



HAL
open science

ROTATIONS DISCRETES ET AUTOMATES CELLULAIRES

Bertrand Nouvel

► **To cite this version:**

Bertrand Nouvel. ROTATIONS DISCRETES ET AUTOMATES CELLULAIRES. Autre [cs.OH].
Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2006. Français. NNT : . tel-00444088

HAL Id: tel-00444088

<https://theses.hal.science/tel-00444088v1>

Submitted on 5 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 0370
Numéro bibliothèque : 06ENSL0370

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le jeudi 14 septembre 2006

par

Bertrand NOUVEL

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'École Normale Supérieure de Lyon
spécialité : **Informatique**

ROTATIONS DISCRÈTES ET AUTOMATES CELLULAIRES

préparée au Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme
dans le cadre de l'École doctorale : *Mathématiques et Informatique Fondamentale*

directeurs de thèse : *Jacques MAZOYER et Éric RÉMILA*

JURY :

Éric ANDRÈS,	Professeur, membre du laboratoire SIC, Poitiers	<i>rapporteur</i>
Srecko BRLEK,	Professeur, directeur du LaCIM, UQÀM	<i>examineur</i>
Rémy MALGOUYRES,	Professeur, directeur du LLAIC1, Clermont-Ferrand	<i>examineur</i>
Jacques MAZOYER,	Professeur, membre du LIP, ENS-Lyon	<i>directeur</i>
Éric RÉMILA,	Maître de conférences, habilité, membre du LIP, ENS-Lyon.....	<i>directeur</i>
Laurent VUILLON,	Professeur, directeur du LAMA, Chambéry.....	<i>rapporteur</i>
Olivier DUSAUTOIR,	Directeur des technologies broadcast, TF1 SA	<i>invité</i>
Maurice NIVAT,	Professeur émérite au LIAFA, Paris 7	<i>invité</i>

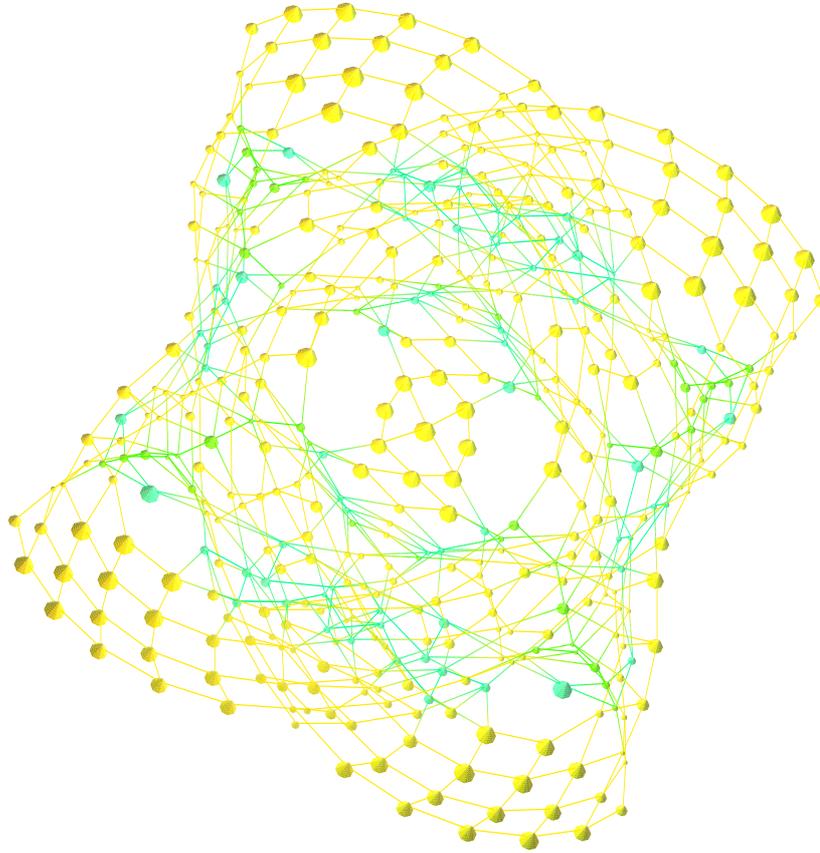


Fig. 0.1 – Énigme.

Cette thèse est normalement accompagnée d'un disque DVD.

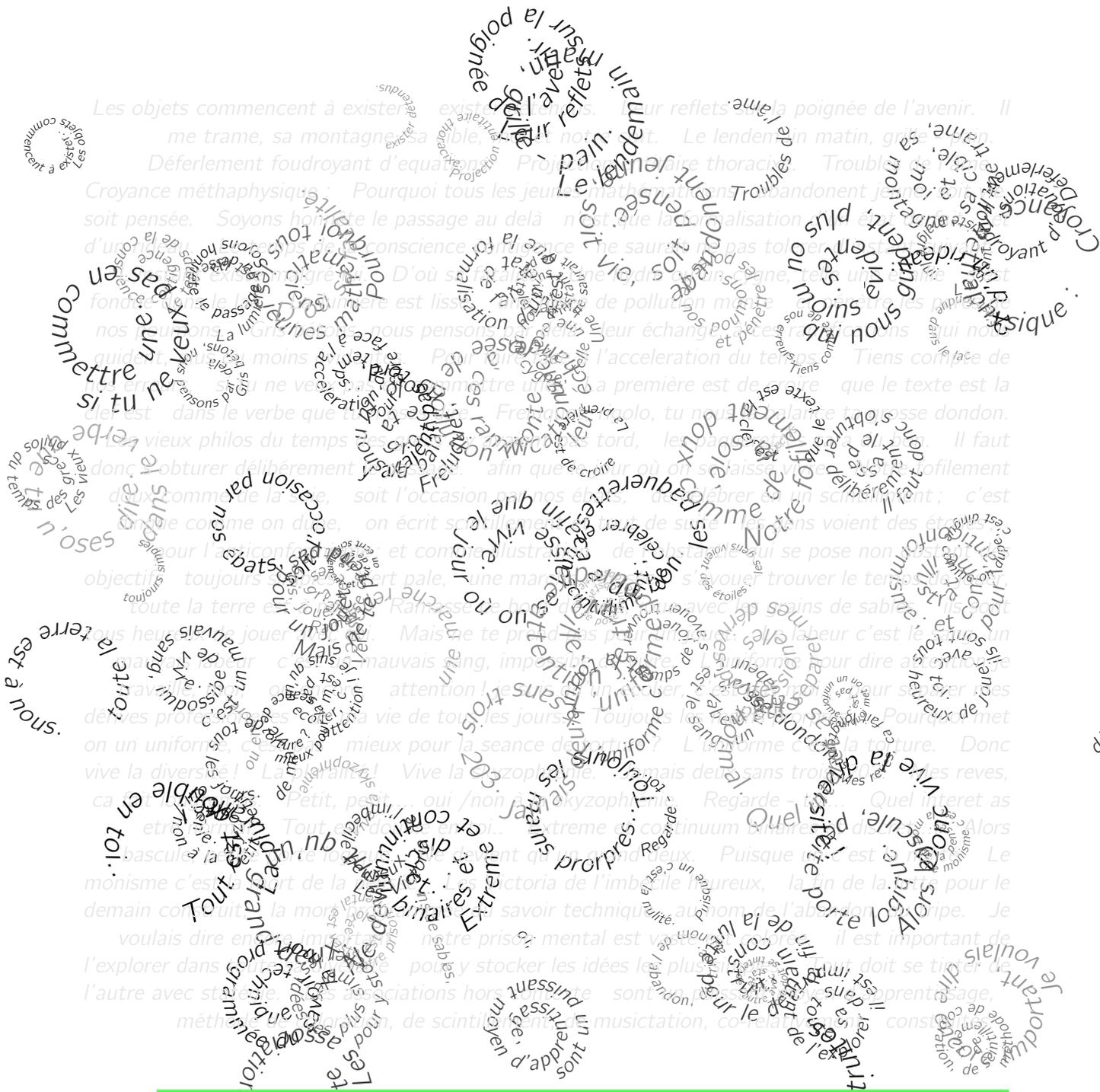
Les éléments qu'il contient ne sont en aucun cas essentiels à la lecture du manuscrit.

Peut-être, permettront-ils à ceux qui le souhaitent de prolonger ce travail plus facilement.

Abbreviations

- CNRS : Centre National de la Recherche Scientifique
- ENS-Lyon : École Normale Supérieure de Lyon
- LaCIM : Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique (UQAM)
- LAMA : Laboratoire de Mathématiques (Université de Savoie)
- LIAFA : Laboratoire d'Informatique Algorithmique : Fondements et Applications
- LIP : Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme (ENSL)
- LLAIIC1 : Laboratoire de Logique, Algorithmique et Informatique de l'université Clermont 1)
- SIC : Signal Image Communications (Université Poitiers 1)
- TF1 : Télévision Française 1
- UQAM : Université du Québec à Montréal

b



L'âme n'aura probablement bientôt plus une existence linéaire,

A l'ultime imaginaire linéaire,

Hors des lignes inscrites, savoir retourner dedans.

d

Remerciements

Je voudrais remercier ceux qui directement ou indirectement ont contribué au développement de cette thèse.

Jacques MAZOYER et Éric RÉMILA, mes directeurs de thèse ont su par leurs conseils et par leur ouverture, leur attitude socratique et étonnante me guider sur une piste qui transforma mon imaginaire souvent luxuriant mais confus, vers une rigueur plus mathématique. Ils ont su me faire douter, me faire recommencer, raturer, me recoller les pieds sur terre. Leur patience à mon égard fut incommensurable. Ils furent des directeurs bienveillants et exceptionnels. Je ne peux que leur vouer une reconnaissance véritable et sincère.

Éric ANDRÈS et Laurent VUILLON ont accepté le rôle de rapporteur pour cette thèse, ils ont ainsi joué un rôle prépondérant dans celle-ci. Alors, en plus de la considération que j'étais enclin à leur porter du fait de leurs qualités humaines et scientifiques, et en surcroît des remerciements que je leur adresse pour l'intérêt qu'ils ont souvent témoigné pour mes recherches ; je souhaiterais encore les assurer de ma reconnaissance.

Cette thèse se situe à l'intersection entre la géométrie discrète et la dynamique symbolique ; la présence simultanée de Srecko BRLEK et de Rémy MALGOUYRES est en tout point idéale dans un souci d'équilibre et d'originalité. Du fait de leur expérience significative de la recherche, ils sauront évaluer à la fois les aspects de combinatoire des motifs et les aspects de géométrie discrète, Je tiens réellement à les remercier pour avoir accepté le rôle d'examineur et de me faire l'honneur de leur présence.

Je tiens à remercier aussi, en tant qu'invité du Jury, Olivier DUSAUTOIR, spécialisé dans la conception technique de l'image à TF1. Il a su me faire partager sa connaissance étendue du domaine de la technique télévisuelle et m'accorder sa confiance. Je le remercie donc pour le travail que nous avons pu partager avec simplicité et enthousiasme.

Le second invité du Jury, Maurice NIVAT, fut mon professeur de pavages en maîtrise d'Informatique à l'université Paris 7 ; je lui dois une part importante de cette belle aventure que fut la thèse. Il m'a transmis comme à tant d'autres, le goût des énigmes, la fascination des mystères et des casse-têtes. Je crois encore qu'il a toujours su me montrer la voie de la réflexion.

Je souhaite, par ailleurs, remercier l'ensemble de la chaîne TF1 qui m'a permis de développer cette thèse. Plus particulièrement, Pierre MARFAING et Arnaud BOSOM qui se sont succédé à la Direction des Technologies et de Moyens Internes de TF1 : Ils ont su me proposer des sujets de recherche en adéquation avec les préoccupations du groupe TF1, tout en m'invitant à poursuivre des recherches moins directement appliquées à leurs problématiques. Ces questions me tenaient à cœur et elles sont aujourd'hui présentées dans cette thèse.

J'ai toujours considéré la thèse comme une occasion de se battre pour des idées, pour des convictions. Cela, je le dois principalement à ma famille : merci DILOU, JEAN, PEETOOX, à mes quatre amours de grands-parents, à CATHERINE et à SARAH pour sa joie de vivre ! Ils ont tous contribué d'une façon ou d'une autre à me donner les moyens et le goût des études ; mon grand

père qui m'a donné l'envie de tout démonter à 3 ans, ma mère qui m'a laissé malgré elle mettre les doigts dans une prise électrique à 4 ans, qui m'a dit "d'apprendre à programmer" mes jeux vidéos à 7 ans, et mon père qui a bien voulu croire sur ce que je lui disais sur les ordinateurs alors que j'avais 8 ans. Utopiste, je me prends parfois à penser qu'il est bien dommage que tout le monde n'ait pas une famille comme vous...

Encore une fois, cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans le concours de nombreuses personnes qui m'ont suivi, entraîné, parfois guidé dans cette aventure. Elles m'ont amusé, fait rire, ouvert les yeux, parfois simplement détendu.

Je tiens à remercier ceux et celles qui ont pris le temps de me relire : Stéphanie PORNIN, Aude MORIN, Nazim FATÈS, Hélène DE SAINT OURS et Céline DEGROOTE.

Merci aussi à ceux avec qui j'ai noué des liens plus intimes pour leur écoute sensible, leur fidélité malgré la distance et le temps : à Frédéric VERGEZ et à Soline DE WARREN, et encore à Hélène JACQUET.

Il y a encore bien sûr un certain nombre d'amis à l'ENS comme à TF1 : À l'ENS, je garde un excellent souvenir des membres les plus atypiques et souriants de l'équipe MC2. Aussi, par ordre chronologique, Olivier ROCHE, Arnaud CARAYOL, Christophe PAPAŽIAN, Nazim FATÈS, Emmanuelle LEBHAR. À TF1, en général toute l'équipe la DNT, et plus particulièrement Anne BIHOUEE, Yves DAVOT, Marivonne ETORE, Agnès GAFFET, Gilles THERY, Nicolas BRAUD, Ghislain HUE, Patrick PELLÉ, Sophie BACZEK.

Hors du cadre de mes institutions hôtes, j'aimerais remercier, certaines personnes avec qui j'ai souvenir d'avoir partagé de bons moments informels, et scientifiques : Valérie BERTHÉ, Olivier BLANC, Julien CASSAIGNE, Christianne FROUGNY, Yann GÉRARD, Anahi GIHARDO, Emmanuel HYON, Damien JAMET, Matthieu LATAPY, Clémence MAGNIEN, Ivan RAPAPORT, Romain RICCIOTI, Jean-Pierre RÉVEILLÈS, Georges VAROUCHAS.

Je sais que j'ai oublié de nombreux amis. Je pense à mes amis du collège, les cybergaiens, les babas et les oulipiens. Qu'ils me le pardonnent.

J'ai encore envie de remercier "presque" tous mes anciens professeurs, et ce depuis la maternelle (merci PHILIPPE, et YVETTE !), et aussi toute la communauté du libre en informatique pour leur travail extraordinaire .

Préambule

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une convention CIFRE^(a) avec TF1 SA.

* * *

Deux sujets scientifiques ont fait l'objet des recherches de cette thèse :

- Les algorithmes de rotations discrètes, leurs propriétés et leur implémentation à moyen terme sur automates cellulaires ;
- La conception de mesures objectives pour l'évaluation de la qualité vidéo viables sans référence, avec un objectif de pérennité.

À l'origine, la Direction des Technologies et des Moyens Internes de TF1, mes directeurs de thèse à l'ENS et moi-même avons opté pour la prolongation des recherches sur les rotations discrètes engagées en laboratoire dans le cadre de l'ENS dès 2002. Le présent mémoire traite de ce sujet.

La formation par la recherche en entreprise a été par ailleurs une ouverture sur un second sujet. Les recherches sur la qualité vidéo se prolongeront ultérieurement dans un stage de recherche postdoctoral à l'université de Chiba, dans le laboratoire de Yoichi MIYAKE.

Les deux sujets ont fait l'objet de plusieurs contributions et publications. Dans ce cadre non standard, seul le premier des deux intitulés sera sujet à une soutenance et à une évaluation académique.

* * *

Bien que dissociés, les deux sujets entretiennent en effet certains liens techniques entre eux. Ils traitent de l'analyse des caractéristiques d'images pixelisées. Cependant, il s'agit en fait de deux types d'images très différents : Le premier traite d'image géométrique, tandis que le second traite d'image couleur, et même de vidéo couleur. Les théories scientifiques relatives à ces deux types d'images diffèrent énormément. Pourtant, l'idée majeure que je soutiens dans la thèse sur la qualité vidéo m'a été inspirée par un problème abstrait de recherche de substitutions dans des images géométriques ! Nous ne sommes pas dans le cadre de deux recherches antagonistes, mais de deux univers très différents dans lequel certaines idées relatives à l'analyse des images, vont pouvoir communément se retrouver.

Les graphes de RAUZY forment un objet mathématique sous-exploité qui est à priori le lien unificateur des deux approches : Ils forment une technique fondée sur l'observation qui conduit à récupérer automatiquement des informations structurelles sur le système symbolique étudié. La déclinaison des techniques type graphe de Rauzy sur des espaces où les couleurs sont nombreuses

^(a)Convention Industrielle de Formation par la REcherche.

nécessite de nombreuses adaptations de la théorie – c'est l'objet de mes recherches en qualité vidéo. Il faut de plus tenir compte des techniques d'apprentissage classiques qui permettent efficacement de simplifier la description d'ensembles complexes et de résoudre de nombreux problèmes de décision. Ces techniques ne permettent pas encore d'établir des liens avec les processus de reconnaissances formels, comme par exemple les automates usuels en théorie des langages et des systèmes.. C'est je crois ce qu'il faut attendre des graphes de Rauzy .

Pour faire un parallèle avec le cas unidimensionnel, les automates formels travaillent sur des alphabets finis, ils correspondent au cœur de la théorie des automates – on en trouve de nombreuses variantes – et on sait qu'un certain nombre de formalismes leur sont équivalents. Si on quitte le cadre formel afin de reconnaître des éléments dans "la vraie vie", les automates formels sont souvent remplacés par des automates probabilistes, qu'on peut assimiler à de modèles markoviens. Les grammaires sont remplacées par des systèmes utilisant de manière hiérarchique de tels automates. C'est par exemple le cas des systèmes de reconnaissance vocale.

Il est donc clair qu'en travaillant simultanément sur deux sujets, certaines techniques observées dans un domaine m'ont été utiles dans d'autres. Bien que rendant deux études a priori dissociées, cette thèse forme un tout où les éléments se répondent.

* * *

Concernant les rotations discrètes et les automates cellulaires, ce sujet est issu d'une problématique appliquée et dédiée à la modélisation. Néanmoins, n'allons pas croire qu'il soit sans lien avec des problématiques plus fondamentales. Partout où cela a été possible, nous nous sommes intéressés à la généralisation de ce que nous annonçons. Ce sujet nous a rapidement amenés à des questions à la frontière de notre connaissance dans les domaines suivants : géométrie discrète, automates cellulaires bien sûr, mais aussi systèmes dynamiques multidimensionnels, combinatoire des mots et des motifs, substitutions. Ces domaines scientifiques doivent tous leur renouveau à l'explosion des mathématiques discrètes du fait de l'informatique. Les rotations discrètes se sont trouvées être une problématique pertinente dans chacun de ces domaines, frolant même parfois l'archétype.

* * *

Les techniques évoluent, il s'agit avant tout d'une thèse d'informatique. Ce qui nous guide c'est la volonté de placer et de manipuler l'information de manière intelligente, et non pas la volonté de connaissance exhaustive de l'édifice des mathématiques. Nous n'avons pas pour prétention de nous coller à la physique.

Pour l'informaticien théoricien et le mathématicien, l'ordinateur est à machine à simuler, c'est-à-dire une machine capable de nous ouvrir une petite fenêtre vers des univers parallèles finis sur lesquels nous pouvons influencer.

Table des matières

Introduction	i
0.1 Ordinateur, physique discrète et isotropie	i
0.2 Géométrie, circularité et nombres entiers	iv
0.3 Le contexte	v
0.3.1 L'isotropie et les cercles dans le discret	vi
0.3.2 Les mauvaises propriétés des rotations discrètes	ix
0.3.3 Vers les rotations discrètes robustes	x
0.3.4 Motivations	xi
0.4 Les questions	xiii
0.5 Le plan	xiii
Éléments préliminaires	1
1.1 Éléments de géométrie discrète	2
1.1.1 Essence philosophique : de \mathbb{Z}^n à $Q^{\mathbb{Z}^n}$	2
1.1.2 Cliché du bestiaire de la géométrie discrète	5
1.1.3 Un petit tour dans les rotations	7
1.1.4 Isotropie, rotations et géométrie discrète	11
1.1.5 Conclusions de la section	12
1.2 Rappels sur les mots et les motifs	13
1.3 Systèmes dynamiques symboliques, extension bidimensionnelle	14
1.3.1 Systèmes dynamiques unidimensionnels	14
1.3.2 Systèmes dynamiques multidimensionnels	19
1.3.3 Conclusion de la section	21
1.4 Conclusions	21
Dynamiques multidimensionnelles des rotations discrètes	23
2.1 Introduction	23
2.2 Définition des configurations	24
2.2.1 Définition de C_α	24

2.2.2	Définition de C'_α	25
2.2.3	Exemples de configurations	27
2.3	Propriétés essentielles des configurations	34
2.3.1	Symétries	34
2.3.2	Caractéristiques des symboles dans C_α	34
2.3.3	Caractéristiques des symboles C'_α	35
2.3.4	Le codage préserve les informations sur la structure des lignes	36
2.3.5	Bijektivité entre configurations	40
2.3.6	Transduction entre configurations	40
2.4	Les systèmes dynamiques multidimensionnels symboliques associés	48
2.4.1	La dynamique de C_α	48
2.4.2	Dynamique de C'_α	50
2.4.3	Définition de $C'_{B,\alpha}$	51
2.4.4	Théorème fondamental pour $C'_{B,\alpha}$	53
2.4.5	Dynamique symbolique des rotations 3-transvections	57
2.4.6	Liens avec les plans discrets	61
2.5	Conclusions du chapitre	61
	Propriétés dynamiques des configurations de rotations	63
3.1	Périodicité et quasipériodicité	63
3.1.1	Rappel de définitions	64
3.1.2	Périodicité des configurations	65
3.1.3	quasipériodicité	66
3.2	Étude de la fréquence des motifs	67
3.2.1	Fréquence des motifs dans C_α	68
3.2.2	Fréquence des motifs dans C'_α	70
3.3	Conclusions du chapitre	72
	Autosimilarité et substitutions	73
4.1	Rappels sur la théorie des substitutions	75
4.1.1	Théorie des substitutions	75
4.2	Substitutions ad hoc	77
4.3	Rappels élémentaires sur les mots sturmiens et les mots de rotations	80
4.3.1	Les mots sturmiens	80
4.3.2	Mots convergents vers les mots sturmiens	81
4.3.3	Les mots de rotations	81
4.4	Décomposition de configurations et substitutions entremêlées	82

4.4.1	Les configurations simplifiées	82
4.4.2	Factorisation des configurations	84
4.4.3	Décomposition des mots en mots de rotations	85
4.4.4	Spécification des mots sturmiens impliqués dans le cas de $\pi/4$	85
4.5	Inférence de substitutions planaires via graphes de Rauzy	87
4.5.1	Définitions de base concernant les graphes de Rauzy	87
4.5.2	Extraction de substitutions dans $C_{\pi/4}$	91
4.5.3	Prologue relatif à l'étude de l'autosimilarité de $C_{\pi/4}$	98
4.5.4	Disposition des cadres pour $\alpha = \pi/4$	102
4.5.5	Comment prouver l'autosimilarité à l'aide des multigraphes ?	103
4.5.6	Autosimilarité par systèmes induits	104
4.6	Conclusions du chapitre	110
	Étude et extension des propriétés de la rotation discrétisée	111
5.1	Caractérisation des angles bijectifs de la rotation discrétisée	112
5.1.1	Multiplicité, points doubles et trous	113
5.1.2	Le cas non pythagoricien	115
5.1.3	Le cas pythagoricien	116
5.1.4	Réduction au problème de la surjectivité	116
5.1.5	Étude structurelle de \mathcal{G}'_{α}	117
5.1.6	Preuve de la réciproque du Théorème d'Andrès-Jacob	118
5.1.7	Variante de preuve pour le Théorème d'Andrès-Jacob	120
5.1.8	Arbres des triples pythagoriciens	121
5.2	Algorithme incrémental pour la rotation discrétisée et transitivité	124
5.2.1	Caractéristiques des configurations rencontrées lors de rotations transitives	124
5.2.2	Les angles charnières	125
5.2.3	L'algorithme incrémental	127
5.2.4	Schéma de l'algorithme	129
5.2.5	Application pour la rotation d'images	130
5.2.6	Analyse de la complexité	130
5.2.7	Implémentation	131
5.2.8	Spécifications supplémentaires	131
5.2.9	Résultats complémentaires concernant les angles charnières	132
5.2.10	Perspectives concernant cet algorithme	135
5.3	Conclusions du chapitre	135

Modélisation sur automates cellulaires	139
6.1 Histoire, formalisme et programmation des automates cellulaires	139
6.1.1 Historique	140
6.1.2 Le champ d'application des automates cellulaires	140
6.1.3 Quelques grandes questions	141
6.1.4 Définition	142
6.1.5 Réalisation de configurations par automates cellulaires	144
6.1.6 Diagramme espace-temps et "configurations asynchrones"	145
6.1.7 Concaténation de réalisations sur automates cellulaires.	146
6.1.8 Cellule mobile	148
6.2 Rotations 3-transvections et automates cellulaires	148
6.2.1 Automates cellulaires à transformations	149
6.2.2 Schéma global de l'algorithme proposé	150
6.2.3 Comment réaliser la figure?	150
6.2.4 Réalisation de la figure sur automates cellulaires	151
6.2.5 Analyse de l'algorithme	152
6.3 Automates cellulaires pour la géométrie discrète	153
6.3.1 Tracé de segments	153
6.3.2 Dessin des droites naïves et standards de pente rationnelle	155
6.3.3 Symétrique d'un point vis-à-vis de l'axe des abscisses/ordonnées	156
6.3.4 $\pi/2$ -rotation d'un point de \mathbb{Z}^2	156
6.3.5 $\pi/2$ -rotation d'une image	156
6.3.6 Cercles discrets sur automates cellulaires	156
6.3.7 Bissectrice d'un angle	156
6.3.8 Calcul d'une transvection	158
6.4 Les autres méthodes sur automates cellulaires	159
6.4.1 Autre expérience : automates cellulaires basés sur des applications locales	159
Conclusions	161
7.1 Recadrage	161
7.1.1 Géométrie discrète et aspects algorithmiques	161
7.1.2 Systèmes dynamiques et substitutions généralisées	162
7.1.3 Sur la modélisation physique et les rotations discrètes	163
7.2 Perspectives et interrogations	163
7.2.1 Interrogations et pistes	163
7.3 Ouverture	165

Annexe	III
Exemple fondamental : translations sur le tore	III
A.1 Des translations sur le tore aux généralisations des mots sturmiens	III
A.1.1 Les fractions continues	IV
A.1.2 Théorème des trois distances	VI
Table d'angles particuliers	XI
Liens entre discrétisation et théorie idéale en géométrie discrète	XIII
Bibliographies, indexes et résumés	XIV
Bibliographie	XIV
Bibliographie personnelle	XXV
Résumé de la thèse en français	XXVII
Résumé de la thèse en anglais	XXIX

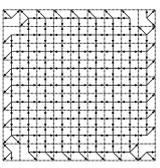
Notations

$[\diamond]$: notation fonctionnelle de l'opérateur de discrétisation usuel (arrondi)
$\{\diamond\}$: notation fonctionnelle du résidu de l'opérateur de discrétisation usuel (arrondi)
$[\diamond]$: notation fonctionnelle de l'opérateur de discrétisation plancher
$\{\diamond\}$: notation fonctionnelle du résidu de l'opérateur de discrétisation plancher
$\#E$: cardinal de l'ensemble E
O, A, B, I, J	: points utilisés dans des constructions géométriques
Δ	: flèches
\mathcal{A}	: ensemble des angles en radians
\mathfrak{A}	: automate cellulaire
α, α'	: angles (supposés en radians, parfois exprimés en tours)
β	: intercept/décalage
C, C', D	: configurations
$D_{\alpha, n}$: ensemble des distances entres des éléments consécutifs de $K_{\alpha, n}$
$\chi_{\alpha}(i)$: plus petit entier supérieur à $q_i(\alpha)$ tel que $\#D_{n, \alpha}$ soit égal à 2
ϵ	: réelle ou entière quantité considérée négligeable au regard du reste
ε	: mot vide
F	: fragment
G	: graphe de Rauzy
\mathcal{G}	: groupe
h	: morphisme
i	: unité imaginaire
l_{α}	: fonction d'étiquetage, décrivant une partition
ϕ_{α}	: morphisme lettre à lettre
L_{α}	: $\mathbb{Z}\mathbf{i}_{\alpha} + \mathbb{Z}\mathbf{j}_{\alpha}$
$\mathcal{L}_{[m, n]}$: ensemble des facteurs de taille $[m, n]$ d'un mot
$\lambda_{1, i}, \lambda_{2, i}, \lambda_{3, i}$: distances du Théorème des trois distances
i, j, k, m, n, p, q	: entiers
$K_{\alpha, n}$: ensemble des n premiers de termes de la suite $\{k\alpha\}_{k \in \mathbb{N}}$
$\mathfrak{K}_{n, \alpha}$: ensembles des cadres de $P_{\alpha, [n, n]}$
\mathbf{i}, \mathbf{j}	: vecteurs unitaires orthogonaux
$\mathbf{i}_{\alpha}, \mathbf{j}_{\alpha}$: vecteurs unitaires orthogonaux tournés de α
r_{α}	: rotation euclidienne
$[r_{\alpha}]$: rotation euclidienne discrétisée

ϖ_α	: rotation 3-transvections
$[\varpi_\alpha]$: rotation 3-transvections discrétisée
\mathbf{m}	: motifs
\mathbb{N}	: entiers
A, B, C, M, N, S	: matrices
$\mathcal{O}(x)$: orbite d'un système dynamique
$O(f)$: ordre complexité minimale d'un algorithme
P	: partition
p, q	: en général, numérateur et dénominateur d'une fraction
$p_i(\alpha), q_i(\alpha)$: numérateur et dénominateur du $i^{\text{ème}}$ convergent de α
\mathbf{p}	: point réel
Q, Q_α	: ensemble d'états, ensemble des états intervenant dans C_α
σ	: substitutions
T	: loi d'évolution d'un système dynamique
$\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$: vecteurs situés dans l'espace de départ
$\mathcal{V}, \mathcal{V}_4$: relation de voisinage, 4-voisinage
w, w', w''	: mots
w_{ST}	: mots sturmiens
w_{ROT}	: mots de rotation
$\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1$: vecteur dans l'espace d'arrivée
x, y	: coordonnées d'un point, supposées réelles si non précisé
x_v	: coordonnée horizontale du vecteur \mathbf{v}
z, z'	: nombre complexe
η	: fréquence des motifs

Note 0.0.0.1 *Les indices sont souvent cause de confusion dans la lecture d'un texte mathématique on ne sait pas toujours si quand on écrit C_A si C dépend d'un paramètre A où si on a indexé C par la lettre A de la même façon qu'on aurait indexé C_0, \dots, C_1 . Pour minimiser les confusions nous essaierons de respecter la convention d'utiliser des lettres minuscules ou grecques pour indiquer les paramètres variables et des lettres majuscules pour dénoter les noms de variables par exemple $z_S, z_D \dots$*

Note 0.0.0.2 *Nous aurons parfois intérêt à travailler avec des nombres complexes plutôt qu'avec des vecteurs. La bijection canonique entre ces deux ensembles est bien connue. Les objets que nous aurons définis via des vecteurs verront leur définition implicitement transposées d'un formalisme à l'autre. On rappelle que les nombres $a + bi$ où a et b sont entiers sont appelés des entiers gaussiens et que leur anneau est noté $\mathbb{Z}[i]$. Ainsi une configuration C est définie de la même façon indifféremment de $\mathbb{Z}[2] \rightarrow Q$ ou de $\mathbb{Z}[i] \rightarrow Q$.*



Introduction

*The current state of knowledge can be summarised thus :
in the beginning there was nothing, which exploded.*
Théorie du "Big Bang" ! par Terry PRATCHETT.

0.1 Ordinateur, physique discrète et isotropie

Pourquoi étudier les rotations discrètes ?

L'ère informatique

Ce début du XXI^e siècle annonce a priori l'éclosion de l'ère *informatique* : le nombre de microprocesseurs sur la planète a largement dépassé le nombre d'humains ; en 2006, chaque nouvel homme naît avec, en moyenne, un milliard de transistors dédiés pour cent milliards de neurones^(a). Nos outils changent, nos mentalités évoluent, la façon dont nous abordons le réel se modifie. Les écrans de la réalité virtuelle font perdre de sa vitesse et de son intérêt au réel. La convergence numérique induit un Big Crunch dans la diversité de nos imaginaires ; étape normalement préliminaire à l'utopie d'un nouvel Eden virtuel.

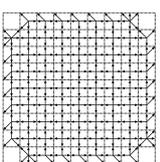
Historiquement, l'ère informatique s'est épanouie avec la démocratisation des ordinateurs de génération 32-bits et de leurs cartes graphiques. Même en ayant eu connaissance de la loi de MOORE^(b), le multimédia pervasif apparu en ce début de millénaire dépasse de loin les prophéties les plus folles imaginées ne serait-ce que dix ans auparavant ; en fait, si la loi de MOORE décrivait l'évolution technique, elle n'imaginait pas l'évolution sociale qui y serait associée. C'est celle-ci qui indique le changement d'ère.

Dans les vingt prochaines années, les prouesses effrénées de l'informatique devraient se poursuivre sensiblement sur la même exponentielle ; l'arrivée de la nouvelle génération d'ordinateurs 64-bits multi-cœurs fonctionnant à base d'indium antimonium^(c) annonce une réalité bien au delà de nos actuelles fictions. En vingt ans, la puissance de calcul serait encore multipliée par dix milles. Dans cette perspective, connaissant l'intensité des efforts de recherches qui sont menés en reconnaissance appliquée au signal et en classification automatique, il ne nous reste plus qu'à espérer

^(a)Les neurones meurent alors que les transistors dans la nature se multiplient régulièrement.

^(b)Loi empirique spécifiant la croissance exponentielle des performances du matériel informatique : "des performances multipliées par dix tous les cinq ans...".

^(c)Successeur annoncé du silicium qui devrait faire son apparition grand public dans la prochaine décennie, son emploi est réputé pour les circuits très haute fréquence. L'annonce faite dans un communiqué daté du 7 décembre 2005 par le constructeur américain Intel spécifie que : "The results of this research reinforce our confidence in being able to continue to follow Moore's Law beyond 2015."



que la prochaine génération d'ordinateurs intègre des algorithmes plus souples, ainsi que davantage d'intelligence dans le traitement des données, avec un place pour certains types d'erreurs^(a).

Cette thèse tente de s'inscrire dans l'évolution de notre regard sur la réalité engendrée par la nouvelle pensée informatique. Du fait même de la nature des objets recherchés : des automates cellulaires, et des analyses menées, on peut affirmer que cette thèse n'aurait pas abouti aux mêmes conclusions vingt ans plus tôt. Ce qui change par rapport aux travaux de la "pré-informatique", c'est d'abord l'approche, ensuite la nature des questions qui admettent des réponses possibles, et finalement les applications envisagées.

Aujourd'hui, on ne cherche plus une formule pour la 143^{ème} décimale de π , ce qui est recherché ce sont les moyens pour faire tourner un objet sans utiliser π , cosinus ou sinus. Le nombre π , les fonctions cosinus ou sinus sont certes de puissants outils algébriques, mais ils n'ont rien à voir avec qu'il se passe effectivement dans un ordinateur.

Un embryon de physique discrète peut-il naître ?

L'informatique et sa progression ont modifié nos schémas de réflexions. Cela se manifeste partout : On constate, par exemple, chez chacun une dérive vers une description plus procéduralisée du réel : Chacun informatise son mode de pensée ; conçoit ses actions comme un programme impératif ; les enfants se représentent les couleurs en additif, c'est du rouge, du vert et du bleu sur un écran à cristaux liquides... Les lois de l'informatique se sont démocratisées, et de nombreux étudiants ne sont plus surpris d'apprendre que certains problèmes de logique du XX^e siècle étaient dus à des problèmes de typage.

Ce changement de conception du réel affecte notre perception dans sa globalité, à commencer par celle de la Nature et de la physique.

Ce sont les travaux d'Edward FREDKIN, de Norman MARGOLUS et de Tommaso TOFFOLI qui inaugurerent les fondements de la *physique discrète* (*digital physics*), qu'on redéfinira temporairement comme étant une physique pour et par les informaticiens ; son credo principal : *notre univers serait modélisable par automates cellulaires*. Ces idées se sont retrouvées propulsées à l'avant de la scène par la compilation ultramédiatisée^(b) de Stephen WOLFRAM [WOL02].

Aujourd'hui, une communauté de chercheurs soutient ce nouveau type de physique qui aurait les trois caractéristiques suivantes :

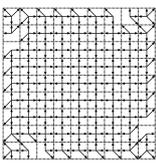
- primo, la réalité est un ordinateur,
- secundo, tout ce qui se passe dans la physique est exprimable par calculs locaux,
- tertio, toutes les quantités impliquées dans ces calculs locaux sont discrètes^(c).

De tels préceptes philosophiques méritent quelques commentaires : La première idée, le fait de considérer que la réalité puisse être un ordinateur, n'est pas véritablement nouvelle. Si les lois physiques obéissent aux mathématiques, les lois physiques font des calculs. Un ordinateur est une "machine" qui fait des calculs. Dire que la réalité se calcule, revient à concevoir son fonctionnement comme possiblement issu d'un ordinateur. Pour qui accepte les positions philosophiques du

^(a) On oublie trop souvent qu'il ne peut y avoir d'intelligence artificielle sans bêtise artificielle, du moins dans la mesure où il n'y a pas d'unicité de la vérité. Travailler le côté pas sérieux des ordinateurs semble une solution possible, leurs puces auraient ainsi le droit à un peu d'amusement.

^(b) Au grand damne de certaines chapelles traditionnelles sous l'impulsion de la médiatisation de ces idées, on peut imaginer que nombreux chercheurs vont s'aventurer dans cet *El Dorado* scientifique, encore en friche – mais qui normalement par la suite le sera moins.

^(c) Pour les acousmaticiens, comprendre qu'on parle de calculs à base de nombres entiers se rapportant uniquement à ce qui se passe en une petite zone de l'espace.



réductionnisme à la physique, c'est-à-dire du matérialisme, ce genre d'affirmation ne pose pas de problème.

La deuxième idée plutôt acquise qu'implique la physique discrète, c'est le fait que les calculs soient locaux. En physique, cette idée se retranscrit à partir d'une notion de cône de lumière. On ne voit les causes et les effets que de ce qui est près de nous. Ce qui se passe actuellement à des milliards d'années-lumière de nous prendra des milliards d'années-lumière à avoir une influence sur nous ; cela définit la notion de localité dans notre entendement de l'espace.

Le troisième point, véritablement novateur, c'est de dire que l'espace est discret, et qu'en un point donné de l'espace on ne peut stocker une quantité finie d'informations. On réaffirme maintenant que le réel ne serait composé qu'à partir de quantité entière. A priori cela pourrait simplifier les choses, c'est tout le contraire : les mathématiques discrètes sont plus irrégulières que leurs homologues continues. Si en physique on préfère le continu, c'est parce que l'algèbre permet d'inventer des solutions, et de s'extraire des contraintes induites par la matérialité des atomes. Dans le discret, il faut tenir compte de la véritable nature des objets. On ne peut pas les approximer simplement. Il faut tenir compte de leur complexité.

Une théorie encore en élaboration

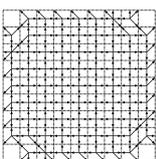
La jeune théorie de la physique discrète nage à contre-courant de la physique traditionnelle du XX^e siècle. Pour prétendre à une utilité en physique, elle devra être à même de proposer des modèles plus exacts que ceux obtenus à l'aide de modèles continus. Il y a de cela quarante ans la physique discrète n'aurait pas été possible :

- insuffisance de la théorie mathématique supportant la théorie : les mathématiques discrètes ne permettaient pas de faire de l'algèbre simplement ;
- difficulté d'exploitation : les très nombreux calculs nécessaires dans la modélisation par automates cellulaires s'avéraient souvent sans incidence sur le résultat final ; à la main, les nombreux calculs comportaient souvent des erreurs ;
- le modèle semblait a priori inadapté dans le fond : N'étant pas isotrope, le modèle était incapable de rendre compte de l'invariance sous rotation des lois de la physique.

Cela dit, aucune observation ne pourra jamais complètement discrétiser l'idée que la réalité puisse être discrète. La réalité est une énigme, face à laquelle nous ne pouvons que proposer des modèles qui semblent la décrire.

Aujourd'hui, avec la puissance de calculs des ordinateurs, au contraire, la physique discrète est en phase de devenir une théorie acceptable :

- les mathématiques discrètes sont en renaissance ;
- les difficultés d'exploitation du passé ont disparu puisque l'ordinateur se charge des calculs, le fait d'avoir des modèles massivement numériques permet de simuler des comportements très complexes qu'un modèle continu aurait bien été en peine de décrire ; la complexité initiale d'une tel modèle qui aurait été son handicap, fait désormais sa richesse ;
- le modèle pourrait correspondre à des hypothèses de la physique : L'existence des constantes de PLANCK pourrait conduire à une discrétisation de l'univers, et l'existence d'une vitesse maximale de transfert de l'information comme la vitesse de la lumière pourrait rappeler les phénomènes de cône de lumière ;
- la physique discrète autorise des simulations physiques sans approximation, c'est-à-dire sans erreur de calcul. Le fait de travailler sur un espace discret permet un stockage en mémoire efficace.



La physique discrète réaffirme la primauté de la théorie de l'information (au sens de l'informatique) sur la physique.

Cependant la physique discrète est jeune, et, aujourd'hui la théorie est encore loin d'être applicable pour la la modélisation du réel.

Actuellement, la physique discrète serait donc plutôt une branche de ce qui s'appellerait la "physique inverse". La *physique inverse* serait un exercice mathématique qui consisterait à essayer de retrouver tous les moyens algorithmiques "simples" permettant de réaliser une opération observée dans la réalité. Le but de la physique inverse serait de proposer des primitives pour la physique. L'idée de la physique inverse pourrait se résumer ainsi : *A l'opposé d'une démarche qui débute par l'observation du macro et qui cherche ad hoc un modèle (micro) pour le décrire, il faut simuler du micro pour comprendre quels sont les bons modèles (macro) possibles.* La physique inverse ne chercherait pas à recoller exactement aux objets connus en physique, mais simplement à donner des interprétations à des phénomènes physiques connus.

0.2 Géométrie, circularité et nombres entiers

La physique discrète ne pourra exister qu'en s'appuyant sur une théorie géométrique. La théorie de la *géométrie discrète* qui étudie les propriétés des ensembles de points sur la grille entière est en développement depuis plusieurs décennies. Les propositions de la géométrie discrète spécifient des résultats à l'échelle "microscopiques" de telle manière à ce qu'elles soient compatibles avec celles de la géométrie euclidienne qui traite d'observations "macroscopiques".

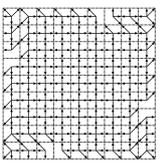
Il n'existera de bonnes physiques discrètes qu'une fois bien compris les principes de l'isotropie. L'isotropie est le principe constitutif de la physique qui établit qu'une expérience doit se dérouler de la même façon quelle que soit son orientation dans l'espace. Un des points sur lequel la physique discrète est attaquée est son absence a priori d'isotropie. Ayant lieu sur automates cellulaires, la physique discrète implique un espace dans lequel tous les points sont séparés les uns des autres. Un représentant de ce type d'espace est l'ensemble des points à coordonnées entières, \mathbb{Z}^n , autrement dit l'ensemble des points d'intersection d'une grille. Or, sur une grille les expériences ne se produisent pas de la même façon en fonction de la direction.

C'est cette difficulté qui nous a incité à aborder notre sujet :

Comment faire tourner par automates cellulaires un objet sur la grille \mathbb{Z}^2 ?

Concilier la grille entière avec les cercles, ou les mouvements circulaires est une problématique classique de l'histoire des mathématiques. Dès l'Antiquité, nombres entiers et cercles semblaient voués à une difficile confrontation : la secte pythagoricienne a explosé certainement de n'avoir une meilleure compréhension de π ; les recherches sur la quadrature du cercle illustrèrent aussi la délicatesse de ce mélange, l'impossibilité de cette construction résultant de des questions algébriques. La volonté de faire du rapport entre deux quantités le diamètre et la circonférence a donné naissance à des concepts qui furent d'abord formels.

Dans une pensée informatique, le cercle est un résultat algorithmique, il est issu d'une construction algébrique à partir des briques élémentaires des mathématiques. Le nombre π n'existe pas sur la grille car π n'est pas une fraction. À partir d'une géométrie discrète, pour donner un sens à π , il faut considérer l'objet limite résultant d'un processus géométrique convergent vers un cercle euclidien.



Le discret et le continu dans les mathématiques

Quel que soit l'ouvrage d'histoire des mathématiques considéré^(a), on trouvera toujours aux racines des mathématiques deux disciplines a priori antagonistes : les règles de calcul de l'arithmétique entière, et la géométrie.

On trouve donc d'une part l'arithmétique entière, les problèmes *diophantiens*, des algorithmes, et des procédés logiques formels, tout un ensemble de recettes qui relèvent du langage verbal, et d'autre part, des problèmes géométriques dont l'intuition est constituée par des figures *continues* et idéales. L'arithmétique étant astreinte au verbe et à ses limites apparaît antithétique avec le domaine géométrique qui pour sa part suggère les possibilités transcendantes de l'imaginaire visuel. Ainsi, à l'origine même des mathématiques, il y aurait une dualité composée de discret et de continu.

L'expérience quotidienne de la Nature, nous amène à constater que la réalité tout en semblant se plier aux mathématiques, n'est pas composée uniquement de trivialisations mathématiques. Par exemple, la distance entre deux points ne coïncide pas avec la norme 1, la naïve somme de la distance horizontale et de la distance verticale.

La norme euclidienne consacrée par le célèbre théorème de PYTHAGORE^(b) invite à développer des outils pour aller au delà de ce que peut accepter naïvement une géométrie en nombres entiers : La diagonale d'un carré unitaire mesure une quantité irrationnelle " $\sqrt{2}$ ", et le rapport entre le périmètre et le diamètre d'un cercle est " π ".

Le cercle et la découverte des nombres irrationnels

Historiquement, l'étude des liens entre circularité et arithmétique a permis de considérer et de comprendre des concepts comme les racines carrées^(c) pour $\sqrt{2}$ ou le développement des notions de limites et de séries pour π . Les efforts pour clarifier la nature de ces nombres ont pris des siècles. Ils se sont perpétués jusqu'à ce jour : la formalisation du corps des réels auquel π appartient ne date que du XIX^e siècle. Elle fut réalisée via les coupures de DEDEKIND, et plus tard via des suites de CAUCHY. Les meilleurs algorithmes pour le calcul de π sont fondés sur les algorithmes de GOSPER apparus en 1972 [BGS72]. L'histoire du nombre π (voir [DEL97]) s'interprète comme une aventure ayant pour objectif de comprendre la raison de l'émergence d'un nombre ayant une telle complexité de KOLMOGOROV^(d).

0.3 Le contexte

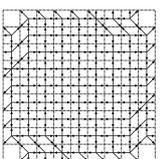
Dans la lignée de ces recherches, nous nous intéressons aux transformations qui opèrent dans le plan sur les points à coordonnées entières, les éléments de l'ensemble \mathbb{Z}^2 , et qui approximent la rotation euclidienne. Nous aborderons donc des algorithmes qui sont employés pour faire tourner

^(a)on pourra prendre par exemple celui de Ferdinand HOEFER, ou un cours de mathématiques comme celui de Nicolas BOURBAKI, ou alors encore les plus récents ouvrages de vulgarisation d'histoire des mathématiques de Denis GUEDI, etc...

^(b)La véritable démonstration du théorème de PYTHAGORE consiste à montrer que dans un espace euclidien équipé de la norme 2, tous les repères orthonormés sont équivalents pour l'évaluation de la norme 2 d'un vecteur.

^(c)C'est au mathématicien allemand du XVII^e siècle Christoff RUDOLFF que l'on doit le symbole \sqrt{x} – et ainsi c'est à ce mathématicien que nous devons l'aisance conceptuelle qu'apporte un mot ou un symbole dans le traitement d'un problème. L'existence d'un symbole traduit le fait qu'on accepte mieux que \sqrt{x} puisse être un nombre.

^(d)Pour les non-spécialistes, informellement, la complexité de KOLMOGOROV mesure le temps minimal qu'il faut pour expliquer précisément un concept mathématique à partir de rien à un enfant, un peu plus formellement c'est à une constante près la taille du plus court programme permettant à un ordinateur de réaliser une sortie w .



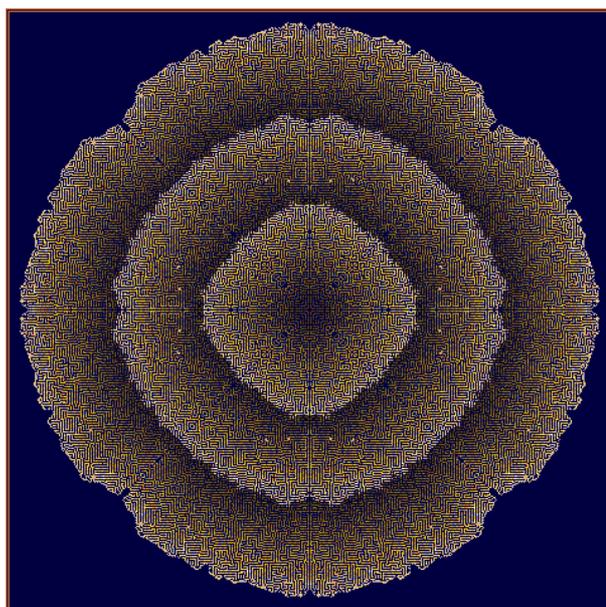


Fig. 0.1 – Les cercles de WOLFRAM ne sont pas isotropes.

une image pixelisée sur les ordinateurs, en nous intéressant aux aspects purement géométriques. Nous ne discuterons pas des techniques d'image couleur, comme l'interpolation, puisque notre objectif est de proposer une technique de rotation pour automates cellulaires.

Note 0.3.0.3 *Pour certains mathématiciens, le terme des rotations discrètes évoque le groupe de quatre rotations qui laissent \mathbb{Z}^2 globalement invariant. Ce groupe a une structure triviale et on peut estimer qu'il n'a pas des propriétés compatibles avec celles de la rotation euclidienne : Il limite les rotations possibles à une famille d'angles finie.*

0.3.1 L'isotropie et les cercles dans le discret

Le problème de la modélisation de l'isotropie dans les modèles discrets^(a) est clairement énoncé par certains auteurs : au chapitre XII du livre de Andrew ILACHINSKY sur les automates cellulaires [ILA01], par Stephen WOLFRAM quand il mentionne un automate cellulaire qu'il pensait être "isotrope", ou encore Edward FREDKIN dans sa présentation de la physique discrète. Concernant l'automate de WOLFRAM sensé calculer des ces cercles, David GRIFFEATH fera remarquer que, modulo un choix incorrect de la configuration initiale, l'automate cellulaire proposé ne semble visiblement pas être isotrope (voir Figure 0.1).

Laure TOUGNE explique dans sa thèse un procédé algorithmique pour réaliser des cercles sur automates cellulaires. L'approche bien qu'exacte est très "algorithmique", ceci qui lui donne un aspect instable et peu robuste. L'algorithme semble improbable^(b) en modélisation physique.

^(a)Trouver un ensemble de règles simples qui adjoint à la définition d'un système dynamique, par exemple un automate cellulaire, rend le comportement global isotrope : on remarquera que cela impliquera certainement de savoir faire des cercles et des rotations !

^(b)Au sens où son algorithme puisqu'il est relativement long à décrire, le mot qui décrit l'algorithme a une probabilité moindre d'apparaître dans un programme au hasard. C'est une justification informatique du rasoir d'OCKHAM. Ceci s'applique aussi à des règles de transitions pour un automate cellulaire tirées de manière aléatoire.

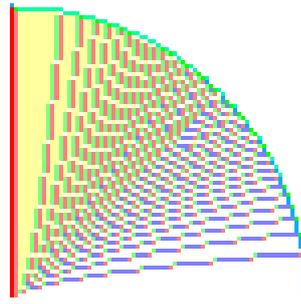
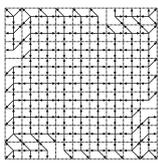


Fig. 0.2 – Le quadrant supérieur droit d’un cercle de TOUGNE réalisé par automate cellulaire.

On peut expliquer que la modélisation exacte de la distance 2 soit non triviale, en expliquant que ce n’est pas une distance “locale”. En effet, comme le montre Edouard THIEL dans [THI94], la distance 2 n’est pas une distance de chanfrein, c’est-à-dire qu’elle n’est pas une distance définie localement à l’aide d’un masque de distance.

La propagation d’ondes isotropiques dans les modèles de gaz HPP/FHP

Les modèles FHP et HPP modélisent les interactions moléculaires dans les gaz sur des automates cellulaires. Historiquement, il s’agit des premiers automates cellulaires sur lesquels on a observé une onde isotropique se propager.

Le modèle HPP est baptisé selon ses inventeurs Jean HARDY, de Olivier DE PAZZIS et Yves POMEAU, en 1973. Il fut inventé dans l’optique d’étudier des problèmes d’ergodicité. Le modèle HPP repose sur un jeu de règles très simples de collisions de particules. FHP est une version améliorée^(a) Il fut inventé par Uriel FRISCH, Brosl HASLACHER et Yves POMEAU dans le milieu des années 1980.

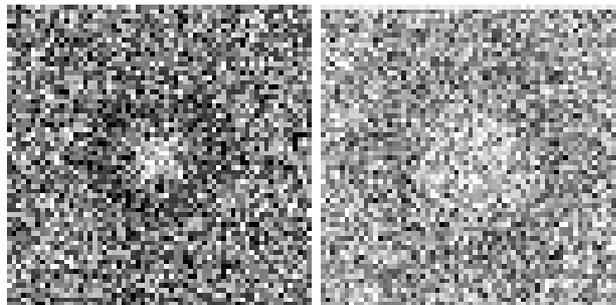
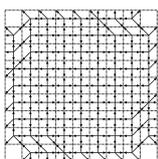


Fig. 0.3 – La propagation d’ondes isotropiques dans les modèles HPP & FHP. En créant un vide, malgré l’anisotropie du réseau sous-jacent, un phénomène ondulatoire isotrope apparaît spontanément.

En créant un vide dans le gaz, une onde de déflagration se propage à travers le gaz. Dans ces modèles, l’onde tend à se propager de manière circulaire.

L’argument qui relie forme circulaire et réseaux discrets est en fait lié à des lois sur les probabilités.

^(a)vis-à-vis de l’isotropie intrinsèque du réseau ce qui plaît plus à la communauté des physiciens, mais ne change rien au résultat qui nous intéresse ici.



Une marche aléatoire dans l'échiquier de Manhattan conduit une loi gaussienne bidimensionnelle. Les lois gaussiennes ont des courbes de niveaux qui correspondent avec la distance euclidienne :

$$(2\pi)^{-d/2} |M_V|^{-\frac{1}{2}} \exp^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T M_V^{-1}(x-\mu)}$$

où σ est une matrice symétrique semi-définie positive et μ le centre de la gaussienne. Or si $M_V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on retrouve la norme 2, et on obtient une distribution :

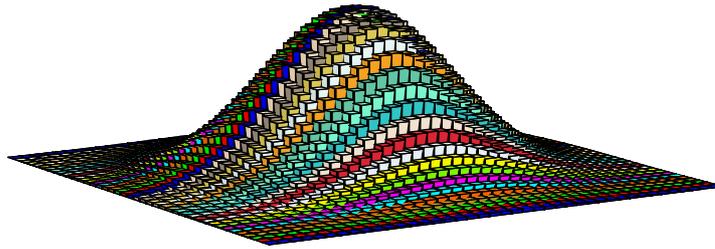


Fig. 0.4 – Représentation échantillonnée d'une distribution gaussienne bidimensionnelle par des barres.

Dans les modèles FHP et HPP, l'isotropie apparaît sous forme d'une onde et non pas d'un état caractéristique des cellules.

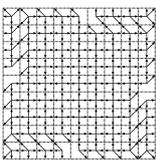
Cercles de Propp

Toujours dans la veine "automates cellulaires", James PROPP s'est basé sur le modèle IDLA^(a) ; IDLA est un modèle continu et probabiliste dans lequel des particules insufflées à partir d'un point de l'espace se déplacent en procédant à l'intérieur d'un solide. Ce solide résulte en fait de l'agrégation des particules qui ont été précédemment expulsées dans le processus. Une marche aléatoire a alors lieu dans le solide. Cette marche s'arrête dès que la particule rencontre un point de l'espace qui n'appartient plus au solide. A ce moment la particule se fige, et s'agrège au reste du solide. Si on s'intéresse à la forme limite générée le plus souvent par ce modèle, on constate que la forme résultante est (presque toujours) étonnamment proche de celle d'un cercle.

Pour obtenir une méthode simple et non randomisée, James PROPP a proposé de partir d'un modèle randomisé simple, IDLA, pour le "dérandomiser".

Les cercles de PROPP sont construits par un automate cellulaire, dont l'état est composé d'une girouette optionnelle, et d'un visiteur. A chaque étape où on aura constaté qu'il n'y a plus de visiteur dans l'espace du "cercle de Propp", on fera apparaître un visiteur à l'origine. Puis à chaque étape, le visiteur suivra le chemin indiqué par les girouettes qui forment le cercle de PROPP, et à chaque étape, le visiteur tourne la girouette rencontrée d'un quart de tour (procédant ainsi un peu à la manière d'une fourmi de Chris LANGTON). Dès que le visiteur rencontre une case sans girouette, il s'installe et pose une girouette dans une direction fixe (par exemple le Nord). Si on note les emplacements auxquels les visiteurs se sont installés et l'état des girouettes après n étapes, on obtient la Figure 0.5. On peut remarquer qu'elle se rapproche étonnamment d'un cercle. Il est possible de trouver une introduction plus détaillée sur les cercles de PROPP dans [KLE05].

^(a)Internal Diffusion Limited Aggregation.



En ce qui concerne le modèle IDLA, en 1992, Gregory F. LAWLER, Maury BRAMSON et David GRIFFEATH ont montré la convergence du modèle stochastique vers une forme de boule circulaire. Le même auteur a aussi montré que la différence de rayon entre la plus petite boule euclidienne englobante et la plus grande boule euclidienne incluse était bornée par $O(n^{1/6})$. Expérimentalement Chris MOORE et Jonathan MACHTA ont observé que cette différence était en fait bien moindre et avait plutôt tendance à varier de manière logarithmique. En ce qui concerne, le modèle agrégatif de James PROPP : Lionel LEVINE et Yuval PÉRÈS ont réussi à démontrer que le modèle convergait vers une forme circulaire, au sens où la différence symétrique entre le modèle circulaire et la forme actuelle générée par n particules avait une cardinalité de $O(n^{5/6})$. Michael KLEBER a observé qu'après plusieurs millions de visiteurs, la différence de rayon entre la boule englobante et la boule incluse ne dépassait pas 2.

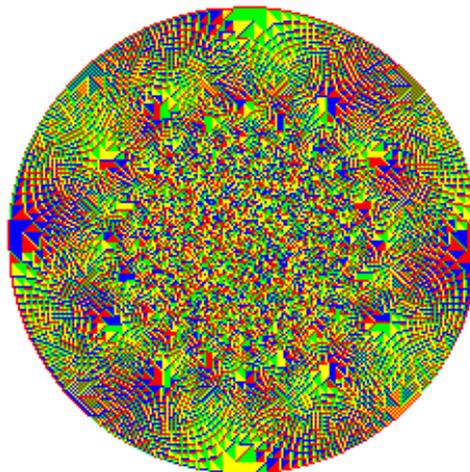


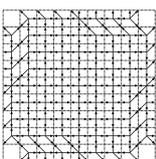
Fig. 0.5 – Configuration correspondant à un cercle de PROPP indiquant pour les 40000 girouettes correspondant à des visiteurs installés, et coloriés en fonction de leur orientation respective. On observe que bien qu'il s'agisse d'un algorithme probabiliste dérandomisé, le résultat reste très isotrope

0.3.2 Les mauvaises propriétés des rotations discrètes

Cette section explique pourquoi les algorithmes de rotations usuels déçoivent dans le discret.

Commençons par une anecdote : *une équipe de physiciens implémenta un programme de simulation du système solaire. Pour des raisons spécifiques, ce logiciel devait être implémenté en précision fixe. Lors des premiers tests, ses concepteurs eurent la surprise de voir que le programme annonçait une collision fatale entre la terre et le soleil dans les 10 prochaines années. Ce résultat était bien sûr erroné ; il était dû à un "bug", dû à la composition d'erreurs d'arrondis durant la rotation des planètes sur leur orbite. Le pas d'intégration du système était trop sensible à la discrétisation du système. Cela fait des décennies qu'il est bien connu qu'il faut éviter de composer des rotations en informatique. L'accumulation des petites erreurs peut conduire à un résultat loin de celui attendu.*

Les opérations de rotations discrètes n'ont en général pas les propriétés de leurs homologues continues :



- elles ne sont pas bijectives ;
donc elles perdent de l'information et détériorent les objets qu'elles manipulent ;
- elles ne sont pas transitives ;
donc, elles ne respectent pas la formule de CHASLES ;
- ou alors elles ne permettent pas de faire des angles arbitrairement petits sur une boule de taille finie.

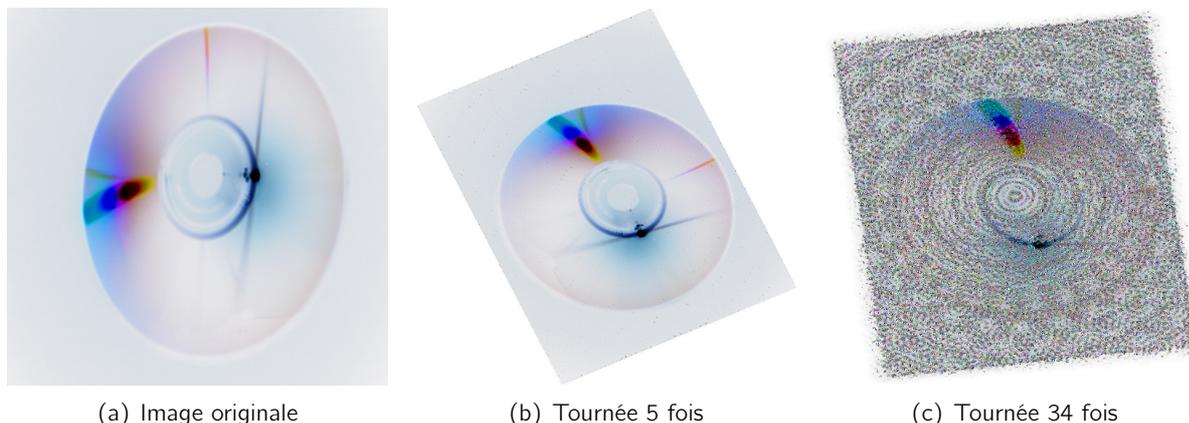


Fig. 0.6 – Exemples d'altérations provoquées par l'itération de l'application de rotations d'un angle fixe avec interpolation obtenue en employant un logiciel grand public.

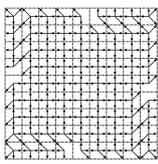
L'itération de rotations discrétisées conduit à des motifs particuliers qui ont été observés par d'un côté David JEFFERIES et Jonathon DEANE dans [JD00] et de l'autre par Éric ANDRÈS dans [AND92]. Une analyse plus en profondeur a été menée pour des angles particuliers par une série d'auteurs qui se sont intéressés à la rotation discrète comme base d'action pour un système dynamique que l'on itérerait : $(\mathbb{Z}^2, [r_\alpha])$. Les travaux de Franco VIVALDI [VV03] font particulièrement autorité en la matière. En France, Guillaume POGGIASPOLLA [POG03], a fait sa thèse sur des sujets connexes. Notons encore qu'Arek GOETZ [GOE05] s'intéresse pour sa part à des systèmes formés par la composition de plusieurs rotations (de centres différents). Finalement, les récents travaux de Wolfgang STEINER et de Shigeki AKIYAMA semblent prometteurs.

0.3.3 Vers les rotations discrètes robustes

Du fait des remarques précédentes, on trouve dans de nombreux articles, une volonté d'améliorer les propriétés des rotations, en particulier en obtenant des "rotations robustes" : *"Manipulation and transformation of the discrete volume are difficult to achieve without degrading the image quality or losing some information. Rotation of rasters by angles other than 90 degrees is especially problematic since a sequence of consecutive rotations will distort the image."* (Aries KAUFMAN dans un cours donné au SigGraph'99 [KAU99]).

La plupart des articles mentionnés ici expriment leur souhait d'obtenir des rotations sur les espaces discrets qui aient des propriétés plus proches de la rotation euclidienne : [CDR92], [OHA94], [HP98], [HER85], [SPS04]... Des auteurs nombreux se sont intéressés au sujet, ce qui permet d'affirmer qu'un besoin existe.

Klaus VOSS dans son ouvrage de référence [VOS93] mentionne brièvement les rotations pythagoriciennes (en expliquant qu'elles sont périodiques) ainsi que les rotations 3-transvections, mais cette fois sans en dire vraiment davantage. Carl WEIMAN [WEI76] est mentionné comme étant



le plus ancien algorithme informatique basé sur une rotation 3-transvections. Daniel GREENE et Foong Frances YAO [GY86] semblent être les références pour les rotations pythagoriciennes telles que celles présentées dans [VOS93]. Les rotations 3-transvections sont aussi employées pour faire des rotations dans le domaine harmonique comme en témoigne l'ouvrage [PEY04].

Pareillement, on peut citer, John CANNY, Bruce R. DONALD et Eugene K. RESSIER [CDR92], Michel HÉNON et Jean-Marc PETIT [HP98], Jean-Paul BLANC [BLA93] qui ont soumis des travaux sur la robustesse à la composition d'erreurs de rotation.

Dans la suite, les motifs qui nous avons observés, rappellent parfois ceux qu'on peut trouver dans les travaux de Itzhak AMIDROR [AMI00], il y a des liens techniques entre notre sujet et les moirés, que l'on comprendra peut-être mieux en consultant les travaux Victor ΟΣΤΡΟΜΟΥΚΗΟΝ [OHA94]. Ce dernier a travaillé sur des aspects très similaires à certains points exposés : liens entre pythagoricien, propriétés des rotations et bijectivité.

Tommaso TOFFOLI a déjà travaillé sur 3 rotations transvections [TOF97]. Notons encore les articles de David GRIFFEATH qui discutent des processus de morphogénèse [GG98].

Du fait de la similarité avec la méthode de génération multi-grille de Nicolaas G. DE BRUIJN, les configurations que nous allons étudier se rapprochent des quasi-cristaux. Il est donc opportun de jeter un œil aux ouvrages [SEN95] et [PAT98]. Cependant ici, le plus souvent on est face à des systèmes de dimension 1.

Pour terminer notre table des gens qui tournent discrètement, une autre communauté à s'être intéressée à la problématique des rotations discrètes est celle du watermarking : le problème de la robustesse des méthodes de watermarking sous l'action des rotations discrètes est un problème difficile. Sa mauvaise gestion par les outils usuels de traitement du signal est à l'origine de nombreuses discussions.

Globalement, la thématique des opérations de rotations discrètes a été abordée par de nombreux auteurs, parfois prestigieux, cependant il s'agit souvent d'un détour dans un parcours plus vaste, et peu de gros ouvrages comme la thèse d'Éric ANDRÈS ou cette thèse leurs sont pleinement consacrés.

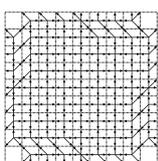
Définition annexe

0.3.4 Motivations

Nos motivations sont plurielles. Afin de pouvoir mieux justifier l'orientation de la démarche suivie, voici l'énumération de ces motivations.

Motivation 1

De nombreux auteurs déclarent que les automates cellulaires forment un bon modèle pour modéliser une quantité de phénomènes physiques et biologiques. On trouvera des exemples de telles modélisations dans [WOL02]. Or, ces deux domaines sont avant tout basés sur l'isotropie du réel. Les automates cellulaires sur la grille \mathbb{Z}^2 ne sont en général pas isotropes ! Cela risque d'induire des phénomènes radicalement différents. Plus généralement, toutes les problématiques liées à la modélisation du réel via sa numérisation sont susceptibles d'être impactées par des problèmes liés aux rotations discrètes.



Motivation 2

Le fait de disposer d'un automate cellulaire capable d'effectuer des rotations pourrait conduire à l'implémentation de FPGA^(a) effectuant des rotations. Et si la théorie le permet, ceux-ci seront plus rapides pour calculer les rotations d'images que les processeurs graphiques actuels. De ce fait, nous voyons une première application industrielle d'une telle recherche. De même une implémentation à base de nanotechnologies de tels automates cellulaires pourrait servir de fondement à la réalisation de nanomoteurs à rotations discrètes sur ce principe.

Motivation 3

Les rotations discrètes sont liées aux phénomènes induits par la rotation d'une grille sur une autre grille. Leur analyse locale fait partie des sujets contemporains en systèmes dynamiques symboliques.

De plus, la mise en relation des phénomènes de rotations peut expliquer la formation de quasi-cristaux dans certains processus physiques.

Motivation 4

Le domaine de la géométrie discrète aspire à la fondation d'une théorie de la géométrie sur les espaces discrets consistante avec la géométrie euclidienne. Si les algorithmes relatifs aux figures géométriques semblent aujourd'hui bien développés, la théorie manque de consistance entre les opérations applicables et les définitions données. Un effort doit être mené conjointement sur la définition des algorithmes et des figures afin de pouvoir obtenir une théorie/des théories applicables où l'on aurait par exemple la clôture de l'ensemble des droites discrètes par une application finie d'opérations de rotations discrètes – pour l'instant ce n'est pas le cas.

Motivation 5

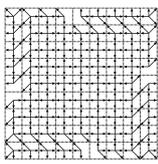
Étant donné un système complexe, tel un automate cellulaire, dont on connaît la règle d'évolution globale, on souhaite trouver la règle d'évolution locale (ou réciproquement la règle d'évolution globale à partir de la règle d'évolution locale). Ce problème de transposition des caractéristiques de la description des propriétés globales vers celle des propriétés locales est l'aporie de la motivation scientifique de la théorie des automates cellulaires.

Le phénomène de rotation discrète est un phénomène très bien décrit mathématiquement ; le fait de souhaiter modéliser une rotation sur automate cellulaire nous permet de voir différentes techniques utiles pour la modélisation de phénomènes physiques sur automates cellulaires.

Motivation 6

En 1899, Max PLANCK définit la constante de PLANCK : $h \approx 6.6260693 \times 10^{-34} J.s$ une unité de travail énergétique présente dans tout échange énergétique physique un nombre entier de fois. Ainsi, notre perception du monde se transpose d'une théorie physique continue vers une théorie physique avec une part importante discrète. Par la suite, Max PLANCK a décrit un jeu de constantes : distance de PLANCK, temps de PLANCK. Celles-ci conditionneraient tout déplacement spatio-temporel dans notre univers et feraient ainsi de ce dernier un espace discret, qui s'écoule en temps discret. À notre connaissance, PLANCK n'aurait jamais précisé les conséquences de celles-ci sur la topologie de

^(a)Field Programmable Gate Array : type de circuit imprimé à architecture reprogrammable permettant d'implémenter du parallélisme massif.



l'univers, en particulier au regard de l'isotropie, mais une croyance totale en ces constantes nous amène indubitablement à l'existence d'un graphe de CAYLEY sous-jacent à la topologie de l'Univers.

Les physiciens considèrent que ces constantes sont suffisamment petites pour être négligées. De manière générale, ils ont une préférence pour l'emploi des outils mathématiques continus. Si les constantes de PLANCK s'avèrent avoir une réalité tangible, la rotation d'un corps physique ne peut être idéale : il se pose alors la question de savoir quels sont les principes de la physique qui sont exacts au niveau numérique et quels sont les principes de la physique qui sont approximatifs.

Avant même toute confrontation entre un modèle et la réalité, on peut se questionner sur la consistance mathématique du modèle mathématique.

Le fait d'aborder la thématique des rotations discrètes sur automates cellulaires se veut être un effort pour aborder un pan de cette question.

0.4 Les questions

En résumé, au regard de ces évolutions

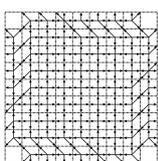
- Quelle est la place des rotations discrètes dans la géométrie discrète ?
- Quels sont les types de rotations déjà connues ?
- Quels sont les modèles sur espaces discrets adaptés à la modélisation de rotations discrètes qui aient des propriétés concordantes avec notre observation macroscopique de la réalité ?
- Que se passe-t-il exactement lors du processus de rotation ?
- Existe-t-il un cadre formel qui tout en relevant du discret localement puisse expliquer l'isotropie globale ?
- Existe-t-il des automates cellulaires transformant des configurations selon des rotations discrètes ? Est-ce possible en temps réel ?
- Comment arriver à coder une information réelle comme un angle dans une configuration ? Comment y parvenir de telle manière à ce que la complexité en espace ne dépasse pas la taille de l'objet que l'on souhaite faire tourner ?
- Comment relier cette question à celle de la rotation itérée ?

0.5 Le plan

Pour résumer, notre objectif à travers cette thèse est d'aborder conjointement la question des rotations pour les espaces discret, l'analyse des propriétés de ces rotations et leur implémentation sur automates cellulaires.

Dans cette étude, la non-préexistence de rotation ayant des propriétés intéressantes pour la modélisation sur automates cellulaires nous a contraints dans un premier temps à nous pencher davantage sur les questions relatives aux rotations discrètes. En effet, les rotations sur les espaces discrets, malgré les quelques travaux que nous avons cités, et malgré leur position centrale vis-à-vis de la théorie des rotations discrètes. Nous pouvions d'ores et déjà répondre que tout n'était pas prêt pour concevoir une physique discrète basée sur des rotations discrètes. De ce fait, ces rotations discrètes méritaient bien encore quelques études du goût de celle que nous allons mener ici.

Au Chapitre 1, c'est un panorama où se définit le cadre formel de la thèse. Dans un premier temps, il situe notre positionnement vis-à-vis de la théorie de la géométrie discrète. C'est l'occasion de revoir les fondements de la géométrie discrète, de donner différentes définitions de rotations, de montrer que toutes les définitions ne sont pas nécessairement acceptables. Dans un second temps, il traite des systèmes dynamiques sous trois aspects particuliers :



- la généralisation *multidimensionnelle* de la notion de système dynamique : les objets que nous allons étudier évoluent selon deux directions ;
- les aspects “*systèmes dynamiques symboliques*” : la possibilité de relever un mot ou une configuration vers un objet se déplaçant dans un espace des phases où des manipulations algébriques sont possibles ;
- les aspects “*systèmes dynamiques induits*” : ils permettent d’expliquer de nombreux phénomènes d’autosimilarité et ils font le pont avec la théorie des substitutions.

Les systèmes dynamiques nous sont particulièrement utiles car ils permettent de faire le lien entre les univers discrets et continus, de plus ils possèdent une théorie bien établie sur le fond algébrique. Ces préliminaires sont l’occasion de fixer le vocabulaire, et de rappeler des concepts disséminés dans différentes constellations d’ouvrages scientifiques.

Au chapitre 2, on donne les définitions des objets essentiels et spécifiques à cette étude ; c’est la description de différents processus de rotations à travers des systèmes dynamiques symboliques. À partir des éléments du chapitre précédent, seront étudiées les rotations discrétisées et les rotations trois-transvections. En codant leur action à travers la grille \mathbb{Z}^2 , on affectera à chaque rotation une configuration unique – objet essentiel qui supporte notre recherche par la suite. À la suite de ces définitions, on trouve une série de petites propositions utiles, qui contient entre autre des éléments d’algorithmique locales qui prouvent la pertinence des configurations dans les processus de rotations. Dans la perspective de constructions de schémas plus complexes, on explique comment décomposer les configurations. En troisième partie de ce chapitre, se trouve alors le résultat-clé qui nous intéresse : Nous y donnons une interprétation des configurations – codage local des rotations – comme résultat de l’action d’un jeu de translations sur le tore via un codage symbolique. C’est-à-dire que nous nous donnons des armes issues des mathématiques continues, pour traiter le difficile problème discret qui nous anime. On généralise alors les définitions obtenues à d’autres configurations.

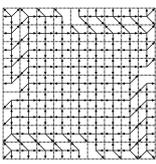
Le Chapitre 3 est pour sa part consacré à plusieurs résultats centrés sur des études de la dynamique définie au chapitre précédent et associé aux rotations discrétisées. Le texte de ce chapitre débute par une caractérisation des angles liés à des configurations périodiques et quasipériodiques des configurations étudiées. On se fait ainsi une idée plus précise des objets que nous étudions. Dans un second temps, on examine les résultats établis avec Valérie BERTHÉ qui concernent la fréquence des motifs observés – c’est je crois une série de résultats de formels, qui ouvrent des pistes de recherches difficiles. En effet, il s’agirait de relever la variation des symboles vers des règles de transitions.

Au Chapitre 4, après un rappel sur la théorie des substitutions, on présente un trio de méthodes mettant en avant l’existence de substitutions pour engendrer les configurations correspondant à certains angles. À l’aide de ces différentes techniques on donnera les arguments-clés pour la démonstration du caractère autosimilaire des configurations.

Au Chapitre 5, on revient vers des aspects algorithmiques plus connexes avec la géométrie discrète : pour la rotation discrétisée, on présente une caractérisation des angles bijectifs. Il s’agit en fait d’une extension d’un théorème d’Éric ANDRÈS et de Marie-Andrée JACOB^(a) [JA95]. Pour obtenir ce résultat, on utilise les liens avec les systèmes dynamiques étudiés au Chapitre 2. À ce stade ; on étudie un peu plus en détail la structure des configurations périodiques.

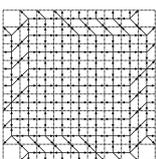
Dans le Chapitre 6, on présente un algorithme pour la rotation 3-transvection sur automates cellulaires. C’est le seul chapitre où nous parlons directement d’automates cellulaires. On dispose de cette occasion pour préciser un certain nombre de constructions et de sous-automates cellulaires qui sont utiles dans un sens plus large pour la modélisation géométrique sur automates cellulaires.

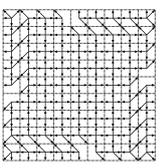
^(a)dont le nom actuel est Marie-Andrée DA COL



Le Chapitre 7 conclut cette thèse en précisant les questions, les débouchés potentiels et nos espoirs, notre opinion globale par rapport au sujet à la fin de cette thèse.

Puis, notons qu'en annexe, se trouve certains éléments bien connus liés aux translations sur le tore. On y aborde au passage les fractions continues. Ce qui nous intéresse ici c'est la forme des preuves et des définitions, car nous essayons ailleurs de reproduire sa charpente en dimension supérieure.





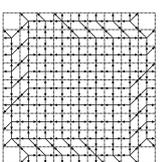
Chapitre 1

Éléments préliminaires

Plan détaillé du chapitre

1.1	Éléments de géométrie discrète	2
1.1.1	Essence philosophique : de \mathbb{Z}^n à $Q^{\mathbb{Z}^n}$	2
1.1.1a	Définition	2
1.1.1b	Discrétisation d'un point : techniques usuelles	4
1.1.2	Cliché du bestiaire de la géométrie discrète	5
1.1.2a	Droites et hyperplans	6
1.1.2b	Cercles	7
1.1.2c	Autres Figures	7
1.1.3	Un petit tour dans les rotations	7
1.1.3a	Autour de la rotation discrétisée (avant et arrière)	8
1.1.3b	La rotation 3-transvections	9
1.1.3c	Les pseudo-rotations par cercles	10
1.1.3d	Les rotations par droites discrètes	10
1.1.3e	Les rotations pythagoriciennes	11
1.1.4	Isotropie, rotations et géométrie discrète	11
1.1.4a	Non-existence de rotations discrètes transitives de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{Z}^2	11
1.1.5	Conclusions de la section	12
1.2	Rappels sur les mots et les motifs	13
1.3	Systèmes dynamiques symboliques, extension bidimensionnelle	14
1.3.1	Systèmes dynamiques unidimensionnels	14
1.3.1a	Éléments de théorie des systèmes dynamiques	14
1.3.1b	La notion de système dynamique	15
1.3.1c	Propriétés des systèmes	16
1.3.1d	Systèmes dynamiques induits et intégrés	16
1.3.1e	Échanges d'intervalles et de morceaux	17
1.3.1f	Exemple 1 : dynamique sur le tore	18
1.3.1g	Exemple 2 : Systèmes dynamiques symboliques et shifts	18
1.3.2	Systèmes dynamiques multidimensionnels	19
1.3.2a	Systèmes dynamiques en dimensions supérieures	19
1.3.2b	Systèmes dynamiques symboliques multidimensionnels	19
1.3.2c	Difficultés de l'approche de dynamique symbolique en dimensions non unitaire	20
1.3.2d	Le prolongement de la notion de reconnaissabilité	20
1.3.2e	Pure apériodicité	20
1.3.3	Conclusion de la section	21
1.4	Conclusions	21

[...] on peut se demander si cette prolifération exubérante est le développement d'un organisme vigoureusement charpenté, acquérant chaque jour plus de cohésion et d'unité des accroissements qu'il reçoit, ou si au contraire elle n'est que le signe extérieur d'une tendance à un émiettement de plus en plus poussé, dû à la nature même des mathématiques, et si ces dernières ne sont pas en train de devenir une tour de Babel de disciplines autonomes, isolées les unes des autres, tant dans leurs buts que dans leurs méthodes, et jusque dans leur langage. En un mot, y a-t-il une mathématique ou des mathématiques ? Bien que plus actuelle que jamais, il ne faudrait pas croire que cette question soit nouvelle ; elle s'est posée



presque dès les premiers pas de la science mathématique. C'est qu'en effet, même en négligeant les mathématiques appliquées, il subsiste, entre la géométrie et l'arithmétique (du moins sous leur aspect élémentaire) une évidente dualité d'origine, celle-ci étant initialement science du discret, celle-là de l'étendue continue, deux aspects qui s'opposent radicalement depuis la découverte des irrationnels. D'ailleurs, c'est précisément cette découverte qui fut fatale à la première tentative d'unification des sciences, l'arithmétisme des pythagoriciens ("toutes choses sont nombres")

L'architecture des mathématiques, Nicolas BOURBAKI

Avant d'explorer les arcanes de la théorie des rotations discrètes, l'objet de cette section est de nous localiser dans l'atlas scientifique, et ainsi de nous accorder sur le vocabulaire employé.

La première partie de ce chapitre est consacrée à une présentation de la géométrie discrète. Après avoir évoqué divers travaux sur la formalisation de la notion même de géométrie discrète, on présente les raisons pour lesquelles les rotations discrètes s'intègrent dans la géométrie discrète. Les premiers chapitres restituent à grands traits la géométrie discrète telle qu'elle est comprise aujourd'hui, dans sa philosophie et dans sa définition la plus classique. On prend le temps de s'intéresser aux aspérités les plus caractéristiques de cette géométrie encore naissante ; puis on énumère différentes rotations étudiées. On notera déjà que les rotations discrètes interrogent la solidité de la géométrie discrète sur son rapport à l'isotropie, et à l'infiniment petit.

Dans la seconde partie de ces préliminaires, on regarde l'autre versant par lequel on peut aborder les rotations discrètes, c'est la *dynamique symbolique* ; il s'agit là d'un domaine scientifique essentiel pour l'analyse des systèmes discrets. L'idée-clé de la dynamique symbolique se résume ainsi : *Tout mot peut être considéré comme une succession de lettres qui reflète l'évolution d'un système*. Dans certains cas, on peut trouver une évolution continue qui est algébriquement descriptible ; le mot est alors l'observation de la dynamique de ce système à travers une projection sur un ensemble fini, et la description continue du système en mouvement est susceptible de nous fournir davantage d'informations sur la structure intrinsèque du mot étudié.

Certains liens entre géométrie discrète et dynamique symbolique sont fameux : par exemple, il y a une connexion forte entre l'étude des translations sur le tore, l'étude des billards et l'étude des droites discrètes. Dans la dynamique symbolique, les translations sur le tore (qui sont encore un même nom pour ce type de systèmes) forment un exemple essentiel de système dynamique. Il se trouve qu'analyser les rotations discrètes revient à analyser une généralisation de tels systèmes.

Dans son ensemble, ce chapitre plaide l'idée des systèmes dynamiques parce qu'ils sont historiquement adaptés à la résolution de certains problèmes diophantiens ce qui est très profitable à la géométrie discrète.

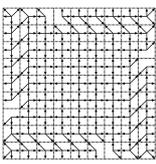
1.1 Éléments de géométrie discrète

1.1.1 Essence philosophique : de \mathbb{Z}^n à $Q^{\mathbb{Z}^n}$

1.1.1a Définition

La *géométrie discrète*^(a) est une discipline des mathématiques qui s'applique à établir une théorie algorithmique de la géométrie basée sur les nombres entiers, une géométrie sur \mathbb{Z}^n ; elle aspire de plus à être aussi cohérente que possible avec la géométrie euclidienne. Il s'agit en fait d'un exercice de mathématique pour spécifier une théorie robuste qui dispose de définitions générales, mais qui

^(a)En anglais *digital geometry*, voir l'introduction [GÉR99] à ce propos.



tienne compte des spécificités des espaces discrets et de certaines propriétés déraisonnables^(a) qu'induit souvent le passage au continu : "L'art de la géométrie discrète consiste à les^(b) organiser les unes par rapport aux autres et à transférer les propriétés du continu à des objets qui ne peuvent pas les vérifier." (Jean-Pierre RÉVEILLÈS)

La géométrie discrète dont nous allons discuter se veut donc dans la lignée de celle fondée par la thèse d'état de Jean-Pierre RÉVEILLÈS [RÉV91]. Dans la première partie de cette thèse d'état, Jean-Pierre RÉVEILLÈS redéfinit presque entièrement ce qui formera les premiers jalons d'une géométrie à base d'arithmétique entière qui deviendra une théorie de la géométrie discrète. La théorie s'est essentiellement développée sur la grille entière \mathbb{Z}^n , de nombreux auteurs en viennent ainsi à la définir directement sur comme une géométrie sur \mathbb{Z}^n . Historiquement, Jean-Pierre RÉVEILLÈS situe la géométrie discrète comme l'héritière d'influences provenant de la géométrie des nombres et de l'historique ouvrage *Géométrie der Zahlen* rédigé par Hermann MINKOWSKI qui fonda justement la *géométrie des nombres*. D'autres aspects de la philosophie de géométrie discrète remontent à certains travaux de Jean BERNOULLI. Le soin que celui-ci déployait pour optimiser les performances algorithmiques de ses méthodes en astronomie, ainsi que ses travaux sur l'approximation de droites discrètes justifient son statut de précurseur. La théorie prône encore un retour à des résultats plus efficaces algorithmiquement, fondés uniquement sur de l'arithmétique entière, donnant ainsi l'occasion à divers domaines de contribuer à un même objectif. Plus globalement, puisqu'il s'agit de construire une théorie géométrique, Jean-Pierre RÉVEILLÈS insiste sur l'importance qu'il faut accorder au choix des définitions. On ne fera une bonne théorie qu'avec de bons ingrédients, et il rappelle un certain nombre de résultats profonds et fondateurs : par exemple, les résultats comme le théorème de JORDAN discret [ROS75], [STO88], mais aussi les premières recherches sur la topologie discrète et digitale qui existèrent dès le début de l'image informatique avec au niveau de la théorie, des pionniers comme Azriel ROSENFELD [JR70], Akira NAKAMURA [NR00], ou encore Vladimir KOVALEVSKY .

Azriel ROSENFELD déclarait de son côté que *Digital geometry is the study of geometric properties of sets of lattice points produced by digitizing regions or curves in the plane*. Nous nous contenterons pour l'instant de cette définition. Avant de nous rapprocher de la conception de RÉVEILLÈS qui définit une notion de géométrie discrète optimale que ne sous-entend pas ROSENFELD dans cette définition.

Note 1.1.1.1 La domination du paradigme "pixelique"^(c) pour la représentation de travail des images en informatique a vraisemblablement été le principal élément qui a motivé une théorie de la géométrie discrète. Cela dit, insistons sur une autre motivation : une théorie de la géométrie discrète pourrait un jour servir d'appui à des théories physiques discrètes. Rappelons quand même que la mécanique quantique se voulait initialement être une théorie discrète et probabiliste.

Une application de la géométrie discrète concerne la modélisation physique^(d) dans des espaces discrets.

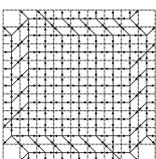
Il semble que la vision de la géométrie discrète que nous venons de décrire soit aujourd'hui assez consensuelle, et on la trouve dans les prolégomènes d'un certain nombre de thèses qui ont besoin de dresser un panorama bien plus précis que celui que nous brosons ici. Le fait que cette théorie soit devenue paradigmatique ne veut pas dire qu'elle soit exempte de polémiques. La première

^(a) Comme l'existence d'arbitrairement petits, et la possibilité de stocker un réel non constructible dans un objet géométrique.

^(b) Les définitions fondamentales pour la théorie.

^(c) Par opposition à des paradigmes à base de tomographies discrètes, ou à base d'ondelettes par exemple.

^(d) Simulation, analyse de données physiques : mais cela inclut l'archéologie, les données médicales...



partie de la thèse de Jean-Pierre RÉVEILLÈS est avant tout un texte qui définit la philosophie de la géométrie discrète. Elle a pour intérêt premier de donner un sens, une direction aux définitions qui sont proposées dans le domaine.

On pourrait s'attendre à ce que ces critères aient été complètement formalisés, ou qu'ils servent effectivement à justifier les travaux de ceux qui s'en disent les disciples. Ce n'est pas le cas. A ce jour, aucun article n'a à notre connaissance de valeur paradigmatique pour ce qui est de la formalisation de ces idées.

