



HAL
open science

Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel d'algèbre. Études des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte.

Marie-Caroline Croset

► To cite this version:

Marie-Caroline Croset. Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel d'algèbre. Études des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte.. domain_other. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2009. Français. NNT: . tel-00444557

HAL Id: tel-00444557

<https://theses.hal.science/tel-00444557v1>

Submitted on 6 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

THÈSE

pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER

Discipline : Mathématiques Appliquées
Spécialité : Didactique des Mathématiques

préparée au Laboratoire d'Informatique de Grenoble – UMR 5217
dans le cadre de l'école Doctorale MSTII
(Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique)
présentée et soutenue publiquement

par

Marie-Caroline CROSET

le 4 décembre 2009

Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte.

Directeur de thèse : Jean-François Nicaud

Co-directeur de thèse : Hamid Chaachoua

JURY

Mme Michèle Artigue, Professeur, Université Paris Diderot	Rapporteur
M. Nicolas Balacheff, Directeur de Recherche, CNRS	Président
Mme Marianna Bosch, Professeur, Universitat Ramon Llull, Barcelona	Rapporteur
M. Hamid Chaachoua, Maître de conférences, Université de Grenoble 1	Co-directeur
M. Jean-Philippe Drouhard, Maître de conférences, Université de Nice	Examineur
Mme Viviane Durand-Guerrier, Professeur, Université de Montpellier 2	Examineur
M. Régis Gras, Professeur Emérite, Ecole Polytechnique, Université de Nantes	Examineur
M. Jean-François Nicaud, Professeur, Université de Grenoble 1	Directeur

Remerciements. . . pour le chemin parcouru

J'ai eu la chance d'avoir deux directeurs de thèse. Merci à vous deux pour votre grande disponibilité, votre confiance en mes travaux, vos compétences et domaines complémentaires et, enfin, votre gentillesse et optimisme.

Je remercie Michèle Artigue d'avoir accepté de longue date d'être rapporteur. L'admiration que je lui porte et sa double compétence pour lire mes travaux ont fait que je tenais beaucoup à sa participation. Merci à Marianna Bosch d'avoir rapporté mes travaux. Tes travaux lumineux sur la TAD et ton point de vue sur l'utilisation que j'en faisais m'ont permis d'avancer. Vos deux rapports m'ont été précieux : ils m'ont permis de prendre un recul important face à ce manuscrit et de synthétiser mes idées. Merci à Viviane de m'avoir fait découvrir des travaux sur les règles et leurs utilisations. Merci aussi à Jean-Philippe Drouhard d'avoir examiné minutieusement mon manuscrit : tes annotations sont une nouvelle source d'inspiration ! Je tiens à remercier Régis Gras qui, bien au-delà de son rôle d'examineur, a cru très tôt en mes travaux et m'a permis d'internationaliser ma recherche. Enfin, merci à Nicolas Balacheff d'avoir non seulement accepté d'être dans mon jury, d'en être son président mais aussi d'avoir montré son intérêt pour mes travaux débutants. Je suis pleine d'admiration pour tes profondes connaissances -en didactique entre-autre- que tu acceptes de partager avec humilité.

Merci aux chercheurs rencontrés qui, par une référence, un commentaire, un nouveau regard ont enrichi et orienté cette thèse. Je pense à Nadine M. qui a accepté de se plonger dans mes données illisibles et d'y réfléchir tout en nageant. Je pense à Marilena B. qui par son hospitalité et son énergie a été plus qu'une collègue le temps d'un voyage au Brésil. Je pense à Annie B. qui a toujours trouvé le temps de m'écouter et de m'orienter. Et je penserai à tous ceux que j'ai oubliés de citer ce jour d'écriture des remerciements. Merci à Sandrine T, Saïd M., Françoise L. et Seb G. d'avoir consacré du temps pour les expérimentations. Merci à Zilora Z., Henri S. et Jacky C. pour toute la logistique qui tourne autour d'une thèse : envoi de dernière minute, *vpn* & co . . . Merci aux doctorants Jojo M. pour le couscous micro-ondes, la tarte-citron au four et le bailey au shaker, Guillaume P. pour ces années d'échanges de mails sur Tex mais aussi du skat à venir, Gwenda C., Celso G., Clément M., Sandra M. et Angela R. parce qu'ils savent ou sauront en rendant leur manuscrit à quel point ces remerciements sont sincères tant une thèse est un travail collaboratif.

Je tiens à remercier les équipes Did@Tic, Seed, Arcade réunies en MeTAH ainsi que l'électron libre DIAM : bien au delà de simples « collègues de travail », vous affichez une exceptionnelle stabilité inter et intra en gentillesse, en attention, en bonne humeur et plaisanteries et bien sûr en interdisciplinarité et compétences scientifiques. . .

Je croyais échapper au rush final que bon nombre de thésard connaît. Il n'en a rien été. Les derniers mois ont été intenses. Merci aux amis d'avoir accepté de ne me voir qu'en coup de vent voire d'avoir été mis à la porte, les croissants apportés à l'improviste à peine avalés, à quelques jours de rendre ma thèse.

Enfin, c'est grâce au dévouement inégalable et sans relâche de mes parents et en particulier Mamouchka-Kadoucha que j'ai pu terminer cette thèse dans les temps que j'avais fini par m'impartir. Merci, Kricrou pour ces mois où tu auras su résister à ta propre fatigue et à ma mauvaise humeur pour me décharger de toute pré-occupation autre que « terminer d'écrire ». Thaïs, grâce à eux, je sais à tes sourires lumineux et tes bras grands ouverts que tu n'auras pas trop ressenti, les premiers mois de ta vie, le stress engendré par l'écriture du point final.

Aux comètes de nos vies.

Résumé

Notre étude consiste à modéliser les connaissances des élèves de collège émanant d'activités de transformations d'expressions algébriques. Elle se base sur les traces des actions des élèves recueillies dans l'environnement informatique Aplusix. L'élève-utilisateur transforme librement des expressions algébriques, selon une consigne, en autant de pas de calcul qu'il le souhaite. La mise en place d'une bibliothèque de règles algébriques, correctes ou erronées, et d'un algorithme de diagnostic, utilisant une heuristique qui prend en compte la syntaxe et la sémantique des expressions transformées et dont la pertinence est validée, permet d'associer aux activités d'un élève une liste de ces règles, pondérées d'un coefficient d'utilisation, constituant une représentation du travail effectué. Le modèle de praxéologie-en-acte proposé pour décrire les connaissances met l'accent sur le décalage qui existe entre les techniques-en-acte utilisées par les élèves et celles préconisées et attendues par l'institution scolaire. Ce modèle permet aussi de décrire la stabilité et la persistance éventuelle de l'utilisation de ces techniques face à des expressions algébriques similaires, aussi bien dans un groupe d'élèves que chez un même élève. L'étude automatisée de milliers de pas de calcul provenant de pays différents sur trois niveaux scolaires, diagnostique la présence importante de praxis-en-acte inter-élèves, justifiées par la mobilisation de technologies-en-acte, et d'une faible proportion de praxis-en-acte intra-élève.

Mots-clés

Didactique des mathématiques,
Environnements Informatiques pour Apprentissage Humain (EIAH),
Praxéologie,
Diagnostic,
Modèle d'élève,
Stabilité.

Students' knowledge modelling in a learning environment for algebra. Study of stable inter-students and intra-student errors in terms of praxis-in-action.

Abstract

Our study consists in modelling high-school students' knowledge used in activities involving transformations of algebraic expressions. It is based on tracks of students' actions when solving algebra exercises within the Aplusix learning environment. The student-user is entirely free to transform a given expression in as many steps as he/she wishes. A library of algebraic rules, correct or erroneous, has been built. The relevance of an automatic diagnosis algorithm using a heuristics based on syntax and semantic of transformed expressions has been shown. The library and the algorithm allow associations of a list of weighted rules to student's activities : this list constitutes a representation of the work done. The model of praxeology-in-action proposed to describe students' knowledge stresses the existing gap between the techniques-in-action used by the students and those recommended and expected by the school institution. This model allows also a description of stability and possible persistence of the use of these techniques to transform similar algebraic expressions by a group of students or by a same student. The automated study, carried out on thousands students' calculation steps coming from different countries and from three school levels, has diagnosed an important presence of inter-students praxis-in-action, justified by the mobilization of technologies-in-action, and a poor proportion of intra-student praxis-in-action.

Keywords

Didactique of Mathematics,
Learning environment,
Praxeology,
Diagnosis,
Student's model,
Stability.

Table des matières

Introduction	1
Problématique	1
Notions d'apprentissage et d'erreurs	2
Le modèle d'apprenant au sein des EIAH	4
Cadre théorique pour la modélisation des connaissances	5
Plan de la thèse	6
1 Le Calcul littéral	9
1.1 Le calcul littéral, un langage?	11
1.1.1 Les objets sémantiques	12
Le polynôme	13
La fonction polynomiale	13
La place du numérique ou le contrôle sémantique	14
La notion de sens	16
1.1.2 Les formes syntaxiques	16
1.1.3 Conclusion	19
1.2 Le calcul littéral, une activité?	20
1.2.1 Une activité de traitement	20
1.2.2 Une activité de transformation	22
Définition d'équivalence	22
Les règles algébriques	23
1.2.3 Conclusion	24
1.3 Le calcul littéral, un sujet scolaire?	25
1.3.1 Tour d'horizon des programmes	25
1.3.2 Les objets transposés	26
1.3.3 Quels traitements? Des genres de tâches	29
Utilisation de la Théorie Anthropologique du Didactique	30
Catégorisation des genres de tâche.	32
Réduire.	33
Développer.	38
Factoriser.	48
Et les équations dans tout ça?	50
1.3.4 Conclusion sur le sujet scolaire	50
1.4 Critiques et Raisons d'Être du Calcul Algébrique	52
1.5 Conclusion sur le calcul littéral	54

2	Modéliser les connaissances des élèves dans un logiciel éducatif	57
2.1	Modèle d'apprenant	58
2.1.1	Modules d'un logiciel éducatif	58
2.1.2	Définition du modèle de l'apprenant	58
2.2	Classification des modules d'apprenant	59
2.2.1	Classification chronologique	60
	Du savoir enseigné à l'apprentissage	60
	Les théories de l'enseignement	60
	Écart des connaissances entre apprenant et expert	62
2.2.2	Classification sémantique	63
	Les observables	63
	Le diagnostic	64
	Le modèle	64
	Les fondements	64
2.2.3	Classification de 18 EIAH	65
	APLUSIX	71
2.3	Les Modules d'apprenant : un problème de fidélité, d'utilité et de faisabilité	75
2.3.1	De la faisabilité	76
2.3.2	De la bonne granularité du modèle et de la fidélité à la réalité	77
2.3.3	De l'utilité	78
2.4	Conclusion sur les EIAH	79
3	Modèle local de l'activité transformationnelle de l'élève	81
3.1	Des règles de transformation	82
3.1.1	Modélisation locale	82
3.1.2	Méthodologie	85
	Restriction du domaine	85
	Utilisation d'APLUSIX	86
	Processus	86
3.1.3	Liste des règles « a priori »	87
	Des premiers protocoles.	89
	Exemple de recherche d'exhaustivité et de généralisation.	90
	Les grands groupes de règles	91
	Développement ou gestion des parenthèses.	92
	Développement d'identités remarquables.	96
	Réduction de sommes de monômes.	96
	Réduction de produits algébriques.	97
	Factorisation de sommes algébriques.	99
	Factorisation d'identités remarquables.	100
3.2	Automatisation du Processus	101
3.2.1	Codage des règles	101
3.2.2	Nombre de règles dans la bibliothèque	108
3.2.3	Les protocoles	111
3.2.4	Les différents mécanismes	111
	L'algorithme en largeur	113
	Les algorithmes heuristiques	113
	Mise en œuvre et représentation des diagnostics	120
3.2.5	Les différents outils d'amélioration	123

	Le principe de l'isolation	125
	Le principe de la qualification	125
	Le principe de l'incompatibilité	126
	Le taux d'application	126
	Différents autres paramètres	126
	Gestion de la redondance des nœuds	127
	La trace d'une règle	127
	Les requêtes en SQL	127
3.2.6	Impact sur la bibliothèque de règles	128
3.2.7	Comparaisons quantitative et qualitative des algorithmes	128
3.3	Résultats bruts : une modélisation locale	132
3.3.1	Les expérimentations	133
3.3.2	Lancement d'ANAÏS sur l'ensemble des expérimentations	134
3.3.3	Seconde validation de l'AHP	136
3.3.4	Premier retour sur les règles	139
	Les règles de coefficient d'utilisation nul	142
	La répartition des règles erronées	145
	À propos d'autres règles	145
3.4	Conclusion sur le modèle local	146
4	Opportunités d'application d'une règle	149
4.1	Types de tâche	150
4.1.1	Opportunité mathématique	151
4.1.2	Découpage en types de tâches	152
4.1.3	Processus du diagnostic automatique des types de tâches.	155
	Association des règles aux types de tâche	155
	Découpage d'un pas de calcul	158
4.1.4	Opportunité-Anaïs	158
4.2	Second retour sur les règles	161
4.2.1	Répartition des types de tâches	162
4.2.2	Répartition des règles erronées	165
	Répartition des règles erronées par types de tâche en fonction des niveaux	165
	Taux des règles erronées	166
	Répartition des règles erronées pour chaque type de tâche	168
4.3	Conclusion sur les opportunités d'application d'une règle	173
5	Modèle global : la praxéologie-en-acte	175
5.1	Présentation du modèle de praxis-en-acte	177
5.1.1	Mise en place théorique	177
5.1.2	Commentaires sur la terminologie utilisée	177
5.2	Méthodologie pour recueillir les praxis-en-acte	181
5.2.1	Distinction inter et intra	181
5.2.2	Interrogation sur la cohérence du modèle	182
5.2.3	Méthodologie	183
5.2.4	Validité de la méthodologie	183
5.3	Types de tâche-en-acte	186
5.3.1	Analyse a priori des variables de contexte	186
	Des variables didactiques ?	187

	Le choix et la liste des variables de contexte.	189
5.3.2	Application du modèle à notre travail	191
5.3.3	Types de tâches-en-acte relevant du développement	193
	Liste des types de tâche-en-acte et techniques-en-acte associées	193
	Les expérimentations.	195
	Les tâches.	195
	Validation des hypothèses de recherche 2 et 3	196
	Autres résultats.	198
5.3.4	Types de tâche-en-acte relevant de la factorisation	199
	Les tâches.	199
	L'Analyse Statistique Implicative.	202
	Mise en place du fichier à traiter.	203
	L'Analyse statistique implicative des réponses.	204
	Liste des types de tâche-en-acte et techniques-en-acte associées	208
5.3.5	Types de tâche-en-acte relevant de la réduction	209
	Liste des types de tâche-en-acte et techniques-en-acte associées.	212
5.3.6	Processus du diagnostic automatique des types de tâches-en-acte	214
5.4	Techniques-en-acte	215
5.4.1	Généralités	215
	Nature du comportement.	216
	Dépendance du taux d'erreur.	216
5.4.2	Objectif : des implications presque vraies	218
	Des Implications	218
	Du Sens au coefficient d'implication	218
5.4.3	Notre choix	220
5.4.4	Les coefficients et les seuils.	221
	Les coefficients d'utilisation d'une règle.	221
	Le seuil s de TA.	221
	Les seuils c_t et c_s de tendance et stabilité.	221
5.5	Conclusion sur le modèle de praxéologie-en-acte	222
6	Les praxis-en-acte inter et intra	225
6.1	Les praxis-en-acte inter	225
6.1.1	Développer	227
	Prise en compte du signe multiplier ?	227
	Praxis-en-acte erronées pour le genre de tâche Développer	227
6.1.2	Factoriser	228
	Type de tâche-en-acte <i>Fact+CoFactId</i>	229
	Type de tâche-en-acte <i>Fact+CoFactRien</i>	230
	Type de tâche-en-acte <i>Fact+CoFactRien+Sum</i>	230
	Type de tâche-en-acte <i>Fact+3Term</i>	231
	Praxis-en-acte erronées pour le genre de tâche Factoriser	232
6.1.3	Réduire	232
	L'impact du degré.	232
	L'impact du signe moins entre les monômes.	232
	Praxis-en-acte erronées pour le genre de tâche Réduire	233
6.1.4	Praxis-en-acte inter erronées par ordre décroissant	234
6.1.5	Technologie-en-acte inter	236

6.2	Les praxis-en-acte intra	242
6.2.1	Répartition de la stabilité et des praxis-en-acte intra	243
6.2.2	Praxis-en-acte intra erronées par ordre décroissant	244
6.2.3	Répartition des praxis-en-acte intra selon le niveau scolaire	249
6.2.4	Répartition des praxis-en-acte intra erronées selon les TA	252
6.2.5	Bilan : une tendance à l'instabilité?	253
6.2.6	Études de cas : vers des praxis-en-acte locales?	255
	En développement.	256
	En factorisation.	256
6.3	Vers une nouvelle hypothèse	260
6.4	Conclusion	263
7	Conclusion et Perspectives	265
7.1	Conclusion	265
7.1.1	Synthèse	265
7.1.2	La question de la stabilité	266
7.1.3	Les technologies-en-acte	268
7.2	Limites et Perspectives	269
7.2.1	Autour de la stabilité	269
7.2.2	Autour du modèle de praxéologie-en-acte	270
A	Programmes et Documents d'accompagnement	273
A.1	Chronologie des apprentissages du calcul littéral de la 6 ^e à la 2 nd e	273
A.2	Le statut de la lettre au collège, notion de variable.	275
A.3	Extrait des programmes de collège des années 98	278
A.4	Extrait des programmes de 4 ^e des années 07	279
B	Différentes définitions ayant trait au calcul littéral	283
B.1	Extrait du dictionnaire des mathématiques élémentaires de [Baruk, 1992]	283
B.2	Extrait du dictionnaire des mathématiques de [Bouvier et al., 1993]	285
C	À propos des règles	287
C.1	Bibliothèque des règles SIM	287
C.1.1	Les règles de développement	287
C.1.2	Les règles de réduction	289
C.1.3	Les règles de factorisation	290
C.1.4	Les règles faibles et règles de décomposition d'une relation	291
C.2	Coefficients d'utilisation des règles diagnostiquées	293
C.2.1	Gestion de la parenthèse.	293
C.2.2	Développement d'identités remarquables.	294
C.2.3	Réduction de sommes de monômes.	294
C.2.4	Réduction de produits algébriques.	295
C.2.5	Factorisation d'identités remarquables	296
C.2.6	Factorisation	296
C.2.7	Règles faibles et autres règles	297

D	À propos d'Anaïs	299
D.1	Exemple de fichier de protocole brut et de protocole filtré	299
D.1.1	Protocole brut	299
D.1.2	Protocole filtré	299
D.2	Code de la distance sémantique	301
D.3	Qualifications des pas de calcul.	304
E	À propos des praxis-en-acte	305
E.1	Répartition des erreurs diagnostiquées avec prise en compte des types de tâche institutionnels	305
E.2	Taux d'utilisation des praxis-en-acte erronées diagnostiquées	307
F	Interviews	311
F.1	Élève E_V de 3 ^e	311
F.2	Élève E_M de 3 ^e	314
F.3	Élèves E_J et E_B de 2 ^{nde}	317
	Lexique	319
	Bibliographie	321
	Manuels Scolaires utilisés	333

Introduction

Lors d'une discussion informelle, C. Laborde pronostiquait que la nouvelle génération de chercheurs en didactique des mathématiques n'allait pas se prévaloir d'une école, d'une théorie en particulier mais allait être capable d'utiliser le panel de théories existantes comme de réels outils. Les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent dans cette orientation. Les termes tels que « praxéologie-en-acte » ou « variables de contexte », qui se positionnent vis à vis des concepts respectifs de praxéologie et de variables didactiques, ne sont pas introduits dans le but d'agrandir simplement le lexique didactique. Ils répondent au besoin de trouver des descripteurs à la jonction, d'une part, de la modélisation très fine et détaillée que peut offrir le quadruplet praxéologique, et, d'autre part, de la modélisation de l'élève et de ses connaissances mises en acte à travers les théorèmes-en-acte. Cette thèse ne part pas d'un paradigme théorique exploité par la suite mais de constats, d'observables que sont les traces recueillies au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre, pour lesquels il a été nécessaire d'introduire un modèle afin de les réorganiser, les interpréter et les exploiter.

Problématique

La didactique se distingue des sciences de l'éducation en s'intéressant non à l'apprentissage en général mais à l'apprentissage d'une discipline en particulier. Cette thèse s'intéresse aux connaissances dans le domaine du calcul littéral. Le lieu d'existence de ce savoir est l'institution scolaire : les classes de 4^e et 3^e, principalement, en ce qui concerne les établissements scolaires français. L'apprenant dont on souhaite modéliser les connaissances est donc *l'élève, sujet de l'institution scolaire*. Cette thèse cherche donc à répondre à une question que l'on pourrait formuler de la manière élémentaire suivante :

Quel est le niveau de maîtrise de l'élève du calcul littéral ?

Afin de comprendre et d'analyser les activités qui relèvent du calcul littéral, il est indispensable de définir ce savoir. Or, en tant qu'objet de l'enseignement des mathématiques, le calcul littéral est nécessairement le transposé de notions mathématiques. Autour de la caractérisation du savoir en jeu, se sont alors posées les questions suivantes :

Quelles sont les notions mathématiques sous-jacentes au calcul littéral ? Le calcul littéral peut-il être défini comme un savoir de référence ? Ou sa définition ne peut-elle se faire qu'en dépendance de son véritable lieu d'existence qui est l'institution scolaire ?
 Dans l'enseignement, le calcul littéral est-il clairement défini ? Ou est-il nécessaire de mettre en place un modèle décrivant le calcul littéral pour que la définition du calcul littéral soit exploitable afin de rendre compte des connaissances de l'élève en référence aux attentes de l'institution ?

Le savoir en jeu étant défini et délimité, il s'est agi de décrire les activités algébriques de l'élève. Un constat a orienté cette description : il fallait sans nul doute prendre en compte les erreurs des élèves.

Notions d'apprentissage et d'erreurs

L'apprentissage n'est pas un simple empilement de connaissances. Il consiste à transformer une connaissance en une autre mieux adaptée à une nouvelle situation, à faire des liens entre différentes acquisitions antérieures. Au moment de l'apprentissage, avant la maîtrise de la connaissance, il y a une phase de déséquilibre (au sens de Piaget), une perturbation : « On portera un jugement de connaissance sur le système [*Sujet – Milieu*] si ce système a la capacité de retrouver un état d'équilibre à la suite d'une perturbation. » [Balacheff, 2002].

En cherchant les limites de cet état, en cherchant à comprendre, l'élève risque des hypothèses, des idées, et dès lors, est confronté au risque de se tromper : « la tentation du connaître ouvre le gouffre de l'erreur possible » [Préface de Chevallard du mémoire de [Pascal, 1980]]. La prise en compte des erreurs est aujourd'hui devenue centrale dans la modélisation de l'apprentissage¹, l'apprentissage passant par la construction de connaissances partielles, mal adaptées, voire erronées. L'erreur est considérée comme constitutive de l'élaboration et de l'évolution des connaissances, comme un témoin du processus d'apprentissage, comme le rapportent ces trois citations :

« Il s'agit donc avant tout de prendre en compte le chemin emprunté par celui qui apprend, même si ce chemin est celui, provisoire, de l'erreur. [...] Si la notion d'obstacle épistémologique est opératoire en pédagogie, cela signifie qu'il ne suffit pas de reconnaître le droit à l'erreur, mais qu'il faut s'engager sur la voie d'une véritable connaissance de l'erreur. » [Sanner, 1983, p. 12, p. 15]

« L'expérience immédiate et usuelle [...] manque précisément de cette perspective d'erreurs rectifiées qui caractérise, à notre avis, la pensée scientifique. [...] En revenant sur un passé d'erreurs, on trouve la vérité en un véritable repentir intellectuel. En fait, on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation. [...] Et murmurons à notre tour, tout entier à la vie intellectuelle : erreur, tu n'es pas un mal. » [Bachelard, 1996, p. 10, p. 14]

Bien que pour Bachelard, les mathématiques soit un cas particulier², Brousseau a, lui, étudié l'erreur dans la construction de certains concepts mathématiques :

« L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fautive, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise. » [Brousseau, 1983, p.171]

1. Il est d'ailleurs amusant de noter que dans la partie « Exercices » des manuels scolaires actuels, se trouvent de plus en plus d'exemples de copies d'élèves où il est demandé de trouver l'erreur ([Audren et al., 2007]).

