire l'espace obtenu en identifiant les points qui n'ont pas de voisinages ouverts disjoints. Une définition équivalente est donnée par :

**Définition 4.1.2** *Soit  $\mathfrak{X}$  un espace topologique. On dit qu'un quotient  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^s$  est le plus gros quotient séparé de  $\mathfrak{X}$  si  $\mathfrak{X}^s$  est séparé et si pour toute application continue  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  vers un espace séparé  $\mathfrak{Y}$ , il existe une unique fonction  $\bar{f} : \mathfrak{X}^s \rightarrow \mathfrak{Y}$  telle que  $f = \bar{f} \circ \pi$ .*

L'espace des représentations  $\mathrm{Hom}(F_1, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  est naturellement identifié à  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ . En effet, une représentation  $\rho : F_1 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  est uniquement déterminée par l'image  $\rho(A)$  du générateur de  $F_1$ . Le théorème suivant est classique (voir Goldman [33] pour une démonstration) :

#### Théorème 4.1.3

1. Pour toute fonction régulière  $f : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  invariante par conjugaison, il existe un polynôme  $F \in \mathbb{C}[t]$  tel que  $f(g) = F(\mathrm{tr}(g))$ .
2. Pour tout  $t \in \mathbb{C}$ , il existe  $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  tel que  $\mathrm{tr}(g) = t$ .
3. Inversement, si  $\mathrm{tr}(g) = \mathrm{tr}(g') \neq \pm 2$ , alors il existe  $h \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  tel que  $g' = hgh^{-1}$ .

Ce théorème énonce en particulier qu'en dehors de l'ensemble  $\mathrm{tr}^{-1}\{\pm 2\}$ , la fonction trace

$$\mathrm{tr} : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

est le quotient topologique au sens usuel. De plus si  $A$  et  $B$  sont deux éléments de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  tels que  $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = \pm 2$ , alors les fermetures des orbites de  $A$  et  $B$  s'intersectent, c'est-à-dire que les classes d'équivalence de  $A$  et  $B$  ne peuvent pas être séparés par des ouverts.

Nous déduisons de cela que la fonction induite par la fonction trace :

$$\mathrm{tr} : \mathfrak{X}(F_1, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C}$$

est le plus gros quotient séparé de  $\mathfrak{X}(F_1, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ . Ainsi, l'image de la fonction trace est un ensemble algébrique très proche de l'espace de modules. Ceci est une propriété plus générale des espaces  $\mathfrak{X}(\pi, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  pour un groupe  $\pi$  de présentation finie comme nous allons le voir.

#### 4.1.1.2 Caractère d'une représentation

Cette étude dans le cas simple du groupe libre à un seul générateur est l'exemple fondamental qui motive l'introduction de la *variété de caractères*. Soit  $\pi$  un groupe de présentation finie.

**Définition 4.1.4** *Le caractère d'une représentation  $\rho : \pi \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  est la fonction :*

$$\begin{aligned} \chi_\rho : \pi &\longrightarrow \mathbb{C} \\ A &\longmapsto \mathrm{tr}(\rho(A)). \end{aligned}$$

Le caractère est un invariant des classes de conjugaison, puisque deux représentations conjuguées ont le même caractère. Cependant deux représentations ayant le même caractère ne sont pas forcément conjuguées. En effet, une représentation non-triviale de  $\pi$  dans le groupe des matrices triangulaires supérieures  $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  a le même caractère que la représentation triviale qui envoie tous les éléments sur  $I \in G$ . Néanmoins, les exemples qui donnent lieu à ces exceptions sont "rares" et sont exactement les représentations *réductibles*.

**Définition 4.1.5** *Une représentation  $\rho : \pi \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  est irréductible si les seuls sous-espaces invariants par l'image  $\rho(\pi)$  sont  $\{0\}$  et  $\mathbb{C}^n$ , sinon la représentation est réductible.*

En particulier,  $\rho : \pi \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  est réductible si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel de dimension 1 invariant par le groupe  $\rho(\pi)$ . La proposition suivante se trouve dans Culler-Shalen [15] :

**Proposition 4.1.6** *Soit  $\pi$  un groupe finiment engendré. Si  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux représentations de  $\mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  telles que  $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$  et  $\rho$  est irréductible alors  $\rho$  et  $\rho'$  sont conjuguées.*

Ainsi, en dehors des représentations réductibles, l'ensemble des caractères, noté  $X(\pi)$ , est en bijection avec l'espace de modules. L'intérêt essentiel est que l'ensemble des caractères possède une paramétrisation explicite comme ensemble algébrique. La proposition 4.1.7 nous dit par exemple que  $X(F_1)$  est l'espace affine  $\mathbb{C}$ . Nous continuons avec les cas des groupes libres en deux et trois générateurs, dont les ensembles de caractères possèdent des expressions explicites assez simples.

#### 4.1.1.3 Représentations dans $\mathrm{SU}(2)$

Lorsque nous considérons seulement les représentations dans le groupe  $\mathrm{SU}(2)$ , l'espace de modules est directement donné par la proposition suivante :

**Proposition 4.1.7** *L'application*

$$\mathrm{Hom}(F_1, \mathrm{SU}(2))/\mathrm{SU}(2) \xrightarrow{\mathrm{tr}} [-2, 2]$$

*est une bijection*

## 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

---

**Preuve :** Pour tout élément  $g \in \mathrm{SU}(2)$ , la trace  $\mathrm{tr}(g)$  est dans  $[-2, 2]$ . Et deux éléments  $g$  et  $g'$  sont conjugués dans  $\mathrm{SU}(2)$  si et seulement si ils ont la même trace. L'ensemble des classes de conjugaison de  $G$  est donc identifié avec l'intervalle  $[-2, 2]$ .  $\square$

Nous voyons sur ce premier exemple que pour les représentations dans  $\mathrm{SU}(2)$ , l'application trace correspond exactement au quotient par la conjugaison de  $\mathrm{SU}(2)$ . De façon plus générale, l'espace  $\mathfrak{X}(\pi, G)$  est séparé lorsque  $G$  est compact, et le plus gros quotient séparé est donc l'espace lui-même.

### 4.1.2 Groupe libre à deux générateurs

Le cas du groupe libre à deux générateurs remonte aux travaux de Fricke [21, 22] et de Vogt [81] (Pour une démonstration complète des résultats, voir également [33]). L'espace des représentations  $\mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  s'identifie à  $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))^2$  par l'application qui associe à une représentation l'image des deux générateurs  $A$  et  $B$  de  $F_2$ .

Le caractère d'une représentation  $\rho : F_2 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  est déterminé par la donnée de chaque  $\mathrm{tr}(\rho(w))$  avec  $w \in \pi$ . C'est à dire qu'on veut calculer  $\mathrm{tr}(w(A, B))$  où  $w$  est un mot en deux générateurs et  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  quelconques, en fonction d'un nombre fini de paramètres. Nous commençons par remarquer que :

$$\mathrm{tr}(I) = 2 \tag{4.1.1}$$

D'autre part le théorème de Cayley-Hamilton nous assure que pour tout  $B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$

$$B^2 - \mathrm{tr}(B)B + I = 0.$$

En multipliant cette identité par  $B^{-1}$ , nous arrivons à :

$$A + A^{-1} = \mathrm{tr}(A)I, \tag{4.1.2}$$

et en appliquant la fonction trace à cette identité nous obtenons :

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^{-1}). \tag{4.1.3}$$

D'autre part en multipliant (4.1.2) par  $A$  et en appliquant la trace nous obtenons :

$$\mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(AB^{-1}) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B). \tag{4.1.4}$$

Les trois identités (4.1.1), (4.1.3) et (4.1.4) nous permettent de calculer la trace  $\mathrm{tr}(w(A, B))$  de chaque mot en fonction des traces de  $A$ , de  $B$  et de  $AB$ . C'est-à-dire que pour tout élément de  $F_2$  vu comme un mot  $w$  en  $A$  et  $B$ , il existe un polynôme  $P_w \in \mathbb{C}[a, b, x]$ , tel que pour tout  $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  on a :

$$\mathrm{tr}(w(A, B)) = P_w(\mathrm{tr}(A), \mathrm{tr}(B), \mathrm{tr}(AB)).$$

A titre d'exemple nous calculons la trace du commutateur  $w(A, B) = [A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) &= \mathrm{tr}(AB)\mathrm{tr}(A^{-1}B^{-1}) - \mathrm{tr}(ABBA) \\ &= x^2 - (\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(ABB) - \mathrm{tr}(BB)) \\ &= x^2 - a(\mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(A)) - (\mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(I)) \\ &= a^2 + b^2 + x^2 - abx - 2 \\ &= \kappa(a, b, x). \end{aligned}$$

Une représentation  $\rho : F_2 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  étant déterminée par l'image des deux générateurs  $A$  et  $B$ , nous définissons l'application suivante :

$$t : \mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) \longrightarrow \mathbb{C}^3$$

$$\rho \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(\rho(A)) \\ \mathrm{tr}(\rho(B)) \\ \mathrm{tr}(\rho(AB)) \end{pmatrix}.$$

La preuve du théorème suivant se trouve dans [33] :

#### Théorème 4.1.8

1. Pour toute fonction régulière  $f : \mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C}$  invariante par conjugaison, il existe une fonction polynômiale  $F(a, b, x) \in \mathbb{C}[a, b, x]$  tel que pour tout  $\rho \in \mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  on a :

$$f(\rho) = F(t(\rho)).$$

2. L'application  $t$  est surjective.

3. Une représentation  $\rho$  de  $\mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  est réductible si et seulement si  $\kappa(a, b, x) = 2$

Ce théorème implique le fait que le caractère d'une représentation  $\rho : F_2 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  est uniquement déterminé par son image par  $t$ . Ainsi l'espace des caractères  $X(F_2)$  est identifié à l'espace affine  $\mathbb{C}^3$ .

##### 4.1.2.1 Caractères réels

Si le caractère d'une représentation satisfait  $\chi(\rho) \in \mathbb{R}^3$ , alors la représentation est conjuguée à une représentation dans l'une des deux formes réelles de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , c'est à dire  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  ou  $\mathrm{SU}(2)$ . Ce résultat a été établi par Morgan et Shalen [61], qui ont également prouvé le cas général. Pour déterminer à quelle forme réelle une représentation correspond, on utilise le théorème suivant (voir également Goldman ([29])

**Théorème 4.1.9** Soit  $\rho : F_2 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  une représentation telle que  $\chi(\rho) = (a, b, x) \in \mathbb{R}^3$ .

- Si  $-2 \leq a, b, x \leq 2$  et  $\kappa(a, b, x) \leq 2$  alors  $\rho$  est conjuguée à une représentation dans  $\mathrm{SU}(2)$ . De plus toutes les représentations dans  $\mathrm{SU}(2)$  ayant le même caractère sont  $\mathrm{SU}(2)$ -conjuguées.
- Inversement, si l'un des  $|a|, |b|, |x|$  ou  $\kappa(a, b, x)$  est supérieur ou égal à 2 alors la représentation est conjuguée à une représentation dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ .
- Si  $\kappa(a, b, x) = 2$  et  $a, b, x \in [-2, 2]$ , alors  $\rho$  est conjuguée à une représentation dans  $\mathrm{SO}(2) = \mathrm{SU}(2) \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ .

Notons  $E_\kappa = \kappa^{-1}([-2, 2]) \cap [-2, 2]^3 \subset \mathbb{R}^3$ . Le corollaire immédiat de ce théorème est :

**Corollaire 4.1.10** L'application  $t : \mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{SU}(2))/\mathrm{SU}(2) \longrightarrow E_\kappa$  est une bijection.

## 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

### 4.1.3 Groupe libre à trois générateurs

#### 4.1.3.1 Variété de caractères

Une représentation  $\rho$  du groupe libre  $F_3 = \langle A, B, C \rangle$  dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  correspond à un élément de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})^3$ . Comme dans le cas du groupe libre à deux générateurs, un nombre fini de fonctions traces vont suffire à exprimer le caractère d'une représentation. Nous déduisons des identités de la fonction trace trouvées précédemment que pour élément de  $F_3$  vu comme un mot  $w(A, B, C)$  en  $A, B$  et  $C$ , la trace  $\mathrm{tr}(\rho(w(A, B, C)))$  peut s'exprimer en fonction des huit fonctions traces données par :

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{tr}(\rho(A)) & x &= \mathrm{tr}(\rho(AB)) & d &= \mathrm{tr}(\rho(ABC)) \\ b &= \mathrm{tr}(\rho(B)) & y &= \mathrm{tr}(\rho(BC)) & e &= \mathrm{tr}(\rho(ACB)) \\ c &= \mathrm{tr}(\rho(C)) & z &= \mathrm{tr}(\rho(CA)). \end{aligned}$$

Cependant, l'ensemble des caractères n'est pas l'espace  $\mathbb{C}^8$  tout entier, mais un sous-ensemble de celui-ci. En effet ces huit fonctions satisfont deux relations qui expriment la somme et le produit des traces des mots de longueurs 3, en fonction des traces des mots de longueur 2 ou moins :

$$d + e = ay + bz + cx - abc = S \quad (4.1.5)$$

$$de = a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2 - (abx + bcy + caz) + xyz - 4 = P. \quad (4.1.6)$$

Ces identités se déduisent directement par le calcul en appliquant les identités précédentes plusieurs fois. Elles impliquent que les traces  $d$  et  $e$  sont les racines de l'équation polynomiale

$$\lambda^2 - S\lambda + P = 0.$$

On peut exprimer  $e$  comme un polynôme en les 7 autres traces en utilisant l'équation (4.1.5). En particulier, il suffit des sept fonctions  $(a, b, c, x, y, z, d)$  pour déterminer entièrement le caractère d'une représentation. Le théorème suivant nous donne la variété de caractère  $X(F_3)$ .

**Théorème 4.1.11** *L'ensemble des caractères  $X(F_3)$  s'identifie à l'hypersurface de  $\mathbb{C}^7$  donnée par l'ensemble des*

$$(a, b, c, x, y, z, d) \in \mathbb{C}^7$$

*satisfaisant l'équation :*

$$a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2 + d^2 - d(ay + bz + cx - abc) - (abx + bcy + caz) + xyz - 4 = 0 \quad (4.1.7)$$

*Cette hypersurface est un revêtement double de  $\mathbb{C}^6$  branché au dessus de l'hypersurface de  $\mathbb{C}^6$  définie par  $\Delta = 0$ , où  $\Delta$  est le discriminant de l'équation polynomiale de degré 2 en la variable  $d$ , correspondant à (4.1.7).*

Une preuve de ce théorème se trouve dans Goldman [33].

#### 4.1.3.2 Caractères réels

Un élément  $(a, b, c, x, y, z, d) \in \mathbb{R}^7$  correspond au caractère d'une représentation du groupe libre à trois générateurs à valeurs dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  ou dans  $\mathrm{SU}(2)$ . On donne ici une caractérisation des caractères de  $\mathrm{SU}(2)$ -représentations issue de l'article de Benedetto et Goldman [3]) sur la variété de caractère de la sphère à quatre trous. Une première restriction évidente est que les traces doivent toutes être dans  $[-2, 2]$ . Le théorème est le suivant :

**Théorème 4.1.12 (Benedetto-Goldman [3])** *Un élément  $(a, b, c, x, y, z, d) \in [-2, 2]^7$  est le caractère d'une représentation du groupe libre à trois générateurs dans  $\mathrm{SU}(2)$  si et seulement si l'une des deux inégalités suivantes est satisfaite :*

$$\begin{cases} 16 - abcd - 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) & \leq 0 \\ (16 - abcd - 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2))^2 - (4 - a^2)(4 - b^2)(4 - c^2)(4 - d^2) & \leq 0. \end{cases}$$

#### 4.1.4 Variété de caractères

Nous donnons ici quelques résultats généraux sur la variété de caractères telle qu'elle est définie par M. Culler et P. Shalen [15], sans rentrer dans les détails des démonstrations.

Soit  $\pi$  un groupe finiment engendré. On notera  $R(\pi) = \mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  l'espace des représentations dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ . Commençons tout d'abord par le résultat suivant :

**Proposition 4.1.13** *L'espace des représentations  $R(\pi)$  est un ensemble algébrique*

**Preuve :** Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  un ensemble générateur de  $\pi$ . Une représentation  $\rho : \pi \rightarrow G$  est uniquement déterminée par la donnée du  $n$ -uplet  $(\rho(A_1), \dots, \rho(A_n))$ . Ici chaque  $\rho(A_i)$  est une matrice

$$\rho(A_i) = \begin{pmatrix} w_i & x_i \\ y_i & z_i \end{pmatrix}, \text{ avec } w_i, x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C},$$

et on peut donc considérer que  $\rho$  est uniquement déterminé par le  $4n$ -uplet  $(w_1, x_1, \dots, y_n, z_n)$  de nombres complexes. On peut donc identifier  $R(\pi)$  avec le sous-ensemble de  $\mathbb{C}^{4n}$  donné par cette correspondance.

Soit  $Q_1, \dots, Q_r$  l'ensemble des relations de  $\pi$ , vu comme des mots en les générateurs  $A_1, \dots, A_n$ . Pour un ensemble de matrices  $(g_1, \dots, g_n)$ , on notera  $Q_j(g_1, \dots, g_n)$  la matrice obtenue en substituant  $A_i$  par  $g_i$  dans le mot  $Q_j$ . Alors un  $4n$ -uplet  $(w_1, x_1, \dots, y_n, z_n)$  appartient à l'ensemble  $R(\pi)$  si et seulement si on a

$$\begin{aligned} w_i z_i - x_i y_i &= 1, & \text{pour tout } i \in [[1, n]], \\ Q_j \left( \begin{pmatrix} w_1 & x_1 \\ y_1 & z_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} w_n & x_n \\ y_n & z_n \end{pmatrix} \right) &= 0, & \text{pour tout } j \in [[1, r]]. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'ensemble  $R(\pi) \subset \mathbb{C}^{4n}$  est l'ensemble des solutions d'un système d'équations polynomiales.  $\square$

**Remarque 4.1.14** *La structure algébrique définie ici est indépendante du choix des générateurs.*

Le lemme suivant est crucial pour comprendre la variété de caractère du groupe libre  $F_n$  en  $n$  générateurs :

**Lemme 4.1.15** *La trace d'un mot  $w(A_1, \dots, A_n)$  en les matrices  $A_1, \dots, A_n$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  est un polynôme à coefficients rationnels en les  $l = \frac{n(n^2 + 5)}{6}$  traces :*

$$\begin{aligned} t_i &:= \mathrm{tr}(A_i), & 1 \leq i \leq n \\ t_{ij} &:= \mathrm{tr}(A_i A_j), & 1 \leq i < j \leq n \\ t_{ijk} &:= \mathrm{tr}(A_i A_j A_k), & 1 \leq i < j < k \leq n \end{aligned}$$

#### 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

---

**Preuve :** Cette preuve est déjà présente dans les travaux de Vogt [81], repris ensuite par Magnus [56].

Tout d'abord nous appliquons l'identité (4.1.5) aux triplets de matrices  $(A_1 A_3, A_2, A_4)$ ,  $(A_1, A_2, A_3 A_4)$  et  $(A_4 A_1, A_2, A_3)$  pour obtenir les trois identités suivantes :

$$E_1 = t_{13}t_2t_4 - t_{13}t_{24} - t_2t_{134} - t_4t_{132} + t_{1234} + t_{4213} = 0$$

$$E_2 = t_{34}t_1t_2 - t_{34}t_{12} - t_1t_{234} - t_2t_{134} + t_{1234} + t_{2134} = 0$$

$$E_3 = t_{41}t_2t_3 - t_{41}t_{23} - t_2t_{413} - t_3t_{412} + t_{4123} + t_{3241} = 0$$

On a naturellement  $E_1 + E_2 - E_3 = 0$  ce qui nous donne l'identité :

$$2t_{1234} = t_{13}t_2t_4 - t_1t_2t_{34} - t_2t_3t_{41} - t_{13}t_{24} + t_{12}t_{34} + t_{23}t_{41} - t_{132}t_4 - t_1t_{234} + t_2t_{341} + t_3t_{412} \quad (4.1.8)$$

Dans l'égalité précédente, on peut remplacer  $A_4$  par n'importe quel mot non-vide et prendre  $i, j, k$  des entiers quelconques. Ainsi par induction nous pouvons exprimer la trace de n'importe quel mot en fonction des traces de mots de longueur inférieure à trois.  $\square$

En particulier, la variété de caractère  $X(F_n)$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{C}^l$ . Les travaux de Vogt [81] et Magnus [56] montrent que  $X(F_n)$  est un ensemble algébrique fermé. Une généralisation de ce théorème est donnée par Culler et Shalen [15] qui montrent que pour tout groupe  $\pi$  finiment engendré, l'ensemble  $X(\pi)$  est une variété algébrique. Nous pouvons même être plus précis et expliciter un ensemble d'équations polynomiales définissant cet ensemble algébrique.

Soit maintenant  $Q_1, \dots, Q_r$  un ensemble de mots en  $n$  générateurs. Définissons pour tout  $1 \leq i \leq n$  et tout  $1 \leq j \leq r$  la fonction :

$$p_{ij} : \text{Hom}(F_3, \text{SL}(2, \mathbb{C})) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\rho \longmapsto \text{tr}(\rho(Q_j A_i)) - \text{tr}(A_i).$$

Cette fonction peut être écrite comme un polynôme  $P_{ij}$  en les  $\frac{n(n^2+5)}{6}$  variables  $t_i$ ,  $t_{ij}$  et  $t_{ijk}$ . Si  $\pi$  est le groupe ayant pour présentation :

$$\pi = \langle A_1, \dots, A_n \mid Q_1, \dots, Q_r \rangle$$

et  $\rho$  un élément de  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}(2, \mathbb{R})(2, \mathbb{C}))$ , alors  $p_{ij}(\rho) = 0$  pour tout  $i, j$ . La réciproque est donnée par le théorème suivant de Gonzalez-Acuña et Montesinos-Amilibia [37] :

**Théorème 4.1.16** *La variété de caractère  $X(\pi)$  est donnée par*

$$X(\pi) = \{x \in X(F_n) \mid P_{ij}(x) = 0, \text{ pour tout } i, j\}$$

*En particulier,  $X(\pi)$  est un ensemble algébrique fermé.*

L'action de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  par conjugaison sur  $R(\pi)$  est également algébrique et nous pouvons donc définir le *quotient algebro-géométrique*, noté  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}(2, \mathbb{C})) // \text{SL}(2, \mathbb{C})$  qui est une variété affine dont l'anneau de coordonnées est égal au sous-anneau des fonctions  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -invariante sur l'anneau des coordonnées de  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ . Les travaux de Procesi [73] montrent que dans le cas où le groupe est  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  (ou plus généralement  $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ ), l'anneau des coordonnées est engendré par les fonctions traces. C'est-à-dire que le quotient algebro-géométrique est isomorphe à la variété de caractères. Nous n'entrerons pas ici dans la théorie générale des quotients dans le cadre de la géométrie algébrique (citons quand même [63] comme référence sur le sujet).

Dans le cas où le groupe  $G$  est compact, les orbites sous l'action de  $G$  sont toujours fermées et  $\mathfrak{X}(\pi, G)$  est séparé pour la topologie usuelle. Un ensemble séparé est lui-même son plus gros quotient séparé. Ainsi, pour  $G = \mathrm{SU}(2)$ , l'espace de module est identifié à un sous-ensemble de la variété de caractères.

## 4.2 Surfaces de caractéristique -1

Dans la suite de ce chapitre nous nous limiterons généralement au cas où  $G = \mathrm{SU}(2)$ , et désignerons l'ensemble  $\mathfrak{X}(\pi_1(M), \mathrm{SU}(2))$  par  $\mathfrak{X}(M)$ .

Lorsque  $M$  est une surface à bord de caractéristique  $-1$ , son groupe fondamental est le groupe libre à deux générateurs. Il y a quatre types topologiques de telles surfaces :

- la sphère à trois trous  $\Sigma_{0,3}$  ;
- le tore à un trou  $\Sigma_{1,1}$  ;
- le plan projectif à deux trous  $N_{1,2}$  ;
- la bouteille de Klein à un trou  $N_{2,1}$ .

Dans chacun des cas, l'espace de module  $\mathfrak{X}(M)$  est donné par la Proposition 4.1.10, les espaces  $\mathfrak{X}(M)$  sont donc tous homéomorphes. Cependant, les espaces de modules relatifs à des classes de conjugaison au bord ont des formes différentes. Le groupe modulaire est dans chaque cas un sous-groupe de  $\mathrm{Out}(F_2)$  agissant sur les espaces de modules relatifs.

Nous étudions l'action du groupe modulaire de façon explicite dans les coordonnées de l'espace de modules.

### 4.2.1 Sphère à trois trous

Soit  $M = \Sigma_{0,3}$  une sphère à trois trous. Son groupe fondamental admet la présentation géométrique suivante :

$$\pi_1(\Sigma_{0,3}) = \langle A, B, C \mid ABC \rangle$$

où  $A, B$  et  $C$  correspondent aux trois composantes de bords de la surface. Le groupe  $\pi_1(\Sigma_{0,3})$  est isomorphe au groupe libre engendré par  $A$  et  $B$ . Le caractère d'une représentation  $\rho : \pi_1(\Sigma_{0,3})$  est donc donné par les coordonnées  $(a, b, x) = (\mathrm{tr}(\rho(A)), \mathrm{tr}(\rho(B)), \mathrm{tr}(\rho(AB)))$ . La trace de la composante de bord est donnée par :

$$c = \mathrm{tr}(\rho(C)) = \mathrm{tr}(\rho((AB)^{-1})) = \mathrm{tr}(\rho(AB)) = x$$

L'espace de modules est donc :

$$\mathfrak{X}(\Sigma_{0,3}) = \{(a, b, c) \in [-2, 2]^3 \mid \kappa(a, b, c) \leq 2\}.$$

La restriction d'une représentation  $[\rho] \in \mathfrak{X}(\Sigma_{0,3})$ , au bord  $\mathfrak{X}(\partial\Sigma_{0,3})$  est donné par la classe de conjugaison des éléments  $\rho(A), \rho(B)$  et  $\rho(C)$ . D'après la proposition 4.1.7, nous avons  $[\mathrm{SU}(2)]^3 = [-2, 2]^3$ . Soit un élément  $\mathcal{C} = (a, b, c) \in [-2, 2]^3$ , l'espace de module relatif à  $\mathcal{C}$  est réduit à un seul point.

D'autre part, le groupe modulaire de  $\Sigma_{0,3}$  est trivial. Ceci nous donne le premier cas trivial du Théorème 1.

### 4.2.2 Tore à un trou

Soit  $\Sigma_{1,1}$  un tore à un trou. Son groupe fondamental admet la présentation géométrique suivante :

$$\pi_1(\Sigma_{1,1}) = \langle A, B, C \mid [A, B]C \rangle,$$

#### 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

où  $C$  correspond au générateur de  $\pi_1(\partial\Sigma_{1,1})$ . Pour une représentation  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ , l'application  $\chi(\rho) = (a, b, x)$  nous donne les coordonnées de l'espace  $\mathfrak{X}(\Sigma_{1,1})$ . Nous voyons que  $\text{tr}(\rho(C)) = \text{tr}(\rho([A, B])) = a^2 + b^2 + x^2 - abx - 2 = \kappa(a, b, x)$ . L'espace de module relatif à  $\mathcal{C} = c \in [-2, 2]$  est donc homéomorphe à l'ensemble :

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(\Sigma_{1,1}) = \{(a, b, x) \in [-2, 2]^3 \mid \kappa(a, b, x) = c\}$$

L'action d'un twist de Dehn s'exprime simplement dans ces coordonnées. Il suffit d'appliquer des twists de Dehn par rapport à deux courbes suffit pour montrer l'ergodicité de l'action du groupe modulaire. La méthode utilisée dans la suite pour montrer l'ergodicité dans le cas des surfaces non-orientables de caractéristique  $-2$  suit le même principe que la démonstration de l'ergodicité dans le cas du tore à un trou présente dans [30]. Nous exposons ici une démonstration détaillée pour plus de clarté.

On note  $\tau_A$  le twist de Dehn selon la courbe  $A$ . Il est donné par l'élément de  $\text{Aut}(F_2)$  suivant :

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau}_A : A &\longmapsto A \\ B &\longmapsto BA \end{aligned}$$

Le twist de Dehn agit sur  $\mathfrak{X}(M)$  et induit une application  $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  définie par :

$$\tau_A \begin{pmatrix} a \\ b \\ x \end{pmatrix} = \tau_A(\chi(\rho)) = \chi(\tau_A(\rho)) = \begin{pmatrix} \text{tr}(\rho(\tau_A(A))) \\ \text{tr}(\rho(\tau_A(B))) \\ \text{tr}(\rho(\tau_A(AB))) \end{pmatrix}$$

Avec l'algorithme décrit précédemment, on peut donner le caractère  $\chi(\tau_A \cdot \rho)$  en calculant chaque trace  $\text{tr}(\rho(\tau_A(A)))$ ,  $\text{tr}(\rho(\tau_A(B)))$  et  $\text{tr}(\rho(\tau_A(AB)))$ . Ce qui nous donne l'application :

$$\begin{aligned} a &\longmapsto a \\ b &\longmapsto x \\ x &\longmapsto ax - b \end{aligned}$$

La fonction  $a$  est invariante par l'action de  $\tau_A$ . Par définition du groupe modulaire, la classe de conjugaison  $\mathcal{C}$  de  $\rho(C)$  doit être invariante par le twist de Dehn  $\tau_A$ . C'est à dire que  $\text{tr}(\rho(C)) = c = \kappa(a, b, x)$  est une fonction invariante. Ce qui se vérifie par un calcul direct sur la fonction  $\kappa$ . Soit  $c = \mathcal{C} \in [-2, 2]$ . Pour une valeur de  $a$  fixée, on note l'intersection :

$$E_{\mathcal{C}}(\Sigma_{1,1})(a) := \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) \cap (\{a\} \times \mathbb{R}^2).$$

On a donc l'ensemble :

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{C}}(\Sigma_{1,1})(a) &= \{a\} \times \{(b, x) \in [-2, 2]^2 \mid (a, b, x) \in \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M)\} \\ &= \{a\} \times \{(b, x) \in [-2, 2]^2 \mid a^2 + b^2 + x^2 - abx - 2 = c\} \\ &= \{a\} \times \left\{ (b, x) \in [-2, 2]^2 \mid \frac{2+a}{4}(b+x)^2 + \frac{2-a}{4}(b-x)^2 = 2 + c - a^2 \right\} \end{aligned}$$

qui est une ellipse contenue dans le plan  $\{a\} \times \mathbb{R}^2$ . Pour comprendre l'action de  $\tau_A$  sur cette ellipse, on effectue un changement de coordonnées, linéaire en  $b$  et  $x$ , pour se ramener à un cercle.

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= \lambda^+ \cdot b + \lambda^- \cdot x \\ \tilde{x} &= \lambda^- \cdot b + \lambda^+ \cdot x \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

avec

$$\lambda^+ = \frac{\sqrt{2-a} + \sqrt{2+a}}{2} \text{ et } \lambda^- = \frac{\sqrt{2-a} - \sqrt{2+a}}{2}.$$

On a alors :

$$E_{\mathcal{C}}(\Sigma_{1,1})(a) = \{(\tilde{b}, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid \tilde{b}^2 + \tilde{x}^2 = 2 + c - a^2\}.$$

L'action de  $\tau_A$  sur ce cercle est donnée par l'action sur chacune des coordonnées.

$$\begin{aligned} \tau_A(\tilde{b}) &= \lambda^+ x + \lambda^-(ax - b) \\ &= \lambda^+ x - \lambda^- b + \frac{\lambda^-}{2} ax - \frac{\lambda^-}{2} ax + \frac{\lambda^+}{2} ab - \frac{\lambda^+}{2} ab \\ &= \frac{a}{2}(\lambda^+ b + \lambda^- x) - (\lambda^- b + \lambda^+ ab) + (\lambda^+ x + \lambda^- ax) \\ &= \frac{a}{2}\tilde{b} + \frac{(2-a)\sqrt{2+a} - (2+a\sqrt{2-a})}{4}\tilde{b} + \frac{(2+a)\sqrt{2-a} + (2-a\sqrt{2+a})}{4}x \\ &= \frac{a}{2}\tilde{b} + \frac{\sqrt{(2+a)(2-a)}}{2}(\lambda^- b + \lambda^+ x) \\ &= \frac{a}{2}\tilde{b} + \frac{\sqrt{(2+a)(2-a)}}{2}\tilde{x}. \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\tau_A(\tilde{x}) = -\frac{\sqrt{(2+a)(2-a)}}{2}\tilde{b} + \frac{a}{2}\tilde{a}.$$

Notons  $\theta_A = \cos^{-1}(a/2)$ . Les formules trigonométriques usuelles donnent :

$$\frac{\sqrt{(2+a)(2-a)}}{2} = \sin(\cos^{-1}(a/2)) = \sin(\theta_A).$$

On peut alors exprimer l'action en fonction de  $\theta_A$  :

$$\tau_X : \begin{bmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \theta_A & \sin \theta_A \\ -\sin \theta_A & \cos \theta_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{x} \end{bmatrix}.$$

L'action de  $\tau_A$  sur le cercle  $E_{\mathcal{C}}(M)(a)$  est donc la rotation orthogonale d'angle  $\theta_A$ . En particulier, lorsque  $\theta_A$  est un multiple irrationnel de  $\pi$ , l'action de  $\tau_A$  est ergodique sur  $E_{\mathcal{C}}(M)(a)$ . Comme  $\cos^{-1}(a/2)$  est un multiple irrationnel de  $\pi$  pour presque tout  $a \in [-2, 2]$ , on peut appliquer le Lemme 3.1.6 de décomposition ergodique. En effet, l'application  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) \ni (a, b, x) \mapsto a \in [-2, 2]$ , a pour fibres les ensembles  $E_{\mathcal{C}}(M)(a)$ . Pour toute fonction  $h : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  invariante par l'action de  $\tau_A$ , il existe une fonction  $H_1 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h(a, b, x) = H_1(a)$  presque partout.

Le raisonnement analogue s'applique au twist de Dehn selon  $B$ . Ainsi, pour toute fonction  $h : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(\Sigma_{1,1}) \rightarrow \mathbb{R}$  invariante par l'action de  $\tau_B$ , il existe une fonction  $H_2 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h(a, b, x) = H_2(b)$  presque partout.

La mesure symplectique sur  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(\Sigma_{1,1})$  possède une expression polynomiale par rapport aux coordonnées dans  $\mathbb{R}^3$ , et se trouve donc dans la classe de Lebesgue. Nous arrivons donc à la proposition suivante :

**Proposition 4.2.1** *Pour tout  $c \in [-2, 2]$ , l'action de  $\Gamma_{\Sigma_{1,1}}$  est ergodique sur  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(\Sigma_{1,1})$ .*

#### 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

**Preuve :** Soit  $c \in [-2, 2]$ . L'espace de modules relatif est identifié au sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  donné par :

$$\mathfrak{X}_c(M\Sigma_{1,1}) = \{(a, b, x) \in [-2, 2]^3 \mid x^2 - abx + (a^2 + b^2 - 2 - c) = 0\}.$$

Posons

$$\Delta_c(a, b) = (ab)^2 - 4(a^2 + b^2 - 2 - c)$$

le discriminant de l'équation quadratique en la variable  $x$  donnée par l'équation 4.1.7. On considère les applications

$$\begin{array}{lll} P_1 : \mathfrak{X}_c(M) & \rightarrow [-2, 2] & \text{et} \quad P_2 : \mathfrak{X}_c(M) \rightarrow [-2, 2] \\ (a, b, x) & \mapsto a & (a, b, x) \mapsto x. \end{array}$$

Les ensembles de niveaux de  $P_1$  et  $P_2$  définissent deux familles  $\mathcal{F}^1$  et  $\mathcal{F}^2$ .

Soit  $(a_0, b_0, x_0) \in \mathfrak{X}_c(M)$  tel que  $\Delta_c(a_0, b_0) > 0$ . Le réel  $x_0$  est l'une des deux racines distinctes de l'équation 4.1.7. Il existe un voisinage connexe  $U$  de  $(a_0, b_0, x_0)$  dans  $\mathfrak{X}_c(M)$  tel que  $\Delta_c(a, b) > 0$  pour tout  $(a, b, x) \in U$ . Ainsi sur ce voisinage, la coordonnée  $x$  d'une représentation est uniquement déterminée par  $(a, b)$  ce qui nous donne un homéomorphisme entre  $U$  et un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^2$ . Dans ces coordonnées, les applications  $P_1$  et  $P_2$  sont les projections orthogonales sur la première et la deuxième coordonnée respectivement. Les éléments de  $\mathcal{F}^1$  et  $\mathcal{F}^2$  sont donc envoyés sur les espaces affines  $\{a\} \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R} \times \{b\}$ . Ainsi la famille  $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$  engendre  $U$ .

Soit  $(a_0, b_0, x_0) \in \mathfrak{X}_c(M)$  tel que  $\Delta_c(a_0, b_0) = 0$ . Tout voisinage connexe  $U$  a une partition en trois sous-ensembles connexes donnés par :

$$\begin{aligned} U_0 &= \{(a, b, x) \in U \mid \Delta_c(a, b) = 0\} \\ U_+ &= \left\{ (a, b, x) \in U \mid \Delta_c(a, b) > 0 \text{ et } x = \frac{ab + \sqrt{\Delta_c(a, b)}}{2} \right\} \\ U_- &= \left\{ (a, b, x) \in U \mid \Delta_c(a, b) > 0 \text{ et } x = \frac{ab - \sqrt{\Delta_c(a, b)}}{2} \right\}. \end{aligned}$$

On peut choisir un voisinage  $U$  tel que  $U_0, U_+$  et  $U_-$  sont connexes et pour tout  $[\rho] \in U_+$ , la feuille de  $P_1$  passant par  $[\rho]$  est d'intersection non-vide avec  $U_0$  et  $U_-$ . En utilisant le résultat précédent, la famille  $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$  engendre  $U_+$  et  $U_-$ . Ainsi la famille  $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$  engendre  $U$ .

En conclusion, pour tout  $[\rho]$  dans  $\mathfrak{X}_c(M)$ , la famille  $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$  engendre un voisinage de  $[\rho]$ . Une fonction  $h : \mathfrak{X}_c(M)$  qui est  $\Gamma_M$ -invariante est en particulier  $\tau_A$ -invariante et  $\tau_B$ -invariante. Donc  $h$  est presque partout constante sur les feuilles de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . D'après le Lemme 3.1.8, on en déduit que pour tout  $[\rho]$ , il existe un voisinage ouvert tel que  $h$  presque partout constante sur ce voisinage. L'espace  $\mathfrak{X}_c(M)$  étant connexe, on en déduit que  $h$  est presque partout constante, ce qui prouve l'ergodicité.  $\square$

#### 4.2.3 Plan projectif à deux trous

Soit  $M = N_{1,2}$  un plan projectif à deux trous. Son groupe fondamental admet la présentation géométrique suivante :

$$\pi_1(N_{1,2}) = \langle A, B, C \mid A^2BC \rangle$$

où  $B$  et  $C$  correspondent aux générateurs de  $\pi_1(\partial N_{1,2})$ . Pour une représentation  $[\rho] \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ , l'application  $\chi([\rho]) = (a, b, x)$  nous donne les coordonnées de l'espace  $\mathfrak{X}(N_{1,2})$ .