En donnant une direction pour la construction de la géométrie discrète, Jean-Pierre RÉVEILLÈS donne aussi la voie pour la construction de géométries discrètes idéales qui seraient celles qui réussiraient pleinement à exprimer un sous-ensemble maximal de propositions de la géométrie euclidienne. Or, en fait, l'existence même d'une théorie pour la géométrie discrète idéale est discutable. Par des techniques d'analyse non-standard, il serait possible de relier discret et continu d'une façon subtile et cohérente avec de nombreux pans des mathématiques. Si l'on excepte le travail en cours de Laurent FUCHS et Eric ANDRÈS, ou encore [BAU96], nous trouverons peu de littérature sur le sujet. Il n'existe pas d'article de référence autre que la première partie de la thèse de Jean-Pierre RÉVEILLÈS ^(a) pour fixer les limites exactes de la démarche employée en géométrie discrète.

Pour insister sur les doutes, sur les formes, que peut prendre la théorie nous allons montrer dans cette section qu'une certaine notion de rotation euclidienne est incompatible avec certaines conceptions de théorie de la géométrie discrète. Un des messages associé serait que *la géométrie discrète, ce ne serait peut-être pas une théorie de la géométrie sur \mathbb{Z}^n mais cela se rapprocherait plutôt d'une théorie de $Q^{\mathbb{Z}^n}$ où Q est un ensemble fini de couleurs, et qui correspondrait avec la notion informatique de bitmap, d'image combinatoire.*

Commençons en tout cas par être constructif, et considérerons d'abord la géométrie discrète simplement comme une théorie géométrique sur \mathbb{Z}^n définissant des droites, des cercles d'une façon générique, et reléguons à un peu plus tard cette discussion sur la nature des liens entre l'idéalité des objets continus et leur réalisation dans le discret.

1.1.1b Discrétisation d'un point : techniques usuelles

En un mot concernant la topologie de \mathbb{Z}^n , au début de sa thèse Yann GÉRARD [GÉR99] nous rappelle que \mathbb{Z}^n n'est pas discret "intrinsèquement" ; il est possible d'équiper \mathbb{Z}^n de distances qui ne font pas de \mathbb{Z}^n un ensemble discret. Cependant, dans le cadre de la géométrie discrète, \mathbb{Z}^n n'est considéré que corrélativement à la géométrie euclidienne, et il est normal d'équiper \mathbb{Z}^n d'une distance compatible avec la distance euclidienne. Le lecteur curieux est invité à parcourir les dissertations sur la topologie de \mathbb{Z}^n et son rapport au continu qu'on pourra par exemple trouver dans [CM91], [GÉR99], [ALA05].

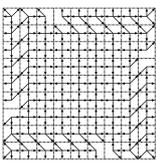
A priori, pour des applications en géométrie discrète, on préférera l'opérateur d'arrondi au plus proche qui se définit ainsi :

$$[x] = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$$

où $\lfloor x \rfloor$ est la fonction plancher (le plus grand entier qui soit inférieur ou égal au nombre considéré). Nous prendrons pour habitude de noter $[\diamond]$ la fonction qui à x associe $[x]$.

Cet opérateur est défini de \mathbb{R} vers \mathbb{Z} , mais il est facile de l'étendre aux dimensions supérieures en l'appliquant coordonnée par coordonnée. En dimension infinie, la fonction qui correspond à l'application successive de la fonction f puis de $x \mapsto [x]$ est dénotée soit par $[f]$, soit par $[\diamond] \circ f$ en cas de problèmes de lisibilité.

^(a)pour le moins informelle, mais il eut été prématuré de formaliser cela à ce moment



On dénote par $\{x\} = x - [x]$, et puisque $[x]$ est l'opérateur de discrétisation canonique en géométrie discrète, $\{x\}$ sera considéré comme l'opérateur la projection canonique vers l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, qui se trouve être un représentant du tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La fonction $\{\diamond\}$ est la fonction qui x associe $\{x\}$. Ceci dit pour des raisons arithmétiques, nous aurons parfois plus de commodité à considérer le résidu dans l'intervalle $[0, 1[$, et nous introduisons l'opérateur $\lfloor x \rfloor = x - [x]$.

La plus simple façon de relier géométrie sur \mathbb{Z}^n et géométrie sur \mathbb{R}^n consiste à se donner un opérateur de discrétisation constant par morceaux, qui à chaque morceau de \mathbb{R}^n associe le point entier le plus proche qui lui correspond.

Note 1.1.1.2 Cette définition serait simple si dans \mathbb{R}^n il n'existait pas des parties de \mathbb{R}^n qui sont équidistantes de plusieurs points de \mathbb{Z}^n .

Il existe principalement deux façons de répondre à ce problème. La première consiste à prendre une décision arbitraire et de fixer ainsi une convention pour déterminer à quelle cellule appartient les bords. Elle à l'inconvénient d'introduire une rupture de symétrie dans le modèle. La seconde approche différencie les cellules en fonction des ensembles de points de \mathbb{Z}^n qui leur sont équidistants. En ce cas, on obtient une topologie du type de celle de KHALIMSKY.

Disons rapidement un mot de la topologie de KHALIMSKY ([KHA87]), qui en un certain sens permet de capturer davantage de choses. On dénote par θ l'application de \mathbb{R}^n dans $2^{\mathbb{Z}^n}$ qui, à un point réel x , renvoie l'ensemble des points de \mathbb{Z}^n à distance euclidienne minimale de x .

$$\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{Z}^n} : x \mapsto \{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n \mid \forall \mathbf{v}' \in \mathbb{Z}^n, d(\mathbf{v}', x) \geq d(\mathbf{v}, x)\}$$

On dénote par E l'ensemble $\theta(\mathbb{R})$. Les classes d'équivalence de \mathbb{R}^n par θ sont contenues dans l'ensemble $O = \{\{x \in \mathbb{R} \mid \theta(x) = e\}, e \in E\}$.

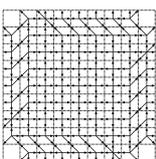
Les éléments de O forment les ouverts/cellules de la topologie de KHALIMSKY. De plus, il existe différents types de cellules qu'on caractérise en fonction du cardinal de $\theta(x)$. La topologie de KHALIMSKY fournit un cadre élégant pour la formalisation des idées en géométrie discrète.

Chaque classe d'équivalence pour l'opérateur de discrétisation est appelée "cellule" (de discrétisation). Si elles ont une aire non nulle, on parlera de "pixel" (picture élément). De l'ensemble de ces cellules, on déduit généralement, une relation de connexité sur \mathbb{Z}^n , ou une relation de voisinage. Il existe différents types de relations de voisinage en fonction du nombre minimal de dimensions qu'on attend de l'intersection de la fermeture d'adhérence des cellules de discrétisation. Ainsi, en dimension deux on différencie la 4-connexité ou 4-voisinage (l'intersection entre l'adhérence des cellules est un polytope de dimension 1, autrement dit deux pixels sont adjacents s'ils partagent un bord), de la 8-connexité ou 8-voisinage (l'intersection entre les fermetures d'adhérence des pixels est un espace de dimension minimale 0, autrement un point de contact suffit à connecter deux pixels). Un ensemble est k -connexe, si pour tout couple de point $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ de cet ensemble, on peut trouver suite d'éléments deux à deux k -connexes qui commence en \mathbf{v}_1 et qui se finit en \mathbf{v}_2 et dont tous les éléments appartiennent à l'ensemble. L'ensemble est simplement k -connexe si le fait de lui ôter n'importe lequel de ses éléments lui fait perdre sa propriété k -connexité.

1.1.2 Cliché du bestiaire de la géométrie discrète

Le cadre de la géométrie discrète impose que les objets discrets aient des propriétés aussi proches que possible de leurs homologues continus. Toutes les définitions ne sont pas équivalentes.

Le schéma de discrétisation classique (en géométrie discrète) consiste à définir l'objet idéal



comme l'ensemble des points entiers qui appartiennent à une saucisse de MINKOWSKI^(a) dont l'épaisseur fixée dans la géométrie discrète, se met à croître, a priori logarithmiquement, au fur et à mesure que l'on considère la scène avec davantage de recul afin d'obtenir la figure euclidienne correspondant à la figure discrète, dans le cadre de la formalisation des liens entre géométrie discrète idéale et géométrie euclidienne.

1.1.2a Droites et hyperplans

Ce n'est ici qu'un passage express dans les fondements de la géométrie discrète. Le lecteur qui est davantage curieux pourra trouver des dissertations bien plus complètes dans la majorité des ouvrages de géométrie discrète, et en particulier dans [RÉV91] et [AND00].

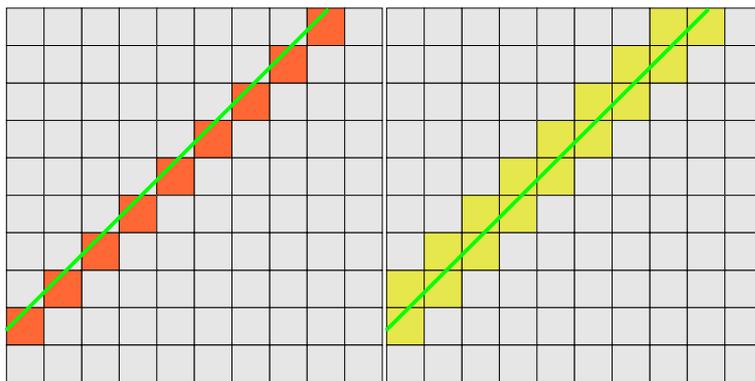


Fig. 1.1 – Une droite naïve et une droite standard

La définition de RÉVEILLÈS par sa généralité rassemble dans un formalisme commun une variété de droites discrètes déjà connues : les droites naïves qui sont simplement 8-connexes, les droites standards qui sont simplement 4-connexes, les droites pythagoriciennes qui respectent la norme, ou encore des droites disconnectées et des droites épaisses.

La définition correspond simplement au schéma de discrétisation classique, à l'“inner-discretization” des points de la “sauce de MINKOWSKI” d'une droite :

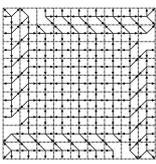
$$D(a, b, \beta, \omega) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \beta \leq ax + by < \beta + \omega\}$$

Le paramètre ω s'appelle ici l'épaisseur. Son appellation est là pour rappeler qu'on souhaitera à un moment partir de l'analyse non-standard pour relier discret et continu.

On pourra remarquer que de faire se translater une boule de diamètre unitaire pour la norme infinie revient à faire se translater un carré unitaire, c'est-à-dire un représentant potentiel du tore \mathbb{T}^2 . On comprendra aisément qu'un type de droite qui par son épaisseur correspond exactement aux translats de la boule unitaire pour la norme infinie contienne toujours un point (et exactement 1).

Éric ANDRÈS [AND00] a sur le même principe généralisé ces définitions aux *hyperplans analytiques*, en prenant soin de bien décrire ce qui pouvait se passer dans chacun des cas d'épaisseur des plans et des hyperplans.

^(a) On parle aussi de tuyau de MINKOWSKI de la figure euclidienne. Il s'agit simplement de considérer l'épaississement provoqué par l'addition ensembliste d'une boule de rayon donné à la figure continue, l'idée sous-jacente étant d'épaissir les objets fins afin de pouvoir leur donner certaines propriétés.



Pour plus d'informations relatives à la planarité discrète, le lecteur pourra se référer à [BCK]. Un survol des algorithmes de reconnaissance de morceaux de plans discrets, c'est un problème lié au problème de vectorisation des objets discrets. Pour aller plus loin, on pourra aussi consulter [SIV04], qui traite entre autres des décomposition en hyperplans, et des intersection entre objets discrets.

1.1.2b Cercles

Comme je l'ai mentionné dans l'introduction, sur \mathbb{Z}^n et en arithmétique entière, la distance 2 ne faisant pas partie des primitives de la théorie de la géométrie discrète, puisqu'elle fait même partie des difficultés de la théorie.

On ne sait pas calculer facilement la distance 2 en exploitant géométriquement, uniquement les éléments de l'arithmétique entière. De ce fait, les estimateurs de distance euclidienne et les calculateurs de géodésiques ont aussi activement intéressé nombres de chercheurs de la communauté de la géométrie discrète.

Dans la lignée des figures définies selon le même schéma de discrétisation, les cercles arithmétiques furent introduits par Éric ANDRÈS [AND92]. Ils correspondent aux points $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant :

$$\left(r - \frac{\omega}{2}\right)^2 \leq x^2 + y^2 < \left(r + \frac{\omega}{2}\right)^2$$

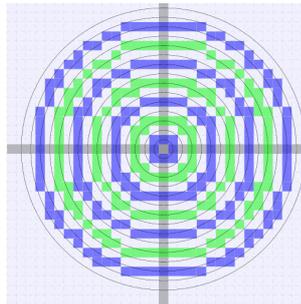


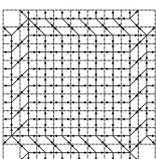
Fig. 1.2 – Cercles géométriques analytiques

1.1.2c Autres Figures

La définition analytique impliquant un épaissement progressif des droites discrètes s'est généralisée dans le domaine. Progressivement des droites [RÉV91], aux cercles [AND92], en passant par les plans, et les hyperplans, puis aux polygones, et sur différents types de topologies. On a encore généralisé cette approche aux fonctions quelconques ou à des objets définis de manière paramétriques [GÉR03], [DRDJ06]. Il demeure quelques subtilités de définition qui font que ces approches nécessitent certainement encore du travail et des études afin de pouvoir être intégrées correctement dans ce qui forme le socle de la géométrie discrète.

1.1.3 Un petit tour dans les rotations

Soit (X, d) un espace métrique, une *isométrie* est une transformation de X dans X qui conserve les distances. Dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 , les isométries (translations, symétries, rotations) forment



un groupe. On les répartit deux sous-groupes en fonction de leur faculté à préserver l'orientation des angles, leur structure est très bien connue.

Nous prendrons pour habitude de dénoter par r_α la *rotation euclidienne*, laquelle est pour rappel associée à la matrice suivante :

$$r_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Les rotations euclidiennes de même centre sont aussi dotées d'une structure de groupe qui est caractéristique de la *transitivité* de cette opération : $r_{\alpha+\beta} = r_\beta \circ r_\alpha$, $r_0 = id$

Par extension, nous appellerons une ϵ -quasi-isométrie, toute transformation qui conserve les distances à une constante ϵ près.

Une ϵ -quasi-isométrie est une transformation sur \mathbb{R}^n ou sur \mathbb{Z}^n ayant les propriétés suivantes :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{y} - \vec{x}\| - \|f(\vec{y}) - f(\vec{x})\| \leq \epsilon \quad (1.1)$$

La composition d'une ϵ -quasi-isométrie avec une ϵ' -quasi-isométrie débouche en général sur une $(\epsilon + \epsilon')$ -quasi-isométrie.

1.1.3a Autour de la rotation discrétisée (avant et arrière)

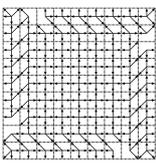
Pour faire une rotation euclidienne discrétisée, on réalise la rotation euclidienne dans \mathbb{R}^n puis on discrétise le résultat. Formellement :

$$[r_\alpha] = [\diamond] \circ \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

La rotation discrétisée a de mauvaises propriétés mathématiques. C'est une $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -quasi-isométrie ; néanmoins, elle n'est généralement pas bijective. Dans la suite de cette thèse, nous fournissons une caractérisation des angles pour lesquelles la rotation discrétisée est bijective.

Note 1.1.3.1 *Nous ne faisons que le mentionner car cela traite davantage d'image couleur que d'image géométrique. Pour pallier aux effets des rotations discrètes de nombreux logiciels ont recours à des techniques d'interpolation. Les interpolations ne résolvent pas le problème qui nous intéresse : au contraire, elles introduisent un léger flou dans l'image, et elles provoquent ainsi une détérioration supplémentaire de l'image. Des références concernant ce type d'algorithmes peuvent être trouvées dans : [PAGM88].*

Note 1.1.3.2 *Cette transformation appliquée sur des images peut être réalisée de deux façons. D'abord, on peut faire la rotation vers l'avant, on considère que la transformation nous donne la position d'arrivée de la couleur en chaque pixel. Si on note I_D l'image destination et I_S l'image source de l'algorithme, on effectue en tout $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$: $I_D([\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{v})]) \leftarrow I_S(\mathbf{v})$. Dans le cas de la rotation avant, l'image résultante contiendra nécessairement des trous : des points sans antécédent au milieu de l'image tournée. Autrement, on peut faire la rotation vers l'arrière, auquel cas on part d'une position dans l'image destination et on applique la rotation en sens inverse afin de retrouver les antécédents du point. On retrouve ainsi un antécédent à chaque pixel : pour tout $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^2$, $I_D(\mathbf{w}) \leftarrow I_S([\mathbf{r}_{-\alpha}\mathbf{w}])$. Il y a l'inconvénient que certains points de l'image d'origine ont pu disparaître, ou qu'à contrario, parfois l'information stockée en un point de l'image origine va se retrouver dupliquée.*



Note 1.1.3.3 Les rotations discrétisées font parties des applications quasi-affines. Celles-ci ont été en particulier étudiées par Philippe NEHLIG [NEH96]. Son travail a consisté à analyser ces transformations par le biais d'IFS^(a). Les chapitres qui vont suivre vont montrer des méthodes généralisables qui font les liens entre rotations et systèmes dynamiques, ou en encore entre systèmes dynamiques et substitutions. Ces résultats pourraient peut-être donner un nouvel éclairage au travail de Philippe NEHLIG.

1.1.3b La rotation 3-transvections

Les rotations 3-transvections ont été réinventées en plusieurs moments de l'histoire des mathématiques. En infographie, il est aujourd'hui courant de les faire remonter aux articles parus simultanément de [PAE86] et de [TKKW86]. On pourra aussi mentionner les extensions fournies par [AND96] et par [TOF97].

Les transvections horizontales et verticales de paramètre α sont les transformations linéaires associées aux matrices suivantes :

$$HS_\alpha : \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } VS_\alpha : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Les transvections sont par essence des transformations ayant de bonnes propriétés : une fois discrétisées, elles restent bijectives.

Proposition 1.1 La composée d'une discrétisation et d'une transvection est bijective.

Démonstration :

En effet dans le cas de HS_α , la transformation laisse les lignes horizontales invariantes. De plus sur une ligne horizontale donnée, tous les points sont décalés de la même quantité, ainsi l'opérateur d'arrondi s'appliquera de la même façon sur l'ensemble des points de la droite. Plus formellement, pour tout $y \in \mathbb{Z}$, on a pour tout x , on a que l'abscisse de l'image de (x, y) par $HS_\alpha(x, y)$ vaut $x + [y\alpha]$, et que l'ordonnée du même point vaut y . On en déduit que pour tout $y \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des points de la ligne d'ordonnée y sont translatées de la même quantité ; et on observe que la ligne d'ordonnée y est invariante par cette translation. Ce raisonnement est valable pour toutes les lignes horizontales (qui pavent le plan). Ceci suffit à prouver que la transformation est bijective.

c.q.f.d.

En ayant recours à de la trigonométrie usuelle, on peut montrer, que la rotation euclidienne peut se décomposer grâce à trois transvections :

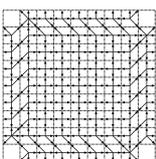
$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan(\alpha/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & -\tan(\alpha/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note 1.1.3.4 On rappelle les identités essentielles pour :

$$\tan(\alpha/2) = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Ce type de décomposition permet de diviser la rotation en des procédés plus simples qui sont plus facilement implémentables dans certains formalismes. Par exemple, l'application de rotations dans le domaine harmonique repose sur une interprétation de la rotation comme une composée de

^(a)Iterated Fractal System.



trois transvections ([PEY04]). L'implémentation de la rotation sur automates cellulaires que nous proposons à la fin de la thèse repose aussi sur ce type de décomposition.

En géométrie discrète, les *rotations 3-quasi-transvections* discrétisées sont appréciées car elles ont naturellement la bonne propriété d'être à la fois bijective et d'être une ϵ -quasi-isométrie.

La rotation 3-quasi-transvections repose donc sur l'application successive : "de 3-transvections discrétisées". Par abus de langage, et pour oublier cette terminologie un peu lourde : dans la suite du document, à partir du moment où l'on est situé dans le cadre discret, on parlera simplement de rotations 3-transvections pour désigner les rotations 3-quasi-transvections.

$$[\varpi_\alpha] = [\diamond] \circ \begin{bmatrix} 1 & -\tan(\alpha/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \circ [\diamond] \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 1 \end{bmatrix} \circ [\diamond] \circ \begin{bmatrix} 1 & -\tan(\alpha/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note 1.1.3.5 *Dans la définition que nous donnons ici, nous avons fait le choix d'appliquer deux quasi-transvections horizontales et une quasi-transvection verticale. Ce choix est arbitraire et nous aurions obtenu une transformation du même type en faisant intervenir deux transvections verticales et une transvection horizontale. Ceci dit, ce choix arbitraire a une importance : cela ne conduit pas au même résultat ! Nous aurons l'occasion de détailler ceci en Section 2.4.5.*

1.1.3c Les pseudo-rotations par cercles

Dans [AND92], Éric ANDRÈS nous parle de rotations dont il attribue la paternité conceptuelle à Jean FRANÇON : les pseudorotations par cercles.

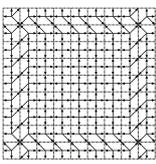
Pour effectuer une rotation par cercles d'angle α , pour chaque rayon R , on calcule le cercle arithmétique discret \mathcal{C}_R de rayon R . Le cercle de rayon R est assimilable à un fil 8-connexe. On calcule alors le nombre N de points qui composent \mathcal{C}_R . On pose $K = \lfloor \frac{|\alpha|N}{2\pi} \rfloor$. On décale le long du cercle, tous les points du cercle de K cases dans le sens de la rotation.

Éric ANDRÈS procède à une analyse évoluée des rotations par cercles. Pour résumer, elles ont la bonne propriété d'être bijectives, commutatives ; et la rotation inverse est la même que la rotation d'angle opposée. Elles possèdent par contre la mauvaise propriété de ne pas être quasi-isométriques, en pratique l'image apparaît comme déchirée. Cela s'explique en remarquant que quand des points fait se déplacent de cellule en cellule le long d'un fil 8-connexe certains déplacements ont une longueur 1, tandis que d'autres ont une longueur de $\sqrt{2}$. De ce fait, elles ne sont pas considérées ici comme des rotations pertinentes.

Note 1.1.3.6 *Nous emploierons plus tard des rotations par cercles – sans utiliser des cercles arithmétiques – pour faire des rotations de $\pi/2$ sur automates cellulaires en travaillant avec des sphères pour la norme infinie. Plus généralement, on peut considérer que les rotations par cercles forment un bon candidat à la parallélisation, puisque la partie la plus complexe des calculs est effectuée*

1.1.3d Les rotations par droites discrètes

Dans sa thèse, Éric ANDRÈS propose un nouveau type de rotations, découlant de celles proposées par Jean-Pierre RÉVEILLÈS, basées sur le fait que le plan est pavable par un ensemble de droites discrètes de même pente. On calcule ainsi l'image de chaque droite horizontale par la rotation discrète – puis dans un second temps, on repère la position horizontale du point x dont on cherche l'image. Nous n'utiliserons pas ce type de rotations dans la suite, même si leurs propriétés peuvent être très proche de celle de la rotation discrétisée.



1.1.3e Les rotations pythagoriciennes

Les rotations pythagoriciennes désignent des concepts différents en fonction des auteurs.

Pour Éric ANDRÈS, les rotations pythagoriciennes désignent un sous-ensemble des rotations par droites, dans lequel on emploie uniquement des rotations par droites pythagoriciennes. Les droites pythagoriciennes possèdent la bonne propriété de conserver les distances.

Elles se basent sur le fait que l'intersection de deux droites discrètes pythagoriciennes orthogonales contient toujours exactement un point.

Pour Klaus Voss [VOS93], le principe de ces rotations est l'utilisation d'un angle pythagorien pour la construction de rotations périodiques que l'on va pouvoir rendre bijectives. La déformation induite par la rotation peut-être vue comme périodique, et peut être pré-calculée.

1.1.4 Isotropie, rotations et géométrie discrète

Idéalement, toutes les définitions de la théorie de la géométrie discrète doivent être stables par rotations discrètes. Il en va de même pour la rotation. Et la composition de deux rotations doit encore être une rotation. Nous parlerons là de transitivité. Si on définit les rotations discrètes comme des transformations qui donnent le résultat d'une rotation euclidienne à une erreur bornée près, alors, on va montrer qu'il ne peut exister de rotations discrètes qui soient uniquement des applications de \mathbb{Z}^2 sur lui-même, et qui soient de plus transitives. Bien sûr ce type de résultat a une incidence sur nos conceptions de la géométrie discrète.

1.1.4a Non-existence de rotations discrètes transitives de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{Z}^2

Afin de pouvoir montrer la non-existence de rotations discrètes qui sont transitives, nous devons formaliser les définitions pour lesquelles nous allons établir le résultat.

Définition 1.1 (Rotation discrète) On appelle rotation discrète, toute application f_α paramétrée par un réel α , de \mathbb{Z}^2 et à valeurs dans \mathbb{Z}^2 telle qu'il existe k tel que pour tout α , et pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|r_\alpha(\mathbf{v}) - f_\alpha(\mathbf{v})\| < k$.

Note 1.1.4.1 On notera qu'à ce compte les rotations par cercles qui ne sont pas des quasi-isométries ne sont certainement pas des rotations discrètes.

Définition 1.2 (Application transitive) Nous dirons qu'une application paramétrée f_α est transitive si et seulement si elle vérifie :

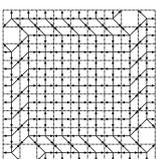
$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}, f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$$

Théorème 1.1 Il n'existe pas d'application paramétrée f_α de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{Z}^2 qui soit simultanément une rotation discrète et transitive.

Démonstration :

Supposons qu'il existe f_α une application paramétrée par un réel α de \mathbb{Z}^2 à valeurs dans \mathbb{Z}^2 qui soit simultanément une rotation discrète et transitive.

Puisque f_α dénote une rotation discrète, la famille d'applications f_α pour $\alpha \in \mathcal{A}$ est composée d'applications de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{Z}^2 , et pour tout α on commet une erreur au plus de k par rapport à l'image par rotation euclidienne discrétisée. On a : $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2, \|[r_\alpha](\mathbf{v}) - f_\alpha(\mathbf{v})\| < k$. Ainsi, l'ensemble des images du point $(0, R)$ pour les applications f_α avec $\alpha \in \mathcal{A}$ est inclus dans une



sphère épaisse^(a) S de rayon médian R , où R est largement plus grand que k et l'épaisseur de la sphère vaut $k + 1$. Et de plus, puisque f_α est supposée transitive, pour toute composée de plusieurs applications de $f_{\alpha_0} \circ f_{\alpha_1} \circ \dots$, le point $(0, R)$ continue d'avoir son image dans la sphère S .

Pour tout angle α , l'orbite du point $(0, R)$ sous l'action de la rotation f_α conduit à un cycle limite. Le nombre possible de cycles limites possibles est fini car l'ensemble des parties de S est fini du fait que le nombre de points contenus dans S est fini. Puis grâce au théorème de RAMSEY dit du principe des chaussettes et des tiroirs, on peut affirmer qu'il existe nécessairement un sous-ensemble de S qui correspond au cycle limite de l'orbite de $(0, R)$ pour une infinité d'angles.

Maintenant puisque ce cycle est fini, il existe un nombre fini de permutations sur ce cycle. Et donc, toujours du fait du théorème de RAMSEY, cela implique nécessairement qu'il existe deux angles différents α_1, α_2 qui donnent à tout point de ce cycle exactement la même image par f_α – en posant α_3 égal à $\alpha_1 - \alpha_2$, on constate qu'il suffit de réaliser $\lceil \pi/\alpha_3 \rceil$ itérations de f_{α_1} et de f_{α_2} à partir d'un des points du cycle limite pour obtenir deux points qui sont à peu près diamétralement opposés et qui ont pourtant la même image par f_α . Ceci contredit clairement le fait que f_α est une rotation discrète.

c.q.f.d.

Note 1.1.4.2 *Bien que la géométrie discrète soit l'art de donner des propriétés à des objets qui ne peuvent les avoir. La quasi-unicité de la géométrie discrète est je crois un élément troublant à interpréter avec précaution, il ne faudrait pas qu'elle devienne une source de non constructivisme dans la théorie. Ce que suggère ce type de résultat c'est qu'en fonction des figures qu'on souhaite construire, il va falloir choisir telle géométrie discrète ou telle autre. Force est de reconnaître qu'une telle approche manque tout de même de généralité. Il faut cesser donc de reproduire l'erreur des pythagoriciens à vouloir croire que la géométrie en nombres entiers seulement conduira à une interprétation uniforme de la Nature. En ce sens que la géométrie sur automates cellulaires a des choses à proposer à la géométrie discrète que nous pourrions alors considérer comme une géométrie pixelique où l'on se donne un ensemble fini Q et l'on considère des objets de $Q^{\mathbb{Z}^2}$ plutôt que des applications de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{Z}^2 .*

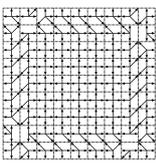
1.1.5 Conclusions de la section

La géométrie discrète est un domaine encore jeune et en pleine évolution, dans lequel des choses sont posées, mais qui doit encore rester très souple à de nouvelles influences. Les voies bien formalisées en analyse non-standard peuvent effectivement conduire à une théorie homogène de la géométrie continue statique. Mais il n'est pas évident que cette approche ne cache pas derrière l'axiome choix des questions très difficiles.

Obtenir la robustesse des définitions sous l'action des transformations que nous leur appliquons est des prochains grands chantier de la géométrie discrète.

La géométrie a pour but original de fournir des outils utiles à la description des scènes de la réalité. Elle peut soit décrire la réalité de manière statique, soit décrire son évolution, et être considérée de manière dynamique. Comme le montre le Théorème 1.1, dans le cadre de la géométrie discrète il peut être intéressant de considérer que la géométrie discrète est plus une théorie sur $Q^{\mathbb{Z}^n}$ qu'une théorie sur \mathbb{Z}^n .

^(a)Nous préférons ici parler de sphère épaisse plutôt que de couronne car si on faisait tendre ω vers l'infini, cet objet finirait par devenir une sphère.



1.2 Rappels sur les mots et les motifs

Dans la suite de la thèse, on va étudier les rotations discrètes en les recodant à travers des applications de \mathbb{Z}^2 vers un ensemble fini, ce que l'on appelle des configurations. Les morceaux de configurations s'appellent des motifs. Pour cette raison, on va maintenant réviser les définitions dont nous allons avoir besoin pour manipuler les configurations.

Mots en dimension 1

Soit Q un ensemble fini, appelé *alphabet*, dont les éléments sont appelés en fonction des sensibilités, des *lettres*, des *états*, des *symboles* ou encore des *couleurs*. Une suite finie de lettres sur Q s'appelle un *mot* (fini) sur Q . L'ensemble des mots à n lettres sur Q est classiquement noté par Q^n . On définit l'ensemble des mots finis : $Q^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} Q^n$. Le nombre de lettres constituant d'un mot w , la *longueur* de w , est dénotée par $|w|$. Par $|w|_{\lambda}$ on dénote le nombre d'occurrences de la lettre λ dans le mot w . Pour tous mots u et v , la concaténation de deux mots u et v est notée multiplicativement uv et désigne le mot $u_0u_1u_2\dots u_{|u|-1}v_0v_1v_2\dots v_{|v|-1}$. Le *mot vide* est traditionnellement dénoté par ε . L'ensemble des mots finis équipé de la concaténation est doté d'une structure de monoïde : c'est-à-dire qu'on pourra vérifier l'associativité de l'opération de concaténation, ainsi que l'existence d'un élément neutre ε pour la concaténation.

Si en concaténant des mots à un mot f on peut obtenir le mot w , alors f est un *facteur* du mot w . Plus algébriquement, f est un facteur de w , si w peut s'écrire ufv où u, v sont deux mots de Q^* . Par $\mathcal{L}_n(w)$, on dénote l'ensemble des facteurs de longueur n du mot w . Si $u = \varepsilon$ alors f est un *préfixe* de w . Si $v = \varepsilon$ alors f est un *suffixe* de w . Le cardinal de $\mathcal{L}_n(w)$ est généralement dénoté par $p_n(w)$, on l'appelle la complexité par bloc du mot w . Elle sera notée simplement $p(n)$ quand aucune ambiguïté ne demeure sur l'objet considéré.

Par définition, un *langage* est un ensemble de mots, c'est-à-dire un sous-ensemble de Q^* . Puisque Q^* est le langage librement généré par les lettres de Q , on a pour habitude de le dénommer *monoïde libre*.

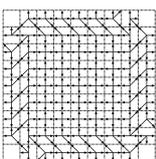
On distingue des classes importantes de langages en fonction de leurs propriétés et de leur faculté à être reconnu par les différents types de machines abstraites usuelles en informatique théorique :

- Un langage est *factoriel* si tout facteur d'un mot du langage appartient encore au langage ;
- Un langage est *prolongeable* si pour tout mot f du langage il existe des mots u et v différents du mot vide, tels que ufv appartienne au langage.
- Un langage est *reconnaissable* s'il est reconnaissable par un automate fini ;
- Un langage est *décidable* s'il existe une machine de TURING capable de décider si le mot appartient au langage.

Un facteur est dit prolongeable à droite(resp. à gauche) dans un langage L s'il est préfixe (resp. suffixe) propre d'un mot de L . Les facteurs de taille n qui sont prolongeables dans un langage L de plusieurs façons dans une même direction en des facteurs de taille $n + 1$ sont appelés les *facteurs spéciaux*.

Nous n'avons pour l'instant traité que des mots finis. Les *mots infinis* et *bi-infinis* sont des éléments de $Q^{\mathbb{N}}$ ou de $Q^{\mathbb{Z}}$. Les notions que nous employons se transposent sans difficulté des mots finis aux mots infinis.

Le langage formé par l'ensemble des facteurs d'un mot bi-infini est un langage factoriel prolongeable. La réunion de langages factoriels prolongeables est de nouveau un langage factoriel



prolongeable.

Le *superposition* d'un mot w sur Q et d'un mot w' sur Q' , notée $w \otimes w'$, est le mot sur $Q \times Q'$ tel que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on ait $(w \otimes w')_i = (w_i, w'_i)$.

Mots en dimensions supérieures

Une application de \mathbb{Z}^n dans un ensemble fini Q sera appelée une configuration^(a). (on s'autorisera de manière exceptionnelle à parler de configuration dans des cas où Q est simplement dénombrable.) Si $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^n$ alors une application de $\{0 \dots v_0\} \times \dots \times \{0 \dots v_{n-1}\}$ dans Q est un motif *rectangulaire* de taille \mathbf{v} . En plus de son acception mathématique usuelle^(b), le terme *image* sera employé pour parler d'une configuration ou d'un motif rectangulaire en dimension 2. Plus généralement, si P est un sous ensemble de \mathbb{Z}^n , on dit que m est un *motif* de support P , si m est une application de P vers Q . Un motif m de support P apparaît dans une configuration C à la position \mathbf{w} si et seulement si pour tout $\mathbf{t} \in P$ $P(\mathbf{t}) = C(\mathbf{w} + \mathbf{t})$. Si C est une configuration, et P un sous-ensemble de \mathbb{Z}^n , on aura pour coutume de dénoter par $C^P(\mathbf{w})$ la configuration qui renvoie le motif de support P qui apparaît en \mathbf{w} . La configuration bidimensionnelle qui renvoie les motifs de taille (m, n) qui apparaissent dans la configuration C en fonction de la position sera ainsi dénotée $C^{[m,n]}$.

De manière similaire à la définition de la superposition entre deux mots, on définit une superposition entre deux configurations.

Soit $w \in Q^{\mathbb{Z}}$ et $w' \in Q'^{\mathbb{Z}}$ sont deux mots bi-infinis, alors nous dirons que $C \in (Q \times Q')^{\mathbb{Z}^2}$ est la *configuration issue du produit direct* des deux mots si $\forall i, j \in \mathbb{Z}, C(i, j) = (w(i), w'(j))$.

1.3 Systèmes dynamiques symboliques, extension bidimensionnelle

1.3.1 Systèmes dynamiques unidimensionnels

La théorie des systèmes dynamiques symboliques est essentielle pour relever des observations discrètes vers des cinématiques continues sur lesquelles on parvient à employer le formalisme algébrique habituel.

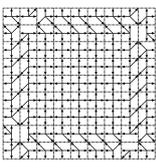
1.3.1a Éléments de théorie des systèmes dynamiques

C'est suite aux développements de la physique du début du 20^e siècle, et en particulier, suite à l'étude d'Henri POINCARÉ sur le *problème des trois-corps* que fut inaugurée la théorie des systèmes dynamiques. À l'époque une vague de résultats théoriques insufflèrent l'idée que même des équations simples pouvaient conduire à des comportements complexes; ou à des comportements que nous serions aujourd'hui loin de comprendre. En particulier, on pourra citer la théorie des bifurcations, les courbes de WEIERSTRASS continues partout mais nulle part dérivables dont Charles HERMITE se détournait avec horreur. Ces éléments provoquèrent la volonté d'arriver à étudier ces systèmes dans leur globalité, et surtout en tant qu'ensemble de systèmes, afin si possible de pouvoir faire progressivement augmenter la complexité du système étudié.

De là est né la théorie des systèmes dynamiques. Celle-ci synthétise ainsi deux grandes idées :

^(a)Le terme configuration provient de la terminologie informatique usuelle des automates cellulaires, il est lié au fait que la "bi-suite" qui décrit la configuration d'écrit en fait l'état du système.

^(b)image de x par une fonction f .



La première de ces idées est que *tout système fermé est assimilable à point en mouvement dans un espace de grandes dimensions*. On pourra en particulier noter l'arrivée vers 1850 d'outils comme les hamiltoniens, dont le but est de masquer la complexité d'objets complexes.

La seconde idée, plus vulgarisée sous le nom de *théorie du chaos* est que *dans l'analyse des systèmes, il est important de comprendre les zones de bifurcations, les points sensibles où le système complexe évolue de manière irrémédiable*.

1.3.1b La notion de système dynamique

Dans la théorie des systèmes dynamiques, l'évolution d'un système S ne dépend que de l'état du système, de la localisation de S dans l'*espace des phases* – l'espace des systèmes possibles.

Le formalisme des systèmes dynamiques peut être employé pour analyser presque n'importe quel objet qui évolue selon une dimension temporelle. Cela va par exemple du mouvement de la Terre en rotation au soleil, à la trajectoire d'une molécule d'eau dans une rivière. L'essentiel est de disposer d'un espace des phases adapté. On entend par là, un espace des phases qui renferme toutes les données du problème.

Dans l'analyse d'un système dynamique, ce qu'il faut d'abord comprendre, c'est *la géométrie de l'espace des phases*; celle-ci détermine la nature du système rencontré. Par la suite, grâce à elle, on pourra identifier les zones où les mouvements sont facilement descriptibles, et les zones de "turbulences", et, on détermine ainsi les théorèmes utilisables pour la suite pour donner un maximum d'informations topologiques, métriques et probabilistes... Plus simplement, comprendre, décrire pleinement le système étudié.

Formellement, un *système dynamique*, en temps discret, (X, T) est constitué par un espace X , l'*espace des phases* : celui-ci représente tous les états que peut prendre le système étudié; et d'une fonction T de X dans X appelée *loi d'évolution* : celle-ci décrit étant donné un système dans un état x le prochain état du système. Pour avoir une théorie intéressante, on supposera toujours que X est un espace topologique, compact et métrique, et que T est continue.

L'ensemble des futurs d'un point x de l'espace des phases sera ainsi dénoté :

$$\mathcal{O}(x) = \{T^n(x), n \in \mathbb{N}\}$$

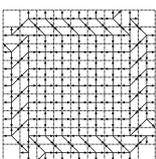
Ce dernier ensemble s'appelle l'*orbite (positive)* d'un point x . Il désigne l'ensemble des états futurs, ce qu'on pourrait appeler l'*évolution* ou de *trajectoire* d'un point x dans ce système dynamique. L'évolution d'un point du système est complètement spécifiée par la loi d'évolution du système, un point x du système ne peut avoir qu'un seul futur.

Quand T est bijective, on pourra aussi parler de *orbite bidirectionnelle* :

$$\mathcal{O}(x) = \{T^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$$

Un ensemble $E \subseteq X$ sera dit T -invariant si $T(E) \subseteq E$. Une orbite est ensemble T -invariant. Une réunion arbitraire d'ensemble T -invariants est encore un ensemble T -invariant.

Note 1.3.1.1 *On associe souvent la théorie des systèmes dynamiques à la théorie du chaos, et donc aux phénomènes de bifurcation. Une bifurcation est le phénomène qui conduit deux éléments d'un même sous-ensemble X à se retrouver sous l'action de la loi d'évolution du système dans deux ensembles disjoints. Un point seul ne bifurque donc pas. Par contre sur des zones de l'espaces des phases, comme il peut y avoir des zones de mouvements très simples où tous les points subissent à peu près le même mouvement; il peut y avoir des zones de mouvement très complexes où tous les points de la zone n'évoluent pas une direction commune. Et c'est en étudiant des ensembles d'orbites qu'on observe ces bifurcations.*



1.3.1c Propriétés des systèmes

Les théorèmes qui concernent la théorie des systèmes dynamiques permettent de classer les systèmes dynamiques et ils donnent des outils pour mener à bien leur analyse.

Un système *ergodique* vérifie que les seuls ensembles T -invariants sont \emptyset et X .

Si on définit la relation de récurrence entre les points du système : $(x, y) \in \mathcal{R}$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \exists n > 0, d(y, T^n(x)) < \epsilon$, alors un système est *minimal* si $\mathcal{R} = X \times X$. C'est-à-dire si pour tout point x de l'espace X , on a qu'il existe n tel que la $n^{\text{ième}}$ itération de T sur X peut nous conduire arbitrairement près de x :

Un système est *récurrent* si $\forall \epsilon > 0, \forall x \in X, \exists n \in \mathbb{N} | d(x, T^n(x)) < \epsilon$. Un système est *uniformément récurrent* si $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 > 0, \forall x \in X, \exists n < n_0 | d(x, T^n(x)) < \epsilon$.

Une introduction plus détaillée des systèmes dynamiques et qui reprend de nombreux points de ce dont nous allons parler peut être trouvé dans [FNRS00][KUR03].

1.3.1d Systèmes dynamiques induits et intégrés

La notion de système dynamique induit et celle de système intégré sont capitales pour la compréhension des phénomènes liés à l'autosimilarité.

On considère la fonction à valeur entière k_E sur E qui indique pour chaque point de E son *temps de retour* dans E , formellement $k_E = \min\{n \geq 1 | T^n(x) \in E\}$. La fonction de k_E est bien définie presque partout, c'est bien sûr là une conséquence directe du théorème de récurrence de POINCARÉ^(a).

De plus, si T est ergodique alors la formule suivante est vraie : $\int_E k_E(x) d\mu_E(x) = [\mu(E)]^{-1}$. Elle signifie en clair que le temps de retour moyen est égal à $[\mu(E)]^{-1}$.

Les classes d'équivalence par l'application de temps de retour k_E forment une partition de départ induite par les premier retour sur l'ensemble E . L'image de cette partition lors de son premier retour dans E donne une nouvelle partition de E .

A partir de là, il est possible de définir les notions très générale de système dynamique induit et de système dynamique intégré – nous reprenons ici des éléments de KORNFIELD et SINAI :

- Pour presque tout x appartenant à E on peut alors définir la fonction $T_E(x) = T^{k_E(x)}x, x \in E$. On vérifie facilement que T_E est un automorphisme de l'espace mesurable de l'espace $(E, \mathcal{M}_e, \mu_E)$ où \mathcal{M}_e est la σ -algèbre des ensembles $A, A \in \mathcal{M}, A \subseteq E$.

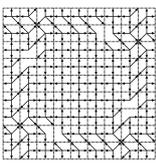
L'automorphisme T_E est appelé l'*automorphisme induit* par T sur l'ensemble E .

On définit le *système dynamique induit* à partir d'un système $S_B = (X, T)$ sur un ensemble $E \subseteq X$, comme étant le système dynamique dont l'espace des phases est E et ayant pour action associée l'automorphisme induit par T sur E .

Note 1.3.1.2 *Nous utiliserons souvent la construction consistant à calculer des automorphismes induits même si le nom ne sera pas toujours prononcé. On comprends bien quel peut être le lien entre isomorphisme induit et substitution, qui à un point e de E il est possible d'y associer une suite finie de termes de premier retours $w_E(e) = \{T^i(e)\}_{i \in \{0 \dots k_E(e)-1\}}$, cette suite est appelée un mot de retour. Si on étend w_E en un morphisme pour la concaténation, il est alors possible de retrouver la dynamique sur X à partir de celle sur E !*

- Là encore il s'agit d'un principe très général, et il est possible de définir une construction duale Soit T_1 un automorphisme de l'espace $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ et $f \in L^1(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ une fonction

^(a)Le théorème de Poincaré s'exprime formellement ainsi : Soit X est un espace mesurable compact, T un application mesurable de X dans lui même et μ une mesure T -invariante. Alors, pour tout $A \subseteq X$, μ -presque tous les points de A reviendront dans A une infinité de fois.



positive à valeur entière. On introduit l'espace de M dont les points sont de la forme (x_1, i) avec x_1 dans M_1 est $0 \leq i < f(x_1)$, et i un entier. On définit la mesure μ sur M par $\mu(A_i) = \mu(A) \left(\int_{M_1} f d\mu_1 \right)^{-1}$ où les $A_i \subseteq M$ sont des ensembles de la forme (A, i) , $A \in \mathcal{M}_1$ et la transformation T^f de M est alors donnée par

$$T^f(x_1, i) = \begin{cases} (x_1, i + 1) & \text{si } i + 1 < f(x_1) \\ (T_1(x_1), 0) & \text{si } i + 1 = f(x_1) \end{cases}$$

Informellement et, à l'attention du lecteur averti, remarquons que la notion d'automorphisme intégral nous conduit à la construction des tours de ROHLIN/KAKUTANI associées à la dynamique.

Note 1.3.1.3 *On remarque que ces définitions qui sont très bien définies dans le cas unidimensionnel promettent d'être nettement plus délicate à manipuler dans le cas bidimensionnel.*

On dira qu'une dynamique est *autosimilaire*, s'il existe une chaîne ultimement périodique de systèmes dynamiques induits construite en inférant progressivement les ensembles sur lesquels faire l'induction à partir de la partition de premier retour.

1.3.1e Échanges d'intervalles et de morceaux

Définition 1.3 (échange d'intervalles) *Un échange d'intervalles sur $[0, 1[$ est une isométrie par morceaux. Elle est complètement définie par un couple (\mathbf{v}, p) :*

- d'un vecteur \mathbf{v} de n réels strictement positifs ;
- d'une permutation p des n premiers entiers.

Les coordonnées du vecteur réel définissent la longueur des intervalles à intervertir ; la permutation précise la façon dont les intervalles seront intervertis lorsque l'échange aura lieu.

Plus précisément, on définit une première partition à l'aide d'une succession de points a_i , avec $a_i = \sum_{k=1}^{k \leq i} \mathbf{v}(i)$ Ces points délimitent des intervalles I_i qui forment cette partition : $I_i = [a_{i-1}, a_i[$.

Après permutation, on obtient une seconde partition définie à l'aide des points $b_i = \sum_{k=1}^{k \leq i} \mathbf{v}(p^{-1}(i))$

Les points délimitent des intervalles J_i qui forment la partition d'arrivée : $J_i = [b_{i-1}, b_i[$.

L'application qui effectue l'échange d'intervalles est l'isométrie par morceaux telle que l'image de I_i soit J_j . c'est-à-dire l'application f_e qui à tout x appartenant à I_i associe le point $f_e + x$.

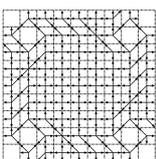
Les échanges de morceaux isométrie par morceaux ont de nombreuses propriétés particulières :

Définition 1.4 *Un échange de morceaux X sur \mathbb{T}^n est une isométrie par morceaux. complètement spécifiée via un triplet de la forme :*

- le nombre n de morceaux à permuter ;
- une partition de départ qui indique la forme des morceaux à échanger ;
- les vecteurs \mathbf{v}_i de déplacements associés à chacun des morceaux.

Les échanges de morceaux sont la généralisation multidimensionnelle des échanges d'intervalles.

Note 1.3.1.4 *Il est à noter que dans les isométries par morceaux les applications de premier retour induisent le plus souvent un échange de morceaux que sont de nouveaux des isométrie par morceaux Le plus souvent, on peut alors re-partitionner les F_i en fonction des temps de retours. En suivant la*



trajectoire de chaque morceaux, on peut construire des tours de ROHLIN. En dimension 1, ces tours de ROHLIN forment un moyen de trouver quelle est la substitution qui transforme la trajectoire sur le sous-ensemble sur lequel est construit le système dynamique induit, et la dynamique globale.

1.3.1f Exemple 1 : dynamique sur le tore

La plupart des systèmes dynamiques que nous étudierons ont pour espace des phases un tore multidimensionnel \mathbb{T}^n . Sur le tore \mathbb{T}^1 , les systèmes dynamiques rencontrés sont, en général, des échanges intervalles, et la majorité du temps ce seront des translations sur le tore.

Proposition 1.2 *Tout échange non trivial de deux intervalles est assimilable à une translation sur un tore unidimensionnel.*

Démonstration :

Il n'existe qu'une seule permutation p de deux intervalles non triviale : $12 \rightarrow 21$. On appelle λ_2 la longueur du second intervalle. Alors l'échange d'intervalle de permutation p pour des intervalles de longueur λ_1, λ_2 correspond à une translation sur le tore de λ_2 .

c.q.f.d.

1.3.1g Exemple 2 : Systèmes dynamiques symboliques et shifts

L'emploi de de la théorie de la dynamique symbolique sur les mots, passe par l'emploi d'une opération dénommée *décalage* ou *shift* ou notée T , qui consiste à opérer un décalage du mot considéré :

$$\forall i \in P, (T(w))(i) = w(i + 1)$$

avec $P = \mathbb{Z}$ ou $P = \mathbb{N}$.

Si on prend un mot bi-infini w , il est possible de lui associer, l'ensemble T -invariant, on parle du sous-shift associé w , on le note $S(w)$. Tout ensemble fermé T -invariant d'un tel système est appelé un *sous-shift*.

L'opérateur de shift est uniformément continu, surjectif, bijectif sur $Q^{\mathbb{Z}}$.

Dans le cadre de la dynamique symbolique, le fait d'avoir un espace des phases compact sur lequel opère une application uniformément continue, lui donne le titre de *système dynamique topologique*.

On équipe les mots de la distance usuelle entre eux :

– $d(w, w') = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(w_k, w'_k) 2^{-|k|}$ où $\delta(x, y)$ vaut 1 si $x \neq y$ et 0 sinon.

L'ensemble des mots obtenus, une fois équipé de la topologie induite par la distance d , est un espace compact, métrique et complet.

Finalement, vu que nous allons nous intéresser aux images, nous sommes amenés à introduire la même distance similaire sur les configurations

– $d(c, c') = 2^{-||k||}$ où k désigne la position la plus proche de 0 telle que $c(p) \neq c'(p)$

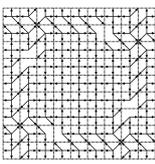
Si un facteur qui n'apparaît pas dans un sous-shift est appelé un *facteur interdit*. Un shift est dit *de type fini* si le nombre de facteurs interdits qui le définissent est borné.

– Lorsqu'un sous-shift est de type fini la langue qui lui est associé est de type fini.

– Lorsqu'un sous-shift est sofique le langage qui lui est associé est reconnaissable.

L'*entropie* de SHANNON d'un système est définie comme W

$$e(w) = \sum p(i) \log_2(p(i))$$



(dans la formule générale p_i indique la fréquence d'un évènement)

La fonction de complexité dont la variation est directement reliée à l'entropie topologique du système est un élément caractéristique important du système. Généralement plus précise que l'entropie topologique, elle est considérée, comme relativement robuste à l'application de morphismes, elle est donc un élément important qui permet de disqualifier l'existence d'un isomorphisme entre deux systèmes.

1.3.2 Systèmes dynamiques multidimensionnels

1.3.2a Systèmes dynamiques en dimensions supérieures

Grâce aux techniques précédentes, on peut mettre en évidence la structure autosimilaire de certains mots du fait de l'existence de morphismes de systèmes dynamiques entre des espaces continus vers les mots. Afin de pouvoir obtenir le même type de résultats sur des objets bidimensionnels, comme des configurations, nous allons travailler avec des systèmes dynamiques multidimensionnels abéliens.

Au lieu de se donner une seule application T , on part de deux applications, T_1 et T_2 qui agissent sur X et qui satisfont $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$. On se retrouve face à un système dynamique bidimensionnel. Il est dénoté par (X, T_1, T_2) . Il vérifie

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \forall x \in X, (m, n) \cdot x = T_1^m \circ T_2^n(x).$$

Pour un système dynamique en temps discret, on définit l'orbite d'un point $x_0 \in X$ d'un tel système :

$$\mathcal{O}(S, x_0) = \{T_1^m \circ T_2^n(x_0) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Les systèmes dynamiques bidimensionnels (i.e. dont la dynamique est bidimensionnelle / issue de plusieurs shifts) ne sont pas encore légitimes. Voir, [FNRS00], [SCH99] et [EIN00].

Dans un système dynamique bidimensionnel, on définit : Un système dynamique bidimensionnel est *récurrent* si

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in X, \exists m, n \in \mathbb{Z}^2 \mid d(x, T_2^m \circ T_1^n(x)) < \epsilon$$

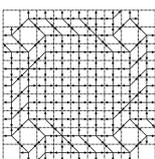
Un système dynamique bidimensionnel est *uniformément récurrent* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists m_0 > 0, \exists n_0 > 0, \forall x \in X, \exists m, n \in \{0, \dots, m_0 - 1\} \times \{0, \dots, n_0 - 1\} \mid d(x, T_2^m \circ T_1^n(x)) < \epsilon$$

1.3.2b Systèmes dynamiques symboliques multidimensionnels

Associer un caractère symbolique au système dynamique multidimensionnel $S = (X, T_1, T_2)$, cela signifie que l'on va essayer de coder l'orbite sur un alphabet fini. Cela signifie qu'on est en train d'observer la dynamique à travers une projection sur un alphabet fini.

Pour ce faire, on se dote d'une fonction *fonction d'étiquetage* l définie sur X et qui envoie X sur l'alphabet fini Q ; c'est une fonction constante par morceaux pour laquelle l'ensemble des antécédents d'une lettre X correspond à une zone connexe de X . Cette fonction prend des valeurs constantes sur les parties d'une partition de P_l de l'espace des phases. Pour être propre, cette partition P_l devra être composée d'un nombre fini de morceaux connexes. Nous indexerons généralement canoniquement les éléments de la partition par la valeur de l sur la partie considérée. $\#P_l$ désigne le nombre de parties de la partition.



1.3.2c Difficultés de l'approche de dynamique symbolique en dimensions non unitaire

Malgré des efforts prolongés de recherche de la part de l'ensemble de la communauté, pour faire émerger une théorie cohérente des mots en dimension supérieure – jusqu'à ce jour aucun modèle n'a réussi à supplanter les autres. On manque d'une théorie globale reconnue unifiant les nombreux résultats fondamentaux candidats.

Dans les paragraphes suivants, nous exposons certaines notions permettent de mieux comprendre les difficultés que que peut engendrer la généralisation de ces idées dans des dimensions supérieures à 1.

- absence de notions d'automates en dimension 2 ;
- absence de définition standardisée de système dynamique induit ;
- indécidabilité de l'existence de pavage étant donné un jeu de tuiles ;
- indécidabilité de la périodicité étant donné un jeu de tuiles ;
- conjecture de NIVAT-VUILLON.

1.3.2d Le prolongement de la notion de reconnaissabilité

Les systèmes dynamiques symboliques permettent de caractériser par le biais de langages de facteurs projetés les langages reconnaissables. En dimension 2, l'apparition d'un paradigme a pris plus de temps à complètement percer, néanmoins, dans leur article synthétique [GR97], Dora GIAMMARRESI et Antonio RESTIVO suggèrent une définition pour les langages reconnaissables de motifs.

La définition a été choisie du fait de sa nature a priori paradigmatique. En effet, celle-ci fait coïncider plusieurs grandes classes de modèles de reconnaissances de langages bidimensionnels : Les langages reconnaissables par les logiques existentielles monadiques à l'ordre 2, les langages reconnaissables par certains automates cellulaires, les langages reconnaissables par les expressions régulières sur les motifs sans complément coïncident.

L'article [GR97] précise aussi que sur les langages de mots rectangulaires, il existe des analogues du lemme de l'étoile. Ces lemmes existent dans les directions horizontales, et dans les directions verticales mais ils ne peuvent se généraliser directement en dimension directement dans l'application à un motifs selon les deux directions, et donc il ne s'agit donc pas réellement d'une extension bidimensionnelle du lemme de l'étoile.

1.3.2e Pure apériodicité

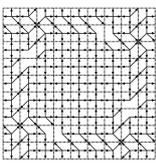
Afin de mieux situer les problématiques liées aux langages formels bidimensionnels, on rappelle quelques grands éléments concernant l'apériodicité et les langages de motifs.

Tout d'abord signalons qu'une configuration C est apériodique s'il n'existe pas de vecteur $\mathbf{v}_P \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ tel que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$, on ait $C(\mathbf{v}) = C(\mathbf{v} + \mathbf{v}_P)$. Il faut savoir qu'il existe des langages de motifs finis qui ne génèrent que des configurations apériodiques – on parlera de *jeux de tuiles purement apériodiques*. Dans le continu, on connaît bien sûr le jeu de tuiles de PENROSE.

Des exemples de tels jeux de tuiles sont proposés par WANG - AMMAN[AGS91], Jarkko KARI [KAR96].

En pratique, les méthodes de conception de tels jeux de tuiles varient en fonction des auteurs. Certains auteurs s'appuient sur les propriétés géométriques des quasi-cristaux. D'autres auteurs préfèrent s'appuyer sur des calculs infinis, et les coder dans un diagramme espace-temps d'automates cellulaires, dont la règle est transcrite via les tuiles de WANG qui composent le langage.

Décider si le plan est pavable par un ensemble de tuiles données est indécidable :



Théorème 1.2 (BERGER,[BER66]) *Etant donné la description d'un jeu de tuiles de WANG, le problème de décider de l'existence d'un pavage du plan est indécidable.*

Un théorème de Raphael ROBINSON prouve qu'étant donné un jeu de tuiles décider de l'existence d'un pavage périodique est indécidable.

La conjecture de NIVAT-VUILLON énoncée lors de [NIV97], est sans réponse complète depuis près de dix ans illustre encore les difficultés auxquelles on peut se confronter dans de tels problèmes.

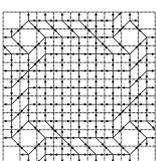
1.3.3 Conclusion de la section

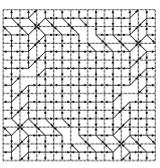
Pour utiliser la puissance des formalismes continus, on va dans la suite exploiter la théorie des systèmes dynamiques symboliques. En particulier, grâce à la notion de systèmes dynamiques induits et de systèmes dynamiques intégrés, nous avons montré ce quoi ce formalisme était particulièrement adapté pour faire le lien avec des systèmes qui relie une gamme d'objets dépendant de paramètres réels à des objets substitutifs. Plus tard, ces préliminaires nous seront utiles pour faire le lien entre notre problème et les systèmes S -adiques définis en 4.1.1. Dans ce chapitre, nous avons encore présenté la notion généralisée de système dynamique symbolique multidimensionnel, et nous avons mis en évidence les raisons qui rendent ce type de travail tout à fait préliminaire : un certain nombre de difficultés peuvent être rencontrées quand on essaie de généraliser certaines notions classiques aux dimensions supérieures – et seul l'usage nous permettra par la suite de savoir comment ne pas se perdre dans ces hors-pistes.

1.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons survolé deux théories : la géométrie discrète et les systèmes dynamiques symboliques – et nous avons mis en avant les notions-clefs qui nous sont utiles dans la présentations de ces deux disciplines.

Nous sommes maintenant prêts pour attaquer le cœur de ce qui nous intéresse.





Chapitre 2

Dynamiques multidimensionnelles des rotations discrètes

Plan détaillé du chapitre

2.1	Introduction	23
2.2	Définition des configurations	24
2.2.1	Définition de C_α	24
2.2.2	Définition de C'_α	25
2.2.3	Exemples de configurations	27
2.3	Propriétés essentielles des configurations	34
2.3.1	Symétries	34
2.3.2	Caractéristiques des symboles dans C_α	34
2.3.3	Caractéristiques des symboles C'_α	35
2.3.4	Le codage préserve les informations sur la structure des lignes	36
2.3.4a	Equivalence entre formalismes et sous-configurations	38
2.3.5	Bijektivité entre configurations	40
2.3.6	Transduction entre configurations	40
2.3.6a	Transduction planaire de C_α vers C'_α	42
2.3.6b	Transducteur de C'_α vers C_α	46
2.4	Les systèmes dynamiques multidimensionnels symboliques associés	48
2.4.1	La dynamique de C_α	48
2.4.2	Dynamique de C'_α	50
2.4.3	Définition de $C'_{B,\alpha}$	51
2.4.4	Théorème fondamental pour $C'_{B,\alpha}$	53
2.4.5	Dynamique symbolique des rotations 3-transvections	57
2.4.6	Liens avec les plans discrets	61
2.5	Conclusions du chapitre	61

"A theory with mathematical beauty is more likely to be correct than an ugly one that fits some experimental data. God is a mathematician of a very high order, and He used some very advanced mathematics in constructing the universe."

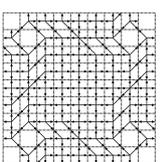
Paul DIRAC

"A mathematician is a machine for turning coffee into theorems."

Paul ERDÖS

2.1 Introduction

Existe-t-il un automate cellulaire capable d'effectuer une rotation discrète sur la configuration qu'il contient ? Si nous faisons le pari que cette question admet une réponse positive, que cela implique-t-il ?



Il doit exister des configurations globales sur lesquelles un ensemble de règles de transitions locales pourraient être appliquées afin d'effectuer des rotations discrètes. Les deux nouvelles questions que nous devons nous poser sont alors : Quelles sont ces configurations ? Quelles sont ces règles de transitions ? A ce stade, ces questions nous paraissent tout autant non triviales que la première.

On vient simplement reformuler le problème, en deux problèmes a priori plus "simples".

Dans ce chapitre, ce qui va nous intéresser, c'est l'existence d'un codage du processus de rotation à travers la grille \mathbb{Z}^2 ; plus précisément à travers des configurations sur un nombre fini d'états. Ce n'est pas une réponse directe à notre première interrogation. Nous allons néanmoins montrer qu'un processus local est capable à partir d'une telle configuration d'effectuer la rotation encodée.

Voici le plan du chapitre.

Dans un premier temps, on donne une définition précise à ces configurations, on donne des exemples. Au passage, on explicite leurs différents modes de représentation.

Dans un second temps, on décrit les caractéristiques principales de celles-ci. La pertinence des définitions est justifiée par une série de remarques. En particulier, nous prouvons qu'il existe une bijection entre l'angle de rotation et la configuration obtenue, et l'on démontre l'existence de transductions planaires qui transforment une configuration en une autre. On notera que le transducteur effectuera alors la rotation encodée.

Dans un troisième temps, nous établissons les liens avec la théorie des systèmes dynamiques symboliques multidimensionnels. C'est-à-dire que nous allons prouver que la première définition donnée est équivalente à un codage d'une \mathbb{Z}^2 - action sur le tore. Puis, pour chacun des types de configurations étudiées, nous explicitons alors les rapports entretenus avec la dynamique sur le tore. Les quatre théorèmes énoncés sont fondamentaux dans la poursuite de cette étude.

Pour conclure, et afin d'être exhaustif dans ce chapitre, nous précisons encore l'apparence du système dynamique associé aux configurations de rotations 3-transvections.

2.2 Définition des configurations

Soit α un réel qui mesure un angle de rotation en radians. Pour des raisons de symétries, et sauf mention contraire, cette étude se focalisera uniquement sur le premier octant. Nous ferons l'hypothèse que α est toujours compris entre 0 et $\pi/4$.

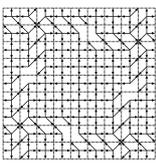
On rappelle que $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$. r_α désigne la rotation euclidienne classique, $[r_\alpha]$ la version discrétisée de celle-ci telle que présentée au chapitre précédent. \mathcal{V}_4 est la relation de 4-voisinage, celle qui relie un point \mathbf{v} aux points $\{\mathbf{v} + \mathbf{i}, \mathbf{v} + \mathbf{j}, \mathbf{v} - \mathbf{i}, \mathbf{v} - \mathbf{j}\}$.

2.2.1 Définition de C_α

Informellement, on définit la configuration C_α associée à la rotation discrétisée d'angle α par :

En chaque point \mathbf{v} de \mathbb{Z}^2 , la configuration C_α indique la position des images des quatre 4-voisins de \mathbf{v} relativement à l'image \mathbf{v} par $[r_\alpha]$, la transformation considérée.

Une autre façon de voir les règles de génération de C_α est de considérer deux grilles tournées l'une par rapport à l'autre d'un angle α . La première grille représente l'ensemble des lignes de discontinuités de l'opérateur de discrétisation $x \mapsto [x]$. La seconde grille représente le réseau $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$ équipé d'arcs symbolisant la relation de 4-voisinage \mathcal{V}_4 . La configuration C_α décrit pour un



point de la grille tournée, la disposition relative de ses 4-voisins en fonction de la cellule d'arrivée de ces points. Cette construction est résumée dans la Figure 2.1.

Dans le cas de la rotation discrétisée, une flèche est un élément de $\{-1, 0, 1\}^2$. L'ensemble des flèches sera dénoté par \mathbb{A} . L'ensemble Q , l'espace d'arrivée de la configuration C_α , est l'ensemble des ensembles de flèches $2^{\mathbb{A}}$.

La configuration C_α , qui indique la position relative des 4-voisins après rotation discrétisée, se définit formellement ainsi :

Définition 2.1

$$C_\alpha : \mathbb{Z}^2 \mapsto 2^{\mathbb{A}} : \mathbf{v} \mapsto \bigcup_{\mathbf{v}' \in \mathcal{V}_4(\mathbf{v})} \{[r_\alpha](\mathbf{v}') - [r_\alpha](\mathbf{v})\}$$

Le lecteur peut se référer à la Figure 2.3(a) pour un exemple de configuration.

Note 2.2.1.1 *Pour transposer le principe d'une rotation dans une transformation locale, l'idée directrice est de permettre le calcul de proche en proche de l'image d'un point tourné ; c'est ce que permettent les configurations que venons de définir.*

Note 2.2.1.2 *Le procédé conduit à une configuration sur un alphabet fini : la rotation discrétisée est une $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -quasi-isométrie. De ce fait, les images des 4-voisins de \mathbf{v} arrivent dans une boule de taille $\frac{\sqrt{2}}{2}$ autour de l'image de \mathbf{v} . Cette boule de taille finie contient nécessairement un nombre fini de points de \mathbb{Z}^2 , en l'occurrence elle en contient neuf.*

Note 2.2.1.3 *Ici, l'ensemble des états aurait pu être formé soit par des ensembles, soit par des quadruplets ordonnés de "flèches". A la section 2.3.4a, on montre que si α est compris entre 0 et $\pi/4$, ce choix n'a que de peu d'importance. Le formalisme ensembliste est plus léger à manipuler. Nous le préférons donc en général.*

2.2.2 Définition de C'_α

La description fournie par C_α est attachée au domaine des pré-images : il faut calculer $[r_\alpha](\mathbf{v})$, c'est-à-dire effectuer la rotation discrétisée de \mathbf{v} , pour pouvoir exploiter l'information de $C_\alpha(\mathbf{v})$ et pouvoir obtenir ainsi la position de 4-voisins : $[r_\alpha](\mathbf{v} + \mathbf{i})$, $[r_\alpha](\mathbf{v} - \mathbf{i})$, $[r_\alpha](\mathbf{v} + \mathbf{j})$, $[r_\alpha](\mathbf{v} - \mathbf{j})$. En ce sens la configuration nous permet de calculer la rotation de proche en proche mais elle n'a pas subi la transformation.

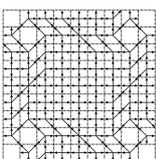
Il est possible de réaffecter l'information contenue par C_α à la cellule image. En procédant ainsi, on obtient une nouvelle configuration C'_α qui n'est autre en fait qu'une image de la grille tournée comme en témoigne par exemple la Figure 2.5. Plus formellement, cela peut être vu comme l'application de la rotation discrétisée sur la relation 4-voisines \mathcal{V}_4 .

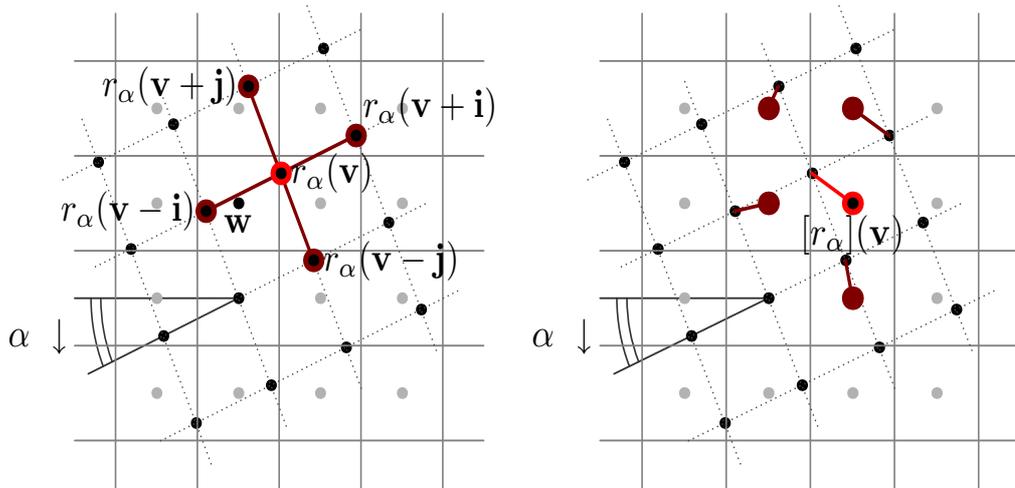
Pour construire C'_α , à chaque point de l'espace d'arrivée $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^2$, on affecte l'union des ensembles de flèches des $C_\alpha(\mathbf{v})$, pour tous les \mathbf{v} qui sont antécédents de \mathbf{w} par rotation discrétisée.

Définition 2.2

$$C'_\alpha : \mathbb{Z}^2 \rightarrow 2^{\mathbb{A}} : \mathbf{w} \mapsto \bigcup_{\mathbf{v} \text{ tels que } [r_\alpha](\mathbf{v})=\mathbf{w}} C_\alpha(\mathbf{v})$$

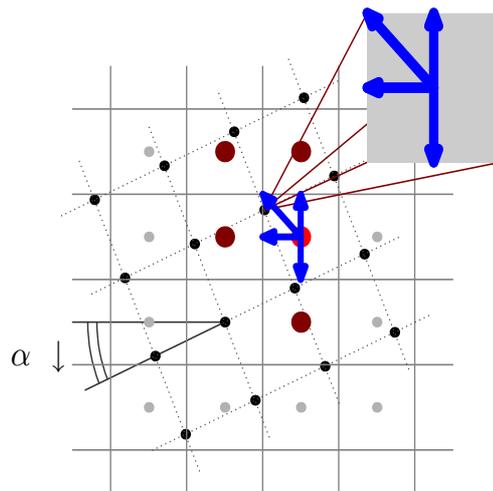
Note 2.2.2.1 *Les états obtenus dans la configuration C'_α sont plus complexes que ceux de C_α puisqu'il dépendent du nombre d'antécédents de la cellule \mathbf{w} et qu'elle peut avoir plusieurs antécédents.*





(a) Dans cette première figure, on considère un point \mathbf{v} dont l'image par rotation est représentée en rouge sur $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$. Les points de \mathbb{Z}^2 sont représentés en gris. Et le bord des cellules de discrétisation associées aux cellules est représenté en pointillés fins noirs.

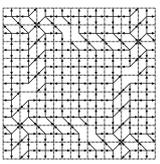
(b) Pour le point \mathbf{v} observé et ses quatre 4-voisins, on considère leur image par rotation discrétisée. La rotation discrétisée est la composition d'une rotation et d'une discrétisation. \mathbf{v} par son image discrétisée associée aux cellules est représenté en rouge sur $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$. La rotation euclidienne est donc déjà effectuée sur cette figure. Il ne reste donc qu'à procéder à la discrétisation.



(c) Dans C_α , on associe à \mathbf{v} , l'ensemble des flèches qui relient l'image \mathbf{v} aux images de ses 4-voisins. En pratique, ce code est calculé pour chaque position de la grille de départ. Cela nous conduit la Figure 2.3(a).

Fig. 2.1 – Une construction étape par étape de la configuration $C_\alpha(\mathbf{v})$. Le symbole obtenu en bleu représente directement le code qui est associé à \mathbf{v} dans C_α .

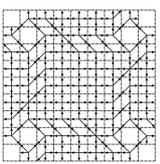
Note 2.2.2.2 Le fait que la configuration C'_α donne un résultat qui dépend du nombre d'antécédents de la cellule par rotation discrétisée conduit à des difficultés, a priori, pour assigner un point réel à chaque cellule. Il semble de primer abord qu'il soit délicat d'interpréter ainsi la configuration C'_α comme étant le résultat du codage d'un système dynamique symbolique, il se trouve que c'est pourtant le cas. Un moyen de remédier à ce problème : procéder à un groupage par bloc sur

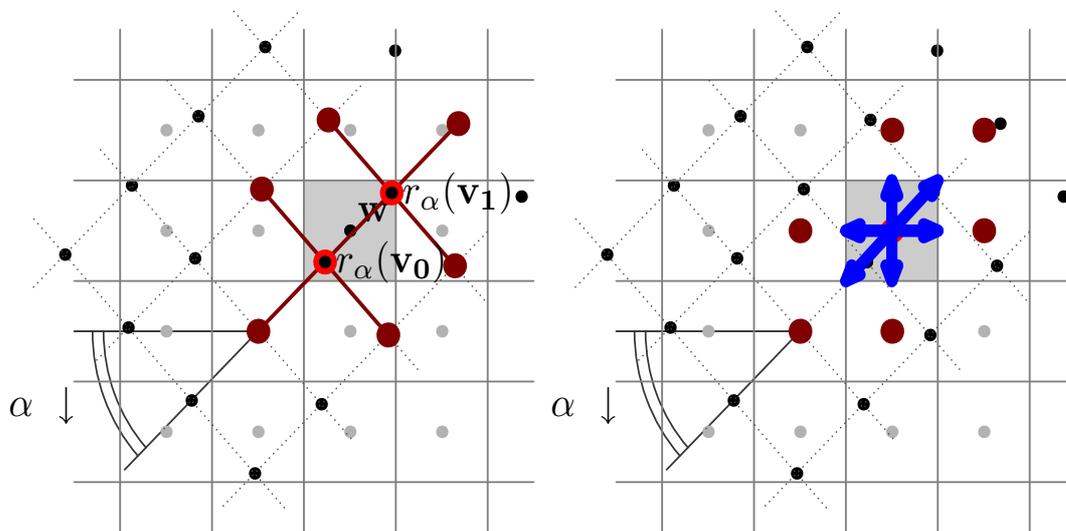


C'_α . C'est le rôle de la définition de configuration $C'_{B,\alpha}$ que nous verrons plus tard. Et la véritable solution consiste à regarder à travers des représentants du tore tourné \mathbb{T}_α .

2.2.3 Exemples de configurations

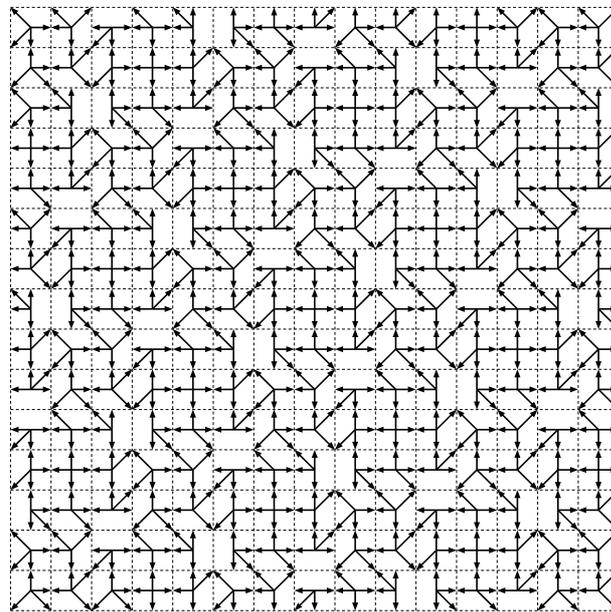
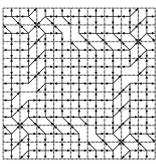
Nous allons maintenant présenter certains exemples de configurations, et différents codages de ces configurations qui mettent en évidence certaines caractéristiques des configurations



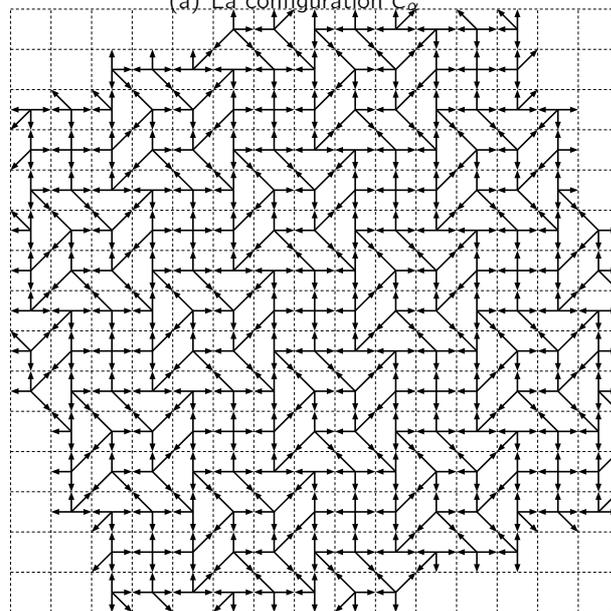


(a) Cette fois-ci, on part d'un point \mathbf{w} de l'espace d'arrivée et on regarde ses antécédents par rotation discrétisée, c'est-à-dire l'ensemble des points dont l'image par rotation, sur r_α appartient à la cellule de discrétisation de \mathbf{w} .
 (b) Le code $C'_\alpha(\mathbf{w})$ est la réunion des codes $C_\alpha(\mathbf{v})$.

Fig. 2.2 – Une construction progressive de la configuration C'_α . Puisque, dans C'_α , l'ensemble de flèches est attaché à la position d'arrivée, il peut y avoir des points avec deux antécédents (ou des points sans antécédent).

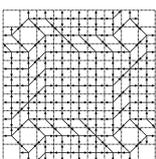


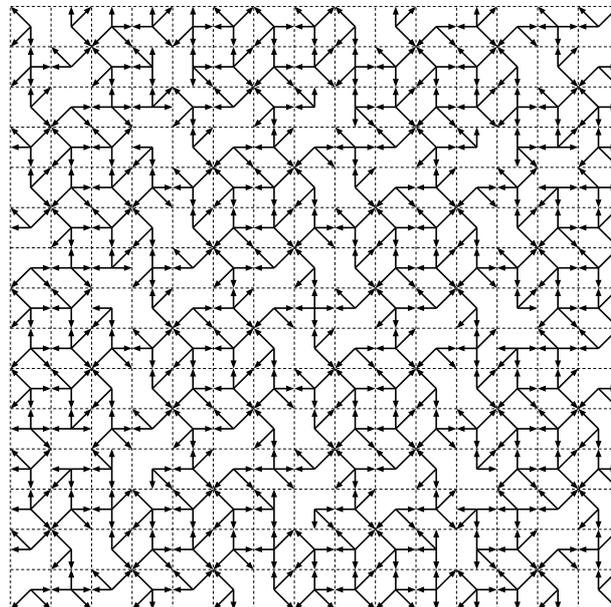
(a) La configuration C_α



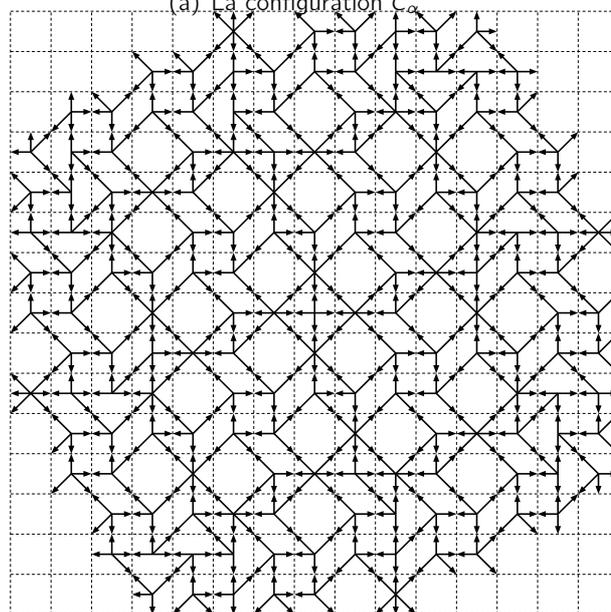
(b) La configuration C'_α

Fig. 2.3 – Exemple de configuration C_α et configuration C'_α pour $\alpha = 0.4$ radians. En observant les deux figures, on pourra intuitivement saisir la possibilité de passer d'une configuration à l'autre par le biais d'un processus local. C'est ce que nous allons mettre en évidence dans la section 2.3.6.





(a) La configuration C_α



(b) La configuration C'_α

Fig. 2.4 – Exemple de configuration C_α et configuration C'_α pour $\alpha = 0.5$ radians.

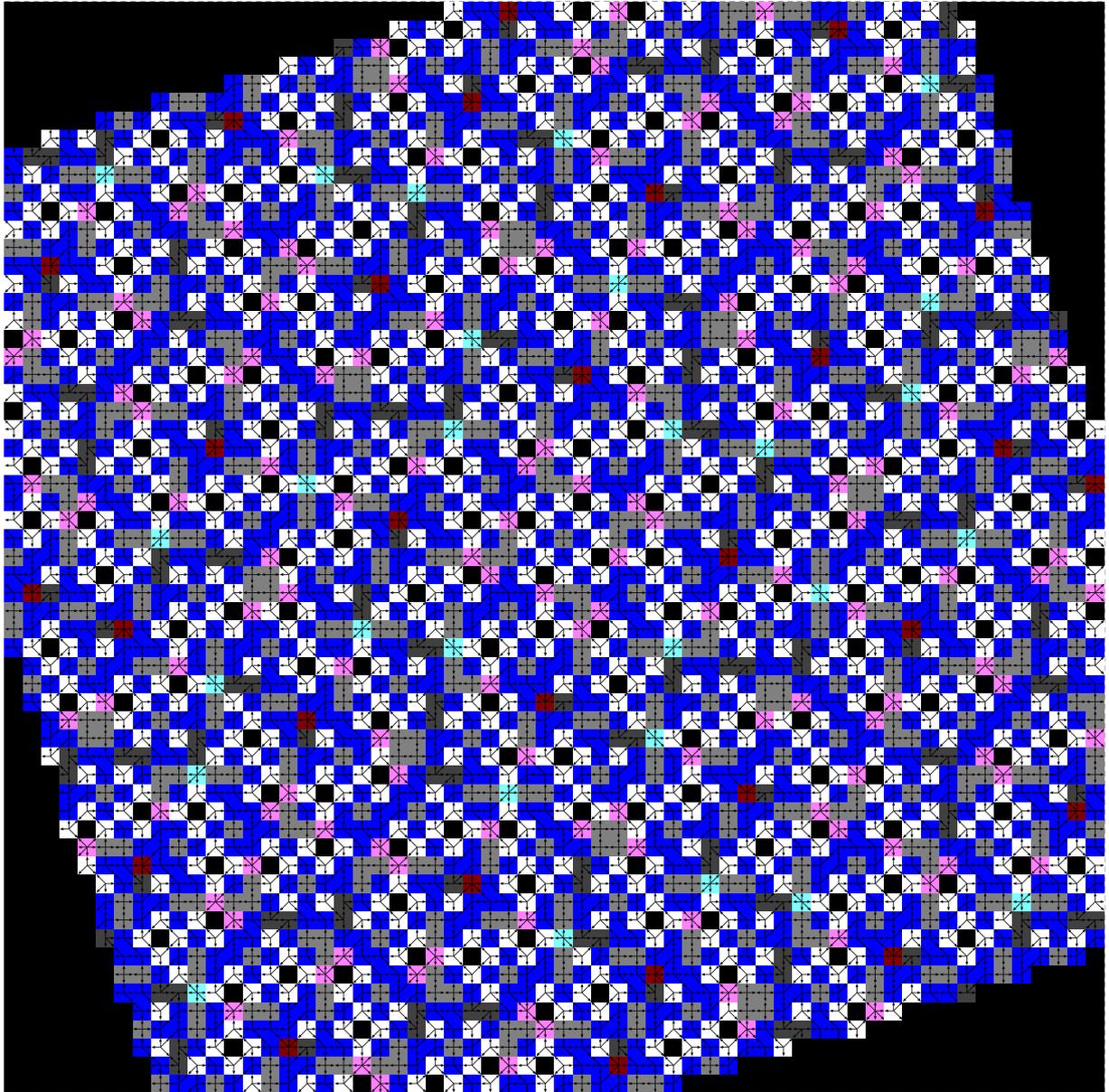
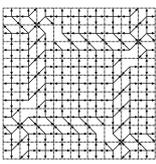
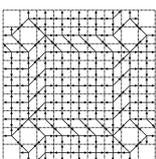


Fig. 2.5 – Exemple de configuration C'_α , pour $\alpha = 0.3$. Ici on a superposé la représentation des symboles par le biais d'ensemble de flèches comme dans la Figure 2.3, et une représentation par couleurs, la palette intégrale décrivant les affectations de couleurs est représentée en Figure 2.6. Les codes couleurs sont affectés à rotation du symbole du près.



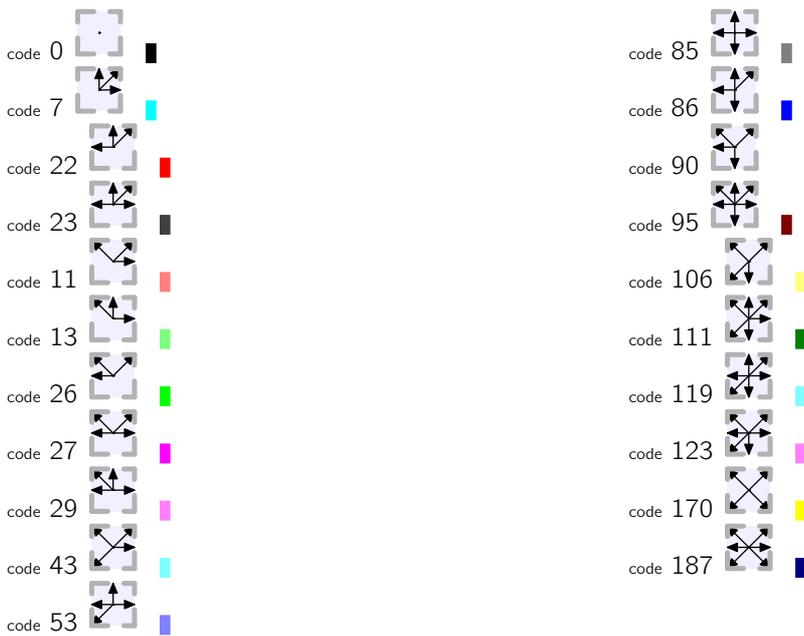


Fig. 2.6 – Palette couleur employée pour recoder les ensembles de flèches en couleurs. Les couleurs sont les mêmes symboles à une rotation à $\pi/2$ près.

Note 2.2.3.1 Pour représenter les configurations, on peut soit représenter directement les symboles, c'est-à-dire, les ensembles de flèches qui leur correspondent à $C_\alpha(\mathbf{v})$ en chaque position \mathbf{v} – comme nous l'avons fait jusqu'ici. Cependant au-delà d'une certaine taille d'images, ces figures ont tendances à devenir illisibles. La palette ci-dessus permet alors de faire une transcription des symboles vers les couleurs. Ce qui nous permet d'observer de manière plus distante les configurations, et ainsi de mieux percevoir leur régularité.

Note 2.2.3.2 A côté de chaque symbole, on associe un code qui décrit le symbole. En effet pour un point donné, il a 8-voisins adjacents. On procède à un codage binaire du symbole. En énumérant, ces directions dans l'ordre trigonométrique direct, on décrit l'existence ou non d'une flèche dans une direction.

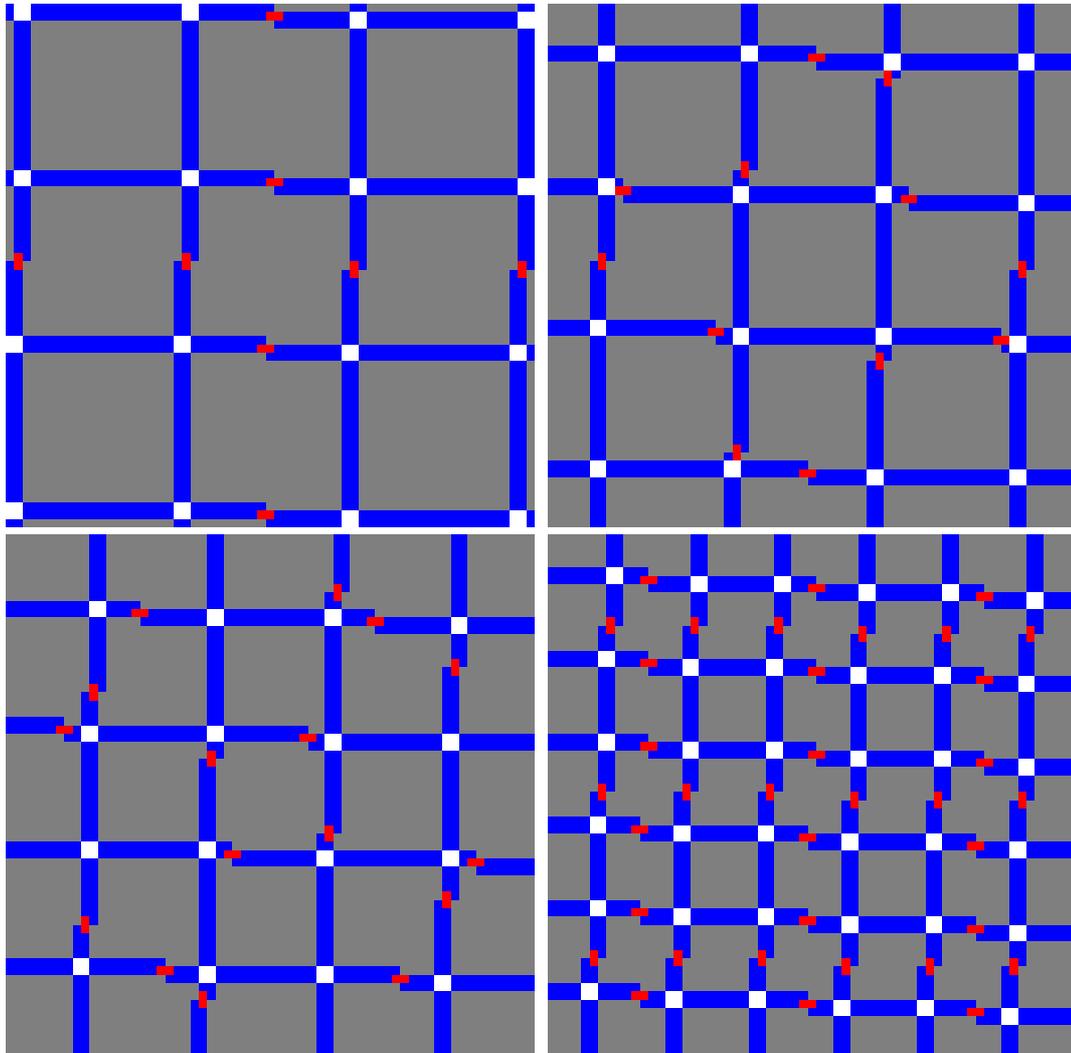
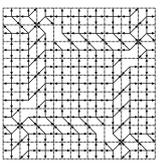
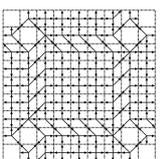


Fig. 2.7 – Les configuration C'_α pour des angles plutôt faibles (inférieurs à 0.1 radians), il est intéressant de remarquer la façon dont les paliers se propagent, et les intersections qui peuvent exister au niveau des paliers – à ces intersections se forment des trous, et les points doubles qui forment des points de "torsion" des paliers.