2. « En fait, l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connaît des périodes d'arrêt. Elle ne connaît pas de périodes d'erreurs. Aucune des thèses que nous soutenons dans ce livre ne vise donc la connaissance mathématique. Elles ne traitent que de la connaissance du monde objectif. » [Bachelard, 1996]

Comme l'atteste cette dernière citation bien connue et malgré différentes explications, interprétations ou modélisations des erreurs, il y a, actuellement dans la communauté de didactique des mathématiques, un consensus de ne considérer l'erreur que quand elle est *significative*. Nous déclinons ce principe en trois caractéristiques qui constituent les hypothèses de ces travaux de thèse :

- la prise en compte de l'erreur doit être *individuelle* : les décisions didactiques doivent dépendre de l'élève et plus elles sont appropriées et ciblées, meilleur sera l'apprentissage. D'anciennes études montrent que la remédiation spécifique et ciblée à chaque élève est efficace [Bloom, 1984, Swan, 1983]. Cependant, pour des raisons avant tout liées aux contraintes temporelles de l'enseignement, la remédiation individuelle en classe n'est guère praticable. D'autant plus que « les erreurs personnelles n'aident pas les autres élèves, seules les raisons communes sont utilisables » [Brousseau, 2000, p. 18]. Il faut donc chercher à repérer des erreurs communes afin d'être plus efficace dans la remédiation. C'est la seconde caractéristique que doit, selon nous, vérifier une erreur :
- l'erreur doit afficher une certaine *stabilité*. Elle doit montrer une certaine persistance et récurrence, ne pouvant, de ce fait, être expliquée par l'étourderie ou le hasard. Cette idée se retrouve dans les travaux de Brousseau [Brousseau, 1983], Charnay [Charnay and Mante, 1992] ou encore Sleeman [Sleeman et al., 1989] pour ne citer qu'eux. La « Repair Theory » [Brown and Van Lehn, 1980] s'intéresse aussi à ce type d'erreurs, que les auteurs nomment des erreurs systématiques (« systematic student errors »). Elle montre qu'il existe des régularités dans les « réparations » (« repair ») que construisent les élèves lorsqu'ils se retrouvent dans une impasse, c'est-à-dire dans une situation où aucune des procédures qu'ils connaissent ne fonctionne. Ces régularités peuvent aussi bien se détecter chez un même sujet qu'entre sujets différents. Payne & Squibb ou Sleeman se sont eux aussi intéressés à la question de la stabilité des erreurs mais cette fois, uniquement chez un même sujet, malgré des résultats peu concluants en terme de fréquence d'une même erreur [Payne and Squibb, 1990, Sleeman, 1986]. Cette notion de récurrence se retrouve aussi dans la notion d'« obstacle » de Duroux et Brousseau : une des caractéristiques de l'obstacle est qu'« après la prise de conscience de son inexactitude, [il] continue de se manifester de façon intempestive et opiniâtre » [Duroux, 1983].
- L'erreur ne doit pas être *isolée* : elle peut être en corrélation avec d'autres erreurs avec lesquelles elle forme une sorte de réseau ou de système d'erreurs. Ce réseau s'appuie sur une logique et sur une conception que les élèves se sont construites. Cette idée se retrouve évidemment dans de nombreux travaux de didactique autour de la notion de conception ou de schèmes [Vergnaud, 1991]. Sur ce sujet, les travaux de Sleeman [Sleeman et al., 1989] ont aussi contribué. En effet, les résultats des expérimentations menées par Sleeman sont moins catégoriques que les études ci-citées de Bloom et Swan. L'impact d'une remédiation adaptée à une erreur particulière d'un élève ne semble pas nécessairement plus significatif sur l'apprentissage que ne l'est un simple ré-enseignement « classique » de la notion en jeu, à moins que cette remédiation porte non seulement sur des erreurs persistantes mais aussi sur un plan conceptuel.

La question initiale peut alors se préciser ainsi :

Comment personnaliser la description de l'activité algébrique ?
 Quelles sont les erreurs à prendre en compte ?
 Existe-t-il un réseau d'erreurs représentatif d'un état de connaissance ?
 Qu'entend-on par « erreur stable » ou « persistante » ? Comment tenir compte
 de la stabilité ? Existe-t-il différentes formes de stabilité ?

Autrement dit, si l'on veut condenser ces questions en une seule :

Comment décrire l'activité algébrique de l'élève, qu'elle soit correcte ou erronée, *individuellement*, en tenant compte de *liens* éventuels entre des erreurs *régulièrement* diagnostiquées ?

Or, des études montrent que dans l'enseignement, par manque de temps mais aussi parfois par volonté institutionnelle, il est difficile de tenir compte des erreurs. Par exemple, El Mouhayer a soumis un questionnaire à des enseignants de collèges français et libanais dont une partie visait à étudier leurs connaissances sur les erreurs des élèves, notamment en termes de description et d'interprétation. L'analyse des résultats montre que la plupart des enseignants n'analyse pas l'erreur et se limite à donner la technique de résolution : « Ils se limitent à donner la réponse attendue ou bien la localisation [de l'erreur] et éventuellement sa description. » [El Mouhayer, 2007, p. 115]. Ceci rejoint aussi ce qu'en dit Brousseau : « les explications qui ne débouchent pas sur une « remédiation » sont inutiles. Or les seules remédiations autorisées et recommandées aux professeurs relèvent d'un répertoire didactique et pédagogique et non « psychologique » que ni leur formation ni leur fonction ne permet d'assumer professionnellement. » [Brousseau, 2000, p. 18]. Ainsi, pour des raisons diverses, il est difficile pour l'enseignant de prendre en compte l'erreur, individuellement tout au moins.

Quant à l'aspect persistance et réseau des erreurs à considérer, il faut reconnaître qu'à moins de comptabiliser à la main la fréquence et le type des erreurs apparues, l'enseignant n'a guère d'outils. En général, il réagit lorsqu'une même erreur est repérée chez plusieurs élèves et non chez un même élève. En revanche, de nombreux travaux de didactique se sont intéressés à l'activité individuelle mais bien souvent sur des effectifs réduits. Dans notre volonté de gérer de grandes bases de données, la question à se poser naturellement est :

Le processus qui consiste à décrire et interpréter (autrement dit diagnostiquer) les erreurs et repérer celles qui sont persistantes pourrait-il être automatisé ?
Les techniques de l'information, en particulier les logiciels éducatifs, pourraient-elles apporter une aide dans ce sens ?

Le modèle d'apprenant au sein des EIAH

Nés dans les années 70, les logiciels éducatifs, appelés aujourd'hui, en France, « Environnements Informatiques pour Apprentissage Humain », ont, dès leur début, cherché à intégrer une composante capable de réagir selon l'utilisateur-apprenant. À partir d'observables enregistrés, une fonction diagnostique permet d'attribuer un modèle descriptif de l'activité de l'apprenant. On parle alors de « modèle d'apprenant » ou « modèle d'élève » : une représentation abstraite de l'apprenant au sein du système, que ce soit sur un plan comportemental, cognitif ou psychologique [Py and Hibou, 2006].

L'automatisation d'un processus de diagnostic semble théoriquement pouvoir répondre aux difficultés soulevées ci-dessus : tenir compte de l'activité algébrique propre à chaque élève, repérer automatiquement des régularités ou encore faire des liens entre différents types d'erreurs. Il n'en reste pas moins de nouvelles questions. Il y a, en fait, deux démarches opposées dans l'élaboration d'un modèle d'élève. Celui-ci peut, d'abord, être construit abstraitement par des didacticiens pour, ensuite, être implanté dans un EIAH. C'est le cas, par exemple, du logiciel PÉPITE [Jean, 2000] qui s'appuie sur l'analyse multidimensionnelle des activités algébriques des élèves élaborée par Grugeon [Grugeon, 1995]. À l'inverse, le modèle peut être construit à partir des observables d'un logiciel existant. Dans ce cas, le modèle d'élève dépend avant tout des

contraintes du logiciel même. Les choix des concepteurs d'enregistrer telle information, de laisser telle liberté à l'utilisateur font de l'EIAH aussi bien un tuteur qu'un micro-monde. De ces choix dépendra, en partie, la qualité du modèle sans qu'aucune corrélation nette existe réellement entre la qualité du modèle d'élève et la liberté de l'utilisateur. En effet, plus l'utilisateur est libre, plus l'information recueillie pourra être riche mais, en revanche, plus il sera difficile de la modéliser, le champ des interprétations étant plus grand. Effectivement, les observables sur lesquels sont construits les modèles sont en général de granularité très fine. Ils doivent être sélectionnés, découpés, relus et interprétés par le chercheur. Ceci pose sans conteste des problèmes d'interprétation, au même titre qu'une copie d'élève. C'est d'ailleurs l'une des difficultés que rencontre Sleeman dans l'analyse diagnostique de ses expérimentations en algèbre élémentaire [Sleeman, 1982b, p. 33]. Pour pallier à cette difficulté, il préconise d'exiger des élèves qu'ils détaillent les pas intermédiaires de transformation des expressions ou équations afin de limiter les fausses interprétations.

Indépendamment de la granularité des traces choisies par les concepteurs de l'EIAH, il reste au chercheur-modélisateur à choisir les observables sur lesquels il va construire son modèle. Ce choix dépend du type de modèle que le chercheur veut obtenir. Self [Self, 1990a] et Resnick [Resnick, 1984] avancent l'hypothèse qu'un diagnostic (et donc un modèle) détaillé n'est pas nécessaire pour prendre des décisions didactiques : "*Error analysis can provide a framework for this kind of instruction, but it is not clear that detailed diagnosis of individual children's buggy rules is required*"³ [Resnick, 1984, p. 13]. Cependant, les buts de construction d'un modèle d'élève peuvent être très diverses. Self [Self, 1988] en propose vingt, regroupés en six grandes catégories qui vont de l'évaluation de l'élève à l'élimination des connaissances erronées. La granularité du diagnostic dépend donc de la fonction choisie pour le modèle.

Une hypothèse de travail s'ajoute aux trois hypothèses listées préalablement : dans cette thèse, l'EIAH est considéré comme une aide possible à la prise en compte individuelle de l'élève et en particulier, de ses connaissances erronées. Toutefois, l'utilisation d'un EIAH fait apparaître de nouvelles difficultés, soulevant de nouvelles questions :

Quelle liberté offre l'EIAH d'algèbre choisi et quel modèle d'élève peut-on en espérer ? Quelles sont les contraintes informatiques imposées par cet EIAH ? Cet EIAH peut-il être situé vis à vis d'autres EIAH d'algèbre ?

Concernant l'exploitation des productions recueillies dans cet EIAH en vue de chercher à interpréter des erreurs significatives, les questions suivantes apparaissent :

De quels observables faut-il partir ? Que conserver des traces enregistrées dans le logiciel ?
 Comment interpréter un observable ? Selon quel modèle ?
 Quelle granularité choisir pour ce modèle ?
 Comment distinguer le bruit d'une connaissance inconsistante ?

Cadre théorique pour la modélisation des connaissances

Il est impossible de rendre compte des connaissances de l'élève dans toute leur complexité. Décrire des connaissances entraîne nécessairement une perte d'informations :

3. « L'analyse des erreurs peut fournir un cadre pour ce genre d'instruction mais cela n'est pas clair qu'un diagnostic détaillé des règles erronées utilisés individuellement par l'élève soit pour cela requis. » [TA]

« On construit un modèle de la réalité qui ne prend en compte que les aspects de cette réalité qui apparaissent pertinents par rapport à la question que l'on se pose à son propos. Ce modèle, comme toujours dans l'activité scientifique, n'est pas l'image la plus complète possible du réel. Tout au contraire ; il en fournit une image (volontairement) appauvrie, et c'est là ce qui fait sa force. Si l'on voulait exprimer ce fait en référence à l'activité du peintre, on pourrait dire que la modélisation se rapproche plus d'une visée de stylisation que d'une volonté d'hyperréalisme. Le modèle n'est pas à proprement parler une copie ou une reproduction du réel, mais un **ajout** au réel, une construction artificielle, mise en relation d'une manière déterminée, supposée adéquate, avec le réel. » [Chevallard, 1989b, p. 60]

Un modèle est donc une réorganisation du réel, une relecture en fonction des fins souhaitées, des questions posées. Le modèle final proposé dans ces travaux repose, en fait, sur une succession de modèles. Les connaissances de l'élève en calcul littéral se révèlent entre-autre dans des activités algébriques mais celles-ci sont trop complexes ou non suffisamment organisées pour que leur lecture brute soit intelligible. Modéliser ces activités devient alors nécessaire. Cette modélisation se fait en référence aux attentes de l'institution qui a proposé ces activités. Or, il se peut que le calcul littéral ait lui-même des contours flous dans l'institution scolaire, qu'il ne soit pas bien défini. Dans ce cas, ce savoir demande, à son tour, d'être modélisé pour que sa description devienne opérationnelle et exploitable pour la modélisation des connaissances de l'élève dans ce domaine. Enfin, un troisième type de modélisation existe dans ces travaux de thèse : la transposition informatique [Balacheff, 1994b] inhérente à l'implémentation d'un modèle dans un EIAH. Dans ces travaux, *le modèle des connaissances de l'élève se construit donc en référence à celui des connaissances exigées par l'institution et doit répondre à des contraintes informatiques fortes.*

En outre, un travail de modélisation doit s'appuyer « sur un cadre théorique bien défini, afin d'assurer la cohérence conceptuelle du modèle à construire » [Polguère, 2008]. Les questions posées et présentées plus haut étant d'ordre didactique, il est cohérent de chercher à modéliser dans un cadre théorique didactique :

Est-ce qu'un des trois cadres théoriques (la Théorie des Champs Conceptuels, la Théorie des Situations Didactiques et la Théorie de l'Anthropologie du Didactique) utilisés majoritairement dans les recherches en didactique des mathématiques développées en France [Perrin-Glorian, 2002] peut répondre aux questions soulevées ?
Si oui, est-il directement exploitable ? Est-il implémentable dans un EIAH ?

Autrement dit, et au vu de la superposition des modélisations exposée ci-dessus :

Est-il possible d'avoir un même cadre théorique pour à la fois décrire le savoir en jeu, modéliser les connaissances de l'élève de ce savoir et implémenter ce modèle ?

L'ensemble des questions soulevées dans cette partie va trouver des réponses au cours de cette thèse, dont le plan est détaillé dans la partie qui suit.

Plan de la thèse

Cette thèse se divise en six chapitres, dont la structure est récapitulée sur la figure 1.

Le chapitre 1 permet de présenter le champ d'étude, le calcul littéral, à travers deux des sommets du triangle didactique de toute situation d'apprentissage : d'un côté, le savoir référent et

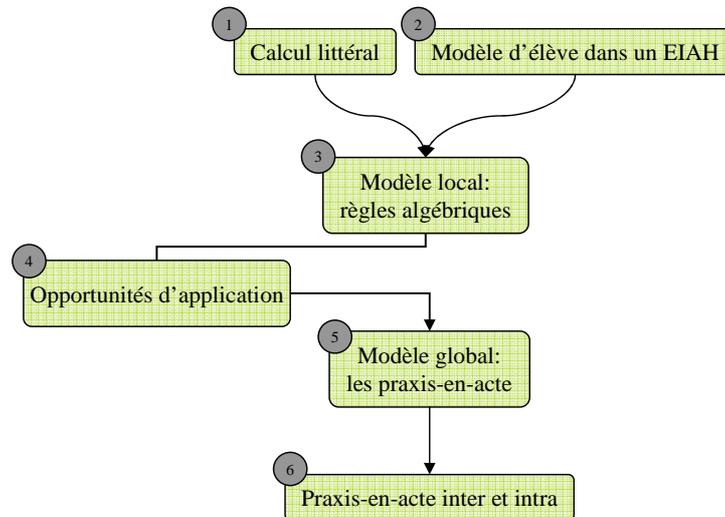


FIGURE 1 – Plan de la thèse.

les notions de dénotation et de sémantique, de l'autre, les attentes de l'institution du secondaire français, niche confortable de ce savoir. Pour décrire les attentes de l'institution, une analyse praxéologique des manuels scolaires de 4^e et 3^e est présentée. Le calcul littéral est présenté comme un travail de transformations sur les expressions algébriques avec conservation de l'équivalence. Il n'inclut pas le travail sur les équations. Or, autant il existe de nombreux travaux de modélisation de l'activité dans le domaine des équations ([Sleeman, 1985, Payne and Squibb, 1990, Cirade and Matheron, 1998, Chaachoua et al., 2006, Chukhray et al., 2007, Kouki, 2008, ...]), autant la littérature est moins riche en ce qui concerne le calcul littéral proprement dit, en particulier dans le domaine du développement et de la réduction.

Cette thèse étudie ce qui est attendu par l'institution et non ce qui se passe précisément dans la classe. En effet, les protocoles sur lesquels ces travaux s'appuient proviennent d'expérimentations très diverses et nous n'avons que peu d'informations sur le cours enseigné. Il y a donc, pour nous, une sorte de boîte noire entre l'attente de l'institution et l'activité finale de l'élève que l'on modélise.

Le chapitre 2 présente la notion de module d'élève qui permet d'établir les modèles d'élèves. Des critères sont mis en place pour évaluer et discriminer des classes de modèles d'élèves. Des associations de critères émergent d'une analyse statistique et permettent de faire ressortir la nécessité de réflexions didactiques en amont de tout modèle d'élève subtil.

Les observables sur lesquels est construit le modèle que nous proposons proviennent du logiciel APLUSIX [Bouhineau et al., 2001], présenté dans ce chapitre. Cette thèse n'ayant pas pour but de mettre en place une ingénierie d'apprentissage au sein d'un EIAH mais bien de recueillir des informations précises pour modéliser l'activité et les connaissances, n'exploiter que le seul registre symbolique dans APLUSIX⁴ est légitime. En effet, notre travail est de s'intéresser qu'à la seule activité de traitement au sens de Duval et non à la transformation d'un système sémiotique vers un autre (activité de conversion) nécessaire à un véritable apprentissage [Duval, 1993] et le registre de représentation d'APLUSIX convient parfaitement à l'activité de traitement : « le calcul est une forme de traitement propre aux écritures symboliques » [Ibid, p.41].

Le chapitre 3 est consacré à l'élaboration et la présentation d'une modélisation locale du

4. Au début de cette thèse, seul le registre symbolique était présent dans APLUSIX. À l'heure actuelle, deux autres registres sont accessibles : les représentations sous forme d'arbres et les représentations graphiques.

travail de l'élève : chaque transformation faite par l'élève est modélisée par une séquence de règles algébriques correctes ou erronées. Il n'est donc pas pris en compte l'ordre des transformations. Dans ce chapitre, sont présentés la bibliothèque de règles écrites à la main puis implémentées ainsi que les algorithmes automatiques construits dans le logiciel ANAÏS. Une évaluation des diagnostics produits automatiquement permet de distinguer un algorithme en particulier et c'est celui-ci qui sera exploité par la suite.

Le chapitre 4 tente de déterminer les expressions qui présentent des opportunités d'appliquer une règle donnée. Pour modéliser l'activité de l'élève, il est intéressant de connaître les choix auquel il a été confronté ; autrement dit, ce qu'il *aurait* pu faire. Cette information n'étant pas fournie explicitement ni par l'élève lors de la résolution de l'exercice ni par le logiciel APLUSIX, il a fallu la reconstruire. Pour ce faire, un « type de tâche » est attaché à un ensemble de règles de la bibliothèque et le diagnostic automatique permet de détecter dans quel type de tâche l'élève a choisi de se placer. Ces types de tâche proviennent de l'analyse praxéologique du chapitre 1 et suivent donc le découpage de l'institution. Ceci permet en particulier d'avoir une idée du taux d'utilisation de chaque règle algébrique par rapport au nombre de fois où elles auraient pu être appliquées. L'ensemble des expérimentations exploitées dans ces travaux est présenté et les taux d'utilisation au cours de ces expérimentations des règles algébriques sont donnés.

Le chapitre 5 expose en quoi il est insuffisant de tenir compte du découpage des types de tâche institutionnels : les élèves ont en tête un découpage différent (dans nos travaux, un découpage plus fin) que celui de l'institution, comme le montrent de nouvelles expérimentations. L'opportunité d'appliquer une règle a besoin d'être précisée. Pour cela, le modèle de praxis-en-acte est proposé. Décliné du quadruplet praxéologique, ce modèle permet de distinguer non seulement le découpage de l'élève de celui de l'institution mais aussi les techniques de l'élève de celles préconisées par l'institution. La question de la stabilité est abordée dans ce chapitre : y a-t-il réellement des utilisations stables d'une même technique-en-acte face à un même type de tâche-en-acte ? L'utilisation des techniques-en-acte peut afficher une stabilité inter-élèves ou au contraire une stabilité intra-élève.

Le chapitre 6, enfin, présente les résultats des praxis-en-acte inter élèves et intra-élève diagnostiquées pour l'ensemble des expérimentations présentées dans le chapitre 4. Différentes exploitations sont proposées : comparaison entre les pays ou entre les niveaux scolaires. Une recherche d'explication des praxis-en-acte est présentée à travers la notion de technologie-en-acte. Des interviews permettent de valider certaines techniques-en-acte diagnostiquées ainsi que quelques technologies-en-acte construites a priori. Une dernière hypothèse est proposée qui permet d'expliquer aussi bien l'utilisation stable de techniques correctes qu'erronées et l'utilisation instable de telles techniques.

Un lexique F.3 est donné en fin de ce manuscrit. Il ne se veut pas exhaustif mais reprend certains termes introduits et définis dans cette thèse. Le lecteur pourra s'y reporter en cas de besoin.

Chapitre 1

Le Calcul littéral

Résumé. L'objectif principal de ce chapitre est de mettre en place une définition précise de ce qu'est le calcul littéral. Pour cela, le chapitre s'organise autour de trois métaphores. Le « calcul littéral comme un langage » permet d'introduire l'objet mathématique de référence, le polynôme, ainsi que la dualité syntaxique-sémantique inhérente aux écritures. Le « calcul littéral comme une activité » aboutit à une définition formelle et indépendante de l'institution scolaire du calcul littéral : le calcul littéral est défini comme une activité de traitement sur l'objet polynôme, traitement qui exige la conservation de la dénotation du polynôme transformé. Enfin, le « calcul littéral comme un sujet scolaire », partie essentielle de ce chapitre, expose le lieu d'existence du calcul littéral : l'institution scolaire. La notion de règle algébrique avec les difficultés intrinsèques à son utilisation y est introduite, notion importante puisqu'elle permettra de modéliser l'activité de l'élève dans les chapitres ultérieurs. Le modèle praxéologique permet de caractériser l'ensemble des traitements pratiqués dans l'enseignement. Ce modèle servira de référence de ce qui est attendu par l'institution scolaire de ses élèves. Une dernière partie analyse les critiques portées aux activités de manipulation qui constituent le calcul littéral.

Face à des expressions du type $5x + 4x + 2$, $2(x + 1)$, $5(x + 1) + x(x + 1)$, que nous appellerons avant de les définir formellement expressions algébriques, un mathématicien répondrait qu'en dehors de toute autre précision, ces objets n'ont pas de sens, n'ont pas de raison d'être. Pourtant, une étude rapide des manuels de collègue montre que ces objets existent, bien souvent en dehors de toute indication sur l'objet x . Ces objets peuvent apparaître seuls (cf. Magnard02, p. 205) ou précédés des verbes bien connus tels que « Réduire », « Développer », « Factoriser », ce qui ne donne guère plus de sens pour le mathématicien, la lettre x n'étant toujours pas définie.

Quels sont alors ces objets ? Vivent-ils uniquement dans l'enseignement secondaire ? Existe-t-il plusieurs manières de les interpréter ? Quelle est l'activité, appelée calcul littéral, dans laquelle ces objets sont manipulés ?

L'activité du mathématicien se place à un niveau conceptuel, à travers, certes, des objets perceptifs mais la syntaxe avec laquelle sont représentés les objets lui importe peu, si ce n'est pour se faire comprendre et exposer ses idées. L'objet représenté par Descartes sous la forme $\sqrt{.2 - \sqrt{3}}$.¹ est conceptuellement le même objet que celui représenté aujourd'hui sous la forme $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ même si, indéniablement, les concepts ont eux-mêmes évolués au cours du temps, la

1. Exemple extrait de [Serfati, 2005, p. 89].

connaissance avançant. La compacité de la syntaxe actuelle présente un avantage incontestable pour le spécialiste en lui offrant une grande puissance de calcul mais elle présente aussi un inconvénient majeur : une opacité et peut-être une ambiguïté pour le non-spécialiste. Pour que la syntaxe ait mis tant de siècles à acquérir une certaine stabilité et une acceptation unanime, il faut bien qu'elle ait présentée à la fois des difficultés, des questionnements, un intérêt...

Quel est alors le lien entre la syntaxe telle qu'on la connaît et le concept qu'elle véhicule ? Comment sont reliées les formes syntaxiques aux concepts ? Quelles sont les différentes facettes de l'objet $5x + 4x + 2$? Qu'est-ce qui distinguent les objets $2(x + 1)$ et $2x + 2$?

Pour répondre à ces questions, nous avons repris partiellement le découpage de l'algèbre, proposé par Lee [Lee, 1997]. Sa thèse avait pour but de construire un modèle de la compréhension algébrique qui serait utile dans la communauté de l'éducation mathématique. À cette fin, Lee pose la question « What is algebra ? » à des chercheurs en mathématiques, en didactique des mathématiques, à des enseignants et à des étudiants, issus de six pays différents. Elle fait alors ressortir sept thèmes métaphoriques de l'algèbre : l'algèbre comme un sujet scolaire, une activité, un outil, une arithmétique généralisée, un langage, une culture et enfin, l'algèbre comme un type de raisonnement.

En voulant reprendre cette description pour le compte du calcul littéral, algèbre élémentaire, nous avons trois objectifs. D'une part, nous voulions définir notre sujet d'étude : qu'entend-on par calcul littéral ? En quoi consiste cette activité ? Quels en sont les objets ? Ensuite, nous cherchions à connaître sa niche et ses raisons d'être : quel en est le réseau trophique ? Est-ce avant tout un outil ou un objet ? Cela dépend-il des institutions dans lesquelles on se place ? Enfin, la ligne directrice de ce travail résidait dans la volonté de faire émerger le jeu sur la syntaxe et par là même les difficultés que cela peut présenter pour les élèves. Ajoutons que ce chapitre porte sur le calcul littéral et non sur l'algèbre en général. En conséquence, il n'y a aucune partie consacrée à une analyse épistémologique de la mise en place du symbolisme algébrique², réflexion qui va bien au delà du seul calcul littéral. Dans les thèmes métaphoriques proposés par Lee, trois ont retenu notre attention car ils permettaient de structurer les réponses apportées à ces questions : l'algèbre comme un langage, comme une activité puis comme un sujet scolaire.

Dans une première partie, nous analysons le calcul littéral comme un *langage*. Dans l'ensemble des travaux abordant cette question, différents termes sont utilisés : syntaxe/sémantique, ostensif/non-ostensif, signifiant/signifié, sémios/noésis. Les différences sont subtiles et s'expliquent principalement par le contexte dans lequel on se place : linguistique, praxéologique, sémiologique... Dans cette partie, les objets manipulés en calcul littéral sont décrits en mettant en relation les objets abstraits du monde de la pensée avec leurs représentations dans le monde concret, sans aucune considération philosophique. L'objectif de cette section est double. Elle permet de présenter le point de vue adopté sur la sémantique et la syntaxique de ce qui est communément appelé expression algébrique. Elle permet aussi de mettre en exergue ce qui rend difficile la manipulation des expressions algébriques chez nombre d'élèves : « des noms différents pour un même être mathématique » [Chevallard, 1984].