On calcule  $c = \text{tr}(\rho(C)) = \text{tr}(\rho(A^2B)) = ax - b$ . L'espace de module relatif à  $\mathbb{C} = (b, c) \in [-2, 2]$  s'exprime donc simplement :

$$\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(N_{1,2}) = \left\{ (a, b, x) \in [-2, 2]^3 \mid \begin{array}{l} \kappa(a, b, x) \leq 2 \\ ax - b = c \end{array} \right\}$$

Cet espace s'identifie naturellement à l'ensemble

$$\mathcal{Y}_{k_1, k_2} = \{(a, x) \in [-2, 2] \mid ax = k_1 \text{ et } (a+x)^2 \leq k_2\}$$

où  $k_1 = b + c$  et  $k_2 = (b-2)(c-2) + 2$  sont des constantes ne dépendant que de  $b$  et  $c$ . L'espace  $\mathcal{Y}_{k_1, k_2}$  est l'intersection du disque de rayon  $\sqrt{k_2}$  avec

- une hyperbole lorsque  $k_1 \neq 0$  ;
- l'union de deux droites orthogonales (cas limite de l'hyperbole) lorsque  $k_1 = 0$ .

Le groupe modulaire de la surface  $N_{1,2}$  est trivial. L'espace de modules relatif n'étant pas réduit à un seul point, l'action ne peut pas être ergodique.

#### 4.2.4 Bouteille de Klein à un trou

Soit  $N_{2,1}$  une bouteille de Klein à un trou. Son groupe fondamental admet la présentation géométrique suivante :

$$\pi_1(N_{2,1}) = \langle A, B, C \mid A^2 B^2 C \rangle$$

où  $C$  correspond au générateur de  $\pi_1(\partial N_{2,1})$ . Pour une représentation  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ , l'application  $\chi(\rho) = (a, b, x)$  nous donne les coordonnées de l'espace  $\mathfrak{X}(N_{2,1})$ .

On calcule  $\text{tr}(\rho(C)) = \text{tr}(\rho(A^2B^2)) = abx - a^2 - b^2 + 2 = c$ . L'espace de module relatif à  $\mathbb{C} = c \in [-2, 2]$  s'exprime donc simplement :

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(N_{2,1}) &= \{(a, b, x) \in [-2, 2]^3 \mid \kappa(a, b, x) \leq 2, abx - a^2 - b^2 + 2 = c\} \\ &= \left\{ (a, b, x) \in [-2, 2]^3 \mid \begin{array}{l} \frac{2+x}{4}(a+b)^2 + \frac{2+x}{4}(a+b)^2 \leq 4 - x^2 \\ \frac{2+x}{4}(a+b)^2 + \frac{2+x}{4}(a+b)^2 = 2 - c \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (a, b, x) \in [-2, 2]^3 \mid x^2 \leq 2 + c, \frac{2+x}{4}(a+b)^2 + \frac{2-x}{4}(a-b)^2 = 2 - c \right\}. \end{aligned}$$

Si  $c \neq \pm 2$ , l'intersection de l'espace  $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(N_{2,1})$  avec un plan  $\mathbb{R}^2 \times \{x\}$  est une ellipse. L'espace de modules relatif à  $c$  est donc homéomorphe à un cylindre. Les représentations correspondant au bord du cylindre sont les représentations réductibles telles que  $\kappa(a, b, x) = 2$ .

Si  $c = -2$ , alors  $x = 0$  et l'espace de module est le cercle d'équation  $a^2 + b^2 = 4$ .

Si  $c = 2$ , l'intersection de l'espace  $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(N_{2,1})$  avec les plan  $\mathbb{R}^2 \times \{\pm 2\}$  est un segment de droite d'équation  $a = b$  ou  $a = -b$ . Si  $x \neq \pm 2$ , l'intersection est réduite au point  $(0, 0)$ . L'espace de modules est donc l'union de trois segments.

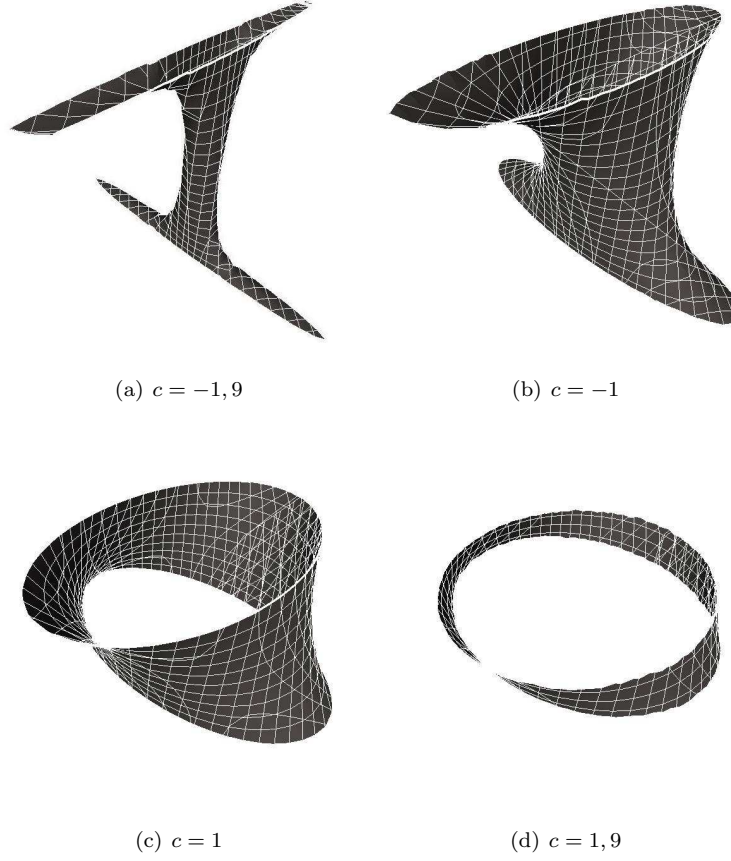
Le groupe modulaire de  $N_{2,1}$  est engendré par deux éléments : le twist de Dehn selon la courbe  $X = AB$  noté  $\tau_X$  et le crosscap slide  $\nu$ , défini dans le chapitre 1.

Le twist  $\tau_X$  est donné par l'élément de  $\text{Aut}(F_2)$  suivant :

$$\begin{aligned} A &\longmapsto AAB \\ B &\longmapsto B^{-1}A^{-1}B. \end{aligned}$$

#### 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

---



**Figure 4.1:** Espace de modules pour différentes valeurs de  $c$

On a de plus  $\tau_X(AB) = AB$ . Ce qui induit l'application  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  :

$$\begin{aligned} a &\longmapsto ax - b \\ b &\longmapsto a \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Le crosscap slide  $v$  est l'élément de  $\text{Aut}(F_2)$  suivant :

$$\begin{aligned} A &\longmapsto AABBA^{-1} \\ B &\longmapsto AB^{-1}A^{-1}. \end{aligned}$$

On a de plus  $v(AB) = AABA^{-1}$ . Ce qui induit l'application  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  :

$$\begin{aligned} a &\longmapsto bx - a \\ b &\longmapsto b \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

La coordonnée  $x$  est invariante par  $\tau_X$  et  $v$ , donc la fonction  $[\rho] \mapsto x$  est constante par l'action du groupe modulaire. Pour tout  $c \neq -2$ , la fonction  $[\rho] \mapsto x$  est surjective sur l'intervalle

$[-\sqrt{2+c}, \sqrt{2+c}]$  et n'est donc pas constante presque partout. L'action n'est donc pas ergodique sur  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{2,1})$ .

Pour  $c = -2$ , la fonction  $x$  ne prends que la valeur 0, la fonction invariante  $x$  est donc constante. L'action du groupe modulaire sur le cercle est donnée par  $\tau_X(a, b) = (-b, a)$  et  $v(a, b) = (-a, b)$ . Sur le cercle, Le twist  $\tau_X$  agit comme la rotation d'angle  $\pi/2$ , et le crosscap slide comme la symétrie par rapport à la droite  $a = 0$ . L'action du groupe modulaire sur le cercle est exactement l'action du groupe diédral  $D_4 \subset \text{SO}(2)$  qui est d'ordre 8. Les orbites de cette action sont finies, et ont au plus 8 éléments. L'action n'est donc pas ergodique. On arrive donc à la proposition suivante :

**Proposition 4.2.2** *Pour tout  $\mathcal{C} = c \in [-2, 2]$ , l'action de  $\Gamma_{N_{2,1}}$  sur  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{2,1})$  n'est pas ergodique.*

### 4.3 En caractéristique -2

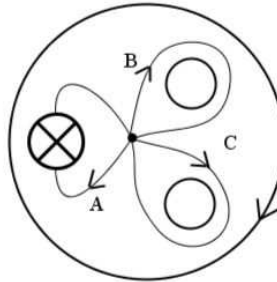
Lorsque  $M$  est une surface à bord de caractéristique  $-2$ , son groupe fondamental est le groupe libre  $F_3$  à trois générateurs. Il y a cinq types topologiques de telles surfaces, dont deux sont orientables et trois sont non-orientables :

- la sphère à quatre trous  $\Sigma_{0,4}$  ;
- le tore à deux trous  $\Sigma_{1,2}$  ;
- le plan projectif à trois trous  $N_{1,3}$  ;
- la bouteille de Klein à deux trous  $N_{2,2}$  ;
- la surface  $N_{3,1}$ .

L'ergodicité dans le cas des surfaces orientables est établi par W. Goldman dans [30]. Dans ce chapitre, nous montrons l'ergodicité dans le cas de  $N_{1,3}$ . Les cas des surfaces  $N_{2,2}$  et  $N_{3,1}$  sont commencés ici, mais seront seulement prouvés dans le chapitre suivant en utilisant d'autres arguments.

#### 4.3.1 Plan projectif à trois trous

Soit  $M = N_{1,3}$  un plan projectif à trois trous. (voir Figure 4.2)



**Figure 4.2:** La surface  $N_{1,3}$

Son groupe fondamental admet la présentation géométrique suivante :

$$\pi_1(N_{1,3}) = \langle A, B, C, K \mid A^2 BCK \rangle$$

#### 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

où  $B, C$  et  $K$  correspondent aux générateurs de  $\pi_1(\partial N_{1,3})$ . Le groupe  $\pi_1(N_{1,3})$  est le groupe libre en trois générateurs  $A, B, C$ . Pour une représentation  $[\rho] \in \text{Hom}(F_3, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ , l'application  $\chi([\rho]) = (a, b, c, x, y, z, d)$  nous donne les coordonnées de l'espace  $\mathfrak{X}(N_{1,3})$ , satisfaisant l'équation (4.1.7).

On calcule le caractère du bord  $k = \text{tr} \rho(K) = \text{tr}(\rho(A^2 BC)) = ad - y$ . L'espace de module dans  $\text{SU}(2)$  relatif à  $\mathcal{C} = (b, c, k) \in [-2, 2]$  est un sous-ensemble ouvert de :

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{1,3}) \subset \left\{ (a, b, c, x, y, z, d) \in [-2, 2]^3 \mid \begin{array}{l} (a, b, c, x, y, z, d) \text{ satisfait l'équation (4.1.7)} \\ ad - y = k \end{array} \right\}$$

Pour  $\mathcal{C}$  fixé, on remplace  $y$  par son expression en fonction de  $a, d$  et  $y$ , dans l'équation (4.1.7). L'équation devient alors

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + x^2 + z^2 + k^2 - \quad (4.3.1)$$

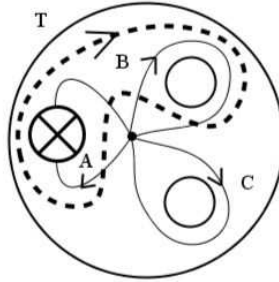
$$((ab + cd)x + (xz - bc - da)k + (ca + bd)z) + adxz - 4 = 0.$$

L'espace de module relatif à  $\mathcal{C}$  est donc identifié à :

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{1,3}) = \{(a, x, z, d) \in [-2, 2]^4 \mid (a, b, c, x, z, d, k) \text{ satisfait l'équation (4.3.1)}\}$$

On regarde maintenant l'action de certains twists de Dehn dans les coordonnées  $(a, x, z, d)$  de l'espace  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{1,3})$ .

##### 4.3.1.1 Twist de Dehn selon $T = AAB$



**Figure 4.3:** La courbe  $T$

La courbe dessinée dans la Figure 4.3 est représentée par l'élément  $T = AAB$  dans  $\pi_1(N_{1,3})$ . C'est une courbe séparante à deux cotés, on peut donc définir le twist de Dehn  $\tau_T$  selon  $T$ . Il est donné par l'automorphisme de  $\pi_1(M)$  suivant :

$$\begin{aligned} A &\mapsto A \\ B &\mapsto B \\ C &\mapsto B^{-1}A^{-1}A^{-1}CABB. \end{aligned}$$

Les éléments correspondant à  $X, K, Z$  et  $D$  sont transformés sous l'action de  $\tau_T$  comme suit :

$$\begin{aligned} X &= AB \mapsto AB \\ Z &= CA \mapsto B^{-1}A^{-1}A^{-1}CABBA \\ D &= ABC \mapsto A^{-1}CABB \\ K &= AABC \mapsto CABB. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que la transformation laisse invariant la classe de conjugaison des éléments de bord  $B, C$  et  $K$ , et donc le caractère du bord  $\mathcal{C} = (b, c, k)$ . Nous calculons la trace de chacun des éléments  $\tau_T(A)$ ,  $\tau_T(X)$ ,  $\tau_T(Z)$  et  $\tau_T(D)$  en fonction de  $(a, b, c, x, z, d, k)$ . Le twist de Dehn induit donc l'action sur les coordonnées  $(a, x, z, d) \in [-2, 2]^4$  donnée par :

$$\begin{aligned} a &\mapsto a \\ x &\mapsto x \\ z &\mapsto a^2x^2z - a^2kx - a^2cx + b^2z - 2abxz \\ &\quad + axd + bcx + abk + kx - bc + ac - z \\ d &\mapsto ak - axz + cx + bz - d. \end{aligned}$$

Les coordonnées  $a$  et  $x$  sont invariantes par l'action de  $\tau_T$ . On peut donc étudier l'action sur les deux coordonnées  $(z, d)$  en considérant l'ensemble :

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{C}}(N_{1,3})(a, x) &= \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) \cap (\{a, x\} \times \mathbb{R}^2) \\ &= \{(d, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (a, b, c, x, z, d, k) \text{ satisfait l'équation (4.3.1)}\}. \end{aligned}$$

pour  $(a, x) \in [-2, 2]$  fixés et un élément  $\mathcal{C}$  de  $\mathfrak{X}(\partial M)$  fixé.

Posons  $\text{tr}(AAB) = ax - b = t$ . Pour  $t \neq \pm 2$ , l'équation (4.3.1) se réécrit sous la forme :

$$\frac{2+t}{4} \left( (z+d) - \frac{(a+x)(c+k)}{t+2} \right)^2 + \frac{2-t}{4} \left( (z-d) - \frac{(x-a)(k-c)}{t-2} \right)^2 = R_T \quad (4.3.2)$$

avec

$$R_T := \frac{(t^2 + c^2 + k^2 - tck - 4)(a^2 + b^2 + x^2 - abx - 4)}{4 - t^2}.$$

Notons  $Q_\nu$  la forme quadratique à coefficients positifs définie pour  $\nu \neq \pm 2$  par :

$$Q_\nu(\eta, \zeta) = \frac{\eta^2 + \zeta^2 - \nu\eta\zeta}{4 - \nu^2}. \quad (4.3.3)$$

Pour  $\mathcal{C}$  et  $(a, x)$  fixés, l'équation (4.3.2) peut s'écrire sous la forme :

$$Q_t(d - d_0(T), z - z_0(T)) = R_T$$

avec

$$d_0(T) = ac + xk - t(ak + cx) \quad (4.3.4)$$

$$z_0(T) = ak + xc. \quad (4.3.5)$$

$$(4.3.6)$$

Le terme  $R_T$  est  $\tau_T$ -invariant, et nous montrons que :

$$R_T \geq 0.$$

#### 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

---

En effet, on a tout d'abord  $4 - t^2 > 0$ . D'autre part, pour une représentation  $\rho$  du groupe  $\langle A, B, C \rangle$  dans  $SU(2)$ , la restriction de la représentation au sous-groupe libre  $\langle A, B \rangle$  est également dans  $SU(2)$ . La caractère de la restriction est donné par  $(a, b, x)$  et d'après le Théorème 4.1.9 nous avons :

$$a^2 + b^2 + x^2 - abx - 4 \leq 0.$$

De même, le caractère de la restriction d'une représentation au sous-groupe libre  $\langle AAB, C \rangle$  est donné par  $(t, c, k)$ . En effet,  $AAB = T$  et  $AABC = K$ . On a donc l'inégalité :

$$t^2 + c^2 + k^2 - tck - 4 \leq 0,$$

ce qui prouve que  $R_T \geq 0$ . L'ensemble  $E_{\mathcal{C}}(a, x)$  est donc une ellipse, centrée en  $(z_0(T), d_0(T))$ . L'espace de module  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{1,3})$  est décomposé en une famille d'ellipses paramétrées par  $\mathcal{C}$  et  $(a, x)$ .

L'action de  $\tau_T$  sur  $E_{\mathcal{C}}(N_{1,3})(a, x)$  est donnée par :

$$\begin{bmatrix} z \\ d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_0(T) \\ d_0(T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 - 1 & t \\ -t & -1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} z \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_0(T) \\ d_0(T) \end{bmatrix} \right). \quad (4.3.7)$$

Après un changement de coordonnées affine de la même forme que (4.2.1), on ramène l'ellipse  $E_{\mathcal{C}}(a, x)$  en un cercle centré en  $(0, 0)$ . Dans ces coordonnées, la transformation induite par  $\tau_T$  est la rotation d'angle  $\theta_T = 2 \cos^{-1}(t/2)$ . En particulier, avec  $\mathcal{C} \in \mathfrak{X}(\partial M)$  fixé, pour presque tout  $(a, x) \in [-2, 2]$ , l'angle  $\theta_T$  est un multiple irrationnel de  $\pi$ . Donc pour presque tout  $(a, x)$ , l'action de  $\tau_T$  sur l'ellipse  $E_{\mathcal{C}}(a, x)$  est ergodique.

On peut appliquer le Lemme 3.1.6 de décomposition ergodique. En effet, l'application

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) \ni (a, x, z, d) \longmapsto (a, x) \in [-2, 2]^2$$

a pour fibres les ensembles  $E_{\mathcal{C}}(N_{1,3})(a, x)$ . Nous obtenons alors la proposition suivante :

**Proposition 4.3.1** *Pour toute fonction  $h : \mathbb{R}^4 \supset \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{1,3}) \rightarrow \mathbb{R}$  invariante par l'action de  $\tau_T$ , il existe une fonction  $H_1 : [-2, 2]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h(a, x, z, d) = H_1(a, x)$  presque partout.*

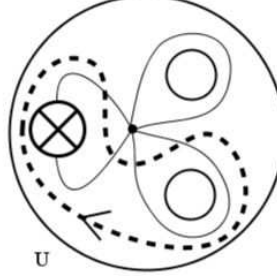
##### 4.3.1.2 Twist de Dehn selon $U = CAA$

La courbe dessinée dans la Figure 4.4 est représentée par l'élément  $U = CAA$  dans  $\pi_1(N_{1,3})$ . C'est une courbe séparante à deux cotés, on peut donc définir le twist de Dehn  $\tau_U$  selon  $U$ . Il est donné par l'automorphisme de  $\pi_1(N_{1,3})$  suivant :

$$\begin{aligned} A &\mapsto A \\ B &\mapsto A^{-1}A^{-1}C^{-1}BCAA \\ C &\mapsto C. \end{aligned}$$

Les éléments correspondant à  $X, K, Z$  et  $D$  sont transformés sous l'action de  $\tau_U$  comme suit :

$$\begin{aligned} X = AB &\mapsto A^{-1}C^{-1}BCAA \\ Z = CA &\mapsto CA \\ D = ABC &\mapsto A^{-1}C^{-1}BCAAC \\ K = AABC &\mapsto C^{-1}BCAAC. \end{aligned}$$


 Figure 4.4: La courbe  $U$ 

On vérifie facilement que la transformation laisse invariant la classe de conjugaison des éléments de bord  $B, C$  et  $K$ , et donc le caractère du bord  $\mathcal{C} = (b, c, k)$ . Le twist de Dehn induit donc l'action sur les coordonnées  $(a, x, z, d) \in [-2, 2]^4$  donnée par :

$$\begin{aligned} a &\mapsto a \\ x &\mapsto ab - zy + cd - x \\ z &\mapsto z \\ d &\mapsto ad - ay + abc - acx + abz - axz + acdz - acyz + \\ &\quad a^2d + ac^2d - ayz^2. \end{aligned}$$

Les coordonnées  $a$  et  $z$  sont invariante par l'action de  $\tau_U$ . On peut donc étudier l'action sur les deux coordonnées  $(x, d)$  en considérant l'ensemble :

$$\{(x, d) \in \mathbb{R}^2 \mid (a, b, c, x, z, d, k) \text{ satisfait l'équation (4.3.1)}\}$$

pour  $(a, x) \in [-2, 2]$  fixés et un élément  $\mathcal{C}$  de  $\mathfrak{X}(\partial M)$  fixé.

Posons  $\text{tr}(CAA) = az - c = u$ . Pour  $u \neq \pm 2$ , l'équation (4.3.1) peut se réécrire sous la forme :

$$Q_u(x - x_0(U), d - d_0(U)) = R_U$$

avec

$$d_0(U) = ab + zk - \nu(ak + bz) \quad (4.3.8)$$

$$x_0(U) = ak + zb \quad (4.3.9)$$

$$R_U = \frac{(u^2 + b^2 + k^2 - ubk - 4)(a^2 + c^2 + z^2 - acz - 4)}{4 - u^2}. \quad (4.3.10)$$

Le terme  $R_U$  est  $\tau_U$ -invariant et positif. En effet, on a  $4 - u^2 > 0$ . On reconnaît  $(a, c, z)$  et  $(u, b, k)$  comme les caractères de représentation des groupes libres  $\langle C, A \rangle$  et  $\langle U, B \rangle$  dans  $\text{SU}(2)$ . En effet, on retrouve  $CA = Z$  and  $UB = CKC^{-1}$ . Donc d'après le Théorème 4.1.9, on a :

$$a^2 + c^2 + z^2 - acz - 4 \leq 0, \quad (4.3.11)$$

$$u^2 + b^2 + k^2 - ubk - 4 \leq 0. \quad (4.3.12)$$

L'ensemble  $E_{\mathcal{C}}(N_{1,3})(a, x)$  est donc une ellipse, centrée en  $(x_0(U), d_0(U))$ . L'espace de module  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{1,3})$  est donc décomposé comme une famille d'ellipses paramétrées par  $\mathcal{C}$  et  $(a, z)$ .

#### 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

L'action de  $\tau_U$  sur  $E_{\mathbb{C}}(N_{1,3})(a, z)$  est donnée par :

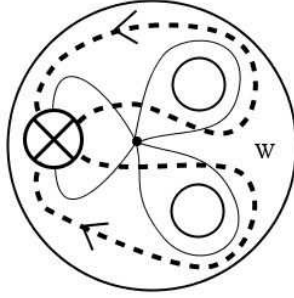
$$\begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_0(U) \\ d_0(U) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^2 - 1 & u \\ -u & -1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0(U) \\ d_0(U) \end{bmatrix} \right). \quad (4.3.13)$$

Après un changement de coordonnées affine de la même forme que 4.2.1, on ramène l'ellipse  $E_{\mathbb{C}}(N_{1,3})(a, z)$  en un cercle centré en  $(0, 0)$ . Dans ces coordonnées, la transformation induite par  $\tau_U$  est la rotation d'angle  $\theta_U = 2 \cos^{-1}(u/2)$ .

En utilisant les mêmes arguments que pour le twist  $\tau_T$ , on en déduit la proposition suivante :

**Proposition 4.3.2** *Pour toute fonction  $h : \mathbb{R}^4 \supset \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  invariante par l'action de  $\tau_U$ , il existe une fonction  $H_2 : [-2, 2]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h(a, x, z, d) = H_2(a, z)$  presque partout.*

##### 4.3.1.3 Twist de Dehn selon $W$



**Figure 4.5:** La courbe  $W$

La courbe dessinée dans la Figure 4.5 est représentée par l'élément  $W = CAB^{-1}A^{-1}$  dans  $\pi_1(N_{1,3})$ . C'est une courbe séparante à deux cotés, on peut donc définir le twist de Dehn  $\tau_W$  selon  $W$ . Il est donné par l'automorphisme de  $\pi_1(N_{1,3})$  suivant :

$$\begin{aligned} A &\mapsto CAB^{-1}A^{-1}C^{-1}AB \\ B &\mapsto (B^{-1}A^{-1}CA)B(A^{-1}C^{-1}AB) \\ C &\mapsto CAB^{-1}A^{-1}CABA^{-1}C^{-1} = WCW^{-1}. \end{aligned}$$

Les éléments correspondant à  $X, K, Z$  et  $D$  sont transformés sous l'action de  $\tau_T$  comme suit :

$$\begin{aligned} X = AB &\mapsto AB \\ Z = CA &\mapsto CA \\ D = ABC &\mapsto ABCAB^{-1}A^{-1}CABA^{-1}C^{-1} \\ K = AABC &\mapsto (CAB^{-1}A^{-1}C^{-1}AB)ABCA(B^{-1}A^{-1}CABA^{-1}C^{-1}). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que la transformation laisse invariant la classe de conjugaison des éléments de bord  $B, C$  et  $K$ , et donc laisse bien invariant le caractère du bord  $\mathcal{C} = (b, c, k)$ . Le twist de Dehn induit donc l'action sur les coordonnées  $(a, x, z, d) \in [-2, 2]^4$  donnée par :

$$\begin{aligned} a &\mapsto w(xc - d) - (x(cw - b) - (zc - a)) \\ x &\mapsto x \\ z &\mapsto z \\ d &\mapsto w(dw - (zc - a)) - (x(wb - c) - (zb - d)), \end{aligned}$$

où  $w = \text{tr}(W) = \text{tr}(CAB^{-1}A^{-1}) = xz - k$ . Les coordonnées  $x$  et  $z$  sont invariante par l'action de  $\tau_W$ . On peut donc étudier l'action sur  $(a, d)$  en considérant l'ensemble :

$$E_{\mathcal{C}}(N_{1,3})(x, z) = \{(a, d) \in [-2, 2]^2 \mid (a, b, c, x, z, d, k) \text{ satisfait l'équation (4.3.1)}\}$$

pour  $(x, z) \in [-2, 2]$  fixés et un caractère du bord  $\mathcal{C}$  fixé.

Pour  $w \neq \pm 2$ , l'équation (4.3.1) peut se réécrire sous la forme :

$$Q_w(a - a_0(W), d - d_0(W)) = R_W,$$

avec

$$\begin{aligned} a_0(W) &= bx + cz - w(bz + cx) \\ d_0(W) &= bz + cx \\ R_W &= \frac{(x^2 + z^2 + k^2 - xzk - 4)(b^2 + c^2 + w^2 - bcw - 4)}{4 - w^2}. \end{aligned}$$

Le terme  $R_W$  est  $\tau_W$ -invariant et positif. En effet, on a  $4 - w^2 > 0$ . On reconnaît  $(x, z, k)$  et  $(b, c, w)$  comme les caractères de représentation des sous-groupes libres engendrés par  $\langle X, Z \rangle$  et  $\langle C, AB^{-1}A^{-1} \rangle$  dans  $\text{SU}(2)$ . En effet, on retrouve  $XZ = ABCA = A^{-1}WA$  and  $CAB^{-1}A^{-1} = W$ . Donc d'après le Théorème 4.1.9, on a :

$$\begin{aligned} (x^2 + z^2 + k^2 - xzk - 4) &\leq 0, \\ (b^2 + c^2 + w^2 - bcw - 4) &\leq 0. \end{aligned}$$

L'ensemble  $E_{\mathcal{C}}(N_{1,3})(x, z)$  est donc une ellipse, centrée en  $(a_0(W), d_0(W))$ . L'espace de module  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{1,3})$  est donc décomposé comme une famille d'ellipses paramétrées par  $\mathcal{C}$  et  $(x, z)$ .

L'action de  $\tau_W$  sur  $E_{\mathcal{C}}(N_{1,3})(x, z)$  est donnée par :

$$\begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_0(W) \\ d_0(W) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^2 - 1 & w \\ -w & -1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0(W) \\ d_0(W) \end{bmatrix} \right). \quad (4.3.14)$$

Après un changement de coordonnées affine de la même forme que 4.2.1, on ramène l'ellipse  $E_{\mathcal{C}}(N_{1,3})(x, z)$  en un cercle centré en  $(0, 0)$ . Dans ces coordonnées, la transformation induite par  $\tau_W$  est la rotation d'angle  $\theta_W = 2 \cos^{-1}(w/2)$ .

En utilisant les mêmes arguments que pour le twist  $\tau_T$ , on obtient la proposition suivante :

**Proposition 4.3.3** *Pour toute fonction  $h : \mathbb{R}^4 \supset \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{1,3}) \rightarrow \mathbb{R}$  invariante par l'action de  $\tau_W$ , il existe une fonction  $H_2 : [-2, 2]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h(a, x, z, d) = H_3(x, z)$  presque partout.*

## 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

### 4.3.1.4 Conclusion

**Proposition 4.3.4** *Pour tout  $\mathcal{C} = (b, c, k) \in [-2, 2]^3$ , l'action de  $\Gamma_{N_{1,3}}$  sur  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{1,3})$  est ergodique.*

**Preuve :** Soit  $\mathcal{C} = (b, c, k)$  et une fonction  $h : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{1,3}) \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\Gamma$ -invariante. En particulier,  $f$  est  $\tau_T, \tau_U$  et  $\tau_W$  invariante. Elle est donc constante sur les ensembles de niveau  $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$  et  $\mathcal{F}^3$  des trois fonctions suivantes :

$$P_1(a, x, z, d) = (a, x) \quad P_2(a, x, z, d) = (a, z) \quad P_3(a, x, z, d) = (x, z).$$

La famille  $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2, \mathcal{F}^3$  engendre l'espace  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{1,3})$ . En effet, l'espace est identifié au sous-ensemble de  $\mathbb{R}^4$  donné par :

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{1,3}) = \{(a, x, z, d) \in [-2, 2]^4 \mid d^2 - R(a, x, z)d + S(a, x, z) = 0\}$$

où

$$\begin{aligned} R(a, x, z) &= axz - cx - bz + ak \\ S(a, x, z) &= a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + z^2 + k^2 - abx - kxz - bck - acz - 4. \end{aligned}$$

Posons

$$\Delta(a, x, z) = (R(a, x, z))^2 - 4S(a, x, z)$$

le discriminant de l'équation quadratique en la variable  $d$  donnée par l'équation.

Soit  $(a_0, x_0, z_0, d_0) \in \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{1,3})$  tel que  $\Delta(a_0, x_0, z_0) > 0$ . Alors  $d_0$  est l'une des deux racines distinctes de l'équation quadratique. Il existe un voisinage connexe  $U$  de  $(a_0, x_0, z_0, d_0)$  dans  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M)$  tel que  $\Delta(a, x, z) > 0$  pour tout  $(a, x, z, d) \in U$ . Ainsi sur ce voisinage, la coordonnée  $d$  d'une représentation est uniquement déterminée par  $(a, x, z)$  ce qui nous donne un homéomorphisme entre  $U$  et un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^3$ . Dans ces coordonnées, les applications  $P_1, P_2$  et  $P_3$  sont les projections orthogonales sur trois plans orthogonaux. On en déduit que les familles  $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$  et  $\mathcal{F}^3$  sont envoyés sur les espaces affines :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z^1 &= \mathbb{R}^2 \times \{z\} \\ \mathcal{F}_x^2 &= \mathbb{R} \times \{x\} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{F}_a^1 &= \{a\} \times \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Ainsi la famille  $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2, \mathcal{F}^3$  engendre  $U$ .

Soit  $(a_0, x_0, z_0, d_0) \in \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{1,3})$  tel que  $\Delta(a_0, x_0, z_0) = 0$ . Tout voisinage connexe  $U$  a une partition en trois sous-ensembles donnés par :

$$\begin{aligned} U_0 &= \{(a, x, z, d) \in U \mid \Delta(a, x, z) = 0\} \\ U_+ &= \left\{ (a, x, z, d) \in U \mid \Delta(a, x, z) > 0 \text{ et } x = \frac{R(a, x, z) + \sqrt{\Delta(a, x, z)}}{2} \right\} \\ U_- &= \left\{ (a, x, z, d) \in U \mid \Delta(a, x, z) > 0 \text{ et } x = \frac{R(a, x, z) - \sqrt{\Delta(a, x, z)}}{2} \right\} \end{aligned}$$

On peut choisir un voisinage  $U$  tel que  $U_0, U_+$  et  $U_-$  sont connexes et pour tout  $[\rho] \in U_+$ , la feuille de  $P_1$  passant par  $[\rho]$  est d'intersection non-vidée avec  $U_0$  et  $U_-$ . En utilisant le résultat précédent, la famille  $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2, \mathcal{F}^3$  engendre  $U_+$  et  $U_-$ . Ainsi la famille  $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2, \mathcal{F}^3$  engendre  $U$ .

En conclusion, pour tout  $[\rho]$  dans  $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(N_{1,3})$ , la famille  $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2, \mathcal{F}^3$  engendre un voisinage de  $[\rho]$ . Une fonction  $h : \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(N_{1,3})$  qui est  $\Gamma_{N_{1,3}}$ -invariante est en particulier  $\tau_U$ -invariante,  $\tau_T$ -invariante et  $\tau_W$ -invariante. Donc  $h$  est presque partout constante sur les feuilles de  $\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2$  et  $\mathcal{F}^3$ . D'après le Lemme 3.1.8, on en déduit que pour tout  $[\rho]$ , il existe un voisinage ouvert tel que  $h$  presque partout constante sur ce voisinage. L'espace  $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(N_{1,3})$  étant connexe, on en déduit que  $h$  est presque partout constante, ce qui prouve l'ergodicité.  $\square$

### 4.3.2 Bouteille de Klein à deux trous

Soit  $M = N_{2,2}$  une bouteille de Klein à deux trous. (voir Figure 4.6)

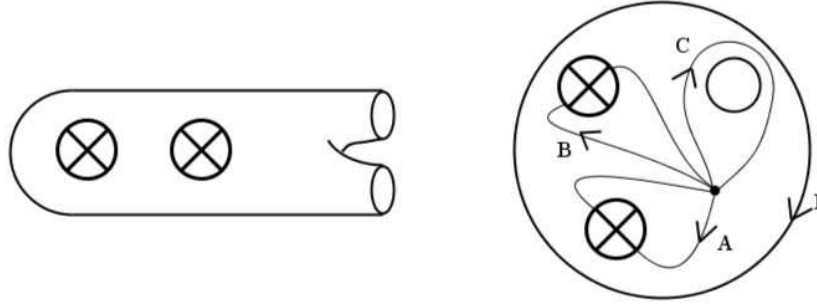


Figure 4.6: La surface  $N_{2,2}$

Son groupe fondamental admet la présentation géométrique suivante :

$$\pi_1(N_{2,2}) = \langle A, B, C, K \mid A^2 B^2 C K \rangle$$

où  $C$  et  $K$  correspondent aux générateurs de  $\pi_1(\partial N_{2,2})$ . Le groupe  $\pi_1(N_{2,2})$  est le groupe libre en trois générateurs  $A, B, C$ . Pour une représentation  $[\rho] \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ , l'application  $\chi([\rho]) = (a, b, c, x, y, z, d)$  nous donne les coordonnées de l'espace  $\mathfrak{X}(N_{2,2})$ , satisfaisant l'équation (4.1.7).

On calcule le caractère du bord  $k = \text{tr}(\rho(K)) = \text{tr}(\rho(A^2 B^2 C)) = adb - az - by + c$ .

L'espace de module dans  $\text{SU}(2)$  relatif à  $\mathcal{C} = (c, k) \in [-2, 2]$  est un sous-ensemble de :

$$\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(N_{2,2}) = \{(a, b, c, x, y, z, d) \in [-2, 2]^3 \mid (4.1.7), adb - az - by + c = k\}$$

Pour  $\mathcal{C}$  fixé, et  $a, b$  non-nuls, on remplace  $d$  par son expression en fonction de  $a, b, c, y, z$  et  $k$ .

$$d = \frac{az + by - c + k}{ab}$$

L'ensemble des représentations  $[\rho]$  telles que  $a, b$  sont nuls, est un ensemble de mesure nulle de  $\mathfrak{X}(N_{2,2})$ . On se place donc dans le complémentaire de ce sous-ensemble pour montrer l'ergodicité dans le cas de la bouteille de Klein à deux trous.

L'équation (4.1.7) devient alors

$$x^2 + (by - c)x \left(\frac{z}{b}\right) + \left(\frac{z}{b}\right)^2 + 2Dx + 2Ez + F = 0 \quad (4.3.15)$$

#### 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

---

avec

$$D = \frac{a^2b^2 - c^2 + ck + bcy}{-2ab}, E = \frac{2c - 2k - 2by - b^2c + b^2k + b^3y + a^2by}{-2ab^2},$$

$$F = \frac{1}{a^2b^2}(k^2 + (by - c)^2 - (a^2 - 2)(by - c)k + a^2b^2(a^2 + b^2 + ck - 4) - a^2ck + a^2bcy).$$

L'espace de module relatif à  $\mathcal{C}$  est donc identifié à

$$\{(a, b, x, y, z) | (a, b, c, x, y, z, k) \text{ satisfait l'équation (4.3.15)}\}$$

On regarde maintenant l'action de certains twists de Dehn dans les coordonnées  $(a, b, x, y, z)$  de l'espace  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N_{2,2})$ .