2.3 Propriétés essentielles des configurations

Voici les propriétés les plus élémentaires des configurations C_α et C'_α :

1. Symétries : Invariance par rotation de $\pi/2$ des configuration pour presque-tout angle α ;
2. Caractéristiques des symboles rencontrés dans C_α ;
3. Caractéristiques des symboles rencontrés dans C'_α ;
4. Équivalence du codage ensembliste/quadruplet (pour α compris entre 0 et $\pi/4$) ;
5. Bijectivité entre les configurations et l'angle α (pour α compris entre 0 et $\pi/4$) ;
6. Existence d'un processus de transduction entre les configurations .

2.3.1 Symétries

Note 2.3.1.1 Les angles pour lesquels il existe $x, y, k \in \mathbb{Z}$ tels que $x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) = k + \frac{1}{2}$, sont appelés des angles charnières. Un angle est dit charnière s'il envoie un point entier sur la frontière d'une cellule de discrétisation. Les angles charnières correspondent aux discontinuités de l'application qui à un angle associe sa configuration.

Nous aurons l'occasion d'étudier ces angles plus en détails dans la Section 5.2.2.

Proposition 2.1 Pour tout angle α pour lequel il n'existe pas $x, y, k \in \mathbb{Z}$ tels que : $x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) = k + \frac{1}{2}$, les configurations C_α et C'_α sont invariantes par rotation de $\pi/2$ (centrée en O), et possèdent donc une symétrie centrale.

Démonstration :

La preuve est fondée sur les élément suivants :

1. Tout d'abord on note que la grille \mathbb{Z}^2 est invariante par rotation de $\pi/2$. $r_{\pi/2}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$;
2. De plus les rotations de $\pi/2$ commutent avec la rotation euclidienne, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2 | r_\alpha(\mathbf{v}) = r_{-\pi/2}(r_\alpha(r_{\pi/2}(\mathbf{v})))$;
3. Finalement on note que l'opération de discrétisation commute avec les changements de signe pour presque tous les nombres réels : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2}), -\{-x\} = \{x\}$. Donc tous les nombres tels que $r_\alpha(r_{\pi/2}(\mathbf{v}))$ n'a pas de coordonnées dans $(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ vont commuter avec la rotation de $\pi/2$.

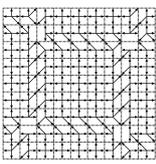
A contrario, on note : $\forall x \in (\mathbb{Z} + \frac{1}{2}), -\{-x\} \neq \{x\}$.

c.q.f.d.

Les configurations admettent une symétrie centrale pour tous les angles sauf pour une infinité dénombrable de configurations correspondant aux angles charnières.

2.3.2 Caractéristiques des symboles dans C_α

Dans la configuration C_α , tous les symboles sont composés de quatre flèches dont au plus une est la flèche $\mathbf{0}$. Pour chaque vecteur \mathbf{v} de \mathbb{Z}^2 , les symboles de $C_\alpha(\mathbf{v})$ possèdent exactement 3 ou 4 différentes flèches qui ne sont pas $\mathbf{0}$. On va montrer que si un symbole de C_α possèdent seulement 3 flèches différentes de $\mathbf{0}$, alors cela implique qu'une des flèches vaut $\mathbf{0}$; et non que deux flèches sont confondues.



Démonstration :

Quand deux éléments sont des 4-voisins d'un point \mathbf{v} , ils sont au moins séparés d'une distance de $\sqrt{2}$ et par conséquent ils ne peuvent pas tenir dans une cellule dont la diagonale, le plus long segment de la cellule, est assimilable à un intervalle $[0, \sqrt{2}[$.

c.q.f.d.

2.3.3 Caractéristiques des symboles C'_α

Proposition 2.2 Une cellule a au plus deux antécédents par rotation discrétisée.

Démonstration :

Supposons qu'il y ait déjà deux points dans la même cellule, et rajoutons un des quatre voisins des deux précédents points. Supposons que les trois points soient alignés, alors il ne peuvent tenir dans la cellule, vu que la plus grande longueur que l'on puisse faire tenir dans la cellule est $\sqrt{2}$ et que la distance entre les trois points est deux. Supposons maintenant que les trois points forment un angle droit. Alors, la distance l sur l'axe des x entre les deux points les plus éloignés des trois points est de $\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \geq 1$. Or, pour que cela puisse tenir il faudrait que cette distance l soit strictement plus petite que 1. Ce qui n'est pas possible.

c.q.f.d.

En pratique,

- Si l'ensemble des antécédents dans \mathbb{Z}^2 d'un cellule \mathbf{w} est un singleton, on dit \mathbf{w} est un *point normal* ;
- \mathbf{w} est un *point double* si cet ensemble contient deux éléments ;
- Quand cet ensemble est vide, \mathbf{w} est un *trou*.

Si \mathbf{w} est un trou, $C'_\alpha(\mathbf{w})$ ne contient aucune flèche.

Proposition 2.3 Si la $C'_\alpha(x, y)$ est un trou alors l'ensemble des cellules de son 4-voisinage ne sont pas des trous.

Démonstration :

On appelle *domino* la réunion de deux cellules adjacentes. Considérons un domino vertical : il est constitué par deux cellules qui partagent un coté horizontal. Soit \mathbf{v} un vecteur à coordonnées entières tel que la ligne horizontale $l_{h,v}$ passant par $r_\alpha(\mathbf{v})$ coupe le domino considéré. Supposons maintenant que nous ayons choisi $r_\alpha(\mathbf{v})$ hors du domino, de telle manière à ce que la longueur entre $l_{h,v}$ et $r_\alpha(\mathbf{v})$ soit minimale. Au moins un élément de l'ensemble $\{r_\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{i}), r_\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{j})\}$ est alors dans le domino ; (du fait de l'hypothèse minimalité). Ce qui nous permet de conclure le cas du domino vertical ; et, la preuve est similaire dans le cas d'un domino horizontal.

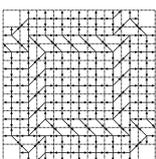
c.q.f.d.

Pour des raisons similaires deux cellules 4-voisines ne peuvent pas être simultanément des points doubles dans C'_α .

Proposition 2.4 Si la $C'_\alpha(x, y)$ est un point double alors l'ensemble des cellules de son 4-voisinage ne sont pas des points doubles.

Démonstration :

Si $r_\alpha(\mathbf{v})$ et $r_\alpha(\mathbf{v}')$ sont dans le même domino vertical, alors on a $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2 < 2^2 + 1^2$. Si $\alpha \neq 0$, on peut supposer $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\| \leq 2$. Si $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\| = 2$, sans perte de généralité, on peut



supposer que $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + 2\mathbf{j}$. Les seuls autres vecteurs possibles dont l'image par r_α puisse être dans le domino sont $\mathbf{v} + \mathbf{j} + \mathbf{i}$ et $\mathbf{v} + \mathbf{j} - \mathbf{i}$. Cependant aucun couple de vecteurs précédents ne peut être simultanément dans le domino puisque la différence entre les composantes horizontales des images vecteur de ces vecteurs par r_α est plus large que 1.

Donc, si les images de quatre vecteurs reposaient dans le même domino, ces vecteurs formeraient les coins d'un carré unitaire fermé, dans ce cas là on aurait au moins deux points à distance $\sqrt{2}$.

Plus, globalement tout ceci implique qu'un carré unitaire fermé soit contenu dans un domino : ceci n'est pas possible ; il existe une ligne horizontale dont l'intersection avec le carré fermé considéré est de longueur supérieure à 1. Ce qui est en contradiction avec nos attentes.

c.q.f.d.

Proposition 2.5 Dans la configuration C'_α , tous les symboles sont composés de 0, 4 ou 6 flèches non nulles.

Démonstration :

Soit \mathbf{v} et \mathbf{v}' deux vecteurs de \mathbb{Z}^2 .

Supposons que $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{i}$; (on peut commencer une étude similaire avec $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{j}$). On prouve aisément que $[r_\alpha](\mathbf{v} + \mathbf{j}) \neq [r_\alpha](\mathbf{v}' + \mathbf{j})$. Si on s'intéresse à la coordonnée horizontale on obtient : $r_\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{j})_x = r_\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{i})_x - \cos \alpha - \sin \alpha$, donc $r_\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{j})_x \leq r_\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{i})_x - 1$, ce qui donne $[r_\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{j})_x] < [r_\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{i})_x]$. D'un autre côté, on a : $r_\alpha(\mathbf{v}' + \mathbf{j})_x = r_\alpha(\mathbf{v})_x + \cos \alpha - \sin \alpha$, donc $r_\alpha(\mathbf{v}' + \mathbf{j})_x \geq r_\alpha(\mathbf{v})_x$ (on rappelle que $0 \leq \alpha \leq \pi/4$), ce qui donne $[r_\alpha(\mathbf{v}' + \mathbf{j})_x] \geq [r_\alpha(\mathbf{v})_x]$. Ainsi, nous avons : $[r_\alpha(\mathbf{v}' + \mathbf{j})_x] > [r_\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{j})_x]$, puisque $[r_\alpha(\mathbf{v})_x] = [r_\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{i})_x]$.

On peut appliquer le même argument pour prouver que : $[r_\alpha](\mathbf{v} - \mathbf{j}) \neq [r_\alpha](\mathbf{v}' - \mathbf{j})$. Ainsi on sait que $C_\alpha(\mathbf{v}) \cap C_\alpha(\mathbf{v}')$ est un singleton qui contient la flèche nulle, et la distance entre tout autre couple de voisins de \mathbf{v} et \mathbf{v}' est d'au moins $\sqrt{2}$. $C'_\alpha(\mathbf{w})$ contient exactement 6 flèches non nulles.

c.q.f.d.

Proposition 2.6 La cellule centrale ne peut être ni un point double ni un trou.

Démonstration :

La cellule centrale ne peut être un trou car elle est point fixe de la rotation. La cellule centrale ne peut être un point double, puisque le cercle unité n'a pas d'intersection, avec la cellule.

c.q.f.d.

2.3.4 Le codage préserve les informations sur la structure des lignes

Pour chaque vecteur \mathbf{v} de \mathbb{Z}^2 , la différence $[r_\alpha](\mathbf{v} + \mathbf{i}) - [r_\alpha](\mathbf{v})$ peut être extraite de $C_\alpha(\mathbf{v})$. Plus précisément, on signifie qu'il est possible de déterminer parmi les flèches qui composent le code celle qui correspond à $[r_\alpha](\mathbf{v} + \mathbf{i}) - [r_\alpha](\mathbf{v})$.

Cette affirmation repose sur les faits suivants :

- Soit $C_\alpha(\mathbf{v})$ contient une flèche diagonale : il n'y alors aucune ambiguïté sur la flèche dont elle est antécédente. Voir la Figure 2.8.
- Si $C_\alpha(\mathbf{v})$ contient une flèche vide, alors on peut facilement trouver un voisin \mathbf{v}' de \mathbf{v} tel que $[r_\alpha](\mathbf{v}') = [r_\alpha](\mathbf{v})$. Voir la Figure 2.9.

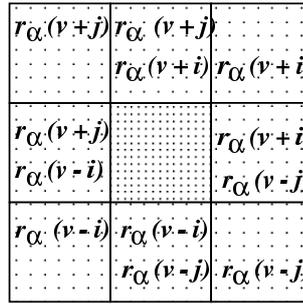
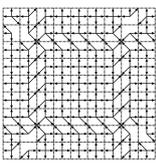


Fig. 2.8 – On suppose que $r_\alpha(\mathbf{v})$ arrive dans la cellule centrale. Dans chaque cellule on écrit les vecteurs qui auraient la possibilité d'arriver dans la cellule indiquée. Il n'y a alors qu'une seule possibilité de réaliser chacun des codes rencontrés – À l'exception de la croix horizontale /verticale – (en particulier la présence d'une flèche diagonale contraint le code).

- Le processus de discrétisation préserve l'ordre trigonométrique des flèches autour de $[r_\alpha](\mathbf{v})$, ceci permet une fois qu'on a identifié l'orientation d'une flèche d'en déduire pour chacune des autres flèches du code, l'orientation de la préimage qui l'a induite.

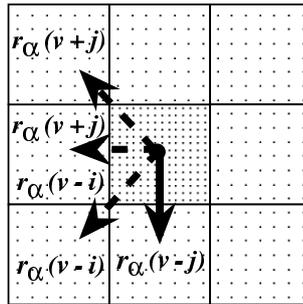


Fig. 2.9 – On utilise les mêmes conventions que la figure 2.8, on suppose, ainsi que $[r_\alpha](\mathbf{v} + \mathbf{i}) = [r_\alpha](\mathbf{v})$. La flèche $(0, -1)$ est dans C_α et nous avons aussi deux des trois flèches en pointillés). On peut créer une figure similaire pour chacun des cas,

Il existe des résultats similaires pour C'_α : pour chaque point normal \mathbf{w} de \mathbb{Z}^2 , la connaissance de $C'_\alpha(\mathbf{w})$ permet de calculer $[r_\alpha](\mathbf{v} + \mathbf{i}) - [r_\alpha](\mathbf{v})$, où \mathbf{v} est le seul vecteur tel que $[\mathbf{v}] = \mathbf{w}$; et pour chaque point double \mathbf{w} de \mathbb{Z}^2 , la connaissance de $C'_\alpha(\mathbf{w})$ permet de calculer l'ensemble de ses éléments $[r_\alpha](\mathbf{v} + \mathbf{i}) - [r_\alpha](\mathbf{v})$, pour chacun des \mathbf{v} tels que $[\mathbf{v}] = \mathbf{w}$.

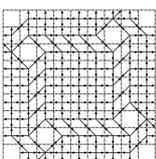
Informellement, l'image par $[r_\alpha]$ des lignes horizontales (resp. verticales) se trouve encodée dans C'_α .

Dans le cas où $C'_\alpha(\mathbf{w})$ contient 6 flèches, on détermine d'abord l'ensemble des antécédents de \mathbf{w} : les sommets \mathbf{v}' tels que $[r_\alpha](\mathbf{v}') = \mathbf{w}$. Cet ensemble est alternativement de la forme $\{\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{i}\}$ (premier cas), ou de la forme $\{\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{j}\}$ (second cas).

Le premier cas implique que ce sont deux flèches initialement verticales qui se sont annulées dans le code $C'_\alpha(\mathbf{w})$. Le second cas implique que ce sont deux flèches initialement horizontales qui se sont annulées pour former le code $C'_\alpha(\mathbf{w})$.

Si on est dans le premier cas et que $C'_\alpha(\mathbf{w})$ contient une flèche horizontale, alors $C'_\alpha(\mathbf{w})$ contient aussi $(1, -1)$ et $(-1, 1)$.

Si on est dans le second cas $C'_\alpha(\mathbf{w})$ contient une flèche verticale, alors $C'_\alpha(\mathbf{w})$ contient aussi $(-1, -1)$ et $(1, 1)$ (voir la Figure 2.10).



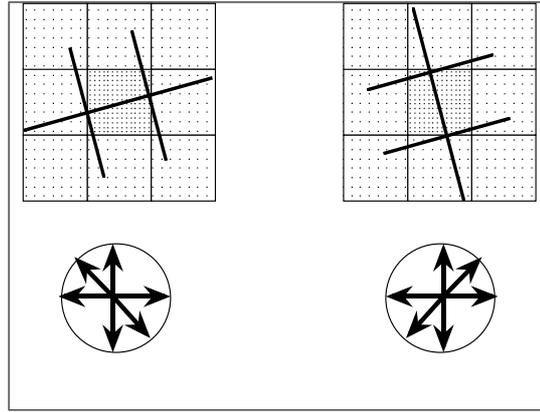


Fig. 2.10 – Les seules possibilités de jonction entre deux symboles pour former un nouveau symbole de $C'_\alpha(\mathbf{w})$.

Du fait de ce résultat, on peut extraire les informations de $C'_\alpha(\mathbf{w})$ qui correspondent précisément au cas rencontré.

2.3.4a Equivalence entre formalismes et sous-configurations

En se basant sur les résultats précédents, on insiste maintenant qu'il y a équivalence entre les formalismes ensemblistes, et paires de quadruplets ordonnés. Nous en profitons pour formaliser les moyens dont nous disposons pour décomposer les configurations en éléments plus simples.

On introduit quatre fonctions dont la vocation est d'extraire la position d'un voisin déterminé à partir d'un symbole de $C_\alpha^{(a)}$:

- $U : 2^{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{A} : s \mapsto (a \in s | \forall \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2, C_\alpha(\mathbf{v}) = p, a = ([r_\alpha](\mathbf{v} + \mathbf{j}) - [r_\alpha](\mathbf{v}))$
- $D : 2^{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{A} : s \mapsto (a \in s | \forall \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2, C_\alpha(\mathbf{v}) = p, a = ([r_\alpha](\mathbf{v} - \mathbf{j}) - [r_\alpha](\mathbf{v}))$
- $R : 2^{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{A} : s \mapsto (a \in s | \forall \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2, C_\alpha(\mathbf{v}) = p, a = ([r_\alpha](\mathbf{v} + \mathbf{i}) - [r_\alpha](\mathbf{v}))$
- $L : 2^{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{A} : s \mapsto (a \in s | \forall \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2, C_\alpha(\mathbf{v}) = p, a = ([r_\alpha](\mathbf{v} - \mathbf{i}) - [r_\alpha](\mathbf{v}))$

Pour les symboles de C'_α , les résultats précédents nous indiquent qu'on peut déterminer à quel antécédent appartient chacune des flèches. En conséquence, on peut définir des fonctions de $2^{\mathbb{A}} \times \{0, 1\}$ vers $\mathbb{A} \cup \{\emptyset\}$, qui en fonction d'un symbole et d'un booléen indiquant si on considère l'antécédent (le plus en bas à gauche) où l'antécédent le plus en bas à droite, nous donne la flèche, si elle existe, qui indique la position relative de l'image du 4-voisin considéré. La définition formelle des opérateurs L', U', D' et R' étant plutôt complexe, nous nous contenterons de dire que ce sont des opérateurs qui se comportent de la même façon que ceux décrits par la table dans la Figure 2.12. Pour les symboles à 4 - flèches $L', U', D',$ et R' se comportent comme leurs homologues L, U, D et R pour le booléen 0. Et dans les autres cas $L', U', D',$ et R' sont des fonctions qui ne renvoient pas de flèches : \emptyset .

On remarque que :

$$\forall p | \exists v \in \mathbb{Z}^2, \alpha \in \mathbb{R}, C_\alpha(v) = p \Rightarrow p = \{U(\mathbf{v}), D(\mathbf{v}), R(\mathbf{v}), L(\mathbf{v})\}$$

$$\forall p | \exists v \in \mathbb{Z}^2, \alpha \in \mathbb{R}, C'_\alpha(v) = p \Rightarrow p = U'(\mathbf{v}, 0) \cup U'(\mathbf{v}, 1) \cup D'(\mathbf{v}, 0) \cup D'(\mathbf{v}, 1) \cup R'(\mathbf{v}, 0) \cup \dots$$

^(a)Du fait des remarques précédentes on sait que ces fonctions ne renvoit qu'un seul élément.

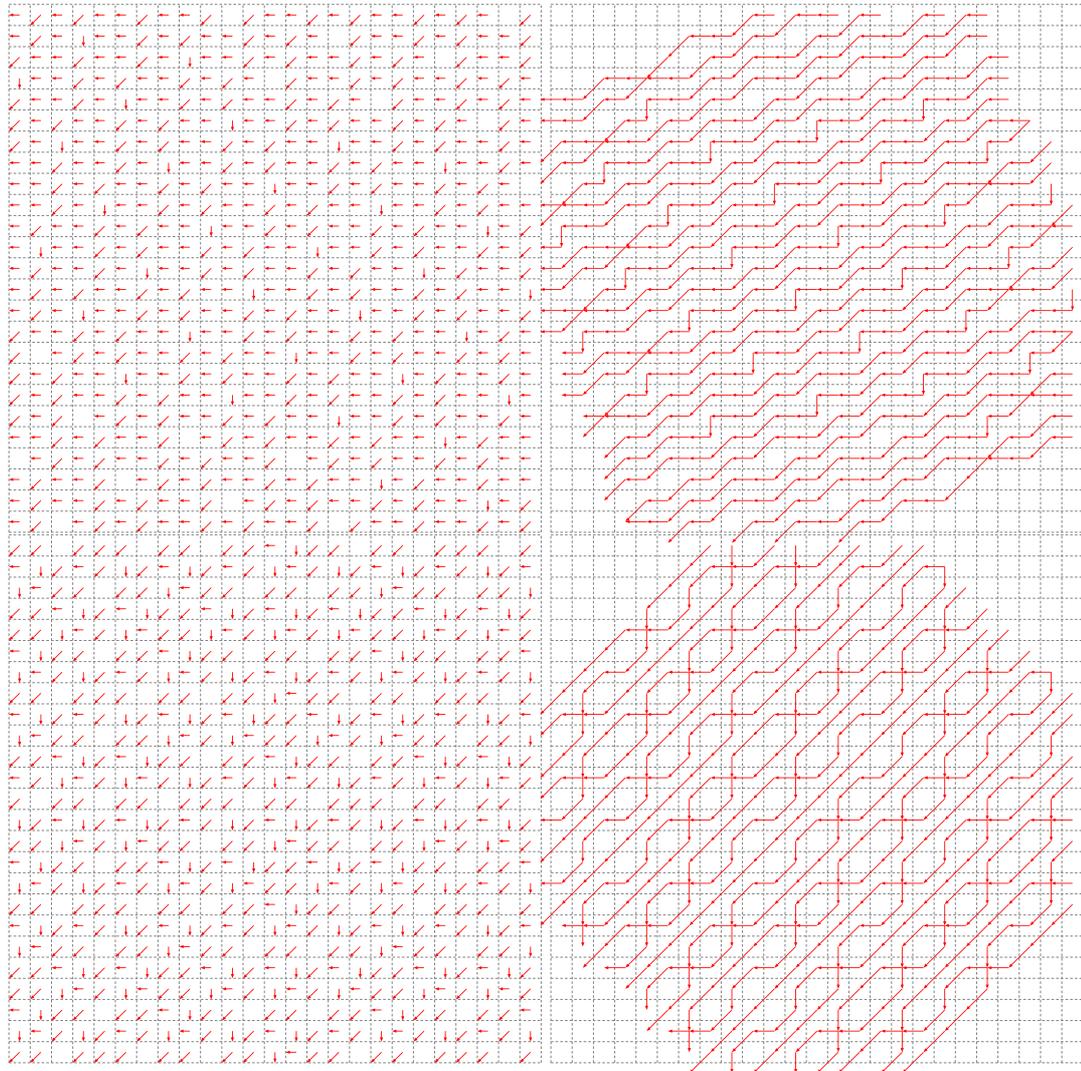
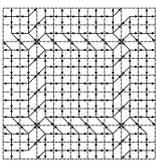
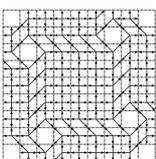


Fig. 2.11 – Ci-dessus, les configurations $L(C_\alpha)$ et $L(C'_\alpha)$ pour $\alpha = 0.4$ et $\alpha = \pi/4$. Les séquences de déplacements vers la droite correspondent à l'image de droites horizontales parallèles par la rotation discrétisée. Sur C'_α , les points d'intersection entre les images droites représentent ainsi des points de contact sans croisement.



Proposition 2.7 *Pour tout α entre 0 et $\pi/4$, Il existe une projection C_α par un morphisme lettre-à-lettre en vers L_α (resp. $R_\alpha, U_\alpha, D_\alpha$).*

Démonstration :

La preuve de cette proposition n'a d'intérêt que si nous partons de la définition ensembliste des configurations. Elle justifie le fait que nous disposions sensiblement des mêmes informations dans la version ensembliste de la définition de C_α que dans la version quadruplet.

La remarque de base sur laquelle se fonde la preuve est que pour α entre 0 et $\pi/4$, la position relative que nous utilisons et réutiliserons pour C'_α plus tard, est que les flèches L, R, U, D sont bloquées dans des quadrants.

On sait par l'étude préalable des motifs de R_1 : que la flèche de R_1 est enfermée dans un quadrant du symbole. En assignant chaque quadrant sa flèche on lève les ambiguïtés, et on est capable de retrouver pour chaque symbole, le voisin que désigne chaque flèche. Le seul cas pouvant a priori poser problème étant celui de la croix horizontale. Cependant nous remarquerons qu'en fait, il n'existe qu'une seule façon d'engendrer la croix horizontale.

Nous montrons donc que nous savons faire cette opération pour l'ensemble des motifs 4 flèches (nous le faisons pour tous les symboles à rotation près).

Pour démontrer la validité de cette proposition nous procéderons par exhibition (voir Figure 2.12).

c.q.f.d.

2.3.5 Bijectivité entre configurations

La proposition suivante prouve clairement que les configurations C_α et C'_α encodent l'angle de la rotation à effectuer :

Proposition 2.8 *Soit α et α' des nombres réels entre $[0, \pi/4]$. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. $\alpha = \alpha'$,
2. $C_\alpha = C_{\alpha'}$,
3. $C'_\alpha = C'_{\alpha'}$.

Démonstration :

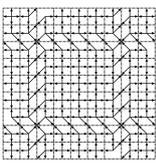
Clairement, du fait des définitions, on a $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, il ne reste donc qu'à prouver $3 \rightarrow 1$.

Des précédentes propositions, les configurations préservent à travers leur codage l'information sur les lignes horizontales de la configuration. Ainsi, pour tout entier n , la quantité $[r_\alpha](ni)$ peut être calculée à partir de C'_α . Ce qui nous fournit une approximation de $\cos \alpha$ avec une précision de l'ordre de $\frac{1}{n}$. Ceci est vrai pour tout n , donc $\cos \alpha$ peut être complètement déterminée à partir de C'_α . Ceci conduit directement au résultat escompté.

c.q.f.d.

2.3.6 Transduction entre configurations

Les propositions qui suivent démontrent plus encore que les configurations C_α et C'_α encodent le processus de rotation.



$$s \equiv (R(s), D(s), L(s), U(s))$$

Symboles à 3 flèches :

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \equiv (\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i}, 0, \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \equiv (\mathbf{j}, \mathbf{i}, 0, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \equiv (\mathbf{i} + \mathbf{j}, 0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \equiv (\mathbf{i} + \mathbf{j}, 0, -\mathbf{i}, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \equiv (\mathbf{i} + \mathbf{j}, 0, \mathbf{i}, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$s \equiv (R(s), D(s), L(s), U(s))$$

Symboles à 4 flèches :

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{matrix} \equiv (\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i}, -\mathbf{i}, \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{matrix} \equiv (\mathbf{i} + \mathbf{j}, -\mathbf{j}, -\mathbf{i}, \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{matrix} \equiv (\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i}, -\mathbf{i}, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{matrix} \equiv (\mathbf{i} + \mathbf{j}, -\mathbf{j}, -\mathbf{i}, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{matrix} \equiv (\mathbf{j}, \mathbf{i}, -\mathbf{i}, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{matrix} \equiv (\mathbf{i} + \mathbf{j}, -\mathbf{j}, -\mathbf{i} - \mathbf{j}, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{matrix} \equiv (\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i}, -\mathbf{i} - \mathbf{j}, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{matrix} \equiv (\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j}, -\mathbf{i} - \mathbf{j}, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{matrix} \equiv (\mathbf{i}, -\mathbf{j}, -\mathbf{i}, \mathbf{j})$$

$$s \equiv_0 (R'(s, 0), D'(s, 0), L'(s, 0), U'(s, 0))$$

$$s \equiv_1 (R'(s, 1), D'(s, 1), L'(s, 1), U'(s, 1))$$

Symboles à 6 flèches :

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \equiv_0 (0, -\mathbf{j}, -\mathbf{i} - \mathbf{j}, -\mathbf{i})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \equiv_1 (\mathbf{i}, \mathbf{i} - \mathbf{j}, 0, \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \equiv_1 (\mathbf{i}, \mathbf{i} - \mathbf{j}, 0, \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \equiv_0 (0, -\mathbf{j}, -\mathbf{i} - \mathbf{j}, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \equiv_0 (0, -\mathbf{j}, -\mathbf{i} - \mathbf{j}, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \equiv_1 (\mathbf{i}, \mathbf{i} - \mathbf{j}, 0, \mathbf{j})$$

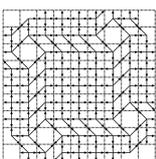
$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \equiv_1 (\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i}, 0, \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \equiv_0 (0, -\mathbf{j}, -\mathbf{i} - \mathbf{j}, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \equiv_0 (0, -\mathbf{j}, -\mathbf{i}, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \equiv_1 (\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j}, 0, \mathbf{j})$$

Fig. 2.12 – La décomposition des symboles en flèches, à chaque symboles à 3 ou à 4 flèches, on donne le quadruplet : (haut, bas, droit, gauche). Cette table est valable pour α compris entre 0 et $\pi/4$. Tous les symboles sont représentés (à une rotation de $\pi/2$ près. Pour les symboles à deux flèches le second indice indique quelle sous symbole est considéré.)



2.3.6a Transduction planaire de C_α vers C'_α

Un *transducteur planaire* est une machine à états finis qui possède

- une tête de lecture,
- une tête d'écriture,
- une tête de lecture additionnelle qui décode un chemin écrit sur un ruban.

La tête de lecture et la tête d'écriture se déplacent dans des configurations planaires, leur déplacement est régi par les règles de transitions de l'automate à états finis qui contrôle le transducteur planaire.

Précisons que le mot contenu sur le ruban décrit le chemin qui doit être parcouru par une des têtes. ce mot est écrit sur l'alphabet $\mathcal{D} = \mathbb{A}$.

Puis, formellement :

Définition 2.3 (Transducteur planaire) *Un transducteur planaire est une machine à états finis définie par quintuplet : $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, Q, q_0, \tau)$.*

- \mathcal{A} est l'alphabet situé que la configuration de départ ;
- \mathcal{B} est l'alphabet d'arrivée ;
- Q est l'ensemble des états internes du transducteur planaire ;
- $q_0 \in Q$ est son état initial ;
- τ est une table de transitions de la forme $(Q \times \mathcal{D} \times \mathcal{A}) \times (\mathcal{B} \times \mathbb{A} \times \mathbb{A} \times Q)$ qui spécifie en fonction des caractères lus par les têtes lectures, les déplacements à effectuer, et le caractère à écrire. Les triplet correspond aux éléments qui déterminent $(Q \times \mathbb{A} \times \mathcal{A})$, la transition. Le premier élément du triplet représente l'état interne du transducteur avant la transition. \mathbb{A} le caractère lu sur le ruban. \mathcal{A} le caractère lu sur la configuration en entrée.

A chaque étape de calcul, la tête de lecture lit un caractère à sa position courante. Elle se déplace à selon la table de transition. Le système ne peut que lire sur la configuration que parcourt la tête de lecture. La tête d'écriture se trouve sur une autre configuration, cette fois ci le transducteur que se déplacer et écrire sur ce plan.

Il existe une transduction planaire d'une configuration C_0 vers une autre C_1 s'il existe un transducteur et un chemin w tel que C_1 soit le résultat du processus de transduction en lisant C_0 et w .

Note 2.3.6.1 *Puisqu'une configuration est un objet infini, il faut w pas de calculs pour effectuer la transduction. En pratique, on supposera toujours que le chemin qui guide le transducteur planaire de telle manière à ce que pour tout rayon r la boule de rayon r centrée 0 n'évolue plus dans la suite de la transduction. De ce fait, on peut voir le processus de transduction comme un processus qui converge vers son résultat.*

Proposition 2.9 *Il existe un processus de transduction planaire de C_α vers C'_α . De plus, ce processus de transduction planaire calcule directement la rotation discrétisée d'une image, puisqu'en qu'à chaque passage au début de la boucle, si la position de la tête de lecture est en position \mathbf{v} , la tête d'écriture est en position $[r_\alpha](\mathbf{v})$.*

Démonstration :

On va tout d'abord procéder par exhibition du code d'un transducteur. Ensuite, on va vérifier la validité du code.

L'algorithme est présenté dans la Figure 2.14.

Le principe de l'algorithme est d'utiliser la configuration C_α pour calculer de proche en proche la position d'un point par $\mathbf{v} \mapsto [r_\alpha](\mathbf{v})$. L'argument clef est lié à la position des têtes de

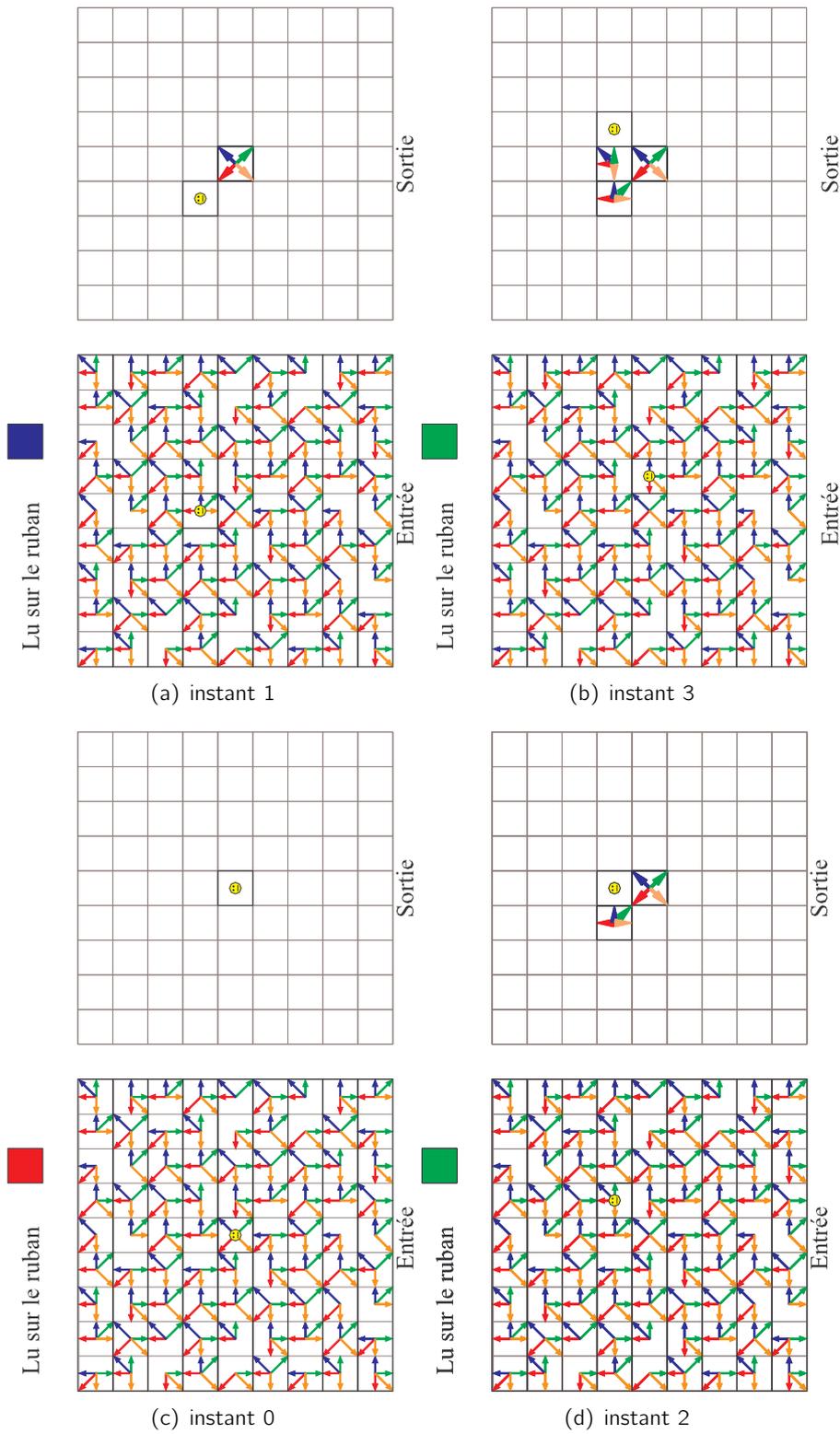
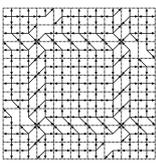
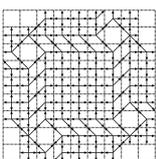


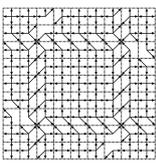
Fig. 2.13 – Exemple : début de processus de transduction de C_α vers C'_α



[Algorithme 1 : Code du transducteur de C_α vers C'_α]

```
1:  $ld = \mathbf{p}_l = \mathbf{p}_e = \mathbf{0}$ 
2:  $ps = cs = \emptyset$ 
3: tant que true faire
4:    $ps = cs$ 
5:    $cs := C_\alpha(\mathbf{p}_l)$ 
6:   si ( $\#cs = 4$ ) alors
7:      $C'_\alpha(\mathbf{p}_e) = cs$ 
8:   fin si
9:   si ( $(\#(cs \cup ps) = 6)$  et  $ld = \mathbf{0}$ ) alors
10:     $C'_\alpha(\mathbf{p}_e) = ps \cup cs$ 
11:   fin si
12:   si  $\delta = \mathbf{i}$  alors
13:      $ld = R(cs)$ 
14:   fin si
15:   si  $\delta = -\mathbf{i}$  alors
16:      $ld = L(cs)$ 
17:   fin si
18:   si  $\delta = \mathbf{j}$  alors
19:      $ld = U(cs)$ 
20:   fin si
21:   si  $\delta = -\mathbf{j}$  alors
22:      $ld = D(cs)$ 
23:   fin si
24:    $\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_e + ld$ 
25:    $\delta = w_t$ 
26:    $t = t + 1$ 
27:    $\mathbf{p}_l = \mathbf{p}_l + \delta$ 
28: fin tant que
```

Fig. 2.14 – Algorithme 1



lecture et d'écriture ; on va montrer que quand la tête de lecture est en \mathbf{v} , la tête d'écriture est en $[r_\alpha(\mathbf{v})]$. Si le symbole lu est composé de quatre flèches, l'algorithme le réécrit directement. Si par contre celui-ci n'est composé que de trois flèches, l'algorithme visite les quatre-voisins adjacents afin de déterminer l'information qui doit être combiné pour former le symbole à six flèches correspondant.

Dans un premier temps, on commence par vérifier qu'à chaque instant si la tête de lecture est située en position \mathbf{v} , la tête d'écriture est située en position $[r_\alpha(\mathbf{v})]$.

On note $\mathbf{p}_l(t)$ la position de la tête de lecture à un instant t et $\mathbf{p}_e(t)$ la position de la tête de lecture à un instant t , au début de la boucle principale en fonction de la valeur de t .

À l'initialisation, on $\mathbf{p}_l(0) = \mathbf{p}_e(0) = \mathbf{0}$, ainsi $\mathbf{p}_e(0) = [r_\alpha](\mathbf{p}_l(0))$.

On procède maintenant par récurrence : on veut montrer qu'à chaque fois qu'on recommence la boucle on a : $\mathbf{p}_e(t) = [r_\alpha](\mathbf{p}_l(t)) \Rightarrow \mathbf{p}_e(t+1) = [r_\alpha](\mathbf{p}_l(t+1))$

On remarque que l'on a : Si $\mathbf{p}_l(t+1) = \mathbf{p}_l(t) + \mathbf{i}$ alors $\mathbf{p}_e(t+1) = \mathbf{p}_e(t) + R(C_\alpha(\mathbf{p}_l(t)))$, or $R(C_\alpha(\mathbf{p}_l(t))) = [r_\alpha](\mathbf{p}_l(t) + \mathbf{i}) - [r_\alpha](\mathbf{p}_l(t))$ et par hypothèse $\mathbf{p}_e(t) = [r_\alpha](\mathbf{p}_l(t))$. On obtient ainsi que $\mathbf{p}_e(t+1) = [r_\alpha](\mathbf{p}_l(t) + \mathbf{i})$; Ce qui n'est autre que la proposition recherchée : $\mathbf{p}_e(t+1) = [r_\alpha](\mathbf{p}_l(t+1))$.

Le même raisonnement peut être appliqué si $\mathbf{p}_l(t+1) = \mathbf{p}_l(t) - \mathbf{i}, \mathbf{p}_l(t+1) = \mathbf{p}_l(t) + \mathbf{j}$ ou $\mathbf{p}_l(t+1) = \mathbf{p}_l(t) - \mathbf{j}$, en considérant respectivement $\mathbf{p}_e(t+1) = \mathbf{p}_e(t) + L(C_\alpha(\mathbf{p}_l(t)))$, $\mathbf{p}_e(t+1) = \mathbf{p}_e(t) + U(C_\alpha(\mathbf{p}_l(t)))$, $\mathbf{p}_e(t+1) = \mathbf{p}_e(t) + D(C_\alpha(\mathbf{p}_l(t)))$.

On peut alors conclure la proposition annoncée par récurrence.

Pour être bien sûr du fonctionnement de l'algorithme, il nous reste maintenant à montrer deux choses :

- i) il existe un chemin à partir duquel on sait que le transducteur va écrire un symbole en chaque position de l'espace d'arrivée qui n'est pas un trou.
- ii) A chaque fois qu'un symbole est écrit en $\mathbf{p}_e(t)$, il s'agit bien du symbole $C'_\alpha(\mathbf{p}_e(t))$

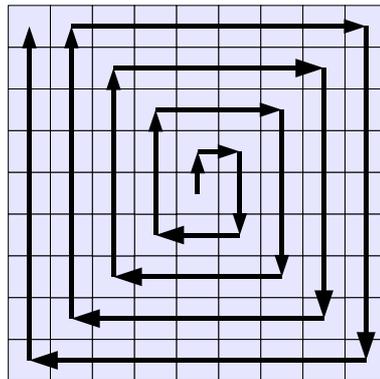
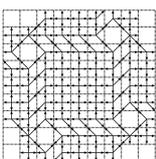


Fig. 2.15 – *Fil d'ARCHIMÈDE*, ceci est la trajectoire suivie par le transducteur pour être sûr d'explorer l'ensemble des cases des plans. Sur chaque cases rencontrée, le transducteur opère une marche en croix (non représentée ici), afin de connaître l'état des 4-voisins, et de pouvoir déterminer l'ensemble du symbole dans la mesure où celui-ci serait issu de la réunion de deux sous-symboles.

On prouve i) :

Pour l'existence d'un chemin, nous exhibons le chemin suivant : on se sert d'une trajectoire en spirale d'Archimède(voir Figure 2.15) pour parcourir le plan.

C'est-à-dire que nous considérons le mot :



$$(\mathbf{j})^1(\mathbf{i})^1(-\mathbf{j})^3(-\mathbf{i})^3(\mathbf{j})^4(\mathbf{i})^4(-\mathbf{j})^5(-\mathbf{i})^5(\mathbf{j})^6(\mathbf{i})^6 \dots$$

autrement dit le mot correspond à la concaténation de facteurs de la forme :

$$\dots((-\mathbf{j})^{2n+1}(-\mathbf{i})^{2n+1}(-\mathbf{j})^{2n+2}(-\mathbf{i})^{2n+2})\dots$$

Aussi, afin de permettre au transducteur de récupérer les informations locales dont il a besoin, après chaque lettre du précédent mot, on insérera le chemin suivant :

$$(-\mathbf{i})(\mathbf{i})(\mathbf{i})(-\mathbf{i})(\mathbf{j})(-\mathbf{j})(-\mathbf{j})(\mathbf{j})$$

Le but de l'opération est d'explorer en chaque point le 4-voisinage de chacun des points dans le plan.

On prouve ii)

Un code est écrit à chaque fois qu'un symbole est complet, si le code est incomplet alors rien n'est écrit, le code qui est écrit reprend les un ou deux symboles qui arrivent à la même position par rotation discrétisée. Le code qui est écrit correspond donc à l'union des unes ou deux cellules de la configuration d'entrée qui sont antécédent de la cellule d'arrivée. Par conséquent, il s'agit par définition de C'_α de $\mathbf{p}_e(t)$.

De l'ensemble des propositions précédentes, on déduit qu'il existe un processus de transduction planaire qui transforme C_α en C'_α

c.q.f.d.

Note 2.3.6.2 *Le processus itératif du transducteur associé à la configuration implémente en un certain sens la rotation discrétisée : A chaque début de boucle, la tête d'écriture se situe en $r_\alpha(\mathbf{v})$ où \mathbf{v} est la position de la tête de lecture.*

Note 2.3.6.3 *Ce transducteur est décrit sans souci de terminaison, puisqu'il s'agit là de construire une configuration infinie. On peut néanmoins aisément prouver que le transducteur peut traiter n'importe quel morceau fini de plan en un temps fini. Le temps d'exécution dépend essentiellement de la distance à couvrir pour atteindre les différents objets.*

2.3.6b Transducteur de C'_α vers C_α

Proposition 2.10 *Il existe un processus de transduction planaire de C'_α vers C_α . De plus, ce processus de transduction planaire calcule directement l'inverse de la rotation discrétisée d'une image : à chaque passage dans la boucle, on peut vérifier au début de celle-ci, le fait que la position de la tête de lecture est en position $[r_\alpha](\mathbf{v})$ par rapport à la tête d'écriture.*

Démonstration :

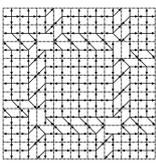
La preuve est en tout point similaire à la précédente.

On procède par exhibition du code du transducteur (voir Figure 2.16).

A l'initialisation, la tête sur le ruban est placée au début du mot, les têtes sur C_α et C'_α sont placées en $(0, 0)$.

c.q.f.d.

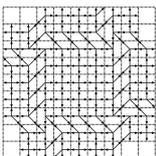
Note 2.3.6.4 *L'existence de transducteurs entre les deux configurations est une nouvelle preuve de la Proposition 2.8 fondée sur les Propositions de la section 2.3.3 et de celles de la section 2.3.4a.*



Transducteur de C'_α vers C_α

```
1:  $t \leftarrow 0$ 
2:  $o\delta = \varepsilon$ 
3: tant que  $\delta \neq \varepsilon$  faire
4:    $p\delta \leftarrow \delta$ 
5:    $\delta \leftarrow w_t$ 
6:    $t \leftarrow t + 1$ 
7:    $cs := C'_\alpha(\mathbf{p}_l)$ 
8:    $C_\alpha(\mathbf{p}_e) = ms = \text{subsymb}(cs, ps, \delta)$ 
9:    $\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_e + \delta$ 
10:  si  $\delta = \mathbf{i}$  alors
11:     $ld = R(ms)$ 
12:  fin si
13:  si  $\delta = -\mathbf{i}$  alors
14:     $ld = L(ms)$ 
15:  fin si
16:  si  $\delta = \mathbf{j}$  alors
17:     $ld = U(ms)$ 
18:  fin si
19:  si  $\delta = -\mathbf{j}$  alors
20:     $ld = D(ms)$ 
21:  fin si
22:   $\mathbf{p}_l = \mathbf{p}_l + ld$ 
23: fin tant que
```

Fig. 2.16 – Code du transducteur de la Proposition 2.10



2.4 Les systèmes dynamiques multidimensionnels symboliques associés

Soit G , un groupe. On rappelle qu'une G -action est l'application des éléments du groupe sur un espace X qui respecte l'élément neutre du groupe et l'ensemble des générateurs de ce groupe. Plus formellement, on dit que ϕ de $G \times X$ vers X est une G -action si

- $\forall x \in X, \phi(0, x) = x$
- $\forall x, y \in X, \phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$

On établit le lien maintenant entre les configurations étudiées et des \mathbb{Z}^2 -actions agissant sur des tores colorés. On va montrer que l'état obtenu en 0 en opérant des décalages horizontaux et verticaux sur les configurations comme C_α où C'_α est le même que celui fournit par un système de translations opérant un tore partitionné de manière adéquate, par une partition symbolique.

2.4.1 La dynamique de C_α

Un cadre (rectangulaire) du tore $\mathbb{T}^2 \equiv [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ est le produit cartésien de deux intervalles semi-ouverts sur ce tore. Tout cadre peut s'écrire $[a, b[\times [c, d[$, avec $-\frac{1}{2} \leq a \leq b < \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} \leq c \leq d < \frac{1}{2}$.

Par la suite, on dénotera par Q_α le sous ensemble de $2^{\mathbb{A}}$ qui correspondent aux symboles qui apparaissent dans la configuration C_α . En d'autres termes $Q_\alpha = \mathcal{L}_{[1,1]}(C_\alpha)$. On définit de même Q'_α comme le sous-ensemble de $2^{\mathbb{A}}$ qui contient les symboles qui apparaissent dans C'_α .

Par définition, la configuration C_α décrit la position relative des quatre 4-voisins d'un point \mathbf{v} après rotation discrétisée. On peut remarquer que si on connaît la position réelle de $r_\alpha(\mathbf{v})$ à l'intérieur d'une cellule de discrétisation, alors, il est facile de connaître la position relative des quatre 4-voisins. Ce que nous allons exprimer par la suite c'est le fait que la valeur de $C_\alpha(\mathbf{v})$ ne dépend en fait que de la valeur $\{r_\alpha(\mathbf{v})\}$. De plus, vu que $x \mapsto \{r_\alpha(x)\}$ a la bonne propriété d'être un morphisme pour l'addition, on va réobtenir une structure de groupe. Ceci va nous permettre d'étudier les configurations à travers une interprétation "systèmes dynamiques multidimensionnels".

L'interprétation de C_α comme résultat d'une \mathbb{Z}^2 -action est résumée dans ce théorème essentiel pour la suite :

Théorème 2.1 (Système dynamique symbolique équivalent aux rotations discrétisées) *Il existe une partition P_α du tore \mathbb{T}^2 en un nombre finie de cadres, telle que pour tout paire $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ de point de \mathbb{Z}^2 , on ait $C_\alpha(\mathbf{v}) = C_\alpha(\mathbf{v}')$ si et seulement si $\{r_\alpha(\mathbf{v})\}$ et $\{r_\alpha(\mathbf{v}')\}$ appartient au même cadre. Aussi, pour tout $p \in Q_\alpha$, il existe un cadre rectangulaire F_p tel que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$, on ait $C_\alpha(\mathbf{v}) = p$ si et seulement si $\{R_\alpha(\mathbf{v})\} \in F_p$.*

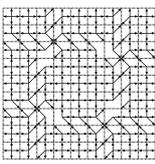
Démonstration :

Pour simplifier la preuve de ce théorème, on se considère d'abord le cas où la position du voisin de droite $\mathbf{v} + \mathbf{i}$ d'un point \mathbf{v} ; par la suite on pourra généraliser aux autres voisins. De plus, on va considérer le sous-problème suivant : Comment décider si $[r_\alpha(\mathbf{v})]$ et $[r_\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{i})]$ la même coordonnée horizontale ?

Partons du fait que les transformations linéaires sont des morphismes pour l'addition, donc :

$$r_\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{i})_x = r_\alpha(\mathbf{v})_x + \cos(\alpha).$$

Ainsi, $([r_\alpha(\mathbf{v})])_x = ([r_\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{i})])_x$ si et seulement si $(\{r_\alpha(\mathbf{v})\})_x + \cos(\alpha) < \frac{1}{2}$, ou $(\{r_\alpha(\mathbf{v})\})_x < \frac{1}{2} - \cos(\alpha)$.



Cette inégalité divise le tore \mathbb{T}^2 en deux parties qui sont deux cadres rectangulaires, la "ligne verticale de séparation" entre les deux cadres étant situés en $x = \frac{1}{2} - \cos(\alpha)$. Je rappelle que le tore \mathbb{T}^2 est identifié à la cellule de discrétisation de $\mathbf{0}$.

On peut obtenir le même type de résultats pour chacun des 4-voisins de \mathbf{v} , et pour chacune des composantes.

Plus précisément, on obtient ainsi quatre lignes verticales et quatre lignes horizontales qui divisent le tore en cadres. Quand aucune lignes ne se confondent, on obtient ainsi 25 cadres. Du fait de sa définition, cette partition satisfait le théorème.

c.q.f.d.

Corollaire 2.1 *A tout motif \mathbf{m} de support fini S on peut associer un cadre F_m sur le tore tel que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{T}^2$, $C^S(\mathbf{v}) = \mathbf{m}$ si et seulement si $\{r_\alpha\}(\mathbf{v}) \in F_m$.*

Démonstration :

Ce n'est que le prolongement du même raisonnement, la preuve est donc fondée sur des arguments du même ordre.

Soit \mathbf{m} un motif de taille \mathbf{s} . On souhaite déterminer si \mathbf{m} apparaît dans C_α à la position \mathbf{v} : \mathbf{m} est caractérisé par les composantes des vecteurs $\mathbf{w}' = [r_\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{v}')] - [r_\alpha(\mathbf{v})]$, pour tous les vecteurs \mathbf{v}' tels que $-1 \leq \mathbf{v}'_x \leq \mathbf{s}_x$ et $-1 \leq \mathbf{v}'_y \leq \mathbf{s}_y$. La valeur \mathbf{w}'_x est le plus petit k_0 tel que $\{r_\alpha(\mathbf{v})\}_x - \mathbf{v}'_y \sin \alpha + \mathbf{v}'_x \cos \alpha < k_0 + \frac{1}{2}$; on cherche le plus petit entier k_0 tel que $\{r_\alpha(\mathbf{v})\}_x < k_0 + \frac{1}{2} + \mathbf{v}'_y \sin \alpha - \mathbf{v}'_x \cos \alpha$. k_0 soit connu quand pour chaque entier k , on peut décider si l'inéquation précédente est satisfaite ou non. Pour chaque couple (k, \mathbf{v}') soit l'inégalité précédente soit son opposée est valide. Ce sont toutes ces inégalités qui devront être satisfaites par $\{r_\alpha(\mathbf{v})\}_x$ pour que \mathbf{m} apparaisse dans C_α à la position \mathbf{v} .

\mathbf{v}' est borné, ainsi pour $|k|$ suffisamment large, chaque inégalité induite par une paire (k, \mathbf{v}') est soit impossible soit triviale. De là, il nous reste simplement un nombre fini d'inégalités non triviales. Quand elle est réalisable, leur conjonction est équivalente à une condition du type : $x_m \leq \{r_\alpha(\mathbf{v})\}_x < x'_m$, où x_m et x'_m désignent des nombres réels tels que $-\frac{1}{2} \leq x_m < x'_m < \frac{1}{2}$.

Le même argument s'applique aussi sur la coordonnée verticale : $\{r_\alpha(\mathbf{v})\}_y$.

Quand toutes les conditions sont satisfaites en même temps, on obtient un cadre $I_m = [x_m, x'_m[\times [y_m, y'_m[$. Ce cadre répond aux conditions du théorème.

c.q.f.d.

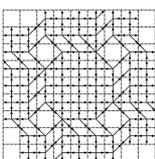
Le théorème décrit les choses en termes d'arithmétique modulaire, et ne donne pas les précisions arithmétiques sur la localisation des cadres. Nous traduisons maintenant ce résultat termes de systèmes dynamiques multidimensionnels.

Dans premier temps, on introduit les deux actions suivantes : $T_{i_\alpha} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, x \mapsto x + \{\mathbf{i}_\alpha\}$, $T_{j_\alpha} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, x \mapsto x + \{\mathbf{j}_\alpha\}$.

Dans un second temps, on définit I_{C_α} : La fonction d'étiquetage associée à la partition P_α . Elle est formellement définie par :

$$I_{C_\alpha} : \mathbb{T}^2 \rightarrow Q_\alpha, \mathbf{v} \mapsto \phi_c(f_{C_\alpha}(x_v), f_{C_\alpha}(y_v))$$

où f_{C_α} définie ainsi (la définition de ϕ_c suit, ainsi que quelques commentaires sur la construction de ces tables :



Si $\alpha \in [0, \pi/6]$:

$$\begin{cases} [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \cos(\alpha)[& \mapsto 0 \\ [\frac{1}{2} - \cos(\alpha), \sin(\alpha) - \frac{1}{2}[& \mapsto 1 \\ [\sin(\alpha) - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \sin(\alpha)[& \mapsto 2 \\ [\frac{1}{2} - \sin(\alpha), \cos(\alpha) - \frac{1}{2}[& \mapsto 3 \\ [\cos(\alpha) - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[& \mapsto 4 \end{cases}$$

Si $\alpha \in [\pi/6, \pi/4]$:

$$\begin{cases} [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \cos(\alpha)[& \mapsto 0 \\ [\frac{1}{2} - \cos(\alpha), \frac{1}{2} - \sin(\alpha)[& \mapsto 1 \\ [\frac{1}{2} - \sin(\alpha), \sin(\alpha) - \frac{1}{2}[& \mapsto 5 \\ [\sin(\alpha) - \frac{1}{2}, \cos(\alpha) - \frac{1}{2}[& \mapsto 3 \\ [\cos(\alpha) - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[& \mapsto 4 \end{cases}$$

et où ϕ_c est décrite par la table donnée en Figure 2.17.

(0, 0) \mapsto	(1, 0) \mapsto	(2, 0) \mapsto	(3, 0) \mapsto	(4, 0) \mapsto	(5, 0) \mapsto
(0, 1) \mapsto	(1, 1) \mapsto	(2, 1) \mapsto	(3, 1) \mapsto	(4, 1) \mapsto	(5, 1) \mapsto
(0, 2) \mapsto	(1, 2) \mapsto	(2, 2) \mapsto	(3, 2) \mapsto	(4, 2) \mapsto	
(0, 3) \mapsto	(1, 3) \mapsto	(2, 3) \mapsto	(3, 3) \mapsto	(4, 3) \mapsto	(5, 3) \mapsto
(0, 4) \mapsto	(1, 4) \mapsto	(2, 4) \mapsto	(3, 4) \mapsto	(4, 4) \mapsto	(5, 4) \mapsto
(0, 5) \mapsto	(1, 5) \mapsto		(3, 5) \mapsto	(4, 5) \mapsto	(5, 5) \mapsto

Fig. 2.17 – Table de ϕ_c . ϕ_c est une fonction qui convertit les indices horizontaux et verticaux que nous avons donné aux cadres en le symbole qui est associé à chaque cadre. Les symboles sont représentés directement par les flèches qui les constituent.

On peut remarquer que les valeurs qui interviennent dans la définition de f_{C_α} correspondent en fait à $\{k \cos(\alpha) + k' \sin(\alpha) - \frac{1}{2}\}$, pour k et k' compris dans $\{-1, 0, 1\}$. f_{C_α} est une fonction outil qui permet d'indexer la position des différents cadres qui composent la partition.

Note 2.4.1.1 La fonction d'étiquetage l_{C_α} est l'application de \mathbb{T}^2 dans $2^{\mathbb{A}}$ qui a un point \mathbf{v} du tore fait correspondre le $p \in Q_\alpha$ tel que $v \in F_p$. Sa définition est compatible avec ce qui a été dans le Théorème 2.1.

Une fois ces éléments introduits, le Théorème 2.1 peut se reformuler ainsi :

C_α est le codage de l'orbite de $\mathbf{0}$ sous la \mathbb{Z}^2 -action $(\mathbb{T}^2, T_{i_\alpha}, T_{i_\alpha})$ par la fonction d'étiquetage l_{C_α} .

2.4.2 Dynamique de C'_α

En partant de la définition de C'_α , on remarque maintenant qu'un résultat du même ordre se déduit de la remarque précédente pour C'_α . Cependant, ce premier résultat ne fera pas pour autant de C'_α le résultat du codage d'une \mathbb{Z}^2 -action.

Corollaire 2.2 (Théorème fondamental pour C'_α , Partition symbolique pour C'_α)

A chaque motif \mathbf{m} tel que $\mathbf{m}(0)$ n'est pas un trou, il existe un cadre dans \mathbb{T}^2 , F_m tel que, pour tout vecteur \mathbf{w} de \mathbb{Z}^2 , le motif \mathbf{m} apparaisse dans C'_α à la position w , si et seulement si il existe un vecteur \mathbf{v} de \mathbb{Z}^2 , tel que $[r_\alpha](\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ et tel que $\{r_\alpha(\mathbf{v})\}$ appartienne à F_m .

Pour tout motif \mathbf{m} tel que $\mathbf{m}(0)$ n'est pas un trou, il existe un cadre F_m tel que pour tout vecteur \mathbf{w} de \mathbb{Z}^2 , le motif \mathbf{m} apparaît dans C'_α à la position \mathbf{w} , si et seulement si il existe une vecteur \mathbf{v} of \mathbb{Z}^2 , tel que $[r_\alpha](\mathbf{v}) = \mathbf{w} - \mathbf{i}$ et $\{r_\alpha(\mathbf{v})\}$ appartienne à F_m .

Démonstration :

\mathbf{m} un motif de taille \mathbf{s} . Soit \mathbf{w} un élément de \mathbb{Z}^2 et \mathbf{v} un vecteur vérifiant $[r_\alpha](\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. S'il existe deux vecteurs \mathbf{v} , alors on choisira le vecteur \mathbf{v} minimisant d'abord $\mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y$ puis minimisant v_{V_x} .

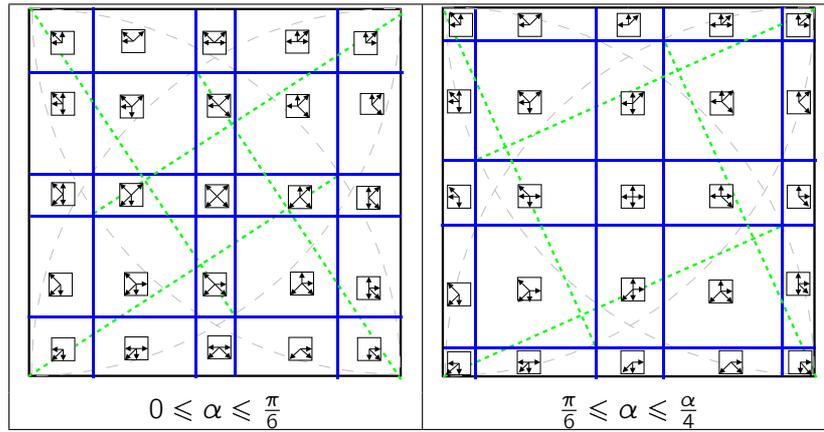
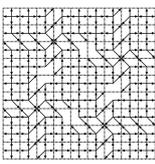


Fig. 2.18 – Exemples de partitions en cadres du tore \mathbb{T}^2 . Les partitions obtenues illustrent la disposition des cadres associés à chaque symbole. On rappelle que le tore est identifié à la cellule de discrétisation, et est représenté $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^2$.

On souhaite déterminer pour un motif \mathbf{m} qui apparaît C'_α en \mathbf{w} , l'ensemble des vecteurs \mathbf{w}' de \mathbb{Z}^2 tel que $0 \leq \mathbf{w}'_x < \mathbf{s}_x$ et tel que $0 \leq \mathbf{w}'_y < \mathbf{s}_y$, et pour lequel à chaque \mathbf{v}' de \mathbb{Z}^2 , on est en mesure de déterminer si $[r_\alpha](\mathbf{v} + \mathbf{v}') - [r_\alpha](\mathbf{v}) = \mathbf{w}'$.

Pour commencer, on restreint le problème aux vecteurs \mathbf{v}' de \mathbb{Z}^2 tels que $\|\mathbf{v}'\| \leq \sqrt{2}\|\mathbf{s}\| + 2$; puisqu'on a certainement pas $[r_\alpha](\mathbf{v} + \mathbf{v}') - [r_\alpha](\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

On traite ensuite le problème de manière indépendante dans chacune des dimensions : on doit alors savoir pour chaque paire $(\mathbf{v}', \mathbf{w}')$ si $\{r_\alpha(\mathbf{v})\}_x - \mathbf{v}'_y \sin \alpha + \mathbf{v}'_x \cos \alpha < \mathbf{w}'_x + \frac{1}{2}$ (c'est-à-dire si $\{r_\alpha(\mathbf{v})\}_x < \mathbf{w}'_x + \frac{1}{2} + \mathbf{v}'_y \sin \alpha - \mathbf{v}'_x \cos \alpha$).

Ainsi, chaque paire $(\mathbf{v}', \mathbf{w}')$ induit une inégalité de la forme $\{r_\alpha(\mathbf{v})\}_x$. Celle-ci doit être satisfaite pour que \mathbf{m} apparaisse dans C_α , à la position \mathbf{v} . On conclut de manière similaire que dans le Théorème 2.1.

La seconde partie du théorème se prouve de la même façon à ceci près que \mathbf{v} est pris dans la cellule en $\mathbf{w} + \mathbf{i}$.

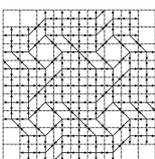
c.q.f.d.

Du fait que la configuration C'_α possède des trous, en procédant comme nous l'avons fait, il n'est pas possible d'obtenir directement un isomorphisme entre l'action d'un système dynamique sur le résidu de la rotation discrétisée et les couleurs de C'_α .

Un autre moyen de faire le lien avec les systèmes dynamiques symboliques, consiste à considérer dès cellules plus larges, afin d'avoir systématiquement au moins un point de $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$ qui arrive dans la cellule. En pratique cela nous incite à utiliser un groupage. On va ainsi définir des configurations $C'_{B,\alpha}$, en tout point identique à C'_α à ceci prêt que les cellules sont groupés deux par deux. C'est ce que nous étudions dans le chapitre suivant.

2.4.3 Définition de $C'_{B,\alpha}$

Par $C'_{B,\alpha}(\mathbf{v})$ on désigne la configuration groupée par blocs "2 × 2". C'est-à-dire la configuration qui nous renvoie les motifs 2 par 2 de la configuration à la position $2\mathbf{v}$. Cette configuration n'est pas redondante.



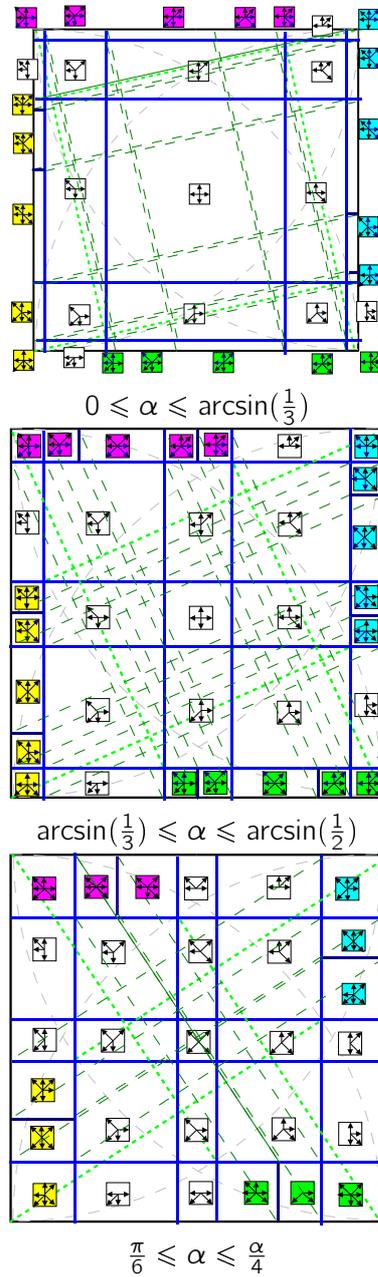
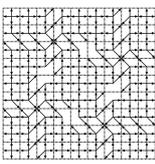


Fig. 2.19 – Exemples de partitions de \mathbb{T}^2 pour la configuration C'_α



Plus formellement^(a), nous écrivons :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2, C'_{B_\alpha}(\mathbf{v}) = C_\alpha^{[2,2]}(2\mathbf{v}).$$

Insistons encore sur le fait C'_{B_α} est donc une configuration sur laquelle les états sont de motifs de taille $[2, 2]$. C'est donc une application de la forme de \mathbb{Z}^2 vers $Q^{\{0,1\}^2}$. Donc $C'_{B_\alpha}(\mathbf{v})$ est qu'une application qui retourne les blocs de taille $[2, 2]$ de C'_α (sans faire preuve de redondance pour autant).

Réciproquement, C'_α peut se redéfinir ainsi :

$$C'_\alpha(\mathbf{v}) = (C'_{B_\alpha}(\lfloor y_v/2 \rfloor, \lfloor x_v/2 \rfloor)) (x_v \bmod 2, y_v \bmod 2)$$

2.4.4 Théorème fondamental pour $C'_{B,\alpha}$

Pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$, on pose :

$$W_B(\mathbf{v}) = [x_v - \frac{1}{2}, x_v + \frac{3}{2}[\times [y_v - \frac{1}{2}, y_v + \frac{3}{2}[+ \mathbf{v}.$$

L'intersection entre $W_B(\mathbf{v})$ et $r_\alpha(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}\mathbf{i}_\alpha + \mathbb{Z}\mathbf{j}_\alpha$ n'est jamais vide. Ceci est une conséquence du fait que de trous ne sont jamais 4-voisins dans C'_α (voir Proposition 2.3).

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, on peut vérifier qu'il existe un unique $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tel que

1. $r_\alpha(\mathbf{w}) \in W_B(\mathbf{v})$,
2. $r_\alpha(\mathbf{w} - \mathbf{j}) \notin W_B(\mathbf{v})$,
3. parmi les points satisfaisant les précédentes contraintes : $r_\alpha(\mathbf{w})$ est le plus à gauche, i.e. $r_\alpha(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{i}$ est minimal.

Par suite, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, on peut définir $\theta' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{w}$, où \mathbf{w} est l'unique point qui répond au précédent critère.

Note 2.4.4.1 De fait, ce domaine correspond à une représentation du tore tourné. C'est d'ailleurs ce qu'explique la Figure 2.22. Le domaine FD_α n'est donc qu'une représentation de ce domaine.

On définira encore l'application $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \mapsto \theta'(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$. C'est-à-dire l'application qui renvoie la position de l'antécédent dans W_B qui satisfait aux critères précédents relativement à la position du bloc. Cette opération va être un équivalent de ce qu'était avant pour nous l'opération $x \mapsto \{x\}$.

Posons alors

$$F_{D_\alpha} := \{\theta(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\}$$

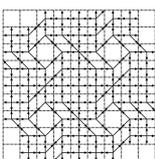
On peut montrer alors que :

$$F_{D_\alpha} = ([-\frac{1}{2}, \cos\alpha - \frac{1}{2}[)^2 \cup ([\cos\alpha - \frac{1}{2}, \cos\alpha + \sin\alpha - \frac{1}{2}[\times [-\frac{1}{2}, \cos\alpha + \sin\alpha - \frac{1}{2}[).$$

De plus, pour tout $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^2$, on pose $F_{D_\alpha}(\mathbf{w}) := F_{D_\alpha} + \mathbf{w}$. on peut vérifier que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$, pour tout $\mathbf{w} \in F_{D_\alpha}(\mathbf{v})$, on $(\{\mathbf{w}\} + \mathbb{Z}\mathbf{i}_\alpha + \mathbb{Z}\mathbf{j}_\alpha) \cap F_{D_\alpha}(\mathbf{v}) = \{\mathbf{w}\}$.

Ce qui nous permet de conclure que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \theta'(\mathbf{v}) \in F_{D_\alpha}(\mathbf{v})$.

^(a)Conformément à ce qui est défini dans la sous-section 1.2, on rappelle $C^{[2,2]}(\mathbf{v})$ désigne le motif rectangulaire de taille $[2, 2]$ qui apparaît en \mathbf{v} .



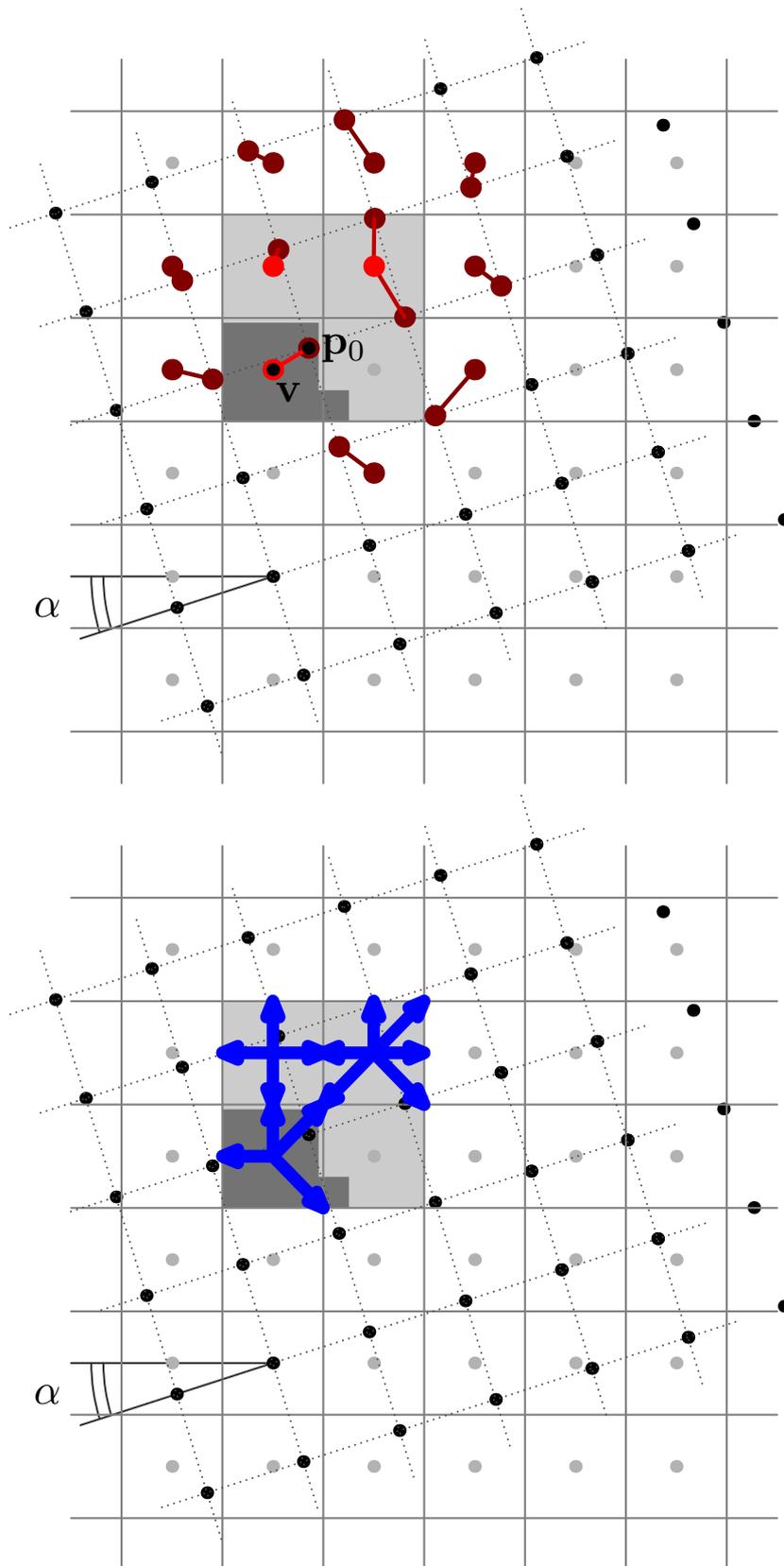


Fig. 2.20 – Soit $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{Z}\mathbf{i}_\alpha + \mathbb{Z}\mathbf{j}_\alpha$ qui tombe dans $F_{D_\alpha}(2\mathbf{v})$ (gris foncé), il est possible de déterminer l'ensemble des symboles de C'_α qui constituent le bloc de taille $[2, 2]$ dont le domaine associé est $W_B(2\mathbf{v})$ (gris clair). Ici, $\mathbf{p}_0 = \theta'(2\mathbf{v})$.

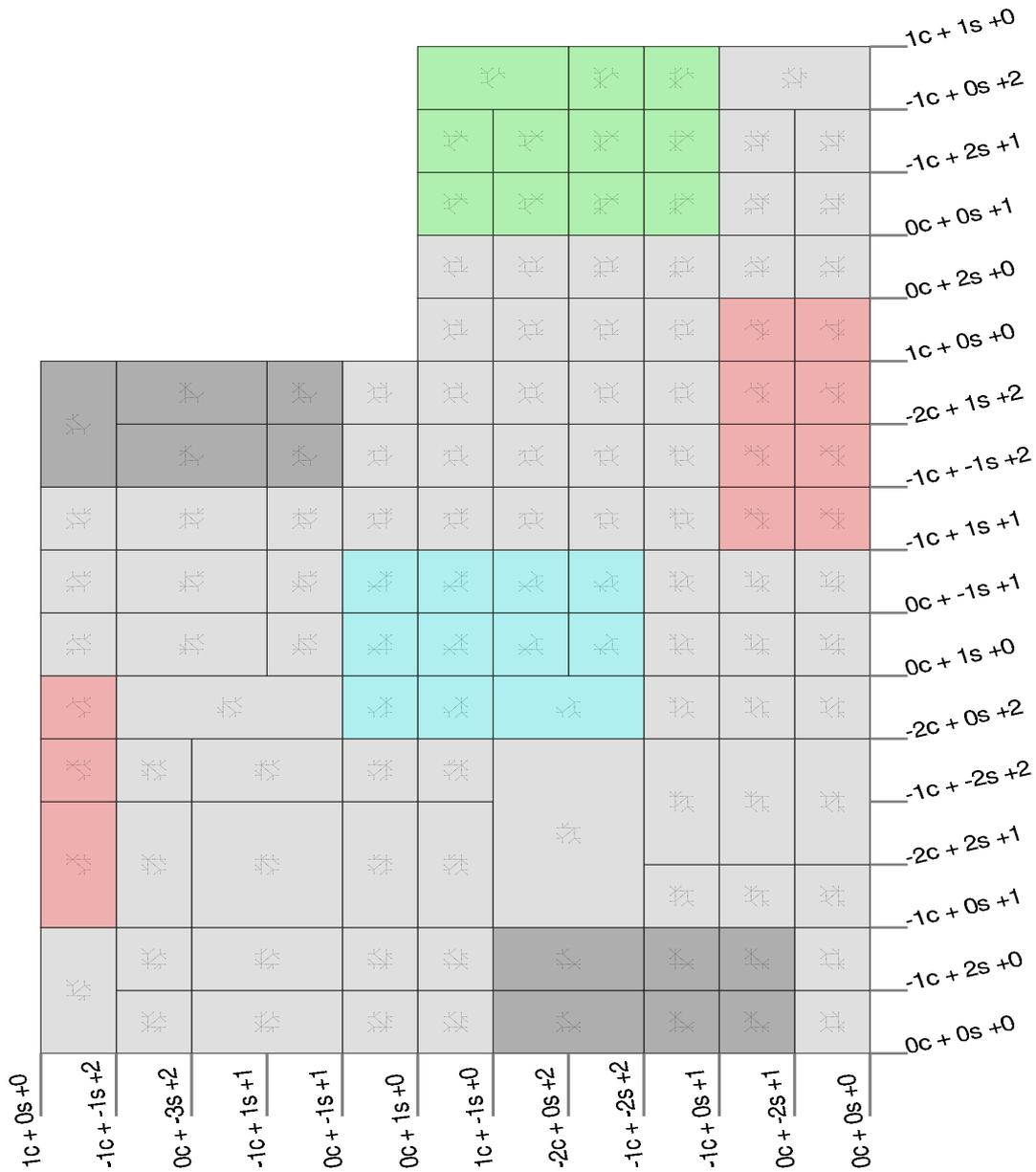
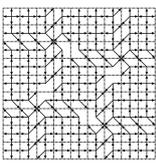
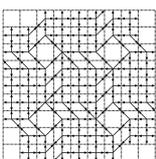


Fig. 2.21 – Une partition de F_{D_α} , pour $\alpha \approx 0.464705$ rad. Cette partition décrit en fonction de $\theta \mathbf{p}$ dans le domaine les motifs de tailles $[2, 2]$ qui apparaissent dans $C'_{B,\alpha}(\mathbf{w})$. Les axes sont étiquetés par des expressions de la forme $kc + k's + k''$. Elles désignent en fait des points de coordonnées $k \cos(\alpha) + k' \sin(\alpha) + k'' - \frac{1}{2}$ de F_{D_α} . Pour des raisons de lisibilité l'échelle de représentation est monotone mais non linéaire.



Théorème 2.2 Il existe une partition de F_{D_α} en un nombre fini de rectangles $J_{p'}$, où p' est un motif de taille $[2, 2]$ qui apparaît dans C'_α , et telle que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$, on ait $\theta(2\mathbf{v}) \in J_{p'}$ si et seulement si $C'_{B,\alpha}(\mathbf{v}) = p'$.

Démonstration :

La preuve repose simplement sur l'idée suivante : La localisation de $\theta(2\mathbf{v})$ dans F_{D_α} permet de déduire la position des points réels qui contribuent à $C'_{B,\alpha}(\mathbf{v})$, puis via le Théorème 2.2 on peut retrouver les symboles associés à chaque position du bloc 2×2 .

Pour tous les points \mathbf{w} de \mathbb{Z}^2 qui ont leur image par r_α dans $W_B(2\mathbf{v})$; on peut calculer $C_\alpha(\mathbf{w})$. On peut même calculer $C_\alpha(\mathbf{w} + \mathbf{d})$, pour tous les $\mathbf{d} \in \mathcal{V}_4(0)$, afin de déterminer s'il s'agit ou non d'un symbole double.

En fait, si on a $r_\alpha(\mathbf{v}') = \theta'(2\mathbf{w})$. De part cela on peut retrouver à la fois le symboles associé en regardant $\{\theta(2\mathbf{w})\}$ et en employant le Théorème 2.1, et sa position dans le bloc 2×2 , en tenant compte de $[\theta(2\mathbf{w})]$. Le même argument s'applique aussi aux points $\mathbf{w}'' = r_\alpha(\mathbf{v}'')$ qui appartient à $r_\alpha(\mathbf{v}') + \mathbb{Z}\mathbf{i}_\alpha + \mathbb{Z}\mathbf{j}_\alpha$ et qui sont à l'intérieur de $W_B(2\mathbf{w})$. En fait, on a plutôt $\{\mathbf{w}''\} = \{\theta(2\mathbf{w}) + k\mathbf{i}_\alpha + k'\mathbf{j}_\alpha\}$, avec $k, k' \in \{-1, 0, 1, 2\}$. On peut calculer de proche en proche la position d'arrivée de chacun de ces points dans le bloc 2×2 en calculant de proche en proche la position des points rencontrés, en procédant par exemple de la même façon que le faisait le transducteur de la Proposition 2.3.6a.

On peut ainsi calculer pour tous les points dans $(2\mathbf{v} + \{0, 1\}^2)$ toutes les images de points qui arrivent dans $\mathbb{Z}\mathbf{i}_\alpha + \mathbb{Z}\mathbf{j}_\alpha \cap W_B(2\mathbf{v})$.

Ceci suffit à conclure que nous pouvons pour chacun des points rencontrés calculer $C'_B(\mathbf{v})$ à partir de $\theta(2\mathbf{v})$.

c.q.f.d.

On appelle alors $l_{C'_{B,\alpha}}$ la fonction d'étiquetage associée au Théorème 2.2 qui associe à un rectangle de F_{D_α} le motif de taille $[2, 2]$ qui lui est associé.

Le Théorème 2.2 peut alors se réécrire ainsi :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2, C'_{B,\alpha}(\mathbf{v}) = l_{C'_{B,\alpha}}(\theta(2\mathbf{v}))$$

Maintenant, on définit $\mathbb{T}_\alpha^2 = \mathbb{R}^2 / (\mathbb{Z}\mathbf{i}_\alpha + \mathbb{Z}\mathbf{j}_\alpha)$; On désigne par $\mathbf{v} \mapsto \{\mathbf{v}\}_\alpha$ la projection canonique sur \mathbb{T}_α^2 , qui est en bijection avec F_{D_α} .

On a les élément pour conclure, la configuration $C'_{B,\alpha}$ est le résultat de la \mathbb{Z}^2 - action sur l'orbite de 0 dans le système dynamique que nous venons de décrire :

$(\mathbb{T}_\alpha^2, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - \{2\mathbf{i}\}_\alpha, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - \{2\mathbf{j}\}_\alpha)$ en tenant compte de la fonction d'étiquetage $l_{C'_{B,\alpha}}$.

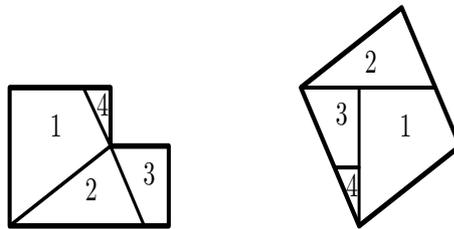
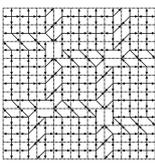


Fig. 2.22 – Échange de morceaux entre F_{D_α} et la représentation canonique de \mathbb{T}_α^2 . Cet échange de morceaux permet de passer d'une représentation à une autre de \mathbb{T}_α^2 . Toutes les translations effectuées suivent des vecteur qui peuvent s'écrire sous la forme $k\mathbf{i}_\alpha + k'\mathbf{j}_\alpha$, avec $k, k' \in \mathbb{Z}$. Notons au passage que cette figure est une preuve visuelle du théorème de PYTHAGORE.



2.4.5 Dynamique symbolique des rotations 3-transvections

Le symbole $[\varpi_\alpha](\mathbf{v})$ désigne les rotations 3-quasi-transvections, présentée en 1.1.3b

Puisque les rotations 3-quasi-transvections sont des quasi-isométries, il est possible leur associer des configurations similaires à C_α et à C'_α .

Cela dit, dans le cas des rotations 3-quasi-transvections, du fait de la composition de plusieurs discrétisations, l'erreur commise peut être plus grande que dans le cas de la rotation discrétisée. On pose donc $\mathbb{A}' = \{-2, 1, 0, 1, 2\}^2$; car chaque discrétisation est à même d'induire une erreur d'au plus un pixel.

On généralise maintenant les idées employées pour la définition des configurations C_α et C'_α , et on définit $C_{\varpi,\alpha}$ et $C'_{\varpi,\alpha}$:

$$C_{\varpi,\alpha} : \mathbb{Z}^2 \mapsto 2^{\mathbb{A}'} : \mathbf{v} \mapsto \bigcup_{\mathbf{v}' \in \mathcal{V}_4(\mathbf{v})} \{[\varpi_\alpha](\mathbf{v}') - [\varpi_\alpha](\mathbf{v})\}$$

$$C'_{\varpi,\alpha} : \mathbb{Z}^2 \mapsto 2^{\mathbb{A}'} : \mathbf{w} \mapsto \bigcup_{\mathbf{v} \text{ tels que } [\varpi_\alpha](\mathbf{v})=\mathbf{w}} C_{\varpi,\alpha}(\mathbf{v})$$

Il est moins évident qu'il est encore possible d'associer un système dynamique simple, à ces configurations. C'est l'objectif principal des paragraphes qui vont suivre.

Il y a dans les rotations 3-quasi-transvections, trois opérateurs de discrétisations qui vont agir successivement chacun sur une seule coordonnée. En effet, chaque transvection n'affecte qu'une seule coordonnée – puisque l'opérateur de quasi-transvection se comporte comme l'identité pour l'une de ses coordonnées.

On va étudier pour chacune de ces discrétisations son résidu ; et aux configurations de rotations 3-transvections, on va associer un espace des phases tridimensionnel sur \mathbb{T}^3 .

Pour atteindre ce but, on commence par décomposer l'opération de rotation 3-transvections en trois étapes.

$$\Gamma_1 : \mathbf{v} \mapsto (x_1(\mathbf{v}), y_1(\mathbf{v})) = \begin{bmatrix} 1 & -\tan(\alpha/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (x_v, y_v)$$

$$\Gamma_2 : \mathbf{v} \mapsto (x_2(\mathbf{v}), y_2(\mathbf{v})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 1 \end{bmatrix} \circ [\diamond] \circ \begin{bmatrix} 1 & -\tan(\alpha/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (x_v, y_v)$$

$$\Gamma_3 : \mathbf{v} \mapsto (x_3(\mathbf{v}), y_3(\mathbf{v})) = \begin{bmatrix} 1 & -\tan(\alpha/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \circ [\diamond] \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 1 \end{bmatrix} \circ [\diamond] \circ \begin{bmatrix} 1 & -\tan(\alpha/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (x_v, y_v)$$

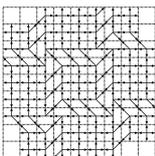
Et aussi, pour des raisons techniques, on va devoir s'intéresser aux mêmes quantités mais définies sans faire les arrondis auparavant :

$$\tilde{x}_1(\mathbf{v}) = x_v - y_v \tan(\alpha/2)$$

$$\tilde{y}_2(\mathbf{v}) = x_v \sin(\alpha) + y_v \cos(\alpha)$$

$$\tilde{x}_3(\mathbf{v}) = x_v \cos(\alpha) - y_v \sin(\alpha)$$

Note 2.4.5.1 On ne s'intéresse pas à \tilde{y}_1 , \tilde{x}_2 , et \tilde{y}_3 car il s'agit de la même chose que y_0 , \tilde{x}_1 et \tilde{y}_2 .



