HAL
open science

Elagage d'un arbre de Lévy - Diffusion aléatoire en milieu Lévy

Guillaume Voisin

To cite this version:

Guillaume Voisin. Elagage d'un arbre de Lévy - Diffusion aléatoire en milieu Lévy. Mathématiques [math]. Université d'Orléans, 2009. Français. NNT : . tel-00444554

HAL Id: tel-00444554

https://theses.hal.science/tel-00444554v1

Submitted on 6 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS, PHYSIQUE MATHÉMATIQUE D'ORLÉANS

THÈSE présentée par :

Guillaume VOISIN

Soutenue le : **2 décembre 2009**

pour obtenir le grade de **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline : **MATHÉMATIQUES**

Elagage d'un arbre de Lévy
-
Diffusion aléatoire en milieu Lévy.

THÈSE dirigée par :

M. Romain ABRAHAM	Professeur, Université d'Orléans

RAPPORTEURS :

M. Loïc CHAUMONT	Professeur, Université d'Angers
M. Thomas DUQUESNE	Professeur, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

JURY :

M. Romain ABRAHAM	Professeur, Université d'Orléans
M. Nils BERGLUND	Professeur, Université d'Orléans (Président de jury)
M. Loïc CHAUMONT	Professeur, Université d'Angers
M. Jean-François DELMAS	Professeur, Ecole des Ponts et Chaussées
M. Thomas DUQUESNE	Professeur, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)
M. Grégory MIERMONT	Professeur, Université Paris-Sud

UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS, PHYSIQUE MATHÉMATIQUE D'ORLÉANS

THÈSE présentée par :

Guillaume VOISIN

Soutenue le : **2 décembre 2009**

pour obtenir le grade de **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline : **MATHÉMATIQUES**

Elagage d'un arbre de Lévy - Diffusion aléatoire en milieu Lévy.

THÈSE dirigée par :

M. Romain ABRAHAM	Professeur, Université d'Orléans

RAPPORTEURS :

M. Loïc CHAUMONT	Professeur, Université d'Angers
M. Thomas DUQUESNE	Professeur, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

JURY :

M. Romain ABRAHAM	Professeur, Université d'Orléans
M. Nils BERGLUND	Professeur, Université d'Orléans (Président de jury)
M. Loïc CHAUMONT	Professeur, Université d'Angers
M. Jean-François DELMAS	Professeur, Ecole des Ponts et Chaussées
M. Thomas DUQUESNE	Professeur, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)
M. Grégory MIERMONT	Professeur, Université Paris-Sud

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Romain Abraham, pour m'avoir proposé ce sujet de thèse riche et interessant. Il a toujours été disponible et m'a toujours aidé lorsque j'avais besoin de lui. Ses connaissances et son expérience m'ont été très utiles, j'ai beaucoup appris en travaillant avec lui.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Loïc Chaumont et Thomas Duquesne d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter cette thèse. Leurs nombreux commentaires ont permis d'améliorer la précision et la présentation de ce mémoire.

Nils Berglund et Grégory Miermont m'ont fait l'honneur de participer à mon jury de soutenance, je les en remercie.

J'ai eu la chance de pouvoir travailler avec Jean-François Delmas durant ma thèse, je le remercie de faire partie de mon jury de soutenance.

Je voudrais remercier Roland Diel, collègue et ami, avec qui j'ai eu de longues discussions de travail. Son enthousiasme a rendu notre travail animé et productif. Je suis reconnaissant à Pierre Andreoletti de m'avoir guidé et conseillé dans mon travail de recherche. Je tiens également à remercier les probabilistes et statisticiens du laboratoire avec qui j'ai eu plaisir à travailler.

Je voudrais saluer les membres du laboratoire qui m'ont rendu ces trois années de thèse agréables par leur accueil et leur soutien. Je pense particulièrement aux personnes avec qui j'ai eu la chance d'apprendre et d'exercer l'enseignement. Un grand merci aux secrétaires du laboratoire pour leur efficacité, leur gentillesse et leur bonne humeur. Je remercie également mes amis Nicolas et Romain pour leur aide informatique et pour nos discussions colorées.

Merci à Pierre avec qui j'ai eu le plaisir de partager ces trois ans de thèse. Je tiens également à remercier Cristiana dont l'humour nous a amené un petit peu de Portugal. Impossible d'oublier mes amis Bassirou, Chi, Jradeh, Loïc, Pierre, Radouen, Yannick entre autres qui ont égayé de leurs discussions les interminables pauses cafés.

Je voudrais remercier mes amis du CIES, Bruno, Mélanie, Olivier et Rémy, pour les nombreuses soirées "de travail" à discuter de problèmes interdisciplinaires.

Le moral étant chose primordiale, je tiens à remercier mes amis qui m'ont soutenu depuis le début qu'ils aient été présents ou éloignés. Ils m'ont écouté lorsque j'en avais besoin et m'ont permis de sortir des mathématiques de temps en temps.

C'est également à ma famille que je dois d'en être arrivé là, ils m'ont toujours appuyé que ce soit dans ma vie professionnelle ou personnelle. Une pensée toute particulière à mon père et à Martine qui ont pris le temps de lire ma thèse.

Enfin je remercie Lavazza pour m'avoir donné le carburant nécessaire à ma recherche.

Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 Elagage d'un arbre de Lévy . . . 1

1.1.1 Arbres aléatoires continus . . . 1

1.1.2 Description des résultats obtenus . . . 10

1.2 Fragmentation d'un CRT de Lévy . . . 17

1.2.1 Processus de fragmentation . . . 17

1.2.2 Description des résultats obtenus . . . 20

1.3 Diffusion en milieu Lévy . . . 22

1.3.1 Diffusions en milieu aléatoire . . . 22

1.3.2 Description des résultats obtenus . . . 30

2 Elagage d'un arbre aléatoire continu de Lévy **35**

2.1 Prérequis sur les CRT de Lévy . . . 36

2.1.1 Le processus de Lévy sous-jacent . . . 36

2.1.2 Le processus des hauteurs et le CRT de Lévy . . . 37

2.1.3 Le processus d'exploration . . . 38

2.2 Procédure d'élagage . . . 39

2.2.1 Le serpent de Lévy . . . 39

2.2.2 Le processus d'exploration élagué . . . 43

2.3 Loi du processus élagué . . . 45

2.3.1 Une propriété de Markov spéciale . . . 45

2.3.2 Loi du processus d'exploration élagué . . . 59

2.3.3 Loi de la longueur des excursions . . . 66

2.4 Appendice . . . 67

3 Mesure de dislocation de la fragmentation d'un arbre aléatoire de Lévy **69**

3.1 Le serpent poissonnien de Lévy . . . 70

3.1.1 Marques paramétrées sur le squelette . . . 70

3.1.2 Marques paramétrées sur les nœuds . . . 70

3.1.3 Le serpent paramétré . . . 71

3.1.4 Représentation poissonnienne du serpent paramétré . . . 72

3.1.5 La propriété de Markov spéciale . . . 73

3.1.6 Le processus dual et la formule de représentation . . . 73

3.2 Liens entre le serpent paramétré et la fragmentation . . . 74

3.2.1 Construction du processus de fragmentation 74
3.2.2 Autre représentation de la fragmentation 76
3.3 Le processus de dislocation 78
3.3.1 Calcul de la mesure de dislocation 78
3.3.2 Cas brownien 81

4 Temps local d'une diffusion aléatoire en milieu Lévy stable 83
4.1 Vallée standard d'un processus de Lévy 84
4.1.1 Processus de Lévy sur $\mathbb{R}$ 84
4.1.2 Vallée du processus de Lévy sur $\mathbb{R}_+$ 85
4.1.3 Processus de Lévy stable 91
4.2 Diffusion en environnement aléatoire 95
4.2.1 Comportement asymptotique d'une diffusion en milieu stable 95
4.2.2 Loi limite du temps local renormalisé 99

Notations 105

Bibliographie 109

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse s'articule autour de deux thèmes : la fragmentation sur les arbres aléatoires continus et les diffusions en milieu aléatoire Lévy. Les deux premières sections de l'introduction concernent les arbres aléatoires continus, la troisième est destinée aux milieux aléatoires. Les notations utilisées sont indépendantes.

1.1 Elagage d'un arbre de Lévy

1.1.1 Arbres aléatoires continus

Processus de Galton-Watson

On introduit tout d'abord la notion de processus de Galton-Watson. Soit une famille $(\xi_{n,k}\,,\, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*)$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $a \in \mathbb{N}^*$, un processus de Galton-Watson partant de a est le processus aléatoire $(X_n^{(a)}, n \in \mathbb{N})$ défini par :

$$\begin{cases} X_0 = a, \\ X_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{X_n} \xi_{n,k}, \end{cases}$$

avec la convention $\sum_{k=1}^{0} \xi_{n,k} = 0$. X représente la taille d'une population partant d'un individu telle que les descendances de chaque individu soient indépendantes et de même loi. On obtient alors la propriété de branchement suivante : pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$, le processus $X^{(a+b)}$ a même loi que le processus $X^{(a)} + \tilde{X}^{(b)}$, où $\tilde{X}$ est une copie indépendante de X.

Processus de branchement continu (CSBP)

Le processus de branchement à espace d'état continu, continuous state branching process (CSBP) en anglais, est un processus à espace des temps continu et espace d'état continu, il a été introduit par Jirina [64] en 1958. Par définition, un processus $Y = (Y_t, t \geq 0)$ fortement markovien, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est appelé un CSBP si ses trajectoires sont continues à droite et avec limite à gauche (càd-làg) et si le processus Y vérifie la propriété de branchement :

Définition 1.1.1 (Propriété de branchement)**.** *On note P_y la loi du processus Y partant de y ($Y_0 = y$) et $Y^{(y)}$ un processus de loi égale à la loi de Y sous P_y. Alors,*

$$\left(Y_t^{(y_1+y_2)}, t \geq 0\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(Y_t^{(y_1)} + \tilde{Y}_t^{(y_2)}, t \geq 0\right)$$

où $Y^{(y_1)}$ et $\tilde{Y}^{(y_2)}$ sont des processus indépendants et de lois respectives P_{y_1} et P_{y_2}.

$\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ désigne l'égalité en loi des processus.

On ne considérera ici que les CSBP conservatifs, c'est-à-dire qui n'explosent pas en temps fini.

On peut également énoncer cette propriété grâce aux probabilités de transitions $P_t(y, \cdot)$ du processus Y : pour tout $y_1, y_2, t \geq 0$,

$$P_t(y_1 + y_2, \cdot) = P_t(y_1, \cdot) * P_t(y_2, \cdot)$$

où $*$ est la convolution des mesures.

Le CSBP est l'analogue continu d'un processus de branchement à espace et temps discrets, le processus de Galton-Watson. En 1967, Lamperti [72] a montré une convergence en loi des processus de Galton-Watson vers un CSBP. On notera $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ pour la convergence en loi des processus dans l'espace de Skorohod $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions càd-làg de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1.2 (Grimvall, [55])**.** *Pour tout CSBP Y critique ou sous-critique, il existe une suite $(Z^{(p)}, p \in \mathbb{N})$ de processus de Galton-Watson $Z^{(p)} = (Z_k^{(p)}, k \in \mathbb{N})$ et il existe une suite $(\gamma_p, p \in \mathbb{N})$ croissante de réels qui tend vers $+\infty$ tels que*

$$\left(\frac{1}{p} Z^{(p)}_{[\gamma_p t]}, t \geq 0\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (Y_t, t \geq 0)$$

où $[\cdot]$ est la partie entière.

De plus, si une suite de processus de Galton-Watson renormalisés comme précédemment converge en loi, alors elle converge vers un CSBP.

Intuitivement, comme dans le cas d'un processus de Galton-Watson, on considère une population de taille initiale fixée, la variable Y_t est la taille de cette population au temps $t \geq 0$. Le "nombre" d'individus est cependant réel et non entier comme dans le cas d'un processus de Galton-Watson.

Asymptotiquement, il apparaît alors deux cas : le cas où la population s'éteint en temps long, c'est-à-dire $\lim_{t \to +\infty} Y_t = 0$ et le cas inverse où la population survit. Une condition nécessaire et suffisante pour l'extinction p.s. de la population est que la moyenne du nombre d'enfants soit suffisamment faible, c'est-à-dire $\mathbb{E}[Y_t^{(x)}] < x$ (cas sous-critique) ou $\mathbb{E}[Y_t^{(x)}] = x$ (cas critique). Pour que la population survive avec une probabilité strictement positive, il faut et il suffit d'être dans le cas sur-critique : $\mathbb{E}[Y_t^{(x)}] > x$.

La loi du CSBP Y est caractérisée par sa tranformée de Laplace : pour tout $\lambda \geq 0$ et tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda Y_t}\right] = e^{-t u_t(\lambda)}$$

où l'exposant de Laplace u_t est l'unique solution positive de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_t(\lambda)}{\partial t} = -\psi\left(u_t(\lambda)\right), \\ u_0(\lambda) = \lambda, \end{cases}$$

ou de manière similaire :

$$u_t(\lambda) + \int_0^t \psi(u_s(\lambda))ds = \lambda \qquad \text{ou encore} \qquad \int_{u_t(\lambda)}^{\lambda} \frac{dv}{\psi(v)} = t.$$

Le mécanisme de branchement ψ caractérise le CSBP, de plus Lamperti [71] a montré que, dans le cas général, ψ s'écrit sous la forme :

$$\psi(\lambda) = \alpha'\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \pi(d\ell)\left(e^{-\lambda\ell} - 1 + \lambda\ell\mathbf{1}_{\ell<1}\right) \tag{1.1}$$

où α' est un drift, $\beta \geq 0$ est un terme quadratique et la mesure de Lévy π est positive, σ-finie sur $]0,+\infty[$ et vérifie $\int_{]0,+\infty[}(1 \wedge \ell^2)\pi(d\ell) < +\infty$. Notons que la mesure π correspond aux sauts du processus Y, c'est-à-dire à l'apparition d'un grand nombre d'individus. Le CSBP Y est conservatif si, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\int_0^{\epsilon} \frac{1}{|\psi(u)|}du = +\infty.$$

Cette condition est vérifiée si $\int_1^{+\infty} \ell\pi(d\ell) < +\infty$, voir Bingham [27] pour plus de détails. Grâce à la transformée de Laplace de Y, on peut écrire

$$\mathbb{E}\left[Y_t^{(x)}\right] = xe^{-\psi'(0+)t}. \tag{1.2}$$

On obtient alors facilement les conditions :

- Y est sous-critique si $\psi'(0+) > 0$,
- critique si $\psi'(0+) = 0$ et
- sur-critique si $\psi'(0+) < 0$.

Remarquons que la condition $\psi'(0+) > 0$ implique la condition $\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} Y_t = 0) = 1$. C'est-à-dire que la population s'éteint presque surement asymptotiquement. La condition plus forte : $\int^{+\infty} du/\psi(u) < \infty$ est équivalente à l'extinction presque sûre de la population en temps fini, voir Jirina [64], Lamperti [71] ou Bingham [27].

Pour le cas particulier où $\psi(\lambda) = \alpha\lambda$, le processus Y est déterministe et s'écrit $Y_t = Y_0e^{-\alpha t}$.

Si le mécanisme de branchement est de la forme $\psi(\lambda) = \beta\lambda^2$, le processus Y est alors une diffusion de Feller, c'est-à-dire l'unique solution de l'équation stochastique $dY_t = \sqrt{2\beta Y_t}dB_t$ où B est un mouvement brownien standard. Son exposant de Laplace s'écrit alors $u_t(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda\beta t}$. Pour le cas stable, c'est-à-dire où $\psi(\lambda) = \lambda^\alpha$, on obtient la formule : $u_t(\lambda) = (\lambda^{1-\alpha} + (\alpha-1)t)^{1/(1-\alpha)}$.

Arbres aléatoires continus (CRT)

Un processus de Galton-Watson donne le nombre d'individus d'une évolution de population que l'on représente par un arbre de Galton-Watson. Dans le cas continu, le CSBP représente également la taille d'une population, il peut donc être associé à un arbre généalogique de la population, l'arbre continu aléatoire, continuum random tree (CRT) en anglais. Ce dernier donne la taille de la population mais également la filiation des différents individus, il donne donc plus d'informations que le CSBP.

Cas discret

Interessons-nous d'abord aux arbres de Galton-Watson avec un nombre fini de nœuds, c'est-à-dire dont le processus de Galton-Watson associé est critique ou sous-critique. Notons la loi de reproduction de ce processus de Galton-Watson par la mesure de probabilité μ sur $\mathbb{N}$, on suppose alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\mu(k) \leq 1. \tag{1.3}$$

Le cas $\sum k\mu(k) = 1$ correspond au cas critique et $\sum k\mu(k) < 1$ au cas sous-critique.

Détaillons la construction d'un arbre discret, suivons la présentation de Neveu [84]. Puisqu'un arbre donne la généalogie, un individu est défini par son ascendance. On considère l'arbre infini

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} (\mathbb{N}^*)^i,$$

avec la convention $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$. Un individu $u = (u_1, \ldots, u_i)$ de l'arbre $\mathcal{U}$ a pour ancêtres $(u_1, \ldots, u_{i-1})$, $(u_1, \ldots, u_{i-2})$, etc, la racine de l'arbre est alors l'individu $\emptyset$. La génération i de l'individu u est donc la hauteur de l'individu dans l'arbre et peut être considérée comme la distance entre l'individu u et la racine de l'arbre.

Un arbre fini (enraciné) $\mathcal{T}$ est un sous-ensemble fini de $\mathcal{U}$ tel que :

- $\emptyset \in \mathcal{T}$,
- si $(u_1, \ldots, u_i, k) \in \mathcal{T}$ alors $(u_1, \ldots, u_i) \in \mathcal{T}$, c'est-à-dire que tout individu de l'arbre, autre que la racine, doit avoir un père dans l'arbre,
- pour tout $u = (u_1, \ldots, u_i) \in \mathcal{T}$, il existe un entier $k_u(\mathcal{T}) \geq 0$ tel que $(u_1, \ldots, u_i, k) \in \mathcal{T}$ si et seulement si $1 \leq k \leq k_u(\mathcal{T})$, c'est-à-dire que les fils de l'individu u de l'arbre sont numérotés de 1 à $k_u(\mathcal{T})$.

Tous les individus de l'arbre sont alors ordonnés par ordre lexicographique, la racine étant numérotée 0. Du point de vue combinatoire, ce formalisme correspond au codage des arbres enracinés et ordonnés.

Définissons alors l'arbre de Galton-Watson critique ou sous-critique. Soit $(K_u, u \in \mathcal{U})$ une famille de variables aléatoires indépendantes de loi μ vérifiant (1.3). Un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction μ est l'ensemble

$$\tau = \{u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{U}\,;\, u_j \leq K_{(u_1,\ldots,u_{j-1})} \text{ pour tout } 1 \leq j \leq n\}$$

des individus dont le nombre de fils est de loi μ indépendemment les uns des autres.

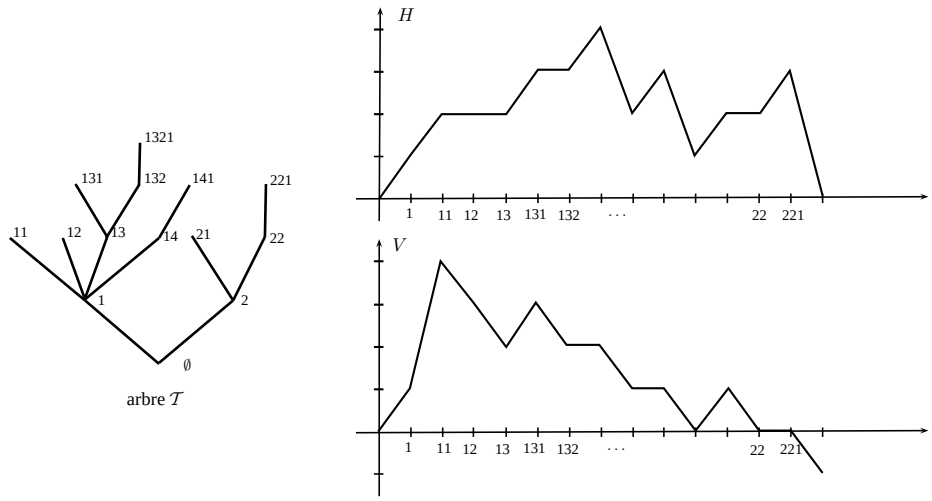
Pour un arbre fini $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$ où $\#\mathcal{T}$ est le nombre d'individus de l'arbre, notons $(v_n, 0 \leq n \leq \#\mathcal{T}-1)$ la liste ordonnée lexicographiquement des mots correspondant à l'arbre $\mathcal{T}$ et pour un mot $v = u_1u_2\ldots u_k$, on note $|v| = k$ sa longueur. Suivons la présentation de Le Gall et Le Jan [80], on définit un processus des hauteurs H à temps et à valeurs dans $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \{0, \ldots, N-1\}, \qquad H_n = |v_n| \qquad \text{et} \qquad H_N = 0.$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} H_n \text{ correspond à la génération du } n\text{-ième individu de l'arbre,} \\ H_{\#\mathcal{T}} = 0. \end{cases}$$

FIGURE 1.1 – Arbre discret et les processus H et V associés.



Une forêt d'arbres de Galton-Watson indépendants critiques ou sous-critiques est une suite d'arbres de Galton-Watson $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots$. Si on appelle H^1, H^2, ..., les processus des hauteurs associés, le processus des hauteurs, que l'on note encore H, associé à la forêt est la concaténation des processus des hauteurs :

$$H_n = H_n^i \qquad \text{si } \#\mathcal{T}_1 + \cdots + \#\mathcal{T}_i \leq n \leq \#\mathcal{T}_1 + \cdots + \#\mathcal{T}_{i+1}.$$

Ce processus H est alors un processus discret récurrent sur $\mathbb{N}$.

On peut définir le processus des hauteurs de manière plus formelle. Pour un processus des hauteurs H d'une forêt d'arbres de Galton-Watson indépendants critiques ou sous-critiques, il existe une marche aléatoire V sur $\mathbb{Z}$ telle que $V_0 = 0$, les sauts de V aient pour loi $\mu(k+1)$, pour $k \in \{-1, 0, 1, \ldots\}$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$H_n = \text{Card}\left\{k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, V_k = \inf_{k \leq j \leq n} V_j\right\}. \tag{1.4}$$

Les processus H et V caractérisent la suite d'arbres discrets, voir la Figure 1.1.

Remarquons que le processus H est une excursion positive d'un processus aléatoire dont les sauts sont à valeurs dans $\{\ldots, -1, 0, 1\}$.

La marche V a des sauts à valeurs dans $\{-1, 0, 1, \ldots\}$. Plus précisément, plus de branches partent d'un nœud, plus le saut de V correspondant est grand. Et la marche V ne décroît que par des sauts de taille -1. Notons également que pour un arbre discret $\mathcal{T}$, $V_{\#\mathcal{T}} = V_0 - 1$.

Arbres réels

Aldous [8, 9, 10] a considéré la limite d'une suite d'arbres finis en faisant tendre le nombre de nœuds vers $+\infty$. Il a donc construit un arbre limite comme espace métrique. Une métrique naturelle sur un arbre est de poser pour distance d entre deux points de l'arbre la longueur de l'unique chemin

entre ces deux points. Un $\mathbb{R}$-arbre est alors caractérisé par la propriété des quatres points (voir par exemple [29]) : si x, y, z et t appartiennent à un arbre alors :

$$d(x,y)+d(z,t)\leq \max(d(x,z)+d(y,t)\,,\,d(x,t)+d(z,y)).$$

Définition 1.1.3. *Un espace métrique $(\mathcal{T},d)$ est un arbre réel si : pour $u,v\in\mathcal{T}$,*
- *il existe une unique isométrie $\varphi_{u,v}:[0,d(u,v)]\to\mathcal{T}$ telle que $\varphi_{u,v}(0)=u$ et $\varphi_{u,v}(d(u,v))=v$,*
- *si $(w_s,0\leq s\leq 1)$ est un chemin injectif sur $\mathcal{T}$ tel que $w_0=u$ et $w_1=v$ alors*

$$(w_s,0\leq s\leq 1)=\varphi_{u,v}([0,d(u,v)]).$$

C'est-à-dire que l'espace $(\mathcal{T},d)$ a une structure d'espace métrique. Définissons maintenant des notions géométriques de l'arbre (voir Evans [48] pour plus détails).
- Un arbre enraciné est un arbre réel dont on a fixé un point, ce point est appelé la racine de l'arbre et on le notera $\emptyset$.
- Pour tout couple (u,v) de points de l'arbre aléatoire, il existe un unique chemin (injectif) reliant les deux points. Ce chemin est un interval dans l'espace métrique $(\mathcal{T},d)$ que l'on notera $[\![u,v]\!]$.
- Pour x et y deux points de $\mathcal{T}$, il existe un unique point $w\in\mathcal{T}$ tel que $[\![\emptyset,x]\!]\cap[\![\emptyset,y]\!]=[\![\emptyset,w]\!]$, on appelera w l'ancêtre commun le plus récent de x et y.
- On appelera $[\![\emptyset,x]\!]$ l'ascendance d'un indivu $x\in\mathcal{T}$.
- Pour $w\in\mathcal{T}$, on appelera l'indice de w le nombre de composantes connexes de $\mathcal{T}\setminus\{w\}$. L'indice d'un point est à valeurs dans $\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$. Une feuille de $\mathcal{T}$ est un point de l'arbre d'indice 1 et un nœud de $\mathcal{T}$ est un point de l'arbre d'indice supérieur ou égal à 3.

Citons Evans [47] comme première utilisation explicite des arbres réels en probabilités. Pour pouvoir étudier les processus à valeurs arbres réels, il est alors naturel de considérer l'espace des arbres réels comme un espace topologique muni de la distance de Gromov-Hausdoff, voir [50] par exemple.

Donnons une construction d'un arbre réel codé par son processus des hauteurs g en reprenant l'idée de construction de Le Gall [74] et d' Aldous [10], citons également Dusquesne et Le Gall [45] pour le cas lié aux arbres réels. On se place ici dans le cas où l'arbre $(\mathcal{T},d)$ est compact.

Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, à support compact, non identiquement nulle (pour ne pas considérer les cas triviaux) et telle que $g(0)=0$. Pour $s,t\geq 0$, on pose

$$m_g(s,t)=\inf_{r\in[s\wedge t,s\vee t]}g(r),$$

et

$$d_g(s,t)=g(s)+g(t)-2m_g(s,t).$$

Clairement $d_g(s,t)=d_g(t,s)$ et il est également facile de montrer l'inégalité triangulaire

$$d_g(s,u)\leq d_g(s,t)+d_g(t,u)$$

pour tout $s,t,u\geq 0$. On définit alors la relation d'équivalence $s\sim t$ si et seulement si $d_g(s,t)=0$ et on définit l'espace quotient

$$\mathcal{T}_g=[0,\infty[/\sim.$$

La fonction d_g induit une distance sur l'espace $\mathcal{T}_g$, on garde la même notation d_g pour cette distance. Considérons la projection canonique $p_g:[0,\infty[\to\mathcal{T}_g$ sur l'espace $\mathcal{T}_g$. Si on munit $[0,\infty[$ de la distance euclidienne et $\mathcal{T}_g$ de la distance d_g, p_g est continue.

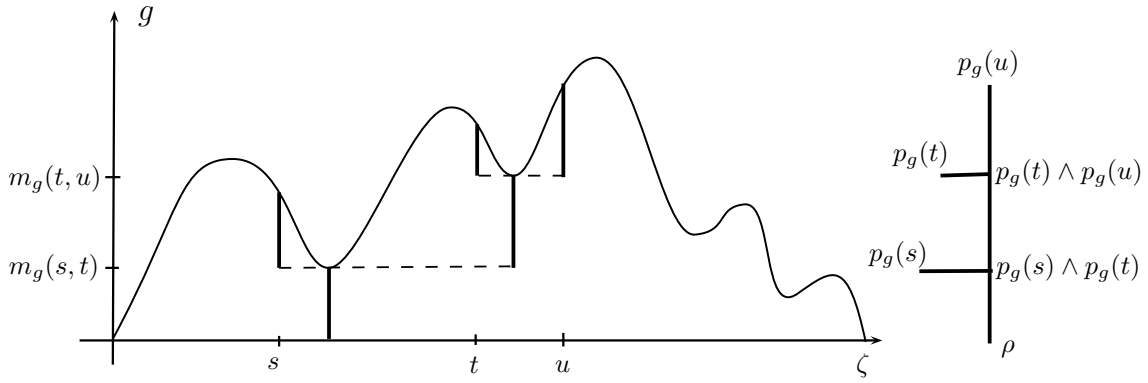
On pose $\rho = p_g(0)$, voir la Figure 1.2. Si on note ζ le supremum du support de g, alors pour tout $t \geq \zeta$, $p_g(t) = \rho$ et on a $\mathcal{T}_g = p_g([0, \zeta])$, $\mathcal{T}_g$ est alors compact.

Théorème 1.1.4. *(Duquesne et Le Gall [45] et Evans et Winter [51]) L'espace métrique $(\mathcal{T}_g, d_g)$ est un arbre continu dont ρ est la racine.*

De plus tout arbre réel compact peut être représenté sous la forme $\mathcal{T}_g$.

Cette construction s'étend au cas des arbres réels non compacts, la fonction g associée n'est alors plus forcément continue.

FIGURE 1.2 – La projection p_g.



Pour mieux comprendre cette construction, expliquons comment retrouver la généalogie d'un arbre $\mathcal{T}_g$ à partir de la fonction g. Considérons les temps s, t et u sur le support $[0, \zeta]$ de g, on peut alors trouver la valeur $m_g(t, u)$ (resp. $m_g(s, t)$) associée à l'ancêtre commun le plus récent de t et u (resp. s et t). La hauteur $g(t)$ du temps t est alors séparée en trois parties : $[0, m_g(s, t)]$, $[m_g(s, t), m_g(t, u)]$ et $[m_g(t, u), g(t)]$, qui correspondent aux segments verticaux en gras sur la Figure 1.2. Remarquons que les segments horizontaux en pointillés ne jouent, ici, aucun rôle. Le segment $[0, m_g(s, t)]$ est commun aux deux temps s et t, il correspond à une ligne ancestrale commune entre s et t jusqu'à leur ancêtre commun le plus récent.

En projetant sur l'arbre $\mathcal{T}_g$, les différents temps s, t et u deviennent les feuilles de l'arbre (les nœuds aux extrémités de l'arbre), les ancêtres communs deviennent les nœuds auxquels plusieurs branches sont attachées. On obtient alors un arbre réduit constitué de cinq branches.

Arbres de Lévy

Commençons par définir un arbre continu qui représente la généalogie d'un CSBP critique ou sous-critique : l'arbre de Lévy. On définit des processus continus analogues aux processus discrets V et H. On considère un processus de Lévy X qui jouera le même rôle que la marche de Lukasiewicz V. Ainsi on suppose que X est sans sauts négatifs et ne tend pas vers $+\infty$, puisque que l'on considère le cas d'arbres critiques ou sous-critiques. On considère également que X est à variation infinie. Ce processus est caractérisé par son exposant de Laplace

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda X_t}] = e^{t\psi(\lambda)}$$

où ψ est donnée par (1.1) :

$$\psi(\lambda) = \alpha'\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \pi(d\ell)\left(e^{-\lambda\ell} - 1 + \lambda\ell\mathbf{1}_{\ell<1}\right)$$

Les CSBP sont associés aux processus de Lévy sans saut négatif depuis Lamperti [71], via la transformée de Lamperti, voir Helland [57] pour une étude plus précise de cette transformée. Le Gall et Le Jan [80] ont construit l'analogue continu du processus des hauteurs discret comme un temps local d'une fonctionnelle du processus de Lévy X, voir la Section 2.1.2 pour plus de précisions. Donnons une autre définition du processus des hauteur par une approximation d'une fonctionnelle du processus de Lévy X (voir Duquesne et Le Gall [44]). Dans le cas où le processus H admet une modification continue H° (pour $\beta > 0$, par exemple), il existe une suite $(\varepsilon_k, k \in \mathbb{N})$ de réels strictement positifs qui tend vers 0, telle que :

presque surement pour tout $t \geq 0$, pour tout $s < t$ tel que $X_{s-} \leq I_t^s$, et pour $s = t$ lorsque $X_t - X_{t-} > 0$, on a

$$H_s^\circ = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon_k} \int_0^s \mathbf{1}_{\{X_r < I_s^r + \varepsilon_k\}} dr$$

où $I_s^r = \inf\{X_u\,; r \leq u \leq s\}$.

On retrouve ici l'idée que le processus des hauteurs est vu comme un temps local. Ce processus des hauteurs est l'analogue continu du processus des hauteurs discret associé à un arbre de Galton-Watson. Chacune des excursions du processus H est à support compact puisque l'on considère les cas critiques ou sous-critiques.

On définit alors l'arbre aléatoire continu de Lévy comme un arbre réel dont la fonction de hauteur g est le processus des hauteurs H associé à un processus de Lévy X tel que $X_0 = 0$ et vérifiant les hypothèses suivantes :

- X est sans saut négatif,
- X ne tend pas vers $+\infty$, (1.5)
- X est à variation infinie. (1.6)

Remarquons que l'hypothèse (1.5) implique que X_1 est d'espérance finie (c'est-à-dire $\int_{]0,\infty[}(\ell \wedge \ell^2)\pi(d\ell) < \infty$), voir la Section 1.1.1 de [44]. L'hypothèse (1.6) est vraie si et seulement si $\beta > 0$ ou $\int_{]0,1[} \ell\pi(d\ell) = \infty$, voir le Corollaire VII.5 de [16].

Lorsque l'exposant de Laplace de X est $\psi(\lambda) = \beta\lambda^2$, le CRT associé est le CRT brownien, le processus des hauteurs associé est alors le mouvement brownien réfléchi et est donc continu. Dans le cas général, le processus des hauteurs n'est pas continu, mais seulement semi-continu inférieurement. La condition suivante sur l'exposant de Laplace ψ est nécessaire et suffisante pour avoir une modification continue du processus des hauteurs H :

$$\int_{]1,\infty[} \frac{du}{\psi(u)} < \infty.$$

De plus le processus des hauteurs n'est en général pas markovien. On pourra cependant énoncer les résultats grâce à H mais on utilisera le processus d'exploration pour faire les calculs, voir la Section 2.1.3 pour la définition et les propriétés de ce processus.

Afin de mieux comprendre la correspondance entre le cas discret et le cas continu, expliquons la convergence d'une suite de processus des hauteurs associés à des arbres de Galton-Watson de loi de reproduction μ_p démontrée par Duquesne et Le Gall [44].

Pour tout $p \geq 1$, on note $g^{(p)}$ les fonctions génératrices de lois de reproduction μ_p d'un processus de Galon-Watson $Z^{(p)}$ critique ou sous-critique partant de p individus et par $g_n^{(p)} = g^{(p)} \circ \cdots \circ g^{(p)}$. On considère des lois μ_p telles que pour tout $\delta > 0$

$$\liminf_{p \to +\infty} g^{(p)}_{[\delta\gamma_p]}(0)^p > 0 \tag{1.7}$$

où γ_p est donné dans le Théorème 1.1.2.

Théorème 1.1.5. *(Duquesne et Le Gall [44]) Pour $H^{(p)} = (H_n^{(p)}, n \in \mathbb{N})$ processus des hauteurs discrets associés à une suite d'arbres de Galton-Watson critiques ou sous-critiques de loi de reproduction μ_p vérifiant la condition (1.7) et pour H processus des hauteurs à trajectoires continues, on a*

$$\left(\frac{1}{\gamma_p} H^{(p)}_{[p\gamma_p t]}, t \geq 0\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (H_t, t \geq 0).$$

La condition (1.7) peut se traduire par l'expression : pour tout $\delta > 0$,

$$\liminf_{p \to +\infty} \mathbb{P}[Z^{(p)}_{[\delta\gamma_p]} = 0] > 0.$$

Ce qui implique que la suite des temps d'extinction de $Z^{(p)}$, renormalisé, converge en loi vers le temps d'extinction de Y.

Par analogie avec le codage discret, le processus H définit une distance sur l'arbre continu et H_t donne ainsi la "génération" de l'individu t, c'est-à-dire la distance de l'individu t à la racine de l'arbre.

Remarque 1.1.6. De plus, sous les mêmes conditions que le Théorème 1.1.2, on obtient la convergence suivante dûe à Grimvall [55] :

$$\left(\frac{1}{p} V^{(p)}_{[p\gamma_p t]}, t \geq 0\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_t, t \geq 0)$$

où la marche V est donnée par (1.4) et où X est un processus de Lévy partant de 0, sans sauts négatifs, qui ne tend pas vers $+\infty$ et à variation infinie.

Le Gall et Le Jan [80] ont généralisé le théorème de Ray-Knight, bien connu dans le cas brownien (voir [70]), qui permet de retrouver un CSBP à partir du temps local du processus des hauteurs. La définition explicite de ce temps local est faite dans [44]. Notons $T_x = \inf\{t \geq 0, X_t > -x\}$ l'inverse continue à droite du processus X au niveau $-x$, et notons $L^a = (L^a_t, t \geq 0)$, le temps local du processus H au niveau a qui "mesure" le temps passé, avant t, par le processus H au niveau a. Formellement, $(L^a_s, a \geq 0, s \geq 0)$ est l'unique processus continu et croissant en la variable s tel que, p.s. pour toute fonction f positive mesurable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $s \geq 0$,

$$\int_0^s f(H_t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} f(a) L^a_s da.$$

Si le processus X est un processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ, alors le processus $(L^a_{T_x}, a \geq 0)$ est un CSBP de mécanisme de branchement ψ. Donc H code bien la généalogie du CSBP partant de

x individus et de mécanisme de branchement ψ

L'arbre aléatoire continu de Lévy a une structure assez complexe. Les nœuds qui le composent sont de deux types : des nœuds d'où partent trois branches et des nœuds d'où partent une infinité de branches, et ces nœuds (d'indice 3 ou infini) sont denses le long d'une branche. Les nœuds d'indice infini de l'arbre correspondent aux sauts du processus de Lévy associé, alors que les nœuds binaires (d'indice 3) correspondent à la partie brownienne du Lévy. Dans le cas particulier où le processus de Lévy sous-jacent X est un mouvement brownien standard ($\psi(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2$), le CRT associé est binaire, c'est-à-dire qu'il n'y a que des nœuds d'indice 3. Le processus des hauteurs associé est une excursion positive (à une constante multiplicative près) du mouvement brownien standard. Si au contraire X n'a pas de partie quadratique, le CRT associé n'a que des nœuds d'indice infini.

1.1.2 Description des résultats obtenus

Le travail de cette partie est issu de l'article [6] soumis pour publication et a été réalisé avec R. Abraham et J.-F. Delmas.

Premiers élagages

Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'élagage des arbres aléatoires. Le but est de fractionner un arbre aléatoire en plusieurs morceaux au cours du temps et ainsi de créer une fragmentation à partir d'un CRT.

Des premiers travaux ont été réalisés par Aldous et Pitman [11]. Ils s'interessent à un processus de coalescence représenté par un CRT dont les branches sont supprimées au cours du temps. Pour supprimer ces branches, ils marquent le squelette du CRT avec un processus de Poisson dont l'intensité est proportionnelle à la longueur des branches. Ils obtiennent alors une forêt continue de CRT plus petits et obtiennent un processus de fragmentation en faisant varier le paramètre du processus de Poisson. Leurs démonstrations utilisent une discrétisation ce qui permet de considérer des arbres de Galton-Watson.

Abraham et Serlet [7] se sont ensuite intéressés au cas d'une construction de fragmentation auto-similaire à partir d'un arbre brownien. Ils utilisent un serpent poissonnien introduit par Le Gall [73]. Ce processus a été introduit afin de faciliter l'étude du super-mouvement brownien, ce processus est également lié à une classe d'équations aux dérivées partielles (voir [75] et [76]). Ce processus permet de marquer les branches de l'arbre brownien de manière poissonnienne tout en gardant une cohérence sur la généalogie des branches.

Reprenons la construction du serpent poissonnien, citons Bertoin, Le Gall et Le Jan [26] (voir également [7]). On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des couples (ζ, μ) où ζ est un réel positif et μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}_+^2$ dont le support est inclus dans $[0, \zeta] \times \mathbb{R}_+$. On munit $\mathcal{M}$ d'une distance, ce qui en fait un espace polonais.

Théorème 1.1.7. *Il existe un processus continu fortement markovien $(\zeta_s, \mathcal{N}_s; s \geq 0)$ à valeurs dans $\mathcal{M}$ tel que :*

– *$(\zeta_s; s \geq 0)$ a pour loi la loi d'une excursion brownienne conditionnée à avoir une longueur ℓ.*

– *Conditionnellement à* $(\zeta_s, s \geq 0)$*, le processus* $(\mathcal{N}_s; s \geq 0)$ *est un processus de Markov tel que pour* $0 \leq s \leq s'$*,*

$$\mathcal{N}_{s'}(dx\,dy) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}_s(dx\,dy)\mathbf{1}_{\{x \leq \zeta_{s,s'}\}} + \tilde{\mathcal{N}}(dx\,dy)\mathbf{1}_{\{\zeta_{s,s'} < x \leq \zeta_{s'}\}}$$

où $\zeta_{s,s'} = \inf_{u \in [s,s']} \zeta_u$ *et* $\tilde{\mathcal{N}}$ *est une mesure ponctuelle de Poisson sur* $\mathbb{R}^2$ *indépendante de* $\mathcal{N}_s$ *et d'intensité la mesure de Lebesgue sur* $(\mathbb{R}_+)^2$*.*

C'est-à-dire que le processus ζ représente l'excursion brownienne qui code l'arbre brownien et pour $s \geq 0$, la mesure $\mathcal{N}_s$ représente un déplacement spatial sur la branche du CRT partant de la racine jusqu'à l'individu s. Ce déplacement spatial étant ponctuel, on appelle marques les atomes de la mesure ponctuelle. Pour deux individus s et s', le processus $\mathcal{N}$ place les mêmes marques sur leur généalogie commune, c'est-à-dire de la racine de l'arbre à la hauteur de leur ancêtre commun le plus récent $([0, \zeta_{s,s'}])$ et place des marques de manière uniforme sur le reste de leur branche. $\mathcal{N}$ garde donc en mémoire les marques sur les ascendances des individus et de manière cohérente.

Pour $\theta > 0$ fixé, on définit une relation d'équivalence par :

$$uR_\theta v \Leftrightarrow u \text{ et } v \text{ ont le même nombre de marques sur leur ascendance.}$$

On note alors $F(\theta)$ la suite réarrangée par ordre décroissant des mesures de Lebesgue des classes d'équivalence obtenues telle que $F(\theta) \in \mathcal{S}^\downarrow$. En augmentant le nombre de marques grâce au paramètre θ, Abraham et Serlet [7] obtiennent un processus $(F(\theta); \theta \geq 0)$ à valeurs dans $\mathcal{S}^\downarrow$. Pour θ fixé, $F(\theta)$ donne les longueurs des sous-excursions obtenues à partir de l'excursion brownienne après élagage et réordonnées de manière décroissante, c'est-à-dire les tailles des fragments de CRT obtenus après élagage. Le processus F est un processus de fragmentation auto-similaire d'indice $\frac{1}{2}$. Contrairement au travail de Aldous et Pitman [11], la démonstration de ce résultat utilise directement les propriétés du CRT sans passer par une discrétisation.

Miermont [83] s'est intéressé à la construction d'une fragmentation auto-similaire à partir d'un CRT stable. Les fragmentations obtenues à partir de l'élagage du CRT brownien sur son squelette sont binaires (elles créent deux nouveaux fragments à chaque élagage), mais puisque les nœuds d'un CRT stable ne sont pas binaires mais d'indice infini, pour obtenir l'auto-similarité du processus de fragmentation, il faut élaguer sur les nœuds d'indice infini du CRT.

Pour marquer les nœuds, Miermont [83] utilise un processus de sauts purs tel que ses sauts soient ceux du Lévy X caractérisant le CRT et tel que ce processus dépende d'un paramètre t qui augmente le nombre de marques. Notons ΔX_s le saut du processus X au temps s et $(e_s; s$ tel que $\Delta X_s > 0)$ une famille de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1, le processus de marquage est alors défini par la formule : pour $t \geq 0$

$$Z_s^{(t)} = \sum_{0 \leq u \leq s} \Delta X_u \, \mathbf{1}_{e_u < t\Delta X_u}.$$

Ainsi un saut de taille ΔX_u est marqué avec une probabilité $1 - e^{-t\Delta X_u}$. Le processus $(F(t); t \geq 0)$ des tailles des fragments obtenus après élagage du CRT α-stable et réordonnées par ordre décroissant est un processus de fragmentation auto-similaire d'indice $\frac{1}{\alpha}$.

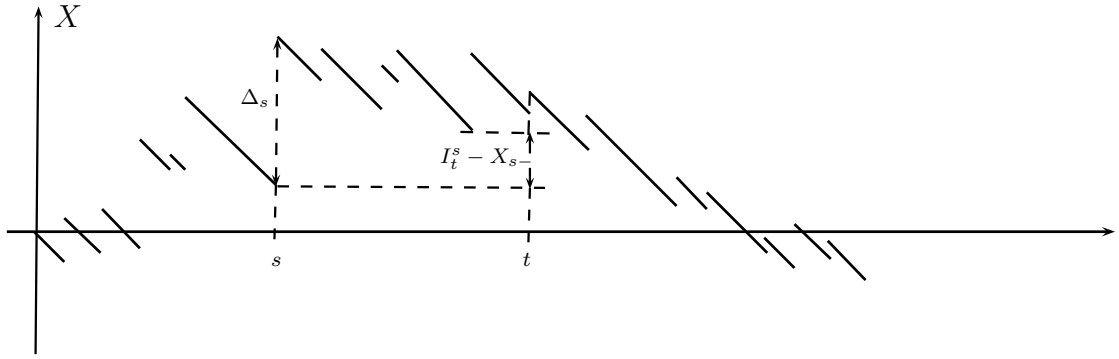
Plus récemment Abraham et Delmas [4] ont généralisé ces constructions au cas d'un arbre de Lévy sans terme quadratique. Comme dans la cas stable, l'élagage du CRT se fait sur les nœuds infinis. Ils utilisent un processus markovien qui caractérise le CRT de Lévy : le processus d'exploration à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ des mesures finies sur $\mathbb{R}_+$. Ce processus a été introduit par Duquesne et Le Gall [44]. Notons ψ l'exposant de Lévy du processus de Lévy X sans terme quadratique qui caractérise le CRT, $I_t^s = \inf_{[s,t]} X$ et H le processus des hauteurs associé. Le processus d'exploration est alors défini par : pour tout $t \geq 0$,

$$\rho_t(dr) = \sum_{\substack{0<s\leq t \\ X_{s-}<I_t^s}} (I_t^s - X_{s-})\, \delta_{H_s}(dr).$$

C'est-à-dire que ρ_t garde en mémoire toute la généalogie des individus avant t.

Pour mieux comprendre ce processus d'exploration, on peut le représenter dans un système de représentation de file d'attente quand $\beta = 0$, voir [80] pour plus de détails. Considérons une file d'attente LIFO (dernier arrivé, premier servi) avec un serveur, voir la Figure 1.3. Un saut du processus X au temps s correspond à l'arrivée d'un nouveau client demandant un service égal à la valeur du saut : $\Delta_s = X_s - X_{s-}$. Le serveur interrompt alors son travail en cours et commence immédiatement le service de ce nouveau client. Quand ce nouveau service est fini, le serveur retourne sur son ancien travail. Quand la mesure de Lévy π est infinie, tous les services ont des interruptions. Le client arrivé au temps s est encore dans le système au temps $t > s$ si et seulement si $X_{s-} < I_t^s$ et, dans ce cas, la quantité $\rho_t(\{H_s\})$ correspond au travail restant, au temps t, pour le client du temps s. Remarquons que $\rho_t([0, H_t])$ correspond au travail du serveur restant au temps t et est égal à $X_t - I_t$. où $I_t = \inf_{0\leq s\leq t} X_s$.

FIGURE 1.3 – Le processus de Lévy X (sans terme quadratique).



Ils utilisent également un processus de marquage $m^{(\theta)}$ tel que le processus $(\rho, m^{(\theta)})$ ait la propriété du serpent et tel qu'il augmente le nombre de marques en fonction du paramètre θ.

Plus précisément, conditionnellement au processus X ou de manière équivalente au processus H, on considère une famille $(\sum_{u>0} \delta_{V_{s,u}}; s$ temps de saut de $X)$ de mesures ponctuelles de Poisson indépendantes sur $\mathbb{R}_+$ d'intensités respectives $\Delta X_s \mathbf{1}_{u>0} du$. On définit alors la mesure de Poisson ponctuelle $M = (M_t, t \geq 0)$ à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+^2)$:

$$M_t(dr, d\theta) = \sum_{\substack{0<s\leq t \\ X_{s-}<I_t^s}} (I_t^s - X_{s-}) \left(\sum_{u>0} \delta_{V_{s,u}}(d\theta) \right) \delta_{H_s}(dr). \tag{1.8}$$

Intuitivement, au temps t, seront marqués les sauts de X avant t avec un poids correspondant à la taille du saut de X avec avec un intensité donnée par $\sum_{u>0} \delta_{V_{s,u}}(d\theta)$. On introduit alors le paramètre θ qui augmentera le nombre de marques, on obtient le processus de marquage : pour $t \geq 0$,

$$m_t^{(\theta)}(dr) = M_t(dr, [0, \theta]).$$

Quand $\theta = 0$, le processus $(m_t^{(0)}, t \geq 0)$ ne place pas de marque et l'ensemble des marques issues du temps $\theta' > \theta$ contient l'ensemble des marques au temps θ. On construit un élagage sur le CRT à partir de ce processus de marquage.

Abraham et Delmas [4] ont montré que cet élagage définit une fragmentation sans perte de masse qui, dans le cas d'une arbre stable, est auto-similaire ; ils calculent également la mesure de dislocation associée à la fragmentation. Soit $(\Delta S_t; t \geq 0)$ les sauts d'un subordinateur S d'exposant de Laplace ψ^{-1}, si on note π la mesure de Lévy du processus X et π_* la mesure de Lévy de S, alors la famille de dislocation $(\nu_r, r \geq 0)$ associée à la fragmentation précédente vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}^\downarrow} e^{-\lambda r} F(x) \pi_*(dr) \nu_r(dx) = \int \pi(dv) \left[S_v e^{-\lambda S_v} F((\Delta S_u, u \leq v)) \right]$$

où $(\Delta_u, u \leq v)$ désigne la famille des sauts du subordinateur rangés par ordre décroissant.

Ils ont également montré que le fragment de CRT contenant la racine de l'arbre a pour loi la loi d'un CRT dont le processus de Lévy qui le caractérise a pour exposant de Laplace : $\psi^{(\theta)}(\lambda) = \psi(\lambda+\theta) - \psi(\theta)$.

Pour démontrer ces résultats, Abraham et Delmas [4] montrent une propriété de Markov spéciale qui donne la loi du serpent poissonnien de Lévy "au dessus" du fragment du CRT contenant la racine de l'arbre.

Résultat sur l'élagage d'un CRT de Lévy

Le premier travail réalisé dans cette thèse est une généralisation d'une partie du travail d'Abraham et Delmas [4] dans le cas de l'élagage d'un CRT de Lévy avec une partie quadratique. Les idées sont reprises de l'article d'Abraham et Delmas [4], les énoncés sont analogues mais les preuves sont différentes, en particulier, on a besoin d'un problème de martingale. Informellement, on se fixe deux mécanismes de branchement : ψ et ψ_0, on construit deux CRT, l'un par élagage de l'autre, tels que les deux arbres soient codés respectivement par ψ et ψ_0.