Dans une seconde partie, nous abordons le calcul littéral comme une *activité*. Activité censée être abstraite, l'algèbre passe nécessairement par un formalisme manipulable, en particulier, en ce qui concerne le calcul littéral. Nous verrons comment les travaux d'auteurs comme Duval

2. Le lecteur intéressé par la constitution de l'écriture symbolique peut se référer à [Serfati, 2005]. L'auteur analyse les évolutions au cours de l'histoire du langage mathématique et en particulier la mise en place, dès le XVII^e siècle, du symbolisme proche de celui que l'on connaît actuellement.

[Duval, 1993] ou Kieran [Kieran, 2004] permettent de positionner notre sujet d'étude dans l'ensemble de l'algèbre, en s'appuyant sur les objets présentés dans le paragraphe précédent. La notion de règle algébrique est introduite dans cette partie, notion-clef du modèle de l'activité de l'élève que nous présentons dans le chapitre 3.

Dans une troisième partie, nous présentons le calcul littéral comme un *sujet scolaire*. Tout au long du manuscrit, les activités des apprenants auxquels nous nous intéressons sont considérées comme celles émanant de sujets *institutionnels* puisque « un individu concret ne peut entrer en rapport avec un savoir qu'en entrant en relation avec une ou des institutions » [Chevallard, 1989a, p. 213]. Or, en tant que savoir, le calcul littéral est attaché à l'institution dans laquelle il est mis en jeu : les classes de 4^e et 3^e en France, les classes de 8^e et 9^e au Brésil, etc. En cela, les activités n'auront, de cesse, d'être analysées en référence à ce qui est prescrit par *l'institution scolaire*. C'est pourquoi, cette section propose une analyse praxéologique de l'activité du calcul littéral des manuels scolaires du secondaire français qui représente, comme nous le verrons, une niche confortable pour ce sujet d'étude. Les expérimentations exposées dans les chapitres ultérieurs ayant été réalisées avant la réforme de 2007 des programmes de classe de 4^e, les manuels étudiés sont ceux en vigueur lors des expérimentations, à savoir ceux de la réforme de 1996. Cette analyse permet aussi de comparer le point de vue adopté dans les deux parties précédentes à celui de l'institution scolaire.

Enfin, une dernière partie est dédiée aux critiques qui dénoncent l'aspect purement manipulatoire du calcul littéral et qui mettent parfois en doute l'intérêt d'un tel travail dans le secondaire.

1.1 Le calcul littéral, un langage ? Ou la dialectique sémantique syntaxe

Plus qu'un système de signes (registre sémiotique sur lequel nous reviendrons), l'ensemble des expressions algébriques constitue un *langage*, avec le double aspect syntaxe/sémantique. Bien qu'assez peu étudiée, la construction de l'écriture symbolique en tant que langage logique a été démontrée par Nicaud et Gélis [Nicaud et al., 2001, Gelis, 1994]. Une approche plus linguistique est proposée dans [Drouhard, 1992] (fondée sur les travaux du logicien Frege dont les textes n'ont été traduits en français qu'en 1971 [Frege, 1971]) et [Kirshner, 1987]. Cet ensemble de travaux est à l'origine de cette partie.

L'aspect *syntactique* est ce que l'expression donne à voir. Ce registre s'organise autour d'assemblages de signes. L'objet syntaxique se manipule à travers des ostensifs³ selon des règles (de syntaxe) bien précises. Les formes syntaxiques répondent à des règles mais aussi à des usages et des besoins particuliers.

L'aspect *sémantique* d'une expression algébrique est, quant à lui, ce à quoi l'expression fait référence, ce qu'elle signifie. Cet aspect s'intéresse au sens, indépendamment des intentions de celui qui manipule l'expression, de ses stratégies, ou encore indépendamment du contexte dans laquelle se trouve l'expression. L'objet sémantique est un objet non-ostensif⁴.

3. « Nous parlerons d'objet ostensif – du latin ostendere, « montrer, présenter avec insistance » – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. Ainsi en est-il d'un objet matériel quelconque et, notamment, de ces objets matériels particuliers que sont les sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes. » [Bosch and Chevallard, 1999]

4. « Les objets non ostensifs sont alors tous ces « objets » qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits,

Remarque. Si nous préférons présenter les expressions algébriques sous la dualité syntaxique/sémantique plutôt que la dualité ostensif/non-ostensif, c'est avant tout parce que nous présentons le calcul littéral comme un *langage* dont la dualité usuelle est bien celle de la syntaxe et de la sémantique. Cependant, de manière plus générale et indépendamment de tout aspect langagier, le calcul littéral présente bien une dialectique ostensif/non-ostensif qui « considère les seconds comme des émergents de la manipulation des premiers et, en même temps, comme des moyens de guidage et de contrôle de cette manipulation. » [Bosch and Chevallard, 1999] Selon si c'est la dialectique langagière ou non que l'on souhaite mettre en avant, nous utiliserons les termes syntaxique (resp. sémantique) ou ostensif (resp. non-ostensif).

Exemple. D'un point de vue sémantique, l'objet 13 est un nombre naturel. D'un point de vue syntaxique, il est la succession de deux caractères.

Les objets $3(x + 5)$ et $3x + 15$ sont sémantiquement les mêmes mais de syntaxes différentes.

Notons qu'il est essentiel de définir et de s'accorder sur la sémantique choisie. Deux objets de syntaxes différentes peuvent se référer ou non à deux objets sémantiques distincts, selon la sémantique choisie. Par exemple, les objets $x + 1$ et $\frac{x(x+1)}{x}$ sont des formes syntaxiques différentes. Selon la sémantique que l'on choisit, ces objets peuvent être ou non les mêmes objets sémantiques : dans le corps des fractions rationnelles⁵, ces deux objets sont sémantiquement les mêmes alors que dans l'ensemble des fonctions rationnelles, ils sont sémantiquement différents. Comme le note Nicaud [Nicaud et al., 2001], il y a bien des manières de définir la sémantique des objets considérés mais il est habituel, en algèbre en particulier, d'avoir une unique sémantique, comme l'expriment aussi Arzarello et Drouhard à travers la notion de dénotation traduit de l'allemand « Bedeutung » [Arzarello et al., 2000, Drouhard, 1992]. Comme ces auteurs, nous dirons qu'une expression algébrique *dénote* un seul objet sémantique dans le sens où elle renvoie de manière *unique* à un objet aux traits objectifs, communément distinctifs, et communément reconnu. La dénotation exprime l'essence de cette expression. Elle renvoie à un objet unique qui transcende les symboles. Nous en donnerons une définition plus précise par la suite.

Nous allons voir, dans un premier temps, quels sont les deux dénotés classiques des expressions algébriques pour, dans un second temps, présenter leurs aspects syntaxiques. Le choix de présenter la sémantique puis la syntaxe dans cet ordre est avant tout lié à la pratique mathématique : les objets mathématiques existent à travers une sémantique précise (une dénotation choisie) et, dans le but de pouvoir partager et communiquer à leurs propos, une syntaxe se met en place. Cependant, commençant par décrire l'aspect sémantique des objets qui nous intéresse, nous avons besoin d'une syntaxe, que nous ne présentons pourtant qu'ensuite, paradoxe bien connu. Comme le suggère Drouhard, au sein d'un discours qui porte à la fois sur l'objet sémantique et l'objet syntaxique, un marqueur est nécessaire pour distinguer l'objet sémantique de l'objet syntaxique. Aussi utiliserons-nous les guillemets pour parler de la représentation d'un objet : $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$ est le dénoté de la représentation " $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$ ", même si le dénoté lui-même a une certaine matérialité sur le papier.

1.1.1 Les objets sémantiques, les dénotés

La construction présentée dans cette section peut paraître très formelle et relativement éloignée entre autres de l'évolution historique de ces concepts. Cependant, ce formalisme illustre la

entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours). » [Bosch and Chevallard, 1999]

5. P, Q, P' et Q' étant des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec \mathbb{K} un corps commutatif, $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ sont équivalents si et seulement si $PQ' = P'Q$.

manière actuelle dont est exposé l'objet dénommé communément « polynôme », qui regroupe en fait deux objets distincts, le polynôme formel et la fonction polynomiale. Nous ajoutons à ces deux dénotés deux commentaires ; l'un porte sur le contrôle sémantique et l'autre sur la notion de sens que d'aucuns considèrent comme partie intégrante de la sémantique.

Le polynôme

Définition. Soit \mathbb{A} un anneau commutatif unitaire.

On appelle *polynôme* à une indéterminée à coefficients dans \mathbb{A} toute suite d'élément de \mathbb{A} nuls à partir d'un certain rang.

Les éléments non nuls sont appelés les *coefficients* du polynôme.⁶

L'ensemble des polynômes, muni des deux lois de composition internes d'addition et de multiplication possède une structure d'anneau. Dans le cas où \mathbb{A} est un corps, la loi de multiplication externe munit l'anneau des polynômes à coefficients dans \mathbb{A} d'une structure d'algèbre commutative sur le corps \mathbb{A} .

Remarque. Un polynôme dont un unique coefficient est non nul est appelé *monôme*. La notion de monôme est bien sémantique. Cependant, elle a souvent été abordée syntaxiquement dans les années 70. Sous des dehors de formalisme poussé, l'objet monôme était en fait défini par sa syntaxe : « l'expression $a.x^n$ est appelée monôme en x ; le réel a en est le coefficient ; l'entier non nul n est appelée degré du monôme. » [Fauvergue et al., 1975] Or une simple lecture syntaxique de l'objet n'est pas suffisante pour distinguer un monôme des autres polynômes : le polynôme x , par exemple, est un monôme mais dont ni l'exposant ni le coefficient n'est explicité, de sorte qu'il faut avoir assimilé le concept de monôme pour repérer qu'il en est un.

La fonction polynomiale

L'expression algébrique peut aussi dénoter une fonction polynomiale.

Définition. Soit \mathbb{A} un anneau commutatif unitaire.

A tout polynôme $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$, on peut associer l'application :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{A} && . \\ x &\mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i \end{aligned}$$

Elle est appelée *fonction polynôme associée au polynôme f* ⁶.

Remarques. Si l'on choisit la dénotation des fonctions polynomiales, on ne peut alors parler d'expression sans définir son domaine de définition.

Remarquons aussi que nous ne nous intéressons pas aux fractions rationnelles, qui sont, elles, à distinguer des fonctions rationnelles.

Cette dénotation en terme de fonction polynomiale rejoint celle proposée par Drouhard, qui retient de la lecture de Frege [Frege, 1971] l'idée de considérer la dénotation d'une expression algébrique comme une fonction. Cependant, Frege comme Drouhard portent leur attention sur la *signification* de la dénotation et non sur les dénotés eux-mêmes. Drouhard note lui-même

6. Les résultats qui sont énoncés s'étendent facilement au cas des polynômes et des fonctions à plusieurs indéterminées.

que Frege ne permet pas de répondre vraiment à la question « que représentent ces objets ? » [Drouhard and Teppo, 2004, p. 246]. Si l'on retient donc de ces lectures l'importance dans la définition de dénotation de la notion de fonction en tant qu'association dynamique, il est intéressant de noter que la fonction polynomiale tout comme le polynôme sont des fonctions : le polynôme étant une suite, il est aussi une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

Enfin, rappelons que si \mathbb{A} est un corps commutatif infini, l'homomorphisme qui à un polynôme associe la fonction polynomiale associée est un isomorphisme : deux polynômes f et g à coefficients dans \mathbb{A} sont égaux si et seulement si $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x)$ pour tout x dans \mathbb{A} . Ce n'est évidemment pas le cas si \mathbb{A} est un corps fini (par exemple, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Ceci justifie que, par la suite, ne travaillant que dans le corps \mathbb{R} , **nous ne parlerons que de polynômes**, ses propriétés s'étendant naturellement aux fonctions polynomiales.

Nous choisissons, pour la suite, la dénotation en terme de polynômes.

La place du numérique ou le contrôle sémantique

L'expression algébrique peut aussi référer à un nombre, une valeur, image de la fonction polynomiale⁷. Pour une assignation donnée⁸, on considère la valeur numérique obtenue en remplaçant chaque variable par l'assignation choisie. Par exemple pour l'assignation f , telle que :

$$f(x) = 3 \text{ et } f(y) = 2,$$

$x + y$ renvoie le nombre 5.

La valeur est alors un nombre réel, déterminé uniquement lorsque l'assignation l'est également. Elle est un nombre indéterminé, si l'assignation n'est pas déterminée ; en ce sens, on pourrait définir une troisième dénotation des expressions en disant qu'elles dénotent des nombres indéterminés. Cependant, la notion d'indétermination est assez confuse, comme le note Sackur [Sackur et al., 1997, p. 45]. Frege la définit en disant qu'elle indique *indéfiniment* des nombres. À la notion d'indéterminée, il lui préfère la notion d'« indéfini ». Ce qui, nous le voyons, tend vers la notion de fonction, notion chère à Frege.

Comme le fait remarquer Drouhard, cette dénotation quoique plus « naturelle », présente un inconvénient majeur :

« [elle ne permet pas d'attribuer] une interprétation mathématique naturelle à l'énoncé d'ordre épimathématique “la valeur de E [l'expression] est indéterminée si l'assignation n'est pas déterminée”. [...] Cela joue fortement en didactique de l'algèbre, dans la mesure où la notion de “quantité (in)déterminée” est centrale dans la théorie des équations. Les notions d'inconnue, de paramètre ou de solution en découlent. En outre, sur le plan didactique, savoir qu'une expression a une valeur numérique est une chose, et savoir que cette valeur est une fonction de l'assignation, en d'autres termes des valeurs prises par variables, en est une autre. » [Drouhard, 1992, Chap. X].

En d'autres termes, qu'une expression dénote un nombre double l'indétermination (celle de l'assignation d'une part et celle de la valeur résultante d'autre part) tandis que considérer la dénotation comme une fonction permet de relier assignation et valeur.

Cette dénotation est essentielle à assimiler pour maîtriser le calcul littéral. La substitution de valeurs numériques dans l'expression algébrique ne permet pas seulement d'affermir ou réfuter

7. Avec cette notion, nous survolons la métaphore « arithmétique généralisée » de l'algèbre selon Lee.

8. Une assignation est une fonction de l'ensemble des variables dans \mathbb{R} .

le résultat obtenu (par exemple, remplacer x par 1 permet de montrer que $2(x+1)$ n'est pas égal (sémantiquement) à $2x+1$). Sa prise de conscience et sa maîtrise permettent de comprendre aussi que les objets dénotent en fait la même entité. Bien souvent, malheureusement, le « rapport de l'élève au calcul littéral n'incorpore pas l'idée d'une relation entre manipulation algébrique de l'expression, d'une part, et substitution de valeurs numériques dans l'expression d'autre part » [Chevallard, 1989b, p. 47]. Ce phénomène étant souvent une conséquence, selon cet auteur, de la manière de présenter le calcul littéral comme un enjeu didactique pur et non ce qu'il est réellement : un outil, un moyen permettant, par exemple, de résoudre des équations ou de calculer une limite de fonctions. Le retour au numérique pour prendre conscience de l'égalité sémantique des expressions est étudié dans de nombreux travaux [Cortes and Kavafian, 1999, Girmens, 2003, Bellard et al., 2005, Kouki, 2008, ...]⁹.

Toutefois, avec l'accent mis sur la substitution possible des variables par des valeurs numériques, cette dénotation se place, selon nous, dans l'aspect *procédural* de l'expression algébrique au sens de Kieran :

« *Procedural* refers basically to arithmetic operations carried out on numbers to yield numbers. For instance, if we take the algebraic expression, $3x + y$ and replace x and y by 4 and 5, the result is 17. Another example involves this solving of $2x + 5 = 11$ by substituting various values for x until finding the correct one. In these two examples, which look ostensibly algebraic, the objects that are operated on are not the algebraic expressions but their numerical instantiations. Furthermore, the operations that are carried out on these numbers are computational –they yield a numerical result. Thus, both of these examples illustrate a procedural perspective in algebra. The term *structural* refers, on the other hand, to a different set of operations that are carried out, not on numbers, but on algebraic expressions. For example, if we take the algebraic expression, $3x + y + 8x$: this can be simplified to yield $11x + y$ or divided by z to yield $(11x + y)/z$. Equations such as $5x + 5 = 2x - 4$ can be solved by subtracting $2x$ from both sides to yield $5x + 5 - 2x = 2x - 4 - 2x$ which can be subsequently simplified to $3x + 5 = -4$. In both of these examples, the objects that are operated on are the algebraic expressions, not some numerical instantiations. The operations that are carried out are not computational. Furthermore, the results are yet algebraic expressions. »¹⁰ [Kieran, 1991, p. 247]

Ainsi, dénoter l'expression algébrique par un nombre fait appel à l'aspect procédural et non structural, qui est pourtant le propre du calcul littéral : factoriser, réduire ou développer

9. Seulement, à son tour, le contrôle de la sémantique est parfois écrasé à la seule référence au numérique, sans référence à la notion de dénotation et de choix de la dénotation.

10. « *Procedural* se réfère fondamentalement aux opérations arithmétiques effectuées sur des nombres pour produire des nombres. Par exemple, si nous prenons l'expression algébrique, $3x + y$ et remplaçons x et y par 4 et 5, le résultat est 17. Un autre exemple consiste en la résolution de $2x + 5 = 11$ par diverses valeurs de substitution pour x jusqu'à trouver la correcte. Dans ces deux exemples, qui semblent apparemment algébriques, les objets manipulés ne sont pas les expressions algébriques mais leurs instanciations numériques. En outre, les opérations qui sont effectuées sur ces nombres sont computationnelles (elles donnent un résultat numérique). Ainsi, les deux exemples illustrent une perspective procédurale de l'algèbre.

Le terme *structural* se réfère, quant à lui, à un ensemble différent d'opérations qui sont effectuées, non sur des nombres, mais sur des expressions algébriques. Par exemple, si nous prenons l'expression algébrique, $3x + y + 8x$: ceci peut être simplifié pour donner $11x + y$ ou être divisé par z pour donner $(11x + y)/z$. Des équations telles que $5x + 5 = 2x - 4$ peuvent être résolues en soustrayant $2x$ des deux côtés pour donner $5x + 5 - 2x = 2x - 4 - 2x$ qui peut ensuite être simplifié en $3x + 5 = -4$. Dans ces deux exemples, les objets manipulés sont les expressions algébriques, non des instanciations numériques. Les opérations qui sont effectuées ne sont pas computationnelles. En outre, les résultats sont aussi des expressions algébriques. » [Kieran, 1991, p. 247]

sont autant d'opérations structurales comme le note Kieran elle-même [Kieran, 1991, p. 246]. C'est pourquoi, bien qu'essentielle à la compréhension globale de ce que signifie une expression algébrique, nous ne considérerons pas dans la suite la dialectique numérique/algébrique, préférant nous placer dans une lecture avant tout *structurale* des expressions.

La notion de sens

Pour la sémantique des polynômes, les objets $3x + x + 8y$, $4x + 8y$ et $2(2x + 4y)$ dénotent le même objet alors que pour un autre choix de dénotation, cela pourrait ne pas être le cas. Pourtant, ces objets provoquent des attitudes différentes de la part de l'expert. La première expression est une somme de trois termes, à laquelle pourraient s'appliquer des transformations de réduction. La seconde peut être factorisée. La troisième est un produit qui fait ressortir que le nombre dénoté est un nombre pair ; elle peut, de plus, permettre des transformations de développement. Ces différences viennent du fait que ces objets ont des *sens* différents. Cette notion, issue du terme allemand « sinn », est définie comme le *mode de donation* de l'objet. Plus précisément, dans le domaine qui nous intéresse, « la différence de sens entre deux expressions de même dénotation est liée aux ensembles de transformations qui sont susceptibles de leur être appliquées. » [Drouhard, 1992, ChapX, p. 14]. C'est le mode de donation de l'objet. Autrement dit, ces expressions « ne **montrent** pas la même chose ([elles] n'apportent pas la même information **monstrative**) » [Chevallard, 1984, p. 75]. Cette information monstrative est propre au langage algébrique, en opposition au numérique dont le principe d'achèvement élide ce genre d'écritures : on n'écrit pas $11 + 2$ si ce n'est dans le but d'achever le calcul pour fournir 13. Cette indication permet de guider et d'influer sur les choix de celui qui transforme afin de répondre à la consigne pragmatique de l'énoncé.

Le sens est déterminé par les informations véhiculées par les symboles de l'expression et, en cela, tient compte de la syntaxe de l'expression. « L'information véhiculée par de tels symbolismes n'est pas constituée par un renvoi pur et simple à des objets qui transcendent ces signes, mais à des systèmes d'opérations apparemment intérieurs au symbolisme. » [Granger, 1979, p. 53, cité dans [Sackur et al., 1997]] La notion de sens (notion pourtant sémantique) est aussi rattachée à la notion de syntaxe car deux expressions de sens différents se traduisent par deux formes syntaxiques différentes. Le sens d'une expression se traduit par des éléments ostensifs distincts. C'est plus cette approche « ostensive » du sens que nous allons exploiter. *C'est l'aspect syntaxique que revêt le sens pour s'exprimer qui nous intéresse.* Sa dimension sémantique est plus d'ordre stratégique, notion que nous n'étudions pas. C'est pourquoi, cette notion n'est pas plus approfondie dans cette section mais sera reprise dans la section suivante qui s'intéresse à l'aspect syntaxique des objets.

1.1.2 Les formes syntaxiques

L'aspect syntaxique porte sur ce qui est visible et dépend du registre sémiotique choisi pour représenter les objets. Ainsi, dans le registre sémiotique des suites, un polynôme se représentera $(1, 0, 2, 0, 0, \dots)$ tandis que dans le registre des écritures symboliques, registre qui nous intéresse, il sera représenté, par exemple, sous la forme $2x^2 + 1$. Dans le registre des écritures symboliques, $2x + 6$, $x + x + 6$ et $2(x + 3)$ sont autant de formes syntaxiques différentes, quoique dénotant toutes trois le même polynôme $(6, 2, 0, 0, \dots)$. Ayant choisi la sémantique des polynômes, nous allons étudier la syntaxe qui lui est associée. Nous empruntons à Nicaud et al. [Nicaud et al., 2001] la définition qu'ils donnent de l'expression algébrique : ils prouvent qu'il existe bien un morphisme entre la sémantique des polynômes et la syntaxe telle que définie

ci-dessous.

L’expression algébrique. Un ensemble de symboles et d’opérateurs étant donné (par exemple, $\{+, -, \times, /, \sqrt{}, =, \neq, <, \leq, >, \geq, \text{and}, \text{or}, \text{not}\}$), ainsi qu’un ensemble de symboles d’objets terminaux (par exemple, les entiers, les valeurs logiques Vrai/faux) et un ensemble de symboles de variables (par exemple, $\{x, y, z\}$), une *expression algébrique* est définie comme une construction finie obtenue à partir de la définition récursive ci-dessous.

Une expression algébrique est :

- un symbole d’objet terminal
- ou un symbole de variable
- ou un symbole d’opérateur appliqué à des arguments qui sont des expressions algébriques d’arité et de types corrects.

Cette définition s’appuie sur la théorie des règles de réécriture de Dershowitz & Jouannaud [Dershowitz and Jouannaud, 1990].

Le polynôme $(0, 1, 0, 0, \dots)$ a une syntaxe qui joue un rôle particulier et acquière ainsi un statut particulier : celui d’indéterminée. Durand-Guerrier affirme que la notion d’indéterminée relève plus de la syntaxe que de la sémantique. [Durand-Guerrier et al., 2000, p. 79]

L’indéterminée. Le polynôme $(0, 1, 0, 0, \dots)$ est appelé *indéterminée*.

On le note généralement X .

De la définition de la multiplication, et en posant $X^0 = (1, 0, 0, \dots) = 1$, il résulte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X^n = (\delta_{0n}, \dots, \delta_{in}, \dots)^{11}$$

Ceci justifie l’écriture d’un polynôme quelconque sous la forme dite réduite qui sera définie plus loin.

Nous distinguons deux ensembles de formes syntaxiques.

1. D’une part, des choix de représentation syntaxique peuvent traduire des sens différents (cf. p. 16) et reposent, entre autres, sur des règles dites de formation [Bellard et al., 2005, p. 19]. Le fait que l’addition soit n-aire et infixée, ce qui se traduit par un signe + entouré de part et d’autre de symboles et le fait que la racine carré soit unaire en sont des exemples. De tels choix de représentation portent sur ce que l’on dénommera la *structure syntaxique* pour rejoindre le terme cis-cité de Kieran. Écrire “ $2(n^2 + 1)$ ”, où n est un entier naturel, plutôt que “ $n^2 + n^2 + 2$ ” est un choix qui porte sur le sens qui s’exprime à travers un choix syntaxique : le premier est *visiblement* pair par la présence explicite du facteur 2.

Deux structures syntaxiques jouent un rôle particulier en calcul littéral : le polynôme sous sa forme réduite et développée et le polynôme sous sa forme factorisée. Elles sont obtenues grâce aux trois lois de l’anneau.

La forme réduite. Tout polynôme $P = (a_0, \dots, a_n, 0, \dots)$ peut s’écrire, de manière unique¹², sous la forme suivante, dite *réduite* :

$$\begin{aligned} P &= a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n \\ &= \sum_{i=0}^{i=n} a_iX^i. \end{aligned}$$

11. δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

12. L’unicité de l’écriture permet, par exemple, de vérifier que deux polynômes sont égaux.

Cette écriture justifie que l'anneau des polynômes, engendré par $\mathbb{A} \cup \{X\}$, soit noté $\mathbb{A}[X]$.

L'anneau \mathbb{A} peut être identifié à un sous-anneau de l'anneau des polynômes $\mathbb{A}[X]$ par l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{A}[X] \\ a &\mapsto (a, 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Cette application est un isomorphisme d'anneau de \mathbb{A} dans le sous-anneau de $\mathbb{A}[X]$ formé des polynômes de coefficients nuls à partir du rang 2. Il est donc « équivalent » de se placer dans \mathbb{A} ou dans le sous-anneau correspondant. Grâce à cet isomorphisme, il est cohérent d'utiliser une même syntaxe même si la sémantique diffère : on identifie ces deux anneaux en utilisant l'écriture : $a = (a, 0, 0 \dots)$.

La forme factorisée. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut se décomposer en produit de polynômes de degré 1 ou 2, sans racine réelle¹³.

Cette écriture est unique à permutation près des facteurs et aux inversibles près.