##### 4.3.2.1 Twist de Dehn selon $U = BBC$

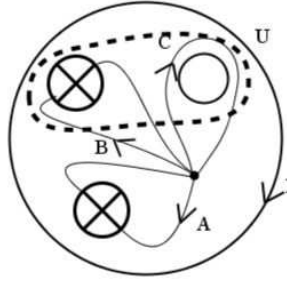


Figure 4.7: La courbe  $U$

La courbe représentée dans la Figure 4.7 est représentée par l'élément  $U = BBC$  dans  $\pi_1(N_{2,2})$ . C'est une courbe séparante à deux cotés, on peut donc définir le twist de Dehn  $\tau_U$  selon  $U$ . Il est donné par l'automorphisme de  $\pi_1(N_{2,2})$  suivant :

$$\begin{aligned} A &\mapsto A \\ B &\mapsto BBCBC^{-1}B^{-1}B^{-1} \\ C &\mapsto BBCB^{-1}B^{-1}. \end{aligned}$$

Les éléments correspondant à  $X, Y, Z$  et  $K$  sont transformés sous l'action de  $\tau_U$  comme suit :

$$\begin{aligned} X = AB &\mapsto ABBCBC^{-1}B^{-1}B^{-1} \\ Y = BC &\mapsto BBCB^{-1} \\ Z = CA &\mapsto BBCB^{-1}B^{-1}A \\ K = AABC &\mapsto AABBC. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que la transformation laisse invariant la classe de conjugaison des éléments de bord  $C$  et  $K$ , et donc le caractère du bord  $\mathcal{C} = (c, k)$ . On peut calculer la trace de chacun

des éléments  $\tau_U(A)$ ,  $\tau_U(B)$ ,  $\tau_U(X)$ ,  $\tau_U(Y)$  et  $\tau_U(Z)$  en fonction de  $(a, b, c, x, y, z, k)$ . Le twist de Dehn induit donc l'action sur les coordonnées  $(a, b, x, y, z) \in [-2, 2]^5$  donnée par :

$$\begin{aligned} a &\mapsto a \\ b &\mapsto b \\ x &\mapsto b^2xy^2 + b^2yz - b^3dy - aby^2 + b^2cd + c^2x \\ &\quad - 2bcxy + 2bdy - bcz + acy - yz - cd + ab - x \\ y &\mapsto y \\ z &\mapsto b(b^2d - bxy - bz + cx + ay - d) - bd + z \end{aligned}$$

Les coordonnées  $a, b$  et  $y$  sont invariante par l'action de  $\tau_U$ . On peut donc étudier l'action sur  $(x, z)$  en considérant l'ensemble

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{C}}(N_{2,2})(a, b, y) &= \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) \cap (\{a, b, y\} \times \mathbb{R}^2) \\ &= \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, z) \text{ satisfait l'équation (4.3.15)}\}. \end{aligned}$$

pour  $(a, b, y) \in [-2, 2]$  fixés et un élément  $\mathcal{C} = (c, k) \in [-2, 2]^2$  fixé.

On pose  $z' = \frac{z}{b}$ , et on peut calculer  $\text{tr}(BBC) = by - c = u$ . Pour  $u \neq \pm 2$ , on peut réécrire l'équation (4.3.15) sous la forme :

$$Q_u(x - x_0(U), z' - z'_0(U)) = R'_U$$

avec

$$x_0(U) = ab + zk - \nu(ak + bz) \quad (4.3.16)$$

$$z'_0(U) = ak + zb \quad (4.3.17)$$

$$R'_U = \frac{(b^2 + c^2 + y^2 - bcy - 4)((a^2 - 2)^2 + u^2 + k^2 - (a^2 - 2)uk - 4)}{a^2(4 - u^2)}. \quad (4.3.18)$$

Le terme  $R'_U$  est  $\tau_U$ -invariant et positif. En effet, on a  $a^2(4 - u^2) > 0$ . On reconnaît  $(b, c, y)$  et  $((a^2 - 2), u, k)$  comme les caractères de représentation des groupes libres  $\langle B, C \rangle$  et  $\langle AA, BBC \rangle$  dans  $\text{SU}(2)$ . On retrouve  $BC = y$  and  $AABBC = K$ , donc d'après le Théorème 4.1.9, on a :

$$b^2 + c^2 + y^2 - bcy - 4 \leq 0, \quad (4.3.19)$$

$$(a^2 - 2)^2 + u^2 + k^2 - (a^2 - 2)uk - 4 \leq 0. \quad (4.3.20)$$

L'ensemble  $E_{\mathcal{C}}(N_{2,2})(a, b, y)$  est donc une ellipse, centrée en  $(x_0(U), z'_0(U))$ . L'espace de module  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M)$  est donc décomposé en une famille d'ellipses paramétrées par  $\mathcal{C}$  et  $(a, b, y)$ .

L'action de  $\tau_U$  sur  $E_{\mathcal{C}}(N_{2,2})(a, b, y)$  est donnée par :

$$\begin{bmatrix} x \\ z' \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_0(U) \\ z'_0(U) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^2 - 1 & u \\ -u & -1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} x \\ z' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0(U) \\ z'_0(U) \end{bmatrix} \right). \quad (4.3.21)$$

Après un changement de coordonnées affine de la même forme que 4.2.1, on ramène l'ellipse  $E_{\mathcal{C}}(N_{2,2})(a, b, y)$  en un cercle centré en  $(0, 0)$ . Dans ces coordonnées, la transformation induite par  $\tau_U$  est la rotation d'angle  $\theta_U = 2 \cos^{-1}(u/2)$ .

En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on en déduit la proposition suivante :

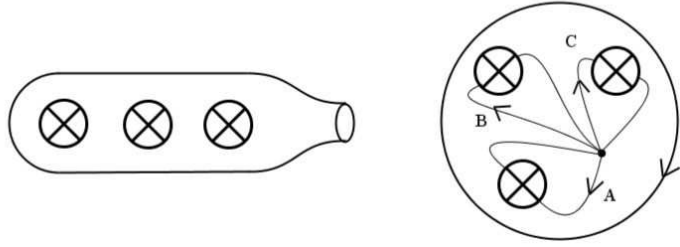
## 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

**Proposition 4.3.5** *Pour toute fonction  $h : \mathbb{R}^5 \supset \mathfrak{X}_c(N_{2,2}) \rightarrow \mathbb{R}$  invariante par l'action de  $\tau_U$ , il existe une fonction  $H_2 : [-2, 2]^3 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h(a, b, x, y, z) = H_2(a, b, y)$  presque partout.*

**Remarque 4.3.6** *Une démonstration directe de l'ergodicité est possible en utilisant la même méthode que pour le plan projectif à trois trous. Néanmoins, pour éviter des calculs inutiles, nous finirons la preuve au chapitre suivant en utilisant un autre argument pour conclure.*

### 4.3.3 Surface de genre trois à un trou

Soit  $M = N_{3,1}$  une surface non-orientable de genre trois à un trou. (voir Figure 4.8)



**Figure 4.8:** La surface  $N_{3,1}$

Son groupe fondamental admet la présentation géométrique suivante :

$$\pi_1(N_{3,1}) = \langle A, B, C, K \mid A^2 B^2 C^2 K \rangle$$

où  $K$  correspond au générateur de  $\pi_1(\partial N_{3,1})$ . Le groupe  $\pi_1(N_{3,1})$  est le groupe libre en trois générateurs  $A, B, C$ . Pour une représentation  $[\rho] \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ , l'application  $\chi([\rho]) = (a, b, c, x, y, z, d)$  nous donne les coordonnées de l'espace  $\mathfrak{X}(N_{3,1})$ , satisfaisant l'équation (4.1.7).

On calcule le caractère du bord  $k = \text{tr}(\rho(K)) = \text{tr}(\rho(A^2 B^2 C)) = abcd - bcy - acz - bax + a^2 + b^2 + c^2 - 2$ .

L'espace de module dans  $\text{SU}(2)$  relatif à  $\mathcal{C} = k \in [-2, 2]$  est identifié à un sous-ensemble de :

$$\mathfrak{X}_c(N_{3,1}) \subset \left\{ (a, b, c, x, y, z, d) \in [-2, 2]^3 \mid \begin{array}{l} (a, b, c, x, y, z, d) \text{ satisfait l'équation (4.1.7)} \\ abcd - bcy - acz - bax + a^2 + b^2 + c^2 - 2 = k \end{array} \right\}$$

Pour  $\mathcal{C}$  fixé, et  $a, b, c$  non-nuls, on remplace  $d$  par son expression en fonction de  $a, b, c, y, z$  et  $k$ .

$$d = \frac{bcy + acz + abx - a^2 - b^2 - c^2 + 2 + k}{abc}.$$

L'ensemble des représentations  $[\rho]$  telles que  $a, b, c$  sont nuls, est un ensemble de mesure nulle de  $\mathfrak{X}(N_{3,1})$ . On se place donc dans ce sous-ensemble pour montrer l'ergodicité dans le cas de la surface  $N_{3,1}$ .

L'équation (4.1.7) devient alors :

$$\left(\frac{x}{c}\right)^2 + (acz - a^2 - c^2 + 2) \left(\frac{x}{c} \frac{y}{a}\right) + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (4.3.22)$$

avec

$$D' = \frac{1}{abc^2}(a^2c^2 - 2a^2 - ab^2cz - ac^3z + 2acz + b^2c^2 - 2b^2 + c^4 - c^2k - 4c^2 + 2k + 4)$$

$$E' = \frac{1}{a^2bc}(a^4 - a^3cz + a^2b^2 + a^2c^2 - a^2k - 4a^2 - ab^2cz + 2acz - 2b^2 - 2c^2 + 2k + 4)$$

$$F = \frac{1}{c^2b^2a^2}(a^4 + a^3b^2cz - 2a^3cz + a^2b^2c^2k - 2a^2b^2c^2 + 2a^2b^2 + a^2c^2z^2 + 2a^2c^2 - 2a^2k - 4a^2 + ab^4cz + ab^2c^3z - ab^2ckz - 4ab^2cz - 2ac^3z + 2ackz + 4acz + b^4 + 2b^2c^2 - 2b^2k - 4b^2 + c^4 - 2c^2k - 4c^2 + k^2 + 4k + 4).$$

L'espace de module relatif à  $\mathbb{C}$  est donc identifié à

$$\{(a, b, c, x, y, z) | (a, b, c, x, y, z, k) \text{ satisfait l'équation (4.3.22)}\}$$

On regarde maintenant l'action d'un certain twists de Dehn dans les coordonnées  $(a, b, c, x, y, z)$  de l'espace  $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(N_{3,1})$ .

#### 4.3.3.1 Twist de Dehn selon $U = \text{BBC}$

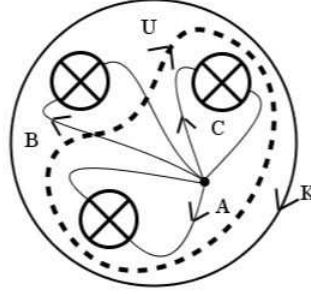


Figure 4.9: La courbe  $U$

La courbe dessinée dans la Figure 4.9 est représentée par l'élément  $U = AACC$  dans  $\pi_1(N_{3,1})$ . C'est une courbe séparante à deux cotés, on peut donc définir le twist de Dehn  $\tau_U$  selon  $U$ . Il est donné par l'automorphisme de  $\pi_1(N_{3,1})$  suivant :

$$\begin{aligned} A &\mapsto A \\ B &\mapsto A^{-2}C^{-2}BC^2A^2 \\ C &\mapsto C. \end{aligned}$$

Les éléments correspondant à  $X, Y, Z$  et  $K$  sont transformés sous l'action de  $\tau_U$  comme suit :

$$\begin{aligned} X = AB &\mapsto A^{-1}C^{-2}BC^2AA \\ Y = BC &\mapsto A^{-2}C^{-2}BC^2A^2C \\ Z = CA &\mapsto CA \\ K = AABBC &\mapsto AABBC. \end{aligned}$$

#### 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

---

On vérifie facilement que la transformation laisse invariant la classe de conjugaison de l'élément de bord  $K$ , et donc le caractère du bord  $\mathcal{C} = k$ . Avec l'algorithme, on peut calculer la trace de chacun des éléments  $\tau_U(A)$ ,  $\tau_U(B)$ ,  $\tau_U(X)$ ,  $\tau_U(Y)$  et  $\tau_U(Z)$  en fonction de  $(a, b, c, x, y, z, k)$ . Le twist de Dehn induit donc l'action sur les coordonnées  $(a, b, c, x, y, z) \in [-2, 2]^6$  donnée par :

$$\begin{aligned} a &\mapsto a \\ b &\mapsto b \\ c &\mapsto c \\ x &\mapsto c^3d - c^2yz - c^2x - 2cd + cbz + cay + x \\ y &\mapsto U_y(a, b, c, x, y, z, k) \\ z &\mapsto z \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} U_y(a, b, c, x, y, z, k) = & -a^4bc^3 + a^4bc + a^4c^2y + a^3bc^4z - a^3bc^2z + a^3c^3x - a^3c^3yz - a^3c^2d - \\ & 2a^3cx + a^3d - a^2bc^5 - a^2bc^3z^2 + 4a^2bc^3 + a^2bcz^2 - 2a^2bc - a^2c^4xz + a^2c^4y + a^2c^3dz + 3a^2c^2xz + \\ & a^2c^2yz^2 - 3a^2c^2y - 2a^2cdz - a^2xz - a^2y + abc^4z - 3abc^2z + abz + ac^5x - ac^4d - 5ac^3x - ac^3yz + \\ & 4ac^2d + 5acx + 2acyz - 2ad + y \end{aligned}$$

Les coordonnées  $a, b, c$  et  $z$  sont invariante par l'action de  $\tau_U$ . On peut donc étudier l'action sur  $(x, y)$  en considérant l'ensemble

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{C}}(N_{3,1})(a, b, c, z) &= \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) \cap (\{a, b, c, z\} \times \mathbb{R}^2) \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \text{ satisfait l'équation (4.3.15)}\}. \end{aligned}$$

pour  $(a, b, c, z) \in [-2, 2]$  fixés et un élément  $\mathcal{C} = k \in [-2, 2]^2$  fixé.

On pose  $y' = \frac{y}{a}$  et  $x' = \frac{x}{c}$ , et on peut calculer  $\text{tr}(AACC) = acz - a^2 - c^2 + 2 = u$ . Pour  $u \neq \pm 2$ , on peut réécrire l'équation (4.3.22) sous la forme :

$$Q_u(x' - x'_0(U), y' - y'_0(U)) = R$$

avec

$$\begin{aligned} x'_0(U) = & \frac{1}{abc(u^2 - 4)}(-a^4u + a^3cuz - a^2b^2u - a^2c^2u + 2a^2c^2 + a^2ku + 4a^2u - 4a^2 + ab^2cuz - \\ & 2ab^2cz - 2ac^3z - 2acuz + 4acz + 2b^2c^2 + 2b^2u - 4b^2 + 2c^4 - 2c^2k + 2c^2u - 8c^2 - 2ku + 4k - 4u + 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_0(U) = & \frac{1}{abc(u^2 - 4)}(2a^4 - 2a^3cz + 2a^2b^2 - a^2c^2u + 2a^2c^2 - 2a^2k + 2a^2u - 8a^2 + ab^2cuz - \\ & 2ab^2cz + ac^3uz - 2acuz + 4acz - b^2c^2u + 2b^2u - 4b^2 - c^4u + c^2ku + 4c^2u - 4c^2 - 2ku + 4k - 4u + 8) \end{aligned}$$

et

$$R = \frac{(a^2 + c^2 + z^2 - acz - 4)((b^2 - 2)^2 + u^2 + k^2 - (b^2 - 2)uk - 4)}{b^2(4 - u^2)}.$$

Le terme  $R$  est  $\tau_U$ -invariant et positif. En effet, on a  $b^2(4 - u^2) > 0$ . On reconnaît  $(a, c, z)$  et  $((b^2 - 2), u, k)$  comme les caractères de représentations des groupes libres  $\langle A, C \rangle$  et  $\langle BB, CCAA \rangle$  dans  $\text{SU}(2)$ . En effet, on retrouve  $AC = Z$  and  $AABBCC = K$ . Donc d'après le Théorème 4.1.9, on a :

$$(a^2 + c^2 + z^2 - acz - 4) \leq 0, \quad (4.3.23)$$

$$((b^2 - 2)^2 + u^2 + k^2 - (b^2 - 2)uk - 4) \leq 0. \quad (4.3.24)$$

L'ensemble  $E_{\mathbb{C}}(N_{3,1})(a, b, c, z)$  est donc une ellipse, centrée en  $(x'_0(U), y'_0(U))$ . L'espace de module  $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$  est donc décomposé en une famille d'ellipses paramétrées par  $\mathbb{C}$  et  $(a, b, c, z)$ .

L'action de  $\tau_U$  sur  $E_{\mathbb{C}}(a, b, y)$  est donnée par :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x'_0(U) \\ y'_0(U) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^2 - 1 & u \\ -u & -1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x'_0(U) \\ y'_0(U) \end{bmatrix} \right). \quad (4.3.25)$$

Après un changement de coordonnées affine de la même forme que 4.2.1, on ramène l'ellipse  $E_{\mathbb{C}}(a, b, c, z)$  en un cercle centré en  $(0, 0)$ . Dans ces coordonnées, la transformation induite par  $\tau_U$  est la rotation d'angle  $\theta_U = 2 \cos^{-1}(u/2)$ .

En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on en déduit la proposition suivante :

**Proposition 4.3.7** *Pour toute fonction  $h : \mathbb{R}^6 \supset \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(N_{3,1}) \rightarrow \mathbb{R}$  invariante par l'action de  $\tau_U$ , il existe une fonction  $H_2 : [-2, 2]^4 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h(a, b, c, x, y, z) = H_1(a, b, c, z)$  presque partout.*

## 4.4 Surface fermée de genre trois

Nous terminons ce chapitre par une étude de l'action du groupe modulaire dans le cas de la surface fermée non-orientable de genre trois. Le groupe fondamental de cette surface n'est pas libre, cependant il est engendré par trois éléments. La variété de caractères s'exprime donc comme un sous-ensemble de la variété de caractère de  $F_3$ . Les méthodes utilisées étant les mêmes que dans les autres cas étudiés dans ce chapitre, il semble naturel de l'étudier ici.

Soit  $N_3$  la surface fermée non-orientable de genre trois. Son groupe fondamental admet la présentation géométrique suivante :

$$\pi = \pi_1(N_3) = \langle A, B, C \mid A^2 B^2 C^2 \rangle$$

D'après la construction de la variété de caractère, nous savons que  $X(\pi_1(N_3))$  est un ensemble algébrique dans  $\mathbb{C}^7$ . Le théorème suivant exprime la variété de caractères comme un ensemble algébrique dans  $\mathbb{C}^4$ .

**Théorème 4.4.1** *L'application*

$$\begin{aligned} X(\pi_1(N_3)) &\longrightarrow \mathbb{C}^4 \\ [\rho] &\longmapsto \begin{bmatrix} \text{tr}(\rho(A)) \\ \text{tr}(\rho(B)) \\ \text{tr}(\rho(C)) \\ \text{tr}(\rho(ABC)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*est injective. Son image est l'ensemble des  $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$  satisfaisant l'équation :*

$$2(a^2 + b^2 + c^2 - 4) - abcd = 0 \quad (4.4.1)$$

#### 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

---

**Preuve :** La relation du groupe  $\pi$  implique que  $\phi((AB)^{-1}) = \phi(BCCA)$ . En calculant dans les coordonnées on a donc

$$x = cd - x.$$

De même, en utilisant  $(BC)^{-1} = CAAB$  et  $(CA)^{-1} = ABBC$  on obtient les égalités

$$y = ad - y, \quad z = bd - z.$$

Ce qui nous donne de façon équivalente :

$$x = \frac{cd}{2}, \quad y = \frac{ad}{2}, \quad z = \frac{bd}{2}.$$

L'application  $[\rho] \mapsto (a, b, c, d)$  est donc injective.

D'autre part, on a  $A^2B^2C^2 = I$  et donc  $\text{tr}(A^2B^2C^2) = 2$ . En remplaçant les coordonnées  $x, y, z$  par leurs valeurs en fonction de  $a, b, c, d$ , on obtient :

$$(a^2 + b^2 + c^2 - 2) - \frac{abcd}{2} = 2.$$

Ainsi, l'élément  $(a, b, c, d)$  satisfait l'équation (4.4.1).

Il suffit maintenant de montrer que pour tout  $(a, b, c, d)$  satisfaisant l'équation (4.4.1), le caractère  $(a, b, c, \frac{cd}{2}, \frac{ad}{2}, \frac{bd}{2}, d)$  est le caractère d'une représentation de  $\pi_1(N_3)$ . Pour cela, nous utilisons le Théorème 4.1.16, pour montrer que la variété de caractère de  $\pi_1(N_3)$  s'identifie avec :

$$X(\pi) = \left\{ (a, b, c, x, y, z, d) \in \mathbb{C}^7 \left| \begin{array}{l} (a, b, c, x, y, z, d) \text{ satisfait l'équation 4.1.7} \\ a^2cy + ab^2cd - abcx y - abcz + ac^2x - acd - ax - cy = 0 \\ abd - az - by = 0 \\ cbd - cz - bx = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Une simple calcul nous montre que les quatres équations sont vérifiées par tout élément de la forme  $(a, b, c, \frac{cd}{2}, \frac{ad}{2}, \frac{bd}{2}, d)$  avec  $(a, b, c, d)$  satisfaisant (4.4.1).  $\square$

Ce théorème nous permet d'exhiber simplement une fonction non-constante et invariante par l'action du groupe modulaire.

**Proposition 4.4.2** *La fonction*

$$f_D : \mathfrak{X}(N_3, \text{SL}(2, \mathbb{C})) \longrightarrow \mathbb{C} \\ [\rho] \longmapsto \text{tr}(\rho(ABC))$$

*est continue, surjective et invariante par l'action du groupe modulaire  $\Gamma_{N_3}$ .*

**Preuve :** La continuité de la fonction trace induit la continuité de la fonction  $f_D$ . Pour tout  $d \in \mathbb{C}$  le quadruplet  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, d)$  satisfait les conditions 4.4.1. L'invariance de la fonction  $f_D$  est une conséquence directe du Théorème 2.2.10. En effet, tout élément du groupe modulaire envoie l'élément  $ABC \in \pi$  sur un conjugué de  $ABC$  ou de  $(ABC)^{-1}$ . Dans  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  un élément et son inverse ont la même trace, ce qui termine la preuve.  $\square$

Il semble donc naturel d'étudier l'action du groupe modulaire sur l'espace

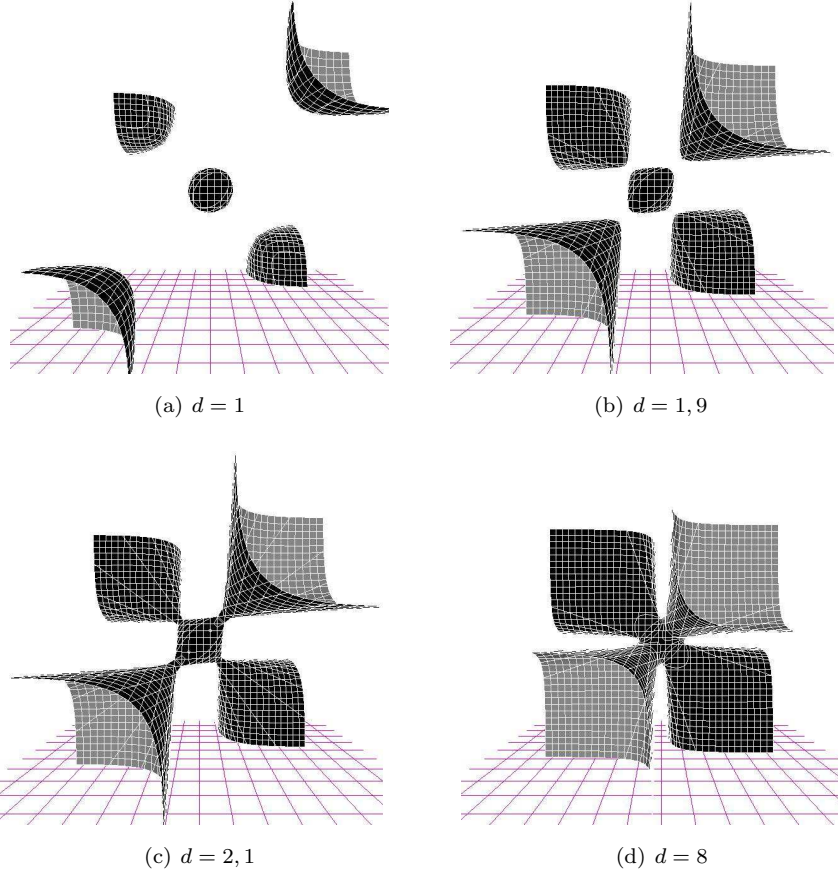
$$W_d = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \mid (a, b, c, d) \in X(N_3)\}$$

pour  $d \in \mathbb{C}$ . En particulier sur les caractères réels  $V_d = W_d \cap \mathbb{R}^3$  avec  $d \in \mathbb{R}$  qui contiennent les représentations dans  $SU(2)$  et dans  $SL(2, \mathbb{R})$ .

Nous remarquons tout d'abord que  $V_{-d}$  est le symétrique de  $V_d$  par une symétrie centrale par rapport à l'origine, il suffit donc d'étudier l'ensemble  $V_d$  pour les valeurs positives de  $d$ .

Pour  $d \geq 2$ , l'espace  $V_d$  est constitué d'une seule composante connexe homéomorphe à une sphère à quatre trous. Pour  $d \in ]0, 2[$ , l'espace  $V_d$  est constitué de 5 composantes connexes, dont quatre sont contractibles et permutées par des changements de signes et la cinquième est compacte à l'intérieur de  $[-2, 2]^3$ . Cette composante compacte contient toutes les représentations dans  $SU(2)$  mais également des représentations dans  $SL(2, \mathbb{R})$ .

Pour  $d = 0$ , l'espace  $V_0$  n'a qu'une seule composante qui est la sphère de rayon 2 dans  $\mathbb{R}^3$ . (Nous observons que lorsque  $d$  tend 0, la distance entre les composantes contractibles et l'origine tend vers l'infini.



**Figure 4.10:** Ensembles  $V_d$  pour différentes valeurs de  $d$

**Proposition 4.4.3** *Pour tout  $d \in [-2, 2] \setminus \{0\}$ , l'action du groupe modulaire sur  $V_d \cap [-2, 2]^3$  est ergodique.*

**Preuve :**

#### 4. VARIÉTÉ DE CARACTÈRES EN PETITE CARACTÉRISTIQUE

---

Le twist  $\tau_X$  est représenté par un élément de  $\text{Aut}(\pi)$  agissant sur les générateurs comme

$$\begin{aligned} A &\longmapsto AAB \\ B &\longmapsto B^{-1}A^{-1}B \\ C &\longmapsto C \end{aligned}$$

Ce qui induit l'application sur les coordonnées :

$$\begin{aligned} a &\longmapsto a \frac{cd}{2} - b \\ b &\longmapsto a \\ x &\longmapsto c \end{aligned}$$

Le twist  $\tau_X$  agit comme la rotation d'angle  $\theta_X = \cos^{-1}(\frac{cd}{2})$  sur l'ellipse

$$E_d(c) = \{(a, b) \in [-2, 2]^2 \mid a^2 + b^2 - ab \frac{cd}{2} = 4 - c^2\}.$$

En particulier, lorsque  $\theta_X$  est un multiple irrationnel de  $\pi$ , l'action de  $\tau_X$  est ergodique sur  $E_d(c)$ . Si  $d \neq 0$ , alors pour presque tout  $c$ , l'angle  $\cos^{-1}(\frac{cd}{2})$  est un multiple irrationnel de  $\pi$ . En appliquant le Lemme de décomposition ergodique, on en déduit que toute fonction  $h : V_d \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\tau_X$ -invariante est constante sur les lignes de niveau de la fonction  $(a, b, c) \mapsto c$ .

De même, en appliquant le twist  $\tau_Y$ , on en déduit que toute fonction invariante est constante sur les lignes de niveau de la fonction  $(a, b, c) \mapsto a$ . Les lignes de niveau des deux fonctions engendrent l'espace  $V_d$ , et on en déduit l'ergodicité de l'action du groupe modulaire sur  $V_d \cap [-2, 2]^3$ .  $\square$

Pour  $d = 0$ , l'espace  $V_d$  est une sphère. Le twist de Dehn  $\tau_X$  agit sur les coordonnées par  $\tau_X(a, b, c) = (-b, a, c)$ . Nous reconnaissons la rotation d'angle  $\pi/2$  de la sphère par rapport à la droite  $ab = 0$ . De même le twist  $\tau_Y$  agit comme la rotation d'angle  $\pi/2$  par rapport à la droite  $bc = 0$ . Enfin, le crosscap slide  $y$  agit sur les coordonnées par  $y(a, b, c) = (a, -b, c)$ , c'est à dire comme la symétrie par rapport au plan  $b = 0$ .

Le groupe modulaire étant engendré par ces trois éléments, nous voyons que l'action du groupe modulaire se résume donc en une action du groupe des isométries du cube vu comme un sous groupe de  $O(3, \mathbb{R})$ . Ce groupe est fini isomorphe à  $\mathcal{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , et comporte 48 éléments. L'action n'est donc pas ergodique puisque toutes les orbites sont finies.

**Remarque 4.4.4** *Il serait intéressant de comprendre l'action du groupe modulaire sur les composantes contractibles en essayant de les interpréter comme des espaces de structures hyperboliques sur le tore à un trou. En effet, lorsque l'on coupe la surface  $N_3$  le long d'une courbe simple correspondant à l'élément  $D \in \pi$ , nous obtenons un tore à un trou. Au vu de cette correspondance, nous pouvons espérer que l'action est propre sur ces composantes.*

## Chapitre 5

# Ergodicité dans le cas général

*Quand vous éliminez l'impossible,  
ce qui demeure, quoi qu'improbable,  
ne peut être que vérité.*  
– Monsieur Spock

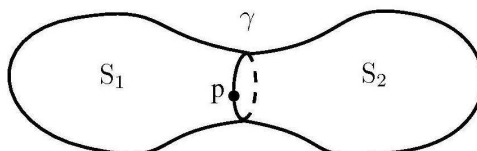
Dans cette section nous prouvons l'ergodicité de l'action du groupe modulaire sur les espaces de modules relatifs dans le cas général. Pour cela, nous devons décomposer la surface en sous-surfaces de caractéristique d'Euler plus petite sur lesquelles l'ergodicité est déjà prouvée. La compréhension du comportement de cette décomposition par rapport à l'action du groupe modulaire se fait en étudiant des flots sur l'espace de modules appelés *flot de Goldman* et qui sont liés aux twists de Dehn le long des courbes de décomposition.

### 5.1 Décomposition de la surface et flot de Goldman

Nous commençons par prendre un groupe de Lie  $G$  quelconque et une surface  $S$  et nous définissons un flot sur  $\mathfrak{X}(S) = \mathfrak{X}(S, G)$  à partir d'une courbe simple à deux côtés sur  $S$  et d'une fonction sur  $G$  invariante par conjugaison.

#### 5.1.1 Courbe séparante

Soit  $\gamma$  un cercle séparant sur une surface  $S$ . La surface  $S|\gamma$  obtenue en coupant  $S$  le long de  $\gamma$  est l'union disjointe de deux sous-surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . On place un point base  $p$  sur le cercle  $\gamma$ .



**Figure 5.1:** Décomposition de  $S$  le long de  $\gamma$

## 5. ERGODICITÉ DANS LE CAS GÉNÉRAL

---

La surface  $S$  est obtenue en recollant  $S_1$  et  $S_2$  le long de la courbe  $\gamma$ . Ainsi, le théorème de Seifert-Van Kampen nous permet d'exprimer le groupe fondamental  $\pi_1(S, p)$  en fonction des groupes fondamentaux de  $S_1$  et  $S_2$ . On a :

$$\pi_1(S, p) = \pi_1(S_1, p) \underset{\pi_1(\gamma, p)}{*} \pi_1(S_2, p). \quad (5.1.1)$$

Le groupe fondamental  $\pi_1(\gamma, p)$  est isomorphe au groupe libre à un générateur  $F_1 = \mathbb{Z}$ . On notera  $X$  la classe d'homotopie de la courbe  $\gamma$  dans  $\pi_1(S)$ , de sorte que  $\pi_1(\gamma) = \langle X \rangle$ .

La restriction d'une représentation à un sous-groupe de  $\pi_1(S)$  induit l'application :

$$\tilde{\psi} : \text{Hom}(\pi_1(S), G) \longrightarrow \text{Hom}(\pi_1(S_1), G) \times \text{Hom}(\pi_1(S_2), G) \quad (5.1.2)$$

qui passe naturellement au quotient :

$$\begin{aligned} \psi : \mathfrak{X}(S) &\longrightarrow \mathfrak{X}(S_1) \times \mathfrak{X}(S_2) \\ [\rho] &\longmapsto ([\rho]_{|\pi_1(S_1)}], [\rho]_{|\pi_1(S_2)}]) . \end{aligned}$$

Soit une représentation  $[\rho] \in \mathfrak{X}(S)$  et  $([\rho_1], [\rho_2]) \in \mathfrak{X}(S_1) \times \mathfrak{X}(S_2)$  tels que  $\psi([\rho]) = ([\rho_1], [\rho_2])$ . Les deux représentations  $\rho_1$  et  $\rho_2$  doivent coïncider sur le groupe fondamental du cercle  $\gamma$ . On a donc :

$$[(\rho_1)_{|\pi_1(\gamma)}] = [(\rho_2)_{|\pi_1(\gamma)}] \text{ dans } \mathfrak{X}(\gamma). \quad (5.1.3)$$

**Définition 5.1.1** On note  $\mathfrak{X}(S_1, S_2, \gamma)$  l'ensemble des couples  $([\rho_1], [\rho_2])$  satisfaisant (5.1.3).

Pour  $a \in G$ , le *centralisateur*  $Z(a)$  de  $a$  est défini comme l'ensemble des éléments qui commutent avec  $a$ , c'est à dire :

$$Z(a) = \{g \in G \mid gag^{-1} = a\}.$$

On peut alors montrer la proposition suivante :

**Proposition 5.1.2** L'image de l'application  $\psi$  est l'ensemble  $\mathfrak{X}(S_1, S_2, \gamma)$ . De plus, pour tout  $([\rho_1], [\rho_2]) \in \mathfrak{X}(S_1, S_2, \gamma)$ , la fibre de l'application  $\psi$  est donnée par :

$$\psi^{-1}([\rho_1], [\rho_2]) \cong Z(\rho_1(X)).$$

**Preuve :** Soit  $([\rho_1], [\rho_2]) \in \mathfrak{X}(S_1, S_2, \gamma)$ . Le groupe fondamental  $\pi_1(\gamma)$  est engendré par l'élément  $X$ . On prend deux représentants  $\rho_1 \in [\rho_1]$  et  $\rho_2 \in [\rho_2]$ . Les représentations sont conjuguées sur le groupe engendré par  $X$  donc il existe  $g \in G$  tel que

$$\rho_1(X) = g \cdot \rho_2(X) \cdot g^{-1}.$$

Quitte à conjuguer la représentation  $\rho_2$  par un élément  $g$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $\rho_1(X) = \rho_2(X)$ . Soient  $[\rho]$  un élément dans  $\mathfrak{X}(S)$  et  $\rho$  un représentant dans la classe de conjugaison  $[\rho]$ . Le couple  $([\rho_1], [\rho_2])$  est l'image de  $[\rho]$  par  $\psi$  si et seulement si

$$[\rho]_{|\pi_1(S_1)}] = [\rho_1] \in \mathfrak{X}(S_1) \text{ et } [\rho]_{|\pi_1(S_2)}] = [\rho_2] \in \mathfrak{X}(S_2),$$

c'est-à-dire s'il existe  $h_1$  et  $h_2$  dans  $G$  tels que :

$$\rho_{|\pi_1(S_1)} = h_1 \cdot \rho_1 h_1^{-1} \text{ et } \rho_{|\pi_1(S_2)} = h_2 \cdot \rho_2 h_2^{-1}.$$

## 5.1 Décomposition de la surface et flot de Goldman

Sans perte de généralité (en conjuguant  $\rho$  par  $h_1$ ), on peut choisir un représentant  $\rho$  de  $[\rho]$  tel que  $h_1 = 1_G$ . On obtient alors :

$$\rho_1(X) = h_2 \rho_2(X) h_2^{-1} = h_2 \rho_1(X) h_2^{-1}.$$

Ainsi,  $h_2$  est dans le centralisateur  $Z(\rho_1(X)) = \{g \in G \mid g \rho_1(X) g^{-1} = \rho_1(X)\}$ .

Réciproquement, pour tout élément  $g \in Z(\rho_1(X))$ , la représentation définie par

$$\rho(B) = \begin{cases} \rho_1(B) & \text{si } B \in \pi_1(S_1) \\ g \rho_2(B) g^{-1} & \text{si } B \in \pi_1(S_2) \end{cases}$$

est une représentation dans la fibre  $\psi^{-1}([\rho_1], [\rho_2])$ . □

### 5.1.2 Courbe non-séparante

Soit  $\gamma$  une courbe non-séparante sur une surface  $S$ . La surface  $S' = S \setminus \gamma$  est une surface connexe avec deux composantes de bord supplémentaires, notées  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$ . Ces deux composantes correspondent aux deux côtés de la courbe  $\gamma$ . Trois cas sont possibles concernant l'orientation relative des courbes  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  dans  $S'$

1. Les surfaces  $S$  et  $S'$  sont toutes les deux orientables. On choisit une orientation sur la surface  $S'$  qui induit une orientation naturelle des deux composantes de bord. La surface  $S$  est obtenue à partir de  $S'$  en recollant les deux composantes de bords  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  par un homéomorphisme préservant l'orientation. On notera  $X_+$  et  $X_-$  les éléments de  $\pi_1(S')$  correspondant aux classes d'homotopie des courbes  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  avec l'orientation choisie.
2. Les surfaces  $S$  et  $S'$  sont toutes les deux non-orientables. Les courbes  $\gamma_-$  et  $\gamma_+$  n'ont pas d'orientation relative l'une par rapport à l'autre. La surface  $S$  est obtenue à partir de  $S'$  en recollant les deux composantes de bords  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  par un homéomorphisme. Cet homéomorphisme induit un isomorphisme  $i : \pi_1(\gamma_+) \rightarrow \pi_1(\gamma_-)$ . On choisit des générateurs  $X_+ \in \pi_1(\gamma_+)$  et  $X_- \in \pi_1(\gamma_-)$ , tels que  $i(X_+) = X_-$ .
3. La surface  $S$  est non-orientable, et la surface  $S'$  est orientable. On choisit une orientation sur la surface  $S'$  qui induit une orientation naturelle des deux composantes de bord. La surface  $S$  est obtenue à partir de  $S'$  en recollant les deux composantes de bords  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  par un homéomorphisme renversant l'orientation. On note également  $X_+$  la classe d'homotopie correspondant à la courbe  $\gamma_+$  avec l'orientation choisie, et  $X_-$  la classe d'homotopie correspondant à la courbe  $\gamma_-$  avec l'orientation inverse.