Les mécanismes de branchement

On se fixe deux mécanismes de branchement ψ et ψ_0, le but est de construire des CSBP Y et Y^0 associés à ψ et ψ_0 tels que Y^0 soit une sous-population de Y, c'est-à-dire pour tout $t \geq 0$, $Y_t^0 \leq Y_t$. On pose alors : pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \pi(d\ell)(e^{-\lambda\ell} - 1 + \lambda\ell), \tag{1.9}$$

$$\psi_0(\lambda) = \alpha_0\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \pi_0(d\ell)(e^{-\lambda\ell} - 1 + \lambda\ell), \tag{1.10}$$

où $\alpha, \alpha_0, \beta \geq 0$ et où les deux mesures de Lévy π et π_0 sont des mesures σ-finies sur $]0,+\infty[$ telles que $\int_{]0,+\infty[}(1 \wedge \ell^2)\pi(d\ell) < \infty$. On reprend les hypothèses données par les formules (1.6) et (1.5) :

$$\int_{]0,\infty[} (\ell \wedge \ell^2)\pi(d\ell) < \infty \qquad \text{et} \qquad \beta > 0 \text{ ou } \int_{]0,1[} \ell\pi(d\ell) = \infty.$$

De plus pour que Y^0 puisse être une sous-population de Y, il est nécessaire de fixer des hypothèses sur ψ_0 : la mesure π_0 est absolument continue par rapport à la mesure π, c'est-à-dire que quand le processus Y^0 saute, le processus Y saute également. Notons, pour tout $\ell > 0$,

$$1 - p(\ell) = \frac{d\pi_0}{d\pi}(\ell)$$

la densité de π_0 par rapport à π. Si on note

$$\pi = \pi_0 + \pi_1,$$

on obtient alors, pour tout $\ell > 0$,

$$p(\ell) = \frac{d\pi_1}{d\pi}(\ell).$$

Un saut de taille ℓ issu de π sera alors un saut issu de π_0 avec une probabilité $1 - p(\ell)$.

On obtient alors $\int_{]0,+\infty[}(\ell \wedge \ell^2)\pi_1(d\ell) < +\infty$, et on suppose la condition plus forte :

$$\int_{]0+\infty[} \ell\pi_1(d\ell) < +\infty.$$

Puisque l'on veut $Y_t^0 \leq Y_t$, grâce à (1.2), on déduit que $\psi_0'(0) \geq \psi'(0)$ et ainsi $\alpha_0 \geq \alpha$. On suppose de plus que

$$\alpha_1 := \alpha_0 - \alpha - \int_{]0,+\infty[} \ell\pi_1(d\ell) \geq 0. \tag{1.11}$$

Cette condition implique que la décroissance de la population de la population Y^0 sera plus forte que la décroissance de la population Y. Nous supposons que les deux populations ont le même coefficient de diffusion β.

On peut comprendre ces deux CSBP par une interprétation grâce à des mutations (voir [2]). La population Y^0 représente une population "Eve" dont le génotype est le même pour tous les individus. Cette population donne naissance à des mutations dont le taux est proportionnel à la taille de la population Eve. On considère que ces mutations sont neutres, c'est-à-dire que l'évolution de la population mutante est la même que la population Eve (c'est la propriété de branchement). Cette population mutante donne naissance à une nouvelle population mutante avec un taux proportionnel à sa taille, et ainsi de suite. On obtient alors la population Y qui est un processus de branchement avec immigration.

Le processus d'exploration

On note X un processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ, et H son processus des hauteurs. Pour pouvoir utiliser la propriété de Markov, on utilise le processus d'exploration introduit et étudié par

Le Gall et Le Jan [80] dans le cas sans partie quadratique et par Duquesne et Le Gall [44] dans le cas général. Comme le processus des hauteurs, il caractérise le CRT. Le processus d'exploration ρ est un processus à valeurs dans $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ et défini par :

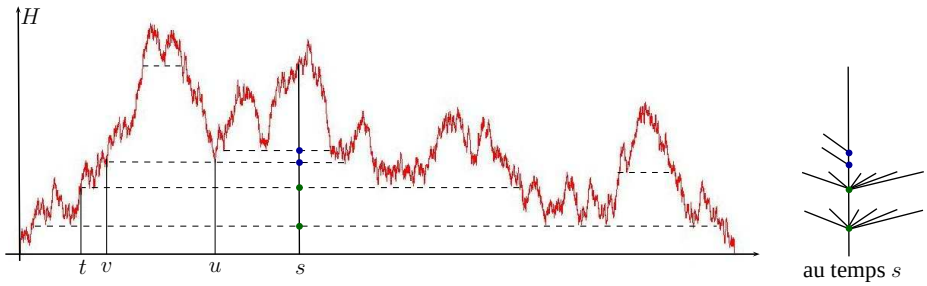
$$\rho_t(dr) = \beta \mathbf{1}_{[0,H_t]}(r)dr + \sum_{\substack{0<s\leq t \\ X_{s-}<I_t^s}} (I_t^s - X_{s-})\, \delta_{H_s}(dr).$$

Une explication à l'aide de files d'attente est possible, une autre manière de comprendre le processus d'exploration est de considérer l'épigraphe de H puisque le supremum du support de la mesure ρ_s est égal à H_s, voir la Figure 1.4. Pour l'individu s, si t est un ancêtre de s (c'est-à-dire $H_t = H_{t,s}$ où on rappelle que $H_{t,s} = \inf_{[t,s]} H$), la masse $\rho_s(\{H_t\}) = \rho_t(\{H_t\})$ du nœud apparaît à la hauteur H_t, elle correspond au nombre de fils de l'individu t. On peut alors reconstituer le CRT associé au processus d'exploration.

Pour le cas particulier d'un CRT brownien, le processus H est égal à la valeur absolue d'un mouvement brownien à une constante près. Si u est un minimum local, définissons l'individu $v = \inf(w \geq 0, \rho_w([0,H_w]) = \rho_u([0,H_u]))$, voir la Figure 1.4. Par l'unicité des minima locaux du brownien, le processus $(H_s, s \geq v)$ posssède exactement deux excursions au dessus de H_v. On retrouve un branchement binaire, les deux excursions correspondent aux deux sous-arbres.

Dans le cas d'un CRT de Lévy général, on retrouve ces nœuds binaires si $\beta \neq 0$ (en bleu sur la Figure 1.4) ainsi que des nœuds d'indice ∞ si $\pi \neq 0$ (en vert sur la Figure 1.4) : l'individu t se fragmente en une infinité de fragments si le processus $(H_s, s \geq t)$ possède une infinité d'excursions au dessus du niveau H_t, les minima locaux ne sont ici pas uniques.

FIGURE 1.4 – Le processus des hauteurs et le CRT associé.



Le processus des hauteurs peut facilement être retrouvé à partir du processus d'exploration par la formule : $H_t = \sup Supp(\rho_t)$.

L'élagage du CRT

Notons $X^{(0)}$ un processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ_0 et $X^{(1)}$ un subordinateur d'exposant de Laplace :

$$\phi_1(\lambda) = \psi_0(\lambda) - \psi(\lambda) = \alpha_1\lambda + \int_{]0+\infty[} \pi_1(d\ell)\left(1 - e^{-\lambda\ell}\right). \tag{1.12}$$

On obtient alors l'égalité : $X \overset{\mathcal{L}}{=} X^{(0)} + X^{(1)}$. Nous allons placer des marques sur l'arbre associé à ψ pour élaguer afin d'obtenir un arbre associé à ψ_0. Ces marques sont de deux types : certaines sont réparties "uniformément" sur le squelette de l'arbre alors que les autres sont placées sur les nœuds. On réunis ici les deux idées d'Abraham et Serlet [7] et d'Abraham et Delmas [4]. Cependant, dans ce travail, les marques placées sur le squelette sont définies dans le cas d'un processus de Lévy général et non pas sur un CRT brownien.

Pour marquer les nœuds, on construit un processus de marquage tel qu'un saut de X de taille ΔX_s soit marqué avec une probabilité $p(\Delta X_s) = \frac{d\pi_1}{d\pi}(\Delta X_s)$. Ce marquage ne se fait que si $\pi_0 \neq \pi$. Notons $\mathcal{J}^1$ l'ensemble des temps de sauts marqués et H le processus des hauteurs associé au Lévy X. Le processus de marquage sur les nœuds est défini par : pour tout $t \geq 0$,

$$m_t^{\mathrm{nod}}(dr) = \sum_{\substack{0<s\leq t,\ s\in\mathcal{J}^1 \\ X_{s-}<I_t^s}} (I_t^s - X_{s-})\, \delta_{H_s}(dr).$$

Les sauts marqués correspondent aux sauts du processus $X^{(1)}$, on associe un poids à chacun de ces sauts. Remarquons que ce processus de marquage correspond à la partie somme du processus d'exploration mais en ne considérant que les sauts issus de $X^{(1)}$.

Le marquage sur le squelette du CRT n'est nécessaire que si $\alpha_1 > 0$. On place les marques sur l'ascendance d'un individu avec un processus de Poisson d'intensité α_1. Cependant il faut avoir une cohérence entre les marques, c'est-à-dire que l'ascendance commune entre deux individus possède les mêmes marques. On utilise alors un serpent poissonnien comme dans les travaux de Abraham et Serlet [7]. Le serpent de Lévy a été introduit par Le Gall et Le Jan [79] et étudié plus en détail dans Duquesne et Le Gall [44]. Le processus des hauteurs H n'est pas en général continu, il faut donc adapter la construction du serpent de Lévy de Duquesne et Le Gall [44].

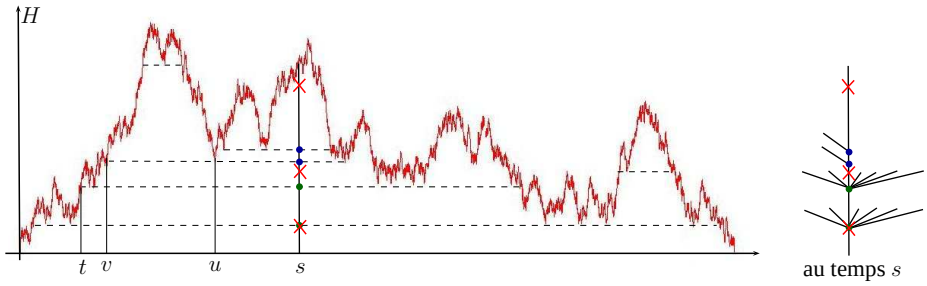
On utilise un processus $(\rho_t, W_t\,; t \geq 0)$ avec un processus de Poisson sous-jacent d'intensité α_1, tel que :

- pour t fixé, conditionnellement à ρ_t (ou à H_t), $(W_t(s), s \in [0, H_t])$ est un processus de Poisson d'intensité α_1,
- pour t et t' fixés, conditionnellement à ρ_t (ou à H_t) et à W_t, $W_t = W_{t'}$ sur $[0, H_{t,t'}]$ et $W_{t'}$ est un processus de Poisson d'intensité α_1 partant de $W_t(H_{t,t'}-)$,

où on rappelle que $H_{t,t'} = \inf_{[t,t']} H$ est la hauteur de l'ancêtre commun le plus récent. On définit alors le processus de marquage m^{ske} à valeurs mesures sur le squelette du CRT tel que les atomes de m_t^{ske} soient les sauts du processus W_t.

Le processus $(\rho, m^{\mathrm{nod}}, m^{\mathrm{ske}})$ est appelé le serpent marqué, c'est un processus de Markov fort qui garde en mémoire les marques sur les ascendances des individus du CRT (sur le squelette et sur les nœuds). Puisqu'on ne s'intéresse qu'au fragment du CRT qui contient la racine, on ne considère que les individus n'ayant pas de marque sur leur ascendance. Ainsi pour élaguer le CRT, on pose A_t la mesure de Lebesgue de l'ensemble des individus $s \leq t$ tels que $(m_s^{\mathrm{nod}}, m_s^{\mathrm{ske}}) = (0, 0)$ et on note C_t son inverse continu à droite. Le processus d'exploration élagué $\tilde{\rho}_t := \rho_{C_t}$ code donc le CRT élagué "sous" les premières marques. On obtient alors le premier résultat :

FIGURE 1.5 – Marques sur le CRT



Théorème 1.1.8. *Le processus $\tilde{\rho}$ a même loi que le processus d'exploration associé au processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ_0.*

C'est-à-dire que la construction précédente a bien permis de retrouver le sous-arbre que l'on s'est fixé à partir de l'élagage du CRT entier.

Pour démontrer ce théorème, on utilise un problème de martingale pour le processus d'exploration élagué $\tilde{\rho}$. Ce théorème repose également sur une propriété de Markov spéciale qui généralise le cas quadratique (voir la Proposition 6 de [7] ou la proposition 7 de [26]) ainsi que le cas sans partie quadratique (voir le Théorème 3.12 de [4]).

On obtient également la loi jointe de la longueur des excursions du processus d'exploration ρ et de la longueur des excursions du processus d'exploration élagué $\tilde{\rho}$, voir la Proposition 2.3.19.

1.2 Fragmentation d'un CRT de Lévy

1.2.1 Processus de fragmentation

Les processus de fragmentation peuvent être étudiés en utilisant le fait qu'ils peuvent être représentés par des processus aléatoires à valeurs dans l'espace des partitions de $\mathbb{N}$. Pitman [87] a suggéré d'utiliser la théorie de Kingman [69] sur les partitions aléatoires échangeables pour étudier les processus de fragmentation. Cette étude a été mené par Bertoin [19], citons également Evans et Pitman [49], Bertoin et Le Gall [25] et Bertoin [17]. Il existe une représentation similaire des processus de fragmentation à partir de familles de sous-intervalles ouverts de l'intervalle unité, citons Basdevant [14]. De manière imagée, on considère une première particule à laquelle on associe un réel désignant sa taille (ou sa masse). Cette particule de taille fixée va se fragmenter au cours du temps en un nombre aléatoire de fragments de tailles aléatoires. Chaque fragment ainsi obtenu va se refragmenter suivant le même processus.

On note alors l'espace des états de la fragmentation par l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ réordonnées de manière décroissante :

$$\mathcal{S}^{\downarrow} = \left\{ (x_1, x_2, \dots), x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq 0, \sum_{i \in \mathbb{N}^*} x_i < \infty \right\}. \tag{1.13}$$

Remarquons que si le nombre d'éléments dans $(x_1, x_2, \dots)$ est fini, la fin de la suite est faite de 0. On peut munir $\mathcal{S}^{\downarrow}$ de la distance uniforme ce qui en fait un espace polonais. On identifiera

un élément $x = (x_1, x_2, \dots)$ de $\mathcal{S}^\downarrow$ avec la mesure ponctuelle de Radon sur $\mathbb{R}_+^*$: $\sum_{i,x_i>0} \delta_{x_i}$. Pour $x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathcal{S}^\downarrow$, on note P_x la loi d'un processus $\Lambda = (\Lambda^\theta, \theta \geq 0)$ à valeurs dans $\mathcal{S}^\downarrow$ partant de x.

Définition 1.2.1. *On dit que $\Lambda = (\Lambda^\theta; \theta \geq 0)$ est un processus de fragmentation aléatoire si c'est un processus de Markov qui vérifie la propriété de fragmentation : conditionnellement à $\Lambda^\theta = x$, la loi de $\Lambda^{\theta+\theta'}$ est la loi du réarrangement décroissant des suites $\Lambda^{(1),\theta'}, \Lambda^{(2),\theta'}, \dots$ où les processus $\Lambda^{(i)}$ sont indépendants et de lois respectives $P_{(x_i,0,\cdots)}$.*

Autrement dit, au temps θ de la fragmentation, les particules $x_1, x_2, \dots$ présentes se fragmentent suivant la même loi P qui ne dépend que de la taille de la particule et indépendamment entre les différentes particules. Pour étudier la fragmentation, il suffit alors d'étudier les lois $P_{(x_1,0,\cdots)}$, $P_{(x_2,0,\cdots)}$, ...On notera désormais P_{x_1} pour $P_{(x_1,0,\cdots)}$.

On appellera fragmentation conservative une fragmentation où la somme des masses des fragments est inchangée au cours du temps, c'est-à-dire $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} x_i = x_0$ pour P_{x_0}-presque toute configuration $x = (x_1, \dots) \in \mathcal{S}^\downarrow$, où x_0 est la masse du fragment initial.

Une fragmentation dissipative est une fragmentation où la somme des masses est strictement plus petite que la masse initiale. C'est-à-dire, si on note $(\Lambda^\theta) = (\Lambda_1^\theta, \Lambda_2^\theta, \dots) \in \mathcal{S}^\downarrow$, l'application $\theta \mapsto \sum_{i\geq 1} \Lambda_i^\theta$ est décroissante. Ce type de fragmentation peut être obtenue par présence d'une érosion qui diminue la masse de chaque fragment de manière déterministe et continûment au cours du temps. Cette érosion n'est cependant pas nécessaire, Bertoin [18] a montré que si les fragments de petite taille se cassent plus rapidemment que les "gros" fragments, il apparait une accumulation des temps de fragmentation, ils deviennent "poussières" et disparaissent en temps fini. On observe alors dans ce cas une perte de masse.

Une fragmentation où la somme totale des masses est supérieure à la masse initiale peut être obtenue par immigration, c'est-à-dire des particules de masse non nulle apparaissent au cours de la fragmentation. Une autre manière d'obtenir ce type de fragmentation est de considérer le diamètre de chaque fragment (à la place de leur masse).

Auto-similarité Un cas particulier de fragmentation est la fragmentation auto-similaire. Cette notion a été introduite par Bertoin [20]. Citons également les travaux de Berestycki [15] et de Miermont [82, 83].

On dira que Λ est un processus de fragmentation auto-similaire d'indice $\alpha \in \mathbb{R}$ si Λ est une fragmentation aléatoire qui vérifie la propriété de stabilité suivante : pour tout $r > 0$, la loi du processus $(\Lambda^\theta, \theta > 0)$ sous $P_{\{r,0,\dots\}}$ est égale à la loi du processus $(r\Lambda^{r^\alpha\theta}, \theta > 0)$ sous $P_{\{1,0,\dots\}}$.

Bertoin a montré dans [20] que les fragmentations auto-similaires à valeurs dans les partitions et celles à valeurs dans $\mathcal{S}^\downarrow$ sont totalement décrites par un triplet (α, c, ν). Le coefficient α est l'indice d'auto-similarité qui décrit la rapidité de fragmentation des particules, si α est positif, les gros fragments ont tendance à se fragmenter plus vite que les petits, si α est négatif, c'est le contraire et si $\alpha = 0$, la fragmentation est appelée homogène. Le coefficient c est le coefficient d'érosion évoqué précédemment et ν est une mesure σ-finie sur $\mathcal{S}^\downarrow$ et à valeurs dans $\mathcal{S}^\downarrow$, appelée mesure de dislocation. Cette mesure de dislocation décrit la façon dont une particule de masse 1 se casse. Par la propriété d'auto-similarité, une particule de masse r se disloque en une suite $rx = (rx_1, rx_2, \dots) \in \mathcal{S}^\downarrow$ de particules suivant la loi $r^\alpha \nu(dx)$.

Exemple dans le cas où ν est une mesure finie.(voir Bertoin [17]) Pour $r > 0$, on note ν_r l'image de la mesure $r^\alpha \nu$ par l'application $x \to rx$, c'est la mesure de fragmentation d'une particule de masse r. Le temps de vie d'une particule de masse r, c'est-à-dire le temps entre son apparition et sa fragmentation, est de loi exponentielle de paramètre $r^\alpha \nu(\mathcal{S}^\downarrow)$ avant de se fragmenter en une famille de fragments plus petits de loi $r\xi$ où ξ a pour loi $\frac{\nu(\cdot)}{\nu(\mathcal{S}^\downarrow)}$. Rappelons que les éléments de $\mathcal{S}^\downarrow$ sont identifiés à des mesures ponctuelles, notons $\mathcal{S}_f^\downarrow \subset \mathcal{S}^\downarrow$ l'ensemble des mesures m ponctuelles sur $\mathbb{R}_+$ de masse totale $m(\mathbb{R}_+)$ finie. Si on note Z le nombre de fils, on obtient

$$\mathbb{P}(Z = n) = \frac{1}{\nu(\mathcal{S}_f^\downarrow)} \int_{\mathcal{S}_f^\downarrow} \nu(dm) \mathbf{1}_{\{m(\mathbb{R}_+)=n\}}.$$

Remarquons que si $\alpha < 0$, les fragments de petite taille ont tendance à se fragmenter plus vite que les gros fragments. Alors que si $\alpha > 0$, les gros fragments se fragmentent prioritairement. En effet on peut remarquer que pour deux particules de taille r et r' telles que $r < r'$, et pour $\alpha < 0$, $r'^\alpha \nu(\mathcal{S}^\downarrow) \leq r^\alpha \nu(\mathcal{S}^\downarrow)$.

Pour le cas où $\alpha = 0$, la mesure de dislocation ne dépend pas de la taille de la particule, la fragmentation est dite homogène.

Exemple dans le cas où $\alpha > 0$. (voir Bertoin [20]) On fragmente l'intervalle $[0, 1]$ en deux sous-intervalles au bout d'un temps exponentiel et on itère cette opération. Plus formellement, on considère des variables aléatoires indépendantes $U_i, i \in \mathbb{N}^*$ de loi uniforme sur $[0, 1]$ ainsi qu'un processus de Poisson indépendant $N = (N_t, t \geq 0)$. Construisons le processus $\mathcal{V} = (\mathcal{V}(t), t \geq 0)$ qui donne les $N_t + 1$ sous-intervalles disjoints de $]0, 1[$ dont les bornes sont données par les variables $(U_i, i \leq N_t)$. Si on note par $x_1(t) \geq x_2(t) \geq \cdots \geq x_{N_t+1}(t)$ les longueurs de ces différents intervalles rangées par ordre décroissant et par $x_i(t) = 0$ pour $i > N_t + 1$, alors le processus $\Lambda = (x(t), t \geq 0) = ((x_1(t), \dots), t \geq 0)$ est un processus de fragmentation auto-similaire d'indice d'auto-similarité $\alpha = 1$, sans érosion, et de mesure de dislocation ν la loi de $(1 - V, V, 0, \dots)$ où V est une variable uniforme sur $[0, \frac{1}{2}]$. Cette fragmentation est donc binaire.

Exemple dans le cas où $\alpha < 0$. Bertoin [21] a étudié le cas d'une excursion brownienne ($\alpha = -1/2$), Miermont [82])a étendu au cas des processus stables d'indice α, Haas et Miermont [56] ont montré un lien avec les arbres aléatoires auto-similaires
Considérons une excursion brownienne positive B^{exc} de longueur 1 et notons

$$I(t) = \{s \in [0, 1], B_s^{exc} > \frac{t}{2}\}.$$

Puisque I est un ouvert de $[0, 1]$, on peut l'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles de $[0, 1]$ disjoints $I_1(t), I_2(t), \dots$ réordonnés tels que $x(t) = (|I_1(t)|, |I_2(t)|, \dots) \in \mathcal{S}^\downarrow$. Par unicité des minima locaux du mouvement brownien, le "franchissement" du minimum local à la hauteur $t/2$ de l'excursion brownienne donne deux nouveaux intervalles. Le processus $\Lambda = (x(t), t \geq 0)$ est une fragmentation aléatoire binaire, d'indice $\alpha = -1/2$, sans érosion et dont on peut montrer (en utilisant la théorie des excursions browniennes) que sa mesure de dislocation ν vérifie : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\nu(s_1 \in dx) = \frac{C dx}{\sqrt{x^3(1-x)^3}} \mathbf{1}_{x \geq \frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \nu\{(s_1, s_2, 0 \dots); s_1 + s_2 < 1\} = 0.$$

Remarquons que le processus des hauteurs d'un arbre aléatoire brownien est une excursion brownienne, voir la Section 1.1.1. Cette fragmentation correspond alors à une manière de couper un arbre aléatoire en sous-arbres à différentes hauteurs (ou générations). Elle peut se généraliser à une excursion d'un processus de Lévy stable qui code un arbre stable. La fragmentation n'est alors plus binaire mais infinie. Citons également Delmas [35] qui généralise ce résultat au cas d'un Lévy général.

1.2.2 Description des résultats obtenus

Le travail de cette deuxième partie est issu de l'article [105] soumis pour publication.

Le but est de créer un processus de fragmentation sur le CRT de Lévy. On se fixe alors un CRT de Lévy caractérisé par un processus de Lévy X d'exposant de Laplace ψ défini par (1.9). Pour cela on réutilise la procédure de marquage sur le CRT précédemment construite en faisant dépendre le nombre de marques d'un certain paramètre, et on utilise un cas particulier d'élagage de l'arbre marqué. Pour créer les marques sur le CRT, on utilise un subordinateur d'exposant de Laplace $\psi^{(\theta)}$ défini par :

$$\begin{aligned}\psi^{(\theta)}(\lambda) : &= \psi(\theta+\lambda)-\psi(\theta)\\ &= \alpha^{(\theta)}\lambda+\beta\lambda^2+\int_{]0,+\infty[}(e^{-\lambda\ell}-1+\lambda\ell)\pi^{(\theta)}(d\ell)\end{aligned}$$

$$avec \begin{cases}\alpha^{(\theta)}=\alpha+2\beta\theta+\int_{]0,+\infty[}(1-e^{-\theta\ell})\ell\pi(d\ell)\\ \pi^{(\theta)}(d\ell)=e^{-\theta\ell}\pi(d\ell).\end{cases}$$

Ainsi $2\beta\theta$ joue le rôle de α_1 (voir (1.12)), c'est-à-dire qu'on marque le squelette du CRT avec un processus de Poisson d'intensité $2\beta\theta$, et $(1-e^{-\theta\ell})\pi(d\ell)$ joue le rôle de π_1 pour marquer les nœuds du CRT (voir (1.12)).

Remarquons que quand θ augmente, $\alpha^{(\theta)}$ augmente, et quand $\theta=0$, il n'y a pas de marque sur le CRT ($\psi^{(0)}=\psi$).

Processus de marquage

Comme précédemment, on construit deux processus de marquage sur le CRT de Lévy, un processus de marquage sur les nœuds de l'arbre et un sur le squelette de l'arbre. Cependant on introduit un paramètre θ tel que le nombre de marques augmente en fonction de θ.

Notons H le processus des hauteurs associé au processus de Lévy X et ρ le processus d'exploration.

Pour marquer les nœuds du CRT, on reprend le processus de marquage à valeurs dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+^2)$ introduit par Abraham et Delmas [4] dans le cas d'un CRT sans partie brownienne (formule (1.8)) :

$$M_t(dr,d\theta)=\sum_{\substack{0<s\leq t\\ X_{s-}<I_t^s}}(I_t^s-X_{s-})\left(\sum_{u>0}\delta_{V_{s,u}}(d\theta)\right)\delta_{H_s}(dr)$$

où $(\sum_{u>0}\delta_{V_{s,u}}; s$ temps de saut de $X)$ est une famille de mesures ponctuelles de Poisson indépendantes sur $\mathbb{R}_+$ d'intensités respectives $\Delta X_s\,\mathbf{1}_{u>0}du$. C'est-à-dire que, à θ fixé, chaque nœud est marqué avec

une probabilité $1 - e^{-\theta \Delta X_s}$ et le nombre de marques augmente quand θ augmente.

Pour marquer le squelette du CRT, on réutilise un serpent de Lévy poissonnien, afin d'obtenir des marques placées de manière cohérente sur les branches. On définit un serpent $(\rho_t, W_t\,; t \geq 0)$ avec un processus de Poisson sous-jacent d'intensité α_1 tel que : conditionnellement à ρ,

- pour tout $t \geq 0$, W_t est une mesure de Poisson sur $[0, H_t] \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $2\beta \mathbf{1}_{[0,H_t]}(dr)d\theta$,
- pour tous $0 \leq t < t'$, $W_{t'}(dr, d\theta)\mathbf{1}_{[0,H_{t,t'}]}(r) = W_t(dr, d\theta)\mathbf{1}_{[0,H_{t,t'}]}(r)$.

C'est-à-dire que les marques sont les mêmes sur l'ascendance commune de t et t' et sont placées "uniformément" et de manière indépendante sur chacune des branches à partir de l'ancêtre commun le plus récent de t et t'.

Remarquons que, d'après la construction de Duquesne et Le Gall [44], le processus W est à valeurs dans un espace polonais. On définit alors plutôt, pour tout $i \in \mathbb{N}$, le processus W_t^i comme une mesure de Poisson sur $[0, H_t] \times [i, i+1[$ et on obtient le processus de marquage à valeurs dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+^2)$:

$$m_t^{\text{ske}} = \sum_{i \in \mathbb{N}} W_t^i.$$

On obtient alors pour $\theta \geq 0$ fixé, les deux processus :

$$m^{(\theta),\text{nod}}(dr) := M_t(dr, [0, \theta]) \qquad \text{et} \qquad m^{(\theta),\text{ske}}(dr) := m^{\text{ske}}(dr, [0, \theta]).$$

On définit le processus de marquage à valeurs dans $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ qui augmente le nombre de marques sur le CRT en fonction de θ :

$$m^{(\theta)} := m^{(\theta),\text{nod}} + m^{(\theta),\text{ske}}.$$

Comme précédement, le serpent marqué $(\rho, m^{(\theta)})$ est un processus fortement markovien qui garde en mémoire toutes les marques sur l'ascendance de chacun des individus.

Fragmentation du CRT marqué

On élague l'arbre sur toutes les marques et on s'intéresse à l'évolution des fragments de CRT au cours du temps $\theta \in \mathbb{R}_+$. Un fragment d'arbre est défini comme une classe d'équivalence : deux individus s et t $(s < t)$ appartiennent au même fragment au temps $\theta \geq 0$ s'il n'y a pas de marque entre leur ancêtre commun le plus récent et eux. C'est-à-dire si :

$$s \mathcal{R}_\theta t \Leftrightarrow m_s^{(\theta)}([H_{s,t}, H_s]) = m_t^{(\theta)}([H_{s,t}, H_t]) = 0.$$

Ces classes d'équivalence sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}_+$ de mesure de Lebesgue non nulle, la taille du fragment est alors la mesure de Lebesgue de la classe d'équivalence correspondante.

Au temps $\theta \geq 0$, on obtient une famille de fragments de CRT. Pour $\theta \geq 0$ fixé, notons $\Lambda^\theta = (\sigma^{(\theta),j}, j \in \mathbb{N})$ la suite (éventuellement nulle à partir d'un certain rang) des tailles des fragments rangées par ordre décroissant, c'est un élément de l'ensemble $\mathcal{S}^\downarrow$ défini par (1.13). De plus, puisque le processus de marquage rajoute des marques au cours du temps, les fragment obtenus au temps θ sont des réunions de fragments obtenus au temps $\theta' > \theta$.

On obtient alors le premier résultat :

Théorème 1.2.2. *Le processus $\Lambda = (\Lambda^\theta, \theta \geq 0)$ est un processus de fragmentation.*

Pour mieux comprendre ce processus, on explicite la famille des mesures de dislocation $(\nu_r, r \geq 0)$ qui décrivent comment un fragment de taille r se disloque en plus petits fragments. Lorsque l'on coupe sur le squelette de l'arbre, on obtient deux nouveaux fragments et lorsque l'on coupe sur un nœud d'indice infini, on obtient une infinité de nouveaux fragments. La mesure de dislocation d'un fragment de taille r peut alors s'écrire sous la forme :

$$\nu_r = \nu_r^{\text{nod}} + \nu_r^{\text{ske}}$$

où la mesure ν_r^{nod} décrit la fragmentation infinie et ν_r^{ske} la fragmentation binaire. L'expression de ν^{ske} est le résultat principal de cette partie :

Théorème 1.2.3. *Soit S un subordinateur d'exposant de Laplace ψ^{-1} et soit π_* sa mesure de Lévy.*

1. *Pour toute fonction F positive mesurable sur $\mathcal{S}^{\downarrow}$,*

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}^{\downarrow}} F(x)\nu_r^{nod}(dx)\pi_*(dr) = \int \pi(dv)\mathbb{E}\left[S_v F\left((\Delta S_u, u \leq v)\right)\right]$$

   où $(\Delta S_u, u \leq v)$ représente les sauts de S avant le temps v, rangés par ordre décroissant.

2. *La mesure ν_r^{ske} ne charge que les éléments de $\mathcal{S}^{\downarrow}$ de la forme $(x_1, x_2, 0, \ldots)$ avec $x_1 \geq x_2$ et $x_1 + x_2 = r$. C'est la loi du réarrangement décroissant des longueurs données par la mesure $\hat{\nu}_r^{ske}$ définie par*

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}_+^*)^2} \frac{1}{z}(1 - e^{-\lambda_1 y})(1 - e^{-\lambda_2 z})\hat{\nu}_r^{ske}(dy\, dz)\pi_*(dr) = 2\beta\psi^{-1}(\lambda_1)\psi^{-1}(\lambda_2).$$

La mesure π_* est la loi de la longueur des fragments du CRT. Ainsi, d'après le théorème précédent, sous $\hat{\nu}_r^{\text{ske}}(dy\, dz)\pi_*(dr)$, les longueurs des deux fragments sont indépendantes.

La construction de l'élagage sur les nœuds est indépendante de celle sur les branches, et cette dernière est la même que faite par Abraham et Delmas [4], le calcul du point (i) du théorème précédent est alors identique.

La démonstration du Théorème 1.2.3 repose sur une représentation des marques sur le CRT en utilisant une mesure ponctuelle de Poisson sous l'épigraphe du processus des hauteurs et la propriété de Markov spéciale (Proposition 2.3.2).

1.3 Diffusion en milieu Lévy

1.3.1 Diffusions en milieu aléatoire

Intéressons-nous maintenant aux diffusions aléatoires en milieu aléatoire unidimensionnel. Ce sont des processus aléatoires à espace d'état et espace des temps continus mais introduisons d'abord l'équivalent discret : la marche aléatoire en milieu aléatoire.

Marche de Sinai

Historiquement, les marches aléatoires en milieu aléatoire ont d'abord été introduites par Solomon [98] et par Kesten, Koslov et Spitzer [68].

Un milieu aléatoire discret sur $\mathbb{Z}$ est une suite de variables aléatoires $(p_i, i \in \mathbb{Z})$ indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $]0,1[$. Notons $\mathbb{P}$ la loi de l'environnement $(p_i, i \in \mathbb{Z})$. Conditionnellement à ce milieu aléatoire, on construit une marche aléatoire (markovienne) $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ aux plus proches voisins telle que $X_0 = 0$ et telle que X se dirige vers la droite avec probabilité p_i quand elle se trouve sur le site i. C'est-à-dire,

$$\mathcal{P}_V(X_{n+1} = i+1 | X_n = i) = 1 - \mathcal{P}_V(X_{n+1} = i-1 | X_n = i) = p_i,$$

où $\mathcal{P}_V$ est la loi de la marche X conditionnellement au milieu $V = (p_i, i \in \mathbb{Z})$. Notons $\mathcal{P}$ la loi de la marche X définie sur le milieu. Solomon [98] a introduit une condition nécessaire et suffisante de récurrence pour la marche X. Si

$$\mathbb{E}\left[\log \frac{1-p_0}{p_0}\right] = 0, \tag{1.14}$$

alors la marche X est $\mathcal{P}_V$-p.s. récurrente pour $\mathbb{P}$-presque tout environnement, c'est-à-dire qu'elle visite le point 0 une infinité de fois et, par l'irréductibilité de la chaine, elle visite tout point de $\mathbb{Z}$ une infinité de fois. Remarquons que la condition $\mathbb{E}\left[\log \frac{1-p_0}{p_0}\right] > 0$ (resp. $\mathbb{E}\left[\log \frac{1-p_0}{p_0}\right] < 0$) implique que la marche X tend $\mathcal{P}$-p.s. vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Dans la suite on considérera le cas récurent. De plus, on exclut le cas d'un milieu déterministe avec la condition :

$$\mathrm{Var}\left[\log \frac{1-p_0}{p_0}\right] > 0. \tag{1.15}$$

Remarquons que dans le cas d'un milieu déterministe, X est la marche aléatoire simple aux plus proches voisins. On suppose également l'hypothèse technique :

$$\exists \delta \in]0, \frac{1}{2}[, \text{ tel que } \mathbb{P}(\delta < p_0 < 1-\delta) = 1. \tag{1.16}$$

Une marche aléatoire en milieu aléatoire vérifiant les hypothèses (1.14), (1.15) et (1.16) est appelée une marche de Sinai.

Sinai [94] s'est intéressé au comportement asymptotique d'une telle marche aléatoire. Il a montré que la marche renormalisée $(\frac{X_n}{(\log n)^2}, n \in \mathbb{N})$ converge en loi, sous $\mathcal{P}$, vers une variable aléatoire $\mathcal{C}$ dont la loi a été explicitée par Kesten [67] et Golosov [53]. Ce résultat contraste avec celui donné par le théorème central limite usuel qui donne la convergence en loi de la marche aléatoire simple $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$.

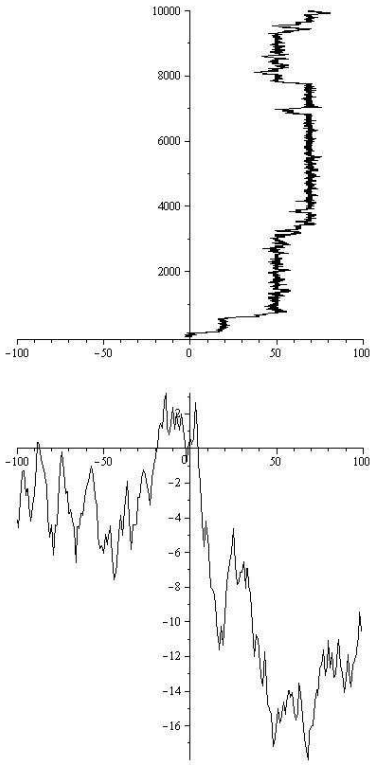
Schumacher [91] a montré que le milieu peut se représenter par une marche aléatoire, aussi appelée potentiel, $V = (V_n, n \in \mathbb{Z})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1-p_i}{p_i}, \text{ si } n \geq 1 \quad , \quad V_n = -\sum_{i=n+1}^{0} \log \frac{1-p_i}{p_i}, \text{ si } n \leq -1$$

et on pose également $V_0 = 0$. L'hypothèse 1.16 permet aux incréments $|\log \frac{1-p_0}{p_0}|$ du potentiel d'être bornés et ainsi d'en controler les fluctuations. Remarquons que d'après la condition 1.14, le milieu

possède des puits de potentiel et la marche de Sinai aura tendance à rester dans ces puits, voir Figure 1.6.

FIGURE 1.6 – Simulation de la marche de Sinai pour p_0 uniforme sur $[0.1, 0.9]$



la marche de Sinai X

le milieu V

Définissons alors le processus des temps locaux $(L(n,x), n \in \mathbb{N})$ de la marche de Sinai en un point $x \in \mathbb{Z}$ du milieu par :

$$L(n,x) = \mathrm{Card}\{i \leq n; X_i = x\}.$$

C'est-à-dire $L(n,x)$ compte le nombre de passages de la marche X au point x avant le temps n. Révész [89] (dans le cas d'un milieu particulier) et Shi [93] (dans le cas général) ont montré la convergence du maximum du temps local : il existe une constante $c_0 > 0$ telle que $\mathcal{P}$-p.s.

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\max_{x \in \mathbb{Z}} L(n,x)}{n} = c_0. \tag{1.17}$$

Intuitivement, pour n grand, il existe un point (qui dépend de n) en lequel la marche de Sinai passe la plus grande partie de son temps. On dit que la marche X est fortement localisée. Dembo, Gantert, Peres et Shi [37] ont également montré que $\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log\log\log(n) \max_{x \in \mathbb{Z}} L(n,x)$ est presque

surement une constante strictement positive. Andreoletti [12] a montré un résultat de concentration pour la marche de Sinai : pour tout $0 < \beta < 1$, il existe $\ell(\beta) > 0$ tel que $\mathcal{P}$-p.s.

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\sup_{x\in\mathbb{Z}} L(n,[x-\ell(\beta),x+\ell(\beta)])}{n} \geq \beta,$$

où pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $L(n,I) = \mathrm{Card}\{i \leq n; X_i \in I\}$. C'est-à-dire que, en choisissant une constante β proche de 1, la marche de Sinai passe presque tout son temps dans un voisinage d'un point particulier.

Plus récemment, Gantert, Peres et Shi [52] ont explicité la constante c_0 et ont également montré la convergence en loi :

Théorème 1.3.1.

$$\frac{\sup_{x\in\mathbb{Z}} L(n,x)}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sup_{x\in\mathbb{Z}} \nu(x)$$

où le processus ν est une fonctionnelle du milieu conditionné à rester positif.

Puisque le milieu est une marche aléatoire, en utilisant le théorème de Donsker, le comportement asymptotique du milieu (linéarisé et renormalisé) est un mouvement brownien. Interessons-nous alors aux diffusions aléatoires en milieu aléatoire continu.

Processus de Brox

Diffusion en milieu aléatoire

Les diffusions aléatoires en milieu aléatoire ont été introduites par Schumacher [91] et Brox [30]. Donnons d'abord une description de l'espace de probabilité sur lequel est définie la diffusion.

Notons $\mathcal{V}$ l'espace des fonctions càd-làg $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $v(0) = 0$ et muni de la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par la topologie de Skorohod, ce qui en fait un espace polonais. On considère un processus stochastique $V = (V(x), x \in \mathbb{R})$ défini sur l'espace $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ et, comme précédemment, on note $\mathbb{P}$ la loi de l'environnement V.

On définit alors Ω l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ partant de 0 et muni de la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par la topologie de Skorohod. On appelle diffusion aléatoire en milieu aléatoire, un processus stochastique $X = (X(V,t), t \geq 0)$ défini sur l'espace $(\mathcal{V}\times\Omega, \mathcal{A}\otimes\mathcal{F})$ et tel que, conditionnellement au processus V, X soit markovien et son générateur soit égal à

$$\frac{1}{2} e^{V(x)} \frac{d}{dx}\left(e^{-V(x)}\frac{d}{dx}\right). \tag{1.18}$$

On note $\mathcal{P}$ la loi de X et $X(\cdot)$ pour $X(V,\cdot)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le milieu. Remarquons que dans le cas où le milieu V est presque sûrement dérivable, le générateur s'écrit sous la forme :

$$-\frac{1}{2}V'(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}. \tag{1.19}$$

Ce qui est équivalent au fait que la diffusion X soit solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = \mathrm{d}\beta(t) - \frac{1}{2}V'(X(t))\mathrm{d}t, \\ X(0) = 0, \end{cases}$$

où β est un mouvement brownien standard indépendant du milieu V.

Intuitivement, la diffusion X représente la position d'une particule à trajectoires dans le milieu V. Comme dans le cas d'un environnement discret, sous certaines hypothèses de récurrence, le milieu V possède des puits de potentiel et la diffusion X a tendance à rester dans ces puits. La perturbation $d\beta(t)$ permet à la diffusion X de pouvoir en sortir.

Schumacher [91] a montré que l'on peut retrouver une marche de Sinai à partir d'une diffusion dont le potentiel W est défini par :

$$\begin{cases} W(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [0,1[, \\ W(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \log \frac{1-p_i}{p_i}, \quad \text{si } n \geq 1 \text{ et } x \in [n, n+1[, \\ W(x) = -\displaystyle\sum_{i=n+1}^{0} \log \frac{1-p_i}{p_i}, \quad \text{si } n \leq -1 \text{ et } x \in [n, n+1[, \end{cases}$$

où les $(p_i, i \in \mathbb{Z})$ désignent l'environnement de la marche de Sinai. Etant donnée la diffusion X sur ce potentiel W, on définit la suite $(\mu_n, n \in \mathbb{N})$ de temps d'arrêt par : $\mu_0 = 0$ et si $n \geq 1$

$$\mu_n = \inf\{t \geq \mu_{n-1}; |X(t) - X(\mu_{n-1})| = 1\}.$$

On peut montrer que

$$\mathcal{P}_W(X(\mu_{n+1}) = i+1 | X(\mu_n) = i) = p_i,$$

c'est-à-dire que la marche $(X(\mu_n), n \in \mathbb{N})$ est la marche de Sinai sur le milieu W. On peut alors étudier la marche de Sinai en s'intéressant aux diffusions aléatoires, citons par exemple Hu [58], Hu et Shi [59, 60, 61], Shi [93] et Singh [96].

Kawazu et Tanaka [66] se sont intéressés au cas où le milieu est un mouvement brownien avec drift non nul (cas transient). Ces résultats ont été précisés par les travaux de Tanaka [103] puis Hu, Shi et Yor [62]. Devulder [39] a obtenu des résultats sur le maximum du temps local. Citons également Devulder [38] et Talet [99] pour l'étude des taux de convergence en milieu brownien drifté.

Processus de Brox

Brox [30] s'est intéressé au cas d'un mouvement brownien sans drift (récurrent), la diffusion X est alors appelée processus de Brox. Le processus de Brox possède la même vitesse de convergence que la marche de Sinai et est également localisée pour un instant donné t dans le voisinage d'un point qui dépend uniquement de V et de t. De plus $\frac{X(t)}{(\log t)^2}$ converge en loi vers la même limite $\mathcal{C}$ que la marche de Sinai renormalisée.

Citons également Kawazu, Tamara et Tanaka [65] et Hu [58] qui ont obtenu des résultats plus précis de localisation.

Comme pour la marche de Sinai, on s'intéresse au temps local qui "mesure" le temps passé par la diffusion en un point du milieu. On définit le processus des temps locaux $(L_X(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ par la formule des temps d'occupation.

Définition 1.3.2. *L_X est l'unique processus $\mathcal{P}$-p.s. continu en ses deux variables et tel que pour tout $t \geq 0$ et toute fonction φ borélienne bornée,*

$$\int_0^t \varphi(X(s))ds = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)L_X(t,x)dx.$$

Citons Shi [93] pour l'existence d'un tel processus. Pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $L_X(t,x)$ représente le temps passé par la diffusion X au point x du milieu V jusqu'au temps t.

Les premiers résultats sur le comportement du processus L_X ont été obtenus par Shi [93] et Hu et Shi [59, 61], notamment : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\log(L_X(t,x))}{\log t} \xrightarrow{\mathcal{L}} U \wedge \hat{U}$$

où U et $\hat{U}$ sont des variables indépendantes de loi uniforme sur $]0,1[$. La convergence du temps local de la marche de Sinai diffère par rapport à la convergence du temps local de la diffusion de Brox. Shi [93] a montré qu'il existe une constante c_0 telle que $\mathcal{P}$-p.s.

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} L_X(t,x)}{t \log\log\log t} \geq c_0.$$

Andreoletti et Diel [13] ont montré un équivalent du résultat de Gantert, Peres et Shi (Théorème 1.3.1).

Théorème 1.3.3.

$$\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} L_X(t,x)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-R(y)}dy} \tag{1.20}$$

où $R(x) = R_1(x)\mathbf{1}_{x\geq 0} + R_2(-x)\mathbf{1}_{x\leq 0}$ avec R_1 et R_2 deux processus de Bessel de dimension 3 indépendants. Remarquons qu'un processus de Bessel de dimension 3 a même loi qu'un mouvement brownien conditionné à rester positif.

L'étude de la diffusion dans un milieu aléatoire unidimensionnel est facilitée par le fait que toute diffusion, renormalisée en espace et en temps, est un mouvement brownien. On peut montrer que, pour tout milieu V càd-làg (localement borné), il existe une renormalisation en espace S_V, une renormalisation en temps T_V de la diffusion X et un mouvement brownien B tels que :

$$X(V,t) = S_V^{-1}(B(T_V^{-1}(t)))$$

avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad S_V(x) := \int_0^x e^{V(y)}dy \tag{1.21}$$

et

$$\forall t \geq 0, \qquad T_V(t) := \int_0^t e^{-2V(S_V^{-1}(B(s)))}ds. \tag{1.22}$$

Citons Shi [92] pour plus détails. En utilisant la stabilité du mouvement brownien B, on obtient l'égalité en loi des deux processus : pour tout $c \in \mathbb{R}$, conditionnellement au milieu V,

$$\left(\frac{1}{c}X(V, c^2 t); t \geq 0\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X(V(c\,\cdot), t); t \geq 0)\,, \tag{1.23}$$

et en utilisant la propriété de stabilité du milieu brownien V, on obtient :

$$\frac{1}{c^2}X(V, c^4 \cdot) \stackrel{\mathcal{L}}{=} X(cV, \cdot) \tag{1.24}$$

ainsi que

$$\left(\frac{1}{c^2}L_{X(V,\cdot)}(c^4 t, c^2 x)\right)_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(L_{X(cV,\cdot)}(t, x)\right)_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}}\,. \tag{1.25}$$

Citons Brox [30] pour la formule (1.24), la formule (1.25) est une conséquence de (1.24).

Par cette méthode, on peut ainsi passer d'un changement d'échelle (temporel et spatial) sur la diffusion (et sur le temps local) à un changement d'échelle sur le milieu, et inversement.

Vallée standard

Brox [30] a introduit la notion de vallée qui représente un puit de potentiel, citons également Neveu et Pitman [86] qui donnent des renseignements sur le milieu brownien et Sinai [94] pour le cas discret.

Définition 1.3.4. *Soit $c > 0$, on dit que le milieu brownien (drifté ou non) $V \in \mathcal{V}$ admet un c-minimum au point x_0 si il existe deux réels ξ et ζ tels que $\xi < x_0 < \zeta$ et*

- *$V(\xi) \geq V(x_0) + c$,*
- *$V(\zeta) \geq V(x_0) + c$ et*
- *pour tout $x \in [\xi, \zeta]$, $x \neq x_0$, $V(x) \geq V(x_0)$.*

De manière similaire, on dit que V admet un c-maximum en x_0 si $-V$ admet un c-minimum en x_0.

Intuitivement il existe un intervalle $[\xi, \zeta]$ contenant x_0 dans lequel V admet un minimum en x_0 et tel que V "monte" d'une hauteur c à droite et à gauche de x_0.

Notons $M_c(V)$ l'ensemble des c-extrema de V. Brox [30] a montré que $\mathbb{P}$-p.s. $M_c(V)$ n'a pas de points d'accumulation et que les c-minima et les c-maxima alternent. Ainsi, il existe un unique triplet $\Delta_c = (\mathfrak{p}_c, \mathfrak{m}_c, \mathfrak{q}_c)$ d'éléments de $M_c(V)$ tel que :

- $\mathfrak{m}_c$ et 0 sont dans $[\mathfrak{p}_c, \mathfrak{q}_c]$,
- $\mathfrak{p}_c$ et $\mathfrak{q}_c$ sont des c-maxima,
- $\mathfrak{m}_c$ est un c-minimum.

Δ_c est alors appelé la vallée standard de hauteur c du milieu V, voir la Figure 1.7.

Dans le cas d'un milieu brownien, Brox [30] a montré que la diffusion met un temps e^c pour sortir d'une vallée de hauteur c, ainsi au bout d'un temps t la diffusion X passera presque tout son temps dans la vallée standard de hauteur $\log t$. Il obtient également un résultat de localisation : à l'instant e^c, la marche est localisée dans le voisinage de $\mathfrak{m}_c$.

Andreoletti et Diel [13] ont montré une convergence du temps local recentré au minimum d'une vallée standard de profondeur $\log t$.

Théorème 1.3.5.

$$\left(\frac{L_X(t, \mathfrak{m}_{\log t} + x)}{t}\ ,\ x \in \mathbb{R}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(\frac{e^{-R(x)}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-R(y)} dy}\ ,\ x \in \mathbb{R}\right)$$

où R est le même processus conditionné à rester positif que dans le Théorème 1.3.3.

Remarquons que le Théorème 1.3.3 est une conséquence de ce théorème. Gantert, Peres et Shi [52] ont montré un théorème équivalent pour la marche de Sinai où la limite en loi est le même processus ν que dans le Théorème 1.3.1.

Diffusion en milieu Lévy

Ce n'est que récemment que le cas d'un milieu Lévy a été étudié par Carmona [31], Tanaka [104], Cheliotis [32] et Singh [97].

Carmona [31] a généralisé au cas d'un processus de Lévy le résultat de Kawazu et Tanaka [66] fait dans le cas d'un mouvement brownien drifté en démontrant la convergence presque sûre de $\frac{X(t)}{t}$ vers une constante.

Tanaka [104] a étudié le temps local d'une diffusion en milieu Lévy. Il donne des propriétés sur la loi asymptotique de la vallée du milieu pour obtenir des résultats asymptotiques sur le temps local de la diffusion.

Cheliotis [32] s'est intéressé au cas d'un processus de Lévy α-stable spectralement négatif et a explicité la limite en loi de la renormalisation $\frac{X(t)}{(\log t)^\alpha}$.

Singh [97] étudie le cas d'une diffusion transiente sur un milieu Lévy spectralement négatif. Il généralise le résultat de Hu, Shi et Yor [62] sur le cas d'un milieu brownien drifté et donne les différents taux de convergence.