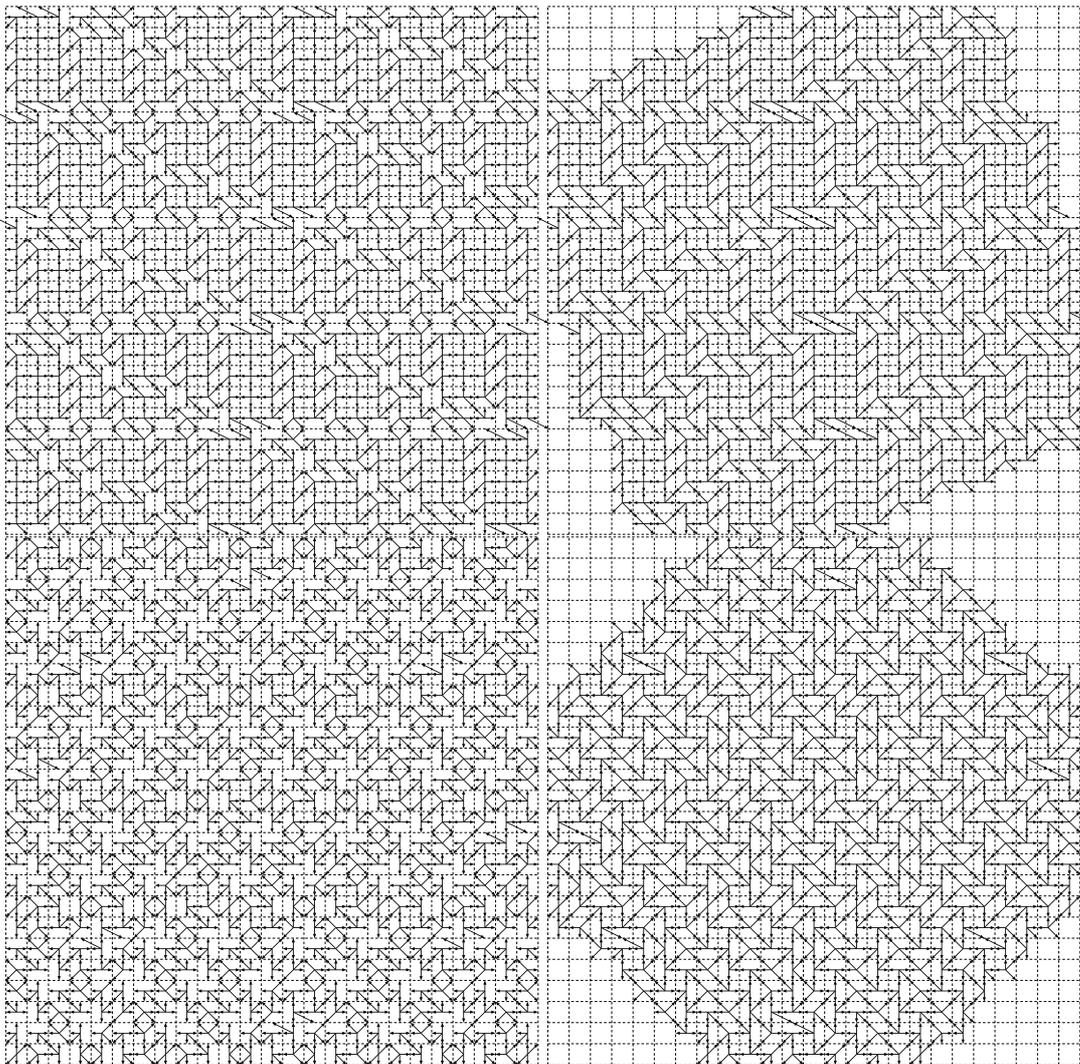
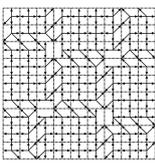


Fig. 2.23 – Exemples de configurations C_α et C'_α de rotations 3-transvections pour $\alpha = 0.4$ radians et $\alpha = \pi/4$ radians.



Maintenant, en remarquant que $[x] = x - \{x\}$, et en développant et simplifiant les expressions de $(\{x_1(\mathbf{v})\}, \{y_2(\mathbf{v})\}, \{x_3(\mathbf{v})\})$, on obtient :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_v - y_v \tan(\alpha/2) \\ y_2 &= x_v \sin(\alpha) + y_v \cos(\alpha) - \{x_1\} \sin(\alpha) \\ x_3 &= x_v \cos(\alpha) - y_v \sin(\alpha) - \{x_1\} \cos(\alpha) + \tan(\alpha/2) \{y_2\} \end{aligned}$$

Les définitions de x_1 et de \tilde{x}_1 ont des expressions identiques, et $y_2, \tilde{y}_2, x_3, \tilde{x}_3$ sont similaires dans le principe. La différence est avant tout conceptuelle, ces deux objets ne sont pas construits selon la même idée : dans un cas on s'intéresse à l'opération de transvection idéale, dans l'autre cas nous tenons compte des discrétisations à chaque étape. Les deux définitions entretiennent des liens forts que nous allons mettre en évidence. Et chacun des deux points possède son avantage.

On dénote encore l'opération par r qui à \mathbf{v} associe $(\{x_1(\mathbf{v})\}, \{y_2(\mathbf{v})\}, \{x_3(\mathbf{v})\})$. Malheureusement, ce n'est pas un morphisme pour l'addition : il n'est pas vrai que $\forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{Z}^2 r(\{\mathbf{v}\} + \{\mathbf{v}'\}) = \{r(\mathbf{v}) + r(\mathbf{v}')\}$

Equivalence entre les codages

Par contre, on va pouvoir montrer facilement que connaissant $(\{\tilde{x}_1(\mathbf{v})\}, \{\tilde{y}_2(\mathbf{v})\}, \{\tilde{x}_3(\mathbf{v})\})$, on peut calculer $(\{x_1(\mathbf{v})\}, \{y_2(\mathbf{v})\}, \{x_3(\mathbf{v})\})$. En effet,

$$f_{l_1} : \begin{pmatrix} \{x_1(\mathbf{v})\} \\ \{y_2(\mathbf{v})\} \\ \{x_3(\mathbf{v})\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\alpha) & \tan(\alpha/2) & 1 \end{bmatrix} \cdot \{\diamond\} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\tilde{x}_1(\mathbf{v})\} \\ \{\tilde{y}_2(\mathbf{v})\} \\ \{\tilde{x}_3(\mathbf{v})\} \end{pmatrix}$$

Cette opération est inversible :

$$f_{l_2} : \begin{pmatrix} \{\tilde{x}_1(\mathbf{v})\} \\ \{\tilde{y}_2(\mathbf{v})\} \\ \{\tilde{x}_3(\mathbf{v})\} \end{pmatrix} = \{\diamond\} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha/2) & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & -\tan(\alpha/2) & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{x_1(\mathbf{v})\} \\ \{y_2(\mathbf{v})\} \\ \{x_3(\mathbf{v})\} \end{pmatrix}$$

On remarque que l'opération r qui à \mathbf{v} associe $(\{\tilde{x}_1(\mathbf{v})\}, \{\tilde{y}_2(\mathbf{v})\}, \{\tilde{x}_3(\mathbf{v})\})$ est un morphisme pour l'addition, de ce fait on va être en mesure d'associer un système dynamique symbolique aux rotations 3-transvections, qui est liée à une translation sur le tore \mathbb{T}^3 .

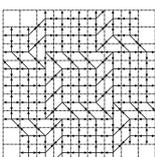
Partition symbolique pour les symboles de $C_{\varpi, \alpha}$

La partie suivante consiste à comprendre quelle est la forme de la partition symbolique en fonction de $(\{x_1(\mathbf{v})\}, \{y_2(\mathbf{v})\}, \{x_3(\mathbf{v})\})$

Ce qui nous intéresse c'est de déterminer chacun des flèches du code, il s'agit d'étudier les expressions de la forme $([x_3(\mathbf{v} + \mathbf{d})] - [x_3(\mathbf{v})], [y_2(\mathbf{v} + \mathbf{d})] - [y_2(\mathbf{v})])$ pour $\mathbf{d} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, -\mathbf{i}, -\mathbf{j}\}$.

Les calculs sont quelques peu fastidieux. Nous en expliquons le principe. L'idée consiste à développer les opérateurs de discrétisation $x \rightarrow [x]$ en les réécrivant comme $x \rightarrow x - \{x\}$. Cela permet de ramener l'expression aux paramètres qui nous intéressent $\{x_1(\mathbf{v})\}, \{y_2(\mathbf{v})\}$ et $\{x_3(\mathbf{v})\}$. Ensuite, on est confronté en général face à une équation de la forme

$$\cos(\alpha) + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\{(\sin(\alpha) + y_2(\mathbf{v}))\} - \{y_2(\mathbf{v})\})$$



Si ce n'est pas le cas, comme dans le développement de $[x_3(\mathbf{v} + \mathbf{j})] - [x_3(\mathbf{v})]$, deux expressions modulaires interviennent, et on fait face à une expression de la forme :

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)(\{y_2(\mathbf{v} + \mathbf{j})\} - \{y_2(\mathbf{v})\}) - \cos(\alpha)(\{x_1(\mathbf{v} + \mathbf{j})\} - \{x_1(\mathbf{v})\}) - \sin(\alpha)$$

Il faut alors étudier plus précisément la nature des expressions $(\{x_1(\mathbf{v} + \mathbf{j})\} - \{x_1(\mathbf{v})\})$ qui vaut $\tan(\alpha/2)$ si $\{x_1(\mathbf{v})\} \in [0, 1 - \tan(\alpha/2)[$ et $\tan(\alpha/2) - 1$ si $\{x_1(\mathbf{v})\} \in [1 - \tan(\alpha/2), 1[$ et puis pour $(\{y_2(\mathbf{v} + \mathbf{j})\} - \{y_2(\mathbf{v})\})$, on peut distinguer quatre cas :

- si $\{x_1(\mathbf{v})\} \in [0, 1 - \tan(\alpha/2)[$ et $\{y_2(\mathbf{v})\} \in [0, 1 - \lfloor 2 \cos(\alpha) \rfloor [$ alors cela vaut $\lfloor 2 \cos(\alpha) \rfloor$;
- si $\{x_1(\mathbf{v})\} \in [0, 1 - \tan(\alpha/2)[$ et $\{y_2(\mathbf{v})\} \in [1 - \lfloor 2 \cos(\alpha) \rfloor, 1[$ alors cela vaut $\lfloor 2 \cos(\alpha) \rfloor - 1$;
- si $\{x_1(\mathbf{v})\} \in [1 - \tan(\alpha/2), 1[$ et $\{y_2(\mathbf{v})\} \in [0, 1 - \lfloor 2 \cos(\alpha) \rfloor + \sin(\alpha) [$ alors cela vaut $\lfloor 2 \cos(\alpha) \rfloor + \sin(\alpha)$;
- si $\{x_1(\mathbf{v})\} \in [1 - \tan(\alpha/2), 1[$ et $\{y_2(\mathbf{v})\} \in [1 - \lfloor 2 \cos(\alpha) \rfloor + \sin(\alpha), 1[$ alors cela vaut $\lfloor 2 \cos(\alpha) \rfloor + \sin(\alpha) - 1$;

C'est dans ces derniers cas qu'on peut être amené des flèches de longueur 2. Ceci nous permet d'écrire $([x_3(\mathbf{v} + \mathbf{i})] - [x_3(\mathbf{v})]) = 1$ si et seulement $\{y_2(\mathbf{v})\} < \in [1 - \sin(\alpha), 1[$ sinon $([x_3(\mathbf{v} + \mathbf{i})] - [x_3(\mathbf{v})]) = 0$.

Du fait que les inégalités sont définies coordonnées par coordonnées, on en déduit que la partition symbolique associée aux différents symboles en fonction de $r(\mathbf{v}) = (\{x_1(\mathbf{v})\}, \{y_2(\mathbf{v})\}, \{x_3(\mathbf{v})\})$ est composée de parties qui divisent le tore \mathbb{T}^3 en parallélépipèdes.

A la partition ainsi définie, on associe la fonction d'étiquetage $l_{\varpi, \alpha}$.

Pour \tilde{r} , les zones ne sont plus des parallélépipèdes mais simplement des unions finies de polytopes. On appelle $\tilde{l}_{\varpi, \alpha}$, la fonction d'étiquetage associée. On passe d'une fonction d'étiquetage à l'autre en utilisant les transformations définies à la section précédente.

En pratique, cette étude permet de mettre en évidence que dans le cas des rotations 3-transvections (ou la rotation horizontale est favorisée), les flèches de longueur supérieure à $\sqrt{2}$ ne concernent que des flèches verticales.

Puis que les shifts horizontaux, et verticaux se traduisent comme des actions horizontales et verticales, Il s'en suit qu'il existe un vecteur \mathbf{i}'_α et un vecteur \mathbf{j}'_α tels que :

$$\tilde{r}(\mathbf{v} + \mathbf{i}) = \tilde{r}(\mathbf{v}) + \mathbf{i}'_\alpha, \tilde{r}(\mathbf{v} + \mathbf{j}) = \tilde{r}(\mathbf{v}) + \mathbf{j}'_\alpha$$

En pratique cela revient à dire que

$$\mathbf{i}'_\alpha = \tilde{r}(\mathbf{i}) = (0, \sin(\alpha), \cos(\alpha))$$

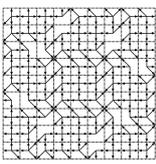
et que

$$\mathbf{j}'_\alpha = \tilde{r}(\mathbf{j}) = (-\tan(\alpha/2), \cos(\alpha), -\sin(\alpha))$$

Du fait des éléments que nous avons énoncés , il est clair qu'on peut établir un théorème du même type que le Théorème 2.1 :

Théorème 2.3 (Théorème fondamental pour $C_{\varpi, \alpha}$) *Pour toute taille de motifs de $m \times n$, Il existe une partition P du tore \mathbb{T}^3 en nombre fini de parties non nécessairement parallépipédiques^(a), $\{F_m\}$ où \mathbf{m} désigne un $m \times n$ motif, telle que pour tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$, $C_{\varpi, \alpha}^{|\mathbf{m}|}(\mathbf{v}) = \mathbf{m}$ si et seulement si $r(\mathbf{v}) \in F_m$.*

^(a)i.e. qui sont l'image de parallélépipèdes par la fonction f_{i_2}



Mais on peut dire mieux que cela : on a un système dynamique symbolique associé. Il est formé par des translations sur le tore \mathbb{T}^3 et la :

$$(\mathbb{T}^3, x \mapsto x + \mathbf{i}'_\alpha, y \mapsto y + \mathbf{j}'_\alpha, \tilde{\omega})$$

Certaines propriétés restent valides : par exemple, la possibilité de passer d'une configuration à l'autre par le biais des transducteurs qui calculent la transformation (ou la transformation inverse) reste valide – cette propriété dépend uniquement des définitions de C_α et de C'_α , mais absolument pas de la nature de la transformation effectuée pourvu qu'elle puisse être encodée dans les configurations.

2.4.6 Liens avec les plans discrets

Des séquences de la forme $\{x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) + \beta\} < (\cos \alpha)$ ou de la forme $\{x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) + \beta\} < (\sin \alpha)$ apparaissent dans les sous-configurations, par exemple ($R_h(\mathbf{v}) = R(C_\alpha(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{i}$, ou $R_v(\mathbf{v}) = R(C_\alpha(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{j}$). Mais le même type de configuration existe en considérant U, L, D au lieu de R . De telles séquences sont étudiées par Valérie BERTHÉ et Laurent VUILLON dans [BV00] : Ce sont des séquence de complexité $mn + n$, et pour lesquelles on peut faire des liens avec les notions de pavages 3-vers-2 ou de projections de plans discrets.

Note 2.4.6.1 Notons qu'il existe une fonction h de $(\mathbb{A} \cup \{\emptyset\})^8 \rightarrow 2^{\mathbb{A}}$ que l'on peut étendre canoniquement en morphisme sur les configurations, telle que :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2, C_\alpha(\mathbf{v}) = h(R_h(\mathbf{v}), R_v(\mathbf{v}), L_h(\mathbf{v}), L_v(\mathbf{v}), U_h(\mathbf{v}), U_v(\mathbf{v}), D_h(\mathbf{v}), D_v(\mathbf{v}))$$

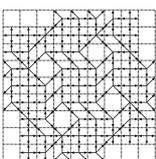
Ce qui revient à dire que la configuration C_α , peut être réalisée en faisant le produit direct de configurations de complexité $mn + n$ ou $mn + m$.

Note 2.4.6.2 Il est intéressant de remarquer que la technique qui consiste à observer tout comme si cela était continu et à étudier la déformation semble être généralisable pour associer un système dynamique à chaque transformation quasi-affine. Comme le montre la composée de trois transvections, il semblerait donc qu'en général, on soit capable d'associer à un système à $2k$ dimensions à la composée de k transformées affines. Ceci peut constituer une piste intéressante pour comprendre la nature des systèmes dynamiques associés à ces systèmes.

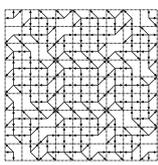
2.5 Conclusions du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons initié l'étude des phénomènes de rotations à travers leur recodage dans des configurations. Il existe deux types de configurations : celles du type de C_α , qui indique pour un point la façon dont évolue son voisinage sous l'action transformation et C'_α qui indique pour un point transformé la position relative des voisins des antécédents de ce point par la transformation, et qui se trouve être une image de la relation de 4-voisinage par la transformation. Chacune de ces configurations a été présentée pour deux types de rotations différentes : les rotations discrétisées et la rotation 3-transvections.

Aussi, comme l'illustre l'existence de transducteurs calculant la transformation encodée, ces configurations sont pertinentes pour l'implémentation de rotations via de l'algorithmique "localisée". Dans la suite, on a mis en évidence que ces configurations correspondaient aux codages de \mathbb{Z}^2 actions, et que le système dynamique qui y correspondait revenait à un ensemble d'échange de morceaux sur le tore.



Chacune des visions (algorithmique, analyse de configurations et systèmes dynamiques) va permettre d'énoncer des résultats particuliers : analyse de complexité, propriétés fonctionnelles, périodicité, quasi-périodicité, substitutions, shifts, motifs interdits... Nous avons ici posé les éléments de définitions qui déterminent pour beaucoup la trajectoire de ce tapuscrit.



Chapitre 3

Propriétés dynamiques des configurations de rotations

Plan détaillé du chapitre

3.1	Périodicité et quasipériodicité	63
3.1.1	Rappel de définitions	64
3.1.2	Périodicité des configurations	65
3.1.3	quasipériodicité	66
3.2	Étude de la fréquence des motifs	67
3.2.1	Fréquence des motifs dans C_α	68
3.2.1a	Le cas non-pythagorien	68
3.2.1b	Le cas pythagorien	70
3.2.2	Fréquence des motifs dans C'_α	70
3.3	Conclusions du chapitre	72

Maior pars mortalium, Pauline, de naturae malignitate conqueritur, quod in exiguum aevi gignimur, quod haec tam uelociter, tam rapide dati nobis temporis spatia decurrunt, adeo ut exceptis admodum paucis ceteros in ipso uitae adparatu uita destituat.

De la briéveté de la vie, Sénèque

“If you draw the timelines, realistically by 2050 we would expect to be able to download your mind into a machine, so when you die it’s not a major career problem.”

Ian PEARSON, chef de l’unité de futurologie de British Telecom,

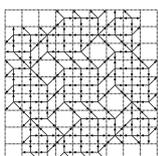
Dans ce chapitre, on précise la nature du système observé : Une des premières choses à faire est de caractériser les cas où la dynamique est périodique. On va ensuite prouver de la “quasi-périodicité” en général des configurations obtenues. On aura ainsi montré que les configurations étudiées sont particulièrement régulières. La très grande régularité des configurations induite par la quasipériodicité et l’unique ergodicité^(a) du système permettent d’établir un lien direct dans les cas dense entre la surface d’un cadre et la fréquence du motif associé à ce cadre.

Définition 3.1 (Angle quadratique) *Un angle α est quadratique s’il existe $p, q, k \in \mathbb{Z}$ $p \cos(\alpha) + q \sin(\alpha) = k$. L’entier gaussien $z_l = p + qi$ est appelé le vecteur d’entrelacement associé à α .*

3.1 Périodicité et quasipériodicité

Les résultats obtenus dans cette section ont fait l’objet d’une parution avec Éric RÉMILA dans les actes de la conférence DGCI 2003 [P-ACI6]. Une version longue, [P-JI1], est parue dans la revue Discrete Applied Mathematics.

^(a)Ergodicité et unicité de la mesure invariante.



Dans cette section, après un rappel des définitions relatives aux notions de périodicité et de la quasipériodicité des configurations, on donne les résultats relatifs à leur périodicité. Nous prouverons ensuite la quasipériodicité en général de ces configurations.

3.1.1 Rappel de définitions

Définition 3.2 (vecteur de périodicité) Une configuration admet $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$ pour vecteur de périodicité si pour tout $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^2$, $C(\mathbf{w}) = C(\mathbf{w} + \mathbf{v})$

L'ensemble des vecteurs de périodicité a une structure de groupe : on le vérifie simplement en constatant la présence du vecteur nul dans tout groupe de vecteur de périodicité est une trivialité. De plus, le reste des arguments découle de la symétrie et la transitivité des relations d'équivalence comme "=".

En fonction du nombre de dimensions de la base capable de générer le groupe, on différencie les types de périodicité. Si une configuration n'admet pas de vecteur de périodicité non nul alors la configuration est *apériodique*. Si les vecteurs de périodicité peuvent tous être générés à l'aide d'un générateur (et de son inverse), et que le groupe s'étend le long d'une unique dimension, alors, la configuration est *mono-périodique*.

Si une configuration admet autant de vecteurs de périodicité que de dimensions (dans le cas de configuration planaire 2) alors la configuration est dite *totalelement périodique*.

Définition 3.3 (quasipériodicité) Une configuration C est quasipériodique si et seulement si pour tout motif m , il existe une taille de fenêtre $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$ telle que tout motif rectangulaire de taille \mathbf{s} qui apparaît dans la configuration contient une instance du motif m . La fonction de quasipériodicité associée à la configuration C est la fonction, qui à une taille de motif \mathbf{v} , associe une taille $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$ minimale en termes d'aire, telle que toute fenêtre de taille \mathbf{s} dans C contienne tous les motifs de taille \mathbf{v} .

Note 3.1.1.1 Dans notre cas, la quasipériodicité de la configuration, implique l'uniforme récurrence du système dynamique multidimensionnel associé à la configuration : en effet puisqu'on peut associer à tout motif une fenêtre, et qu'à des motifs de plus en plus grands correspondent des fenêtres de plus en plus petites, dire que la configuration est quasipériodique revient à dire que quelles qu'on peut repasser arbitrairement de n'importe quel point de l'espace des phases en un temps borné par la fonction de quasipériodicité. Ceci correspond clairement à la notion d'uniforme récurrence.

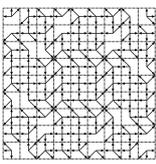
Note 3.1.1.2 Notons que la quasipériodicité en dimension 2 n'implique pas la quasipériodicité en dimensions 1 ! Il se peut en effet, qu'un motif n'apparaisse qu'une seule fois dans une ligne, alors qu'il apparaît régulièrement dans le plan.

quasipériodicité du système dynamique

La quasipériodicité est un résultat qui permet de spécifier le type de système dynamique dont on se rapproche.

- elle permet de classifier la dynamique et de mieux comprendre ce à quoi elle ressemble.
- un certain nombre de résultats ne peuvent s'énoncer que pour des configurations quasipériodiques.

Si on s'intéresse au problème d'un point de vue unidimensionnel, la quasipériodicité de systèmes tels que celui que nous étudions et un sujet déjà abondamment couvert (voir par exemple [FOG02] ou [FNRS00]).



Autres définitions

On note par $\mathcal{G}_\alpha \subseteq \mathbb{T}^2$, l'orbite de $\mathbf{0}$ sous la \mathbb{Z}^2 -action $(\mathbb{T}^2, T_{i_\alpha}, T_{j_\alpha})$. \mathcal{G}_α est l'image par la projection canonique $x \mapsto \{x\}$ vers \mathbb{T}^2 du réseau \mathbb{Z}^2 tourné d'un angle α .

On pose

$$L_\alpha = \mathbb{Z}\mathbf{i}_\alpha + \mathbb{Z}\mathbf{j}_\alpha$$

Naturellement, le fait que d'une part L_α possède une structure de groupe similaire à celle de \mathbb{Z}^2 , et d'autre part que la projection canonique sur \mathbb{T}^2 se comporte comme un morphisme pour l'addition, entraîne que \mathcal{G}_α possède une structure de groupe. Il est possible de noter de plus que L_α et \mathcal{G}_α sont invariants par rotation de $\pi/2$.

3.1.2 Périodicité des configurations

Définition 3.4 (Angle pythagoricien) *Un angle α sera dit pythagoricien si $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ sont tous deux rationnels.*

Les angles pythagoriciens sont denses dans $[0 \dots 2\pi[$: Il s'agit là d'un résultat classique. On peut néanmoins le prouver en utilisant le fait qu'il existe un morphisme de \mathbb{Q} vers les triples pythagoriciens tel que à un nombre rationnel q , on associe l'angle défini par le triple pythagoricien qui vaut exactement deux fois l'angle associé q . Nous aurons l'occasion de rencontrer ce morphisme en Section 5.1.8.

Théorème 3.1 (Périodicité des configurations) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. α est pythagoricien.
2. C_α est totalement périodique.
3. C'_α est totalement périodique.

Démonstration :

1) \Rightarrow 2) et 1) \Rightarrow 3)

On suppose que l'angle α est pythagoricien.

Il existe une constante positive entière K , telle que $K\mathbf{i}_\alpha$ et $K\mathbf{j}_\alpha$ soient tous les deux dans \mathbb{Z}^2 . Ainsi, pour tout vecteur \mathbf{v} de \mathbb{Z}^2 , on peut écrire $\{r_\alpha\}(\mathbf{v} + K\mathbf{i}) = \{r_\alpha\}(\mathbf{v} + K\mathbf{j}) = \{r_\alpha\}(\mathbf{v})$. En vertu du Théorème 2.1, ceci revient à $C_\alpha(\mathbf{v} + K\mathbf{i}) = C_\alpha(\mathbf{v} + K\mathbf{j}) = C_\alpha(\mathbf{v})$. Donc la configuration C_α est totalement périodique. Le même type d'argumentation et le théorème 2.2 permettent de conclure C'_α est totalement périodique : $C'_\alpha(\mathbf{w} + K\mathbf{i}_\alpha) = C'_\alpha(\mathbf{w} + K\mathbf{j}_\alpha) = C'_\alpha(\mathbf{w})$.

2) \Rightarrow 1)

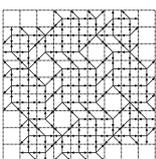
Réciproquement, si C_α est totalement périodique, alors il existe un vecteur entier positif \mathbf{t} tel que pour tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$, on ait $\{r_\alpha\}(\mathbf{v})$ et $\{r_\alpha\}(\mathbf{v} + \mathbf{t})$ éléments du même I_p (de la partition rectangulaire définie dans le Théorème 2.1).

En répétant ce procédé le long de la période, on obtient pour tout entier k de \mathbb{Z} , $\{r_\alpha\}(\mathbf{v} + k\mathbf{t}) = \{r_\alpha\}(\mathbf{v}) + k\{r_\alpha\}(\mathbf{t})$ est élément de I_p .

Supposons maintenant que $(\{r_\alpha\}(\mathbf{t}))_x$ ne soit pas rationnel. Cela impliquerait que $\{\{r_\alpha\}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{i} + k\{r_\alpha\}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{i}, k \in \mathbb{Z}\}$ soit dense dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Il faudrait en conclure que la longueur du côté de I_p est donc de 1. Or, cela est impossible pour $\alpha \neq 0$: la partition que nous avons présentée au Théorème 2.1, contient toujours une division verticale qui sépare le tore en plusieurs catégories de symboles.

Pour la composante verticale de \mathbf{t} , on procédera de même, on en déduit donc que le vecteur $\{r_\alpha\}(\mathbf{t})$ est rationnel sur ses deux coordonnées.



Ainsi, il existe une constante positive K telle que $r_\alpha(K\mathbf{t})$ (ce que nous pouvons écrire $(Kt_x\mathbf{i}_\alpha + Kt_y\mathbf{j}_\alpha)$) est un élément \mathbf{w} de \mathbb{Z}^2 . On conclut de cela (en examinant les équations formées par les deux composantes) que $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ sont tous deux rationnels et plus précisément $\cos \alpha = \frac{x_t x_w + y_t y_w}{K(x_t^2 + y_w^2)}$ et $\sin \alpha = \frac{y_t x_w - x_t y_w}{K(x_t^2 + y_w^2)}$.

3) \Rightarrow 1)

Maintenant, on suppose que C'_α est périodique : Il existe un vecteur entier positif \mathbf{t}' tel que pour tout vecteur \mathbf{w} de \mathbb{Z}^2 , et pour tout entier k de \mathbb{Z} , $C'_\alpha(\mathbf{w}) = C'_\alpha(\mathbf{w} + k\mathbf{t}')$. Ainsi, si \mathbf{w} est choisi d'une façon telle que $C'_\alpha(\mathbf{w})$ ne soit pas un trou, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, il existe au moins un vecteur \mathbf{v}_k de \mathbb{Z}^2 qui est un antécédent de $\mathbf{w} + k\mathbf{t}$, c'est-à-dire tel que $[r_\alpha](\mathbf{v}_k) = \mathbf{w} + k\mathbf{t}$.

Considérons le vecteur $\mathbf{w}_k = r_\alpha(\mathbf{v}_{k+1}) - r_\alpha(\mathbf{v}_0)$. Du fait des propriétés de l'opérateur d'arrondi, nous avons $\|\mathbf{w}_k - k\mathbf{t}'\| \leq 4$. Ainsi, la distance entre \mathbf{t}' et le groupe $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$ est nécessairement plus petite que $4/k$. Cela est vrai pour tout entier k de \mathbb{Z} . Donc, nous déduisons que \mathbf{t}' appartient à $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$. Finalement comme nous l'avons fait dans le cas périodique de C_α , nous en concluons que l'angle α est pythagoricien.

c.q.f.d.

3.1.3 quasipériodicité

On définit \mathcal{L}_α comme étant $\{\|\mathbf{v}' - \mathbf{v}\| \mid \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathcal{G}\}$

Proposition 3.1 *Si $\inf(\mathcal{L}_\alpha) = 0$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un vecteur \mathbf{e}_ϵ de \mathcal{G}_α tel que $0 < \|\mathbf{e}_\epsilon\| \leq \epsilon$, et \mathcal{G}_α contient le groupe $\mathbb{Z}\mathbf{e}_\epsilon + \mathbb{Z}\mathbf{e}'_\epsilon$, avec $\mathbf{e}'_\epsilon = r_{\pi/2}(\mathbf{e}_\epsilon)$. De plus, \mathcal{G}'_α est infini, seulement dans les cas α où α n'est pas pythagoricien.*

Démonstration :

Le seul fait non trivial c'est que α n'est pas pythagoricien. Supposons que α soit pythagoricien. Alors, il existe un triple $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$ pour lequel on peut poser $\cos \alpha = a_\alpha/c_\alpha$ et $\sin \alpha = b_\alpha/c_\alpha$. On considère les coordonnées horizontales et verticales, et cela nous conduit au fait \mathcal{G}_α est inclus dans $\mathbb{Z}\frac{1}{c_\alpha}\mathbf{i} + \mathbb{Z}\frac{1}{c_\alpha}\mathbf{j}$. Ceci contredit notre hypothèse !

c.q.f.d.

Théorème 3.2 *Pour tout angle $\alpha \in [0 \dots \pi/4]$, la configuration C_α est quasipériodique ; il en est de même pour la configuration C'_α .*

Démonstration :

Si α est pythagoricien alors du fait du Théorème 3.1, le résultat est naturellement vrai pour C_α et C'_α , puisqu'elles sont toutes deux périodiques.

Dorénavant, on se focalise sur le cas où α n'est pas pythagoricien.

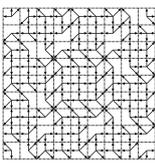
Pour C_α

Soit \mathbf{m} un motif de la configuration C_α , qui apparaît en position \mathbf{v}_0 , et F_m est le cadre rectangulaire qui lui est associé.

Nous allons prouver qu'il existe un vecteur \mathbf{s} tel que pour tout vecteur \mathbf{v} de \mathbb{Z}^2 , la fenêtre de taille \mathbf{s} centrée en \mathbf{v} contient un vecteur \mathbf{v}' tel que $\{r_\alpha\}(\mathbf{v}')$ appartient à F_m . (Ce qui est juste une expression formelle de la quasipériodicité)

On définit un réel positif ϵ et on considère l'ensemble des points

$$S_\epsilon = [-1 \dots 1]^2 \cap (\mathbb{Z}\mathbf{e}_\epsilon + \mathbb{Z}\mathbf{e}'_\epsilon)$$



(on réemploie les notations de la Proposition 3.1).

Remarquons que pour tout vecteur \mathbf{w}' qui appartient à la cellule situé à l'origine, l'ensemble $\{\mathbf{w}'\} + S_\epsilon$ a une intersection non vide avec tout carré de côté supérieur 2ϵ , inclus dans la cellule de discrétisation de 0.

Pour ϵ suffisamment petit, l'ensemble $\{r_\alpha\}(\mathbf{v}) + S_\epsilon$ a une intersection non vide avec le cadre rectangulaire F_m .

Or, S_ϵ est un sous-ensemble fini de \mathcal{G}_α ; et donc tous les éléments \mathbf{w} de S_ϵ peuvent facilement s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments générateurs du groupe :

$$\mathbf{w} = a_w \mathbf{i} + b_w \mathbf{j} + c_w \mathbf{i}_\alpha + d_w \mathbf{j}_\alpha$$

Or, puisque S_ϵ est fini, cela nous conduit à l'existence d'une constante positive K_ϵ , telle que pour tout $\mathbf{w} \in \mathcal{G}_\epsilon$, on puisse avoir $|a_w| < K_\epsilon$, $|b_w| < K_\epsilon$, $|c_w| < K_\epsilon$ and $|d_w| < K_\epsilon$.

On note \mathbf{w}_0 un élément de \mathcal{G}_ϵ tel que $\{r_\alpha\}(\mathbf{v}) + \mathbf{w}_0$ appartient à I_m .

On considère ensuite la fenêtre centrée en \mathbf{v} et de taille $(2K_\epsilon, 2K_\epsilon)$. L'élément $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + a_{w_0} \mathbf{i} + b_{w_0} \mathbf{j}$ est dans cette fenêtre et $\{r_\alpha\}(\mathbf{v}') = \{r_\alpha\}(\mathbf{v}) + \{\mathbf{w}_0\} = \{r_\alpha\}(\mathbf{v}) + \mathbf{w}_0$. Donc $\{r_\alpha\}(\mathbf{v}')$ appartient à I_m . Ceci qui est exactement le résultat attendu !

Pour C'_α

Soit \mathbf{m} un motif qui apparaît dans C'_α à l'emplacement \mathbf{w}_0 et I'_m le cadre qui lui correspond. Nous devons prouver qu'il existe un vecteur \mathbf{s}' dénotant une taille, telle que pour tout vecteur $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^2$, et toute fenêtre de taille \mathbf{s}' centrée en \mathbf{w} , la fenêtre considérée contient un vecteur de $r_\alpha(\mathbf{v}')$ tel que $\{r_\alpha\}(\mathbf{v}')$ appartient à I'_m .

En utilisant le même argument, que celui employé pour C_α , on observe de manière similaire qu'il existe un vecteur \mathbf{s} dénotant une taille tel que, pour tout vecteur \mathbf{w} of \mathbb{Z}^2 , la fenêtre de taille \mathbf{s} centrée en \mathbf{w} contient un vecteur \mathbf{v}' tel que $\{r_\alpha\}(\mathbf{v}')$ est un élément de I'_m .

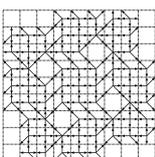
Si \mathbf{s}' est suffisamment grand (Par exemple $\mathbf{s}' = 2\mathbf{s}$), alors n'importe quelle fenêtre de taille \mathbf{s}' , contient l'image par r_α de la fenêtre de taille \mathbf{s} . Et du fait du Théorème 2.2, cela nous fournit le résultat attendu.

c.q.f.d.

3.2 Étude de la fréquence des motifs

Avec Valérie BERTHÉ, nous avons étudié la fréquence des motifs qui apparaissent dans les configurations C_α et C'_α . Ce résultat est paru dans, les actes de la conférence WORDS 2005, [P-ACI2] – les preuves ont été ici un peu étendues.

Pourquoi étudier la densité des symboles et des motifs? D'après les motivations exposées en Section 0.3.4, on souhaite étudier des algorithmes incrémentaux qui réalisent des rotations sur automates cellulaires. Or, comme déjà mentionné, cela implique l'existence de règles locales qui régissent le passage d'un motif à un autre. Ces règles peuvent être interprétées comme des substitutions locales d'un motif par un autre; et le fait de connaître la variation de la densité des symboles au cours des différentes phases du processus de rotation peut nous conduire à des constatations de la forme : " p symboles de tel type disparaissent, quand q symboles de tel type apparaissent"; ou encore " p symboles de tel type disparaissent, quand q symboles de tel type apparaissent, cette activité étant modulée par la présence de tel autre symbole". Cette étude devrait à long terme permettre de remarquer la corrélation entre certains types de symboles, et de rechercher des règles de réécriture pour celles-ci. Ces règles seraient autant d'indices dans l'élaboration de règles de transitions pour automates cellulaires.



Davantage de temps eut été nécessaire pour mener cette approche jusqu'à son terme. Nous nous sommes arrêtés à une description de la densité des symboles pour C_α et pour C'_α . Pour continuer plus loin, il faut aussi établir la liste de toutes les relations entre les formules de fréquence, et observer s'il se dégage de cet ensemble des lois remarquables.

En pratique, pour l'étude de la densité des motifs, on va distinguer deux cas en fonction du fait que l'angle α est un angle pythagoricien ou non ; autrement dit, en fonction ou non de la densité de G , l'orbite de 0 sous la \mathbb{Z}^2 -action, dans \mathbb{T}^2 .

3.2.1 Fréquence des motifs dans C_α

La fréquence d'un symbole $p \in Q$ dans une configuration $C \in Q^{\mathbb{Z}^2}$ est définie par la limite suivante (dans la mesure où celle-ci existe) :

$$\eta_C(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2, x_v, y_v \in \{-n, \dots, n\} \text{ and } C(\mathbf{v}) = p\}}{(2n + 1)^2}.$$

On définit $S_{u,X}(n)$ comme étant le nombre d'éléments de la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui appartiennent à X . Ceci se réécrit $S_{u,X}(n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_X(u_i)$

3.2.1a Le cas non-pythagoricien

Définition 3.5 (Équirépartition) Une suite d'éléments $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est dite équirépartie dans un espace mesurable (E, μ) si, pour tout sous-ensemble de $X \subseteq E$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S_{u,X}(n) \mapsto \mu(X)$.

Le théorème qui suit est issu de certains exemples d'application du critère de WEYL dans l'ouvrage de Gérard RAUZY[RAU76].

Un ensemble de d réels $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ seront dits \mathbb{Z} -indépendants si et seulement s'il n'existe pas $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\vec{0}\}$ tels que $\mathbf{w}\mathbf{v} = K$ où K est un entier. Autrement dit les \mathbf{v}_d sont \mathbb{Z} -indépendants si et seulement si pour tout vecteur \mathbf{w} , l'existence d'un $K \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^d n_k \mathbf{v}_k = K$, implique que tous les \mathbf{w}_i soient nuls.

En pratique, les angles tels que les $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ soient \mathbb{Z} -indépendants sont tous les angles sauf les angles quadratiques.

Théorème 3.3 (Gérard RAUZY,[RAU76]) Soit une suite $u_n = \{n\mathbf{v} + \mathbf{v}'\}$, qui correspond à l'ensemble des translatés par $n\mathbf{v}$ d'un point \mathbf{v}' sur le tore de dimension d , \mathbb{T}^d pour $n \in \mathbb{N}$ Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie, si et seulement si, les coordonnées du vecteurs $\mathbf{v} : \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ forment un ensemble \mathbb{Z} -indépendant sur \mathbb{T} .

Proposition 3.2 Soit α un réel correspondant à un angle non pythagoricien. À chaque symbole $p \in 2^{\mathbb{A}}$, la fréquence qui lui est associée $\eta_{C_\alpha}(p)$ existe ; elle est égale à la taille du cadre F_p (défini selon le Théorème 2.1).

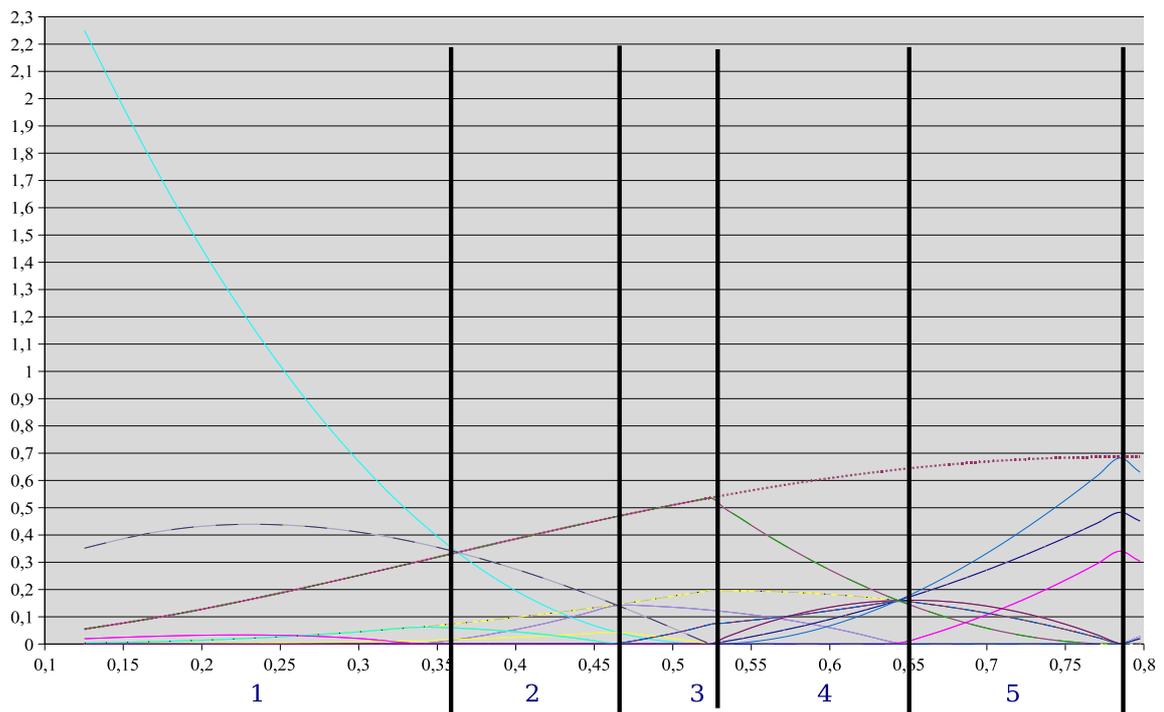
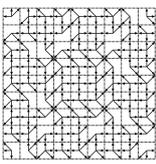
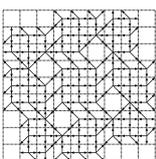


Fig. 3.1 – Graphe récapitulatif de la fréquence^(a) en fonction de l'angle pour chacun des symboles de la configuration C'_α dans le cas où α est angle non pythagoricien. Dans le cas triple pythagoricien, les valeurs sont sensiblement différentes de celles représentées sur ces courbes. Les grandes divisions noires correspondent aux instants où les fonctions décrivent la répartition des symboles changent algébriquement, (voir Figure 3.2). La position de ces lignes peut être calculée en étudiant le mouvement des coupures entre les parties dans la partition symbolique associée à C'_α . Au niveau des couleurs des courbes celle-ci sont très nombreuses et leur superposition courante. Il est plus simple de se référer à la description algébrique pour identifier la courbe.



3.2.1b Le cas pythagoricien

Si α est un angle pythagoricien, le groupe \mathcal{G}_α n'est pas dense sur \mathbb{T}^2 : cependant, \mathcal{G}_α est un groupe fini et cyclique, d'ordre c où c est le plus grand des éléments du triplet pythagoricien premier (a, b, c) . Pour ce dernier point, on pourra consulter la Proposition 5.4. On pose $\alpha = \arg(a + ib)$.

Proposition 3.3 Soit $\alpha \in [0, \dots, \pi/4[$ un angle pythagoricien, c est l'ordre du groupe \mathcal{G}_α .

Soit $\eta_{C_\alpha}(p)$ la fréquence du symbole p dans C_α , $\eta_{C_\alpha}(p)$ vérifie

$$\forall p \in Q_\alpha, \eta_{C_\alpha}(p) = \frac{\#\mathcal{G}_\alpha \cap I_p}{c}.$$

Démonstration :

La configuration est totalement périodique, littéralement cela signifie qu'elle possède deux vecteurs de périodicité propres non alignés, la fréquence des symboles sur la configuration coïncide dans ce cas avec la fréquence des symboles sur une période.

Aussi puisque que \mathcal{G}_α est cyclique que \mathbf{i}_α et \mathbf{j}_α sont tous deux des générateurs du groupe \mathcal{G}_α . Il suffit donc d'observer ce qu'il se passe sur un segment de ligne de longueur c . Il suffit dès lors d'observer ce qu'il se passe sur période, pour déduire la fréquence limite des symboles dans les configurations. On obtient directement le résultat annoncé.

c.q.f.d.

Les configurations pythagoriciennes correspondent donc aux discontinuités de la fonction qui donne la fréquence d'un symbole en fonction de l'angle.

3.2.2 Fréquence des motifs dans C'_α

On suppose dans cette section que α n'est pas un angle pythagoricien.

De manière identique à l'étude menée pour C_α , on sait que l'orbite de 0 sous la \mathbb{Z}^2 -action est dense et équirépartie dans \mathbb{T}_α^2 , en effet, la preuve est similaire, il s'agit encore d'un mouvement de translation symétrique au cas que nous venons de traiter. En effet, ce qui est dit dans la section 2.4.4, on se base de manière dans C'_α , c'est exactement le symétrique de ce qui se passe dans C_α : $(\mathbb{T}^2, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{i}_\alpha, \mathbf{v} + \mathbf{j}_\alpha)$ et d'un autre côté, on a $(\mathbb{T}_\alpha^2, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{i}, \mathbf{v} + \mathbf{j})$.

De cela, on déduit en corollaire des études que nous avons déjà menées, que :

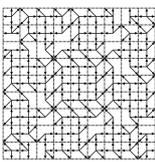
$$\eta_{C'_\alpha}(p) = \sum_{p' \in Q_\alpha^{[2,2]}} n(p', p) \mu(f_{p'}),$$

où $Q_\alpha^{[2,2]}$ est l'ensemble des motifs de taille $[2, 2]$ qui apparaissent dans C'_α , $n(p', p)$ est la fonction qui retourne le nombre d'occurrences du symbole p dans le motif p' (de taille $[2, 2]$), et où $\mu(J_{p'})$ indique l'aire du cadre $J_{p'}$ associé au symbole p' dans le Théorème 2.2.

Note 3.2.2.1 En pratique, les calculs à réaliser pour connaître toutes ces informations sont relativement importants : pour chacun des 25 symboles $p \in Q_\alpha$, il va exister 40 motifs p' de taille $[2, 2]$ à analyser ; tout cela débouche sur près de 360 inéquations qui devront être analysées en discernant une vingtaine de cases. Ceci a justifié l'écriture d'un programme qui s'est chargé de l'analyse.

Les résultats issus de ce programme sont synthétisés dans un tableau récapitulatif en Figure 3.2.

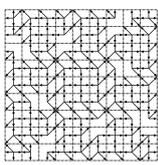
Note 3.2.2.2 Afin d'être sûr de rencontrer tous les types de configurations possibles, on a observé l'apparence de la substitution obtenue pour tous les angles charnières et tous les angles pythagoriciens de rayon inférieur à 3.



α				

3.3 Conclusions du chapitre

La quasipériodicité et la densité sont deux résultats qui sont liés au fait que les isométries de morceaux par morceaux ont de très bonnes propriétés métriques. Ils correspondent à des généralisations de ce qui se fait habituellement en dynamique symbolique. L'étude de la variation de fréquence des motifs donne des contraintes sur les règles d'algorithmiques locales qui sont employables dans la conception d'algorithmes de rotations discrètes randomisés.



Chapitre 4

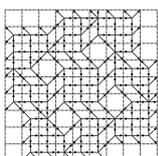
Autosimilarité et substitutions

Plan détaillé du chapitre

4.1	Rappels sur la théorie des substitutions	75
4.1.1	Théorie des substitutions	75
4.2	Substitutions ad hoc	77
4.3	Rappels élémentaires sur les mots sturmiens et les mots de rotations	80
4.3.1	Les mots sturmiens	80
4.3.1a	Propriétés de base des mots Sturmien	80
4.3.2	Mots convergents vers les mots sturmiens	81
4.3.3	Les mots de rotations	81
4.4	Décomposition de configurations et substitutions entremêlées	82
4.4.1	Les configurations simplifiées	82
4.4.2	Factorisation des configurations	84
4.4.3	Décomposition des mots en mots de rotations	85
4.4.4	Spécification des mots sturmiens impliqués dans le cas de $\pi/4$	85
4.5	Inférence de substitutions planaires via graphes de Rauzy	87
4.5.1	Définitions de base concernant les graphes de Rauzy	87
4.5.1a	Les graphes de Rauzy unidimensionnels	87
4.5.1b	Les graphes de Rauzy bidimensionnels	88
4.5.2	Extraction de substitutions dans $C_{\pi/4}$	91
4.5.2a	Stratégie générale	91
4.5.2b	Constations expérimentales	92
4.5.2c	Isomorphisme entre les multigraphes des fragments	94
4.5.2d	Transposition de la notion de fragments sur le tore	98
4.5.3	Prologue relatif à l'étude de l'autosimilarité de $C_{\pi/4}$	98
4.5.4	Disposition des cadres pour $\alpha = \pi/4$	102
4.5.5	Comment prouver l'autosimilarité à l'aide des multigraphes ?	103
4.5.6	Autosimilarité par systèmes induits	104
4.5.6a	Système dynamique induit en dimension non unitaire	104
4.5.6b	Système dynamique induit multidimensionnel : spécification 1	105
4.5.6c	Système dynamique induit multidimensionnel : spécification 2	108
4.6	Conclusions du chapitre	110

Dans les sections qui vont suivre, on attaque un sous-problème induit par l'étude des configurations : on aimerait savoir *quels sont les moyens de prouver que les configurations que nous avons obtenues sont fréquemment autosimilaires*, et autant que faire se puisse, on souhaite être capable d'exhiber les substitutions planaires associées. Plus généralement, on aimerait savoir *s'il existe des méthodes qui permettent d'extraire de substitutions bidimensionnelles automatiquement à partir de l'observation de morceaux de configurations* – on cherche des "data-driven algorithms". Il s'agit donc de partir à la recherche des signatures des processus substitutifs.

Pour les algorithmes guidés par les données, autant que possible, après avoir inféré la substitution, on souhaiterait disposer des éléments théoriques qui permettent de prouver la validité de la règle de substitution proposée par la méthode... Il s'agit d'un point plus délicat, et autant que



possible quand nous préciserons un procédé, on tentera de faire le liens entre ce qu'on observe et les fondements de la méthode.

Comme en témoigne la Figure 4.1, la configuration $C_{\pi/4}$ a une structure autosimilaire apparente remarquable. Cette configuration est nettement plus simple que les autres du fait que $\cos(\alpha) = \sin(\alpha)$, elle sert d'exemple principal au travers de ce micro-panorama de méthodes pour la mise en évidence de phénomènes autosimilaires en dimension 2.

On part donc en excursion au pays des substitutions planaires. Cela nous permet de découvrir progressivement la nature des phénomènes causant l'autosimilarité de la configuration $C_{\pi/4}$, et cela nous donne les clefs pour comprendre plus en détails les phénomènes d'autosimilarité observés dans des configurations.

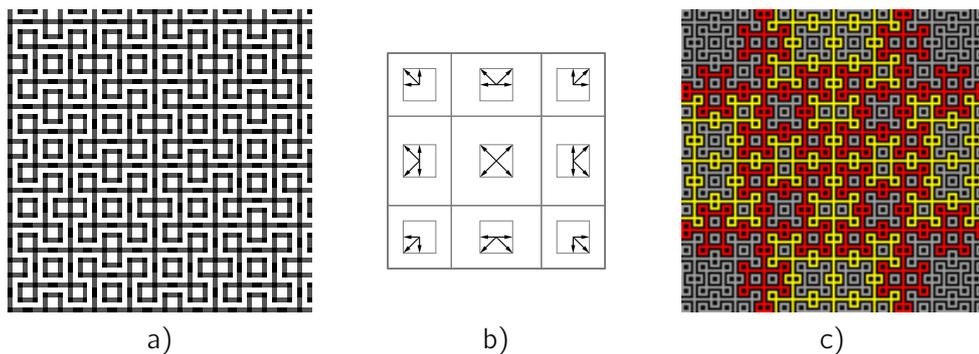


Fig. 4.1 – La première figure montre le premier quadrant de la configuration $C_{\pi/4}$ avec un codage couleur usuel. La figure du milieu représente la partition symbolique associée à $\pi/4$. La dernière image est une version dézoomée et retouchée de la configuration, le but était de mettre en évidence sa structure autosimilaire. J'ai rempli de couleurs différentes les zones "connexes" de l'image (en ayant au préalable reconverti l'image en noir et blanc)

Note 4.0.0.3 $C_{\pi/4}$ n'est pas la seule configuration à être dotée d'une structure autosimilaire. L'autosimilarité y est cependant est la plus facilement observable. (Du fait du relativement faible nombre de couleurs intervenant). En fait, les configurations associées à $\pi/6$ et plus généralement toutes les configurations des angles charnières, et les configurations non périodiques où le cosinus et le sinus ne sont pas indépendants sur le tore^(a), sont associés à des angles dont les cosinus, et les sinus admettent le développement en fractions continues est périodique, ce qui, a priori, va nous conduire à de l'autosimilarité, d'autant plus que les deux développements appartiennent à la même extension quadratique.

Partons à la quête des explications de cette autosimilarité !

Dans ce chapitre, après des rappels sur l'essentiel de ce qu'il faut savoir en ce qui concerne les substitutions, sont abordées trois études des phénomènes d'autosimilarité qui contribueront aux remarques communes qui viennent à la fin de ce chapitre.

- la première méthode est plutôt "ad hoc" et elle a été obtenue par tâtonnement en observant des séquences de premiers retours – il s'agit d'un résultat purement expérimental, aucune preuve n'est donné de ce résultat ; notre objectif était surtout de parler des difficultés qu'on rencontre dans sa mise-en-œuvre ;

^(a)Formellement le cosinus et le sinus ne sont pas indépendants s'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) \equiv 0$ sur \mathbb{T} (autrement dit, s'il existe $x, y, k \in \mathbb{Z}$ tels que $x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) = k$)

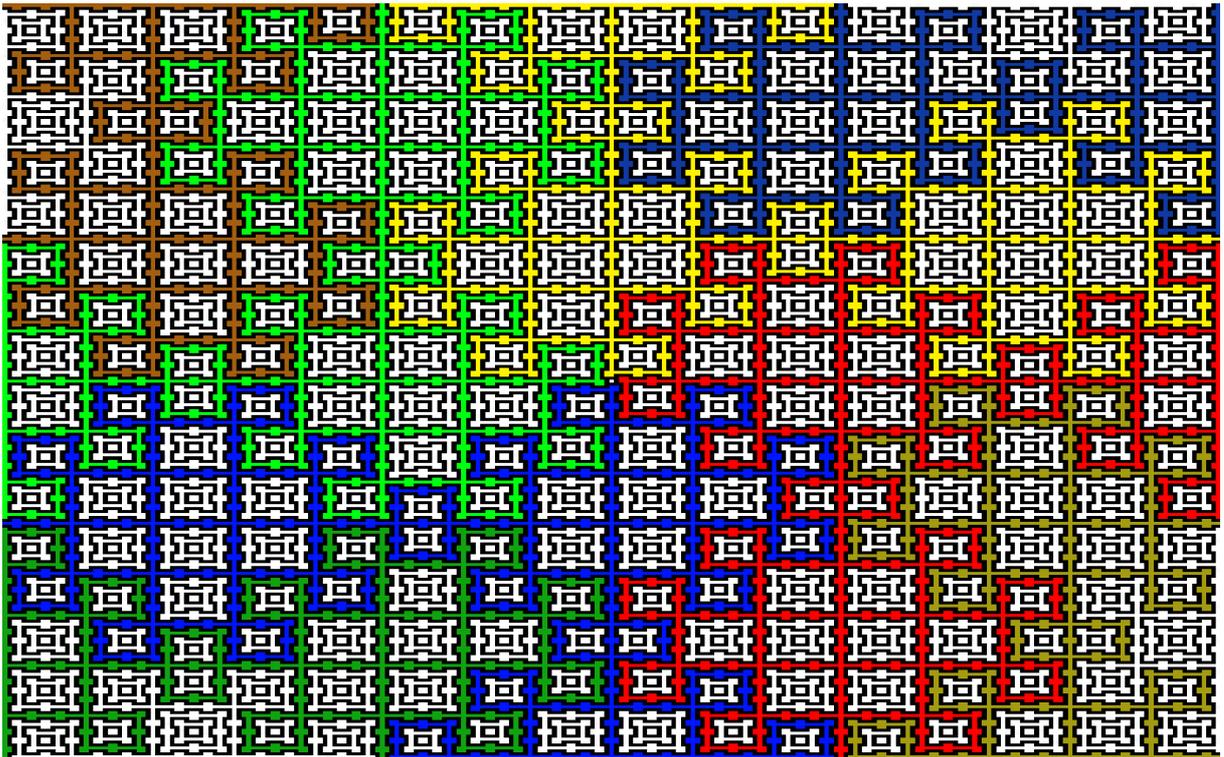
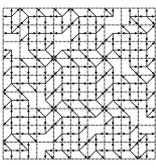


Fig. 4.2 – Représentation de C_α pour l'angle charnière $\alpha \approx 1.14677$ (sur le même principe que 4.1 c)

- la seconde méthode est partie d'une constatation purement algébrique et donne des résultats précis sur la nature des phénomènes substitutifs qui supportent les configurations que nous étudions – il s'agit d'un résultat essentiellement algébrique qui sert de préliminaires au dernier cas étudié avec la méthode suivante ;
- la troisième méthode repose sur l'emploi de graphes de Rauzy bidimensionnels. Pour commencer, nous par exposons leur théorie, puis nous procédons à des observations expérimentales. Ces observations servent par la suite de guide pour décrire et prouver l'autosimilarité sous-jacente : deux approches sont proposées : par multigraphe des fragments et par chaînes de systèmes dynamiques induits. Les substitutions fournies par le modèle sont non triviales.

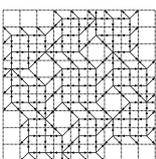
4.1 Rappels sur la théorie des substitutions

4.1.1 Théorie des substitutions

Une *substitution* correspond à l'application itérée d'un morphisme sur les mots. Celui-ci est défini à l'aide d'une application d'un alphabet Q_0 vers les mots de Q_1^* que l'on étend canoniquement sur les mots. Quand les images de chaque lettre sont de longueur 1, on parle de *morphisme lettre-à-lettre*. de définir des substitutions sur $Q_0^{\mathbb{Z}}$. Dans ce document, on supposera toujours $Q_0 = Q_1$.

Une substitution σ sera généralement spécifiée explicitement en donnant l'image associée à chacune des lettres de l'alphabet d'entrée. On se donnera donc une suite de règles de substitution de la forme :

$$\alpha_j \mapsto w_{\sigma,j}, \text{ pour tous les } \alpha_j \in \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$



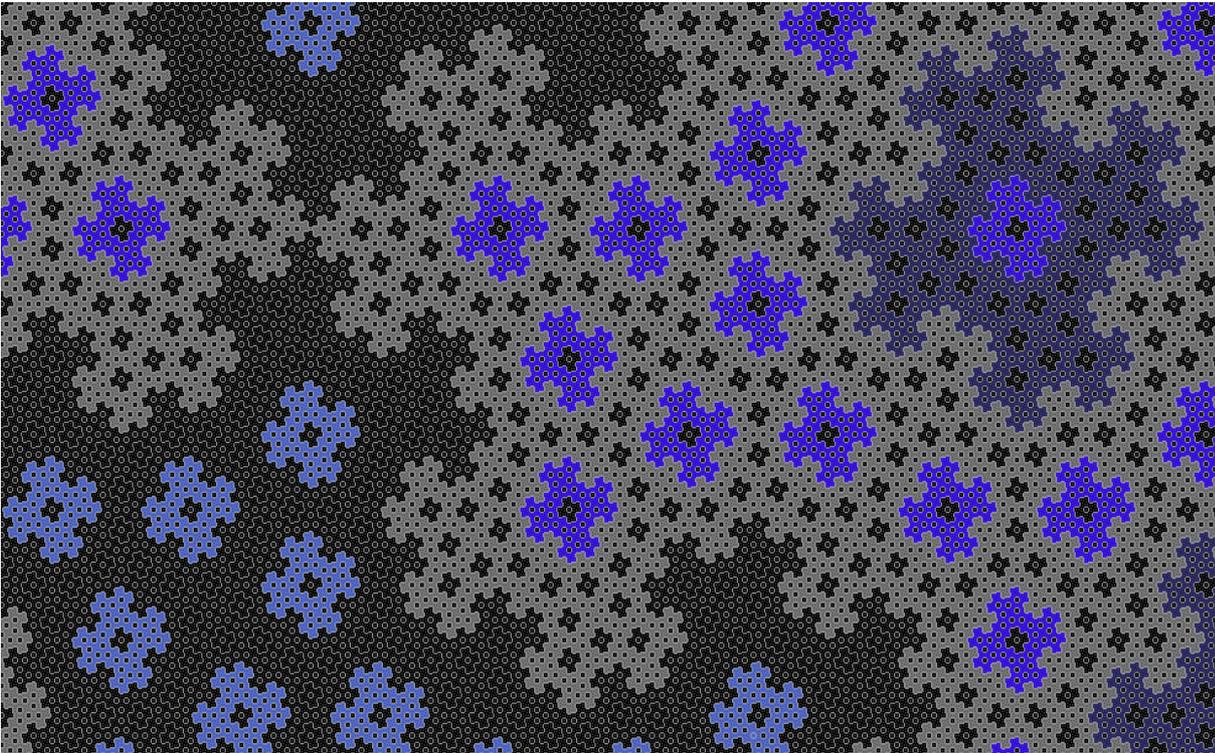
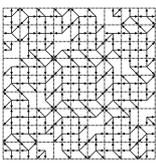


Fig. 4.3 – Représentation de $C_{\pi/6}$ (sur le même principe que 4.1 c) . Le but est de mettre en évidence la structure autosimilaire de $C_{\pi/6}$.



Si les images de toutes les lettres de Q ont la même longueur k , alors la substitution est k -automatique (voir [AS03], [SAL89]).

Le *vecteur de Parikh* dénote le nombre d'occurrences de chacun des états d'un alphabet dans une configuration finie ou dans un mot fini, autant dire que c'est le mot dans sa version abélianisée.

La matrice de **PARIKH** renvoie pour chacun des mots apparaissant dans la règle associée à la lettre α_i , le nombre d'occurrences d' α_j dans le mot image d' α_j .

Une substitution est dite *non effaçante* si ε n'est l'image d'aucune lettre. En général, on suppose aussi que les substitutions étudiées sont *primitives*. C'est-à-dire que leur *matrice de PARIKH* est primitive : il doit exister une puissance de la matrice telle que tous les coefficients de la matrice soient non nuls.

Un mot infini sera dit *purement substitutif* si et seulement s'il est le *point fixe de substitutions itérées*, c'est-à-dire si et seulement s'il existe σ de A dans A , et qu'il existe une lettre $a \in A$, tels que $w = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(a)$ où l'on suppose que cette limite existe (i.e. il existe une lettre α qui soit préfixe de son image, i.e. : $\sigma(\alpha) = \alpha w$).

Un mot est dit *substitutif*, s'il est l'image par un morphisme h d'un mot purement substitutif (i.e. qui est point fixe d'une substitutions).

Un mot est dit *S-adique* s'il peut être obtenu par une composition infinie de substitutions qui appartiennent à l'ensemble fini S (S est un alphabet de substitutions).

Voici dans le cas unidimensionnel, quelques grands résultats qui aident à mieux comprendre la périodicité et la quasi-périodicité.

Théorème 4.1 (HEDLUND, [HM38]) *Un mot w est périodique, si et seulement si, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble des facteurs de longueur de k est un cardinal inférieur à k : $\#L_k(w) < k$.*

Pour les mots substitutifs on pourra utiliser un théorème analogue :

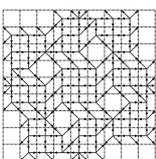
Théorème 4.2 (PANSIOT) *Si $w \in A^\omega$ est un mot substitutif alors la fonction de $\#L_n(w)$ est nécessairement de l'un des ordres suivants : $O(1), O(n), O(\log \log n), O(\log n), O(n^2)$.*

Des résultats analogues sont issus des travaux de Brigitte MOSSÉ et de Fabien DURAND. Ils font écho à l'idée de systèmes dynamiques induits, et ils permettent de caractériser les cas où l'on est face à des mots substitutifs.

4.2 Substitutions ad hoc

À l'époque où je me suis intéressé à ce premier type de substitutions (en D.E.A.), je n'ai pas trouvé de liens entre la dynamique observée et les systèmes décrits en 2.4. Il s'agit donc simplement d'observations "expérimentales"; et, dans cette section, nous certifierons juste avoir observé des morceaux suffisamment grands de configurations pour être convaincus que cette méthode donne bien la même configuration que celle que fournit $\pi/4$, et être confiants dans la validité du système proposé.

L'idée directrice pour reconstruire les configurations associées à $\pi/4$ fut d'observer les mots de retours qui apparaissent dans les lignes. Ainsi, par tâtonnement, on finit par découvrir une substitution qui engendre la configuration. Cette méthode, fastidieuse, permit sur $C'_{\pi/4}$ de conjecturer une substitution unidimensionnelle. Grâce à cette substitution, on a reconstruit des morceaux de configurations suffisamment larges pour que l'on conjecture la substitution plausible.



Par l'observation des mots de retour, on peut être conduit à proposer la substitution dégénérée^(a) suivante, que nous décrivons sur un alphabet à quatre lettres : $\{a, b, \bar{a}, \bar{b}\}$ (voir Figure 4.4.)

$$\sigma_0 = \begin{cases} a \mapsto ab\bar{b}\bar{a} & \bar{a} \mapsto \bar{a}b\bar{b}\bar{a} \\ b\bar{b} \mapsto ba\bar{b} & \bar{b}\bar{b} \mapsto \bar{b}ab \end{cases}$$

$$w = \sigma_0^\omega(a)$$

Cette substitution se réécrit sur un alphabet à 6 lettres : $\{a, b, B, \bar{a}, \bar{b}, \bar{B}\}$. En employant les substitutions suivantes, on observe que w est un mot substitutif :

$$\sigma_1 : \begin{cases} a \mapsto aBa & \bar{a} \mapsto \bar{a}\bar{B}\bar{a} \\ B \mapsto ba\bar{b} & \bar{B} \mapsto \bar{b}ab \\ b \mapsto b & \bar{b} \mapsto \bar{b} \end{cases}$$

$$\sigma'_1 = \begin{cases} a \mapsto a & \bar{a} \mapsto \bar{a} \\ B \mapsto b\bar{b} & \bar{B} \mapsto \bar{b}b \\ b \mapsto b & \bar{b} \mapsto \bar{b} \end{cases}$$

$$w = \sigma'_1 \circ \sigma_1^\omega(a)$$

L'application itérée de la substitution σ_1 conduit bien à un mot substitutif. Il existe une lettre qui est préfixe (de même pour la notion de suffixe) de son image, De plus, il existe une projection par un morphisme lettre-à-lettre qui transforme la configuration issue du produit direct de ce mot par lui-même en une configuration dont on a pu expérimentalement vérifier qu'elle coïncidait en tout point avec C'_α . Le morphisme lettre-à-lettre impliqué dans la transformation est décrit en figure 4.5.

Cette substitution est cependant insatisfaisante :

1. Elle a été trouvée par tâtonnement, “de manière ad hoc” ; et nous n'avons abouti sur un résultat concret que pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$;
2. C'est une substitution unidimensionnelle ; la configuration qu'on souhaite générer est bidimensionnelle ; on aimerait en quelque sorte trouver des “pièces de puzzle” qui dirigent les substitutions.

Note 4.2.0.1 *Il est en fait possible de transformer cette substitution en une substitution bidimensionnelle. En calculant le produit semi-direct des mots sur la substitution : on obtient des règles de la forme : $(\alpha_i \otimes \alpha'_i) \mapsto (w_i \otimes w'_i)$ à partir $\alpha_i \mapsto w_i$ et $\alpha'_i \mapsto w'_i$. Le produit direct de deux lettres est une lettre de l'alphabet $Q_1 \times Q_2$, et le produit direct de deux mots conduit à un motif rectangulaire dont la largeur est celle de w_i et la hauteur celle de w'_i , et dont les la lettre en m, n est simplement le couple $(w_i(m), w'_i(n))$. Ce type de substitution est souvent appelée une substitution de MAES [MAE99]. Il s'agit d'une substitution dans laquelle chaque lettre se transforme en un motif rectangulaire. Pour que ce type de substitution s'applique correctement, il faut que toutes les lettres d'une même ligne (resp. colonne) se transforment en des rectangles de même hauteur (resp. largeur). On dispose ainsi d'un moyen d'appliquer la substitution qui respecte les opérateurs de concaténation 2d.*

Nous ne présentons pas ici les substitutions dans leur forme bidimensionnelle ; leur présentation n'apporte aucune information utile. Le premier point à résoudre est avant tout de prouver la validité de la substitution obtenue.

^(a)au sens où elle n'a pas le formalisme attendu : $b\bar{b}$ ne devrait pas être à gauche.

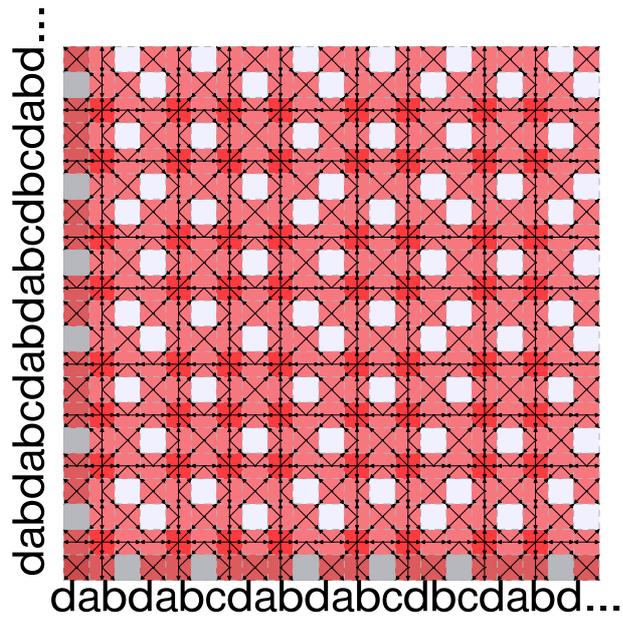
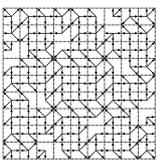
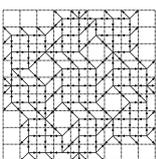


Fig. 4.4 – La configuration $C'_{\pi/4}$ représentée par les flèches qui composent chaque symbole, et dans laquelle on a mis en évidence par une teinte, les informations sur le nombre d'antécédents de chaque cellule par la rotation discrétisée, sur laquelle on a mis en rapport avec le mot issu de la substitution $w = \sigma'_1 \circ \sigma_1^w(a)$

Cette première expérience pour re-construire la configuration indique le degré de tâtonnement actuellement nécessaire extraire une substitution via une simple observation de la configuration.

$a \leftrightarrow a$	d				
$b \leftrightarrow b$	c				
$\bar{a} \leftrightarrow c$	b				
$\bar{b} \leftrightarrow d$	a				
		a	b	c	d

Fig. 4.5 – Tableaux décrivant les morphismes lettre-à-lettre employés. Le morphisme à gauche est juste un morphisme entre deux alphabets, le changement d'alphabet ici est juste d'une commodité. Le morphisme de droite met en bijection les couples de lettres issus du produit direct entre les deux mots substitutifs avec les symboles de la configuration.



4.3 Rappels élémentaires sur les mots sturmiens et les mots de rotations

Certains résultats constructifs qui relient les fractions continues, les mots sturmiens et les mots de rotations.

4.3.1 Les mots sturmiens

Note 4.3.1.1 *Il existe de très nombreux liens entre les fractions continues et les mots sturmiens, et il faudrait un plein ouvrage pour traiter de tous ces liens.*

Le lecteur est vivement invité à consulter l'annexe A.

D'après le Théorème 4.1, tout mot pour lequel il existe un n tel que $\#L_n(w) \leq n$ est un mot périodique. Les mots *sturmiens* sont les mots apériodiques dont la complexité est "minimale" pour être apériodique c'est-à-dire que ce sont les mots caractérisés par le fait que pour tout n ils ont une complexité $p(n) = \#L_n(w) = n + 1$.

La littérature relative aux mots sturmiens est abondante. Pour un survol récent des propriétés de mots sturmiens, se référer au chapitre VI de [FOG02] (par Pierre ARNOUX) ou au chapitre sur les mots sturmiens de [LOT02] (par Jean BERSTEL et Patrice SÉÉBOLD). Les propriétés des droites discrètes, des plans discrets, et des rotations discrètes sont étroitement reliées aux propriétés des mots sturmiens.

Pour une *pente* α inférieure à 1 la droite discrète naïve d'*intercept* β , est décrite par l'ensemble des point (x, y) de \mathbb{Z}^2 vérifiant l'équation suivante : $y = \lfloor \alpha x + \beta \rfloor$.

Cela correspond une droite naïve : en chaque abscisse un seul point, la droite est 8 connexe et non 4-connexe.

Théorème 4.3 (MORSE-HEDLUND, [HM40a]) *Un mot $w \in \{0, 1\}^*$ est de complexité $n + 1$, si et seulement si, il résulte du codage d'un système dynamique, associé à une translation d'une quantité irrationnelle sur le tore unidimensionnel :*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{R} \mid w(i) = 1 \Leftrightarrow \{n\alpha + \beta\} \in [0 \dots \alpha[$$

ou

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{R} \mid w(i) = 1 \Leftrightarrow \{n\alpha + \beta\} \in]0 \dots \alpha]$$

Tout mot sturmien est caractérisé par deux valeurs réelles positives et un booléen : un *angle* α , un *intercept* ρ , ainsi qu'une orientation.

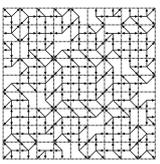
4.3.1a Propriétés de base des mots Sturmiens

Un *morphisme sturmien* est une morphisme sur les mots infinis qui transforme un mot sturmien en un nouveau mot sturmien.

Théorème 4.4 (Jean BERSTEL et Patrice SÉÉBOLD) *labelthm :berstelseebold Les morphismes sturmiens sont engendrés par les trois morphismes^(a) sturmiens suivant :*

$$E : \begin{cases} a \rightarrow b \\ b \rightarrow a \end{cases}, \phi : \begin{cases} a \rightarrow ab \\ b \rightarrow a \end{cases}, \tilde{\phi} : \begin{cases} a \rightarrow ba \\ b \rightarrow a \end{cases}$$

^(a) Ces substitutions sont canoniquement étendus sur les mots comme étant des morphismes pour la concaténation.



4.3.2 Mots convergents vers les mots sturmiens

Comme on s'intéresse aux rationnels convergents qui approximent un nombre, on peut s'intéresser aux mots finis qui forment les approximations progressives d'un mot sturmien, c'est à dire aux mots qui correspondent aux mots mécaniques de pente rationnelle, ou plutôt à leur période.

On peut commencer par définir les quatre morphismes suivant : $\sigma_{0,0} = \phi \circ E$, $\sigma_{1,0} = E \circ \tilde{\phi}$, $\sigma_{0,1} = \tilde{\phi} \circ E$, $\sigma_{1,1} = E \circ \phi$

Le développement d'OSTROWSKI associé :

$$x = \sum \beta_{i+1} \epsilon_i, \text{ avec } \beta_i \text{ compris entre } 0 \text{ et } a_i$$

où ϵ_i est l'erreur induite par le i -ème convergent de α tel que défini en annexe A.

On peut montrer que la développement d'OSTROWSKI est ultimement périodique si et seulement si $x \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Théorème 4.5 (Valérie BERTHÉ, Charles HOLTON, Luca Q. ZAMBONI, [BHZ]) *Une séquence sturmiennne de pente α et d'intercept x est primitive substitutive si et seulement si α est un nombre quadratique irrationnel et si $x \in \mathbb{Q}(\alpha)$.*

Ce théorème découle en fait de

Théorème 4.6 (Valérie BERTHÉ, Charles HOLTON, Luca Q. ZAMBONI, [BHZ]) *Tout séquence sturmiennne admet une représentation S -adique sous la forme :*

$$w = T^{c_1} \circ \sigma_{0,0}^{a_1} \circ T^{c_2} \circ \sigma_{1,1}^{a_2} \circ T^{c_3} \circ \sigma_{0,0}^{a_3} \circ T^{c_4} \circ \sigma_{1,1}^{a_4} \dots$$

où T est le décalage classique sur les mots.

De plus la suite $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ correspond au développement en fractions continues de w , la suite $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ correspond au développement d'OSTROWSKI de l'intercept du mot sturmien.

Pour comprendre ce résultat, il faut observer les mots périodiques d'intercepts donnés qui forment les convergents du mot sturmien étudié.

Toute pente rationnelle n'est capable d'être réalisée par le biais d'un mot sturmien pour un nombre fini d'intercepts qui dépend de la pente elle-même.

4.3.3 Les mots de rotations

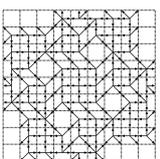
Du fait de l'existence de liens avec les fractions continues, les cas sturmien est le plus connu.

Ceci dit, il existe une classe plus générale de systèmes dynamiques liés à une partition symbolique binaire et des translations sur le tore.

De nombreux efforts ont été menés pour généraliser le savoir dont on dispose sur les fractions continues. La forme générale de ces systèmes dynamiques symboliques est alors :

$$\{n\alpha + \beta\} \in [0 \dots \gamma[, \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1[$$

Pascal ALESSANDRI, dans [ALE96] a réalisé une première analyse de la complexité des mots de rotation. Plus tard, Boris ADAMCZEWSKI [ADA02] a fourni des résultats constructifs qui relient entre système S -adique avec un développement type fractions continues généralisées. Grâce à l'algorithme proposé par Boris ADAMCZEWSKI, on peut donc retrouver le développement S -adique associé à un mot de rotation.



4.4 Décomposition de configurations et substitutions entremêlées

Dans cette section, on présente un résultat formel qui connecte les configurations de rotations obtenues pour des angles quadratiques à des processus substitutifs. On va mettre en évidence l'existence d'une décomposition des configurations C_α en des configurations simplifiées. Ces configurations se construisent par produit direct et par superpositions à partir de mots substitutifs.

En partant de la description algébrique des configurations, on décompose les configurations C_α en un nombre fini de configurations dont les caractéristiques dynamiques sont plus simples. Puis dans les propositions suivantes, on démontre que les configurations simplifiées peuvent s'obtenir à partir du produit direct de mot issus de la superposition de mots très particuliers : En analysant leur dynamique, on identifie des mots rotations. Et dans le cas de $\pi/4$, on se ramenera même à des mots sturmiens. Les liens entre les paramètres des mots sturmiens et les fractions continues étant bien connus, on peut alors montrer que les mots sont issus de mots substitutifs. Ces résultats, en un certain sens, corroborent le fait que la configuration semble être substitutive. Davantage d'éléments cependant sont nécessaires pour obtenir une démonstration complète de l'existence de substitutions planaires.

Note 4.4.0.1 *Nous travaillerons avec des nombres complexes, plutôt qu'avec des vecteurs, car nous avons besoin des opérations de multiplication et de division usuellement employées entre nombres complexes.*

4.4.1 Les configurations simplifiées

Tout au long de cette section, on supposera que α est un angle quadratique. Pour rappel, le vecteur d'entrelacement associé à un angle quadratique α est le vecteur $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(p + qi)e^{i\alpha}$ ait une composante entière. On le note Z_I ce vecteur d'entrelacement ; le lien avec l'angle α employé étant alors implicite.

Pour tout $z_M \in \mathbb{Z}[i]/(z_I\mathbb{Z}[i])$, on peut de plus définir des configurations simplifiées de la forme :

$$D_{\alpha, z_M}(z) = C_\alpha(z_I z + z_M)$$

Une configuration D_{α, z_M} correspond ainsi à une configuration extraite périodiquement à partir de C_α . On extrait en fait les points appartenant à $z_I\mathbb{Z}[i] + z_M$.

Puisque la configuration C_α est associée au système dynamique symbolique multidimensionnel :

$$(\mathbb{T}^2, z \mapsto z + e^{i\alpha}, z \mapsto z + ie^{i\alpha}, l_\alpha)$$

pour tout $z_M \in \mathbb{Z}[i]/(z_I\mathbb{Z}[i])$, les configurations D_{α, z_M} sont par voies de conséquence associées au système dynamique suivant :

$$T_D = (\mathbb{T}^2, z \mapsto z + z_I e^{i\alpha}, z \mapsto z + iz_I e^{i\alpha}, l_\alpha)$$

Sa définition ne dépend pas de z_M . Or, du fait de la définition de D_{α, z_M} , on peut redéfinir C_α ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{Z}[i], C_\alpha(z) = D_{\alpha, z_M}(z_R) \text{ avec } z_M \in \mathbb{Z}[i]/(z_I\mathbb{Z}[i]) \text{ et } z_R \in \mathbb{Z}[i] \text{ tels que } z = z_I z_R + z_M$$

Note 4.4.1.1 *Discutons rapidement du nombre des configurations D_{α, z_M} , c'est-à-dire du nombre $N = \#(\mathbb{Z}[i]/(z_I\mathbb{Z}[i]))$. En pratique, avec $z_I = p + qi$. Si on pose $c = p^2 + q^2$. Ceci nous amène à retrouver $N = c$ éléments.*

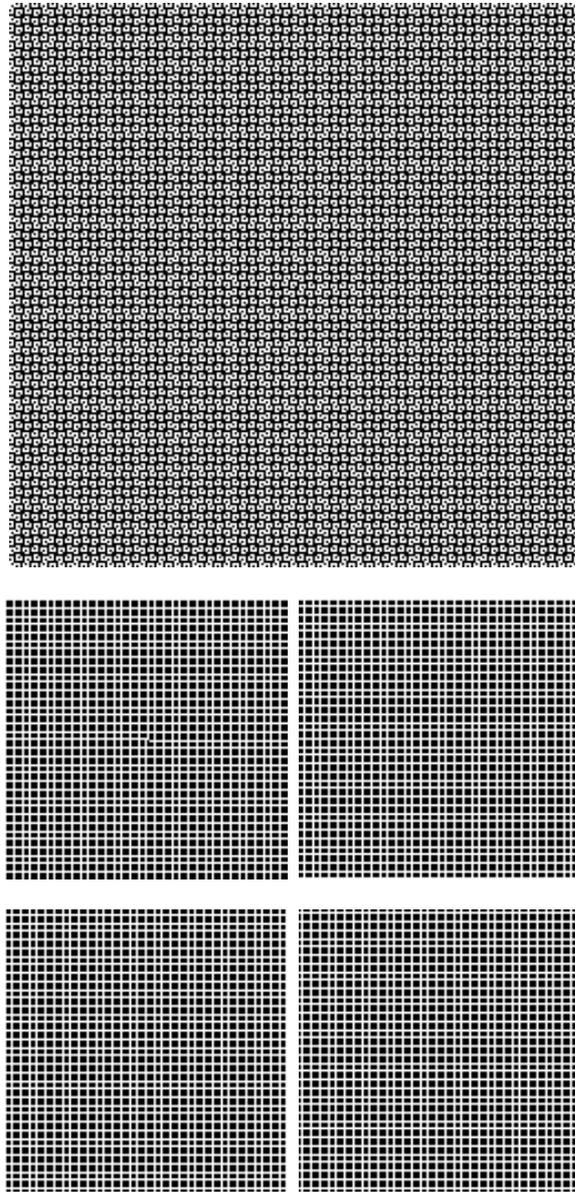
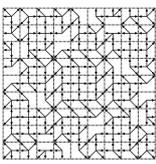
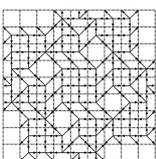


Fig. 4.6 – La grande figure représente $C_{\frac{\pi}{6}}$; le nombre de couleurs a été réduit. Les autres figures représentent la décomposition de la configuration de $C_{\frac{\pi}{6}}$ en des configurations D_{α, z_M} pour $z_M \in \{0, 1, i, 1 + i\}$. Pour des questions de consistance numérique des nombres à virgules flottantes, il est difficile d'obtenir une image exacte de $C_{\frac{\pi}{6}}$.



4.4.2 Factorisation des configurations

Les configurations D_{α, z_M} sont maintenant décomposées en produits directs de deux mots : cela réduit le problème de description d'un objet bidimensionnel au problème de la description de deux mots.

Pour ce faire, on commence par préciser les systèmes dynamiques associés aux configurations D_{α, z_M} . On s'intéresse en particulier à l'orbite de z_M dans ces systèmes ; c'est-à-dire aux points de $\mathbb{Z}[i]z_I + z_M$.

Pour un angle quadratique, on a soit $\{\Re(z_I e^{i\alpha})\} = \{(p + q_I) e^{i\alpha}\} = 0$ et $\{\Im(z_I e^{i\alpha})\} = 0$; soit on a $\{\Im(z_I e^{i\alpha})\} = \{(p + q_I) e^{i\alpha}\} = 0$ et $\{\Re(z_I e^{i\alpha})\} = 0$.

Or, par définition $l_\alpha(z) = \phi_\alpha(f_{C_\alpha}(\Re(z)), f_{C_\alpha}(\Im(z)))$, ce qui nous permet de nous amener au résultat escompté :

Soit W_{D, α, z_0, z_1} , le mot dont la n -ième lettre est $f_{C_\alpha}(n z_0 + z_1)$.

Proposition 4.1 *Soit α un angle quadratique de vecteur d'entrelacement z_I , alors pour tout $z_M \in \mathbb{Z}[i]/(z_I \mathbb{Z}[i])$, on a $D_{\alpha, z_I e^{i\alpha}, z_M} = \phi_\alpha(w_{D, \alpha, z_I e^{i\alpha}, \Re(z_M)} \otimes w_{D, \alpha, i z_I e^{i\alpha}, \Im(z_M)})$.*

Démonstration :

Cela se déduit directement des remarques précédentes :

En effet, reprenons notre argumentation : par définition, on a $D_{\alpha, z_M}(z)$ vaut $C_\alpha(z_I z + z_M)$ où z_I est le vecteur d'entrelacement associé à α . Or, C_α est associé à un système dynamique symbolique. Cela qui implique que : $D_{\alpha, z_M}(z) = l_\alpha(\{(z_I z + z_M) e^{i\alpha}\})$. Du fait de la définition de l_α , nous en venons à réécrire cette dernière expression :

$$D_{\alpha, z_M}(z) = \phi_{C_\alpha}(f_{C_\alpha}(\Re(\{(z_I z + z_M) e^{i\alpha}\})), f_{C_\alpha}(\Im(\{(z_I z + z_M) e^{i\alpha}\})))$$

Si on utilise alors le fait que α est angle quadratique, on est alors dans un de ces deux cas : soit $\{\Re(z_I e^{i\alpha})\} \equiv 0$ et $\{\Im(z_I e^{i\alpha})\} \equiv 0$, soit $\{\Im(z_I e^{i\alpha})\} \equiv 0$ et $\{\Re(z_I e^{i\alpha})\} \equiv 0$ (Sans perte de généralité on choisit le dernier cas). Alors du fait que $z = \Re(z) + i\Im(z)$, l'expression $\Re(\{(z_I z + z_M) e^{i\alpha}\})$ devient : $\Re(\{\Re(z)(z_I e^{i\alpha}) + \Im(z)(i z_I e^{i\alpha}) + z_M e^{i\alpha}\})$, ce qui naturellement vaut $\Re(\{\Re(z)(z_I e^{i\alpha}) + z_M e^{i\alpha}\})$, en rajoutant quelques simplifications, tout ceci nous conduit à finalement à :

$$D_{\alpha, z_M}(z) = \phi_{C_\alpha}(f_{C_\alpha}(\{\Re(z)(z_I e^{i\alpha}) + \Re(z_M e^{i\alpha})\}), f_{C_\alpha}(\{\Im(z)(z_I e^{i\alpha}) + \Im(z_M e^{i\alpha})\}))$$

On peut ensuite identifier $f_{C_\alpha}(\{\Re(z)(z_I e^{i\alpha}) + \Re(z_M e^{i\alpha})\})$ à travers les définitions des mots $w_{D, \alpha, ((z_I) e^{i\alpha}), \Re(z_M e^{i\alpha})}(\Re(z))$, et $f_{C_\alpha}(\{\Im(z)(z_I e^{i\alpha}) + \Im(z_M e^{i\alpha})\})$ avec $w_{D, \alpha, (z_I e^{i\alpha}), z_M}(\Im(z))$

Cela nous conduit à poser :

- $w_{H, \alpha, z_M} = w_{D, \alpha, (z_I e^{i\alpha}), \Re(z_M e^{i\alpha})}(\Re(z))$
- $w_{V, \alpha, z_M} = w_{D, \alpha, (z_I e^{i\alpha}), \Im(z_M e^{i\alpha})}(\Im(z))$

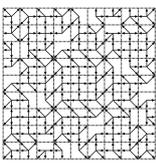
Nous avons alors :

$$D_{\alpha, z_M}(z) = \phi((w_{H, \alpha, z_M}(\Re(z)), w_{V, \alpha, z_M}(\Im(z))))$$

Souvenons-nous que $w_H \otimes w_V$ désigne la configuration issue du produit direct des deux mots w_H et w_V , voir 1.2 ; en réexprimant le précédent résultat dans le formalisme des configurations, nous obtenons le résultat annoncé :

$$D_{\alpha, z_M} = \phi \circ (w_H \otimes w_V)$$

c.q.f.d.