2. D'autre part, la syntaxe répond aussi à un autre ensemble de règles : des règles dites d'usage [Bellard et al., 2005, p. 20], sans fondement autre que celui de la tradition et de l'époque et qui sont fonctions des contrats didactiques. « Le coefficient du monôme se place devant l'indéterminée », « le point multiplicatif peut être éliminé lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible » en sont des exemples. Alors que “ $2(x^2 + 1)$ ” et “ $2 \times (x^2 + 1)$ ” ont la même structure syntaxique, elles s'expriment par une *matérialité syntaxique* différente. Nous empruntons le terme de « matérialité » aux travaux de Serfati : « l'appartenance à une certaine sous-catégorie du magasin général : lettres de divers alphabets (...) » [Serfati, 1997, p. 65]. L'expert ne distinguera aucunement $2(x^2 + 1)$ de $2 \times (x^2 + 1)$ car il maîtrise les règles de convention. Ces deux expressions auront pour lui le même sens et provoqueront la même action, développeront la même stratégie. Pour le novice, la matérialité du signe \times pourra, à lui seul, provoquer un comportement différent qu'en cas d'absence de ce signe. Que la syntaxe de l'écriture symbolique emprunte des éléments à l'écriture numérique est probablement à l'origine de cette difficulté. Comme le fait remarquer [Gascon, 1993, p. 46] :

« Dans le « langage arithmétique », les signes [...] indiquent uniquement des *actions*, tandis que dans le « langage algébrique », ces signes possèdent une certaine dualité qui complique leur utilisation et leur interprétation. Cette *dualité des opérations* fait référence au fait que, dans le langage algébrique, une opération signifie soit une action [...], soit une permanence [...]. »

En « matérialisant » la syntaxe, l'ambiguïté disparaît.

Hypothèse de recherche 1. *La matérialité syntaxique peut avoir une incidence sur le comportement de l'élève.*

C'est à cause de cette hypothèse que nous en sommes venus à distinguer la structure syntaxique de la matérialité syntaxique, la matérialité n'ayant pas d'impact sur l'expert. Cette hypothèse sera validée en section 5.3.3. La figure 1.1 donne un exemple concret de ces deux ensembles.

13. Plus généralement, sur un anneau factoriel \mathbb{A} , tout polynôme de $\mathbb{A}[X]$ est décomposable en produit de polynômes irréductibles.

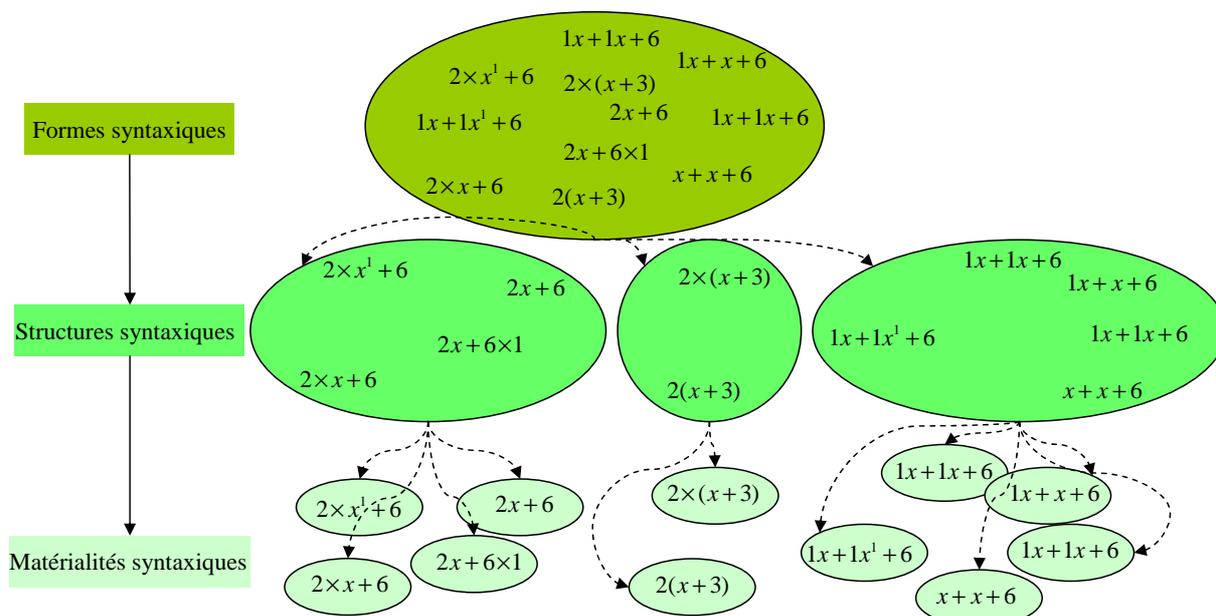


FIGURE 1.1 – Nous distinguons deux types d'ensemble de formes syntaxiques. Le premier ensemble est constitué des formes qui se distinguent par une structure syntaxique différente. Deux expressions dans cet ensemble sont considérées comme étant les mêmes si elles sont égales modulo les règles de convention. Le second ensemble est constitué de toutes les formes de matérialité syntaxique différentes. $2x+6$ et $2 \times x+6$ et $2 \times x^1+6$ ont même structure mais sont de matérialité distincte.

1.1.3 Conclusion

Notre problématique se situe à l'orée de trois pôles : celui de l'informatique, des mathématiques et de l'institution à laquelle appartient l'apprenant. Chacune de ces communautés (mathématiques, informatique ou à intention didactique) a sa propre perception des objets algébriques, fondée sur un modèle ou sur des pratiques. La distinction faite entre sémantique et syntaxique ne semble pas être venue d'un besoin mathématique mais d'une nécessité informatique et didactique. En effet, les mathématiciens ne ressentent pas le besoin d'explicitier cette dualité¹⁴. Un accord et une compréhension tacite des objets qu'ils manipulent leur permettent de s'en libérer. Le contexte aidé par une syntaxe particulière leur permet de savoir quel est l'objet qu'ils manipulent. En effet, ils ne sont pas censés se confronter à $3x+2$ isolément de toute précision. Soit il leur aura été précisé auparavant que x est une indéterminée et que l'objet $3x+2$ (écrit généralement dans ce cas $3X+2$) appartenait à l'anneau des polynômes ; soit il leur sera présenté l'objet

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{A} \\ x &\mapsto 3x+2, \end{aligned}$$

et la syntaxe de cet objet suffit à elle-même pour en préciser la sémantique, celle de la fonction polynomiale. Mais qu'en est-il d'un élève apprenti ou d'une machine ? La nécessité de distinguer "3+5" de "8" pour le premier, et celle d'associer la même sémantique à "08" et "8" pour le

14. Il y a d'ailleurs bien peu de résultats mathématiques portant sur la syntaxe. Citons, cependant, les problèmes liés à la résolution des équations algébriques par radicaux.

second se fait bien sentir. Nous posons comme hypothèse qu'il est nécessaire de rendre explicite cette dualité pour un apprentissage. Nous rejoignons, en cela, Duval lorsqu'il affirme que « la distinction entre un objet et sa représentation est donc un point stratégique pour la compréhension des mathématiques » [Duval, 1993, p. 37]. Dans le découpage que nous proposons des expressions polynomiales, nous souhaitons tenir compte de cette difficulté liée à la dualité syntaxique-sémantique, dualité fondamentale dans ce jeu d'écritures. Pour cela, nous avons introduit les notions de dénotation, à savoir le concept de polynôme ou de fonction polynomiale et la distinction de la structure et de la matérialité syntaxique.

D'autres notions de ce que véhiculent les expressions algébriques existent : leur représentation [Frege, 1971], leur interprétation et leur connotation [Drouhard, 1992], leur sens algébrique ou contextualisé [Arzarello et al., 2000], ... Autant de notions qui ne sont pas détaillées ici car elles ne sont pas prises en compte dans ces travaux¹⁵.

Le calcul littéral vient d'être présenté comme un langage. Cependant, ce n'est qu'un aspect de ce domaine. Tout comme l'algèbre en général, le calcul littéral tient sa force dans sa puissance calculatoire ou « transformationnelle » : « Comme outil de communication, il manque à l'algèbre la flexibilité et l'ambiguïté qui font la force d'autres langages. Mais c'est la nature transformationnelle et la centralité de l'activité manipulative qui oblige plusieurs à admettre que l'algèbre est plus qu'un langage. » [Lee, 1997]. C'est ce nouvel aspect qui va être abordé dans la section suivante.

1.2 Le calcul littéral, une activité ?

Dans les réponses au questionnaire de Lee, l'aspect « activité » de l'algèbre émerge des sept thèmes caractérisant l'algèbre comme étant celui qui prédomine : « *Algebra emerges as an activity, something you do, an area of action, in almost all of the interviews* » [Lee, 1997, p. 187].

En quoi consiste alors réellement *l'activité* du calcul littéral ?

Duval [Duval, 1993] note qu'il est fréquent d'identifier l'activité mathématique à un travail portant sur les objets théoriques (sans aspect physique) et non sur les représentants réels de ces objets. L'activité mathématique se revendique être une activité *conceptuelle* et considère les représentations comme secondaires. Pourtant, et c'est là, le paradoxe que Duval dénonce et sur lequel nous reviendrons, il est impossible d'accéder à l'objet conceptuel sans le représenter. Ce paradoxe est encore plus présent dans le calcul littéral. D'un côté, ce qui permet de guider le calcul est une référence à la sémantique des expressions. D'un autre côté, le calcul littéral est, avant tout, une activité concrète (et dans son sens primitif du terme, le calcul signifie d'ailleurs une exécution répétitive, selon un enchaînement déterminé, de *manipulations* élémentaires. [Flajolet, 2008]), pouvant avoir tendance à être même purement syntaxique : la force du symbolisme est de pouvoir se détacher du sens pour pouvoir traiter rapidement les objets.

1.2.1 Une activité de traitement

Les objets manipulés dans le calcul littéral sont constitués de signes symboliques, qui, mis bout à bout, présentent une unité sémantique et dont l'ensemble forme un langage comme

15. Le lecteur intéressé par ces notions pourra se référer aux travaux de synthèse sur ce sujet dans la thèse de Bardini [Bardini, 2003, Chap II].

nous l'avons abordé dans le paragraphe précédent. D'un point de vue plus général, en tant qu'ensembles de signes (les ensembles de signes sont détachés de leur signification mais le signe lui-même garde une interprétation), ces objets appartiennent à un système sémiotique, et, plus particulièrement, à un registre de représentation. Duval [Duval, 1993] caractérise un registre de représentation comme un système sémiotique comportant une activité de formation (constituée de règles de conformité), une activité de traitement (transformation interne au sein du système sémiotique) et une activité de conversion (transformation externe du système dans un autre registre de représentation). L'écriture symbolique, système sémiotique, est bien un registre de représentation puisqu'il permet :

- Une activité de formation avec l'ensemble de règles de syntaxe et de convention qui permettent d'obtenir une écriture mathématique valide, règles que nous avons rappelées dans le paragraphe précédent.
- Une activité de traitement sur les différentes formes syntaxiques des objets algébriques. Cette activité est constituée des règles qui régissent le corps des polynômes.
- Une activité de conversion de l'écriture symbolique des objets algébriques dans un autre registre, tel que le registre oral, le registre de la langue naturelle (écrite ou orale), ou encore le registre graphique (celui des arbres ou celui des graphes de fonctions).

À ce stade, le calcul littéral peut être défini grossièrement comme l'activité de *traitement d'objets algébriques dans le registre de l'écriture symbolique*.

Le registre de l'écriture symbolique a été présenté précédemment : il a même été vu en tant que langage. Quant aux traitements, quels sont-ils ? Sur quels objets portent-ils ? Duval ne permet pas à lui seul de répondre à cette question. Il appelle traitement d'une représentation, toute transformation de celle-ci dans le registre considéré. C'est donc un travail interne au registre qui peut être régi par un grand nombre de règles comme un nombre restreint selon le registre dans lequel il se situe. Le choix du registre repose en général sur l'économie du traitement qu'il propose. Ainsi, le registre des écritures symboliques présente un gain indéniable en puissance de traitement face à la représentation sous forme d'arbres ou en langage naturelle. Traiter (c'est-à-dire transformer) la simple « somme de 2 et du produit de 8 et du carré de x »¹⁶ en un produit est une tâche bien plus ardue que de transformer l'arbre 1.2 qui est elle-même plus difficile que la tâche de transformation de l'expression littérale $2 + 8x^2$. Duval [Ibid.] reconnaît même que le calcul est, en fait, un traitement propre au registre des écritures symboliques.

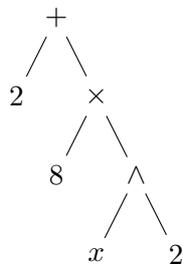


FIGURE 1.2 – Représentation sous forme d'arbre de l'expression littérale $2 + 8x^2$.

16. Notons même que nous avons recours, y compris dans le registre de la langue naturelle à des éléments du registre symbolique.

Duval ne distingue pas différents types de traitements au sein d'un même registre mais dans notre travail, nous avons été amené à nous interroger sur la distinction entre traitements *entre* objets (comme l'addition, la multiplication ou l'égalité de polynômes) et traitement *sur* un même objet (comme la transformation d'un polynôme en un autre). Nous verrons plus loin comment l'enseignement d'aujourd'hui a laissé le traitement entre objets pour le traitement sur un même objet, laissant par conséquent les justifications théoriques de côté.

Le calcul littéral est une activité de traitements *sur* des polynômes.

1.2.2 Une activité de transformation : Notion d'équivalence et de règles algébriques

Kieran permet de compléter la métaphore de l'algèbre comme activité en proposant un modèle de l'activité algébrique découpé en trois grands types [Kieran, 2004] :

- L'activité de généralisation qui est centrée sur la représentation et l'interprétation de propriétés, de modèles et de relations. Par exemple, l'exercice qui consiste à demander à l'élève de trouver une règle qui permet de construire une suite logique à un ensemble de figures géométriques.
- L'activité globale ou de méta-niveau, où l'algèbre n'est plus un objet mais un outil qui permet de résoudre des problèmes de modélisation.
- L'activité transformationnelle qui consiste en la transformation d'expressions ou équations selon des règles qui maintiennent l'équivalence.

Le calcul littéral est une activité de transformations équivalentes *sur* des polynômes.

Reste à savoir ce que l'on entend par équivalence des transformations.

Définition d'équivalence

En examinant ce qui autorise à dire d'une proposition mathématique qu'elle est vraie, Woodhouse donne les prémices du jeu syntaxique qui se dégage de la notion d'équivalence. Il définit un processus formel de démonstration pour l'algèbre, ce qui est peu habituel¹⁷. Pour démontrer l'égalité de deux expressions, il faut former une chaîne d'expressions équivalentes, où deux expressions sont équivalentes si la « conversion » de l'une en l'autre s'effectue selon des règles données :

« Demonstration would be defined to be, a method of shewing the agreement of remote ideas by a train of intermediate ideas, each agreeing with that next it; or, in other words, a method of tracing the connection between certain principles and a conclusion, by a series of intermediate and identical propositions, each proposition being converted into its next, by changing the combination of signs that represent it, into another shewn to be equivalent to it¹⁸. » [Woodhouse, 1801, p. 107, cité dans [Ruffieux, 2005]].

17. Ce processus est en effet relativement absent de l'enseignement. Un élève de fin de collège aura tendance à assimiler démonstration à géométrie.

18. « La démonstration pourrait être définie comme une méthode qui montre la concordance d'idées séparées par un fil d'idées intermédiaires, chacune étant conforme à la suivante ; ou, en d'autres termes, une méthode qui trace la relation entre certains principes et une conclusion, par une série de propositions intermédiaires et identiques, chaque proposition étant convertie en la suivante, en changeant la combinaison des signes qui la représente en une autre qui s'avère équivalente à la première. » [TA]

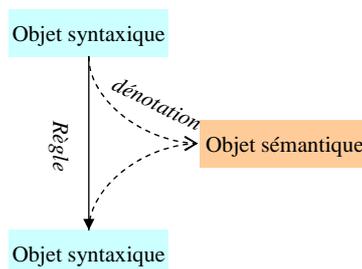


FIGURE 1.3 – Le calcul littéral est vu comme le traitement sur la syntaxe d’objets se référant à un seul objet sémantique.

Définition. Étant donné un ensemble d’expressions et une dénotation, nous dirons que deux expressions algébriques sont *équivalentes* si et seulement si elles *dénotent* la même expression.

Remarques. L’équivalence entre expressions algébriques est bien une relation d’équivalence, à savoir réflexive, symétrique et transitive.

Alors que les (dénotations) polynômes et fonctions polynomiales sont isomorphes, nous avons rappelé page 13 que, sur \mathbb{R} , les (dénotations) fractions rationnelles et fonctions ne le sont pas. Aussi, sous la dénotation de fraction rationnelle, $(x^2 - 1)/(x + 1)$ est équivalent à $x - 1$ tandis qu’avec la dénotation de fonction rationnelle, elles ne le sont pas.

Les traitements permis sur les expressions algébriques sont donc les combinaisons de substitutions d’unités syntaxiques avec maintien de l’objet sémantique, cf. figure 1.3. Ce maintien ou cette équivalence est assuré par des règles formelles. Deux types de règles régissent ces substitutions : celles qui portent sur la structure syntaxique (à savoir les règles dites algébriques) et celles qui portent sur la matérialité (à savoir les règles de convention, pour lesquelles il n’y a pas de justification mathématique mais seulement un usage), cf. section 1.1.2.

Le calcul littéral est une activité dans le registre de l’écriture symbolique qui consiste à effectuer des traitements *sur* des polynômes en conservant la dénotation des polynômes.

Les règles algébriques

Les règles permettant la substitution d’une expression par une autre qui lui est équivalente reposent, dans le domaine qui nous intéresse, sur les lois de l’anneau des polynômes (commutativité, distributivité, ...). Elles permettent d’obtenir des objets dont la forme particulière présente un intérêt, répond à un besoin. Elles sont guidées par l’utilité des objets à obtenir qui ont été présentés dans la section précédente : forme réduite ou factorisée du polynôme. Bellard et al. les appellent les règles constitutives d’une théorie mathématique : « ces règles constituent les fondements de l’activité, régissent les gestes et prédéterminent les actions permises » [Bellard et al., 2005]. Comme les auteurs le font remarquer, elles prennent le plus souvent une forme déclarative et non procédurale. On les trouve, par exemple, sous la forme :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a(b + c) = ab + ac \quad (1.1)$$

Elles présentent en fait deux implications. D’une part, une lecture de gauche à droite fournit la procédure qui permet de transformer un produit en une somme. D’autre part, la lecture de droite

à gauche donne la procédure de transformation d'une somme en un produit. Contrairement à l'usage, en particulier institutionnel sur lequel nous reviendrons en section 1.3.2, nous définissons dorénavant une règle par ce que Durand-Guerrier appelle plus précisément une « implication formelle » [Durand-Guerrier et al., 2000, p. 34] :

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) \Rightarrow q(x).^{19} \quad (1.2)$$

L'identité 1.1 ci-dessus devient alors :

$$\text{Si } P(X) = a(b + c), \text{ Alors } P(x) = ab + ac.$$

et

$$\text{Si } P(X) = ab + ac, \text{ Alors } P(x) = a(b + c).$$

Définir la notion de règle sous la forme de l'implication (1.2) permet d'appuyer le sens de lecture.

1.2.3 Conclusion

La métaphore de l'activité s'applique bien au calcul littéral. Lee écrit d'ailleurs à propos de cette métaphore que « c'est la manipulation symbolique dont il est le plus souvent question lorsqu'on utilise cette métaphore. » [Lee, 1997]. Les travaux de Duval permettent de décrire l'activité du calcul littéral comme un traitement sur des écritures symboliques. Activité transformationnelle, elle consiste en la transformation d'une écriture (aspect syntaxique de l'expression) en une autre tout en conservant la dénotation (aspect sémantique de l'expression). Le dénoté de l'expression est donc conservé, seule sa forme est modifiée, ainsi donc que le sens puisqu'il s'exprime par la syntaxe. Cette activité consiste en une manipulation d'ostensifs grâce à des objets non ostensifs : les règles. Celles-ci sont régies par les lois de l'anneau des polynômes (ou celui des fonctions polynomiales, selon la sémantique choisie).

Dans un premier temps d'apprentissage, le calcul littéral demande une compréhension en profondeur des règles : pourquoi peuvent-elles être appliquées ? Pourquoi l'équivalence est conservée ? Dans un second temps, le traitement tend à se détacher du sens en appliquant de manière automatique ces règles. Ces « métamorphoses », comme les appelle Serfati (transformation de l'objet source vers le transformé) peuvent alors sembler magique pour celui qui applique les règles sans s'être préalablement persuadé de leur validité. C'est en particulier le cas de bien des élèves dont la gêne pourrait reposer sur un enseignement qui se voudrait très axé manipulation et routinisation de techniques en oubliant le préalable essentiel de la compréhension de la dénotation.

Le calcul littéral consiste en des traitements particuliers (application des règles algébriques qui assurent le maintien de l'équivalence) sur les polynômes. Alors que l'objet polynôme est défini dans la sphère savante mathématique et est relativement absent de l'enseignement dans le secondaire, nous allons voir que les traitements sont plus des notions propres à l'institution scolaire.

19. C'est nous qui ajoutons $\forall x \in \mathbb{R}$ car Durand-Guerrier parle plus généralement de « clôture universelle d'une phrase ouverte ». Cela lui permet de ne pas définir l'ensemble d'appartenance de l'élément x .

1.3 Le calcul littéral, un sujet scolaire ? Ou la transposition didactique

Une troisième métaphore qui ressort du travail de Lee est que l'algèbre est un sujet scolaire. Or, le calcul littéral est non seulement une thématique importante de l'enseignement (chapitre à part entière, isolé de ses raisons d'être, il est un véritable objet d'apprentissage) mais il n'existe même, en fait, que dans l'institution scolaire (contrairement à d'autres thématiques que l'on peut rencontrer à la fois dans l'enseignement mais aussi dans le quotidien). Cette caractéristique est essentielle pour nos travaux car l'élève dont nous souhaitons modéliser les connaissances, est avant tout un sujet institutionnel. C'est à travers l'institution du collège que son rapport personnel au calcul littéral se forme. Il est, en cela, primordial de connaître ce que le collège lui propose et ce que nous, chercheurs, pouvons attendre de lui.

L'idée de cette partie est de reprendre les notions abordées plus haut et de voir comment elles sont transposées dans l'enseignement. Après un rapide tour d'horizon sur les programmes de collège, nous décrirons, dans une première partie, ce que sont les objets de variable et d'expressions algébriques au collège. Dans une seconde partie, consacrée aux traitements, nous aborderons la notion de règle au collège pour décrire, enfin, chacune des trois grandes notions clefs du calcul littéral : la réduction, le développement et la factorisation.

1.3.1 Tour d'horizon des programmes

Nous avons décidé d'étudier le rapport institutionnel à travers les programmes et les manuels scolaires, illustrations de ce qui peut se passer au cours de l'apprentissage. Nos expérimentations ont été conduites de la rentrée scolaire 2004 à juin 2007. Les programmes en vigueur sont ceux qui ont été définis en 1998 (respectivement 1999), pour la classe de 4^e (respectivement 3^e). Les manuels que nous analyserons suivent donc ces programmes. Ils datent principalement de 2002 : ils ont ainsi pu intégrer un certain recul par rapport à l'entrée en vigueur de 98. Le programme de 98 note un changement important en calcul littéral avec l'ancien programme de 88, changement sur lequel nous reviendrons. Les programmes de 98 ont été révisés en 2007. Les nouveaux programmes sont donc rentrés en vigueur actuellement. Étant donné que nos expérimentations ont été conduites avant ce changement de programmes, nous ne nous attarderons pas sur les éventuels changements. Nous préciserons, en cas de besoin, si nous nous sommes appuyés sur des manuels de 2007 et si ils marquent une différence. Des extraits des programmes de 98 et 07 sont donnés dans les annexes respectives A.3 et A.4²⁰.

En arrivant au collège, les élèves doivent s'approprier une nouvelle syntaxe et de nouveaux usages d'outils familiers. On trouve, dans le programme de sixième, deux chapitres totalement distincts : « Initiation à la résolution d'équations » et « Initiation aux écritures littérales ». La désignation de l'inconnue par une lettre n'étant pas nécessaire à ce niveau-là et aucune technique n'étant installée, la référence au sens de l'opération reste très présente. L'algèbre prend du sens grâce à son intérêt « économique » :

« On doit effectuer les calculs : $15 \times 3 + 7$; $15 \times 9 + 7$; $15 \times 0 + 7$; $15 \times 11 + 7$; ...
Comment peut-on donner plus rapidement la consigne ? »

Un travail sur le sens de l'égalité est aussi demandé. Le signe « égal » peut avoir le sens de relation et non uniquement le signal de l'exécution d'une procédure :

20. Un travail approfondi élaboré en 2005 par l'académie de Nancy-Metz propose une chronologie de l'apprentissage du calcul littéral de la 6^e à la 2nde, cf. Annexe A.1

« Écrire $2 + 1/3 = 1 + 4/3$; $8 = 6 + 2$ etc. et pas seulement $6 + 2 = 8$ ».

En cinquième, contrairement à ce qui est proposé en classe de sixième, les thèmes « Calcul littéral » et « Initiation à la résolution d'équations » sont étroitement imbriqués. La lettre prend un nouveau statut : celui d'indéterminée où l'égalité est toujours vraie (la première de ces égalités, exigible en cinquième, est l'égalité liée à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition). L'inconnue est désignée par une lettre dans les équations mais la résolution s'appuie encore uniquement sur le sens des opérations. En fin de cinquième, l'élève doit avoir rencontré les différents statuts de la lettre et de l'égalité.

En quatrième et en troisième, d'autres identités apparaissent : double distributivité et identités remarquables. La notion de fonction est introduite et, avec elle, la notion de variable, ouvrant un autre champ qui occupera une place importante au lycée : la notation fonctionnelle amène à utiliser la lettre avec une nouvelle signification. Les transformations d'écritures, telles que réduction et factorisation, sont ainsi introduites lors de la résolution de problèmes ou lors de démonstrations. Elles s'imposent comme une véritable nécessité pour éviter les calculs fastidieux. Les élèves perçoivent l'avantage d'avoir effectué un calcul « une fois pour toutes », et d'utiliser la forme réduite pour les calculs successifs.