On dit qu'un processus $V \in \mathcal{V}$ est un processus de Lévy sur $\mathbb{R}$ si c'est un processus de Markov à accroissements indépendants et stationnaires, on pose également $V(0) = 0$. Comme pour le mouvement brownien, on définit la notion de vallée standard (voir la Définition 1.3.4).

Définition 1.3.6. *Soit $c > 0$, on dit que $V \in \mathcal{V}$ admet un c-minimum au point x_0 si il existe deux réels ξ et ζ tels que $\xi < x_0 < \zeta$ et*

- $V(\xi) \geq \big(V(x_0) \wedge V(x_0^-)\big) + c$,
- $V(\zeta^-) \geq \big(V(x_0) \wedge V(x_0^-)\big) + c$ *et*
- *pour tout $x \in [\xi, \zeta]$, $x \neq x_0$, $V(x) \wedge V(x^-) \geq V(x_0) \wedge V(x_0^-)$.*

De manière similaire, on dit que V admet un c-maximum en x_0 si $-V$ admet un c-minimum en x_0.

Remarquons que $V(x_0)$ est remplacé par $V(x_0) \wedge V(x_0^-)$ (ou par $V(x_0) \vee V(x_0^-)$ pour la définition d'un c-maximum) pour tenir compte du fait qu'il peut exister un saut en x_0.

Notons $M_c(V)$ l'ensemble des c-extrema de V. On suppose que les éléments de $M_c(V)$ sont deux à deux distincts et que le milieu V est continu en ses extrema locaux. Ces deux conditions sont suffisantes pour que $M_c(V)$ n'ait pas de point d'accumulation et pour obtenir l'alternance des c-maxima et c-minima. Ces propriétés sont vérifiées par un processus de Lévy dont 0 est régulier pour $]0, +\infty[$ et pour $]-\infty, 0[$, voir la Section 4.1.2. Comme pour le mouvement brownien, on définit alors la vallée standard $(\mathfrak{p}_c, \mathfrak{m}_c, \mathfrak{q}_c)$ comme la vallée de hauteur c contenant le point 0.

1.3.2 Description des résultats obtenus

Le travail réalisé dans cette troisième partie est issu de l'article [40] soumis pour publication et réalisé avec R. Diel.

C'est une généralisation des résultats obtenus par Andreoletti et Diel [13]. On donne ici un analogue du Théorème 1.3.3 (respectivement 1.3.5) de convergence du temps local (resp. du supremum du temps local) de la diffusion dans le cas d'un milieu aléatoire Lévy.

Considérons alors un processus de Lévy V sur $\mathbb{R}$ et une diffusion X sur le milieu V de générateur défini par (1.18). Comme dans le cas d'un milieu brownien, la diffusion est localisée autour d'un point, étudions alors son processus des temps locaux $(L_X(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$. Il est défini par la même formule des temps d'occupation que le mouvement brownien (Définition (1.3.2)).

Utilisons des notations pour une trajectoire $\omega \in \mathcal{V}$:

$$\big(\omega^+(x), x \geq 0\big) := (\omega(x), x \geq 0) \ , \ \big(\omega^-(x), x \geq 0\big) := \big(\omega((-x)^-), x \geq 0\big) \, .$$

Le processus ω^+ donne la partie de ω à temps positifs et ω^- celle à temps négatifs, inversée en temps et tel que ω^- soit càd-làg.

Dans le cas d'un processus de Brox (voir Théorème 1.3.3), il apparaît la notion de processus de Bessel de dimension 3, introduisons alors l'analogue pour les processus de Lévy : le processus de Lévy conditionné à rester positif. Ces processus ont été introduits par Bertoin [24] comme la limite quand ε tend vers 0 d'un processus de Lévy (sur $\mathbb{R}_+$) conditionné à rester positif jusqu'à un temps exponentiel indépendant de paramètre ε. Une construction du processus de Lévy conditionné à rester positif est donné par Bertoin [23] en concaténant les excursions du processus de Lévy au dessus de son infimum. Notons $V^\uparrow$ le processus de Lévy conditionné à rester positif et $\mathbb{P}^\uparrow$ sa loi.

Résultats sur le milieu

Etudions la vallée standard du milieu Lévy V.

D'après sa construction (voir Section 1.3.1), le minimum $\mathfrak{m}_c$ de la vallée standard est la plus petite valeur entre le minimum du milieu V sur $[0, \mathfrak{q}_c]$ et le minimum de V sur $[\mathfrak{p}_c, 0]$. L'étude du milieu V est similaire sur ces deux intervalles, on ne traitera alors que le premier cas. Il est plus facile de considérer une autre valeur que $\mathfrak{q}_c$, définissons le premier temps d'une montée de c du processus V au dessus de son minimum :

$$\underline{\tau}_c^+ = \inf\{t \geq 0; V(t) - \underline{V}(t) \geq c\}.$$

Dans le cas où $\mathfrak{m}_c \geq 0$, ce temps vérifie $\underline{\tau}_c^+ < \mathfrak{q}_c$, on définit alors le minimum m_c^+ sur $[0, \underline{\tau}_c^+]$ comme le dernier infimum avant ce temps d'arrêt $\underline{\tau}_c^+$:

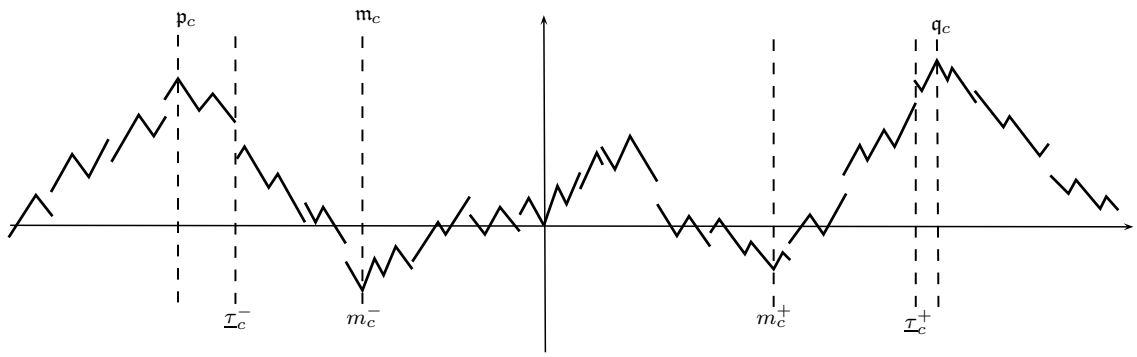
$$m_c^+ = \sup\{t \leq \underline{\tau}_c^+; V(t) - \underline{V}(t) = 0\}.$$

On peut vérifier que $\mathfrak{m}_c = m_c^+$ dans le cas où le minimum de la vallée standard est positif ($\mathfrak{p}_c < 0 < \mathfrak{m}_c < \mathfrak{q}_c$) et que $\mathfrak{m}_c = m_c^-$ dans le cas où le minimum est négatif ($\mathfrak{p}_c < \mathfrak{m}_c < 0 < \mathfrak{q}_c$), voir la Figure 1.7.

On étudie alors le processus de Lévy V recentré en m_c^+ : $(V_{m_c^+}(x), -m_c^+ \leq x \leq \underline{\tau}_c^+ - m_c^+)$ où

$$V_{m_c^+}(x) = V(m_c^+ + x) - V(m_c^+).$$

FIGURE 1.7 – La vallée de hauteur c.



Dans le cas du mouvement brownien, il est connu depuis Tanaka [101] que le processus $(V_{m_c^+}(x), -m_c^+ \leq x \leq \underline{\tau}_c^+ - m_c^+)$ a pour loi, la loi d'un processus $\tilde{V}$ constitué de deux processus de Bessel de dimension 3 indépendants B_1 et B_2 concaténés en 0 et arrêtés en des temps a_c et b_c qui tendent vers l'infini quand c tend vers l'infini :

$$\left(\tilde{V}(x) = B_1(x)\mathbf{1}_{x\geq 0} + B_2(-x)\mathbf{1}_{x<0}\ ; -a_c \leq x \leq b_c\right).$$

Un tel résultat s'obtient en considérant les excursions du mouvement brownien et en les inversant en temps.

Dans le cas d'un processus de Lévy à sauts quelconques, le résultat est différent. Notamment parce que sa loi n'est pas stable par inversion en temps et à cause de la présence éventuelle d'un saut au temps $\underline{\tau}_c^+$. En reprenant l'idée de l'inversion en temps des excursions du processus de Lévy, les lois obtenues sont celles d'un processus de Lévy conditionné à rester positif. On obtient le premier résultat sur le milieu Lévy V.

Proposition 1.3.7. *Si V est un processus de Lévy qui ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$ et tel que 0 soit régulier pour $]0, +\infty[$ et pour $]-\infty, 0[$.*

Alors les processus $(V_{m_c^+}((-t)^-), -m_c^+ \leq t \leq 0)$ et $(V_{m_c^+}(t), 0 \leq t \leq \underline{\tau}_c^+ - m_c^+)$ sont indépendants. De plus,

1. *la loi $\overleftarrow{\mathbb{P}}^c$ du premier processus est égale à la loi $\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow,c}$ du processus $(\hat{V}^{\uparrow}(t), 0 \leq t \leq a_c)$, où $\hat{V}$ a même loi que $-V$ et est indépendant de V,*
2. *la loi $\overrightarrow{\mathbb{P}}^c$ du deuxième processus est absolument continue par rapport à la loi $\mathbb{P}^{\uparrow,c}$ du processus $(V^{\uparrow}(t), 0 \leq t \leq b_c)$,*

où les deux temps a_c et b_c tendent vers $+\infty$ quand c tend vers l'infini.

La densité qui apparaît dans le point (2) de la proposition précédente est issue du saut éventuel du processus V au temps $\underline{\tau}_c^+$. Dans le cas d'un processus de Lévy sans saut positif, cette densité vaut 1 , on retrouve le cas du mouvement brownien. Cette densité a une expression explicite dans le cas où le processus V est stable. Pour obtenir les bonnes propriétés de récurrence et de régularité pour 0 du

proessus V, on se place dans le cas d'un processus de Lévy V stable d'indice $\alpha \in [1,2]$. On obtient alors le résultat asymptotique suivant.

Proposition 1.3.8. *Quand c tend vers $+\infty$:*

1. *La loi $\underset{\leftarrow}{\mathbb{P}}^c$ converge faiblement vers la loi $\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}$.*
2. *La loi $\underset{\rightarrow}{\mathbb{P}}^c$ converge faiblement vers la loi $\mathbb{P}^{\uparrow}$.*

Pour démontrer cette proposition, on utilise également la stabilité du processus de Lévy conditionné à rester positif et son expression sous forme d'excursions au dessus de son minimum.

Résultats sur le processus des temps locaux

Le résultat principal donne le comportement asymptotique du processus des temps locaux renormalisé et recentré au minimum de la vallée standard de hauteur $\log t$:

Théorème 1.3.9. *Si V est un processus de Lévy stable d'indice $\alpha \in [1,2]$ et qui n'est pas un drift pur, alors*

le processus $\left(\dfrac{L_X(t, \mathfrak{m}_{\log t} + x)}{t}, x \in \mathbb{R}\right)$ converge en loi au sens de Skorohod, quand t tend vers $+\infty$, vers le processus

$\left(\dfrac{e^{-\widetilde{V}(x)}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\widetilde{V}(y)}\mathrm{d}y}, x \in \mathbb{R}\right)$ où la loi de $\tilde{V}$ est $\tilde{\mathbb{P}}$ et, sous $\tilde{\mathbb{P}}(d\omega)$, ω^+ et ω^- sont indépendants et de lois respectives $\mathbb{P}^{\uparrow}$ la loi d'un processus de Lévy V conditionné à rester positif, et $\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}$ la loi du processus dual V^- conditionné à rester positif.

C'est-à-dire que $\tilde{V}$ a même loi que les deux processus $V^{\uparrow} = (V^{\uparrow}(x), x \geq 0)$ et $\hat{V}^{\uparrow} = (\hat{V}^{\uparrow}(x), x \geq 0)$ concaténés en 0 :

$$\left(V^{\uparrow}(x)\mathbf{1}_{x\geq 0} + \hat{V}^{\uparrow}((-x)^-)\mathbf{1}_{x\leq 0} \ , \ x \in \mathbb{R}\right).$$

On obtient ainsi le corollaire :

Corollaire 1.3.10.

$$\frac{L_X^*(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\widetilde{V}(y)}\mathrm{d}y}$$

où $\widetilde{V}$ est le même processus que dans le Théorème 1.3.9 et où on rappelle que $L_X^*(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} L_X(t,x)$.

Pour démontrer le Théorème 1.3.9, on utilise les mêmes fonctions S_V et T_V que pour le milieu brownien (voir Formules (1.21) et (1.22)) et on obtient un analogue de la formule (1.23) : pour toute constante α, pour tout $c \in \mathbb{R}$, conditionnellement au milieu V,

$$\left(c^{-\alpha}X(V, c^{2\alpha}t); t \geq 0\right) \overset{\mathcal{L}}{=} \left(X(V(c^{-\alpha}\,\cdot), t); t \geq 0\right).$$

En utilisant la propriété de stabilité du processus de Lévy stable d'indice α donnée par l'égalité en loi $V \overset{\mathcal{L}}{=} c^{-1}V(c^{\alpha}\cdot)$, on obtient un analogue du changement d'échelle donné par les Formules (1.24) et (1.25) :

$$c^{-\alpha} X(V, c^{2\alpha}\,\cdot) \stackrel{\mathcal{L}}{=} X(cV, \cdot)$$

et

$$\left(c^{-\alpha} L_{X(V,\cdot)}(c^{2\alpha} t, c^{\alpha} x)\,; t \geq 0, x \in \mathbb{R}\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(L_{X_c(V^c,\cdot)}(t, x)\,; t \geq 0, x \in \mathbb{R}\right).$$

Ces deux formules permettent de travailler à milieu V fixé dont la vallée standard est de hauteur 1 .

Chapitre 2

Elagage d'un arbre aléatoire continu de Lévy

Ce chapitre reprend les résultats de l'article [6] réalisé avec R. Abraham et J.-F. Delmas et soumis pour publication.

Dans ce chapitre, on se fixe deux CRT caractérisés par les mécanismes de branchement ψ et ψ_0 définis par les Formules (1.9) et (1.10) tels que le deuxième croisse moins vite que le premier. On construit le processus de marquage sur les nœuds et sur le squelette du premier CRT afin de retrouver le CRT défini par ψ_0. Le Théorème 2.2.8 donne l'égalité en loi du sous-arbre défini par ψ_0 et de l'arbre défini par ψ et élagué. Pour démontrer ce théorème, on utilisera une propriété de Markov spéciale qui donne la loi des sous-arbres "au dessus" d'une marque sachant la loi du sous-arbre "sous" la marque. On donnera également la loi jointe, sous la mesure d'excursion, des longueurs des excursions du processus d'exploration initial et de celui du processus élagué.

2.1 Prérequis sur les CRT de Lévy

Donnons, dans cette section, les outils et notations que nous utiliserons pour le reste de cette partie. On définira le processus de Lévy caractérisant le CRT de Lévy ainsi que le processus des hauteurs et le processus d'exploration associés.

Pour E un espace polonais, notons $\mathcal{B}(E)$ (resp. $\mathcal{B}_+(E)$) l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs réelles (resp. à valeurs positives) définies sur E muni de sa tribu de Borel, et notons $\mathcal{M}(E)$ (resp. $\mathcal{M}_f(E)$) l'ensemble des mesures σ-finies (resp. finies) sur E, muni de la topologie de la convergence vague (resp. faible). Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(E)$ et toute fonction $f \in \mathcal{B}_+(E)$, on écrit

$$\langle \mu, f \rangle = \int f(x)\mu(dx).$$

2.1.1 Le processus de Lévy sous-jacent

On considère un processus de Lévy $X = (X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles, sans sauts négatifs et partant de 0. Sa loi est caractérisée par sa transformée de Laplace : pour $\lambda \geq 0$

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda X_t}\right] = \mathrm{e}^{t\psi(\lambda)},$$

où son exposant de Laplace ψ est donné par

$$\psi(\lambda) = \alpha'\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \pi(d\ell)\left(\mathrm{e}^{-\lambda\ell} - 1 + \mathbf{1}_{\{\ell<1\}}\lambda\ell\right),$$

avec $\beta \geq 0$ et la mesure de Lévy π est une mesure sur $]0,+\infty[$ positive, σ-finie telle que $\int_{]0,+\infty[}(1 \wedge \ell^2)\pi(d\ell) < \infty$. Nous considérerons que le processus X

- est à variation infinie (c.à.d. $\beta > 0$ ou $\int_{]0,1[} \ell\pi(d\ell) = +\infty$),
- ne tend pas vers $+\infty$,
- est d'espérance finie (c.à.d. $\int_{]0,+\infty[}(\ell \wedge \ell^2)\pi(d\ell) < \infty$).

Remarquons que la deuxième hypothèse implique la troisième. L'exposant de Laplace de X peut être écrit sous la forme

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \pi(d\ell)\left(\mathrm{e}^{-\lambda\ell} - 1 + \lambda\ell\right), \quad \lambda \geq 0, \tag{2.1}$$

avec pour dérive $\alpha \geq 0$ (puisque X ne tend pas vers $+\infty$), pour terme quadratique $\beta \geq 0$ et pour mesure de Lévy π, une mesure positive, σ-finie sur $]0,+\infty[$ telle que $\int_{]0,+\infty[}(\ell \wedge \ell^2)\pi(d\ell) < \infty$, et $\int_{]0,1[} \ell\pi(d\ell) = \infty$ ou $\beta > 0$.

Notons $\Delta_s = X_s - X_{s-}$ la taille du saut du processus X au temps s.

Puisque X est à variation infinie, on a, voir Corollaire VII.5 dans [16],

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda}{\psi(\lambda)} = 0. \tag{2.2}$$

Notons $I = (I_t, t \geq 0)$ le processus infimum de X, $I_t = \inf_{0\leq s\leq t} X_s$, et posons $S = (S_t, t \geq 0)$ le processus supremum, $S_t = \sup_{0\leq s\leq t} X_s$. On notera également pour tous $0 \leq s \leq t$, l'infimum de X sur l'intervalle $[s,t]$ par :

$$I_t^s = \inf_{s\leq r\leq t} X_r.$$

Le point 0 est régulier pour le processus de Markov $X - I$, et $-I$ est le temps local de $X - I$ en 0 (voir [16], chap. VII). Notons $\mathbb{N}$ la mesure d'excursion associée au processus $X - I$ hors de 0, et soit $\sigma = \inf\{t > 0; X_t - I_t = 0\}$ la longueur des excursions de $X - I$ sous $\mathbb{N}$. On supposera que, sous $\mathbb{N}$, $X_0 = I_0 = 0$.

D'après [16], Théorème VII.1, l'inverse continu à droite du processus $-I$ est un subordinateur d'exposant de Laplace ψ^{-1}. Nous venons de voir que cet exposant n'a pas de dérive, puisque $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\psi(\lambda)^{-1} = 0$ d'après (2.2). Notons alors π_* sa mesure de Lévy : pour tout $\lambda \geq 0$

$$\psi^{-1}(\lambda) = \int_{]0,\infty[} \pi_*(d\ell)(1 - e^{\lambda\ell}).$$

La longueur des excursions, σ, a pour loi π_* sous la mesure d'excursion $\mathbb{N}$. En décomposant $\mathbb{N}$ par rapport à la loi de σ, on obtient $\mathbb{N}(d\mathcal{E}) = \int_{]0,\infty[} \pi_*(dr)\mathbb{N}_r(d\mathcal{E})$, où $(\mathbb{N}_r, r \in]0,\infty[)$ est une famille mesurable de mesures de probabilité sur l'ensemble des excursions telles que $\mathbb{N}_r[\sigma = r] = 1$ pour π_*-p.p. $r > 0$.

Puisque X est à variation infinie, 0 est également régulier pour le processus de Markov $S - X$. On renormalise le temps local, $L = (L_t, t \geq 0)$, de $S - X$ en 0 tel que

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\beta S_{L_t^{-1}}}] = \mathrm{e}^{-t\psi(\beta)/\beta},$$

où $L_t^{-1} = \inf\{s \geq 0; L_s \geq t\}$ (voir [16] Théorème VII.4 (ii)).

2.1.2 Le processus des hauteurs et le CRT de Lévy

Pour tout $t \geq 0$, on considère le processus retourné au temps t, $\hat{X}^{(t)} = (\hat{X}_s^{(t)}, 0 \leq s \leq t)$ défini par :

$$\hat{X}_s^{(t)} = X_t - X_{(t-s)-} \quad \text{si} \quad 0 \leq s < t,$$

et $\hat{X}_t^{(t)} = X_t$. Les deux processus $(\hat{X}_s^{(t)}, 0 \leq s \leq t)$ et $(X_s, 0 \leq s \leq t)$ ont la même loi. On note $\hat{S}^{(t)}$ le processus supremum de $\hat{X}^{(t)}$ et $\hat{L}^{(t)}$ le temps local en 0 de $\hat{S}^{(t)} - \hat{X}^{(t)}$ avec la même renormalisation que L.

Définition 2.1.1. *Il existe un processus semi continu inférieurement à valeurs dans* $[0,\infty]$*, appelé le processus des hauteurs tel que, sous* $\mathbb{N}$*,*

$$\begin{cases} H_0 = 0, \\ \textit{Pour tout } t \geq 0, \textit{ p.s. } H_t = \hat{L}_t^{(t)}. \end{cases}$$

Et p.s. pour tout $s < t$ tel que $X_{s-} \leq I_t^s$ et pour $s = t$, si $\Delta_t > 0$ alors $H_s < \infty$. Pour tout $t' > t \geq 0$, le processus H prend toutes les valeurs entre H_t et $H_{t'}$ sur l'intervalle $[t, t']$.

Le processus des hauteurs $(H_t, t \in [0,\sigma])$ sous $\mathbb{N}$, code un arbre généalogique continu, le CRT de Lévy, suivant la procédure suivante :

(i) Pour chaque $t \in [0,\sigma]$ correspond un point de l'arbre à la génération H_t.

(ii) t est un ancêtre de t' si $H_t = H_{t,t'}$ où

$$H_{t,t'} = \inf\{H_u; u \in [t \wedge t', t \vee t']\}.$$

(iii) On pose $d(t,t') = H_t + H_{t'} - 2H_{t,t'}$ et on définit la relation d'équivalence :

$$t \sim t' \text{ si et seulement si } d(t,t') = 0.$$

Le quotient de $[0,\sigma]$ par cette relation d'équivalence muni de la distance d et de la relation généalogique du (ii) définit le CRT de Lévy codé par H.

2.1.3 Le processus d'exploration

Le processus des hauteurs n'est en général pas markovien. Mais il existe un processus markovien à valeurs mesures, le processus d'exploration.

Le processus d'exploration $\rho = (\rho_t, t \geq 0)$ est un processus à valeurs dans $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ défini par : pour tout $f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+)$, $\langle \rho_t, f\rangle = \int_{[0,t]} d_s I_t^s f(H_s)$, ou de manière équivalente

$$\rho_t(dr) = \beta \mathbf{1}_{[0,H_t]}(r)\, dr + \sum_{\substack{0<s\leq t \\ X_{s-}<I_t^s}} (I_t^s - X_{s-})\delta_{H_s}(dr).$$

En particulier, la masse totale de ρ_t est $\langle \rho_t, 1\rangle = X_t - I_t$.

Pour $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$, on pose

$$H(\mu) = \sup \operatorname{Supp} \mu,$$

où $\operatorname{Supp} \mu$ est le support fermé de μ, avec la convention $H(0) = 0$. On a

Proposition 2.1.2. *([44], Lemme 1.2.2 et Formule (1.12))*
Presque sûrement, pour tout $t > 0$,
- $H(\rho_t) = H_t$,
- $\rho_t = 0$ *si et seulement si* $H_t = 0$,
- *si* $\rho_t \neq 0$, *alors* $\operatorname{Supp}\ \rho_t = [0, H_t]$,
- $\rho_t = \rho_{t^-} + \Delta_t \delta_{H_t}$, *où* $\Delta_t = 0$ *si* $t \notin \mathcal{J}$.

D'après la définition du processus d'exploration, puisque X part de 0, on obtient $\rho_0 = 0$ p.s. Pour obtenir la propriété de Markov de ρ, nous devons d'abord définir le processus ρ partant d'une mesure initiale $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$.

Pour $a \in [0, \langle \mu, 1\rangle]$, on définit la mesure coupée $k_a\mu$ par

$$k_a\mu([0,r]) = \mu([0,r]) \wedge (\langle \mu, 1\rangle - a), \quad \text{pour } r \geq 0.$$

Si $a > \langle \mu, 1\rangle$, on pose $k_a\mu = 0$. En d'autres termes, la mesure $k_a\mu$ est la mesure μ coupée par une masse a en dessous de $H(\mu)$. En particulier, $\langle k_a\mu, 1\rangle = \langle \mu, 1\rangle - a$.

Pour $\nu, \mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$, et μ à support compact, on définit la concaténation $[\mu,\nu] \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ des deux mesures par :

$$\big\langle [\mu,\nu], f\big\rangle = \big\langle \mu, f\big\rangle + \big\langle \nu, f(H(\mu) + \cdot)\big\rangle, \quad f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+).$$

Finalement, on pose pour tout $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ et tout $t > 0$,

$$\rho_t^\mu = \big[k_{-I_t}\mu, \rho_t\big].$$

On dit que $(\rho_t^\mu, t \geq 0)$ est le processus ρ partant de $\rho_0^\mu = \mu$, et notons $\mathbb{P}_\mu$ sa loi. Sauf ambiguïté, on écrira ρ_t pour ρ_t^μ. Notons également $\mathbb{P}_\mu^*$ la loi de ρ^μ tué quand il atteint 0.

Proposition 2.1.3. *([44], Proposition 1.2.3)*
Le processus $(\rho_t, t \geq 0)$ est un processus càd-làg fortement markovien à valeurs dans $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$.

Remarque 2.1.4. D'après la construction de ρ, on obtient que p.s. $\rho_t = 0$ si et seulement si $-I_t \geq \langle \rho_0, 1 \rangle$ et $X_t - I_t = 0$. Ceci implique que 0 est un point régulier pour ρ. Notons que $\mathbb{N}$ est également la mesure d'excursion du processus ρ hors de 0, et que σ, la longueur des excursions, est $\mathbb{N}$-p.p. égale à $\inf\{t > 0; \rho_t = 0\}$.

La formule exponentielle pour le processus de Poisson ponctuel des sauts du subordinateur inverse de $-I$ donne (voir le début de la Section 3.2.2 [44]) pour $\lambda > 0$

$$\mathbb{N}\left[1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sigma}\right] = \psi^{-1}(\lambda). \tag{2.3}$$

2.2 Procédure d'élagage

2.2.1 Le serpent de Lévy

Rappelons l'expression des deux mécanismes de branchement ψ et ψ_0 (voir les Formules 1.9 et 1.10) :

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \pi(d\ell)(e^{-\lambda\ell} - 1 + \lambda\ell),$$
$$\psi_0(\lambda) = \alpha_0\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \pi_0(d\ell)(e^{-\lambda\ell} - 1 + \lambda\ell).$$

Le serpent poissonnien de Lévy

Construisons un serpent poissonnien pour couper le CRT de Lévy aux marques sur les nœuds et sur le squelette. Les nœuds marqués correspondent à certains sauts de X. Pour les marques sur le squelette, on reprend l'idée de [7] et on utilise un processus de Poisson sous-jacent.

Marques sur les nœuds Soit p une fonction mesurable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que

$$1 - p(\ell) = \frac{d\pi_0}{d\pi}(\ell).$$

On définit alors la mesure π_1 par $\pi = \pi_0 + \pi_1$ (ou de manière équivalente par $\pi_1 = p\pi$) et on obtient alors

$$\int_{]0,+\infty[} \ell p(\ell)\, \pi(d\ell) = \int_{]0,+\infty[} \ell\pi_1(d\ell) < +\infty. \tag{2.4}$$

Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des temps de sauts de X. Pour tout $s \in \mathcal{J}$, on note par

$$\Delta_s = X_s - X_{s-}$$

le saut de X au temps s.

On considère une famille $(V_s)_{s\in\mathcal{J}}$ de variables aléatoires indépendantes telles que, conditionnellement à X, pour tout $s \in \mathcal{J}$,

$$\mathbb{P}(V_s = 1) = 1 - \mathbb{P}(V_s = 0) = p(\Delta_s).$$

Posons $\mathcal{J}^1 = \{s \in \mathcal{J},\ V_s = 1\}$ l'ensemble des sauts marqués et $\mathcal{J}^0 = \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}^1 = \{s \in \mathcal{J},\ V_s = 0\}$ l'ensemble des sauts non-marqués. Pour $t \geq 0$, on considère la mesure sur $\mathbb{R}_+$,

$$m_t^{\mathrm{nod}}(dr) = \sum_{\substack{0<s\leq t,\ s\in\mathcal{J}^1 \\ X_{s-}<I_t^s}} (I_t^s - X_{s-})\, \delta_{H_s}(dr).$$

Les atomes de m_t^{nod} donnent les nœuds marqués du processus d'exploration au temps t.

Marques sur le squelette Soit $\alpha_1 > 0$. D'après la Proposition 2.4.2, voir également la Proposition 4.1.1 dans [44] quand H est continu, on considère un serpent de Lévy $((\rho_t, W_t), t \geq 0)$ avec pour processus sous-jacent, un processus de Poisson d'intensité α_1. P.s., le processus W_t est càd-làg avec des sauts de taille 1. Sa dérivée m_t^{ske} est une mesure atomique sur $[0, H_t[$; elle donne les marques sur le squelette du processus d'exploration au temps t.

Décomposition de X Rappelons la Définition 1.11 : $\alpha_1 = \alpha_0 - \alpha - \int_{]0,+\infty[} \ell\pi_1(d\ell)$.

D'après la condition d'intégrabilité (2.4) pour π_1, on peut définir le processus $X^{(1)}$ par, pour tout $t \geq 0$,

$$X_t^{(1)} = \alpha_1 t + \sum_{0<s\leq t;\ s\in\mathcal{J}^1} \Delta_s.$$

Le processus $X^{(1)}$ est un subordinateur d'exposant de Laplace ϕ_1 défini par :

$$\phi_1(\lambda) = \alpha_1\lambda + \int_{]0,+\infty[} \pi_1(d\ell)\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\ell}\right). \tag{2.5}$$

On pose alors $X^{(0)} = X - X^{(1)}$, c'est un processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ_0, indépendant du processus $X^{(1)}$ d'après les propriétés classiques des processus de Poisson ponctuels.

On suppose que $\phi_1 \neq 0$, ainsi α_1 est tel que

$$\alpha_1 > 0. \tag{2.6}$$

Il est facile de voir, en utilisant $\int_{]0,\infty[} \ell\pi_1(d\ell) < \infty$, que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\phi_1(\lambda)}{\lambda} = \alpha_1. \tag{2.7}$$

Le serpent poissonnien de Lévy On appelle processus de marquage le couple $m = (m^{\mathrm{nod}}, m^{\mathrm{ske}})$ et on appelle $\mathcal{S} = ((\rho_t, m_t), t \geq 0)$ le serpent de Lévy marqué partant de $\rho_0 = 0$, $m_0 = 0$.

On considère l'ensemble $\mathbb{S}$ des triplets (μ, Π_1, Π_2) où

- μ est une mesure finie sur $\mathbb{R}_+$,
- Π_1 est une mesure finie sur $\mathbb{R}_+$ absolument continue par rapport à μ,
- Π_2 est une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}_+$ telle que

– $\mathrm{Supp}(\Pi_2) \subset \mathrm{Supp}(\mu)$,
– pour tout $x < H(\mu)$, $\Pi_2([0,x]) < +\infty$,
– si $\mu(H(\mu)) > 0$, $\Pi_2(\mathbb{R}_+) < +\infty$.

On munit $\mathbb{S}$ de la distance suivante : si $(\mu, \pi_1, \pi_2) \in \mathbb{S}$, on pose

$$w(t) = \int \mathbf{1}_{[0,t[}(\ell)\pi_2(d\ell)$$

et

$$\tilde{w}(t) = w\left(H(k_{(\langle\mu,1\rangle - t)}\mu)\right) \quad \text{pour} \quad t \in [0, \langle\mu, 1\rangle[.$$

On définit ensuite

$$d'((\mu,\pi_1,\pi_2),(\mu',\pi_1',\pi_2')) = d((\mu,\tilde{w}),(\mu',\tilde{w}')) + D(\pi_1,\pi_1')$$

où d est la distance définie par (2.43) et D est une distance qui définit la topologie de la convergence faible.

Pour obtenir la propriété de Markov pour le serpent de Lévy marqué, on doit d'abord définir le processus $\mathcal{S}$ partant d'une valeur initiale de $\mathbb{S}$. Pour $(\mu, \Pi^{\mathrm{nod}}, \Pi^{\mathrm{ske}}) \in \mathbb{S}$, on pose $\Pi = (\Pi^{\mathrm{nod}}, \Pi^{\mathrm{ske}})$ et $H_t^\mu = H(k_{-I_t}\mu)$. On définit

$$(m^{\mathrm{nod}})_t^{(\mu,\Pi)} = \left[\Pi^{\mathrm{nod}}\mathbf{1}_{[0,H_t^\mu[} + \mathbf{1}_{\{\mu(\{H_t^\mu\})>0\}}\frac{k_{-I_t}\mu(\{H_t^\mu\})\Pi^{\mathrm{nod}}(\{H_t^\mu\})}{\mu(\{H_t^\mu\})}\delta_{H_t^\mu}, m_t^{\mathrm{nod}}\right]$$

et

$$(m^{\mathrm{ske}})_t^{(\mu,\Pi)} = [\Pi^{\mathrm{ske}}\mathbf{1}_{[0,H_t^\mu[}, m_t^{\mathrm{ske}}].$$

Remarquons que cette définition de $(m^{\mathrm{ske}})_t^{(\mu,\Pi)}$ est cohérente avec la construction du serpent de Lévy.

On écrira m^{nod} pour $(m^{\mathrm{nod}})^{(\mu,\Pi)}$ et de même pour m^{ske} et m. Par construction et puisque ρ est un processus de Markov homogène, le serpent de Lévy marqué $\mathcal{S} = (\rho, m)$ est un processus de Markov homogène.

Notons maintenant par $\mathbb{P}_{\mu,\Pi}$ la loi du serpent de Lévy marqué partant au temps 0 de (μ, Π), et par $\mathbb{P}^*_{\mu,\Pi}$ la loi du serpent de Lévy marqué tué quand ρ atteint 0. Pour simplifier on écrira $\mathbb{P}_\mu$ si $\Pi = 0$ et $\mathbb{P}$ si $(\mu, \Pi) = 0$ et de manière similaire pour $\mathbb{P}^*$. Finalement on notera par $\mathbb{N}$ la loi de $\mathcal{S}$ quand ρ a pour loi la mesure d'excursion $\mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ la filtration engendrée par $\mathcal{S}$ complétée de manière usuelle. En utilisant la propriété de Markov fort de $(X, X^{(1)})$ et la Proposition 2.4.2 ou le Théorème 4.1.2 dans [44] si H est continu, on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.2.1. *Le serpent marqué $\mathcal{S}$ est un processus à valeur dans $\mathbb{S}$, càd-làg et fortement markovien.*

Par construction, on obtient la propriété de serpent : p.s. $(\rho_t, m_t)(s) = (\rho_{t'}, m_{t'})(s)$ pour tous $0 \leq s < H_{t,t'}$.

Représentation poissonnienne du serpent

On décompose la trajectoire de $\mathcal{S}$ sous $\mathbb{P}^*_{\mu,\Pi}$ selon les excursions de la masse totale de ρ au dessus de ses minima passés, voir Section 4.2.3 dans [44]. Plus précisément, soient $]\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i[, i \in \tilde{I}$ les intervalles d'excursion de $X - I$ au dessus de 0 sous $\mathbb{P}^*_{\mu,\Pi}$. Pour tout $i \in \tilde{I}$, on définit $h_i = H_{\tilde{\alpha}_i}$ et $\mathcal{S}^i = (\rho^i, m^i)$ par les formules : pour $t \geq 0$ et $f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+)$,

$$\langle \rho^i_t, f\rangle = \int_{]h_i,+\infty[} f(x - h_i)\rho_{(\tilde{\alpha}_i+t)\wedge\tilde{\beta}_i}(dx) \tag{2.8}$$

$$\langle (m^{(\mathrm{a})}_t)^i, f\rangle = \int_{]h_i,+\infty[\times[0,+\infty[} f(x - h_i)m^{\mathrm{a}}_{(\tilde{\alpha}_i+t)\wedge\tilde{\beta}_i}(dx), \quad \mathrm{a} \in \{\mathrm{nod}, \mathrm{ske}\}, \tag{2.9}$$

avec $m^i = ((m^{\mathrm{nod}})^i, (m^{\mathrm{ske}})^i)$. On pose $\sigma^i = \inf\{s > 0; \langle \rho^i_s, 1\rangle = 0\}$. Il est facile d'adapter le Lemme 4.2.4 de [44] pour obtenir le lemme suivant

Lemme 2.2.2. *Soit $(\mu, \Pi) \in \mathbb{S}$. La mesure ponctuelle $\sum_{i\in\tilde{I}} \delta_{(h_i,\mathcal{S}^i)}$ est, sous $\mathbb{P}^*_{\mu,\Pi}$, une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $\mu(dr)\mathbb{N}[d\mathcal{S}]$.*

Le processus dual et la formule de représentation

On aura besoin du processus $\eta = (\eta_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ défini par

$$\eta_t(dr) = \beta \mathbf{1}_{[0,H_t]}(r)\, dr + \sum_{\substack{0<s\leq t \\ X_{s-}<I^s_t}} (X_s - I^s_t)\delta_{H_s}(dr).$$

Le processus η est le processus dual de ρ sous $\mathbb{N}$ (voir le Corollaire 3.1.6 dans [44]).

Le prochain lemme sur le retournement en temps peut facilement être déduit du Corollaire 3.1.6 dans [44] et de la construction de m.

Lemme 2.2.3. *Sous $\mathbb{N}$, les processus $((\rho_s, \eta_s, \mathbf{1}_{\{m_s=0\}}), s \in [0, \sigma])$ et $((\eta_{(\sigma-s)-}, \rho_{(\sigma-s)-}, \mathbf{1}_{\{m_{(\sigma-s)-}=0\}})$, $s \in [0, \sigma])$ ont même loi.*

Construisons une représentation poissonnienne de (ρ, η, m) sous $\mathbb{N}$. Soient $\mathcal{N}_0(dx\, d\ell\, du)$, $\mathcal{N}_1(dx\, d\ell\, du)$ et $\mathcal{N}_2(dx)$ des mesures ponctuelles de Poisson indépendantes respectivement sur $[0, +\infty[^3$, $[0, +\infty[^3$ et $[0, +\infty[$ et d'intensité respective

$$dx\, \ell\pi_0(d\ell)\, \mathbf{1}_{[0,1]}(u)du, \quad dx\, \ell\pi_1(d\ell)\, \mathbf{1}_{[0,1]}(u)du \quad \text{et} \quad \alpha_1 dx.$$

Pour tout $a > 0$, notons par $\mathbb{M}_a$ la loi du quadruplet $(\mu, \nu, m^{\mathrm{nod}}, m^{\mathrm{ske}})$ de mesures sur $\mathbb{R}_+$ de masse finie définies par : pour tout $f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+)$

$$\langle \mu, f\rangle = \int (\mathcal{N}_0(dx\, d\ell\, du) + \mathcal{N}_1(dx\, d\ell\, du))\ \mathbf{1}_{[0,a]}(x)u\ell f(x) + \beta \int_0^a f(r)\, dr, \tag{2.10}$$

$$\langle \nu, f\rangle = \int (\mathcal{N}_0(dx\, d\ell\, du) + \mathcal{N}_1(dx\, d\ell\, du))\ \mathbf{1}_{[0,a]}(x)(1-u)\ell f(x) + \beta \int_0^a f(r)\, dr, \tag{2.11}$$

$$\langle m^{\mathrm{nod}}, f\rangle = \int \mathcal{N}_1(dx\, d\ell\, du)\, \mathbf{1}_{[0,a]}(x)u\ell f(x) \quad \text{et} \quad \langle m^{\mathrm{ske}}, f\rangle = \int \mathcal{N}_2(dx)\, \mathbf{1}_{[0,a]}(x)f(x). \tag{2.12}$$

Remarque 2.2.4. En particulier $\mu(dr)+\nu(dr)$ est défini par $\mathbf{1}_{[0,a]}(r)d_rW_r$, où W est un subordinateur d'exposant de Laplace $\psi'-\alpha$.

On pose finalement $\mathbb{M}=\int_0^{+\infty} da\ \mathrm{e}^{-\alpha a}\,\mathbb{M}_a$. En utilisant la construction du serpent, il est facile de déduire de la Proposition 3.1.3 dans [44], la représentation poissonienne suivante.

Proposition 2.2.5. *Pour toute fonction mesurable positive F sur $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)^3\times\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$,*

$$\mathbb{N}\left[\int_0^\sigma F(\rho_t,\eta_t,m_t)\ dt\right]=\int \mathbb{M}(d\mu\, d\nu\, dm)F(\mu,\nu,m),$$

où $m=(m^{nod},m^{ske})$ et $\sigma=\inf\{s>0;\rho_s=0\}$ est la longueur d'excursion.

2.2.2 Le processus d'exploration élagué

Définissons la fonctionnelle additive continue du processus $((\rho_t,m_t),t\geq 0)$ suivante :

$$A_t=\int_0^t \mathbf{1}_{\{m_s=0\}}\ ds \quad \text{pour } t\geq 0. \tag{2.13}$$

Lemme 2.2.6. *On obtient les propriétés suivantes.*
(i) Pour $\lambda>0$, $\mathbb{N}[1-\mathrm{e}^{-\lambda A_\sigma}]={\psi_0}^{-1}(\lambda)$.
(ii) $\mathbb{N}$-p.p. 0 et σ sont des points de croissance pour A. Plus précisément, $\mathbb{N}$-p.p. pour tout $\varepsilon>0$, on a $A_\varepsilon>0$ et $A_\sigma-A_{(\sigma-\varepsilon)\vee 0}>0$.
(iii) Si $\lim_{\lambda\to\infty}\phi_1(\lambda)=+\infty$, alors $\mathbb{N}$-p.p. l'ensemble $\{s;m_s\neq 0\}$ est dense dans $[0,\sigma]$.

Démonstration. Démontrons d'abord (i). Soit $\lambda>0$. Avant de calculer $v=\mathbb{N}[1-\exp(-\lambda A_\sigma)]$, notons que $A_\sigma\leq\sigma$ implique, d'après (2.3), que $v\leq\mathbb{N}[1-\exp(-\lambda\sigma)]=\psi^{-1}(\lambda)<+\infty$. On a

$$v=\lambda\mathbb{N}\left[\int_0^\sigma dA_t\ \mathrm{e}^{-\lambda\int_t^\sigma dA_u}\right]=\lambda\mathbb{N}\left[\int_0^\sigma dA_t\,\mathbb{E}^*_{\rho_t,0}[\mathrm{e}^{-\lambda A_\sigma}]\right],$$

où on a remplacé $\mathrm{e}^{-\lambda\int_t^\sigma dA_u}$ dans la dernière égalité par $\mathbb{E}^*_{\rho_t,m_t}[\mathrm{e}^{-\lambda A_\sigma}]$, son espérance conditionnelle et où on a utilisé que dA_t-p.p. $m_t=0$. Pour calculer cette dernière expression, on utilise la décomposition de $\mathcal{S}$ sous $\mathbb{P}^*_\mu$ selon les excursions de la masse totale de ρ au dessus de ses minima, voir le Lemme 2.2.2. Utilisons les mêmes notations que dans ce lemme et notons que sous $\mathbb{P}^*_\mu$, on a $A_\sigma=A_\infty=\sum_{i\in\tilde{I}}A^i_\infty$, où pour tout $T\geq 0$,

$$A^i_T=\int_0^T \mathbf{1}_{\{m^i_t=0\}}dt. \tag{2.14}$$

D'après le Lemme 2.2.2, on obtient

$$\mathbb{E}^*_\mu[\mathrm{e}^{-\lambda A_\sigma}]=\mathrm{e}^{-\langle\mu,1\rangle\mathbb{N}[1-\exp-\lambda A_\sigma]}=\mathrm{e}^{-v\langle\mu,1\rangle}\ .$$

On a

$$
\begin{aligned}
v = \lambda \mathbb{N}\Big[\int_0^\sigma dA_t \ \mathrm{e}^{-v\langle \rho_t, 1\rangle} \Big] &= \lambda \mathbb{N}\Big[\int_0^\sigma dt \, \mathbf{1}_{\{m_t=0\}} \, \mathrm{e}^{-v\langle \rho_t, 1\rangle} \Big] && (2.15)\\
&= \lambda \int_0^{+\infty} da \ \mathrm{e}^{-\alpha a} \, \mathbb{M}_a[\mathbf{1}_{\{m=0\}} \, \mathrm{e}^{-v\langle \mu, 1\rangle}] \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} da \ \mathrm{e}^{-\alpha a} \exp\Big\{ -\alpha_1 a - \int_0^a dx \int_0^1 du \int_{]0,\infty[} \ell_1 \pi_1(d\ell_1) \Big\} \\
&\qquad \exp\Big\{ -\beta v a - \int_0^a dx \int_0^1 du \int_{]0,\infty[} \ell_0 \pi_0(d\ell_0) \Big(1 - \mathrm{e}^{-vu\ell_0}\Big) \Big\} \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} da \ \exp\Big\{ -a \int_0^1 du \ \psi_0'(uv) \Big\} && (2.16)\\
&= \lambda \frac{v}{\psi_0(v)}, && (2.17)
\end{aligned}
$$

où on utilise la Proposition 2.2.5 pour les troisième et quatrième égalités, et, pour la dernière égalité, le fait que $\alpha_0 = \alpha + \alpha_1 + \int_{]0,\infty[} \ell_1 \pi_1(d\ell_1)$ ainsi que

$$
\psi_0'(\lambda) = \alpha_0 + \int_{]0,\infty[} \pi_0(d\ell_0) \ \ell_0 (1 - \mathrm{e}^{-\lambda \ell_0}). \tag{2.18}
$$

Remarquons que si $v = 0$, alors (2.16) implique que $v = \lambda/\psi_0'(0)$, ce qui est impossible si $\psi_0'(0) = \alpha_0 > 0$ d'après (2.6). On a donc $v \in]0, +\infty[$, et on peut diviser (2.17) par v pour obtenir $\psi_0(\lambda) = \lambda$. Ceci prouve (i).

Démontrons maintenant (ii). En faisant tendre λ vers $+\infty$ dans (i) et en utilisant $\lim_{r\to\infty} \psi_0(r) = +\infty$, on obtient que $\mathbb{N}[A_\sigma > 0] = +\infty$. Pour $(\mu, \Pi) \in \mathbb{S}$, on a sous $\mathbb{P}^*_{\mu,\Pi}$, $A_\infty \geq \sum_{i\in\tilde{I}} A^i_\infty$, où A^i est défini par (2.14). Ainsi le Lemme 2.2.2 implique que si $\mu \neq 0$, alors $\mathbb{P}^*_{\mu,\Pi}$-p.s. $\tilde{I}$ est infini et $A_\infty > 0$. Utilisons la propriété de Markov au temps t du serpent sous $\mathbb{N}$, on obtient que pour tout $t > 0$, $\mathbb{N}$-p.p. sur $\{\sigma > t\}$, on a $A_\sigma - A_t > 0$. Ceci implique que σ est $\mathbb{N}$-p.p. un point de croissance de A. Par inversion du temps, voir le Lemme 2.2.3, on obtient également que $\mathbb{N}$-p.p. 0 est un point de croissance de A. On obtient (ii).

Si $\alpha_1 > 0$ alors le serpent $((\rho_s, m_s), s \geq 0)$ n'est pas trivial. Il est connu que, puisque le processus de Lévy X est à variation infinie, l'ensemble $\{s; \exists t \in [0, H_s[, \ m_s(t) \neq 0\}$ est $\mathbb{N}$-p.p. dense dans $[0, \sigma]$. Ceci implique que $\{s; m_s \neq 0\}$ est $\mathbb{N}$-p.p. dense dans $[0, \sigma]$.

Si $\alpha_1 = 0$ et $\pi_1(]0, \infty[) = \infty$, alors l'ensemble $\mathcal{J}^1$ des temps de sauts de $X^{(1)}$ est $\mathbb{N}$-p.p. dense dans $[0, \sigma]$. Ceci implique également que $\{s; m_s \neq 0\}$ est $\mathbb{N}$-p.p. dense dans $[0, \sigma]$.

Si $\alpha_1 = 0$ et $\pi_1(]0, \infty[) < \infty$, alors l'ensemble $\mathcal{J}^1$ des temps de sauts de $X^{(1)}$ est $\mathbb{N}$-p.p. fini. Ceci implique que $\{s; m_s \neq 0\} \cap [0, \sigma]$ est $\mathbb{N}$-p.p. une union finie d'intervalles, qui, d'après (i), n'est pas dense dans $[0, \sigma]$.

Pour obtenir (iii), remarquons que $\lim_{\lambda\to\infty} \phi_1(\lambda) = \infty$ si et seulement si $\alpha_1 > 0$ ou $\pi_1(]0, \infty[) = \infty$. □

On pose $C_t = \inf\{r > 0; A_r > t\}$ l'inverse continu à droite de A, avec la convention $\inf \emptyset = \infty$. D'après la décomposition des excursions, voir le Lemme 2.2.2, le point (ii) du Lemme 2.2.6 induit le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.7. *Pour toute mesure initiale* $(\mu, \Pi) \in \mathbb{S}$, $\mathbb{P}_{\mu,\Pi}$*-p.s. le processus* $(C_t, t \geq 0)$ *est fini. Si* $m_0 = 0$, *alors* $\mathbb{P}_{\mu,\Pi}$*-p.s.* $C_0 = 0$.

On définit le processus d'exploration élagué $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_t = \rho_{C_t}, t \geq 0)$ et le serpent de Lévy marqué et élagué $\tilde{\mathcal{S}} = (\tilde{\rho}, \tilde{m})$, où $\tilde{m} = (m_{C_t}, t \geq 0)$. C_t est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt pour tout $t \geq 0$ et est fini p.s. d'après le Corollaire 2.2.7. Les processus $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\mathcal{S}}$ sont càd-làg. On pose également $\tilde{H}_t = H_{C_t}$ et $\tilde{\sigma} = \inf\{t > 0; \tilde{\rho}_t = 0\}$.

Soit $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t, t \geq 0)$ la filtration engendrée par le serpent de Lévy poissonnien élagué $\tilde{\mathcal{S}}$ complétée de manière usuelle. En particulier $\tilde{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{F}_{C_t}$, où si τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt, alors $\mathcal{F}_\tau$ est la tribu associée à τ.

Nous pouvons maintenant redonner plus précisément le Théorème 1.3.7.

Théorème 2.2.8. *Pour toute mesure* μ *de masse finie, la loi du processus d'exploration élagué* $\tilde{\rho}$ *sous* $\mathbb{P}_{\mu,0}$ *est la loi du processus d'exploration associé à un processus de Lévy d'exposant de Laplace* ψ_0 *sous* $\mathbb{P}_\mu$.

2.3 Loi du processus élagué

2.3.1 Une propriété de Markov spéciale

Afin de définir les excursions du serpent de Lévy poissonnien hors de $\{s \geq 0;\ m_s = 0\}$, on définit O comme l'intérieur de $\{s \geq 0,\ m_s \neq 0\}$. Remarquons que le complémentaire de O est de mesure positive.

Lemme 2.3.1. *Si l'ensemble* $\{s \geq 0,\ m_s \neq 0\}$ *n'est pas vide alors* O *n'est pas vide. Si on a* $\lim_{\lambda\to\infty} \phi_1(\lambda) = \infty$, *alors* $\mathbb{N}$*-p.p. l'ensemble ouvert* O *est dense dans* $[0, \sigma]$.

Démonstration. Pour tout élément s' de $\{s \geq 0,\ m_s \neq 0\}$, il existe $u \leq H_{s'}$ tel que $m_{s'}([0, u]) \neq 0$ et $\rho_{s'}([u, \infty[) > 0$. On considère alors $\tau_{s'} = \inf\{t > s', \rho_t([u, \infty[) = 0\}$. Par la continuité à droite de ρ, on obtient $\tau_{s'} > s'$ et la propriété de serpent implique que $\mathbb{N}$-p.p. $]s', \tau_{s'}[\subset O$.