4.4.3 Décomposition des mots en mots de rotations

Par définition, voir 4.3.3, un mot de rotation $W_{ROT,\alpha,\beta,\gamma}$ est le codage d'orbites de la forme :

$$\{n\alpha + \beta\} \in [1 - \gamma, 1[, n \in \mathbb{Z}$$

Nous montrons maintenant que les mots w_{D,α,z_0,z_1} sont images par des morphismes lettre-à-lettre de superpositions de mots de rotations. Ces mots de rotations sont en fait les mots caractéristiques de l'apparition de chacun des symboles dans w_{D,α,z_0,z_1} . Nous exploitons ici l'idée que derrière les mots W_{D,α,z_M} , il y a une dynamique qui correspond à une translation sur un tore.

Proposition 4.2 Soit w_0 à w_4 des mots sur $\{0, 1\}$ tels que

$$w_i = W_{ROT,(nz_i)e^{i\alpha},(nz_i+z_M)e^{i\alpha},c_{i+1}-c_i}, \text{ avec } c_i \in K_{\alpha,3}$$

Il existe un morphisme h de $\{0, 1\}^5$ vers $\{0, \dots, 5\}$, étendu sur les mots, tel que

$$w_{D,\alpha}(z_I, z_M) = h(w_0, w_1, w_2, w_3, w_4)$$

Démonstration :

Par définition, pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, on a $w_{D,\alpha,z_I,z_M}(x) = i$ si et seulement si $f_{C_\alpha}(\{n\alpha + \beta\}) = i$, c'est à dire si et seulement si $\{n\alpha + \beta\} \in [c_i, c_{i+1}[$. On se trouve donc sur une expression de la forme : $\{n\alpha + \beta - c_i\} \in [0, c_{i+1} - c_i[$. Par identification, cela correspond au mot de rotation : $W_{ROT,\alpha,\beta-c_i,c_{i+1}-c_i}$.

c.q.f.d.

Note 4.4.3.1 S'intéresser aux mots caractéristiques de chacune des lettres est un choix arbitraire. Il n'y a pas une unique façon de redéfinir w_{D,α,z_0,z_1} à partir de mots de rotations.

Dans le cadre de notre étude spécifique du cas de la configuration $\pi/4$, on choisira d'étudier les mots caractéristiques de deux intervalles $I_0 = [0, 1 - \sqrt{2}/2[$ et $I_{01} = [0, \sqrt{2}, 2[$. (Ce qui présente l'intérêt de nous amener à toujours étudier des intervalles avec lesquels on peut établir le lien avec les mots sturmiens). On aura donc : $w_0 = \mathbb{1}(\{z_M e^{i\alpha}\} + \Re(\{z_M e^{i\alpha}\}) + \frac{1}{2})$ Voir Figure 4.7.

4.4.4 Spécification des mots sturmiens impliqués dans le cas de $\pi/4$

En exploitant les résultats des paragraphes précédents, nous précisons les caractéristiques des mots de rotation employés. Les cas de $\pi/4$ est particulièrement simple, car sa partition symbolique ne contient que neuf zones.

Pour la configuration D_0 , on trouve :

– $D_{\pi/4,0}$ est le produit direct de deux mots, dans ce cas il s'agit même d'un carré :

$$D_{\pi/4,0} = \phi_\alpha(w_{D,\pi/4,0} \otimes w_{D,\pi/4,0})$$

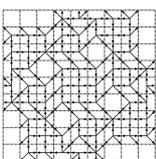
– Ce mot est la superposition de deux mots de rotation :

$$w_{D,\pi/4,0} = W_{ROT, \lfloor \sqrt{2} \rfloor, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}} \times W_{ROT, \lfloor \sqrt{2} \rfloor, \frac{1}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

et pour la configuration D_1 , on trouve :

– $D_{\pi/4,0}$ est le produit direct de deux mots, dans ce cas il s'agit même d'un carré :

$$D_{\pi/4,1} = \phi_\alpha(w_{D,\pi/4,1} \otimes w_{D,\pi/4,1})$$



545405454050545405454050540505454054540545405054540545405054...
 1010110101111010110101111011101011010111101011010111101110...
 11110111101011110111101011010111101111010111101011110101101011...

(a) Sur la première ligne, le mot $D_{\pi/4,0}$. Sur la seconde et la troisième ligne, se trouvent les mots correspondant aux lettres impaires des mots sturmiens. $w_{D,\pi/4,\sqrt{2}-1,\frac{1}{2}}$, le premier mot est caractéristique des zones $\{0, 1, 5\}$ et le second est caractéristique des zones $\{5, 3, 4\}$, sachant que dans le cadre de $\pi/4$ la zone 1 et la zone 3 sont vides. Ainsi si les deux fonctions caractéristiques sont vraies alors on est dans la zone 5, dans les autres cas on est dans la zone 0 ou dans la zone 4

05054050545405054050545405454050540505454050545405054540545405...
 010110101111010110101111011110101101011110101101011110111101...
 11110111101011110111101011010111101111010111101011110101101011...

(b) Sur la première ligne, le mot $D_{\pi/4,1}$. Sur la seconde et la troisième ligne, on a les mots correspondant aux lettres impaires des mots sturmiens. $w_{D,\pi/4,\sqrt{2}-1,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Fig. 4.7 – Le processus de décomposition des mots qui engendrent les configurations $D_{\pi/4,0}, D_{\pi/4,1}$

– Ce mot est la superposition de deux mots de rotation :

$$w_{D,\pi/4,1} = w_{ROT,\lfloor\sqrt{2}\rfloor,\frac{\sqrt{2}-1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}} \times w_{ROT,\lfloor\sqrt{2}\rfloor,\frac{\sqrt{2}-1}{2},1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Il reste à montrer que nous sommes bien confrontés à des mots substitutifs.

La première possibilité consiste à s'appuyer sur le travail de [ADA02]. Il serait possible de trouver directement, à partir des paramètres α, β et γ , une séquence S -adique conduisant au mot de rotation qui correspond à ces paramètres. Pour certaines valeurs de ces paramètres, nous pourrions alors montrer que la séquence ainsi obtenue est substitutive.

La méthode de Boris ADAMCZEWSKI, certes très générale, est cependant un peu plus complexe à appliquer que certains résultats sur les mots sturmiens.

On remarque alors que on a :

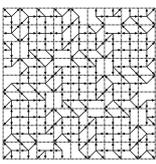
- $w_{ROT,\lfloor\sqrt{2}\rfloor,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}}(i) = w_{ST,\lfloor\frac{\sqrt{2}}{2}\rfloor,\frac{1}{2}}(2i)$
- $w_{ROT,\lfloor\sqrt{2}\rfloor,\frac{1}{2},1-\frac{\sqrt{2}}{2}}(i) = w_{ST,\lfloor\frac{\sqrt{2}}{2}\rfloor,\frac{1}{2}}(-2i)$
- $w_{ROT,\lfloor\sqrt{2}\rfloor,\frac{\sqrt{2}-1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}}(i) = w_{ST,\lfloor\frac{\sqrt{2}}{2}\rfloor,\frac{\sqrt{2}-1}{2}}(2i)$
- $w_{ROT,\lfloor\sqrt{2}\rfloor,\frac{\sqrt{2}-1}{2},1-\frac{\sqrt{2}}{2}}(i) = w_{ST,\lfloor\frac{\sqrt{2}}{2}\rfloor,\frac{\sqrt{2}-1}{2}}(-2i)$

Dans le cas quadratique, comme nous l'avons signalé, il est possible de raisonner directement via des mots sturmiens dont nous connaissons mieux la théorie (voir 4.3.1). En effet, dans le cadre des angles quadratiques qui nous intéressent, le cosinus et le sinus appartiennent à la même extension quadratique $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ avec $D \in \mathbb{N}$.

Ainsi les différences entre les coupures (élément de $K_{\alpha,3}$) vont appartenir à la même extension quadratique, et les mots étudiés correspondent en fait en une translation de $k\frac{\sqrt{D}}{k_2}$ vis à vis d'un intervalle de taille $\frac{\sqrt{D}}{k_2}$. Ceci revient ainsi à dire qu'on observe une lettre sur k dans le mot sturmien de pente $\frac{\sqrt{D}}{k_2}$.

Plus généralement, dans 4.3.2, les auteurs donnent à partir de ces notions une construction par substitutions itérées des mots sturmiens considérés. Ainsi, nous venons de donner un procédé entièrement constructif pour générer les configurations à partir d'opérations comme des substitutions.

Note 4.4.4.1 En utilisant, ces résultats on reconstitue la configuration $C_{\pi/4}$. Si on fait varier les paramètres qui nous ont permis d'obtenir la configuration, on tombe sur une variété de configura-



tions autosimilaires.

Perspectives

Une des perspectives de cette étude serait de montrer que tous les mots de rotation qui contribuent à engendrer une même configuration sont compatibles : Il est possible de réentrelacer et ainsi d'obtenir des substitutions qui à chaque motif défini sur un représentant de $\mathbb{Z}[i]/(z_I\mathbb{Z}[i])$ associerait un pavé connexe et tourné selon Z_I qui en soit l'image. Même si toutes les valeurs impliquées dans le problème appartiennent à la même extension quadratique, cette proposition n'est pas une évidence.

4.5 Inférence de substitutions planaires via graphes de Rauzy

Cette section décrit les premières traits d'une méthode expérimentale qui retrouve dans certains cas, un jeu de substitutions planaires qui engendrent une configuration.

Les détails et le champ d'application de la méthode ne sont pas à ce jour totalement clarifiés. Cette méthode des résultats donne a priori des configurations de faible complexité. Elle semble donc adaptée pour des configurations comme C_α où C'_α .

Une telle méthode est aussi étudiée en dimension 1, en particulier depuis le colloque [PorqRoll 2005](#) où nous avons commencé à rechercher avec Julien CASSAGNE et d'autres doctorants les conditions algorithmiques pour la reconstruction de substitutions en se s'appuyant sur l'observation de mots substitutifs.

Cette section débute avec les définitions des graphes de RAUZY bidimensionnels, on fixe des concepts nécessaires. En particulier, on présente le modèle de multigraphes des fragments. Celui-ci peut être vu comme un candidat pour la généralisation de la notion d'automates en dimension supérieure. Ensuite, par le biais de ces outils, on procède à des observations sur la configuration $C_{\pi/4}$. Ces observations nous conduisent à conjecturer que $C_{\pi/4}$ peut être engendrée par des substitutions planaires.

En partant de la conjecture obtenue, et afin de la prouver, on généralise ensuite la notion de systèmes dynamiques induits. La preuve visée est similaire à celle effectuée en A.1.2. On obtient ensuite de premiers résultats dans le sens de la démonstration. Ces éléments vont permettre d'expliquer l'autosimilarité de la configuration.

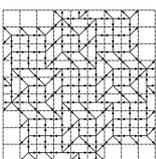
4.5.1 Définitions de base concernant les graphes de Rauzy

Les définitions suivantes sont employées et illustrées dans la prochaine partie de cette même section.

4.5.1a Les graphes de Rauzy unidimensionnels

Soit w un mot infini. On note $G_n(w)$ le *graphe de Rauzy* de taille n issu d'un mot infini w – le graphe de RAUZY $G_n(w)$ est défini comme un couple $(V_n(w), E_n(w))$, où l'ensemble des sommets V_n est constitué par l'ensemble des facteurs de taille n qui apparaissent dans le mot w , $V_n = \mathcal{L}_{[n]}(w)$. Pour mémoire, $\mathcal{L}_{[n]}(w)$ désigne l'ensemble des facteurs de taille n qui apparaissent dans w . Il y un arc entre deux facteurs f et f' de w , si f et f' apparaissent successivement dans w . En d'autres termes, on a $E_{[n]} = \mathcal{L}_{[n+1]}$. Ainsi, on pose^(a) $source(w) = w^{[n]}(0)$, $destination(w) = w^{[n]}(1)$.

^(a)Rappelons que la notation $w^{[n]}(x)$ désigne le motif de taille n qui apparaît à la position x dans le mot w .



Si un nœud n a un degré supérieur à 2, on dit qu'il s'agit d'un *facteur spécial*. Comme le démontre Julien CASSAIGNE [CAS94], les facteurs spéciaux fournissent un outil algébrique pour l'étude de la complexité des configurations, mais aussi un élément déterminant dans la compréhension de la théorie des graphes de RAUZY.

Le graphe de RAUZY apparaît aussi comme une approximation par une projection continue de la dynamique symbolique. Le mot infini w est normalement une orbite pour la dynamique du shift : le fait de tronquer un mot à ces n premières lettres conduit à réaliser une approximation continue avec la topologie usuelle sur les mots. Les bifurcations observées dans le graphe de RAUZY sont susceptibles de nous révéler des propriétés intrinsèques de celles que l'on observe dans la dynamique globale ; Elles peuvent aussi a contrario indiquer simplement la façon dont la dynamique se contorsionne quand elle est plongée dans un espace fini (l'ensemble des facteurs de taille n sur un alphabet fini est lui-même fini).

4.5.1b Les graphes de Rauzy bidimensionnels

On définit le *graphe de RAUZY bidimensionnel* de taille $[m, n]$ issu de la configuration C et noté $G_{[m,n]}(C)$, comme un triplet $(V_{[m,n]}(C), E_{X,[m,n]}(C), E_{Y,[m,n]})$; dans ce triplet, $E_{X,[m,n]}$ est un sous-ensemble de V^2 qui contient les *arcs horizontaux*, $E_{Y,[m,n]}$ contient les *arcs verticaux*. Plus précisément, il y un arc entre deux facteurs d'une configuration s'il existe une position p telle que $(C^{[m,n]}(p) = f_1$ et $C^{[m,n]}(p + \delta) = f_2$, avec $\delta = (1, 0)$ pour les arcs horizontaux and $\delta = (0, 1)$ pour les arcs verticaux. On remarque alors que pour l'ensemble des sommets on a $V \equiv \mathcal{L}_{[m,n]}$, pour les arcs horizontaux $E_x \equiv \mathcal{L}_{[m+1,n]}$, et pour les arcs verticaux, $E_y \equiv \mathcal{L}_{[m,n+1]}$.

L'*arité entrante horizontale* $d_{HI}(\mathbf{m})$ d'un motif \mathbf{m} est le cardinal du sous-ensemble de E_x qui contient les arcs qui ont pour cible \mathbf{m} . On définit similairement un arité entrante verticale, et l'*arité entrante* comme étant la somme des deux précédentes arités. Le *vecteur d'arité entrante* est le vecteur qui contient l'arité entrante d'un nœud dans chaque dimension. L'arité entrante (resp. sortante) est donc la norme L_1 du vecteur considéré ; c'est-à-dire qu'elle correspond à l'arité du nœud que nous considérons.

Un $[m, n]$ -facteur est *horizontalement spécial* s'il a une arité horizontale supérieure à 2.

Un *co-arc* d'un arc e est un arc e' caractérisé par le fait que e' a la même direction (horizontale/verticale) que e , et qu'il partage soit la source, soit la cible de l'arc e .

Dans un graphe de RAUZY, nous dirons qu'un arc est *spécial* si et seulement s'il possède un co-arc.

Si une configuration est quasipériodique pour chacune de ses lignes et chacune de ses colonnes, le graphe de RAUZY est structuré en une composante fortement connexe : à partir de tout point du graphe, il existe un chemin qui permet d'atteindre n'importe quel autre point du graphe.

On définit un *fragment* comme étant une composante connexe maximale du graphe $G_{[m,n]}(C)$ privé de tous ses arcs spéciaux. Et puisque tous les arcs spéciaux ont été ôtés, les arcs qui demeurent dans le graphe indiquent une relation de causalité entre les motifs.

Les fragments peuvent être vus comme des morceaux de configurations C , ou plutôt ils forment un pavage de la configuration $C^{[m,n]}$. Dans C , ils induisent un pavage avec superposition. Deux $[m, n]$ -fragments ne peuvent apparaître accolés que s'ils concordent sur les contraintes qu'ils imposent à la configuration au niveau de leur bord : En effet dans $C^{[m,n]}$, les fragments réalisent un pavage de la configuration. Vu que la présence horizontale successive de deux motifs implique une concordance sur les $[m - 1, n]$ premiers éléments du $[m, n]$ -motif, l'existence d'un pavage dans $C_{[m,n]}$ implique que les morceaux de configurations contraints par chaque fragment se superposent sur zones de tailles $[m - 1, n - 1]$.

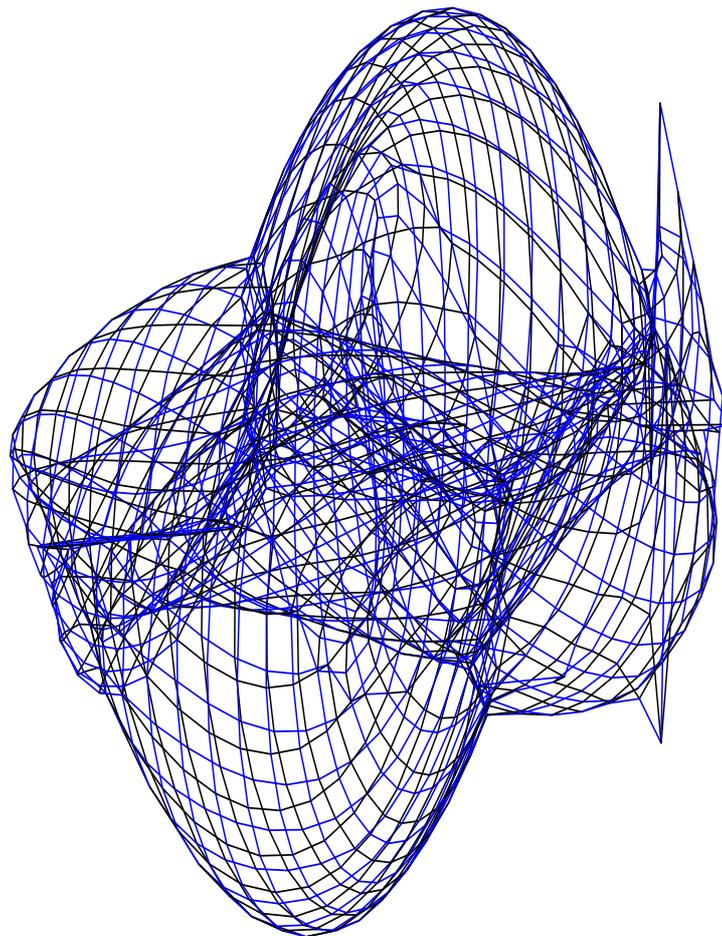
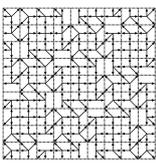
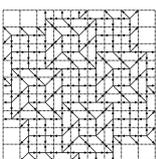


Fig. 4.8 – Exemple de graphe de RAUZY bidimensionnel issu de la configuration $C_{\pi/4}$ pour la taille de facteur 19×19 . Le graphe de RAUZY est le plus souvent assimilable localement leune variété de dimension 2.



Dans tout $[m, n]$ -fragment, on assigne arbitrairement^(a) un $[m, n]$ -motif appartenant à ce fragment, comme *point d'appui* du fragment. Par convention, quand cela est possible, on prendra comme point d'appui le point le plus à gauche (d'abord) en bas (ensuite) du fragment.

Tous les arcs spéciaux qui relient une même paire de fragments (m, n) forment un *côté* du fragment.

Une $[m, n]$ -fragment est une composante connexe du $[m, n]$ - graphe de RAUZY où tous les arcs spéciaux ont été ôtés.

À chaque arc horizontal est associé l'action $T_X : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$, et le mouvement x , et respectivement, à chaque arc vertical, nous associons l'action $T_Y : (x, y) \mapsto (x, y + 1)$. On note h_V le morphisme qui à un chemin sur le graphe de RAUZY, fait correspondre le vecteur associé au déplacement induit par ce chemin.

Soit f et f' deux fragments qui partagent un côté, alors tout chemin défini sur $f \cup f'$, qui débute au point d'appui de f et qui finit au point d'appui de f' et qui de plus ne passe qu'une seule fois par un des arcs du côté entre f et f' sera appelé un *déplacement entre f et f'* . Notons que si un des deux fragments est périodique, il existera une infinité de déplacements entre f et f' .

On définit une $[m, n]$ -pièce de la configuration C extraite d'un fragment F du graphe de RAUZY de taille $[m, n]$, comme le sous-ensemble maximal P de \mathbb{Z}^2 4-connexe, dans lequel on a pour tout $\mathbf{p} \in P$, $C^{[m,n]}(\mathbf{p}) \in F$.

Si la $[m, n]$ -pièce de la configuration C extraite d'un fragment F du graphe de RAUZY de taille $[m, n]$ contient un nombre infini de points de \mathbb{Z}^2 , alors le fragment associé sera dit *périodique*.

Note 4.5.1.1 *Les pièces peuvent être finies ou infinies. Une $[m, n, c]$ -pièce est propre si elle est différente de \mathbb{Z}^2 .*

Proposition 4.3 *Une configuration C est totalement périodique si et seulement s'il existe $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, le graphe $G_{[m,n]} \in \mathbb{N}$ ne possède pas d'arcs spéciaux, et par conséquent est formé que d'un seul fragment.*

Proposition 4.4 *Une configuration C est mono-périodique si et seulement s'il existe $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, le graphe $G_{[m,n]} \in \mathbb{N}$ ne possède que des fragments périodiques.*

Si on exclut le cas totalement périodique, le nombre de motifs qui apparaissent dans une configuration C croît quand $[m, n]$ -augmente.

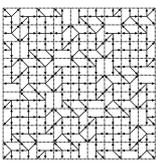
Afin d'analyser la dynamique indépendamment du nombre de fragments, mais plutôt en exploitant directement des informations métriques sur la dynamique, on introduit le multigraphe des fragments.

Définition 4.1 (Multigraphe des fragments) *Le graphe $\mathfrak{F}_{[m,n]} = (V_{\mathfrak{F}_{[m,n]}}, E_{\mathfrak{F}_{[m,n]}}, L_{\mathfrak{F}_{[m,n]}})$ où l'ensemble des nœuds $V_{\mathfrak{F}_{[m,n]}}$ devra être en bijection avec l'ensemble des $[m, n]$ - fragments de la configuration C , où $E_{\mathfrak{F}_{[m,n]}}$ est l'ensemble des déplacements d'un fragment à un fragment adjacent. Nous noterons par $L_{\mathfrak{F}_{[m,n]}}$ la fonction qui, à un arc du multigraphe des fragments, associe son déplacement.*

Deux multigraphes des fragments sont isomorphes, s'il existe un isomorphisme entre les multigraphes, c'est-à-dire s'il existe une bijection entre les nœuds des multigraphes considérés tel que le nombre d'arêtes qui relient les deux nœuds, soit le même avant et après l'isomorphisme.

En fait en dimension 1, construire le multigraphe des fragments consiste à construire un automate à état fini qui reconnaît les mêmes langages que le graphe de RAUZY.

^(a)Le fait de pouvoir choisir arbitrairement un motif pour représenter un fragment, se traduit sur le tore \mathbb{T}^2 , par une liberté de choix dans le cadre qui va représenter un fragment.



Reconnaissance par graphe de Rauzy

Pour étudier les configurations substitutives, on décrira des transformations “effectuées” par des graphes de RAUZY. Notre but est de redonner quelques éléments qui permettent d’expliciter la nature du lien avec la théorie des automates, ainsi que de comprendre comment passer d’une configuration à une autre.

Une configuration, ou un morceau de configuration est accepté par un graphe de RAUZY $2d$ si et seulement si la proposition suivante est valide : Pour tout motif de taille $[m, n + 1]$, il existe un arc qui est associé à ce motif dans le graphe de RAUZY, et à tout motif de taille $[m + 1, n]$ il existe un arc horizontal associé avec ce motif dans le graphe de RAUZY, (et, a fortiori, tous les motifs de taille $[m, n]$, il existe un nœud associé avec le motif dans le graphe de RAUZY).

Il est possible d’associer à chaque déplacement dans le graphe de RAUZY, un vecteur sur le plan qui correspond à la somme des actions verticales et horizontales induites par le déplacement.

Il est temps de résoudre une partie de l’énigme de la page a de ce manuscrit. La figure qu’y si trouve représente un graphe DE RAUZY colorié en fonction de l’arité des nœuds. Ce graphe DE RAUZY a été construit à partir des motifs 7×7 issus du jeu de tuiles de WANG-AMMAN. Le jeu de tuile de WANG-AMMAN ne permet de construire que des configurations apériodiques. De ce fait, ce graphe de Rauzy ne reconnaît que des configurations apériodiques. De tels comportements n’ont pas d’équivalent en dimension 1 : on a un langage qui pourrait être “reconnaissable” au sens de GIAMMARESI et RESTIVO et qui ne contient que des mots infinis apériodiques.

Reconnaissance par le multigraphe fragment

Comme on a fait une reconnaissance par le graphe DE RAUZY, on peut faire une reconnaissance par le multigraphe des fragments. Une configuration C est acceptée par un multigraphe des fragments \mathcal{F}_0 si et seulement si la disposition des fragments et l’enchaînement des fragments dans la configuration C respecte ce que décrit le multigraphe des fragments \mathcal{F}_0 ; en particulier on veillera à ce que chaque morceau de la configuration qui soit associé à un unique fragment.

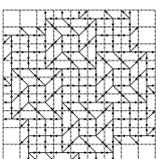
4.5.2 Extraction de substitutions dans $C_{\pi/4}$

On aborde maintenant la démarche expérimentale issue des graphes de RAUZY bidimensionnels, et les résultats associés. À la fin de cette sous-section, une substitution planaire est issue à partir des graphes de RAUZY. La validité de cette substitution planaire qui semble être à même engendrer la configuration $C_{\pi/4}$, est discutée dans les sous-sections suivantes.

Note 4.5.2.1 *Notons tout d’abord que le fait de vouloir utiliser des mots de retour revient à tenter de récupérer la topologie du graphe DE RAUZY dans le cas où le graphe de Rauzy aurait une topologie d’automates à pétales. Ainsi cette technique ne différerait pas tant que cela de l’intuition de la première technique présentée. Elle aurait cependant le mérite d’être valide dans un cadre bien plus général, et de fournir une intuition plus explicite de l’objet manipulé.*

4.5.2a Stratégie générale

En réalisant des graphes de RAUZY pour des tailles de motifs différents, on obtient différents graphes de RAUZY. Dans les cas non totalement périodiques, le nombre de facteurs est nécessairement strictement croissant, on ne peut donc pas avoir toujours le même graphe de Rauzy. Cependant si le graphe de RAUZY est évolution permanente, ce n’est pas pour autant vrai de sa topologie, ou du multigraphe des fragments qu’il induit.



Pour trouver une substitution, par l'observation, il va falloir trouver deux multigraphes des fragments isomorphes.

La validité des multigraphes des fragments observés expérimentalement à partir d'un morceau de configuration ne sera pas démontrée ici. Néanmoins, la validité du procédé découle de la quasipériodicité : en observant une fenêtre suffisamment grande, on est sûr d'avoir observé tous les fragments d'une certaine taille. Ainsi le multigraphe des fragments est valide pour peu que la fenêtre d'observation soit suffisamment grande. La progression exacte de la taille de la fenêtre à considérer est donné par la fonction de quasipériodicité de la configuration.

La propriété d'isomorphisme entre les multigraphes des fragments va avoir une importante conséquence : tout pavage reconnu par un multigraphe des fragments à une certaine échelle donne un pavage valide pour l'autre multigraphe des fragments !

Pour justifier démontrer et caractériser l'isomorphisme, plusieurs solutions sont possibles. Le multigraphe des fragments permet a priori une approche algébrique. Cependant, cette approche est technique et lourde, car il faut manipuler algébriquement le multigraphe. L'autre approche envisageable consiste à généraliser la notion de système dynamique induit^(a) à la dimension 2.

Cette seconde approche peut se combiner avec les remarques de la section précédentes sur les entrelacement de configurations. À la fin du chapitre, on finit par aboutir sur le résultat escompté : le squelette d'une preuve pour l'autosimilarité de $\pi/4$ construit à partir de l'observation des fragments. Pour terminer cette preuve, il restera à faire l'application numérique. Nous n'avons pas eu le temps de la réaliser dans le cadre de cette thèse.

4.5.2b Constations expérimentales

Les graphes de RAUZY dépendent d'un paramètre : La taille des $[m, n]$ -motifs pour lesquels qui servent de nœuds au graphe de RAUZY.

Or, il se trouve que comme les $\{k\alpha \in \mathbb{T}, k \in 0 \dots n\}$ induisent des ensembles qui n'ont pas toujours de bonnes propriétés, les graphes de RAUZY ne vont donner des résultats simplement interprétables seulement pour certaines tailles de paramètres adéquates.

On donc commence par cibler des tailles pour lesquelles il faut construire des graphes de RAUZY afin de mener à bien notre analyse. On s'inspire du cas sturmien, voir par exemple [KUR03]. Il faut considérer avec une importance particulière l'apparition des facteurs bispéciaux dans les graphes de RAUZY, ou plutôt il faut s'intéresser aux tailles de motifs qui correspondent à l'apparition de bispéciaux. Ce sont aussi exactement les tailles pour lesquelles la partition composée par $\{k\alpha, k \in \{0, \dots, n\}\}$ sur le tore ne contient exactement que deux distances.

Du fait que $\cos(\alpha) = \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2}/2$ va avoir une influence majeure pour la suite de cette étude.

On définit donc les $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, comme étant l'ensemble des valeurs pour lesquelles le nombre de fragments dans le graphe de Rauzy est minimal (vaut 8). (c.f. Figure 4.9). Les premières valeurs de la suite des $\{n_k\}$ sont 1,3,8,20,49,119.... En fait, il s'agit des tailles pour lesquelles l'ensemble des distances induites sur le tore par la série des $\{n\alpha\}_{n \in \mathbb{N}}$ ne contient que deux distances ; pour plus de renseignements à ce propos consulter l'annexe A.1.

Expérimentalement, si on construit les graphes de RAUZY pour des morceaux finis de configuration, on observe alors que les graphes de RAUZY ont effectivement la même apparence (voir la Figure 4.10). Notons au passage que dans notre cas la quasipériodicité nous garantit la validité des graphes obtenus pour peu que nous ayons pris des morceaux de configuration assez grands : La quasipériodicité nous dit qu'il existe une taille de fenêtre telle que tous les motifs d'une taille donnée

^(a)définie en 1.3.1d.

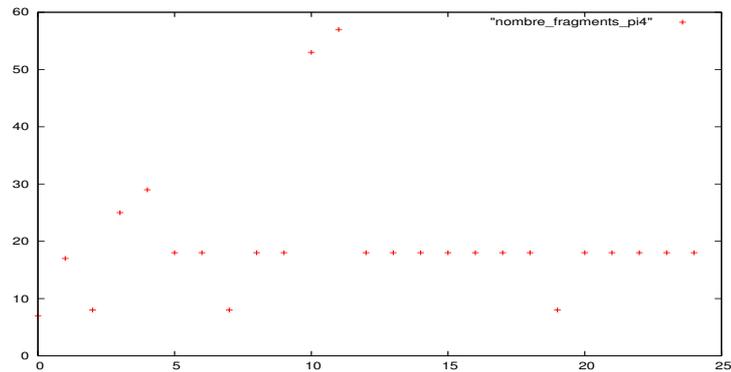
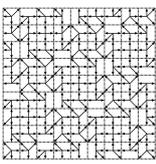


Fig. 4.9 – Nombre de fragments en fonction de la taille des motifs dans $C_{\pi/4}$ (pour des tailles de facteurs allant de 1 à 25)

apparaissent, et le graphe de Rauzy ne dépend pas que du langage de facteur de la configuration. Nous n'avons pas vraiment discuté de la fonction de quasipériodicité : la fonction qui à une taille de facteurs donnée donne la taille de la fenêtre qui doit être analysée pour être sûrs que tous les facteurs qui devaient apparaître sont apparus ; cependant au regard des précédentes discussions, on comprendra qu'elle est liée au développement en fractions continues de $\sin(\alpha)$ et de $\cos(\alpha)$. De ce fait, vu le développement en fractions continues de $\frac{\sqrt{2}}{2}$, on comprendra que cette fonction ne croît pas très vite.

Pour revenir aux graphes de Rauzy observés, ils possèdent des caractéristiques topologiques similaires. Il faut remarquer encore que les multigraphes des fragments induits à partir de ces graphes de RAUZY sont isomorphes.

Dans le cadre d'une approche expérimentale générique, il n'y a en général pas unicité de l'isomorphisme. Il nous faut alors trouver l'isomorphisme qui conduit à des résultats d'autosimilarité.

Nous dirons que les graphes de RAUZY construits à partir des observations à différentes échelles, fournissent des approximations de la dynamique qui sont topologiquement identiques, s'ils induisent des multigraphes des fragments topologiquement identiques.

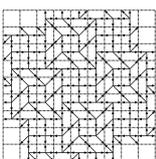
Considérons les fragments de la configuration $\pi/4$, ils sont présentés en Figure 4.11. Pour les différentes tailles de facteurs observées, les fragments sont identiques en nombre et en forme.

Les fragments de certaines tailles semblent se recomposer à l'aide des fragments obtenus à partir des motifs de taille moindre, comme indiqué par la Figure 4.12. Ainsi, l'existence d'un jeu de règles de substitutions planaires des petits pavés vers les grands pavés peut être conjecturée. La configuration $C_{\pi/4}$ serait substitutive pour ce jeu de substitutions.

Nous avons trouvé une substitution planaire qui semble engendrer $C_{\pi/4}$, il reste à en démontrer la validité.

Pour la substitution explicitée en Figure 4.12, on a ensuite observé expérimentalement la matrice de PARIKH^(a) suivante (en passant de 3 à 20, mais nous avons aussi obtenu la même matrice en

^(a)encore appelée : matrice d'incidence. Pour mémoire, la matrice de Parikh compte le nombre d'occurrences d'une pièce dans l'image par substitution d'une autre pièce.



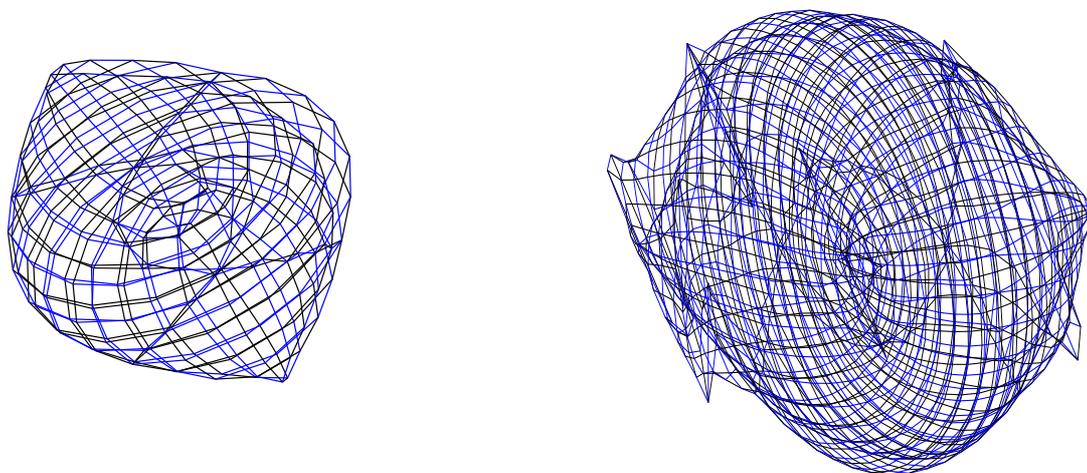


Fig. 4.10 – Les graphes de RAUZY pour des tailles 7×7 et 19×19 ont bien la même apparence. Les arcs en noir indiquent les arcs horizontaux, tandis que les arcs en bleu indiquent les arcs verticaux.

transformant 12 en 49) :

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 4 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 6 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 8 & 6 & 5 & 6 & 6 & 4 & 6 & 8 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Dans cette matrice, les pièces sont rangées par ordre croissant en fonction de leur indice binaire dont nous discutons en 4.5.2c. Les valeurs propres associées à la matrice de substitutions sont $\{1, -1, 17 - 12\sqrt{2}, 12\sqrt{2} + 17\}$. Plus précisément, la valeur propre 1 est présente 4 fois, la valeur propre -1 est présente 2 fois, et les deux autres racines une fois chacune. La matrice d'incidence est unimodulaire, de déterminant $+1$. La matrice d'incidence est la même pour les motifs de taille n_i et n_{i+1} . Il est donc remarquable que des valeurs comme $17/12$ apparaissent dans cette matrice (puisque'il s'agit d'un convergent de $\frac{\sqrt{2}}{2}$). Aussi, il faut en déduire que les tailles de motifs 3 et 20 correspondent effectivement aux premiers couples de graphe de RAUZY permettant de mettre en évidence la nature autosimilaire de la dynamique.

Tous ces éléments concordent vers un schéma similaire au cas sturmien.

4.5.2c Isomorphisme entre les multigraphes des fragments

Pour obtenir, une substitution nous avons dû décider d'une correspondance entre les fragments issus des motifs de taille $[3, 3]$ et les fragments issus des motifs de taille $[20, 20]$.

On atteint une partie moins automatique de la méthode, tout du moins quand on la considère comme une méthode purement expérimentale.

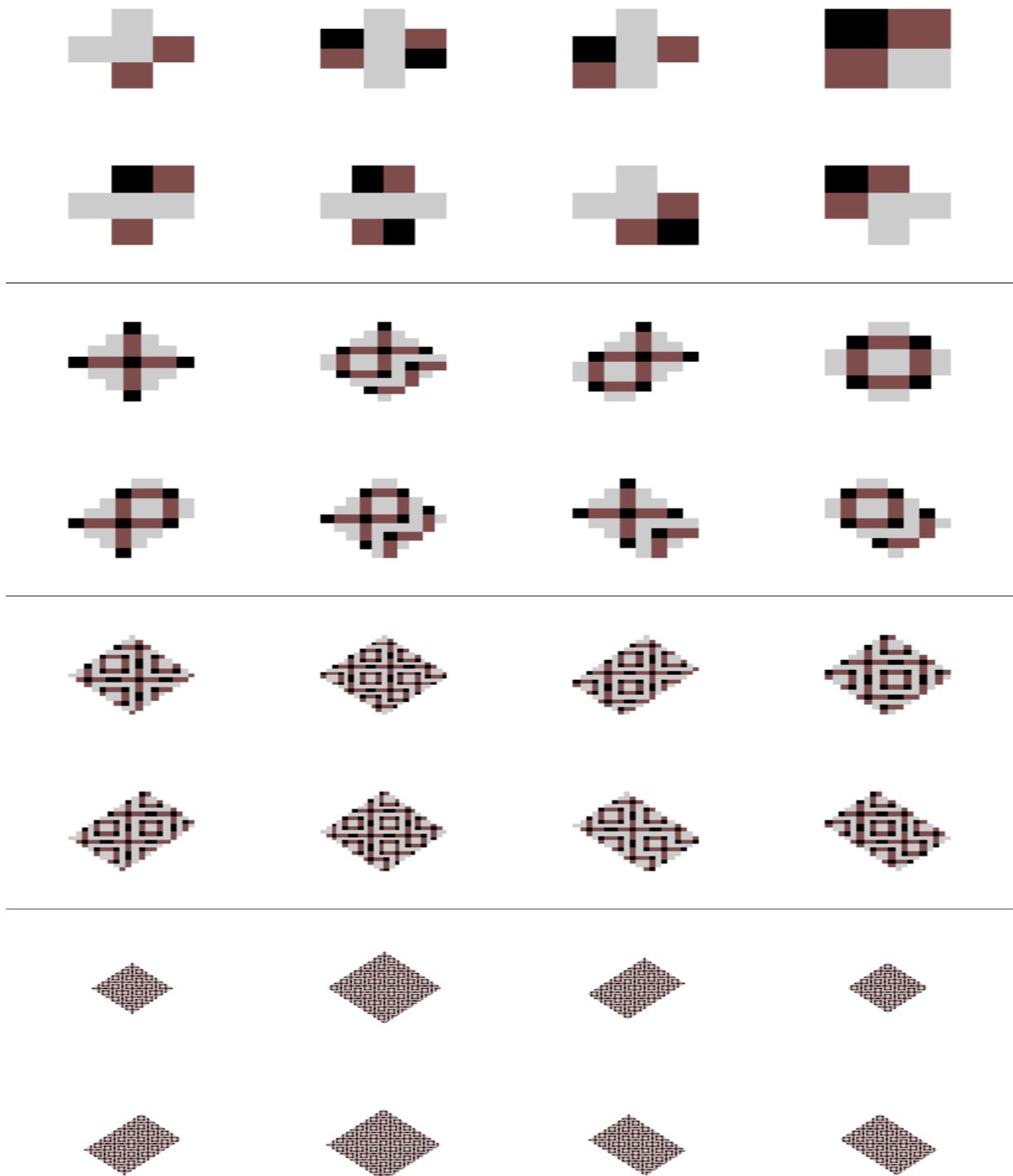
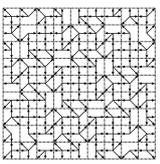
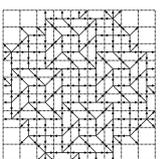


Fig. 4.11 – Les ensembles des morceaux de configurations associés aux pièces issues des fragments, pour les tailles de motifs : 3×3 , 8×8 , 20×20 , 49×49 . Pour mémoire, les fragments sont des ensembles de motifs, les pièces sont les positions associées aux motifs, les morceaux de configuration associés au pièces ne représentent qu'une partie du motif du fragment : on peut les interpréter comme des pièces de puzzle qu'il faut savoir disposer selon des règles qui sont non apparentées il i afin de réaliser un pavage du plan.



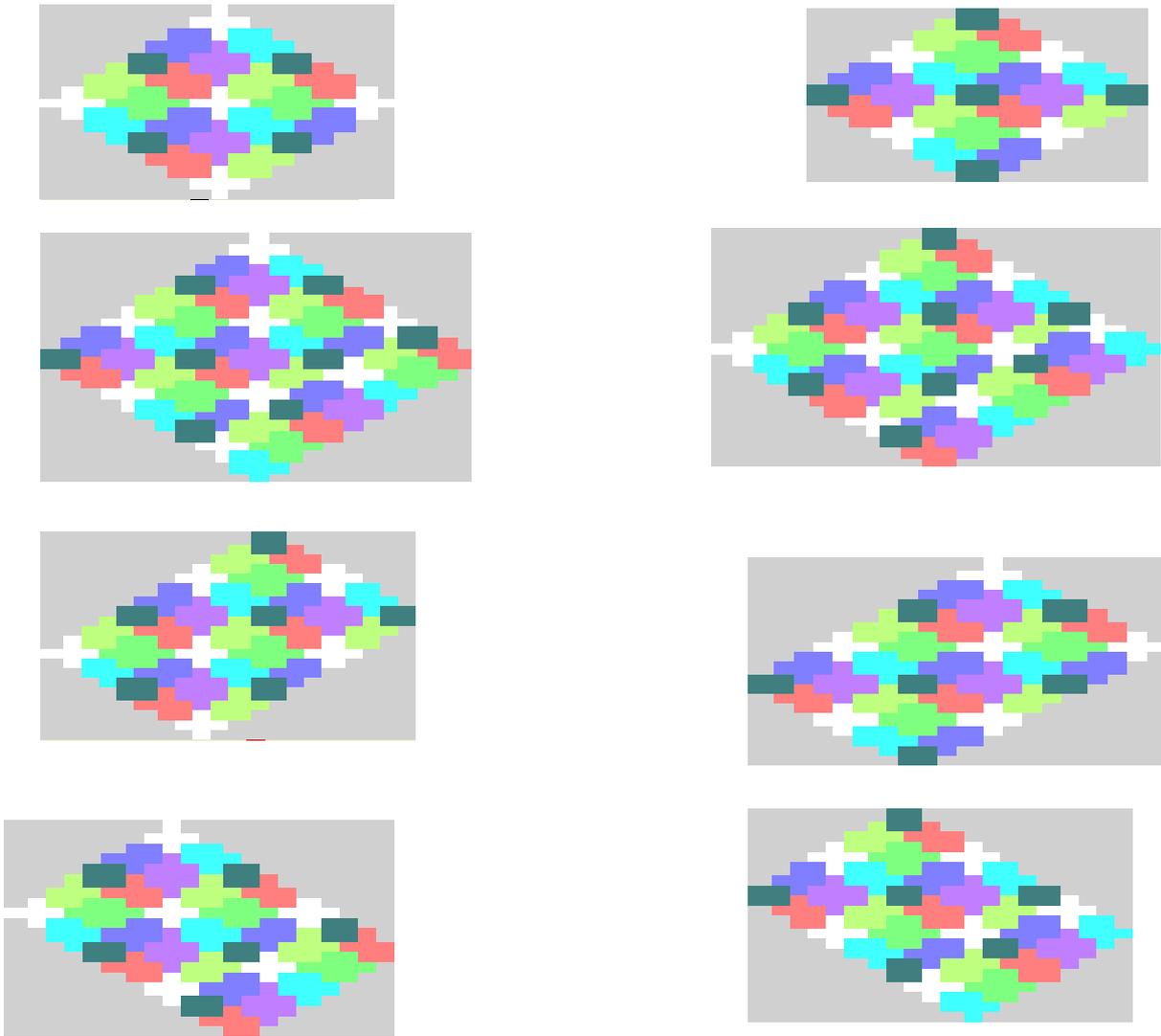
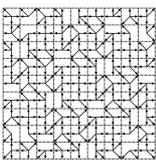


Fig. 4.12 – Le pavage des pièces 20×20 par des pièces 3×3 à l'origine de la substitutions



Il existe un isomorphisme entre les multigraphes des fragments pour les tailles de facteurs correctement choisies. Cependant en général, celui-ci n'est pas unique. Il va donc falloir disposer de méthodes pour choisir un isomorphisme plutôt qu'un autre.

Quels sont les critères pour décider de l'isomorphisme que nous allons appliquer ? Idéalement, il serait bien de pouvoir répondre à la question : *Quel fragment est l'image d'un autre fragment par l'isomorphisme entre les multigraphes des fragments F_n ?*

Une première méthode consiste à rechercher des indices métriques pour désigner l'image de chaque fragment par la substitution. Dans le cas de $C_{\pi/4}$, un certain nombre d'éléments métriques sont là pour nous aider. Une autre manière de faire pourrait peut-être consister à suivre les fragments dans leur évolution sur le tore. Cette seconde méthode s'avérera certainement plus délicate à mettre en œuvre.

L'isomorphisme entre les multigraphes des fragments permet de placer deux étiquettes sur chaque arc du multigraphe. De ce fait le multigraphe se transforme en transducteur. Cela dit pour être certains que le processus de transduction se déroule bien, il faut réaliser de nombreuses vérifications numériques.

Codage et identification des fragments pour $C_{\pi/4}$

Tout d'abord, on peut observer que les fragments de $C_{\pi/4}$ ont des formes plus ou moins larges, et de plus si on considère leurs intersections avec les bords du rectangle circonscrit, on peut remarquer que deux cas peuvent se produire :

- Soit le coin du fragment ne touche le bord que par un seul point de contact.
- Soit le coin du fragment circonscrit semble avoir plusieurs points de contacts avec le rectangle circonscrit.

La Figure 4.13 permet de constater ce fait.

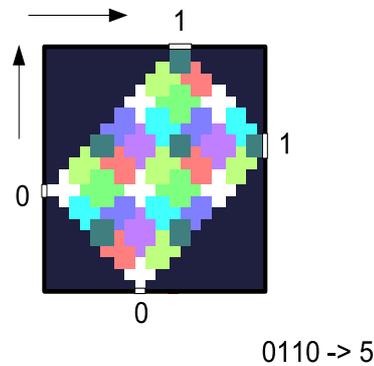
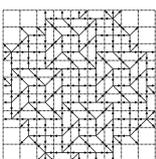


Fig. 4.13 – Méthode utilisée pour associer un code à chaque fragment rencontré valable pour la configuration pour $C_{\pi/4}$

En utilisant cette remarque on peut affecter un code à chaque fragment, ce qui nous permettra dans ce cas de décider de l'isomorphisme à appliquer. Pour assigner un code à chaque fragment, on procède ainsi : on affecte le symbole 0 à chaque angle doté d'un point de contact formé d'un seul point, et le symbole 1 dans le cas contraire. En tournant dans le sens horaire, et en commençant par le point le plus à gauche, puis le plus en bas, on code chacun des coins des fragments.

On obtient ainsi une manière d'identifier chacun des huit fragments rencontrés. En pratique on note : $f_{0000}, f_{0011}, f_{0101}, f_{0110}, f_{1001}, f_{1010}, f_{1100}, f_{1111}$ les cadres associés à l'apparition d'un frag-



ment. Le cadre associé à l'apparition d'un fragment est par définition le cadre associé au motif d'appui du fragment.

Note 4.5.2.2 *Pour avoir une écriture plus compacte, ces codes seront souvent interprétés comme un nombre binaire, on les notera $f_0, f_3, f_5, f_6, f_9, f_{10}, f_{12}, f_{15}$. Dans certaines figures, nous aurons recours à la représentation décimale de ce nombre.*

4.5.2d Transposition de la notion de fragments sur le tore

Une fois réinterprété dans \mathbb{T}^2 , un fragment correspond donc à un ensemble de cadre issus de $[m, n]$ -motifs qui sont équivalents modulo l'action de $T_X : \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{i}_\alpha$ ou modulo l'action $T_Y = \mathbf{v} + \mathbf{j}_\alpha$ près (et à condition que tous les cadres sur le chemin le soient aussi). En ce sens, ils ont une définition très proche de celle d'un mot de retour puisque le mot de retour est associé en général à une construction type tours de ROHLIN.

4.5.3 Prologue relatif à l'étude de l'autosimilarité de $C_{\pi/4}$

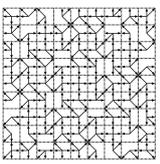
En s'appuyant sur les éléments vus dans la section A.1.2a, notre objectif est d'expliquer pourquoi les substitutions que nous avons conjecturées ont lieu. On souhaite aussi comprendre pourquoi cela se traduit sur le graphe de RAUZY bidimensionnel.

On se place dans le cas où α est un angle quadratique. Dans tous les exemples, on aura $\alpha = \pi/4$. La démonstration d'autosimilarité concerne $C_{\pi/4}$

Le plan se subdivise en trois sous-parties : Nous présenterons trois tentatives de démonstration.

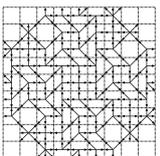
Les deux premières tentatives, plus complexes, n'aboutissent pas. La dernière tentative reprend les éléments vus pour en Section 4.4.

Entre la deuxième et la troisième section, on précisera la définition de ce qu'est un système dynamique induit en dimension 2. Donner une notion de système dynamique induit, va se révéler être un élément important pour clarifier la démonstration.



$$\begin{aligned}
 FG_3 = & \begin{pmatrix} \{-3,3\} & \{-2,2\} & \{-3,2+2i\} & \{-3,4\} & \{-2-i,3+i\} & \{-2+2i\} & \{-3i,4i\} & \{-2-i,2-i\} \\ \{-2+2i\} & \{-4,3\} & \{-3\} & \{2+2i\} & \{3+i\} & \{-2-i\} & \{-2-i\} & \{-2+2i\} \\ \{3,-2-2i\} & \{-2,2i\} & \{-2+2i\} & \{2-2i\} & \{1-i\} & \{1-i\} & \{2+2i\} & \{1-i,2-i\} \\ \{3i,-4i\} & \{-3-i\} & \{-1+i\} & \{-1+i\} & \{-2+2i\} & \{-2+2i\} & \{-2+2i\} & \{1+2i\} \\ \{2-2i\} & \{2+i\} & \{-2\} & \{2+i\} & \{-2+2i\} & \{-2+2i\} & \{-2+2i\} & \{-2+2i\} \\ \{-1+i,2+i\} & \{-1+i\} & \{-1-2i\} & \{-1-2i\} & \{4i\} & \{2+2i\} & \{2+2i\} & \{2+2i\} \\ \{-17,17\} & \{-17,17i\} & \{-17,24\} & \{-17,12+12i\} & \{-9-8i,20+4i\} & \{3-20i,3+21i\} & \{-9+9i\} & \{8-8i,-9-8i,8+9i\} \\ \{17,-17i\} & \{-12-12i\} & \{12+12i\} & \{-17i\} & \{20+4i\} & \{-9-8i\} & \{-9+9i\} & \{8-8i\} \\ \{-24,17\} & \{17i\} & \{12-12i\} & \{-12+12i\} & \{8-8i\} & \{20-3i\} & \{8+9i\} & \{8+9i\} \\ \{17,-12-12i\} & \{-20-4i\} & \{-8+8i\} & \{-8+8i\} & \{-9-9i\} & \{-24i\} & \{-12-12i\} & \{-12-12i\} \\ \{9+8i,-20-4i\} & \{9+8i\} & \{-8+8i\} & \{-9-9i\} & \{-12+12i\} & \{-12+12i\} & \{-12-12i\} & \{-12+12i\} \\ \{-3+20i,-3-21i\} & \{-8-9i,9+8i\} & \{-8-9i\} & \{-20+3i\} & \{24i\} & \{12+12i\} & \{12-12i\} & \{12-12i\} \\ \{-8+8i,-8-9i,9+8i\} & \{-8+8i\} & \{-8-9i\} & \{-8-9i\} & \{12+12i\} & \{12-12i\} & \{12-12i\} & \{12-12i\} \end{pmatrix} \\
 FG_{20} = & \begin{pmatrix} \{-17,17\} & \{-17,17i\} & \{-17,24\} & \{-17,12+12i\} & \{-9-8i,20+4i\} & \{3-20i,3+21i\} & \{-9+9i\} & \{8-8i,-9-8i,8+9i\} \\ \{17,-17i\} & \{-12-12i\} & \{12+12i\} & \{-17i\} & \{20+4i\} & \{-9-8i\} & \{-9+9i\} & \{8-8i\} \\ \{-24,17\} & \{17i\} & \{12-12i\} & \{-12+12i\} & \{8-8i\} & \{20-3i\} & \{8+9i\} & \{8+9i\} \\ \{17,-12-12i\} & \{-20-4i\} & \{-8+8i\} & \{-8+8i\} & \{-9-9i\} & \{-24i\} & \{-12-12i\} & \{-12-12i\} \\ \{9+8i,-20-4i\} & \{9+8i\} & \{-8+8i\} & \{-9-9i\} & \{-12+12i\} & \{-12+12i\} & \{-12-12i\} & \{-12+12i\} \\ \{-3+20i,-3-21i\} & \{-8-9i,9+8i\} & \{-8-9i\} & \{-20+3i\} & \{24i\} & \{12+12i\} & \{12-12i\} & \{12-12i\} \\ \{-8+8i,-8-9i,9+8i\} & \{-8+8i\} & \{-8-9i\} & \{-8-9i\} & \{12+12i\} & \{12-12i\} & \{12-12i\} & \{12-12i\} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Fig. 4.14 – Matrices associées aux multigraphes des fragments pour les tailles de facteurs carrés 3 et 20. La représentation matricielle d'un multigraphe se fait en indiquant l'ensemble des étiquettes des arêtes partant du nœud indice de colonne et arrivant dans le nœud dont l'indice est celui du rang.



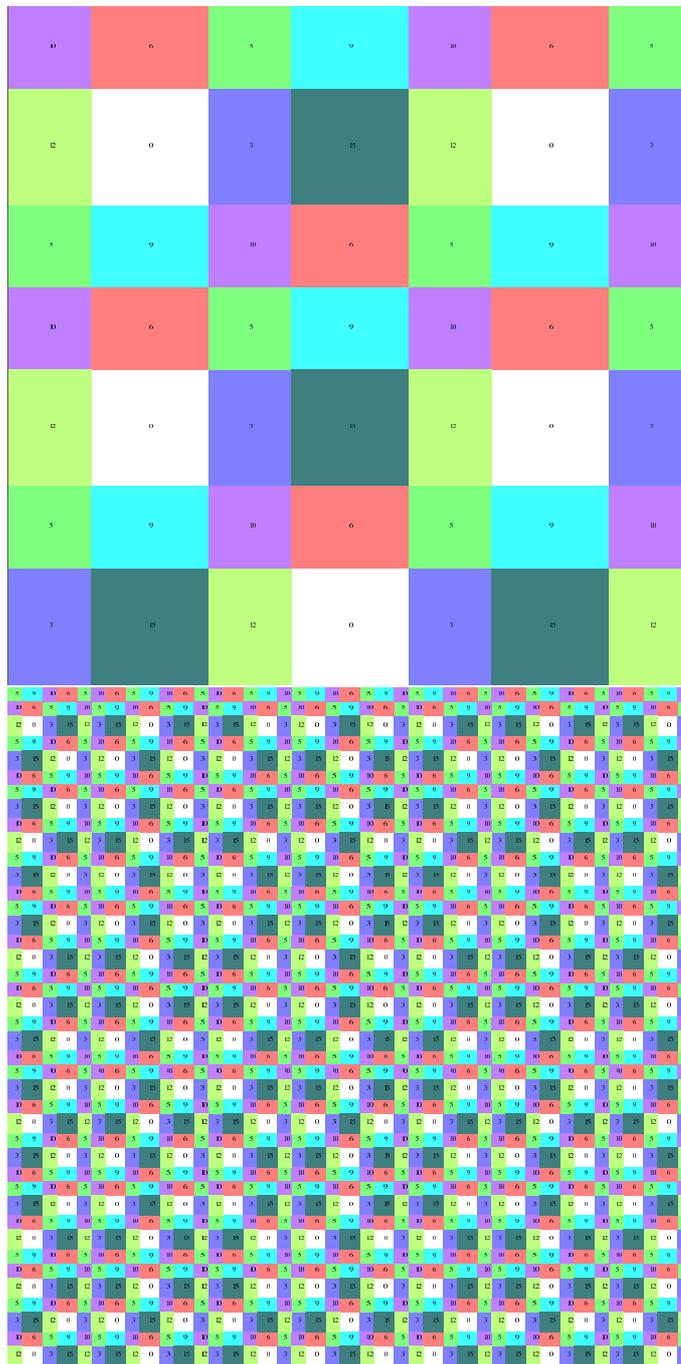


Fig. 4.15 – Les partitions symboliques concernant les motifs $[3, 3]$ et $[20, 20]$. Les cadres associés à chaque motif sont coloriés en fonction de l'appartenance à un fragment spécifique, les bords des fragments correspondent aux ensembles $\mathfrak{X}_{[3,3]}$ et $\mathfrak{X}_{[20,20]}$. Cette partition est ici représentée pour $\alpha = \pi/4$.

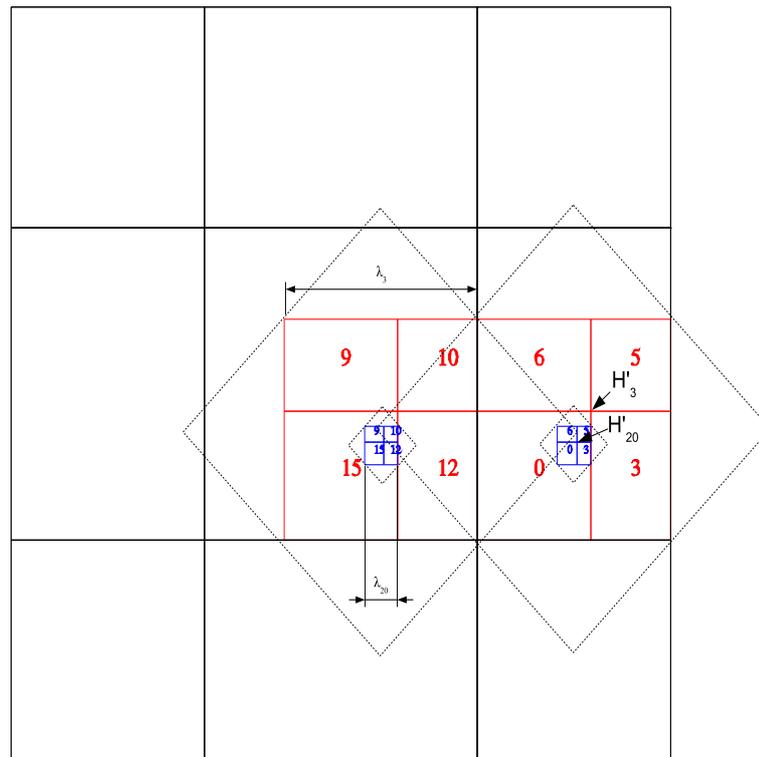
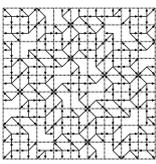
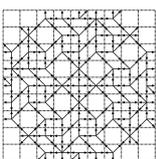


Fig. 4.16 – Les partitions P_3, P_{20} Les cadres en rouges indique la position des cadres associés aux fragments dans P_3 et ceux en bleus la position des cadres des fragments associés dans P_{20} . Ces cadres correspondent aux cadres de $[3, 3]$ -motifs et de $[20, 20]$ -motifs, (c.f. Figure 4.15)



4.5.4 Disposition des cadres pour $\alpha = \pi/4$

On procède ici à une étude expérimentale sur la disposition la taille des cadres associés à chacun des fragments, voir Figure 4.17. Les tableaux présentés ici ont été réalisés à partir des observations expérimentales. Néanmoins, la disposition des fragments est descriptible algébriquement car elle reflète la position des $k_{n,\alpha}$ (cf. l'annexe A).

La connaissance précise de la disposition des cadres permet de décrire la position et la taille de ceux-ci. Cela va nous permettre de donner une description précise des systèmes dynamiques induits, et de mieux comprendre le multigraphes des fragments.

On désigne par $\mathfrak{K}_{n,\alpha}$ l'ensemble des cadres qui forment la partition des motifs n par n pour un angle α . Si $\alpha = \pi/4$ alors $K_{n+2,\alpha} \mathfrak{K} = (K_{n+1,\cos(\alpha)} + K_{n+1,\sin(\alpha)}) \times (K_{n+1,\cos(\alpha)} + K_{n+1,\sin(\alpha)})$

De plus, il existe un jeu de translations qui permet de définir $\mathfrak{K}_{n+2,\alpha}$ à partir de $\mathfrak{K}_{n+2,\alpha} \cap [0 \dots T^k(\frac{\sqrt{2}}{2})]^2$. Ce jeu de translations est directement extractible à partir de celui composé pour $(K_{n+1,\cos(\alpha)} + K_{n+1,\sin(\alpha)})$

Les valeurs $\lambda_{1,i}$ et $\lambda_{2,i}$ désignent les deux distances qui interviennent dans le cas à deux distances, mentionnées dans le Théorème des trois distances (voir annexe A). On supposera toujours $\lambda_{1,i} > \lambda_{2,i}$.

motif	taille du cadre
0	$\lambda_{1,i}, \lambda_{1,i}$
3	$\lambda_{2,i}, \lambda_{1,i}$
5	$\lambda_{2,i}, \lambda_{2,i}$
6	$\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}$

motif	taille du cadre
9	$\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}$
10	$\lambda_{2,i}, \lambda_{2,i}$
12	$\lambda_{2,i}, \lambda_{1,i}$
15	$\lambda_{1,i}, \lambda_{1,i}$

Fig. 4.17 – Cette table résume les tailles des cadres associées à chaque fragment, en fonction de la taille des facteurs étudiés.

motif	3×3	20×20
3	$3\lambda_{1,i} + 3\lambda_{2,i}, \lambda_{1,i} + \lambda_{2,i}$	$15\lambda_{1,i} + 20\lambda_{2,i}, 7\lambda_{1,i} + 9\lambda_{2,i}$
6	$2\lambda_{1,i} + 3\lambda_{2,i}, 2\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i}$	$14\lambda_{1,i} + 20\lambda_{2,i}, 8\lambda_{1,i} + 9\lambda_{2,i}$
12	$2\lambda_{1,i} + 2\lambda_{2,i}, \lambda_{1,i} + \lambda_{2,i}$	$10\lambda_{1,i} + 13\lambda_{2,i}, 7\lambda_{1,i} + 9\lambda_{2,i}$
9	$\lambda_{1,i} + 2\lambda_{2,i}, 2\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i}$	$9\lambda_{1,i} + 13\lambda_{2,i}, 8\lambda_{1,i} + 9\lambda_{2,i}$
0	$2\lambda_{1,i} + 3\lambda_{2,i}, \lambda_{1,i} + \lambda_{2,i}$	$14\lambda_{1,i} + 20\lambda_{2,i}, 7\lambda_{1,i} + 9\lambda_{2,i}$
15	$\lambda_{1,i} + 2\lambda_{2,i}, \lambda_{1,i} + \lambda_{2,i}$	$9\lambda_{1,i} + 13\lambda_{2,i}, 7\lambda_{1,i} + 9\lambda_{2,i}$
10	$2\lambda_{1,i} + 2\lambda_{2,i}, 2\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i}$	$10\lambda_{1,i} + 13\lambda_{2,i}, 8\lambda_{1,i} + 9\lambda_{2,i}$
5	$3\lambda_{1,i} + 3\lambda_{2,i}, 2\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i}$	$15\lambda_{1,i} + 20\lambda_{2,i}, 8\lambda_{1,i} + 9\lambda_{2,i}$

Fig. 4.18 – Cette table résume la position des cadres. Ce tableau ne fait que résumer ce qui s'observe visuellement dans la Figure 4.15

Aussi, on remarque directement les récurrences suivantes à partir de la Figure 4.19 :

- $\lambda_{1,\chi(2i)} = 3\lambda_{1,\chi(2i+2)} + 4\lambda_{2,\chi(2i+2)}$;
- $\lambda_{2,\chi(2i)} = 2\lambda_{1,\chi(2i+2)} + 3\lambda_{2,\chi(2i+2)}$.

Le domaine en rouge est en bijection avec $((\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i})\sqrt{2})\mathbb{T}_\alpha^2$

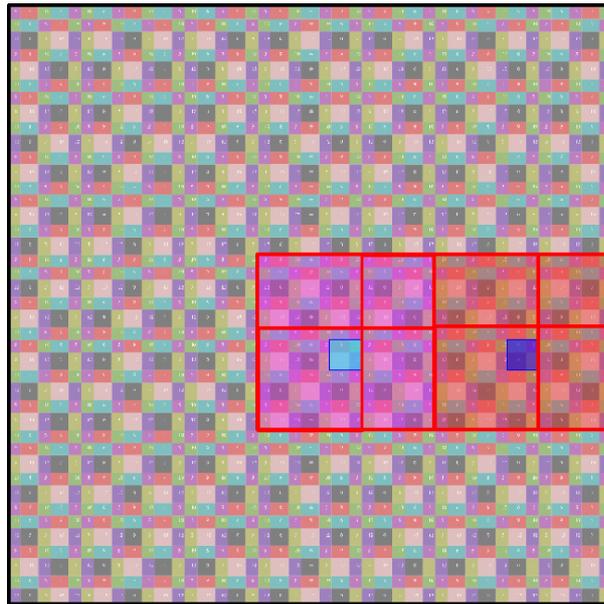
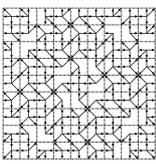


Fig. 4.19 – Les cadres caractéristiques de l'apparition des fragments pour les tailles de motifs 3 (en rouge) et 20 (en bleu). On a superposé ces cadres à $\mathfrak{A}_{\pi/4,20}$ afin de permettre l'estimation visuelle des coordonnées des cadres en termes d'intervalles longs et courts.

4.5.5 Comment prouver l'autosimilarité à l'aide des multigraphes ?

Les matrices associées aux multigraphes sont représentées en Figure 4.14. Il est possible d'utiliser le multigraphe des fragments, comme une généralisation possible de la notion d'automate en dimension 2.

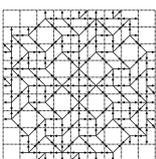
En tenant compte de la disposition des cadres dans le tore, un certain nombre d'opérations véritablement numériques conduisent alors à une preuve. Cette preuve dans sa version complète est trop technique pour ce mémoire.

Voici, les grands principes de la démonstration :

- À l'aide des résultats, sur les translations sur un tore unidimensionnel exposés en annexe A, on prouve facilement que la taille des zones pour chaque type de fragment est bien celle conjecturée dans le tableau.
- Choisir un élément du coin des fragments revient à choisir parmi les cadres associés à l'apparition d'un fragment celui qui est le plus en bas à gauche, (la plus proche possible de la fatidique bifurcation, cela peut aussi se caractériser sur le tore à condition de disposer d'une bonne description de la disposition des intervalles longs et courts).
- À partir des matrices des multigraphes des fragments^(a), on identifie les actions sur \mathbb{T}^2 associées à chaque arc du multigraphe des fragments, simplement en calculant son image par $\{r_\alpha\}$ (du fait du Théorème 2.1). Ces vecteurs doivent permettre de passer du cadre associé au motif du fragment en son point d'appui au cadre associé au motif du point d'appui du prochain fragment.
- Du fait de l'existence d'un isomorphisme entre les multigraphes des fragments, et au-delà d'une certaine taille de facteur nécessaire^(b) pour que l'isomorphisme existe, il est possible

^(a)qu'on estimera valide puisque la fonction de quasi-périodicité croît modérément.

^(b)A la lumière du chapitre suivant, on comprendra que ces tailles correspondent en fait à la taille à partir de



d'associer à chaque action sur le tore dans un premier multigraphe des fragments une action dans le nouveau multigraphe des fragments.

- A l'aide de ces éléments, on vérifie que les actions restent dans les cadres. En particulier, on prouve que chaque quadrant de la matrice de transition des multigraphes des fragments vérifie des propriétés du type :

$$\mathfrak{F}_{n+2} = a_n \mathfrak{F}_{n+1} + \mathfrak{F}_n$$

Ce type d'argument permet de faire le lien avec l'évolution du côté de la taille des cadres qui varie de la même façon. En clair la dynamique restreinte aux points d'appui des fragments pour des tailles propres convergerait vers un ensemble fini de points de \mathbb{T}^2 .

- il reste à obtenir un résultat ayant une valeur pour toutes les échelles alors que nous n'avons fait les observations que pour les premiers n propres. Il s'agit alors simplement de mettre en évidence à préciser alors la chaîne, des systèmes dynamiques induits par une renormalisation.

4.5.6 Autosimilarité par systèmes induits

Pour procéder similairement à la preuve de l'Annexe A, il faudrait construire une chaîne de systèmes dynamiques induits et montrer que ces systèmes dynamiques sont exactement les mêmes, ceci nous permettrait de montrer qu'on peut induire chaque système l'un de l'autre. Nous n'avons pas encore donné de définitions aux systèmes dynamiques induits en dimension deux.

4.5.6a Système dynamique induit en dimension non unitaire

Réaliser un système dynamique induit, c'est concentrer sur un intervalle spécifique les problèmes de décision qui pourront advenir dans un avenir proche.

Une définition mathématique propre et générale nécessiterait de travailler dans un cadre abstrait, et de considérer des espaces mesurables... Pour simplifier, on se contentera ici d'une définition spécifique à notre propos :

Soit (X, T_1, T_2) un système dynamique bidimensionnel, on considère deux ensembles $E_1 \subseteq X$ et $E_2 \subseteq X$, tels que :

1. E_1 soit T_2 -invariant et tel que toutes les orbites par T_1 passent de manière récurrente dans E_1 ,
2. E_2 soit T_1 -invariant et tel que toutes les orbites par T_1 passent de manière récurrente dans E_2 ,
3. L'intersection entre E_1 et E_2 soit de mesure non nulle.

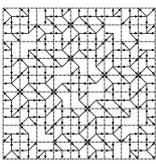
On définit k_{E_1} comme étant l'application qui nous donne le premier retour dans E_1 et on définit k_{E_2} comme étant l'application qui nous donne le premier retour dans E_2 .

$$- k_{E_1}(x) = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, T_1^k(x) \in E_1\}$$

$$- k_{E_2}(x) = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, T_2^k(x) \in E_2\}$$

À partir du système dynamique bidimensionnel (X, T_1, T_2) , on définit le *système dynamique induit* par $E \subseteq X$ comme étant le système le système $(X'_E, x \mapsto T_1^{k_{E_1}(x)}, x \mapsto T_2^{k_{E_2}(x)})$ où E_1 est la clôture T_2 -invariante de E et où E_2 est la clôture T_1 -invariante de E , et où X'_E est l'intersection de E_1 et de E_2 .

En dimension 1, en construisant des tours de ROHLIN, et en considérant les classes d'équivalence sur les trajectoires de retours dans E modulo la fonction de partition symbolique, il était possible laquelle les bandes de premier retour sont correctement séparées.



d'extraire ainsi une substitution indiquant comment relier chaque partie de la dynamique induite avec la dynamique initiale.

Plus exactement, on trouve une substitution lorsqu'il y a coïncidence entre la partie associée au premier retour et la partie associée dans la partition symbolique^(a).

Un phénomène du même acabit se produit en dimension 2.

On peut partitionner l'ensemble de départ en fonction de son retour selon T_1 et de son retour selon T_2 . Si on peut associer un symbole à chaque classe d'équivalence en termes de trajectoire, alors, on va obtenir une substitution.

Plus formellement, soit x un élément de X' , on dénote par $s(e)$ l'ensemble des positions du morceau de trajectoire associé à un premier retour dans E_1 ou dans E_2 .

On a $s(e) = \{(T_1^{k_1}(T_2^{k_2}(x)), (k_1, k_2)), k_1 \in \{0, k_{E_1} - 1\}, k_2 \in \{0, k_{E_2} - 1\}\}$. Puis si on se donne une application de la partition symbolique I_S définie sur X' et à valeur dans un ensemble fini, on construit alors des classes d'équivalences sur X' pour X' : L'ensemble de ces classes d'équivalence est dénoté ainsi :

$$P_I = \left\{ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}' \in X' \mid \text{et} \\ \forall (x', \mathbf{p}') \in s(\mathbf{v}') \exists (x, \mathbf{p}) \in s(\mathbf{v}) \mid I_S(x') = I_S(x) \end{array} \right. \right\}, \mathbf{v} \in X \left. \right\}$$

On réussit à trouver une substitution, si on sait associer un autre symbole à chaque cadre de la partition. L'ensemble des classes d'équivalences sur X est obtenu avant renormalisation du système. C'est l'application de la renormalisation à P_I qui peut conduire à une partition qui engendre des substitutions. Car, en effectuant l'opération inverse, il est possible de réaliser un action identique à celle qu'on souhaite réaliser, mais en l'intégrant dans un système dynamique bidimensionnel de plus haute précision.

Le système dynamique défini à l'aide de I_S sur $(X', x \rightarrow x + T_1^{k_{X'_1}(x)}, x \rightarrow x + T_2^{k_{X'_2}(x)})$ permet d'obtenir les configurations du système (X, T_1, T_2) par substitution, s'il existe une application les classes d'équivalence pour I_S sont plus fines que les classes d'équivalence définie par s .

Notons que les règles de substitutions que l'on obtient à l'aide de la notion de système dynamique bidimensionnel induit conduisent forcément à des substitutions rectangulaires.

Proposition 4.5 *Le temps de retour pour tous les points $T_2^k(x) \in X, k \in \mathbb{Z}$, le temps de retour dans E_1 est le même sur toutes les T_1 -orbites : Il en va de même pour E_2 vis-à-vis de T_1 .*

Démonstration :

Ceci est une conséquence, du fait que nous ayons pris E_1 ensembles T_2 -invariant. Le complémentaire de E_1 (resp E_2) dans X est aussi T_2 -invariant (resp. T_1 -invariant).

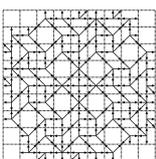
c.q.f.d.

Note 4.5.6.1 *Soit E un sous-ensemble de X sur lequel on établit un système dynamique induit. Si nous appelons E' l'intersection entre la fermeture par T_1 de E et la fermeture T_2 de E , et si $E = E'$ alors E sera dit a appelée une partie propre.*

4.5.6b Système dynamique induit multidimensionnel : spécification 1

La première tentative pour extraire une dynamique symbolique est la plus directe :

^(a)les deux parties ne sont pas en fait à la même échelle et il faut renormaliser le système induit pour véritablement mettre en évidence la substitution



On part du système $(\mathbb{T}, x \rightarrow x + \mathbf{i}_\alpha, x \rightarrow x + \mathbf{j}_\alpha)$ et on essaie de regarder le système dynamique induit sur la réunion des cadres correspondant aux fragments 9,10,12, et 15. Appelons E l'ensemble qui correspond à la réunion de ces cadres.

Les ensembles E_1 et E_2 constituent deux bandes diagonales correspondant à la clôture par T_2 et par T_1 de E .

L'intersection des bandes diagonales E_1 et E_2 donne naissance à un plus grands carré X' tourné de 45 degrés et dont les parties supplémentaires sont en bijection avec les zones comprises dans les cadres des autres symboles comme le montre la Figure 4.20.

Système dynamique induit des fragments pour les motifs de taille 3

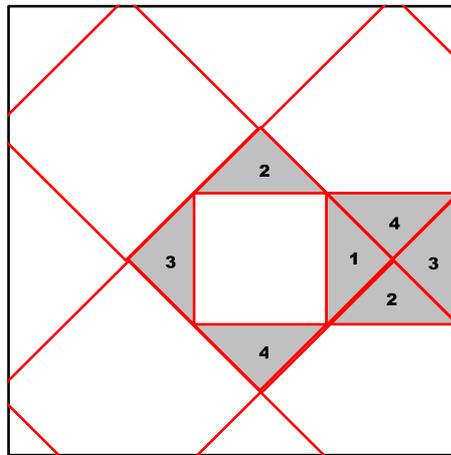


Fig. 4.20 – Dans le cas de $\pi/4$ si on essaie directement de construire à partir des cadres correspondant aux fragments – celui de leur motif d'appui. On se rend compte que l'ensemble ne forme pas une partie propre, par contre on se rend compte qu'en prenant l'intersection de la fermeture d'un seul des deux carrés on obtient un domaine qui est en bijection avec le domaine initial. Cela provient du fait que les domaines sont des représentants du tore : $(\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i})\mathbb{T}_{\pi/4}$

On s'intéresse d'abord au système dynamique (X, T_1) ; en fait ici tout est symétrique et (X, T_2) a exactement un système du même type, nous faisons ici l'étude pour les deux cas.

– $\lambda_{1,1} = |3 - 4\frac{\sqrt{2}}{2}| \approx 0.1715728753$

– $\lambda_{2,1} = |2 - 3\frac{\sqrt{2}}{2}| \approx 0.1213203436$

On vérifiera que $3\lambda_{1,1} + 4\lambda_{2,1} = 1$, et $\lambda_{1,1} + \lambda_{2,1} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

La longueur de ligne correspondant à la fermeture d'adhérence de l'orbite de T_1 sur \mathbb{T} vaut $\sqrt{2}$. Celle de la translation T_1 est unitaire. La largeur de la bande $\mathcal{B}_{1,1,k}$ vaut $\sqrt{2}(\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i})$.

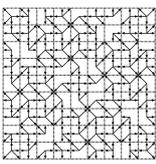
Or $(\lambda_{1,1} + \lambda_{2,1})$ ce n'est rien d'autre que : $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$.

On en est face à un système de rotation de la forme

$$S_{\pi/4,3} = (\sqrt{2}\mathbb{T}, x \mapsto x + 1, \sqrt{2}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}))$$

ce qui une fois renormalisé donne :

$$S_{\pi/4,3} = (\mathbb{T}, x \mapsto x + \frac{\sqrt{2}}{2}, (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}))$$



On étudie maintenant le système dynamique naturellement induit par cette dynamique. A un renversement près, on retombe sur un système dynamique identique totalement identique.

Pour mémoire, $cf(\sqrt{2} - 1) = [0; 2, \bar{2}]$ et $cf(\sqrt{2}/2) = [0; 1, \bar{2}]$. Dériver un système dynamique de translation, nous donne un système dynamique de translations dont la quantité de translation correspond à $T(\alpha)$, où T est l'opérateur de décalage pour les développements en fractions continues. De plus sur un tore, les unités ne comptent pas, on a $T(\sqrt{2}/2) \equiv_{\mathbb{T}} \sqrt{2} - 1$. Le système dynamique induit correspond ainsi à

$$S_{I,3} = (\mathbb{T}, x \mapsto x + \sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1)$$

Système dynamique induit pour les motifs de taille 20

On effectue maintenant les mêmes calculs pour :

$$- \lambda_{1,2} = |17 - 24\frac{\sqrt{2}}{2}| \approx 0.02943725152$$

$$- \lambda_{2,2} = |12 - 17\frac{\sqrt{2}}{2}| \approx 0.02081528017$$

On vérifiera que $17\lambda_{1,2} + 24\lambda_{2,2} = 1$, et $\lambda_{1,1} + \lambda_{2,1} = 5 - 7\frac{\sqrt{2}}{2}$

La largeur de la bande $\mathcal{B}_{1,2,1}$ vaut $\sqrt{2}(\lambda_{1,2} + \lambda_{2,2})$.

On obtient donc le système renormalisé suivant : $S_{20} = (\mathbb{T}, x \mapsto x + \frac{\sqrt{2}}{2}, [0, 5 - 7\frac{\sqrt{2}}{2}[)$

L'étude des premiers retours débouche sur une permutation de $\lambda_{1,2}$ et de $\lambda_{2,2}$. Il se trouve que $\lambda_{1,2}$ et de $\lambda_{2,2}$ sont homothétiques à $\lambda_{1,1}$ et $\lambda_{1,2}$

ce qui nous amène donc le système dynamique induit correspond à

$$S_{I,20} = (\mathbb{T}, x \mapsto x + \sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1)$$

Nous observons que les dynamiques induites obtenues pour des observations de taille 20 et des observations de taille 3 sont exactement similaires.

Liens entre le système dynamique induit pour les motifs de taille de 3 et celui obtenu pour les motifs de taille 20.

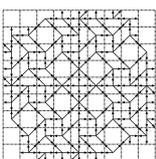
Les deux systèmes dynamiques induits observés sont exactement similaires.

Ainsi en intégrant et en dérivant le système, il est possible d'identifier les deux dynamiques. Ces éléments ne permettent pas de conclure que la configuration obtenue est substitutive. Pour parvenir à montrer cela, il faudrait qu'il y ait coïncidence entre l'apparition d'un motif et une trajectoire de retour.

Dans ce système dynamique induit, la partition induite est tournée de 45 degrés. Cela ne permet pas de prouver le caractère substitutif des configurations, car on est a priori incapable de lier l'apparition d'un symbole avec une des zones définies.

Conclusions

L'équivalence entre les deux systèmes dynamiques renormalisés permet de conclure à l'invariance de la dynamique par changement d'échelle, et à l'existence d'autosimilarité dans la constitution de la structure de l'orbite. Néanmoins, elle ne permet pas de conclure à l'existence de substitutions bidimensionnelles car la dynamique opère en diagonal vis-à-vis de la partition. Avec cette méthode, il est a priori impossible d'associer une dynamique symbolique déterministe sur les premiers retours, à partir de la dynamique sur le tore bien que celle-ci parfaitement déterministe et "autosimilaire".



4.5.6c Système dynamique induit multidimensionnel : spécification 2

Dans le cas où α est un angle quadratique, le retour dans un cadre tourné selon l'angle d'entrelacement dépend indépendamment des deux actions orthogonales T_X et T_Y . Ce retour dans le cadre tourné implique le retour simultané des deux actions orthogonales.

Afin d'éviter les problèmes liés au fait que les cadres ne sont pas des intersections d'ensembles clos par les actions T_1 et T_2 , on va effectuer un groupage dans le sens du vecteur d'entrelacement, et on obtient ainsi une configuration qui superpose toutes les informations rencontrées dans les configuration $D_{\pi/4, z_M}$, par suite, cela va nous permettre de constater que les systèmes dynamiques admettent effectivement une dynamique autosimilaire.

Dans le cas de $\pi/4$, on effectue donc le groupage qui consiste à inclure systématiquement le code de la cellule située en $\mathbf{p} + 1$ avec le code de la cellule située en \mathbf{p} .

En pratique, on sait d'avance que la construction va s'effectuer correctement. Dans chaque configuration entrelacée le domaine est défini de manière identique.

On utilise de nouveau les vecteurs d'entrelacement, donc, à partir de ce point, on reprend des notations en complexes.

On définit la configuration groupée $E_{\pi/4}(z) = C_{\pi/4}^S(z_I z)$, avec $S = \mathbb{Z}[i]/(z_I \mathbb{Z}[i])$.

Ce qui s'écrit encore, puisque $S = \{0, 1\}$:

$$E_{\pi/4}(z) = C_{\pi/4}^S(z_I z) = (C_{\pi/4}(z_I z), C_{\pi/4}(z_I z + 1))$$

Or, on rappelle que :

$$(C_{\pi/4}(z_I z), C_{\pi/4}(z_I z + 1)) = (I_{\pi/4}(z_I z e^{i\alpha}), I_{\pi/4}(z_I z e^{i\alpha} + e^{i\alpha}))$$

Ceci peut nous conduire à définir $I_{\mathbb{Z}[i]/(z_I \mathbb{Z}[i]), \pi/4}$ l'application de $\pi/4$ définie ainsi :

$$I_{\mathbb{Z}[i]/(z_I \mathbb{Z}[i]), \pi/4} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{Q}_{\pi/4}^{\#S} : z \mapsto I_{\pi/4}(z) + I_{\pi/4}(z + e^{i\pi/4})$$

On montre alors, en jouant avec les définitions, que $E_{\pi/4}(z_I z)$ est engendrée à partir du système dynamique symbolique multidimensionnel qui fonctionne sur $\mathbb{T}[i]$ qui a pour première action : $z \mapsto z + \{z_I e^{i\pi/4}\}$; et pour seconde action : $z \mapsto z + \{i z_I e^{i\pi/4}\}$, et pour partition symbolique la partition décrite par $I_{\mathbb{Z}[i]/(z_I \mathbb{Z}[i]), \pi/4}$.

Il est évident que les zones correspondant aux cadres associés aux fragments vont se retrouver translattées en deux emplacements, en fonction du z_M sur lequel le fragment débute.

Néanmoins les temps de retour dans chacune des zones vont être plus facile à déterminer.

On va essayer d'effectuer le système dynamique induit sur l'ensemble des cadres que nous avons associés aux fragments. Ces cadres sont représentés dans deux carrés qui sont peut-être à interpréter comme une représentation de \mathbb{T}_α .

Système dynamique induit par les retours de motifs de taille 3×3

Les actions horizontales et verticales sont interprétables directement en se concentrant sur le premier retour / horizontal vertical. Les éléments de A.1.2a sont directement réutilisables.

La hauteur est directement unitaire, la quantité de translation est $\sqrt{2} - 1$, la taille de l'intervalle est $1 - 2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$, encore une fois on voit qu'on tombe bien sur système lié à sturmien.

Si on voulait tenir compte de l'apparition de chaque fragment en gardant les points d'appuis canoniquement définis, il faudrait à la fois tenir compte des cadres $1a$, $1b$, $2a$ et $2b$ dans la Figure 4.21. Comme le domaine a une forme non rectangulaire, cela compliquerait la preuve, cela nous

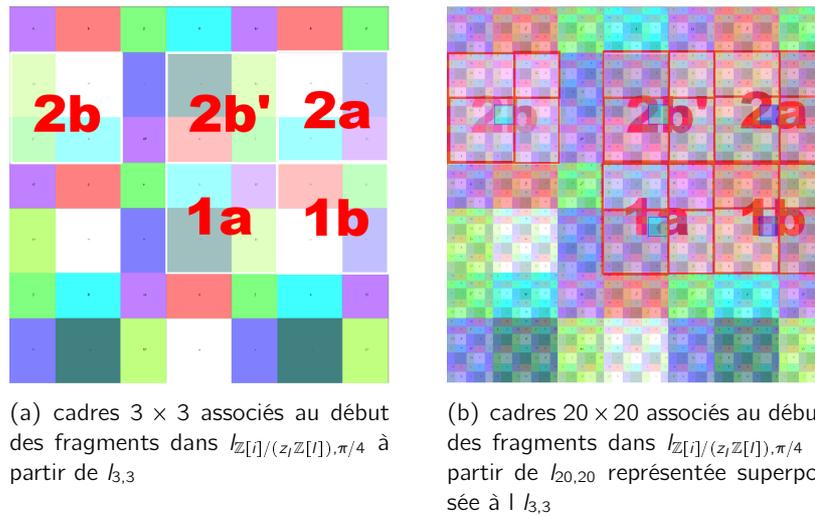
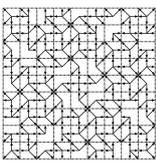


Fig. 4.21 – Zones sur lesquelles construire les systèmes dynamiques induits

obligerait à rentrer dans une analyse beaucoup plus en détaillée de la dynamique. Au lieu de cela, on peut décider de garder les cadres canoniques pour les fragments qui apparaissent en $z_M = 0$ et de considérer les points d'appui qui sont dans les zones $2a$ et $2b'$ dans les cadres dont les points d'appui seront situés en $z_M = 1$.

En procédant, ainsi la dynamique S_3 correspond exactement à celle de deux translations horizontales et verticales, d'angle $2 - \sqrt{2}$, qui auraient lieu sur le tore.

Par suite, en itérant les actions de cette dynamique on parvient à retrouver induite par la partition de premier retour des éléments de la partition $P_{20 \times 20}$. Ce qui est déjà confirmé que la dynamique induite se fera selon $P_{20 \times 20}$

Système dynamique induit par les retours de motifs de taille 20×20

La taille de l'intervalle vaut $\lambda_{1,2} + \lambda_{2,2}$. Le système dynamique est à l'échelle 1. Et la quantité de translation qui vaut $\sqrt{2} - 1$

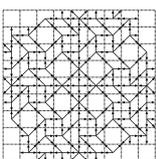
Chaîne de systèmes dynamiques induits et substitutions

Ainsi, en itérant le procédé, on trouve une chaîne de systèmes dynamiques induits :

$$\{(T[i], T_{1,E,k} : \mathbb{T}[i] \rightarrow \mathbb{T}[i] : z \mapsto z + \alpha_k, T_{2,E,k} : \mathbb{T}[i] \rightarrow \mathbb{T}[i] : z \mapsto z + i\alpha'_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ avec } \alpha_{k+1} = \frac{1}{\lceil \alpha_k \rceil} \text{ et } \alpha'_{k+1} = \frac{1}{\lceil \alpha'_k \rceil}$$

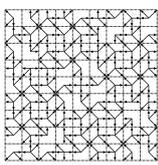
Grâce à cette chaîne de systèmes dynamiques induits, on constate que :

- Si on est dans le cas d'un angle quadratique, le cosinus et le sinus appartiennent à la même extension quadratique et on peut que la dynamique induite une fois renormalisée est la même à différentes échelles.
- Pour prouver que la dynamique est effectivement substitutive, il importe de montrer la partition induite par les premiers retours correspond effectivement à des symboles bien dissociés dans les systèmes qu'on étudie.



4.6 Conclusions du chapitre

De toutes ces expériences avec les substitutions, on retiendra leur accord pour proposer uniquement règles de substitutions planaires qui ont lieu de biais. Dans tous les cas, les substitutions nous ont guidés vers des pièces rectangulaires qui étaient tournées selon la direction z_l , le vecteur d'entrelacement. Il s'agit là d'une constatation – et pour l'instant – on conjecturera la proposition suivante : les substitutions planaires intervenant dans les rotations discrètes d'angles quadratiques se font nécessairement avec des motifs tournés dans le sens du vecteur d'entrelacement.