Dans tous les cas, on a un isomorphisme canonique noté

$$i : \pi_1(S') \supset \langle X_+ \rangle \longrightarrow \langle X_- \rangle \subset \pi_1(S'),$$

donné par  $i(X_+) = X_-$  dans  $\pi_1(S')$ . On choisit une présentation de  $\pi_1(S) = \langle P \mid Q \rangle$  avec  $P$  un ensemble de générateurs, et  $Q$  un ensemble de relations. Le groupe fondamental  $\pi_1(S)$  se construit à partir de  $\pi_1(S')$  par une extension HNN :

$$\pi_1(S) = \langle P, A \mid Q, A X_+ A^{-1} = X_- \rangle. \quad (5.1.4)$$

Le nouveau générateur  $A$  dans  $\pi_1(S)$  est la classe d'homotopie d'une courbe fermée  $\alpha \subset S$  qui coupe  $\gamma$  exactement une fois. La préimage de la courbe  $\alpha$  dans  $S'$ , notée  $\alpha_0$ , est un arc avec une extrémité sur  $\gamma_+$  et une extrémité sur  $\gamma_-$ . Dans le cas 1, la courbe  $\alpha$  est une courbe à deux

## 5. ERGODICITÉ DANS LE CAS GÉNÉRAL

---

côtés, puisque toutes les surfaces sont orientables. Dans le cas 3, la courbe  $\alpha$  est une courbe à un seul côté. En effet, si la courbe  $\alpha$  était à deux côtés, alors toutes les courbes fermées de  $S$  seraient à deux côtés, et la surface  $S$  serait orientable. Dans le cas 2, la courbe  $\alpha$  peut être choisie à un seul côté ou à deux côtés de façon arbitraire.

La restriction d'une représentation de  $\pi_1(S)$  au sous-groupe correspondant à  $\pi_1(S')$  induit une application naturelle :

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{X}(S) &\longrightarrow \mathfrak{X}(S') \\ [\rho] &\longmapsto [\rho]_{\pi_1(S')}. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Soit  $[\rho] \in \mathfrak{X}(S)$  et  $[\rho']$  tel que  $\phi([\rho]) = [\rho']$ . La relation supplémentaire dans  $\pi_1(S)$  implique que  $\rho(AX_+A^{-1}) = \rho(X_-)$ . En particulier, on a

$$\rho(A)\rho(X_+)\rho(A^{-1}) = \rho(X_-).$$

Les éléments  $\rho(X_+)$  et  $\rho(X_-)$  sont donc conjugués dans  $G$ , ce qui nous amène à définir l'ensemble suivant :

**Définition 5.1.3** *On note  $\mathfrak{X}^\pm(S')$ , l'ensemble des représentations  $[\rho'] \in \mathfrak{X}(S')$  tel qu'il existe  $a \in G$  satisfaisant :*

$$\rho'(X_-) = a\rho'(X_+)a^{-1}.$$

On peut alors montrer le résultat suivant :

**Proposition 5.1.4** *L'image de l'application  $\phi$  est l'ensemble  $\mathfrak{X}^\pm(S')$ . De plus, pour tout  $[\rho'] \in \mathfrak{X}^\pm(S')$ , la fibre de l'application  $\phi$  est donnée par*

$$\phi^{-1}([\rho']) \cong Z(\rho'(X_+)).$$

**Preuve :** Soient  $[\rho']$  un élément de  $\mathfrak{X}^\pm(S')$  et  $a$  dans  $G$  tel que  $\rho'(X_-) = a\rho'(X_+)a^{-1}$ . Soit  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathbb{G}$  une représentation satisfaisant  $\phi([\rho]) = [\rho']$ . Nous pouvons choisir un représentant  $\rho$  tel que  $\rho|_{\pi_1(S')} = \rho'$  et nous notons  $\rho(A) = g$ . Nous avons alors :

$$\rho(X_-) = g\rho(X_+)g^{-1} = g \cdot a \cdot \rho'(X_+) \cdot a^{-1} \cdot g^{-1}.$$

L'élément  $g \cdot a$  est donc un élément du centralisateur  $Z(\rho'(X_+))$ . L'ensemble des  $g$  satisfaisant cette relation est une classe à droite du centralisateur définie par :

$$Z(\rho'(X_+)) \cdot a = \{b \cdot a \mid b \in Z(\rho'(X_+))\},$$

ce qui nous donne un isomorphisme entre la fibre et le centralisateur  $Z(\rho'(X_+))$ .  $\square$

### 5.1.3 Flot de Goldman

Nous définissons maintenant le flot de Goldman de façon générale en suivant les idées de W. Goldman [28]. Les orbites de ces flots sont incluses dans les fibres des applications définies au paragraphe précédent. Nous montrons également l'invariance de la mesure définie au chapitre 3 sous l'action de ces flots.

## 5.1.3.1 Flot twist généralisé

**Définition 5.1.5** Soit  $\gamma \subset S$  un cercle à deux côtés. Un flot twist généralisé selon  $\gamma$  est un flot  $\{\eta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  sur l'espace de représentation  $\text{Hom}(\pi_1(S), G)$ , tel que pour chaque  $\rho \in \text{Hom}(\pi_1(S), G)$  et chaque composante connexe  $M$  de la surface  $S \setminus \gamma$ , il existe un chemin  $g_t = g_t(\phi, M)$  dans  $G$  tel que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout  $A \in \pi_1(M)$  on a :

$$(\eta_t(\rho))(A) = g_t \cdot \rho(A) \cdot g_t^{-1}.$$

Un flot twist généralisé passe naturellement au quotient pour donner un flot sur l'espace de module  $\mathfrak{X}(S)$ . Deux flots twists généralisés sont les relevés d'un même flot sur  $\mathfrak{X}(S)$  si ils diffèrent l'un de l'autre par une conjugaison globale. En appliquant un automorphisme intérieur de  $\pi$  si nécessaire, nous pouvons normaliser les flots de telle façon que le flot soit constant sur le groupe fondamental de l'une des composantes connexes. On distingue toujours deux cas, selon que la courbe  $\gamma$  est séparante ou non-séparante.

Si  $\gamma$  est une courbe séparante, alors la surface  $S \setminus \gamma$  est l'union disjointe de  $S_1$  et  $S_2$ . Le groupe fondamental s'écrit comme dans (5.1.1). Soit  $\{\Xi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  un flot twist généralisé selon  $\gamma$ , normalisé de telle sorte que  $(\Xi_t \rho)(B) = \rho(B)$  pour tout  $B \in \pi_1(S_1)$ . Par définition, pour toute représentation  $\rho$  dans  $\text{Hom}(\pi, G)$ , il existe un chemin  $\{\zeta_t(\rho)\}_{t \in \mathbb{R}} \in G$  tel que :

$$(\Xi_t \rho)(B) = \zeta_t(\rho) \rho(B) \zeta_t(\rho)^{-1} \quad \text{pour } B \in \pi_1(S_2).$$

L'élément  $X \in \pi_1(S)$  correspondant à  $\gamma$  est dans  $\pi_1(S_1) \cap \pi_1(S_2)$ . On a donc  $(\Xi_t \rho)(X) = \rho(X) = \zeta_t(\rho) \rho(X) \zeta_t(\rho)^{-1}$ . Donc  $\zeta_t(\rho)$  est un élément du centralisateur  $Z(\rho(X))$  de  $\rho(X)$  dans  $G$ .

Réciproquement, étant donné un chemin  $\{\zeta_t(\rho)\}_{t \in [0,1]}$  dans le centralisateur  $Z(\rho(X))$ , le flot défini par :

$$(\Xi_t \rho)(B) = \begin{cases} \rho(B) & , \text{ si } B \in \pi_1(S_1), \\ \zeta_t(\rho) \rho(B) \zeta_t(\rho)^{-1} & , \text{ si } B \in \pi_1(S_2) \end{cases} \quad (5.1.6)$$

est un flot twist généralisé selon  $\gamma$  dans  $\text{Hom}(\pi_1(S), G)$ .

Si  $\gamma$  est une courbe non-séparante, le groupe fondamental s'écrit comme dans (5.1.4). Soit  $\{\Xi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  un flot twist généralisé selon  $\gamma$ , normalisé de telle sorte que  $(\Xi_t \rho)(B) = \rho(B)$  pour tout  $B \in \pi_1(S')$ . Soit  $\rho \in \text{Hom}(\pi_1(S), G)$ . Définissons pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\zeta_t(\rho) = (\Xi_t \rho)(A) \cdot (\rho(A))^{-1},$$

où  $A$  est le générateur supplémentaire de (5.1.4). Si  $X \in \pi_1(S)$  représente la classe d'homotopie de la courbe  $\gamma$ , on a alors

$$\begin{aligned} (\zeta_t(\rho) \rho(A)) \rho(X) (\zeta_t(\rho) \rho(A))^{-1} &= (\Xi_t \rho)(A) \cdot \rho(X) \cdot ((\Xi_t \rho)(A))^{-1} \\ &= (\Xi_t \rho)(A) \cdot (\Xi_t \rho)(X) \cdot ((\Xi_t \rho)(A))^{-1} \\ &= (\Xi_t \rho)(AXA^{-1}) \\ &= \rho(A) \rho(X) (\rho(A))^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\zeta_t(\rho)$  définit un chemin dans le centralisateur  $Z(\rho(X))$ . Réciproquement, étant donné un chemin  $\{\zeta_t(\rho)\}_{t \in [0,1]}$  dans le centralisateur  $Z(\rho(X))$ , le flot défini par :

$$(\Xi_t \rho)(B) = \begin{cases} \rho(B) & , \text{ si } B \in \pi_1(S'), \\ \zeta_t(\rho) \rho(B) & , \text{ si } B \in \langle A \rangle \end{cases} \quad (5.1.7)$$

est un flot twist généralisé selon  $\gamma$  dans  $\text{Hom}(\pi_1(S), G)$ .

## 5. ERGODICITÉ DANS LE CAS GÉNÉRAL

---

### 5.1.3.2 Fonction invariante

On peut construire un flot de Goldman de façon explicite en partant d'une fonction  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , invariante par conjugaison c'est à dire qui satisfait  $f(gag^{-1}) = f(a)$ , pour tout  $a, g \in G$ . Pour cela, nous avons besoin de définir une fonction auxiliaire liée à  $f$  appelée *variation* de  $f$ .

Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ , et soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit intérieur sur  $\mathfrak{g}$ . La variation de  $f$  est définie comme la fonction  $G$ -équivariante  $F : G \rightarrow \mathfrak{g}$  satisfaisant pour tout  $a \in G$ ,  $X \in \mathfrak{g}$  :

$$\langle X, F(a) \rangle = df_a(X) = \frac{d}{dt} f(a \exp(tX)).$$

L'équivariance de  $F$  implique que pour un élément  $a \in G$  quelconque, l'élément  $F(a)$  est dans la sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  fixée par  $\text{Ad } a$ . Ainsi, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'élément  $\exp(tF(a))$  est dans le centralisateur  $Z(a)$ .

Soit  $X \in \pi_1(S)$  correspondant à  $\gamma$  une courbe à deux côtés. Pour tout  $\rho \in \text{Hom}(\pi_1(S), G)$ , on définit  $\zeta_t(\rho) = \exp(tF(\rho(X)))$  qui est un chemin dans le centralisateur  $Z(\rho(X))$  de  $\rho(X)$ . Ceci nous permet de définir un flot twist généralisé selon  $\gamma$  sur  $\text{Hom}(\pi_1(S), G)$ .

Dans le cas d'une surface orientable  $\Sigma$ , le flot sur  $\mathfrak{X}(\Sigma)$  recouvert par ce flot twist est lié à une fonction sur  $\mathfrak{X}(\Sigma)$ . La fonction  $f$  étant invariante par conjugaison, on peut définir  $f_X : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f_X([\rho]) = f(\rho(X))$ . L'espace  $\mathfrak{X}(\Sigma)$  possède une structure symplectique définie par une forme symplectique  $\omega$ . A partir d'une fonction différentiable  $h$ , on définit le flot hamiltonien comme le flot associé au champ de vecteur  $H$  qui satisfaisant pour tout champ de vecteur  $Y$  :

$$dh(Y) = \omega(H, Y).$$

Les résultats de Goldman (voir [28]) associent le flot twist généralisé avec le flot hamiltonien de la fonction  $f_\gamma$  :

**Théorème 5.1.6 (Goldman [28])** *Soit  $\gamma \subset \Sigma$  une courbe à deux côtés. Le flot  $\{\Xi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  défini par (5.1.6) ou (5.1.7) avec  $\zeta_t(\rho) = \exp(tF(\rho(X)))$ , est un relevé du flot hamiltonien associé à la fonction  $f_\gamma$ .*

Dans le cas d'une surface non-orientable, étant donné que l'espace  $\mathfrak{X}(S)$  n'a pas de structure symplectique, une telle interprétation du flot  $\{\Xi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  ne peut être effectuée.

### 5.1.4 Invariance de la mesure

Soit  $\{\Xi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  un flot twist généralisé sur  $\mathfrak{X}(S)$ . Rappelons que la mesure sur  $\mathfrak{X}(S)$  est celle définie au Chapitre 2. Nous montrons la proposition suivante :

**Proposition 5.1.7** *La mesure sur  $\mathfrak{X}(S)$  est invariante par l'action du flot  $\{\Xi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ .*

**Preuve :** Il suffit de montrer que la mesure sur  $\text{Hom}(\pi, G)$  est invariante par l'action d'un flot twist généralisé. On distingue le cas d'une courbe séparante et d'une courbe non-séparante. La mesure définie ne dépendant pas de la présentation on peut choisir une présentation de  $\pi_1(S)$  adaptée à la situation.

Etudions tout d'abord le cas où  $\gamma$  est séparante. On peut choisir la présentation de  $\pi_1(S)$  de la façon suivante :

$$\pi_1(S) = \langle A_1, \dots, A_k, X, B_1, \dots, B_l \mid q_1(A_1, \dots, A_k)X, q_2(B_1, \dots, B_l)X \rangle.$$

## 5.1 Décomposition de la surface et flot de Goldman

L'élément  $X$  correspond à la courbe  $\gamma$  et les groupes fondamentaux des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont donnés par :

$$\pi_1(S_1) = \langle A_1, \dots, A_k, X \mid q_1(A_1, \dots, A_k)X \rangle$$

$$\pi_1(S_2) = \langle B_1, \dots, B_l, X \mid q_2(B_1, \dots, B_l)X \rangle.$$

On notera de façon concise  $(\bar{a}, x, \bar{b}) = (a_1, \dots, a_k, x, b_1, \dots, b_l)$  dans  $G^{k+1+l}$ . Le flot  $\Xi_t$  induit un flot sur  $G^{k+1+l}$  donné par :

$$(\bar{a}, x, \bar{b}) \longmapsto (\bar{a}, x, g_x \bar{b} g_x^{-1})$$

avec  $g_x$  dans le centralisateur  $Z(x)$  de  $x$ .

Soit  $U \in G^k$ , et  $t \in \mathbb{R}$ . Par invariance de la distribution  $\delta$  par conjugaison (5.1.10), et par invariance de la mesure de Haar sur  $G^l$  (5.1.11), nous obtenons :

$$\mu(\Xi_t \cdot U) = \int_{G^{k+1+l}} \mathbf{1}_{\Xi_t \cdot U}(\bar{a}, x, \bar{b}) \delta_2(q_1(\bar{a})x, q_2(\bar{b})x) d\bar{a} \cdot dx \cdot d\bar{b} \quad (5.1.8)$$

$$= \int_{G^{k+1}} \int_{G^l} \mathbf{1}_U(\bar{a}, x, g_x \bar{b} g_x^{-1}) \delta(q_1(\bar{a})x) \delta(q_2(\bar{b})x) d\bar{a} \cdot dx \cdot d\bar{b} \quad (5.1.9)$$

$$= \int_{G^{k+1}} \delta(q_1(a_1, \dots, a_k)x) \left( \int_{G^l} \mathbf{1}_U(\bar{a}, x, g_x \bar{b} g_x^{-1}) \delta(g_x(q_2(\bar{b})x)g_x^{-1}) d\bar{b} \right) d\bar{a} dx \quad (5.1.10)$$

$$= \int_{G^{k+1}} \delta(q_1(a_1, \dots, a_k)x) \left( \int_{G^l} \mathbf{1}_U(\bar{a}, x, g_x \bar{b} g_x^{-1}) \delta(q_2(g_x \bar{b} g_x^{-1})x) d\bar{b} \right) d\bar{a} dx \quad (5.1.11)$$

$$= \mu(U). \quad (5.1.12)$$

Etudions maintenant le cas où  $\gamma$  est une courbe non-séparante. On choisit la présentation de  $\pi_1(S)$  comme suit :

$$\pi_1(S) = \langle B_1, \dots, B_k, X_+, X_-, A \mid q(B_1, \dots, B_k, X_+, X_-), AX_+A^{-1}X_- \rangle.$$

On notera de façon concise  $(\bar{b}, x_+, x_-, a) = (b_1, \dots, b_k, x_+, x_-, a)$  dans  $G^{k+3}$ . Le flot  $\Xi_t$  induit un flot sur  $G^{k+3}$  donné par :

$$(\bar{b}, x_+, x_-, a) \longmapsto (\bar{b}, x_+, x_-, g_x \cdot a)$$

avec  $g_x$  un élément du centralisateur  $Z(x)$ .

Soit  $U \in G^k$ , et  $t \in \mathbb{R}$ . Par invariance de la fonction  $\delta$  par conjugaison (5.1.15), et par invariance par multiplication à gauche de la mesure de Haar sur  $G^l$  (5.1.17), nous obtenons :

$$\mu(\Xi_t \cdot U) = \int_{G^{k+3}} \mathbf{1}_{\Xi_t \cdot U}(\bar{b}, x_+, x_-, a) \delta_2(q(\bar{b}x_+, x_-), ax_+a^{-1}x_-) d\bar{b} dx_+ dx_- da \quad (5.1.13)$$

$$= \int_{G^{k+2}} \int_G \mathbf{1}_U(\bar{b}, x_+, x_-, g_x \cdot a) \delta(q(\bar{b}x_+, x_-)) \delta(ax_+a^{-1}x_-) da d\bar{b} dx_+ dx_- \quad (5.1.14)$$

$$= \int_{G^{k+2}} \delta(q(\bar{b}x_+, x_-)) \left( \int_G \mathbf{1}_U(\bar{b}, x_+, x_-, g_x \cdot a) \delta(g_x(ax_+a^{-1}x_-)g_x^{-1}) da \right) d\bar{b} dx_+ dx_- \quad (5.1.15)$$

$$= \int_{G^{k+2}} \delta(q(\bar{b}x_+, x_-)) \left( \int_G \mathbf{1}_U(\bar{b}, x_+, x_-, g_x \cdot a) \delta((g_x a)x_+(g_x a)^{-1}x_-) da \right) d\bar{b} dx_+ dx_- \quad (5.1.16)$$

$$= \mu(U). \quad (5.1.17)$$

□

## 5.2 Action du cercle et twists de Dehn

Nous revenons maintenant à l'objectif principal du chapitre, c'est-à-dire l'ergodicité de l'action du groupe modulaire sur les espaces de modules associés au groupe  $SU(2)$ . Dans ce cas, le flot de Goldman associé est une action du cercle sur l'espace de modules. L'action des twists de Dehn s'exprime directement en fonction de ces flots, et nous utilisons cette identification pour montrer qu'un twist de Dehn agit comme une rotation. Ceci nous permettra un peu plus loin de prouver l'ergodicité de l'action du groupe modulaire. Jusqu'à la fin de ce chapitre, le groupe  $G$  désignera exclusivement le groupe  $SU(2)$ .

### 5.2.1 Action du cercle

Dans  $SU(2)$ , nous avons une description explicite du centralisateur  $Z(a)$  d'un élément  $a \in SU(2)$ . Le centre de  $SU(2)$  est  $\{\pm I\}$  et si  $a$  est un élément central alors  $Z(a) = SU(2)$ .

Si  $a$  est un élément non-central de  $G$ , alors le centralisateur  $Z(a)$  est l'unique tore maximal contenant  $a$ . De façon explicite, pour tout  $a \in G \setminus \{\pm I\}$ , il existe  $g_a \in G$  et un unique  $\theta \in (0, \pi)$  tels que :

$$a = g_a \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} g_a^{-1}.$$

Alors le centralisateur  $Z(a)$  est le sous-groupe à un paramètre (ou de façon équivalente, le tore maximal) défini par :

$$Z(a) = \left\{ g_a \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} g_a^{-1} \mid t \in \mathbb{R} \right\}. \quad (5.2.1)$$

Le centralisateur d'un élément non-central est homéomorphe à un cercle.

On note le produit intérieur usuel sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  par  $\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2}\text{Tr}(XY)$ , où  $\text{Tr}$  désigne la trace usuelle dans  $\mathfrak{su}(2)$ . D'après le Théorème 4.1.3, toute fonction  $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  invariante par conjugaison se factorise par la fonction trace  $f(a) = \text{tr}(a)$ . La variation de la fonction  $f$  est donnée par :

$$F(a) = a - a^{-1}.$$

Néanmoins, il est préférable pour notre problème de considérer une autre fonction invariante, en suivant les idées de L. Jeffrey et J. Weitsman ([46]). On définit la fonction  $\theta : G \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\theta(a) = \cos^{-1} \left( \frac{\text{tr}(a)}{2} \right).$$

L'angle  $\theta(a)$  correspond à l'unique angle compris entre 0 et  $\pi$  qui apparaît lorsque l'on met  $a$  sous forme diagonale. C'est à dire que pour tout  $a \in G$ , il existe  $g_a \in G$  tel que :

$$a = g_a \begin{pmatrix} e^{i\theta(a)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta(a)} \end{pmatrix} g_a^{-1}.$$

La fonction  $\theta$  n'est différentiable que sur  $G \setminus \{\pm I\}$ . La variation de la fonction  $\theta$  ne peut donc se définir que pour les éléments non-centraux de  $G$ . Cependant, les éléments centraux forment un ensemble de mesure nulle, et cela n'aura pas d'incidence dans l'étude de l'ergodicité qui est une propriété définie sur un ensemble de mesure pleine. Pour un élément non-central  $a$ , on a naturellement  $\sin(\theta(a)) \neq 0$  et on peut écrire

$$F_\theta(a) = -\frac{1}{2\sin(\theta(a))} F(a).$$

Donc pour un élément qui s'écrit  $a = g \begin{pmatrix} e^{i\theta(a)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta(a)} \end{pmatrix} g^{-1}$ , on obtient

$$F_\theta(a) = g \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} g^{-1}.$$

Il vient naturellement d'après (5.2.1) que pour tout  $a \in G \setminus \{\pm I\}$  :

$$Z(a) = \{\exp(tF_\theta(a)) \mid t \in \mathbb{R}\}. \quad (5.2.2)$$

### 5.2.1.1 Courbe séparante

Soit  $X \in \pi_1(S)$  correspondant à une courbe séparante  $\gamma$ . On définit le sous-espace de  $\mathfrak{X}(S)$  suivant :

$$R_\gamma = \{\rho \in \text{Hom}(\pi_1(S), G) \mid \rho(X) \neq \pm I\}.$$

Ce sous ensemble est conégligeable, en tant qu'union d'ouverts denses. On définit le flot  $\{\widetilde{\Theta}_t\}$  sur le sous-ensemble  $R_\gamma$  comme étant l'image du flot  $\Xi_t$  défini par (5.1.6) en choisissant comme élément  $\zeta_t(\rho) = \exp(tF_\theta(\rho(X)))$ .

Le flot  $\widetilde{\Theta}_t$  est  $\pi$ -périodique. En effet, pour tout  $\rho \in R_\gamma$ , on a :

$$\zeta_{(t+\pi)}(\rho) = \exp((t+\pi)F(\rho(X))) = \exp(tF(\rho(X))) \cdot g(-I)g^{-1} = -\zeta_t(\rho(X)).$$

L'action du flot sur  $\text{Hom}(\pi_1(S_2))$  est donc donnée par :

$$(\widetilde{\Theta}_{t+\pi}\rho)(B) = \zeta_t(\rho)(-I)\rho(B)(-I)^{-1}\zeta_t(\rho)^{-1} = (\widetilde{\Theta}_t\rho)(B),$$

pour tout  $B \in \pi_1(S_2)$ .

Le flot  $\{\Theta_t\}$  sur  $\mathfrak{X}(S)$  est uniquement défini sur le sous-ensemble de  $\mathfrak{X}(S)$  correspondant à  $R_\gamma$ . On peut alors montrer la proposition suivante :

**Proposition 5.2.1** *Presque toute fibre de l'application  $\psi : \mathfrak{X}(S) \longrightarrow \mathfrak{X}(S_1, S_2, \gamma)$  est une orbite du flot  $\{\Theta_t\}$ .*

**Preuve :** Tout d'abord, la fonction  $\psi$  est naturellement invariante par le flot  $\Theta_t$ . Les orbites du flot sont donc contenues dans les fibres de  $\psi$ . Soit  $([\rho_1], [\rho_2]) \in \mathfrak{X}(S_1, S_2, \gamma)$  tel que  $\rho_1(X) \neq \pm I$ . L'ensemble des représentations satisfaisant cette condition est conégligeable dans  $\mathfrak{X}(S_1, S_2, \gamma)$ . Soient  $[\rho] \in \psi^{-1}([\rho_1], [\rho_2])$  et un représentant  $\rho \in [\rho]$  satisfaisant  $\rho(X) = \rho_1(X)$ .

D'après la Proposition 5.1.2, la fibre  $\psi^{-1}([\rho_1], [\rho_2])$  est exactement le centralisateur  $Z(\rho_1(X))$ , qui est dans ce cas homéomorphe à un cercle. Le centralisateur agit transitivement sur la fibre par multiplication à gauche. D'autre part, d'après l'équation (5.2.2), on a une identification naturelle donnée par :

$$Z(\rho_1(X)) = \{\zeta_t(\rho) \mid t \in [0, \pi[ \}.$$

Donc pour toute représentation  $\sigma$  dans la fibre  $\psi^{-1}([\rho_1], [\rho_2])$ , il existe  $t \in [0, \pi[$  tel que  $[\sigma] = \Theta_t([\rho])$ , ce qui prouve la proposition.  $\square$

## 5. ERGODICITÉ DANS LE CAS GÉNÉRAL

### 5.2.1.2 Courbe non-séparante

De la même façon, soit  $X \in \pi_1(S)$  correspondant à une courbe non-séparante  $\gamma$ . On définit le flot  $\{\widetilde{\Theta}_t\}$  sur le sous-ensemble  $R_\gamma$  comme étant l'image du flot  $\{\Xi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  défini par (5.1.7) en choisissant comme élément  $\zeta_t(\rho) = \exp(tF_\theta(\rho(X)))$ .

Le flot  $\widetilde{\Theta}_t$  est  $2\pi$ -périodique. En effet, pour tout  $\rho \in R_\gamma$ , on a

$$\zeta_{(t+2\pi)}(\rho) = \exp((t+2\pi)F(\rho(X))) = \exp(tF(\rho(X))) \cdot g \cdot I \cdot g^{-1} = \zeta_t(\rho(X)).$$

Donc l'action du flot sur  $\text{Hom}(\pi_1(S_2))$  est donnée par

$$(\widetilde{\Theta_{t+2\pi}\rho})(B) = \zeta_t(\rho) \cdot g \cdot I \cdot g^{-1} \rho(B) = (\widetilde{\Theta_t\rho})(B),$$

pour tout  $B \in \pi_1(S_2)$ .

Le flot  $\{\Theta_t\}$  est défini sur le sous-ensemble de  $\mathfrak{X}(S)$  correspondant à  $R_\gamma$ . On peut alors montrer la proposition suivante :

**Proposition 5.2.2** *Presque toute fibre de l'application  $\phi : \mathfrak{X}(S) \longrightarrow \mathfrak{X}^\pm(S')$  est une orbite du flot  $\{\Theta_t\}$ .*

**Preuve :** La fonction  $\phi$  est invariante par le flot  $\{\Theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ . Les orbites du flot sont donc contenues dans les fibres de  $\phi$ . Soit  $([\rho']) \in \mathfrak{X}^\pm(S')$  tel que  $\rho'(X_+) \neq \pm I$ . L'ensemble des représentations satisfaisant cette condition est bien conégligeable dans  $\mathfrak{X}^\pm(S')$ . Soient  $[\rho] \in \phi^{-1}([\rho'])$ , et  $\rho \in [\rho]$  un représentant satisfaisant  $\rho(X) = \rho'(X_+)$ .

D'après la Proposition 5.1.4, la fibre est exactement le centralisateur  $Z(\rho_1(X))$ , qui est dans ce cas homéomorphe à un cercle. Le centralisateur agit transitivement sur la fibre par multiplication à gauche. D'autre part, d'après l'équation (5.2.2), le centralisateur  $Z(\rho_1(X))$  s'identifie avec l'ensemble des éléments  $\{\zeta_t(\rho) | t \in [0, \pi[$ . Donc pour toute représentation  $\sigma$  dans la fibre  $\phi^{-1}([\rho'])$ , il existe  $t \in [0, \pi[$  tel que  $[\sigma] = \Theta_t([\rho])$ , ce qui termine la preuve de la proposition.  $\square$

### 5.2.2 Twist de Dehn

#### 5.2.2.1 Courbe séparante

Si  $\gamma \subset S$  est une courbe séparante, nous reprenons les notations de la partie (5.1.1). Le twist de Dehn  $\tau_\gamma \in \text{Out}(\pi)$  possède un représentant  $\widetilde{\tau}_\gamma \in \text{Aut}(\pi)$  tel que l'action de  $\widetilde{\tau}_\gamma$  sur  $\pi$  est donnée par

$$\widetilde{\tau}_\gamma \cdot B = \begin{cases} B & \text{si } B \in \pi_1(S_1) \\ XB X^{-1} & \text{si } B \in \pi_1(S_2), \end{cases}$$

ce qui nous donne l'action de  $\widetilde{\tau}_\gamma$  sur une représentation  $\rho \in \text{Hom}(\pi, G)$  :

$$(\widetilde{\tau}_\gamma \cdot \rho)(B) = \begin{cases} \rho(B) & \text{si } B \in \pi_1(S_1) \\ \rho(X)\rho(B)\rho(X)^{-1} & \text{si } B \in \pi_1(S_2). \end{cases}$$

De plus si  $\rho(X) \neq \pm I$ , alors

$$\rho(X) = \exp(\theta(\rho(X)) \cdot F_\theta(\rho(X))).$$

On peut donc exprimer cet automorphisme en fonction du flot par la formule  $\tilde{\tau}_\gamma = \tilde{\Theta}_{\theta(\rho(X))}$ . Nous obtenons donc sur l'espace de modules :

$$\tau_\gamma = \Theta_{\theta(\rho(X))}. \quad (5.2.3)$$

Le flot de Goldman est  $\pi$ -périodique, ses orbites sont des cercles. Le flot  $\{\Theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  agit donc comme la rotation d'angle  $2t$  sur chaque orbite où le flot est défini. Les orbites sont exactement les fibres de l'application  $\psi$  définie en (5.1.2). On obtient donc la proposition suivante :

**Proposition 5.2.3** *Pour presque tout  $[\rho] \in \mathfrak{X}(S)$ , le twist de Dehn  $\tau_\gamma$  agit comme la rotation d'angle  $2\theta(\rho(X))$  sur la fibre  $\psi^{-1}(\psi([\rho]))$ .*

### 5.2.2.2 Courbe non-séparante

Si  $\gamma \subset S$  est une courbe non-séparante, nous reprenons les notations du paragraphe (5.1.4). Le twist de Dehn  $\tau_\gamma \in \text{Out}(\pi)$  possède un représentant  $\tilde{\tau}_\gamma \in \text{Aut}(\pi)$  tel que l'action de  $\tilde{\tau}_\gamma$  sur  $\pi$  est donnée par :

$$\tilde{\tau}_\gamma \cdot B = \begin{cases} B & \text{si } B \in \pi_1(S') \\ XB & \text{si } B \in \langle A \rangle, \end{cases}$$

ce qui nous donne l'action de  $\tilde{\tau}_\gamma$  sur une représentation  $\rho \in \text{Hom}(\pi, G)$  :

$$(\tilde{\tau}_\gamma \cdot \rho)(B) = \begin{cases} \rho(B) & \text{si } B \in \pi_1(S') \\ \rho(X)\rho(B) & \text{si } B \in \langle A \rangle. \end{cases}$$

De plus si  $\rho(X) \neq \pm I$ , alors

$$\rho(X) = \exp(\theta(\rho(X)) \cdot F_\theta(\rho(X))).$$

On peut donc exprimer cet automorphisme en fonction du flot par la formule  $\tilde{\tau}_\gamma = \tilde{\Theta}_{\theta(\rho(X))}$ . Nous obtenons donc sur l'espace de modules :

$$\tau_\gamma = \Theta_{\theta(\rho(X))}. \quad (5.2.4)$$

Le flot de Goldman est  $2\pi$ -périodique, le flot  $\{\Theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  agit donc comme la rotation d'angle  $t$  sur chaque orbite où le flot est défini. Les orbites sont exactement les fibres de l'application  $\phi$  définie en (5.1.5). On obtient donc la proposition suivante :

**Proposition 5.2.4** *Pour presque tout  $[\rho] \in \mathfrak{X}(S)$ , le twist de Dehn  $\tau_\gamma$  agit comme la rotation d'angle  $\theta(\rho(X))$  sur la fibre  $\phi^{-1}(\phi([\rho]))$ .*

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour démontrer l'ergodicité de l'action du groupe modulaire dans le cas général.

## 5.3 Preuve de l'ergodicité

La preuve se décompose en deux parties correspondant au cas où la surface est non-orientable de genre pair et où la surface est non-orientable de genre impair. Nous rappelons dans un premier temps le résultat principal de W. Goldman dans le cas orientable, qui a servi de point de départ à notre étude.

## 5. ERGODICITÉ DANS LE CAS GÉNÉRAL

### 5.3.1 Surface orientable

Dans le cas d'une surface orientable fermée  $\Sigma$ , l'espace de module  $\mathfrak{X}(\Sigma, G)$  possède une structure symplectique sur un sous-ensemble ouvert dense. La mesure définie par cette structure symplectique est finie et  $\Gamma_\Sigma$ -invariante.

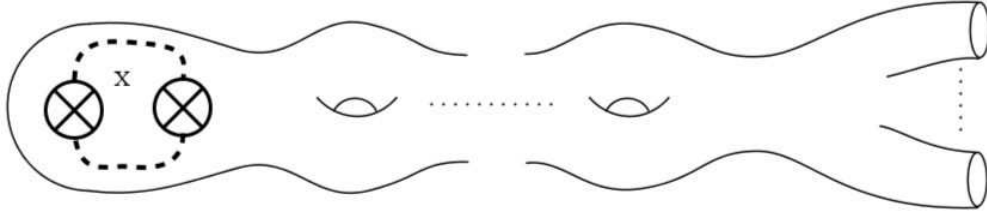
**Théorème 5.3.1 (Goldman [30])** *Soit  $\Sigma$  une surface orientable avec  $\chi(\Sigma)$ . Pour tout  $\mathcal{C} \in \mathfrak{X}(\partial\Sigma)$  l'action de  $\Gamma_\Sigma$  sur  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(\Sigma, G)$  est ergodique.*

### 5.3.2 En genre pair

L'idée de la preuve est basée sur le fait qu'il existe une courbe non-séparante à deux côtés sur une surface non-orientable de genre pair, telle que la surface obtenue en coupant le long de cette courbe est orientable. En utilisant l'expression du twist de Dehn en fonction du flot de Goldman, et le résultat d'ergodicité dans le cas orientable, nous montrons qu'une fonction invariante ne dépend que d'une seule variable. Pour conclure, nous montrons l'ergodicité dans le cas de la bouteille de Klein à deux trous.

#### 5.3.2.1 Décomposition de la surface

Soit  $M$  une surface non-orientable de genre  $k$  pair avec  $\chi(M) \leq -2$ . Il existe un élément  $X$  de  $\pi_1(M)$  représenté par un cercle à deux côtés non-séparant  $\gamma$  tel que la surface  $\Sigma = M|\gamma$  est orientable.



**Figure 5.2:** La courbe  $X$  sur une surface non-orientable de genre pair

Soit  $\mathcal{C} \in \mathfrak{X}(\partial M)$ . L'application  $\phi : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\pm(\Sigma)$  définie en 5.1.2 se restreint naturellement au sous-espace  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M)$ .

**Proposition 5.3.2** *Pour toute fonction  $h : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\Gamma_M$ -invariante, il existe une fonction  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h([\rho]) = H(\text{tr}(\rho(X)))$  pour presque tout  $[\rho] \in \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M)$ .*

**Preuve :** Soit  $h : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction  $\Gamma_M$ -invariante. D'après la proposition 5.2.4, pour presque tout  $[\rho] \in \mathfrak{X}(M)$ , le twist de Dehn  $\tau_\gamma$  agit comme la rotation d'angle  $\theta(\rho(X))$  sur la fibre  $\phi^{-1}(\phi([\rho]))$ . De plus, pour presque tout  $[\rho] \in \mathfrak{X}(M)$ , l'angle  $\theta(\rho(X))$  est un multiple irrationnel de  $\pi$ . On en déduit que pour presque tout  $\rho \in \mathfrak{X}(M)$  l'action de  $\tau_X$  est ergodique sur la fibre  $\phi^{-1}(\phi([\rho]))$ . D'après le Lemme de décomposition ergodique 3.1.6, on en déduit qu'il existe une fonction  $H_1 : \mathfrak{X}^\pm(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $h = H \circ \phi$  presque partout.

Le groupe modulaire  $\Gamma_\Sigma$  de la sous-surface  $\Sigma$  se plonge naturellement dans le groupe modulaire  $\Gamma_M$ , en étendant un difféomorphisme de  $\Sigma$  préservant  $\partial\Sigma$  par l'identité sur le complémentaire  $M \setminus \Sigma$ . De plus, le groupe modulaire  $\Gamma_\Sigma$  agit sur l'espace  $\mathfrak{X}^\pm(\Sigma)$  puisque les

classes de conjugaison des composantes de bord restent inchangées. Ainsi, la fonction  $h$  étant  $\Gamma_M$  invariante, nous en déduisons que la fonction  $H_1$  est  $\Gamma_\Sigma$ -invariante. D'après le Théorème 5.3.1, nous en déduisons qu'il existe une fonction  $H_2 : \mathfrak{X}(\partial\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $H_1 = H_2 \circ \partial_\#$  presque partout, où  $\partial_\#$  désigne la restriction de l'application  $\mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\partial\Sigma)$  à l'ensemble  $\mathfrak{X}^\pm(\Sigma)$ .

En notant  $C_1, \dots, C_m$  les composantes de bord de  $M$ , et  $X^+$  et  $X^-$  les deux composantes supplémentaires de  $\Sigma$ , l'application  $\partial_\#$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \partial_\# : \mathfrak{X}(\Sigma) &\longrightarrow [-2, 2]^{m+2} \\ [\rho] &\longmapsto (\text{tr}(\rho(C_1)), \dots, \text{tr}(\rho(C_m)), \text{tr}(\rho(X^+)), \text{tr}(\rho(X^-))). \end{aligned}$$

Lorsque  $[\rho]$  est un élément de  $\phi(\mathfrak{X}(M))$ , on a directement  $\text{tr}(\rho(X^+)) = \text{tr}(\rho(X^-))$ . De plus si  $[\rho] = \phi([\rho'])$  avec  $[\rho'] \in \mathfrak{X}_\mathcal{C}(M)$ , alors  $(\text{tr}(\rho(C_1)), \dots, \text{tr}(\rho(C_m))) = \mathcal{C}$ .