Utilisons (iii) du Lemme 2.2.6 pour obtenir la dernière partie. □

Ecrivons $O = \bigcup_{i\in I}]\alpha_i, \beta_i[$, on dit que les intervalles $]\alpha_i, \beta_i[, i \in I$ sont les intervalles d'excursion du serpent de Lévy marqué $\mathcal{S} = (\rho, m)$ hors de $\{s \geq 0,\ m_s = 0\}$. Pour tout $i \in I$, définissons le processus $\mathcal{S}^i = (\rho^i, m^i)$ à valeurs mesures par : pour tous $f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+)$, $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \langle \rho^i_t, f\rangle &= \int_{[H_{\alpha_i}, +\infty[} f(x - H_{\alpha_i}) \rho_{(\alpha_i+t)\wedge\beta_i}(dx), \\ \langle (m^{\mathrm{a}})^i_t, f\rangle &= \int_{]H_{\alpha_i}, +\infty[} f(x - H_{\alpha_i}) m^{\mathrm{a}}_{(\alpha_i+t)\wedge\beta_i}(dx) \quad \text{avec a} \in \{\mathrm{nod}, \mathrm{ske}\}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

et $m^i_t = ((m^{\mathrm{nod}})^i_t, (m^{\mathrm{ske}})^i_t)$. Remarquons que la masse située en H_{α_i} est gardée, si il y en a une, dans la définition de ρ^i alors qu'elle est retirée dans la définition de m^i. En particulier, si $\Delta_{\alpha_i} > 0$, alors $\rho^i_0 = \Delta_{\alpha_i}\delta_0$ et pour tout $t < \beta_i - \alpha_i$, le mesure ρ^i_t charge 0. Au contraire, si $m^i_0 = 0$, on a, pour tout $t < \beta_i - \alpha_i$, $m^i_t(\{0\}) = 0$.

Soit $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$ la tribu engendrée par $\tilde{\mathcal{S}} = ((\rho_{C_t}, m_{C_t}), t \geq 0)$. Rappelons que $\mathbb{P}^*_{\mu,\Pi}(d\mathcal{S})$ représente la loi du serpent $\mathcal{S}$ partant de $(\mu, \Pi) \in \mathbb{S}$ et arrêté quand ρ atteint 0. Pour $\ell \in]0, +\infty[$, on écrira $\mathbb{P}^*_\ell$ pour $\mathbb{P}^*_{\ell\delta_0,0}$.

Si Q est une mesure sur $\mathbb{S}$ et φ est une fonction positive mesurable définie sur l'espace mesurable $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{S}$, on notera par

$$Q[\varphi(u, \omega, \cdot)] = \int_{\mathbb{S}} \varphi(u, \omega, \mathcal{S}) Q(d\mathcal{S}).$$

En d'autres termes, l'intégration ne concerne que la troisième variable de la fonction φ.

On peut maintenant écrire la propriété de Markov spéciale.

Théorème 2.3.2 (Propriété de Markov spéciale)**.** *Soit φ une fonction mesurable positive définie sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{S}$ telle que $(t, \omega) \mapsto \varphi(t, \omega, \mathcal{S})$ soit progressivement mesurable pour la filtration $\tilde{\mathcal{F}}$ pour tout $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$. Alors, on a $\mathbb{P}$-p.s.*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{i\in I} \varphi(A_{\alpha_i}, \omega, \mathcal{S}^i)\right) \,\middle|\, \tilde{\mathcal{F}}_\infty\right] \\ = \exp\left(-\int_0^\infty du\, \alpha_1 \mathbb{N}\left[1 - \mathrm{e}^{-\varphi(u,\omega,\cdot)}\right]\right) \\ \exp\left(-\int_0^\infty du \int_{]0,\infty[} \pi_1(d\ell)\left(1 - \mathbb{E}^*_\ell[\mathrm{e}^{-\varphi(u,\omega,\cdot)}]\right)\right). \quad (2.20)\end{aligned}$$

Autrement dit, la loi du processus d'excursion $\sum_{i\in I} \delta_{(A_{\alpha_i}, \rho_{\alpha_i -}, \mathcal{S}^i)}(du\, d\mu\, d\mathcal{S})$, sachant $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$, est la loi d'une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $\mathbf{1}_{\{u\geq 0\}} du\, \delta_{\tilde{\rho}_u}(d\mu)\, \left(\alpha_1 \mathbb{N}(d\mathcal{S}) + \int_{]0,\infty[} \pi_1(d\ell) \mathbb{P}^*_\ell(d\mathcal{S})\right)$.

Ce théorème donne la loi du serpent de Lévy marqué "au dessus" du CRT élagué. La fin de cette section est dédiée à sa preuve.

Remarquons d'abord que, si $\lim_{\lambda\to+\infty} \phi_1(\lambda) < +\infty$, alors on a $\alpha_1 = 0$ et π_1 est une mesure finie. De plus, il n'y a pas de marque sur le squelette et le nombre de marques sur les nœuds est fini sur tout intervalle de temps borné. La preuve du Théorème 2.3.2 dans ce cas est facile et laissée au lecteur. Pour le reste de cette section, on suppose que $\lim_{\lambda\to+\infty} \phi_1(\lambda) = +\infty$.

On se fixe $t > 0$ et $\eta > 0$. Pour $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_s = (\rho_s, m_s), s \geq 0)$, on fixe $B = \{\sigma(\mathcal{S}) = +\infty\} \cup \{T_\eta(\mathcal{S}) = +\infty\} \cup \{L_\eta(\mathcal{S}) = -\infty\}$ où $\sigma(\mathcal{S}) = \inf\{s > 0; \rho_s = 0\}$, $T_\eta(\mathcal{S}) = \inf\{s \in [0, \sigma(\mathcal{S})]; \langle \rho_s, 1\rangle \geq \eta \quad \text{et} \quad H_s \geq \eta\}$ et $L_\eta(\mathcal{S}) = \sup\{s \in [0, \sigma(\mathcal{S})]; \langle \eta_s, 1\rangle \geq \eta\}$, avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$ et $\sup \emptyset = -\infty$.

On considère les fonctions φ positives bornées satisfaisant les hypothèses du Théorème 2.3.2 et ces trois conditions :

- (h_1) $\varphi(u, \omega, \mathcal{S}) = 0$ pour tout $u \geq t$.
- (h_2) $u \mapsto \varphi(u, \omega, \mathcal{S})$ est uniformément Lipschitzienne (avec une constante qui ne dépend ni de ω ni de $\mathcal{S}$).
- (h_3) $\varphi(u, \omega, \mathcal{S}) = 0$ sur B ; et si $\mathcal{S} \in B^c$ alors $\varphi(u, \omega, \mathcal{S})$ dépend de $\mathcal{S}$ seulement par $(\mathcal{S}_u, u \in [T_\eta, L_\eta])$.

Lemme 2.3.3. *Si φ satisfie (h_1), (h_2) et (h_3), alors la fonction w définie sur $]0, \infty[\times[0, \infty[\times\Omega$ par*

$$w(\ell, u, \omega) = \mathbb{E}^*_\ell[\mathrm{e}^{-\varphi(u,\omega,\cdot)}]$$

est uniformément continue sur $]0,\infty[\times[0,\infty[$.

Pour simplifier, on notera $w(\ell,u)$ au lieu de $w(\ell,u,\omega)$.

Démonstration. Soient $u>0$ et $\ell'>\ell$. Si on pose $\tau_\ell=\inf\{t\geq 0,\ \rho_t(\{0\})=\ell\}$ on a, par la propriété de Markov fort au temps τ_ℓ et l'hypothèse (h_3), que

$$\mathbb{E}^*_{\ell'}\left[\mathrm{e}^{-\varphi(u,\omega,\cdot)}\right]=\mathbb{E}^*_{\ell'}\left[\mathbf{1}_{\{T_\eta>\tau_\ell\}}\mathbb{E}^*_{\ell}\left[\mathrm{e}^{-\varphi(u,\omega,\cdot)}\right]\right]+\mathbb{E}^*_{\ell'}\left[\mathrm{e}^{-\varphi(u,\omega,\cdot)}\,\mathbf{1}_{\{T_\eta\leq\tau_\ell\}}\right].$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\big|w(\ell',u)-w(\ell,u)\big|&\leq\mathbb{E}^*_{\ell'}\left[\mathbf{1}_{\{T_\eta\leq\tau_\ell\}}\mathbb{E}^*_{\ell}\left[\mathrm{e}^{-\varphi(u,\omega,\cdot)}\right]\right]+\mathbb{E}^*_{\ell'}\left[\mathrm{e}^{-\varphi(u,\omega,\cdot)}\,\mathbf{1}_{\{T_\eta\leq\tau_\ell\}}\right]\\&\leq 2\mathbb{P}^*_{\ell'}(T_\eta\leq\tau_\ell)\\&=2\mathbb{P}^*_{\ell'-\ell}(T_\eta<+\infty).\end{aligned}$$

Utilisons le Lemme 2.2.2, pour $\ell'-\ell<\eta$, on obtient

$$|w(\ell',u)-w(\ell,u)|\leq 2\left(1-\mathrm{e}^{-(\ell'-\ell)\mathbb{N}[T_\eta<\infty]}\right).$$

Puisque $\mathbb{N}[T_\eta<\infty]<\infty$, on déduit qu'il existe une constante finie c_η telle que pour toute fonction φ satisfaisant (h_1)–(h_3),

$$|w(\ell',u)-w(\ell,u)|\leq c_\eta|\ell'-\ell|. \tag{2.21}$$

La continuité absolue par rapport à u est une conséquence directe de l'hypothèse (h_2). □

La preuve continue maintenant le long des sous-sections suivantes.

Temps d'arrêt

Soit $R(dt,du)$ une mesure de Poisson ponctuelle sur $\mathbb{R}_+^2$ indépendante de $\mathcal{F}_\infty$ d'intensité la mesure de Lebesgue. Pour tout $\varepsilon>0$, le processus $R_t^\varepsilon:=R([0,t]\times[0,1/\varepsilon])$ est un processus de Poisson ponctuel d'intensité $1/\varepsilon$. On note par $(e_k^\varepsilon,k\geq 1)$ les longueurs des intervalles de temps entre les sauts de $(R_t^\varepsilon,t\geq 0)$. Les variables aléatoires $(e_k^\varepsilon,k\geq 1)$ sont des variables aléatoires exponentielles i.i.d. de moyenne ε, et sont indépendantes de $\mathcal{F}_\infty$. Elles définissent une subdivision de $\mathbb{R}_+$ qui est de plus en plus fine quand ε décroît vers 0.

Pour $\varepsilon>0$, on considère $T_0^\varepsilon=0$, $M_0^\varepsilon=0$ et pour $k\geq 0$,

$$\begin{aligned}M_{k+1}^\varepsilon&=\inf\{i>M_k^\varepsilon;m_{T_k^\varepsilon+\sum_{j=M_k^\varepsilon+1}^i e_j^\varepsilon}\neq 0\},\\S_{k+1}^\varepsilon&=T_k^\varepsilon+\sum_{j=M_k^\varepsilon+1}^{M_{k+1}^\varepsilon}e_j^\varepsilon,\\T_{k+1}^\varepsilon&=\inf\{s>S_{k+1}^\varepsilon;\ m_s=0\},\end{aligned}\tag{2.22}$$

avec pour convention $\inf\emptyset=+\infty$. Remarquons que T_k^ε et S_k^ε sont des $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.

Introduisons maintenant une notation pour le processus défini au dessus des marques sur les intervalles $[S_k^\varepsilon, T_k^\varepsilon]$. On pose, pour $a \geq 0$,

$$\bar{H}_a = \sup\{t > 0, m_a([0,t]) = 0\}, \quad \rho_a^- = \rho_a \mathbf{1}_{[0,\bar{H}_a[} \tag{2.23}$$

et ρ_a^+ défini par $\rho_a = [\rho_a^-, \rho_a^+]$, c'est-à-dire pour $f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+)$,

$$\langle \rho_a^+, f \rangle = \int_{[\bar{H}_a,\infty[} f(r - \bar{H}_a)\, \rho_a(dr). \tag{2.24}$$

Pour $k \geq 1$ et $\varepsilon > 0$ fixés, on définit $\mathcal{S}^{k,\varepsilon} = \left(\rho^{k,\varepsilon}, m^{k,\varepsilon}\right)$ par : pour $s > 0$ et $f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned}
\rho_s^{k,\varepsilon} &= \rho^+_{(S_k^\varepsilon + s)\wedge T_k^\varepsilon}, \\
\langle (m^{\mathrm{a}})_s^{k,\varepsilon}, f \rangle &= \int_{]\bar{H}_{S_k^\varepsilon},+\infty[} f(r - \bar{H}_{S_k^\varepsilon}) m^{\mathrm{a}}_{(S_k^\varepsilon + s)\wedge T_k^\varepsilon}(dr), \quad \text{avec a} \in \{\mathrm{nod}, \mathrm{ske}\},
\end{aligned}$$

et $m_s^{k,\varepsilon} = ((m^{\mathrm{nod}})_s^{k,\varepsilon}, (m^{\mathrm{ske}})_s^{k,\varepsilon})$. Remarquons que $\rho_s^{k,\varepsilon}(\{0\}) = \rho_{S_k^\varepsilon}(\{\bar{H}_{S_k^\varepsilon}\})$. Pour $k \geq 1$, on considère la tribu $\mathcal{F}^{(\varepsilon),k}$ engendrée par la famille de processus $\left(\mathcal{S}_{(T_\ell^\varepsilon + s)\wedge S_{\ell+1}^\varepsilon -},\ s > 0\right)_{\ell \in \{0,\ldots,k-1\}}$.

Approximation de la fonctionnelle

Soit $\mathcal{S}$ le serpent de Lévy et g une fonction définie sur $\mathbb{S}$. On décompose les trajectoires de ρ selon les excursions de la masse totale de ρ au dessus de ses minima comme dans (2.19), mais pour les excursions correspondant à une éventuelle masse initiale. On pose $Y_t = \langle \rho_t, 1 \rangle$ et $J_t = \inf_{0 \leq u \leq t} Y_u$. Rappelons que $(Y_t, t \geq 0)$ a pour loi sous $\mathbb{P}^*_\mu$ la loi d'un processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ partant de $\langle \mu, 1 \rangle$ et tué quand il atteint 0. Soient $]\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i[$, $i \in \tilde{I}$ les intervalles d'excursion de $Y - J$ hors de 0. Pour tout $i \in \tilde{I}$, on définit $h_i = H_{\tilde{\alpha}_i} = H_{\tilde{\beta}_i}$. Posons $\mathcal{I} = \{i \in \tilde{I}; h_i > 0\}$ et pour $i \in \mathcal{I}$, $\mathcal{S}^i = (\rho^i, m^i)$ défini par (2.19). Soit $i_0 \notin \mathcal{I}$. On pose $\mathcal{I}^* = \mathcal{I} \cup \{i_0\}$, $\tilde{\alpha}_{i_0} = \inf\{\tilde{\alpha}_i; i \in \tilde{I}, h_i = 0\}$, $\tilde{\beta}_{i_0} = \sup\{\tilde{\beta}_i; i \in \tilde{I}, h_i = 0\}$ et $\mathcal{S}^{i_0} = (\rho^{i_0}, m^{i_0})$ avec

$$\begin{aligned}
\langle \rho_t^{i_0}, f \rangle &= \int_{[0,+\infty[} f(x) \rho_{(\tilde{\alpha}_{i_0} + t)\wedge \tilde{\beta}_{i_0}}(dx) \\
\langle (m^{\mathrm{a}})_t^{i_0}, f \rangle &= \int_{]0,+\infty[} f(x) m^{\mathrm{a}}_{(\tilde{\alpha}_{i_0} + t)\wedge \tilde{\beta}_{i_0}}(dx) \quad \text{avec a} \in \{\mathrm{nod}, \mathrm{ske}\},
\end{aligned}$$

et $m_t^{i_0} = ((m^{\mathrm{nod}})_t^{i_0}, (m^{\mathrm{ske}})_t^{i_0})$. Voir Figure 2.1 pour avoir un dessin des différentes excursions.

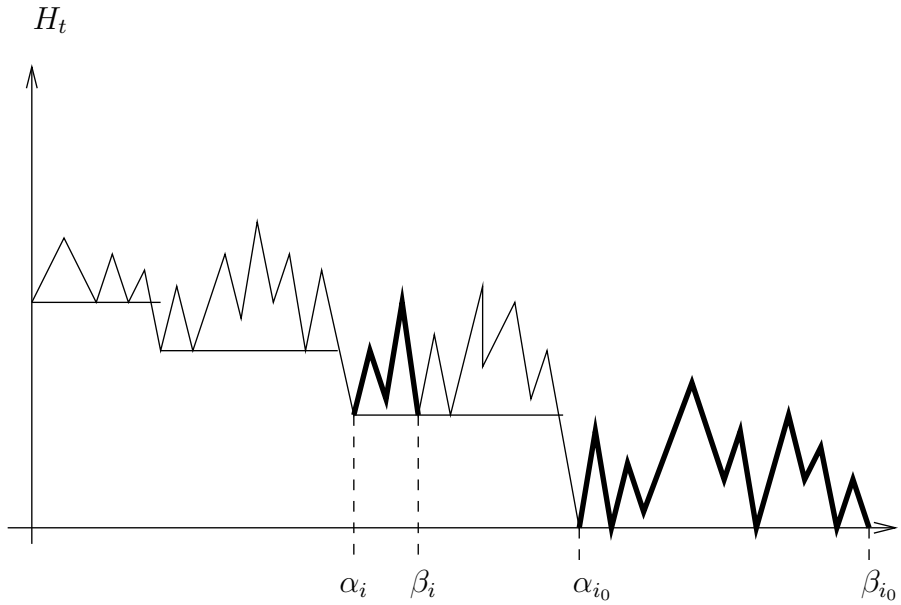


FIGURE 2.1 – Définition des différentes excursions.

On définit

$$g^*(\mathcal{S}) = \sum_{i \in \mathcal{I}^*} g(\mathcal{S}^i). \tag{2.25}$$

Lemme 2.3.4. *$\mathbb{P}$-p.s., on a, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit,*

$$\sum_{i \in I} \varphi(A_{\alpha_i}, \omega, \mathcal{S}^i) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_{S_k^\varepsilon}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^*(A_{S_k^\varepsilon}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon}), \tag{2.26}$$

où les sommes ont un nombre fini de termes non nuls.

Démonstration. Première égalité. Avec les hypothèses (h_1) et (h_3), puisque $\mathbb{N}[T_\eta < +\infty] < +\infty$, l'ensemble

$$\mathcal{J} = \{i \in I, \varphi(A_{\alpha_i}, \omega, \mathcal{S}^i) \neq 0\}$$

est fini. De plus, pour ε suffisamment petit, pour tout $j \in \mathcal{J}$, la subdivision définie par (2.22) et l'intervalle $]\alpha_j, \beta_j[$ sont d'intersection non vide : en d'autres termes, il existe un entier k_j tel que $S_{k_j}^\varepsilon \in]\alpha_j, \beta_j[$ (et cet entier est unique).

D'autre part, pour tout $j \in \mathcal{J}$, on peut trouver un ε suffisamment petit tel que $S_{k_j}^\varepsilon < T_\eta(\rho^j)$, ce qui nous donne, pour ε suffisamment petit, que

$$\varphi(A_{\alpha_j}, \omega, \mathcal{S}^j) = \varphi(A_{\alpha_j}, \omega, \mathcal{S}^{k_j,\varepsilon}).$$

Finalement, comme la marque en α_j est toujours présente au temps $S_{k_j}^\varepsilon$, la fonctionnelle additive A est constante sur cet intervalle de temps et

$$\varphi(A_{\alpha_j}, \omega, \mathcal{S}^j) = \varphi(A_{S_{k_j}^\varepsilon}, \omega, \mathcal{S}^{k_j,\varepsilon}).$$

Deuxième égalité. Soit $j \in \mathcal{J}$. On considère la décomposition de $\mathcal{S}^{k_j,\varepsilon}$ au dessus de ses minima décrite au début de cette sous-section. On doit considérer deux cas :

Premier cas : La masse en α_j est sur un nœud. Alors, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a $T_\eta > \tilde{\alpha}_{i_0}$ et

$$\varphi(A_{S^\varepsilon_{k_j}}, \omega, \mathcal{S}^{k_j,\varepsilon}) = \varphi(A_{S^\varepsilon_{k_j}}, \omega, \mathcal{S}^{i_0}) = \varphi^*(A_{S^\varepsilon_{k_j}}, \omega, \mathcal{S}^{k_j,\varepsilon})$$

puisque tous les termes dans la somme qui définit φ^* sont nuls sauf pour $i = i_0$.

Deuxième cas : La masse α_j est sur le squelette. Dans ce cas, on choisit encore ε suffisamment petit tel que l'intervalle $[T_\eta, L_\eta]$ soit inclus dans un des intervalles d'excursion au dessus des minima du processus de la masse totale de $S^{k_j,\varepsilon}$. On conclut alors comme dans le premier cas. □

Remarquons que pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{F}^{(\varepsilon),k} \subset \mathcal{F}_{S^\varepsilon_k}. \tag{2.27}$$

Il est facile de voir le résultat de mesurabilité suivant.

Lemme 2.3.5. *Pour tout $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi(A_{S^\varepsilon_k}, \omega, \cdot)$ est $\mathcal{F}^{(\varepsilon),k}$-mesurable.*

Calcul de l'espérance conditionnelle de l'approximation

Lemme 2.3.6. *Pour toute variable aléatoire positive $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$-mesurable Z, on a*

$$\mathbb{E}\left[Z \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^*\left(A_{S^\varepsilon_k}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon}\right)\right)\right] = \mathbb{E}\left[Z \prod_{k=1}^{\infty} K_\varepsilon(A_{S^\varepsilon_k}, \omega)\right],$$

où $\gamma = \psi^{-1}(1/\varepsilon)$ et

$$K_\varepsilon(r,\omega) = \frac{\psi(\gamma)}{\phi_1(\gamma)} \frac{\gamma - v(r)}{\psi(\gamma) - \psi(v(r))} \left(\alpha_1 + \int_0^1 du \int_{]0,\infty[} \ell_1 \pi_1(d\ell_1)\, w(u\ell_1, r)\, \mathrm{e}^{-\gamma(1-u)\ell_1}\right), \tag{2.28}$$

où

$$w(\ell, r) = \mathbb{E}^*_\ell\left[\mathrm{e}^{-\varphi(r,\omega,\cdot)}\right] \quad \text{et} \quad v(r) = \mathbb{N}\left[1 - \mathrm{e}^{-\varphi(r,\omega,\cdot)}\right]. \tag{2.29}$$

Démonstration. Soit $p \geq 1$. Rappelons que $H_{t,t'}$ est le minimum de H entre t et t'. On pose

$$\xi_d^{p-1} = \sup\left\{t > T^\varepsilon_{p-1};\ H_t = H_{T^\varepsilon_{p-1}, S^\varepsilon_p}\right\},$$
$$\xi_g^p = \inf\left\{t > T^\varepsilon_{p-1};\ H_t = \bar{H}_{S^\varepsilon_p} \quad \text{et} \quad H_{t,S^\varepsilon_p} = H_t\right\}.$$

Intuitivement, ξ_d^{p-1} est le temps où le processus des hauteurs atteint son minimum sur $[T^\varepsilon_{p-1}, S^\varepsilon_p]$ et ξ_g^p est le temps où apparait la première marque du serpent au temps S^ε_p, voir la Figure 2.2.

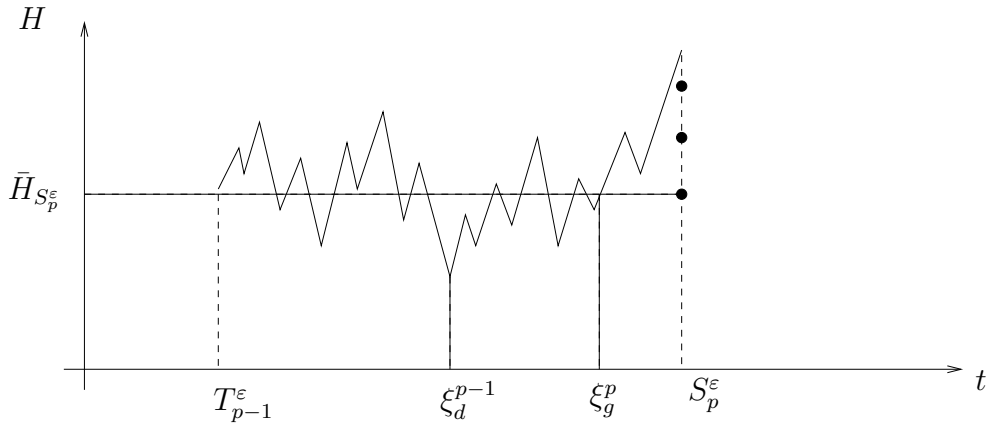


FIGURE 2.2 – Position des différents temps aléatoires.

On considère une variable aléatoire positive bornée Z de la forme $Z = Z_0 Z_1 Z_2 Z_3$, où $Z_0 \in \mathcal{F}^{(\varepsilon),p-1}$, $Z_1 \in \sigma(\mathcal{S}_u, T_{p-1}^\varepsilon \leq u < \xi_d^{p-1})$, $Z_2 \in \sigma(\mathcal{S}_u, \xi_d^{p-1} \leq u < \xi_g^p)$ et $Z_3 \in \sigma(\mathcal{S}_{(T_k^\varepsilon+s)\wedge S_{k+1}^\varepsilon-},\ s \geq 0,\ k \geq p)$ sont positives et bornées.

Pour calculer $\mathbb{E}\left[Z \exp\left(-\sum_{k=1}^{p} \varphi^*(A_{S_k^\varepsilon}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon})\right)\right]$, on applique d'abord la propriété de Markov fort au temps T_p^ε. On obtient

$$\mathbb{E}\left[Z \exp\left(-\sum_{k=1}^{p} \varphi^*(A_{S_k^\varepsilon}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon})\right)\right] = \mathbb{E}\left[Z_0 Z_1 Z_2 \exp\left(-\sum_{k=1}^{p} \varphi^*(A_{S_k^\varepsilon}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon})\right) \mathbb{E}_{\rho_{T_p^\varepsilon},0}\left[Z_3\right]\right].$$

Rappelons les notations (2.23) et (2.24). Remarquons que $\rho_{T_p^\varepsilon} = \rho^-_{S_p^\varepsilon}$, ainsi $\rho_{T_p^\varepsilon}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{S_p^\varepsilon}$. Donc, en utilisant la propriété de Markov fort au temps S_p^ε, on obtient d'après le Lemme 2.3.5 et (2.27)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}&\left[Z \exp\left(-\sum_{k=1}^{p} \varphi^*(A_{S_k^\varepsilon}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon})\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[Z_0 Z_1 Z_2 \exp\left(-\sum_{k=1}^{p-1} \varphi^*(A_{S_k^\varepsilon}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon})\right) \mathbb{E}^*_{\rho^+_{S_p^\varepsilon}}\left[\mathrm{e}^{-\varphi^*(A_{S_p^\varepsilon}, \omega, \cdot)}\right] \mathbb{E}_{\rho^-_{S_p^\varepsilon}}[Z_3]\right].\end{aligned}$$

Utilisons la propriété de Markov fort au temps T_{p-1}^ε, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}&\left[Z \exp\left(-\sum_{k=1}^{p} \varphi^*(A_{S_k^\varepsilon}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon})\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[Z_0 \exp\left(-\sum_{k=1}^{p-1} \varphi^*(A_{S_k^\varepsilon}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon})\right) \mathbb{E}^*_{\rho_{T_{p-1}^\varepsilon}}\left[Z_1 Z_2 F_{b_0}(\rho^+_{\tau'}, A_{\tau'}) G(\rho^-_{\tau'})\right]\right]_{|b_0 = A_{S_{p-1}^\varepsilon}},\end{aligned} \tag{2.30}$$

avec $F_{b_0}(\mu, b) = \mathbb{E}^*_\mu\left[\mathrm{e}^{-\varphi^*(b_0+b,\omega,\cdot)}\right]$, $G(\mu) = \mathbb{E}^*_\mu[Z_3]$, et τ' de même loi que S^ε_1. Dans ce qui suit, on écrira F pour F_{b_0} afin de simplifier les expressions quand il n'y a pas de confusions.

On considère alors la décomposition poissonnienne de $\mathcal{S}$ sous $\mathbb{P}^*_{\rho_{T^\varepsilon_{p-1}}}$ donnée dans le Lemme 2.2.2. Remarquons qu'il existe une unique excursion $i_1 \in \tilde{I}$ telle que $\tilde{\alpha}_{i_1} < \tau' < \tilde{\beta}_{i_1}$.

D'après les hypothèses sur Z_1, on peut écrire $Z_1 = \mathcal{H}_1(\rho_{T^\varepsilon_{p-1}}, \sum_{i\in\tilde{I};\tilde{\alpha}_i<\tilde{\alpha}_{i_1}} \delta_{h_i,\mathcal{S}^i})$ pour une fonction mesurable $\mathcal{H}_1$. On peut également écrire $Z_2 = \mathcal{H}_2(\rho_u, \xi^{p-1}_d \le u < \xi^p_g)$ pour une fonction mesurable $\mathcal{H}_2$ puisque $m_u = 0$ pour $u \in [\xi^{p-1}_d, \xi^p_g[$. Ensuite, en utilisant la formule de compensation dans la théorie des excursions, voir le Corollaire IV.11 et le Théorème VII.1 dans [16], on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*_{\mu'}&\left[Z_1 Z_2 F(\rho^+_{\tau'}, A_{\tau'}) G(\rho^-_{\tau'})\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\int \mu'(dv)\, \mathbf{1}_{\{\tau' > \sum_{s<v}\sigma(\mathcal{S}^s)\}} \mathcal{H}_1(\mu', \sum_{s<v}\delta_{\mathcal{S}^s}) h^{\mu'}_F(r, \sum_{s<v} A_{\sigma(\mathcal{S}^s)}(\mathcal{S}^s))\right], \quad (2.31)\end{aligned}$$

où $\sum_s \delta_{s,\mathcal{S}^s}$ est une mesure de Poisson ponctuelle d'intensité $\mu'(ds)\mathbb{N}[d\mathcal{S}]$, $\sigma(\mathcal{S}) = \inf\{r > 0, \mathcal{S}_r = 0\}$, $A_t(\mathcal{S}^s) = \int_0^t dv'\, \mathbf{1}_{\{m_{v'}(\mathcal{S}^s)=0\}}$ et

$$h^{\mu'}_F(s,b) = \mathbb{N}\left[F(\rho^+_{\tau'}, b + A_{\tau'}) G([k_s\mu', \rho^-_{\tau'}]) \mathcal{H}_2([k_s\mu', \rho_t], 0 \le t < \xi^1_g) \mathbf{1}_{\{\tau'<\sigma\}}\right].$$

Soit $(R_k, k \ge 0)$ la suite croissante des temps de sauts d'un processus de Poisson d'intensité $1/\varepsilon$, indépendant de $\mathcal{S}$. Par le retournement de temps, on a

$$\begin{aligned}h^{\mu'}_F(s,b) = \mathbb{N}\Big[\sum_{k=1}^{+\infty} &\mathbf{1}_{\{m_{R_k}\neq 0\}} \mathbf{1}_{\{\forall k'>k,\ m_{R_{k'}}=0\}} F(\eta^+_{R_k}, b + A_\sigma - A_{R_k})\\ &G([k_s\mu', \eta^-_{R_k}]) \mathcal{H}_2([k_s\mu', \eta_u], \tau_k < u \le \sigma)\Big],\end{aligned}$$

où $\tau_k = \inf\{t > R_k; m_t = 0\}$. On applique alors la propriété de Markov fort au temps R_k et la représentation poissonnienne du serpent de Lévy pour obtenir

$$\begin{aligned}h^{\mu'}_F(s,b) = \mathbb{N}\Big[\sum_{k=1}^{+\infty} &\mathbf{1}_{\{m_{R_k}\neq 0\}} G([k_s\mu', \eta^-_{R_k}])\\ &\mathbb{E}^*_{\rho_{R_k}}\left[\mathbf{1}_{\{\forall k'>0,\ m_{R_{k'}}=0\}} F(\eta', b + A_\sigma) \mathcal{H}_2([k_s\mu', \eta_u], \tau_0 < u \le \sigma)\right]_{|\eta'=\eta^+_{R_k}}\Big],\end{aligned}$$

où $\tau_0 = \inf\{t > 0; m_t = 0\}$. Remarquons maintenant que, si $m_0 \neq 0$, alors $m_s \neq 0$ pour $s \in [0, \tau_0]$ et $A_{\tau_0} = 0$. De plus, $m_{R_1} = 0$ implique $R_1 > \tau_0$. La propriété de Markov fort au temps τ_0 donne, avec $\eta' = \eta^+_{R_k}$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{\{m_{R_k}\neq 0\}} \mathbb{E}^*_{\rho_{R_k}}\left[\mathbf{1}_{\{\forall k'>0,\ m_{R_{k'}}=0\}} F(\eta', b + A_\sigma) \mathcal{H}_2([k_s\mu', \eta_u], \tau_0 < u \le \sigma)\right]\\ &\quad = \mathbf{1}_{\{m_{R_k}\neq 0\}} \mathbb{P}^*_{\rho^+_{R_k}}(R_1 > \sigma) \mathbb{E}^*_{\rho^-_{R_k}}\left[\mathbf{1}_{\{\forall k'>0,\ m_{R_{k'}}=0\}} F(\eta', b + A_\sigma) \mathcal{H}_2([k_s\mu', \eta_u], 0 < u \le \sigma)\right].\end{aligned}$$

En utilisant la représentation poissonnienne du Lemme 2.2.2 et l'égalité (2.3), on a $\mathbb{P}^*_{\rho^+_{R_k}}(R_1 > \sigma) = \mathbb{E}^*_{\rho^+_{R_k}}\left[\mathrm{e}^{-\sigma/\varepsilon}\right] = \mathrm{e}^{-\gamma\langle\rho^+_{R_k},1\rangle}$, puisque $\gamma = \psi^{-1}(1/\varepsilon)$. On obtient

$$h_F^{\mu'}(s,b) = \mathbb{N}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{m_{R_k}\neq 0\}} \widetilde{G}(\rho^-_{R_k}, \eta^-_{R_k}, \rho^+_{R_k}, \eta^+_{R_k})\right],$$

où

$$\widetilde{G}(\mu,\nu,\rho',\eta') = G([k_s\mu',\nu])\,\mathrm{e}^{-\gamma\langle\rho',1\rangle}\,\mathbb{E}^*_\mu\left[\mathbf{1}_{\{\forall k'>0,\ m_{R_{k'}}=0\}} F(\eta', b + A_\sigma)\mathcal{H}_2([k_s\mu',\rho_u], 0 < u \leq \sigma)\right].$$

Comme $\sum_{k\geq 1}\delta_{R_k}$ est un processus ponctuel de Poisson d'intensité $1/\varepsilon$, on déduit que

$$h_F^{\mu'}(s,b) = \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{N}\left[\int_0^\sigma dt\, \mathbf{1}_{\{m_t\neq 0\}} \widetilde{G}(\rho^-_t, \eta^-_t, \rho^+_t, \eta^+_t)\right].$$

Utilisons la Proposition 2.2.5, on obtient

$$h_F^{\mu'}(s,b) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty da\ \mathrm{e}^{-\alpha a}\,\mathbb{M}_a\left[\mathbf{1}_{\{m\neq 0\}}\widetilde{G}(\mu^-,\nu^-,\mu^+,\nu^+)\right].$$

Pour $r > 0$ et μ une mesure sur $\mathbb{R}_+$, définissons les mesures $\mu_{\geq r}$ et $\mu_{<r}$ par

$$\langle \mu_{\geq r}, f\rangle = \int f(x-r)\mathbf{1}_{\{x\geq r\}}\mu(dx) \quad \text{et} \quad \langle \mu_{<r}, f\rangle = \int f(x)\mathbf{1}_{\{x<r\}}\mu(dx).$$

On pose $q(du, d\ell_1) = \alpha_1\delta_{(0,0)}(du d\ell_1) + du\ \ell_1\pi_1(d\ell_1)$ et par convention $\pi(\{0\}) = 0$. Utilisons la formule de Palm, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_a&\left[\mathbf{1}_{\{m\neq 0\}}\widetilde{G}(\mu^-,\nu^-,\mu^+,\nu^+)\right]\\ &= \int_0^a dr \int_{[0,1]\times[0,\infty[} q(du, d\ell_1)\\ &\qquad \mathbb{M}_a\left[\mathbf{1}_{\{m([0,r[)=0\}}\widetilde{G}(\mu_{<r},\nu_{<r},\mu_{\geq r} + u\ell_1\delta_0, \nu_{\geq r} + (1-u)\ell_1\delta_0)\right].\end{aligned}$$

En utilisant l'indépendance des mesures ponctuelles de Poisson, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathbb{M}_a\left[\mathbf{1}_{\{m([0,r[)=0\}}\widetilde{G}(\mu_{<r},\nu_{<r},\mu_{\geq r} + u\ell_1\delta_0, \nu_{\geq r} + (1-u)\ell_1\delta_0)\right]\\ &\quad = \int \mathbb{M}_r(d\mu, d\nu, dm)\int \mathbb{M}_{a-r}(d\rho', d\eta', dm')\mathbf{1}_{\{m=0\}}\widetilde{G}(\mu,\nu,\rho' + u\ell_1\delta_0, \eta' + (1-u)\ell_1\delta_0).\end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned}h_F^{\mu'}(s,b) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{[0,1]\times[0,\infty[} q(du, d\ell_1)\ \int \mathbb{M}(d\mu, d\nu, dm)\int \mathbb{M}(d\rho', d\eta', dm')\\ \mathbf{1}_{\{m=0\}}\widetilde{G}(\mu,\nu,\rho' + u\ell_1\delta_0, \eta' + (1-u)\ell_1\delta_0).\end{aligned}$$

En plaçant ce résultat dans (2.31), on obtient

$$\mathbb{E}_{\mu'}\left[Z_1 Z_2 F(\rho^+_{\tau'}, A_{\tau'}) G(\rho^-_{\tau'})\right] = \mathbb{E}_{\mu'}\left[Z_1 Z_2 \frac{\Gamma_F(A_{\tau'})}{\Gamma_1} G(\rho^-_{\tau'})\right], \tag{2.32}$$

où pour f positive et définie sur $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+) \times [0,\infty[$

$$\Gamma_f(b) = \int_{[0,1]\times[0,\infty[} q(du, d\ell_1) \int \mathbb{M}(d\rho', d\eta', dm') \ \mathrm{e}^{-\gamma\langle\rho',1\rangle - \gamma u \ell_1} f(\eta' + (1-u)\ell_1\delta_0, b).$$

Utilisons maintenant la forme particulière de F pour calculer Γ_F. On utilise (2.25) et le Lemme 2.2.2, pour obtenir

$$F_{b_0}(\mu, b) = \mathbb{E}^*_\mu\left[\mathrm{e}^{-\varphi^*(b_0+b,\omega,\cdot)}\right] = \mathbb{E}^*_{\mu(\{0\})}\left[\mathrm{e}^{-\varphi(b_0+b,\omega,\cdot)}\right] \mathrm{e}^{-\mu(]0,\infty[)\mathbb{N}\left[1-\mathrm{e}^{-\varphi(b_0+b,\omega,\cdot)}\right]}.$$

En utilisant w et v définis par (2.29), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_a\left[\mathrm{e}^{-\gamma\langle\mu,1\rangle - \gamma u\ell_1} F_{b_0}(\nu + (1-u)\ell_1\delta_0, b)\right] &= w((1-u)\ell_1, b_0+b)\,\mathrm{e}^{-\gamma u \ell_1}\,\mathbb{M}_a\left[\mathrm{e}^{-\gamma\langle\mu,1\rangle}\,\mathrm{e}^{-v(b_0+b)\langle\nu,1\rangle}\right] \\ &= w((1-u)\ell_1, b_0+b)\,\mathrm{e}^{-\gamma u\ell_1}\,\mathrm{e}^{-a\left(\frac{\psi(\gamma)-\psi(v(b_0+b))}{\gamma - v(b_0+b)} - \alpha\right)}.\end{aligned}$$

On déduit que

$$\Gamma_{F_{b_0}}(b) = \frac{\gamma - v(b_0+b)}{\psi(\gamma) - \psi(v(b_0+b))}\left(\alpha_1 + \int_0^1 du \int_{]0,\infty[} \ell_1 \pi_1(d\ell_1)\ w(u\ell_1, b_0+b)\,\mathrm{e}^{-\gamma(1-u)\ell_1}\right),$$

et avec $F = 1$, $\Gamma_1 = \dfrac{\gamma}{\psi(\gamma)}\dfrac{\phi_1(\gamma)}{\gamma} = \dfrac{\phi_1(\gamma)}{\psi(\gamma)}$.

Utilisons ceci et (2.32) dans (2.30), les résultats avant (2.30) et la Définition (2.28) pour obtenir

$$\mathbb{E}\left[Z\exp\left(-\sum_{k=1}^p \varphi^*(A_{S^\varepsilon_k}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon})\right)\right] = \mathbb{E}\left[Z\exp\left(-\sum_{k=1}^{p-1}\varphi^*(A_{S^\varepsilon_k}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon})\right) K_\varepsilon(A_{S^\varepsilon_p}, \omega)\right].$$

Par le théorème de classe monotone, cette égalité est encore vraie pour tout Z positive mesurable par rapport à la tribu $\bar{\mathcal{F}}_\infty = \sigma((\mathcal{S}_{C_t}, t \in [A_{T^\varepsilon_k}, A_{S^\varepsilon_{k+1}}]), k \geq 0)$. Remarquons que $K_\varepsilon(A_{S^\varepsilon_p}) = K_\varepsilon(A_{S^\varepsilon_p}, \omega)$ est mesurable par rapport à $\bar{\mathcal{F}}_\infty$. Donc, on peut recommencer le raisonnement précédent et faire tendre p vers l'infini pour finalement obtenir que pour toute variable aléatoire positive $Z \in \bar{\mathcal{F}}_\infty$, on a

$$\mathbb{E}\left[Z\exp\left(-\sum_{k=1}^\infty \varphi^*(A_{S^\varepsilon_k}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon})\right)\right] = \mathbb{E}\left[Z\prod_{k=1}^\infty K_\varepsilon(A_{S^\varepsilon_k}, \omega)\right].$$

Puisque $\bar{\mathcal{F}}_\infty$ contient $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$, le lemme est démontré. □

Calcul de la limite

On commence par étudier le processus $t \mapsto N_{\varepsilon,t}$. Rappelons la notation de la Section 2.3.1. Soit A^ε_s la mesure de Lebesgue de $[0,s] \bigcap \left(\bigcup_{k\geq 0}[T^\varepsilon_k, S^\varepsilon_{k+1}]\right)$. Le processus $t \mapsto \sup\{i \in \mathbb{N}; \sum_{j=1}^i e^\varepsilon_j \leq A^\varepsilon_t\}$ est un processus de Poisson d'intensité $1/\varepsilon$ et le processus $t \mapsto N_{\varepsilon,t}$, où

$$N_{\varepsilon,t} = \sup\{k \in \mathbb{N}; A^\varepsilon_{S^\varepsilon_k} \leq t\} = \sup\{k \in \mathbb{N}; \sum_{j=1}^{M^\varepsilon_k} e^\varepsilon_j \leq A^\varepsilon_t\},$$

est un processus de Poisson marqué d'intensité $\mathbb{P}(m_\tau \neq 0)/\varepsilon$, où τ est une variable aléatoire exponentielle de moyenne ε indépendante de $\mathcal{S}$.

Lemme 2.3.7. *Le processus $t \mapsto N_{\varepsilon,t}$ est un processus de Poisson d'intensité $\dfrac{\phi_1(\gamma)}{\varepsilon\psi_0(\gamma)}$, où $\gamma = \psi^{-1}(1/\varepsilon)$.*

Démonstration. Par des calculs similaires à la démonstration du Lemme 2.3.6, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(m_\tau = 0) &= \frac{1}{\varepsilon}\,\mathbb{E}\left[\int_0^\infty dt\ \mathrm{e}^{-t/\varepsilon}\,\mathbf{1}_{\{m_t=0\}}\right] \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty ds\ \mathrm{e}^{-\gamma s}\,\mathbb{N}\left[\int_0^\sigma dt\ \mathrm{e}^{-t/\varepsilon}\,\mathbf{1}_{\{m_t=0\}}\right] \\
&= \frac{1}{\varepsilon\gamma}\,\mathbb{N}\left[\int_0^\sigma dt\ \mathrm{e}^{-t/\varepsilon}\,\mathbf{1}_{\{m_t=0\}}\right].
\end{aligned}$$

En utilisant le retournement du temps, l'espérance conditionnelle et (2.3), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}\left[\int_0^\sigma dt\ \mathrm{e}^{-t/\varepsilon}\,\mathbf{1}_{\{m_t=0\}}\right] &= \mathbb{N}\left[\int_0^\sigma dt\ \mathrm{e}^{-(\sigma-t)/\varepsilon}\,\mathbf{1}_{\{m_t=0\}}\right] \\
&= \mathbb{N}\left[\int_0^\sigma dt\ \mathrm{e}^{-\gamma\langle\rho_t,1\rangle}\,\mathbf{1}_{\{m_t=0\}}\right].
\end{aligned}$$

La démonstration du Lemme 2.2.6, voir (2.15) et (2.17), donne que $\mathbb{P}(m_\tau = 0) = \dfrac{1}{\varepsilon\psi_0(\gamma)}$. Puisque $\varepsilon^{-1} = \psi(\gamma) = \psi_0(\gamma) - \phi_1(\gamma)$, on obtient $\dfrac{1}{\varepsilon}\,\mathbb{P}(m_\tau \neq 0) = \dfrac{\phi_1(\gamma)}{\varepsilon\psi_0(\gamma)}$. □

On obtient alors le corollaire suivant

Corollaire 2.3.8. *Il existe une sous-suite $(\varepsilon_j, j \in \mathbb{N})$ décroissante vers 0, telle que P-p.s. pour tout $t_0 \geq 0$ et toute fonction mesurable bornée h définie sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ telle que $u \mapsto h(u,\omega)$ soit p.s. continue et $h(u,\omega) = 0$ pour $u \geq t_0$, on a, avec $\gamma_j = \psi^{-1}(1/\varepsilon_j)$,*

$$\lim_{j\to\infty} \phi_1(\gamma_j)^{-1} \sum_{k=1}^\infty h(A_{S^{\varepsilon_j}_k}, \omega) = \int_0^\infty h(u,\omega)\ du.$$

Démonstration. Comme conséquence directe de (2.2) et de (2.7), on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\psi_0(\gamma) = 1.$$

Rappelons que $(A^{\varepsilon}_{S^{\varepsilon}_k}, k \geq 1)$ sont les temps de sauts du processus de Poisson $t \mapsto N_{\varepsilon,t}$ de paramètre $\phi_1(\gamma)/\varepsilon\psi_0(\gamma)$. Des résultats classiques sur les processus de Poisson impliquent la convergence vague en loi (voir Lemme XI.11.1 dans [33]) de $\phi_1(\gamma)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{A^{\varepsilon}_{S^{\varepsilon}_k}}(dr)$ vers la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ quand ε décroît vers 0. Puisque la limite est déterministe, la convergence est vraie en probabilité et p.s. en utilisant une sous-suite décroissante $(\varepsilon_j, j \in \mathbb{N})$. En particulier, puisque h est continue et $h(u,\omega) = 0$ pour $u \geq t_0$, on a que p.s.

$$\lim_{j\to\infty} \phi_1(\gamma_j)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} h(A^{\varepsilon_j}_{S^{\varepsilon_j}_k}, \omega) = \int_0^{\infty} h(u,\omega)\, du.$$

Remarquons que p.s. pour tout $u \geq 0$, $\lim_{\varepsilon'\to 0} A^{\varepsilon'}_u = A_u$, et la convergence est uniforme sur tout intervalle borné puisque $A^{\varepsilon'}$ et A sont croissantes. Par la continuité de h et puisque $h(u,\omega) = 0$ pour $u \geq t_0$, on déduit que p.s.

$$\lim_{j\to\infty} \phi_1(\gamma_j)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} |h(A^{\varepsilon_j}_{S^{\varepsilon_j}_k}, \omega) - h(A_{S^{\varepsilon_j}_k}, \omega)| = 0.$$

Ce qui finit la démonstration du corollaire. □

On étudie maintenant K_ε donné par (2.28). On garde les mêmes notations que dans le Lemme 2.3.6.

Lemme 2.3.9. *Il existe une fonction déterministe R telle que $\lim_{\varepsilon\to 0} R(\varepsilon) = 0$ et $\mathbb{P}$-p.s. pour tout $\varepsilon > 0$, on a :*

$$\sup_{r\geq 0}\left|\phi_1(\gamma)\log(K_\varepsilon(r,\omega)) - \alpha_1 v(r) - \int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell_1)\ (1 - w(\ell_1, r))\right| \leq R(\varepsilon).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
K_\varepsilon(r,\omega) &= \frac{\psi(\gamma)}{\psi(\gamma)-\psi(v(r))}\frac{\gamma - v(r)}{\gamma}\frac{1}{\phi_1(\gamma)}\left(\alpha_1\gamma + \gamma\int_0^1 du\int_{]0,\infty[}\ell_1\pi_1(d\ell_1)\ w(u\ell_1, r)\,\mathrm{e}^{-\gamma(1-u)\ell_1}\right)\\
&= \frac{\psi(\gamma)}{\psi(\gamma)-\psi(v(r))}\frac{\gamma - v(r)}{\gamma}\frac{1}{\phi_1(\gamma)}\left(\alpha_1\gamma + \int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell_1)\ \int_0^{\gamma\ell_1}\mathrm{e}^{-s}\,ds\ w(\ell_1 - \frac{s}{\gamma}, r)\right)\\
&= \frac{\psi(\gamma)}{\psi(\gamma)-\psi(v(r))}\frac{\gamma - v(r)}{\gamma}\frac{1}{\phi_1(\gamma)}\\
&\qquad\left(\phi_1(\gamma) - \int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell_1)\ \int_0^{\gamma\ell_1}\mathrm{e}^{-s}\,ds\ \left(1 - w(\ell_1 - \frac{s}{\gamma}, r)\right)\right).
\end{aligned}$$

En particulier, on a $\phi_1(\gamma)\log(K_\varepsilon(r)) = -A_1 + A_2 + A_3$, où

$$\begin{aligned}
A_1(r) &= \phi_1(\gamma)\log\Big(1-\psi(v(r))/\psi(\gamma)\Big),\\
A_2(r) &= \phi_1(\gamma)\log(1-v(r)/\gamma),\\
A_3(r) &= \phi_1(\gamma)\log\left(1-\int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell_1)\ \int_0^{\gamma\ell_1}\mathrm{e}^{-s}\,ds\ \left(1-w(\ell_1-\frac{s}{\gamma},r)\right)/\phi_1(\gamma)\right).
\end{aligned}$$

D'après (h_3), il existe une constante finie $a>0$ telle que $\mathbb{P}$-p.s. $v(r)<a$ pour tout $r\geq 0$. On déduit qu'il existe $\varepsilon_0>0$ et une constante finie $c>0$ telle que $\mathbb{P}$-p.s. pour tout $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]$,

$$\sup_{r\geq 0}|A_1(r)|\leq c\frac{\phi_1(\gamma)}{\psi(\gamma)}\quad\text{et}\quad\sup_{r\geq 0}|A_2(r)-\alpha_1 v(r)|\leq\frac{c}{\gamma}+c|\frac{\phi_1(\gamma)}{\gamma}-\alpha_1|. \tag{2.33}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell_1)\ \int_0^{\gamma\ell_1}\mathrm{e}^{-s}\,ds\ \left(1-w(\ell_1-\frac{s}{\gamma},r)\right)&-\int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell_1)\ (1-w(\ell_1,r))\\
&=\int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell_1)\ \mathrm{e}^{-\gamma\ell_1}(w(\ell_1,r)-1)\\
&\quad+\int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell_1)\ \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-s}\,ds\ \left(w(\ell_1,r)-w(\ell_1-\frac{s}{\gamma},r)\right)\mathbf{1}_{\{s\leq\gamma\ell_1\}}.
\end{aligned}$$

Il est alors facile d'obtenir, en utilisant (h_3) et (2.21), que $\mathbb{P}$-p.s.

$$\phi_2(\gamma)=\sup_{r\geq 0}\left|\int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell_1)\ \int_0^{\gamma\ell_1}\mathrm{e}^{-s}\,ds\ \left(1-w(\ell_1-\frac{s}{\gamma},r)\right)-\int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell_1)\ (1-w(\ell_1,r))\right|$$

converge vers 0 quand γ tend vers l'infini.