Chapitre 5

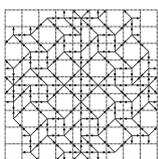
Étude et extension des propriétés de la rotation discrétisée

Plan détaillé du chapitre

5.1	Caractérisation des angles bijectifs de la rotation discrétisée	112
5.1.1	Multiplicité, points doubles et trous	113
5.1.2	Le cas non pythagoricien	115
5.1.3	Le cas pythagoricien	116
5.1.4	Réduction au problème de la surjectivité	116
5.1.5	Étude structurelle de G'_α	117
5.1.6	Preuve de la réciproque du Théorème d'Andrés-Jacob	118
5.1.7	Variante de preuve pour le Théorème d'Andrés-Jacob	120
5.1.8	Arbres des triples pythagoriciens	121
5.1.8a	L'arbre ternaire	121
5.1.8b	L'ombre de l'arbre de Farey	122
5.2	Algorithme incrémental pour la rotation discrétisée et transitivité	124
5.2.1	Caractéristiques des configurations rencontrées lors de rotations transitives	124
5.2.2	Les angles charnières	125
5.2.2a	Définitions	125
5.2.2b	Lemmes fondamentaux	125
5.2.2c	Propriétés des angles charnières	127
5.2.3	L'algorithme incrémental	127
5.2.3a	Enumérer et trier les angles spéciaux	128
5.2.3b	Passer de la configuration de $[r_{\alpha-}]$ à $[r_{\alpha+}]$	129
5.2.4	Schéma de l'algorithme	129
5.2.5	Application pour la rotation d'images	130
5.2.6	Analyse de la complexité	130
5.2.7	Implémentation	131
5.2.8	Spécifications supplémentaires	131
5.2.8a	Topologie des angles sur la grille entière	131
5.2.8b	Faire tourner l'intégralité de la grille \mathbb{Z}^2	132
5.2.8c	ϵ -Quasi-Transitivité	132
5.2.9	Résultats complémentaires concernant les angles charnières	132
5.2.9a	Question ouverte : Calcul efficace du successeur d'un angle charnière	134
5.2.10	Perspectives concernant cet algorithme	135
5.3	Conclusions du chapitre	135

Jean-Pierre CHANGEUX : *Si tu contournes le problème, comment la solution peut-elle apparaître si soudainement ?*

Alain CONNES : *C'est assez difficile à décrire. L'expérience montre que si l'on s'attaque à un problème directement, on épuise très vite toutes les ressources de la "pensée directe", rationnelle. On cerne la difficulté, mais si l'on ne parvient pas à se libérer, en général on ne résout pas le problème, contrairement à ce qui se produirait s'il s'agissait d'un problème d'examen, s'il n'y avait que des opérations automatiques à effectuer. Ce stade correspond à peu près à la connaissance que les mathématiciens ont d'un problème donné. Ils cernent facilement le problème, mais au-delà la pensée directe n'aide plus. On ne progresse que si l'on dispose d'une stratégie, même implicite,*



qui consiste à réfléchir à des questions annexes **a priori** sans relation avec le problème lui-même.

Jean-Pierre CHANGEUX : Sont-elles très différentes ou voisines ?

Alain CONNES : Elles peuvent être très différentes.

Matière à pensée – Jean-Pierre CHANGEUX, Alain CONNES

Dans le chapitre précédent, les résultats sur les propriétés dynamiques des rotations discrètes ont permis de se faire une idée bien plus précise des transformations qu'induisent les rotations discrètes. On en déduit maintenant des applications orientées pour la géométrie discrète. Les résultats présentés dans cette section ont aussi fait l'objet de publications : [P-AC14], [P-AC11].

Le premier de ces résultats concerne la caractérisation des angles bijectifs de la rotation discrétisée. C'est une occasion pour nous de détailler la structure de l'orbite du système dynamique associé aux rotations discrètes. Dans [JA95], Éric ANDRÈS et Marie-Andrée JACOB énoncent un théorème qui définit une classe d'angles pour lesquels la rotation discrète est bijective. L'article ne donne cependant pas la réciproque, que nous prouvons ici. Ce résultat a été employé entre autres par Victor OSTROMOUKHON pour mettre au point de nouveaux algorithmes de répartition des encres dans les impressions. La preuve proposée utilise les propriétés arithmétiques des triples pythagoriciens engagés. Nous allons utiliser le formalisme établi dans les précédents chapitres pour reprouver ce théorème, et aussi dans la démonstration de sa réciproque.

Le second résultat concerne une implémentation incrémentale de la rotation discrétisée. Si on décide d'embarquer les données internes de l'algorithme avec l'image, on obtient un formalisme permettant de faire des rotations transitives sur des images.

Le schéma de l'idée mise en avant ici c'est que dans le discret, si on souhaite obtenir certaines propriétés du continu, il faut en fait embarquer une topologie déformable avec les objets que nous considérons. En pratique, C'_α est un moyen d'embarquer la topologie. Cette idée d'embarquer une topologie, et de pouvoir ainsi agir sur celle de l'image.

5.1 Caractérisation des angles bijectifs de la rotation discrétisée

L'idée de la preuve consiste à utiliser le Théorème 2.2, et à caractériser un cadre de non-surjectivité, qui se trouve aussi être un cadre de non-bijectivité. Dans le cas pythagorien, du fait que $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont rationnels, l'orbite a une structure de groupe fini. On alors spécifie les caractéristiques des plus petits vecteurs sur \mathbb{T}^2 capables d'engendrer le groupe. En exploitant cette information, on décide clairement de la vacuité de l'intersection entre l'orbite et le cadre caractéristique de la non bijectivité.

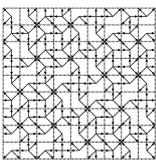
Pour mémoire, un angle α est *pythagorien* si et seulement si $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ sont tous deux rationnels. On remarque que α est un angle pythagorien, si et seulement si, $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ est pythagorien.

Proposition 5.1 *Un angle α est pythagorien si et seulement s'il existe un vecteur \mathbf{v} de $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $r_\alpha(\mathbf{v})$ appartient \mathbb{Z}^2 .*

Démonstration :

Soit α un angle pythagorien. Il existe un entier C tel que $C \cos \alpha$ et $C \sin \alpha$ sont tous deux entiers. On peut le réinterpréter en disant que $r_\alpha(C, 0)$ est un point de \mathbb{Z}^2 . Réciproquement, soit $\mathbf{v} = (x, y)$ un vecteur sur \mathbb{Z}^2 tel que $r_\alpha(\mathbf{v})$ appartient à \mathbb{Z}^2 . On pose $(x', y') = r_\alpha(\mathbf{v})$. Et on a $\cos \alpha = \frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2}$ et $\sin \alpha = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}$. Ce qui prouve que $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ sont tous deux rationnels.

c.q.f.d.



A tout couple (p, q) d'entiers positifs tels que $q < p$, on peut associer deux angles pythagoriciens α et α' , qui vérifient $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$: le premier angle transforme (p, q) en (q, p) , et le second transforme (q, p) en $(-q, p)$.

Tous les angles pythagoriciens peuvent être engendrés par un processus de la sorte en se basant uniquement sur des couples (p, q) tels que $\gcd(p, q) = 1$ (puisque pour tout entier positif h , les angles engendrés par le couple (hp, hq) sont les mêmes que les angles générés par le couple (p, q)) avec $p - q$ impair. (sinon les angles générés par la paire (p, q) sont identiques à ceux générés par le couple $(\frac{p+q}{2}, \frac{p-q}{2})$). La proposition suivante affirme que tous les angles sont bien générés pas ce procédé :

Proposition 5.2 *Un angle α de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ est pythagorien, si et seulement s'il existe un vecteur (p, q) de \mathbb{Z}^2 avec $p > q > 0$, $\gcd(p, q) = 1$, $p - q$ impair, et tel que soit $r_\alpha(p, q) = (q, p)$ soit $r_\alpha(q, p) = (-q, p)$.*

Démonstration :

Ceci est une conséquence de résultats usuels sur les triples pythagoriciens. (Voir par exemple [HW38] ou [VOS93]). A n'importe quel triplet d'entiers positifs (a, b, c) tel que $a^2 + b^2 = c^2$ et tel que $\gcd(a, b, c) = 1$, on peut associer un unique couple (p, q) d'entiers positifs tels que $c = p^2 + q^2$ et $\{a, b\} = \{p^2 - q^2, 2pq\}$. Clairement, nous devons alors avoir : $p > q$, $\gcd(p, q) = 1$, et $p - q$ impair. Cette proposition est en fait une application pour en prenant un triplet pythagorien (a, b, c) et en posant $\cos \alpha = a/c$ et $\sin \alpha = b/c$, avec c minimal.

c.q.f.d.

Définition 5.1 *Le sous-ensembles des angles pythagoriciens entiers^(a) est le sous-ensemble des angles pythagoriciens formé par les angles issues des couples d'entiers consécutifs de la forme $(k + 1, k)$.*

Le couple $(k + 1, k)$ conduit au triple pythagorien suivant : $(a = 2k(k + 1), b = 2k + 1, c = 2k(k + 1) + 1)$.

5.1.1 Multiplicité, points doubles et trous

On définit la configuration de *multiplicité* $M_\alpha(\mathbf{w})$ qui à chaque \mathbf{w} de \mathbb{Z}^2 renvoie son nombre d'antécédents par rotation discrétisée. On peut remarquer M_α est une configuration qui peut-être obtenue en appliquant un morphisme lettre-à-lettre à partir de la configuration C'_α .

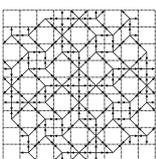
Plus formellement, l'application qui définit M_α s'écrit ainsi :

$$M_\alpha(\mathbf{w}) = \#(\{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2, [r_\alpha](\mathbf{v}) = \mathbf{w}\})$$

Commençons par la remarque suivante : Chaque ensemble de trois points sur la grille $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$, contient au moins deux points qui sont à distance d'au moins $\sqrt{2}$. Or les deux extrémités d'un segment de longueur $\sqrt{2}$ ne peuvent appartenir à la même cellule. Donc, on conclut que trois points ne peuvent appartenir à la même cellule. Ceci revient à dire que la multiplicité M_α ne peut jamais être supérieure à 2.

Un *trou* \mathbf{w} par définition vérifie $M_\alpha(\mathbf{w}) = 0$: Il y un trou dans M_α si et seulement si $[r_\alpha]$ n'est pas surjective. Un *point double* par définition vérifie $M_\alpha(\mathbf{w}) = 2$: Il y a un point double dans M_α

^(a)Cette appellation provient d'un isomorphisme entre l'arbre de FAREY, et un arbre des triples pythagoriciens que nous définirons par la suite.



si et seulement si $[r_\alpha]$ est non injective. La rotation discrétisée $[r_\alpha]$ est bijective si et seulement si pour tout vecteur \mathbf{w} de \mathbb{Z}^2 , $M_\alpha(\mathbf{w}) = 1$.

On définit P_k comme étant le sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 tel que $M(\mathbf{v}) = k$. P_0 est vide si et seulement si $[r_\alpha]$ est surjective. P_2 est vide si et seulement si $[r_\alpha]$ est injective.

Théorème 5.1 Soit $F_{0\downarrow}$ le cadre dont les coordonnées suivent :

$$F_{0\downarrow} = \left[\frac{1}{2} - \sin \alpha, -\frac{1}{2} + \cos \alpha \right] \times \left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} + \cos \alpha + \sin \alpha \right]$$

$F_{0\downarrow} \neq \emptyset$, si et seulement s'il existe un vecteur \mathbf{v} dans \mathbb{Z}^2 tel que $\{r_\alpha\}(\mathbf{v}) \in F_{0\downarrow}$. Plus précisément, en reprenant les notions introduites, on a $M_\alpha([r_\alpha](\mathbf{v}) - \mathbf{j}) = 0$.

Démonstration :

On remarque tout d'abord que nécessairement, pour tout vecteur \mathbf{w}' de \mathbb{Z}^2 , il existe un vecteur \mathbf{v} de \mathbb{Z}^2 tel que la distance entre $r_\alpha(\mathbf{v})$ et \mathbf{w}' est au plus $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Soit \mathbf{w} un trou, C_0 la cellule de discrétisation qui lui est associée et \mathcal{D}_w la boule fermée centrée \mathbf{w} et de rayon $\sqrt{2}/2$. Du fait de la remarque précédente, on sait que $\mathcal{D}_w \cap r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$ n'est pas vide.

En outre, puisque C_0 est un trou, $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$ a une intersection vide avec C_0 , et par conséquent $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$ rencontre $C_0 + \mathbf{t}$, pour tout vecteur \mathbf{t} de $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$ (puisque $r_\alpha(\mathbb{Z}^2) + \mathbf{t} = r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$). En particulier, on a : $r_\alpha(\mathbb{Z}^2) \cap (\cup_{\mathbf{t} \in \mathcal{T}} (C_0 + \mathbf{t})) = \emptyset$, où \mathcal{T} est l'ensemble défini par $\mathcal{T} = \{\mathbf{t} \in r_\alpha(\mathbb{Z}^2), \mathbf{t} = x\mathbf{i}_\alpha + y\mathbf{j}_\alpha, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

Ainsi, $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$ rencontre nécessairement $\mathcal{D}_w \setminus \cup_{\mathbf{t} \in \mathcal{T}} (C_0 + \mathbf{t})$. Cet ensemble appartient à la réunion de quatre carrés (voir Figure 5.1) : le carré $F_{0\downarrow} + \mathbf{w} + \mathbf{j}$ et ses copies translattées par les vecteurs $-\mathbf{i}_\alpha, -\mathbf{j}_\alpha$ et $-\mathbf{i}_\alpha - \mathbf{j}_\alpha$.

Clairement, le fait que l'un de ces carrés ait une intersection non vide avec $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$ implique que les autres rencontrent aussi $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$. Ceci est vrai en particulier pour $F_{0\downarrow} + \mathbf{w} + \mathbf{j}$ donc il existe \mathbf{v} dans \mathbb{Z}^2 tel que $\{r_\alpha\}(\mathbf{v}) \in F_{0\downarrow}$.

Réciproquement, il existe un vecteur \mathbf{v} de \mathbb{Z}^2 tel que $\{r_\alpha\}(\mathbf{v}) \in F_{0\downarrow}$, donc il existe un vecteur \mathbf{w} dans \mathbb{Z}^2 tel que $F_{0\downarrow} + \mathbf{w} + \mathbf{j}$ contient $r_\alpha(\mathbf{v})$. Donc, $F_{0\downarrow} + \mathbf{w} + \mathbf{j}$ et ses copies translattées par les vecteurs $-\mathbf{i}_\alpha, -\mathbf{j}_\alpha$ et $-\mathbf{i}_\alpha - \mathbf{j}_\alpha$ rencontrent $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$. Ce qui nous amène au fait que \mathbf{w} est un trou, puisque sa cellule de discrétisation est à une distance inférieure à 1 de tout élément de $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$.

c.q.f.d.

Théorème 5.2 Soit F_2 , le cadre défini comme suit :

$$F_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \cos \alpha \right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \sin \alpha \right]$$

On a : $P_2 \neq \emptyset$ si et seulement si il existe un vecteur \mathbf{v} dans \mathbb{Z}^2 tel que $\{r_\alpha\}(\mathbf{v}) \in F_2$. Plus précisément, en respectant ces notations, on a $M_\alpha([r_\alpha](\mathbf{v})) = 2$.

Démonstration :

Puisque $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$ est invariant par rotation d'angle $\pi/2$, $P_2 \neq \emptyset$ si et seulement s'il existe \mathbf{v} tel que $[r_\alpha](\mathbf{v}) = [r_\alpha](\mathbf{v} + \mathbf{i})$. Cette condition nous donne clairement le résultat annoncé.

c.q.f.d.

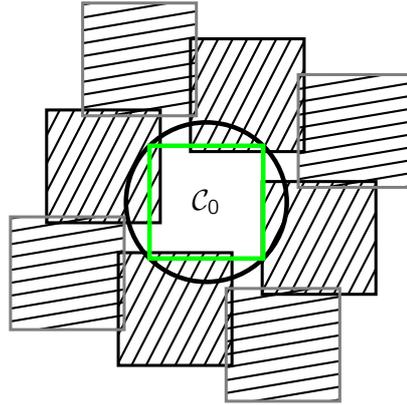
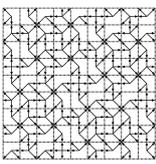


Fig. 5.1 – L’argument principal du Théorème 5.1 : L’ensemble $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$ ne rencontre ni les (grands) carrés hachurés ni \mathcal{C}_0 , mais rencontre la boule centrée autour de la cellule. Par suite, $r_\alpha(\mathbb{Z}^2)$ rencontre les quatre petits carrés restants.

5.1.2 Le cas non pythagoricien

Nous rappelons la définition de deux groupes qui ont une importance clef dans notre étude des rotations discrétisées :

- Soit le groupe \mathcal{G}'_α de \mathbb{T}^2 défini par : $\mathcal{G}'_\alpha = \{r_\alpha\}(\mathbb{Z}^2)$ peut aussi être vu comme : $\mathbb{Z}\{\mathbf{i}_\alpha\} + \mathbb{Z}\{\mathbf{j}_\alpha\}$
- Le sous-groupe \mathcal{G}_α de \mathbb{R}^2 défini par : $\mathcal{G}_\alpha = \mathbb{Z}\mathbf{i} + \mathbb{Z}\mathbf{j} + \mathbb{Z}\mathbf{i}_\alpha + \mathbb{Z}\mathbf{j}_\alpha$.

De prime abord, on remarque qu’un point \mathbf{v} de \mathbb{R}^2 appartient à \mathcal{G}_α si et seulement si $\{\mathbf{v}\}$ appartient à \mathcal{G}'_α et, de plus $[-1/2, 1/2]^2 \cap \mathcal{G}_\alpha = \mathcal{G}'_\alpha$. On remarque encore que \mathcal{G}_α et \mathcal{G}'_α sont invariants par rotation d’angle $\pi/2$.

On étudie d’abord sur le cas non pythagoricien afin de montrer que dans ce cas la rotation discrétisée n’est ni bijective, ni surjective.

Proposition 5.3 *Soit α un angle non pythagoricien ; Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément \mathbf{e}_ϵ dans \mathcal{G}_α tel que $0 < \|\mathbf{e}_\epsilon\| \leq \epsilon$. De plus, \mathcal{G}_α contient le groupe $\mathbb{Z}\mathbf{e}_\epsilon + \mathbb{Z}\mathbf{e}'_\epsilon$, avec $\mathbf{e}'_\epsilon = r_{\pi/2}(\mathbf{e}_\epsilon)$.*

Démonstration :

Soit α un angle non pythagoricien, les éléments de la suite $(\{n\mathbf{i}_\alpha\})_{n \in \mathbb{N}}$ sont disjoints deux à deux. Puisqu’ils appartiennent tous au compact $[-1/2, 1/2]^2$, il existe une sous-suite de $(\{n_k\mathbf{i}_\alpha\})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge. Ainsi, la suite $(\{n_{k+1}\mathbf{i}_\alpha\} - \{n_k\mathbf{i}_\alpha\})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite non ultimement constante qui converge vers $(0, 0)$. Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier k tel que $0 < \|\{n_{k+1}\mathbf{i}_\alpha\} - \{n_k\mathbf{i}_\alpha\}\| \leq \epsilon$. Cet élément appartient à \mathcal{G}_α , ce qui donne le résultat. La seconde partie de l’énoncé est une trivialité.

c.q.f.d.

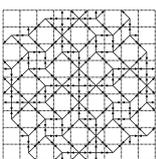
Corollaire 5.1 *Soit α un angle non pythagoricien. La rotation discrétisée $[r_\alpha]$ est ni injective, ni surjective.*

Démonstration :

Pour tout cadre F donné, on applique la Proposition précédente avec ϵ suffisamment petit, pour en déduire que \mathcal{G}'_α a une intersection non vide avec F .

En particulier, cela est vrai pour le cadre de surjectivité $F_{0\downarrow}$ et pour le cadre d’injectivité F_2 . Ce qui nous conduit tout naturellement au résultat annoncé, en vertu des Théorèmes 2.1 et 5.2.

c.q.f.d.



5.1.3 Le cas pythagoricien

On se donne un couple d'entiers positifs (p, q) qui vérifie $p > q$, $\gcd(p, q) = 1$ et pour lequel on a $p - q$ impair. Soit α l'angle vérifiant $\cos \alpha = a/c$ et $\sin \alpha = b/c$, avec $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$ et $c = p^2 + q^2$. On pose encore : $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$, l'angle défini par l'autre triple : $(a' = 2pq, b' = p^2 - q^2, c = p^2 + q^2)$.

Pour chaque couple (x, y) d'éléments de \mathbb{Z}^2 , on a $[r_\alpha](x, y) = (x', y')$, si et seulement si, $[r_{\alpha'}](y, x) = (y', x')$. Donc $[r_\alpha]$ est bijective (resp. injective, surjective) si et seulement si $[r_{\alpha'}]$ est aussi une application bijective (resp. injective, surjective).

Pour simplifier, nous supposons que a est impair (a est le premier élément du triple pythagoricien associé à l'angle). Ceci ne nuit pas à la généralité du propos qui va suivre

5.1.4 Réduction au problème de la surjectivité

On prouve maintenant que pour tout angle pythagoricien, la question de la bijectivité de la rotation discrétisée est équivalente à la question de sa surjectivité.

Lemme 5.1 (Lemme du carré) *Soit S un carré semi-ouvert du plan tel que les sommets qu'il induisent sont des coordonnées entières. Le nombre de points à coordonnées entières contenu dans S est égal à l'aire de S .*

Démonstration :

(schéma) L'idée de la preuve est de se baser sur les différentes représentations de \mathbb{T}^α , comme le montre la Figure 5.2. On peut diviser le carré en plusieurs morceaux, et après avoir effectué une translation de plusieurs morceaux on obtient un polygone composé de deux carrés dont les côtés sont entiers : de côté a^2 et b^2 .

- Le lemme ci dessus est clairement vrai pour tout carré semi-ouvert dont les côtés (entiers) sont soit verticaux soit horizontaux.
- Deux domaines du plan mutuellement exclusifs qui peuvent être obtenus mutuellement en ne procédant qu'à des translations par des vecteurs de coordonnées entières, contiennent le même nombre de points entiers.

Un choix précis peut-être fait sur les bords dans le but d'obtenir un domaine semi-ouvert à la fin.

c.q.f.d.

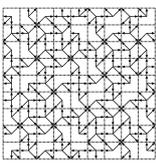
Remarque : Plutôt que d'utiliser le lemme du carré, il est possible de voir ce résultat comme un corollaire du fameux théorème de PICK, qui définit l'aire d'un triangle discret^(a). (Même si la preuve du lemme précédent peut être vu comme un peu plus large puisqu'elle requiert moins de contraintes).

Théorème 5.3 *Soit α un angle pythagoricien. La fonction $[r_\alpha]$ est bijective, si et seulement si, elle est surjective.*

Démonstration :

On pose $r_\alpha((a, -b)) = (c, 0)$ et $r_\alpha((b, a)) = (0, c)$. Donc, à tout vecteur \mathbf{v} de \mathbb{Z}^2 , on associe $[r_\alpha](\mathbf{v} + (a, -b)) = [r_\alpha](\mathbf{v}) + (c, 0)$ et $[r_\alpha](\mathbf{v} + (b, a)) = [r_\alpha](\mathbf{v}) + (0, c)$. Ceci nous conduit au fait que pour tout vecteur \mathbf{w} de \mathbb{Z}^2 , on a $M(\mathbf{w} + (c, 0)) = M(\mathbf{w} + (0, c)) = M(\mathbf{w})$. Ce qui littéralement signifie que la configuration $M(\mathbf{w})$ est périodique.

^(a)On trouvera plus d'informations concernant celui-ci dans des ouvrages comme [VOS93] ou [CM91].



Considérons maintenant la fenêtre $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + c]^2$. Du résultat de périodicité énoncé juste avant, on conclut que $[r_\alpha]$ est injective, si et seulement s'il n'existe pas de vecteur $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^2$ de $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + c]^2$ tel que $M(\mathbf{w}) \geq 2$. De même, $[r_\alpha]$ est surjective, si et seulement s'il n'existe pas de vecteur $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^2$ de $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + c]^2$, tel que $M(\mathbf{w}) = 0$.

Par ailleurs, chaque vecteur \mathbf{v} de \mathbb{Z}^2 , $[r_\alpha](\mathbf{v})$ est un élément de $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + c]^2$ si et seulement si \mathbf{v} est un élément de $r_{-\alpha}([-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + c]^2)$. On applique le lemme du carré, le carré $r_{-\alpha}([-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + c]^2)$ contient c^2 vecteurs à coordonnées entières, de même que le carré $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + c]^2$. Ainsi, on sait qu'il existe un vecteur $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^2$ dans $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + c]^2$ tel que $M(\mathbf{w}) = 0$ si et seulement s'il existe un vecteur $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^2$ à l'intérieur de $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + c]^2$ tel que $M(\mathbf{w}) \geq 2$. Ceci est suffisant pour conclure la preuve.

c.q.f.d.

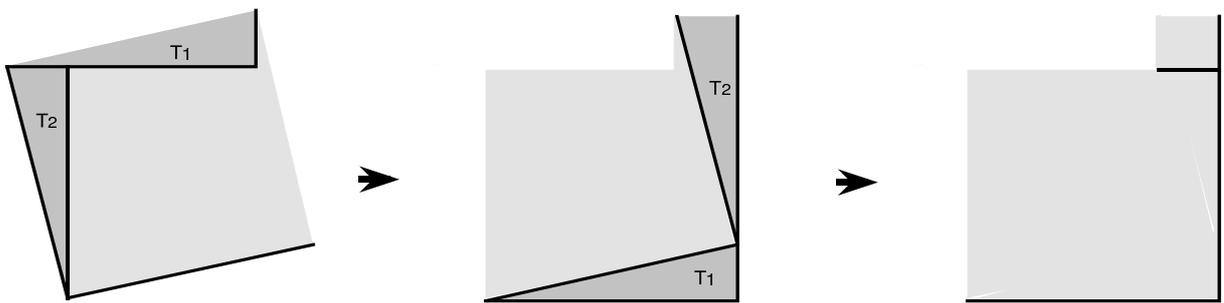


Fig. 5.2 – Schéma de la preuve du lemme du carré. Les triangles T_1 et T_2 sont translattés, ce qui permet de créer deux formes de carrés. Les lignes foncées délimitent l'intérieur des domaines définis.

5.1.5 Étude structurelle de \mathcal{G}'_α

Le Théorème 2.1 va être par la suite utilisé pour caractériser les rotations surjectives (c'est-à-dire bijectives, du fait de l'équivalence entre les deux notions). Cela nécessite néanmoins de connaître précisément la structure de \mathcal{G}'_α (qui n'est autre $\{r_\alpha\}(\mathbb{Z}^2)$).

Lemme 5.2 (Critère d'appartenance à \mathcal{G}'_α) Soit $\mathbf{v} = (\frac{x}{c}, \frac{y}{c})$, et $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Il existe un entier n tel que $\{n\mathbf{i}_\alpha\} = \{\mathbf{v}\}$, si et seulement si, $xb - ya = \det \begin{pmatrix} x & a \\ y & b \end{pmatrix} \equiv 0 [c]$.

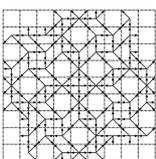
Démonstration :

Il existe un entier n tel que $\{n\mathbf{i}_\alpha\} = \{\mathbf{v}\}$, si et seulement s'il existe un triplet d'entiers (n, n', n'') qui vérifie : $(\frac{x}{c} + n', \frac{y}{c} + n'') = n(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ (On remarque $\mathbf{i}_\alpha = (\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$).

Ceci revient à prouver l'existence d'un entier n tel $x \equiv na [c]$ qu $y \equiv nb [c]$. Ce qui n'est possible que si et seulement si, $xa^{-1} \equiv yb^{-1} [c]$ (les inverses sont considérés dans $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, les nombres a et b sont inversibles, puisque $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ sont deux fractions irréductibles). Cette dernière égalité peut alors se ré-écrire en : $xb - ya \equiv 0 [c]$.

c.q.f.d.

Proposition 5.4 Soit \mathbf{v}_M et \mathbf{v}'_M les vecteurs définis par $\mathbf{m} = (\frac{p}{c}, \frac{q}{c})$ et $\mathbf{v}'_M = (\frac{-q}{c}, \frac{p}{c})$. Le groupe \mathcal{G}'_α est cyclique, d'ordre c , il est généré par $\{\mathbf{v}_M\}$. Le groupe \mathcal{G}_α est le sous groupe de \mathbb{R}^2 généré par $\mathbb{Z}\mathbf{v}_M + \mathbb{Z}\mathbf{v}'_M$.



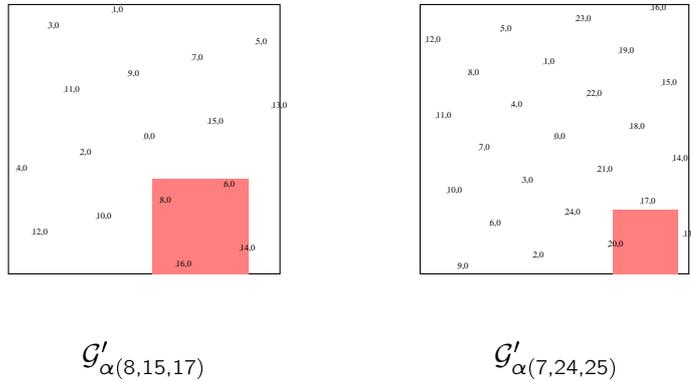


Fig. 5.3 – Sur la gauche, \mathcal{G}'_{α} et $F_{0\downarrow}$ pour un angle pythagoricien qui est non-entier. Sur la droite \mathcal{G}'_{α} et $F_{0\downarrow}$ pour un angle pythagoricien entier.

Démonstration :

On commence par remarquer que les vecteurs $\{\mathbf{i}_{\alpha}, \mathbf{j}_{\alpha}\}$ sont générateurs du groupe \mathcal{G}'_{α} et que $\mathbf{j}_{\alpha} = (-\frac{b}{c}, \frac{a}{c})$. On écrira aussi $-b^2 - a^2 = -c^2$, ainsi, en appliquant le critère d'appartenance, on sait qu'il existe un entier positif n tel que $\{n\mathbf{i}_{\alpha}\} = \{\mathbf{j}_{\alpha}\}$. On a donc que $\{\mathbf{i}_{\alpha}\}$ engendre \mathcal{G}'_{α} , par conséquent, cyclique. De plus, puisque $\gcd(a, c) = \gcd(b, c) = 1$, on a : $\{n\mathbf{i}_{\alpha}\} = (0, 0)$ si et seulement si $n \equiv 0[c]$. Ce qui prouve que \mathcal{G}'_{α} est d'ordre c .

On a encore : $pb - qa = p(2pq) - q(p^2 - q^2) = p^2q + q^3 = q(p^2 + q^2) = qc$. Donc, en appliquant le critère d'appartenance on vérifie que $\{\mathbf{v}_M\}$ est bien un élément de \mathcal{G}'_{α} . De plus, puisque $\gcd(p, c) = \gcd(q, c) = 1$, $\{\mathbf{v}_M\}$ est d'ordre c et est donc bien un générateur de \mathcal{G}'_{α} .

Pour la troisième partie de cette proposition, on fera la remarque que \mathcal{G}_{α} et $\mathbb{Z}\mathbf{v}_M + \mathbb{Z}\mathbf{v}'_M$ sont tous deux invariants par une translation de vecteur à coordonnées entières, ainsi ces deux groupes sont en fait complètement définis par leur comportement sur la cellule $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$.

De plus, \mathcal{G}_{α} contient $\mathbb{Z}\mathbf{v}_M + \mathbb{Z}\mathbf{v}'_M$ et $\mathcal{G}_{\alpha} \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ (ce qui revient à \mathcal{G}'_{α} , ce dernier contient exactement c éléments).

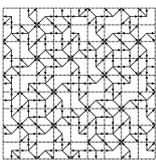
Il reste à prouver que $(\mathbb{Z}\mathbf{v}_M + \mathbb{Z}\mathbf{v}'_M) \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ contient encore c éléments. Dans cet objectif, on considère le plan réel équipé de la base $(\mathbf{v}_M, \mathbf{m}')$: les vecteurs de $\mathbb{Z}\mathbf{v}_M + \mathbb{Z}\mathbf{v}'_M$ sont alors des vecteurs à coordonnées entières. De plus on a $\mathbf{i} = p\mathbf{v}_M - q\mathbf{v}'_M$, ainsi la cellule de discrétisation centrée à l'origine peut être identifiée à la cellule sur laquelle on applique le lemme des carrés. Donc, la cellule de discrétisation contient c éléments de $\mathbb{Z}\mathbf{v}_M + \mathbb{Z}\mathbf{v}'_M$. Cela conclut la preuve.

c.q.f.d.

5.1.6 Preuve de la réciproque du Théorème d'Andrès-Jacob

On se propose maintenant de fournir une preuve alternative au théorème d'ANDRÈS-JACOB dans le sens direct. On structure la preuve ainsi : on montre que quand on est dans le cas pythagoricien, il y a nécessairement des trous, c'est-à-dire que la rotation est non surjective. On observe que l'apparition nécessaire d'un trou est liée à la densité de points \mathcal{G}'_{α} dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$, c'est-à-dire la densité relative des éléments de ce groupe (ou encore à une densité relative de \mathcal{G}_{α} dans \mathbb{Z}^2).

Lemme 5.3 (Lemme de la la taille) Soit $[x, x + d] \times [y, y + d]$ une zone carrée du plan réel, si $d \geq \frac{p+q}{c}$. Alors cette partie à une intersection non nulle avec \mathcal{G}_{α} .



Démonstration :

Posons : $(x, y) = z\mathbf{v}_M + t\mathbf{v}'_M$. A une translation près, cela nous donne : $\lfloor z \rfloor \mathbf{v}_M + \lfloor t \rfloor \mathbf{v}'_M$, je suppose sans perte de généralité que $0 \leq z < 1$ and $0 \leq t < 1$, ce qui donne $-q/c \leq x < p/c$ et $0 \leq y < (p+q)/c$.

Suite à cette hypothèse, on conduit une analyse cas par cas (obtenue en découpant le carré $\{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2, \mathbf{v} = z\mathbf{v}_M + t\mathbf{v}'_M, 0 \leq z < 1, 0 \leq t < 1\}$ par des lignes horizontales et verticales) :

- si $(x, y) = (0, 0)$, le vecteur $(0, 0)$ appartient à $[x, x+d[\times [y, y+d[$,
- si $-q/c \leq x < (p-q)/c$ et $0 < y < (p+q)/c$, le vecteur $\mathbf{v}_M + \mathbf{v}'_M$ appartient à $[x, x+d[\times [y, y+d[$,
- si $(p-q)/c \leq x < (p+q)/c$ et $0 \leq y \leq q/c$, le vecteur \mathbf{v}_M appartient à $[x, x+d[\times [y, y+d[$,
- si $(p-q)/c \leq x < (p+q)/c$ et $q/c < y < (p+q)/c$, le vecteur $2\mathbf{v}_M + \mathbf{v}'_M$ appartient à $[x, x+d[\times [y, y+d[$.

c.q.f.d.

Théorème 5.4 (Réciproque du Théorème d'Andrès-Jacob) *Pour tout angle α qui n'est pas un angle pythagorien entier, la rotation discrétisée $\lfloor r_\alpha \rfloor$ est non bijective.*

Démonstration :

Si l'angle α n'appartient pas à l'ensemble des angles pythagoriens, alors d'après le Corollaire 5.1 de la Proposition 5.3, la rotation discrétisée $\lfloor r_\alpha \rfloor$ est non bijective.

Nous supposons donc que l'angle α est bien un angle pythagorien. En respectant, les conventions et notations que nous avons établies jusqu'ici la longueur $sidef_0$ du côté du côté du carré $F_{0\downarrow}$ est $\cos(\alpha) + \sin(\alpha) - 1 = \frac{a+b-c}{c} = \frac{2q(p-q)}{c}$.

Pour que la partie P_0 soit vide, il est nécessaire que $sidef_0 < (p+q)/c$ ce qui donne $2q(p-q) < (p+q)$.

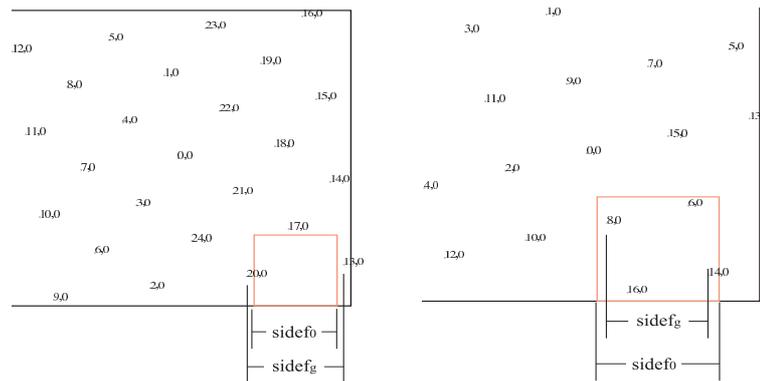
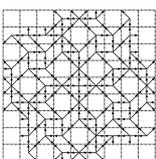


Fig. 5.4 – $sidef_0$ et $\frac{p+q}{c} = sidef_g$ pour deux exemples d'angles pythagoriens.

On pose alors $p = q + e$, et ainsi on obtient $2qe < 2q + e$, ce qui peut encore se réécrire en : $(2q - 1)e < 2q$, or $(2q - 1)(e - 1) < 1$. Cette dernière équation n'est possible que pour $e = 1$; ce qui revient à dire que (p, q) est un couple conduit à un triple pythagorien entier. Ainsi, la rotation discrétisée ne peut être bijective pour un angle autre qu'un pythagorien entier.

c.q.f.d.



5.1.7 Variante de preuve pour le Théorème d'Andrès-Jacob

Théorème 5.5 (Andrès-Jacob) *Pour tout angle α qui est pythagoricien entier, la rotation discrétisée est bijective.*

La preuve originale est fondée sur des arguments arithmétiques. Nous en proposons une preuve alternative dans le cadre de vision que nous venons définir.

Démonstration :

La preuve est fondée sur l'idée de montrer qu'aucun point du groupe \mathcal{G}'_α n'appartient au cadre associé à l'apparition d'un trou $F_{0\downarrow}$. Afin, de s'assurer qu'aucun point du groupe n'intersecte le cadre, la position des points encadrant le cadre $F_{0\downarrow}$ est étudiée explicitement.

Le cadre $F_{0\downarrow}$ est précisément situé en :

$$\begin{aligned}
 F_{0\downarrow} &= [(F_{0\downarrow})_L, (F_{0\downarrow})_R] \times [(F_{0\downarrow})_D, (F_{0\downarrow})_U] \\
 &= \left[\frac{1}{2} - \sin(\alpha), -\frac{1}{2} + \cos(\alpha) \right] \times \left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} + \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \right] \\
 &= \left[\frac{c - 2b}{2c}, \frac{2a - c}{2c} \right] \times \left[\frac{-c}{2c}, \frac{2a + 2b - 3c}{2c} \right] \\
 &= \left[\frac{p^2 - 3q^2}{2c}, \frac{p^2 - 3q^2}{2c} \right] \times \left[\frac{-c}{2c}, \frac{2a + 2b - 3c}{2c} \right] \\
 &= \left[\frac{-2k^2 - 2k + 1}{2c}, \frac{-2k^2 + 2k + 1}{2c} \right] \times \left[\frac{-2k^2 - 2k - 1}{2c}, \frac{-2k^2 + 2k - 1}{2c} \right]
 \end{aligned}$$

On suppose que α est le k -ème angle pythagoricien entier (i. e. $p = k + 1$ et $q = k$) ; ce qui donne $a = p^2 - q^2 = 2k + 1$, $b = 2pq = 2k(k + 1)$ et $c = p^2 + q^2 = 2k^2 + 2k + 1$.

Par cette hypothèse, nous avons aussi : $\mathbf{v}_M = (\frac{k+1}{c}, \frac{k}{c})$ et $\mathbf{v}'_M = (\frac{-k}{c}, \frac{k+1}{c})$. On considère les quatre vecteurs suivants :

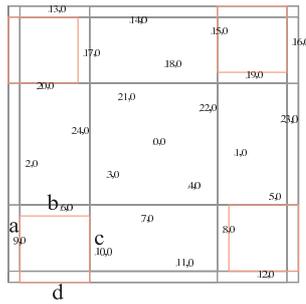
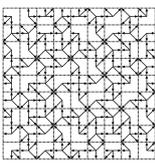


Fig. 5.5 – Position des points **a**, **b**, **c** et **d** relativement au cadre rectangulaire associé à l'apparition d'un trou.

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{a} &= \left(\frac{-2k^2 - 2k}{2c}, \frac{-2k^2}{2c} \right) = \left(\frac{-k^2 - k}{c}, \frac{-k^2}{c} \right), \\
 -\mathbf{b} &= \mathbf{a} + \mathbf{v}_M = \left(\frac{-2k^2 + 2}{2c}, \frac{-2k^2 + 2k}{2c} \right) = \left(\frac{-k^2 + 1}{c}, \frac{-k^2 + k}{c} \right), \\
 -\mathbf{c} &= \mathbf{a} + \mathbf{v}_M - \mathbf{v}'_M = \left(\frac{-2k^2 + 2k + 2}{2c}, \frac{-2k^2 - 2}{2c} \right) = \left(\frac{-k^2 + k + 1}{c}, \frac{-k^2 - 1}{c} \right), \\
 -\mathbf{d} &= \mathbf{a} - \mathbf{v}'_M = \left(\frac{-2k^2}{2c}, \frac{-2k^2 - 2k - 2}{2c} \right) = \left(\frac{-k^2}{c}, \frac{-k^2 - k - 1}{c} \right)
 \end{aligned}$$

D'après ces définitions, on peut s'apercevoir que les points a, b, c, d encadrent le cadre considéré : $F_{0\downarrow} : \mathbf{a}_x < (F'_{0\downarrow})_L, \mathbf{b}_y > (F'_{0\downarrow})_U, \mathbf{c}_x > (F'_{0\downarrow})_R$ et $\mathbf{d}_y < (F'_{0\downarrow})_D$.



De cela nous concluons que $F_{0\downarrow}$ est contenu dans le cadre rectangulaire $]\mathbf{a}_x, \mathbf{c}_x[\times]\mathbf{d}_y, \mathbf{b}_y[$. Aussi, \mathbf{a} appartient à \mathcal{G}_α , puisqu'il vérifie le critère d'appartenance :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -k^2 - k & a \\ -k^2 & b \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} -k^2 - k & 2k + 1 \\ -k^2 & 2k(k + 1) \end{pmatrix} \\ &= -2k^4 - 2k^3 - k^2 \\ &= -k^2(2k^2 + 2k + 1) \\ &= -k^2c \\ &\equiv 0[c] \end{aligned}$$

Et puisque \mathbf{a} appartient à \mathcal{G}_α , cela implique par suite que \mathbf{b} , \mathbf{c} et \mathbf{d} sont aussi des éléments de \mathcal{G}_α . Ainsi, $]\mathbf{a}_x, \mathbf{c}_x[\times]\mathbf{d}_y, \mathbf{b}_y[$ ne rencontre pas \mathcal{G}_α , puisque les éléments de ce carré sont à une distance inférieure à $\|\mathbf{v}_M\| = \frac{\sqrt{c}}{c}$ de l'un des points \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , or \mathbf{d} .

De cela, on en déduit que l'intersection $F_{0\downarrow} \cap \mathcal{G}_\alpha$ est vide, et donc que $F_{0\downarrow} \cap \mathcal{G}'_\alpha$ est vide, ce qui nous donne le résultat du Théorème 2.1. ^(a)

c.q.f.d.

5.1.8 Arbres des triples pythagoriciens

Nous venons de détailler la structure de \mathcal{G}_α dans les cas périodiques. Nous avons aussi mis en évidence le fait que certains triples pythagoriciens avaient des propriétés importantes pour les rotations discrètes. Il me paraît important de rappeler certains résultats qui structurent l'ensemble des triples pythagoriciens, et qui permettront peut-être à moyen terme de trouver des résultats du type [BS94] pour les configurations planaires étudiées.

5.1.8a L'arbre ternaire

Théorème 5.6 (Dan ROMIK, [ROM05]) *Soit*

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

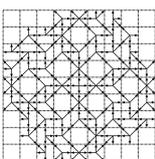
Tout triplet pythagorien premier (a, b, c) avec a impair et b pair possède une unique représentation de la forme :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M_{d_1} M_{d_2} \dots M_{d_n} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Avec $d_1 \dots d_n \in \{1, 2, 3\}$. Tout triplet pythagorien premier (a, b, c) avec a pair et b impair possède une unique représentation de la forme :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M_{d_1} M_{d_2} \dots M_{d_n} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

^(a)On trouvera sur le DVD accompagnant la thèse à l'url. qui contient une session MuPAD qui reprend les principaux éléments de la preuve. Le fichier est donné de manière relativement brute.



Avec $d_1 \dots d_n \in \{1, 2, 3\}$.

Plus précisément à tout triple pythagoricien premier, on peut associer une unique suite $(d_1, d_2 \dots d_n, d_{n+1}) \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \{1, 2, 3\}^n \times \{ip, pi\}$.

Soit $Q = \{(x, y) | x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = 1\}$

On définit $T : Q \mapsto \bar{Q}$ par $T(x, y) = (\frac{|2-x-2y|}{3-2x-2y}, \frac{|2-2x-y|}{3-2x-2y})$

puis on définit d comme l'application de Q vers $\{1, 2, 3, ip, pi\}$:

$$d(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 4/3 < x/y, \\ 2 & \text{si } 3/4 < x/y < 4/3, \\ 3 & \text{si } x/y < 3/4, \\ ip & \text{si } x/y = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), \\ pi & \text{si } x/y = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}). \end{cases}$$

Alors,

Si $(x/y) \in Q \cap \mathbb{Q}^2$, il existe un n tel que $T^n(x, y) = (0, 1)$ ou $T^n(x, y) = (1, 0)$, et on a $d_k = d(T^{k-1}(x, y))$, pour $k \in \{1, \dots, n+1\}$

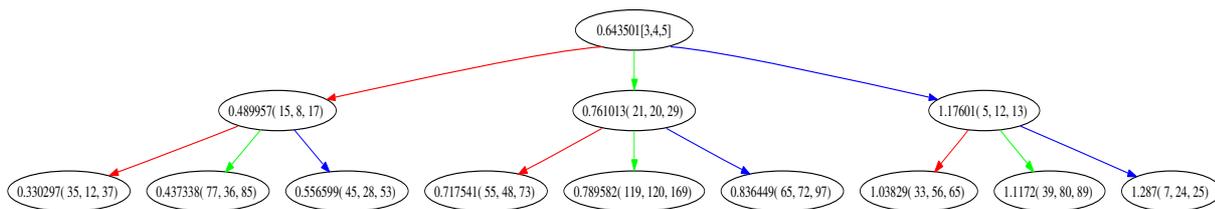
Si $(x/y) \in Q \setminus \mathbb{Q}^2$, on peut définir un développement $d_k = d(T^{k-1}(x, y))$, pour $k \in \{1, \dots, n+1\}$, qui a la propriété de ne pas se terminer par une séquence infinie de "1" ou de "3".

Le théorème de Dan ROMIK associe un développement à chaque triple pythagoricien.

M_2 a une action "inversante"^(a). Ainsi l'application qui à un développement du théorème précédent associe un angle n'est pas monotone !

Pour obtenir un développement d' de X vers une fraction continue généralisée qui soit monotone, c'est-à-dire pour lequel $d'(x, y) <_{lex} d'(x', y')$, si et seulement si, $y/x < y'/x'$, il faut en fonction du nombre de 2 déjà rencontré dans le développement intervertir les 1 et les 3.

Si on décide de tenir compte de cette modification sur les actions, on obtient l'arbre représenté en figure :



5.1.8b L'ombre de l'arbre de Farey

Il existe un ordre moyen de structurer les angles pythagoriciens selon une structure arborescente. En appliquant la transformation $\frac{p}{q} \mapsto (p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$ à l'arbre de FAREY, on obtient un arbre dans lequel chaque triple pythagoricien apparaît deux fois. Ceci est le principal inconvénient de cette construction.

^(a)Cela est une conséquence du fait que l'application \hat{T} est décroissante sur son morceau médian (entre $1/3$ et $1/2$), et par suite elle est décroissante sur cet intervalle.

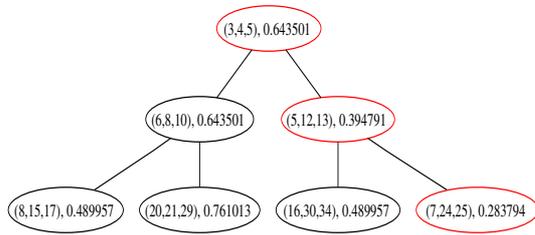
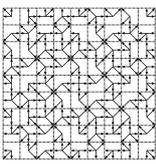


Fig. 5.6 – Arbre binaire des triplets pythagoriciens. Dans cet arbre, chaque triple est représenté deux fois. Une fois dans sa forme première, et une fois dans sa forme première multipliée par 2.

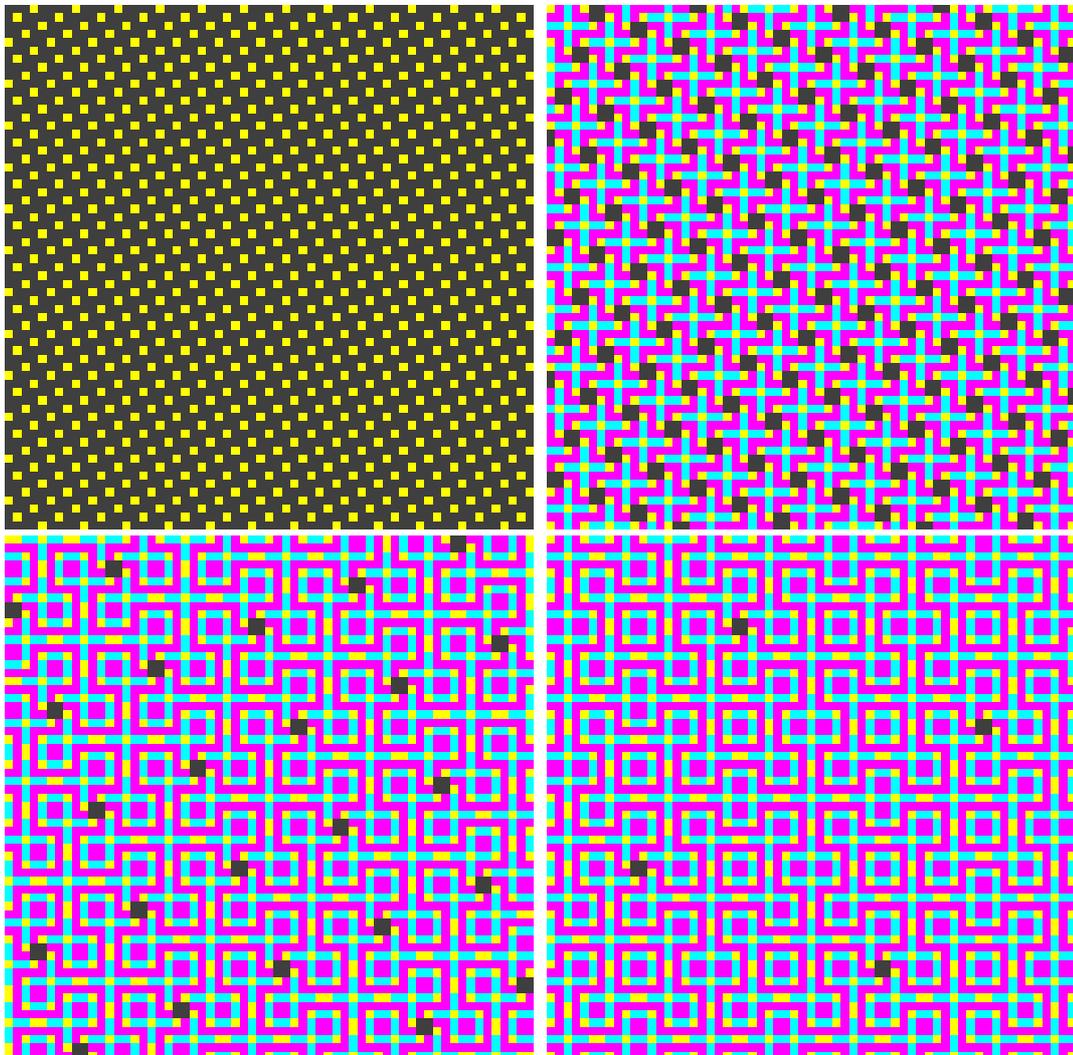
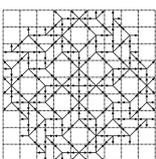


Fig. 5.7 – Les configurations périodiques convergeant vers la configuration de $\pi/4$ en descendant le long d'une branche de l'arbre des triples pythagoriciens issus de l'arbre de Farey.



5.2 Algorithme incrémental pour la rotation discrétisée et transitivité

5.2.1 Caractéristiques des configurations rencontrées lors de rotations transitives

Voici maintenant un algorithme *incrémental* pour la rotation discrétisée.

L'algorithme calcule successivement toutes les images tournées correspondant à la séquence des angles possibles (en commençant à 0 et en finissant 2π). Pour une image dont la taille est finie, il y a un nombre fini d'images tournées pas des angles réels, Ceci autorise a priori dans la pratique à calculer toutes les images tournées intermédiaires.

La procédure suggérée est *valide* et *précise* : elle retourne exactement le même résultat que la rotation discrétisée du même angle. Elle ne réalise aucun calcul de sinus ni aucun calcul de cosinus, et par conséquent, il n'y a aucun problème relatif à l'emploi d'arithmétique à virgule flottante et de mantisse de taille bornée.

L'algorithme est rapide : pour effectuer une rotation incrémentale, l'algorithme n'a besoin que de $\mathcal{O}(m^3 \log(m))$ opérations, là où il en faut $\mathcal{O}(m^5)$ pour l'algorithme naïf. Pour les rotations incrémentales, la complexité de l'algorithme s'il emploie des tables d'angles précalculées est de $\mathcal{O}(m^3)$, ce qui en fait un algorithme optimal ; En fait l'algorithme passe par tous les angles intermédiaires (et seulement par eux) et ne modifie à chaque étape que les pixels qui doivent effectivement être modifiés.

Nous nous intéressons maintenant aux discontinuités du processus de rotation. Nous allons expliquer comment coder à partir d'entiers les emplacements où les discontinuités se produisent. Par le biais d'arithmétique entière uniquement, on spécifie comment réaliser les opérations essentielles sur les angles.

Par la suite, on précise les caractéristiques des transformations qui affectent les configurations au passage d'un angle charnière.

Renforcés par les précédentes remarques, nous serons alors en mesure d'explicitier le processus même de l'algorithme incrémental pour la rotation discrétisée.

L'algorithme présenté fonctionne selon un schéma similaire à celui décrit dans [ABC⁺04] ; l'idée de base est de voir la rotation discrétisée restreinte à un morceau fini de plan, comme une application constante par morceaux, puis de calculer une table de toutes les discontinuités afin de ne pouvoir mettre à jour que les pixels nécessaires. Par rapport à [ABC⁺04], on propose une description très précise de la nature des discontinuités, ainsi qu'un moyen de réaliser l'ensemble des calculs en se fondant sur de l'arithmétique entière uniquement.

On pose ρ_m l'application qui, à un angle, associe la configuration C_α dans sa version tronquée à une boule de rayon m . Formellement, $\rho_m : \mathcal{A} \rightarrow (\mathbb{A}^4)^{\mathbb{Z}^2} : \alpha \mapsto C_\alpha$.

Dans le cadre de cette section, pour des questions de lisibilité, nous faisons le choix de travailler en complexes.

Notre objectif est de produire *une version incrémentale exacte de l'algorithme de rotation discrétisée*. Étant donné un entier m , nous souhaitons produire toutes les applications $\rho_m(\alpha)$ pour $\alpha \in [0, 2\pi]$, en respectant l'ordre naturel dans lequel celles-ci apparaissent (en se déplaçant de 0 à 2π). Informellement, il s'agit d'un algorithme "video" qui montre toutes les configurations successives obtenues au cours de la rotation.

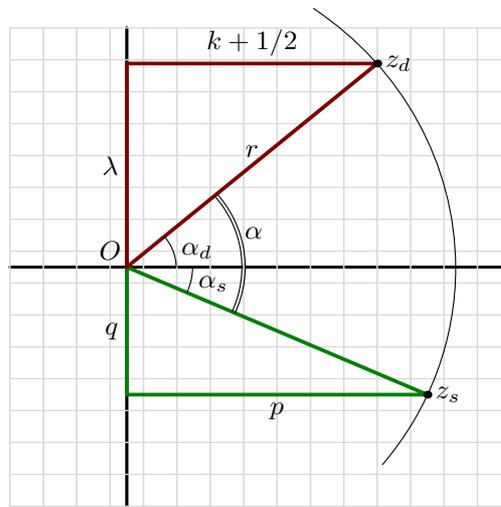
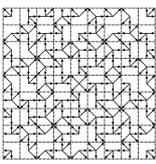


Fig. 5.8 – Un angle charnière et son couple générateur pour $\alpha = \alpha(9, -4, 7)$.

5.2.2 Les angles charnières

5.2.2a Définitions

L'algorithme repose avant tout sur une étude précise de la fonction $\rho_m : \alpha \mapsto C_\alpha|_m$. ρ_m est une fonction en escalier (constante par morceaux). Ainsi, une étude précise du comportement de la fonction autour de ses discontinuités permet de reconstruire la fonction. Ces discontinuités correspondent aux seules mises à jour de la configuration manipulée par l'algorithme.

Définition 5.2 *Un angle α est un angle charnière s'il existe un point source $z_S \in \mathbb{Z}[i]$ et un point destination $z_D = z_S e^{i\alpha}$ qui possède une coordonnée demi-entière propre (propre) (c.a.d. $z_D \in \mathcal{H}$) . Pour tout angle charnière, le point source et le point destination forment un couple générateur.*

Note 5.2.2.1 *D'un point de vue topologique, les angles charnières peuvent être considérés comme les points de discontinuités de l'application $\alpha \mapsto [r_\alpha]$.*

Conséquence immédiate de la définition : un angle est charnière, si et seulement s'il existe trois entiers p, q, k tels que $2q \cos(\alpha) + 2p \sin(\alpha) = 2k + 1$.

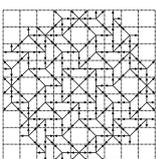
La valeur $|z_S(\alpha)|^2$ sera dénommée l'ordre de l'angle charnière α . Si (z_S, z_D) génèrent α alors (\bar{z}_S, \bar{z}_D) génèrent $-\alpha$. Si (z_S, z_D) génèrent α alors $(i^Q z_S, i^Q z_D)$ génèrent les mêmes angles, pour tout $Q \in \{0, 1, 2, 3\}$. On définit encore S_α l'ensemble des points sources de α : $S_\alpha = \{z \in \mathbb{Z}[i] | e^{i\alpha} z \in \mathcal{H}\}$.

5.2.2b Lemmes fondamentaux

Lemme 5.4 *Les angles pythagoriciens et les angles charnières forment deux ensembles disjoints.*

Démonstration :

Supposons qu'il existe un angle qui soit à la fois pythagorien et charnière en même temps. Par définition, puisque cet angle est charnière, il existe un entier gaussien $z_S \in \mathbb{Z}[i]$ qui est transformé par rotation en un point de la grille \mathcal{H} .



On vérifie alors que : $\{\Re(e^{i\alpha} z_S)\} = \{\Re(z_D)\} = \frac{1}{2}$. Plus précisément, $\Re(z_D) = \Re(z_S) \cos(\alpha) - \Im(z_S) \sin(\alpha)$. Or, si α est pythagoricien, $\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$ et $\sin(\alpha) = \frac{b}{c}$, où (a, b, c) est triple pythagoricien premier (c.a.d que ses éléments appartiennent à \mathbb{Z} et que $a^2 + b^2 = c^2$, $\gcd(a, b, c) = 1$). $\{\Re(z_D)\}$ peut se réécrire comme $\frac{n}{c}$ où n est un entier, puisque c est impair. Ce qui nous amène à une contradiction puisque : $\{\Re(z_D)\} = \frac{1}{2}$.

c.q.f.d.

Un corollaire de ce lemme est : pour tout angle charnière, $\cos(\alpha)$ ou $\sin(\alpha)$ est un nombre quadratique irrationnel (Les deux peuvent l'être simultanément).

Soit p, q, k un triplet d'entiers, tel que $p^2 + q^2 > |k + \frac{1}{2}|$, on pose $r^2 = p^2 + q^2$, et $\lambda = \sqrt{r^2 - (k + \frac{1}{2})^2}$. On définit l'angle $\alpha(p, q, k)$ par l'égalité $e^{i\alpha(p, q, k)}(p + qi) = k + \frac{1}{2} + \lambda i$; ainsi pour cet angle, $((p + qi), (k + \frac{1}{2} + \lambda i))$ forment un couple générateur.

Lemme 5.5 (Codage des angle charnières) Soit (p, q, k) et (p', q', k') deux triplets générateurs tels que $\alpha(p, q, k) = \alpha(p', q', k')$. Alors $\det \begin{bmatrix} p & q \\ p' & q' \end{bmatrix} = 0$.

Démonstration :

La preuve est immédiate : Soit $\alpha = \alpha(p, q, k)$, ce qui nous donne $2p \sin(\alpha) + 2q \cos(\alpha) = 2k + 1$, et pareillement pour $\alpha = \alpha(p', q', k')$: $2p' \sin(\alpha) + 2q' \cos(\alpha) = 2k' + 1$. On considère alors ces deux équations comme un système à deux inconnues $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$. Si $\det \begin{bmatrix} p & q \\ p' & q' \end{bmatrix} \neq 0$ alors $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ devra être rationnel, l'angle devrait être pythagoricien. Ce qui rentrerait en contradiction avec 5.4. Donc (p, q) et (p', q') sont co-linéaires.

c.q.f.d.

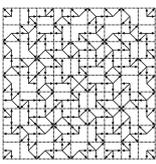
Ce lemme implique que $\arg(z_S(\alpha)) \bmod (\pi/4)$ et $\arg(z_D(\alpha)) \bmod (\pi/4)$ sont uniquement définis pour un angle α . Ces valeurs forment donc des caractéristiques importantes associées aux angles charnières. Corollaire immédiat du Théorème 5.5, tous les couples générateurs d'un angle $\alpha(z_S, z_D)$ sont nécessairement de la forme $(\eta z_S, \eta z_D)$ ou de la forme $(i \eta z_S, i \eta z_D)$ avec $\eta \in \mathbb{Q}$.

Tout triple (p, q, k) qui génère un angle $\alpha(p, q, k)$ sera dit *premier* s'il est tel que $p^2 + q^2$ est minimal parmi les autres triples générateurs de α . Pour chaque angle charnière, il existe un unique triple générateur premier.

Lemme 5.6 (Triple générateur premier) Soit (p, q, k) le triple générateur premier de l'angle α ; alors l'ensemble des triples générateurs de l'angle α est de la forme $\{(2n + 1)p, (2n + 1)q, (2n + 1)k + n\}$, for $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration :

Si $z_S = (p + qi) \in \mathcal{S}_\alpha$ est le point source issu du triple générateur (p, q, k) alors $(2n + 1)z_S \in \mathcal{S}_\alpha$, puisque $\{\Re(2n + 1)e^{i\alpha} z_S)\} = \frac{1}{2}$ pour tout n dans \mathbb{Z} . Aussi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le triple générateur $((2n + 1)p, (2n + 1)q, (2n + 1)k + n)$ produit le même angle. Il est aussi évident que pour tout $n', n'' \in \mathbb{Z}$, $(2pn', 2qn', n'')$ ne peut être un triple générateur α puisque $e^{i\alpha}(p + qi) \in \mathcal{H}$ implique que $e^{i\alpha}(2pn' + 2qn'i) \notin \mathcal{H}$. On remarque que $\beta p + \beta qi$ avec $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ne peut être une source puisque : $\beta(p + qi) \notin \mathbb{Z}[i]$. Supposons que $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $(\frac{r}{s}p, \frac{r}{s}qi, k')$ est un couple générateur de l'angle α , cela implique que $\frac{r}{s}(p + qi)$ est un entier gaussien et donc $\gcd(p, q)$ devrait divisible par s (puisque r ne l'est pas). De plus, $\Re(e^{i\alpha}(\frac{r}{s}p + \frac{r}{s}qi)) = \frac{2k' + 1}{2}$. Cela ne peut se produire que si $2k' + 1$ est encore divisible par s . Maintenant $p, q, 2k + 1$ sont aussi divisibles par n , et donc le triplet générateur n'est pas premier. Cela contredit notre hypothèse.



Ainsi, $\beta(p + qi) \notin S_\alpha$ pour $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Ainsi, par suite des précédents lemmes et du précédent raisonnement, il n'y pas d'autres triples générateurs pour l'angle α que ceux énumérés.

c.q.f.d.

5.2.2c Propriétés des angles charnières

A partir des lemmes précédents, on peut prouver les propositions qui suivent et qui nous seront utiles par la suite.

Proposition 5.5 *Tout angle charnière peut être décrit de manière univoque par son triple générateur premier.*

La proposition est actuellement un corollaire du Lemme 5.5 et 5.6.

Proposition 5.6 *Le nombre d'angles charnière de rayon au plus m est inférieur à $8m^3$.*

Cela se prouve facilement en observant que $|p| < m, |q| < m, |k + \frac{1}{2}| < m$

Une borne supérieure sur le nombre d'angles charnières possibles peut être trouvée dans [ABC⁺04]. Cette formule peut être légèrement raffinée en faisant appel à $r_2(k)$ la fonction qui donne le nombre de décomposition d'un nombre entier sous forme d'une somme de deux carrés d'entiers. La borne supérieure sur le nombre d'angles charnières définissable dans une boule de rayon m devient alors : $\#(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m) \leq \sum_{i=1}^m r_2(i) \lfloor \sqrt{i} - \frac{1}{2} \rfloor \leq (\sum_{i=1}^m r_2(i)) \lfloor \sqrt{m} - \frac{1}{2} \rfloor \leq (2m)^3$. On notera encore qu'il y a exactement deux fois plus de configurations de rotations dans $\rho_m(\alpha)$ que d'angles spéciaux dans $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m$ (les paliers étant associés pour des raisons de simplicité aux configurations périodiques associées à un des triples pythagoriciens du palier, tandis que ce sont des configurations autosimilaires associées aux angles charnières, c'est-à-dire aux discontinuités entre les paliers.)

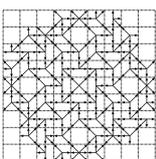
Proposition 5.7 *Les éléments de S_α régulièrement disposés le long de quatre demi-droites : $S_\alpha = \cup_{Q \in \{0,1,2,3\}} \{(2l + 1)i^Q(p + qi), l \in \mathbb{N}\}$*

Cette proposition est une autre conséquence du Lemme 5.6.

5.2.3 L'algorithme incrémental

L'algorithme est structuré en deux parties très différentes. La première partie de l'algorithme est vouée à l'énumération de tous les angles spéciaux dont l'ordre est plus petit que le rayon du point le plus éloigné dans l'image à faire tourner. Ces angles ne seront pas stockés comme des valeurs à virgule flottante mais directement par le biais du triplet qui leur est associé (trois nombres entiers de tailles acceptables). Grâce à l'encodage des angles, on retrouve toutes les informations nécessaires pour transformer une image tournée d'un angle α en une image tournée d'un angle légèrement plus grand durant le processus de rotation. La première partie de l'algorithme forme un processus similaire à la création d'une table des sinus, et idéalement, on réalisera une telle table une fois pour toutes.

La seconde partie de l'algorithme consiste en une boucle à travers tous les angles spéciaux énumérés. À chaque pas de la boucle, sont effectuées les transformations nécessaires pour passer de $\rho_m(\alpha)$ à $\rho_m(\alpha')$ (où α' est l'angle suivant α). Dans certaines implémentations actuelles, l'algorithme mémorise $\rho_m(\alpha)$, ce qui permet de connaître directement l'image d'un point par $[r_\alpha]_m$. Cependant, ce choix dépend de l'usage et de la machine, sur des automates cellulaires par exemple, un expérimentateur préférera travailler avec des configurations comme C_α , ou C'_α . Les grands principes de l'algorithme se transposent sans difficulté majeure sur ces configurations.



5.2.3a Enumérer et trier les angles spéciaux

Pour mémoire, m désigne le rayon de l'image considérée. Pour énumérer tous les angles charnières de $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m$, il suffit d'énumérer tous les entiers gaussiens dont le module est plus petit que m (qui formeront le point source de l'application), et de considérer tous les demi-entiers dont la valeur absolue est plus petite que m . L'énumération nécessite donc un temps en $\mathcal{O}(m^3)$. Certains angles sont énumérés deux fois. Les angles dupliqués seront éliminés lors du processus de tri.

Pour trier n éléments, les algorithmes de tris demandent $\mathcal{O}(n \log(n))$ opérations, pourvu qu'on leur propose un opérateur de comparaison en temps constant. Un des buts de cette section est d'expliquer comment comparer deux angles charnières à partir de leur codage (sous forme de triplet générateur). Cette comparaison s'effectue en temps constant. En utilisant un tri par tas, l'énumération et le tri des angles peuvent donc être calculés en $\mathcal{O}(m^3 \log(m))$.

Lemme 5.7 (Comparaison en arithmétique entière de deux triples) *Soit $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ un angle associé au triplet (p, q, k) et $\alpha' \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ un angle est associé à (p', q', k') , il est possible de décider, en temps constant, si $\alpha < \alpha'$ en se basant uniquement sur les entiers p, q, k, p', q', k' .*

Démonstration :

On utilise les notations en cours pour écrire : $\cos(\alpha) = (p(k + \frac{1}{2}) + q\lambda)/(p^2 + q^2)$ et $\sin(\alpha) = (p\lambda - q(k + \frac{1}{2}))/ (p^2 + q^2)$.

L'argument fondamental pour vérifier ce lemme est que toutes les quantités intervenant dans les formules de $\cos(\alpha)$ et de $\sin(\alpha)$ sont des entiers sauf λ . Cependant, 4λ est la racine carré d'un entier. Quelques manipulations algébriques permettent de simplifier l'expression..

En pratique, les signes $\cos(\alpha)$ et de $\sin(\alpha)$ se calculent facilement. Le problème peut se ramener uniquement à de l'arithmétique entière. Il est donc facile de savoir de déterminer le quadrant de l'angle α , et celui de l'angle α' .

Si α et α' appartiennent au même quadrant ,alors on compare $\cos(\alpha)$ et $\cos(\alpha')$. Ce qui encore une fois revient au fait de calculer le signe d'une expression basée uniquement sur du calcul à base d'entiers.

Pour être plus précis :

Le quadrant de l'angle α peut être déterminé par le signe de $\Re(z_D(\alpha)z_S^{-1}(\alpha))$ et par le signe $\Im(z_D(\alpha)z_S^{-1}(\alpha))$.

Si α et α' appartiennent à un même quadrant Q , on définit $\beta = (i^Q z_S(\alpha), z_D(\alpha))$ et $\beta' = (i^Q z_S(\alpha'), z_D(\alpha'))$, leurs projections sur le premier quadrant, naturellement $\beta < \beta'$ si et seulement si $\alpha < \alpha'$. Il est possible de comparer la pente associée à chaque angle (qui croit avec l'angle, pour les angles du premier quadrant). Pour définir cette pente, on exprime $z_D(\beta)$ dans la base définie par les vecteurs $z_S(\beta)/|z_S(\beta)|$ et $iz_S(\beta)/|z_S(\beta)|$. Ce qui, une fois renormalisé, donne simplement $z_D(\beta)z_S(\beta)^{-1}$. La partie réelle de ce vecteur n'est autre que $\cos(\beta)$, et sa partie imaginaire n'est autre que $\sin(\beta)$. Donc, en développant, on obtient : $\cos(\beta) = \frac{\Re(i^Q((p+qi)(k+\frac{1}{2}+\lambda i))}{p^2+q^2}$ et $\sin(\beta) = \frac{\Im(i^Q((p+qi)(k+\frac{1}{2}+\lambda i))}{p^2+q^2}$.

Ainsi, comparer les pentes revient à décider de la vérité de cette inégalité : $\sin(\beta)/\cos(\beta) > \sin(\beta')/\cos(\beta')$

En fait une fois développées, ces expressions donnent des résultats différents en fonction du signe de leur partie imaginaire. En effet, si $(\text{sgn}(\cos(\beta)\cos(\beta'))) = 1)$ alors on obtient $\cos(\beta)\sin(\beta') - \cos(\beta')\sin(\beta) > 0$, sinon $\cos(\beta)\sin(\beta') - \cos(\beta')\sin(\beta) < 0$. Si on tient compte des considérations précédentes, l'inégalité $(\alpha > \beta)$ se réécrit en $\text{sgn}(\det(M)) = \text{sgn}(\cos(\alpha')\cos(\beta'))$, où $M = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \cos(\beta') \\ \sin(\beta) & \sin(\beta') \end{bmatrix}$.

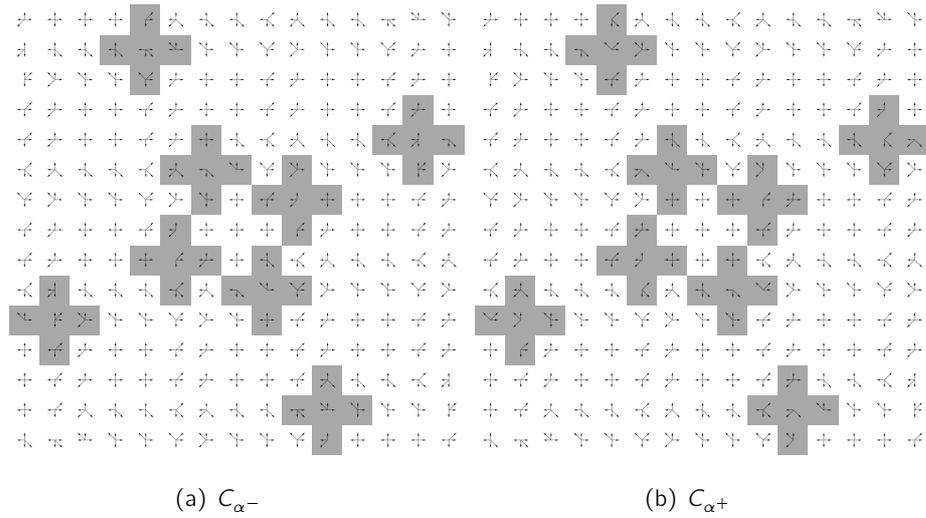
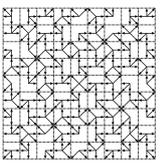


Fig. 5.9 – Altération de C_α , lors du passage de α^- à α^+ . Seuls les points en gris ont changé, plus précisément, un seul point par croix a vu sa position altérée. On constate que les points sont disposés le long de quatre demi droites.

D'autres simplifications peuvent encore être effectuées en réalisant des passages au carré.
c.q.f.d.

5.2.3b Passer de la configuration de $[r_{\alpha^-}]$ à $[r_{\alpha^+}]$

Soit $\alpha \in \mathcal{A}_H$, on sait qu'il existe $z_S(\alpha) \in \mathbb{Z}[i]$ et $\Re(z_D(\alpha)) + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ et aussi $\Im(z_D(\alpha)) > 0$. Du fait de l'orientation trigonométrique, et de l'opérateur de discrétisation choisi on a, $\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha, \alpha' < \alpha} [r_{\alpha'}](z_S) = [r_\alpha](z_S)$, avec $\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha, \alpha' > \alpha} [r_\alpha](z_S) = ([r_\alpha](z_S) - 1)$. Cependant, on remarque que $\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha, \alpha' < \alpha} [r_{\alpha'}](-z_S) = ([r_\alpha](-z_S) + 1)$, avec $\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha, \alpha' > \alpha} [r_{\alpha'}](-z_S) = [r_\alpha](-z_S)$. Ces résultats peuvent être condensés dans la proposition suivante :

Proposition 5.8 (Position des points de discontinuités) *L'ensemble des points de discontinuités de $[r_\alpha]$ en $arg(z_S z_D)$ est inclus dans l'ensemble $z_S \mathbb{Z}[i]$. Il coïncide avec l'ensemble $(2\mathbb{Z} + 1)z_S \cup (2\mathbb{Z} + 1)iz_S$. On note encore que :*

$$\forall Q \in \{0, 1, 2, 3\}, \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} [r_{\alpha+\epsilon}]((z_S i^Q) - [r_{\alpha-\epsilon}](z_S i^Q)) = i^{Q+2}$$

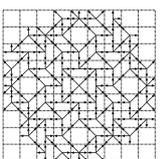
Soit ψ_{z_0} , l'application qui pour z dans $(z_0 i^Q (2n+1))$, avec $n, Q \in \mathbb{N}$, vaut $\psi_{z_0}(z, p) = p + i^{Q+1}$ et qui vaut $\psi_{z_0}(z, p) = p$, sinon.

$$\psi_{z_0} : z \mapsto \begin{cases} \text{si } (z, p) \in (z_0 i^Q (2k+1)) & \text{alors } p + i^{Q+1} \\ \text{si } (z, p) \notin (z_0 i^Q (2k+1)) & p \end{cases}$$

On peut démontrer que pour tout z dans $\mathbb{Z}[i]$, $[r_{\alpha^+}](z) = \psi_{z_S}(z, [r_{\alpha^-}](z))$.

5.2.4 Schéma de l'algorithme

Tous les éléments sont maintenant réunis pour une bonne compréhension de l'algorithme. La première version de l'algorithme que nous allons introduire se contente de mettre à jour la configu-



rotation associée à la rotation, (on a par principe fait un appel à une fonction externe pour prévenir des mises à jour de pixel) . Nous allons par la suite voir une version plus complexe de l'algorithme qui permet de faire des rotations incrémentales d'une image (et qui bien sûr ne garde pas pour autant l'intégralité de l'image). Voir Algorithme 5.1.

Pour le moment, les plus grandes subtilités de l'algorithme proviennent des mystères de la suite des angles charnières (Voir Section 5.2.9a). Le pseudo-code présenté ne précise pas de nombreux détails importants pour les implémentations réelles : par exemple, dans la majorité des langages de programmation, il faudra faire attention à ne pas sortir du buffer de l'image qui est rectangulaire. La version présentée ici ne montre pas exactement toutes les configurations de rotations, elle ignore toutes les configurations associées aux angles charnières. Pour calculer $\rho_m(\alpha)$ dans ce cas, il suffirait de procéder en deux étapes et d'appliquer ψ d'abord dans les deux premiers quadrants, puis d'appeler une première fois la procédure de notification, puis de clore l'application de ψ en l'appliquant aux deux derniers quadrants, avant de renotifier le programme principal.

5.2.5 Application pour la rotation d'images

La version précédente calcule une image de l'application de rotation, la rotation discrétisée n'est pas bijective sur \mathbb{Z}^2 . Cette précédente version serait a priori inadaptée au calcul incrémental des rotations d'une image sans conservation de l'original.

Nous avons déjà prouvé qu'un point pouvait avoir plus deux antécédents.

Pour créer des rotations discrètes sans perte, une idée simple consiste à mémoriser les deux antécédents dans chaque cellule.. Ce qui requiert une couche de données en plus. L'image manipulée par l'algorithme est un élément de $Q(\mathbb{Z}[j] \times \{0,1\})$.

En pratique, le code est ainsi modifié : l'espace de données sur laquelle on calcule la rotation, supporte deux couleurs ou deux positions dans $\mathbb{Z}[j]$. On utilise un ordre arbitraire (l'ordre lexicographique, par exemple) pour décider du pixel autorisé à demeurer à la couche 1.

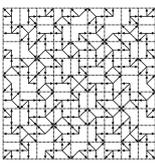
L'algorithme 2 ajoute des précisions au code afin de réaliser la rotation incrémentale d'une image "double couche".

5.2.6 Analyse de la complexité

Ce dernier algorithme a une complexité algorithmique très différente de celles des algorithmes usuels. Dans le cadre général, pour faire juste une rotation, cet algorithme s'avérera plus lent que l'algorithme classique. Par contre, il est plus rapide quand il s'agit de faire une rotation de manière progressive. Nous ne connaissons encore que très peu la structure des angles charnières. Une meilleure compréhension de leur disposition pourrait conduire à un algorithme plus performants. . Il faut bien comprendre qu'aujourd'hui le calcul des cosinus et des sinus n'est efficace en pratique que parce que des tables ont été précalculées.

Complexité en espace : La seconde partie de l'algorithme mémorise un image double couche, ainsi qu'une carte de la transformation déjà effectuée. Donc, on peut estimer en gros $3K(m^2)$ bits les besoins en mémoire de cet algorithme, (où K est le coût en mémoire pour le stockage d'une couleur ou d'un vecteur (on supposera que les deux types de données peuvent être stockés dans le même nombre de bits K)). Un algorithme de rotation traditionnel emploie $2K(m^2)$ bits de mémoire. Aussi, pour cette partie les besoins en mémoires sont du même ordre $\mathcal{O}(m^2)$ La première partie requiert $\mathcal{O}(m^3 \log(m))$ bits de mémoire pour construire un b -tree avec les angles de $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m$. Cette table peut être calculée une fois pour toute.

Complexité en temps : Dans la première partie, la procédure d'énumération et de tri nécessite $\mathcal{O}(m^3 \log(m))$ opérations.



Dans la seconde partie, bien que la boucle principale soit appelée $\mathcal{O}(m^3)$ fois et qu'elle contienne une autre boucle qui semble a priori linéaire, l'algorithme ne requiert que $\mathcal{O}(m^3)$ opérations : on effectue la mise à jour de m^2 pixels qui sont chacun amenés à croiser la grille duale au plus $4m$ fois.

Pour calculer tous les $\rho(\alpha)|_m$, pour $\alpha \in [0, 2\pi[$ avec l'algorithme classique de rotation discrétisée on aurait besoin de $\mathcal{O}(m^5)$ opérations.

5.2.7 Implémentation

Nous avons implémenté cet algorithme. Le code C++ du programme peut-être récupéré depuis l'url : <http://perso.ens-lyon.fr/bertrand.nouvel/transitive-rotations/>. Cette implémentation repose sur des idées comparables : Cette implémentation calcule C_α . On l'emploie pour faire des vérifications de consistance.

5.2.8 Spécifications supplémentaires

5.2.8a Topologie des angles sur la grille entière

On note par $I_{\mathcal{H}}|_m$ l'ensemble des intervalles ouverts d'angles délimités par deux angles charnières consécutifs de $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m$.

Pour tout angle $\alpha \in \mathcal{A}$ et tout $m \in \mathbb{N}$ soit $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m$, soit il existe un unique $I \in I_{\mathcal{H}}|_m$ tel qu' $\alpha \in I$.

On définit la fonction Q_m de \mathcal{A} vers \mathcal{A} , qui à chaque angle charnière $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m$, $Q_m(\alpha)$ associe α lui-même ; à tout angle α appartenant à un intervalle $I =]\alpha_0, \alpha_1[\in I_{\mathcal{H}}|_m$, on définit $Q_m(\alpha)$ comme l'angle pythagoricien appartenant à I dont le diamètre est le plus faible. On pose alors $\hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}|_m = Q_m(\mathcal{A})$.

L'ensemble $\hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}|_m$ a la propriété suivante : $\forall \alpha \in \mathcal{A}, \exists \alpha' \in \hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}|_m$, tel que $\rho_m(\alpha') = \rho_m(\alpha)$ et $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}|_m, (\alpha_1 \neq \alpha_2) \Rightarrow \rho_m(\alpha_1) \neq \rho_m(\alpha_2)$.

Puisque ρ_m peut être interprété comme une bijection entre $\hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}|_m$ et $\rho_m(\mathcal{A})$, on définit la fonction ϕ_m qui à une configuration $\rho(\alpha)$ associe l'unique angle $\alpha' \in \hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}|_m$ tel que $\rho(\alpha) = \rho(\alpha')$. On remarquera aussi que, si $\alpha, \alpha' \in I =]\alpha_0, \alpha_1[$ et $I \cap \mathcal{A}_r = \emptyset$ alors $\rho_m(\alpha) = \rho_m(\alpha')$

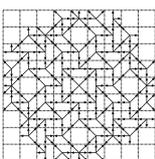
Lemme 5.8 Soit $\alpha', \alpha'' \in [0, 2\pi[$, $\alpha' \neq \alpha''$, $\rho_m(\alpha') \neq \rho_m(\alpha'')$, si et seulement s'il existe un angle $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m$ tel que $\alpha \in [\alpha', \alpha'']$

Démonstration :

On prouve chaque sens indépendamment : Si $\rho_m(\alpha') \neq \rho_m(\alpha'')$ alors il doit exister un point à une distance finie du centre qui a été modifié entre ces deux configurations, et ainsi il doit exister une discontinuité dans la fonction qui décrit les configurations en fonction de l'angle. Dans le sens contraire, si on a $\rho_m(\alpha') = \rho_m(\alpha'')$ et qu'il existe une discontinuité entre les deux angles, on a aussi $\{\alpha | \rho_m(\alpha) = \rho_m(\alpha')\} = \{\alpha | \rho_m(\alpha) = \rho_m(\alpha'')\}$, donc $\phi(\alpha) = \phi(\alpha'')$ or $\phi(\alpha) \neq \phi(\alpha')$ et $\alpha < \alpha' < \alpha''$. Ce qui est impossible du fait que $\phi_m(\rho_m(\alpha))$ est une fonction monotone croissant en escalier sur \mathcal{A} .

c.q.f.d.

Note : L'ensemble des angles charnières dépend de l'opérateur de discrétisation employé (et donc du centre réel de la rotation).



5.2.8b Faire tourner l'intégralité de la grille \mathbb{Z}^2

Si on s'intéresse au cas où on fait tourner la grille entière, alors $\mathbb{Z}[i]^{\mathbb{Z}[i]}$ est en bijection avec \mathcal{A} . Plus précisément, pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}$, $\alpha = \alpha'$, $\llbracket r_\alpha \rrbracket = \llbracket r_{\alpha'} \rrbracket$ si et seulement si $\alpha = \alpha'$. Ce qui est une trivialité puisque $\lim_{m \rightarrow \infty} (\phi_m \circ \rho_m(\alpha)) - \alpha \rightarrow 0$.

De plus, il existe un processus convergeant dans lequel on calcule progressivement $\rho_m(\alpha)$ avec m qui croit de 1 à ∞ . Ce processus est bien défini et calcule effectivement la rotation discrétisée. L'opérateur induit est transitif.

5.2.8c ϵ -Quasi-Transitivité

L'algorithme de rotation conduit à une application ψ qui transformerait la configuration associée à $\llbracket r_{\alpha^-} \rrbracket(\text{img})$ en la configuration associée à $\llbracket r_{\alpha^+} \rrbracket(\text{img})$ (cette application doit tenir compte des déformations déjà appliquées sur l'image). Pour créer une rotation transitive, un α -configuration de rotation des transformations déjà appliquées doit être attachée à l'image et doit faire partie intégrante des données manipulées par l'algorithme^(a).

La rotation incrémentale telle qu'elle est implémentée conduit ici à un processus sans terminaison qui fait indéfiniment tourner la même image. La procédure fait graduellement tourner l'image, et appelle une procédure de notification à chaque fois que l'image est disposée dans un état présentable.

il est possible d'en extraire la pente associée à de toute configuration^(b) de rotation $C \in ((\mathbb{Z}[i])^{\mathbb{Z}[i]})^m$. On peut calculer $\lim_{m \rightarrow \infty} \tan(\phi_m(\rho_m(\alpha)))$. À partir de la configuration $C = \rho|_m(\alpha_{d_0})$ on peut alors recommencer l'algorithme en $\alpha_{d_1} = \phi_m(C)$ et recommencer à tourner jusqu'à un angle α_{d_1} . Ce processus peut-être répété autant de fois qu'on le souhaite. La transformation finalement obtenue reste une rotation discrétisée : la configuration associée reste une configuration de rotation discrétisée.

On dénote par $\llbracket r_\alpha \rrbracket$, l'application de l'algorithme précédent α_{d_0} (extrait de la configuration), à un angle $\alpha_{d_1} = \alpha_{d_0} + \alpha$.

L'opération ainsi définie est une application ϵ -quasi-transitive pour les images finies, on entend par là que : $\llbracket r_\alpha \rrbracket \circ \llbracket r_\beta \rrbracket = \llbracket r_{\alpha+\beta+\epsilon(\alpha,\beta)} \rrbracket$.

L'intérêt de partir de ces configurations, c'est d'espérer à un moment donné quitter le processus de rotation classique ; et de pouvoir trouver sur ce type de configuration les éléments nécessaires pour pouvoir reprendre une opération de rotation après des rotations d'autres centres, ou après des translations...

5.2.9 Résultats complémentaires concernant les angles charnières

Lemme 5.9 Si α est un angle charnière, alors 2α est aussi un angle charnière.

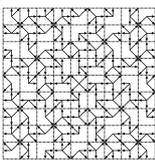
Démonstration :

Remarquons tout d'abord que : $e^{i2\alpha} = z^2 = (z_S z_D^{-1})^2 = z_S^2 (z_D^2)^{-1}$ Nous devons prouver que : (z_S^2, z_D^2) est un couple générateur. z_S est dans $\mathbb{Z}[i]$, et donc $z_S^2 \in \mathbb{Z}[i]$.

Sans perte de généralité, on suppose que $2\Re(z_D) = 2k + 1$, par conséquent $\Im(z_D)$ est un nombre quadratique, de plus $(2\Im(z_D))^2 = |2z_D|^2 - (2\Re(z_D))^2 = 4|z_S|^2 - (2k + 1)^2$, donc c'est un entier impair, or $\Re(z_D^2) = 2k + 2k^2 - p^2 - q^2 + \frac{1}{2}$, et $\Im(z_D^2) = (2k + 1)(\sqrt{|z_D|^2 - \Re(z_D)^2})$

^(a) Il serait aussi possible de mémoriser cette information et essayant de stocker directement l'angle, mais je pense qu'il est plus intéressant de voir cela comme un trace de la topologie initiale de l'espace, où comme un média déformable.

^(b) Ici les configurations de rotations sont en "absolu" et non pas en "chemin relatif".



Donc z_D^2 appartient à \mathcal{H} . De plus puisque $|z_S| = |z_D|$, on a $|z_S^2| = |z_D^2|$. Donc 2α est un angle charnière.