On en déduit que la fonction  $\partial_\# \circ \phi$  sur  $\mathfrak{X}_\mathcal{C}(M)$  est donnée par

$$\begin{aligned} \partial_\# \circ \phi : \mathfrak{X}_\mathcal{C}(M) &\longrightarrow \mathcal{C} \times [-2, 2] \\ [\rho] &\longmapsto (\mathcal{C}, \text{tr}(\rho(X))). \end{aligned}$$

La fonction  $h$  se factorise par  $\partial_\# \circ \phi$  ce qui termine la preuve de la proposition.  $\square$

### 5.3.2.2 Bouteille de Klein à deux trous

Nous finissons maintenant la preuve de l'ergodicité dans le cas de la bouteille de Klein à deux trous commencée en 4.3.2. Soit  $N$  la surface  $N_{2,2}$ , son groupe fondamental est donné par la présentation suivante :

$$\pi_1(N) = \langle A, B, C, K \mid A^2 B^2 C K \rangle,$$

où  $C$  et  $K$  correspondent aux générateurs de  $\pi_1(\partial N)$ . L'espace de module est identifié à un sous-ensemble de  $[-2, 2]^7$  et pour tout  $\mathcal{C} = (c, k) \in [-2, 2]^2$ , l'espace de module relatif à  $\mathcal{C}$  est donné par :

$$\mathfrak{X}_\mathcal{C}(N) = \{(a, b, x, y, z) \in [-2, 2]^5 \mid (*) : z^2 + R(a, b, x, y)z + S(a, b, x, y) = 0\},$$

où  $R(a, b, c, d)$  et  $S(a, b, c, d)$  sont des fonctions rationnelles données par l'équation 4.3.15.

**Proposition 5.3.3** *Pour tout  $\mathcal{C} \in [-2, 2]^2$ , l'action de  $\Gamma_N$  sur  $\mathfrak{X}_\mathcal{C}(N)$  est ergodique.*

**Preuve :** Soit  $h : \mathfrak{X}_\mathcal{C}(N) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\Gamma_N$ -invariante. D'après la Proposition 4.3.5, la fonction  $h$  est presque partout constante sur les ensembles de niveau de la fonction

$$\begin{aligned} P_1 : \mathfrak{X}_\mathcal{C}(N) &\longrightarrow [-2, 2]^3 \\ (a, b, x, y, z) &\longmapsto (a, b, y). \end{aligned}$$

D'autre part d'après la Proposition 5.3.2, la fonction  $h$  est presque partout constante sur les ensembles de niveau de la fonction

$$\begin{aligned} P_2 : \mathfrak{X}_\mathcal{C}(N) &\longrightarrow [-2, 2] \\ (a, b, x, y, z) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Il nous suffit alors de montrer que les ensembles de niveau des fonctions  $P_1$  et  $P_2$  engendrent un voisinage de chaque point de  $\mathfrak{X}_\mathcal{C}(N)$ . Posons

$$\Delta(a, b, x, y) = (R(a, b, x, y))^2 - 4S(a, b, x, y)$$

## 5. ERGODICITÉ DANS LE CAS GÉNÉRAL

le discriminant de l'équation quadratique en la variable  $z$  donnée par (\*).

Soit  $(a_0, b_0, x_0, y_0, z_0) \in \mathfrak{X}_c(N)$  tel que  $\Delta(a_0, b_0, x_0, y_0) > 0$ . Alors  $z_0$  est l'une des deux racines distinctes de l'équation (\*). Il existe un voisinage connexe  $U$  de  $(a_0, b_0, x_0, y_0, z_0)$  tel que  $\Delta(a, b, x, y) > 0$  pour tout  $(a, b, x, y, z) \in U$ . Ainsi, sur ce voisinage, la coordonnée  $z$  est uniquement déterminée par les coordonnées  $(a, b, x, y)$ , ce qui nous donne un homéomorphisme entre  $U$  et un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^4$ . Dans ces coordonnées, les applications  $P_1$  et  $P_2$  sont des projections orthogonales sur un hyperplan et sur une droite orthogonale à l'hyperplan. Ainsi, les ensembles de niveau de  $P_1$  et  $P_2$  engendrent le voisinage  $U$ .

Soit  $(a_0, b_0, x_0, y_0, z_0) \in \mathfrak{X}_c(N)$  tel que  $\Delta(a_0, b_0, x_0, y_0) = 0$ . On choisit un voisinage  $U$  qui est partitionné en trois sous-ensembles connexes de la même façon que dans la démonstration de la Proposition 4.3.4. Pour tout élément de  $U_+$ , la feuille de  $P_1$  passant par cet élément est d'intersection non-vidue avec  $U_0$  et  $U_-$ . Sachant que les ensembles de niveau de  $P_1$  et  $P_2$  engendrent  $U_+$  et  $U_-$ , on en déduit qu'ils engendrent  $U$  tout entier.

En conclusion, pour tout  $[\rho]$  dans  $\mathfrak{X}_c(N)$ , la famille constituée des ensembles de niveau de  $P_1$  et  $P_2$  engendre un voisinage de  $[\rho]$ . Une fonction  $h : \mathfrak{X}_c(N)$  qui est  $\Gamma_N$ -invariante est en particulier presque partout constante sur ces ensembles de niveau. D'après le Lemme 3.1.8, on en déduit que pour tout  $[\rho] \in \mathfrak{X}_c(N)$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  tel que  $h$  est presque partout constante sur  $U$ . L'espace  $\mathfrak{X}_c(N)$  étant connexe, on en déduit que  $h$  est presque partout constante, ce qui prouve l'ergodicité.  $\square$

### 5.3.2.3 Cas général

**Théorème 5.3.4** *Soit  $M$  une surface non-orientable de genre pair avec  $\chi(M) \leq -2$  et  $\mathcal{C} \in \mathfrak{X}(\partial M)$ . L'action de  $\Gamma_M$  sur  $\mathfrak{X}_c(M)$  est ergodique.*

**Preuve :** Soit  $\mathcal{C} \in \mathfrak{X}(\partial M)$ . Il existe un plongement d'une surface  $N$  homéomorphe à une bouteille de Klein à deux trous dans  $M$ . Soit  $X$  le cercle non-séparant de  $M$  inclus dans  $N$  tel que la surface  $M|X$  est orientable. La Proposition 5.3.2 nous dit qu'une fonction  $\Gamma_M$ -invariante  $h : \mathfrak{X}_c(M) \rightarrow \mathbb{R}$  est presque partout constante sur les ensembles de niveau de l'application

$$\begin{aligned} P_1 : \mathfrak{X}_c(M) &\longrightarrow [-2, 2] \\ [\rho] &\longmapsto \text{tr}(\rho(X)). \end{aligned}$$

Le groupe modulaire  $\Gamma_N$  de  $N$  se plonge naturellement comme un sous-groupe de  $\Gamma_M$ . L'application restriction  $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$  est  $\Gamma_N$ -équivariante. Le complémentaire de  $N$  dans  $M$  est une surface orientable ou une union de deux surfaces orientables. On en déduit que la fonction  $h$  est presque partout constante sur les lignes de niveau de la fonction  $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ . De plus, d'après la Proposition 5.3.3, une fonction  $\Gamma_N$ -invariante sur  $\mathfrak{X}(N)$  est presque partout constante sur les lignes de niveau de l'application  $\partial_\# : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(\partial N)$ . Ainsi, la fonction  $h$  est presque partout constante sur les lignes de niveau de l'application restriction

$$P_2 : \mathfrak{X}_c(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(\partial N).$$

Un élément de  $\mathfrak{X}(\partial N)$  est de la forme  $(c, k) \in [-2, 2]^2$ . Pour tout élément  $(c, k) \in \mathfrak{X}(\partial N)$ , l'image de  $P_2^{-1}(c, k)$  par l'application  $P_1$  est l'intervalle  $[-2, 2]$ . En conclusion, les ensembles de niveau de  $P_1$  et  $P_2$  engendrent l'espace  $\mathfrak{X}_c(M)$ . Ceci prouve que la fonction  $h$  est presque partout constante sur  $\mathfrak{X}_c(M)$ , ce qui termine la preuve de l'ergodicité pour le genre pair.  $\square$

### 5.3.3 En genre impair

L'idée de la preuve est de décomposer une surface non-orientable de genre impair en une surface orientable et une surface non-orientable de caractéristique  $-2$ . Le cas de la surface  $N_{1,3}$  a été entièrement démontré par la Proposition 4.3.4, et nous devons montrer l'ergodicité dans le cas de la surface  $N_{3,1}$  pour finir la preuve. Ensuite, l'expression du twist de Dehn le long de la courbe de décomposition nous permet de conclure.

#### 5.3.3.1 Surface de genre trois à un trou

Nous terminons ici la démonstration de l'ergodicité commencée en 4.3.3. Soit  $N = N_{3,1}$  une surface non-orientable de genre trois à un trou. Son groupe fondamental est donné par :

$$\pi_1(N) = \langle A, B, C, K \mid A^2 B^2 C^2 K \rangle,$$

où  $K$  correspond au générateur de  $\pi_1(\partial N)$ . L'espace de module est identifié à un sous-ensemble de  $[-2, 2]^7$ , et pour tout  $\mathcal{C} = k \in [-2, 2]$ , l'espace de module relatif à  $\mathcal{C}$  est donné par :

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N) = \{(a, b, c, x, y, z) \in [-2, 2]^6 \mid (*) : y^2 + R(a, b, c, x, z)y + S(a, b, c, x, z) = 0\}$$

où  $R(a, b, c, x, z)$  et  $S(a, b, c, x, z)$  sont des fonctions données par l'équation (4.1.7).

**Proposition 5.3.5** *Pour tout  $\mathcal{C} \in [-2, 2]$ , l'action de  $\Gamma_N$  sur  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N)$  est ergodique.*

**Preuve :** La démonstration utilise les mêmes arguments que celle de la Proposition 5.3.3. Soit  $\mathcal{C} \in \mathfrak{X}(\partial N)$ .

Nous montrons tout d'abord que pour toute fonction  $h : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N) \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\Gamma_N$ -invariante, il existe une fonction  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h([\rho]) = H(\text{tr}(\rho(X)))$  pour presque tout  $[\rho] \in \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N)$ .

En effet, la surface  $N|X$  est un plan projectif à trois trous noté  $S$ . Une fonction  $\Gamma_N$ -invariante est presque partout constante sur les lignes de niveau de l'application  $\phi : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}^{\pm}(S)$ . L'ergodicité de l'action de  $\Gamma_S$  sur les lignes de niveau de  $\partial_{\#} : \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathfrak{X}(\partial S)$  est donnée par la Proposition 4.3.4. Ainsi, on en déduit que la fonction  $h$  se factorise par l'application :

$$\begin{aligned} \partial_{\#} \circ \phi : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) &\longrightarrow \mathcal{C} \times [-2, 2] \\ [\rho] &\longmapsto (\mathcal{C}, \text{tr}(\rho(X))). \end{aligned}$$

La fonction  $h$  est donc presque partout constante sur les lignes de niveau de l'application

$$\begin{aligned} P_1 : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N) &\longrightarrow [-2, 2] \\ (a, b, c, x, y, z) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

D'autre part la Proposition 4.3.7 nous dit que la fonction  $h$  est presque partout constante sur les lignes de niveau de l'application

$$\begin{aligned} P_2 : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N) &\longrightarrow [-2, 2]^4 \\ (a, b, c, x, y, z) &\longmapsto (a, b, c, z). \end{aligned}$$

Les lignes de niveau des fonctions  $P_1$  et  $P_2$  engendrent un voisinage ouvert connexe de chaque point de  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N)$  et on en déduit que la fonction  $h$  est localement presque partout constante. L'espace  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(N)$  étant connexe, on en déduit que la fonction  $h$  est presque partout constante, ce qui prouve l'ergodicité.  $\square$

## 5. ERGODICITÉ DANS LE CAS GÉNÉRAL

### 5.3.3.2 Décomposition de la surface

Soit  $M$  une surface non-orientable de genre  $k \geq 1$  impair et  $\chi(M) < -2$ . Il existe un cercle séparant  $X$  tel que l'une des deux composantes de  $M \setminus X$ , notée  $M_1$  est homéomorphe à la surface  $N_{3,1}$  ou  $N_{1,3}$  et l'autre est orientable, notée  $M_2$ . Soit  $\mathcal{C} \in \mathfrak{X}(\partial M)$ .

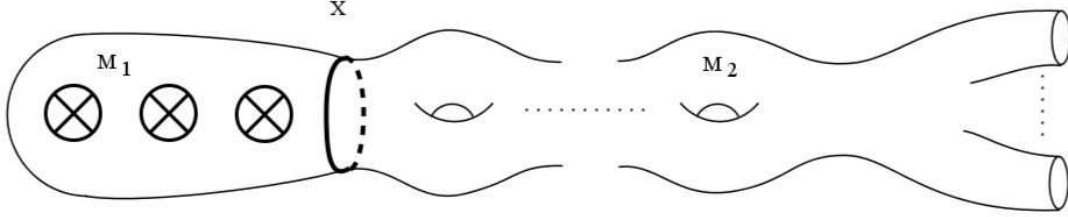


Figure 5.3: La courbe  $X$  sur une surface non-orientable de genre impair

**Proposition 5.3.6** *Pour toute fonction  $h : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\Gamma_M$ -invariante, il existe une fonction  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h([\rho]) = H(\text{tr}(\rho(X)))$  pour presque tout  $[\rho] \in \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M)$ .*

**Preuve :** Soit  $h : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction  $\Gamma_M$ -invariante. D'après la proposition 5.2.3, pour presque tout  $[\rho] \in \mathfrak{X}(M)$ , le twist de Dehn  $\tau_X$  agit comme la rotation d'angle  $2\theta(\rho(X))$  sur la fibre  $\psi^{-1}(\psi([\rho]))$ . De plus, pour presque tout  $[\rho] \in \mathfrak{X}(M)$ , l'angle  $2\theta(\rho(X))$  est un multiple irrationnel de  $\pi$ . On en déduit que pour presque tout  $[\rho] \in \mathfrak{X}(M)$ , l'action de  $\tau_X$  est ergodique sur la fibre  $\psi^{-1}(\psi([\rho]))$ . D'après le Lemme de décomposition ergodique, on en déduit qu'il existe une fonction  $H_1 : \mathfrak{X}(M_1, M_2, X) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h = H_1 \circ \psi$  presque partout.

L'ensemble  $\mathfrak{X}(M_1, M_2, X)$  est un sous-ensemble de  $\mathfrak{X}(M_1) \times \mathfrak{X}(M_2)$  et on peut considérer la projection :

$$\begin{aligned} p_2 : \mathfrak{X}(M_1, M_2, X) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M_2) \\ ([\rho_1], [\rho_2]) &\longmapsto [\rho_2]. \end{aligned}$$

Tout d'abord, si  $M$  est une surface de genre  $k \geq 3$ , alors on peut supposer que  $M_1 = N_{3,1}$ . Pour tout  $[\rho_2] \in \mathfrak{X}(M_2)$ , la fibre  $p_2^{-1}([\rho_2])$  s'identifie à l'espace  $\mathfrak{X}_x(M_1)$  avec  $x = \text{tr}(\rho_2(X)) \in \mathfrak{X}(\partial M_1)$ . D'après la Proposition 5.3.5, l'action de  $\Gamma_{M_1}$  est ergodique sur l'espace  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M_1)$ . Ainsi, la fonction  $H_1$  étant  $\Gamma_{M_1}$ -invariante, on en déduit l'existence d'une fonction  $H_2 : \mathfrak{X}(M_2) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $H_1 = H_2 \circ p_2$  presque partout.

La fonction  $H_2$  est une fonction  $\Gamma_{M_2}$ -invariante sur  $\mathfrak{X}(M_2)$ . La surface étant orientable on en déduit qu'il existe une fonction  $H_3 : \mathfrak{X}(\partial M_2) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $H_2 = H_3 \circ \partial_{\#}$ , où l'application  $\partial_{\#}$  est  $\mathfrak{X}(M_2) \rightarrow \mathfrak{X}(\partial M_2)$ . De plus  $\mathfrak{X}(\partial M_2)$  s'identifie à  $\mathfrak{X}(\partial M_2) \times \mathfrak{X}(X)$ .

On en déduit que la fonction  $\partial_{\#} \circ p_2 \circ \psi$  sur  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M)$  est donnée par

$$\begin{aligned} \partial_{\#} \circ p_2 \circ \psi : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) &\longrightarrow \mathcal{C} \times [-2, 2] \\ [\rho] &\longmapsto (\mathcal{C}, \text{tr}(\rho(X))) \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la proposition dans le cas où  $k \geq 3$ .

Si le genre  $k = 1$ , nous avons forcément  $M_1 = N_{1,3}$ . La courbe  $X$  est une composante de bord de  $M_1$  et on note  $D$  et  $E$  les deux autres composantes de bord. Nous mettons l'élément  $\mathcal{C} \in \mathfrak{X}(\partial M)$  sous la forme  $(d, e, c_1, \dots, c_m)$ .

Pour tout  $[\rho_2] \in \mathfrak{X}(M_2)$ , la fibre  $p_2^{-1}([\rho_2])$  s'identifie à l'espace  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}'}(M_1)$  avec  $\mathcal{C}' = (d, e, \text{tr}(\rho_2(X))) \in \mathfrak{X}(\partial M_1)$ . D'après la Proposition 4.3.4, l'action de  $\Gamma_{M_1}$  est ergodique sur l'espace  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}'}(M_1)$ . Ainsi, la fonction  $H_1$  étant  $\Gamma_{M_1}$ -invariante, on en déduit l'existence d'une fonction  $H_2 : \mathfrak{X}(M_2) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $H_1 = H_2 \circ p_2$  presque partout. Nous pouvons alors appliquer le même raisonnement à la fonction  $H_2$  que pour le cas  $k \geq 3$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

En conclusion, une fonction  $h$  qui est  $\Gamma_M$  invariante est presque partout constante sur les lignes de niveau de l'application

$$\begin{aligned} P_1 : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) &\longrightarrow [-2, 2] \\ [\rho] &\longmapsto \text{tr}(\rho(X)). \end{aligned}$$

D'autre part, la surface  $M_2$  est orientable de caractéristique  $\chi(M_2) \leq -1$  et peut donc se décomposer en pantalons. De même, la surface  $M_1$  peut se décomposer en la somme connexe d'un pantalon et d'un plan projectif à deux trous de sorte que  $X$  est une composante de bord du pantalon. En recollant les deux pantalons ayant  $X$  comme composante de bord, on obtient une sphère à quatre trous  $S$  plongée dans  $M$ .

L'ergodicité dans le cas d'une sphère à quatre trous montre qu'une fonction  $\Gamma_S$ -invariante est constante sur les ensembles de niveau de l'application

$$P_2 : \mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(\partial S).$$

De plus, pour tout élément de  $\mathfrak{X}(\partial S)$ , l'image de la fibre par l'application  $P_1$  est l'intervalle  $[-2, 2]$ . En conséquence, les lignes de niveau de  $P_1$  et  $P_2$  engendrent l'espace  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M)$ . En particulier, la fonction  $h$  est presque partout constante sur  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M)$  ce qui prouve l'ergodicité de l'action du groupe modulaire dans le cas où le genre est impair.

En rassemblant le résultat ci-dessus et le Théorème 5.3.4, on obtient le résultat annoncé :

**Théorème 5.3.7** *Soit  $M$  une surface non-orientable telle que  $\chi(M) \leq -2$  et soit  $\mathcal{C} \in \mathfrak{X}(\partial M)$ . L'action de  $\Gamma_M$  sur  $\mathfrak{X}_{\mathcal{C}}(M)$  est ergodique.*

## 5. ERGODICITÉ DANS LE CAS GÉNÉRAL

---

## Chapitre 6

# Composantes connexes de l'espace des représentations

*L'essence des mathématiques  
réside dans leur liberté.  
– Georg Cantor*

Ce chapitre est consacré à l'étude du nombre de composantes connexes de l'espace  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ . L'idée est de trouver des invariants de représentations qui séparent les différentes composantes connexes de l'espace de représentations.

L'holonomie d'une structure hyperbolique sur  $S$  donne une représentation de  $\pi_1(\Sigma)$  dans le groupe  $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$  des isométries du plan hyperbolique. Il est connu que l'espace de Fricke, défini comme l'espace des classes d'équivalence des structures hyperboliques sur  $S$ , s'identifie à l'ensemble des classes de conjugaison de représentations fidèles et discrètes. Cet ensemble constitue une composante connexe de l'espace  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PGL}(2, \mathbb{R}))/\text{PGL}(2, \mathbb{R})$  (voir Goldman [29]).

Dans le cas d'une surface orientable, l'image de la représentation d'holonomie est incluse dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , qui est constitué des isométries qui préservent l'orientation. Les travaux de Goldman sur la classe d'Euler [26, 29], lui ont permis de montrer que l'espace  $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  possède  $4g - 3$  composantes connexes indexées par les valeurs admissibles de la classe d'Euler.

Le but de ce chapitre est de montrer que pour une surface non-orientable  $M$ , l'espace  $\text{Hom}(\pi_1(M), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  possède seulement deux composantes connexes indexées par une classe de Stiefel-Whitney, définie comme une réduction de la classe d'Euler modulo deux.

## 6.1 Obstructions et classe d'Euler

### 6.1.1 Applications d'obstruction

Il existe une famille d'invariants de représentations  $\phi \in \text{Hom}(\pi, G)$  qui nous permet de comprendre la topologie de  $\text{Hom}(\pi, G)$ . Lorsque  $M$  est un espace dont le groupe fondamental est  $\pi_1(M) = \pi$  et  $X$  est un espace sur lequel  $G$  agit, alors le  $(G, X)$ -fibré plat sur  $M$  avec holonomie  $\phi$  est le fibré sur  $M$  dont l'espace total est le quotient de  $\widetilde{M} \times X$  par l'action de  $\pi$  donnée par  $\gamma : (\widetilde{s}, x) \mapsto (\gamma \cdot \widetilde{s}, \phi(\gamma)x)$ .

## 6. COMPOSANTES CONNEXES DE L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

Les invariants topologiques des  $(G, X)$ -fibrés sur  $M$  définissent des invariants de représentations  $\phi \in \text{Hom}(\pi, G)$ . En particulier, les obstructions à la trivialité du fibré sont des invariants topologiques du fibré. (Voir Steenrod [77] pour une exposition de la théorie de l'obstruction). Ainsi, pour chaque  $n$ , cette construction nous donne une application d'obstruction :

$$o_n : \text{Hom}(\pi_1(M), G) \longrightarrow H^n(S, \pi_{n-1}(G)).$$

Dans notre étude, nous nous intéressons à des variétés de dimension deux et ainsi  $H^n(S, H)$  est trivial pour tout  $n > 2$ . Donc, seules les premières et deuxièmes classes d'obstruction seront utiles. Ces deux obstructions possèdent une description explicite qui ne nécessitent pas de passer par les  $(G, X)$ -fibrés.

La première classe d'obstruction est associée au groupe  $\pi_0(G)$  qui est non-trivial seulement lorsque  $G$  n'est pas connexe. L'élément  $o_1(\phi)$  est dans  $H^1(M, \pi_0(G)) \simeq \text{Hom}(\pi, \pi_0(G))$  et est obtenu en composant la représentation  $\rho : \pi \rightarrow G$  par l'épimorphisme  $G \rightarrow \pi_0(G)$ . Lorsque  $\pi$  est un groupe engendré par un ensemble fini de générateurs  $\{A_1, \dots, A_n\}$ , l'image des générateurs par l'application  $o_1(\phi)$  détermine entièrement l'élément  $o_1(\phi)$  ce qui nous permet de voir  $o_1(\phi)$  comme un élément de  $(\pi_0(G))^n$ .

Lorsque  $G$  est connexe, la première obstruction est triviale. La seconde obstruction peut se définir comme l'obstruction à relever une représentation  $\rho : \pi \rightarrow G$  en une représentation du revêtement universel  $\tilde{G}$  de  $G$ . La seconde obstruction est une classe  $o_2(\phi) \in H^2(M, \pi_1(G))$ , dont nous allons voir une interprétation dans le cas des groupes de surface.

### 6.1.2 Groupes de surface

Lorsque  $\pi$  est le groupe fondamental d'une surface fermée  $S$ , le groupe d'homologie est donné par :

$$H^2(S, \pi_1(G)) = \begin{cases} \pi_1(G) & \text{si } S \text{ est orientable,} \\ \pi_1(G)/2\pi_1(G) & \text{si } S \text{ est non-orientable.} \end{cases}$$

#### 6.1.2.1 Surfaces orientables

Supposons que  $\Sigma$  est une surface fermée orientée de genre  $g > 1$ . Son groupe fondamental admet la présentation géométrique suivante :

$$\pi_1(\Sigma) = \langle X_1, \dots, Y_g \mid [X_1, Y_1] \cdots [X_g, Y_g] \rangle.$$

Dans ce cas, le cycle fondamental sur  $\Sigma$  donné par l'orientation détermine un isomorphisme  $H^2(\Sigma, \pi_1(G)) \simeq \pi_1(G)$ . L'image de l'application d'obstruction  $o_2$  peut être décrite algébriquement comme suit.

Soit  $\phi$  un élément de  $\text{Hom}(\pi, G)$ . On choisit des relevés  $\widetilde{\phi(X_1)}, \dots, \widetilde{\phi(Y_g)}$  des images des générateurs dans  $\tilde{G}$ . La relation du groupe fondamental implique que l'élément

$$\left[ \widetilde{\phi(X_1)}, \widetilde{\phi(Y_1)} \right] \cdots \left[ \widetilde{\phi(X_g)}, \widetilde{\phi(Y_g)} \right]$$

est un relevé de l'identité de  $G$  dans  $\tilde{G}$ , c'est-à-dire un élément du noyau de l'application revêtement  $p : \tilde{G} \rightarrow G$  qui est isomorphe à  $\pi_1(G)$  et cet élément est indépendant des relevés choisis. En effet, deux relevés diffèrent d'un élément de  $\pi_1(G) \subset Z(\tilde{G})$ , et si  $\widetilde{\phi(X_1)'} = g\widetilde{\phi(X_1)}$

alors on a :

$$\begin{aligned} \left[ \widetilde{\phi(X_1)}, \widetilde{\phi(Y_1)} \right] \cdots \left[ \widetilde{\phi(X_g)}, \widetilde{\phi(Y_g)} \right] &= \widetilde{\phi(X_1)}' \widetilde{\phi(Y_1)} (\widetilde{\phi(X_1)})'^{-1} (\widetilde{\phi(Y_1)})^{-1} \cdots \left[ \widetilde{\phi(X_g)}, \widetilde{\phi(Y_g)} \right] \\ &= g \widetilde{\phi(X_1)} \widetilde{\phi(Y_1)} (g \widetilde{\phi(X_1)})^{-1} (\widetilde{\phi(Y_1)})^{-1} \cdots \left[ \widetilde{\phi(X_g)}, \widetilde{\phi(Y_g)} \right] \\ &= gg^{-1} \left[ \widetilde{\phi(X_1)}, \widetilde{\phi(Y_1)} \right] \cdots \left[ \widetilde{\phi(X_g)}, \widetilde{\phi(Y_g)} \right]. \end{aligned}$$

L'application  $o_2$  est continue à valeur dans  $\pi_1(G)$  qui est un groupe discret. Il en découle que l'application  $o_2$  est localement constante et définit un invariant des composantes connexes de  $\text{Hom}(\pi, G)$ .

### 6.1.2.2 Surfaces non-orientables

Supposons  $M$  une surface non-orientable de genre  $k$ , avec  $k \geq 3$ . Rappelons que son groupe fondamental admet la présentation suivante :

$$\pi_1(M) = \pi = \langle A_1, \dots, A_k | A_1^2 \cdots A_k^2 \rangle.$$

Dans ce cas, nous avons un isomorphisme  $H^2(\Sigma, \pi_1(G)) \simeq \pi_1(G)/2\pi_1(G)$ , où  $2\pi_1(G)$  est le sous-groupe du groupe abélien  $\pi_1(G)$  constitué d'éléments de la forme  $\{a^2 \mid a \in \pi_1(G)\}$ . L'image de l'application d'obstruction peut être décrite algébriquement comme suit.

Soit  $\phi$  un élément de  $\text{Hom}(\pi, G)$ . On choisit des relevés  $\widetilde{\phi(X_1)}, \dots, \widetilde{\phi(Y_g)}$  des images des générateurs dans  $\widetilde{G}$ . La relation du groupe fondamental implique que l'élément

$$\left( \widetilde{\phi(A_1)} \right)^2 \cdots \left( \widetilde{\phi(A_k)} \right)^2$$

est un relevé de l'identité de  $G$  dans  $\widetilde{G}$ , c'est-à-dire un élément du noyau de l'application revêtement  $p : \widetilde{G} \rightarrow G$  qui est isomorphe à  $\pi_1(G)$ . Contrairement au cas orientable cet élément n'est pas indépendant des relevés choisis, mais est indépendant à un élément de  $2\pi_1(G)$  près. En effet, deux relevés diffèrent d'un élément de  $\pi_1(G) \subset Z(\widetilde{G})$ , et si  $\widetilde{\phi(A_1)}' = g \widetilde{\phi(A_1)}$  alors on a :

$$\left( \widetilde{\phi(A_1)}' \right)^2 \cdots \left( \widetilde{\phi(A_k)} \right)^2 = g^2 \left( \left( \widetilde{\phi(A_1)} \right)^2 \cdots \left( \widetilde{\phi(A_k)} \right)^2 \right)$$

L'application  $o_2$  est continue à valeur dans  $\pi_1(G)/2\pi_1(G)$  qui est un groupe discret. Il en découle que l'application  $o_2$  est localement constante et définit un invariant des composantes connexes de  $\text{Hom}(\pi, G)$ .

### 6.1.3 Classe d'Euler et de Stiefel-Whitney

Nous nous plaçons à partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre dans le cas où  $G$  est le groupe des isométries du plan hyperboliques préservant l'orientation, que l'on peut identifier au groupe  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , en prenant pour modèle du plan hyperbolique le demi-plan supérieur. Soit  $\widetilde{G}$  le revêtement universel de  $G$ , et  $p : \widetilde{G} \rightarrow G$  l'application revêtement. Le groupe  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  est homéomorphe à un tore solide et donc son groupe fondamental est  $\pi_1(\text{PSL}(2, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}$ . Ainsi, le centre de  $\widetilde{G}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  et on a  $G = \widetilde{G}/Z(\widetilde{G})$ . On note  $z$  un générateur de  $Z(\widetilde{G})$ , de sorte que  $Z(\widetilde{G}) = \langle z \rangle$ .

## 6. COMPOSANTES CONNEXES DE L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

Prenons une surface  $\Sigma$  orientable. L'application obstruction  $o_2$  prends ses valeurs dans  $\mathbb{Z}$  et correspond à la classe d'Euler du fibré en cercle au dessus de  $\Sigma$  défini par une représentation. Cette classe est maintenant très bien comprise (voir par exemple [25, 29, 59]). J. Milnor et J. Wood ont montré que la valeur de la classe d'Euler d'une représentation est bornée et satisfait l'inégalité  $|e(\phi)| \leq |\chi(\Sigma)|$  appelée inégalité de Milnor-Wood. Le théorème principal de [29] est le suivant :

**Théorème 6.1.1 (Goldman [29])** *Soit  $\Sigma$  une surface orientable de genre  $g \geq 2$ . L'ensemble  $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), G)$  a exactement  $2|\chi(M)| + 1$  composantes connexes, correspondant aux préimages  $e^{-1}(n)$ , avec  $|n| \leq |\chi(M)|$ .*

Dans le cas d'une surface non-orientable, l'application  $o_2$  prends ses valeurs dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Nous obtenons dans ce chapitre le résultat suivant :

**Théorème 6.1.2** *Soit  $M$  une surface non-orientable fermée de genre  $k$  avec  $k \geq 3$ . L'ensemble  $\text{Hom}(\pi_1(M), G)$  a exactement deux composantes connexes, correspondant aux préimages  $o_2^{-1}(n)$ , avec  $n \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .*

Pour donner la preuve de ce théorème, nous décomposons la surface  $M$  en surfaces qui sont des surfaces à bords. Il est donc nécessaire de définir une généralisation de l'application  $o_2$  aux surfaces à bord.

### 6.1.4 Surfaces à bord

Soit  $S$  une surface avec  $m > 0$  composantes de bord. Son groupe fondamental est isomorphe au groupe libre à  $1 - \chi(S)$  générateurs, et donc l'espace des représentation  $\text{Hom}(\pi_1(S), G)$  est identifié avec  $G^{1-\chi(S)}$ . Le groupe  $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  étant connexe, on en déduit que l'espace des représentations est également connexe. On doit alors imposer des conditions au bord pour définir une application d'obstruction qui convienne. Pour cela, il est nécessaire de faire quelques rappels sur le revêtement universel de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

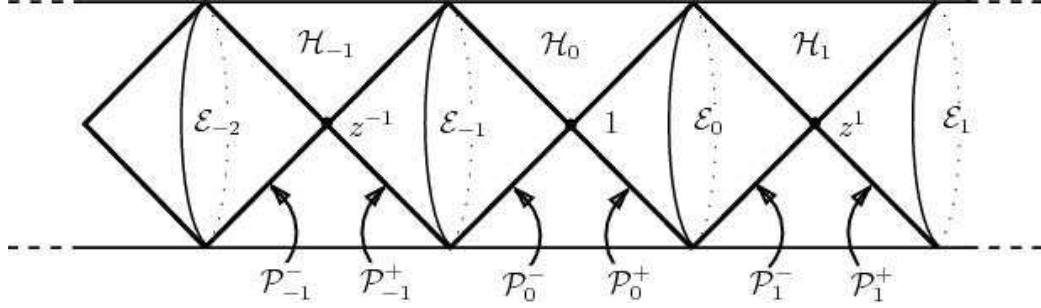
#### 6.1.4.1 Revêtement universel

Le groupe  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  est un revêtement double connexe de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , et donc  $\tilde{G}$  est également le revêtement universel de  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ . On a une identification canonique :

$$\text{SL}(2, \mathbb{R}) = \tilde{G} / \langle z^2 \rangle.$$

Pour alléger les notations, nous désignerons souvent un élément de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  par un de ses relevés dans  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  sous forme de matrice. Pour un élément  $A$  du revêtement universel  $\tilde{G}$ , on définit la trace  $\text{tr}(A)$  comme la trace de l'image de  $A$  dans  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ . On dit que  $A \notin Z(\tilde{G})$  est *elliptique*, *parabolique* ou *hyperbolique* selon que  $|\text{tr}(A)| < 2$ ,  $|\text{tr}(A)| = 2$  ou  $|\text{tr}(A)| > 2$  respectivement. Nous noterons  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{H}$  les sous-ensembles de  $\tilde{G}$  constitués d'éléments elliptiques, paraboliques ou hyperboliques respectivement. Ces sous-ensembles décomposent  $\tilde{G}$  en une infinité de composantes, indexées par  $\mathbb{Z}$ , comme le montre la Figure 6.1.

Nous pouvons distinguer ces différentes régions par les invariants suivants, associés à un élément  $A \in \tilde{G}$ . Le groupe  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  agit par automorphismes projectifs sur  $\partial\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{S}^1$ , et cette action se relève en une action de  $\tilde{G}$  sur  $\tilde{\mathbb{S}^1} = \mathbb{R}$ . Pour  $A \in \tilde{G}$ , définissons :


 Figure 6.1: Domaines de  $\tilde{G}$ 

$$\underline{m}A = \min\{A \cdot x - x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\overline{m}A = \max\{A \cdot x - x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

**Lemme 6.1.3 (Jankins-Neumann [45])** *On a les caractérisations suivantes :*

$$A \in \mathcal{E}_i \iff [\underline{m}A, \overline{m}A] \subset ]i, i+1[$$

$$A \in \mathcal{H}_i \iff i \subset ]\underline{m}A, \overline{m}A[$$

$$A \in \mathcal{P}_i^+ \iff \underline{m}A = i < \overline{m}A$$

$$A \in \mathcal{P}_i^- \iff \underline{m}A < i = \overline{m}A$$

#### 6.1.4.2 Classe d'obstruction relative

Le groupe fondamental d'une surface à bord  $S$  a la présentation suivante :

$$\pi = \langle A_1, \dots, A_k, C_1, \dots, C_m \mid R(A_1, \dots, A_k) \cdot C_1 \cdots C_m \rangle$$

où  $C_1, \dots, C_m$  correspondent aux composantes de  $\partial M$  et  $R(A_1, \dots, A_k)$  correspond à la relation usuelle de la surface fermée correspondante (produit des commutateurs ou produit des carrés).

Soit  $\phi$  dans  $\text{Hom}(\pi, G)$  un homomorphisme tel que pour chaque composante de bord  $C_i$ , l'image  $\phi(C_i)$  est un élément hyperbolique de  $G$ . On note  $W(S)$ , l'ensemble de tous les homomorphismes satisfaisant cette condition. Pour tout élément  $g \in \mathcal{H}$ , il existe un unique relevé  $\widetilde{g}^0$  dans  $\mathcal{H}_0$ .

Soit  $\widetilde{\phi(C_i)}^0$  le relevé de  $\phi(C_i)$  dans  $\mathcal{H}_0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . D'autre part, nous choisissons des relevés quelconques  $\widetilde{\phi(A_1)}, \dots, \widetilde{\phi(A_k)}$  dans  $\tilde{G}$ . La relation du groupe fondamental implique que l'élément

$$R\left(\widetilde{\phi(A_1)}, \dots, \widetilde{\phi(A_k)}\right) \widetilde{\phi(C_1)}^0 \cdots \widetilde{\phi(C_m)}^0$$

est un relevé de l'identité de  $G$  dans  $\tilde{G}$ . De la même façon que dans le cas fermé, lorsque  $S$  est orientable la construction donne un élément bien défini de  $\mathbb{Z}$ , appelé *classe d'Euler relative de  $\phi$*  et encore noté  $e(\phi)$ . Lorsque  $S$  est non-orientable, la construction donne un élément bien défini de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , que nous appelons *classe de Stiefel-Whitney relative de  $\phi$*  et notons encore  $o_2(\phi)$ .

Nous rappelons le résultat de Goldman concernant la classe d'Euler relative :

## 6. COMPOSANTES CONNEXES DE L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

---

**Théorème 6.1.4 (Goldman[29] 3.3)** *Soit  $\Sigma$  une surface compacte orientée telle que  $\chi(\Sigma) \leq -1$ . Les composantes connexes de  $W(\Sigma)$  sont les préimages  $e^{-1}(n)$  avec  $|n| \leq \chi(S)$ .*

Nous établissons dans ce chapitre la généralisation de ce théorème à la classe de Stiefel-Whitney relative.