Rappelons que l'on suppose que $\lim_{\gamma\to\infty}\phi_1(\gamma)=+\infty$. Ainsi, il existe $\varepsilon_0>0$ et une constante finie $c>0$ telle que $\mathbb{P}$-p.s. pour tout $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]$,

$$\sup_{r\geq 0}\left|A_3(r)-\int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell_1)\ (1-w(\ell_1,r))\right|\leq\frac{c}{\phi_1(\gamma)}+\phi_2(\gamma). \tag{2.34}$$

En utilisant (2.33) et (2.34), on obtient l'existence d'une fonction déterministe R telle que $\mathbb{P}$-p.s.

$$\sup_{r\geq 0}\left|\phi_1(\gamma)\log(K_\varepsilon(r))-\alpha_1 v(r)-\int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell_1)\ (1-w(\ell_1,r))\right|\leq R(\varepsilon),$$

où $\lim_{\varepsilon\to 0}R(\varepsilon)=0$, d'après (2.2) et (2.7).

□

Le résultat précédent nous permet donc de calculer la limite suivante. On garde les mêmes notations que dans le Lemme 2.3.6.

Lemme 2.3.10. *Soit φ vérifiant le hypothèses (h_1)–(h_3). Il existe une sous-suite $(\varepsilon_j, j \in \mathbb{N})$ décroissante vers 0, telle que $\mathbb{P}$-p.s.*

$$\lim_{j\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} K_{\varepsilon_j}(A_{S_k^{\varepsilon_j}}) = \exp - \int_0^\infty du \ \left(\alpha_1 v(u) + \int_{]0,\infty[} \pi_1(d\ell) \ (1 - w(\ell, u)) \right).$$

Démonstration. Remarquons que d'après (h_1), les fonctions v et $w(\ell, \cdot)$ sont continues et que pour tout $r \geq t$, $v(r) = 0$ et $w(\ell, r) = 1$. Le résultat est alors une conséquence directe du Corollaire 2.3.8 et du Lemme 2.3.9. □

Démonstration du Théorème 2.3.2

On peut désormais démontrer la propriété de Markov spéciale dans le cas où $\lim_{\gamma\to\infty} \phi_1(\gamma) = +\infty$.

Soit $Z \in \tilde{\mathcal{F}}_\infty$ positive telle que $\mathbb{E}[Z] < \infty$. Soit φ vérifiant les hypothèses du Théorème 2.3.2, (h_1)–(h_3). En utilisant les notations des sections précédentes, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z \exp\left(-\sum_{i\in I} \varphi(A_{\alpha_i}, \omega, \mathcal{S}^i) \right) \right] &= \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}\left[Z \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^* \left(A_{S_k^{\varepsilon_j}}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon_j} \right) \right) \right] \\
&= \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}\left[Z \prod_{k=1}^{\infty} K_{\varepsilon_j}(A_{S_k^{\varepsilon_j}}) \right] \\
&= \mathbb{E}\left[Z \, \mathrm{e}^{-\int_0^\infty du \left(\alpha_1 v(u) + \int_{]0,\infty[} \pi_1(d\ell) \ (1 - w(\ell,u)) \right)} \right],
\end{aligned}$$

où on utilise le Lemme 2.3.4 et la convergence dominée pour la première égalité, le Lemme 2.3.6 pour la seconde égalité, et le Lemme 2.3.10 ainsi que la convergence dominée pour la dernière égalité. Par le théorème de la classe monotone et par monotonie, on peut enlever les hypothèses (h_1)– (h_3). Pour finir la démonstration de la première partie, remarquons que $\int_0^t du \ \left(\alpha_1 v(u) + \int_{]0,\infty[} \pi_1(d\ell) \ (1 - w(\ell, u)) \right)$ est $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$-mesurable et est donc égal à l'espérance conditionnelle (c.à.d. le côté gauche de (2.20)).

La seconde partie du Théorème 2.3.2 est juste une conséquence du lemme suivant.

Lemme 2.3.11. *Soit φ une fonction mesurable positive et bornée définie sur l'espace produit $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{S}$. $\mathbb{N}$-p.p., on a*

$$\sum_{i\in I} \varphi(A_{\alpha_i}, \rho_{\alpha_i -}, \mathcal{S}^i) = \sum_{i\in I} \tilde{\varphi}(A_{\alpha_i}, \omega, \mathcal{S}^i),$$

où $\tilde{\varphi}(t, \omega, \mathcal{S}) = \varphi(t, \tilde{\rho}_t(\omega), \mathcal{S})$.

Démonstration. On suppose d'abord que φ satisfait (h_3). Les mêmes arguments que ceux utilisés dans la démonstration du Lemme 2.3.4 impliquent que $\mathbb{P}$-p.p. pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a

$$\sum_{i\in I} \varphi(A_{\alpha_i}, \rho_{\alpha_i -}, \mathcal{S}^i) = \sum_{k\geq 1} \varphi(A_{S_k^\varepsilon}, \rho^-_{S_k^\varepsilon}, \mathcal{S}^{k,\varepsilon}).$$

Remarquons que par construction, $\rho^-_{S^\varepsilon_k} = \rho_{T^\varepsilon_k}$ et que $m_{T^\varepsilon_k} = 0$. En utilisant la propriété de Markov fort au temps T^ε_k et la seconde partie du Corollaire 2.2.7, on déduit que $\mathbb{P}$-p.p. pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$C_{A_{T^\varepsilon_k}} = T^\varepsilon_k. \tag{2.35}$$

De plus, puisque $A_{S^\varepsilon_k} = A_{T^\varepsilon_k}$, on a $\mathbb{N}$-p.p.

$$\tilde{\rho}_{A_{S^\varepsilon_k}} = \tilde{\rho}_{A_{T^\varepsilon_k}} = \rho_{T^\varepsilon_k} = \rho^-_{S^\varepsilon_k}.$$

Donc, on a que $\mathbb{N}$-p.p. pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit,

$$\sum_{i\in I} \varphi(A_{\alpha_i}, \rho_{\alpha_i -}, \mathcal{S}^i) = \sum_{k\geq 1} \tilde{\varphi}(A_{S^\varepsilon_k}, \omega, \mathcal{S}^{k,\varepsilon}),$$

avec $\tilde{\varphi}(t, \omega, \mathcal{S}) = \varphi(t, \tilde{\rho}_t(\omega), \mathcal{S})$. Complétons maintenant la preuve en utilisant le Lemme 2.3.4. La condition (h_3) est enlevée en utilisant le théorème de la classe monotone. □

2.3.2 Loi du processus d'exploration élagué

Soit $\rho^{(0)}$ le processus d'exploration d'un Lévy d'exposant de Laplace ψ_0. Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.3.12. *Pour toute mesure finie μ, la loi du processus élagué $\tilde{\rho}$ sous $\mathbb{P}_{\mu,0}$ est la loi du processus d'exploration $\rho^{(0)}$ associé à un processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ_0 sous $\mathbb{P}_\mu$.*

Un problème de martingale pour $\tilde{\rho}$

Soit $\tilde{\sigma} = \inf\{t > 0, \tilde{\rho}_t = 0\}$. Dans cette section, on calculera la loi du processus de la masse totale $(\langle \tilde{\rho}_{t\wedge\tilde{\sigma}}, 1\rangle,\ t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}_\mu = \mathbb{P}_{\mu,0}$, en utilisant une caractérisation par un problème de martingale. On montrera d'abord comment un problème de martingale pour ρ peut être changé en un problème de martingale pour $\tilde{\rho}$, voir [1]. Malheureusement, on ne peut pas utiliser les techniques classiques d'un changement de temps aléatoire, comme faites dans le Chapitre 6 de [46] et utilisées pour les serpents de Lévy dans [7], principalement parce que $t^{-1}\left(\mathbb{E}_\mu[f(\rho_t)\mathbf{1}_{\{m_t=0\}}] - f(\mu)\right)$ peut ne pas avoir de limite quand t décroît vers 0, même pour les fonctionnelles exponentielles.

Soient $F, K \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+))$ bornées. On suppose que $\mathbb{N}\left[\int_0^\sigma |K(\rho_s)|\ ds\right] < \infty$, que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{E}^*_\mu\left[\int_0^\sigma |K(\rho_s)|\ ds\right] < \infty$ et que $M_t = F(\rho_{t\wedge\sigma}) - \int_0^{t\wedge\sigma} K(\rho_s)\ ds$, pour $t \geq 0$, définit une $\mathcal{F}$-martingale. En particulier, remarquons que $\mathbb{E}^*_\mu\left[\sup_{t\geq 0} |M_t|\right] < \infty$. Ainsi, on peut définir pour $t \geq 0$,

$$N_t = \mathbb{E}^*_\mu[M_{C_t} | \tilde{\mathcal{F}}_t].$$

Proposition 2.3.13. *Le processus $N = (N_t, t \geq 0)$ est une $\tilde{\mathcal{F}}$-martingale. Et on a la formule de représentation pour N_t :*

$$N_t = F(\tilde{\rho}_{t\wedge\tilde{\sigma}}) - \int_0^{t\wedge\tilde{\sigma}} du\ \tilde{K}(\tilde{\rho}_u), \tag{2.36}$$

avec

$$\tilde{K}(\nu) = K(\nu) + \alpha_1 \mathbb{N}\left[\int_0^\sigma K([\nu,\rho_s])\, ds\right] + \int_{]0,\infty[} \pi_1(d\ell)\, \mathbb{E}_\ell^*\left[\int_0^\sigma K([\nu,\rho_s])\, ds\right]. \tag{2.37}$$

Démonstration. Remarquons que $N = (N_t, t \geq 0)$ est une $\tilde{\mathcal{F}}$-martingale. De plus, on a pour $t, s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu[N_{t+s}|\tilde{\mathcal{F}}_t] &= \mathbb{E}_\mu[\mathbb{E}_\mu[M_{C_{t+s}}|\tilde{\mathcal{F}}_{t+s}]|\tilde{\mathcal{F}}_t] \\
&= \mathbb{E}_\mu[M_{C_{t+s}}|\tilde{\mathcal{F}}_t] \\
&= \mathbb{E}_\mu[\mathbb{E}_\mu[M_{C_{t+s}}|\mathcal{F}_{C_t}]|\tilde{\mathcal{F}}_t] \\
&= \mathbb{E}_\mu[M_{C_t}|\tilde{\mathcal{F}}_t],
\end{aligned}$$

où on utilise le théorème de temps d'arrêt conditionnel pour la dernière égalité. Pour calculer $\mathbb{E}_\mu[M_{C_t}|\tilde{\mathcal{F}}_t]$, on écrit $M_{C_t} = N'_t - M'_{C_t}$, où pour $u \geq 0$,

$$M'_u = \int_0^{u\wedge\sigma} K(\rho_s)\mathbf{1}_{\{m_s\neq 0\}}\, ds.$$

Rappelons que $C_0 = 0$ $\mathbb{P}_\mu$-p.s. par le Corollaire 2.2.7. En particulier, on obtient

$$\begin{aligned}
N'_t = M_{C_t} + M'_{C_t} &= F(\rho_{C_t\wedge\sigma}) - \int_0^{C_t\wedge\sigma} K(\rho_s)\mathbf{1}_{\{m_s=0\}}\, ds \\
&= F(\tilde{\rho}_{t\wedge\tilde{\sigma}}) - \int_0^{C_t\wedge\sigma} K(\rho_s)\, dA_s \\
&= F(\tilde{\rho}_{t\wedge\tilde{\sigma}}) - \int_0^{t\wedge\tilde{\sigma}} K(\tilde{\rho}_u)\, du,
\end{aligned}$$

où on utilise le changement de temps $u = A_s$ pour la dernière égalité. En particulier, comme $\tilde{\sigma}$ est un $\tilde{\mathcal{F}}$-temps d'arrêt, on déduit que le processus $(N'_t, t \geq 0)$ est $\tilde{\mathcal{F}}$-adapté. Puisque $N_t = N'_t - \mathbb{E}_\mu[M'_{C_t}|\tilde{\mathcal{F}}_t]$, il nous reste à calculer de $\mathbb{E}_\mu[M'_{C_t}|\tilde{\mathcal{F}}_t]$.

On garde les notations de la Section 2.3.1. On considère (ρ^i, m^i), $i \in I$ les excursions du processus (ρ, m) en dehors de $\{s, m_s = 0\}$ avant σ et soient $]\alpha_i, \beta_i[$, $i \in I$ les intervalles d'excursion correspondants. En particulier on peut écrire

$$\int_0^{C_t\wedge\sigma} |K(\rho_s)|\, \mathbf{1}_{\{m_s\neq 0\}}\, ds = \sum_{i\in I} \Phi(A_{\alpha_i}, \rho_{\alpha_i-}, \rho^i),$$

avec

$$\Phi(u, \mu, \rho) = \mathbf{1}_{\{u<t\}} \int_0^{\sigma(\rho)} |K([\mu, \rho_s])|\ ds,$$

où $\sigma(\rho) = \inf\{v > 0; \rho_v = 0\}$. On déduit de la seconde partie du Théorème 2.3.2, que $\mathbb{P}_\mu$-p.s.

$$\mathbb{E}_\mu\left[\int_0^{C_t\wedge\sigma} |K(\rho_s)|\, \mathbf{1}_{\{m_s\neq 0\}}\, ds|\tilde{\mathcal{F}}_\infty\right] = \int_0^{\tilde{\sigma}} \mathbf{1}_{\{u<t\}}\hat{K}(\tilde{\rho}_u)\, du, \tag{2.38}$$

avec $\hat{K}$ défini pour $\nu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ par

$$\hat{K}(\nu) = \alpha_1 \mathbb{N}\left[\int_0^\sigma |K([\nu,\rho_s])|\ ds\right] + \int_{]0,\infty[} \pi_1(d\ell)\ \mathbb{E}^*_\ell\left[\int_0^\sigma |K([\nu,\rho_s])|\ ds\right].$$

Puisque $\mathbb{E}_\mu\left[\int_0^{C_t\wedge\sigma} |K(\rho_s)|\,\mathbf{1}_{\{m_s\neq 0\}}\ ds\right] \leq \mathbb{E}_\mu\left[\int_0^\sigma |K(\rho_s)|\ ds\right] < \infty$, on déduit de (2.38) que $\mathbb{P}_\mu$-p.s. du-p.p. $\mathbf{1}_{\{u<\tilde{\sigma}\}}\hat{K}(\tilde{\rho}_u)$ est fini.

Définissons $\bar{K} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+))$ pour $\nu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ par

$$\bar{K}(\nu) = \alpha_1 \mathbb{N}\left[\int_0^\sigma K([\nu,\rho_s])\ ds\right] + \int_{]0,\infty[} \pi_1(d\ell)\ \mathbb{E}^*_\ell\left[\int_0^\sigma K([\nu,\rho_s])\ ds\right] \tag{2.39}$$

Si $\hat{K}(\nu) < \infty$, ou par $\bar{K}(\nu) = 0$ si $\hat{K}(\nu) = +\infty$. En particulier, on a $|\bar{K}(\nu)| \leq \hat{K}(\nu)$ et $\mathbb{P}_\mu$-p.s. $\int_0^{\tilde{\sigma}} |\bar{K}(\tilde{\rho}_u)|\ du$ est fini. En utilisant la propriété de Markov spéciale encore une fois (voir (2.38)), on obtient que $\mathbb{P}_\mu$-p.s.,

$$\mathbb{E}_\mu\left[M'_{C_t}|\tilde{\mathcal{F}}_\infty\right] = \mathbb{E}_\mu\left[\int_0^{C_t\wedge\sigma} K(\rho_s)\mathbf{1}_{\{m_s\neq 0\}}\ ds|\tilde{\mathcal{F}}_\infty\right] = \int_0^{t\wedge\tilde{\sigma}} \bar{K}(\tilde{\rho}_u)\ du.$$

Finalement, comme $N_t = N'_t - \mathbb{E}_\mu\left[M'_{C_t}|\tilde{\mathcal{F}}_\infty\right]$, ceci donne (2.36). □

Corollaire 2.3.14. *Soit $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$. La loi du processus de la masse totale $(\langle\tilde{\rho}_t, 1\rangle,\ t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}^*_{\mu,0}$ est la loi du processus de la masse totale de $\rho^{(0)}$ sous $\mathbb{P}^*_\mu$.*

Démonstration. Soit $X = (X_t, t \geq 0)$, sous P^*_x, un processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ partant de $x > 0$ et arrêté quand il atteint 0. Sous $\mathbb{P}_\mu$, le processus de la masse totale $(\langle\rho_{t\wedge\sigma}, 1\rangle, t \geq 0)$ a la même loi que X sous $\mathrm{P}^*_{\langle\mu,1\rangle}$. Soit $c > 0$. D'après la théorie des processus de Lévy, on sait que le processus $\mathrm{e}^{-cX_t} - \psi(c)\int_0^t \mathrm{e}^{-cX_s}\ ds$, pour $t \geq 0$ est une martingale. On déduit du théorème des temps d'arrêt que $M = (M_t, t \geq 0)$ est une $\mathcal{F}$-martingale sous $\mathbb{P}_\mu$, où $M_t = F(\rho_{t\wedge\sigma}) - \int_0^{t\wedge\sigma} K(\rho_s)\ ds$, avec $F, K \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+))$ définies par $F(\nu) = \mathrm{e}^{-c\langle\nu,1\rangle}$ pour $\nu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ et $K = \psi(c)F$. Remarquons que $K \geq 0$. On a par convergence dominée et convergence monotone

$$\mathrm{e}^{-c\langle\mu,1\rangle} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_\mu[M_t] = \mathbb{E}_\mu[\mathrm{e}^{-c\langle\rho_\sigma,1\rangle}] - \psi(c)\mathbb{E}_\mu\left[\int_0^\sigma \mathrm{e}^{-c\langle\rho_s,1\rangle}\ ds\right].$$

Ceci implique que, pour tout $\mu \in \mathcal{M}_f(R_+)$, $\mathbb{E}_\mu\left[\int_0^\sigma |K(\rho_s)|\ ds\right]$ est fini. En utilisant la représentation poissonnienne, voir la Proposition 2.2.5, il est facile d'obtenir que

$$\mathbb{N}\left[\int_0^\sigma dt\ \mathrm{e}^{-c\langle\rho_t,1\rangle}\right] = \frac{c}{\psi(c)}. \tag{2.40}$$

En particulier, ce terme est également fini.

D'après la Proposition 2.3.13, on obtient que $N = (N_t, t \geq 0)$ est sous $\mathbb{P}_\mu$ une $\tilde{\mathcal{F}}$-martingale, où : pour $t \geq 0$,

$$N_t = \mathrm{e}^{-c\langle\tilde{\rho}_{t\wedge\tilde{\sigma}},1\rangle} - \int_0^{t\wedge\tilde{\sigma}} \tilde{K}(\tilde{\rho}_u)\ du$$

et $\tilde{K}$ donné par (2.37). On peut calculer $\tilde{K}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(\nu) &= \psi(c)\,\mathrm{e}^{-c\langle\nu,1\rangle}\left(1+\alpha_1\mathbb{N}\left[\int_0^\sigma \mathrm{e}^{-c\langle\rho_s,1\rangle}\ ds\right]+\int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell)\,\mathbb{E}^*_\ell\left[\int_0^\sigma \mathrm{e}^{-c\langle\rho_s,1\rangle}\ ds\right]\right)\\
&= \psi(c)\,\mathrm{e}^{-c\langle\nu,1\rangle}\left(1+\alpha_1\frac{c}{\psi(c)}+\int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell)\int_0^\ell dr\ \mathrm{e}^{-cr}\,\mathbb{N}\left[\int_0^\sigma \mathrm{e}^{-c\langle\rho_s,1\rangle}\ ds\right]\right)\\
&= \mathrm{e}^{-c\langle\nu,1\rangle}\left(\psi(c)+\alpha_1 c+\int_{]0,\infty[}\pi_1(d\ell)(1-\mathrm{e}^{-c\ell})\right)\\
&= \psi_0(c)\,\mathrm{e}^{-c\langle\nu,1\rangle},
\end{aligned}$$

où on utilise (2.40) et la décomposition en excursions pour la seconde égalité, et $\psi_0=\psi+\phi_1$ pour la dernière.

Ainsi, le processus $(N_t, t\geq 0)$ avec pour $t\geq 0$

$$N_t = \mathrm{e}^{-c\langle\tilde{\rho}_{t\wedge\tilde{\sigma}},1\rangle} - \psi_0(c)\int_0^{t\wedge\tilde{\sigma}} \mathrm{e}^{-c\langle\tilde{\rho}_u,1\rangle}\ du$$

est sous $\mathbb{P}_\mu$ une $\tilde{\mathcal{F}}$-martingale.

Remarquons que $\tilde{\sigma}=\inf\{s\geq 0;\langle\tilde{\rho}_s,1\rangle=0\}$. Soit $X^{(0)}=(X^{(0)}_t, t\geq 0)$, sous P^*_x, un processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ_0 partant de $x>0$ et arrêté quand il atteint 0. Les deux processus càd-làg positifs $(\langle\tilde{\rho}_{t\wedge\tilde{\sigma}},1\rangle, t\geq 0)$ et $X^{(0)}$ sont solutions du problème de martingale : pour tout $c\geq 0$, le procesus défini pour $t\geq 0$ par

$$\mathrm{e}^{-cY_{t\wedge\sigma'}} - \psi_0(c)\int_0^{t\wedge\sigma'} \mathrm{e}^{-cY_s}\ ds,$$

où $\sigma'=\inf\{s\geq 0; Y_s\leq 0\}$, est une martingale. D'après le Corollaire 4.4.4 dans [46], on déduit que ces deux processus ont la même loi. Pour finir la démonstration, remarquons que le processus de la masse totale de $\rho^{(0)}$ sous $\mathbb{P}^*_\mu$ a même loi que $X^{(0)}$ sous $\mathrm{P}^*_{\langle\mu,1\rangle}$. □

Identification de la loi de $\tilde{\rho}$

Commençons par donner quelques propriétés utiles du processus $\tilde{\rho}$.

Lemme 2.3.15. *On a les propriétés suivantes pour le processus $\tilde{\rho}$.*

(i) $\tilde{\rho}$ est un processus de Markov càd-làg.

(ii) Le temps passé en 0 par $\tilde{\rho}$ est 0.

(iii) 0 est récurrent pour $\tilde{\rho}$.

Démonstration. (i) C'est une conséquence directe de la propriété de Markov fort du processus (ρ, m).

(ii) On a pour $r>0$, avec le changement de variable $t=A_s$, p.s.

$$\int_0^r \mathbf{1}_{\{\tilde{\rho}_t=0\}}\ dt = \int_0^r \mathbf{1}_{\{\rho_{C_t}=0\}}\ dt = \int_0^{C_r} \mathbf{1}_{\{\rho_s=0\}}\ dA_s = \int_0^{C_r} \mathbf{1}_{\{\rho_s=0\}}\ ds = 0,$$

puisque le temps passé en 0 par ρ est 0 p.s.

(iii) Puisque $\tilde{\sigma}=A_\sigma$ et $\sigma<+\infty$ p.s., on déduit que 0 est récurrent pour $\tilde{\rho}$ p.s. □

Comme les processus $\tilde{\rho}$ et $\rho^{(0)}$ sont tous les deux markoviens, pour montrer qu'ils ont même loi, il suffit de montrer qu'ils ont les mêmes lois finies-dimentionnelles. Commençons par démontrer ce résultat sous la mesure d'excursion.

Proposition 2.3.16. *Pour tout $\lambda > 0$ et toute fonction bornée mesurable positive f*

$$\mathbb{N}\left[\int_0^{\tilde{\sigma}} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \tilde{\rho}_t, f\rangle}\, dt\right] = \mathbb{N}\left[\int_0^{\sigma^{(0)}} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \rho_t^{(0)}, f\rangle}\, dt\right].$$

Démonstration. D'une part, on calcule, en utilisant la définition du processus élagué $\tilde{\rho}$,

$$\mathbb{N}\left[\int_0^{\tilde{\sigma}} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \tilde{\rho}_t, f\rangle}\, dt\right] = \mathbb{N}\left[\int_0^{A_\sigma} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \rho_{C_t}, f\rangle}\, dt\right].$$

Faisons maintenant le changement de variable $t = A_u$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathbb{N}\left[\int_0^{\tilde{\sigma}} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \tilde{\rho}_t, f\rangle}\, dt\right] &= \mathbb{N}\left[\int_0^{\sigma} \mathrm{e}^{-\lambda A_u}\, \mathrm{e}^{-\langle \rho_u, f\rangle}\, dA_u\right] \\ &= \mathbb{N}\left[\int_0^{\sigma} \mathrm{e}^{-\lambda A_u}\, \mathrm{e}^{-\langle \rho_u, f\rangle}\, \mathbf{1}_{\{m_u=0\}} du\right].\end{aligned}$$

Par un argument de retournement du temps, voir Lemme 2.2.3, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{N}\left[\int_0^{\tilde{\sigma}} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \tilde{\rho}_t, f\rangle}\, dt\right] &= \mathbb{N}\left[\int_0^{\sigma} \mathbf{1}_{\{m_u=0\}}\, \mathrm{e}^{-\langle \eta_u, f\rangle}\, \mathrm{e}^{-\lambda(A_\sigma - A_u)}\, du\right] \\ &= \mathbb{N}\left[\int_0^{\sigma} \mathbf{1}_{\{m_u=0\}}\, \mathrm{e}^{-\langle \eta_u, f\rangle}\, \mathbb{E}^*_{\rho_u,0}\left[\mathrm{e}^{-\lambda A_\sigma}\right] du\right] \\ &= \mathbb{N}\left[\int_0^{\sigma} \mathbf{1}_{\{m_u=0\}}\, \mathrm{e}^{-\langle \eta_u, f\rangle - \psi_0^{-1}(\lambda)\langle \rho_u, 1\rangle}\, du\right],\end{aligned}$$

où on applique le Lemme 2.2.6 (i) pour la dernière égalité. Utilisons maintenant la Proposition 2.2.5, on a

$$\mathbb{N}\left[\int_0^{\tilde{\sigma}} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \tilde{\rho}_t, f\rangle}\, dt\right] = \int_0^\infty da\ \mathrm{e}^{-\alpha a}\, \mathbb{M}_a\left[\mathbf{1}_{\{m=0\}}\, \mathrm{e}^{-\langle \nu, f\rangle - \psi_0^{-1}(\lambda)\langle \mu, 1\rangle}\right].$$

On utilise des propriétés classiques des mesures ponctuelles de Poisson, on a, avec $c = \alpha_1 + \int_{]0,\infty[} \ell\, \pi_1(d\ell)$,

$$\mathbb{M}_a\left[\mathbf{1}_{\{m=0\}} F(\mu,\nu)\right] = \mathrm{e}^{-ca}\, \mathbb{M}_a\left[F(\mu^0,\nu^0)\right],$$

où, avec les notations de la Proposition 2.2.5, pour tout $f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned}\langle \mu^0, f\rangle &= \int \mathcal{N}_0(dx\, d\ell\, du)\, \mathbf{1}_{[0,a]}(x) u\ell f(x) + \beta \int_0^a f(r)\, dr, \\ \langle \nu^0, f\rangle &= \int \mathcal{N}_0(dx\, d\ell\, du)\, \mathbf{1}_{[0,a]}(x)(1-u)\ell f(x) + \beta \int_0^a f(r)\, dr.\end{aligned}$$

Puisque $\alpha_0 = \alpha + c$, on a

$$\mathbb{N}\left[\int_0^{\tilde{\sigma}} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \tilde{\rho}_t, f\rangle}\, dt\right] = \int_0^\infty da\ \mathrm{e}^{-\alpha_0 a}\, \mathbb{M}_a\left[\mathrm{e}^{-\langle \nu^0, f\rangle - \psi_0^{-1}(\lambda)\langle \mu^0, 1\rangle}\right].$$

La Proposition 2.2.5 implique directement que la partie droite de l'égalité précédente est égale à $\mathbb{N}\left[\int_0^{\sigma^{(0)}} \mathrm{e}^{-\langle \eta_t^{(0)}, f\rangle - \psi_0^{-1}(\lambda)\langle \rho_t^{(0)}, 1\rangle}\, dt\right]$.

D'autre part, des calculs similaires aux précédents montrent que cette quantité est égale à $\mathbb{N}\left[\int_0^{\sigma^{(0)}} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \rho_t^{(0)}, f\rangle}\, dt\right]$. Ceci finit la démonstration. □

Démontrons maintenant le même résultat sous $\mathbb{P}^*_{\mu,0}$, qui est :

Proposition 2.3.17. *Pour tous $\lambda > 0$, $f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+)$ bornée et toute mesure finie μ,*

$$\mathbb{E}^*_{\mu,0}\left[\int_0^{\tilde{\sigma}} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \tilde{\rho}_t, f\rangle}\, dt\right] = \mathbb{E}^*_{\mu}\left[\int_0^{\sigma^{(0)}} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \rho_t^{(0)}, f\rangle}\, dt\right].$$

Démonstration. Par la représentation poissonnienne, voir le Lemme 2.2.2, et en utilisant les notations de ce lemme et de (2.14) on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*_{\mu,0}\left[\int_0^{\tilde{\sigma}} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \tilde{\rho}_t, f\rangle}\, dt\right] &= \mathbb{E}^*_{\mu,0}\left[\int_0^{\sigma} \mathrm{e}^{-\lambda A_u - \langle \rho_u, f\rangle}\, dA_u\right] \\ &= \mathbb{E}^*_{\mu,0}\left[\sum_{i\in J} \mathrm{e}^{-\lambda A_{\alpha_i} - \langle k_{-I_{\alpha_i}}, f\rangle} \int_0^{\sigma_i} \mathrm{e}^{-\langle \rho_s^i, f_{-I_{\alpha_i}}\rangle - \lambda A_s^i}\, dA_s^i\right],\end{aligned}$$

où la fonction f_r est définie par $f_r(x) = f(H_r^{(\mu)} + x)$ et $H_r^{(\mu)} = H(k_r\mu)$ est l'élément maximal du support fermé de $k_r\mu$ (voir (2.1.3)). On rappelle que $-I$ est le temps local en 0 du processus réfléchi $X - I$, et que $\tau_r = \inf\{s; -I_s > r\}$ est l'inverse continu à droite de $-I$. D'après la formule des excursions, et en utilisant le changement de temps $-I_s = r$ (ou de même $\tau_r = s$), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*_{\mu,0}\left[\int_0^{\tilde{\sigma}} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \tilde{\rho}_t, f\rangle}\, dt\right] &= \mathbb{E}^*_{\mu,0}\left[\int_0^{\tau_{\langle \mu,1\rangle}} d(-I_s)\, \mathrm{e}^{-\langle k_{-I_s}\mu, f\rangle - \lambda A_s}\, G(-I_s)\right] \\ &= \mathbb{E}^*_{\mu,0}\left[\int_0^{\langle \mu,1\rangle} dr\, \mathrm{e}^{-\langle k_r\mu, f\rangle - \lambda A_{\tau_r}}\, G(r)\right],\end{aligned} \tag{2.41}$$

où la fonction $G(r)$ est donnée par

$$G(r) = \mathbb{N}\left[\int_0^{\sigma} \mathrm{e}^{-\langle \rho_s, f_r\rangle - \lambda A_s}\, dA_s\right] = \mathbb{N}\left[\int_0^{\tilde{\sigma}} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \tilde{\rho}_t, f_r\rangle}\, dt\right].$$

Le même type de calcul donne

$$\mathbb{E}^*_{\mu}\left[\int_0^{\sigma^{(0)}} \mathrm{e}^{-\lambda t - \langle \rho_t^{(0)}, f\rangle}\, dt\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\langle \mu,1\rangle} dr\, \mathrm{e}^{-\langle k_r\mu, f\rangle - \lambda \tau_r^{(0)}}\, G^{(0)}(r)\right] \tag{2.42}$$

où la fonction $G^{(0)}$ est définie par

$$G^{(0)}(r) = \mathbb{N}\left[\int_0^{\sigma^{(0)}} \mathrm{e}^{-\lambda s - \langle \rho_s^{(0)}, f_r\rangle}\, ds\right]$$

et $\tau^{(0)}$ est l'inverse continu à droite du processus infimum $-I^{(0)}$ du processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ_0.

La Proposition 2.3.16 annonce que les fonctions G et $G^{(0)}$ sont égales. De plus, puisque les processus de la masse totale ont la même loi (voir le Corollaire 2.3.14), on sait que la proposition est vraie pour f constante. Et, pour f constante, les fonctions G et $G^{(0)}$ sont également constantes. Donc, on a pour f constante égale à $c \geq 0$,

$$\mathbb{E}^*_{\mu,0}\left[\int_0^{\langle\mu,1\rangle} dr\, \mathrm{e}^{-c(\langle\mu,1\rangle-r)}\, \mathrm{e}^{-\lambda A_{\tau_r}}\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\langle\mu,1\rangle} dr\, \mathrm{e}^{-c(\langle\mu,1\rangle-r)}\, \mathrm{e}^{-\lambda \tau_r^{(0)}}\right].$$

Comme cette égalité est vraie pour toute constante $c \geq 0$, l'unicité de la transformée de Laplace donne l'égalité

$$\mathbb{E}^*_{\mu,0}\left[\mathrm{e}^{-\lambda A_{\tau_r}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda \tau_r^{(0)}}\right] \qquad dr - \text{p.p.}$$

En fait cette égalité est encore vraie pour tout r par continuité à droite.

Finalement puisque $G = G^{(0)}$, on a d'après (2.41) et (2.42), que, pour toute fonction mesurable bornée et positive f,

$$\int_0^{\langle\mu,1\rangle} dr\, \mathrm{e}^{-\langle k_r\mu,f\rangle}\, \mathbb{E}^*_{\mu,0}\left[\mathrm{e}^{-\lambda A_{\tau_r}}\right] G(r) = \int_0^{\langle\mu,1\rangle} dr\, \mathrm{e}^{-\langle k_r\mu,f\rangle}\, \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda \tau_r^{(0)}}\right] G^{(0)}(r)$$

ce qui finit la démonstration. □

Corollaire 2.3.18. *Le processus $\tilde{\rho}$ sous $\mathbb{P}^*_{\mu,0}$ a même loi que le processus $\rho^{(0)}$ sous $\mathbb{P}^*_{\mu}$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+)$ bornée. La Proposition 2.3.17 peut être ré-écrite par

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathbb{E}^*_{\mu,0}\left[\mathrm{e}^{-\langle\tilde{\rho}_t,f\rangle}\, \mathbf{1}_{\{t\leq\tilde{\sigma}\}}\right] dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathbb{E}^*_{\mu}\left[\mathrm{e}^{-\langle\rho_t^{(0)},f\rangle}\, \mathbf{1}_{\{t\leq\sigma^{(0)}\}}\right] dt.$$

Par l'unicité de la tranformée de Laplace, on déduit que, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{E}^*_{\mu,0}\left[\mathrm{e}^{-\langle\tilde{\rho}_t,f\rangle}\, \mathbf{1}_{\{t\leq\tilde{\sigma}\}}\right] = \mathbb{E}^*_{\mu}\left[\mathrm{e}^{-\langle\rho_t^{(0)},f\rangle}\, \mathbf{1}_{\{t\leq\sigma^{(0)}\}}\right].$$

En fait cette égalité est encore vraie pour tout t par continuité à droite. Puisque la fonctionnelle de Laplace caractérise la loi d'une mesure aléatoire, on déduit que, pour $t > 0$ fixé, la loi de $\tilde{\rho}_t$ sous $\mathbb{P}^*_{\mu,0}$ est la même que la loi de $\rho_t^{(0)}$ sous $\mathbb{P}^*_{\mu}$.

La propriété de Markov donne alors l'égalité en loi des processus càd-làg $\tilde{\rho}$ et $\rho^{(0)}$. □

Démonstration du Théorème 2.3.12. 0 est récurrent pour les processus de Markov càd-làg $\tilde{\rho}$ et $\rho^{(0)}$. Ces deux processus n'ont pas de temps passé en 0, et de temps passé quand ils sont tués au premier temps d'atteinte de 0, ils ont la même loi, d'après le Lemme 2.3.18. D'après le Théorème 4.2 de [28], Section 5, on déduit que $\tilde{\rho}$ sous $\mathbb{P}_{\mu,0}$ a même loi que $\rho^{(0)}$ sous $\mathbb{P}_{\mu}$. □

2.3.3 Loi de la longueur des excursions

Rappelons que $\tilde{\sigma} = \int_0^\sigma \mathbf{1}_{\{m_s=0\}}\, ds$ représente la longueur des excursions du processus d'exploration élagué. On peut calculer la loi jointe de $(\tilde{\sigma}, \sigma)$. Ceci donnera la loi de $\tilde{\sigma}$ conditionnellement à $\sigma = r$.

Proposition 2.3.19. *Pour tous γ, κ positifs, la valeur v définie par $v = \mathbb{N}\left[1 - \mathrm{e}^{-\psi(\gamma)\sigma - \kappa\tilde{\sigma}}\right]$ est l'unique solution positive de l'équation*

$$\psi_0(v) = \kappa + \psi_0(\gamma).$$

Démonstration. La théorie des excursions implique que la propriété de Markov spéciale, Théorème 2.3.2, est encore vraie sous $\mathbb{N}$, avec une intégration en u sur $[0, \tilde{\sigma} = A_\sigma]$ au lieu de $[0, \infty[$. Prenons $\phi(\mathcal{S}) = \psi(\gamma)\sigma$, on a

$$\begin{aligned} v = \mathbb{N}\left[1 - \mathrm{e}^{-\kappa\tilde{\sigma} - \psi(\gamma)\sigma}\right] &= \mathbb{N}\left[1 - \mathrm{e}^{-(\kappa+\psi(\gamma))\tilde{\sigma} - \psi(\gamma)\int_0^\sigma \mathbf{1}_{\{m_s \neq 0\}}\, ds}\right] \\ &= \mathbb{N}\left[1 - \mathrm{e}^{-(\kappa+\psi(\gamma))\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}\left(\alpha_1 \mathbb{N}[1-\mathrm{e}^{-\psi(\gamma)\sigma}] + \int_{]0,+\infty[} \pi_1(d\ell)(1-\mathbb{E}^*_\ell[\mathrm{e}^{(-\psi(\gamma)\sigma)}]\right)}\right]. \end{aligned}$$

Remarquons que σ sous $\mathbb{P}^*_\ell$ a même loi que τ_ℓ, le premier temps où l'infimum de X, partant de 0, atteint $-\ell$. Puisque τ_ℓ a même loi qu'un subordinateur d'exposant de Laplace ψ^{-1} au temps ℓ, on a

$$\mathbb{E}^*_\ell[\mathrm{e}^{-\psi(\gamma)\sigma}] = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\psi(\gamma)\tau_\ell}\right] = \mathrm{e}^{-\ell\gamma}.$$

D'après (2.3), on a $\mathbb{N}[1 - \mathrm{e}^{-\psi(\gamma)\sigma}] = \gamma$. On déduit que

$$\begin{aligned} v &= \mathbb{N}\left[1 - \mathrm{e}^{-(\kappa+\psi(\gamma))\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}\left(\alpha_1\gamma + \int_{]0,+\infty[} \pi_1(d\ell)(1-\mathrm{e}^{-\gamma\ell})\right)}\right] \\ &= \mathbb{N}\left[1 - \mathrm{e}^{-(\kappa+\psi_0(\gamma))\tilde{\sigma}}\right] \\ &= {\psi_0}^{-1}(\kappa + \psi_0(\gamma)). \end{aligned}$$

Puisque ψ_0 est croissante et continue, on obtient le résultat. □

2.4 Appendice

On présentera, dans cet appendice, comment on peut étendre la construction du serpent de Lévy de [44] au cas où le processus des hauteurs n'est pas continu.

Soit D une distance sur $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ qui définit la topologie de la convergence faible. Rappelons que $(\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+), D)$ est un espace polonais, voir [34], Section 3.1.

Soit E un espace polonais, où la topologie est définie par une métrique δ, et ∂ le point cimetière ajouté à E. Soit $\mathcal{W}_x$ l'espace de toutes les trajectoires à valeurs dans E, partant de $x \in E$, pondérées et tuées. Un élément $\bar{w} = (\mu, w)$ de $\mathcal{W}_x$ est une mesure de masse $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ et une application càd-làg $w : [0, \langle \mu, 1\rangle[\to E$ telle que $w(0) = x$. Par convention le point x est également considéré comme une trajectoire tuée et pondérée avec pour mesure de masse $\mu = 0$. On pose $\mathcal{W} = \bigcup_{x\in E} \mathcal{W}_x$ et on équipe $\mathcal{W}$ de la distance

$$d((\mu, w), (\mu', w')) = \delta(w(0), w'(0)) + D(\mu, \mu') + \int_0^{\langle \mu,1\rangle \wedge \langle \mu',1\rangle} dt \, \big(d_t(w_{\leq t}, w'_{\leq t}) \wedge 1\big) + \big|\langle \mu, 1\rangle - \langle \mu', 1\rangle\big|, \quad (2.43)$$

où d_t est la métrique de Skorohod sur l'espace $\mathbb{D}([0, t], E)$ et $w_{\leq t}$ est la restriction de w à l'intervalle $[0, t]$. Remarquons que le dernier terme peut être inclus dans la distance D, mais le troisième terme est nécessaire pour obtenir l'inégalité triangulaire pour cette distance. Il est alors élémentaire de vérifier que l'espace $(\mathcal{W}, d)$ est un espace polonais. Nous écrirons $\mu_{\bar{w}}$ à la place de μ quand $\bar{w} = (\mu, w)$.

Rappelons (2.1.3). On considère une famille de mesures de probabilité $\bar{\Pi}_{x,\mu}$, pour $x \in E$ et pour la mesure de masse $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ sur $\mathcal{W}_x$, telles que

a) $\mu_{\bar{w}} = \mu$, $\bar{\Pi}_{x,\mu}(d\bar{w})$-p.s. ;

b) $w(0) = x$, $\bar{\Pi}_{x,\mu}(d\bar{w})$-p.s. ;

c) w n'a pas de discontinuités fixes : pour tout $s \in [0, \langle \mu, 1\rangle[$, $\bar{\Pi}_{x,\mu}(w(s-) = w(s)) = 1$;

d) Si $H(\mu) < \infty$, alors $w(\langle \mu, 1\rangle-)$ existe $\bar{\Pi}_{x,\mu}(d\bar{w})$-p.s. ;

e) Si $H(\mu) < \infty$ et $\nu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$, alors sous $\bar{\Pi}_{x,[\mu,\nu]}$, $(w(r), r \in [0, \langle \mu, 1\rangle[$ a même loi que $(w(r), r \in [0, \langle \mu, 1\rangle[$ sous $\bar{\Pi}_{x,\mu}$ et, conditionnellement à $(w(r), r \in [0, \langle \mu, 1\rangle[$, $(w(r + \langle \mu, 1\rangle), r \in [0, \langle \nu, 1\rangle[$ a même loi que $(w(r), r \in [0, \langle \nu, 1\rangle[)$ sous $\bar{\Pi}_{w(\langle \mu,1\rangle-),\nu}$.

La dernière propriété correspond à la propriété de Markov conditionnellement à la mesure de masse. Nous supposerons que l'application $(x, \mu) \mapsto \bar{\Pi}_{x,\mu}$ est mesurable.

Soit ρ un processus d'exploration partant de μ. On pose $Y_t = \langle \rho_t, 1\rangle$. Rappelons que $(Y_t, t \geq 0)$ a même loi qu'un processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ partant de $\langle \mu, 1\rangle$. Pour $0 \leq s < t$, on pose $J_{s,t} = \inf_{s\leq u\leq t} Y_t$ et $\rho_{s,t} = k_{(Y_s - J_{s,t})}\rho_s = k_{(Y_t - J_{s,t})}\rho_t$, la dernière égalité est une conséquence de la construction du processus d'exploration. On définit également par $\bar{\rho}_t^{(s)}$ l'unique mesure ν telle que $[\rho_{s,t}, \nu] = \rho_t$.

Conditionnellement à ρ, on définit un semi-groupe de probabilités de transition $R^\rho_{s,t}$ sur $\mathcal{W}_x$ par : pour $0 \leq s < t$ tels que $J_{s,t} < Y_s$ ou $w(\langle \rho_s, 1\rangle-)$ existe et $\mu_{\bar{w}} = \rho_s$, sous $R^\rho_{s,t}(\bar{w}, d\bar{w}')$ on a

i) $\mu_{\bar{w}'} = \rho_t$,

ii) $(w'(r), r \in [0, \langle \rho_{s,t}, 1\rangle[) = (w(r), r \in [0, \langle \rho_{s,t}, 1\rangle[)$,

iii) $(w'(r), r \in [\langle \rho_{s,t}, 1\rangle, \langle \rho_t, 1\rangle[)$ a pour loi $\bar{\Pi}_{w(\langle \rho_{s,t},1\rangle-),\bar{\rho}_t^{(s)}}$.

Dans (iii), par convention, si $\rho_{s,t} = 0$, alors $w(\langle \rho_{s,t}, 1\rangle -) = x$. Remarquons que pour $s < t$ fixés, p.s. $J_{s,t} < Y_s$ ainsi, avec la convention précédente $w(\langle \rho_{s,t}, 1\rangle -)$ est p.s. bien définie. Remarquons que si (ρ_s, w) a pour loi $\bar{\Pi}_{x,\rho_s}$, alors (ρ_t, w') a pour loi $\bar{\Pi}_{x,\rho_t}$ d'après la condition e) sur $\bar{\Pi}$. On peut alors utiliser le théorème d'extension de Kolmogorov pour obtenir qu'il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}_{(\mu,w)}$ sur $(\mathcal{W}_x)^{\mathbb{R}_+}$ telle que pour $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{(\mu,w)}(W'_{s_0} \in A_0, \rho_{s_0} \in B_0, \ldots, W'_{s_n} \in A_n, \rho_{s_n} \in B_n) \\
&\qquad = \mathbb{E}_\mu \left[\mathbf{1}_{\{\rho_{s_0} \in B_0, \ldots, \rho_{s_n} \in B_n\}} \mathbf{1}_{\{w \in A_0\}} \int_{A_1 \times \cdots \times A_n} R^\rho_{s_0,s_1}(w, dw_{s_1}) \cdots R^\rho_{s_{n-1},s_n}(w_{s_{n-1}}, dw_{s_n}) \right].
\end{aligned}$$

On pose $\bar{W}_s = (\rho_s, W'_s)$. Remarquons que $W'_s(r) = W'_t(r)$ pour $r \in [0, \langle \rho_{s,t}, 1\rangle[$ et ainsi que

$$d(\bar{W}_s, \bar{W}_t) \leq D(\rho_s, \rho_t) + |Y_s \wedge Y_t - J_{s,t}|.$$

Puisque ρ et Y sont $\mathbb{P}_\mu$-p.s. càd-làg, ceci implique que l'application $s \mapsto \bar{W}_s$ est $\mathbb{P}_{(\mu,w)}$-p.s. càd-làg sur $[0, \infty[\bigcap \mathbb{Q}$. De plus il existe une unique extension càd-làg sur la droite réelle, que nous noterons encore par $\mathbb{P}_{(\mu,w)}$. Le processus $(\bar{W}_s, s \geq 0)$ est sous $\mathbb{P}_{(\mu,w)}$ un processus de Markov homogène en temps à valeurs dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{W})$. On appellera cette loi la loi du serpent de Lévy pondéré associé à $\bar{\Pi}$.

On notera par $(\mathcal{F}_s, s \geq 0)$ la filtration naturelle sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{W})$. On peut alors adapter les preuves des Propositions 4.1.1 et 4.1.2 de [44] pour obtenir les résultats suivants.

Théorème 2.4.1. *Le processus $(\bar{W}_s, s \geq 0)$ est un processus de Markov càd-làg et est fortement markovien par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{s+}, s \geq 0)$.*

Remarquons que, quand la famille de mesures de probabilité $\bar{\Pi}_{x,\mu}$ est seulement la loi d'un processus de Markov homogène ξ partant de x et arrêté au temps $\langle \mu, 1\rangle$, la construction précédente donne un serpent avec ξ pour mouvement spatial et processus de temps de vie $X - I$.

De plus, on a besoin d'une certaine dépendance entre le mouvement spatial et le processus d'exploration ρ afin de retrouver le serpent de Lévy initial à partir du serpent de Lévy pondéré. Intuitivement, on empêche le mouvement spatial de changer quand le temps t est "sur une masse" de ρ_s. Cette idée peut être comparée à une subordination et a déjà été utilisée dans le travail sur les serpents par Bertoin, Le Gall et Le Jan dans [26] afin de construire une sorte de serpent de Lévy à partir du serpent brownien classique.

Soit Π_x la loi de ξ, un processus de Markov càd-làg à valeurs dans E sans discontinuités fixes et partant de x, tel que l'application $x \mapsto \Pi_x$ soit mesurable. Rappelons (2.1.3) et posons $\hat{\mu}_r = k_{\langle \mu,1\rangle - r}\mu$ pour $r \in [0, \langle \mu, 1\rangle[$. Soit $\bar{\Pi}_{x,\mu}$ la loi de (μ, w) avec $w = (\xi_{H(\hat{\mu}_r)}, r \in [0, \langle \mu, 1\rangle[)$ sous Π_x. Remarquons que $\xi_{r'} = w(\langle \mu, \mathbf{1}_{[0,r']}\rangle)$ pour $r' \in [0, H(\mu)[$. On a que $\bar{\Pi}$ satisfait les conditions a)-e).

Soit $((\rho_s, W'_s), s \geq 0)$ le serpent de Lévy pondéré correspondant. Pour $s \geq 0$, $r \geq 0$, on pose $W_s(r) = W'_s(\langle \rho_s, \mathbf{1}_{[0,r]}\rangle)$. Le processus $((\rho_s, W_s), s \geq 0)$ est le serpent de Lévy défini dans la Section 4 de [44] avec pour mouvement sous-jacent ξ, quand H est continu. Remarquons que notre construction permet de retirer la condition de continuité de H. Comme conséquence du Théorème 2.4.1, on obtient que le serpent de Lévy (général) est fortement markovien.

Proposition 2.4.2. *Le procesus $((\rho_s, W_s), s \geq 0)$ est un processus de Markov càd-làg et est fortement markovien par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{s+}, s \geq 0)$.*

Chapitre 3

Mesure de dislocation de la fragmentation d'un arbre aléatoire de Lévy

Ce chapitre reprend les résultats de l'article [105] soumis pour publication.

Dans ce chapitre, nous reprenons la construction des marques précédente en introduisant un paramètre qui va augmenter le nombre de marques. On élague suivant ces marques paramétrées et on considère tous les morceaux obtenus. Ces fragments d'arbres vont se refragmenter au cours du temps et vont former un processus de fragmentation. Afin d'étudier ce processus, on calculera la tranformée de Laplace de la mesure de dislocation associée. Pour cela on introduira une représentation des marques sous l'épigraphe du processus des hauteurs.

3.1 Le serpent poissonnien de Lévy

Comme dans la Section 2.2, construisons un serpent de Lévy poissonnien qui va marquer le CRT de Lévy sur les nœuds de l'arbre et sur le squelette de l'arbre. Le but est de fragmenter le CRT en plusieurs morceaux grâce à des processus ponctuels dont l'intensité dépend d'un paramètre θ et tel que si $\theta = 0$, il n'y a pas de marque sur le CRT et le nombre de marques est croissant en θ.