Par identification, on obtient : $2\alpha(p, q, k) = \alpha(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2 - 2k^2 - 2k)$

c.q.f.d.

Lemme 5.10 *Si α est un angle charnière, alors 3α est un angle charnière, si et seulement si p, q ont la même parité.*

Démonstration :

La preuve est la même que celle du Lemme 5.9 mais avec :

$$\Re(z_D^3) = 3k + 6k^2 + 4k^3 - 3\frac{p^2}{2} - 3\frac{q^2}{2} - 3kp^2 - 3kq^2 + \frac{1}{2}$$

$$\Im(z_D^3) = (1 + 4k + 4k^2 - p^2 - q^2)(\sqrt{|z_D|^2 - \Re(z_D)^2})$$

c.q.f.d.

Remarquons que cela est en accord avec le fait que $\pi/6$ est un angle charnière et que $3(\pi/6)$ n'en soit pas un.

Théorème 5.7 *Si $\alpha = \alpha(z_S, z_D)$ est un angle charnière, alors (z_S^n, z_D^n) est un couple générateur et α^n est angle charnière sauf quand $n = 0 \pmod 3$ et $|z_D|$ est impair.*

Démonstration :

Si z_S est un entier gaussien alors z_S^n est encore un entier gaussien. Donc, il reste à vérifier est que z_D^n appartient à \mathcal{H} . Nous allons supposer que les couples générateurs sont verticaux (les couples générateurs horizontaux ont une preuve légèrement plus complexe). Nous allons procéder comme dans le lemme de manière similaire au Lemme 5.9, et nous focalisons sur l'évolution de z_D .

On commence par introduire deux nouveaux symboles : $\tau_i = \frac{\Im(z_D^i)}{\lambda}$, $\rho_i = \Re(z_D^i)$, et $\lambda = \sqrt{r^2 - (k + \frac{1}{2})^2}$.

Pour prouver la proposition, on travaille par récurrence : On appelle H_i la proposition : τ_i est impair et $\rho_i \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$. Pour toute paire génératrice (z_S, z_D) , on montre que H_i implique H_{i+3} .

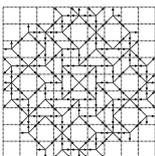
Pour $i \in \mathbb{N}$, on a la récurrence suivante :

$$\tau_{i+1} = (k + 1/2)\tau_i + \rho_i \quad | \quad \rho_{i+1} = (k + 1/2)\rho_i - \lambda^2\tau_i$$

Afin d'établir le résultat, on développe les expressions suivantes : $\rho_{i+3} - (-\rho_i)$ and $\tau_{i+3} - (-\tau_i)$. Les formules obtenues sont assez longues. Nous les avons réécrites en fonction des termes : $\mu_0, \mu_1, \nu_0, \nu_1$:

- $\tau_{i+3} - (-\tau_i) = \mu_0\tau_i + \mu_1\rho_i$, avec $\mu_0 = (\frac{3}{2} + 3k + 6k^2 + 4k^3 - \frac{3r^2}{2} - 3kr^2)$, et $\mu_1 = (1 + 4k + 4k^2 - r^2)$.
- $2(\rho_{i+3} - (-\rho_i)) = \frac{\nu_0}{2}\tau_i + \frac{\nu_1}{2}\rho_i$, avec $\nu_0/2 = (1/4 + 2k + 6k^2 + 8k^3 + 4k^4 - \frac{5r^2}{4} + r^4 - 5kr^2 - 5k^2r^2)$ et $\nu_1/2 = (\frac{3}{2} + 3k + 6k^2 + 4k^3 - \frac{3r^2}{2} - 3kr^2) = \mu_0$.

On suppose que l'hypothèse H_i est vraie. Nous distinguons deux cas en fonction de la parité r^2 .



- Si $r^2 = (2m + 1)$ est impair, alors $\mu_0 = 6k^2 - 12km + 6m + 4k^3 - 6m^2 - 12km^2$, $\mu_1 = 4k - 4m + 4k^2 - 4m^2$: Dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mu_0 = 0$, In $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $\mu_1 = 0$, ainsi $\mu_1\rho_i$ est pair, et $\mu_0\tau_i$ est pair aussi. Donc τ_{i+3} a la même parité de τ_i .

$\nu_0 = 6m - 6k - 40km + 2k^2 + 16k^3 + 8k^4 + 38m^2 + 64m^3 + 32m^4 - 40km^2 - 40k^2m - 40k^2m^2$,
 $\nu_1 = 12k^2 - 24km - 12m + 8k^3 - 12m^2 - 24km^2$, Dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\nu_0 = 0$ de dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,
 $\nu_1 = 0$, donc $\nu_1\rho_i$ est pair, et $\nu_0\tau_i$ est pair aussi. Donc ρ_{i+3} est demi-entier si et seulement si ρ_i est un demi-entier.

Ainsi $\rho_i \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$ implique $\rho_{i+3} \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$.

- Si $r^2 = (2m)$ est pair alors $\mu_0 = 6k + 12k^2 + 8k^3 - 12m^2 - 24km^2 + 3$ $\mu_1 = 8k + 8k^2 - 8m^2 + 2$: Dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mu_0 = 0$, Dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\mu_1 = 0$, donc $\mu_1\rho_i$ est impair, et $\mu_0\tau_i$ aussi impair, et donc τ_{i+3} a la même parité que τ_i .

$\nu_0 = 8k + 24k^2 + 32k^3 + 16k^4 - 20m^2 + 64m^4 - 80km^2 - 80k^2m^2 + 1$ $\nu_1 = 12k + 24k^2 + 16k^3 - 24m^2 - 48km^2 + 6$ Donc $\frac{\nu_1}{2}$ est impair et $\frac{\nu_1}{2}\rho_i$ sont des demi-entiers, et $\frac{\nu_0}{2}$ est un demi-entier donc $\frac{\nu_0}{2}\tau_i$ est donc un demi-entier. Enfin, la somme $\frac{\nu_1}{2}\rho_i$ et $\frac{\nu_0}{2}\tau_i$ est un entier. Donc ρ_{i+3} est un demi-entier, si ρ_i est un demi-entier.

Finalement, on a prouvé que si H_i est vrai alors H_{i+3} est vrai. Les cas de bases ont déjà été prouvés ainsi on a H_1 (trivial), H_2 (lemme 5.9) and H_3 (lemme 5.10). On conclut par récurrence le théorème annoncé. Grâce à MuPAD, nous avons vérifié la validité de ces calculs.

c.q.f.d.

Théorème 5.8 *Les angles charnières sont clos par addition d'un angle pythagoricien.*

Démonstration :

Soit α_0 , un angle charnière, et α_π , un angle pythagoricien. On pose $\alpha_1 = \alpha_0 + \alpha_\pi$. On considère (p, q, k) les triplets primaires qui génèrent l'angle charnière α_0 . (a, b, c) est le triplet pythagoricien premier qui est associé à α_π , puisque (a, b, c) est premier c est impair. À α_π , on associe l'entier gaussien $z_\pi = a + bi$. $|z_\pi| = c$ est impair. Maintenant, on considère la paire $(z_\pi z_S, |z_\pi|z_D)$, qui génère α_1 , et qui du fait de la parité de c conserve sa nature demi-entière.

c.q.f.d.

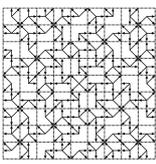
Corollaire 5.2 *L'ensemble des angles charnières est dense dans $[0, 2\pi[$*

5.2.9a Question ouverte : Calcul efficace du successeur d'un angle charnière

Le problème principal restant dans cette approche est que le seul algorithme dont nous disposions à ce jour pour calculer efficacement le successeur d'un angle spécial est de construire une table de tous les angles spéciaux compris dans un rayon donnée et de procéder à un tri de ces angles. La construction de la table est une étape qui peut-être faite une fois pour toute. Ceci dit elle plus lente à réaliser, que le fait de mettre à jour tous les pixels pour faire un tour d'écran.

La structure des angles charnières semble être connectée à des problèmes diophantiens. Aussi, l'ensemble des angles charnières, peut être inclus dans un ensemble plus général \mathcal{A}_S qui contient les angles α qui vérifient : $a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) = c$, avec $a, b, c \in \{-m, \dots, m\}$

Pour notre algorithme, nous sommes plus intéressés par la structure induite sur les triples générateurs (p, q, k) que sur la valeur des angles en eux-même. Aussi bien que l'équation puisse sembler familière de prime abord, en particulier à cause de sa ressemblance avec les formules de rotations. On connaît en fait très peu de choses sur la nature de ses solutions entières.



5.2.10 Perspectives concernant cet algorithme

L'algorithme pour les rotations discrétisées a de nombreuses propriétés : c'est un algorithme exact, valide sur n'importe quelle taille d'images ; il retourne le même résultat que l'application directe d'une rotation discrétisée de même angle. De plus, l'algorithme procède incrémentalement, et il pourra s'avérer utile à tout processus qui nécessite de vérifier une propriété pour tout angle de rotations, ou de s'interroger au cours d'un phénomène de rotation pour décider de sa progression. On pense ici en particulier à des simulations de phénomènes mécaniques dans des cadres discrets. Dans le cadre de rotations incrémentales, cet algorithme est nettement plus rapide que l'application successive de rotations discrétisées. Il cause $\mathcal{O}(n^3)$ mises à jours de pixels dans le cas de cet algorithme, au lieu de $\mathcal{O}(n^5)$ comme c'est le cas pour la rotation discrétisée. Finalement, puisqu'il renvoie exactement l'image de la rotation discrétisée l'erreur commise par l'algorithme est d'au plus $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ce qui est optimal). Le fait de n'avoir à calculer aucun cosinus ni aucun sinus confirme cette précision.

Note 5.2.10.1 *Une approche similaire doit pouvoir être menée sur les rotations 3-transvections. Nous n'avons pas mené de recherches concernant celles-ci. Puisque celles-ci sont naturellement bijectives, il ne serait pas nécessaires de considérer un "layer" additionnel et cela pourrait grandement simplifier l'algorithme.*

Note 5.2.10.2 *Finalement, bien que les angles charnières puissent être tirés seulement par les biais d'arithmétique entière. La procédure est pour le moment ralentie par le fait qu'elle nécessite des nombres haute-précision, du fait de la largeur des nombres considérés. Pour accélérer l'algorithme comme suggéré par la Section 5.2.9a, un défi pour les recherches futures peut -être de trouver efficacement un algorithme qui renvoie l'angle charnière suivant dans l'ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m$. Cette dernière approche est rendu délicate par le fait qu'il faut tenir compte de la façon dont est tronqué $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m$. Du fait, de l'alternance dans la topologie d'un angle spécial avec un angle pythagoricien, on aurait tendance à vouloir se fonder autour d'élément fournis pas la structure d'arbres des triples pythagoriciens. Pour l'instant en partant d'ensembles de la forme $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m$ les quelques recherches entreprises ont été infructueuses.*

5.3 Conclusions du chapitre

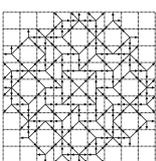
Dans ce chapitre, nous avons étudié les rotations discrétisées, et par le biais de l'analyse de leur dynamique et on a réussi à préciser deux propriétés que nous jugeons capitales pour les rotations discrétisées : la bijectivité et la transitivité.

En ce qui concerne, la réciproque du théorème d'ANDRÈS-JACOB, c'est avant tout une occasion de spécifier ce qui se passe dans le cadre périodique.

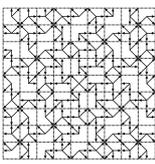
Les perspectives relativement à cette section sont tout d'abord d'arriver à dire davantage de choses sur les liens entre angles charnières et angles pythagoriciens. Peut être serait-il intéressant d'étudier les développements de Romik associés aux discontinuités, les expériences peuvent être rapidement menées.

Il faudrait encore généraliser le travail qui a été fait sur les rotations incrémentales afin de permettre de pouvoir à un moment donné changer le centre de la rotation. En effet, cela permettrait alors d'avoir un opérateur formel.

La généralisation de l'étude menée sur les rotations incrémentales passe aussi par une spécification de l'algorithme incrémental pour des rotations bijectives, cela permettrait d'éviter d'avoir à



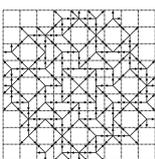
un emploi un couche supplémentaire dans l'algorithme pour gérer le fait que la rotation euclidienne n'est en général pas bijective.



Algorithme 5.1 : rotation incrementale via carte and notifications(doextproc)

```
1:  $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m \leftarrow \text{list\_and\_sort\_hinge\_angles}(m)$ 
2:  $\forall p \in \mathbb{Z}[i], R[p] \leftarrow p, (z_S, z_D) \leftarrow \text{beg}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m(z_S, z_D))$ 
3: tant que true faire
4:    $(z_S, z_D) \leftarrow \text{next\_spc}_{\mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m}(z_S, z_D)$ 
5:   pour  $Q \leftarrow 0$  to 3 faire
6:      $k=0$ 
7:     tant que  $|(2k+1)z_S| < m$  faire
8:        $op = R((2k+1)z_S i^Q)$ 
9:        $np \leftarrow R((2k+1)z_S i^Q) + i^Q$ 
10:       $R((2k+1)z_S i^Q) \leftarrow np$ 
11:       $k \leftarrow k+1$ 
12:     fin tant que
13:   fin pour
14:    $\text{doextproc}(R, z_S)$ 
15: fin tant que
```

Fig. 5.10 – r est le rayon de l'image, op dénote l'ancienne position, np désigne la nouvelle position "doextproc" est une fonction passée en paramètre, qui est appelée à chaque fois que la configuration a été mise à jour et qu'elle correspond de nouveau à une configuration de rotation discrétisée.



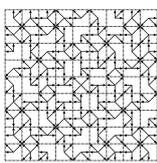
Algorithme 2 : incremental rotation of an image($img_1, doextproc$)

```

1:  $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m \leftarrow list\_and\_sort\_hinge\_angles(m)$ 
2:  $\forall p \in \mathbb{Z}[i], R[p] \leftarrow p, L[p] \leftarrow 1$ 
3:  $(z_S, z_D) \leftarrow beg(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m(z_S, z_D))$ 
4: tant que true faire
5:    $(z_S, z_D) \leftarrow next\_spc_{\mathcal{A}_{\mathcal{H}}|_m}(z_S, z_D)$ 
6:   pour  $Q \leftarrow 0$  to 3 faire
7:      $k=0$ 
8:     tant que  $|(2k+1)z_S| < m$  faire
9:        $p \leftarrow (2k+1)z_S$ 
10:       $op \leftarrow R[p]$ 
11:       $ol \leftarrow L[p]$ 
12:       $np \leftarrow op + i^Q$ 
13:       $img_2(np) \leftarrow img_{ol}(op)$ 
14:       $R[p] \leftarrow np; L[p] \leftarrow 2;$ 
15:       $alone \leftarrow true;$ 
16:      pour  $d \leftarrow 0$  to 3 faire
17:        si  $R[p + i^d] = op$  alors
18:           $alone \leftarrow false; p' \leftarrow p + i^d$ 
19:        fin si
20:      fin pour
21:      si  $\neg alone$  and  $L[p'] = 2$  alors
22:         $L[p'] \leftarrow 1$ 
23:         $swap(img_1[op], img_2[op])$ 
24:      fin si
25:       $alone \leftarrow true;$ 
26:      pour  $d \leftarrow 0$  to 3 faire
27:        si  $R[p + i^d] = np$  alors
28:           $alone \leftarrow false; p' \leftarrow p + i^d$ 
29:        fin si
30:      fin pour
31:      si  $\neg alone$  alors
32:        si  $p' < p$  alors
33:           $L[p'] \leftarrow 1; L[p] \leftarrow 2$ 
34:        sinon
35:           $L[p'] \leftarrow 2; L[p] \leftarrow 1$ 
36:           $swap(img_1[np], img_2[np])$ 
37:        fin si
38:      sinon
39:         $L[p] \leftarrow 1$ 
40:         $swap(img_1[np], img_2[np])$ 
41:      fin si
42:    fin tant que
43:  fin pour
44:   $doextproc(R, z_S, img_1)$ 
45: fin tant que

```

Un algorithme incrémental pour la rotation discrétisée. Les notations sont issues du précédent algorithme. De plus, img_1 et img_2 dénotent les deux couches de l'image. L est la partie de la configuration qui indique la couche de destination de chaque pixel.



Chapitre 6

Modélisation sur automates cellulaires

Plan détaillé du chapitre

6.1	Histoire, formalisme et programmation des automates cellulaires	139
6.1.1	Historique	140
6.1.2	Le champ d'application des automates cellulaires	140
6.1.3	Quelques grandes questions	141
6.1.4	Définition	142
6.1.5	Réalisation de configurations par automates cellulaires	144
6.1.6	Diagramme espace-temps et "configurations asynchrones"	145
6.1.7	Concaténation de réalisations sur automates cellulaires.	146
6.1.8	Cellule mobile	148
6.2	Rotations 3-transvections et automates cellulaires	148
6.2.1	Automates cellulaires à transformations	149
6.2.2	Schéma global de l'algorithme proposé	150
6.2.3	Comment réaliser la figure ?	150
6.2.4	Réalisation de la figure sur automates cellulaires	151
6.2.5	Analyse de l'algorithme	152
6.3	Automates cellulaires pour la géométrie discrète	153
6.3.1	Tracé de segments	153
6.3.2	Dessin des droites naïves et standards de pente rationnelle	155
6.3.3	Symétrique d'un point vis-à-vis de l'axe des abscisses/ordonnées	156
6.3.4	$\pi/2$ -rotation d'un point de \mathbb{Z}^2	156
6.3.5	$\pi/2$ -rotation d'une image	156
6.3.6	Cercles discrets sur automates cellulaires	156
6.3.7	Bissectrice d'un angle	156
6.3.8	Calcul d'une transvection	158
6.4	Les autres méthodes sur automates cellulaires	159
6.4.1	Autre expérience : automates cellulaires basés sur des applications locales	159

“Je me révolte, donc nous sommes”

Albert CAMUS

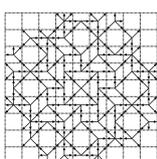
“Se révolter, c'est courir à sa perte, car la révolte, si elle se réalise en groupe, retrouve aussitôt une échelle hiérarchique de soumission à l'intérieur du groupe, et la révolte, seule, aboutit rapidement à la soumission du révolté... Il ne reste plus que la fuite.”

Henri LABORIT

Les résultats présentés dans ce chapitre sont récents, et n'ont encore fait l'objet d'aucune publication.

6.1 Histoire, formalisme et programmation des automates cellulaires

Parmi les systèmes dynamiques discrets, les *automates cellulaires* se distinguent par l'existence d'une structure spatiale homogène dans leur état. Leur définition met en exergue deux particularités estimées pratiques et usuelles :



- Pour qu'un système dynamique en temps discret puisse être considéré comme un automate cellulaire, l'état global de ce système doit être identifiable avec le produit^(a) de différents états "locaux". Les automates cellulaires mettent ainsi en avant l'existence dans une *structure spatiale* dans l'état "global" du système étudié.
- Un automate cellulaire suppose l'existence d'une *règle locale d'évolution* pour le système étudié applicable uniformément en tout point de l'espace. Dans un automate cellulaire, la règle d'évolution locale est invariablement appliquée à chaque instant et de manière identique en tout point de l'espace.

6.1.1 Historique

Historiquement, les automates cellulaires furent inventés au début des années 1950, par Stanislaw ULAM et par John von NEUMANN avec pour application initiale l'étude de cristaux, pour le premier, et, la modélisation des processus autoreproducteurs, pour le second. Ils furent plus tard remis à la mode par les travaux de John CONWAY et en particulier le "*Jeu de la vie*". Leur succès fut conforté par l'arrivée de simulateurs spécifiques, comme les machines CAM^(b). Ces simulateurs permirent des modélisations plus massives, et la recherche d'applications pour la physique. C'est à cette époque qu'émergèrent les modèles FHP, HPP déjà présentés en introduction. Les automates cellulaires prirent aussi un place importante en traitement d'image – en particulier, l'essentiel des convolutions à support compact peuvent être vus comme des automates cellulaires. Aujourd'hui les circuits FPGA^(c) ont une architecture particulièrement adaptée à la simulation des automates cellulaires.

6.1.2 Le champ d'application des automates cellulaires

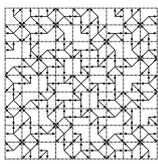
- Voici un panorama des motivations qui expliquent le succès du modèle automate cellulaire :
- en physique ; dans un automate cellulaire, tous les calculs résultent de l'application de règles locales – ceci correspond tout à fait aux présupposés usuels de la physique : invariance des lois de la physique par déplacements spatiaux, et invariance des lois de la physique par déphasage temporels, (le troisième principe de la physique étant l'isotropie : l'invariance par rotation !). Dans un automate cellulaire, le fait que toutes les transformations soient locales, induit qu'aucune information ne peut se déplacer dans un automate cellulaire plus vite que la loi d'évolution *locale* ne le permet. Autrement dit, dans un automate cellulaire, la notion de *localité* induit une notion de *vitesse de la lumière*. Cette caractéristique rend le modèle automate cellulaire séduisant aux yeux d'une partie des physiciens (il s'agit là cependant d'un sujet de controverse). En effet, l'évolution récente de la physique fonde une partie de ses théories sur des principes de localité, en mettant en avant l'existence de particules messagères^(d). Et pourtant, d'un point de vue théorique, nous ne sommes pas encore prêts à passer à un modèle entièrement discret.
 - en biologie ; les automates cellulaires sont adaptés à la simulation d'organismes biologiques. Leur structure cellulaire peut servir à refléter l'organisation des systèmes vivants. En biologie, on est souvent confronté à des phénomènes qui agissent à plusieurs échelles et dont la réactivité dépend d'autres réactions. Les modèles simplistes d'automates cellulaires

^(a)du fait de l'invariance par déphasage spatial, il s'agit même d'une mise à la puissance de l'état local.

^(b)Cellular Automata Machine.

^(c)Field Programmable Gate Array.

^(d)potentiellement purement théorique du fait qu'elle ne sont pas nécessairement observables par l'expérience.



sont insuffisants pour rendre compte correctement de la diversité des astuces mises en jeu par le vivant^(a)

- en sociologie, en économie ; les automates cellulaires sont encore fréquemment employés pour modéliser des phénomènes sociologiques. Là encore, il se trouve que le modèle d'automates cellulaires est trop souvent simpliste et inadapté : la seule grande idée qu'imposent les automates cellulaires, à savoir l'existence d'un état global du système qui se représente à travers l'espace et pour lequel la loi d'évolution est pareille en tout point, ne suffit pas à rendre compte de tout ce que l'on observe. Au niveau des modèles proposés, ce sont le plus souvent, soit des automates cellulaires très complexes, soit des modèles intrinsèquement plus puissants que les automates cellulaires classiques.
- en informatique ; ici, ce sont la limite de leur puissance de calcul ainsi que les méthodes de programmation relatives qui captivent les chercheurs. Comment peut-on amener un automate cellulaire à calculer comme on le souhaite ? Un automate cellulaire est une architecture de calcul massivement parallèle.

La véritable question est de savoir le distinguo entre ce qui doit être spécifié comme faisant partie intégrante de la théorie des automates cellulaires, et qui doit être vu comme général. Il nous faut comprendre ce qui est propre à chaque cadre d'application et des critères pour savoir ce qui doit être mis en avant dans la théorie.

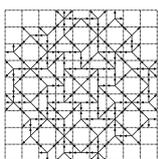
On trouve une littérature abondante qui discute des automates cellulaires et de leurs applications pour les simulations de systèmes complexes. La présence et la thématique commune, de tous ces ouvrages nous convainc de l'existence actuelle d'un paradigme : les automates cellulaires sont aptes à modéliser la réalité et les processus dits "complexes", en particulier ils sont utiles pour modéliser l'ensemble des systèmes où la distribution de l'état local du système n'est pas facilement descriptible algébriquement.

6.1.3 Quelques grandes questions

Pour terminer cette introduction, énumérons maintenant quelques-unes des grandes énigmes qui intriguent à ce jour ceux qui se penchent un peu sur la modélisation sur automates cellulaires :

1. *La compréhension des liens entre la nature des contraintes locales et les comportements globaux émergents forme une l'énigme principale de la théorie.* Des règles de transitions locales d'apparence très simples peuvent être le moteur de dynamiques très complexes. Les liens entre notre compréhension de la dynamique globale et notre compréhension de règles de transitions locales constituent ainsi probablement l'aporie fondatrice de la théorie des automates cellulaires. On sait encore très peu de choses à ce propos, si ce n'est que c'est une question vaste et difficile ; la puissance du modèle permet d'imaginer des modèles d'automates cellulaires qui soient la représentation d'exercices logiques arbitrairement complexes, en d'autres termes on est dans un cadre où les questions trop générales sont peuplées d'indécidable.
2. À la vue du nombre de domaines potentiellement intéressés par les applications des automates cellulaires, on répertorie les tentatives pour essayer de mettre en avant une logique sur la façon d'obtenir de manière systématique certains comportements sur automates cellulaires. En clair, une autre grande question liée à la précédente est de déterminer *quelles sont les méthodes de programmation des automates cellulaires.*
3. Une question apparemment moins difficile, mais peut être moins bien définie consiste à vouloir classer les automates cellulaires : *Comment classer les automates cellulaires ?* Les premiers

^(a)Avec un petit bémol : on peut remarquer dans la zoologie des pieds mais jamais de roues ! On peut se demander pourquoi la Nature refuse de concilier milieux cellulaires et rotations.



articles de Stephen WOLFRAM[WOL02] eurent sur cette question une importance épistémologique majeure. Ils inaugurèrent en effet la première tentative de structuration de la dynamique des automates cellulaires. Cependant, les progrès formels liés à la classification des automates cellulaires sont bien plus tardifs ; ils ont nécessité des mathématiques qui traitent topologiquement des systèmes dynamiques, voir par exemple [KUR03].

6.1.4 Définition

Définition 6.1 *Un automate cellulaire est défini par un quadruplet $(L, \mathcal{V}, Q, \tau)$ tel que,*

- L est le réseau^(a) sous-jacent. L doit avoir une topologie “régulière”. En d’autres termes, le réseau est issu d’un graphe de CAYLEY, c’est-à-dire qu’il existe un groupe qui génère L ; On se limite le plus souvent à \mathbb{Z}^n , et ici, nous avons toujours $L = \mathbb{Z}$ ou $L = \mathbb{Z}^2$;
- \mathcal{V} est une partie finie de L , elle définit le voisinage à translations près ;
- S est un ensemble d’états. Il correspond aux états que peuvent prendre les instances des automates finis disposés selon L et dont la réunion constitue l’automate cellulaire ;
- τ est la fonction de transition locale, c’est-à-dire une application de la forme $Q^{|\mathcal{V}|} \rightarrow Q$.

Pour former un automate cellulaire, on dispose régulièrement des instances d’un même automate fini dont la table de transitions est définie par τ .

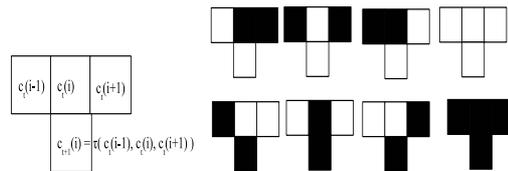


Fig. 6.1 – Exemple de table de transitions pour un automate cellulaire. Pour chaque facteur de longueur 3, on indique le nouvel état que doit prendre la cellule. Cette figure représente ainsi les règles de transition associées à un automate cellulaire unidimensionnel effectuant un comptage de parité, cet automate est appelé le compteur de parité de FREDKIN.

On définit la *fonction de transition globale* comme l’application qui fait agir sur l’état global la fonction de transition locale. Pour un automate cellulaire, il s’agit de la fonction qui effectue les transitions locales parallèlement en tous les points de l’espace.

Plus formellement, à l’instant $t + 1$, le nouvel état de la configuration C_{t+1} est défini en \mathbf{p} à partir de C_t par $C_{t+1}(\mathbf{p}) = \tau(C_t^{\mathcal{V}}(\mathbf{p}))$; profitons-en pour rappeler que $C^{\mathcal{V}}$ désigne la configuration formée par des motifs de support de taille \mathcal{V} .

Pour simplifier les notations, plutôt que d’introduire des symboles différents pour les fonctions de transitions locales et globales, on se contente d’étendre l’application τ pour le traitement de configurations/motifs C de support S , avec S plus large que \mathcal{V} ; cette extension se fait simplement, comme annoncée, en appliquant à chaque instant la loi de transition en tous les points où celle-ci est applicable – c’est-à-dire en tous les points où la configuration est définie, et pour lesquels on peut appliquer la règle de transition.

Une autre façon de définir les automates cellulaires consiste à les présenter comme des *applications continues qui commutent avec le(s) shift(s)*, l’équivalence entre les définitions est fournie par ce théorème :

^(a) Par le terme de réseau, on désigne un ensemble structuré de manière homogène assimilable à un graphe infini.

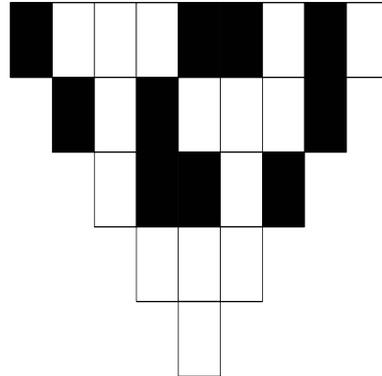
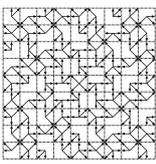


Fig. 6.2 – Règle de transition appliquée à un motif de taille fini. La première ligne représente la configuration initiale. Chaque ligne suivante a été calculée en appliquant la règle de transition locale partout où elle pouvait être appliquée. L'ignorance de ce qui se passe aux bords rend a priori impossible toute prévision prévoir l'évolution au delà d'un certain temps.

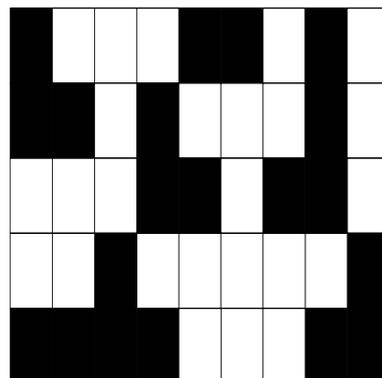
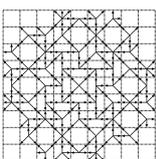


Fig. 6.3 – Règle de transition appliquée sur un espace torique : $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Dans ce cas puisque la configuration globale a un support fini, l'espace des phases est fini et l'on est certain que la dynamique de l'automate cellulaire est ultimement périodique.



Théorème 6.1 (HEDLUND, [HED69]) Une fonction de transition f de $Q^{\mathbb{Z}}$ vers $Q^{\mathbb{Z}}$ est un automate cellulaire si et seulement si elle est continue pour la topologie issue de la métrique de CANTOR^(a), et si elle commute avec l'application de décalage sur les configurations.

Il en existe une généralisation en dimension arbitraire : [RIC72].

L'application systématique de la fonction de transition globale à des configurations nous permet directement de reconsidérer les automates cellulaires avec la vision système dynamique. Soit (X, τ) , le système dynamique associé à un automate cellulaire, où X est l'espace des phases composé par l'ensemble des configurations possibles, et τ est la fonction de transition globale d'un automate cellulaire. L'*orbite positive* d'une configuration dans un tel système s'appelle alors son *diagramme espace-temps*.

Un état est dit *quiescent* s'il reste dans le même état quiescent quand tous les voisins d'une cellule sont dans un état quiescent.

La notion de *signal* désigne le front d'onde lié à la propagation d'une information dans le réseau de l'automate cellulaire. Il s'agit d'une définition plutôt floue surtout en dimension supérieure à 2. Cela dit, nous n'avons pas besoin d'une définition formelle. Dans un automate cellulaire, il est impossible qu'un site soit informé du changement d'état d'un autre site sans que cela ne se traduise pas par la propagation de l'information de site en site – ce qui conduit à une altération d'état qui se propage de site en site : un front d'onde, un signal. Lors de la propagation de l'information, la nature du message peut s'altérer et se dégrader.

Soit $\mathfrak{A} = (L, \mathcal{V}, Q, \tau)$ un automate cellulaire, nous dirons que $\mathfrak{A}_1(L, \mathcal{V}, Q', \tau')$ est un *sous-automate* de \mathfrak{A} , s'il existe un morphisme h de Q vers Q' tel que pour $h \circ \tau(x) = \tau' \circ h(x)$.

6.1.5 Réalisation de configurations par automates cellulaires

Pour réaliser des dessins sur \mathbb{Z}^2 et des transformations sur \mathbb{Z}^2 grâce aux automates cellulaires, on doit définir un formalisme.

Dans notre cas, les calculs sont déclenchés à partir d'un point précis de l'espace, et il faut que les algorithmes altèrent à terme des zones arbitrairement grandes de \mathbb{Z}^2 . Ainsi, autant prouver la validité de l'algorithme sur \mathbb{Z}^2 entier.

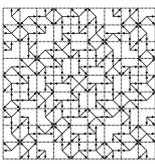
La propagation d'un signal dans \mathbb{Z}^2 se fait de proche en proche. Pour couvrir tout l'espace cela nécessite nécessairement un temps infini. L'opération consistant à construire une configuration à partir d'un évènement déclenché en un point donné, prend nécessairement un temps infini pour s'accomplir sur toute la configuration. Dans les automates cellulaires, il existe une notion de "cône de lumière" : aucune information, aucun signal ne peut circuler dans l'automate plus vite que ne le permet le voisinage pour une propagation de site en site. Un signal qui se propage au rythme du cône de lumière se propage en *temps réel*.

Cependant, malgré cette contrainte qui fait qu'aucun algorithme déclenché à partir d'un point de la configuration ne peut affecter tout \mathbb{Z}^2 en un temps fini, pour atteindre notre objectif, nous devons tout de même disposer d'une notion d'exécution et d'une notion de terminaison qui permette de spécifier ce qui est terminé dans un calcul. C'est grâce à une telle notion, que l'on est mesure d'enchaîner des calculs et de décrire les performances des algorithmes.

On s'intéresse donc à la capacité d'un automate cellulaire à traiter une boule de rayon arbitraire.

Plus formellement, un automate cellulaire qui calcule une image ou une transformation dispose dans son état de deux parties : une partie de son état décrit si la cellule a terminé son calcul, et l'autre partie porte l'état classique, qui est manipulé tout au long du calcul.

^(a)La distance de CANTOR entre deux configurations C et C' vaut 2^{-n} où n est la distance L_1 du point \mathbf{p} le plus proche de l'origine pour lequel $C(\mathbf{p}) \neq C'(\mathbf{p})$.



Dans ces conditions, on dit qu'un automate cellulaire *réalise* une configuration C_F sur $Q_F \subseteq Q$ à partir d'une configuration C_I sur $Q_I \subseteq Q$ si les conditions suivantes sont remplies :

1. il existe un morphisme $h_T : Q \rightarrow \{0, 1\}$ (morphisme de terminaison) et un morphisme $h_D : Q \rightarrow Q_F$ (morphisme de dessin) qui sont tels que si une fois le calcul terminé, la configuration finale est alors atteinte de manière irrévocable :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2, h_T((\tau^k(C_I))(\mathbf{p})) = 1 \Rightarrow h_T((\tau^{k+1}(C_I))(\mathbf{p})) = 1 \text{ et } h_D((\tau^k(C_I))(\mathbf{p})) = C_F(\mathbf{p})$$

2. le calcul de n'importe quelle boule de rayon fini prend un temps fini à s'exécuter :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \exists t_r \in \mathbb{N} | \forall \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 | \|\mathbf{p}\| < r, h_T(\mathbf{p}) = 1$$

L'automate \mathfrak{A} réalise C_F à partir de C_I :

$$C_I \rightsquigarrow C_F$$

\mathfrak{A}

Pour dénoter qu'un automate cellulaire \mathfrak{A} réalise une boule de rayon n de la configuration C_F à partir d'une boule de rayon $\mathcal{O}(n)$ de la configuration C_I , au sens où l'opération se fait en temps $\mathcal{O}(n)$, on note :

$$C_I \xrightarrow{\mathcal{O}(n)} C_F$$

\mathfrak{A}

On dit qu'un automate *termine correctement* à partir de C_I si :

- il n'existe qu'une seule composante connexe qui passe dans l'état de terminaison ;
- cette composante connexe se développe de manière convexe.

On note :

$$C_I \rightarrow C_F$$

\mathfrak{A}

La terminaison correcte est le plus souvent assurée par le fait que la propagation de l'état de terminaison est initié par un unique point.

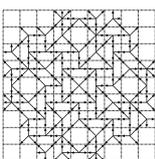
6.1.6 Diagramme espace-temps et "configurations asynchrones"

Usuellement, l'exécution d'un automate cellulaire a lieu de manière synchrone, c'est-à-dire que l'on effectue les transitions sur tous les sites en même temps – en procédant ainsi on obtient une certaine dynamique. Si pour une quelconque raison on n'exécute pas les transitions sur tous les sites en même temps, on parle d'exécution *asynchrone* de l'automate, et on obtient le plus souvent une tout autre dynamique. Dans certains cas ,n'opérer les transitions qu'en certains sites est essentiel du fait que toutes les cellules de \mathbb{Z}^2 ne sont pas toujours prêtes à effectuer des transitions. On donc s'intéresse à des automates cellulaires "asynchrones" qui calculent, en un sens à préciser, le diagramme espace-temps d'un automate cellulaire synchrone.

Soit $\mathfrak{A}_1 = (L, V, Q_1, \tau_1)$ un automate cellulaire, et $\mathfrak{A}_2 = (L, V, Q_2, \tau_2)$ un automate cellulaire tel que $Q_2 \subset Q_1 \times Q_1 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \{0, 1\}$. On récupère chacune des parties de l'état par les morphismes h_{q_1}, h_{q_2}, h_t et h_{ok} . τ_2 est une table de transitions.

Le diagramme espace-temps obtenu doit être tel que pour toute configuration C , on ait pour toute position $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$:

- Pour tout vecteur $\mathbf{v}' \in (V + \mathbf{v})$, les informations nécessaires à la transition sont disponibles. Plus formellement si $h_t(C(\mathbf{v}')) - h_t(C(\mathbf{v})) \geq 0$ et $h_{ok}(C(\mathbf{v}')) = 1$; et si la cellule est prête à exécuter la transition ($h_{ok}(C(\mathbf{v})) = 1$), et si la cellule n'est pas déjà en avance par rapport à une de ses voisines, alors on effectue la transition :



- $h_t((\tau_2 C)(\mathbf{v})) = h_t((C)(\mathbf{v})) + 1$;
- $h_{q_2}((\tau_2 C)(\mathbf{v})) = h_{q_1}((C)(\mathbf{v}))$;
- $h_{q_1}((\tau_2 C)(\mathbf{v})) = \tau_1(X)$, où X est le produit des états de Q_1 obtenus à partir de $h_{q_x(\mathbf{v}')}((C)(\mathbf{v}')$ pour chacun des points \mathbf{v}' du voisinage de \mathbf{v} avec qui $h_{q_x(\mathbf{v}')} ;$ vaut h_{q_1} ou h_{q_2} en fonction de la valeur de $h_t(C(\mathbf{v}')) - h_t(C(\mathbf{v}))$.
- si une des conditions précédentes n'est pas remplie, il ne se passe rien pour cette cellule en ce qui concerne le sous-automate qui réalise l'exécution asynchrone.

Note 6.1.6.1 Si on enlève la contrainte qui postule que le nombre d'états des cellules est nécessairement fini, alors il est possible de mémoriser un compteur qui décrit le nombre de transitions effectuées pour chaque cellule. On appelle h_{TIME} le morphisme qui extrait cette information, alors pour toute position $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$, que l'on dénote par $\{C_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ le diagramme espace-temps de l'automate $\mathfrak{A}_1 = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{V}, Q_1, \tau_1)$ que l'on souhaite engendrer de manière asynchrone par $\mathfrak{A}_2 = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{V}, Q_2, \tau_2)$, on appelle D_0 la configuration initiale dans \mathfrak{A}_2 et C_0 sa projection dans \mathfrak{A}_1 alors on peut vérifier $C_{h_{TIME}((\tau_1^n C_0)(\mathbf{p}))} = \tau_2^n D_0(\mathbf{p})$.

En pratique, quand on exécute successivement deux automates cellulaires, on ne peut pas exécuter de la même façon les deux automates cellulaires. Il faut un temps infini pour que l'automate cellulaire réalise C_F à partir de C_I , si on souhaitait appliquer la première transition du second automate cellulaire sur tout C_F , il faudrait attendre que tout C_F soit calculé.

Nous allons imaginer un mode d'exécution permettant de conserver une dynamique cellulaire.

Partons dans l'idée que l'automate \mathfrak{A}_2 , s'exécute en fait de manière asynchrone. : a toute exécution asynchrone, on peut associer une configuration temporelle qui indique le nombre de transitions qui ont effectivement été réalisées pour cette cellule. Grâce à cette configuration on peut savoir quels sont les sites qui sont en avance les uns par rapport aux autres. On peut aussi donner une idée de l'évolution du processus d'exécution.

Les configuration à états finis employées superposent trois couches d'informations.

6.1.7 Concaténation de réalisations sur automates cellulaires.

Par suite du Théorème d'HEDLUND 6.1, on sait que la composée de la fonction de transitions globales d'automates cellulaires est une fonction de transition globale d'automates cellulaires.

Grâce à l'asynchronisme, on peut ne faire s'exécuter un automate asynchrone \mathfrak{A}_2 que si l'automate \mathfrak{A}_1 a terminé son calcul (ce morphisme existe pour tous les automates qui réalisent des configurations), le résultat obtenu correspond à l'exécution consécutive de \mathfrak{A}_1 et de \mathfrak{A}_2 .

En pratique, ce résultat nous permet de définir la concaténation d'automates cellulaires : Soit $\mathfrak{A}_1 = (\mathbb{Z}^n, R, Q_1, \tau_1)$ et $\mathfrak{A}_2 = (\mathbb{Z}^n, R, Q_2, \tau_2)$ deux automates cellulaires travaillant sur (\mathbb{Z}^n, R) tels que : $\overset{C_0 \rightarrow C_1}{\mathfrak{A}_1}$ et : $\overset{C_1 \rightarrow C_2}{\mathfrak{A}_2}$ alors il existe un automate cellulaire noté $\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2$ qui réalise directement C_2 à partir de C_0 : $\overset{C_0 \rightarrow C_2}{(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2)}$.

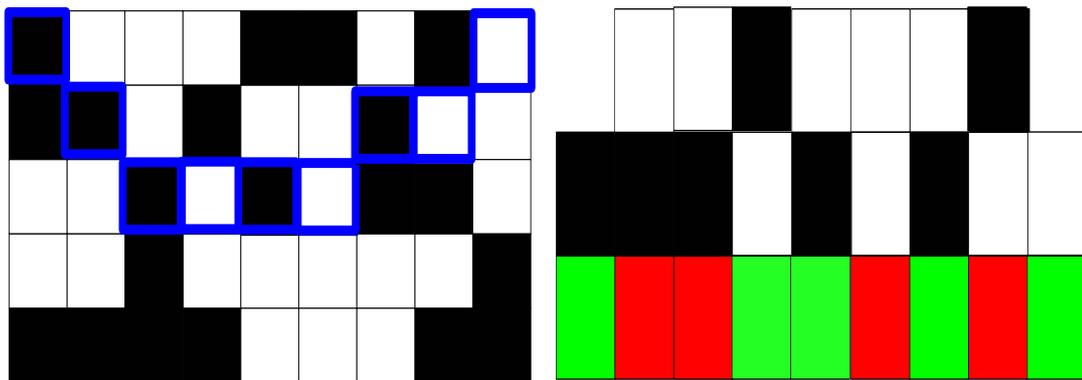
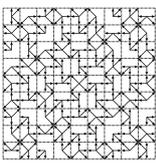
Proposition 6.1 Si $\overset{\mathcal{O}(n)}{C_I \rightarrow C_T} \mathfrak{A}_1$ et $\overset{\mathcal{O}(n)}{C_T \rightarrow C_F} \mathfrak{A}_2$ alors $\overset{\mathcal{O}(n)}{C_I \rightarrow C_F} (\mathfrak{A}_1 \odot \mathfrak{A}_2)$

Démonstration :

Nous savons déjà que l'automate existe.

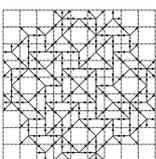
Il reste à démontrer que le temps de calcul reste linéaire.

\mathfrak{A}_1 réalise une boule de C_1 en temps linéaire. Cela signifie que l'on peut calculer une boule de configuration C_1 en un temps linéaire. Or, on peut calculer la configuration une boule de C_2



(a) Les cellules entourées en bleu correspondent à (b) La configuration réellement stockée dans l'automate qui tourne de manière asynchrone, superpose ce diagramme espace-temps. On remarque que cette ligne est 8-connexe dans le diagramme espace-temps de l'automate cellulaire que nous souhaitons simuler. L'état précédent de la cellule est indiqué sur la première ligne, l'état actuel est indiqué dans la seconde ligne, la troisième partie de l'état indique si cette cellule est autorisée à effectuer une transition. Sur la ligne du milieu on retrouve les états locaux marqués dans la ligne bleue. La ligne bleue reprend l'état précédent de la cellule pour peu qu'il existe. La dernière ligne comporte un indicateur qui indique si cette cellule est prête ou non à effectuer une transition : il s'agit là d'une simplification. En réalité, il faut mémoriser et comparer des horloges en temps modulo 3 et tenir compte peut-être d'informations annexes extérieures à ce processus qui indiquent si la transition est prête à être effectuée.

Fig. 6.4 – Représentation d'une configuration de l'automate asynchrone ainsi de son positionnement temporel dans le diagramme espace-temps que l'on est conduit à simuler.



sur un rayon r en connaissant de taille $k_2 r$ de C_1 . Le calcul se termine $k_2 r$ instant après que la dernière cellule de la sphère de rayon $k_2 r$ ait terminé son calcul. Or, le temps qu'il faut pour calculer cette boule de rayon $k_1 r$ c'est $k_1 r$.

Les bords de la boule sont toujours à un temps 1 par rapport à C_2 . Les temps de blocage vont ralentir l'exécution du second automate "au rythme du premier". On sait que la propagation d'un signal temps réel dans le second automate se réalise en fait au rythme de l'avancée du premier. Le temps d'exécution est donc de l'ordre de la composition de deux fonctions linéaires. Ceci est encore une fonction linéaire.

c.q.f.d.

6.1.8 Cellule mobile

Le formalisme automate cellulaire est élégant par sa simplicité formelle – cependant ce formalisme simple ne met pas forcément toujours en avant certaines constructions que l'on souhaite réaliser par leur biais. Il est possible de modéliser des déplacements d'objet – nous avons déjà mentionné le terme de "signal". Du fait des collisions, et de la complexité formelle conséquente, il est souvent intéressant de considérer explicitement que ce sont parfois de véritables agrégats d'informations, de petites vésicules de données circulant de cellule en cellule.

Si cette information dans son évolution ne se duplique pas, on donne à cet objet le nom de *cellule mobile* ; d'autres termes existent comme celui par exemple d'*agent* ; la différence entre les agents et les cellules mobiles est qu'a priori les cellules mobiles n'ont pas pour vocation première d'altérer le fonctionnement du sous-automate qui les supporte, et de plus en général, une cellule mobile n'est pas seule. Elle est reliée à d'autres cellules formant ainsi un *organisme* qui se déplace dans le plan discret. Les cellules mobiles ont pour vocation d'être le support d'une dynamique qui dépend du sous-automate support, mais qui se produit sans affecter les niveaux sous-jacents.

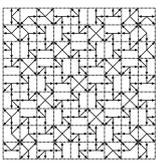
Les cellules mobiles capables de transporter un état de Q_M sont stockées dans une partie de l'état des cellules réelles de l'automate. A priori donc, plusieurs cellules mobiles peuvent coexister dans la même cellule. Dans un automates cellulaires cependant e nombre maximal de cellules mobiles stockables dans une cellule réelle doit nécessairement admettre une borne m afin de garantir la finitude du nombre d'états par cellule. Plus formellement, l'ensemble des états par cellule Q peut se transposer sous la forme $Q = Q_0 \times Q_1$, où Q_0 est l'état sous-jacent et $Q_1 = Q_M^m$ sert à stocker de potentielles cellules mobiles de passage.

Les cellules mobiles qui sont stockées dans une même cellule , peuvent être agencées dans un certain ordre de façon à pouvoir adresser chaque cellule mobile de manière arbitraire.

6.2 Rotations 3-transvections et automates cellulaires

Dans cette section, on vise à une description précise d'un automate cellulaire qui implémente les rotations 3-transvections.

Dans cette partie, on spécifie l'automate que nous souhaitons créer et schématiser le fonctionnement de l'automate cellulaire. Nous réemploierons progressivement les outils pour les automates cellulaires que nous venons de définir. L'algorithme est constitué via un ensemble d'automates cellulaires plus simples qui sont agencés ensemble pour former l'automate global.



6.2.1 Automates cellulaires à transformations

Pour réaliser des transformations sur automates cellulaires, il faut exécuter des automates cellulaires sur des réseaux de cellules mobiles.

Le réseau de cellules mobiles doit être équipé d'une relation de voisinage effectivement analogue à celle de \mathbb{Z}^2 , mais dont le positionnement dans $\mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, K\}$ est défini via une configuration similaire à celles étudiées depuis le Chapitre 2.

On définit les *automates cellulaires à transformations* à K superpositions. Ces automates cellulaires manipulent conjointement trois types de configurations :

- une configuration dite *statique* sur laquelle les transitions ont lieu selon \mathbb{Z}^2 . Cette configuration a une évolution qui ne dépend pas du reste de l'état.
- une "carte de voisinage", c'est-à-dire une application de $\mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, K\}$ vers $(\mathbb{A}^n \times \{0, \dots, K\})^4$ où \mathbb{A}^n est un ensemble de flèches du type de ceux déjà vus. La carte de voisinage doit vérifier un certain nombre de propriétés : la *carte de déformation du voisinage* définie via des cellules mobiles mémorise l'adjacence initiale des cellules des mobiles, et elle code localement une transformation bijective qui conserve le voisinage dans une boule de rayon fixe. Le codage se fait de la même façon que dans les configurations C'_α : pour chaque arc de relation de voisinage on mémorise la position relative de son image grâce à des vecteurs qui appartiennent à un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^2 appelé flèches ; en pratique dans notre cas, la configuration doit être un codage local de la relation de voisinage $\mathcal{V}_4(\mathbb{Z}^2)$. Une conséquence de ceci est que tous les chemins qui rejoignent un point \mathbf{v} à un point \mathbf{v}' doivent comporter le même nombre de flèches issues d'actions horizontales et de flèches issues d'action verticales. Ceci implique surtout que les transducteurs définis en section 2.3.6 soient applicables d'une façon cohérente : quelque soit le chemin parcouru par le transducteur, la position de la tête d'écriture doit être complètement déterminée par la configuration de départ. Ainsi à partir d'une configuration du type C'_α , on peut retrouver une configuration du type C_α qui permet le recalcul de l'image de chacun des points par la transformation, autrement dit, il existe une bijection entre \mathbb{Z}^2 et un positionnement des cellules mobiles sur au plus K couches. Les voisins d'un point étant toujours à distance bornée les uns des autres, la position relative d'un voisin par rapport à un autre est descriptible en utilisant seulement un nombre fini d'états ;
- La troisième configuration est dite "embarquée". Elle est stockée à travers au plus K couches. Cette troisième configuration est transportée par les cellules mobiles, et elle suit donc les contorsions définies par la carte déformation du voisinage défini dans la précédente couche.

On note ainsi un tel automate cellulaire :

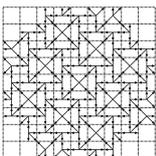
$$\begin{array}{c} \mathcal{O}(n) \\ F_I \rightarrow F_T \\ C_I \rightarrow C_T \\ \mathfrak{A} \end{array}$$

où F_I et F_T sont deux éléments de $(\mathbb{A}^4)^{\mathbb{Z}^2}$. Dans la suite, nous nous restreignons au cas où $F_I = \mathcal{V}_4(\mathbb{Z}^2)$.

On dit que l'automate embarqué réalise la transformation bijective F_T à partir de C_I .

$$\begin{array}{c} \mathcal{O}(n) \\ I \rightarrow HS_\alpha(I) \\ \mathcal{V}_4(\mathbb{Z}^2) \rightarrow F_T \\ C_I \rightarrow C_T \\ \mathfrak{A} \end{array}$$

Informellement, les automates à transformations sont des automates qui manipulent des cellules mobiles de manière consistante.



L'évolution de la configuration stockée dans les cellules embarquées conduit nécessairement à un diagramme espace-temps d'automates cellulaires. Affirmer ceci n'est qu'une conséquence du Théorème 6.1. Il se peut de plus que le diagramme espace-temps de la configuration embarquée contienne un sous-automate cellulaire qui ne tienne compte ni de ce qui est relatif à C_T , ni de ce qui est relatif à F_T , en ce cas ce sous-automate cellulaire est appelé automate cellulaire embarqué.

En d'autres termes, un automate cellulaire embarqué est un sous-automate d'un automate cellulaire qui s'exécute sur un réseau \mathbb{Z}^2 transformé dont la description topologique du réseau associé est stockée dans les états de \mathfrak{A} , et qui tolère au plus m superpositions.

6.2.2 Schéma global de l'algorithme proposé

L'algorithme présenté ici réalise la rotation 3-quasi-transvections, pour tout angle définissable par le biais d'une pente rationnelle. L'algorithme consiste à calculer parallèlement la composition des trois transvections discrétisées via trois automates cellulaires embarqués. Ces automates cellulaires embarqués utilisent une configuration préalablement calculée afin d'obtenir les informations géométriques adaptées pour la réalisation des rotations 3-transvections.

Pour chaque transvection, on utilise le fait que la connaissance l'image de l'axe $O\mathbf{i}$ (resp. de l'axe $O\mathbf{j}$) pour les quasi-transvections permet par suite de calculer l'image de tous les points par la quasi-transvection.

La figure géométrique contenant les images des axes $O\mathbf{i}$ et $O\mathbf{j}$ par les transvections, est réalisée dans une première phase de l'automate cellulaire. La seconde phase de l'automate cellulaire consiste à effectuer les quasi-transvections. Afin de composer les transvections, chacune des transvections est réalisée dans des automates embarqués imbriqués les uns dans les autres.

La majorité des étapes de ce calcul sont simple. Cependant, le calcul de la bissectrice peut être un peu complexe. De ce fait l'algorithme est exact pour les angles pythagoriciens. Dans ce cas, la tangente pour l'angle de pente $\alpha/2$ est de pente rationnelle, et il est possible de s'assurer de sa validité géométrique. Par contre, dans le cas général, il reste une très légère indéterminée qui fait que le calcul peut n'être pas exactement une rotation 3-transvection. Dans tous les cas, la distance du pixel à son image par rotation n'excédera deux pixels de différence. Ainsi, l'opération obtenue reste une rotation discrète et une quasi-isométrie.

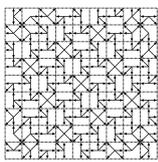
6.2.3 Comment réaliser la figure ?

Dans cette section, on réalise une version discrète de la Figure 6.5, à partir d'une configuration initiale sur laquelle les points O et A ont été repérés.

En particulier, les versions discrètes des deux droites : $\Delta_1 : y = \sin(\alpha)x$ et $\Delta_0 : x = -\tan(\alpha/2)y$ qui correspondent aux droites images des axes $O\mathbf{i}$ et $O\mathbf{j}$ par les transvections, seront marquées d'états particuliers. Les transvections horizontales qui ont lieu dans les rotations 3-transvections, visent à transformer $O\mathbf{i}$ de telle façon à ce que $\theta_1(O\mathbf{j})$ en $\Delta_0 \cdot \theta_2(O\mathbf{j})$ soit égale à Δ_1 , et que $\theta_3(O\mathbf{i})$ soit égale à Δ_0

Commençons par observer la construction à la règle et au compas de cette figure : que fait-on ? On trace le cercle \mathcal{C} de centre O qui passe en A . On appelle H le point d'abscisse positive qui correspond à l'intersection du cercle \mathcal{C} avec l'axe $O\mathbf{i}$. On mène D_0 , la droite perpendiculaire à $O\mathbf{i}$ passant par H . Ensuite, on trace la parallèle à $O\mathbf{i}$ passant par A , et on appelle son intersection avec D_0 B . La droite OB correspond à la droite Δ_1 .

On calcule ensuite la bissectrice de l'angle HOA , on dénomme par I le point d'intersection de cette bissectrice avec \mathcal{C} . On calcule ensuite le symétrique de I par rapport à la droite $y = x$, on calcule son symétrique par rapport à $O\mathbf{j}$, ce qui revient à tourner le point de $\pi/2$.



Il se trouve que c'est précisément cette construction que l'on réalise, étape par étape, sur automates cellulaires. On procède en concaténant de petits automates cellulaires qui opèrent chacun des opérations élémentaires nécessaires à la construction de la figure.

Les automates cellulaires en charge d'une transvection devront soit transformer Oj en Δ_0 , soit transformer Oi en Δ_1 .

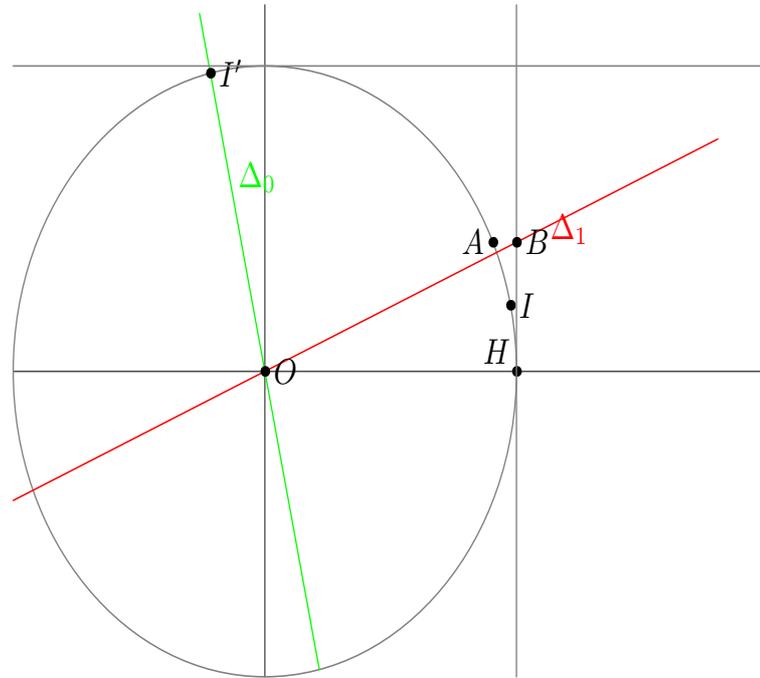


Fig. 6.5 – Cette figure est la version continue de ce que la première partie de l'algorithme va réaliser par le biais d'automates cellulaires. Cette figure nous guide dans la suite du processus de rotation 3-transvections. La ligne verte Δ_0 représente l'image de la droite Oj par la transvection horizontale. Tandis que la ligne rouge Δ_1 représente l'image de la droite Oi par la transvection verticale.

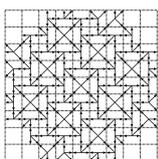
L'algorithme prend en entrée une configuration initiale dans laquelle toutes les cellules sont dans un état quiescent sauf deux qui indiquent l'origine et l'angle. On attend de cet algorithme qu'il transforme une configuration embarquée (voir 6.2.1) de telle manière que l'image de chacun des points de cette configuration correspondent à l'image d'un point de la configuration initiale par la rotation discrétisée.

6.2.4 Réalisation de la figure sur automates cellulaires

Dans la configuration initiale C_{OA} , toutes les cellules sont dans un état quiescent sauf deux, d'un côté la cellule qui dénote la position de l'origine, et de l'autre celle qui dénote la position de A.

La position du point A sert à indiquer la valeur de l'angle dont on souhaite effectuer une rotation. Pour réaliser la figure 6.5, on effectue les opérations géométriques suivantes :

1. On dessine les axes Oi et Oj , on marque chaque octant – les points O et A doivent tous deux savoir dans quel octant ils se trouvent l'un par rapport à l'autre.



Ceci repose sur une simple propagation à partir de l'origine et peut se faire en temps réel.

2. On dessine le cercle arithmétique de centre O et de rayon OA .
On appelle \mathcal{C} le cercle ainsi obtenu. Pour cela, on utilise les cercles par automates cellulaires construits selon les méthodes de Laure TOUGNE [TOU97] – ceci peut se faire en temps linéaire.
3. On attend l'intersection entre \mathcal{C} et O_i , immédiatement après, on appelle X ce point, il est unique.
4. On calcule la bissectrice de XOA , en générant des faisceaux de cercles discrets synchrones à partir de X et de A . On appelle l le point d'intersection résultant. Nous détaillons cette construction en Section 6.3.7.
5. On calcule l'image l' par rotation de $\pi/2$ de l .
Voir Section 6.3.4.
6. On dessine le segment Ol' , et on prolonge le segment Ol' en une droite Δ_0 .
Voir Section 6.3.2.
7. On lance une demi-droite horizontale D_0 à partir de X vers le haut.
8. On lance une demi-droite horizontale D_1 à partir de A vers la droite.
9. On calcule l'intersection entre D_0 et D_1 qui forme un point B .
10. On dessine la droite Δ_1 passant par O et B , toujours détaillé en Section 6.3.2.

Les étapes servant à la réalisation de la configuration seront enchaînées de manière séquentielle ou parallèle, grâce aux modes de compositions détaillés dans les paragraphes précédents.

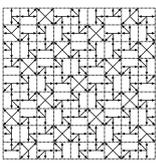
Quand ces étapes sont terminées, on peut passer à la réalisation des 3-transvections. La seconde partie de l'algorithme consiste à effectuer dans trois automates embarqués les trois transvections nécessaires à la réalisation. Avant de commencer, on prend soin de recopier les données nécessaires à chacune des transvections, c'est-à-dire les informations relatives aux droites $O_i, O_j, \Delta_0, \Delta_1$ dans l'état de l'automate embarqué. L'automate doit par la suite travailler relativement à la version embarquée des configurations.

6.2.5 Analyse de l'algorithme

Nous tenons compte maintenant des temps de calcul pour donner un ordre grandeur concernant la complexité de l'algorithme :

Soit \mathfrak{A}_1 automate embarqué qui s'exécute normalement en temps linéaire. La définition de la notion d'exécution embarquée implique que \mathfrak{A}_1 s'exécute en temps linéaire une fois embarqué. Il est tout aussi trivial que la mise en parallèle d'automates cellulaires qui s'exécutent en temps linéaire, s'exécute au final en temps linéaire. Le cas de la composition séquentielle d'automates cellulaires est un cas plus complexe à traiter, en effet $\mathfrak{A}_1 \odot \mathfrak{A}_2$; ce qu'il faut montrer c'est que les phénomènes de blocage de l'automate cellulaire, induits par le rythme de progression de l'automate \mathfrak{A}_1 , n'induisent pas un retard trop grand sur l'exécution de l'automate cellulaire global. Cela reste facile à prouver si l'automate cellulaire \mathfrak{A}_1 (respectivement \mathfrak{A}_2) s'exécute en temps linéaire, cela signifie qu'il existe une constante k_1 (resp. k_2) telle que pour tout rayon r au bout d'un temps $k_1 r$ (resp. $k_2 r$) et donc étant donné une boule de rayon $k_1 r$ (resp. $k_2 r$) alors la boule de rayon r est calculée. On vérifie alors que pour l'automate $\mathfrak{A}_1 \odot \mathfrak{A}_2$, il existe une constante $k_3 = k_1 k_2$, telle que pour toute boule de rayon r au bout d'un temps $k_1 k_2$, la boule de rayon r est complètement déterminée.

Lemme 6.1 *L'exécution séquentielle d'automates $\mathfrak{A}_1 \odot \mathfrak{A}_2$ cellulaires en temps linéaire s'exécute en temps linéaire.*



Théorème 6.2 *L'algorithme s'exécute en temps linéaire sur un automate cellulaire.*

Démonstration :

L'algorithme n'est formé qu'à partir d'automates cellulaires n'utilisant que des transformations qui préservent la linéarité du temps d'exécution : des séquences d'automates (exécution séquentielle), des mises en parallèles d'automates (exécution parallèles), des automates embarqués.

c.q.f.d.

Conséquence : cet algorithme est plus rapide qu'une implémentation séquentielle de la rotation discrétisée d'images. Notons cependant qu'une complexité linéaire sur un automate cellulaire équivaut à un nombre d'opérations à la seconde supérieure à celle d'un algorithme quadratique .

On recopie dans chacune des configurations embarquées les sous-ensembles des droites Δ correspondant. Les automates de transvections peuvent être exécutés en parallèle. Les opérations qui permettent de construire l'automate attendu, nous permettent à la fois de garantir que l'automate existe et s'exécute bien en temps linéaire.

6.3 Automates cellulaires pour la géométrie discrète

Pour la construction de la figure, une description algorithmique du fonctionnement de chacun des sous-automates cellulaires est utile. Les tables de transitions sont bien trop longues à décrire pour de tels automates cellulaires. Nous nous contentons ici d'une description verbale de ces automates – nous évitons de figer dans un formalisme fastidieux l'algorithme exact de chacun de ces automates.

6.3.1 Tracé de segments

À ma connaissance, il n'y a pas de littérature explicitement consacré au tracé de segments de droites discrètes dans une direction arbitraire sur automates cellulaires. Cela dit, puisqu'il s'agit d'un problème courant, de nombreux auteurs abordent le sujet. De plus, le tracé de droite n'est pas sans relation avec le problème de la ligne de fusillers dans lequel, on doit permettre à des signaux de se déplacer à des vitesses arbitraires [MAZ87], [YUN93].

L'approche que nous proposons, revient à calculer progressivement la division par $x_v v$ et $y_v v$. Sans perte de généralité, on suppose $x_v > y_v$.

Pour compter $x_v/y_v v$ points, on commence par marquer par un état particulier le rectangle qui circonscrit O et \mathbf{v} . A tous les instants pairs, seront envoyés depuis O un signal s_0 dans les directions verticales et horizontales.

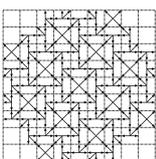
Le signal s_0 avance en temps réel dans le rectangle jusqu'à ce qu'il rencontre la fin du rectangle OA , en s'arrêtant il indique alors que la cellule porte le signal s .

À chaque fois que x_v points sont comptés, un retour à la ligne est effectué. A chaque retour à la ligne, une particule est émise, cette particule part à la recherche de l'origine. Une fois celle-ci identifiée, la particule suit le fil géométrique lié qui est le segment en construction et déplace l'extrémité du segment de 1.

On suppose que chacun des côtés du rectangle OA est dénoté par un état spécial.

L'algorithme est explicité en Figure 6.6. Depuis O on tire un temps sur deux des signaux qui se propagent le long des côtés et qui vont s'accumuler le long des côtés.

Quand le côté est rempli par le signal s , c'est un signal différent qui est immédiatement envoyé par O le long de ce côté. Ce signal efface tous les signaux S_0 contenus sur le côté (on remet à 0).



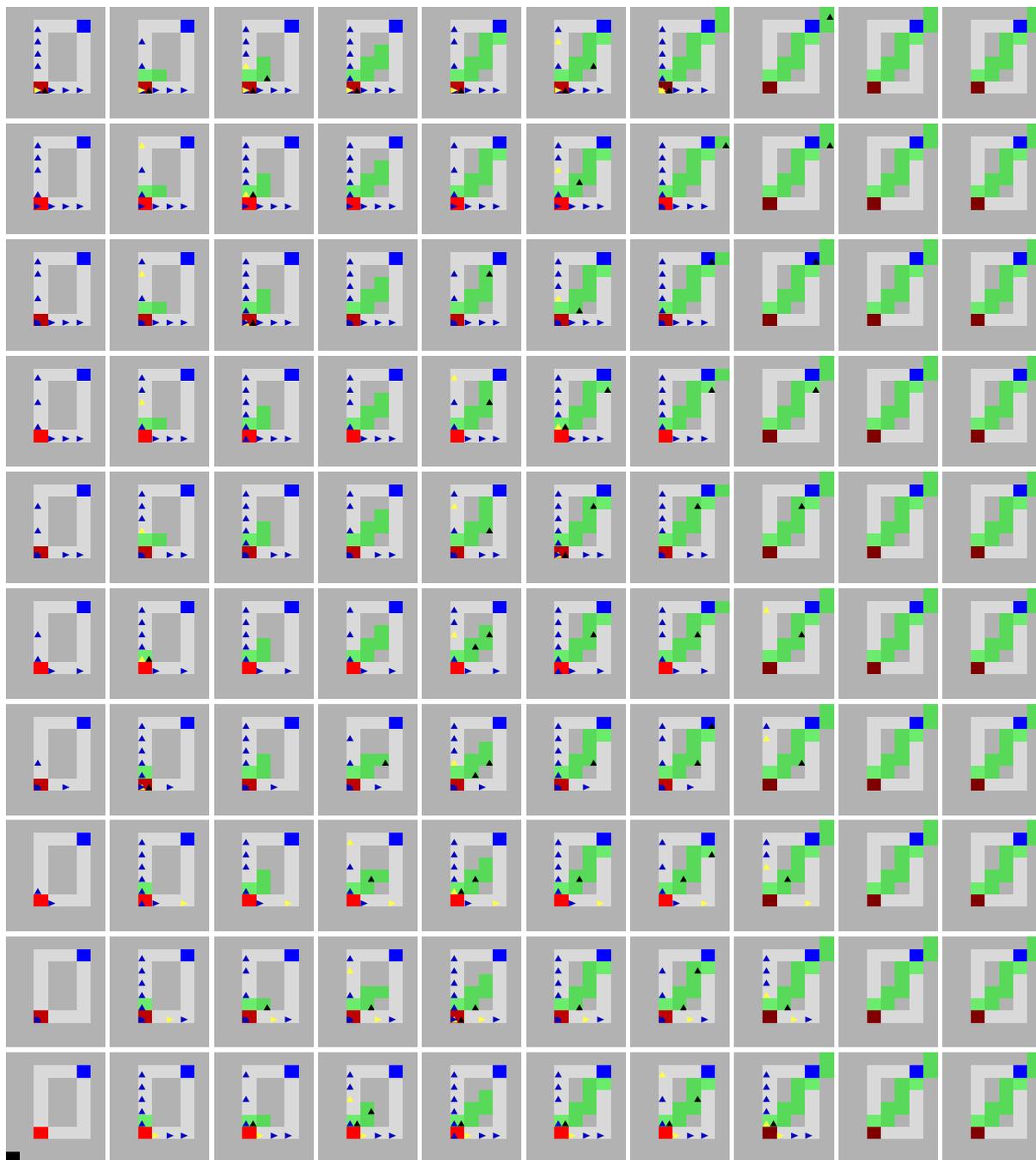
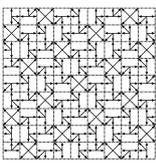


Fig. 6.6 – Automate cellulaire traçant des segments de droites discrètes. Les signaux sont dénotés par des ronds et des triangles. Les états statiques sont représentés par des rectangles.



De plus, quand un côté est rempli, un autre signal est envoyé. Il se propage le long d'un fil qu'il participe à construire en rajoutant un élément à son extrémité.

6.3.2 Dessin des droites naïves et standards de pente rationnelle

Entrées et sorties de l'algorithme

La configuration en entrée vérifie que les cellules O et A sont dans des états particuliers. Les autres cellules sont dans un état quiescent.

On suppose les cellules du segment OA dans un état particulier ; si ce n'est pas le cas, on peut appliquer l'algorithme présenté en 6.3.1 – les cellules du rectangle circonscrit à OA doivent être dans un état particulier – si ce n'est pas le cas on arrivera toujours à construire ce rectangle en temps linéaire.

Δ est la droite discrète ayant la même connexité que le segment OA qui a la même direction que OA et qui inclut OA . La sortie de l'algorithme est une configuration.

Principe et propriétés

Il est assez facile de créer un automate cellulaire qui contienne un sous-système en charge de répéter un motif. L'angle indiqué par O correspond à l'angle dont la tangente vaut $\frac{A_y}{A_x}$. Pour considérer une droite qui a cette pente, il suffit de créer un automate qui reproduit la pente dessinée sur le segment OA .

On suppose que les états du bord du rectangle de O et de A sont toujours marqués par un état spécial. Si ce n'est pas le cas, cette construction se fait de toutes façons en temps linéaire.

On suppose sans perte de généralité que A est dans le premier quadrant. On peut dès le début du processus indiquer les quadrants dans lesquels se trouvent les objets.

L'idée de l'algorithme est simplement de construire deux vers qui suivent un chemin 8-connexe et qui sont des organismes constitués de cellules mobiles. Ils reconstruisent en leur tête la même chose que ce qu'ils lisent en leur queue. Remarquons que si le ver efface ce qu'il a lu, alors le ver et le segment implémentent un système capable de se déplacer en temps réel capable de se déplacer dans n'importe quelle direction, in extenso un genre de particule capable de se déplacer de façon isotropique^(a)

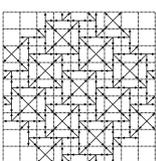
La configuration initiale contient un segment OA . Le rectangle qui circonscrit O et A est marqué d'un état spécial. On se sert de deux des côtés de ce rectangle pour définir la configuration initiale du ver. On suppose que la tête du ver est située en A et la queue en O .

À chaque étape, un temps sur deux lire ce qu'il se passe au niveau de la queue de lecture, c'est-à-dire propager un signal qui transporte l'information sur le long du corps en temps réel. Lors de sa propagation, le signal entraîne un déplacement dans la direction indiquée du corps ; puis lorsque le signal arrive à la tête il s'écrit à la suite.

L'information suit le corps du ver qui est un fil bien défini, elle est donc reproduite dans le même ordre à l'arrivée qu'au départ. Si l'information n'a pas été altérée lors de son transit, elle permet de reconstruire le segment correctement.

L'autre point à vérifier est que le fil du corps du ver suit une trajectoire qui est représentable sur automates cellulaires ; en d'autres termes, on vérifie qu'il n'y ait pas de contorsion arbitrairement

^(a)Notons alors que la topologie de l'ensemble est circulaire, cela peut évoquer l'idée contemporaine de la physique qui voudrait cesser de voir des particules élémentaires mais verrait plutôt des objets fonctionnant en dimension 1 à la topologie cyclique, qui dans la théorie actuelle on plein d'autres propriétés et qui sont appelées *super-cordes*.



grande du corps du ver. Les signaux étant espacés de deux temps, il ne peut y avoir plus deux cellules mobiles du ver par cellule.

6.3.3 Symétrique d'un point vis-à-vis de l'axe des abscisses/ordonnées

L'idée de base est de faire partir deux signaux depuis A . Le premier signal part en temps réel en direction de l'axe de symétrie. Le second part avec une vitesse $1/2$ dans la même direction. Lorsque chaque signal croise l'axe de symétrie, il intervertit sa vitesse avec celle de l'autre signal. Le symétrique est placé au point où se produit la nouvelle intersection entre les deux signaux. Cette stratégie, dans le continu, est clairement valide. Dans le discret, il faut prendre en compte la parité afin de marquer l'intersection comme il faut.

6.3.4 $\pi/2$ -rotation d'un point de \mathbb{Z}^2

Une solution simple consiste à commencer par calculer le symétrique $A' = (y, x)$ de $A = (x, y)$ par rapport à la droite $x = y$, ce qui se fait simplement en envoyant un signal horizontal et un signal vertical vers cette droite, et en faisant repartir les signaux de manière orthogonale à la droite. On calcule ensuite le symétrique B de A' par rapport à l'axe O_y , on obtient alors le point en $B = (-y, x)$, ce qui correspond bien à l'action d'une rotation de $\pi/2$.

6.3.5 $\pi/2$ -rotation d'une image

Pour réaliser la $\pi/2$ -rotation d'une configuration, on commence par construire, à partir du centre, une famille de carrés concentriques alternativement sur deux états. Ces carrés sont des sphères pour la norme infinie. Les cellules des axes O_i et O_j sont marqués d'un état particulier.

Sur chacune des sphères, le point initialement situé en O_i va se déplacer avec une vitesse $1/2$ selon une trajectoire qui suit le carré auquel il appartient, dans le sens de rotation choisi, jusqu'à se retrouver en O_j .

Lors de chaque déplacement de la cellule mobile initialement située en O_i , propage à ses voisines l'information du déplacement à effectuer soit en se superposant à elle afin de les pousser, soit en créant un vide afin de les attirer. Les autres points de la sphère se mettent donc en mouvement pour suivre ce point initialement situé en O_i .

6.3.6 Cercles discrets sur automates cellulaires

Nous avons déjà discuté de ce point dans l'introduction. Afin d'être le plus proche possible de la géométrie discrète, nous basons nos constructions de cercles sur les automates cellulaires de Laure TOUGNE [DMT99].

6.3.7 Bissectrice d'un angle

Pour calculer la bissectrice d'un angle, on génère des familles de cercles discrets et on repère leur intersection sur une grille légèrement sur-échantillonnée : on effectue un groupage 2×2 . Le groupage d'un automate cellulaire étant un automate cellulaire – cela ne nous pose pas de difficulté.

Pour tracer les cercles discrets, nous emploierons les algorithmes de tracés de familles de cercles de Laure TOUGNE.

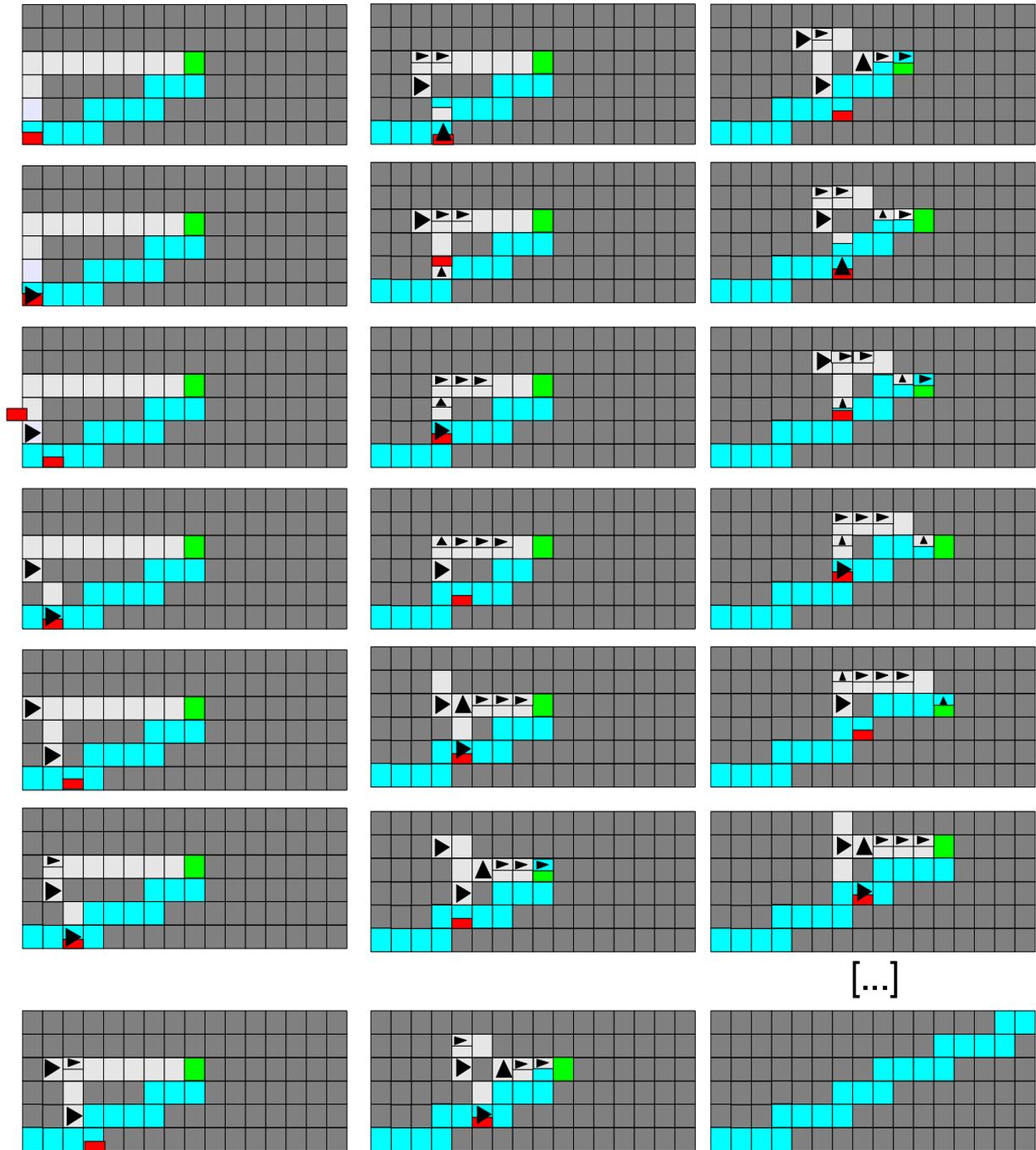
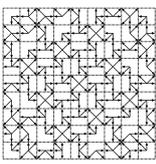
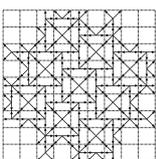


Fig. 6.7 – Exemple de diagramme espace-temps d'un automate cellulaire prolongeant un segment standard en une demi-droite standard de pente rationnelle



Entrées et sorties de l'algorithme

En entrée de l'algorithme, la configuration initiale est définie ainsi :

- les cellules des axes O_i et O_j sont dans un état particulier; elles sont ainsi stylisées comme correspondant aux axes horizontaux et verticaux; ce marquage permet de localiser le centre de la rotation;
- les cellules correspondant aux points O et A sont dans des états particuliers; le point A qui sert à définir l'angle est normalement dans un état qui lui est propre;
- les cellules du cercle \mathcal{C} centré en O et passant par A sont dans un état spécifique;
- on a repéré par un état particulier la cellule B d'abscisse positive qui est le point d'intersection entre O_i et \mathcal{C} . Ce point est unique.

À la terminaison, la configuration est caractérisée par : la cellule I qui est située à l'intersection entre la bissectrice et le cercle \mathcal{C} est dans un état particulier.

Principe et propriétés

On s'intéresse aux points de la bissectrice.

Il est facile de s'assurer que les cercles sont de même diamètre si on commence à construire les cercles à partir de A et de B au même moment.

Pour synchroniser la construction du fil entre A et B ainsi on construit un fil entre A et B , puis on calcule le milieu J de ce fil. Tout ceci peut se faire en temps linéaire : Il s'agit simplement de construire un rectangle circonscrit à A et B . On utilise alors deux côtés comme un fil, puis d'effectuer une synchronisation, type ligne du fusilier. Ensuite, en prenant soin de tenir compte des habituelles questions de parité liées à la division d'un entier par 2. Deux signaux temps-réel se propagent à partir de J en direction de A et de B . Ces deux signaux vont rencontrer leur destination au même instant. Ainsi, on a synchronisé le départ de la construction des deux familles de cercles.

En procédant ainsi, il reste une ambiguïté sur la position du point I ; du fait du rythme auquel progresse les cercles concentriques initiés en A et en X , il se peut que les cercles soient justes en contact avant de se dépasser d'un coup. De ce fait le point d'intersection entre les deux cercles semble mal défini en discret. Remarquons cependant

peut estimer que ces points tiennent dans une boule de rayon 4. Et qu'en réalisant cet automate cellulaire dans un groupage par 4 des cellules on résout une partie du problème.

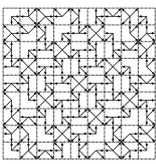
6.3.8 Calcul d'une transvection

Décrivons maintenant les automates cellulaires qui exécutent des quasi-transvections horizontales ou verticales. Le principe est le suivant : si on connaît l'image de la droite O_j , on connaît l'image de toutes lignes; ceci est vrai puisque tous les points d'une même ligne sont déplacés d'une même quantité. Les choses se passent de même pour les transvections verticales avec l'axe O_i . Tout est symétrique. On peut donc se limiter sans perte de généralité à l'étude des transvections horizontales.

Entrées et sorties de l'algorithme

En entrée de l'algorithme, la configuration initiale doit être définie ainsi :

- les cellules de l'axe O_j qui sont dans un état particulier;
- les cellules qui appartiennent à la droite discrète image \mathcal{D} qui doit être l'image de O_j par quasi-transvection; \mathcal{D} est une droite naïve, qui est fonctionnelle horizontalement;



- les autres cellules sont dans un état quiescent ;
- chaque cellule contient exactement une cellule mobile de l'automate embarqué.

À la terminaison de l'algorithme, la configuration finale de l'algorithme est disposée ainsi : Sur chaque ligne k :

- les cellules mobiles de la ligne k auront toutes été translattées de la même quantité δ_k où δ_k est la différence de position entre le point de O_i et son image par transvection discrétisée, c'est-à-dire de $[k\alpha]$;
- il y a exactement une cellule mobile par cellule.

On suppose encore que les cellules de O_j et les cellules de \mathcal{D} possèdent dans leur état un indicateur qui précise le côté duquel ces cellules se situent, l'une par rapport à l'autre – dans la ligne horizontale. Si ce n'est pas le cas, cet indicateur peut être calculé en temps linéaire.

Principe et propriétés

Sur automate cellulaire, le coeur de l'algorithme de transvection consiste à déplacer un temps sur deux la cellule mobile initialement située en O_i . Appelons cette dernière cellule mobile, cellule moteur. Le déplacement de la cellule moteur va conduire les autres cellules mobiles de la ligne horizontale à se translater de manière identique. Informellement, la cellule moteur exerce une pression dans la direction où elle avance et une dépression dans la direction qu'elle fuit. La pression et la dépression vont se propager en temps réel dans la ligne de la configuration. De ce fait, le choix de faire se déplacer la cellule moteur un temps sur deux va permettre de garantir qu'il y a au plus deux cellules mobiles par cellule dans la configuration ; si on suppose que la cellule moteur ne fait qu'avancer un temps sur deux le long de la ligne en partant de O_j . En effet au temps t , la cellule moteur est en position $\lfloor \frac{t}{2} \rfloor$, et il s'agit de son $k = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor^{\text{ème}}$ déplacement. L'information concernant le $k^{\text{ème}}$ déplacement de la cellule est donc en $k + (t - 2k)$, c'est-à-dire qu'elle est située $t - k$. Ceci signifie donc que l'information concernant les signaux associés à chaque déplacement de la cellule moteur ne se superposent pas – contrairement à ce que nous obtiendrions si la cellule moteur tentait de se déplacer en temps réel. En un certain sens, le fait qu'une particule/cellule mobile ne puisse se déplacer à une vitesse : "temps réel" – autrement appelée vitesse de la lumière rappelle les loi de LORENTZ en relativité. Si α le coefficient de transvection est compris entre $[-1, 1]$, on peut encore prouver qu'à tout instant la transformation effectuée conserve approximativement le voisinage : $x \in \mathcal{V}_4 \Rightarrow x \in \mathcal{V}_8$. Notons f_t la transformation effectuée par l'automate au bout de t itérations de calcul.

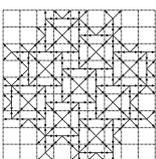
Au regard de ces faits, il s'agit bien d'un automate à transformation propre à supporter un automate embarqué.

6.4 Les autres méthodes sur automates cellulaires

Dans le même genre de considération, on peut normaliser l'implémentation en temps linéaire des rotations à base de deux symétries axiales, l'un selon l'axe vertical et l'autre le long de droite d'angle $\tan(\alpha/2) + \pi/2$. Ce qui doit encore pouvoir se calculer en temps linéaire. Les principes et la nature des résultat ne changent pas tant que celà, nous n'avons pas intérêt à en dire plus ici.

6.4.1 Autre expérience : automates cellulaires basés sur des applications locales

Dans cette thèse, on a aussi tenté de regarder un automate cellulaire dont le but premier serait de réaliser de manipuler des organismes fonctionnant grace à des configurations du type de C'_α et

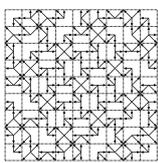


tendant dans un premier temps sans tenir compte de la distance 2.

Une première approche simple peut consister simplement à mettre en rotation les bords. Et à faire suivre l'intérieur. Cette approche pour laquelle il ne devrait pas être difficile de trouver un automate cellulaire qui l'implémente.

- une action contractante (les points ont tendance à se rapprocher du centre) ;
- une action expansive (les points ont tendance à s'éloigner du centre) ;
- une règle de relative densité (il y a au plus deux pixels par cellules) ;
- une règle de relatif éparpillement (les pixels adjacents peuvent s'éloigner au plus de $\sqrt{2}/2$)
- un jeu de motifs interdits (servant à éviter certaines situations de blocages)

Malheureusement, toutes les expériences menées jusqu'à ce jour, l'automate cellulaire finit toujours par se bloquer – Les codes de tels automates sont très complexes, et de nombreux bugs peuvent exister encore dedans.



Chapitre 7

Conclusions

Plan détaillé du chapitre

7.1	Recadrage	161
7.1.1	Géométrie discrète et aspects algorithmiques	161
7.1.1a	Algorithmes efficaces	161
7.1.1b	La recherche des grands préceptes des rotations	162
7.1.2	Systèmes dynamiques et substitutions généralisées	162
7.1.2a	Des résultats variés	162
7.1.2b	Substitutions généralisées	162
7.1.2c	La notion de multigraphe des fragments	163
7.1.3	Sur la modélisation physique et les rotations discrètes	163
7.2	Perspectives et interrogations	163
7.2.1	Interrogations et pistes	163
7.3	Ouverture	165

“En fin de compte, nous ne sommes là que pour nous moquer de l’univers”
Emil Michel CIORAN.

7.1 Recadrage

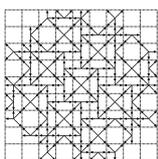
7.1.1 Géométrie discrète et aspects algorithmiques

7.1.1a Algorithmes efficaces

Dans la géométrie discrète, l’étude des rotations discrètes se situe comme une question plutôt centrale ; sa présence récurrente dans les travaux fondateurs de la théorie a déjà été constatée. Aussi, la géométrie euclidienne est stable par rotation, et la géométrie discrète doit l’être autant que faire se puisse.

Une contribution majeure de cette thèse est relative à la conception, ou à l’amélioration d’algorithmes de rotations discrètes utiles à la géométrie discrète. Ces algorithmes sont d’ordre de performance optimal. L’algorithme incrémental (cf. Chapitre 5), et l’algorithme sur automates cellulaires (cf. Chapitre 6) fournissent deux primitives utiles pour la simulation en milieu discret. Ces deux algorithmes font disparaître le calcul flottant du cosinus et du sinus de la rotation. En ce sens, ils sont en accord avec la géométrie discrète telle que définie Jean-Pierre RÉVEILLÈS.