**Théorème 6.1.5** *Soit  $M$  une surface non-orientable telle que  $\chi(M) \leq -1$ . L'ensemble  $W(M)$  a exactement deux composantes connexes, correspondant aux préimages  $o_2^{-1}(n)$ , avec  $n \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .*

Le reste de ce chapitre sera consacré à la démonstration de ce théorème qui inclut le Théorème 6.1.2 comme un cas particulier.

### 6.1.5 Propriétés d'additivité

A partir de la construction, nous pouvons directement établir une propriété d'additivité de la classe de Stiefel-Whitney.

**Proposition 6.1.6** *Soit  $M$  une surface non-orientable, telle que  $M = M_1 \cup M_2$ , et  $\phi \in \text{Hom}(\pi, G)$  tel que pour chaque composante de bord  $C$  de  $M_i$ , l'image  $\phi(C)$  est hyperbolique. On peut supposer sans perte de généralité que  $M_1$  est non-orientable. Alors,*

- si  $M_2$  est non-orientable

$$o_2(\phi) = o_2(\phi|_{\pi_1(M_1)}) + o_2(\phi|_{\pi_1(M_2)}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

- Si  $M_2$  est orientable

$$o_2(\phi) = o_2(\phi|_{\pi_1(M_1)}) + (\bar{e}(\phi|_{\pi_1(M_2)})) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

où  $\bar{e}(\phi) = e(\phi) \pmod{2} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

## 6.2 L'application carré

Nous établissons dans ce chapitre quelques propriétés importantes de l'application carré dans  $G$  et dans  $\tilde{G}$ .

### 6.2.1 Propriétés de l'application

L'application suivante :

$$\begin{aligned} Q : \text{PSL}(2, \mathbb{R}) &\longrightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A^2 \end{aligned}$$

est bien définie car  $(-A)^2 = A^2$  dans  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ . Cette application satisfait la proposition suivante :

**Proposition 6.2.1**

1. L'image de  $Q$  est l'ensemble

$$J = \{M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) > -2\} \cup \{-I\}.$$

2. Pour tout  $K \in J \setminus \{-I\}$ , il existe un unique  $A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  tel que  $Q(A) = K$  donné par :

$$A = \frac{K + I}{\sqrt{\mathrm{tr}(K) + 2}}.$$

3. La fibre  $Q^{-1}(I)$  est l'ensemble

$$\left\{ g \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \right\}.$$

**Preuve :** Soit  $K$  un élément de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ , et supposons qu'il existe  $A$  dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  tel que  $A^2 = K$ . Nous avons l'identité  $\mathrm{tr}(A^2) = (\mathrm{tr}(A))^2 - 2$  qui montre directement que  $\mathrm{tr}(K) \geq -2$ .

Si  $\mathrm{tr}(K) > -2$ , alors  $K$  est conjuguée à l'une des matrices suivantes :

- $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , si  $\mathrm{tr}(K) < 2$ ;
- $P_u = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $u \in \mathbb{R}$ , si  $\mathrm{tr}(M) = 2$ ;
- $H_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$  avec  $t \in \mathbb{R}^*$ , si  $\mathrm{tr}(M) > 2$ .

Dans chacun de ces cas, l'équation matricielle  $A^2 = M$  se résout par un calcul direct. Nous obtenons :

- $A^2 = R_\theta$  si et seulement si  $A = \pm R_{\theta/2}$ ;
- $A^2 = P_u$  si et seulement si  $A = \pm P_{u/2}$ ;
- $A^2 = H_t$  si et seulement si  $A = \pm H_{t/2}$ .

Dans chacun des cas, une des deux solutions satisfait  $\mathrm{tr}(A) \geq 0$  et donc  $\mathrm{tr}(A) = \sqrt{\mathrm{tr}(K) + 2}$ . Le théorème de Cayley-Hamilton appliqué à la matrice  $A$  implique que :

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I = 0$$

ce qui nous donne

$$A = \frac{K + I}{\sqrt{\mathrm{tr}(K) + 2}}.$$

Les deux solutions dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  sont identifiées dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  ce qui prouve (ii).

Si  $\mathrm{tr}(K) = -2$ , alors la matrice  $K$  est conjuguée à la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & u \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si  $u \neq 0$ , l'équation  $A^2 = K$  n'a pas de solution dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  et donc dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Si  $u = 0$ , alors  $K = -I$ , et on résout explicitement l'équation :

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## 6. COMPOSANTES CONNEXES DE L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

ce qui nous donne  $z \neq 0$ ,  $t = -x$  et  $y = \frac{-1-x^2}{z}$ . L'ensemble des solutions dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  est donc :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & \frac{-1-x^2}{z} \\ z & -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^* \right\} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

A chaque solution dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  correspond un couple de solution dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ . Nous choisissons le représentant dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  qui satisfait  $z > 0$ , et définissons la matrice

$$g = \begin{pmatrix} \sqrt{z} & x/\sqrt{z} \\ 0 & 1/\sqrt{z} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

On a alors

$$g \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} x & \frac{-1-x^2}{z} \\ z & -x \end{pmatrix} = A.$$

Réciproquement, toute matrice  $A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  de la forme  $A = g \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g^{-1}$  satisfait  $Q(A) = -I$ .  $\square$

### 6.2.2 Revêtement universel et carré

Soit  $\mathcal{J} \subset \tilde{G}$ , l'ensemble des éléments de  $\tilde{G}$  dont l'image dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  est un élément de  $J$ . De façon équivalente,  $\mathcal{J}$  est l'image de l'application carrée relevée

$$\begin{aligned} \tilde{Q} : \tilde{G} &\rightarrow \tilde{G} \\ A &\mapsto A^2. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\mathcal{J} = \left\{ A \in \tilde{G} \mid \mathrm{tr}(A) > -2 \right\} \cup \left\{ z^{2k+1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Un élément de  $K \in \tilde{G}$  satisfait  $\mathrm{tr}(K) < -2$  si et seulement si  $K \in \mathcal{H}_{2k+1}$  pour un certain  $k \in \mathbb{Z}$ . De même  $\mathrm{tr}(K) = -2$  si et seulement si  $K \in \mathcal{P}_{2k+1} \cup \{z^{2k+1}\}$ . Nous en déduisons que

$$\mathcal{J} = \tilde{G} \setminus \left( \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_{2k+1} \cup \mathcal{P}_{2k+1} \right). \quad (6.2.1)$$

Une propriété importante à noter est que  $\mathcal{J}$  est un ensemble connexe. De plus, la Proposition 6.2.1 nous amène à formuler la proposition suivante :

**Proposition 6.2.2** *Soit  $K : [0, 1] \rightarrow \tilde{G}$  un chemin continu satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout  $t$  dans  $[0, 1]$ , l'élément  $K_t$  est dans  $\mathcal{J}$ .*
2. *L'ensemble  $\mathcal{T} = \{t \in ]0, 1[ \mid K_t \neq z^{2k+1} \text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z}\}$  est une union finie d'intervalles ouverts.*
3. *Pour tout  $s$  tel que  $K_s = z^{2k+1}$ , il existe  $\epsilon > 0$ ,  $g_s$  et  $h_s$  dans  $\tilde{G}$  tels que :*

$$\forall t \in (s - \epsilon, s), K_t = g_s \tilde{R}_{\theta_t} g_s^{-1}$$

$$\forall t \in (s, s + \epsilon), K_t = h_s \tilde{R}_{\theta_t} h_s^{-1}$$

où  $\tilde{R}_{\theta_t}$  est un relevé de  $R_{\theta_t}$  avec  $\theta_t$  qui converge vers  $\pi$ .

Alors, à une reparamétrisation près, il existe un chemin continu  $\{A_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $G$  tel que pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $Q(A_t) = K_t$  dans  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ .

**Preuve :** Soit  $\{K_t\}_{t \in [0,1]}$  un chemin satisfaisant les hypothèses de la proposition. L'ensemble  $\mathcal{T}$  est une union finie d'intervalles ouverts de  $]0, 1[$ , que l'on note  $T_i = ]s_i^-, s_i^+[$  avec  $i \in \{0, m\}$ . Sur chaque intervalle  $T_i$ , le chemin dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  défini par le projeté de la matrice

$$A_t = \frac{K_t + I}{\sqrt{\text{tr}(K_t) + 2}}, \quad \forall t \in T_i \quad (6.2.2)$$

est continu.

Soit  $i \in \{0, m\}$ , tel que  $s_i^- \neq 0$  et soit  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $K_s = z^{2k+1}$ . Sur un voisinage à droite du point  $s_i^-$ , on peut écrire  $K_t = g_i R_{\theta_t} g_i^{-1}$  et  $t \in T_i$ . Comme  $\lim_{t \rightarrow s_i^-} K_t = z^{2k+1}$ , on en déduit que

$\lim_{t \rightarrow s_i^-} \theta_t = \pi$ . Sur ce voisinage la matrice  $A_t$  est définie par (6.2.2) qui nous donne

$$A_t = g_i R_{\theta_t/2} g_i^{-1}$$

Le chemin  $A_t$  a donc une limite lorsque  $t$  tend vers  $s_i^-$  par valeur supérieure. Cette limite est la matrice de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  définie par

$$A_i^- = \lim_{t \rightarrow s_i^-} A_t = g_i R_{\pi/2} g_i^{-1}.$$

On utilise le même raisonnement dans un voisinage à gauche du point  $s_i^+$ , et on définit la matrice  $A_i^+$  de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  par :

$$A_i^+ = \lim_{t \rightarrow s_i^+} A_t = h_i R_{\pi/2} h_i^{-1}.$$

Ainsi, sur chacun des intervalles fermés  $\bar{T}_i$ , on a trouvé un chemin  $A_t$  satisfaisant les propriétés désirées. Il suffit maintenant de trouver des chemins sur les intervalles de  $]0, 1[ \setminus \mathcal{T}$  de sorte que les extrémités de ces chemins coïncident.

Quitte à reparamétriser le chemin  $\{K_t\}_{t \in [0,1]}$ , on peut supposer que  $s_i^+ \neq s_{i+1}^-$ . Pour tout  $t \in [s_i^+, s_{i+1}^-] = T'_i$ , on a  $K_t = z^{2k+1}$ . Le groupe  $G$  étant connexe, il existe un chemin reliant  $h_i$  à  $g_{i+1}$ , et ainsi il existe un chemin  $\{A_t\}_{t \in T'_i}$  reliant  $A_i^+$  à  $A_{i+1}^-$  dans  $Q^{-1}(I)$ .

Les chemins  $\{A_t\}_{t \in T_i}$ ,  $\{A_t\}_{t \in T'_i}$  et  $\{A_t\}_{t \in T_{i+1}}$  se recollent naturellement de façon continue. On a donc défini  $A_t$  pour tout  $t \in [0, 1]$  de sorte que le chemin  $\{A_t\}_{t \in [0,1]}$  soit continu et satisfait  $Q(A_t) = [K_t]$ .  $\square$

**Remarque 6.2.3** Les conditions (ii) et (iii) sont là pour lisser le comportement du chemin au voisinage des points de la forme  $z^{2k+1}$ . Sans ces conditions, la Proposition 6.2.2 serait fausse.

Par exemple, considérons le chemin  $\{K_t\}_{t \in [0,1]}$  défini par

$$\begin{cases} K_0 = -I \\ K_t = g_t R_{\theta_t} g_t^{-1} \quad \text{pour tout } t \neq 0 \end{cases}$$

avec  $\theta_t = \pi - t$  et

$$g_t = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \cos\left(\frac{1}{t}\right) \\ \cos\left(\frac{1}{t}\right) & \sqrt{2} - \sin\left(\frac{1}{t}\right) \end{pmatrix}.$$

## 6. COMPOSANTES CONNEXES DE L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

Ce chemin est continu dans  $\mathcal{J}$ . Pour tout  $t \neq 0$ , il existe un unique  $A_t \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  tel que  $Q(A_t) = [K_t]$  donné par

$$A_t = g_t R_{(\theta_t/2)} g_t^{-1}.$$

Cependant, la matrice  $A_t$  n'a pas de limite quand  $t$  converge vers 0. Ainsi le chemin  $K_t$  ne peut pas être relevé en un chemin continu dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  par l'application  $Q$ .

### 6.3 Propriétés de relèvement de chemin

Dans cette section, nous construisons des chemins dans l'espace des représentations d'une surface orientable  $\Sigma$  à bord non-vide, qui joignent deux composantes différentes de  $W(\Sigma)$ . On demande que ces chemins soient tels qu'on puisse étendre les représentations de la surface orientable, en des représentations de la surface non-orientable obtenue en attachant un ruban de Möbius à l'une des composantes de bord.

#### 6.3.1 Relevé dans le cas hyperbolique

Nous rappelons la définition suivante :

**Définition 6.3.1** Une application  $f : X \rightarrow Y$  satisfait la propriété de relèvement des chemins si pour tout  $x \in X$  et tout chemin  $\{y_t\}_{t \in [0,1]}$  tel que  $f(x) = y_0$ , il existe une application croissante surjective (une reparamétrisation du chemin)  $\tau : [0,1] \rightarrow [0,1]$  et un chemin  $\{x_s\}_{s \in [0,1]}$  tel que  $x_0 = x$  et  $f(x_s) = y_{\tau(s)}$ .

La proposition suivante nous sera utile :

**Proposition 6.3.2 (Goldman [29])** Soit  $\Sigma$  une sphère à trois trous ou un tore à un trou, et soit  $C$  l'une des composantes de bord de  $\Sigma$ . L'application d'évaluation

$$\begin{aligned} ev_C : W(\Sigma) &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \phi &\longmapsto \phi(C) \end{aligned}$$

satisfait la propriété de relèvement des chemins.

Nous pouvons généraliser la proposition 6.3.2 à toute surface orientable à bord non-vide.

**Proposition 6.3.3** Soit  $\Sigma$  une surface orientable à bord non-vide  $C_1, \dots, C_m \subset \partial\Sigma$ . L'application

$$\begin{aligned} ev_{C_1} : W(\Sigma) &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \phi &\longmapsto \phi(C_1) \end{aligned}$$

satisfait la propriété de relèvement des chemins.

**Preuve :** On prouve ce résultat par induction sur la caractéristique d'Euler de la surface. Pour une surface  $\Sigma$  de caractéristique d'Euler  $\chi(\Sigma) = -1$ , la Proposition 6.3.2 nous donne directement le résultat.

Soit  $\Sigma$  une surface telle que  $\chi(\Sigma) \leq -2$ . On décompose la surface  $\Sigma$  en pantalons  $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{-\chi(\Sigma)} \Sigma_i$  de telle sorte que  $C_1$  est une composante de bord de  $\Sigma_1$ . Notons  $D_1$  et  $D_2$  les deux autres composantes de bord de  $\Sigma_1$  et notons  $S_i$  la sous-surface de  $\Sigma \setminus \Sigma_1$  ayant  $D_i$  comme composante de bord (qui peut être vide). La décomposition en pantalons peut être choisie de sorte que  $S_1$  et  $S_2$  sont disjointes.

Soit  $\{\gamma_t\}_{t \in [0,1]}$  un chemin dans  $\mathcal{H}$  et  $\phi_0$  une représentation dans  $W(\Sigma)$  telle que  $\phi_0(C_1) = \gamma_0$ . Dans chaque composante connexe  $ev_C^{-1}(\gamma_0)$ , il existe une représentation  $\phi$  telle que  $\phi(D_1)$  et  $\phi(D_2)$  sont hyperboliques. Ainsi, On peut supposer sans perte de généralité que  $\phi_0(D_1)$  et  $\phi_0(D_2)$  sont hyperboliques. Par la Proposition 6.3.2, on peut trouver un chemin  $\{\psi_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $W(\Sigma_1)$  tel que  $\phi_t(C) = \gamma_t$  et  $\psi_0 = \phi|_{\pi_1(\Sigma_1)}$ . Les chemins  $\{\psi_t(D_1)\}_{t \in [0,1]}$  et  $\{\psi_t(D_2)\}_{t \in [0,1]}$  sont dans  $\mathcal{H}$ . Lorsque la surface  $S_i$  est non-vide, on a  $\chi(S_i) \geq \chi(\Sigma) + 1$  et ainsi on peut appliquer l'hypothèse d'induction pour relever ces chemins en des chemins de représentations  $\{\phi_t^{(i)}\}$  dans  $W(S_i)$ .

Le chemin de représentations  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  défini par :

$$\phi_t(\alpha) = \begin{cases} \psi_t(\alpha) & \text{si } \alpha \in \pi_1(\Sigma_1), \\ \psi_t^{(j)}(\alpha) & \text{si } \alpha \in \pi_1(S_j) \end{cases}$$

satisfait  $\phi_t(C) = \gamma_t$ , et pour tout  $1 \leq j \leq m$ , le chemin  $\phi_t(C_j)$  reste dans  $\mathcal{H}$ . On a donc construit un chemin dans  $W(\Sigma)$  avec les propriétés voulues.  $\square$

### 6.3.2 Compatibilité avec l'application carré

Notre objectif est de trouver des chemins particuliers dans l'espace des représentations d'une surface orientable, tel que le chemin défini par l'évaluation de la représentation en l'une des composantes de bord, satisfait les hypothèses de la Proposition 6.2.2.

Tout d'abord, soit  $\Sigma$  une sphere à trois trous. Son groupe fondamental est libre à deux générateurs. Une représentation dans  $\text{Hom}(\pi, G)$  est entièrement déterminée par l'image des deux générateurs. Pour trouver un chemin de représentations dans  $\text{Hom}(\pi, G)$ , il suffit de trouver un chemin dans  $G^2$ . Comme  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  est un revêtement de  $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , il suffit de trouver un chemin dans  $\text{SL}(2, \mathbb{R})^2$ .

On rappelle que d'après la Proposition 4.1.8 les représentations du groupe libre à deux générateurs sont déterminés à conjugaison près par leur caractère, et que l'application  $\kappa : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  joue un rôle essentiel. Le lemme suivant nous sera utile :

**Lemme 6.3.4 (Goldman [29], Corollaire 4.5)** *Soit*

$$\Omega_{\mathbb{R}} = \{(X, Y) \in \text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{SL}(2, \mathbb{R}) \mid [X, Y] \neq I\}.$$

*alors l'application caractère*

$$\chi : \Omega_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus ([-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}([-2, 2]))$$

*satisfait la propriété de relèvement des chemins.*

En particulier, ce lemme est un ingrédient clef de la proposition suivante :

## 6. COMPOSANTES CONNEXES DE L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

**Proposition 6.3.5** *Soit  $\Sigma$  une sphere à trois trous, avec ses composantes de bord  $B, C$  et  $K$ . Soit  $\phi$  une représentation dans  $W(\Sigma)$  telle que  $e(\phi) = -1$ . Il existe un chemin  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  tel que :*

1.  $\phi_0 = \phi$  ;
2.  $e(\phi_1) = 1$  ;
3. Les éléments  $\phi_t(B)$  et  $\phi_t(C)$  sont dans  $\mathcal{H}$  pour tout  $t \in [0, 1]$  ;
4. Si  $\{\tilde{\phi}_t\}_{t \in [0,1]}$  est un relevé de  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $\text{Hom}(\pi, \tilde{G})$  tel que  $\tilde{\phi}_0(K) \in z^\epsilon \mathcal{J}$ , alors le chemin  $\{z^\epsilon \tilde{\phi}_t(K)\}_{t \in [0,1]}$  satisfait les hypothèses de la Proposition 6.2.2.

**Preuve :** Soit une representation  $\phi \in W(\Sigma)$  telle que  $e(\phi) = -1$ , et soit  $\widetilde{\phi(B)}^0, \widetilde{\phi(C)}^0$  les relevés de  $\phi(B)$  et  $\phi(C)$  dans  $\mathcal{H}_0$ . L'élément  $\widetilde{\phi(B)}\widetilde{\phi(C)}$  est dans  $\mathcal{H}_{-1}$ , et donc on obtient  $\chi(\widetilde{\phi(B)}, \widetilde{\phi(C)}) = (b, c, k)$  avec  $b, c \in ]2, +\infty[$  et  $k \in ]-\infty, -2[$ .

Soit  $g$  un élément de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  tel que, pour tout  $\theta \in ]0, \pi[$ , l'élément elliptique  $R'_\theta = gR_\theta g^{-1}$  satisfait  $[\phi(B), R'_\theta] \neq I$ . Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , prenons le relevé de  $R'_\theta$  dans  $\mathcal{E}_0$  et notons le également  $R'_\theta$ . Le chemin dans  $\tilde{G}$  défini par

$$C_t = \left( \widetilde{\phi(B)}^0 \right)^{-1} R'_t$$

est continu et commence dans  $\mathcal{H}_0$ . Ainsi, comme  $\mathcal{H}_0$  est un ensemble ouvert, il existe un  $s \in ]0, 1[$  tel que  $C_t$  reste dans  $\mathcal{H}_0$  pour tout  $t \leq s$ .

Définissons d'autre part  $B_t = \widetilde{\phi(B)}^0$  pour tout  $t \leq s$ . L'élément  $B_t C_t = R'_t$  est dans  $\mathcal{E}_0$ . Ainsi, nous avons  $\chi(B_s, C_s) = (b, c', k')$  avec  $b > 2$ ,  $c' > 2$  et  $k' \in ]-2, 2[$ .

Le chemin dans  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\begin{aligned} b_t &= b, \\ c_t &= \left(1 - \frac{t-s}{1-s}\right)c' + \frac{t-s}{1-s}c, \\ k_t &= \left(1 - \frac{t-s}{1-s}\right)k' + \frac{t-s}{1-s}k \end{aligned}$$

ne rencontre jamais l'ensemble  $[-2, 2]^3 \cap \kappa^{-1}([-2, 2])$ . De plus,  $[B_s, C_s] = [R'_s, (\phi(B))^{-1}] \neq I$ , donc d'après le Lemme 6.3.4, ce chemin peut être relevé en un chemin  $\{B_t, C_t\}_{t \geq s}$  tel que

$$\chi(B_t, C_t) = (b_t, c_t, k_t).$$

De plus,  $k_t < 2$  pour tout  $t \geq s$ , et donc le chemin  $\{B_t C_t\}_{t \geq s}$  ne rencontre jamais l'ensemble  $\mathcal{H}_0 \cup \mathcal{P}_0$ . Nous en déduisons que  $B_1 C_1$  est un élément de  $\mathcal{H}_{-1}$ , et la représentation définie par  $(B_1, C_1)$  est de classe d'Euler  $-1$ .

D'autre part nous avons  $\chi(B_1, C_1) = (b, c, k) = \chi\left(\widetilde{\phi(B)}^0, \widetilde{\phi(C)}^0\right)$ . Nous savons que  $\kappa(b, c, k) \neq 2$  et donc les deux couples sont conjugués par un élément  $g \in \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ . Un élément de  $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$  qui n'est pas dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  conjugue une représentation de  $e^{-1}(-1)$  à une représentation de  $e^{-1}(1)$ . Les deux couples définissant des représentations de classe d'Euler  $-1$ , donc ils sont conjugués par un élément  $g$  de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Le chemin

$$\{(gB_t g^{-1}, gC_t g^{-1})\}_{t \in [0,1]}$$

relie la représentation  $\phi$  avec la représentation  $\phi'$  définie par

$$\begin{aligned}\phi'(B) &= g\phi(B)g^{-1} \\ \phi'(C) &= g(\phi(B))^{-1}g^{-1}.\end{aligned}$$

Soit  $\psi$  une représentation telle que  $e(\psi) = 1$ . Les mêmes arguments s'appliquent pour montrer qu'il existe un chemin reliant  $\psi$  à une représentation  $\psi'$  définie par :

$$\begin{aligned}\psi'(B) &= h\psi(B)h^{-1} \\ \psi'(C) &= h(\psi(B))^{-1}h^{-1}.\end{aligned}$$

En particulier, il suffit maintenant de trouver un chemin reliant  $\phi'$  à  $\psi'$  satisfaisant les propriétés désirées pour prouver la proposition. Les éléments  $g\phi'(B)g^{-1}$  et  $h\psi'(B)h^{-1}$  sont tous les deux dans  $\mathcal{H}$  et peuvent donc être reliés par un chemin  $\{H_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $\mathcal{H}$ . Ce chemin définit naturellement un chemin  $\{\phi'_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $\text{Hom}(\pi, G)$  par :

$$\begin{aligned}\phi'_t(B) &= H_t \\ \phi'_t(C) &= (H_t)^{-1}.\end{aligned}$$

Nous avons construit un chemin de  $\phi$  à  $\phi'$ , un chemin de  $\phi'$  à  $\psi'$  et un chemin de  $\psi'$  à  $\psi$ . Ces trois chemins satisfont naturellement la condition (3). Donc on a construit un chemin  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  satisfaisant les conditions (1), (2) et (3).

Finalement, soit  $\{\tilde{\phi}_t\}_{t \in [0,1]}$  un relevé du chemin  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $\text{Hom}(\pi, \tilde{G})$  tel que  $\tilde{\phi}_0(K) \in z^\epsilon \mathcal{J}$ . On choisit les uniques relevés  $\widetilde{\phi_t(B)}^0$  et  $\widetilde{\phi_t(C)}^0$  dans  $\mathcal{H}_0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a

$$\tilde{\phi}_t(K) = \tilde{\phi}_t(B)\tilde{\phi}_t(C) = z^N \left( \widetilde{\phi_t(B)}^0 \widetilde{\phi_t(C)}^0 \right)$$

L'élément  $\tilde{\phi}_0(K)$  est dans  $\mathcal{H}_{N-1}$  car  $e(\phi) = -1$ . Ainsi

$$\tilde{\phi}_0(K) \in z^\epsilon \mathcal{J} \cap \mathcal{H}_{N-1},$$

donc les nombres  $N$  et  $\epsilon$  ne sont pas de la même parité.

Dans cette construction, le chemin  $\left\{ \widetilde{\phi_t(B)}^0 \widetilde{\phi_t(C)}^0 \right\}$  ne rencontre aucun des  $\mathcal{H}_i \cup \mathcal{P}_i$  avec  $i$  pair. On en déduit que  $\tilde{\phi}_t(K)$  ne rencontre aucun des  $z^\epsilon \mathcal{H}_i \cup \mathcal{P}_i$  avec  $i$  impair, ce qui montre que le chemin reste dans  $z^\epsilon \mathcal{J}$ . Les autres hypothèses de la Proposition 6.2.2 sont naturellement satisfaites par construction.  $\square$

Dans le cas du tore à un trou, le résultat similaire est donné par la proposition suivante :

**Proposition 6.3.6** *Soit  $\Sigma$  un tore à un trou, avec son groupe fondamental*

$$\pi_1(\Sigma) = \langle X, Y, K \mid [X, Y] = K \rangle.$$

*Soit  $\phi$  une représentation dans  $W(\Sigma)$  telle que  $e(\phi) = -1$ . Il existe un chemin de représentations  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $\text{Hom}(\pi, G)$  tel que :*

1.  $\phi_0 = \phi$  ;
2.  $e(\phi_1) = 1$  ;

## 6. COMPOSANTES CONNEXES DE L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

3. Si  $\{\tilde{\phi}_t\}_{t \in [0,1]}$  est un relevé de  $\{\phi_t\}$  dans  $\text{Hom}(\pi, \tilde{G})$  tel que  $\tilde{\phi}_0(K) \in z^\epsilon \mathcal{J}$ , alors le chemin  $\{z^\epsilon \tilde{\phi}_t(K)\}_{t \in [0,1]}$  satisfait les hypothèses de la Proposition 6.2.2.

**Preuve :** Soit  $\tilde{\phi} : \pi \rightarrow \tilde{G}$  un relevé de  $\phi$ . L'élément  $\tilde{\phi}(K) = \tilde{\phi}([X, Y])$  est uniquement déterminé par  $\phi$  et appartient à  $\mathcal{H}_{-1}$ , et donc appartient à  $z\mathcal{J}$ . Soit  $\{K_t\}_{t \in [0,1]}$  un chemin dans  $\tilde{G}$  satisfaisant  $K_0 = \tilde{\phi}(K)$  tel que  $K_1 \in \mathcal{H}_1$  et qui reste dans l'image de l'application

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_1 : G \times G &\longrightarrow \tilde{G} \\ (A, B) &\longmapsto [A, B]. \end{aligned}$$

Nous pouvons choisir  $K_t$  de telle sorte que le chemin  $\{zK_t\}_{t \in [0,1]}$  satisfait les hypothèses de la Proposition 6.2.2. D'après un résultat de Goldman ([30], Theorem 7.1), tout chemin dans l'image de  $\widetilde{R}_1$  se relève en un chemin dans  $G \times G$ . Donc, il existe un chemin  $\{X_t, Y_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $G \times G$  tel que  $\widetilde{R}_1(X_t, Y_t) = K_t$ .

De plus, la préimage  $\widetilde{R}_1(K_0)$  est connexe, et ainsi il existe un chemin reliant  $\phi$  à la représentation définie par  $(X_0, Y_0)$ . Le chemin défini par  $(X_t, Y_t)$  pour tout  $t$  dans  $[0, 1]$  satisfait les propriétés voulues.  $\square$

En ayant établi les cas particuliers de la sphère à trois trous et du tore à un trou, on peut maintenant généraliser le résultat à toutes les surfaces à bord, avec la proposition suivante :

**Proposition 6.3.7** *Soit  $\Sigma$  une surface orientable avec  $m \geq 1$  composantes de bord  $C_1, \dots, C_m$ , et telle que  $\chi(M) \leq -1$ . Soit  $\phi$  une représentation dans  $W(\Sigma)$  telle que  $e(\phi) = n \leq |\chi(\Sigma)| - 2$ . Il existe un chemin  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  tel que :*

1.  $\phi_0 = \phi$  ;
2.  $e(\phi_1) = n + 2$  ;
3.  $\phi_t(C_j) \in \mathcal{H}$  pour tout  $j < m$  et tout  $t \in [0, 1]$  ;
4. Si  $\{\tilde{\phi}_t\}_{t \in [0,1]}$  est un relevé de  $\{\phi_t\}$  dans  $\text{Hom}(\pi, \tilde{G})$  tel que  $\tilde{\phi}_0(K) \in z^\epsilon \mathcal{J}$ , alors le chemin  $\{z^\epsilon \tilde{\phi}_t(K)\}_{t \in [0,1]}$  satisfait les hypothèses de la Proposition 6.2.2.

**Preuve :** Le résultat a été prouvé pour  $\chi(\Sigma) = -1$ , on peut donc supposer  $\chi(\Sigma) \leq -2$ . On décompose la surface  $\Sigma$  en pantalons  $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{|\chi(\Sigma)|} \Sigma_i$  de telle sorte que  $C_1$  est une composante de bord de  $\Sigma_1$ . Notons  $D_1$  et  $D_2$  les deux autres composantes de bord de  $\Sigma_1$  et notons  $S_i$  la sous-surface de  $\Sigma \setminus \Sigma_1$  ayant  $D_i$  comme composante de bord (qui peut être vide). La décomposition en pantalons peut être choisie de sorte que  $S_1$  et  $S_2$  sont disjointes.

Soit  $\phi$  une représentation dans  $W(\Sigma)$  telle que  $e(\phi) = n$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $\phi(D_1)$  et  $\phi(D_2)$  sont hyperboliques. De plus, comme  $n \leq |\chi(\Sigma)| - 2$  et  $e^{-1}(n)$  est connexe, on peut supposer que la représentation  $\psi_0$ , définie comme la restriction de  $\phi$  à  $\pi_1(\Sigma_1)$ , est telle que  $e(\psi_0) = -1$ .

D'après la Proposition 6.3.2, il existe un chemin  $\{\psi_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_1), G)$  tel que :

1. Les éléments  $\psi_t(D_1)$  et  $\psi_t(D_2)$  sont dans  $\mathcal{H}$  pour tout  $t \in [0, 1]$  ;
2. Si  $\{\tilde{\psi}_t\}_{t \in [0,1]}$  est un relevé de  $\{\psi_t\}$  tel que  $\tilde{\psi}_0(C_1) \in z^\epsilon \mathcal{J}$ , alors le chemin  $\{z^\epsilon \tilde{\psi}_t(C_1)\}_{t \in [0,1]}$  satisfait les hypothèses de la Proposition 6.2.2 ;

3.  $e(\psi_1) = 1$ .

Si  $S_i$  est non-vide, on peut appliquer la Proposition 6.3.3 pour trouver un chemin  $\{\psi_t^{(i)}\}_{t \in [0,1]}$  de représentations dans  $W(S_i)$  tel que  $\phi_t^{(i)}(D_i) = \psi_t(D_i)$ , et  $\psi_0^{(i)}$  est la restriction de  $\phi$  à  $\pi_1(S_i)$ . On définit le chemin  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  par :

$$\phi_t(\gamma) = \begin{cases} \psi_t(\gamma) & \text{si } \gamma \in \pi_1(\Sigma_1) \\ \psi_t^{(i)}(\gamma) & \text{si } \gamma \in \pi_1(S_i). \end{cases}$$

On a naturellement  $\phi_0 = \phi$  par construction.

Pour tout  $j > 1$ , si  $C_j$  est une composante de bord de  $S_i$  alors  $\phi_t(C_j) \in \mathcal{H}$  puisque  $\phi_t(C_j) = \psi_t^{(i)}(C_j)$  et  $\psi_t^{(i)} \in W(S_i)$ . Sinon,  $C_j$  est une composante de bord de  $\Sigma_1$  et la Proposition 6.3.2 nous assure que  $\phi_t(C_j) \in \mathcal{H}$ .

On a  $e(\psi_1) = 1 = e(\psi_0) + 2$ , et  $\psi_1^{(i)}$  est dans la même composante connexe de  $W(S_i)$  que  $\psi_0^{(i)}$ . On a donc  $e(\psi_1^{(i)}) = e(\psi_0^{(i)})$ . D'après la formule d'additivité de la classe d'Euler on a :

$$e(\phi_1) = e(\psi_1) + \sum_i e(\psi_1^{(i)}) = e(\psi_0) + 2 + \sum_i e(\psi_0^{(i)}) = e(\phi_0) + 2$$

La construction du chemin  $\{\psi_t\}_{t \in [0,1]}$  nous assure que pour tout relevé  $\tilde{\phi}_t$ , le chemin  $\tilde{\phi}_t(C_1) = \tilde{\psi}_t(C_1)$  satisfait les propriétés voulues.  $\square$

## 6.4 Composantes connexes

Une surface non-orientable  $M$  est la somme connexe d'une surface orientable  $\Sigma$  avec un ou deux plans projectifs. L'idée est de considérer des représentations dans  $W(M)$  dont la restriction à  $\pi_1(\Sigma)$  est dans  $W(\Sigma)$ .

### 6.4.1 Décomposition de la surface

Soit  $M$  un plan projectif à deux trous et son groupe fondamental

$$\pi = \langle A, B, C, K \mid A^2 = K = BC \rangle.$$

Le lemme suivant est une conséquence directe du Lemme 6.3.4 :

**Proposition 6.4.1** *Soit  $\phi$  une représentation dans  $\text{Hom}(\pi, G)$  telle que  $\phi(C) \in \mathcal{H}$ . Alors il existe un chemin  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $\text{Hom}(\pi, G)$  tel que :*

1.  $\phi_0 = \phi$  ;
2.  $\phi_t(B)$  est conjugué à  $\phi(B)$  and  $\phi_t(C)$  est conjugué à  $\phi(C)$ , pour tout  $t \in [0, 1]$  ;
3.  $\phi_1(K)$  est hyperbolique.

**Preuve :** Soit  $\tilde{\phi} : \pi \rightarrow \tilde{G}$  un relevé de la représentation  $\phi$ . On note  $b, c$  et  $k$  les traces  $\text{tr}(\tilde{\phi}(B))$ ,  $\text{tr}(\tilde{\phi}(C))$  et  $\text{tr}(\tilde{\phi}(K))$ . Si  $\phi(K)$  est hyperbolique il n'y a rien à prouver, on suppose donc que  $-2 \leq k \leq 2$ . Pour  $\epsilon > 0$ , on considère le chemin  $\{(b_t, c_t, k_t)\}_{t \in [0,1]}$  défini par

$$b_t = b, \quad c_t = c, \quad k_t = t(2 + \epsilon) + (1 - t)c.$$

## 6. COMPOSANTES CONNEXES DE L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

Comme  $|c| > 2$ , ce chemin ne rencontre jamais l'ensemble  $[-2, 2]^3$  et donc d'après le Lemme 6.3.4, peut se relever en un chemin  $\{(B_t, C_t)\}_{t \in [0,1]}$  dans  $\tilde{G} \times \tilde{G}$ .

L'élément  $K_0 = \tilde{\phi}(K) = (\tilde{\phi}(A))^2$  appartient à  $\mathcal{J}$ . De plus, le chemin  $K_t = B_t C_t$  satisfait  $k_t > -2$  pour tout  $t > 0$ , donc le chemin  $\{K_t\}_{t \in [0,1]}$  reste entièrement dans  $\mathcal{J} \setminus Z(\tilde{G})$ . Ceci prouve l'existence d'un chemin  $\{A_t\}_{t \in [0,1]}$  tel que  $A_t^2 = K_t$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Le chemin  $\{(A_t, B_t, C_t, K_t)\}_{t \in [0,1]}$  définit un chemin de représentations avec les propriétés voulues.  $\square$

Cette proposition se généralise à toutes les surfaces non-orientables.

**Proposition 6.4.2** *Soit  $M$  une surface non-orientable avec  $\chi(M) \leq -1$  et  $N$  un ruban de Möbius plongé dans  $M$ . On note  $S$  la sous-surface  $M \setminus N$  et  $K$  le bord commun à  $\partial S$  et  $\partial N$ .*

*Soit  $\phi$  une représentation dans  $W(M)$ . Il existe un chemin  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $W(M)$  tel que  $\phi_1(K)$  est hyperbolique.*

**Preuve :** Tout d'abord, supposons que  $\partial M \neq \emptyset$  et posons  $C \subset \partial M$  une composante de bord. Alors il existe une sphère à trois trous  $\Sigma_1$  plongée dans  $M$ , ayant  $C$  et  $K$  comme composante de bord. Nous noterons  $B$  sa troisième composante de bord. La Proposition 6.4.1 s'applique à la restriction  $\psi$  de  $\phi$  au groupe  $\pi_1(N \cup \Sigma_1)$ . Donc il existe un chemin  $\{\psi_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $\text{Hom}(\pi_1(N \cup \Sigma_1), G)$  tel que  $\psi_1(K)$  est hyperbolique. De plus, il existe un chemin  $\{U_t\}_{t \in [0,1]}$  tel que  $\psi_t(B) = U_t \phi(B) U_t^{-1}$ . Le chemin  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  défini par :

$$\phi_t(\gamma) = \begin{cases} \psi_t(\gamma) & \text{si } \gamma \in \pi_1(N \cup \Sigma_1), \\ U_t \phi(\gamma) U_t^{-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

a les propriétés voulues.