Aussi, nous limiterons-nous à l'analyse des manuels de 4^e pour les tâches de réduction et de développement et des manuels de 3^e pour les tâches liées à la factorisation et aux identités remarquables puisque, en classe de 5^e, les écritures littérales sont introduites mais le calcul littéral ne figure pas au programme : en 5^e, on ne fait que constater que les expressions retournent les mêmes valeurs numériques en remplaçant les lettres par quelques valeurs tandis qu'en 4^e, cela va pouvoir se prévoir grâce au calcul littéral.

1.3.2 Les objets transposés

L'expression littérale. L'objet manipulé dans les manuels scolaires actuels « correspondant » au polynôme est en fait appelé *expression littérale* : c'est une « écriture contenant une ou plusieurs lettres » [Le Hir et al., 2002, p. 208], ou plus précisément une expression où « certains nombres sont remplacés par des lettres » [Pene and Depresle, 2002, p. 74]. Ces définitions sont quelque peu approximatives (cela restant vrai dans 13 manuels analysés). Il n'est, par exemple, pas précisé si les fractions rationnelles sont des expressions littérales, comme le laissent à penser certains manuels : « des indications d'un calcul à effectuer sur des nombres qui peuvent en totalité ou en partie être remplacés par des lettres, les seuls calculs indiqués étant ceux des opérations d'addition, soustraction, multiplication, division, élévation à une puissance ou encore extraction d'une racine » [Maillard and Millet, 1948, p. 32]. Ce manuel semble accepter dans sa définition d'expressions littérales les fractions rationnelles. Or, il semble évident, à la lecture des exercices proposés, que seules les expressions algébriques *entières* (à coefficients dans \mathbb{Z} la plupart du temps, ou plus généralement dans \mathbb{R}) ne sont considérées.

Ces expressions ne prennent pas pour autant le statut de polynômes. En effet, c'est une notion qui n'est réellement abordée qu'à l'université. Il semble donc raisonnable de considérer que les expressions manipulées en collège français ne sont pas des polynômes, contrairement à ce qui se pratique dans d'autres pays, comme au Vietnam²¹ [Nguyen, 2006]. Prennent-elles alors pour autant le statut de fonctions polynomiales ? Rien n'est moins sûr. En effet, les programmes de 2007 affiche, certes, le lien entre le calcul littéral et les fonctions : « méthodes algébriques liées souvent à l'utilisation de fonctions » [document d'accompagnement du numérique au littéral,

21. En France aussi, dans les années 70, l'on pouvait trouver les notions de polynômes puis de fonction polynomiale dès la classe de 4^e.

p.1]. Les expressions littérales se réfèrent donc à la notion (lointaine) de fonction polynomiale. Pourtant, cette notion se base sur celles de fonction et de polynômes, notions introduites que plus tard : 3^e pour la notion de fonction et université pour la notion de polynôme. De plus, le calcul littéral appartient à la section « Travaux numériques », dans les programmes de 98 et à la section « Nombres et Calculs » dans les programmes de 2007, bien éloignées de l’aspect de correspondance de la fonction.

La fonction polynomiale est donc au mieux un objet que l’on peut montrer à l’aide d’exemples et pour pallier à cette difficulté, les manuels tentent d’en donner des définitions à travers la notion d’expression littérale. Cette absence de définition des notions de polynôme, de fonction polynomiale ou encore d’indéterminée renforce l’aspect arithmétique généralisée de l’algèbre tant décrié [Kieran, 1992, Gascon, 1993, ...].

La variable. Un travail remarquable sur le document d’accompagnement des programmes de 2007 propose un récapitulatif du statut de la lettre en collège (Annexe A.2). En classe de 4^e, la lettre²² prend, pour la première fois, le statut d’inconnue avec l’introduction des équations. Toutefois, elle conserve d’autres statuts selon le contexte. C’est le statut de variable qui est proposée pour les lettres apparaissant dans les identités telles que la double distributivité. Elle « remplace » la notion mathématique d’indéterminée.

Tout comme l’indéterminée, la question de savoir si la variable est un objet sémantique ou syntaxique se pose. Cette question est délicate car la variable est une notion paramathématique²³. Pour Nicaud et Drouhard, elle est avant tout syntaxique :

*« A variable is a symbol made of characters (most of the time a unique letter). A variable is a concrete syntactic element that is used to represent many objects, but only one a time[...] The variables may have various status like unknown, parameter, variable describing a set of values. »*²⁴

« Par variables nous entendons toutes les lettres susceptibles d’entrer dans des écritures algébriques, indicées ou non, “primées” ou non et pouvant référer à des nombres réels. » [Drouhard, 1992, chap. IV]

Cependant, quand on parle de statut de variable, on fait appel à la structure fonctionnelle de l’expression. L’expression *varie* en fonction de la valeur prise par la lettre. La variable véhicule donc bien évidemment aussi un aspect sémantique. Toutefois, la lettre présentée en classe de 4^e ne véhicule guère cet aspect fonctionnel : elle est un nombre généralisé.

La règle. Propriété, identité, égalité, parfois même théorème, la règle prend différentes appellations dans les manuels. Elle se présente, en général, sous un aspect déclaratif d’une identité

22. Il est amusant de noter que, jusqu’à Descartes (qui fixa l’inconnue aux dernières lettres de l’alphabet), les mathématiciens n’ont eu de cesse de chercher à se détacher du « donné » [Serfati, 2005] en utilisant des symboles qui en étaient éloignés. Or, aujourd’hui, la lettre x prend une place prépondérante et omniprésente au point d’avoir un statut particulier. Un changement de lettre (utiliser y au lieu de x) peut même perturber l’élève !

23. « Les notions paramathématiques [...] ne font pas l’objet d’un enseignement : ce sont des objets de savoir “auxiliaires” [...] ils doivent être “appris” (ou plutôt connus) mais ils ne sont pas “enseignés”. » [Chevallard, 1998b, p. 49]. Les notions paramathématiques sont des outils pour l’activité mathématique contrairement aux notions protomathématiques, qui sont mobilisées uniquement implicitement.

24. « Une variable est un symbole fait de caractères (la plupart du temps une unique lettre). Une variable est un *élément concret syntaxique* qui est utilisé pour représenter plusieurs objets mais seulement un à la fois. Les variables peuvent avoir différents statuts comme inconnue, paramètre, variable décrivant un ensemble de valeurs. » [Nicaud et al., 2001]

égalitaire. En tant qu'égalité, elle n'a pas de sens d'utilisation (cf. section 1.2.2). L'aspect « implicatif » de la règle, telle que présentée sous la forme (1.2) et qui permet un raisonnement ordonné pour élaborer une démonstration ne se retrouve plus explicitement dans l'égalité. La règle demande un travail spécifique pour devenir opératoire : associer à l'égalité un sens de lecture pour la mettre en œuvre. C'est un véritable paradoxe. En effet, alors que les enseignants se « battent » pour faire assimiler aux élèves le double sens de lecture d'une égalité²⁵ (et éviter l'écueil bien connu du principe d'achèvement des calculs et du dilemme process-product [Davis, 1975]), il est en fait nécessaire dans ce contexte d'associer un sens de lecture au signe égal. Par exemple, on parle de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour développer des identités remarquables et de $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ pour factoriser.

La règle mathématique est, pourtant, censée être précise, suffisante à elle seule. Or, Durand-Guerrier dénonce cette fausse limpidité : « La règle n'est pas seulement un moyen d'apprendre, mais elle est aussi l'objet même de l'apprentissage. » [Durand-Guerrier and Herault, 2006, p. 139]. De même, Girmens [Girmens, 2003] remarque que la notion de règle présente le double aspect outil-objet de Douady [Douady, 1984] : d'un côté, la règle est vue comme un objet qu'il faut apprendre par cœur ; d'un autre, elle demande à être apprise en tant qu'outil afin de savoir l'appliquer. Il est, en fait, impossible de présenter la règle seule à l'élève. Il faut la transposer, l'adapter et donc perdre de sa rigueur en laissant des implicites, compensé peut-être par un contrat didactique inévitable : « C'est une illusion de croire que l'on produirait la signification dans l'esprit de quelqu'un par des moyens indirects, à travers la règle et les exemples. » (L. Wittgenstein, Les Cours de Cambridge 1932-1935, p. 161 ; extrait de [Sarrazy, 1995]). Durand-Guerrier signale l'illusion qui consiste à croire que la règle est « comme des rails qui guideraient infailliblement et par avance le chemin à suivre » [Durand-Guerrier and Herault, 2006, p. 146]. C'est l'interprétation qui permet en fait de pallier à cette insuffisance « comme s'il manquait un chaînon entre la règle et son application » [Ibid., p. 146]. Il n'y a d'ailleurs guère de règle qui donne des procédures d'ordre stratégiques (en quoi telle règle est plus performante au vue de telle expression que telle autre ?) ni de règles qui exposent leur raison d'être. Par exemple, la règle $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, dans sa lecture de gauche à droite, peut tout aussi bien s'appliquer pour factoriser $25 - 9$ que pour factoriser $25x^2 - 9$. Cette règle ne propose pas de distinguer l'utilisation qui peut en être faite : l'économie de coût numérique d'une part et l'objet à la forme factorisée d'autre part.

Présenter la règle sous la forme d'une implication plutôt que sous la forme d'une égalité permet de donner une « procédure d'utilisation » plus claire de la règle. Comme nous l'avons noté avec Woodhouse, p.22 de cette thèse, l'algèbre demande de véritables démonstrations, avec des applications de « théorèmes » qui soulèvent les difficultés habituelles de conditions d'application et d'appariement entre la prémisse de la règle et l'expression à transformer. Un tel apprentissage permet d'élaborer une véritable démonstration au sens de Duval sous la forme ternaire [Duval, 1995] : une prémisse (ici, une expression algébrique), une proposition (ici, une règle algébrique) et une conclusion (ici, une expression algébrique), cf. figure 1.4, constituent un pas de déduction. Les pas s'enchaînent, la conclusion de l'un devenant la prémisse du suivant. Selon la classification de Duval [Duval, 1990], le calcul littéral est formé de *pas de raisonnement en référence à une règle, à partir de deux prémisses et ils sont explicitement « enchaînés »*. En effet, il y a la prémisse constituée de l'expression algébrique à transformer et la prémisse de la règle à appliquer. Les pas sont explicitement « enchaînés » car « chaque nouveau pas a, parmi ses prémisses, la conclusion du pas précédent. Dans ce cas il y a substitution successive de conclusions jusqu'à la conclusion-cible. » [Ibid.] C'est le principe du *modus ponens*. Une

25. en particulier dans le travail sur les équations

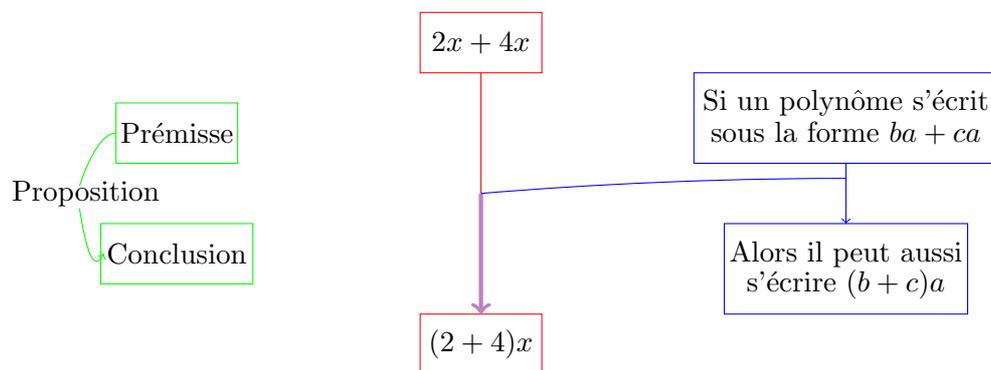


FIGURE 1.4 – Le principe du pas déductif : une prémisse, une proposition et une conclusion. Un pas de raisonnement en calcul littéral est constitué de deux prémisses : l'expression algébrique à transformer et la prémisse de la règle algébrique à appliquer. La granularité des pas déductifs dans une démonstration dépend du niveau de l'élève. Comme Arsac l'écrit : « toute démonstration est abrégée d'une autre démonstration » [Arsac, 2004].

telle exploitation des règles demande un apprentissage propre de lecture pour que le schéma de démonstration puisse être explicitement suivi. Dans l'enseignement, une telle utilisation n'est pas pratiquée. L'on demande d'ailleurs bien rarement de justifier et de citer la règle utilisée lors de la transformation d'une expression algébrique en une autre [Arsac, 2004]. Il est même précisé dans les programmes de Terminale que « dire qu'une propriété est utilisée comme **règle opératoire** signifie qu'on n'est pas tenu d'en justifier l'usage dans une démonstration ou dans un calcul. » [extrait du programme de T^eS de 2001, [Bellard et al., 2005]].

Une deuxième difficulté que peut rencontrer aussi l'élève est l'application d'une règle générale à un cas particulier et même à un nombre indéfini de cas. . . Comment la règle $k(a + b) = ka + kb$ peut-elle suffire pour gérer des cas aussi particuliers que différents comme $7(3 + x)$, $-7(3 + x)$, $7x(3 + x)$ ou encore $7(3 + x + x^2)$? Comment l'appariement de l'élément $a + b$ à l'expression $3 + x + x^2$ peut-il se faire et de l'élément k à $7x$? Pour dépasser cette difficulté, les manuels proposent souvent, comme nous le verrons plus loin, différentes règles : $k(a + b) = ka + kb$, $k(a - b) = ka - kb$, $-k(a + b) = -ka - kb$, . . . Il faut pour cela que l'utilisateur ait compris la notion de monôme, la notion d'expression et de sous-expression, qu'il ait perçu que $a + b$ était une somme, une somme d'un nombre quelconque de termes.

Savoir suivre une règle (connaître les conditions requises, le domaine de validité, la pertinence de sa mobilisation, . . .) est la condition d'apprentissage de tout système symbolique.

1.3.3 Quels traitements ? Des genres de tâches

L'intérêt de cette partie est triple. D'une part, elle permet de continuer à délimiter, cerner ce que l'on entend par calcul littéral, notre domaine d'étude. D'autre part, en décrivant les traitements en calcul littéral, cette partie présente ce que l'élève est susceptible d'apprendre. L'élève est tout autant, si ce n'est plus, notre sujet d'étude et il est primordial de savoir ce qu'il est censé connaître pour pouvoir modéliser au mieux ses connaissances. Enfin, et nous l'exploiterons dans le dernier chapitre, cette partie présente un modèle sur lequel nous nous appuyerons pour construire le notre : le quadruplet praxéologique.

Utilisation de la TAD pour lister les traitements du calcul littéral à travers une analyse des manuels scolaires.

L'élève étant sujet de l'institution scolaire, il est important d'analyser les connaissances que l'institution lui demande d'acquérir. Or, les expérimentations utilisées pour cette thèse étant très variées tant en terme de pays que de date d'expérimentation, nous avons considéré comme une « boîte noire » ce qui se passait dans la classe. À l'entrée de cette boîte, se trouvent les attentes de l'institution, ce qui est demandé à l'enseignant d'enseigner. À la sortie, se trouve l'élève dont nous souhaitons modéliser les connaissances. Il nous importait donc de décrire l'entrée du système sans pour autant avoir un accès au véritable discours de l'enseignant. Les manuels (et les programmes) semblent être un bon moyen « pour comprendre le fonctionnement ou pour caractériser l'état du système à un instant donné » [Chaachoua and Comiti, 2007] :

« Pour accéder à ce rapport institutionnel, l'analyse des manuels est nécessaire, et complémentaire de l'analyse des programmes. En particulier, lorsque l'accès au fonctionnement effectif dans une classe n'est pas jugée nécessaire, ou n'est pas accessible » [Chaachoua and Comiti, 2007]

Une analyse de plusieurs manuels permet, en quelque sorte, de moyenniser ce qui peut se passer dans l'ensemble des classes où ont eu lieu les expérimentations. Ils donnent « une réalisation effective et “objectivée” des enseignements donnés en classe. Réalisation soumise au regard et au jugement public, et qui se veut représentative de la réalité de la classe » [Menssouri, 1994]. Enfin, à travers les manuels scolaires, nous accédons aux différents traitements qui existent en calcul littéral.

Pour étudier les manuels scolaires, l'approche anthropologique de Chevallard est intéressante. En effet, notre travail est centré sur les techniques à travers la notion de règles algébriques et le modèle proposé par Chevallard repose aussi sur cet objet : « [...] ce sont fréquemment les *besoins de la pratique*, c'est-à-dire les *besoins de techniques*, qui sont à l'origine des praxéologies. » [Bosch and Chevallard, 1999, p. 7]. De plus, la notion de types de tâches répond tout à fait à notre besoin de décrire les traitements existants : « On notera cependant que d'autres thèmes d'étude (“factorisation”, “développement”, “résolution d'équations”, etc.) s'expriment très classiquement, en termes de types de tâches. » [Chevallard, 1998a]. Fort de ces observations, il paraît judicieux d'utiliser le modèle praxéologique pour étudier plus avant à la fois les traitements du calcul littéral et les attentes de l'institution. Ce travail de modélisation se décompose en quatre composantes, dont nous n'exploitons que les trois premières²⁶ :

- Les types de tâches. Leur identification repose sur une analyse des exercices et activités proposés dans les manuels, les parties « Activités » et « Cours » fournissant les types principaux tandis que la partie « Exercices » fournit des types plus secondaires, où la technique qui permet de résoudre ce type est souvent non explicite. Dans notre travail, un type de tâches est constitué d'un verbe (réduire, développer ou factoriser) suivi d'un type d'expression générique.
- Les techniques. Elles permettent d'accomplir les types de tâche. Elles consistent bien souvent, dans notre domaine, à des formules.
- Les technologies. Elles sont un discours descriptif et justificatif de la technique. Elles sont, en général, non explicitées dans les manuels mais peuvent être présentes dans le discours de l'enseignant. Elles sont donc reconstruites par le chercheur.

26. Nous n'allons pas présenter ce qu'est la théorie praxéologique. Le lecteur ne pourra qu'avantageusement se référer aux articles de l'auteur de cette théorie ([Chevallard, 1996], [Chevallard, 1997], [Chevallard, 1998a] et [Bosch and Chevallard, 1999] pour les plus récents), dans le cas peu probable où il ne serait pas familier avec cette théorie. Nous ne donnerons ici qu'en quelques lignes des rappels succincts des outils que nous allons utiliser.

Le choix du découpage que l'on propose repose avant tout sur la recherche de réponses à nos questions. Le fait que l'élève dont on modélise les connaissances appartienne, certes, à une institution mais dont on ne connaît pas le manuel utilisé tend à « moyenner » les différents types de tâches sur l'ensemble des manuels analysés. Les types de tâche qui n'apparaîtraient que rarement dans des manuels sont décrits mais ne sont pas conservés. Les types de tâche qui nous intéressent sont des objets tels que les rapports institutionnels de l'enseignant à l'objet soient localement stables [Chevallard, 1992, p. 94]. Les types de tâches conservés sont considérés comme tels par les enseignants et leur identification en tant que type de tâches n'est pas à la charge de l'élève. Au début de l'apprentissage d'une notion, nous estimons qu'en général, l'institution ne propose qu'une technique pour un type de tâches donné. Cette hypothèse repose sur l'idée que s'il existait plusieurs techniques pour un même type de tâche, et dans le cas où elles auraient des raisons d'être distincts, cela demanderait des connaissances approfondies pour savoir laquelle utiliser, connaissances qu'un débutant n'a pas. Dans le cas où l'efficacité des techniques ne permettraient pas de les distinguer les unes des autres, proposer plusieurs techniques à l'élève novice pourrait provoquer une certaine confusion. Dans tous les cas, nous considérons qu'en calcul littéral, l'institution scolaire a tendance à privilégier une technique par type de tâche, tout au moins au niveau du collège. C'est pourquoi nous suivons le principe suivant, hypothèse de travail qui permet de fixer le curseur de granularité de l'analyse praxéologique :

Curseur de granularité pour l'analyse praxéologique :

Il y a autant de types de tâches distincts que de techniques différentes. (HT1)

La liste complète des manuels dont des extraits apparaissent dans ce manuscrit est donnée en bibliographie. Dix des manuels de 4^e ont été pris plus particulièrement en considération. Parmi ces manuels figurent ceux qui étaient utilisés dans les classes où ont eu lieu les expérimentations pendant ces travaux de thèse. La liste des dix manuels est la suivante :

[Delord and Vinrich, 1998],

[Serra et al., 1998],

[Deneuil et al., 1998]

[Chapiron et al., 1998],

[Le Hir et al., 2002],

[Pene and Depresle, 2002],

[Malaval and Courbon, 2002],

[Fourton et al., 2002],

[Goutodier and Lévi, 2002]

[Charmaty et al., 2003].

À ceux-là s'ajoutent parfois des manuels d'après réforme 2007 ou des manuels plus anciens : [Andrieu et al., 2007, Brault et al., 2007, Audren et al., 2007, ...]. Cela sera précisé au fur et à mesure, selon les besoins.

Pour l'étude des identités remarquables et factorisation qui n'apparaissent qu'en classe de 3^e, ce sont les manuels suivants qui ont été étudiés :

[Chapiron et al., 1999],

[Delord and Vinrich, 2002],

[Fourton et al., 2003],

[Amigo et al., 2003],

[Brault et al., 2008],

[Audren et al., 2008].

Ils sont moins nombreux car ils s'accordent tous sur le découpage des types de tâches et les techniques à utiliser.

Le but de cette partie n'est en aucun cas de porter un jugement sur les manuels étudiés : que tel type de tâches T soit absent de tel manuel n'est pas critiquable. D'autant plus, qu'effectuer ce type de tâches T relèverait peut-être plus d'une demande de virtuosité de la part d'un élève de 4^e que d'un réel savoir-faire nécessaire.

Catégorisation des genres de tâche.

Trois grand types de traitement sont proposés dans les manuels scolaires étudiés. Ils se présentent sous la forme de verbe, autrement dit, sous la forme de genre de tâche²⁷ : *réduire*, *développer* et *factoriser*. Une première analyse des manuels a permis de catégoriser les définitions données de ces trois genres de tâche de deux manières²⁸ :

- Soit par *l'application d'une règle*, d'une formule ou la mise en place d'une technique. Ces techniques ont de particulier que ni leur obtention ni leur raison d'être ne sont nécessairement précisées. Notons aussi que ce ne sont pas toujours les termes de règle ou de technique qui se retrouvent dans les manuels. Il se peut que ce soit des termes sémantiquement proches tels que identités, égalités, faits, théorèmes, propriétés.
- Soit par *le type d'objet à obtenir*. Le genre de tâche peut être décrit par une de ses raisons d'être : obtenir un objet à la syntaxe particulière (produit, somme, etc). Ceci rejoint plus la pratique mathématique, où l'objet final est ce qui guide les choix stratégiques du praticien. Cela reste, cependant, parfois maladroit dans les manuels car les outils nécessaires à une définition précise de l'objet à obtenir leur font défaut. Par exemple, des précisions sur la nature de la terminaison (quand est-ce que l'on peut dire qu'une expression est « totalement » réduite?) sont difficilement formulables à des élèves de 4^e.

Cette catégorisation des genres de tâche rejoint en fait celle qui peut être faite des règles. D'un côté, l'on peut trouver des livres qui affirment qu'« une règle est la marche à suivre pour obtenir un résultat demandé » [extrait d'un livre de mathématiques de 1873]. D'un autre côté, on trouve des formulations telles que « la règle semble être la réponse à la question “comment effectuer cette tâche?” et elle s'énonce alors “pour...suivi d'un verbe d'action”. » [Bellard et al., 2005].

Chacune des trois sections qui suivent est consacrée à l'analyse d'un des trois genres de tâche. Chaque section est divisée de la manière suivante :

- Une introduction à la notion permet de définir étymologiquement le verbe étudié. La polysémie des verbes en question prête sans nul doute à confusion (« réduire » une fraction numérique ou simplifier ? Développer dans son sens originel de suppression de parenthèse ou de distribution ? ...) Ces verbes ne sont rien d'autre que des métaphores, qui peuvent

27. La notion de genre de tâche est ainsi définie par ses auteurs : « la mention au moyen de verbes d'action d'acception très large (par exemple “calculer”, “démontrer”, etc.) laisse le contenu mal défini - on parle alors de genre de tâches. » [Bosch and Chevallard, 1999, p. 5] Une autre citation illustre cette notion : « De même, calculer la valeur d'une fonction en un point est un type de tâches; mais calculer, tout court, est ce qu'on appellera un genre de tâches, qui appelle un déterminatif. » [Chevallard, 1998a]

28. Au départ, nous avons envie de dissocier et de classer ces genres de tâche selon si elles étaient définies ou si elles étaient des applications de règles mais Durand-Guerrier note qu'une telle distinction est délicate : « on accordera que si la définition est plutôt d'ordre théorique (elle dit/nomme la chose dans le langage) tandis que la règle est plutôt pratique (elle dit de faire la chose), l'opposition n'est pas aussi tranchée qu'il y paraît [...] le contenu lexical reste paradoxalement le même » [Durand-Guerrier and Herault, 2006, p. 143 & 144]. Nous nous sommes donc tournés vers une classification d'application d'une règle vs. obtention d'une forme.

laisser libre cours à l'imagination analogique de l'élève, ce qui avait été déjà commenté par Bachelard [Bachelard, 1996].

- Une rapide analyse de l'évolution des programmes permet d'identifier les changements cruciaux qui ont pu avoir un impact sur le genre de tâche considéré.
- Dans un troisième paragraphe, la manière dont est défini le genre de tâche dans les différents manuels est présentée : définition grâce à une technique ou par la forme à obtenir.
- Enfin, une analyse praxéologique des types de tâches qui relèvent du genre de tâche considéré est présentée.

Réduire.