Grâce aux gains en performance de l’algorithme incrémental, on peut envisager des applications dans ce qui est de la reconnaissance de motifs, pour le watermarking, ou pour les simulations physiques.



7.1.1b La recherche des grands préceptes des rotations

Dans nos motivations, les préceptes recherchés se voulaient applicables de manière robuste dans une grande variété de systèmes complexes. Or, l'algorithme du Chapitre 6 n'est ni incrémental, ni uniforme. A l'instar de Laure TOUGNE, nous sommes restés dans des procédés très "algorithmiques", des procédés qui ont une complexité de KOLMOGOROV relativement conséquente, et qui sont sensibles à de petites altérations de l'état global.

Idéalement, c'est un modèle davantage probabiliste qui était recherché ; et ce afin d'être dans un second temps dérandomisé. Pour continuer dans cette voie, les arguments développés à la fin du chapitre 3 et du chapitre 6 semblent prometteurs.

Note 7.1.1.1 *Pour la majorité des motivations : il faudrait arriver à un algorithme incrémental capable de faire tourner un objet en temps $2\pi r$ sur un automate cellulaire. De ce que nous savons sur la topologie des angles spéciaux, cela implique qu'un certain nombre de mouvements ont lieu en parallèle. Lors du processus incrémental, un tel algorithme n'explore donc pas toutes les rotations.*

7.1.2 Systèmes dynamiques et substitutions généralisées

7.1.2a Des résultats variés

Le recodage des rotations discrètes en des configurations C_α , C'_α établit le lien avec la dynamique symbolique bidimensionnelle. La méthode s'applique avec succès pour la rotation discrétisée et pour la rotation 3-transvections. Et nous présumons qu'elle est applicable sur un nombre arbitraire de transformations linéaires discrétisées et composées.

Dans le cas de la rotation discrétisée, l'étude des cas périodiques nous a amené à caractériser les angles pour lesquels la rotation est bijective. Cela a donné une réciproque au théorème d'Eric ANDRÈS et de Marie-Andrée JACOB relatif aux rotations bijectives.

Concernant l'étude des cas périodiques, les liens avec les développements de Dan ROMIK semblent prometteurs. Il faudrait davantage creuser cette voie. Elle pourrait apporter des résultats fondamentaux sur les interactions possibles entre les cas périodiques et les cas quadratiques.

Par le biais des systèmes dynamiques bidimensionnels, nous avons aussi montré la quasi-périodicité de toutes les configurations issues de rotations discrétisées.

Avec Valérie BERTHÉ, on a étudié la fréquence de chacun des motifs dans les configurations. Les arguments employés relèvent de suite de WEYL. Cet effort s'intègre dans la quête d'automates cellulaires randomisés qui implémenteraient des rotations par des processus stochastiques ou non supervisés.

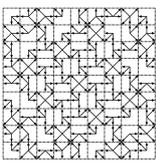
Ces résultats furent salués par des publications internationales, [P-JI1] et [P-JI2].

7.1.2b Substitutions généralisées

Le Chapitre 4 est dédié à la description de nos efforts pour décrire l'autosimilarité des configurations comme $C_{\pi/4}$. Le chapitre traite de dynamique symbolique en dimension 2 et des substitutions généralisées. Afin d'arriver à établir l'autosimilarité de la configuration $C_{\pi/4}$, différentes méthodes ont été étudiées : mots de retours, graphes de RAUZY...

Dans le cas des angles quadratiques, les configurations ont été assimilées à la superposition de séquences sturmiennes généralisées. Cela nous a fourni une première méthode démontrant l'existence d'un processus substitutif sous-jacent à la construction des configurations de rotations.

A l'aide des graphes de RAUZY, on a mis en évidence l'existence de substitutions planaires. Celles-ci avaient lieu sur un réseau rectangulaire tourné selon le vecteur d'entrelacement, dans les cas où



celles-ci sont autosimilaires. À la fin du Chapitre 4, nous avons donné les arguments essentiels à la démonstration de l'existence de substitution planaires engendrant les configurations associées à ces rotations. À notre connaissance, en dimension 2, la preuve de l'existence de ce type de substitution est inédite^(a).

7.1.2c La notion de multigraphe des fragments

D'un point de vue informatique et théorie des langages formels, une des notions sur laquelle nous souhaitons porter l'accent est le multigraphe des fragments. Pour mémoire, il s'agit d'un modèle où les nœuds sont étiquetés par des mots, où les arcs portent des déplacements. Il permet un formalisme uniforme pour traiter d'automates en dimension 1, et en dimension 2. Un multigraphe des fragments reconnaît un mot si en partant de son état initial, il existe une couverture du mot considéré par les motifs des nœuds, qui coïncide en chaque motif avec la configuration, et où les déplacements d'un état à l'autre sont régis par les arcs.

Le multigraphe des fragments induit une notion d'automate. Cette notion est a priori à la fois, compatible avec la notion d'automate unidimensionnelle, et compatible avec la notion de substitution pointée. Elle permet d'étendre ces notions à la dimension 2, dans un formalisme aussi puissant que les autres modèles présentés dans l'article de GIAMMARESI et RESTIVO. Le multigraphe des fragments possède encore l'avantage de se trouver adapté pour définir une notion de transducteur bidimensionnel.

7.1.3 Sur la modélisation physique et les rotations discrètes

Pour donner aux rotations discrétisées les propriétés attendues, nous avons défendu l'idée, que les transformations agissent sur l'espace en le déformant. L'espace participe à ces transformations en mémorisant les déformations déjà appliquées. Cette idée est développée à travers la thèse dans la notion de configurations, et dans celle de cellules mobiles.

Pour la modélisation physique, cette approche a ses intérêts : On peut stocker tous les angles effectifs de rotations d'un objet discret à travers une configuration dont la forme est identique à l'objet considéré.

Ces éléments renforcent l'idée que les rotations discrètes sont compatibles avec une physique des solides discrète.

7.2 Perspectives et interrogations

Durant la thèse, un certain nombre de travaux ne faisant pas partie des priorités de ce travail ont été ajournés, reportés.

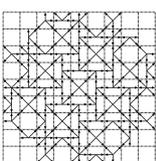
7.2.1 Interrogations et pistes

Voici maintenant des questions ouvertes :

Achever la formalisation des liens avec la théorie des substitutions

Nous avons traité le cas de $\pi/4$, et vu rapidement comment la théorie semblait s'appliquer à d'autres cas. On peut encore donner bien davantage de précisions sur les liens entre ce sujet et les

^(a)Bien que le cas de substitution rectangulaire tournée soit très proche du cadre de MAES.



substitutions. Comme dans le Théorème ??, on aimerait prouver que les configurations de rotations sont constructibles à partir d'un système de substitution S -adique.

Continuer de développer la théorie relative aux liens entre graphes de RAUZY et propriétés des mots.

Plus généralement, hors du cadre des rotations, on souhaite trouver quel est le champ d'application exact de la méthode décrite en 4.5. Avec Julien CASSAIGNE, nous avons commencé à chercher en ce sens.

Lier les constructions de systèmes dynamiques de rotations avec les systèmes formés par des rotations itérés

Quelques chercheurs étudient les rotations itérées d'angle rationnel. Les figures alors obtenues sont aussi autosimilaires.

Si la chose est faisable, il serait intéressant de comparer les figures obtenues avec les configurations dont le développement en fractions continues est associé à nombre rationnel dont la partie périodique du développement en fractions continues est identique au développement en fractions continues du rationnel considéré.

Conclure les recherches liées aux contraintes induites par les variations de fréquence des symboles

À terme, il s'agirait de trouver un automate cellulaire randomisé^(a) qui réalise des rotations de manière robuste. Ce travail fait suite à l'étude menée avec Valérie BERTHÉ au Chapitre 3.

En pratique, il s'agit d'analyser les dérivées des lois qu'on a obtenues sur la fréquence des motifs dans les configurations de rotations, afin de pouvoir relever ces lois en des règles de transitions sur des fragments.

Révéler les connexions envisageables entre processus stochastiques et rotation

Nous avons déjà discuté de ce point en faisant un bilan des résultats des approches symboliques.

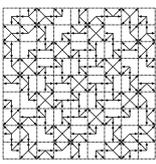
Étudier les changements de centre

Pour les compositions de rotations discrètes, nous n'avons décrit que le cas le plus simple : celui où l'on ne change pas de centre. La méthodologie n'est donc applicable que pour des rotations de même centre. En clair, nous n'avons pas encore obtenu d'algorithmes fonctionnant dans un monde discret, qui reflète intégralement toutes les propriétés de la rotation euclidienne telle qu'est observée dans la nature. Il faudrait poursuivre cette étude.

Trouver les solutions pour obtenir géométrie où droites discrètes et rotations discrètes cohabitent

La compréhension des phénomènes locaux induits par les rotations sur les espaces discrets est spécifiée mathématiquement à l'aide des configurations. La définition d'un cadre propre pour

^(a)quite à être simplifié et glouton



l'établissement d'une géométrie discrète dynamique fait partie des prochains défis à relever dans la discipline.

Analyser les rotations tridimensionnelles

On pose régulièrement la question de savoir ce qui se passe dans le cas des rotations sur des espaces tridimensionnels. La rotation discrète est une opération qui implique un nombre pair de dimensions, et donc qu'en dimension 3 on va avoir un axe invariant. Cela dit la question n'admet pas de réponse facile pour autant. On va pouvoir paver l'espace par des hyperplans naïfs discrets orthogonaux à cet axe. Puis il faudra encore tenir compte des propriétés de ce pavage, de sa régularité afin d'être sûr que tout se passe bien dans ce cas-là. Il faut donc pour répondre correctement à cette question étudier la façon dont la superposition des plans discrets les uns sur les autres, influe sur le maintien de la connexité.

Obtenir une théorie de la géométrie discrète utile pour la modélisation du réel

L'ensemble des droites de RÉVEILLÈS n'est pas clos par rotation discrète. L'image d'une droite par rotation discrète est son image par une ϵ -quasi-isométrie. Ainsi les caractéristiques de la droite résultante ne peuvent être trop différentes de celles la droite antécédente.

Approfondir notre connaissance des angles charnières

On souhaite en savoir davantage sur la structure des angles charnières. En particulier, bien qu'il s'agisse là d'une remarque complètement informelle, ceux-ci sembleraient avoir une propriété correspondant à un type de dualité. Cette dualité existerait entre les angles charnières et les angles pythagoriciens. La rotation discrète d'une image finie correspond à une fonction en escalier. Informellement, les angles charnières correspondent aux discontinuités entre les marches tandis que chaque palier est assimilable à un angle pythagoricien.

Pour étayer cet argument, plusieurs pistes semblent d'ores et déjà énumérables :

D'abord, on peut noter qu'il existe très clairement deux classes d'angles quadratiques : ceux tels que $2p \cos(\alpha) + 2q \sin(\alpha) = 2k + 1$ et ceux tels que $2p \cos(\alpha) + 2q \sin(\alpha) = 2k$. Les premiers angles correspondent aux angles charnières, tandis que les autres sont un surensemble des angles pythagoriciens

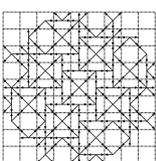
Les triples pythagoriciens et les angles charnières sont tous deux associés à des triplets d'entiers, on peut se demander si la connaissance de plusieurs éléments ne permet pas de concevoir des opérations en arithmétique entière qui établissent une structure entre les angles pythagoriciens et les angles charnières.

Les développements de Dan ROMIK sont aussi une voie qui mérite d'être fouillée davantage.

Si on doit comparer le cas de développements de Dan ROMIK à celui des fractions continues, les angles pythagoriciens jouent le rôle des nombres rationnels, tandis que les angles quadratiques jouent a priori le même rôle que les nombres quadratiques.

7.3 Ouverture

En parlant de la question de l'isotropie sur des réseaux entiers, on remue un matériel historique et des outils neufs. Il en ressort, d'un côté, des éléments à la fois proches d'éléments scientifiques



bien connus^(a) : rotations, mots sturmiens, configurations, et de l'autre côté, des éléments qui ont une valeur d'éléments pionniers comme l'étude sur l'autosimilarité de $C_{\pi/4}$.

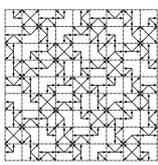
Il est réjouissant de constater que d'autres chercheurs^(b) ont embrayé le pas en quête de propositions pour les rotations discrètes. Leur approche s'intègre davantage dans la dynamique symbolique, et les objectifs ne sont pas toujours identiques aux nôtres.

Pour élucider les modalités de cohabitation entre \mathbb{Z}^n et notre intuition euclidienne de l'espace, la poursuite des études et des recherches sur ces questions semble nécessaire. En continuant à progresser sur des questions de physique inverse, nous disposerons d'autres images pour concevoir et modéliser le réel.

^(a)puisque historiquement étudiés

^(b)Je pense entre autres, aux travaux de Franco VIVALDI, aux récents travaux de Shigeki AKIYAMA et de Wolfgang STEINER.

Notes :



Annexe A

Exemple fondamental : translations sur le tore

A.1 Des translations sur le tore aux généralisations des mots sturmiens

Plan détaillé du chapitre

A.1	Des translations sur le tore aux généralisations des mots sturmiens	III
A.1.1	Les fractions continues	IV
A.1.2	Théorème des trois distances	VI
A.1.2a	Chaîne de systèmes dynamiques induits	VII
A.1.2b	Propriétés des fractions continues	IX

Dans cette annexe, on montre comment étudier les systèmes dynamiques associés aux translations sur un tore unidimensionnel. Il est nécessaire de rappeler les bases de la théorie des fractions continues.

Outre la structure finale de l'orbite des translations sur le tore, nous allons aussi nous intéresser à la répartition des premiers termes de la suite des translats d'un point sur le tore.

En particulier, cela nous conduit à exposer le théorème des trois distances – vu notre propos, il sera plutôt considéré comme un théorème des deux distances.

On cible les résultats constructifs pour l'analyse des translations sur le tore.

On part de l'étude des dynamiques odométriques^(a) pour en passant par les fractions continues faire le liens avec les systèmes sturmiens.

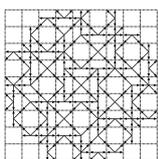
Les liens avec les fractions continues quadratiques permettent d'expliquer les causes de l'autosimilarité observée dans les droites sturmiennes de pentes quadratiques, et dans certains quasi-cristaux.

Des tentatives de généralisation des méthodes pour la compréhension de l'autosimilarité de motifs multidimensionnels de basse complexité se sont multipliées comme en témoignent par exemple [ABI02], [BRO96], [POG03]... Certains éléments présentés ici sont liés aux résultats liés à ceux de théories de substitutions. Ces derniers sont exposés en section 4.1.

Des translations sur le tore aux fractions continues

D'excellents textes introductifs existent pour l'étude fractions continues. En particulier, l'article [BRE80] qui nous fait un tour historique du domaine, l'introduction fournie par [FVV], et de plus

^(a)Les odomètres sont des compteurs à aiguilles– en phase de devenir archaïques– ils existent sous diverses formes. Parler d'odomètre en tant que système dynamique revient en fait surtout à considérer les mouvements de translation sur le tore/ de rotation sur un cercle. Ainsi notre exemple typique sera la rotation de la terre autour du soleil



pour les aspects des liens avec les problèmes diophantiens nous conseillons [FAI91]. Cependant, nombreux sont ceux qui n'arrivent pas à donner une interprétation à ce qui avant tout semble désigner un système de numération sur les réels.

La répartition des années bissextiles dans le calendrier solaire permet de se faire une idée intuitive des processus cachés derrière les fractions continues.

Une année, la durée d'une rotation de la terre autour du soleil, dure à peu près 365 jours. Une telle approximation conduit à une erreur d'un jour tous les 4 ans. Pour passer le nouvel an à la même position par rapport au soleil chaque année, et éviter que décembre ne devienne novembre, tous les 4 ans se produit une année longue d'un jour de plus : une année bissextile. Une année dure donc plutôt à peu près 365 jours et $\frac{1}{4}$. En procédant à une telle approximation, tous les siècles, la terre se décalerait d'un jour et que si rien n'était fait et décembre finirait par devenir janvier. Toutes les 25 années bissextiles, on en est donc conduit à en oublier une. L'année a donc une année plus proche de $365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{25}}$ jours. De même, tous les quatre centenaires ($4 \times 25 \times 4$), le cumul des petites erreurs précédentes ferait que nous nous serions décalé d'un jour, il faut rajouter une journée... L'année dure donc à peu près $365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{25 + \frac{1}{4}}}$. On peut continuer ce type d'approximation encore longtemps... Et c'est ainsi qu'on obtiendra la suite des *quotients partiels* qui correspond au développement en fractions continues associé au mouvement rotatif de la Terre autour du Soleil.

$$365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{25 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\dots}}}} \approx 365.24754901$$

Plus mathématiquement, à partir de l'observation de la dynamique des fractions continues, on distingue deux grandes idées :

- une idée d'approximation ; que nous venons de mettre en évidence.
- une idée de renormalisation ; il s'agit là en fait de dériver et d'intégrer le système dynamique, ce qu'il y a de magique c'est qu'on retombe sur des dynamiques de même nature, et caché derrière ce processus itératif, on retrouve l'opération de décalage sur un développement en fractions continues d'un nombre : $x \mapsto \left\{ \frac{1}{x} \right\}$.

Note A.1.0.1 Ces idées ne sont pas seulement spécifiques aux fractions continues ; on les rencontre dans tous les systèmes de numération "gloutons" : chaque chiffre du nombre a pour vocation de fournir à une échelle donnée la meilleure approximation donnée. A chaque étape on applique une transformation qui renormalise le résidu à décrire.

On va mettre en évidence plus tard ce qui est relatif au processus de renormalisation.

A.1.1 Les fractions continues

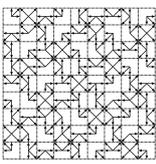
Fixons maintenant quelques notions essentielles relatives aux fractions continues.

Un *développement en fractions continues* désigne la représentation d'un nombre x sous la forme suivante :

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{\dots}}}}}$$

où les a_i sont des entiers et forment la suite des *quotients partiels* de x .

Pour calculer le développement en fractions continues, on a recours à un algorithme qui conserve une trace sur l'algorithme d'EUCLIDE :



Algorithme $dev_fc(x_0 = \frac{p}{q})$	Algorithme $pgcd_euclide(p, q)$
1: $i \leftarrow 0$ 2: $x \leftarrow x_0$ 3: tant que $x \neq 0$ faire 4: $a_i \leftarrow \lfloor x \rfloor$ 5: $x \leftarrow 1/\{x\}$ 6: $i \leftarrow i + 1$ 7: fin tant que	1: $i \leftarrow 0$ 2: tant que $x \neq 0$ ou $x \neq 1$ faire 3: $r \leftarrow p \text{ div } q$ 4: $p \leftarrow q$ 5: $q \leftarrow r$ 6: $i \leftarrow i + 1$ 7: fin tant que

Fig. A.1 – L’algorithme d’Euclide est très similaire à l’algorithme de fractions continues.

Note A.1.1.1 On peut remarquer la similarité^(a) entre l’algorithme qui calcule le développement en fractions continues d’une fraction $\frac{p}{q}$; et l’algorithme d’EUCLIDE entre p et q . Le développement en fractions continues conserve une trace de l’exécution de l’algorithme d’EUCLIDE.

La ligne 4 de l’algorithme dev_cf qui calcule le développement en fractions continues d’un nombre x_0 , correspond à l’opération d’approximation, tandis que la ligne 5 revient à opérer la renormalisation, et induit sur la fraction continue de x_0 une opération équivalente au décalage d’une lettre sur la séquence des quotients partiels.

La séquence des *quotients partiels* est représentée sous la forme d’une liste des crochets où les unités (du fait d’un statut spécial qu’on leur accorde) sont séparées de la suite du développement par un point-virgule, si la séquence des quotients partiels est ultimement périodique on a coutume de mettre une barre au-dessus de la période :

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, \overline{a_n, \dots, a_{n+p}}], \text{ pour avec } a_i \in \mathbb{N}^*, n, p \in \mathbb{N}$$

Un développement en fractions continues d’un nombre réel α tronqué à l’ordre i donne une fraction, le $i^{\text{ème}}$ *convergent* de α : $p_i/q_i = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_i]$

On dénote par ϵ_i la distance par le i^{me} convergent relativement à la valeur approximée :

$$\eta_i = q_i \alpha - p_i$$

Les convergents $\frac{p_i}{q_i}$ d’un nombre α ont la propriété que pour on peut montrer que pour tout $0 < n < q_i$, on a $|\{n\alpha\}| > |\eta_i|$.

En divisant par q_i , on obtient l’erreur par itération :

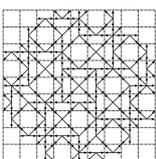
$$\epsilon_i = \frac{\eta_i}{q_i} = \alpha - \frac{p_i}{q_i}$$

Proposition A.1 Les convergents p_i/q_i d’un nombre ayant un développement en fraction continue $[0; a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$ respectent les récurrences linéaires suivantes :

- $p_{-1} = 1, p_0 = 0, q_{-1} = 0, q_0 = 1$.
- $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, n \geq 1$
- $|\epsilon_{n-2}| = a_n |\epsilon_{n-1}| + |\epsilon_n|, n \geq 1$

Il s’agit là de résultats classiques sur les fractions continues qu’on peut prouver par récurrence, et qu’on trouve dans tout bon ouvrage traitant des fractions continues.

^(a)La similarité ne saute peut-être pas aux yeux du lecteur : Pour retrouver le principe est de poser $p = x$ et $q = 1$ et de faire les mêmes opérations en réel. On voit alors que l’échange de variable et l’inversion correspondent bien à ce que fait l’algorithme qui calcule un développement en fractions continues



A.1.2 Théorème des trois distances

On définit $K_{\alpha,n}$ comme étant l'ensemble des points constituant le début de l'orbite associé à une translation de α sur le tore :

$$K_{\alpha,n} = \{ \lfloor k\alpha \rfloor, k \in \{0, \dots, n\} \}$$

Afin de pouvoir décrire plus précisément cet ensemble, on va définir un jeu de fonctions utilitaires :

Soit $s_{\alpha,n}$ l'application qui à un élément de $[0, 1[$ renvoie le "prochain élément" de $[0, 1[$ appartenant à K_n , en assimilant $[0, 1[$ au tore \mathbb{T} en considérant qu'on se déplace dans le sens positif dessus ; formellement :

$$s_{\alpha,n}(x) = \begin{cases} \inf\{y \in K_{\alpha,n} | y > x\} & \text{si } \{y \in K_{\alpha,n} | y > x\} \neq \emptyset \\ \inf K_{\alpha,n} & \text{sinon} \end{cases}$$

On introduit $\Delta_{\alpha,n}$ alors la fonction qui indique pour un point de \mathbb{T} la distance à parcourir dans le sens positif avant de rencontrer la prochain élément de $K_{\alpha,n}$:

$$\Delta_{\alpha,n}(x) = \begin{cases} s_{\alpha,n}(x) - x & \text{si } \{s_{\alpha,n}(x) - x\} \geq 0 \\ (s_{\alpha,n}(x) - x) + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis on définit D_n comme étant l'ensemble des distances qui séparent des éléments consécutifs de K_n .

$$D_{\alpha,n} = \{ \Delta_n(x), x \in K_{\alpha,n} \}$$

On dénote encore par $\{k_{\alpha,i}\}_{i \in \{1..n\}}$ la suite finie dont le $i^{\text{ème}}$ terme est $k_{\alpha,i} = s_{\alpha,n}^i(0)$, c'est-à-dire le $i^{\text{ème}}$ élément de l'ensemble $K_{\alpha,n}$ quand ceux ci sont classés par ordre croissant.

On peut aussi introduire le mot qui indique pour n donné la distance entre deux $k_{\alpha,i}$ consécutifs.

Théorème A.1 *Trois distances (STEINHAUS, Sós [SÓ58], voir aussi [AB98])*

- **Première partie** : Pour tout angle $\alpha \in \mathcal{A}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\#D_n \leq 3$. C'est-à-dire que l'ensemble des distances entre deux éléments consécutifs de $K_{\alpha,n}$ contient au plus deux éléments.
- **Seconde partie** : Pour tout angle $\alpha \in \mathcal{A}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, Soit a_k les quotients partiels de α . $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots]$, et $\frac{p_k}{q_k}$ son $k^{\text{ème}}$ convergent.
Pour tout n un entier positif, il existe alors une unique expression de la forme

$$n = mq_k + q_{k+1} + r \text{ avec } 1 \leq m \leq a_{k+1} \text{ et } 0 \leq r < q_k$$

L'ensemble $K_{n,\alpha}$ est alors divisé de la façon suivante :

- $n + 1 - q_k$ intervalles entre deux points consécutifs ont une longueur de $\lambda_{1,n} = \eta_k$
- $r + 1$ intervalles entre deux points consécutifs ont pour longueur $\lambda_{2,n} = \eta_{k-1} - m\eta_k$.
- il y a $q_k - (r + 1)$ intervalles sont de longueur $\lambda_{3,n} = \eta_{k-1} - (m - 1)\eta_k$ (plus large des trois)

Il importe de noter que si $q_k = r + 1$ seules deux distances apparaissent. Les n tels que seules deux distances apparaissent seront appelés des *nombre propres pour α* . On notera $\chi_\alpha(i)$ le $i^{\text{ème}}$ nombre propre pour α avec $m = a_{k+1}$.

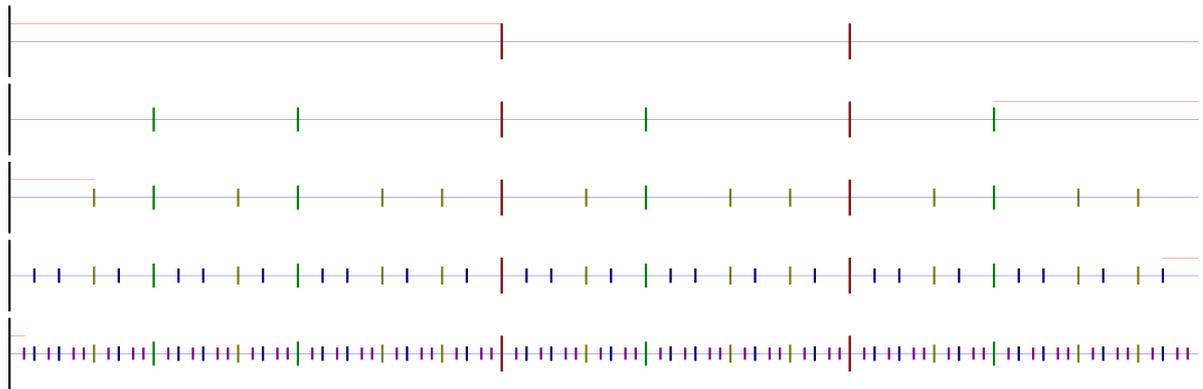
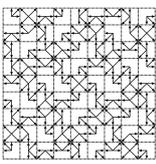


Fig. A.2 – Construction progressive d'ensemble $K_{n,\alpha}$ pour une série de n satisfaisant aux théorèmes des deux distances, avec $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On observera que les mots qui dérivent l'apparition des intervalles courts et longs correspondent aux convergents du mot sturmien.

A.1.2a Chaîne de systèmes dynamiques induits

Proposition A.2 *Le système dynamique induit à partir d'une translation de α sur le tore unidimensionnel \mathbb{T} et d'un intervalle semi-ouvert^(a) de longueur α sur le tore \mathbb{T} est un échange de deux intervalles.*

Démonstration :

La seule chose à prouver est qu'on obtient bien au plus un échange de deux intervalles. Il suffit pour cela de comprendre la nature de l'application de premier retour, dans l'intervalle de longueur α par des translations de longueur α induit naturellement une suite d'intervalles qui sont successivement deux à deux contigus. Leur réunion mesurant 2α . Finalement quel que soit le temps de retour minimal approximatif τ_0 de l'intervalle I_0 , I_0 est entièrement recouvert par $(I_0 + \tau_0\alpha)$ et $(I_1 + \tau_1\alpha)$, donc il y a au plus deux de temps de retour qui induisent une partition de I_0 en deux intervalles, les premiers revenant dans I_0 au bout de τ_0 itérations et en ayant effectué un déplacement de $\lfloor \tau_0\alpha \rfloor$, les seconds revenant dans I_0 au bout de $\tau_0 + 1$ itérations en ayant effectué un déplacement de $\lfloor (\tau_0 + 1)\alpha \rfloor$ dans I_0 . Ce qui nous permet de conclure que nous avons bien un échange de deux intervalles. Or tout échange de deux intervalles est assimilable à renormalisation près à une translation sur le tore.

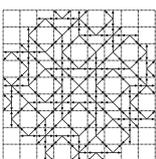
c.q.f.d.

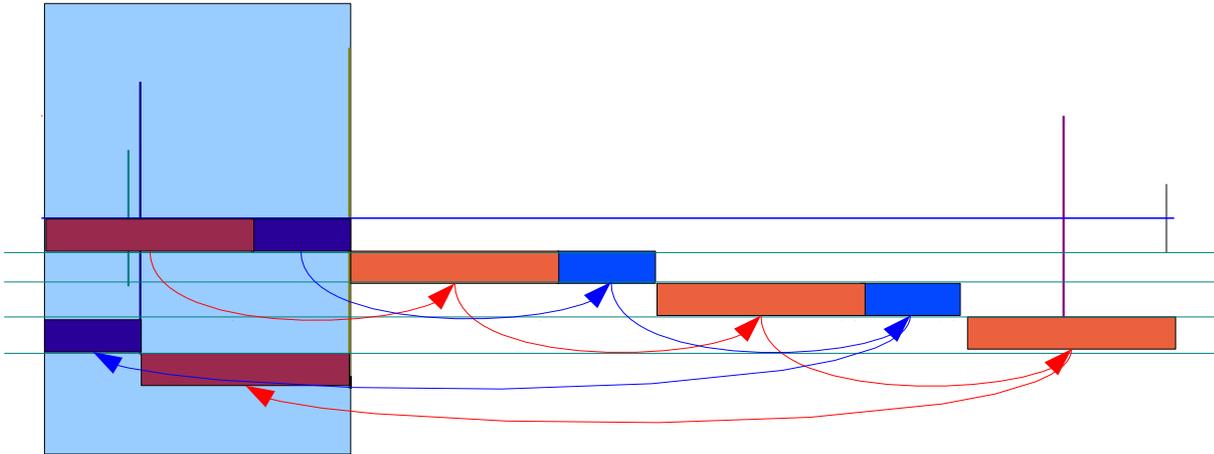
Corollaire A.1 *Le système dynamique induit par un intervalle E de longueur α sur une translation de α sur le tore unidimensionnel est un échange de deux intervalles qui est isomorphe à une rotation sur le tore \mathbb{T} .*

A partir d'un système dynamique de translation sur le tore $S = (\mathbb{T}, x \mapsto x + \alpha)$, on appelle système dynamique naturellement induit le système dynamique induit par S et l'intervalle $[0, \alpha[$.

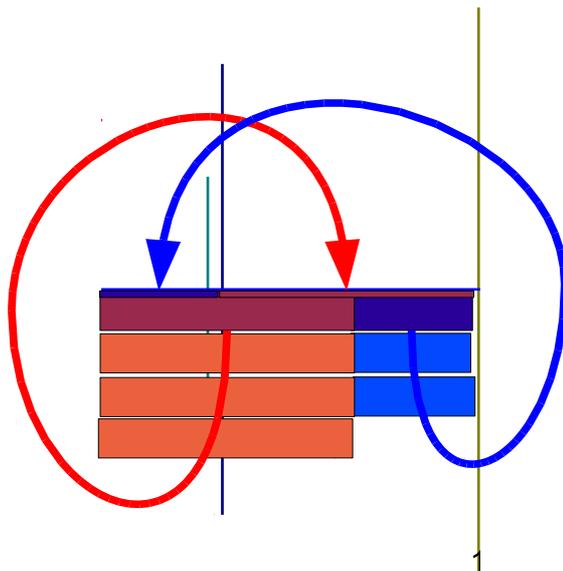
Si au lieu de laisser la dynamique naturellement induite sur $[0, \alpha[$, on l'"étire" par homomorphisme afin de rendre une dynamique similaire sur \mathbb{T} on parlera de système dynamique naturellement induit et renormalisé.

^(a) $[a...(a + \alpha)[$ ou $]a...(a + \alpha]$

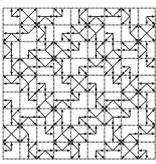




(a) L'échange d'intervalle associé à une rotation d'angle α sur le tore, induit sur l'intervalle $[0, \alpha[$ un échange d'intervalle. On pourra remarquer que la différence entre les temps de retours vaut exactement 1.



(b) En ramenant tous les copies intervalles translattées au dessus de l'intervalle dont ils sont l'image, on obtient une construction qui met en évidence le côté système dynamique intégré. Cette construction est baptisée *tour de ROHLIN*. Il est extraordinaire de remarquer que la dynamique des tours de ROHLIN, correspond exactement à celle renvoyée par le graphe de Rauzy de taille k .



Théorème A.2 Soit $S_0 = (\mathbb{T}, x \mapsto x + \alpha_0)$, on définit S_{i+1} par rapport à S_i , en spécifiant S_{i+1} est le système dynamique dérivé de S_i .

À partir d'un système dynamique de translations sur le tore, la suite des systèmes dynamiques naturellement induits et rénormalisés est : $\{(\mathbb{T}, x \mapsto x + \alpha_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ où $\alpha_{n+1} = \lfloor \frac{1}{\alpha_n} \rfloor$ et $\alpha_0 = \alpha$

Démonstration :

On prouve cela par récurrence. On sait déjà que le système dynamique naturellement dérivé à partir d'un système dynamique sur le tore est une translation sur le tore. Il reste à prouver que l'angle de rotation une fois renormalisé est effectivement $\alpha_{n+1} = \lfloor \frac{1}{\alpha_n} \rfloor$. Or il est clair que

$$\alpha_{n+1} = \frac{1 - \lfloor \frac{1}{\alpha_n} \rfloor \alpha_n}{\alpha_n},$$

l'égalité entre ces deux expressions s'obtenant en deux lignes.

c.q.f.d.

En disant cela, on vient de donner l'argument essentiel pour expliquer pourquoi les phénomènes de translation sur le tore engendrent de l'autosimilarité. Les liens entre autosimilarité, et quantité de translation deviennent ainsi une évidence : Ils découlent de l'existence d'un lien d'induction entre tous ces systèmes dynamiques. S'il existe dans la partition symbolique, un ensemble d'intervalles qui correspondent par leur taille et leur disposition à l'ensemble des intervalles de premier retour pour cette dynamique, on pourra par suite prouver l'existence de substitutions dans le mot obtenu.

A.1.2b Propriétés des fractions continues

On continue maintenant avec quelques fameuses propriétés sur les fractions continues. Nous nous intéressons tout d'abord aux facultés qu'ont les fractions continues à pouvoir capturer certaines classes de nombre.

Proposition A.3 *Tout nombre rationnel admet un développement en fractions continues fini.*

Ceci est une conséquence du fait que l'algorithme d'EUCLIDE entre deux entiers p et q termine toujours.

Théorème A.3 Adrien-Marie LEGENDRE *Soit x un nombre réel, le développement en fractions continues est x ultimement périodique si et seulement si x est quadratique.*

On trouve des prémices de ce théorème formées tout d'abord par Leonhard EULER et Joseph-Louis LAGRANGE. Evariste GALOIS a précisé ce théorème en caractérisant les nombres ayant un développement purement périodiques.

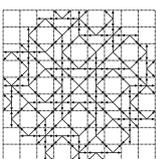
Pour tout D entier dont la racine n'est pas entière, les convergents des fractions continues de \sqrt{D} ont la bonne propriété d'être des solutions de l'équation de John PELL : $p^2 - Dq^2 = 1$. Ceci met en évidence encore une fois, le côté meilleure approximation d'une valeur fournie par les développements quadratiques.

Ceci explique les liens entre fractions continues périodiques et valeurs quadratiques.

Certains autres nombres comme e admettent un développement en fractions continues très structuré. À contrario des nombres comme π admettent des développements fractions continues très désordonnés.

Il faut savoir de plus qu'il est possible d'effectuer les opérations arithmétiques usuelles : additions, soustractions, multiplications, divisions, comparaisons directement sur les développement en fractions continues, en pratique cela se fait grâce aux algorithmes de GOSPER [BGS72].

En fait, le fait qu'on puisse passer de systèmes dynamiques induits en systèmes dynamiques induits a des conséquences : comme nous l'avons vu dans la Note 1.3.1.2, chaque passage d'un système dynamique induit à un autre s'accompagne de substitutions.



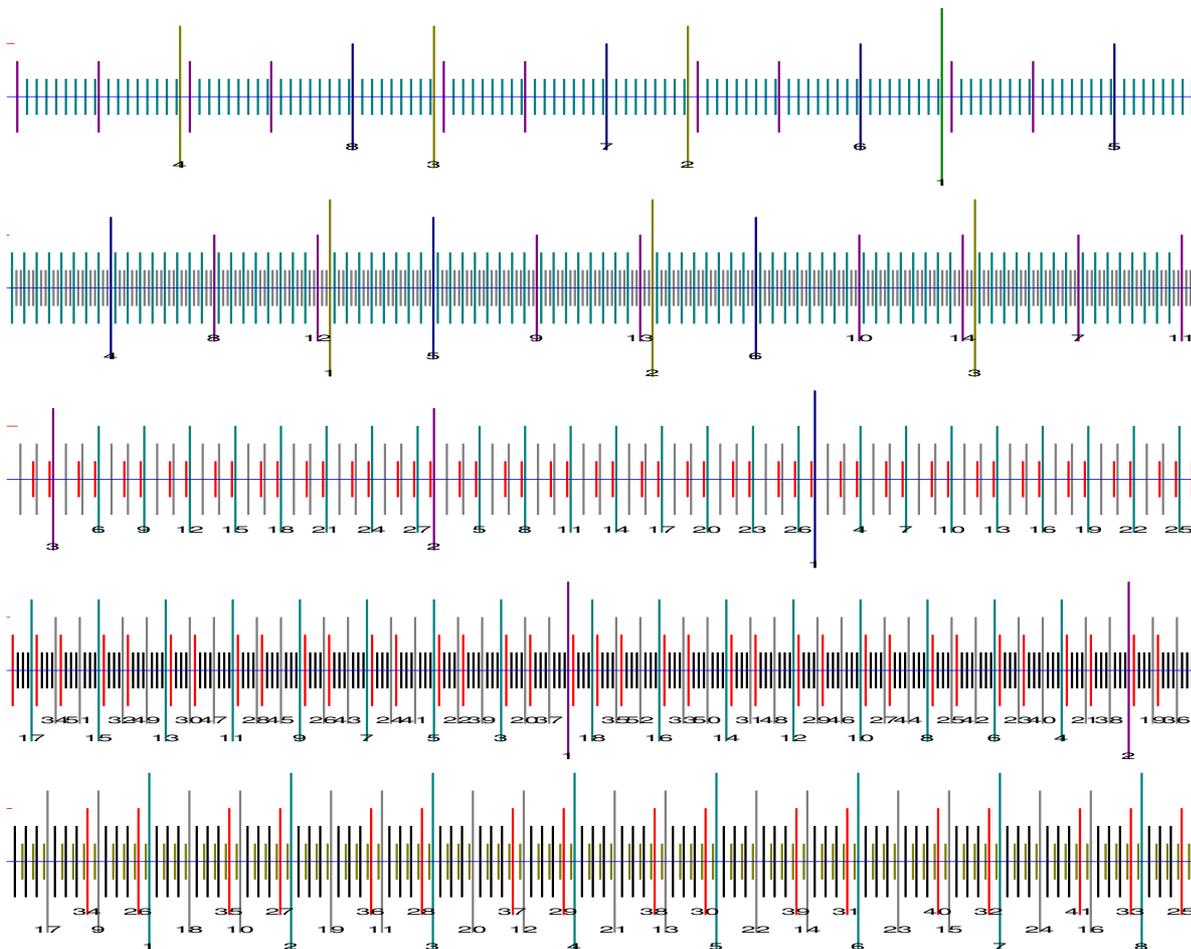
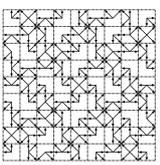


Fig. A.3 – Chacune de ces lignes horizontales correspond à un tore unidimensionnel \mathbb{T} sur lequel on opère une translation d’une quantité irrationnelle. Pour chaque ligne horizontale le point 0 est représenté tout à gauche. Tandis que 0.99999... est représenté tout à droite. Les différents points du début de l’orbite de 0 sous l’action de la translation sont repérés par des barres verticales de hauteur variable. Le vecteur de translation est repérable par la position de la grande barre verticale notée 1 qui indique l’image de 0. La barre verticale 1 divise \mathbb{T} en deux parties de longueur α et $1 - \alpha$. Le tore est divisé en deux distances qui sont α et $1 - \alpha$. Si on suppose $\lambda_3, i \geq \lambda_2, i \geq \lambda_1, i$.

nombre	développement en fractions continues
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$[\overline{1}]$
$\sqrt{2}$	$[1, \overline{2}]$
e	$[2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$
π	$[3, 7, 15, 1, 192, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, \dots]$

Fig. A.4 – Développement en fractions continues des nombres les plus usuels.



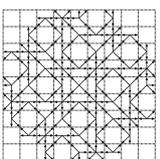
Annexe B

Table d'angles particuliers

Voici à titre d'information et de memento, un listing des angles charnières de rayon plus petits que 4, ainsi que le pythagoricien de moindre rayon trouvé à partir de l'arbre binaire des pythagoriciens. Pour obtenir plus d'informations, il faudrait reconstruire un tableau identique avec l'arbre ternaire, en indiquant le développement de Romik associé à chaque angle.

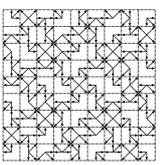
On reconnaîtra ici donc un les codages par nombre entiers des angles avant de donner à titre indicatif une valeur de l'angle $[C(x, y, k[\alpha])]$ désigne un angle charnière avec pour point source $x + yi$ et pour destination une ligne en $k + \frac{1}{2}$. $[P(a, b, c[p, q\alpha])]$ désigne l'angle pythagoricien engendré par le triple $a^2 + b^2 = c^2$, que l'on associe au couple d'entiers p, q du fait de la possibilité de générer a, b, c à partir de p, q .

$[C(4, -3, -3[0.119902])]$	$[C(2, -4, -4[0.208279])]$
$[P(1085, 132, 1093[2, 33\{0.121064\}])]$	$[P(357, 76, 365[2, 19\{0.209754\}])]$
$[C(4, -2, -2[0.121607])]$	$[C(2, -3, -3[0.216631])]$
$[P(2392, 294, 2410[3, 49\{0.122296\}])]$	$[P(80, 18, 82[1, 9\{0.221314\}])]$
$[C(4, -1, -1[0.123412])]$	$[C(2, -1, -1[0.238134])]$
$[P(255, 32, 257[1, 16\{0.124838\}])]$	$[P(63, 16, 65[1, 8\{0.24871\}])]$
$[C(4, 0, 0[0.125328])]$	$[C(2, 0, 0[0.25268])]$
$[P(3953, 504, 3985[4, 63\{0.126814\}])]$	$[P(221, 60, 229[2, 15\{0.265103\}])]$
$[C(4, 1, 1[0.127369])]$	$[C(2, 1, 1[0.271667])]$
$[P(957, 124, 965[2, 31\{0.128854\}])]$	$[P(48, 14, 50[1, 7\{0.283794\}])]$
$[C(4, 2, 2[0.129552])]$	$[C(1, -4, -4[0.311965])]$
$[P(2107, 276, 2125[3, 46\{0.13025\}])]$	$[P(35, 12, 37[1, 6\{0.330297\}])]$
$[C(4, 3, 3[0.131896])]$	$[C(1, -3, -3[0.337307])]$
$[P(195, 28, 197[1, 14\{0.142615\}])]$	$[P(1632, 574, 1730[7, 41\{0.338202\}])]$
$[C(3, -4, -4[0.151898])]$	$[C(4, -3, -2[0.338808])]$
$[P(168, 26, 170[1, 13\{0.153544\}])]$	$[P(513, 184, 545[4, 23\{0.344382\}])]$
$[C(3, -2, -2[0.158933])]$	$[C(2, 3, 3[0.345439])]$
$[P(621, 100, 629[2, 25\{0.15966\}])]$	$[P(280, 102, 298[3, 17\{0.349344\}])]$
$[C(3, -1, -1[0.16297])]$	$[C(4, -2, -1[0.35161])]$
$[P(143, 24, 145[1, 12\{0.166282\}])]$	$[P(117, 44, 125[2, 11\{0.359707\}])]$
$[C(3, 0, 0[0.167448])]$	$[C(4, -1, 0[0.366546])]$
$[P(1216, 210, 1234[3, 35\{0.171011\}])]$	$[P(247, 96, 265[3, 16\{0.370696\}])]$
$[C(3, 1, 1[0.172465])]$	$[C(1, -2, -2[0.371834])]$
$[P(525, 92, 533[2, 23\{0.173477\}])]$	$[P(425, 168, 457[4, 21\{0.376443\}])]$
$[C(3, 2, 2[0.17816])]$	$[C(4, 0, 1[0.384397])]$
$[P(120, 22, 122[1, 11\{0.18132\}])]$	$[P(24, 10, 26[1, 5\{0.394791\}])]$
$[C(3, 4, 4[0.192474])]$	$[C(3, -4, -3[0.403696])]$
$[P(99, 20, 101[1, 10\{0.199337\}])]$	$[P(1107, 476, 1205[7, 34\{0.40609\}])]$



XII *Annexe B. Table d'angles particuliers*

[C(4,1,2[0.40647])]	[C(3,1,2[0.589988])]
[P(187,84,205[3,14{0.422187}])]	[P(153,104,185[4,13{0.596998}])]
[C(4,2,3[0.435222])]	[C(4,-1,1[0.617327])]
[P(77,36,85[2,9{0.437338}])]	[P(561,400,689[8,25{0.619406}])]
[C(3,-2,-1[0.448879])]	[C(3,-4,-2[0.622603])]
[P(160,78,178[3,13{0.453598}])]	[P(8,6,10[1,3{0.643501}])]
[C(4,3,4[0.476268])]	[C(1,-4,-3[0.674369])]
[P(1288,666,1450[9,37{0.477219}])]	[P(2849,2280,3649[20,57{0.674912}])]
[C(3,-1,0[0.480531])]	[C(4,0,2[0.675132])]
[P(15,8,17[1,4{0.489957}])]	[P(171,140,221[5,14{0.686048}])]
[C(0,-4,-4[0.505361])]	[C(2,-1,0[0.689161])]
[P(493,276,565[6,23{0.510365}])]	[P(55,48,73[3,8{0.717541}])]
[C(2,-4,-3[0.513949])]	[C(0,-2,-2[0.722734])]
[P(209,120,241[4,15{0.521205}])]	[P(720,638,962[11,29{0.725088}])]
[C(1,0,0[0.523599])]	[C(3,-2,0[0.727126])]
[P(112,66,130[3,11{0.532504}])]	[P(144,130,194[5,13{0.734348}])]
[C(4,-3,-1[0.543334])]	[C(3,2,3[0.74023])]
[P(576,350,674[7,25{0.546017}])]	[P(275,252,373[7,18{0.741783}])]
[C(2,-3,-2[0.553724])]	[C(4,-3,0[0.743669])]
[P(45,28,53[2,7{0.556599}])]	[P(448,414,610[9,23{0.745975}])]
[C(4,-2,0[0.575685])]	[C(1,-3,-2[0.75483])]
[P(91,60,109[3,10{0.582914}])]	[P(21,20,29[2,5{0.761013}])]
[C(0,-3,-3[0.585686])]	[C(2,-4,-2[0.765108])]
[P(989,660,1189[10,33{0.588469}])]	[C(4,1,3[0.768874])]



Annexe C

Liens entre discrétisation et théorie idéale en géométrie discrète

Nous n'avons pas encore correctement discuté des liens qu'entretiennent géométrie discrète et continue.

Certains procédés d'analyse non-standard permettent de relier les définitions discrètes et continues. On plonge \mathbb{Z}^n dans \mathbb{R}^n via l'opérateur ponctuel suivant^(a) : $x \mapsto \frac{x}{\omega}$, où $\omega \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

Pour résumer la discrétisation d'une figure serait $F \mapsto (\omega F + \mathcal{B}_{\log \omega}) \cap \mathbb{Z}^2$

Lorsque ω croît, progressivement la taille d'une cellule représentante d'un élément pixels décroît. Lorsqu'on fait tendre ω vers $+\infty$: on souhaite que la définition des objets discrets coïncident avec leur sens usuel dans la géométrie euclidienne, ce n'est pas toujours possible.

C.0.2c Quasi-unicité

Si on part d'une description de la physique.

Quand ω tend vers l'infini, comme dans tout passage à la limite, on perd de très nombreux détails qui existaient avant le passage à la limite. Ainsi le continu va rendre équivalent une grande variété d'objets le discret. Et de ce fait, il n'existe pas une façon univoque de relever une figure continue en une figure discrète. Par exemple, le concept même de "point" pourrait finalement désigner n'importe quel agrégat discret qui finit par tendre lors de l'évolution de ω vers un ensemble de points regroupés sur un même point réel.

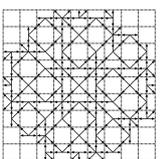
Au début de sa thèse, Jean-Pierre RÉVEILLÈS insiste donc sur le fait que nous pourrions envisager une infinité de telles théories, il insiste que pour une même figure continue, il pourrait exister des myriades d'objets discrets qui par passage à la limite donneraient un ensemble qui, observé de loin, aurait la forme décrite.

C.0.2d Analyse non standard et passage d'une théorie discrète à une théorie continue

Les *propositions de la géométrie discrète* forment l'ensemble des énoncés qu'on peut prouver avec le langage de la géométrie avec une interprétation de ces termes qui emploie sur une structure discrète. Ces propositions de la géométrie discrète aspirent en quelque sorte à être plus contraintes que celles de la géométrie euclidienne – au sens où elles devront tenir compte des spécificités du discret, ces propositions seront soit plus contraintes, soit invalides.

Les propositions de la géométrie discrète font apparaître certaines idées sur l'enchevêtrement des objets géométriques à l'échelle cellulaire/atomique/discrète, que le passage à la limite fait

^(a)Il s'agit de l'opérateur effectuant la discrétisation inverse devenant donc $x \mapsto [\omega x]$.



disparaître dans les théories continues. En ce sens elles sont plus riches en information que les propositions du continu.

En pratique, on souhaite donc relever^(a) des résultats classiques en géométrie euclidienne vers la géométrie discrète. Ainsi, cela va nous permettre de faire le distinguo entre ce qui peut se prouver uniquement sur la géométrie Euclidienne, et ce qui est compatible avec une interprétation discrète de la figure.

C.0.2e Modèle de la géométrie discrète

Les propositions de la géométrie discrète existent par le biais d'un langage. Ce langage est composé et d'opérateurs, de prédicats, de variables, auxquels nous devons donner une interprétation dans une structure. Ce que l'on appelle la théorie de la géométrie discrète, c'est l'ensemble des propositions que l'on peut démontrer à l'aide de ce vocabulaire.

On ne va pas donner un modèle clair de la géométrie discrète ; cela voudrait dire que nous avons une définition très claire de ce qu'est la géométrie discrète aujourd'hui, or, cela serait prématuré.

Le modèle aura certainement lieu sur une structure comme $\mathcal{M} = \mathbb{Z}^n$ ou $\mathcal{M} = 2^{\mathbb{Z}^n}$. Le langage \mathcal{L} ne devra pas être trop basique, puisqu'il doit prendre comme primitives les définitions de la géométrie discrète qui doivent nous permettre de redéfinir la géométrie euclidienne constructive. On doit pouvoir changer leur interprétation afin justement de montrer la validité ou non de telles figures de telle construction dans telle géométrie. A priori on aura un langage comme $\mathcal{L} = \{point(x), droite(x), cercle(x), inclus(x, y), translation(x), rotation(x), \dots\}$: un langage composé de prédicats qui reprend les éléments de construction généralement admis comme primitives de la géométrie euclidienne, et qui forme un ensemble proche du jeu d'opérations minimal disponible dans la majorité des moteurs graphiques.

Réciproquement, on peut relever un certain nombre d'objets de la géométrie Euclidienne dans la géométrie discrète de manière cohérente.

Pour qu'un résultat de la géométrie euclidienne soit transposable vers la géométrie discrète, il faut qu'il existe une infinité d'échelles sur lesquelles la géométrie discrète coïncide avec la géométrie continue. Plus généralement, il faut qu'il existe une échelle à partir de laquelle il existe une invariance par changement d'échelle qui donne un sens à la figure.

La figure euclidienne réalise en quelque sorte la classe d'équivalence correspondant entre tous les modèles correspondant avec l'interprétation valable lors du passage à la limite.

Note C.0.2.1 *L'ensemble des objets relevables vers \mathbb{Z}^n formerait un sous-ensemble de la géométrie euclidienne classique : la géométrie euclidienne intuitive ou finie. La géométrie euclidienne pouvant pour sa part contenir des objets n'admettant pas la même description quelle que soit l'échelle de discrétisation.*

^(a)On rappelle que le terme "relever" en mathématiques désigne l'opération inverse d'une projection, qui en quelque sorte permet de retrouver une information perdue. Le relèvement d'un point ne conduit pas nécessairement à un point unique. Un exemple typique nous est donné par la projection d'un mouvement spinoïdal vers le cercle – le relèvement présuppose que nous ne connaissons pas simplement l'objet projeté, mais aussi un certain nombre d'hypothèses sur l'objet de départ.

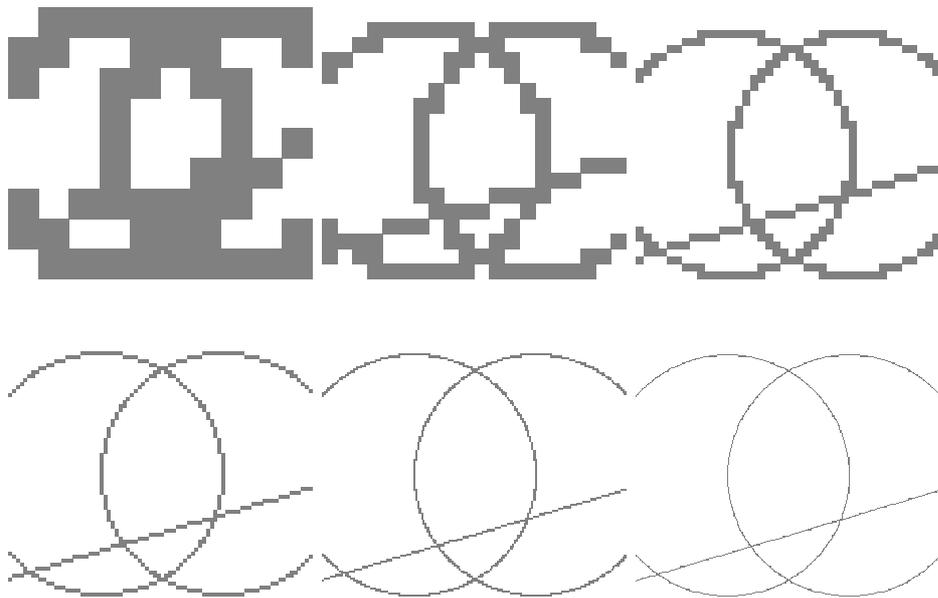
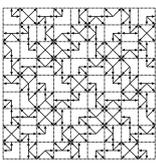
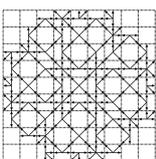
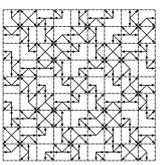


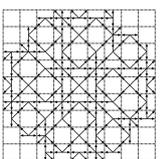
Fig. C.1 – Chaîne de modèles réalisant une même figure, passant progressivement d'une figure sur une géométrie discrète trop imprécise à une figure continue. La description de la figure reste identique dans toutes ces géométries. Néanmoins les propriétés qui en découlent dépendent de l'échelle à laquelle on réalise la figure. Certaines propriétés ne vont être vraies qu'à partir d'une certaine échelle. (Comme l'existence de la partie délimitée par les deux cercles et la droite diagonale.)





Bibliographie générale

- [AAS97] Éric ANDRÈS, Raj ACHARYA, and Claudio SIBATA. Discrete analytical hyperplanes. *Graph. Models Image Process.*, 59(5) :302–309, 1997.
- [AB98] Pascal ALESSANDRI and Valérie BERTHÉ. Three distance theorems and combinatorics on words. *L'enseignement mathématique*, 2(44) :103–132, 1998.
- [ABC⁺04] Amihoud AMIR, Ayelet BUTMAN, Maxime CROCHEMORE, Gad M. LANDAU, and Malka SCHAPS. Two-dimensional Pattern Matching with Rotations. *Theoretical Computer Sciences*, 314 :173–187, 2004.
- [ABEI01] Pierre ARNOUX, Valérie BERTHÉ, Hiromi EI, and Shunji. ITO. Tilings, quasicrystals, discrete planes, generalized substitutions, and multidimensional continued fractions. In *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceedings*, 2001.
- [ABI02] Pierre ARNOUX, Valerie BERTHÉ, and Shunji ITO. Discrete plane, \mathbb{Z}^2 -actions, jacobi-perron algorithm and substitutions. *Annales de l'Institut Fourier*, 2(52) :1001–1045, 2002.
- [ADA02] Boris ADAMCZEWSKI. *Approche dynamique et combinatoire de la notion de discrétance*. PhD thesis, Institut de Mathématiques de Luminy, 2002.
- [AGS91] Robert AMMAN, Branko GRUNBAUM, and Geoffrey C. SHEPPFERD. Aperiodic Tiles. *Discrete and Computational Geometry*, 8 :1–25, 1991.
- [ALA05] Sylvie ALAYRANGUES. *Modèles et invariants topologiques en imagerie numérique*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 2005.
- [ALE96] Pascal ALESSANDRI. *Codages de rotations et basse complexité*. PhD thesis, Université de la Méditerranée, 1996.
- [AMI00] Itzhak AMIDROR. *The Theory of the Moire Phenomenon*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [AND92] Eric ANDRÈS. *Discrete circles, and Discrete rotations*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, 1992.
- [AND96] Éric ANDRÈS. The quasi-shear rotation. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 307–314, 1996.
- [AND00] Éric ANDRÈS. Modélisation analytique discrète d'objets géométriques. Habilitation à Diriger des Recherches, 2000.
- [AO87] Hamid R. ARABNIA and M.A. OLIVER. A transputer network for the arbitrary rotation of digitised images. *Comput. J.*, 5(30) :425–432, 1987.
- [AS03] Jean-Paul ALLOUCHE and Jeffrey SHALLIT. *Automatic Sequence*. Cambridge University Press, 2003. ISBN-13 : 9780521823326 | ISBN-10 : 0521823323.



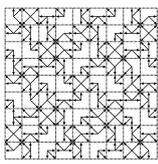
- [BAU96] Madeleine BAUER. Fonction ϵ -régulières. *Bulletin de la Société Mathématiques Belge Simon Stevin*, 3(1), 1996. supplément du volume.
- [BC85] Santanu N. BISWAS and B. B. CHAUDHURY. On the Generation of Discrete Circular Objects and their Properties. *Computer Vision*, 32 :158–170, 1985.
- [BCK] Valentin BRIMKOV, David COEURJOLLY, and Reinhard KLETTE. Digital Planarity - a Review.
- [BÉA93] Marie-Pierre BÉAL. *Codages symboliques. étude et recherche en informatique*. Masson, 1993.
- [BER] Valérie BERTHÉ. About Ostrowski Numeration System.
- [BER66] Robert BERGER. The undecidability of the domino problem. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 66, 1966.
- [BFJ05] Valérie BERTHÉ, Christophe FIORIO, and Damien JAMET. Generalized Functionality for Arithmetic Discrete Planes. In *Discrete Geometry for Computer Imagery 2005*, volume to appear, 2005.
- [BGS72] Michael BEELER, Raplh W (Bill) GOSPER, and Rich SCHROEPEL. *HAKMEM : Hacker's Memorandum*. MIT, Artificial Intelligence Laboratory, 1972.
- [BHZ] Valérie BERTHÉ, Charles HOLTON, and Luca Q. ZAMBONI. Initial Power of Sturmian Sequences. preprint.
- [BLA93] Jean-Paul BLANC. Cercles et/ou rotations discrètes sur la sphere celeste avec utilisation de représentations à 'virgule fixe'. Preprint, 1993.
- [BM80] Carlo BRACCINI and Giuseppe MARINO. Fast geometrical manipulations of digital images. *Comput. Graph. Image Process.*, 13 :127–141, 1980.
- [BRE65] Jack E. BRESENHAM. Algortihm for Computer Control of a Digital Plotter. *IBM Systems Journal*, 4(1) :25–30, 1965.
- [BRE77] Jack E. BRESENHAM. A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs. *Computer graphics and image processing*, 1977.
- [BRE80] Claude BREZINSKY. The Long History of Continued Fractions and Padé Approximants. In *Lecture Notes*, 1980.
- [BRO93] Tom C. BROWN. Description of the Characteristic Sequence of an Irrational Number. *Canadian Mathematics Bulletin*, 36(1) :15–21, 1993.
- [BRO96] Anne BROISE. Fractions continues multi-dimensionnelles et lois stables. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 124 :97–139, 1996.
- [BS94] Jean BERSTEL and Patrice SÉÉBOLD. Morphismes de sturm. *Bull. Soc. Math. Belgique*, 1(2) :175–189, 1994.
- [BV00] Valérie BERTHÉ and Laurent VUILLON. Tilings and Rotations on the Torus : a Two-Dimensional Generalization of Sturmian Sequences. *Discrete Mathematics*, 2000.
- [CAS94] Julien CASSAIGNE. *Motifs évitables et régularités dans les mots*. PhD thesis, Université Paris 6, 1994.
- [CDR92] John CANNY, Bruce R. DONALD, and Eugene K. RESSIER. A rational rotation method for robust geometric algorithms. In *proc 8th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 251–260. ACM, 1992.

- [CH73] Ethan COVEN and Gustav Arnold HEDLUND. Sequences with minimal block growth. *Math. Systems Th.*, 7 :138–153, 1973.
- [CM91] Jean Marc CHASSERY and Annick MONTANVERT. *Géométrie discrète en analyse d'images*. Hermès, 1991.
- [CN03] Julien CASSAIGNE and François NICOLAS. Quelques propriétés des mots substitutifs. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, 10 :661–677, 2003.
- [CUL96] Karel CULICK. An aperiodic set of 13 Wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160 :245–251, 1996.
- [DEL97] Jean-Paul DELAHAYE. *Le fascinant nombre π* . Belin - Pour la science, 1997.
- [DMT99] Marianne DELORME, Jacques MAZOYER, and Laure TOUGNE. Discrete parabolas and circles on 2d cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 1(218) :347–417, 1999.
- [DP99] Maria DOUDEKOVA-PUYDEBOIS. *Contribution à l'étude dynamique de translations par intervalles*. PhD thesis, Université de Provence, 1999.
- [DRDJ06] Isabelle DEBLED-RENESSON, E. DOMENJOUR, and Damien JAMET. Two-dimensional discrete curves : a non-constant thickness approach, 2006. discussions avec Damien Jamet – pas encore publié.
- [DUR98] Fabien DURAND. A Characterization of Substitutive Sequences Using Return Words. *Discrete Mathematics*, 1998.
- [EIN00] Manfred EINSIEDLER. *Algebraic Methods in Higher Dimensional Dynamics*, 2000.
- [FAI91] Alain FAISANT. *L'équation diophantienne du second degré*. Collection formation des enseignants et formation continue. Hermann, 1991.
- [FNRS00] Jurg FRÖLICH, Sergei P. NOVIKOV, David RUELLE, and Yakov G. SINAI, editors. *Mathematical physics, tome 1 : dynamical systems, ergodic theory and applications*, volume 100 of *Encyclopaedia of mathematical sciences*. Springer-Verlag, 2000.
- [FOG02] N. Pytheas FOGG. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, volume 1794 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel.
- [FVV] Philippe FLAJOLET, Brigitte VALLÉE, and Ilan VARDI. Continued Fractions from Euclid to the Present Day. Preprint.
- [GÉR99] Yan GÉRARD. *Contribution à la Géométrie Discrète*. PhD thesis, Laboratoire de logique Laboratoire de Logique, Algorithmique et Informatique de l'université Clermont 1, 1999.
- [GÉR03] Yan GÉRARD. Introduction to Digital Layers. (preprint), 2003.
- [GG98] David GRIFFEATH and Janko GRAVNER. Cellular automaton growth on \mathbb{Z}^2 : Theorems, examples, and problems. *Advances in Applied Mathematics*, (21) :241–304, 1998.
- [GOE05] Arek GOETZ. Return maps in cyclotomic piecewise similarities. *Dynamical systems*, 20(2), 2005.
- [GR97] Dora GIAMMARRESI and Antonio RESTIVO. Two-Dimensional Languages. In A. Salomaa and G. Rozenberg, editors, *Handbook of Formal Languages*, volume 3, Beyond Words, pages 215–267. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

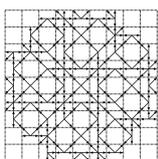
- [GY86] Daniel H. GREENE and Foong Frances YAO. Finite-resolution computational geometry. In *Proc. IEEE Annual Sympos. On Foundations of Computer Science*, pages 143–152, 1986.
- [HED69] Gustav Arnold HEDLUND. Endomorphism and automorphism of the shift dynamical system. *Mathematical System Theory*, 3 :320–375, 1969.
- [HER85] Roger David HERSCH. Raster rotation in bilevel bitmap images. In *EuroGraphics 85*. Elsevier Science Publishers, 1985.
- [HM38] Gustav Arnold HEDLUND and Marston MORSE. Symbolic Dynamics i. *Amer. J. Math.*, 60 :815–866, 1938.
- [HM40a] Gustav Arnold HEDLUND and Marston MORSE. Sturmian Sequences. *Amer. J. Math.*, 61 :1–42, 1940.
- [HM40b] Gustav Arnold HEDLUND and Marston MORSE. Symbolic dynamics ii. *Amer. J. Math.*, 62 :1–42, 1940.
- [HP98] Michel HENON and Jean-Marc PETIT. Good rotations. *Journal of Computational Physics*, (146) :420–435, 1998.
- [HW38] Godfrey H. HARDY and Edward M. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press/Clarendon Press, 1938.
- [ILA01] Andrew ILACHINSKI. *Cellular Automata : A Discrete Universe*, chapter 12, pages 669–672. World Scientific, 2001. ISBN :981-02-4623-4.
- [JA95] Marie-Andrée JACOB and Eric ANDRES. On discrete rotations. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, 1995.
- [JD00] David J. JEFFERIES and Jonathon H.B. DEANE. Emergent approximate fractal fixed-point structures in cyclic iterating image transformations. In *Applied Complexity, Proceedings of the Complex 2000 conference*, pages 256–264, 2000.
- [JR70] Emily .G. JOHNSTON and Azriel ROSENFELD. Geometrical operations on digitized pictures. In B. S. LIPKIN and Azriel ROSENFELD, editors, *Picture Processing and Psychopictorics*. Academic Press, 1970.
- [KAR96] Jarkko KARI. A small aperiodic set of wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160 :259–264, 1996.
- [KAR99] Jarkko KARI. Deterministic Aperiodic Tile Sets. *Geometric And Functional Analysis*, 9(2) :353 – 369, 1999.
- [KAU99] Arie E. KAUFMAN. Voxels as a computational representation of geometry. In *Representations of geometry for Computer Graphics, SIGGRAPH'99 – Course 29*, pages 14–58, 1999.
- [KES66] Harry KESTEN. On a conjecture of Erdős and Szűsz related to uniform distribution mod 1. *Acta Arith.*, (12) :193–212, (1966).
- [KHA87] Efim KHALIMSKY. Topological Structures in Computer Science. *Journal of Applied Math. and Simulation.*, 1(1) :25–40, 1987.
- [KLE05] Michael KLEBER. Goldbug Variations. *Mathematical Intelligencer*, 27(1), 2005.
- [KR04] Reinhard KLETTE and Azriel ROSENFELD. *Digital Geometry : Geometric Methods for Digital Picture Analysis*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2004.

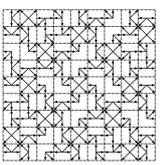
- [KUR03] Petr KURKA. *Topological and Symbolic Dynamics*. Number 11 in Cours spécialisés. Société Mathématiques de France, 2003. ISBN : 2-85629-143-0, EAN : 9782856291436.
- [LAN86] Christopher LANGTON. Studying artificial life with cellular automata. In D. FARMER, A. LAPEDES, N. PACKARD, and B. WENDRO, editors, *Evolution, Games, and Learning : Models for Adaptation in Machines and Nature, Proceedings of the Fifth Annual Conference of the Center for Nonlinear Studies*, 1986.
- [LAU99] Éric LAURIER. Opérations sur les mots de Christoffel. *Journal de Théories des Nombres de Bordeaux*, 11 :111–132, 1999.
- [LKV04] John H. LOWENSTEIN, Konstantin L. KOUPSTOV, and Franco VIVALDI. Recursive tiling and geometry of piecewise rotations by $\pi/7$. *Nonlinearity*, 17 :371–395, 2004.
- [LOT02] LOTHAIRE. *Algebraic Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, 2002.
- [MAE99] Arnaud MAES. *Morphic predicates and applications to the decidability of arithmetic*. PhD thesis, Université de Mons-Hainaut, 1999.
- [MAZ87] Jacques MAZOYER. A Six States Minimal Time Solution to the Firing Squad Synchronization Problem. *Theoretical Computer Sciences*, 50 :183–238, 1987.
- [MEL04] Erik MELIN. Digitization in Khalimsky Spaces. Technical Report 2004 :51, U.U.D.M., 2004. ISSN 1101-3591.
- [MOS92] Brigitte MOSSÉ. Properties of Words and Recognizability of Fixed Points of a Substitution. *Theor. Comput. Sci.*, 99(2) :327–334, 1992.
- [MOS96] Brigitte MOSSÉ. Reconnaissabilité des substitutions et complexité des suites automatiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 124(2) :329–346, 1996.
- [NA84] Akira NAKAMURA and Kunio AIZAWA. Digital circles. In *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, volume 26, pages 242–255, 1984.
- [NEH96] Philippe NEHLIG. Applications quasi-affines : pavages par images réciproques. *Theoretical Computer Science*, 156(1-2) :159–176, 1996.
- [NIV97] Maurice NIVAT. Invited talk. In *ICALP*, Bologna, 1997.
- [NNS⁺92] Akira NAKAMURA, Maurice NIVAT, Ahmed SAOUDI, Patrick Shen-Pei WANG, and Inoue KATSUSHI, editors. *ICPIA'92, Parallel Image Analysis, Second International Conference*. LNCS. Springer, 1992.
- [NR00] Akira NAKAMURA and Azriel ROSENFELD. Digital knots. *Pattern Recognition*, 33(9) :1541–1553, 2000.
- [OHA94] Victor OSTROMOUKHOV, Roger D. HERSCH, and Itzhak AMIDROR. Rotated dispersed dither : a new technique for digital halftoning. In *Proceedings of SIGGRAPH 94*, 1994. in *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 123–130.
- [PAE86] Alan W. PAETH. A fast algorithm for general raster rotation. In *Proc. Graphics Interface '86 - Vision Interface '86*, pages 77–81, 1986.
- [PAGM88] Bernard PEROCHE, Jacqueline ARGENCE, Djamchid GHAZANFARPOUR, and Dominique MICHELUCCI. *La synthèse d'images*. Hermès, 1988.
- [PAT98] John PATERA, editor. *Quasicrystals and Discrete Geometry*. the Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, 1998.
- [PEY04] Gabriel PEYRE. *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*. Editions Ellipses Marketing, 2004.

- [PKS⁺02] Valentin L. POPOV, H. KLOSS, E. SANTNER, A.I. DMITRIEC, E.V. SHILKO, and S.G. PSAKHIE. 2d and 3d modelling of indentation and scratching test on the base of movable cellular automata (mca) method. In *Proc. of the Int. Conf. on New Challenges in Mesomechanics*, volume 2, pages 557–563, 2002.
- [POG03] Guillaume POGGIASPOLLA. *Autosimilarité dans les systèmes isométriques par morceaux*. PhD thesis, Université Aix-Marseille II, 2003.
- [RAU76] Gérard RAUZY. *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*. Le mathématicien. Presses Univeritaires Françaises, 1976.
- [RAU82] Gérard RAUZY. Nombres algébriques et substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, 110(2) :147–178, 1982.
- [REN90] L. RENNA. Discrete Effects in Classical Mechanics. *International Journal in Theoretical Physics*, 30(7) :999–1010, 1990.
- [RÉV91] Jean-Pierre RÉVEILLÈS. *Géométrie discrète, Calcul en nombre entiers, et Algorithmique*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, 1991. Thèse d'état.
- [RIC72] D. RICHARDSON. Tessellations with Local Transformations. *Journal of Computer and System Sciences*, 6 :373–388, 1972.
- [ROB71] Raphael M. ROBINSON. Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane. *Inventiones Mathematicae*, 12, 1971.
- [ROM05] Dan ROMIK. The dynamics of pythagorean triple. preprint, 2005.
- [ROS74a] Azriel ROSENFELD. Digital Straight Line Segments. *IEEE Transactions on Computers*, c-23(12), 1974.
- [ROS74b] Azriel ROSENFELD. A Note on Perimeter and Diameter in Digital Pictures. *Information and Control*, 24(4) :384–388, April 1974.
- [ROS75] Azriel ROSENFELD. A Converse to the Jordan Curve Theorem for Digital Curves. *Information and Control*, 29(3) :292–293, November 1975.
- [ROS78] Azriel ROSENFELD. Geodesics in Digital Pictures. *Information and Control*, 36(1) :74–84, January 1978.
- [RR96] Jean-Pierre RÉVEILLÈS and Denis RICHARD. Back and Forth between Continuous and Discrete for the Working Computer Scientist. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 16(1-4) :89–152, 1996. Vol. Mathématique et Informatique, Ed. Baltzer, Suisse.
- [SAL89] Olivier SALON. Quelles tuiles ! (pavages apériodiques du plan et automates bidimensionnels. *Séminaire de Théorie des Nombres*, pages 1–26, 1989.
- [SCH] Klaus SCHMIDT. Tilings, Fundamental Cocycles and Fundamental Groups of Symbolic z^d -Actions. pages 1473–1525.
- [SCH99] Klaus SCHMIDT. *Multi-dimensional Symbolic Dynamical Systems*, 1999.
- [SEN95] Marjorie SENECHAL. *Quasicrystals and Geometry*. Cambridge University Press, 1995.
- [SIV04] Isabelle SIVIGNON. *De la caractérisation des primitives à la reconstruction polyédrique de surfaces en géométrie discrète*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [SÓS58] Vera T. SÓS. On the Distribution mod 1 of the Sequence $n\alpha$. *Ann. Univ. Scient. Budapest., Eötvös*, 1958. Sect. Math. 1.



- [SPS04] Chandran SHARAT, Ananth K. POTTY, and Milind SOHONI. Fast Image Transforms using Diophantine Methods. *To appear in IEEE Transactions on Image Processing*, 2004.
- [STO88] Lawrence N. STOUT. Two Discrete Forms of the Jordan Curve Theorem. *Am. Math. Monthly*, 95(4) :332–336, 1988.
- [TBG74] Stephen THYSSEN-BORNEMISZA and H.W. GRAYSON. Perspective of a Finite and Discrete Universe. *Pure and applied geophysics*, pages 257–263, 1974.
- [THI94] Edouard THIEL. *Les distances de chanfrein en analyse d'images : fondements et applications*. PhD thesis, Université Joseph Fourier (Grenoble 1), 1994.
- [TKKW86] A. TANAKA, M. KAMEYAMA, S. KAZAMA, and O. WATANABE. A rotation method for raster image using skew transformation. In *Proc. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 272–277, 1986.
- [TOF89] Tommaso TOFFOLI. Four Topics in Lattice Gases : Ergodicity ; Relativity ; Information Flow ; and Rule Compression for Parallel Lattice-Gas Machines. In R. Monaco, editor, *Discrete Kinetic Theory, Lattice Gas Dynamics and Foundations of Hydrodynamics*, pages 343–354. World Scientific, 1989.
- [TOF97] Tommaso TOFFOLI. Three-Dimensional Rotations by Three Shears. *Graphical Models and Image Processing*, 59 :89–96, 1997.
- [TOU97] Laure TOUGNE. *Cercles discrets sur automates cellulaires*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1997.
- [VOS93] Klaus VOSS. *Discrete Images, Objects and Functions in \mathbb{Z}^n* . Springer, Berlin, 1993.
- [VUI01] Laurent VUILLON. Mots infinis, suites doubles et pavages, 2001. Habilitation à Diriger des Recherches – Université Paris VII.
- [VV03] Franco VIVALDI and Igor VLADIMIROV. Pseudo-randomness of round-off errors in discretized linear maps on the plane. *Int. J. of Bifurcations and Chaos*, 13, 2003.
- [WEI76] Carl F.R. WEIMAN. Highly Parallel Digitized Geometric Transformations without Matrix Multiplication. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Parallel Processing*, pages 1–10, 1976.
- [WOL02] Stephen WOLFRAM. *A New Kind of Science*. Wolfram Media Inc., 2002. ISBN :1-57955-008-8.
- [YUN93] Jean-Baptiste YUNÈS. *Synchronisation et automates cellulaires : la ligne de fusillers*. PhD thesis, Université Paris 7, 1993.



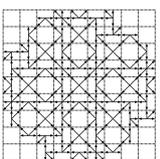


Bibliographie personnelle

- [P-JI1] Bertrand Nouvel et Éric Rémila. Configurations Induced by Discrete Rotations : Periodicity and Quasiperiodicity Properties. *Discrete Applied Mathematics*, 127(2-3) :325–343, 2005.
- [P-JI2] Valérie Berthé et Bertrand Nouvel Discrete Rotations ans Symbolic Dynamics. *Theoretical Computer Sciences*, (à paraître).
- [P-ACI1] Bertrand Nouvel et Eric Rémila. Incremental and transitive discrete rotations. Dans *IWCIA*, volume 3322 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2006.
- [P-ACI2] Valérie Berthé et Bertrand Nouvel. Density of symbols in discretized rotation configurations. Dans les *Actes de WORDS 2005*. Publications du LACIM, 2005.
- [P-ACI3] Bertrand Nouvel. Evaluation of naturalness with decomposition of streamed content into features. Dans les *Proc. of 1st conference on Image Media Quality and its Application*, 2005.
- [P-ACI4] Bertrand Nouvel et Eric Rémila. Characterization of bijective discretized rotations. Dans Reinhard Klette and Jovisa D. Zunic, editeurs, *IWCIA*, volume 3322 des *Lecture Notes in Computer Science*, pages 248–259. Springer, 2004.
- [P-ACI5] Olivier Bodini et Bertrand Nouvel. Z-tilings of polyominoes and standard basis. Dans Reinhard Klette and Jovisa D. Zunic, editeurs, *IWCIA*, volume 3322 des *Lecture Notes in Computer Science*, pages 137–150. Springer, 2004.
- [P-ACI6] Bertrand Nouvel et Éric Rémila. On colorations induced by discrete rotations. Dans Ingela Nyström, Gabriella Sanniti di Baja, and Stina Svensson, editeurs, *DGCI*, volume 2886 des *Lecture Notes in Computer Science*, pages 174–183. Springer, 2003.
- [P-ACI7] Bertrand Nouvel. Objective no-reference video quality evaluation and semantic of picture. Dans les *Actes de la conférence internationale SETIT-2005*. IEEE, 2005.
- [P-DEA] Bertrand Nouvel. Action des rotations sur le voisinage dans le plan discret. Mémoire de D.E.A., École Normale Supérieure de Lyon, 2002.

Nomenclature :

Jl : Journal international, *ACI* : Actes conférences internationales, *DEA* : Diplome d'études approfondies



Résumé

Dans un espace discret, comme l'ensemble des points à coordonnées entières, la modélisation de l'isotropie pose des difficultés théoriques notables. À ce jour, aucune théorie géométrique sur \mathbb{Z}^n n'est apte à rendre compte de l'isotropie telle qu'elle est décrite par la géométrie euclidienne. Dans l'optique de contribuer à cette problématique, nous nous intéressons à la conception d'algorithmes capables de donner aux rotations discrètes des propriétés proches de celles de la rotation euclidienne. Ces algorithmes doivent de plus fonctionner à base d'arithmétique entière.

Après avoir montré la non-existence de rotation discrète transitive sur \mathbb{Z}^n , nous introduisons un codage de rotations discrètes que nous relient à la fois à la dynamique symbolique et aux automates cellulaires. Il s'agit alors de mener une étude locale des rotations discrètes. Cette étude se situe au carrefour entre géométrie discrète et systèmes dynamiques symboliques. La pertinence des configurations obtenues est justifiée par l'existence de transducteurs planaires capables d'effectuer des rotations à partir des configurations.

Ensuite, afin de réinterpréter ces configurations dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques, nous étendons des notions classiques de cette théorie à la dimension 2. Pour la rotation discrétisée, la dynamique symbolique associée est conjuguée avec un jeu de deux translations orthogonales sur un tore bidimensionnel. Après analyse, nous constatons que les configurations obtenues sont des superpositions de configurations de faible complexité. Cela évoque alors les généralisations planaires des mots sturmiens étudiées entre autres par Valérie Berthé et Laurent Vuillon. Des résultats analogues sont aussi obtenus pour les rotations 3-transvections.

L'analyse des rotations discrètes par le biais de systèmes dynamiques a permis de nombreux résultats : mise en évidence de la quasipériodicité des configurations, calcul de la fréquence des symboles, caractérisation des rotations discrétisées bijectives, ce qui est aussi la réciproque du théorème d'Éric Andrès et Marie-Andrée Jacob.

Nous avons aussi étudié les discontinuités du processus de rotation. Ces discontinuités ont lieu pour des angles issus d'un sous-ensemble des angles quadratiques (i.e. les angles charnières).

En combinant ces remarques, nous aboutissons à deux algorithmes. Le premier algorithme réalise des rotations sans faire aucun calcul à virgule flottante et sans calculer aucun sinus ni aucun cosinus. Il fonctionne de manière incrémentale et en ordre de complexité optimal. Le second algorithme est une implémentation de la rotation 3-transvections sur automates cellulaires. D'autres pistes pour la conception d'algorithmes sont mentionnées dans la thèse.

En outre, nous nous intéressons aussi aux méthodes substitutives qui engendrent les configurations de rotations. Pour les angles quadratiques, nous montrons que les configurations de rotations sont des entrelacements de configurations autosimilaires ; et nous présentons le schéma d'une approche basée sur les graphes de Rauzy pour l'inférence de substitutions planaires. En combinant ces deux approches, nous mettons en avant les éléments essentiels de la démonstration de l'autosimilarité de $C_{\pi/4}$.

Les applications potentielles de cette thèse concernent à terme l'implémentation d'algorithmes de rotations pour processeurs graphiques. Elle contribue aussi à l'étude des méthodes algorithmiques pour la modélisation physique en milieu discret de phénomènes isotropes.

Mots-clés: géométrie discrète, isotropie, rotations, automates cellulaires, substitutions généralisées, graphes de Rauzy

Abstract

In a discrete space, such as the set of integer-coordinate points, the modelization of isotropy may lead to noticeable theoretical difficulties. At this time, we do not know any geometric theory on \mathbb{Z}^n that would be suitable to describe the isotropy the same way it is perceived by Euclidean geometry. With respect to this problematic, our aim is to describe some algorithms that would give to the discrete rotations some properties that would be similar to the properties of the Euclidean rotation. Also, we expect these algorithm to work using integer arithmetic only.

We start by proving the non-existence of transitive discrete rotation on \mathbb{Z}^2 . This motivates the introduction of an encoding of the discrete rotation. We can establish the existence of connections in-between these configurations, bidimensional dynamical systems, and cellular automatas. A local analysis of the discrete rotations is then initiated. This research comprises the intersection of discrete geometry and symbolic dynamic. The pertinence of the encoding the rotations is justified by the existence of planar transducer that are able to compute one configuration according the other one by performing the encoded rotation.

In order to describe the configurations in the framework of dynamical system we extend usual symbolical dynamic concepts to dimension 2. For the discretized rotations, the associated symbolic dynamic is conjugated with a set of two orthogonal translations on a bidimensional torus. Our analysis will highlight the fact that the configurations can be computed as a superposition of low-complexity configurations. Our work is also evocating some planar generalizations of Sturmian words that have been studied, among others, by Valerie Berthé and Laurent Vuillon. Similar results exist for the 3-shear rotations.

The analysis of discrete rotations by the symbolic dynamic system theory then leads to various results : quasiperiodicity of all configurations, possibility to compute the frequency associated to each symbol, characterisation of bijective discretized rotation... This last result is also a the converse of a Éric Andrès et Marie-Andrée Jacob Theorem on discrete rotations.

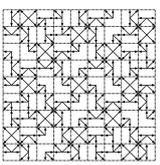
We have also studied the the discontinuities angles. We specify the angles for which they occur, as well as the nature of the transformation that happens.

Combining the remarks that are relative to the way discrete rotations proceed, we have described two algorithms : the first algorithm computes a rotation without doing any floating point arithmetic, nor computing any sine nor cosine ; the order of complexity of this algorithm is optimal. The second algorithm is an implementation of the 3-shear rotation on cellular automatas. Other possibilities to construct algorithms for rotations are enclosed within our dissertation.

Moreover, we also have some interest in the quest for planar substitutions that are able to generate the rotation configurations. For quadratic angles, we have shown the rotations configurations are actually a weaving of interlaced autosimilar configurations. Also, we have introduced the scheme of an approach based on Rauzy graphs to infer planar substitutions. By combination of these two approaches, we have highlighted the essential elements that are required to prove the autosimilarity of the configuration $C_{\pi/4}$.

The potential applications of this research deal with the implementation of rotation algorithm within graphic processors. It also contributes to the study of the algorithmic methods for the physical modelization of isotropic phenomena in discrete spaces.

Keywords: digital geometry, isotropy, rotations, cellular automatas, generalized substitutions, Rauzy graphs



Index

- ϵ -quasi-isométrie, 8
- k -connexe, 5
- r_α , 8
- 4-connexité, 5
- 4-voisinage, 5
- 8-connexité, 5
- 8-voisinage, 5

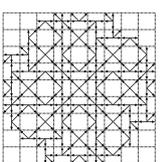
- action, 48
- agent, 148
- algorithme
 - extraction
 - quotients partiels, V
- alphabet, 13
- angle, 80
 - charnière, 34, 125
 - ordre, 125
 - premier, 126
 - pythagoricien, 65, 112
 - entier, 113
 - quadratique, 63
- arc
 - co-arc, 88
 - horizontal, 88
 - spécial, 88
 - vertical, 88
- arité
 - entrante, 88
 - entrante horizontale, 88
 - entrante verticale, 88
 - vecteur d'arité entrante, 88
- automate cellulaire, 139, 142
 - réalisation, 145
 - terminaison correcte, 145
 - à transformations, 149
- automorphisme
 - induit, 16
- autosimilaire, 17

- cadre, 48
- carte de déformation du voisinage, 149
- cellule, 5
- cellule mobile, 148
- cercle
 - de Propp, viii
- complexité, 88
- convergent, V
- couleur, 13
- couple
 - générateur, 125
- côté, 90

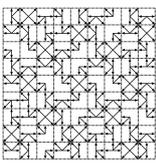
- diagramme espace-temps, 144
- digital physics, ii
- domino, 35
- décalage, 18
- déplacement entre f et f' , 90
- développement d'OSTROWSKI, 81
- développement en fractions continues, IV

- entropie, 18
- ergodique, 16
- espace des phases, 15

- facteur, 13
 - interdit, 18
 - prolongeable, 13
 - spécial, 13, 88
 - horizontal, 88
- fil d'Archimède, 45
- fonction
 - d'étiquetage, 19
 - de quasipériodicité, 64
 - de transition
 - globale, 142
 - locale, 142
 - escalier, 125
- fragment, 88
 - périodique, 90



- fréquence, 68
- graphe de Rauzy, 87
 - bidimensionnel, 88
- géométrie des nombres, 3
- géométrie discrète, iv, 2
- hyperplans analytiques, 6
- image, 14
- intercept, 80
- isométrie, 7
- isométrie par morceaux, 17
- jeu de tuiles
 - purement apériodique, 20
- langage, 13
 - décidable, 13
 - factoriel, 13
 - prolongeable, 13
 - reconnaissable, 13
- lettre, 13
- localité, 140
- loi d'évolution, 15
- matrice
 - Parikh, 77
- monoïde
 - libre, 13
- morphisme
 - lettre-à-lettre, 75
- morphisme sturmien, 80
- mot
 - bi-infini, 13
 - fini, 13
 - infini, 13
 - longueur, 13
 - produit direct, 14
 - superposition, 14
 - vide, 13
- mot de retour, 16
- motif, 14
- multiplicité, 113
- nombre propre, VI
- orbite
 - bidirectionnelle, 15
 - positive, 15, 144
- organisme, 148
- partie propre, 105
- penne, 80
- physique
 - inverse, iv
- physique discrète, ii
- pièce, 90
- point
 - destination, 125
 - double, 35, 113
 - normal, 35
 - source, 125
- point d'appui, 90
- préfixe, 13
- périodicité
 - apériodique, 64
 - mono-périodique, 64
 - totalelement périodique, 64
- quasipériodique, 64
- quotient
 - partiel, IV
- quotient partiel, V
- rotation
 - 3-quasi-transvections, 10
 - 3-transvections, 9
 - discrète, 11
 - discrétisée, 8
 - euclidienne, 8
 - par droites discrètes, 10
 - pythagoricienne, 11
 - transitive, 8
- récurrent, 16, 19
- S-adique, 77
- schéma de discrétisation classique, 5
- shift, 18
- signal, 144
- simplement k -connexe, 5
- sous-automate, 144
- sous-shift, 18
- sturmiens, 80
- substitutif, 77
 - purement substitutif, 77
- substitution, 75
 - primitive, 77
- suffixe, 13



- symbole, 13
- système dynamique, 15
 - bidimensionnel
 - induit, 104
 - induit, 16
 - intégré, 16
 - minimal, 16
 - topologique, 18

- temps de retour, 16
- tour de Rohlin, VIII
- trajectoire, 15
- transducteur planaire, 42
- trou, 35, 113

- uniformément récurrent, 16, 19

- vecteur
 - d'entrelacement, 63
 - de Parikh, 77
 - de périodicité, 64
- vitesse de la lumière, 140

- échange d'intervalles, 17
- échange de morceaux, 17
- équirépartition, 68
- état, 13
 - global, 140
 - quiescent, 144