3.1.1 Marques paramétrées sur le squelette

Afin de marquer la partie continue du CRT tout en gardant la mémoire des marques sur l'ascendance de chaque individu, construisons un serpent sur $E = \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^2)$ où le paramètre θ apparait. Pour obtenir un espace polonais, on sépare l'espace du paramètre θ en intervalles bornés.
Soit $i \in \mathbb{N}$, d'après [34] Section 3.1, $E_i = \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+ \times [i, i+1[)$ l'espace des mesures finies sur $\mathbb{R}_+ \times [i, i+1[$ est un espace polonais pour la topologie de la convergence faible.
D'après [44], Chap. 4, il existe un processus $(W_t^i, t \geq 0)$ à valeurs dans E_i tel que, conditionnellement à X,

1. Pour chaque $s \in [0, \sigma]$, W_s^i est une mesure de Poisson sur $[0, H_s] \times [i, i+1[$ d'intensité $2\beta \mathbf{1}_{[0,H_t]}(dr)\ \mathbf{1}_{[i,i+1[}(\theta) d\theta$,
2. Pour tous $s < s'$, $W_{s'}^i(dr, d\theta)\mathbf{1}_{[0,H_{s,s'}]}(r) = W_s^i(dr, d\theta)\mathbf{1}_{[0,H_{s,s'}]}(r)$.

On prend les W^i indépendants. On pose $m_t^{\text{ske}} = \sum_{i \in \mathbb{N}} W_t^i$.
Si $\beta = 0$, on se retrouve dans le cas d'un CRT sans partie brownienne, dans ce cas il n'y a pas de marque sur le squelette et on pose $m^{\text{ske}} = 0$.
Pour tout $t \geq 0$ fixé, conditionnellement à H_t, m_t^{ske} est un processus de Poisson ponctuel d'intensité

$$2\beta \mathbf{1}_{[0,H_t]}(r) dr d\theta.$$

Le processus (ρ, m^{ske}) est à valeurs dans l'espace $\tilde{\mathcal{M}}_f := \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^2)$. Notons également $(\mathcal{F}_s, s \geq 0)$ la filtration canonique sur l'espace des trajectoires càd-làg sur l'espace $\tilde{\mathcal{M}}_f$.
En utilisant le Théorème 4.1.2 de [44] dans le cas où H est continu ou le résultat adapté au cas où H ne l'est pas (Prop. 2.4.2), on obtient le résultat suivant

Proposition 3.1.1. (ρ, m^{ske}) *est un processus de Markov fort par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_{s+}, s \geq 0)$.

3.1.2 Marques paramétrées sur les nœuds

Dans le cas où la mesure de Lévy de X est non nulle, on définit le processus de marquage sur les nœuds du CRT comme dans [4]. Utilisons une mesure ponctuelle de Poisson pour introduire le paramètre θ. Conditionnellement à X, on pose

$$m_t^{\text{nod}}(dr, d\theta) = \sum_{\substack{0<s\leq t \\ X_{s-}<I_t^s}} (I_t^s - X_{s-}) \left(\sum_{u>0} \delta_{V_{s,u}}(d\theta) \right) \delta_{H_s}(dr).$$

avec $\sum_{u>0} \delta_{V_{s,u}}$ est une mesure de Poisson ponctuelle d'intensité $\Delta X_s \mathbf{1}_{u>0} du$.
Si $\pi = 0$, on est dans le cas d'un CRT brownien et il n'y a pas de marque sur les nœuds, on pose alors $m^{\text{nod}} = 0$.

3.1.3 Le serpent paramétré

Réunissons l'ensemble des marques paramétrées sur le squelette et des marques paramétrées sur les nœuds du CRT en un processus de marquage $m = (m^{\text{nod}}, m^{\text{ske}})$. On note $\mathcal{S} = (\rho, m)$ le serpent marqué partant de $\rho_0 = 0$ et $m_0 = 0$.
Reprenons la construction faite dans la Section 2.2.1 pour obtenir un serpent partant d'une valeur initiale et ainsi pouvoir écrire une propriété de Markov fort pour le serpent. Considérons l'ensemble $\mathbb{S}$ des triplets $(\mu, \Pi^{\text{nod}}, \Pi^{\text{ske}})$ tels que

- $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$,
- Π^{nod} s'écrit sous la forme $\Pi^{\text{nod}}(dr, dx) = \mu(dr)\Pi^{\text{nod}}_r(dx)$ où $(\Pi^{\text{nod}}_r, r > 0)$ est une famille de mesures σ-finies sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $\theta > 0$, $\Pi^{\text{nod}}(\mathbb{R}_+ \times [0, \theta]) < \infty$,
- $\Pi^{\text{ske}} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^2)$ et
  - $Supp(\Pi^{\text{ske}}(., \mathbb{R}_+)) \subset Supp(\mu)$
  - pour tout $x < H(\mu)$ et tout $\theta > 0$, $\Pi^{\text{ske}}([0, x] \times [0, \theta]) < \infty$,
  - si $\mu(H(\mu)) > 0$, alors pour tout $\theta > 0$, $\Pi^{\text{ske}}(\mathbb{R}_+ \times [0, \theta]) < \infty$

Définissons alors le serpent $\mathcal{S}$ partant d'une valeur initiale $(\mu, \Pi) \in \mathbb{S}$, où $\Pi = (\Pi^{\text{nod}}, \Pi^{\text{ske}})$, notons $H^\mu_t = H(k_{-I_t}\mu)$,

$$(m^{\text{nod}})^{(\mu,\Pi)}_t = \left[\Pi^{\text{nod}}\mathbf{1}_{[0,H^\mu_t)} + \mathbf{1}_{\mu(\{H^\mu_t\})>0}\frac{k_{-I_t}\mu(\{H^\mu_t\})\Pi^{\text{nod}}(\{H^\mu_t\}, .)}{\mu(\{H^\mu_t\})}\delta_{H^\mu_t}\Pi^{\text{nod}}_{H^\mu_t}, m^{\text{nod}}_t\right]$$

$$(m^{\text{ske}})^{\mu,\Pi}_t = \left[\Pi^{\text{ske}}\mathbf{1}_{[0,H_{0,t}[}, m^{\text{ske}}_t\right]$$

Notons que ces définitions sont cohérentes avec les définitions des processus m^{nod} et m^{ske}.
En utilisant la propriété de Markov fort pour le processus m^{nod} et la Proposition 3.1.1, on obtient

Proposition 3.1.2. *Le serpent $\mathcal{S}$ est fortement markovien.*

On pose $m^{(\theta)}(dr) = m^{\text{ske}}(dr, [0, \theta]) + m^{\text{nod}}(dr, [0, \theta])$. Grâce aux propriétés des mesures de Poisson ponctuelles, on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.1.3. *$m^{(\theta+a)}_t - m^{(\theta)}_t$ est indépendant de $m^{(\theta)}_t$ et a la même loi que $m^{(a)}_t$.*

Notons également par $\mathbb{P}$ (resp. $\mathbb{P}^*$) la loi du serpent $(\rho, m^{\text{nod}}, m^{\text{ske}})$ partant de $\mu, 0, 0$ (resp. et tué quand il atteint 0). De même, on note $\mathbb{N}$ la loi du serpent $\mathcal{S}$ quand ρ est distribué sous $\mathbb{N}$.

On définit $\psi^{(\theta)}$ par, pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned}\psi^{(\theta)}(\lambda) &= \psi(\theta + \lambda) - \psi(\theta) \\ &= \alpha^{(\theta)}\lambda + \beta^{(\theta)}\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[}(e^{-\lambda l} - 1 + \lambda l)\pi^{(\theta)}(dl)\end{aligned}$$

$$avec \begin{cases}\alpha^{(\theta)} = \alpha + 2\beta\theta + \int_{]0,+\infty[}(1 - e^{-\theta l})l\pi(dl) \\ \beta^{(\theta)} = \beta \\ \pi^{(\theta)}(dl) = e^{-\theta l}\pi(dl).\end{cases}$$

Pour $\theta \geq 0$ et $t \in [0, \sigma]$ fixés, on définit l'ensemble $A_t^{(\theta)}$ des individus du CRT de Lévy sans marques sur leur ascendance et son inverse continu à droite $C_t^{(\theta)}$ donnés par les formules :

$$A_t^{(\theta)} = \int_0^t \mathbf{1}_{m_s^{(\theta)}=0} ds \quad et \quad C_t^{(\theta)} = \inf\{s > 0; A_s^{(\theta)} > t\}.$$

On définit le processus d'exploration $\rho^{(\theta)}$ qui décrit le sous-arbre sous les premières marques onnées par $m^{(\theta)}$: $\rho_t^{(\theta)} = \rho_{C_t^{(\theta)}}$. Soit $\mathcal{F}^{(\theta)} = (\mathcal{F}_t^{(\theta)}, t \geq 0)$ la filtration engendrée par le serpent de L2vy élagué $\mathcal{S}^{(\theta)} = (\rho^{(\theta)}, m^{(\theta)})$ complétés de manière usuelle. On note $\sigma(\theta) = \inf\{t > 0; \rho_t^{(\theta)} = 0\}$. Donnons la propriété principale de $\rho^{(\theta)}$ démontrée par Abraham, Delmas et Voisin [6].

Proposition 3.1.4 (Theorem 1.1 [6])**.** *Le processus d'exploration $\rho^{(\theta)}$ est associé à un processus de Lévy d'exposant de Laplace $\psi^{(\theta)}$.*

Le lemme suivant est crucial pour obtenir un processus de fragmentation et explique le choix des paramètres de l'élagage.

Lemme 3.1.5. *Pour $\pi_*(dr)$ p.p. r, la "loi" de $\rho^{(\theta)}$ sous $\mathbb{N}$, conditionnellement à $\sigma^{(\theta)} = r$ est la même que la "loi" de ρ sous $\mathbb{N}$, conditionnellement à $\sigma = r$.*

3.1.4 Représentation poissonnienne du serpent paramétré

Décomposons le processus ρ sous $\mathbb{P}_\mu^*$ selon les excursions de la masse totale de ρ au dessus de ses minima. Plus précisemment, soient $]\alpha_i, \beta_i[, i \in J$, les intervalles d'excursion de $X - I$ au dessus de 0 sous $\mathbb{P}_\mu^*$. Pour $i \in J$, on définit $h_i = H_{\alpha_i}$ et ρ^i par la formule : pour $t \geq 0$ et $f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+^2)$,

$$\langle \rho_t^i, f \rangle = \int_{]h_i, +\infty[} f(x - h_i) \rho_{(\alpha_i + t) \wedge \beta_i}(dx)$$

Posons $\sigma^i = \inf\{s > 0; \langle \rho_s^i, 1 \rangle = 0\}$.
On peut également définir le processus de marquage m au dessus des intervalles $]\alpha_i, \beta_i[$. Pour tous $t \geq 0$ et $f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+)$, on pose

$$\left\langle m_t^{i,a}, f \right\rangle = \int_{]h_i, +\infty[} f(x - h_i, \theta) m^a_{(\alpha_i + t) \wedge \beta_i}(dx, d\theta)$$

avec $a = \text{ske}, \text{nod}$. On pose également pour tout $i \in J$, $m^i = (m^{i,\text{nod}}, m^{i,\text{ske}})$. On obtient ainsi le serpent de Lévy $\mathcal{S}^i = (\rho^i, m^i)$ pour tout $i \in J$.

Lemme 3.1.6. *(Lemma 4.2.4, [44])*
Soit $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$. La mesure ponctuelle $\sum_{i \in J} \delta_{(h_i, \mathcal{S}^i)}$ est sous $\mathbb{P}_\mu^*$ une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $\mu(dr)\mathbb{N}(d\mathcal{S})$.

3.1.5 La propriété de Markov spéciale

On fixe $\theta \geq 0$. On définit $O^{(\theta)}$ l'intérieur de l'ensemble

$$\{s \geq 0,\ m_s^{(\theta)} \neq 0\}.$$

On écrit $O^{(\theta)} = \bigcup_{i\in\tilde{I}}]a_i, b_i[$ et on dit que $]a_i, b_i[$ sont les intervalles d'excursion du serpent de Lévy marqué $\mathcal{S}^{(\theta)} = (\rho^{(\theta)}, m^{(\theta)})$ hors de $\{s \geq 0; m_s^{(\theta)} = 0\}$. On pose $h_i = H_{a_i}$ et on définit le processus $\mathcal{S}^{(\theta),i} = (\rho^{(\theta),i}, m^{(\theta),i})$ au dessus des intervalles d'excursion $(]a_i, b_i[, i \in \tilde{I})$ comme précédemment.

Si Q est une mesure sur $\mathbb{S}$ et φ est une fonction positive mesurable définie sur un espace mmesurable $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{S}$, on note

$$Q[\varphi(u, \omega, \cdot)] = \int_{\mathbb{S}} \varphi(u, \omega, \mathcal{S}) Q(d\mathcal{S}).$$

On rapelle maintenant la propriété de Markov spéciale démontrée par Abraham, Delmas et Voisin [6]. Elle donne la loi du serpent de Lévy "au dessus" des "premières marques" du CRT marqué sachant la partie du CRT élagué qui contient la racine.

Théorème 3.1.7 ([6], Theorem 4.2). *(Propriété de Markov spéciale)*
On fixe $\theta > 0$. Soit ϕ une fonction mesurable positive définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}$ telle que $t \mapsto \phi(t, \omega, \mathcal{S})$ est progressivement $\mathcal{F}_\infty^{(\theta)}$-mesurable pour tout $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$. Alors, on a $\mathbb{P}$-p.s.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{i\in\tilde{I}} \varphi(A_{a_i}^{(\theta)}, \omega, \mathcal{S}^{(\theta),i})\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_\infty^{(\theta)}\right] \\ = \exp\left(-\int_0^\infty du\, 2\beta\theta\mathbb{N}\left[1 - \mathrm{e}^{-\varphi(u,\omega,\cdot)}\right]\right) \\ \exp\left(-\int_0^\infty du \int_{]0,\infty[} (1 - e^{-\theta\ell})\pi(d\ell)\left(1 - \mathbb{E}_\ell^*[\mathrm{e}^{-\varphi(u,\omega,\cdot)}]\right)\right). \quad (3.1)\end{aligned}$$

Autrement dit, la loi du processus d'excursion $\sum_{i\in\tilde{I}} \delta_{(A_{a_i}^{(\theta)}, \rho_{a_i-}^{(\theta)}, \mathcal{S}^{(\theta),i})}$, given $\mathcal{F}_\infty^{(\theta)}$, est la loi de la mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $\mathbf{1}_{u\geq 0} du\, \delta_{\rho_u^{(\theta)}}(d\mu)\left(2\beta\theta\mathbb{N}(d\mathcal{S}) + \int_{]0,\infty[} (1 - e^{-\theta\ell})\pi(d\ell)\mathbb{P}_\ell^*(d\mathcal{S})\right)$.

3.1.6 Le processus dual et la formule de représentation

Nous aurons besoin du processus $\eta = (\eta_t, t \geq 0)$ à valeur dans $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ et défini par

$$\eta_t(dr) = \beta \mathbf{1}_{[0,H_t]}(r)\, dr + \sum_{\substack{0<s\leq t \\ X_{s-}<I_t^s}} (X_s - I_t^s)\delta_{H_s}(dr).$$

Ce processus est appelé le processus dual du processus ρ sous $\mathbb{N}$ (voir le Corollaire 3.1.6 de [44]). Notons également, pour $s \in [0, \sigma]$ fixé, $\kappa_s = \rho_s + \eta_s$. Redonnons la représentation de Poisson de (ρ, η) sous $\mathbb{N}$. Soit $\mathcal{N}(dx\ dl\ du)$ une mesure de Poisson ponctuelle sur $[0, +\infty[^3$ d'intensité

$$dx\ l\pi(dl)\ \mathbf{1}_{[0,1]}(u)du.$$

Pour tout $a > 0$, notons par $\mathbb{M}_a$ la loi de la paire (μ_a, ν_a) de mesures sur $\mathbb{R}_+$ à masse finie, définies par, pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+)$

$$\langle \mu_a, f \rangle = \int \mathcal{N}(dx\ dl\ du)\mathbf{1}_{[0,a]}(x)ulf(x) + \beta \int_0^a f(r)dr,$$

$$\langle \nu_a, f \rangle = \int \mathcal{N}(dx\ dl\ du)\mathbf{1}_{[0,a]}(x)(1-u)lf(x) + \beta \int_0^a f(r)dr.$$

Posons également $\mathbb{M} = \int_0^\infty dae^{-\alpha a}\mathbb{M}_a$.

Proposition 3.1.8. *([44], Proposition 3.1.3) Pour toute fonction F mesurable positive sur $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)^2$*

$$\mathbb{N}\left[\int_0^\sigma F(\rho_t, \eta_t)dt\right] = \int \mathbb{M}(d\mu\ d\nu)F(\mu, \nu)$$

où on rappelle que $\sigma = \inf\{s > 0; \rho_s = 0\}$ est la longueur des excursions.

Donnons aussi la formule de Bismut pour le processus des hauteurs du processus de Lévy

Proposition 3.1.9. *([45], Lemma 3.4.)*
Pour toute fonction F positive définie sur $\mathcal{B}_+([0,\infty])^2$

$$\mathbb{N}\left[\int_0^\sigma dsF((H_{(s-t)_+}, t \geq 0), (H_{(s+t)\wedge\sigma}, t \geq 0))\right] = \int \mathbb{M}(d\mu d\nu) \int \mathbb{P}^*_\mu(d\rho)\mathbb{P}^*_\nu(d\tilde{\rho})F\left(H(\rho), H(\tilde{\rho})\right).$$

3.2 Liens entre le serpent paramétré et la fragmentation

3.2.1 Construction du processus de fragmentation

On s'intéresse à l'ensemble des fragments de l'arbre obtenu par notre processus de marquage. Faisons la même construction que dans [4], Section 4.1.

Pour $\theta \geq 0$ fixé, on construit une relation d'équivalence, $\mathcal{R}_\theta$, sur $[0, \sigma]$ sous $\mathbb{N}$ ou sous $\mathbb{N}_\sigma$ par :

$$s\mathcal{R}_\theta t \Leftrightarrow m_s^{(\theta)}([H_{s,t}, H_s]) = m_t^{(\theta)}([H_{s,t}, H_t]) = 0.$$

Deux individus appartiennent à la même classe d'équivalence s'ils appartiennent au même fragment, c'est-à-dire s'il n'y a pas de marque sur leur branches à partir de leur ancêtre commun. On peut remarquer que $s\mathcal{R}_\theta t$ implique $K_s = K_t$. A partir de la relation d'équivalence $\mathcal{R}_\theta$, on obtient la famille d'ensembles G^j des individus avec j marques sur leur ascendance.

Puisque l'on place des marques sur les nœuds infinis du CRT, pour $\theta > 0$, pour $j \in \mathbb{N}$ fixé, l'ensemble G^j peut être écrit comme une union infinie de sous-intervalles de $[0, \sigma]$. On obtient

$$G^j = \bigcup_{k \in J_j} R^{j,k}$$

tel que $R^{j,k}$ soit de mesure de Lebesgue strictement positive. Pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in J_j$, on pose

$$A_t^{j,k} = \int_0^t \mathbf{1}_{s \in R^{j,k}} ds \quad \text{et} \quad C_t^{k,j} = \inf\{u \geq 0; A_u^{j,k} > t\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = \sigma$. On construit également le processus $\tilde{\mathcal{S}}^{j,k} = (\tilde{\rho}^{j,k}, \tilde{m}^{j,k})$ par : pour tous $f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+)$, $\varphi \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et $t \geq 0$,

$$\left\langle \tilde{\rho}_t^{j,k}, f \right\rangle = \int_{]H_{C_0^{j,k}}, +\infty[} f(x - H_{C_0^{j,k}}) \rho_{C_t^{j,k}}(dx)$$

$$\left\langle \tilde{m}_t^{j,k}, \varphi \right\rangle = \int_{]H_{C_0^{j,k}}, +\infty[\times]\theta, +\infty[} \varphi(x - H_{C_0^{j,k}}, v - \theta) m_{C_t^{j,k}}(dx, dv)$$

$\tilde{\sigma}^{j,k}$ correspond à la mesure de Lebesgue de $R^{j,k}$.

On note $\mathcal{L}^{(\theta)} = (\tilde{\rho}^{j,k}; j \in \mathbb{N}, k \in J_j) = (\rho^i; i \in I^{(\theta)})$. Notons également $\mathcal{L}^{(\theta-)} = (\rho^i; i \in I^{(\theta-)})$ défini de la même manière mais à partir de la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\theta-}$ définie par :

$$s \mathcal{R}_{\theta-} t \Leftrightarrow m_s([0, H_{s,t}] \times [0, \theta[) = m_t([0, H_{s,t}] \times [0, \theta[) = 0$$

qui donne les fragments juste avant le temps θ.

Définissons maintenant notre processus de fragmentation $\Lambda^\theta = (\Lambda_1^\theta, \Lambda_2^\theta, \dots)$ comme la suite des mesures de Lebesgue, non nulles, des classes d'équivalence de $\mathcal{R}_\theta$, $(\tilde{\sigma}^{j,k}, j \in \mathbb{N}, k \in J_j)$, rangées par ordre décroissant. Notons que cette suite est au plus dénombrable, si elle est finie, on la complète avec des 0, telle que $\mathbb{N}$-p.s. et $\mathbb{N}_\sigma$-p.p.

$$\Lambda^\theta \in \mathcal{S}^\downarrow = \{(x_1, x_2, \dots), x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq 0, \sum x_i < \infty\}.$$

Notons P_σ la loi de $(\Lambda^\theta, \theta \geq 0)$ sous $\mathbb{N}_\sigma$ et par convention P_0 est la masse de Dirac en $(0, 0, \dots) \in \mathcal{S}^\downarrow$. On obtient alors un résultat similaire à [4], Theorem 1.1.

Théorème 3.2.1. *Pour $\pi_*(dr)$-presque tout r, sous P_r, $(\Lambda^\theta, \theta \geq 0)$ est un processus de fragmentation à valeurs dans $\mathcal{S}^\downarrow$.*

Esquisse de démonstration. Comme la démonstration est exactement la même que celle de [4], Theorem 1.1., on donne uniquement les idées principales de la démonstration et on se réferera à [4] pour plus de détails.

première étape. D'après la Proposition 3.1.4, la première sous-excursion $\tilde{\rho}^{0,0}$ a même "loi" sous $\mathbb{N}$ que $\rho^{(\theta)}$. De plus, par le Lemme 3.1.5 et la construction du serpent de Lévy sachant ρ, la loi de $\tilde{\mathcal{S}}^{0,0}$ conditionnellement à $\{\tilde{\sigma}^{0,0} = s\}$ est $\mathbb{N}_s$.

deuxième étape. Par la propriété de Markov spéciale, Théorème 3.1.7, en utilisant les mêmes notations que dans ce théorème, on a que, sous $\mathbb{N}$ conditionnellement à $\tilde{\sigma}^{0,0} = s$, les processus $(\mathcal{S}^{(\theta),i}, i \in \tilde{I})$ sont donnés par une mesure de Poisson d'intensité

$$s 2\beta\theta \mathbb{N}(d\mathcal{S}) + s \int_{]0, +\infty[} (1 - e^{-\theta\ell}) \pi(d\ell) \mathbb{P}_\ell^*(d\mathcal{S})$$

et sont indépendants de $\tilde{\mathcal{S}}^{0,0}$.

De plus, par la représentation de Poisson de la mesure de probabilité $\mathbb{P}_\ell^*$ (Lemme 3.1.6), on obtient que les excursions du serpent $\mathcal{S}$ "au dessus des premières marques" que l'on note $(\mathcal{S}^{1,k}, k \in J_1)$, forment sous $\mathbb{N}$ une famille i.i.d. de processus de "loi" $\mathbb{N}$.

troisième étape Par récurrence sur le nombre de marques, on obtient le lemme suivant

Lemme 3.2.2. *Sous $\mathbb{N}$, la loi de la famille $(\tilde{\mathcal{S}}^{j,k}, j \in \mathbb{N}, k \in J_j)$, conditionnellement à $(\tilde{\sigma}^{j,k}, j \in \mathbb{N}, k \in J_j)$, est la loi des serpents de Lévy poissonniens indépendants de loi respectives $\mathbb{N}_{\tilde{\sigma}^{j,k}}$.*

Le théorème se termine alors facilement. □

3.2.2 Autre représentation de la fragmentation

Donnons une autre représentation de la fragmentation en utilisant une mesure ponctuelle de Poisson sous l'épigraphe du processus des hauteurs. Rappelons que pour tout $t \in [0, \sigma]$

$$\kappa_t(dr) = 2\beta \mathbf{1}_{[0,H_t]}(r)(dr) + \sum_{\substack{0<s\leq t \\ X_{s-}<I_t^s}} (X_s - X_{s-})\delta_{H_s}(dr).$$

Conditionnellement au processus H (ou au processus ρ), on considère un processus de Poisson ponctuel $\mathcal{Q}(d\theta, ds, da)$ sous l'épigraphe de H d'intensité $d\theta\, q_\rho(ds, da)$ où

$$\begin{aligned} q_\rho(ds, da) &= \frac{ds\ \kappa_s(da)}{d_{s,a} - g_{s,a}} \\ &= q_\rho^{\text{ske}}(ds, da) + q_\rho^{\text{nod}}(ds, da) \end{aligned}$$

$$\text{avec} \begin{cases} q_\rho^{\text{nod}}(ds, da) = \dfrac{ds}{d_{s,a} - g_{s,a}} \displaystyle\sum_{\substack{0<u\leq s \\ X_{u-}<I_s^u}} (X_u - X_{u-})\delta_{H_u}(da) \\ q_\rho^{\text{ske}}(ds, da) = \dfrac{2\beta\ ds\ \mathbf{1}_{[0,H_s]}(a)da}{d_{s,a} - g_{s,a}} \end{cases}$$

avec $d_{s,a} = \sup\{u \geq s, \min\{H_v, v \in [s, u] \geq a\}\}$ et $g_{s,a} = \inf\{u \leq s, \min\{H_v, v \in [s, u] \geq a\}\}$, $[g_{s,a}, d_{s,a}]$ représentant l'ensemble des individus du CRT ayant un ancêtre commun avec s après la génération a.

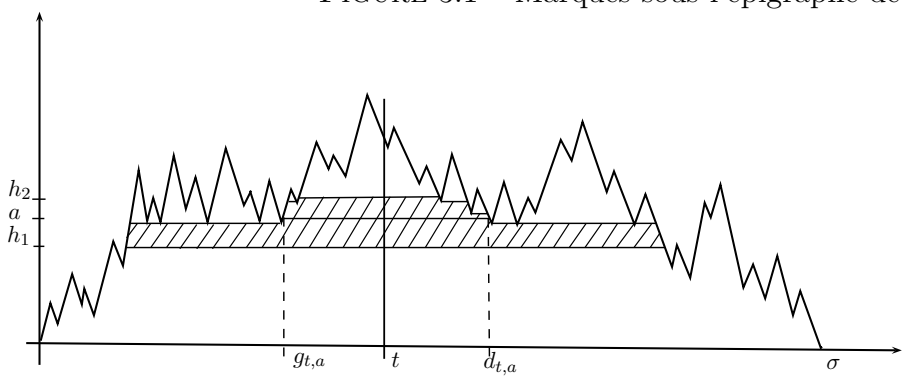
Proposition 3.2.3. *Conditionnellement au processus H, le processus de marquage m et le processus ponctuel de Poisson $\mathcal{Q}$ ont la même loi.*

Démonstration. Conditionnellement à H et sous $\mathbb{N}$, pour $t \in [0, \sigma]$ fixé, m_t^{ske} est un processus ponctuel de Poisson d'intensité $2\beta \mathbf{1}_{[0,H_t]}(a)da\, d\theta$. Pour un individu t, les marques sur le squelette sont uniformes de la hauteur h_1 à la hauteur h_2. D'après la propriété de serpent, si une marque apparait à la hauteur a de l'ascendance d'un individu t, elle apparait égalmement pour tout enfant de t, c'est à dire que la marque apparait de $g_{t,a}$ à $d_{t,a}$. On a

$$\iint_D \frac{2\beta\theta da\, ds}{d_{s,a} - g_{s,a}} = 2\beta(h_2 - h_1)$$

où $D = \{(a,s) \in [h_1,h_2] \times [g_{t,a}, d_{t,a}]\}$ puisque pour $a \in [h_1,h_2]$ fixé, $\forall s \in [g_{t,h}, d_{t,h}]$, $g_{s,a} = g_{t,a}$ et $d_{s,a} = d_{t,a}$. (Voir la Figure 3.1). Ainsi le processus ponctuel q^{ske} donne les mêmes marques que le processus m^{ske}.

FIGURE 3.1 – Marques sous l'épigraphe de H



Conditionnellement à H, sous $\mathbb{N}$, pour $t \in [0,\sigma]$ fixé, m_t^{nod} pose des marques sur un nœud à la hauteur $H_u < t$ proportionnellement à la taille Δ_u du nœud. Par construction de m^{nod}, si une marque apparait à une hauteur $H_u = a$ sur l'ascendance d'un individu t, elle apparait également de $g_{t,a}$ à $d_{t,a}$. On a

$$\iint_D \frac{\Delta_u \theta \delta_{H_u}(da) ds}{d_{s,a} - g_{s,a}} = \theta \Delta_u$$

où $D = \{(a,s) \in [0,H_t] \times [g_{t,a}, d_{t,a}]\}$. Ainsi le processus ponctuel q^{nod} donne les mêmes marques que le processus m^{nod}.

L'égalité $m = m^{\text{ske}} + m^{\text{nod}}$ finit la démonstration. □

Utilisons une notation pour les fragments du CRT obtenus à partir d'une marque (s,a) sous l'épigraphe de H. Pour s et a tels que $s \in [0,\sigma]$ et $0 \leq a \leq H_s$, notons les fragments du serpent de Lévy $(\rho^i, i \in \tilde{I})$ en considérant :

- les intervalles ouverts d'excursion de H après s au dessus de a : $(]\alpha_i, \beta_i[, i \in \tilde{I}_+)$ qui sont tels que $\alpha_i > s$, $H_{\alpha_i} = H_{\beta_i} = a$ et pour tout $s' \in]\alpha_i, \beta_i[$, $H_{s'} > a$ et $H_{s,s'} = a$.
- les intervalles ouverts d'excursion de H avant s au dessus de a : $(]\alpha_i, \beta_i[, i \in \tilde{I}_-)$ qui sont tels que $\beta_i < s$, $H_{\alpha_i} = H_{\beta_i} = a$ et pour tout $s' \in]\alpha_i, \beta_i[$, $H_{s'} > a$ et $H_{s,s'} = a$.
- l'excursion i_s de H au dessus de a qui contient s : $]\alpha_{i_s}, \beta_{i_s}[$ tel que $\alpha_{i_s} < s < \beta_{i_s}$, $H_{\alpha_{i_s}} = H_{\beta_{i_s}} = a$ et pour tout $s' \in (\alpha_{i_s}, \beta_{i_s})$, $H_{s'} > a$ et $H_{s,s'} = a$.
- l'excursion i_0 de H au dessous de a : $\{s \in [0,\sigma]; H_{s,s'} < a\} = [0, \alpha_{i_0}[\cup]\beta_{i_0}, \sigma]$

Notons $\tilde{I} = \tilde{I}_- \cup \tilde{I}_+ \cup \{i_s, i_0\}$. Pour (s,a) correspondant à une marque sur le squelette (s,a), l'ensemble $\tilde{I}_- \cup \tilde{I}_+$ est vide.

On s'intéresse au calcul de $\tilde{\nu}_\rho$, la loi du processus $(\rho^i, i \in \tilde{I})$ sous $\mathbb{N}$.

3.3 Le processus de dislocation

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des temps de sauts du processus de Poisson $\mathcal{Q}$. Pour $\theta \in \mathcal{T}$, on considère les processus $\mathcal{L}^{(\theta)} = (\rho^i; i \in I^{(\theta)})$ et $\mathcal{L}^{(\theta-)} = (\rho^i; i \in I^{(\theta-)})$ définis dans la Section 3.2.1. Les temps de vie $(\sigma(\rho^i); i \in I^{(\theta)})$ (resp. $(\sigma(\rho^i); i \in I^{(\theta-)})$), rangés par ordre décroissant, de ces serpents de Lévy correspondent aux longueurs des fragments au temps θ (resp. avant le temps θ). Remarquons que, pour $\theta \in \mathcal{T}$ fixé, les familles $\mathcal{L}^{(\theta)}$ et $\mathcal{L}^{(\theta-)}$ diffèrent en une seule famille : le serpent ρ^{i_θ} se fragmente en une famille $(\rho^i, i \in \tilde{I}^\theta) \in \mathcal{L}^{(\theta)}$. On a ainsi

$$\mathcal{L}^{(\theta)} = \left(\mathcal{L}^{(\theta-)} \setminus \{\rho^{i_\theta}\}\right) \cup \{\rho^i; i \in \tilde{I}^{(\theta)}\}$$

D'après la représentation donnée dans la Section 3.2.2, cette fragmentation est donnée par la mesure q_ρ, c'est-à-dire par la mesure $\tilde{\nu}_\rho$. Voir par exemple [63] pour la définition de l'intensité d'un processus ponctuel aléatoire. D'après le Lemme 3.2.2,

$$\sum_{\theta \in \mathcal{T}} \delta_{(\theta, \mathcal{L}^{(\theta-)}, (\rho^i, i \in \tilde{I}^{(\theta)}))}$$

est un processus ponctuel d'intensité $d\theta\ \delta_{\mathcal{L}^{(\theta-)}} \sum_{\rho \in \mathcal{L}^{(\theta-)}} \tilde{\nu}_\rho$. En projetant grâce aux espérances au dessus des serpents conditionnellement à leur longueur, le processus

$$\sum_{\theta \in \mathcal{T}} \delta_{(\theta, (\sigma(\rho), \rho \in \mathcal{L}^{(\theta-)}), (\sigma(\rho^i), i \in \tilde{I}^{(\theta)}))}$$

est un processus ponctuel d'intensité $d\theta\ \delta_{(\sigma(\rho), \rho \in \mathcal{L}^{(\theta-)})} \sum_{\rho \in \mathcal{L}^{(\theta-)}} \nu_{\sigma(\rho)}$ où $\nu_{\sigma(\rho)}$ est la loi du réarrangement décroissant des longueurs du serpent de Lévy sous $\tilde{\nu}_\rho$, intégrée par rapport à la loi de ρ conditionnellement à $\sigma(\rho)$, c'est-à-dire, pour toute fonction F positive mesurable définie sur $\mathcal{S}^\downarrow$

$$\int_{\mathcal{S}^\downarrow} F(x)\nu_r(dx) = \mathbb{N}_r\left[\int F((\sigma^i, i \in \tilde{I}))\tilde{\nu}_\rho(d(\rho^i, i \in \tilde{I}))\right]$$

où les $(\sigma^i, i \in \tilde{I})$ sont les longueurs des fragments $(\rho^i, i \in \tilde{I})$ rangées en ordre décroissant.

3.3.1 Calcul de la mesure de dislocation

On s'intéresse à la famille des mesures de dislocation $(\nu_r, r > 0)$. Rappelons que $\mathbb{N}(.) = \int_{\mathbb{R}_+} \pi_*(dr)\mathbb{N}_r(.)$, le calcul étant plus facile sous $\mathbb{N}$, on calcule pour tout $\lambda \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}^\downarrow} F(x)\nu_r(dx)\pi_*(dr) &= \mathbb{N}\left[\int q_\rho(ds, da)F((\sigma^i, i \in \tilde{I}))\right] \\
&= \mathbb{N}\left[\int q_\rho^{\text{nod}}(ds, da)F((\sigma^i, i \in \tilde{I}))\right] + \mathbb{N}\left[\int q_\rho^{\text{ske}}(ds, da)F(\sigma^{i_0}, \sigma^{i_s})\right]
\end{aligned}$$

où on utilise la décomposition de q_ρ pour la deuxième égalité. La première partie a déjà été calculée dans [4]. Les temps des sauts du processus ρ sont représentés par un subordinateur W d'exposant

de Laplace $\psi' - \alpha$. On construit alors les longueurs des excursions du serpent par S_W où S est un subordinateur d'exposant ψ^{-1} indépendant de W. Vient alors le résultat :

$$\mathbb{N}\left[e^{-\lambda\sigma}\int q_\rho^{\mathrm{nod}}(ds,da)F((\sigma^i, i\in\tilde{I}))\right] = \int \pi(dv)\mathbb{E}\left[S_v e^{-\lambda S_v}F\left((\Delta S_u, u\le v)\right)\right].$$

Calculons maintenant la deuxième partie. D'après la définition du serpent, $\rho^{\mathrm{ske}} = 0$ si et seulement si $\beta = 0$ et dans ce cas, on ne met pas de marque sur le squelette de l'arbre. On se restreint au cas $\beta > 0$ et on énonce le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 3.3.1. *Soient $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 \ge 0$.*

$$\mathbb{N}\left[\int q_\rho^{ske}(ds,da)\sigma^{i_s}e^{-\lambda_1\sigma^{i_s}-\lambda_2\sigma^{i_0}}\right] = \frac{2\beta}{\psi'\psi^{-1}(\lambda_1)\psi'\psi^{-1}(\lambda_2)}.$$

On rappelle que la mesure $\hat{\nu}_r^{\mathrm{ske}}$ donne la loi du réarrangement non décroissant des deux longueurs données par la fragmentation issue de ν_r^{ske}.

Corollaire 3.3.2. *Pour $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, on obtient*

$$\int_{\mathbb{R}_+\times(\mathbb{R}_+^*)^2}\frac{1}{z}(1-e^{-\lambda_1 y})(1-e^{-\lambda_2 z})\hat{\nu}_r^{ske}(dy\,dz)\pi_*(dr) = 2\beta\psi^{-1}(\lambda_1)\psi^{-1}(\lambda_2).$$

Ainsi, sous $\hat{\nu}_r^{ske}(dy\,dz)\pi_*(dr)$, les "tailles" des deux fragments sont indépendantes.

Démonstration du Corollaire 3.3.2. En utilisant le Théorème 3.3.1 et en notant x_1 et x_2 les deux longueurs des fragments issus de ν_ρ^{ske} rangés dans l'ordre décroissant parmi les éléments de $x \in \mathcal{S}^\downarrow$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathcal{S}^\downarrow} x_1 e^{-\lambda_1 x_1-\lambda_2 x_2}\hat{\nu}_r^{\mathrm{ske}}(dx)\pi_*(dr) = \frac{2\beta}{\psi'\psi^{-1}(\lambda_1)\psi'\psi^{-1}(\lambda_2)}.$$

En prenant la primitive en λ_1 qui s'annule en 0 et la primitive en λ_2 qui s'annule en 0, on retrouve le résultat. □

Preuve du Théorème 3.3.1. Pour démontrer le théorème, calculons $A_2 := \mathbb{N}\left[\int q_\rho^{\mathrm{ske}}(ds,da)G(\sigma^{i_s},\sigma)\right]$ où $G(x,y) = xe^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}$.

$$\begin{aligned} A_2 &= \mathbb{N}\left[2\beta\int_0^\sigma ds\int\frac{1}{d_{s,a}-g_{s,a}}G(\sigma^{i_s},\sigma)\mathbf{1}_{(0\le a\le H_s)}da\right] \\ &= \mathbb{N}\left[2\beta\int_0^\sigma ds\int\frac{1}{d_{s,a}-g_{s,a}}G(d_{s,a}-g_{s,a},\sigma)\mathbf{1}_{(0\le a\le H_s)}da\right]. \end{aligned}$$

Notons pour $0 \le s \le \sigma$ et $0 \le a \le H_s$ fixés

$$d_{s,a} - s = \inf\{t\ge 0, H_{(s+t)\wedge\sigma}\le a\} = J_2(a)$$

$$s - g_{s,a} = \inf\{t\ge 0, H_{(s-t)_+}\le a\} = J_1(a).$$

On obtient

$$d_{s,a} - g_{s,a} = J_2(a) + J_1(a)$$

$$\sigma = J_2(0) + J_1(0)$$

$$A_2 = \mathbb{N}\left[2\beta \int_0^\sigma ds \int \mathbf{1}_{0\leq a\leq H_s} da \frac{G(J_1(a)+J_2(a), J_1(0)+J_2(0))}{J_1(a)+J_2(a)}\right].$$

Utilisons la généralisation aux processus de Lévy de la formule de Bismut, Proposition 3.1.9.

$$\begin{aligned} A_2 &= 2\beta \int \mathbb{M}(d\mu d\nu)\mathbb{E}\left[\int \mathbf{1}_{0\leq a\leq H(\mu)} da \frac{G(J^\nu(a)+J^\mu(a), J^\nu(0)+J^\mu(0))}{J^\nu(a)+J^\mu(a)}\right] \\ &= 2\beta \int \mathbb{M}(d\mu d\nu)\mathbf{1}_{0\leq a\leq H(\mu)} da\, \mathbb{E}^*_\mu\left[e^{-\lambda_1 J^\mu(a)-\lambda_2 J^\mu(0)}\right]\mathbb{E}^*_\nu\left[e^{-\lambda_1 J^\nu(a)-\lambda_2 J^\nu(0)}\right] \end{aligned}$$

où $J^\mu(a)$ est le premier temps de dépassement du niveau a du processus $H^{(\mu)}$. Par la décomposition poissonnienne de ρ sous $\mathbb{P}^*_\mu$ selon les excursions de ρ au dessus de ses minima, sous $\mathbb{P}^*_\mu$, on remplace respectivement $J^\mu(0)$ et $J^\mu(a)$ par $\sum_{i\in I}\sigma^i$ et $\sum_{h_i\geq a}\sigma^i$. Séparons $\sum_{i\in I}\sigma^i = \sum_{h_i\geq a}\sigma^i + \sum_{h_i<a}\sigma^i$.

$$A_2 = 2\beta \int \mathbb{M}(d\mu d\nu)\int \mathbf{1}_{0\leq a\leq H(\mu)} da \mathbb{E}^*_\mu\left[exp\left(-(\lambda_1+\lambda_2)\sum_{h_i\geq a}\sigma^i - \lambda_2\sum_{h_i<a}\sigma^i\right)\right]$$
$$\mathbb{E}^*_\nu\left[exp\left(-(\lambda_1+\lambda_2)\sum_{h_i\geq a}\sigma^i - \lambda_2\sum_{h_i<a}\sigma^i\right)\right].$$

En utilisant les propriétés classiques des mesures ponctuelles de Poisson, les atomes au dessus du niveau a sont indépendants des atomes en dessous, les espérances peuvent donc se séparer.

$$\mathbb{E}^*_\mu\left[e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\sum_{h_i\geq a}\sigma^i - \lambda_2\sum_{h_i<a}\sigma^i}\right] = \mathbb{E}^*_\mu\left[e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\sum_{h_i\geq a}\sigma^i}\right]\mathbb{E}^*_\mu\left[e^{-\lambda_2\sum_{h_i<a}\sigma^i}\right].$$

En utilisant le Lemme 3.1.6, ainsi que l'égalité $\psi^{-1}(\lambda) = \mathbb{N}\left[1-e^{-\lambda\sigma}\right]$, on obtient

$$\mathbb{E}^*_\mu\left[e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\sum_{h_i\geq a}\sigma^i}\right] = e^{-\mu([a,H(\mu)])\mathbb{N}\left[1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\sigma}\right]} = e^{-\mu([a,b])\psi^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Et de même pour la deuxième espérance.

$$A_2 = 2\beta \int_0^\infty dbe^{-\alpha b}\int_0^b da\mathbb{M}_b\left[e^{-(\mu+\nu)([a,b])\psi^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)}e^{-(\mu+\nu)([0,a))\psi^{-1}(\lambda_2)}\right].$$

Alors,

$$\begin{aligned} &\mathbb{M}_b\left[e^{-((\mu+\nu)([a,b])\psi^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)}e^{-(\mu+\nu)([0,a))\psi^{-1}(\lambda_2)}\right] = \\ &= \mathbb{M}_b\left[e^{-((\mu+\nu)([a,b])\psi^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)}\right]\mathbb{M}_b\left[e^{-(\mu+\nu)([0,a))\psi^{-1}(\lambda_2)}\right] \\ &= e^{-2(b-a)\beta\psi^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)}exp\left(-\int_a^b dx\int_0^\infty l\pi(dl)(1-e^{-l\psi^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)})\right) \\ &\quad e^{-2a\beta\psi^{-1}(\lambda_2)}exp\left(-\int_0^a dx\int_0^\infty l\pi(dl)(1-e^{-l\psi^{-1}(\lambda_2)})\right) \\ &= e^{\alpha b}e^{-(b-a)\psi'\psi^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)-a\psi'\psi^{-1}(\lambda_2)}. \end{aligned}$$

Remplaçons dans l'expression de A_2.

$$\begin{aligned} A_2 &= 2\beta \int_0^\infty db \frac{e^{-b\psi'\psi^{-1}(\lambda_2)} - e^{-b\psi'\psi^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)}}{\psi'\psi^{-1}(\lambda_1+\lambda_2) - \psi'\psi^{-1}(\lambda_2)} \\ &= \frac{2\beta}{\psi'\psi^{-1}(\lambda_1+\lambda_2) - \psi'\psi^{-1}(\lambda_2)} \left(\frac{1}{\psi'\psi^{-1}(\lambda_2)} - \frac{1}{\psi'\psi^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)} \right) \\ &= \frac{2\beta}{\psi'\psi^{-1}(\lambda_2)\psi'\psi^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité $\mathbb{N}\left[\int q_\rho^{\mathrm{ske}}(ds,da)\sigma^{i_s}G(\sigma^{i_s},\sigma)\right] = \mathbb{N}\left[\int q_\rho^{\mathrm{ske}}(ds,da)\sigma^{i_s}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\sigma^{i_s}-\lambda_2\sigma^{i_0}}\right]$, on retrouve le résultat. □

3.3.2 Cas brownien

Un résultat similaire a été obtenu dans [7] dans le cas brownien et conditionnellement à $\sigma = 1$. Considérons un mouvement brownien standard d'exposant de Laplace $\psi(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2}$ et notons $\Gamma(de)$ la loi de l'excursion brownienne e. D'après [77], Section VIII.3, le processus des hauteurs du mouvement brownien est donné par $H_t = 2(X_t - I_t)$. Reprenons le calcul fait dans [7] en considérant les marques sous l'épigraphe de H, on obtient

$$\int F(\sigma^{i_s},\sigma)\nu(ds) = \int \Gamma(de) \int_0^\sigma ds \int_0^{2e(s)} dt \frac{F(\sigma^{i_s},\sigma)}{\sigma^{i_s}}$$

où ν désigne la mesure de dislocation de [7]. Le calcul fait dans [7] utilise les lois de deux Bessel 3-dimentionnels indépendants, on obtient alors

$$\int F(\sigma^{i_s},\sigma)\nu(ds) = \frac{1}{4\pi}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} \int_0^\infty d\sigma \frac{F(\sigma z,\sigma)}{\sigma z}.$$

De même que précédemment, on effectue ce calcul en utilisant $F(x,y) = xe^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}$.

$$\begin{aligned} \int F(\sigma^{i_s},\sigma)\nu(ds) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} \int_0^\infty d\sigma e^{-\lambda_1\sigma z - \lambda_2\sigma} \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} \frac{1}{\lambda_1 z + \lambda_2}. \end{aligned}$$

La fin du calcul se fait par deux changements de variables successifs : $z \leftrightarrow sin^2 x$ puis $t \leftrightarrow tanx$.

$$\begin{aligned} \int F(\sigma^{i_s},\sigma)\nu(ds) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\lambda_1 sin^2 x + \lambda_2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dt}{(\lambda_1+\lambda_2)t^2 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

En intégrant une dernière fois, on retrouve le même résultat que dans le Théorème 3.3.1 :

$$\int F(\sigma^{i_s},\sigma)\nu(ds) = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)}}.$$

Chapitre 4

Temps local d'une diffusion aléatoire en milieu Lévy stable

Ce chapitre reprend les résultats de l'article [40] réalisé avec R. Diel et soumis pour publication.

Dans cette partie, on étudie une diffusion aléatoire dans un environnement aléatoire Lévy stable. On s'intéresse au temps local de la diffusion au point où elle passe le plus de temps. On étudie alors la loi de la vallée standard de hauteur c d'un processus de Lévy général puis la loi asymptotique, quand c tend vers l'infini, de cette vallée d'un processus de Lévy α-stable. On obtient ensuite le résultat principal de cette partie : la loi du temps local au minimum de la vallée standard d'une hauteur logarithmique converge vers une fonctionnelle de deux processus de Lévy conditionnés à rester positifs.

4.1 Vallée standard d'un processus de Lévy

4.1.1 Processus de Lévy sur $\mathbb{R}$

Utilisons une définition de Carmona (voir [31]). Un processus aléatoire V à valeurs dans $\mathcal{V}$ (défini dans la Section 1.3.1) est un processus de Lévy sur $\mathbb{R}$ si c'est un processus à accroissements indépendants et stationnaires :

1. $V(0) = 0$,
2. si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des réels, alors les variables aléatoires $(V(x_{i+1}) - V(x_i), 0 \leq i \leq n-1)$ sont indépendantes,
3. pour tous réels x et y, la loi de $V(x+y) - V(x)$ dépend seulement de y.

On note $\mathbb{P}$ la loi du processus de Lévy V.

Remarque 4.1.1. Une définition équivalente d'un processus de Lévy réel à temps réel est donnée par Cheliotis dans [32] : soit $(V^+(t), t \geq 0)$ un processus de Lévy réel partant de 0 et $(V^-(t), t \geq 0)$ un processus indépendant de V^+ et de même loi que $-V^+$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit un processus $(V(t), t \geq 0)$ par

$$V(t) = \mathbf{1}_{t \geq 0} V^+(t) + \mathbf{1}_{t \leq 0} V^-((-t)^-). \tag{4.1}$$

On peut vérifier que ce processus est à trajectoires càd-làg et vérifie les trois hypothèses de la définition précédente. Réciproquement un processus vérifiant les trois hypothèses peut se décomposer en deux processus de Lévy comme dans la formule (4.1).

Définissons $\underline{V}^+$ le processus infimum du processus de Lévy V^+ par : pour tout $t \geq 0$, $\underline{V}^+(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} V^+(s)$ et de même le processus supremum : $\overline{V}^+(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} V^+(s)$. Soit $\mathbb{N}$ la mesure d'excursion du processus $V^+ - \underline{V}^+$ hors de 0. Notons L le temps local de $V^+ - \underline{V}^+$ en 0 et $L^{-1}(t) = \inf\{s \geq 0; L(s) > t\}$ son inverse continu à droite.

Notons $\mathcal{V}^+$ l'espace des fonctions càd-làg $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Pour $c > 0$ fixé, on définit le premier temps de passage au dessus de c d'un processus ω et le dernier temps précédent où ω vaut 0, par : pour tout $\omega \in \mathcal{V}^+$,

$$\tau_c(\omega) = \inf\{t \geq 0; \omega(t) \geq c\} \text{ et } n_c(\omega) = \sup\{t \leq \tau_c(\omega); \omega(t) = 0 \text{ où } \omega(t-) = 0\}.$$

On définit alors

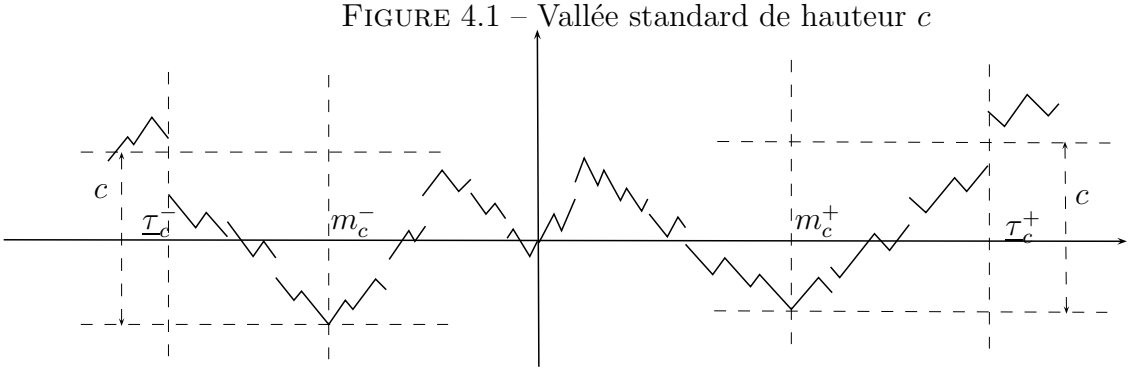
$$\underline{\tau}_c^+ = \tau_c\left(V^+ - \underline{V}^+\right) \ , \ m_c^+ = n_c\left(V^+ - \underline{V}^+\right) \text{ et}$$

$$J_c^+ = \left(V^+(m_c^+) + c\right) \vee \overline{V}^+(m_c^+).$$

On définit, de même, les variables analogues $\underline{\tau}_c^-$, m_c^- et J_c^- à partir du processus V^-.