Étymologiquement, « réduire quelque chose » signifie « la conformer, l'adapter à » [Oresme, 1377], ou « résumer, ramener à l'essentiel » [Rabelais, 1548, p. 286]. Cette notion fait donc appel à la diminution, au resserrement. Nous distinguons trois objets qui précisent le « quelque chose » : Réduire une somme algébrique, Réduire un produit algébrique, ou Réduire un quotient algébrique. Ce dernier objet ne nous intéresse pas puisque nous ne nous intéressons qu'aux polynômes. Quant aux deux premiers, l'infinitif utilisé aurait pu être distinct et l'est d'ailleurs dans certains manuels : réduire une somme mais *simplifier* un produit. En fait, la réduction de produits algébriques se distingue de celle de sommes algébriques par, non seulement, l'utilisation d'une technique parfois différente mais surtout par une technologie différente. Quand la réduction de sommes algébriques fait appel à la distributivité de la multiplication sur l'addition, la réduction de produits algébriques, elle, repose sur la propriété de commutativité et d'associativité de la multiplication ainsi que sur des conventions d'écriture. Le genre de tâche « réduire » débouche donc sur deux types de tâches distincts, comme nous le verrons plus loin : *réduire une somme* ou *réduire un produit*²⁹. Cependant, la réduction de produit est beaucoup moins considéré comme un type de tâches en tant que tel et n'a pas réellement de raison d'être si ce n'est d'obtenir, en complément de réductions de sommes algébriques, un polynôme réduit. C'est pourquoi, dans la suite, nous allons nous intéresser d'avantage à la notion de réduction de somme pour ne parler de réduction de produit que dans l'analyse praxéologique.

Évolution des programmes. Une réforme des programmes scolaires, conséquente sur la réduction de sommes algébriques, est entrée en vigueur en 1988 dans les classes de 4^e. La factorisation, qui avait sa place jusqu'alors en classe de 4^e, n'est, depuis, introduite qu'en classe de 3^e tandis que la réduction continue à être enseignée en classe de 4^e. Cela a pour conséquence de transformer la manière de définir et d'introduire la réduction : le terme « factoriser » a disparu au détriment de « regrouper », « compter les termes », etc. Une rapide analyse de trois manuels avant la réforme de 1988 montre que ces manuels n'hésitaient pas à définir la réduction comme étant une conséquence de la factorisation³⁰. Nous allons voir comment les manuels post-réforme 88 « jonglent » avec cette difficulté.

29. Utiliser le même verbe pour des types de tâche distincts est ce que Pascal appelle « le surcodage » [Pascal, 1980] : simplifier des fractions et simplifier un produit algébrique, réduire une somme et réduire un produit... Cela tend, en quelque sorte à faire disparaître la technologie de la technique : « le surcodage contribue à la non-prise en compte des conditions qui autorisent l'application de la règle et annihile, ainsi, la structure de théorème de la règle » [Bellard et al., 2005, p. 45].

30. En fait, dans les années 70, un autre type de tâche existait : la somme de deux polynômes déjà réduit. Comme pour le produit (qui sera exposé dans la prochaine section), une technique était proposée : celle de juxtaposer l'un en dessous des autres les monômes de même degré avant de les additionner.

Définition du genre de tâche. Dans le tableau 1.1, nous récapitulons les manières de définir la réduction des sommes algébriques dans les manuels. Cette notion est enseignée aujourd'hui principalement en classe de 4^e, comme l'indiquent les programmes scolaires. C'est pourquoi nous nous sommes limités à l'étude des manuels de ce niveau même si cette notion est abordée dès la classe de 5^e. Le changement de programmes de 2007 n'ayant pas affecté cette partie, nous avons ajouté aux dix manuels d'avant la réforme 2007 quatre manuels de la réforme 2007.

Dans ces quatorze manuels, nous distinguons deux types de définitions relevant d'une *technique* : l'application de la mise en facteur ou le décompte des grandeurs de même espèce. Nous détaillons ces deux techniques lors de l'analyse praxéologique. Trois types de définitions relèvent d'une *forme à obtenir*. Ils ont tous trait à la notion de diminution : diminution du nombre d'opérations, de longueur ou du nombre de termes.

Présenter la réduction par l'utilisation d'une technique permet d'aborder la notion de la dis-

	Définitions	Manuels
Définitions par une technique	Distributivité, Factorisation, Mise en facteur	[Audren et al., 2007, p. 73] ; [Delord and Vinrich, 1998, p. 70] ; [Serra et al., 1998, p. 79] ; [Pene and Depresle, 2002, p. 80] ; [Chapiron et al., 2007, p. 30].
	Additions de grandeurs de même espèce	[Deneuil et al., 1998, p. 77] ; [Fourton et al., 2002, p. 68 & 71] ; [Le Hir et al., 2002, p. 208].
	<i>Total</i>	8
Définitions par une forme à obtenir	Diminuer le nombre d'opérations	[Audren et al., 2007, p. 73].
	Diminuer la longueur	[Andrieu et al., 2007, p. 66].
	Diminuer le nombre de termes	[Goutodier and Lévi, 2002, p. 38] ; [Malaval and Courbon, 2002, p. 70] ; [Charmaty et al., 2003, p. 46] ; [Brault et al., 2007, p. 73] ; [Deneuil et al., 1998, p. 77].
	<i>Total</i>	7

TABLE 1.1 – Définitions de la réduction dans quatorze manuels de 4^e.

tributivité, justification de la réduction de sommes de monômes. C'est le cas de la majorité des manuels étudiés : 8 manuels sur 14. Inversement, aborder la réduction par l'objet à obtenir permet de donner le fil conducteur, la raison d'être d'une telle action : obtenir un polynôme sous sa forme réduite. Cette idée est transmise par 7 des manuels, sans pour autant qu'ils abordent vraiment le problème de terminaison : quand peut-on s'arrêter de réduire ? Seul 1 manuel sur 14 combine les deux types de définition. Évidemment, les 6 autres donnent une technique pour réduire, que ce soit le décompte ou la mise en facteur mais ils ne les donnent pas en tant que définition de la réduction. L'idée que la réduction est, avant tout, dans l'enseignement l'application d'une technique est renforcée par le fait que quand les manuels regroupent sous un même verbe les genres de tâche développer et réduire, ils le font sous le verbe « développer » et non « réduire ». En effet, ils parlent de développement lorsque l'expression $5(x + 2) + 3x$ est transformée en $8x + 10$ et non de réduction. L'acte de réduction semble « récessif » sur l'acte de

développement. Pourtant, dans la sphère savante, le polynôme réduit a une définition claire (cf. section 1.1.2) et on ne parle pas de polynôme « développé ».

Analyse praxéologique du genre de tâche « réduire ». Sous l'hypothèse H_{T1} , l'analyse des manuels permet de distinguer deux types de tâches : réduire une somme algébrique, que nous noterons T_{Red}^{Σ} et réduire un produit algébrique, que nous noterons T_{Red}^{Π} . Comme il a été noté plus haut, le deuxième type de tâches fait même parfois appel à un autre verbe : « simplifier un produit algébrique ».

Le type de tâches, T_{Red}^{Σ} . La tâche « Réduire $7x^2 + 3x^2$ » en relève.

Deux **techniques** sont proposées par les manuels. L'une étant exclusive de l'autre dans chacun des manuels, cela rentre dans l'hypothèse H_{T1} . Elles correspondent, bien sûr, aux deux techniques utilisées pour définir le genre de tâche « réduire » vues dans le paragraphe précédent.

Première technique τ_{compte} :

- Regrouper les termes semblables,
- Compter ou additionner les termes semblables.

Seconde technique τ_{fact} :

- Regrouper les termes semblables,
- Mettre en facteur le facteur commun,
- Effectuer les calculs.

Ces deux techniques reposent sur la **technologie** suivante :

Technologie θ_{dist} , justifiant τ_{compte} et τ_{fact} :

Commutativité et distributivité de la multiplication sur l'addition dans \mathbb{R} .

Remarques sur la technique τ_{compte} , utilisée par 5 manuels sur 10 :

La première étape (ou premier sous-type de tâche), « Regrouper les termes semblables », de la technique τ_{compte} consiste à commuter les termes de la somme à réduire afin de regrouper les monômes de même degré. Elle n'est pas nécessaire à cette technique et elle n'est d'ailleurs pas toujours proposée dans les manuels. En effet, on peut « compter » les « x » même s'ils sont dispersés dans l'expression, quitte à utiliser un ostensif (tel que barrer les monômes additionnés, principe d'énumération qui se rencontre dans les problèmes de dénombrement de collections en primaire) pour être sûr de ne pas avoir oublié de termes. Ce même sous-type de tâches n'a pas le même intérêt dans la technique τ_{fact} . En effet, sa fonctionnalité y est plus importante : pour pouvoir appliquer la formule de la distributivité, mieux vaut avoir commuter les termes pour obtenir la forme $ka + kb$.

La technique τ_{compte} demande aussi, a priori, comme sous-tâche préliminaire d'avoir écrit les monômes sous leur forme « réduite » : ax^n . Il est, en effet, plus difficile de « compter » les « x » dans $x \times 3 + x \times 2 \times 5$ que dans $3x + 10x$.

Nous nous sommes interrogés sur la portée de cette technique. On peut « additionner » $\frac{2}{3}x$ à $\sqrt{3}x$, mais peut-on les « compter » ? A-t-il lieu de distinguer le type de tâches « réduire une somme polynomiale à coefficients entiers » du type de tâches « réduire une somme polynomiale » ? Sous l'hypothèse énoncée plus haut, H_{T1} , la réponse résidait en *la présence conjointe* au sein d'un même manuel de deux techniques, l'une pour traiter la réduction d'une somme polynomiale à coefficients entiers et l'autre pour traiter la réduction d'une somme polynomiale à coefficients réels. Or, aucun manuel ne propose une telle distinction. Les manuels proposant la technique τ_{compte} estiment donc qu'elle est efficace aussi bien sur les coefficients entiers que réels. En effet, parmi les 5 manuels utilisant cette technique,

3 proposent des réductions sur des expressions polynomiales à coefficients fractionnaires : [Chapiron et al., 1998, Pene and Depresle, 2002, Fourton et al., 2002].

Enfin, il est bon de noter que cette technique peut être à l'origine d'une certaine confusion chez l'élève. D'une part, c'est une méthode opérationnelle, qui ne favorise pas la rupture avec l'arithmétique. Elle est satisfaisante pour l'enseignant et l'élève par son efficacité en faisant appel à de vieilles connaissances arithmétiques bien installées. Cependant, ce n'est que repousser la rupture nécessaire entre arithmétique et algèbre, déjà mise à mal par la présence des lettres en tant que nombres généralisés, ce qui a été décrit plus haut. D'autre part, « réduire », nous l'avons vu, est un terme très général utilisé aussi bien pour le numérique que pour des produits algébriques. Comme il est noté dans [Bareil and Zehren, 1984, p. 95], « il est tentant et parfois intéressant, de justifier les réductions éventuelles de sommes algébriques par le recours à des comparaisons avec des additions de grandeurs de même espèce. Ainsi peut-on réduire $5\text{ cm} + 3\text{ cm}$ ou $5\text{ cm}^2 + 3\text{ cm}^2$ mais non pas $5\text{ cm} + 3\text{ cm}^2$. De même sait-on réduire $3\text{ pommes} + 5\text{ pommes}$ mais pas $3\text{ pommes} + 5\text{ chaises}$. Tout cela est « concret » et frappant. Mais il peut s'ensuivre des risques d'erreur très graves en passant aux produits. Car on ne multiplie pas 3 pommes par 5 chaises, alors que, par exemple, $3x \times 5x^4$ se réduit... » Ce biais serait renforcé par le fait qu'un manuel emploie le même verbe d'action « réduire » à la fois pour un produit et pour une somme, tout en proposant cette technique de comptage. En fait, c'est le cas d'un seul des manuels analysés. Ce manuel justifie l'emploi du même verbe pour ces deux actions par le fait qu'il définit la réduction comme *une diminution de longueur*, ce qui peut s'appliquer à la fois pour un produit à simplifier et une somme à réduire.

Remarques sur la technique τ_{fact} , utilisée par 5 manuels sur 10 :

Le terme de factorisation n'est pas toujours utilisé dans les manuels. N'étant plus au programme, ce terme est, en général, remplacé par « mettre en facteur » ou surtout « appliquer la formule $ka + kb = k(a + b)$ ». Cette technique prend donc la forme d'une formule avec une mise en œuvre éventuelle sur un exemple détaillé. Notons cependant que la formule est présentée, parfois, comme un véritable moule avec des ostensifs telles que des couleurs et des flèches, au point que l'on peut se demander si l'élève (dans le cas où l'enseignant suivrait à la lettre de tels manuels) aura compris la portée d'une telle technique.

Enfin, l'application de cette formule exige de l'élève qu'il ait compris que cette formule est à répéter autant de fois qu'il y a de monômes à additionner.

Remarques communes aux deux techniques τ_{compte} et τ_{fact} :

La terminologie de « termes semblables » n'est pas toujours celle proposée par les manuels. En fait, la plupart demande de regrouper les termes en « x », les termes en « x^2 », ... Ceci nous a amené à nous interroger à nouveau sur un éventuel découpage du type de tâches T_{Red}^{Σ} . Faut-il distinguer les réductions de sommes de monômes de degré 1 de celles de degré 2 ou plus ? Encore une fois, l'hypothèse posée au départ, **H71**, nous a permis de répondre à cette question. Prenons le cas le plus extrême, le manuel [Pene and Depresle, 2002], qui ne décrit la technique que sur des exemples de monômes de degré 1, cf. figure 1.5. Il préconise de « regrouper les termes où figure « x » ». Tous les exemples des parties « Activités » et « Cours » relèvent du type de tâches « réduction de sommes de monômes de degré 1 ». Cela aurait pu donc inciter à en faire un type de tâches particulier. Or, dans la partie « Exercice », sont proposées des réductions de sommes de monômes de degré supérieur à 1 sans qu'il y ait de note particulière réveillant l'attention du lecteur sur un nouveau type de tâche. Pour ce manuel, comme pour les autres, la technique proposée dans la partie « Cours » s'étend et il n'y a pas lieu de distinguer

ces types de tâche³¹.

De même, certains manuels ne proposent, dans leur partie « Cours », que des exemples sur des sommes de *deux* monômes de même degré. Ils ne précisent donc pas la technique qui consiste à regrouper les termes semblables puisqu'elle n'est pas nécessaire. Ils étendent, cependant, comme allant de soi, leur technique aux sommes de plusieurs monômes de différents degrés dans la partie « Exercices ». Il n'y a donc pas lieu, à nouveau, de distinguer le type de tâches « réduire une somme de 2 monômes de même degré » de « réduire une somme polynomiale ».

e. Réduction d'une expression littérale

Lorsqu'on obtient une expression littérale telle que : $3x - 2 - 5x + 10$, on peut **réduire** son écriture en regroupant les termes où figure x , et en effectuant les calculs avec les autres termes : $3x - 2 - 5x + 10 = 3x - 5x - 2 + 10 = -2x + 8$.

FIGURE 1.5 – Dans la partie « Cours » du manuel [Pene and Depresle, 2002], la technique de réduction est montrée sur un exemple de monômes de degré 1 et la technique elle-même n'est décrite que pour des monômes de degré 1.

Remarque sur la technologie θ_{dist} :

Dans certains manuels, la technologie en terme de distributivité de la multiplication sur l'addition est absente. Dans les manuels qui font appel à la technique τ_{compte} , son absence peut se justifier par le fait que la distributivité est en fait de l'ordre de la théorie, la technologie pouvant se limiter à la simple notion de dénombrement d'objets de la même collection, reposant sur l'associativité dans \mathbb{N} . Quant aux manuels faisant appel à la technique τ_{fact} , la formule $ka + kb = k(a + b)$ vaut comme technologie sans pour autant qu'il y ait de rappel sur la notion de distributivité. « [...] le fait qu'existe dans I une technique canonique, en principe seule reconnue et seule employée, confère à cette technique une vertu « auto technologique » : faire ainsi n'appelle pas, ou plus, de justification, puisque c'est la bonne manière de faire (dans I). » [Chevallard, 1998a]. Il y a donc trois associations possibles de techniques et de technologies : la technique τ_{compte} peut ne pas être justifiée ou justifiée par la technologie θ_{dist} et la technique τ_{fact} est auto-justifiée par la technologie θ_{dist} , comme le récapitule le tableau 1.2, qui cite les manuels ayant recours à l'une de ces trois associations.

Le type de tâches, T_{Red}^{Π} . La tâche « Réduire $5x^2 \times 3x$ » en relève.

Ce type de tâches est plus une technique élémentaire de tâches relevant de la réduction de sommes voire du développement. En effet, il est bien rare de trouver, dans la partie « Exercices » des manuels, des tâches telles que « Réduire ou simplifier le produit $4x \times 3x$ ». En fait, elles se retrouvent dans une technique générale de transformation d'expression algébrique en expression réduite. Une tâche telle que « Transformer $3x(5x + 2)$ en $15x^2 + 6x$ » demande d'effectuer des produits de monômes. Si nous avons choisi de lui conférer un statut de type de tâche, c'est parce que dans la partie « Cours » des manuels, se trouve régulièrement un bref paragraphe portant sur des transformations de produits de monômes.

La **technique** consiste à « écrire les nombres devant les lettres ». Le fait que le produit de x par x^2 s'écrive x^3 se trouve dans le chapitre sur les puissances. Dans le chapitre « Calcul littéral », ne se trouvent, à propos des produits, que des tâches de produit de monôme de degré 1 par un nombre ou, au mieux, par un autre monôme de degré 1.

31. Il n'y a pas lieu de discuter ici de savoir si la portée de la technique est bien suffisante. Nous prenons le parti que les manuels laissent à la charge de l'enseignant de mettre en œuvre de telles techniques.

La réduction de produits de monômes, fondée sur la convention d'écrire un monôme avec le coefficient avant la variable, se justifie par la commutativité et l'associativité de la loi multiplicative. Cependant, les **technologies** trouvées dans les manuels sont de deux types et exclusives l'une de l'autre : soit le type de tâches T_{Red}^{II} est regroupé avec les règles de convention, soit un entrefilet explique que l'on peut commuter les arguments, sans rappel de l'associativité.

En résumé à propos de la réduction. Deux types de tâches ont été repérés : celui de la somme de monômes et de produit de monômes. Les réflexions ci-dessus autour du choix sur le découpage permettent de faire émerger certaines caractéristiques des expressions (degré, nature des coefficients) qui trouveront échos dans la construction des variables dites « de contexte » lors de l'élaboration de nos expérimentations mais aussi dans la recherche d'éléments provocateurs de comportements différents (cf. Chapitre 4).

Deux techniques sont proposées pour répondre au type de tâches de réduction de sommes : une méthode de dénombrement et une technique de factorisation, toutes deux reposant plus ou moins explicitement sur la distributivité de la multiplication sur l'addition. Cette notion de dénombrement renforce les propos tenus plus haut à propos de l'ensemble dans lequel vivent les expressions algébriques (\mathbb{R} ou $\mathbb{R}[X]$? section 1.3.2), le dénombrement rentrant nettement dans une notion d'« arithmétique généralisée ».

Une sous-expression de l'expression prend un statut particulier : celui de terme semblable ou de grandeur de même espèce. Uniquement dans le champ lexical de la syntaxe (termes en « x », de même degré, semblables, termes où figure « x », les « x » et les « x^2 » ...), cette notion fait clairement appel à une reconnaissance de forme et pousse possiblement l'élève à se placer dans le registre syntaxique de l'expression. Cette reconnaissance est outillée par l'utilisation d'ostensifs tels que des mêmes couleurs pour les termes semblables ou des flèches indiquant les termes semblables ([Serra et al., 1998, p. 80]). Cette notion est présentée par similitude : les termes en « x^2 » d'une part, les termes en « x » d'autre part. C'est une notion importante dans les manuels puisqu'ils s'appuient dessus pour introduire la technique de réduction d'une expression littérale : il faut regrouper les termes qui présentent un facteur commun constitué d'une puissance d'une lettre.

La notion de monômes est présentée par similitude syntaxique.

Finissons, enfin, par une remarque portant sur la notion de terminaison nécessaire à la « démonstration », énoncée, elle aussi, plus haut. Reconnaître qu'un polynôme est réduit fait appel à des notions de *monômes* et de *degrés*, notions qui ne sont plus enseignées. Cependant, la notion de termes semblables l'a remplacée. On pourrait ainsi exprimer la règle de terminaison sous-jacente : « lorsqu'il n'y a plus de termes semblables, alors s'arrêter ». Un des manuels ([Le Hir et al., 2002, p. 208]) aborde cette question explicitement en précisant, dans sa partie Cours, que « la multiplication est une opération prioritaire par rapport à l'addition et à la soustraction. Les écritures $9, 2n - 7$ et $6 + 4n$ ne peuvent donc être réduites davantage. » La forme réduite est donc globalement enseignée et assimilée par l'élève par rejet de ce que l'enseignant ne veut pas voir plutôt que par ce qu'il veut voir, comme l'est aussi la forme factorisée, dénoncé depuis bien longtemps entre autres par Tonnelle [Tonnelle, 1979].

Développer.

La notion de développement est une notion qui ne vit que dans l'enseignement. Elle repose sur l'idée de supprimer des parenthèses (son sens étymologique), de « défaire les enveloppes »

		Techniques	
		$\mathcal{T}_{\text{compte}}$: dénombrement des x	$\mathcal{T}_{\text{fact}}$: mise en facteur
Technologies	Non précisée	[Chapiron et al., 1998] ; [Pene and Depresle, 2002] ; [Charmaty et al., 2003]	
	θ_{dist}	[Deneuil et al., 1998] ; [Fourton et al., 2002]	[Delord and Vinrich, 1998] ; [Serra et al., 1998] ; [Le Hir et al., 2002] ; [Malaval and Courbon, 2002] ; [Goutodier and Lévi, 2002].

TABLE 1.2 – Praxéologie des dix manuels pour le type de tâches de réduction de sommes algébriques

[Deledicq et al., 1988, p. 251] mais aussi sur la transformation d'un produit en une somme. Elle est en fait une sous-tâche de l'idée d'obtention d'une forme réduite. En effet, comme il l'a déjà été dit plus haut, pour obtenir une forme réduite d'un polynôme, il faudra, selon les expressions, utiliser la distributivité pour faire disparaître des parenthèses éventuelles. Ce genre de tâche repose sur la technologie du produit de deux polynômes, technologie qui était un type de tâches en tant que tel à l'époque des maths modernes, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

Dans [Bouvier et al., 1993], le développement est défini comme la transformation réciproque de la factorisation : si un produit AB est une factorisation d'une somme $C + D$, on dit que AB a pour développement $C + D$. La disparition de la factorisation en classe de 4^e ne permet pas de définir le développement ainsi. Ce rapprochement pourra être fait seulement en classe de 3^e.

Pour Baruk [Baruk, 1992], développer une expression ne concerne « généralement » qu'un produit que l'on transforme en somme algébrique grâce à la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition ; effectuer en est un synonyme. Elle précise que l'utilisation de « développer » est « complètement hors de propos » pour la tâche $8 - (x + 5) + (3 - y)$ et que « réduire » est suffisant. Nous nous en distinguons en considérant qu'une telle tâche relève bien du genre de tâche « Développer ». Le but n'est pas, pour nos travaux, de discuter de la meilleure terminologie à adopter pour le verbe qui précède une telle tâche mais de regrouper, avec *sens*, les tâches que rencontre l'élève. Or, transformer $-(x + 5)$ en $-x - 5$ fait appel à la technologie de la distributivité de la multiplication sur l'addition et en cela, fait appel au développement³² au même titre que la tâche « Développer $3(4+x)$ ». Ce sont des organisations ponctuelles qui peuvent s'agréger en une organisation locale, centrée sur une même technologie [Chevallard, 1998a]. Il semble donc cohérent de les regrouper sous un même genre de tâche. Ajoutons aussi que ce ne serait pas cohérent de regrouper cette tâche avec celles de réduction car ceci contredirait la propre définition de Baruk : Réduire signifie, pour elle, « compter ensemble ». Or, dans ce cas, la transformation $-(x + 5) \rightarrow -x - 5$ ne relève pas non plus du comptage ni donc de la réduction³³.

32. Notons que ce n'est pas pour autant que la technique consiste à distribuer, comme nous le verrons dans l'analyse praxéologique.

33. Des extraits des dictionnaires de Baruk et Bouvier sont donnés en Annexe B.1 et B.2

Disposition pratique : Nous disposerons l'opération de la façon suivante, les polynômes f et g étant réduits et ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la variable.

Soit à calculer le produit $(3x^4 + 5x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x + 2)$

$$\begin{array}{r}
 f(x) = 3x^4 \qquad \qquad \qquad + 5x^2 + 2x - 1 \\
 g(x) = \qquad \qquad \qquad x^2 - 2x + 2 \\
 \hline
 x^2 \quad f(x) = 3x^6 \qquad \qquad \qquad + 5x^4 + 2x^3 - x^2 \\
 - 2x \quad f(x) = \qquad - 6x^5 \qquad \qquad \qquad - 10x^3 - 4x^2 + 2x \\
 2 \quad f(x) = \qquad \qquad \qquad 6x^4 \qquad \qquad \qquad + 10x^2 + 4x - 2 \\
 \hline
 p(x) = f(x)g(x) = 3x^6 - 6x^5 + 11x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 6x - 2
 \end{array}$$

Sur chaque ligne figurent les produits partiels du polynôme $f(x)$ par chacun des monômes de $g(x)$.

FIGURE 1.6 – Extrait de [Queysanne-Revuz, 1973, p. 217] : mise en œuvre d'une technique inusitée aujourd'hui pour multiplier deux polynômes déjà mis sous leur forme réduite.

Évolution des programmes. Dans les années 70, le type de tâches « effectuer le produit de deux polynômes » était prédominant dans les manuels de 4^e. Il consistait à multiplier deux polynômes de forme réduite. Le terme de développement n'apparaissait que peu et était surtout réservé à la transformation des trois identités remarquables. La définition en tant que transformation d'un produit en une somme apparaît aussi, en particulier après le changement de programme de 78, sans référence, toutefois, à une formule. Une technique de mise en œuvre de l'écriture d'un produit était proposée, cf. figure 1.6. Après le changement de programme de 88, l'identité dite de « la double distributivité » $((a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd)$ prend le dessus. Cela va de pair avec la disparition de la notion de polynôme. En effet, la formule de double distributivité est en général présentée pour des variables a, b, c et d réels « quelconques » et non des polynômes. Ceci renforce l'idée des expressions algébriques vivant dans \mathbb{R} et non dans $\mathbb{R}[X]$.