Maintenant, si  $M$  est une surface fermée, alors  $S$  est un tore à un trou ou bien  $\chi(S) \leq -2$ . Supposons que  $S$  est un tore à un trou, et soit  $\phi$  la restriction de  $\phi$  à  $\pi_1(S)$ . Posons  $\tilde{\psi} : \pi_1(S) \rightarrow \tilde{G}$  un relevé de cette représentation. En utilisant le même argument que dans la preuve de la proposition 6.3.6, on montre qu'il existe un chemin  $\{\psi_t\}_{t \in [0,1]}$  qui joint  $\psi$  à une représentation  $\psi'$  telle que  $\psi'(K)$  est hyperbolique. De plus, lorsque  $z^\epsilon \tilde{\phi}_0(K)$  est dans  $\mathcal{J}$ , alors le chemin  $\{z^\epsilon \tilde{\psi}_t(K)\}_{t \in [0,1]}$  est entièrement dans  $\mathcal{J}$ .

Ainsi, il existe un chemin  $\{A_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $\tilde{G}$  tel que  $A_t^2 = z^\epsilon \tilde{\psi}_t(K)$  ce qui définit un chemin de représentations  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $\text{Hom}(\pi_1(M), G)$  avec les propriétés voulues.

Autrement, nous avons  $\chi(S) \leq -2$  et il existe une sphère à trois trous  $\Sigma_1$  plongée dans  $S$  ayant  $K$  comme composante de bord, et telle que  $S \setminus \Sigma_1$  possède deux composantes connexes dont l'une est un tore à un trou, noté  $T$ . Nous notons  $B$  et  $C$  les deux autres composantes de bord de  $\Sigma_1$ . La surface  $\Sigma = T \cup \Sigma_1$  est un tore à deux trous ayant pour composantes de bord  $K$  et  $B$ . Il existe un chemin  $\{\psi_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), G)$  partant de  $\psi_0$  la restriction de  $\phi$ , et tel que  $\psi_1(C)$  est hyperbolique. De plus, il existe des chemins  $\{U_t\}_{t \in [0,1]}$  et  $\{V_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $\tilde{G}$  tels que

$$\psi_t(K) = U_t \phi(K) U_t^{-1}, \quad \psi_t(B) = V_t \phi(B) V_t^{-1}.$$

Le chemin dans  $\text{Hom}(\pi_1(M), G)$  défini par :

$$\phi_t(\gamma) = \begin{cases} \psi_t(\gamma) & \text{si } \gamma \in \pi_1(\Sigma), \\ U_t \phi(\gamma) U_t^{-1} & \text{si } \gamma \in \pi_1(N), \\ V_t \phi(\gamma) V_t^{-1} & \text{si } \gamma \in \pi_1(M \setminus (N \cup \Sigma)). \end{cases}$$

est tel que  $\phi_1(C)$  est hyperbolique. Nous pouvons maintenant appliquer la Proposition 6.4.1 à la restriction de l'application  $\phi_1$  à  $\pi_1(N \cup \Sigma_1)$ . La surface  $M \setminus T$  est une surface à bord et nous pouvons donc utiliser le cas précédent.  $\square$

### 6.4.2 Preuve du Théorème

Nous terminons maintenant la preuve du Théorème 6.1.5.

Tout d'abord, supposons que  $M$  est une surface non-orientable de genre  $k$  impair. Il existe un ruban de Möbius  $N$  plongé dans  $M$  tel que la surface  $S = M \setminus N$  est une surface orientable ayant pour caractéristique d'Euler  $\chi(S) = \chi(M)$ . Le bord de  $N$  est noté  $K$ . Soit  $\phi$  et  $\psi$  deux représentations dans  $W(M)$  telles que  $o_2(\phi) = o_2(\psi)$ . Nous notons  $\phi'$  et  $\psi'$  les restrictions de  $\phi$  et  $\psi$  à  $\pi_1(S)$ . D'après la Proposition 6.4.2, nous pouvons supposer que  $\phi(K)$  et  $\psi(K)$  sont hyperboliques, et ainsi que  $\phi'$  et  $\psi'$  sont dans  $W(S)$ .

Nous déduisons de la Proposition 6.3.7 que l'on peut choisir  $\phi$  et  $\psi$  tels que les classes d'Euler relative  $e(\phi')$  et  $e(\psi')$  prennent l'une des deux valeurs  $-\chi(S)$  ou  $-\chi(S) - 1$ . En effet, on peut trouver un chemin de représentation  $\{\phi'_t\}$  dans  $\text{Hom}(\pi_1(S), G)$  tel que  $e(\phi'_1) \in \{-\chi(S), -\chi(S) - 1\}$  et  $\phi'_1(K) \in \mathcal{J}$ . Ainsi, d'après la Proposition 6.2.2, on peut étendre la représentation  $\phi'_t$  en une représentation  $\phi_t$  dans  $W(M)$ , telle que le chemin  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  soit dans  $W(M)$ .

Le groupe fondamental de  $M$  est donné par la présentation suivante

$$\pi_1(M) = \langle A, X_1, \dots, Y_g, C_1, \dots, C_m \mid A^2[X_1, Y_1] \cdots [X_g, Y_g] C_1 \cdots C_m \rangle$$

où l'élément  $A$  est tel que  $A^2 = K$ . Choisissons des relevés  $\widetilde{\phi(A)}, \widetilde{\phi(X_1)}, \dots, \widetilde{\phi(Y_g)}$  dans  $\widetilde{G}$  et soit  $\widetilde{\phi(C_i)}^0$  les relevés uniques dans  $\mathcal{H}_0$ . Par définition de l'application  $o_2$ , nous obtenons

$$\left(\widetilde{\phi(A)}\right)^2 \left[\widetilde{\phi(X_1)}, \widetilde{\phi(Y_1)}\right] \dots \left[\widetilde{\phi(X_g)}, \widetilde{\phi(Y_g)}\right] \widetilde{\phi(C_1)}^0 \cdots \widetilde{\phi(C_m)}^0 = z^{2n+o_2(\phi)}. \quad (6.4.1)$$

pour un certain  $n \in \mathbb{Z}$ .

D'autre part, par définition de la classe d'Euler relative de  $\phi'$  nous avons :

$$\widetilde{\phi(K)} \left[\widetilde{\phi(X_1)}, \widetilde{\phi(Y_1)}\right] \dots \left[\widetilde{\phi(X_g)}, \widetilde{\phi(Y_g)}\right] \widetilde{\phi(C_1)} \dots \widetilde{\phi(C_m)} = z^{e(\phi')}. \quad (6.4.2)$$

Ainsi, nous obtenons

$$(\widetilde{\phi(A)})^2 = z^N \widetilde{\phi(K)} \quad (6.4.3)$$

avec  $N = e(\phi') - o_2(\phi) - 2n$ . Cet élément appartient à  $\mathcal{J} \cap \mathcal{H}_N$ , donc  $N$  est pair. Ceci implique que  $\bar{e}(\phi') = o_2(\phi) \pmod{2}$ . Le même raisonnement s'applique à  $\psi$  et donc  $\bar{e}(\psi) = o_2(\psi) \pmod{2}$ . En conséquence, comme  $e(\phi')$  et  $e(\psi')$  ne peuvent prendre que deux valeurs différentes, on a  $e(\phi') = e(\psi')$ . Les représentations  $\phi'$  et  $\psi'$  sont donc dans la même composante connexe de  $W(S)$ .

Ainsi donc, il existe un chemin  $\{\phi'_t\}_{t \in [0,1]}$  qui joint  $\phi'$  et  $\psi'$  dans  $W(S)$ . Le fait que l'on puisse trouver un chemin joignant  $\phi$  à  $\psi$  dans  $W(M)$  à partir du chemin  $\{\phi'_t\}_{t \in [0,1]}$  est une conséquence du lemme suivant :

**Lemme 6.4.3** *Soit  $M$  une surface non-orientable avec  $\chi(M) \leq -1$ . Soit  $N$  un ruban de Möbius plongé dans  $M$  et  $S = M \setminus N$ . Soit  $\phi$  et  $\psi$  deux représentations dans  $W(M)$  et  $\phi'$  et  $\psi'$  leurs restriction à  $\pi_1(S)$ .*

*Si  $\phi'$  et  $\psi'$  sont dans  $W(S)$ , alors un chemin reliant  $\phi'$  à  $\psi'$  dans  $W(S)$  peut s'étendre en un chemin reliant  $\phi$  à  $\psi$  dans  $W(M)$ .*

## 6. COMPOSANTES CONNEXES DE L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS

**Preuve :** Soit  $A$  le générateur de  $\pi_1(N) \hookrightarrow \pi_1(M)$  tel que  $A^2 = K$  est la classe d'homotopie du bord de  $N$ . En particulier, la condition  $\phi' \in W(S)$  implique que  $\phi'(K)$  est hyperbolique. Soit  $\{\phi'_t\}_{t \in [0,1]}$  le chemin reliant  $\phi'$  à  $\psi'$  dans  $W(S)$ . Il existe  $A_0$  dans  $G$  tel que  $\phi'_0(K) = A_0^2$ . De plus, pour tout  $t \in [0,1]$ , l'élément  $\phi'_t(K)$  est hyperbolique. Ainsi, d'après la proposition 6.2.1, pour tout  $t \in [0,1]$ , il existe un unique élément  $A_t$  dans  $G$  tel que  $A_t^2 = \phi'_t(K)$ . L'unicité de  $A_t$  prouve que  $A_0 = \phi(A)$  et que  $A_1 = \psi(A)$ . Nous pouvons donc définir un chemin  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $W(M)$  par :

$$\phi_t(\gamma) = \begin{cases} \phi'_t(\gamma) & \text{si } \gamma \in \pi_1(S) \\ A_t & \text{si } \gamma = A \end{cases}.$$

Ce chemin relie  $\phi$  à  $\psi$  dans  $W(M)$  ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

Maintenant, soit  $M$  une surface non-orientable de genre  $k$  pair, et  $N$  un ruban de Möbius plongé dans  $M$  de bord  $K$ . La surface  $S = M \setminus N$  est une surface non-orientable de genre impair. Soit  $\phi$  et  $\psi$  deux représentations dans  $W(M)$  telles que  $o_2(\phi) = o_2(\psi)$ . D'après la Proposition 6.4.2, nous pouvons supposer que  $\phi(K)$  et  $\psi(K)$  sont hyperboliques.

Considérons les restrictions  $\phi'$  et  $\psi'$  à  $\pi_1(S)$ . Le cas précédent montre qu'il existe un chemin  $\{\phi'_t\}_{t \in [0,1]}$  dans  $W(S)$  reliant  $\phi'$  à  $\psi'$ . Alors le Lemme 6.4.3 nous montre que ce chemin peut être étendu en un chemin reliant  $\phi$  à  $\psi$  dans  $W(M)$ . C'est à dire que  $\phi$  et  $\psi$  sont dans la même composante connexe, ce qui termine la preuve du Théorème 6.1.5.

### 6.5 Autres composantes et espace de Teichmüller

Pour comprendre certaines représentations comme l'holonomie de structures hyperboliques sur une surface non-orientable  $M$ , nous devons étendre notre étude au groupe  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ . En effet, si  $M$  est munie d'une structure hyperbolique l'holonomie le long d'une courbe à un seul coté (qui renverse l'orientation) est une isométrie qui renverse l'orientation. Les holonomies de structures hyperboliques sur  $M$  sont donc des représentations dans l'espace  $\mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}))$ . Il paraît donc naturel d'étudier l'espace  $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}))$ . Le groupe  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$  n'étant pas connexe, il y a une première obstruction :

$$o_1 : \mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})) \longrightarrow H^1(S, \pi_0(\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}))).$$

Le groupe  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$  possède deux composantes connexes, ainsi  $\pi_0(\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}))$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Lorsque  $\pi_1(S)$  est un groupe à  $n$  générateurs noté  $A_1, \dots, A_n$ , le groupe  $H^1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ , et la classe d'obstruction se calcule comme suit : pour chaque représentation  $\rho$  on associe le  $n$ -uplet  $(\epsilon(\rho(A_1)), \dots, \epsilon(\rho(A_n)))$ , où  $\epsilon$  est la projection naturelle  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \pi_0(\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}))$ .

Dans le cas orientable nous avons le résultat suivant :

**Théorème 6.5.1 (Xia [83])** *Soit  $g > 1$ , l'espace  $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}))$  a  $2^{2g+1} + 4g - 5$  composantes connexes.*

La preuve du résultat est en partie basé sur la remarque suivante. L'action de  $\Gamma_\Sigma$  est transitive sur  $H^1(\Sigma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ . Ainsi, pour  $c$  et  $c'$  dans  $H^1(\Sigma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , les composantes  $o_1^{-1}(c)$  et  $o_1^{-1}(c')$  sont homéomorphes. Il suffit ensuite de montrer que  $o_1^{-1}(c)$  a deux composantes connexes.

Dans le cas d'une surface non-orientable  $M$ , la situation apparait plus compliquée. La composante  $o^{-1}(0)$  est stable par l'action de  $\Gamma_M$  mais l'action de  $\Gamma_M$  n'est pas transitive sur

$H^1(\Sigma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ . En effet, la composante  $o_1^{-1}(1, \dots, 1)$  joue un rôle particulier dans l'espace des représentations puisqu'elle correspond aux structures hyperboliques sur la surface fermée. Une représentation dans cette composante envoie toute courbe à un seul côté sur une isométrie du plan hyperbolique qui renverse l'orientation. D'autre part, un élément du groupe modulaire laisse invariant l'ensemble des courbes à un seul côté. La composante  $o_1^{-1}(1, \dots, 1)$  est donc stable par l'action du groupe modulaire.

Cependant, il est clair que chaque composante  $o_1^{-1}(c)$  est non-vide et nous obtenons donc le résultat partiel suivant :

**Proposition 6.5.2** *Soit  $M$  une surface non-orientable fermée de genre  $k \geq 3$ . L'espace  $\text{Hom}(\pi_1(M), \text{PGL}(2, \mathbb{R}))$  a au moins  $2^k + 1$  composantes connexes.*

Ce résultat est la première étape vers une conjecture établissant le nombre de composantes connexes de  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PGL}(2, \mathbb{R}))$  en fonction de la caractéristique d'Euler, sans faire d'hypothèses sur l'orientabilité.

**Conjecture 6.5.3** *Soit  $S$  une surface fermée de caractéristique d'Euler  $\chi(S) \leq -1$ . L'espace  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PGL}(2, \mathbb{R}))$  a  $2^{|\chi(S)|+3} + 2|\chi(S)| - 1$  composantes connexes.*

## **6. COMPOSANTES CONNEXES DE L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS**

## Chapitre 7

# Représentations de graphes

*Impossible est un mot  
que les humains emploient  
trop souvent.  
– Seven of Nine*

Ce chapitre s'intéresse à la notion de plongement d'un graphe dans une surface. Le point de départ de cette étude est la planarité des graphes qui a donné lieu à une recherche approfondie et florissante depuis de nombreuses années. Elle a donné naissance à deux sous-domaines qui sont la théorie des nombres de croisements et celle des plongements dans les surfaces plus complexes. Cependant, l'union naturelle de ces deux domaines qu'est l'étude des nombres de croisements de graphes plongés dans des surfaces complexes est apparue plus tardivement. Vraisemblablement introduite par Jozef Siran [76] en 1983, puis étudiée plus avant par Dan Archdeacon, C. Paul Bonnington et Jozef Siran [1] en 2001, la notion de séquence de croisements de graphes a mené Matt DeVos, Bojan Mohar et Robert Samal [18] à conjecturer que le nombre minimal de croisements de l'union de deux graphes connexes sur une surface quelconque est atteint seulement si ces deux graphes sont représentés de façon disjointe.

Nous nous proposons de confirmer cette conjecture dans le cas où la surface est la bouteille de Klein. Ce chapitre est basé sur le travail réalisé avec Laurent Beaudou, Antoine Gerbaud et Roland Grappe [2] au sein du groupe de travail GraS de l'Institut Fourier.

## 7.1 Dessins de graphes

### 7.1.1 Définitions et notations

Nous commençons par quelques rappels sur les graphes, et référons à [4] pour une introduction à la théorie des graphes. Rappelons la définition générale d'un graphe :

**Définition 7.1.1** *Un graphe  $G$  est la donnée d'un triplet  $G = (V, E, \gamma)$  où  $V$  est l'ensemble des sommets du graphe,  $E$  est l'ensemble des arêtes et  $\gamma$  est la fonction d'incidence qui à chaque élément de  $E$  associe une paire d'éléments de  $V$ .*

Dans cette thèse nous ne considérons que des *graphes* non-orientés où les arêtes n'ont pas une direction déterminée, c'est-à-dire que l'image de la fonction d'incidence est bien une paire et

## 7. REPRÉSENTATIONS DE GRAPHS

---

non un couple. Tous les graphes seront également supposés *finis*, c'est-à-dire que les ensembles  $V$  et  $E$  sont des ensembles finis. Un graphe est dit *simple* si pour toute paire de sommets, il y a au plus un élément de  $E$  qui les relie. Dans ce cas,  $E$  s'identifie avec son image par  $\gamma$  dans  $V \times V$ , et on peut simplement écrire  $G = (V, E)$ . Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

Un *chemin* est une suite de sommets  $v_0, \dots, v_n$  et d'arêtes  $e_1, \dots, e_n$  telle que  $\gamma(e_i) = (v_{i-1}, v_i)$  pour tout  $i$ . Un graphe est dit *connexe* si toute paire de point peut être reliée par un chemin. Un *cycle* est un chemin satisfaisant  $v_0 = v_n$  et un *circuit* est un cycle dont les arêtes sont deux à deux disjointes. Un graphe est dit *eulérien* si il existe un circuit passant par toutes les arêtes du graphe. Rappelons que le théorème d'Euler nous dit qu'un graphe est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

### 7.1.2 Réalisation géométrique et plongement

Nous passons maintenant au domaine plus spécifique de la théorie topologique des graphes, et nous renvoyons au livre de B. Mohar et C. Thomassen [60] pour une exposition détaillée. Nous cherchons à représenter un graphe  $G = (V, E)$ . Nous lui associons un espace topologique  $|G|$ , appelé *réalisation géométrique* de  $G$ , les sommets de  $G$  sont des points distincts et les arêtes de  $G$  sont des sous-espaces homéomorphes au segment  $[0, 1]$ , reliant les sommets correspondants. Considérons un espace topologique  $X$ . Un *plongement* de  $G$  dans  $X$  est un homéomorphisme entre la réalisation géométrique de  $G$  et un sous-ensemble de  $X$ .

Dans quels espaces peut-on plonger un graphe ? L'idée la plus naturelle est de le représenter dans le plan euclidien  $R^2$ . Un graphe qui admet un plongement dans  $R^2$  est un graphe *planaire*. Ces graphes ont été l'objet de nombreuses recherches depuis bientôt deux siècles et la conjecture des 4 couleurs de Francis Guthrie en 1852. Cependant, tous les graphes ne sont pas planaires. Un exemple minimal est le graphe complet  $K_5$  (cinq sommets tous reliés entre eux par une arêtes).

Comment alors quantifier la non-planarité d'un graphe ? Peut-être en lui associant le plus petit entier  $n$  tel que  $G$  admet un plongement dans  $R^n$ . Cette idée est balayée par un constat simple : tous les graphes se plongent dans  $R^3$ .

### 7.1.3 Nombre de croisements

Une façon de quantifier la non-planarité d'un graphe consiste à compter le nombre d'infractions nécessaires pour le représenter sur le plan. Une *représentation* d'un graphe  $G$  sur le plan est une application continue (non nécessairement injective) de la réalisation géométrique  $|G|$  de  $G$  vers le plan  $\mathbb{R}^2$ . Cela revient à "dessiner" le graphe sur le plan en autorisant des croisements entre les images des arêtes.

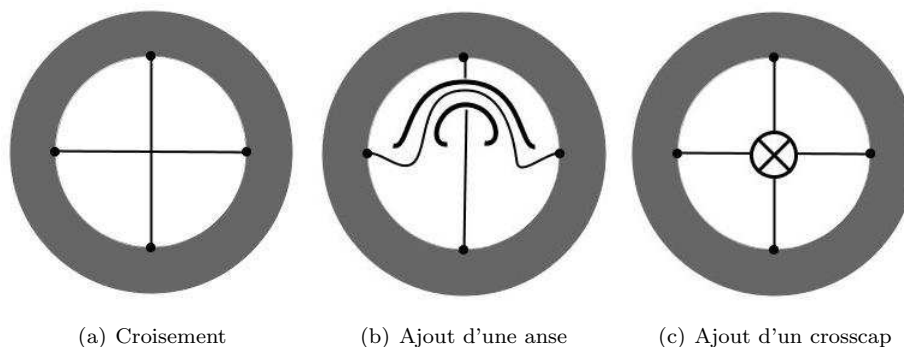
Une *bonne représentation* est une représentation telle qu'aucun triplet d'arêtes n'admet un point commun (excepté leurs extrémités), et qu'aucun sommet n'est sur l'intérieur d'une arête. Alors un point commun à l'intérieur de deux arêtes est appelé un *croisement*. Le nombre de croisements d'une représentation  $\Psi$  est noté  $\text{cr}(\Psi)$ . Deux représentations d'un même graphe peuvent avoir un nombre de croisement différent.

Le *nombre-de-croisement* d'un graphe  $G$ , noté  $\text{cr}(G)$  est le nombre minimum de croisements pris sur toutes les bonnes représentations de  $G$  sur le plan. Par exemple, la caractérisation d'un graphe planaire est donnée par  $\text{cr}(G) = 0$ .

Une deuxième idée pour quantifier la non-planarité d'un graphe vient directement de l'idée suivante :

**Proposition 7.1.2** *Tout graphe admet un plongement dans une surface orientable et un plongement dans une surface non-orientable.*

Pour cela, il suffit de dessiner le graphe sur la sphère et pour chaque croisement, ajouter une anse (pour une surface orientable) ou un crosscap (pour une surface non-orientable)



**Figure 7.1:** Plongement d'un graphe dans une surface

Considérons un graphe  $G$ , le *genre orientable* de  $G$  est le plus petit entier  $g$  tel que  $G$  est plongeable dans  $\Sigma_g$ . Le genre non-orientable de  $G$  est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  est plongeable dans la surface  $N_k$ . Les graphes planaires sont évidemment de genre orientable 0 (et par abus de langage, de genre non-orientable 0 également). Il est clair que le genre d'un graphe est majoré par son nombre-de-croisement, mais par contre il n'y a pas de minoration. En effet, il est aisé de construire un graphe  $G$  avec un nombre-de-croisement arbitrairement grand mais de genre 1.

Les deux notions de genre et de nombre-de-croisement peuvent se généraliser en une seule notion. Le *nombre-de-croisement* d'un graphe  $G$  sur une surface  $S$ , noté  $cr_S(G)$  est le nombre minimum de croisements pris sur toutes les bonnes représentations de  $G$  sur la surface  $S$ . Une représentation du graphe  $G$  sur la surface  $S$  qui accomplit le nombre de croisement d'un graphe  $G$  est dit *optimal*. Par définition, un dessin sans croisements est un *plongement*.

Nous pouvons maintenant énoncer la conjecture établie par DeVos, Mohar et Samal dans [18] :

**Conjecture 7.1.3** *Soit  $G$  l'union disjointe de deux graphes connexes  $H$  et  $K$  et soit  $S$  une surface. Pour toute représentation optimale de  $G$  sur  $S$ , les restrictions à  $H$  et  $K$  ne se croisent pas.*

Cette conjecture est clairement vérifiée dans le cas du plan (ou de façon équivalente, la sphère). En effet, en représentant les deux graphes côte à côte, nous atteignons le nombre de croisement  $cr_{\Sigma_0}(H) + cr_{\Sigma_0}(K)$ . Si nous faisons en sorte que les représentations restreintes à  $H$  et  $K$  se croisent au moins une fois, le nombre de croisements internes de  $H$  et  $K$  restent malgré tout supérieur à  $cr_{\Sigma_0}(H) + cr_{\Sigma_0}(K)$  auquel on ajoute au moins un croisement mutuel. Ce n'est donc pas une représentation optimale.

Le cas du plan projectif a été traité dans la publication initiale de Matt DeVos et coll. [18]. Dans ce chapitre, nous donnons une nouvelle preuve dans le cas du plan projectif et prouvons entièrement le cas de la bouteille de Klein :

## 7. REPRÉSENTATIONS DE GRAPHES

**Théorème 7.1.4** Soit  $G$  l'union disjointe de deux graphes connexes  $H$  et  $K$ . Pour toute représentation optimale de  $G$  sur la bouteille de Klein  $N_2$ , les restrictions à  $H$  et  $K$  ne se croisent pas.

La démonstration présente ici est issue des travaux effectués en collaboration avec L. Beaudou, A. Gerbaud et R. Grappe dans [2].

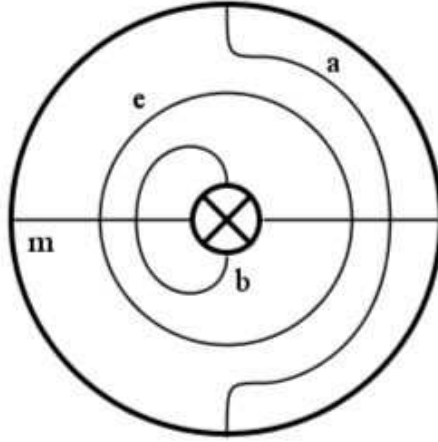
### 7.2 Courbes sur la bouteille de Klein

Rappelons le résultat de S. Lawrenceko et S. Negami [51]

**Théorème 7.2.1** Une courbe fermée simple essentielle sur  $N_2$  est homotope à l'une des quatres courbes  $\{a, b, m, e\}$  définies par :

- Les éléments  $a$  et  $b$  sont deux cercles à un seul côté disjoints ;
- l'élément  $m$  correspond à un cercle à deux côtés non-séparant ;
- l'élément  $e$  correspond à un cercle à deux côtés séparant.

Sur la figure 7.2, nous donnons un représentant de chaque famille de courbe.



**Figure 7.2:** Courbes essentielles sur la bouteille de Klein

Pour toute courbe  $c$  d'une surface  $S$ ,  $[c]$  représente l'ensemble des courbes librement homotopes à  $c$ . Pour chaque couple de courbe  $(c, d)$ , le nombre  $\text{cr}([c], [d])$  représente le nombre minimum de croisements, avec multiplicité, pris sur l'ensemble des couples de  $[c] \times [d]$ . Plus généralement, pour un ensemble de courbes  $I$ ,  $\text{cr}(c, I)$  représente le nombre de croisements entre  $c$  et  $I$ ,  $\text{cr}([c], I)$  représente le nombre minimum de croisement entre un représentant de  $[c]$  et  $I$ . Lorsque  $I$  est la représentation d'un graphe  $G$ , le minimum est considéré pour les courbes de  $[c]$  qui ne passent pas par les sommets de  $G$ .

Les quatre familles de courbes essentielles de la bouteille de Klein sont donc  $[a]$ ,  $[b]$ ,  $[m]$  et  $[e]$ . Deux familles  $[c]$  et  $[d]$  sont dites *orthogonales* si  $\text{cr}([c], [d]) \geq 1$ . Dans le cas contraire, elles sont dites *disjointes*. Cette définition diffère légèrement de celle proposée par Feng Luo

dans [55]. Soit  $\Psi$  un dessin sur la bouteille de Klein. Les circuits  $c$  de  $\Psi$  orthogonaux à  $[a]$  et disjoints de  $[b]$  sont appelés les *a-circuits*. Les circuits orthogonaux à  $[b]$  et disjoints de  $[a]$  sont appelés *b-circuits*. Les circuits orthogonaux à  $[a]$  et à  $[b]$  sont appelés les *m-circuits*. Enfin, les circuits orthogonaux à  $[m]$  et disjoints de  $[a]$  et  $[b]$  sont appelés les *e-circuits*.

Nous ferons grand usage d'un résultat puissant obtenu par Maurits de Graaf et Alexander Schrijver [16] en 1997.

**Théorème 7.2.2 (de Graaf, Schrijver [16])** *Soit  $\Psi$  un plongement d'un graphe eulérien  $G$  sur une surface  $S$ . Alors  $\Psi$  peut-être décomposé en une famille de circuits  $I$  telle que pour toute courbe fermée  $c$  de  $S$ ,*

$$cr([c], \Psi) = \sum_{d \in I} cr([c], [d]).$$

Décomposer une représentation  $\Psi$  d'un graphe  $G$  en une famille  $I$  signifie que chaque arête de  $G$  dans  $\Psi$  est visitée exactement une fois par un seul élément de  $I$ . Un résultat semblable avait été obtenu précédemment par Sóstenes Lins [54] pour le plan projectif en 1981, puis généralisé par Alexander Schrijver [75] pour la bouteille de Klein en 1991 : le nombre maximum de circuits à un seul côté deux à deux arêtes-disjoints est égal au cardinal minimum d'un ensemble d'arêtes intersectant tous les circuits à un seul côté de  $\Psi$ .

## 7.3 Représenter un graphe sur une sous-surface

Dans cette section, étant donnée une représentation d'un graphe  $G$  sur une surface non-orientable quelconque (de genre suffisant), nous définissons de nouvelles représentations de ce même graphe  $G$  sur des surfaces de genre strictement inférieur. Nous calculons aussi le nombre de croisements de ces nouvelles représentations.

### 7.3.1 Retirer un crosscap

Soit  $S$  une surface non-orientable de genre  $g$  et  $S'$  la surface non-orientable de genre  $g - 1$  si  $g > 1$  ou la sphère si  $g = 1$ .

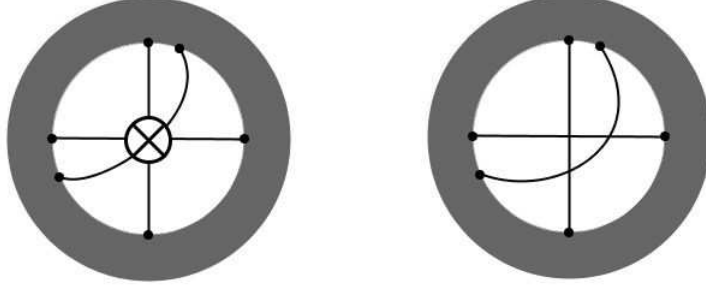
**Proposition 7.3.1** *Soit  $\Psi$  une représentation de  $G$  sur  $S$ , et  $c$  une courbe simple non-orientable de  $S$  ne passant pas par l'image d'un sommet de  $G$ . Alors il existe une représentation  $\Psi'$  de  $G$  sur  $S'$  telle que*

$$cr(\Psi') = cr(\Psi) + \frac{1}{2} cr(\Psi, c) \times (cr(\Psi, c) - 1).$$

**Preuve :**

Nous découpons la surface  $S$  le long de la courbe  $c$ . Nous obtenons la surface  $S'$  avec un trou. Nous collons alors un disque sur la frontière de ce trou pour obtenir la surface  $S'$ . Soit  $\Psi'$  la représentation de  $G$  sur  $S'$  obtenue en gardant intacte la restriction de  $\Psi$  à  $S \setminus c$  et en ajoutant les arêtes passant par  $c$  sur le disque  $D$  de sorte qu'elles se croisent toutes une fois deux à deux (voir figure 7.3). Le nombre de croisements de cette représentation est exactement celui de l'énoncé de la proposition 7.3.1.  $\square$

## 7. REPRÉSENTATIONS DE GRAPHES



**Figure 7.3:** Retirer un crosscap

Nous rappelons que la surface non-orientable de genre  $k$  peut être vue comme une sphère sur laquelle  $k$  crosscaps ont été ajoutés. L'ajout d'un crosscap à une surface  $S$  revient à découper un disque ouvert  $D$  de la surface et d'identifier les points opposés de la frontière de  $D$ .

Nous sommes alors en mesure de prouver le cas particulier du plan projectif. Ceci a été fait précédemment par Matt DeVos et coll. [18]. Nous l'énonçons ici car la preuve est simple.

**Corollaire 7.3.2** *Soit  $G$  l'union disjointe de deux graphes eulériens connexes  $H$  et  $K$ . Si  $G$  admet une représentation sur le plan projectif telle que les sous-représentations associées à  $H$  et  $K$  sont des plongements et que ces derniers se croisent, alors il existe une représentation de  $G$  avec un nombre de croisements strictement inférieur telle que les sous-représentations associées à  $H$  et  $K$  ne se croisent pas.*

**Preuve :** Notons  $\Psi$  une représentation de  $G$  sur le plan projectif telle que  $\Psi_H$  et  $\Psi_K$  sont des plongements qui se croisent ( $\Psi(H) \cap \Psi(K) \neq \emptyset$ ).

Toutes les courbes fermées simples à un seul côté du plan projectif sont homotopes deux à deux. Soit  $c$  une telle courbe. D'après un théorème de Sóstenes Lins [54] de 1981, le nombre maximum de circuits à un seul côté arêtes-disjoints de  $\Psi_H$  (respectivement  $\Psi_K$ ) est égal à  $\text{cr}([c], \Psi_H)$  (respectivement  $\text{cr}([c], \Psi_K)$ ). Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $\text{cr}([c], \Psi_H)$  est inférieur ou égal à  $\text{cr}([c], \Psi_K)$ .

Deux circuits à un seul côté se croisent au moins une fois. Ainsi, chaque circuit à un seul côté de  $\Psi_H$  croise chaque circuit à un seul côté de  $\Psi_K$ , et

$$\text{cr}(\Psi) \geq \text{cr}([c], \Psi_H) \times \text{cr}([c], \Psi_K).$$

Soit  $c'$  une courbe fermée à un seul côté du plan projectif réalisant le nombre de croisement  $\text{cr}([c], \Psi_H)$ . D'après la proposition 7.3.1, il existe une représentation de  $H$  sur le plan euclidien  $\Psi'_H$ , telle que

$$\begin{aligned} \text{cr}(\Psi'_H) &= \frac{1}{2} \text{cr}(c', \Psi_H) \times (\text{cr}(c', \Psi_H) - 1) \\ &< \text{cr}([c], \Psi_H) \times \text{cr}([c], \Psi_K) \\ &< \text{cr}(\Psi). \end{aligned}$$

Notons  $\Psi'$  la représentation de  $G$  sur le plan projectif obtenue par l'union disjointe de  $\Psi'_H$  et  $\Psi_K$ . Alors les deux sous-représentations ne se croisent pas et, comme  $\Psi_K$  est un plongement,

les seuls croisements de  $\Psi'$  sont des croisements internes à  $\Psi'_H$ . Alors le nombre de croisements de  $\Psi'$  est strictement inférieur au nombre de croisements de la représentation initiale  $\Psi$ .  $\square$

### 7.3.2 Retirer deux crosscaps sur la bouteille de Klein

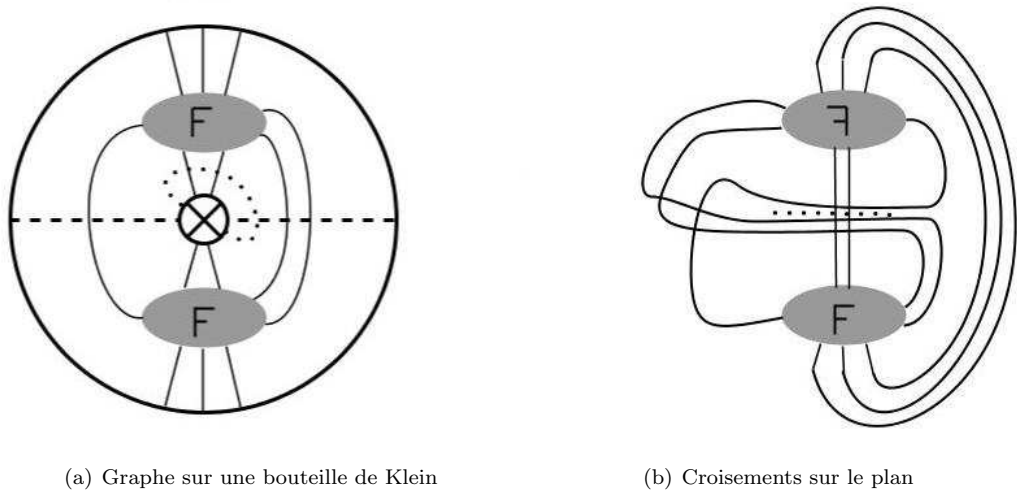
**Proposition 7.3.3** *Soit  $\Psi$  une représentation d'un graphe  $G$  sur la bouteille de Klein. Soit  $a'$  une courbe simple homotope à  $a$  et  $m'$  une courbe simple homotope à  $m$  telles qu'aucune ne contient l'image par  $\Psi$  d'un sommet de  $G$ , et telles qu'elles ne se croisent qu'une fois. Alors il existe une représentation  $\Psi'$  de  $G$  sur le plan euclidien telle que*

$$cr(\Psi') = cr(\Psi) + cr(a', \Psi) \times cr(m', \Psi) + \frac{1}{2} cr(m', \Psi) \times (cr(m', \Psi) - 1).$$

**Preuve :**

Nous coupons la bouteille de Klein selon la courbe  $m'$ . Par définition de la courbe  $m$ , la surface résultant de cette découpe est un cylindre. Les  $cr(m', \Psi)$  arêtes de  $G$  que nous avons déconnectées ont une extrémité sur chacune des composantes de bord du cylindre. L'image de la courbe  $a'$  par cette décomposition est un arc avec une extrémité sur chaque cylindre. Nous reconnectons alors les arêtes précédemment découpées en construisant des arcs inclus dans un petit voisinage du bord du cylindre et de l'arc  $a'$ , créant de la sorte  $cr(a', \Psi)$  croisements pour chacune d'entre elles. De plus, nous pouvons représenter ces  $cr(m', \Psi)$  arc de façon à ce qu'ils ne se croisent qu'une seule fois deux à deux.

Finalement nous obtenons une représentation de  $G$  sur le cylindre avec le nombre de croisements voulu. Nous déduisons aisément une représentation  $\Psi'$  de  $G$  sur le plan euclidien avec le même nombre de croisements (voir figure 7.4).  $\square$



**Figure 7.4:** Retirer deux crosscaps

## 7.4 Estimer le nombre maximum de circuits arêtes-disjoints

Dans cette section, nous estimons le nombre de circuits essentiels d'une représentation  $\Psi$  d'un graphe  $G$  sur la bouteille de Klein.