Remarque 4.1.2. On montre que le minimum de la vallée standard de hauteur c définie dans l'introduction vérifie $\mathfrak{m}_c = m_c^+$ si $J_c^+ < J_c^-$ et $\mathfrak{m}_c = m_c^-$ sinon (voir [67] pour une démonstration dans le cas brownien qui est également valable dans notre cas). Ainsi pour étudier le processus V au voisinage de $\mathfrak{m}_c$, il suffit d'étudier les processus V^+ au voisinage de m_c^+ et V^- au voisinage de m_c^-.

FIGURE 4.1 – Vallée standard de hauteur c



Dans cette section, nous allons étudier le processus de Lévy V^+ défini sur $\mathbb{R}_+$, on note encore $\mathbb{P}$ sa loi. Jusqu'à la fin de cette section, toutes les mesures de probabilités seront des mesures sur $\mathcal{V}^+$. Afin de simplifier les notations, on notera V, m_c et $\underline{\tau}_c$ pour V^+, m_c^+ et $\underline{\tau}_c^+$.

4.1.2 Vallée du processus de Lévy sur $\mathbb{R}_+$

On dit que $(V(t), 0 \leq t \leq \underline{\tau}_c)$ est la vallée standard de hauteur c du processus de Lévy sur $\mathbb{R}_+$.

On dit que 0 est régulier pour $]0, +\infty[$ (resp. pour $]-\infty, 0[$) si $\mathbb{P}(\inf\{t > 0; V(t) > 0\} = 0) = 1$ (resp. $\mathbb{P}(\inf\{t > 0; V(t) < 0\} = 0) = 1$). On ne s'intéressera alors qu'aux processus de Lévy dont 0 est régulier pour $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. On commencera par rappeler quelques propriétés de tels processus données dans [32] qui, en particulier, nous donnent l'existence du triplet $(\mathfrak{p}_c, \mathfrak{m}_c, \mathfrak{q}_c)$ défini en introduction.

Pour $\omega \in \mathcal{V}^+$, le point x_0 est un maximum (resp. minimum) local à gauche si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\omega(x) \leq \omega(x_0-)$ (resp. $\omega(x) \geq \omega(x_0-)$) pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[$. On définit de manière similaire les maximum et minimum locaux à droite.

Lemme 4.1.3. *([32], Lemma 3)*
Soit V un processus de Lévy tel que 0 soit régulier pour $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, alors $\mathbb{P}$-p.s. :

1. *V est continu en ses extrema locaux à gauche et en ses extrema locaux à droite,*
2. *Il n'y a pas 2 extrema locaux où V prend les même valeurs.*

Le point (2) du lemme précédent assure l'unicité du minimum m_c tel que $V(m_c) = \inf_{[0,\underline{\tau}_c]} V$, m_c est donc un minimum à gauche et à droite. Ainsi le processus V est continu en m_c, c'est-à-dire $V(m_c) = V(m_c-)$.

Remarque 4.1.4. Si $\omega \in \mathcal{V}^+$ est càd-làg sur un intervalle I borné, alors il existe $x \in \bar{I}$ tel que $\sup_I \omega = \omega(x) \vee \omega(x-)$ et il existe $y \in \bar{I}$ tel que $\inf_I \omega = \omega(y) \wedge \omega(y-)$. Alors, si ω est continu en ses extrema locaux, on obtient :

$$\exists x \in \bar{I}, \text{ t.q. } \sup_I \omega = \omega(x) \text{ et } \exists y \in \bar{I}, \text{ t.q. } \inf_I \omega = \omega(y).$$

Les processus pré-infimum et post-infimum

Définissons maintenant les processus pré-infimum et post-infimum $(\underset{\leftarrow}{V}_{m_c}(t), 0 \leq t \leq m_c)$ et $(\underset{\rightarrow}{V}_{m_c}(t), 0 \leq t \leq \underline{\tau}_c - m_c)$ par

$$\underset{\leftarrow}{V}_{m_c}(t) = V((m_c - t)^-) - V(m_c),$$

$$\underset{\rightarrow}{V}_{m_c}(t) = V(m_c + t) - V(m_c).$$

Sauf ambiguité, on notera $\underset{\leftarrow}{V}$ pour $\underset{\leftarrow}{V}_{m_c}$ et $\underset{\rightarrow}{V}$ pour $\underset{\rightarrow}{V}_{m_c}$. Notons également respectivement $\underset{\leftarrow}{\mathbb{P}}^c$ et $\underset{\rightarrow}{\mathbb{P}}^c$ les lois des processus $\underset{\leftarrow}{V}$ arrêté au temps m_c et $\underset{\rightarrow}{V}$ arrêté au temps $\tau_c(\underset{\rightarrow}{V})$.

Etudions la loi de ces deux processus, on doit introduire le processus de Lévy conditionné à rester positif.

Processus de Lévy conditionné à rester positif

Utilisons la construction de Bertoin d'un Lévy conditionné à rester positif (voir Section 3, [23]) par concaténation des excursions du Lévy au dessus de $[0, \infty[$.

Remarque 4.1.5. Nous aurons besoin d'une expression du Lévy conditionné à rester positif notamment pour montrer que dans le cas où le processus V est stable, $V^\uparrow$ l'est aussi.

Le processus V est une semi-martingale, sa partie martingale locale continue est soit nulle, soit proportionnelle à un mouvement brownien standard. Notons ℓ le temps local au sens semi-martingale de V en 0, voir par exemple [88]. On considère le temps passé par V dans $]0, \infty[$ et son inverse continu à droite :

$$A_t^+ = \int_0^t ds \mathbf{1}_{V(s)>0} \text{ et } \alpha_t^+ = \inf\{s \geq 0; A_s^+ > t\}.$$

On définit le processus $V^\uparrow$ par : pour tout $t \geq 0$

$$V^\uparrow(t) = V(\alpha_t^+) + \frac{1}{2}\ell_{\alpha_t^+} + \sum_{0<s\leq\alpha_t^+} (0 \vee V(s-))\mathbf{1}_{V(s)\leq 0} - (0 \wedge V(s-))\mathbf{1}_{V(s)>0} \text{ si } t < A_\infty^+$$

et $V^\uparrow(t) = +\infty$ sinon.

Remarque 4.1.6.

- $\mathbb{P}$-p.s. pour tout $t > 0$, $V^\uparrow(t) > 0$.
- Dans le cas où V n'a pas de partie brownienne, $\ell = 0$.
- le processus $V^\uparrow$ tend vers $+\infty$.

On notera $\mathbb{P}^\uparrow$ la loi du processus $V^\uparrow$ et $\hat{\mathbb{P}}^\uparrow$ la loi du processus $\hat{V} = -V$ conditionné à rester positif. Pour un processus Y qui tend vers $+\infty$, on définit l'infimum futur par : pour tout $t \geq 0$, $\underline{\underline{Y}}(t) = \inf_{s\geq t} Y(s)$. Pour $c > 0$, on introduit le temps :

$$\hat{m}_c^\uparrow = n_c(\hat{V}^\uparrow - \underline{\underline{\hat{V}}}^\uparrow).$$

On écrit $\mathbb{P}^{\uparrow,c}$ (resp. $\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow,c}$) la loi du processus $V^\uparrow$ (resp. $\hat{V}^\uparrow$) arrêté au temps $\tau_c(V^\uparrow)$ (resp. $\hat{m}_c^\uparrow$).

Vallée de hauteur c

Contrairement au cas d'un milieu brownien où la loi du processus post-infimum est égale à celle d'un processus de Bessel de dimension 3, dans le cas d'un milieu Lévy, cette loi n'est que absolument continue par rapport à celle d'un Lévy conditionné à rester positif. Pour énoncer la loi de la vallée standard, on utilise la Proposition 4.7 de Duquesne [43].

Pour $t \geq 0$, on définit $U(t) = -V(L^{-1}(t))$ si $L(\infty) > t$ et $U(t) = +\infty$ sinon. Le processus (L^{-1}, U) est appelé le processus d'échelle, c'est un subordinateur. On définit alors la mesure potentielle $\mathcal{U}$ associée à U par : pour toute fonction F mesurable positive

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{U}(dx)F(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^{L(\infty)} dvF(U(v))\right].$$

Pour la mesure d'excursion $\mathbb{N}$ et pour toute fonction mesurable positive f sur $\mathcal{V}$, on note

$$\mathbb{N}(f(v)) = \int f(v)\mathbb{N}(dv).$$

Proposition 4.1.7. *Considérons V un processus de Lévy, qui ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$ et tel que 0 soit régulier pour $]0, +\infty[$ et pour $]-\infty, 0[$.*

Alors les processus pré-infimum et post-infimum $(\underset{\leftarrow}{V}(t), 0 \leq t \leq m_c)$ et $(\underset{\rightarrow}{V}(t), 0 \leq t \leq \tau_c(\underset{\rightarrow}{V}))$ sont indépendants. De plus

1. *La loi $\underset{\leftarrow}{\mathbb{P}}^c$ du processus pré-infimum $(\underset{\leftarrow}{V}(t), 0 \leq t \leq m_c)$ est égale à la loi $\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow,c}$ du processus $(\hat{V}^{\uparrow}(t), 0 \leq t \leq \hat{m}_c^{\uparrow})$.*
2. *La loi $\underset{\rightarrow}{\mathbb{P}}^c$ du processus post-infimum $(\underset{\rightarrow}{V}(t), 0 \leq t \leq \tau_c(\underset{\rightarrow}{V}))$ est absolument continue par rapport à la loi $\mathbb{P}^{\uparrow,c}$ du processus $(V^{\uparrow}(t), 0 \leq t \leq \tau_c(V^{\uparrow}))$.*
   Plus précisément : $\underset{\rightarrow}{\mathbb{P}}^c(d\omega) = f_c\left(\omega(\tau_c(\omega))\right)\mathbb{P}^{\uparrow,c}(d\omega)$
   où pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{f_c(x)} = \mathcal{U}\left([0, x[\right)\mathbb{N}(\tau_c(v) < \infty)$.

Remarque 4.1.8.

1. On peut remarquer que dans le cas où V est un processus de Lévy sans saut positif, $\omega(\tau_c(\omega)) = c$, $\mathbb{P}^{\uparrow,c} - p.s.$. Ainsi $\omega \mapsto f_c(\omega(\tau_c(\omega)))$ est constante égale à 1 et le processus post-infimum est alors égal en loi au processus $V^{\uparrow}$ conditionné à rester positif.
2. $\mathbb{P}$-p.s., $\underset{\leftarrow}{V}$ est continu en ses extrema locaux (voir Lemme 4.1.3), donc en faisant tendre c vers $+\infty$, grâce au point (1) de la Proposition 4.1.7, $\hat{V}^{\uparrow}$ et $V^{\uparrow}$ le sont également.

Démonstration de la Proposition 4.1.7. (1) Démontrons d'abord le premier point de la Proposition 4.1.7 et l'indépendance des deux processus pour $c = 1$ et, pour simplifier les notations, on n'écrit pas l'indice 1.

On cherche à exprimer le processus pré-infimum $\underset{\leftarrow}{V}$ en fonction des excursions de V au dessus de son minimum et du saut de $\underline{V}$ associé. On s'intéresse au couple de processus $(V - \underline{V}, -\underline{V})$ et on en donne une expression sous forme d'excursion. Reprenons la démonstration du Lemme 4 de [24], remarquons que le résultat est valable pour tout processus de Lévy qui ne tend pas vers $-\infty$, voir Theorem 27 de [41].

Pour utiliser la théorie des excursions, on note par $\bar{\mathcal{V}}$ l'ensemble des trajectoires càd-làg $v : [0, \infty[\to \mathbb{R}_+$ telles que

(i) $v(t) > 0$ pour $0 < t < \sigma(v) = \inf\{s > 0, v(s) = 0\}$,

(ii) $v(0) = v(t) = 0$ pour $t \geq \sigma(v)$.

Le processus

$$t \mapsto \big((V - \underline{V})(L^{-1}(t^-) + r), \underline{V}(L^{-1}(t^-)) - \underline{V}(L^{-1}(t)) \ \ ; \ \ 0 \leq r \leq L^{-1}(t) - L^{-1}(t^-)\big)$$

est un processus de Poisson ponctuel à valeurs dans $\bar{\mathcal{V}} \times \mathbb{R}_+$ (voir par exemple [54]). Notons le $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$. Remarquons que $p_1\left(L(\underline{\tau})\right)$ est l'excursion partant de m, c'est-à-dire $L(\underline{\tau})$ est le premier temps t où l'excursion $p_1(t)$ est de hauteur plus grande que 1. Ainsi les processus $(p(t); 0 \leq t < L(\underline{\tau}))$ et $(p(t); t \geq L(\underline{\tau}))$ sont indépendants. Le processus pré-infimum ne dépend que du premier et le processus post-infimum ne dépend que du deuxième, ces deux processus sont donc également indépendants.

Afin de retrouver le processus $\underset{\leftarrow}{V}$, on va inverser d'abord les excursions de $V - \underline{V}$ puis inverser le temps dans chacune de ces excursions.

Notons $\tilde{p}_i = \big(p_i(L(\underline{\tau}) - t)\mathbf{1}_{t<L(\underline{\tau})} + p_i(t)\mathbf{1}_{t\geq L(\underline{\tau})}\,; t \geq 0\big)$ le processus p_i dont les excursions avant $L(\underline{\tau})$ sont changées d'ordre pour $i = 1$ et $i = 2$. La loi du processus ponctuel de Poisson p est stable par inversion de l'ordre de ses excursions avant $L(\underline{\tau})$, on en déduit l'égalité en loi des processus $(\tilde{p}_1(t), \tilde{p}_2(t))$ et $(p_1(t), p_2(t))$.

Utilisons maintenant une notation pour inverser le temps dans chaque excursion. Définissons, pour $v \in \bar{\mathcal{V}}$,

$$[v](s) = \begin{cases} v((\sigma(v) - s)^-) & \text{pour } 0 \leq s \leq \sigma(v) \\ 0 & \text{pour } s > \sigma(v). \end{cases}$$

En appliquant cette transformation à l'égalité en loi précédente, les processus $([\tilde{p}_1(t)], \tilde{p}_2(t)\,; t \geq 0)$ et $([p_1(t)], p_2(t)\,; t \geq 0)$ ont même loi. A partir du premier processus on retrouve le processus $\underset{\leftarrow}{V}$. En, effet, le processus $([\tilde{p}_1(t)]\,; t \geq 0)$ est le processus des excursions de $\underset{\leftarrow}{V}$ au dessus de son infimum futur et le processus $(\tilde{p}_2(t)\,; t \geq 0)$ représente les sauts de l'infimum futur de $\underset{\leftarrow}{V}$. Utilisons le processus $([p_1(t)], p_2(t)\,; t \geq 0)$ pour obtenir un Lévy conditionné à rester positif.

Reprenons les notations de [24], pour $t \geq 0$, on note $g(t) = \sup\{s < t; V(s) = \underline{V}(s)\}$ et $d(t) = \inf\{s > t; V(s) = \underline{V}(s)\}$, les extrémités gauche et droite de l'intervalle d'excursion de $V - \underline{V}$ hors de 0 qui enjambe t ; et

$$\mathcal{R}_{V-\underline{V}}(t) = \begin{cases} (V - \underline{V})((d(t) + g(t) - t)^-) & \text{si } g(t) < d(t) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Voir Figures 4.2 et 4.3.

Le processus des excursions de $\mathcal{R}_{V-\underline{V}}$ au dessus de 0 est le processus ponctuel de Poisson $([p_1(t)], t \geq 0)$ et, de même, le processus des excursions de $\big((V - \underline{V})((m - t)^-)\mathbf{1}_{0\leq t<m} + \ \mathcal{R}_{V-\underline{V}}(t)\mathbf{1}_{t\geq m}, t \geq 0\big)$ au dessus de 0 est le processus ponctuel de Poisson $([\tilde{p}_1(t)], t \geq 0)$. On a une égalité analogue pour les sauts associés à chaque excursion. On obtient ainsi l'égalité en loi des deux processus

$$\big((V - \underline{V})((m - t)^-)\mathbf{1}_{0\leq t<m} + \mathcal{R}_{V-\underline{V}}(t)\mathbf{1}_{t\geq m}, (\underline{V}((m - t)^-) - \underline{V}(m))\mathbf{1}_{0\leq t<m} - \underline{V}(d(t))\mathbf{1}_{t\geq m}\ ;\ t \geq 0\big)$$

et

$$\left(\mathcal{R}_{V-\underline{V}}(t), -\underline{V}(d(t); t \geq 0)\right).$$

Faisons la somme des deux composantes pour $t < m$, on obtient :

$$\left(\underset{\leftarrow}{V}(t); 0 \leq t < m\right) \overset{\mathcal{L}}{=} \left(\mathcal{R}_{V-\underline{V}}(t) - \underline{V}(d(t)); 0 \leq t < m\right).$$

Utilisons le Theorem 28 de [41] : sous $\mathbb{P}$, le processus $\left(\mathcal{R}_{V-\underline{V}}(t) - \underline{V}(d(t)), t \geq 0\right)$ a pour loi la loi du processus $\hat{V}^{\uparrow}$.

Exprimons maintenant le temps final m en fonction du processus $\left(\mathcal{R}_{V-\underline{V}}(t) - \underline{V}(d(t)),\ 0 \leq t \leq m\right)$.

Rappelons que $\underline{\tau} = \inf\{t \geq 0; V(t) - \underline{V}(t) > 1\}$ et que $m = \sup\{t \leq \underline{\tau}; V(t) - \underline{V}(t) = 0\}$. Définissons la variable $\underline{\tau}'$ par $\underline{\tau}' = \tau(\mathcal{R}_{V-\underline{V}})$. Remarquons que $\underline{\tau}$ et $\underline{\tau}'$ appartiennent au même intervalle d'excursion de $V - \underline{V}$. La variable m reste stable par l'inversion du temps dans chacune des excursions de $V - \underline{V}$ et le retournement des excursions avant m, donc $m = \sup\{t \leq \underline{\tau}'; \mathcal{R}_{V-\underline{V}}(t) = 0\}$. Soit

$$Y(t) := \mathcal{R}_{V-\underline{V}}(t) - \underline{V}(d(t)).$$

Montrons que

$$\mathcal{R}_{V-\underline{V}}(t) = Y(t) - \underline{\underline{Y}}(t),$$

pour cela il suffit de montrer que pour $t \geq 0$ fixé, le post-infimum $\underline{\underline{Y}}(t) = \inf_{s \geq t} Y(s)$ est égal à $-\underline{V}(d(t))$.

Sur l'intervalle $[t, d(t)[$, le processus $(\underline{V}(d(s)), t \leq s < d(t))$ est constant et

$$\inf_{t \leq s < d(t)} \mathcal{R}_{V-\underline{V}}(s) = \mathcal{R}_{V-\underline{V}}(d(t)^-) = 0$$

donc $\inf_{t \leq s < d(t)} Y(s) = -\underline{V}(d(t))$. Le processus $\mathcal{R}_{V-\underline{V}}$ est positif et est nul aux temps $\{d(t)^-, t \geq 0\}$ (voir Corollary 1, [90]), et le processus $-\underline{V}(d(.))$ est croissant avec des sauts aux temps $\{d(t), t \geq 0\}$, donc $\underline{\underline{Y}}(t) = \inf_{t \leq s < d(t)} Y(s)$. On déduit que $\underline{\underline{Y}}(t) = -\underline{V}(d(t))$. Ainsi

$$m = \sup\{t \leq \underline{\tau}'; Y(t) - \underline{\underline{Y}}(t) = 0\}.$$

Finalement on obtient : sous $\mathbb{P}$, le processus $\left(\mathcal{R}_{V-\underline{V}}(t) - \underline{V}(d(t))\right)_{0 \leq t \leq m}$ a pour loi la loi du processus $\hat{V}^{\uparrow}$ arrêté au temps $\hat{m}^{\uparrow}$.

(2) Intéressons-nous maintenant au processus post-infimum. Soit F une fonction mesurable bornée sur Ω. On peut écrire

$$\underset{\rightarrow}{\mathbb{E}}^c\left[F(\omega)\right] = \mathbb{N}\left(F\left(v(\cdot \wedge \tau_c)\right) | \tau_c(v) < \infty\right).$$

Utilisons la Proposition 4.7 de [43], pour toute fonction G mesurable bornée sur $\mathcal{V}^+$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\uparrow,c}\left[G(\omega)\right] &= \mathbb{N}\left(G\left(v(\cdot \wedge \tau_c)\right)\mathcal{U}\left([0, v(\tau_c)[\right) | \tau_c < \infty\right)\mathbb{N}\left(\tau_c(v) < \infty\right) \\
&= \mathbb{N}\left(\frac{G(v(\cdot \wedge \tau_c))}{f_c(v(\tau_c))}\Big| \tau_c(v) < \infty\right)
\end{aligned}$$

où on rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{f_c(x)} = \mathcal{U}\left([0, x[\right)\mathbb{N}(\tau_c(v) < \infty)$. En utilisant l'application $G(v(\cdot \wedge \tau_c)) = F\left(v(\cdot \wedge \tau_c)\right) f_c(v(\tau_c))$, on obtient le résultat.

FIGURE 4.2 – Le processus de Lévy $(V(t); t \geq 0)$

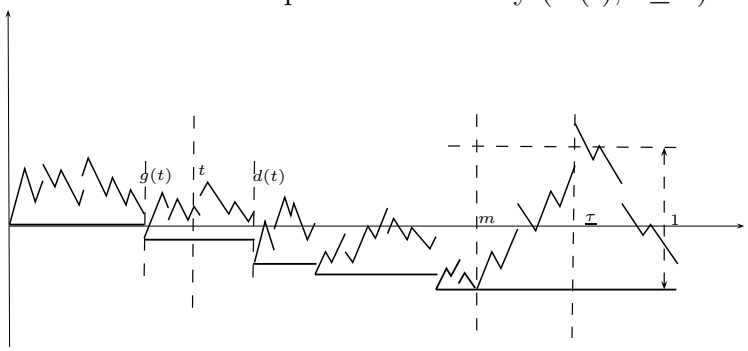


FIGURE 4.3 – Le processus $(\mathcal{R}_{V-\underline{V}}(t) - \underline{V}(d(t)); t \geq 0)$

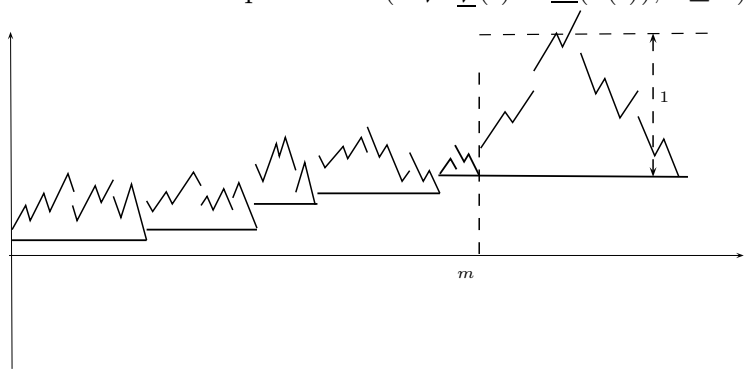
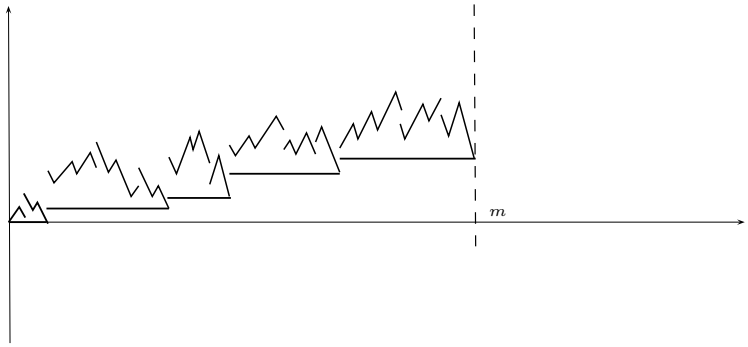


FIGURE 4.4 – Le processus pré-infimum $(\underleftarrow{V}(t); t \geq 0)$



□

4.1.3 Processus de Lévy stable

Définition 4.1.9. *([16], Section VIII)*
Le processus de Lévy V est dit stable d'indice $\alpha \in]0,2]$ si, pour tout $c > 0$

$$(cV(c^\alpha t), t \geq 0) \overset{\mathcal{L}}{=} (V(t), t \geq 0).$$

Pour $\alpha \in]0,1[\cup]1,2[$, la transformée de Fourier d'un processus de Lévy α-stable V est : pour tout $t \geq 0$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[e^{i\lambda V(t)}\right] = e^{-t\psi(\lambda)}$ avec

$$\psi(\lambda) = k|\lambda|^\alpha \left(1 - i\beta \ \ sgn(\lambda)\tan(\frac{\pi\alpha}{2})\right)$$

où $k > 0$ et $\beta \in [-1,1]$.
La mesure de Lévy du processus V est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, elle s'écrit sous la forme :

$$\pi(dx) = c^+ x^{-\alpha-1}\mathbf{1}_{x>0}dx - c^- x^{-\alpha-1}\mathbf{1}_{x<0}dx$$

où c^+ et c^- sont des constantes positives non nulles simultanément telles que $\beta = \frac{c^+ - c^-}{c^+ + c^-}$.

Dans le cas quadratique ($\alpha = 2$), V est un mouvement brownien et son exposant caractéristique est sous la forme : $\psi(\lambda) = k\lambda^2$ où k est une constante positive. La mesure de Lévy est alors nulle.

Pour le cas $\alpha = 1$, V est un processus de Cauchy et $\psi(\lambda) = k|\lambda| + id\lambda$, avec $k > 0$ et $d \in \mathbb{R}$. La mesure de Lévy est alors proportionnelle à $x^{-2}dx$.

Remarque 4.1.10.

Si le processus V est α-stable, alors les processus pré-infimum $\left(c^{-1}\underset{\leftarrow}{V}_{m_c}(c^\alpha t), t \geq 0\right)$ et $\underset{\leftarrow}{V}_{m_1}$ (arrêtés aux temps idoines) ont même loi, de même que les processus post-infimum $\left(c^{-1}\underset{\rightarrow}{V}_{m_c}(c^\alpha t), t \geq 0\right)$ et $\underset{\rightarrow}{V}_{m_1}$.

Lemme 4.1.11. *Soit V un processus de Lévy stable d'indice α et qui n'est pas un drift pur. Alors V est récurrent si et seulement si $\alpha \geq 1$.*

Démonstration. Utilisons une condition de récurrence donnée dans [16], Theorem I.17 : V est récurrent si et seulement si $\int_{-r}^{r} \Re\left[\frac{1}{\psi(\lambda)}\right] d\lambda = +\infty$ où $\Re[z]$ désigne la partie réelle du complexe z.

Pour $\alpha = 1$, $\int_{-r}^{r} \frac{k|\lambda|}{(k^2+d^2)\lambda^2} d\lambda = +\infty$ puisque $k \neq 0$.

Pour $\alpha \neq 1$, $\int_{-r}^{r} \frac{1}{k|\lambda|^\alpha(1+\beta^2\tan^2(\frac{\pi\alpha}{2}))} d\lambda < +\infty$ si et seulement si $\alpha < 1$. □

On se place alors dans le cas d'un processus de Lévy stable d'indice $\alpha \in [1,2]$ et qui n'est pas un drift pur. On a besoin de propriétés supplémentaires sur V, notamment pour pouvoir utiliser les résultats de la Section 4.2.

Lemme 4.1.12. *Soit V un processus de Lévy stable d'indice $\alpha \in [1,2]$ et qui n'est pas un drift pur.*
- *0 est régulier pour $]0,+\infty[$ et pour $]-\infty,0[$,*
- *$\mathbb{P}$-p.s. $\limsup_{t\to+\infty} V(t) = +\infty$ et $\liminf_{t\to+\infty} V(t) = -\infty$.*

Démonstration.

• Le critère de Rogozin (voir Prop. VI.11 de [16]) donne une condition nécessaire et suffisante pour la régularité de 0 :

0 est régulier pour $]0,+\infty[$ (resp. pour $]-\infty,0[$) si et seulement si $\int_0^1 t^{-1}\mathbb{P}(V(t)\geq 0)dt=+\infty$ (resp. $\int_0^1 t^{-1}\mathbb{P}\left(V(t)\leq 0\right)dt=+\infty$).

Remarquons que grâce à la propriété de stabilité du processus V, $\mathbb{P}(V(t)\geq 0)$ ne dépend pas de t, de plus cette probabilité est strictement positive si V n'est pas un drift pur, voir [16], VIII.1. D'après le critère précédent, 0 est donc régulier pour $]0,+\infty[$ et pour $]-\infty,0[$.

• Le fait que $\int_1^\infty t^{-1}\mathbb{P}(V(t)\geq 0)dt=\int_1^\infty t^{-1}\mathbb{P}(V(t)\leq 0)dt=+\infty$ implique que $\mathbb{P}$-p.s. $\limsup_{t\to+\infty}V(t)=+\infty$ et $\liminf_{t\to+\infty}V(t)=-\infty$, voir [16], Theo. VI.12.

□

Lemme 4.1.13. *Considérons V un processus de Lévy stable d'indice $\alpha\in]0,2]$. Alors le processus $V^\uparrow$ est un processus stable d'indice α.*

Démonstration. Pour le cas où $\alpha=2$, le processus de Lévy stable V est un mouvement brownien standard, $V^\uparrow$ est un processus de Bessel de dimension 3 (voir [81]) et donc stable d'indice 2.

Si $\alpha\in]0,2[$, le processus de Lévy stable n'a pas de partie brownienne. Rappelons que α_t^+ est l'inverse continu à droite de $A_t^+=\int_0^t \mathbf{1}_{V(s)>0}ds$. Ces deux processus sont stables d'indice 1. En utilisant la définition donnée dans la Remarque 4.1.5 :

$$V^\uparrow(t)=V(\alpha_t^+)+\sum_{0<s\leq\alpha_t^+}\left(0\vee V(s^-)\right)\mathbf{1}_{V(s)\leq 0}-\left(0\wedge V(s^-)\right)\mathbf{1}_{V(s)>0},$$

on déduit que le processus $V^\uparrow$ est stable d'indice α.

□

Donnons maintenant un résultat asymptotique démontré que Tanaka [104]. Refaisons ici une démonstration détaillée.

Proposition 4.1.14. *(Tanaka [104]) Considérons V un processus de Lévy stable d'indice $\alpha\in[1,2]$ et qui n'est pas un drift pur. Quand c tends vers $+\infty$:*

1. *La loi $\underset{\leftarrow}{\mathbb{P}}^c$ converge faiblement (au sens de Skorohod) vers la loi $\hat{\mathbb{P}}^\uparrow$.*
2. *La loi $\underset{\rightarrow}{\mathbb{P}}^c$ converge faiblement (au sens de Skorohod) vers la loi $\mathbb{P}^\uparrow$.*

Pour démontrer le point (2), on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 4.1.15. *Fixons $\varepsilon>0$, on définit*

$$\sigma_\varepsilon=\sigma_\varepsilon(V^\uparrow)=\inf\left\{t>0/V^\uparrow(t)-\underline{\underline{V}}^\uparrow(t)=0\ \text{et}\ \exists s<t, V^\uparrow(s)-\underline{\underline{V}}^\uparrow(s)>\varepsilon\right\}.$$

Alors le processus $\left(V^\uparrow_{\sigma_\varepsilon}(t),t\geq 0\right)=\left(V^\uparrow(\sigma_\varepsilon+t)-V^\uparrow(\sigma_\varepsilon),t\geq 0\right)$ est indépendant du processus $\left(V^\uparrow(t),\right.$ $\left.0\leq t\leq\sigma_\varepsilon\right)$ et a pour loi $\mathbb{P}^\uparrow$.

Démonstration. D'après le Théorème 28 de [41], le processus $\mathcal{R}_{\overline{V}-V} + V(d(\cdot))$ a pour loi $\mathbb{P}^{\uparrow}$ (où $\mathcal{R}$ et d sont définis comme à la page 88 mais à partir du processus $\overline{V} - V$) . Il suffit donc de montrer le résultat dans le cas où $V^{\uparrow} = \mathcal{R}_{\overline{V}-V} + V(d(\cdot))$. Mais dans ce cas, σ_ε peut se réécrire

$$\sigma_\varepsilon = \inf\left\{t > 0/\overline{V}(t) - V(t) = 0 \text{ et } \exists s < t, \overline{V}(s) - V(s) > \varepsilon\right\}$$

et donc σ_ε est un temps d'arrêt pour V.

Ainsi le processus $(V_{\sigma_\varepsilon}(t), t \geq 0) = (V(\sigma_\varepsilon + t) - V(\sigma_\varepsilon), t \geq 0)$ est un processus de Lévy de loi $\mathbb{P}$ indépendant de $(V(t), 0 \leq t \leq \sigma_\varepsilon)$. On peut vérifier que $V^{\uparrow}_{\sigma_\varepsilon}(t) = \mathcal{R}_{\overline{V}_{\sigma_\varepsilon} - V_{\sigma_\varepsilon}}(t) + V_{\sigma_\varepsilon}(d(t))$ ce qui démontre le lemme. □

Démonstration de la Proposition 4.1.14. (1) D'après la Proposition 4.1.7, les lois $\underset{\leftarrow}{\mathbb{P}}^c$ et $\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow,c}$ sont égales. Quand c tend vers l'infini, $\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}$-p.s., $\hat{m}^{\uparrow}_c$ tend vers l'infini, donc $\underset{\leftarrow}{\mathbb{P}}^c = \hat{\mathbb{P}}^{\uparrow,c}$ converge vers $\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}$.

Montrons maintenant que pour une fonction F bornée continue dans la topologie de Skorohod et telle que $F(\omega) = F(\omega \mathbf{1}_{[-K,K]})$,

$$\lim_{c\to\infty} \underset{\rightarrow}{\mathbb{E}}^c\left[F(\omega)\right] = \mathbb{E}^{\uparrow}\left[F(\omega)\right].$$

Comme $\mathbb{P}$-p.s., $\lim_{c\to\infty} \tau_c(\underset{\rightarrow}{V}_{m_c}) = \infty$, alors $\lim_{c\to\infty} \underset{\rightarrow}{\mathbb{P}}^c(K \leq \tau_c(\omega)) = 1$ et ainsi

$$\lim_{c\to\infty} \underset{\rightarrow}{\mathbb{E}}^c\left[F(\omega)\right] = \lim_{c\to\infty} \underset{\rightarrow}{\mathbb{E}}^c\left[F(\omega), K \leq \tau_c(\omega)\right].$$

Utilisons tout d'abord la stabilité de V. D'après la Remarque 4.1.10,

$$\begin{aligned}
\underset{\rightarrow}{\mathbb{E}}^c\left[F(\omega), K \leq \tau_c(\omega)\right] &= \underset{\rightarrow}{\mathbb{E}}^1\left[F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right), K \leq c^\alpha \tau_1(\omega)\right], \\
&= \mathbb{E}^{\uparrow}\left[F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right) f_1\left(\omega(\tau_1)\right), K \leq c^\alpha \tau_1(\omega)\right]
\end{aligned}$$

où on utilise le résultat (2) de la Proposition 4.1.7, pour la deuxième égalité.

Montrons maintenant l'indépendance asymptotique, sous $\mathbb{P}^{\uparrow}$, de $F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right)$ et de $f_1\left(\omega(\tau_1)\right)$ sous $\mathbb{P}^{\uparrow}$. Pour cela, on exprime ces deux termes en fonction des processus $(\omega(t), 0 \leq t \leq \sigma_\varepsilon)$ et $(\omega(t), \sigma_\varepsilon \leq t)$ où, pour $\varepsilon > 0$, on rappelle :

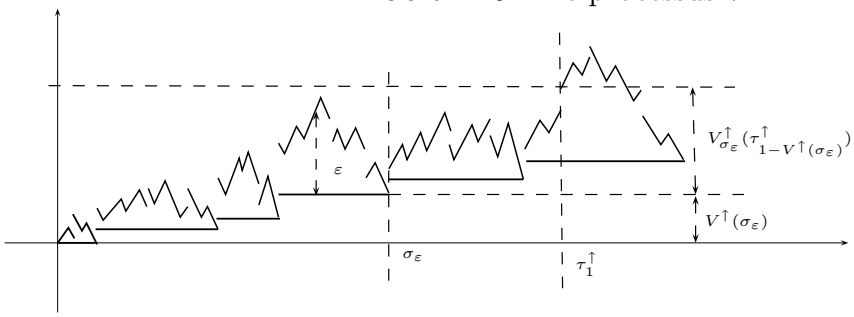
$$\sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon(\omega) = \inf\left\{t > 0/\omega(t) - \underline{\underline{\omega}}(t) = 0 \text{ et } \exists s < t, \omega(s) - \underline{\underline{\omega}}(s) > \varepsilon\right\}.$$

On se fixe $\varepsilon > 0$. Remarquons que $\lim_{c\to+\infty} \mathbb{P}^{\uparrow}\left(K \leq c^\alpha \tau_1\right) = \lim_{c\to+\infty} \mathbb{P}^{\uparrow}\left(K \leq c^\alpha \sigma_\varepsilon\right) = 1$. On peut donc remplacer $K \leq c^\alpha \tau_1$ par $K \leq c^\alpha \sigma_\varepsilon$ dans l'espérance.

De plus, $\mathbb{P}^{\uparrow}$-p.s. $\lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon = 0$. En effet, si il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ $\sigma_\varepsilon > \delta$, alors l'excursion de $\omega - \underline{\underline{\omega}}$ contenant le temps δ est la première. Ce qui est $\mathbb{P}^{\uparrow}$-p.s. impossible puisque 0 est régulier pour le processus V. Ainsi $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}^{\uparrow}\left(\sigma_\varepsilon < \tau_1\right) = 1$, en conditionnant par rapport à $(\omega(t), 0 \leq t \leq \sigma_\varepsilon)$ et en utilisant que $\{\sigma_\varepsilon < \tau^{\uparrow}_1\} = \{\forall t \leq \sigma_\varepsilon, V^{\uparrow}_t < 1\}$ est mesurable par rapport à $(\omega(t), 0 \leq t \leq \sigma_\varepsilon)$, on obtient :

$$\mathbb{E}^{\uparrow}\left[F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right) f_1\left(\omega(\tau_1)\right), c^{-\alpha} K \leq \sigma_\varepsilon < \tau_1\right] = \tag{4.2}$$

FIGURE 4.5 – Le processus $V^{\uparrow}$



$$\mathbb{E}^{\uparrow}\left[F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right)\,\mathbf{1}_{c^{-\alpha}K\leq\sigma_\varepsilon<\tau_1}\,\mathbb{E}^{\uparrow}\left[f_1\left(\omega(\tau_1)\right)\Big|\,(\omega(t),0\leq t\leq\sigma_\varepsilon)\right]\right].$$

Calculons la limite en ε de l'espérance conditionnelle. Quand $\sigma_\varepsilon<\tau_1$, on peut écrire $\omega(\tau_1)=\omega(\sigma_\varepsilon)+\omega_{\sigma_\varepsilon}(\tau_{1-\omega(\sigma_\varepsilon)})$ où $\omega_{\sigma_\varepsilon}$ est la trajectoire repartant de σ_ε : $(\omega_{\sigma_\varepsilon}(t),t\geq 0)=(\omega(\sigma_\varepsilon+t)-\omega(\sigma_\varepsilon),t\geq 0)$, voir la Figure 4.5. D'après le Lemme 4.1.15,

$$\mathbb{E}^{\uparrow}\left[f_1\left(\omega(\tau_1)\right)\Big|\,(\omega(t),0\leq t\leq\sigma_\varepsilon)\right]=\chi(\omega(\sigma_\varepsilon))\text{ où }\chi(x)=\mathbb{E}^{\uparrow}\left[f_1\left(x+\omega(\tau_{1-x})\right)\right].$$

Remarquons que $\mathbb{P}^{\uparrow}$-p.s, $\lim_{\varepsilon\to 0}\omega(\sigma_\varepsilon)=0$. Montrons que $\mathbb{P}^{\uparrow}$-p.s., $\lim_{y\to 1^-}\omega(\tau_y)=\omega(\tau_1)$. $\mathbb{P}^{\uparrow}$-p.s., ω est continu en ses extrema locaux (voir (2) de la Remarque 4.1.8). Ainsi, d'après la Remarque 4.1.4, $\mathbb{P}^{\uparrow}$-p.s., $\sup_{[0,\tau_1)}\omega$ est atteint en un point $x_0\in[0,\tau_1]$ et $\omega(x_0)\leq 1$.

Si $x_0=\tau_1$, alors, $\omega(\tau_1)=1$ et $\lim_{y\to 1^-}1-\omega(\tau_y)\leq\lim_{y\to 1^-}1-y=0$.

Si $x_0<\tau_1$, alors $\omega(x_0)<1$ et donc, pour $1-y$ suffisamment petit, $\tau_1=\tau_y$, donc $\lim_{y\to 1^-}\omega(\tau_y)=\omega(\tau_1)$.

De plus, dans le cas où V est un processus stable d'indice $\alpha\in[1,2[$, une expression explicite de $\mathcal{U}$ est donnée dans l'Exemple 7 de [42] :

$$\mathcal{U}\left([0,x[\right)=\frac{x^{\alpha\rho}}{\Gamma(\alpha\rho+1)}\text{ où }\rho=\mathbb{P}(V(t)\geq 0)\text{ ne dépend pas de }t.$$

Ainsi en utilisant l'expression de f_c donnée dans la Proposition 4.1.7, on obtient : $f_1(x)=\frac{\Gamma(\alpha\rho+1)}{x^{\alpha\rho}\mathbb{N}(\tau_1(\omega)<\infty)}$, donc f_1 est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\chi(\omega(\sigma_\varepsilon))=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}^{\uparrow}\left[f_1\left(\omega(\tau_1)\right)\Big|\,(\omega(t),0\leq t\leq\sigma_\varepsilon)\right]&=\mathbb{E}^{\uparrow}\left[f_1\left(\omega(\tau_1)\right)\right],\\&=1,\ \mathbb{P}^{\uparrow}\text{-p.s.}\end{aligned}\tag{4.3}$$

Puisque $f_1\left(\omega(\tau_1)\right)$ est la densité de $\underset{\rightarrow}{\mathbb{P}}^1$ par rapport à $\mathbb{P}^{\uparrow,1}$.

En utilisant la stabilité du processus $V^{\uparrow}$ énoncée dans le Lemme 4.1.13, on obtient que pour tout $c\geq 0$,

$$\mathbb{E}^{\uparrow}\left[F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right)\right] = \mathbb{E}^{\uparrow}\left[F\left(\omega\right)\right] = \mathbb{E}\left[F\left(V^{\uparrow}\right)\right]$$

Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{c\to\infty}\left|\mathbb{E}^{\uparrow}\left[F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right)\,\mathbf{1}_{c^{-\alpha}K\leq\sigma_\varepsilon}\chi\left(\omega(\sigma_\varepsilon)\right)\mathbf{1}_{\sigma_\varepsilon<\tau_1}\right] - \mathbb{E}^{\uparrow}\left[F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right)\right]\right| = 0.$$

On introduit $\mathbb{E}^{\uparrow}\left[F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right)\mathbf{1}_{c^{-\alpha}K\leq\sigma_\varepsilon}\right]$, et on obtient la borne supérieure suivante :

$$\left|\mathbb{E}^{\uparrow}\left[F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right)\,\mathbf{1}_{c^{-\alpha}K\leq\sigma_\varepsilon}\chi\left(\omega(\sigma_\varepsilon)\right)\mathbf{1}_{\sigma_\varepsilon<\tau_1}\right] - \mathbb{E}^{\uparrow}\left[F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right)\right]\right| \leq$$

$$\mathbb{E}^{\uparrow}\left[\left|F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right)\,\mathbf{1}_{c^{-\alpha}K\leq\sigma_\varepsilon}\left(\chi\left(\omega(\sigma_\varepsilon)\right)\mathbf{1}_{\sigma_\varepsilon<\tau_1}-1\right)\right|\right] + \mathbb{E}^{\uparrow}\left[\left|F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right)\left(\mathbf{1}_{c^{-\alpha}K\leq\sigma_\varepsilon}-1\right)\right|\right].$$

Pour ε fixé, on a $\lim_{c\to+\infty}\mathbb{P}^{\uparrow}\left(c^{-\alpha}K\leq\sigma_\varepsilon\right)=1$. Ainsi pour la deuxième partie, on a :

$$\lim_{c\to\infty}\mathbb{E}^{\uparrow}\left[\left|F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right)\left(\mathbf{1}_{c^{-\alpha}K\leq\sigma_\varepsilon}-1\right)\right|\right] \leq \|F\|_\infty \lim_{c\to\infty}\mathbb{E}^{\uparrow}\left[\left|\mathbf{1}_{c^{-\alpha}K\leq\sigma_\varepsilon}-1\right|\right] = 0,$$

et on obtient pour la première partie :

$$\overline{\lim_{c\to\infty}}\,\mathbb{E}^{\uparrow}\left[\left|F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right)\,\mathbf{1}_{c^{-\alpha}K\leq\sigma_\varepsilon}\left(1-\chi\left(\omega(\sigma_\varepsilon)\right)\mathbf{1}_{\sigma_\varepsilon<\tau_1}\right)\right|\right] \leq \|F\|_\infty\,\mathbb{E}^{\uparrow}\left[\left|1-\chi\left(\omega(\sigma_\varepsilon)\right)\mathbf{1}_{\sigma_\varepsilon<\tau_1}\right|\right].$$

Faisons tendre ε vers 0, on a $\mathbb{P}^{\uparrow}$-p.s, $\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_\varepsilon = 0$ et on utilise (4.3) pour obtenir la convergence :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{c\to\infty}\mathbb{E}^{\uparrow}\left[\left|F\left(c\,\omega(c^{-\alpha}\cdot)\right)\,\mathbf{1}_{c^{-\alpha}K\leq\sigma_\varepsilon}\left(1-\chi\left(\omega(\sigma_\varepsilon)\right)\mathbf{1}_{\sigma_\varepsilon<\tau_1}\right)\right|\right] = 0.$$

Ceci finit la démonstration.

□

4.2 Diffusion en environnement aléatoire

4.2.1 Comportement asymptotique d'une diffusion en milieu stable

On suppose que la diffusion X en milieu aléatoire V est définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ et on note comme précédemment $\mathbb{P}$ la loi de V. Par contre, on revient à un cas général pour le milieu : *dans toute cette section, on suppose uniquement que V est un processus càd-làg α-stable sur $\mathbb{R}$ ($\alpha>0$) et pas nécessairement un processus de Lévy.* Nous allons montrer que le comportement asymptotique de L_X, le temps local de la diffusion, ne dépend plus que de l'environnement.

Commençons par donner quelques propriétés de X. On peut montrer (voir par exemple [92]) qu'il existe un mouvement brownien B indépendant de V tel que $\mathcal{P}$-p.s.,

$$\forall t>0,\quad X(V,t) = S_V^{-1}\left(B\left(T_V^{-1}(t)\right)\right) \tag{4.4}$$

où

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad S_V(x) := \int_0^x e^{V(y)}\mathrm{d}y$$

et

$$\forall t \geq 0, \quad T_V(t) := \int_0^t e^{-2V(S_V^{-1}(B(s)))} \mathrm{d}s.$$

Pour simplifier les notations, on écrit, quand il n'y a pas de confusion possible, S et T pour respectivement S_V et T_V. De (4.4) et de la formule des temps d'occupation (1.3.2), on déduit une expression du processus des temps locaux de X en fonction du processus L_B des temps locaux du mouvement brownien B. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$,

$$L_X(t,x) = e^{-V(x)} L_B(T^{-1}(t), S(x)). \tag{4.5}$$

Pour étudier le comportement asymptotique de la diffusion, nous allons tout d'abord travailler à milieu fixé.

Comme Brox dans le cas de l'environnement brownien (voir [30]), on introduit le processus $X_c(V,t) := X(cV,t)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $V^c(x) := c^{-1}V(c^\alpha x)$. Nous avons un lien direct entre les lois de X_c et de X :

Lemme 4.2.1. *Pour tout c fixé, conditionnellement à V, les processus $\left(c^{-\alpha}X(V, c^{2\alpha}t); t \geq 0\right)$ et $(X_c(V^c, t); t \geq 0)$ ont même loi.*

Démonstration. Cela se vérifie aisément en utilisant (4.4). □

Par la définition du temps local (formule (1.3.2)), on obtient une relation analogue pour les processus des temps locaux :

Corollaire 4.2.2. *Pour tout c fixé, conditionnellement à V,*
les processus $\left(L_{X_c(V^c,\cdot)}(t,x); t \geq 0, x \in \mathbb{R}\right)$ et $\left(c^{-\alpha}L_{X(V,\cdot)}(c^{2\alpha}t, c^\alpha x); t \geq 0, x \in \mathbb{R}\right)$ ont même loi.

Nous allons tout d'abord énoncer un résultat de convergence pour le processus L_{X_c}, pour en déduire ensuite un résultat de convergence pour le processus L_X. Le comportement asymptotique de L_{X_c} à milieu fixé peut être décrit uniquement en fonction du milieu pourvu que celui-ci soit un "bon" environnement au sens de la définition suivante :

Définition 4.2.3. *On appelle bon environnement toute trajectoire $\omega \in \mathcal{V}$ vérifiant*

1. $\liminf_{x\to\pm\infty} \omega(x) = -\infty$ *et* $\limsup_{x\to\pm\infty} \omega(x) = +\infty$,
2. *ω est continue en ses extrema locaux et les valeurs prises par ω en ces points sont 2 à 2 distinctes.*

On note $\widetilde{\mathcal{V}}$ l'ensemble des bons environnements.

Remarquons que lorsque V est à trajectoires dans $\widetilde{\mathcal{V}}$, le minimum $\mathfrak{m}_c(V)$ de la vallée standard de V de hauteur c (voir Section 4.1.2) est bien défini.

On peut alors définir, pour tout $c > 0$, pour tout $r > 0$,

$$a_{cr} = a_{cr}(V_{\mathfrak{m}_c}) := \sup\{x \leq 0 / V_{\mathfrak{m}_c}(x) > cr\} \text{ et}$$
$$b_{cr} = b_{cr}(V_{\mathfrak{m}_c}) := \inf\{x \geq 0 / V_{\mathfrak{m}_c}(x) > cr\}$$

où pour $x \in \mathbb{R}$, $(V_x(y), y \in \mathbb{R})$ est l'environnement recentré en x : pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$V_x(y) := V(x+y) - V(x).$$

On peut maintenant énoncer le résultat à milieu fixé, on note $\mathcal{P}_V$ la mesure de probabilité $\mathcal{P}(\cdot|V)$.

Proposition 4.2.4.
On se donne deux réels $K > 0$ et $r \in]0,1[$, et h une fonction réelle telle que $\lim_{c\to\infty} h(c) = 1$. Si V est un bon environnement, alors pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{c\to+\infty} \mathcal{P}_V\left(\sup_{-K\le x\le K}\left|\frac{L_{X_c}(e^{ch(c)},\mathfrak{m}_1+c^{-\alpha}x)}{e^{ch(c)}}\frac{\int_{a_r}^{b_r} e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(y)}\mathrm{d}y}{e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(c^{-\alpha}x)}}-1\right|\le\delta\right)=1.$$

Démonstration. On adapte la démonstration de la Proposition 3.1 de [13]. La démonstration de [13] utilise la continuité du milieu au minimum $\mathfrak{m}_1$ et la renormalisation en temps et en espace (expliquée en introduction) de la diffusion pour obtenir un mouvement brownien ainsi que pour son temps local. Ces propriétés sont encore vraies pour le processus de Lévy. Donnons ici une esquisse du raisonnement, pour plus de détails on se référera à [13].