L'évolution de la notion de « développement » est indiquée dans le schéma 1.7. Trois idées émergent : le développement comme le produit de deux polynômes (sans pour autant, rappelons-le, que le terme même de développement ne soit utilisé puisqu'il ne semble faire son apparition que dans les programmes de 88, le développement comme la transformation d'un produit en une somme et enfin, le développement comme l'application d'une formule.

Définition du genre de tâche Développer. Dans les programmes de 98 et 2008, la notion de développement apparaît dès la classe de 5^e puisqu'il faut savoir, « sur des exemples numériques ou littéraux, utiliser les égalités $k(a+b) = ka+kb$ et $k(a-b) = ka-kb$ dans les deux sens » (extrait des programmes de 5^e de 98). Cependant, le terme même de développement n'apparaît qu'en classe de 4^e, où le développement est l'intitulé d'une sous-partie des « Travaux numériques ». Ce genre de tâche apparaît à nouveau en classe de 3^e lors de la présentation des identités remarquables dans le chapitre consacré à la factorisation. Ce sont donc à travers les manuels de 4^e et 3^e que nous allons analyser le rapport institutionnel au genre de tâche développer.

Comme pour la réduction, développer se définit par deux approches distinctes. D'une part, développer peut signifier l'obtention d'un objet développé : soit une somme (ce qui est le cas de la plupart des manuels) soit une expression sans parenthèse [Lombard and Muniglia, 1988, p. 242]. D'autre part, développer peut consister en la mise en œuvre d'une technique, exposée sous

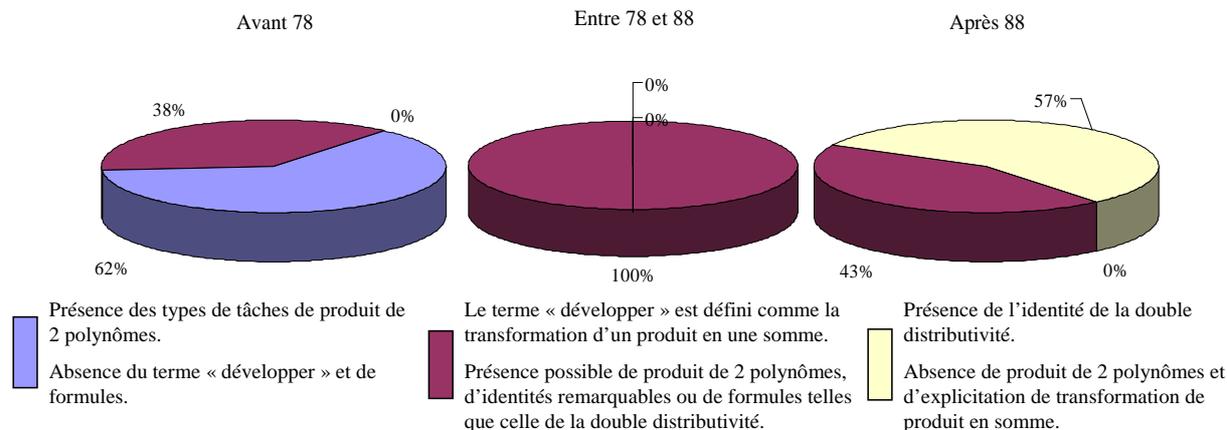


FIGURE 1.7 – Évolution de la notion de développement dans les manuels scolaires : une étude de 20 manuels scolaires. Dans les années 70, le produit de polynômes était défini. Les énoncés s'intitulaient « Effectuer le produit de deux polynômes », laissant place petit à petit à la notion de « Transformation d'un produit en somme » et donc de « Développement ». Puis fin des années 80, les formules se mettent en place.

forme de formules ($k(a + b) = ka + kb$, $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$). Le discours générique (qui consiste à dire que « pour multiplier une somme par un nombre, on peut multiplier chaque terme de la somme par le nombre et additionner les produits obtenus ») ne se trouve plus dans les manuels actuels. De même, pour les identités remarquables, il n'existe plus de généralité comme il existait dans les années 70.

Analyse praxéologique du genre de tâche « développer ». Toujours sous l'hypothèse H_{T1} , cinq types de tâches se sont distingués de l'analyse :

- Le type de tâches, $T_{Dvt}^{simple+}$: Développer $k(a + b)$.
- Le type de tâches, $T_{Dvt}^{simple-}$: Développer $k(a - b)$.
- Le type de tâches, T_{Dvt}^{double} : Développer $(a + b)(c + d)$.
- Le type de tâches, T_{Dvt}^+ : Développer $+(\sum)$.
- Le type de tâches, T_{Dvt}^- : Développer $-(\sum)$.

À ces cinq types de tâches, s'ajoutent les trois identités remarquables qui se trouvent dans les manuels de 3^e :

- Le type de tâches, T_{Dvt}^{Id1} : Développer $(a + b)^2$.
- Le type de tâches, T_{Dvt}^{Id2} : Développer $(a - b)^2$.
- Le type de tâches, T_{Dvt}^{Id3} : Développer $(a + b)(a - b)$.

Nous allons étudier ces 8 types de tâche, décrire leur organisation praxéologique et expliquer en quoi, ils se distinguent. Le tableau final 1.3 récapitule les différentes organisations pour les 5 premiers types de tâche.

Les types de tâches, $T_{Dvt}^{simple+}$ et $T_{Dvt}^{simple-}$. Les tâches « développer $4(3 + x)$ » ou « $4(3 - x)$ » en relèvent.

Ces deux types de tâches sont mis en œuvre par les **techniques** respectives :

$$k(a + b) = ka + kb, \quad \text{avec } k, a, b \text{ des nombres relatifs} \quad (\tau_{Dvt}^{simple+})$$

$$k(a - b) = ka - kb, \quad \text{avec } k, a, b \text{ des nombres relatifs} \quad (\tau_{Dvt}^{simple-}).$$

Dans la majorité des manuels (6 sur les 10 étudiés), ces deux types de tâches et ces deux techniques sont distingués. C'est pourquoi nous avons retenu ce découpage à ce niveau d'étude des manuels scolaires. Un manuel ([Pene and Depresle, 2002]) va même jusqu'à reconnaître les développements de $k(a+b)$, $(a+b)k$, $k(a-b)$ et $(a-b)k$ comme quatre types de tâches distincts puisque les quatre formules associées sont données. Un autre manuel ([Malaval and Courbon, 2002]) propose une technique légèrement différente pour la tâche $2 - 3(x + 5)$ qu'il écrit avec un espace particulier après le signe moins :

$$2 - \quad 3(x + 5).$$

Il propose d'appliquer l'égalité sur $3(x + 5)$ et d'écrire l'expression développée entre parenthèses pour obtenir $2 - (3x + 15)$, puis de supprimer les parenthèses, tâche relevant du type de tâches T_{Dvt}^- . Ces distinctions sont cependant minoritaires, c'est pourquoi elles n'ont pas été conservées. De même, un manuel ([Chapiron et al., 1998]) se distingue en proposant, dans sa partie « Méthodologie », la tâche : « Développer $2(4x^2 + 10x - 11)$ ». Or, dans les autres manuels, ce type de tâches (assez rare) ne suscite pas un « enseignement » particulier. Il semble aller de soi qu'il sera résolu par la même technique $\tau_{Dvt}^{simple+}$. Notons, enfin, qu'il n'y a pas d'encart pour traiter particulièrement des tâches de la forme $4x(5 + x)$. Elles, aussi, vont de soi. La lettre « k » de $\tau_{Dvt}^{simple+}$ a donc un statut bien générique, pouvant être aussi bien un nombre négatif qu'un monôme.

La plupart des manuels indique aussi les ostensifs « classiques » des flèches pour accompagner ces techniques, figure 1.8 et ils précisent, pour beaucoup d'entre eux, que les règles de signe du produit doivent être respectées.

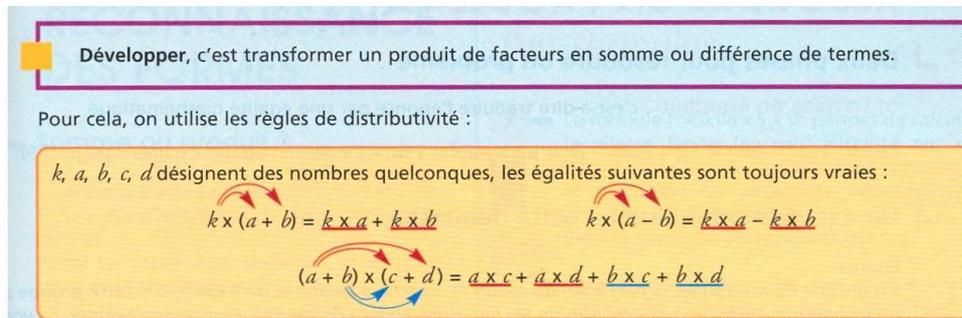


FIGURE 1.8 – Utilisation des ostensifs pour la distributivité.

Dans chaque manuel, une même **technologie** justifie, en général, ces deux techniques. On trouve soit la distributivité de la multiplication sur l'addition (plutôt dans les manuels de 5^e) soit un dessin géométrique illustrant l'identité.

Le type de tâches, T_{Dvt}^{double} . La tâche « développer $(4 + x)(7 + x)$ » en relève. Ce type de tâches est mis en œuvre par la **technique** dite de la double distributivité :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd, \quad \text{avec } a, b, c, d \text{ des nombres relatifs} \quad (\tau_{Dvt}^{double})$$

Cette formule est accompagnée, parfois, comme c'était le cas pour les types de tâches précédents, de la précision sur le respect de la règle des signes ainsi que d'ostensifs tels les flèches.

Si nous avons séparé ce type de tâches du paragraphe précédent, c'est, d'une part, que ce découpage fait l'unanimité. Alors que $T_{Dvt}^{simple+}$ et $T_{Dvt}^{simple-}$ sont parfois regroupés sous le même type de tâches $T_{Dvt}^{simple+}$, tous les manuels analysés distinguent ce dernier du développement de

$(a + b)(c + d)$. D'autre part, alors que les types de tâches précédents ont toujours la même technologie, la technologie du type de tâches T_{Dvt}^{double} diffère parfois de celles de $T_{Dvt}^{simple+}$ et $T_{Dvt}^{simple-}$ au sein d'un même manuel. En effet, l'on peut trouver les deux **technologies** qui justifient déjà $T_{Dvt}^{simple+}$ et $T_{Dvt}^{simple-}$, à savoir la distributivité de la multiplication ou une illustration géométrique mais l'on peut aussi trouver une troisième technologie, à savoir que τ_{Dvt}^{double} découle d'une itération de $T_{Dvt}^{simple+}$:

$$\begin{aligned}(a + b)(c + d) &= (a + b)c + (a + b)d \\ &= ac + ad + bc + bd\end{aligned}$$

Cette technologie apparaît dans les manuels [Serra et al., 1998, p. 78], [Malaval and Courbon, 2002], [Charmaty et al., 2003]. Elle repose, à son tour, sur le fait que \mathbb{R} est un anneau et que la multiplication est distributive, théorie justificative des deux autres technologies.

Les types de tâches, T_{Dvt}^+ et T_{Dvt}^- . Les tâches « développer $4 + (11 + x)$ » ou « $4 - (11 + x)$ » en relèvent.

Ces deux types de tâches relèvent bien souvent d'un autre genre de tâche que celui du développement : celui de la « suppression de parenthèses » mais comme il a été discuté plus haut, nous considérons que la suppression de parenthèses autour d'une somme relève du genre de tâche « développer ». Une des justifications de ce choix, rappelons-le, est que ces cinq types de tâches relèvent tous de l'utilisation de la distributivité de la multiplication sur l'addition, même si ce n'est pas cette propriété qui est directement proposée comme technique.

Le type de tâches T_{Dvt}^+ est, en fait, mis en œuvre par la **technique** :

- on supprime les parenthèses qui entourent l'expression et le signe les précédant,
- on réécrit l'expression entre parenthèses sans changer ses signes. (τ_{Dvt}^+)

Le type de tâches T_{Dvt}^- est, quant à lui, mis en œuvre par la **technique** :

- on supprime les parenthèses qui entourent l'expression et le signe les précédant,
- on réécrit l'expression entre parenthèses en changeant tous ses signes. (τ_{Dvt}^-)

Quelques rares précisions peuvent être apportées dans certains manuels pour la gestion de tâches telle que $(4 + x) + 3$, où la parenthèse n'est pas précédée de signe explicite. Nous ne considérons pas, à nouveau, que cela soit un type de tâches distinct : les quelques manuels qui abordent ces tâches précisent d'ajouter le signe + sous-entendu à la technique précédente. D'autres englobent ce cas explicitement au type de tâches T_{Dvt}^+ par le titre « parenthèses précédées du signe + ou d'aucun signe. » [Charmaty et al., 2003]. Fait surprenant, certains manuels ne précisent pas que, pour que ces techniques soient applicables, ce qui est entre les parenthèses doit être une somme. Il faut cependant noter que ces types de tâches ont pu être vu en classe de 5^e.

Les **technologies** justifiant ces techniques sont de deux sortes : des propriétés sur « l'opposé de » ou une application de $\tau_{Dvt}^{simple+}$. Ainsi [Andrieu et al., 2007], [Malaval and Courbon, 2002], [Goutodier and Lévi, 2002] et [Pene and Depresle, 2002] justifient τ_{Dvt}^+ et τ_{Dvt}^- par la technologie suivante :

L'opposé d'une somme est la somme des opposés

Les manuels [Charmaty et al., 2003], [Chapiron et al., 1998], [Le Hir et al., 2002], [Deneuil et al., 1998] justifient τ_{Dvt}^+ et τ_{Dvt}^- par les technologies respectives suivantes :

$$\begin{aligned} +(a+b) &= +1(a+b) \\ &= 1 \times a + 1 \times b \\ &= a+b \\ -(a+b) &= -1(a+b) \\ &= -1 \times a + (-1) \times b \\ &= -a-b \end{aligned}$$

Les types de tâches, T_{Dvt}^{Id1} , T_{Dvt}^{Id2} et T_{Dvt}^{Id3} . Les tâches telles que développer $(2+x)^2$, $(2-x)^2$ ou $(2-x)(2+x)$ en relèvent.

En classe de 4^e, si ces tâches apparaissent, elles seront résolues par la technique τ_{Dvt}^{double} , après s'être ramené à la forme d'un double produit $(a+b)(a+b)$. Auquel cas, il n'y a pas lieu de réellement distinguer ces types de tâches de T_{Dvt}^{double} . En fait, elles se distinguent, en tant que types de tâches, seulement en classe de 3^e³⁴. Les types de tâches T_{Dvt}^{Id1} , T_{Dvt}^{Id2} et T_{Dvt}^{Id3} sont alors mis en œuvre par les **techniques** respectives suivantes, que l'on pourrait en fait regrouper sous une même technique (développer à l'aide d'une identité remarquable) :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \text{ avec } a, b \text{ des nombres relatifs} & (\tau_{Dvt}^{Id1}) \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \text{ avec } a, b \text{ des nombres relatifs} & (\tau_{Dvt}^{Id2}) \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2, \text{ avec } a, b \text{ des nombres relatifs.} & (\tau_{Dvt}^{Id3}) \end{aligned}$$

La **technologie** justifiant ces techniques est l'association d'une règle de convention (x^2 signifie $x \times x$) et de la double distributivité présentée en classe de 4^e :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

En résumé à propos du développement. Le genre de tâche *Développer* produit huit types de tâches de deux ordres différents : d'une part, il y a les cinq développements de produits algébriques et d'autre part, les trois développements d'identités remarquables. Ces derniers n'apparaissant qu'en classe de 3^e, nous les laisserons de côté dans l'analyse ci-dessous.

Alors qu'il n'y a pas d'hésitation possible pour affirmer que les trois premiers développements (Développer $k(a+b)$, Développer $k(a-b)$ et Développer $(a+b)(c+d)$) relèvent du genre de tâche *Développer*, il n'en est pas de même pour les deux types de tâches : Développer $+(\sum)$ et Développer $-(\sum)$. Cela peut être, en effet, plus discutable de les regrouper sous le genre de tâche « développer ». Nous avons pourtant choisi de le faire parce que, d'une part, les huit types de tâche se justifient tous par la distributivité de la multiplication sur l'addition et, d'autre part, la moitié des manuels étudiés a décidé de les regrouper.

À ces cinq types de tâches, sont associées autant de techniques (puisque c'est notre hypothèse H71). La distinction de toutes ces techniques (ou de tous ces types de tâches) laisse dubitatif. Autant la portée d'une formule telle que $k(a+b) = ka + kb$ ($\tau_{Dvt}^{simple+}$) est relativement illimitée ; autant proposer les deux techniques $\tau_{Dvt}^{simple+}$ et $\tau_{Dvt}^{simple-}$ sans que l'une soit déduite de l'autre tend

34. C'est pourquoi, elles ne seront pas récapitulées dans le tableau 1.3, les manuels analysés dans ce tableau étant ceux de la classe de 4^e.

à penser qu'il faut limiter la portée de $k(a+b) = ka+kb$ à des nombres uniquement positifs. On aurait, en effet, pu s'attendre à trouver comme cas d'application de l'identité $\tau_{Dvt}^{simple+}$, l'identité $\tau_{Dvt}^{simple-}$. Il faut le reconnaître, il y a, tout de même, une raison à expliciter ces deux techniques : l'opération dans la parenthèse change passant d'une addition à une soustraction si l'on considère le signe moins sous sa forme opératoire et non « prédicatoire » [Baruk, 1992] (annonçant la nature d'un nombre) ou opérateur (annonçant l'opposé d'un nombre). Cela n'enlève pas l'intérêt qu'il y aurait à montrer aux élèves comment passer d'une technique à une autre. Il en est de même pour les autres types de tâches. Bien peu de manuels explicitent le lien existant entre ces huit types de tâches. Bien peu montrent comment passer de l'un à l'autre. Or, la différenciation des cas peut faire, en fait, obstacle à la force de généralité des règles, à l'unification. Ceci rejoint ce que nous avons noté page 27 sur la difficulté de l'élève à comprendre la généralité d'une règle. Comme le dit Grugeon [Grugeon, 1997, p. 195] : « [La résolution des exercices] révèle une différenciation forte du traitement algébrique suivant des caractéristiques ostensives. » Distinguer $k(a+b) = ka+kb$ de $k(a-b) = ka-kb$, sans lien plus explicite, peut renforcer l'aspect syntaxique et la non-généralité des formules.

Il n'y a pas présence dans les manuels étudiés de réel travail sur la généralité d'une règle.

Cet effet peut être, de surcroît, renforcé par la grande place laissée aux ostensifs. Les « flèches de la distributivité » sont récurrentes. Or, l'on peut se demander si Bellard n'a pas raison lorsqu'il dit que « l'élève risque de ne retenir que ces gestes qui renforcent le pouvoir métaphorique des mots et de se couper de la démarche scientifique » [Bellard et al., 2005, p. 54].

Inversement, et presque de manière contradictoire, il existe des tâches dans les parties « Exercices » des manuels de 4^e qui ne relèvent d'aucun des cinq types de tâches présents dans la partie « Cours » des manuels. Par exemple, on peut trouver des tâches telles que :

Développer $10(x+2)(x+7)$ ([Charmaty et al., 2003, n^o 70, p.55]),

ou Développer $3(a+b+c)$ ([Deneuil et al., 1998, n^o 14, p.75]).

La première tâche est résoluble par une combinaison des techniques $\tau_{Dvt}^{simple+}$ et τ_{Dvt}^{double} :

$$\begin{aligned} 10(x+2)(x+7) &= (10x+20)(x+7) \quad (\tau_{Dvt}^{simple+}) \\ &= 10x^2 + 70x + 20x + 140 \quad (\tau_{Dvt}^{double}). \end{aligned}$$

Cette tâche pourrait être accomplie par une quadruple répétition de la technique $\tau_{Dvt}^{simple+}$:

$$\begin{aligned} 10(x+2)(x+7) &= (10x+20)(x+7) \\ &= x(10x+20) + 7(10x+20) \\ &= 10x^2 + 20x + 70x + 140. \end{aligned}$$

Cependant, nous pensons que ce n'est pas ce qu'attend l'institution scolaire. En effet, la technique τ_{Dvt}^{double} pourrait, elle aussi, être simplement une double répétition de $\tau_{Dvt}^{simple+}$ et donc ne pas donner lieu à une prise en charge particulière. Or, il n'en est rien. Les manuels considèrent τ_{Dvt}^{double} comme une technique à part entière. C'est pourquoi, nous considérons qu'il est attendu de l'élève qu'il accomplisse le développement de $10(x+2)(x+7)$ par la combinaison des deux techniques et non une triple itération de la même technique. En revanche, le développement de $3(a+b+c)$ est une répétition de la technique $\tau_{Dvt}^{simple+}$. Il est donc censé d'avancer que, pour les manuels, les cinq types de tâche présentés en classe de 4^e suffisent à eux-seuls pour gérer toute nouvelle

tâche dépendant d'un savoir plus global. C'est à la charge de l'élève (ce qui constitue le topos) de trouver la généralité et l'utilisation concomitante ou itérative des différentes techniques pour résoudre certaines tâches.

Aussi affirmons-nous que les trois types de tâches de 4^e, $\tau_{Dvt}^{simple+}$, $\tau_{Dvt}^{simple-}$ et τ_{Dvt}^{double} relèvent tous d'un type de tâche, $T_{visé}$, à savoir :

$T_{visé}$: Développer un produit dont un des facteurs est une somme.

C'est en fait ce type de tâches qui est visé comme le savoir en jeu du chapitre dédié au développement dans les manuels de 4^e. Il regroupe à lui seul les trois types de tâche officiels mais aussi ceux qui se trouvent dans la partie « Exercices » des manuels. Il englobe, d'ailleurs, aussi le type T_{Dvt}^{Id3} (Développer $(a + b)(a - b)$) mais qui n'apparaît que dans la classe supérieure.

Seconde hypothèse de travail :

L'institution pose l'hypothèse qu'en maîtrisant les techniques $\tau_{Dvt}^{simple+}$, $\tau_{Dvt}^{simple-}$ et τ_{Dvt}^{double} , l'élève sera à même d'accomplir n'importe quelle tâche relevant de $T_{visé}$. (HT2)

Nous pensons que cela n'est pas nécessairement le cas. Nous posons l'hypothèse de recherche suivante :

Hypothèse de recherche 2. *L'itération ou la combinaison de techniques institutionnellement travaillées et maîtrisées par les élèves demande un apprentissage.*

Les technologies sont de trois ordres : distributivité (présente pour les huit types de tâche), illustration géométrique (présente pour les trois premiers), formule $k(a + b) = ka + kb$ (présente pour les trois derniers). À celle-ci peut être ajoutée la règle sur les opposés mais qui n'a pas un statut bien clair : technique ou technologie, elle se justifie, de toutes façons, elle aussi, par la distributivité. L'ensemble de ces informations est regroupé dans le tableau 1.3. Dans les manuels des années 70, nous avons pu trouver des technologies différentes. En particulier, celle du manuel [Nonnotte and Favier, 1967], figure 1.9 qui « redémontre » la distributivité de la multiplication sur l'addition pour les entiers. Nous pouvons remarquer que l'exemple est intéressant pour montrer la justification de chaque étape. En contre-partie, l'exemple est relativement inapproprié pour illustrer le développement : plutôt que de calculer le produit de 3 par la différence de 7 et 2, ce qui demande deux opérations, le manuel « recommande » le développement, ce qui demande trois opérations.

Enfin, il est à noter que les trois identités remarquables sont toujours présentées ensemble (dans les manuels mais aussi lors des enseignements auxquels nous avons assistés). L'on peut s'interroger sur l'influence que cela a sur l'erreur classique $(a - b)^2 \rightarrow a^2 - b^2$. De plus, il est peut paraître surprenant que ces identités ne soient présentées qu'en classe de 3^e avec la factorisation. En effet, en tant qu'application des règles vues en 4^e, il pourrait être intéressant de les enseigner dès la classe de 4^e.

		Praxis		
		$T_{Dvt}^{simple+}, \tau_{Dvt}^{simple+}$	$T_{Dvt}^{double}, \tau_{Dvt}^{double}$	T_{Dvt}^+, τ_{Dvt}^+
		$T_{Dvt}^{simple-}, \tau_{Dvt}^{simple-}$		T_{Dvt}^-, τ_{Dvt}^-
Technologies	Géométrie	[1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7]; [8].	[1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7].	
	$k(a+b) = ka + kb$		[9]; [8]; [10]	[10]; [3]; [6]; [2].
	Opposé de			[4]; [5]; [8]; [7].

TABLE 1.3 – Praxéologies du genre de tâche « Développement » dans les 10 manuels étudiés. Pour une question de place, des numéros ont été attribués aux manuels étudiés : [1] pour [Delord and Vinrich, 1998]; [2] pour [Deneuil et al., 1998]; [3] pour [Chapiron et al., 1998]; [4] pour [Pene and Depresle, 2002]; [5] pour [Fourton et al., 2002]; [6] pour [Le Hir et al., 2002]; [7] pour [Goutodier and Lévi, 2002]; [8] pour [Malaval and Courbon, 2002]; [9] pour [Serra et al., 1998]; et [10] pour [Charmaty et al., 2003].

2 Produit d'une différence par un nombre

EXEMPLE : Soit à calculer : $(7 - 2) \times 3$.

On a successivement :

$$\begin{aligned} (7 - 2) \times 3 &= (7 - 2) + (7 - 2) + (7 - 2) && \text{définition du produit} \\ &= 7 - 2 + 7 - 2 + 7 - 2 \\ &= 7 + 7 + 7 - 2 - 2 - 2 \\ &= (7 + 7 + 7) - (2 + 2 + 2) && \left. \begin{array}{l} \text{propriété des} \\ \text{polynômes arithmétiques} \end{array} \right\} \\ &= 7 \times 3 - 2 \times 3 \end{aligned}$$

D'UNE MANIÈRE GÉNÉRALE : si $a \geq b$,

$$\begin{aligned} (a - b) \times n &= \underbrace{(a - b) + (a - b) + (a - b) + \dots (a - b)}_{n \text{ termes}} \\ &= \underbrace{(a + a + a + a + \dots a)}_{n \text{ termes}} - \underbrace{(b + b + b + b + \dots b)}_{n \text{ termes}} \end{aligned}$$

$$(a - b) n = an - bn$$

$$\text{et } n(a - b) = na - nb \quad \text{commutativité.}$$

$$n(a - b) = (a - b)n = an - bn$$

La multiplication est distributive par rapport à la soustraction.