### 7.4.1 Étude des circuits à un seul côté

**Proposition 7.4.1** *Soit  $\Psi$  un plongement d'un graphe eulérien  $G$  dans la bouteille de Klein. Alors le nombre maximum de circuits à un seul côté deux à deux arêtes-disjoints est égal à*

$$\min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \}.$$

*De plus, il est possible de décomposer  $\Psi$  en une famille  $I$  de tels circuits qui atteint ce nombre maximum et qui contient un nombre de  $m$ -circuits égal à*

$$\frac{1}{2} (\text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi) - \min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \}).$$

**Preuve :** Soit  $\Psi$  un plongement d'un graphe eulérien  $G$  dans la bouteille de Klein. Considérons une collection  $I$  de circuits à un seul côté deux à deux arêtes-disjoints dans  $\Psi$ . Chaque circuit à un seul côté croise  $a$  ou  $b$ . Ainsi, pour chaque circuit  $c$  dans  $I$ ,  $\text{cr}([a], c) \geq 1$  ou  $\text{cr}([b], c) \geq 1$ . Et donc,

$$\text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi) \geq \sum_{c \in I} (\text{cr}([a], [c]) + \text{cr}([b], [c])) \geq |I|.$$

De la même façon, chaque circuit à un seul côté intersecte  $m$ . Ainsi,

$$\text{cr}([m], \Psi) \geq \sum_{c \in I} \text{cr}([m], [c]) \geq |I|.$$

Nous en déduisons que le nombre maximum de circuits à un seul côté deux à deux arêtes-disjoints est plus petit que  $\min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \}$ .

Pour compléter la preuve de la proposition 7.4.1, il reste à décomposer  $\Psi$  en une famille de circuits qui contient

$$\min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \}$$

circuits à un seul côté et

$$\frac{1}{2} \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi) - \min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \}$$

$m$ -circuits.

Soit  $I$  une collection de circuits donnée par le théorème 7.2.2. Notons  $n_a$  le nombre de  $a$ -circuits dans  $I$ ,  $n_b$  le nombre de  $b$ -circuits,  $n_m$  le nombre de  $m$ -circuits et  $n_e$  le nombre de  $e$ -circuits. Par définition (voir énoncé du théorème 7.2.2), les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \text{cr}([a], \Psi) &= n_a + n_m, \\ \text{cr}([b], \Psi) &= n_b + n_m, \\ \text{cr}([m], \Psi) &= n_a + n_b + 2n_e. \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

- Si  $n_m = 0$ , alors ces égalités se transforment en

$$\begin{aligned} \text{cr}([a], \Psi) &= n_a, \\ \text{cr}([b], \Psi) &= n_b, \\ \text{cr}([m], \Psi) &= n_a + n_b + 2n_e. \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \} = \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi)$$

qui correspond bien au nombre de circuits à un seul côté de  $I$ . De plus

$$\frac{1}{2} \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi) - \min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \} = 0$$

qui correspond bien au nombre de  $m$ -circuits.

- Si  $n_e = 0$ , les égalités précédentes deviennent

$$\begin{aligned} \text{cr}([a], \Psi) &= n_a + n_m, \\ \text{cr}([b], \Psi) &= n_b + n_m, \\ \text{cr}([m], \Psi) &= n_a + n_b. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \} = \text{cr}([m], \Psi) = n_a + n_b$$

qui correspond au nombre de circuits à un seul côté de  $I$ . De plus

$$\frac{1}{2} \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi) - \min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \} = n_m$$

qui correspond bien au nombre de  $m$ -circuits.

Nous pouvons donc supposer que  $n_m$  et  $n_e$  sont strictement positifs. Posons  $r = \min \{ n_m, n_e \}$ . Considérons alors  $r$   $m$ -circuits distincts  $m_1 \dots m_r$  et  $r$   $e$ -circuits distincts  $e_1 \dots e_r$  dans  $I$ . Pour tout entier  $i$  entre 1 et  $r$ , les circuits  $m_i$  et  $e_i$  s'intersectent et peuvent être recomposés (voir figure 7.5) en une union d'un  $a$ -circuit  $a_i$  et d'un  $b$ -circuit  $b_i$ . Ainsi nous obtenons une nouvelle famille  $I'$  de circuits avec  $n_a + r$   $a$ -circuits,  $n_b + r$   $b$ -circuits,  $n_m - r$   $m$ -circuits et  $n_e - r$   $e$ -circuits. D'après les égalités précédentes,

$$(n_a + r) + (n_b + r) = \min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \},$$

et

$$2(n_m - r) = \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi) - \min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \}.$$

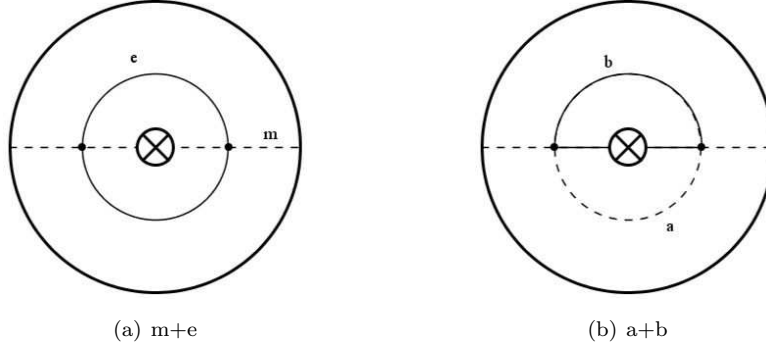
$I'$  correspond donc à la famille de circuits recherchée. □

### 7.4.2 Étude des $a$ -circuits

**Proposition 7.4.2** *Soit  $\Psi$  un plongement d'un graphe eulérien sur la bouteille de Klein. alors le nombre maximum de  $a$ -circuits arêtes-disjoints est égal à*

$$\min \{ \text{cr}([a], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \}.$$

## 7. REPRÉSENTATIONS DE GRAPHES



**Figure 7.5:** e-circuit + m-circuit = a-circuit + b-circuit

**Preuve :** Soit  $\Psi$  un tel plongement. Considérons alors une famille  $I$  quelconque de  $a$ -circuits arêtes-disjoints de  $\Psi$ . Chaque  $a$ -circuit intersecte la courbe  $a$ . Ainsi,

$$\text{cr}([a], \Psi) \geq \sum_{c \in I} \text{cr}([a], c) \geq |I|.$$

De même, chaque  $a$ -circuit intersecte la courbe  $m$ . Nous obtenons donc,

$$\text{cr}([m], \Psi) \geq \sum_{c \in I} \text{cr}([m], c) \geq |I|.$$

Le nombre maximum de  $a$ -circuits arêtes-disjoints est donc bien inférieur au minimum de ces deux quantités.

Pour compléter la preuve de la proposition 7.4.2, il nous faut exhiber autant de  $a$ -circuits dans  $\Psi$ . Nous utilisons la même méthode que pour la proposition 7.4.1.

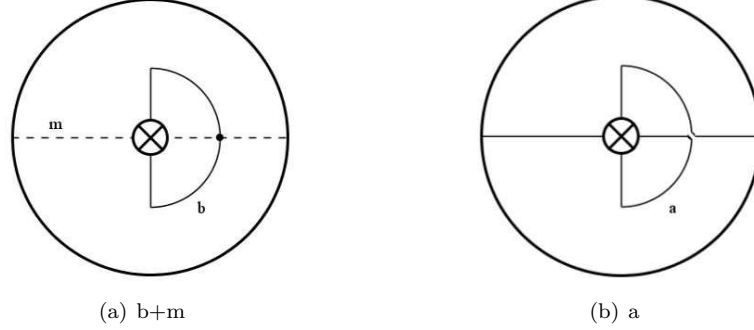
Soit  $I$  une collection de circuits de  $\Psi$  donnée par le théorème 7.2.2,  $n_a, n_b, n_m$  et  $n_e$  représentent les nombres de circuits de chaque type.

Posons  $r = \min\{n_m, n_e\}$ . Considérons alors  $r$  paires constituées chacune d'un  $m$ -circuit de  $I$  et d'un  $e$ -circuit de  $I$ . Comme illustré dans la figure 7.5, chacune de ces paires peut être transformée en une paire formée d'un  $a$ -circuit et d'un  $b$ -circuit. Cette nouvelle famille  $I'$  contient  $n_a + r$   $a$ -circuits,  $n_b + r$   $b$ -circuits,  $n_m - r$   $m$ -circuits et  $n_e - r$   $e$ -circuits.

Posons ensuite  $s = \min\{n_m - r, n_b + r\}$ . Considérons alors  $s$  paires constituées chacune d'un  $m$ -circuit de  $I'$  et d'un  $b$ -circuit de  $I'$ . Comme illustré dans la figure 7.6, chacune de ces paires peut-être transformée en un  $a$ -circuit. Nous obtenons alors une nouvelle famille de circuits  $I''$  contenant  $n_a + r + s$   $a$ -circuits,  $n_b + r - s$   $b$ -circuits,  $n_m - r - s$   $m$ -circuits et  $n_e - r$   $e$ -circuits.

$$\begin{aligned} n_a + r + s &= n_a + r + \min\{n_m - r, n_b + r\} \\ &= n_a + \min\{n_m, n_b + 2r\} \\ &= n_a + \min\{n_m, n_b + 2 \min\{n_m, n_e\}\} \\ &= n_a + \min\{n_m, n_b + 2n_m, n_b + 2n_e\} \\ &= n_a + \min\{n_m, n_b + 2n_e\} && \text{car } n_m \geq 0 \\ &= \min\{n_a + n_m, n_a + n_b + 2n_e\} \\ &= \min\{\text{cr}([a], \Psi), \text{cr}([m], \Psi)\} && \text{par les égalités (7.4.1).} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc le bon nombre de  $a$ -circuits. □



**Figure 7.6:**  $b$ -circuit +  $m$ -circuit =  $a$ -circuit

Bien entendu, la proposition 7.4.2 peut être énoncée de la même manière pour les  $b$ -circuits.

## 7.5 Preuve du théorème

Dans cette section, nous prouvons le théorème 7.1.4. Nous commençons par traiter le cas spécifique des graphes plongeables et eulériens.

**Lemme 7.5.1** *Soit le graphe  $G$ , union disjointe de deux graphes connexes eulériens  $H$  et  $K$ . Si  $G$  admet une représentation sur la bouteille de Klein telle que les sous-représentations associées à  $H$  et  $K$  sont des plongements qui se croisent, alors il existe une autre représentation de  $G$  sur la bouteille de Klein avec strictement moins de croisements et telle que les sous-représentations associées à  $H$  et  $K$  ne se croisent pas.*

**Preuve :** Soit  $\Psi$  une représentation de  $G$  sur la bouteille de Klein telle que les restrictions  $\Psi_H$  à  $H$  et  $\Psi_K$  à  $K$  sont des plongements.

Pour prouver le lemme 7.5.1, il suffit de trouver deux représentations  $\Psi'_H$  et  $\Psi'_K$  de  $H$  et  $K$  sur deux sous-surfaces disjointes de la bouteille de Klein, telles que la somme des nombres de croisements de  $\Psi'_H$  et de  $\Psi'_K$  est strictement inférieure au nombre de croisement de  $\Psi$ . En effet, si nous trouvons de telles représentations, il suffit de considérer  $\Psi'$  la représentation de  $G$  sur la bouteille de Klein obtenue par l'union des représentations  $\Psi'_H$  et  $\Psi'_K$ . Le nombre de croisements de  $\Psi'$  est exactement la somme des nombres de croisements de  $\Psi'_H$  et de  $\Psi'_K$ , et ces deux restrictions ne se croisent pas.

Pour des raisons de lisibilité, nous posons  $h_a = \text{cr}([a], \Psi_H)$ ,  $h_b = \text{cr}([b], \Psi_H)$  et  $h_m = \text{cr}([m], \Psi_H)$ . Les notations  $k_a, k_b$  et  $k_m$  sont définies de façon similaire pour le sous-graphe  $K$ .

D'après la proposition 7.4.1, il existe une décomposition de  $\Psi_H$  en une famille de circuits deux à deux arêtes-disjoints composée de  $\min\{h_m, h_a + h_b\}$  circuits à un seul côté et  $(h_a + h_b - \min\{h_m, h_a + h_b\})/2$   $m$ -circuits. D'après la définition de  $k_a$  et  $k_b$ , chacun de ces circuits à un seul côté croise la représentation de  $\Psi_K$  au moins  $\min\{k_a, k_b\}$  fois. De plus, chaque  $m$ -circuit de cette décomposition croise  $\Psi_K$  au moins  $k_m$  fois. Nous en déduisons une borne inférieure sur le nombre de croisements entre  $\Psi_H$  et  $\Psi_K$ , et par extension de  $\Psi$ .

$$\begin{aligned} \text{cr}(\Psi) \geq & \min\{h_m, h_a + h_b\} \times \min\{k_a, k_b\} \\ & + \frac{1}{2}(h_a + h_b - \min\{h_m, h_a + h_b\}) \times k_m. \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

## 7. REPRÉSENTATIONS DE GRAPHES

---

En échangeant les rôles de  $H$  et  $K$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{cr}(\Psi) &\geq \min\{k_m, k_a + k_b\} \times \min\{h_a, h_b\} \\ &\quad + \frac{1}{2}(k_a + k_b - \min\{k_m, k_a + k_b\}) \times h_m. \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

Par ailleurs, d'après la proposition 7.4.2, il existe  $\min\{k_a, k_m\}$   $a$ -circuits arêtes-disjoints dans  $\Psi_K$ . Chacun d'eux croise  $\Psi_H$  au moins  $h_a$  fois, ainsi

$$\text{cr}(\Psi) \geq \min\{k_a, k_m\} \times h_a. \quad (7.5.3)$$

De façon similaire en considérant les  $b$ -circuits, nous avons

$$\text{cr}(\Psi) \geq \min\{k_b, k_m\} \times h_b. \quad (7.5.4)$$

Cette dernière inégalité peut être obtenue de la même manière en inversant les rôles de  $H$  et  $K$ ,

$$\text{cr}(\Psi) \geq \min\{h_b, h_m\} \times k_b. \quad (7.5.5)$$

Notons  $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq m_4$  l'ordre des nombre  $h_a, h_b, k_a$  et  $k_b$ . Nous distinguons alors les cas suivants.

**(Cas 1)** Si  $k_m \geq m_2$ , alors nous appliquons la transformation de la proposition 7.3.1 sur le graphe concerné par  $m_1$ , puis nous appliquons cette même transformation sur le graphe concerné par  $m_2$ . Nous obtenons deux nouvelles représentations  $\Psi'_H$  et  $\Psi'_K$  sur des sous-surfaces disjointes de la bouteille de Klein et telles que

$$\begin{aligned} \text{cr}(\Psi'_H) + \text{cr}(\Psi'_K) &= \frac{1}{2}m_1 \times (m_1 - 1) + \frac{1}{2}m_2 \times (m_2 - 1) \\ &< m_2 \times m_2. \end{aligned}$$

Quelque soit l'ordre des  $m_i$ , et comme  $k_m \geq m_2$ , nous pouvons affirmer que

$$m_2 \times m_2 \leq \max\{\min\{k_a, k_m\} \times h_a, \min\{k_b, k_m\} \times h_b\}.$$

En effet, les  $m_i$  sont tous utilisés dans cette formule, il suffit de vérifier qu'au moins un des deux produits est supérieur à  $m_2 \times m_2$ .

Il reste alors à invoquer les inégalités (7.5.3) et (7.5.4) pour conclure que

$$\text{cr}(\Psi'_H) + \text{cr}(\Psi'_K) < \text{cr}(\Psi).$$

Notons que ce cas 1 est traité de la même façon si  $h_m \geq 2$ .

**(Cas 2)** Si  $k_m < m_2$  et  $h_m < m_2$ , alors

$$h_m < m_1 + m_2 \leq h_a + h_b.$$

L'inégalité (7.5.1) devient donc

$$\text{cr}(\Psi) \geq h_m \times \min\{k_a, k_b\} + \frac{1}{2}(h_a + h_b - h_m) \times k_m. \quad (7.5.6)$$

De même,  $k_m < m_1 + m_2 \leq k_a + k_b$ , et nous pouvons supposer que  $h_a \leq h_b$  l'inégalité (7.5.2) se transforme en

$$\text{cr}(\Psi) \geq k_m \times h_a + \frac{1}{2}(k_a + k_b - k_m) \times h_m. \quad (7.5.7)$$

Supposons sans perte de généralité que  $k_m \geq h_m$ .

**(Cas 2.1)** Si  $h_m \leq k_a + k_b - k_m$ , alors d'après la proposition 7.3.3, il existe une représentation  $\Psi'_H$  de  $H$  sur le plan euclidien telle que

$$\text{cr}(\Psi'_H) = h_m \times h_a + \frac{1}{2}h_m \times (h_m - 1).$$

D'après l'inégalité (7.5.7),

$$\begin{aligned} \text{cr}(\Psi'_H) + \text{cr}(\Psi_K) &= h_m \times h_a + \frac{1}{2}h_m \times (h_m - 1) \\ &\leq h_m \times h_a + \frac{1}{2}(k_a + k_b - k_m) \times (h_m - 1) \\ &\leq k_m \times h_a + \frac{1}{2}(k_a + k_b - k_m) \times (h_m - 1) && \text{car } k_m \geq h_m \\ &< k_m \times h_a + \frac{1}{2}(k_a + k_b - k_m) \times h_m && \text{car } k_a + k_b - k_m > 0 \\ &< \text{cr}(\Psi) && \text{par (7.5.7).} \end{aligned}$$

**(Cas 2.2)** Si  $h_m > k_a + k_b - k_m$ , alors, sachant que  $k_m < m_2$ , nous pouvons en déduire que

$$h_m + \max\{k_a, k_b\} \geq h_m + k_m > k_a + k_b.$$

Alors  $h_m > \min\{k_a, k_b\} = m_i$ . Comme  $h_m < m_2$ , nous en déduisons que  $i = 1$ . Alors forcément,  $h_a, h_b \geq m_2 > k_m$

**(Cas 2.2.1)** Si  $\min\{k_a, k_b\} < k_m/2$ , alors  $k_m \geq 1$ ; nous appliquons la transformation adéquate décrite dans la proposition 7.3.3 sur le graphe  $K$ . Nous obtenons une représentation  $\Psi'_K$  de ce dernier sur le plan euclidien telle que

$$\text{cr}(\Psi'_K) = k_m \times \min\{k_a, k_b\} + \frac{1}{2}k_m \times (k_m - 1).$$

Nous concluons grâce aux inégalités suivantes,

## 7. REPRÉSENTATIONS DE GRAPHES

---

$$\begin{aligned}
\text{cr}(\Psi'_H) + \text{cr}(\Psi_K) &= k_m \times \min\{k_a, k_b\} \\
&\quad + \frac{1}{2}k_m \times (k_m - 1) \\
&\leq h_m \times \min\{k_a, k_b\} \\
&\quad + (k_m - h_m) \times \min\{k_a, k_b\} \\
&\quad + \frac{1}{2}k_m \times (k_m - 1) \\
&< h_m \times \min\{k_a, k_b\} \\
&\quad + (k_m - h_m) \times \min\{k_a, k_b\} \\
&\quad + \frac{1}{2}k_m \times k_m && \text{car } k_m \geq 1 \\
&< h_m \times \min\{k_a, k_b\} \\
&\quad + (2k_m - h_m) \times \frac{1}{2}k_m && \text{car } \min\{k_a, k_b\} < k_m/2 \\
&< h_m \times \min\{k_a, k_b\} \\
&\quad + \frac{1}{2}(h_a + h_b - h_m) \times k_m && \text{car } h_a, h_b \geq k_m \\
&< \text{cr}(\Psi) && \text{d'après (7.5.6)}.
\end{aligned}$$

**(Cas 2.2.2)** Si  $\min\{k_a, k_b\} \geq k_m/2$  et  $m_2 < 2k_m$ , alors nous transformons les représentations de  $H$  et de  $K$  comme indiqué dans la proposition 7.3.1 en considérant les crosscaps et les graphes impliqués par  $m_1$  et  $m_2$ . Nous rappelons que  $\min\{k_a, k_b\} = m_1$ . Nous obtenons deux représentations  $\Psi'_H$  et  $\Psi'_K$  sur deux sous-surfaces disjointes de la bouteille de Klein telles que

$$\text{cr}(\Psi'_H) + \text{cr}(\Psi'_K) = \frac{1}{2}m_1 \times (m_1 - 1) + \frac{1}{2}m_2 \times (m_2 - 1).$$

Or nous savons que

$$m_1 < h_m, \quad m_2 > k_m, \quad m_2 \leq h_a \quad \text{et} \quad m_1 + m_2 \leq k_a + k_b.$$

Nous pouvons alors conclure

$$\begin{aligned}
\text{cr}(\Psi'_H) + \text{cr}(\Psi'_K) &= \frac{1}{2}m_1 \times (m_1 - 1) + \frac{1}{2}m_2 \times (m_2 - 1) \\
&< \frac{1}{2}m_1 \times (h_m - 1) + \frac{1}{2}m_2 \times 2k_m && \text{car } 2k_m \geq m_2 \\
&< \frac{1}{2}(m_1 + m_2 - k_m) \times h_m + h_a \times k_m \\
&< \frac{1}{2}(k_a + k_b - k_m) \times h_m + h_a \times k_m \\
&< \text{cr}(\Psi) && \text{d'après (7.5.7)}.
\end{aligned}$$

**(Cas 2.2.3)** Si  $\min\{k_a, k_b\} \geq k_m/2$  et  $m_2 \geq 2k_m$ , nous transformons le graphe  $K$  comme dans la proposition 7.3.3. Nous obtenons une représentation  $\Psi'_K$  de  $K$  sur le plan euclidien telle que

$$\begin{aligned}
\text{cr}(\Psi'_K) &= k_m \times \min\{k_a, k_b\} + \frac{1}{2}k_m \times (k_m - 1) \\
&< k_m \times \left(m_1 + \frac{1}{2}k_m\right) \\
&< k_m \times 2m_1 \\
&< m_1 \times m_2.
\end{aligned}$$

Nous pouvons supposer que  $m_1 = k_a$ . Ainsi nous savons que  $m_1 < h_m$ ,  $k_b \geq m_2$  et bien entendu  $h_b \geq m_2$ . Nous obtenons alors en utilisant l'inégalité 7.5.5,

$$\begin{aligned} \text{cr}(\Psi'_K) &< m_1 \times m_2 \\ &< \min(h_b, h_m) \times k_b \\ &< \text{cr}(\Psi). \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve du lemme 7.5.1. □

Il ne reste plus qu'à généraliser ce lemme au cas général pour obtenir le théorème.

**Preuve du théorème 7.1.4.** Soit  $G$  l'union disjointe de deux graphes connexes  $H$  et  $K$ . Soit  $\Psi$  une représentation optimale de  $G$  sur la bouteille de Klein.

Pour une démonstration par l'absurde, supposons que les restrictions de  $\Psi$  à  $H$  et  $K$  se croisent.

Tout d'abord, supposons que les restrictions de  $\Psi$  à  $H$  et  $K$  sont des plongements. Doublons chaque arête de  $G$  et notons  $G'$ ,  $H'$  et  $K'$  les graphes eulériens ainsi obtenus. La représentation  $\Psi'$  possède  $4\text{cr}(\Psi)$  croisements. Comme  $G'$ ,  $H'$ , et  $K'$  sont eulériens, nous pouvons appliquer le lemme 7.5.1 et obtenir une représentation  $\Psi''$  de  $G'$  admettant strictement moins de  $4\text{cr}(\Psi)$  croisements, et telle que les restrictions à  $H'$  et  $K'$  ne se croisent pas. De plus, nous pouvons supposer que chaque arête et sa parallèle sont représentées suffisamment proches l'une de l'autre pour avoir les mêmes croisements. Ainsi, chaque couple de paire d'arêtes parallèles se croise 0 ou 4 fois. En retirant une arête de chacune de ces paires, nous obtenons une nouvelle représentation de  $G$  avec strictement moins de  $\text{cr}(\Psi)$  croisements et telle que les restrictions à  $H$  et  $K$  ne se croisent pas. C'est absurde car  $\Psi$  est optimale par hypothèse.

Enfin, si les restrictions de  $\Psi$  à  $H$  et  $K$  ne sont pas des plongements (alors il existe des croisements internes), nous pouvons considérer les graphes  $H''$  et  $K''$  obtenus en ajoutant un sommet à chaque croisement de  $\Psi$ . Nous avons alors des plongements dans la bouteille de Klein. Le paragraphe précédent nous permet de trouver une meilleure représentation de  $H''$  et  $K''$ . Nous remplaçons alors les sommets ajoutés par les croisements initiaux et le théorème 7.1.4 est prouvé.

## 7. REPRÉSENTATIONS DE GRAPHS

---

# Bibliographie

- [1] Dan Archdeacon, C. Paul Bonnington, and Jozef Širáň. Trading crossings for handles and crosscaps. *J. Graph Theory*, 38(4) :230–243, 2001. 107
- [2] Laurent Beaudou, Antoine Gerbaud, Roland Grappe, and Frederic Palesi. Drawing disconnected graphs on the klein bottle. *Graphs and Combinatorics*, à paraître. 2, 107, 110
- [3] Robert L. Benedetto and William M. Goldman. The topology of the relative character varieties of a quadruply-punctured sphere. *Experiment. Math.*, 8(1) :85–103, 1999. 4, 42, 43
- [4] Bela Bollobás. *Modern Graph Theory*. Springer, New York, 1998. 107
- [5] Steven B. Bradlow, Oscar García-Prada, and Peter B. Gothen. Representations of the fundamental group of a surface in  $\mathrm{PU}(p, q)$  and holomorphic triples. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(4) :347–352, 2001. 7
- [6] Steven B. Bradlow, Oscar García-Prada, and Peter B. Gothen. Surface group representations and  $\mathrm{U}(p, q)$ -Higgs bundles. *J. Differential Geom.*, 64(1) :111–170, 2003. 7
- [7] Steven B. Bradlow, Oscar García-Prada, and Peter B. Gothen. Maximal surface group representations in isometry groups of classical Hermitian symmetric spaces. *Geom. Dedicata*, 122 :185–213, 2006. 7
- [8] Steven B. Bradlow, Oscar García-Prada, and Ignasi Mundet i Riera. Relative Hitchin-Kobayashi correspondences for principal pairs. *Q. J. Math.*, 54(2) :171–208, 2003. 7
- [9] Marc Burger, Alessandra Iozzi, François Labourie, and Anna Wienhard. Maximal representations of surface groups : symplectic Anosov structures. *Pure Appl. Math. Q.*, 1(3, part 2) :543–590, 2005. 7
- [10] Marc Burger, Alessandra Iozzi, and Anna Wienhard. Surface group representations with maximal Toledo invariant. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(5) :387–390, 2003. 7
- [11] Marc Burger, Alessandra Iozzi, and Anna Wienhard. Hermitian symmetric spaces and Kähler rigidity. *Transform. Groups*, 12(1) :5–32, 2007. 7
- [12] D. R. J. Chillingworth. A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 65 :409–430, 1969. 17
- [13] S. Choi and William M. Goldman. Convex real projective structures on closed surfaces are closed. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118 :657–661, 1993. 7

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [14] S. Choi and William M. Goldman. The classification of real projective structures on compact surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 34 :161–171, 1997. 7
- [15] M. Culler and P.B. Shalen. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Ann. Math.*, 117 :109–146, 1983. 38, 39, 43, 44
- [16] Maurits de Graaf and Alexander Schrijver. Decomposition of graphs on surfaces. *J. Combin. Theory Ser. B*, 70(1) :157–165, 1997. 111
- [17] M. Dehn. Die Gruppe der Abbildungsklassen. *Acta Math.*, 69(1) :135–206, 1938. Das arithmetische Feld auf Flächen. 16
- [18] M. DeVos, B. Mohar, and R. Samal. Unexpected behaviour of crossing sequence. *Electron. notes Discrete Math.*, 31 :259–254, 2008. 107, 109, 112
- [19] J. Dieudonné. *Éléments d'analyse. Tome VI. Chapitre XXII.* Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1975. Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXIX. 31, 33, 34
- [20] B. Farb and D. Margalit. *A Primer on mapping class group.* 15
- [21] Robert Fricke. Ueber die Transformationstheorie der automorphen Functionen. *Math. Ann.*, 44(1) :97–104, 1894. 2, 4, 38, 40
- [22] Robert Fricke and Felix Klein. *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Band 1 : Die gruppentheoretischen Grundlagen. Band II : Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen,* volume 4 of *Bibliotheca Mathematica Teubneriana, Bände 3.* Johnson Reprint Corp., New York, 1965. 40
- [23] G. Frobenius and I. Schur. über die reellen darstellung der endlichen gruppen. *Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 186–208, 1906. 34
- [24] H. Furstenberg. *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory.* Princeton University Press, 1981. 23
- [25] Étienne Ghys. Classe d'Euler et minimal exceptionnel. *Topology*, 26(1) :93–105, 1987. 90
- [26] William M. Goldman. *Discontinuous groups and the Euler class.* Thèse de doctorat, Berkeley, 1980. 87
- [27] William M. Goldman. The symplectic nature of fundamental groups of surfaces. *Adv. Math.*, 85 :200–225, 1984. 3, 21
- [28] William M. Goldman. Invariant functions on lie groups and hamiltonian flows of surface group representations. *Invent. Math.*, 85 :263–302, 1986. 5, 72, 74
- [29] William M. Goldman. Topological components of spaces of representations. *Invent. Math.*, 93 :557–607, 1988. 4, 6, 41, 87, 90, 92, 96, 97
- [30] William M. Goldman. Ergodic theory on moduli spaces. *Ann. of Math.*, 146 :475–507, no. 3 1997. 1, 2, 4, 46, 51, 80, 100
- [31] William M. Goldman. The modular group action on real  $\mathrm{sl}(2)$ -characters of a one-holed torus. *Geometry and Topology*, 7 :443–486, 2003. 4

- 
- [32] William M. Goldman. Mapping class group dynamics on surface group representations. In *Problems on mapping class groups and related topics*, volume 74 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 189–214. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006. 1
  - [33] William M. Goldman. Trace coordinates on fricke spaces of some hyperbolic surfaces. *arXiv :0901.1404*, 2009. 4, 38, 40, 41, 42
  - [34] William M. Goldman, Greg MacShane, Georg Stantchev, and Ser-Peow Tan. Dynamics of the automorphism group of the  $\mathrm{gl}(2, \mathbb{R})$ -characters of a once-punctured torus. 4
  - [35] William M. Goldman and Georg Stantchev. Dynamics of the automorphism group of the  $\mathrm{gl}(2, \mathbb{R})$ -characters of a once-punctured torus. 4
  - [36] William M. Goldman and Eugene Z. Xia. Ergodicity of mapping class group actions on  $\mathrm{su}(2)$ -character varieties. *arXiv :0901.1402v1*, 2009. 5
  - [37] F. González-Acuña and José María Montesinos-Amilibia. On the character variety of group representations in  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  and  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ . *Math. Z.*, 214(4) :627–652, 1993. 38, 44
  - [38] N.J. Hitchin. The self-duality equations on a riemann surface. *Proc. London Math. Soc.*, 55(3) :59–126, 1987. 6
  - [39] Nan-Kuo Ho and Lisa C. Jeffrey. The volume of the moduli space of flat connections on a nonorientable 2-manifold. *Comm. Math. Phys.*, 256(3) :539–564, 2005. 3, 21
  - [40] Nan-Kuo Ho and Chiu-Chu Melissa Liu. Yang-Mills connections on nonorientable surfaces. *Comm. Anal. Geom.*, 16(3) :617–679, 2008. 6
  - [41] Nan-Kuo Ho and Chu-Chiu Melissa Liu. Connected components of the space of surface group representations. *IMRN*, 44 :2359–2372, 2003. 6
  - [42] R. Horowitz. Characters of free groups represented in the two-dimensional linear group. *Comm. Pure Appl. Math*, 25 :635–649, 1972. 4
  - [43] J. Huebschmann. Symplectic and poisson structures of certain moduli spaces. *Duke Math J.*, 80 :737–756, 1995. 3
  - [44] Nikolai V. Ivanov. Mapping class groups. In *Handbook of geometric topology*, pages 523–633. North-Holland, Amsterdam, 2002. 15
  - [45] Mark Jankins and Walter Neumann. Homomorphisms of Fuchsian groups to  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . *Comment. Math. Helv.*, 60(3) :480–495, 1985. 91
  - [46] Lisa C. Jeffrey and Jonathan Weitsman. Bohr-Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula. *Comm. Math. Phys.*, 150(3) :593–630, 1992. 5, 76
  - [47] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza. 22
  - [48] David B. Klein. Goldman flows on a nonorientable surface. *Geom. Dedicata*, 135 :129–145, 2008. 5

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [49] Mustafa Korkmaz. Mapping class groups of nonorientable surfaces. *Geom. Dedicata*, 89 :109–133, 2002. 17
- [50] François Labourie. Anosov flows, surface groups and curves in projective space. *Invent. Math.*, 165(1) :51–114, 2006. 7
- [51] S. Lawrencenko and S Negami. Irreducible triangulations of the klein bottle. *J. Combin. Theory Ser. B*, 70 :265–291, 1997. 12, 110
- [52] Jun Li. The space of surface group representations. *Manuscripta Math.*, 78 :223–243, 1993. 6
- [53] W. B. R. Lickorish. Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 59 :307–317, 1963. 16, 17
- [54] Sóstenes Lins. A minimax theorem on circuits in projective graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 30(3) :253–262, 1981. 111, 112
- [55] Feng Luo. On non-separating simple closed curves in a compact surface. *Topology*, 36(2) :381–410, 1997. 111
- [56] Wilhelm Magnus. Rings of Fricke characters and automorphism groups of free groups. *Math. Z.*, 170(1) :91–103, 1980. 4, 44
- [57] W. Mangler. Die Klassen von topologischen Abbildungen einer geschlossenen Fläche auf sich. *Math. Z.*, 44(1) :541–554, 1939. 15
- [58] William S. Massey. *Algebraic topology : An introduction*. Harcourt, Brace & World, Inc., New York, 1967. 9, 10
- [59] J.W. Milnor. On the existence of a connection with curvature zero. *Comment. Math. Helv.*, 32 :215–223, 1958. 90
- [60] Bojan Mohar and Carsten Thomassen. *Graphs on surfaces*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2001. 108
- [61] John W. Morgan and Peter B. Shalen. Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures. I. *Ann. of Math. (2)*, 120(3) :401–476, 1984. 4, 41
- [62] M. Mulase and M. Penkava. Volume of representation varieties. *arXiv :math/0212012*, 2002. 3, 21, 24, 27, 32
- [63] David Mumford. *Geometric invariant theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Band 34. Springer-Verlag, Berlin, 1965. 44
- [64] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri. Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface. *Ann. of Math. (2)*, 82 :540–567, 1965. 1
- [65] J. Nielsen. Die Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden. *Math. Ann.*, 78(1) :385–397, 1964. 15
- [66] Frederic Palesi. Ergodic actions of the mapping class groups on moduli spaces of non-orientable surfaces. *Soumis pour publication*, arXiv :0807.1615, 2009. 2
- [67] Frederic Palesi. Topological components of spaces of  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ -representations of non-orientable surfaces. *Soumis pour publication*, arXiv :0807.1615, 2009. 2

- 
- [68] Doug Pickrell and Eugene Z. Xia. Ergodicity of mapping class group actions on representation varieties. I. Closed surfaces. *Comment. Math. Helv.*, 77(2) :339–362, 2002. 2
  - [69] Doug Pickrell and Eugene Z. Xia. Ergodicity of mapping class group actions on representation varieties. II. Surfaces with boundary. *Transform. Groups*, 8(4) :397–402, 2003. 2
  - [70] Joseph P. Previte and Eugene Z. Xia. Topological dynamics on moduli spaces. I. *Pacific J. Math.*, 193(2) :397–417, 2000. 3
  - [71] Joseph P. Previte and Eugene Z. Xia. Topological dynamics on moduli spaces. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(6) :2475–2494 (electronic), 2002. 3
  - [72] Joseph P. Previte and Eugene Z. Xia. Exceptional discrete mapping class group orbits in moduli spaces. *Forum Math.*, 15(6) :949–954, 2003. 3
  - [73] C. Procesi. The invariant theory of  $n \times n$  matrices. *Advances in Math.*, 19(3) :306–381, 1976. 5, 38, 44
  - [74] A. Ramanathan. Moduli for principal bundles over algebraic curves. I. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 106(3) :301–328, 1996. 1
  - [75] A. Schrijver. Decomposition of graphs on surfaces and a homotopic circulation theorem. *J. Combin. Theory Ser. B*, 51(2) :161–210, 1991. 111
  - [76] Jozef Širáň. The crossing function of a graph. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 53 :131–133, 1983. 107
  - [77] Norman Steenrod. *The topology of fibre bundles*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999. Reprint of the 1957 edition, Princeton Paperbacks. 6, 88
  - [78] John C. Stillwell. *Classical topology and combinatorial group theory*, volume 72 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980. 9
  - [79] M. Stukow. The twist subgroup of the mapping class group of a nonorientable surface. *arXiv :0709.2798*, 2007. 17
  - [80] Domingo Toledo. Representations of surface groups in complex hyperbolic space. *J. Differential Geom.*, 29(1) :125–133, 1989. 7
  - [81] H. Vogt. Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 6 :3–71, 1889. 4, 40, 44
  - [82] Edward Witten. On quantum gauge theories in two dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 141(1) :153–209, 1991. 3, 21
  - [83] Eugene Z. Xia. Components of  $\text{hom}(\pi_1, \text{PGL}(2, \mathbb{R}))$ . *Topology*, 36(2) :481–499, 1997. 8, 104

## Résumé

Nous considérons l'espace de représentations  $\text{Hom}(\pi_1(S), G)$  d'un groupe de surface  $\pi_1(S)$  dans un groupe de Lie  $G$ , et l'espace de modules  $\mathfrak{X}(\pi_1(S), G)$  des classes de conjugaison de ces représentations. Le groupe modulaire de la surface sous-jacente agit naturellement sur ces espaces, et cette action possède une dynamique très riche qui dépend du choix du groupe de Lie  $G$ , et de la composante connexe de l'espace sur laquelle on se place. Dans cette thèse, nous étudions le cas où  $S$  est une surface non-orientable. Dans la première partie, nous étudions les propriétés dynamiques de l'action du groupe modulaire sur l'espace de modules  $\mathfrak{X}(\pi_1(S), \text{SU}(2))$  et prouvons que cette action est ergodique lorsque  $\chi(S) \leq -2$ . Dans la deuxième partie, nous montrons que l'espace des représentations  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  possède deux composantes connexes indexées par une classe de Stiefel-Whitney.

## Abstract

We consider the space of representations  $\text{Hom}(\pi_1(S), G)$  of a surface group  $\pi_1(S)$  into a Lie group  $G$ , and the moduli space  $\mathfrak{X}(\pi_1(S), G)$  of  $G$ -conjugacy classes of such representations. These spaces admit a natural action of the mapping class group of the underlying surface  $S$ , and this action displays very rich dynamics depending on the choice of the Lie group  $G$ , and on the connected component of the space that we consider. In this thesis, we focus on the case when  $S$  is a non-orientable surface. In the first part, we study the dynamical properties of the mapping class group actions on the moduli space  $\mathfrak{X}(\pi_1(S), \text{SU}(2))$  and prove that this action is ergodic when  $\chi(S) \leq -2$  with respect to a natural measure on the space. In the second part, we show that the representation space  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  has two connected components indexed by a Stiefel-Whitney class.