Dans cette démonstration, on travaille conditionnellement à un milieu V. Au lieu d'étudier le temps local jusqu'au temps $e^{ch(c)}$, on l'étudie jusqu'au temps $\sigma_{X_c}(e^{ch(c)},\mathfrak{m}_1)$ où la diffusion X_c a passé un temps $e^{ch(c)}$ au point $\mathfrak{m}_1$:

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall r\le 0,\qquad \sigma_{X_c}(r,x):=\inf\{t\le 0, L_{X_c}(t,x)\ge r\}.$$

On démontre que ce temps $\sigma_{X_c}(e^{ch(c)},\mathfrak{m}_1)$ est équivalent, en probabilité, à la multiplication des deux temps $e^{ch(c)}$ et $\int_{a_r}^{b_r} e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(y)}dy$. C'est-à-dire au sens suivant :

$$\forall\delta>0,\qquad \lim_{c\to+\infty}\mathcal{P}_V\left(\left|\frac{\sigma_{X_c}(e^{ch(c)},\mathfrak{m}_1)}{e^{ch(c)}\int_{a_r}^{b_r} e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(y)}dy}-1\right|\le\delta\right)=1. \tag{4.6}$$

Il suffit ensuite de montrer l'équivalence, en probabilité, uniforme sur tout compact $[-K,K]$:

$$\forall\delta>0,\qquad \lim_{c\to+\infty}\mathcal{P}_V\left(\sup_{-K\le x\le K}\left|\frac{L_{X_c}\left(\sigma_{X_c}(e^{ch(c)},\mathfrak{m}_1),\mathfrak{m}_1+c^{-\alpha}x\right)}{e^{ch(c)-cV_{\mathfrak{m}_1}(c^{-\alpha}x)}}-1\right|\le\delta\right)=1. \tag{4.7}$$

Pour démontrer (4.6), on sépare le temps $\sigma_{X_c}(e^{ch(c)},\mathfrak{m}_1)$ en deux parties : le premier temps où la diffusion X_c atteint le minimum $\mathfrak{m}_1$ que l'on notera $\tau_{X_c}(\mathfrak{m}_1)$ et le temps passé ensuite par X_c autour du minimum jusqu'au moment où la diffusion passe un temps $e^{ch(c)}$ au minimum :

$$\sigma_{X_c}(e^{ch(c)},\mathfrak{m}_1)=\tau_{X_c}(\mathfrak{m}_1)+\left(\sigma_{X_c}(e^{ch(c)},\mathfrak{m}_1)-\tau_{X_c}(\mathfrak{m}_1)\right)$$

Pour démontrer (4.7), on fait la même démarche. On sépare le temps local $L_{X_c}\left(\sigma_{X_c}(e^{ch(c)},\mathfrak{m}_1),\ \mathfrak{m}_1+c^{-\alpha}x\right)$ en deux termes : le temps local de la diffusion X_c au temps de première atteinte du minimum $(\tau_{X_c}(\mathfrak{m}_1))$ et au point $\mathfrak{m}_1+c^{-\alpha}x$, et le temps local entre les temps $\tau_{X_c}(\mathfrak{m}_1)$ et $\sigma_{X_c}(e^{ch(c)},\mathfrak{m}_1)$:

$$\begin{aligned}L_{X_c}\left(\sigma_{X_c}(e^{ch(c)},\mathfrak{m}_1),\mathfrak{m}_1+c^{-\alpha}x\right)&=L_{X_c}(\tau_{X_c}(\mathfrak{m}_1),\mathfrak{m}_1+c^{-\alpha}x)\\&\quad+\left(L_{X_c}(\sigma_{X_c}(e^{ch(c)},\mathfrak{m}_1),\mathfrak{m}_1+c^{-\alpha}x)-L_{X_c}(\tau_{X_c}(\mathfrak{m}_1),\mathfrak{m}_1+c^{-\alpha}x)\right).\end{aligned}$$

Dans ces deux décompositions, les premiers termes qui correspondent au temps jusqu'à l'atteinte du minimum sont négligeables devant respectivement $e^{ch(c)}\int_{a_r}^{b_r} e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(y)}dy$ et $e^{ch(c)-cV_{\mathfrak{m}_1}(c^{-\alpha}x)}$, seuls les temps passés par la diffusion au fond des puits de potentiel donnent une contribution. On recentre alors la diffusion au minimum $\mathfrak{m}_1$ et on utilise la propriété de Markov fort.

□

On peut maintenant repasser au processus L_X et démontrer le théorème suivant, résultat principal de cette section :

Théorème 4.2.5.
Soit X une diffusion dans un environnement aléatoire V. Si l'environnement V est un bon environnement $\mathbb{P}$-p.s. et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que V soit α-stable alors pour tout $K > 0$, $r \in]0,1[$ et $\delta > 0$,

$$\lim_{c\to+\infty} \mathcal{P}\left(\sup_{-K\le x\le K}\left|\frac{L_X(e^c,\mathfrak{m}_c+x)}{e^c}\frac{\int_{a_{cr}}^{b_{cr}} e^{-V_{\mathfrak{m}_c}(y)}\mathrm{d}y}{e^{-V_{\mathfrak{m}_c}(x)}}-1\right|\le\delta\right)=1.$$

Remarque 4.2.6. Ce théorème s'applique donc aussi dans le cas où le processus V est un mouvement brownien fractionnaire.

Démonstration. Soit $c > 0$, rappelons que $V^c(.) := c^{-1}V(c^\alpha\cdot)$. Par stabilité de V, les processus V et V^c ont même loi. Remarquons tout d'abord que, comme les trajectoires de V sont dans $\widetilde{\mathcal{V}}$, $\mathcal{P}$-p.s., la vallée standard est bien définie et de plus

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}_1(V^c) &= c^{-\alpha}\mathfrak{m}_c(V),\\
a_r(V^c_{\mathfrak{m}_1(V^c)}) &= c^{-\alpha}a_{cr}(V_{\mathfrak{m}_c(V)}),\\
b_r(V^c_{\mathfrak{m}_1(V^c)}) &= c^{-\alpha}b_{cr}(V_{\mathfrak{m}_c(V)}),
\end{aligned}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$V^c_{\mathfrak{m}_1(V^c)}(x) = \frac{1}{c}V_{\mathfrak{m}_c(V)}(c^\alpha x). \tag{4.8}$$

En utilisant le changement de variable $z = c^\alpha y$, on obtient que

$$\int_{a_r}^{b_r} e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(y)}dy = c^{-\alpha}\int_{a_{cr}}^{b_{cr}} e^{V_{\mathfrak{m}_c}(z)}dz.$$

Maintenant en remplaçant t par $c^{-2\alpha}e^c$ et x par $\mathfrak{m}_1(V^c)+c^{-\alpha}x$ dans le Corollaire 4.2.2, on obtient que, conditionnellement à V,

$\left(L_{X_c(V^c,\cdot)}(c^{-2\alpha}e^c,\mathfrak{m}_1(V^c)+c^{-\alpha}x), x\in\mathbb{R}\right)$ et $\left(\frac{1}{c^\alpha}L_{X(V,\cdot)}(e^c,\mathfrak{m}_c(V)+x), x\in\mathbb{R}\right)$ ont même loi. De plus, les processus V et V^c ayant même loi, on obtient finalement que

$\left(L_{X_c(V,\cdot)}(c^{-2\alpha}e^c,\mathfrak{m}_1(V)+c^{-\alpha}x), x\in\mathbb{R}\right)$ et $\left(\frac{1}{c^\alpha}L_{X(V,\cdot)}(e^c,\mathfrak{m}_c(V)+x), x\in\mathbb{R}\right)$ ont même loi sans conditionnement. Ainsi pour tous $c > 0$, $K > 0$, $r \in]0,1[$ et $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}\left(\sup_{-K\le x\le K}\left|\frac{L_{X(V,\cdot)}(e^c,\mathfrak{m}_c(V)+x)}{e^c}\frac{\int_{a_{cr}}^{b_{cr}} e^{-V_{\mathfrak{m}_c}(y)}\mathrm{d}y}{e^{-V_{\mathfrak{m}_c}(x)}}-1\right|<\delta\right) \quad =\\
&\mathcal{P}\left(\sup_{-K\le x\le K}\left|\frac{L_{X_c(V,\cdot)}(c^{-2\alpha}e^c,\mathfrak{m}_1(V)+c^{-\alpha}x)}{c^{-2\alpha}e^c}\frac{\int_{a_r}^{b_r} e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(y)}\mathrm{d}y}{e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(c^{-\alpha}x)}}-1\right|<\delta\right).
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $c^{-2\alpha}e^c = e^{c(1-\frac{2\alpha}{c}\log c)}$ et $\lim_{c\to+\infty}(1-\frac{2\alpha}{c}\log c) = 1$. Ainsi en utilisant la Proposition 4.2.4, on obtient le Théorème 4.2.5. □

4.2.2 Loi limite du temps local renormalisé

On suppose maintenant de nouveau que notre milieu est un processus de Lévy α-stable avec $\alpha \in [1,2]$ et n'est pas un drift pur. De même que la formule (1.3.2), on définit pour tout $\omega \in \mathcal{V}$, $\omega(t) = \omega^+(t)\mathbf{1}_{t\geq 0} + \omega^-((-t)^-)\mathbf{1}_{t\leq 0}$. On reprend les notations de la première partie :

$$\underline{\tau}_c^+ = \inf\{t \geq 0; V^+(t) - \underline{V}^+(t) \geq c\} \quad \text{et} \quad m_c^+ = \sup\{t \leq \underline{\tau}_c^+; V^+(t) - \underline{V}^+(t) = 0\}.$$

Rappelons,

$$J_c^+ = \big(V^+(m_c^+) + c\big) \vee \overline{V}^+(m_c^+)$$

et on définit similairement à partir de V^-, les variables $\underline{\tau}_c^-$, m_c^- et J_c^-. Comme dit précédemment, on peut montrer que le fond de la vallée standard $\mathfrak{m}_c$ est égal à m_c^+ si $J_c^+ < J_c^-$ et est égal à m_c^- sinon.

Proposition 4.2.7. *Soit V un processus de Lévy stable d'indice $\alpha \in [1,2]$ et qui n'est pas un drift pur. Soit $r \in]0,1[$ fixé.*

Quand c tend vers $+\infty$, le processus $\dfrac{e^{-V_{\mathfrak{m}_c}}}{\int_{a_{rc}}^{b_{rc}} e^{-V_{\mathfrak{m}_c}(y)}dy}$ converge en loi (au sens de Skorohod) vers $\dfrac{e^{-\tilde{V}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{V}(y)}dy}$ où la loi de $\tilde{V}$ est $\tilde{\mathbb{P}}$ et, sous $\tilde{\mathbb{P}}(d\omega)$, ω^+ et ω^- sont indépendants et de lois respectives $\mathbb{P}^\uparrow$ la loi d'un processus de Lévy V conditionné à rester positif, et $\hat{\mathbb{P}}^\uparrow$ la loi du processus dual V^- conditionné à rester positif.

Pour démontrer la Proposition 4.2.7, on a besoin des lemmes suivants. Le premier montre que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{V}(y)}dy$ est bien finie.

Lemme 4.2.8.

$$\textit{On a } \tilde{\mathbb{P}}\textit{-p.s. } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{V}(y)}dy < \infty.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ pour le processus $(\hat{V}^\uparrow(x), x \geq 0)$ de loi $\hat{\mathbb{P}}^\uparrow$.

On fixe $t \geq 0$. Démontrons l'intégrabilité de e^{-U_t} où on rappelle que $U(t) = -V(L^{-1}(t))$. Le processus U est un subordinateur, il est donc caractérisé par son exposant de Laplace ψ_U (voir Section III.1, [16]) : pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda U(t)}\right] = e^{-t\psi_U(\lambda)}.$$

Pour tout $t > 0$, $U(t) > 0$ donc $\psi_U(1) > 0$, on obtient alors que $\mathbb{E}\left[e^{-U(t)}\right] = e^{-t\psi_U(1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En reprenant les notations de la Proposition 4.1.7, on a

$$U(t) = -\underline{V}(d(t)) \leq \mathcal{R}_{V-\underline{V}}(t) - \underline{V}(d(t)).$$

D'après cette même proposition, le processus $(\mathcal{R}_{V-\underline{V}}(t)-\underline{V}(d(t)); t \geq 0)$ est égal en loi au processus $\hat{V}^{\uparrow}$. Ainsi, $\mathbb{E}\left[e^{-\hat{V}^{\uparrow}(t)}\right]$ est également intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on déduit que $e^{-\hat{V}^{\uparrow}}$ est $\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow}$-p.s. intégrable.

□

Lemme 4.2.9. *Notons ω une fonction càd-làg positive, telle que $\omega(0) = 0$ et continue en ses extrema. Alors pour tout $a \leq \alpha < 0 < \beta \leq b$, on a*

$$\int_a^b e^{-c\omega(y)}dy \underset{c\to+\infty}{\sim} \int_\alpha^\beta e^{-c\omega(y)}dy.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{-c\omega(y)}dy - \int_\alpha^\beta e^{-c\omega(y)}dy &= \int_a^\alpha e^{-c\omega(y)}dy + \int_\beta^b e^{-c\omega(y)}dy \\ &\leq |\alpha - a|e^{-c\inf_{y\in]a,\alpha[}\omega(y)} + |b-\beta|e^{-c\inf_{y\in]\beta,b[}\omega(y)}.\end{aligned}$$

Puisque ω est positive et continue en ses extrema, pour tout $x \neq 0$, $\inf_{]a,\alpha[}\omega > 0$ et $\inf_{]\beta,b[}\omega > 0$ (voir Remarque 4.1.4), donc $\lim_{c\to+\infty}\int_a^b e^{-c\omega(y)}dy - \int_\alpha^\beta e^{-c\omega(y)}dy = 0$

Par la méthode de Laplace,

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{c}\log\int_a^b e^{-c\omega(y)}dy = \sup_{]a,b[}(-\omega).$$

Puisque $a \leq 0 \leq b$ alors $\sup_{]a,b[}(-\omega) = 0$, ainsi $\int_a^b e^{-c\omega(y)}dy = e^{o(c)}$.

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{\int_a^b e^{-c\omega(y)}dy - \int_\alpha^\beta e^{-c\omega(y)}dy}{\int_a^b e^{-c\omega(y)}dy} \leq \lim_{c\to+\infty} e^{-c\inf_{]a,\alpha[}\omega - c\inf_{]\beta,b[}\omega - o(c)} = 0.$$

Ce qui implique l'équivalence. □

Démonstration de la Proposition 4.2.7. On suit la même démarche que dans la démonstration de la Proposition 4.1.14.

Il suffit de montrer que pour une fonction F bornée continue dans la topologie de Skorohod et telle que $F(\omega) = F(\omega\mathbf{1}_{[-K,K]})$,

$$\lim_{c\to+\infty}\mathbb{E}\left[F\left(\frac{e^{-V_{\mathfrak{m}_c}}}{\int_{a_{rc}}^{b_{rc}} e^{-V_{\mathfrak{m}_c}(y)}dy}\right)\right] = \mathbb{E}\left[F\left(\frac{e^{-\tilde{V}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{V}(y)}dy}\right)\right].$$

En utilisant (4.8) et le fait que $\mathfrak{m}_1 \in \{m_1^-, m_1^+\}$,

$$\mathbb{E}\left[F\left(\frac{e^{-V_{\mathfrak{m}_c}}}{\int_{a_{rc}}^{b_{rc}} e^{-V_{\mathfrak{m}_c}(y)}dy}\right)\right] = \mathbb{E}\left[F\left(\frac{e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(c^{-\alpha}\cdot)}}{c^\alpha\int_{a_r}^{b_r} e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(y)}dy}\right), \mathfrak{m}_1 = m_1^+\right] +$$

$$\mathbb{E}\left[F\left(\frac{e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(c^{-\alpha}\cdot)}}{c^\alpha\int_{a_r}^{b_r}e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(y)}dy}\right),\mathfrak{m}_1=m_1^-\right].$$

Les deux parties de la somme vont se traiter de la même façon, on se contente donc d'étudier la première. D'après le Lemme 4.2.9, il suffit de prendre l'intégrale de $-\mathfrak{m}_1\vee a_r$ à b_r. Par définition, le processus $\left(\tilde{V}(t),t\geq 0\right)$ a pour loi $\mathbb{P}^\uparrow$ et le processus $\left(\tilde{V}((-t)^-),t\geq 0\right)$ a pour loi $\hat{\mathbb{P}}^\uparrow$, de plus ils sont indépendants. On les note alors respectivement $V^\uparrow$ et $\hat{V}^\uparrow$. En utilisant le fait que $\mathfrak{m}_1=m_1^+$ si et seulement si $J_1^+<J_1^-$ et le résultat de la Proposition 4.1.7, on obtient

$$\mathbb{E}\left[F\left(\frac{e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(c^{-\alpha}\cdot)}}{c^\alpha\int_{-\mathfrak{m}_1\vee a_r}^{b_r}e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(y)}dy}\right),\mathfrak{m}_1=m_1^+,\frac{K}{c^\alpha}\leq\mathfrak{m}_1\wedge\tau_1(\underset{\rightarrow}{V})\right]=$$

$$\mathbb{E}\left[F\left(\frac{e^{-c\tilde{V}(c^{-\alpha}\cdot)}}{c^\alpha\int_{-\tilde{a}_r}^{\tilde{b}_r}e^{-c\tilde{V}(y)}dy}\right)f_1\left(V^\uparrow(\tau_1)\right),\tilde{J}_1^+\leq\tilde{J}_1^-,\frac{K}{c^\alpha}\leq\hat{m}_1^\uparrow\wedge\tau_1(V^\uparrow)\right] \tag{4.9}$$

où $\tilde{a}_r$, $\tilde{b}_r$, $\tilde{J}_1^+$ et $\tilde{J}_1^-$ sont définis de manière analogue à a_r, b_r, J_1^+ et J_1^- mais à partir du processus $\tilde{V}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_r &:= \hat{m}_1^\uparrow\vee\inf\left\{x\geq 0/\hat{V}^\uparrow(x)>r\right\},\\
\tilde{b}_r &:= \inf\left\{x\geq 0/V^\uparrow(x)>r\right\},\\
\tilde{J}_1^+ &:= \left(1-\hat{V}^\uparrow(\hat{m}_1^\uparrow)\right)\vee\left(\sup_{]0,\hat{m}_1^\uparrow[}\hat{V}^\uparrow-\hat{V}^\uparrow(\hat{m}_1^\uparrow)\right),\\
\text{et } \tilde{J}_1^- &:= \left(1-W^\uparrow(m_1^\uparrow)\right)\vee\left(\sup_{]0,m_1^\uparrow[}W^\uparrow-W^\uparrow(m_1^\uparrow)\right)
\end{aligned}$$

où $W^\uparrow$ est un processus de loi $\mathbb{P}^\uparrow$ indépendant de $\tilde{V}$. Pour simplifier les notations, on notera $F_{\tilde{a}_r,\tilde{b}_r}$ pour $F\left(\frac{e^{-c\tilde{V}(c^{-\alpha}\cdot)}}{c^\alpha\int_{-\tilde{a}_r}^{\tilde{b}_r}e^{-c\tilde{V}(y)}dy}\right)$.

Comme dans la démonstration de la Proposition 4.1.14, on se fixe $\varepsilon>0$ et on sépare les différents termes de l'espérance en fonction de $(\tilde{V}(t),0\leq t\leq\sigma_\varepsilon^1)$, $(\tilde{V}(t),\sigma_\varepsilon^1\leq t\leq\sigma_2^\varepsilon)$ et $(\tilde{V}(t),\sigma_\varepsilon^2\leq t)$, où :

$$\sigma_\varepsilon^1=\sigma_\varepsilon(\hat{V}^\uparrow)=\inf\left\{t>0/\hat{V}^\uparrow(t)-\underline{\underline{\hat{V}^\uparrow}}(t)=0\text{ et }\exists s<t,\hat{V}^\uparrow(s)-\underline{\underline{\hat{V}^\uparrow}}(s)>\varepsilon\right\},$$

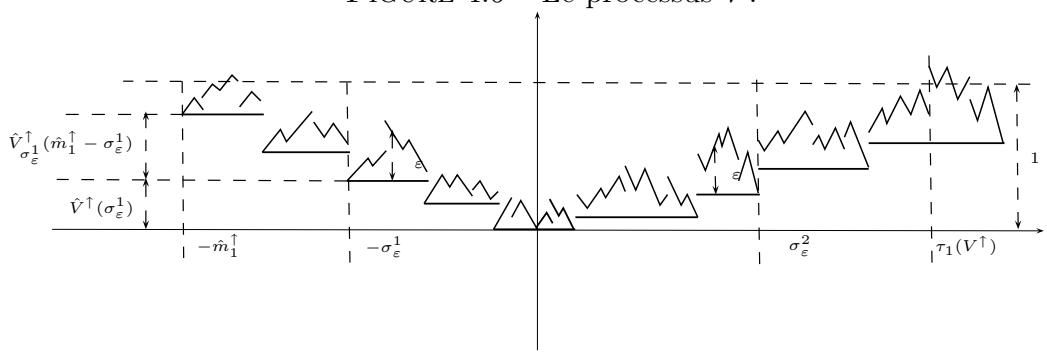
$$\sigma_\varepsilon^2=\sigma_\varepsilon(V^\uparrow)=\inf\left\{t>0/V^\uparrow(t)-\underline{\underline{V^\uparrow}}(t)=0\text{ et }\exists s<t,V^\uparrow(s)-\underline{\underline{V^\uparrow}}(s)>\varepsilon\right\},$$

pour obtenir l'indépendance asymptotique de $F_{\tilde{a}_r,\tilde{b}_r}$, de $V^\uparrow(\tau_1)$ et de $\tilde{J}_1^+$.

Etudions l'hypothèse $\tilde{J}_1^+<\tilde{J}_1^-$, et notons

$$M_+=\sup_{]0,\hat{m}_1^\uparrow[}\hat{V}^\uparrow-\hat{V}^\uparrow(\hat{m}_1^\uparrow)\text{ et }M_\varepsilon=\sup_{]0,\sigma_\varepsilon^1[}\hat{V}^\uparrow-\hat{V}^\uparrow(\hat{m}_1^\uparrow).$$

FIGURE 4.6 – Le processus $\tilde{V}$.



Pour ε suffisamment petit, $M_\varepsilon < M_+$, dans ce cas : $\sigma^1_\varepsilon < \hat{m}^{\uparrow}_1$, $\sup_{]0,\hat{m}^{\uparrow}_1[} \hat{V}^{\uparrow} = \sup_{]\sigma^1_\varepsilon,\hat{m}^{\uparrow}_1[} \hat{V}^{\uparrow}$ et $\hat{V}^{\uparrow}(\hat{m}^{\uparrow}_1) = \hat{V}^{\uparrow}(\sigma^1_\varepsilon) + \hat{V}^{\uparrow}_{\sigma^1_\varepsilon}(\hat{m}^{\uparrow}_1 - \sigma^1_\varepsilon)$. De plus, pour ε suffisamment petit, $\sigma^2_\varepsilon < \tau_1(V^{\uparrow})$, ainsi

$$\tilde{J}^+_1 = \phi_\varepsilon\left(\hat{V}^{\uparrow}(\sigma^1_\varepsilon)\right) \text{ avec } \phi_\varepsilon(x) = \left(1 - x - \hat{V}^{\uparrow}_{\sigma^1_\varepsilon}(\hat{m}^{\uparrow}_1 - \sigma^1_\varepsilon)\right) \vee \left(\sup_{]\sigma^1_\varepsilon,\hat{m}^{\uparrow}_1[} \hat{V}^{\uparrow}_{\sigma^1_\varepsilon} + \hat{V}^{\uparrow}_{\sigma^1_\varepsilon}(\hat{m}^{\uparrow}_1 - \sigma^1_\varepsilon)\right).$$

On raisonne comme dans la démonstration de la Proposition 4.1.14 en utilisant le Lemme 4.1.15. On utilise le Lemme 4.2.9 pour l'intégrale dans la fonction F et on remarque que

$$\lim_{c\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{K}{c^\alpha} \le \hat{m}^{\uparrow}_1 \wedge \tau_1(V^{\uparrow})\right) = \lim_{c\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{K}{c^\alpha} \le \sigma^1_\varepsilon \wedge \sigma^2_\varepsilon\right) = 1.$$

En reprenant (4.9), on obtient

$$\lim_{c\to+\infty} \mathbb{E}\left[F_{\tilde{a}_r,\tilde{b}_r}\, f_1\left(V^{\uparrow}(\tau_1)\right), \tilde{J}^+_1 \le \tilde{J}^-_1, \frac{K}{c^\alpha} \le \hat{m}^{\uparrow}_1 \wedge \tau_1(V^{\uparrow})\right] =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{c\to+\infty} \mathbb{E}\left[F_{\sigma^1_\varepsilon,\sigma^2_\varepsilon}\, \chi_2\left(V^{\uparrow}(\sigma^2_\varepsilon)\right)\, \chi_1\left(\hat{V}^{\uparrow}(\sigma^1_\varepsilon)\right), \frac{K}{c^\alpha} \le \sigma^1_\varepsilon \wedge \sigma^2_\varepsilon, \sigma^1_\varepsilon \le \hat{m}^{\uparrow}_1, \sigma^2_\varepsilon \le \tau_1(V^{\uparrow})\right]$$

où

$$\begin{aligned}
\chi_1(x) &= \mathbb{P}\left(\left(1 - x - \hat{V}^{\uparrow}(\hat{m}^{\uparrow}_1)\right) \vee M_+ < \tilde{J}^-_1\right) \text{ et} \\
\chi_2(x) &= \mathbb{E}\left[f_1\left(x + V^{\uparrow}(\tau_{1-x})\right)\right].
\end{aligned}$$

On a de plus, $\lim_{\varepsilon\to 0} \chi_1\left(\hat{V}^{\uparrow}(\sigma^1_\varepsilon)\right) = \mathbb{P}(\tilde{J}^+_1 \le \tilde{J}^-_1) = \mathbb{P}(\mathfrak{m}_1 > 0)$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} \chi_2\left(V^{\uparrow}(\sigma^2_\varepsilon)\right) = 1$ d'après (4.3). On obtient alors :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{c\to+\infty} \left|\mathbb{E}\left[F_{\tilde{a}_r,\tilde{b}_r}\left(\mathbb{P}(\mathfrak{m}_1 > 0) - \chi_1\left(\hat{V}^{\uparrow}(\sigma^1_\varepsilon)\right)\, \chi_2\left(V^{\uparrow}(\sigma^2_\varepsilon)\right)\right)\right]\right| = 0.$$

On utilise la stabilité de $V^{\uparrow}$ et de $\hat{V}^{\uparrow}$ (voir Lemme 4.1.13). De plus, pour tout $r \in]0,1[$, $\lim_{c\to+\infty} \tilde{a}_{cr} = -\infty$ et $\lim_{c\to+\infty} \tilde{b}_{cr} = +\infty$ p.s., donc $\frac{e^{-\tilde{V}}}{\int_{arc}^{brc} e^{-\tilde{V}(y)}dy}$ converge vers $\frac{e^{-\tilde{V}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{V}(y)}dy}$ dans la topologie de Skorohod sur $[-K,K]$. Ainsi

$$\lim_{c\to+\infty} \mathbb{E}\left[F\left(\frac{e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(c^{-\alpha}\cdot)}}{c^{\alpha}\int_{a_r}^{b_r} e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(y)}dy}\right), \mathfrak{m}_1 = m_1^+\right] = \mathbb{E}\left[F\left(\frac{e^{-\tilde{V}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{V}(y)}dy}\right)\right]\mathbb{P}(\mathfrak{m}_1 > 0).$$

En étudiant de manière similaire le cas $\mathfrak{m}_1 = m_1^-$, on obtient :

$$\lim_{c\to+\infty} \mathbb{E}\left[F\left(\frac{e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(c^{-\alpha}\cdot)}}{c^{\alpha}\int_{a_r}^{b_r} e^{-cV_{\mathfrak{m}_1}(y)}dy}\right), \mathfrak{m}_1 = m_1^-\right] = \mathbb{E}\left[F\left(\frac{e^{-\tilde{V}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{V}(y)}dy}\right)\right]\mathbb{P}(\mathfrak{m}_1 < 0).$$

Ce qui conduit au résultat.

□

En utilisant le Théorème 4.2.5 et la Proposition 4.2.7, on déduit le Théorème 1.3.9 énoncé dans l'introduction.

Notations

Notations utilisées dans la partie Elagage d'un arbre aléatoire de Lévy :

$\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$	l'espace de Skorohod des fonctions càd-làg $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	convergence en loi dans l'espace de Skorohod.
$\overset{\mathcal{L}}{=}$	égalité en loi.
$\mathcal{B}(E)$	ensemble des fonctions $f : E \to R$ mesurables muni de sa tribu borélienne.
$\mathcal{B}_+(E)$	ensemble des fonctions $f : E \to R_+$ mesurables muni de sa tribu borélienne.
$\mathcal{M}(E)$	ensemble des mesures σ-finies sur E muni de la topologie de la convergence vague.
$\mathcal{M}_f(E)$	ensemble des mesures de masse finie sur E muni de la topologie de la convergence faible.
X	processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ.
$X^{(0)}$	processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ_0.
$X^{(1)}$	subordinateur d'exposant de Laplace ϕ_1.
ρ	processus d'exploration associé à X.
$\rho^{(0)}$	processus d'exploration associé à $X^{(0)}$.
ρ^{μ}	processus d'exploration associé à X et tel que $\rho_0^{\mu} = \mu$.
H	processus des hauteurs associé à X.
$H_{s,t} = \inf_{[s,t]} H$.	
$\mathcal{S} = (\rho, m^{\text{nod}}, m^{\text{ske}})$ serpent de Lévy marqué.	
$\mathbb{P}_{\mu}$	loi de ρ partant de μ.
$\mathbb{P}_{\mu,\Pi}$	loi de $\mathcal{S}$ partant de (μ, Π).
$\mathbb{P}_{\ell} = \mathbb{P}_{\ell\delta_0}$.	
$\mathbb{P}^*_{\mu,\Pi}$	loi de $\mathcal{S}$ partant de (μ, Π) et tué quand ρ atteint 0.
Δ_s	saut de X au temps s.
$I_t = \inf_{[0,t]} X$.	
$I_t^s = \inf_{[s,t]} X$.	
$\mathbb{N}$	mesure d'excursion associée à $X - I$ (ou ρ, ou $\mathcal{S}$) hors de 0.
$\mathbb{N}_r$	mesure d'excursion de longueur r.
$\mathcal{J}$	ensemble des temps de sauts de X.
$\mathcal{J}^0$	ensemble des temps de sauts marqués.
$\mathcal{J}^1$	ensemble des temps de sauts non marqués.

$\sigma = \inf\{t > 0; \rho_t = 0\}$.
$\tilde{\sigma} = \inf\{t > 0; \tilde{\rho}_t = 0\}$.
$\sigma^{(0)} = \inf\{t > 0; \rho_t^{(0)} = 0\}$.
π_* loi de σ.
$\mathcal{F}$ filtration engendrée par $\mathcal{S}$.
$\tilde{\mathcal{F}}$ filtration engendrée par $\tilde{\mathcal{S}}$.
$\mathcal{F}^{(\varepsilon),k}$ filtration engendrée par $(\mathcal{S}_s, T_\ell^\varepsilon \leq s \leq S_{\ell+1}^\varepsilon -)_{\ell \in \{0,\dots,k-1\}}$.
Λ processus de fragmentation.
$(\nu_r, r > 0)$ famille des mesures de dislocation associée au processus Λ.

Notations utilisées dans la partie Diffusion aléatoire en milieu Lévy :

$\mathcal{V}$ ensemble des fonctions $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ càd-làg et telles que $\omega(0) = 0$.
$\mathcal{V}^+$ ensemble des fonctions $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ càd-làg et telles que $\omega(0) = 0$.
$\bar{\mathcal{V}}$ ensemble des fonctions $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ càd-làg et telles que $\omega(t) > 0$ pour $0 < t < \sigma(\omega)$ et $\omega(0) = \omega(t) = 0$ pour $t \geq \sigma(\omega)$.
$\sigma(\omega) = \inf\{t > 0, \omega(t) = 0\}$.
$\tilde{\mathcal{V}}$ ensemble des bons environnements.
$\omega^+(x) = \omega(x)$ pour $x \geq 0$.
$\omega^-(x) = \omega((-x)^-)$ pour $x \geq 0$.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$ convergence en loi dans l'espace de Skorohod.
$\overset{\mathcal{L}}{=}$ égalité en loi.
V environnement aléatoire Lévy.
$\hat{V}$ processus de Lévy de même loi que V.
$V^\uparrow$ processus de Lévy V conditionné à rester positif.
$\hat{V}^\uparrow$ processus de Lévy $\hat{V}$ conditionné à rester positif.
$\tilde{V}(x) = V^\uparrow(x)\mathbf{1}_{x \geq 0} + \hat{V}^\uparrow(x)\mathbf{1}_{x \leq 0}$.
$X(\cdot) = X(V, \cdot)$ diffusion aléatoire sur le milieu aléatoire V.
$(L_X(t,x))_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}}$ processus des temps locaux de la diffusion X.
$L_X^*(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} L_X(t,x)$.
$\mathbb{P}$ loi de l'environnement V.
$\mathcal{P}$ loi de la diffusion $X(V, \cdot)$ sur le milieu aléatoire.
$\mathcal{P}_V$ loi de la diffusion conditionnellement à l'environnement V.
$\mathbb{P}^\uparrow$ loi du prcessus $V^\uparrow$.
$\hat{\mathbb{P}}^\uparrow$ loi du processus $\hat{V}^\uparrow$.
$\mathbb{P}^{\uparrow,c}$ loi du prcessus $V^\uparrow$ arrêté au temps $\tau_c(V^\uparrow)$.
$\hat{\mathbb{P}}^{\uparrow,c}$ loi du processus $\hat{V}^\uparrow$ arrêté au temps $\hat{m}^\uparrow$.
$\underset{\leftarrow}{\mathbb{P}}^c$ loi du processus $\underset{\leftarrow}{V}$ arrêté au temps m_c^+.
$\underset{\rightarrow}{\mathbb{P}}^c$ loi du processus $\underset{\rightarrow}{V}$ arrêté au temps $\tau_c(\underset{\rightarrow}{V})$.

$(\mathfrak{p}_c, \mathfrak{m}_c, \mathfrak{q}_c)$ vallée sandard de hauteur c.

$\underline{V}(t) = \inf_{[0,t]} V$.

$\overline{V}(t) = \sup_{[0,t]} V$.

$\underline{\underline{Y}}(t) = \inf_{[t,\infty[} Y$.

$\mathbb{N}$ mesure d'excursion de $V - \underline{V}$ hors de 0.

Bibliographie

[1] R. ABRAHAM et J.-F. DELMAS. *Feller property and infinitesimal generator of the exploration process.* J. Theor. Probab., vol. 20, pp 355-370, 2007.

[2] R. ABRAHAM et J.-F. DELMAS. *Williams' decomposition of the Lévy continuous random tree and simultaneous extinction probability for populations with neutral mutations.* Stoch. Proc. App., vol. 119, pp 1124-1143, 2008.

[3] R. ABRAHAM et J.-F. DELMAS. *Changing the branching mechanism of a continuous state branching process using immigration.* Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 45, pp 226-238, 2009.

[4] R. ABRAHAM et J.-F. DELMAS. *Fragmentation associated with Lévy processes using snake.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. 141, pp 113-154, 2008.

[5] R. ABRAHAM et J.-F. DELMAS. *A continuum-tree-valued Markov process.* prépublication, arXiv :0904.4175.

[6] R. ABRAHAM, J.-F. DELMAS et G. VOISIN. *Pruning a Lévy continuum random tree.* prépublication, arXiv :0804.1027v2.

[7] R. ABRAHAM et L. SERLET. *Poisson snake and fragmentation.* Elect. J. of Probab., vol. 7, 2002.

[8] D. ALDOUS. *The continuum random tree II : an overview.* Proc. Durham Symp. Stochastic Analysis, pp 23-70. Cambridge univ. press edition, 1990.

[9] D. ALDOUS. *The continuum random tree I.* Ann. Probab., vol 19, pp 1-28, 1991.

[10] D. ALDOUS. *The continuum random tree III.* Ann. Probab., vol. 21, pp 248-289, 1993.

[11] D. ALDOUS et J. PITMAN. *The standard additive coalescent.* Ann. Probab., vol. 26, pp 1703-1726, 1998.

[12] P. ANDREOLETTI. *Almost sure estimates for the concentration neighborhood of Sinai's walk.* Stoch. Proc. App., vol. 117, pp 1473-1490, 2007.

[13] P. ANDREOLETTI et R. DIEL. *Limit law of the local time for Brox's diffusion.* Prépublication, arXiv :0809.2195.

[14] A.-L. BASDEVANT. *Fragmentation of ordered partitions and intervals.* Elect. J. Probab., vol. 11, pp 394-417,2006.

[15] J. BERESTYCKI. *Ranked fragmentations.* ESAIM : P&S, vol. 6, pp 157-175, 2002.

[16] J. BERTOIN. *Lévy processes.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[17] J. BERTOIN. *Random fragmentation and coagulation processes.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, vol. 102, Cambridge, 2006.

[18] J. BERTOIN. *The asymptotic bahavior of fragmentation processes.* J. Euro. Math. Soc., vol. 5, pp 395-416, 2003.

[19] J. BERTOIN. *Homogeneous fragmentation processes.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. 121, pp 301-318, 2001.

[20] J. BERTOIN. *Self-similar fragmentations.* Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 38, pp 319-340, 2000.

[21] J. BERTOIN. *A fragmentation process connected to Brownian motion.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. 117, pp 289-301, 2000.

[22] J. BERTOIN. *The structure of the allelic partition of the total population for Galton-Watson processes with neutral mutations.* publication, arXiv :0711.3852v2.

[23] J. BERTOIN. *Splitting at the infimum and excursions in half-lines for random walks and Lévy processes.* Stoch. Proc. App., pp 17-35, 1993.

[24] J. BERTOIN. *Sur la décomposition de la trajectoire d'un processus de Lévy spectrallement positif en son infimum.* Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 27, pp 537-547, 1991.

[25] J. BERTOIN et J.-F. LE GALL. *The Bolthausen-Sznitman coalescent and the genealogy of continuous state branching processes.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. 117, pp 249-266, 2000.

[26] J. BERTOIN, J.-F. LE GALL et Y. LE JAN. *Spatial branching processes and subordination.* Canad. J. of Math., vol. 49, pp 24-54, 1997.

[27] N. H. BINGHAM. *Continuous branching processes and spectral positivity.* Stoch. Proc. App., pp 217-242, 1976.

[28] R.M. BLUMENTHAL. *Excursions of Markov processes.* Birkhäuser, Boston, 1992.

[29] P. BUNEMAN. *A note on the metric properties of trees.* J. Combin. Th. Ser., vol. 17, pp 48-50, 1974.

[30] Th. BROX. *A one-dimensional diffusion process in a Wiener medium.* Ann. Probab., vol. 14, n° 4., pp 1206-1218, 1986.

[31] P. CARMONA. *The mean velocity of a Brownian Motion in a random Lévy potential.* Ann. Probab., vol. 25, n° 4., pp 1774-1788, 1997.

[32] D. CHELIOTIS. *One dimensional diffusion in an asymmetric random environment.* Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 42, n° 6., pp 715-726, 2006.

[33] D. J. DALEY et D. VERE-JONES. *An introduction to the theory of point processes. Vol. II.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second edition, 2008. General theory and structures.

[34] D. A. DAWSON. *Measure-valued Markov processes.* Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour 1991, vol. 1541 de *Lect. Notes Math.*, pp 1-260, Springer Verlag, Berlin, 1993.

[35] J.-F. DELMAS. *Fragmentation at height associated with Lévy processes.* Stoch. Proc. Appl., vol. 117, pp 297-311, 2007.

[36] J.-F. DELMAS. *Height process for super-critical continuous state branching process.* Markov Proc. and Rel. Fields., vol. 14, pp 309-326, 2008.

[37] A. DEMBO, N. GANTERT, Y. PERES et Z. SHI. *Valleys and the maximum local time for random walk in random environment.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. 137, pp 443-473, 2007.

[38] A. DEVULDER. *Almost sure asymptotics for a diffusion process in a drifted Brownian potential.* Prépublication, arXiv :math/0511053.

[39] A. DEVULDER. *The maximum of the local time of a diffusion process in a drifted Brownian potential.* Prépublication, arXiv :math/0604078.

[40] R. DIEL et G. VOISIN. *Local time of a diffusion in a stable Lévy environment.* Prépublication, .

[41] R. A. DONEY. *Fluctuation theory for Lévy processes.* Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour XXXV, 2005.

[42] R. A. DONEY et A. E. KYPRIANOU. *Overshoots and Undershoots of Lévy processes.* Ann. Appl. Probab., vol. 16, n° 1, pp 91-106, 2006.

[43] T. DUQUESNE. *Path decompositions for real Lévy processes.* Ann. Int. Henri Poincaré, vol. 39, n° 2, pp 339-370, 2003.

[44] T. DUQUESNE et J.-F. LE GALL. *Random trees, Lévy processes and spatial branching processes.* vol. 281, Astérisque, 2002.

[45] T. DUQUESNE et J.-F. LE GALL. *Probabilistic and fractal aspects of Lévy trees.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. 131, pp 553-603, 2005.

[46] S. N. ETHIER et T. G. KURTZ. *Markov processes.* Wiley, 1986.

[47] S.N. EVANS. *Snakes and Spiders : Brownian motion on real trees.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. 117, pp 361-386, 2000.

[48] S. N. EVANS. *Probability and real trees.* Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour XXXV, 2005.

[49] S.N. EVANS et J. PITMAN. *Construction of Markovian coaslescent.* Ann. Int. Henri Poincaré, vol. 34, pp 339-383, 1998.

[50] S.N. EVANS, J. PITMAN et A. WINTER. *Rayleigh processes, real trees, and root growth with re-grafting.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. 134, pp 81-126, 2006.

[51] S. EVANS et A. WINTER. *subtree prune and regraph : a reversible real tree-valued Markov process.* Ann. Probab., vol. 34, pp 918-961, 2006.

[52] N. GANTERT, Y. PERES et Z. SHI. *The infinite valley for a recurrent random walk in random environment.* à paraître dans Ann. Inst. Henri Poincaré (arXiv :0708.1739).

[53] A. O. GOLOSOV. *Limit distributions for random walks in random environments.* Soviet. Math. Dokl., vol. 28, pp 18-22, 1983.

[54] P. GREENWOOD et J. PITMAN. *Fluctuation identities for Lévy processes ans splitting at the maximum.* Adv. Appl. Probab., vol. 12, pp 893-902, 1980.

[55] A. GRIMVALL. *On the convergence of a sequence of branching processes.* Ann. Probab. , vol. 2, pp 1027-1045, 1974.

[56] B. HAAS et G. MIERMONT. *The genealogy of self-similar fragmentations with negative index as a continuum random tree.* Elect. J . Probab., vol. 9, pp 57-97, 2004.

[57] I. S. HELLAND. *Continuity of a class of random time transformations.* Stoch. Proc. App. , vol. 7, pp 79-99, 1978.

[58] Y. HU. *Tightness of localization and return time in random environment.* Stoch. Proc. App. , vol. 86, pp 1477-1521, 2000.

[59] Y. HU et Z. SHI. *The local time of simple random walk in random environment.* J. Theor. Probab., vol. 11, pp 765-793, 1997.

[60] Y. HU et Z. SHI. *The limits of Sinai's simple random walk in random environment.* Ann. Probab., vol. 26, pp 1477-1521, 1998.

[61] Y. HU et Z. SHI. *The problem of the most visited site in random environment.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. 116, pp 273-302, 2000.

[62] Y. HU, Z. SHI et M. YOR *Rates of convergence of diffusions with drifted Brownian potentials.* Trans. Am. Math. Soc., vol. 351, pp 3915-3934, 1999.

[63] J. JACOD. *Calcul stochastique et problèmes de martingales.* Lecture Notes in Mathematics, Springer, vol. 714, 1979

[64] M. JIRINA. *Stochastic branching processes with continuous state space.* Czech. Math. J., vol. 8, pp 292-312, 1958.

[65] K. KAWAZU, Y. TAMURA et H. TANAKA. *Localization of diffusion processes in one-dimensional random environment.* J. Math. Soc. Japan, vol. 44, pp 515-555, 1992.

[66] K. KAWAZU et H. TANAKA. *A diffusion process in a Brownian environment with drift.* J. Math. Soc. Japan, vol. 49, pp 189-211, 1997.

[67] H. KESTEN. *The limit distribution of Sinai's random walk in random environment.* Physica, vol. 138A, pp 99-309, 1986.

[68] H. KESTEN, M. KOSLOV et F. SPITZER. *A limit law for random walk in a random environment.* Compositio Mathematica, vol. 30, pp 145-168, 1975.

[69] J.F.C. KINGMAN. *The coalescent.* Stoch. Proc. App. , vol. 13, pp 235-248, 1982.

[70] F. B. KNIGHT. *Random walks and a sojourn density of Brownian motion.* Trans. Amer. Math. Soc., vol. 109, pp 56-86, 1963.

[71] J. LAMPERTI. *Continuous-state branching process.* Bull. Amer. Math. Soc., vol. 73, pp 382-386, 1967.

[72] J. LAMPERTI. *The limit of a sequence of branching processes.* Z. Wahrsch. und Verw. Gebiete, vol. 7, pp 271-288, 1967.

[73] J.-F. LE GALL. *A class pf path-valued Markov processes and its applications to superprocesses.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. 95, pp. 25-46, 1993.

[74] J.-F. LE GALL. *The uniform random tree in a Brownian excursion.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. 96, pp. 369-383, 1993.

[75] J.-F. LE GALL. *A path-valued Markov process and its connection with partial differential equations.* Proc. First Euro. Congress Math., vol. II, pp. 185-212, 1994.

[76] J.-F. LE GALL. *The Brownian snake and solution of $\Delta u = u^2$ in a domain.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. 102, pp. 393-432, 1995.

[77] J.-F. LE GALL. *Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[78] J.-F. LE GALL. *Random trees and applications.* Probability surveys, vol. 2, pp 245-311, 2005

[79] J.-F. LE GALL et Y. LE JAN. *Branching processes in Lévy processes : Laplace functionals of snake and superprocesses.* Ann. Probab., vol. 26, pp 1407-1432, 1998.

[80] J.-F. LE GALL et Y. LE JAN. *Branching processes in Lévy processes : The exploration process.* Ann. Probab., vol. 26, pp 213-252, 1998.

[81] H. P. McKEAN. *Excursions of non-singular diffusion.* Z. Wahrsch. und Verw. Gebiete, vol. 1, pp 230-239, 1963.

[82] G. MIERMONT. *Self-similar fragmentations derived from the stable tree I : splitting at heights.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. 127, pp 423-454, 2003.

[83] G. MIERMONT. *Self-similar fragmentations derived from the stable tree II : splitting at nodes.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. 131, pp 341-375, 2005.

[84] J. NEVEU. *Arbres et processus de Galton-Watson.* Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 22, pp 199-207, 1986.

[85] J. NEVEU et J. PITMAN. *Renewal property of the extrema and tree property of the excursion of a one-dimensional Brownian motion. Séminaire de Probabilitées XXIII.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1372, pp 239-247, 1989.

[86] J. NEVEU et J.W. PITMAN. *The branching process in a brownian excursion. Séminaire de Probabilitées XXIII.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1372, pp 248-257, 1989.

[87] J.W. PITMAN. *Coalescent with multiple collisions.* Ann. Probab., vol. 27, pp 1870-1902, 1999.

[88] P. PROTTER. *Stochastic integration and stochastic differential equations : a new approach.* Applications Math., Springer, Berlin , 1990.

[89] P. REVESZ *Random walk in random and non-random environments.* seconde ed., World Scientific, Singapore , 2005.

[90] L. C. G. ROGERS. *A new identity for real Lévy processes.* Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 20, n° 1, pp 21-34, 1984.

[91] S. SCHUMACHER. *Diffusions with random coefficients.* Contemp. Math., vol. 41, pp 1206-1218, 1986.

[92] Z. SHI. *Sinai's walk via stochastic calculus.* Milieux Aléatoires, Soc. Math. France, Paris., pp 53-74, 2001.

[93] Z. SHI. *A Local time curiosity in random environment.* Stoch. Proc. App. , vol. 76, pp 231-250, 1998.

[94] Ya. G. SINAI. *The limiting behavior of a one-dimensional random walk in random environment.* Theory Probab. Appl., vol. 27, pp 256-268, 1982.

[95] Ya. G. SINAI. *A Random Walk with Random Potential.* Theory Probab. Appl., vol. 38, pp 382-385, 1985.

[96] A. SINGH. *Limiting behavior of a diffusion in an asymptotically stable environment.* Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 43, pp 101-138, 2007.

[97] A. SINGH. *Rates of convergence of a transient diffusion in a spectrally negative potential.* Ann. Probab., vol. 36, pp 279-318, 2008.

[98] F. SOLOMON. *Random walks in a random environment.* Ann. Probab., vol. 3, pp 1-31, 1975.

[99] M. TALET. *Annealed tail estimates for a Brownian motion in a drifted Brownian potential.* Ann. Probab., vol. 35, pp 32-67, 2007.

[100] H. TANAKA. *Limit distributions for one-dimensional diffusion processes in self-similar random environments, in hydrodynamic behavior and interacting particle systems.* IMA Vol. Math. Appl., Springer, vol. 9, pp 189-210, 1987.

[101] H. TANAKA. *Limit theorem for one-dimensional diffusion process in Brownian Environmement.* Lectures Notes in Mathematics, Springer, Berlin et New-York , vol. 1322, pp 156-172, 1988.

[102] H. TANAKA. *Localization of a Diffusion Process in a One-Dimensional Brownian Environmement.* Comm. Pure Appl. Math., vol. 17, pp 755-766, 1994.

[103] H. TANAKA. *Limit theorems for a Brownian motion with drift in a white noise environment.* Chaos Solitons Fractals, vol. 11, pp 1807-1816, 1997.

[104] H. TANAKA. *Lévy processes conditionned to stay positive and diffusions in random environments.* Stoch. Analysis on Large Scale Inter. Systems., Math. Soc. Japan, vol. 39, pp 355-376, 2004.

[105] G. VOISIN *Dislocation measure of the fragmentation of a general Lévy tree.* prépublication, arXiv :0903.4024

Guillaume VOISIN

Elagage d'un arbre de Lévy - Diffusion aléatoire en milieu Lévy.

Résumé : Se donnant un mécanisme de branchement critique ou sous-critique, on définit une procédure d'élagage de l'arbre aléatoire continu de Lévy associé. Cette procédure d'élagage est définie en plaçant des marques sur l'arbre grâce à des techniques de serpent de Lévy. On démontre alors que le sous-arbre obtenu après élagage est encore un arbre aléatoire continu de Lévy. Ce résultat est démontré en utilisant une propriété de Markov spéciale et un problème de martingale pour les processus d'exploration.

On construit ensuite, par couplage, une autre procédure d'élagage qui définit un processus de fragmentation sur l'arbre. On calcule la famille de mesures de dislocation associée à cette fragmentation.

Dans un deuxième travail, on considère une diffusion aléatoire dans un milieu Lévy stable. On montre que le processus des temps locaux renormalisé et recentré au minimum de la vallée standard de hauteur $\log t$, converge en loi vers une fonctionnelle de deux processus de Lévy conditionnés à rester positifs indépendants. Pour démontrer ce résultat, on montre que la loi de la vallée standard est proche de celle de deux processus de Lévy conditionnés à rester positifs concaténés en 0. On obtient également la loi limite du supremum du temps local renormalisé.

Mots-clés : Arbre aléatoire continu (CRT), Elagage, Fragmentation, Processus de Lévy, Diffusion, Milieu aléatoire.

Pruning of a Lévy tree - Random diffusion in a Lévy environment.

Abstract : Given a general critical or sub-critical branching mechanism, we define a pruning procedure of the associated Lévy continuum random tree. This pruning procedure is defined by adding some marks on the tree, using Lévy snake techniques. We then prove that the resulting sub-tree after pruning is still a Lévy continuum random tree. This last result is proved using the exploration process that codes the CRT, a special Markov property and martingale problems for exploration processes.

We then construct, by coupling, an another pruning procedure which define a fragmentation process on the tree. We compute the family of dislocation measures associated with this fragmentation.

In a second work, we consider a one-dimensional diffusion in a stable Lévy environment. We show that the normalized local time process refocused at the bottom of the standard valley with height $\log t$ converges in law to a functional of two independent Lévy processes conditioned to stay positive. To prove this result, we show that the law of the standard valley is close to a two-sided Lévy process conditioned to stay positive. We also obtain the limit law of the supremum of the normalized local time.

Keywords : Continuum random tree (CRT), Pruning, Fragmentation, Lévy process, Diffusion, Random environment.

MAPMO, Université d'Orléans
UFR Sciences
Route de Chartres B.P. 6759 - 45067 Orléans cedex 2 FRANCE