Pour multiplier une différence par un nombre, on peut multiplier chaque terme de la différence par le nombre, puis soustraire le second produit du premier.

FIGURE 1.9 – Illustration d'une technologie différente de celle que l'on peut trouver actuellement. L'exemple, en revanche, semble inapproprié et contribue à une certaine perte de sens de l'algèbre. Extrait de [Nonnotte and Favier, 1967].

Factoriser.

Contrairement aux deux autres genres de tâches, le genre de tâche *Factoriser* (du latin « factor », celui qui fait, ici qui multiplie) a une vraie signification dans la sphère mathématique. Cette notion ne peut être introduite telle qu'elle dans l'enseignement. Elle repose sur des notions plus complexes telles que la division euclidienne, les notions de PGCD, de PPCM et d'irréductibilité. Bessot, dans un papier informel de travail, s'est interrogée sur la définition possible de la consigne « Factoriser » telle qu'elle fonctionne au collège. La consigne « factoriser P » pourrait, selon elle, être écrite ainsi : « Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$ ou $\mathbb{Q}[X]$, le polynôme P de $\mathbb{Z}[X]$ ou $\mathbb{Q}[X]$. » Cependant, une telle consigne reste évidemment inexploitable par un élève de collège, même si c'est bien cela que l'on attend de lui. Toute cette complexité est très bien exposée dans l'incontournable mémoire de Tonnelle [Tonnelle, 1979]. Cette consigne est donc, elle aussi, et plus encore que les autres, enseignée à travers un discours ostensif, autrement dit, le montré. Elle ne s'interprète qu'en référence à des règles (non toutes enseignées, d'ailleurs). Fait cependant surprenant : les élèves arrivent à relativement bien donner la forme attendue, tout au moins pour l'élève modèle conscient des contraintes du contrat didactique.

Évolution des programmes. La notion de factorisation est enseignée aujourd'hui en classe de 3^e, comme cela a déjà été remarqué plus haut. Avant la réforme de 88, la factorisation permettait de justifier le genre de tâche réduire. Bon nombre de manuels ne présentait d'ailleurs la réduction que comme un cas particulier de la factorisation et le développement comme l'action réciproque de la factorisation. Le développement est présenté actuellement en amont de la factorisation et permet, d'ailleurs, de justifier les identités remarquables.

Il est demandé en classe de 3^e, de ne factoriser que des expressions « simples », laissant à

la charge de l'enseignant l'interprétation de la simplicité. Au vu des exercices, il semble que cela sous-entende une somme de deux termes (rarement de trois termes) et dont le facteur commun est, sans calcul, identifiable (autrement dit, visible). De plus, les factorisations, comme les réductions et les développements, se font dans $\mathbb{Z}[X]$, rarement dans $\mathbb{Q}[X]$ et les expressions sont de degré au plus 2.

Définition du genre de tâche factoriser. Comme pour le développement, ce genre de tâche est défini dans les manuels, soit par la règle de la distributivité de la multiplication sur l'addition soit le fait que l'objet à obtenir est un produit, sachant que l'objet à transformer est une somme.

Analyse praxéologique du genre de tâche « factoriser ». Quatre types de tâches sont apparus :

- Le type de tâches, T_{Fact} : Factoriser une somme de termes ayant un facteur commun
- Le type de tâches, T_{Fact}^{Id1} : Factoriser $a^2 + 2ab + b^2$
- Le type de tâches, T_{Fact}^{Id2} : Factoriser $a^2 - 2ab + b^2$
- Le type de tâches, T_{Fact}^{Id3} : Factoriser $a^2 - b^2$

Le type de tâches, T_{Fact} . Les tâches telles que factoriser $4(x+1) + x(x+1)$ ou $5y^2 + y$ en relèvent.

Si l'on a regroupé l'ensemble des tâches en un seul type de tâche, c'est qu'il n'y a généralement qu'une *technique* proposée dans les manuels. Elle sera notée τ_{Fact} :

- repérer le facteur commun,
- le ré-écrire, si besoin, pour le mettre en évidence,
- écrire le facteur commun devant et mettre ce qui reste entre parenthèses,
- réduire si besoin.

Contrairement aux deux genres de tâches précédents, la *technologie* de la factorisation est présentée dans un mode très procédural. Elle est justifiée par l'identité $\tau_{Dvt}^{simple+}$:

$$k(a + b) = ka + kb.$$

Cette identité joue donc le double rôle de technique et de technologie.

Les types de tâches, T_{Fact}^{Id1} , T_{Fact}^{Id2} et T_{Fact}^{Id3} . Les tâches telles que factoriser $x^2 + 2x + 1$ ou $x^2 - 2x + 1$ ou $9x^2 - 25$ en relèvent.

Comme nous l'avons noté pour les tâches de développement d'identités remarquables, ces trois types de tâches pourraient en fait être regroupés en un seul, reposant sur la *technique* d'utilisation des formules des identités remarquables :

- Identifier qu'il n'y a pas de facteur commun,
- Si la somme est de deux termes, alors identifier l'expression à $a^2 - b^2$ et utiliser l'égalité $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;
- Si la somme est de trois termes, alors identifier l'expression à $a^2 + 2ab + b^2$ ou à $a^2 - 2ab + b^2$ en fonction du signe du double produit puis utiliser l'égalité adéquate.

La *technologie* diffère de celle de T_{Fact} : ce n'est pas la simple distributivité $\tau_{Dvt}^{simple+}$ mais la double distributivité τ_{Dvt}^{double} :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

En résumé à propos de la factorisation. Domaine riche en analyses, la factorisation constitue pourtant notre section la plus courte. Principalement pour la raison suivante : de nombreux et excellents travaux se sont déjà penchés sur ce genre de tâches ; ces travaux suffisaient en grande partie pour construire nos expérimentations. Il est plus difficile de trouver des travaux se rapportant à la réduction et au développement, en particulier sur les erreurs dans ces domaines. De plus, dans les expérimentations, ne pouvant être exhaustif sur l'ensemble des tâches de ces trois genres de tâches, nous nous sommes centrés sur quelques expressions à factoriser relevant uniquement de T_{Fact} , après avoir détecté quelques erreurs intéressantes.

La plupart des manuels vise le savoir : « Factoriser une somme de deux termes ayant un facteur commun « visible » ». Cependant, certains manuels proposent quelques exercices où la somme est de trois termes, ce qui demande à l'élève de savoir réitérer la technique. Les identités remarquables étant toujours distinctes, cela donne lieu à quatre types de tâche : factoriser une somme de termes ayant un facteur commun et factoriser l'une des trois identités remarquables.

Et les équations dans tout ça ?

Pour finir, nous aimerions porter notre attention sur l'objet équation, objet donc nous n'avons pas encore parlé.

Pourquoi la résolution d'équations, qui s'inscrit aussi dans l'activité transformationnelle au sens de Kieran, ne fait-elle pas partie du calcul littéral ?

La résolution d'équations est indéniablement liée au calcul littéral puisque ce dernier est un outil pour la résolution des équations. Pourtant, les équations sont souvent présentées dans les manuels scolaires séparément du chapitre dédié au calcul littéral. Dans l'enseignement, l'objet équation existe bien et la résolution pourrait bel et bien consister en un traitement *sur* cet objet. Toutefois, dans ce cas, la dénotation de cet objet n'est plus le polynôme mais une (autre) fonction. Frege, par exemple, propose de dénoter une équation par sa véracité.

Dans la sphère savante, en revanche, l'objet équation n'existe pas en tant que tel. La résolution d'équation $P = Q$ avec P et Q des polynômes, consiste en fait en la recherche des zéros du polynôme $P - Q$. Elle porte alors sur des traitements non plus *sur* un objet mais *entre* les objets polynômes P et Q ou $P - Q$ et le polynôme nul. Considérant que le calcul littéral tel qu'il est présenté dans l'enseignement d'aujourd'hui est un travail *sur* un même polynôme et non *entre* des polynômes (comme cela était le cas dans les années 70 lorsque l'on étudiait l'addition de deux polynômes), la résolution d'équation ne s'inscrit donc pas, selon nous, dans le calcul littéral.

1.3.4 Conclusion sur le sujet scolaire

Dans le monde des mathématiciens, nul besoin de définir la notion de réduction car elle est routinière à ses utilisateurs. Seule sa finalité est précise : obtenir un polynôme sous sa forme réduite. Dans l'enseignement, ce savoir-faire se subdivise en deux genres de tâches : celui de développer et celui de réduire. En revanche, la décomposition en facteurs premiers est une

branche à part entière des mathématiques mais le peu d'outils à la disposition de l'élève de collège laisse à penser qu'elle ne peut être abordée de front. Ce qui est tellement simple pour les mathématiciens (au point de n'être qu'un outil) est présenté comme un sujet d'étude et ce qui est complexe est seulement survolé et montré aux élèves. Des trois objets polynôme, indéterminée, monôme, aucun n'est utilisé explicitement par les manuels scolaires actuels de collège. Inversement, leurs équivalents respectifs dans les manuels (expression littérale, variable, et grandeur de même espèce ou terme semblable) n'ont pas d'existence propre dans la sphère savante.

La seule propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition justifie à elle-seule les trois genres de tâches (hormis la réduction du produit algébrique). Pourtant, dans l'enseignement, ces trois notions ont des techniques propres de résolution et très peu de liens sont explicités. Malgré ces confusions ou manque de justification, les consignes « développer », « réduire » ou « factoriser » sont utilisées, à tout va, dans les exercices de manipulation d'expressions algébriques et elles ne semblent, à la fin du collège, ne plus soulever de questions d'interprétation (indépendamment de l'exécution correcte de la tâche) de la part des élèves. Elles sont comprises et assimilées par les élèves à force d'exercices-modèles, d'ostensifs ou de rétroactions éventuelles de la part des enseignants. L'élève apprendra, à ses dépens, que la consigne « développer » comprend la consigne « réduire » pour certains professeurs ou que « la réduction » inclut « la simplification ». Ces notions semblent donc, par leur implicite, faire partie du contrat didactique, en ce sens où une partie de ce qu'on attend de l'élève reste à sa charge, ce genre d'attentes pouvant évidemment entraîner l'élève à occulter son savoir au profit d'une réponse.

Quatorze grands types de tâche ont pu être distingués d'une analyse praxéologique élaborée à partir d'une dizaine de manuels :

– réduire une somme algébrique,	T_{Red}^{Σ}
– réduire un produit algébrique,	T_{Red}^{Π}
– développer une somme entre parenthèses précédées d'un signe +,	T_{Dvt}^{+}
– développer une somme entre parenthèses précédées d'un signe –,	T_{Dvt}^{-}
– développer $k(a + b)$,	$T_{Dvt}^{simple+}$
– développer $k(a - b)$,	$T_{Dvt}^{simple-}$
– développer $(a + b)(c + d)$,	T_{Dvt}^{double}
– développer $(a + b)^2$,	T_{Dvt}^{Id1}
– développer $(a - b)^2$,	T_{Dvt}^{Id2}
– développer $(a + b)(a - b)$,	T_{Dvt}^{Id3}
– factoriser une somme de termes ayant un facteur commun,	T_{Fact}
– factoriser $a^2 + 2ab + b^2$,	T_{Fact}^{Id1}
– factoriser $a^2 - 2ab + b^2$,	T_{Fact}^{Id2}
– factoriser $a^2 - b^2$,	T_{Fact}^{Id3}

Ces types de tâche ont été différenciés soit parce qu'apparaissant à des niveaux scolaires différents soit parce que résolubles par des techniques distinctes voire justifiables par des technologies différentes. Ce découpage sera légèrement modifié dans le chapitre 4 afin de mieux répondre à des exigences informatiques.

Les difficultés des élèves pour manipuler les expressions algébriques proviennent le plus souvent de l'absence de quantificateurs (la quantification universelle est la plupart du temps sous-entendue³⁵) et d'un travail de fond sur la conservation de la dénotation des expressions. La

35. Il est intéressant de noter, à ce propos, que les propriétés sont très probablement données pour des réels.

validité du résultat obtenu est exprimée en termes de conformité à des règles et à des procédures apprises par cœur sans véritable compréhension ni de leur généralité ni de conditions d'application. Comme la force de l'algèbre réside, quand même, dans la capacité de s'abstraire de l'interprétation systématique des expressions algébriques, il faut que l'enseignement sache alterner apprentissage de la dénotation, détachement de la sémantique, jeu sur la structure syntaxique et connaissance de la matérialité syntaxique.

1.4 Critiques et Raisons d'Être du Calcul Algébrique

D'aucuns pensent que, dans la pratique du calcul littéral, l'aspect méta-cognitif ou conceptuel n'est que peu présent [Self, 1995, p. 8], [Azarquié, 1993] : le calcul n'est perçu chez eux que comme de la syntaxe pure. Bosch et Chevallard [Bosch and Chevallard, 1999] mettent ces critiques sur le compte de notre culture pro-rationnelle qui cherche à refouler tout objet sensible pour l'hégémonie des concepts que ces objets représentent. La société contemporaine occidentale tend à croire que l'activité mathématique est de celle dite de l'esprit (versus de la main) où les signes ne sont que supports des idées, des raisonnements, des réflexions, sans sens propre. Elle reconnaît que ces objets sensibles sont certes nécessaires à l'activité mais le sens profond de l'activité résiderait au delà de ces objets. Mais c'est oublier Viète et ses successeurs, qui ont mis en place le système symbolique et qui permet à lui seul d'évaluer l'évolution de l'algèbre [Bosch and Chevallard, 1999, p. 20]. Notre position rejoint à la fois celle de l'anthropologue Goody qui s'intéresse aux contextes socio-culturels de l'apparition de l'écriture [Goody, 1977] et celle de Bosch et Chevallard qui appliquent en particulier les propos de Goody au contexte mathématique : nous pensons que l'écrit n'est pas seulement la retranscription de la parole ou de la pensée, ni qu'il est le pâle reflet d'un artifice cachant des concepts. L'écriture ne remplace certes pas la parole mais elle permet la mise en place de procédures qui ont une légitimité. Pour nous, l'écriture véhicule son propre sens, ce qui lui donne une existence spécifique, en évoquant des non-ostensifs par l'intermédiaire de la manipulation d'ostensifs. Nous retrouvons ainsi les propos de Kieran [Kieran, 2004] : *We now find ourselves faced with evidence that the transformational activity of algebra can serve as a site for meaning making, that is, that techniques can have an epistemic dimension*³⁶. La manipulation formelle des symboles demande l'acquisition non seulement de connaissances techniques mais aussi conceptuelles.

Certains auteurs dénoncent aussi le risque de ce que Bellard appelle « l'écrasement sur la technique » [Bellard et al., 2005] qui peut masquer l'existence de conditions de validité des règles et conduire à des surgénéralisations des connaissances acquises sur un domaine restreint, ou des surspécifications en occultant des transferts de connaissances. Pourtant, elle admet elle-même la véracité des propos de [Brousseau, 1998] qui reconnaît en l'utilisation des techniques « algorithmiques » des stratégies didactiques importantes et inévitables : pouvoir définir, évaluer et enseigner facilement tend à mettre en place des processus algorithmiques. Nous ne nions pas pour autant la justesse de ces critiques et les abus qu'il y a eu de telles pratiques mais nous rejoignons Duval [Duval, 1993, p. 40] quand il affirme qu'il n'y a pas d'appréhension conceptuelle de l'objet (la noésis) sans passage par la production d'une représentation sémiotique (la sémosis). En effet, il réside là un paradoxe qu'il formule très bien et que nous avons déjà dénoncé plus haut : à la fois, il faut se détacher des représentations (entre autres symboliques) pour maîtriser le

Or, lors de l'introduction des complexes en Terminale, il n'est pas précisé que les propriétés de la classe de 4^e s'étendent aux nombres complexes, comme si ces propriétés étaient vraies d'elles-mêmes sans domaine de validité.

36. Nous sommes maintenant confrontés à l'évidence que l'activité transformationnelle de l'algèbre peut servir à donner du sens c'est-à-dire que les techniques peuvent avoir une dimension épistémique. [TdA]

concept mais en même temps, le concept a besoin d'être représenté pour pouvoir être compris. . . Il faut donc bien passer à un moment par la maîtrise des techniques calculatoires, comme l'écrit aussi Fischbein : *We need skills and not only understanding, and skills can be acquired only by practical, systematic training*³⁷ [Fischbein, 1993, p. 232]. Précisons, cependant, qu'il ajoute : *The reciprocal is also sometimes forgotten*³⁸. Ce pour quoi, encore une fois, il faut tout autant être vigilant.

Nous ajouterons deux arguments de poids pour la continuité de la pratique technique. D'une part, l'écriture symbolique est le seul système sémiotique à permettre d'accomplir la fonction de traitement du calcul littéral sur les polynômes [Duval, 1993, p.39]. En effet, les autres systèmes de représentation, tels que la langue naturelle ou le système graphique ne permettent pas cette activité. Idée véhiculée aussi par Vergnaud :

« Le symbolisme mathématique n'est à rigoureusement parler ni une condition suffisante ni une condition nécessaire de la conceptualisation ; mais il contribue utilement à cette conceptualisation, notamment pour la transformation des catégories de pensées mathématiques en objets mathématiques. Le langage naturel est le moyen essentiel de représentation et d'identification des catégories mathématiques, mais il ne possède pas, autant que les diagrammes, les formules, les équations, le laconisme indispensable à la sélection et au traitement des informations et des relations pertinentes » [Vergnaud, 1991].

D'autre part, plusieurs auteurs reconnaissent qu'une des forces de l'algèbre réside en l'acquisition d'une parfaite maîtrise manipulative. Citons trois auteurs qui se rejoignent :

« travailler sans revenir à chaque instant à la compréhension du pourquoi d'une transformation algébrique [...] par l'utilisation de règles valides, efficaces et cohérentes. L'économie de pensée qui est ainsi rendue possible est depuis longtemps reconnue comme une caractéristique de l'algèbre. » [Sackur et al., 1997, p. 41].

Propos qui se retrouvent chez Kieran :

*One of the strengths of algebra is that, for experts, a great deal of its transformational activity can be carried out in what appears to be a rather automated manner. Once one makes the transformation rules one's own, the algorithms of algebra can be executed, in a sense, without thinking*³⁹[Kieran, 2004].

Bardini résume aussi ce besoin de détachement du dénoté :

« Ceci dit, et Drouhard le souligne, lors de résolutions algébriques, il n'est pas nécessaire (et cela est d'ailleurs souvent fortement recommandé) de prendre en compte, à tout moment, la dénotation des écritures algébriques. Pour mener à bien quelques manipulations algébriques, il est indispensable de pouvoir momentanément se détacher du contexte dans lequel ces calculs sont proposés, et ainsi pouvoir effectuer des transformations. C'est, en d'autres mots, le « savoir oublier » (cf. Serfati). Néanmoins, il faut pouvoir accéder aux dénotations de ces écritures à tout moment et, ce faisant, être conscient que à toute ESA correspond une dénotation. » [Bardini, 2003]

37. Nous avons besoin d'habiletés et pas seulement de compréhension, et les habiletés peuvent s'acquérir seulement par la pratique, par un entraînement systématique.[Fischbein, 1993, p. 232]

38. La réciproque est aussi parfois oubliée.

39. Une des forces de l'algèbre est, selon les experts, qu'un des bons marchés de l'activité transformationnelle peut être réalisé dans ce qui apparaît comme étant plutôt un... automatisé. Une fois les règles de transformation appropriées, les algorithmes algébriques peuvent être exécutés sans penser en un certain sens.[Kieran, 2004]

La puissance et l'intérêt du calcul littéral sont ainsi indéniables même si ils restent incontestablement, dans un contexte d'apprentissage, indissociables d'un travail sur d'autres types de représentations, comme l'oralisation des objets symbolisés, pour assimiler toutes les facettes des différents concepts algébriques. Finissons par une citation de Drouhard qui résume très bien la complexité de ne pas faire faire trop de calculs aux élèves (par l'intermédiaire d'un logiciel par exemple, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant) mais du besoin qu'ils ont afin de, malgré tout, mettre du sens aux expressions qu'ils manipulent :

« [...] consider the common claim of some studies, particularly related to CAS (computer Algebra Systems), that computer tools help students avoid tedious calculations, facilitating instead high-level reasoning (see for instance Lagrange, 2001, p. 376). Applying Frege's theories, such claims are false, if not harmful. Considering that CAS help students by letting them think instead of dully calculate, comes down to overemphasising the denotation component at the expense of the sense component of meaning. Students can only acquire the sense of writings after a rather long practice, not simply through having observed a CAS (or a teacher) solve some writings a couple of times. We suggest that an exaggerated reduction in algebraic calculation practice in the curriculum may lead to an effect opposite to the one desired. Although students have more time to solve rich and realistic problems using, possibly, high-level reasoning, in fact, the writings they produce and read, may be more meaningless than ever. This is because sense is neither more nor less important than the denotation component of the meaning. »⁴⁰ [Drouhard and Teppo, 2004, p. 236]

1.5 Conclusion sur le calcul littéral

Notre travail porte sur l'étude du rapport personnel de l'élève, sujet de l'institution scolaire, à l'objet « calcul littéral ». C'est pourquoi, dans ce chapitre, le calcul littéral a été étudié et présenté comme un objet (« ensemble structuré d'objets » [Grugeon, 1995, p. 23]) et non comme un outil (qui se révèle, par exemple, dans la capacité de traduire un problème en relations algébriques) pour reprendre la dialectique introduite par Douady [Douady, 1984]. Le calcul littéral consiste en des activités de traitements sur l'objet polynôme : *un jeu sur l'aspect structurel de la syntaxe avec conservation de la dénotation en s'appuyant sur une matérialité syntaxique.*

Le calcul littéral a donc été approché, dans un premier temps, par le pôle « Savant » en définissant les objets polynôme et fonction polynomiale et en mettant au point la scission de la sémantique et de la syntaxe englobant les deux notions de structure et de matérialité. La *structure* syntaxique se réfère à la forme de l'expression, aux opérations qui la constituent et

40. « Considérons l'affirmation commune de quelques études, particulièrement celles portant sur les CAS (systèmes d'algèbre d'ordinateur), que les logiciels permettent d'éviter aux étudiants des calculs pénibles, en leur facilitant en échange le raisonnement d'un niveau élevé (voir, par exemple, Lagrange, 2001, p. 376). Appliquant les théories de Frege, de telles affirmations sont fausses, sinon nocives. Considérer que les CAS aident les étudiants en les laissant *penser* au lieu de leur faire faire des calculs pénibles amène à exagérer l'aspect de la dénotation aux détriments de l'aspect du sens de la signification. Les étudiants peuvent seulement acquérir le sens des écritures après une pratique plutôt longue, pas simplement en ayant observé des CAS (ou un enseignant) résolvant quelques écritures un certain nombre de fois. Nous suggérons qu'une réduction exagérée de la pratique du calcul littéral dans les programmes scolaires pourrait mener à un effet opposé à celui désiré. Bien que les étudiants auraient plus de temps pour résoudre des problèmes riches et réalistes en utilisant, probablement, des raisonnements de niveau élevé, les écritures, qu'ils produiront et liront, pourraient, en fait, être sans signification plus que jamais. Ceci parce que le sens n'est ni plus ni moins important que l'aspect de la dénotation de la signification. » [Drouhard and Teppo, 2004, p. 236]

lui donnent du sens : un produit, une somme. . . C'est la structure qui guide l'utilisateur dans les transformations à faire et à obtenir. La structure se *matérialise* par une syntaxe particulière qui repose avant tout sur les règles de convention et d'usage. Nous faisons l'hypothèse que la matérialité a une incidence sur le comportement de l'élève. La difficulté que rencontrent les élèves à comprendre que deux expressions peuvent dénoter le même objet provient de l'importance que prennent les signes dans le calcul littéral. Une expression peut différer d'une autre par la seule présence d'un signe. C'est la conscience et l'évocation de non-ostensifs qui, pour un expert, permettent de manipuler les ostensifs. C'est la co-activation des ostensifs et non-ostensifs qui permet l'apprentissage puis la maîtrise du calcul littéral. Dans un second temps, le calcul littéral est approché par le pôle « Enseignement ». C'est là, et plus précisément dans le secondaire, que le calcul littéral prend sa véritable place. Simple outil du monde savant, il représente un véritable objet d'étude dans l'enseignement : près du quart du programme de quatrième y est consacré. L'objet polynôme n'y est certes pas défini mais des objets tels que expressions littérales, variable ou terme semblable semblent être les transposés des objets polynômes, indéterminée ou monôme du monde savant. Les traitements qui permettent de maintenir la dénotation et qui sont régis par les lois de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ y sont présentés sous forme de règles algorithmiques. Des ensembles de règles ou techniques sont associés à des genres et types de tâches bien précis : réduire une somme, un produit, développer un produit de deux facteurs plus ou moins complexes, factoriser une somme de deux ou trois termes. . . L'institution scolaire a donc des exigences et des attentes bien précises pour ses sujets. Pourtant, le manque de définition claire de ce qu'est le calcul littéral et ses objets nous a poussés à mettre en place un modèle (celui de la praxéologie) pour décrire les activités qui en relèvent. Ces activités ont pu être recensées grâce à la définition formelle du calcul littéral, établie au préalable : en particulier, cela a permis d'exclure les résolutions d'équation du calcul littéral.

Le registre sémiotique permet le traitement des expressions polynomiales sans un retour systématique ni à leur dénotation ni à la signification de chaque symbole. Cette puissance de l'algèbre nécessite un travail incontestable et provoque bien souvent chez les élèves une mauvaise manipulation des symboles visibles : « Avant d'être productrice, la potentialité qu'offre l'algèbre de développer un "calcul symbolique aveugle" est souvent source pour les élèves de dérapages formels. » [Bardini, 2003, p. 66]. Cela rejoint l'idée que l'apprentissage du calcul littéral est loin d'être trivial : « L'activité de manipulation est considérée comme étant difficile, à tel point que certains s'y réfèrent comme à un art ou une technique dont la maîtrise exige de longues heures de travail » [Lee, 1997] même si, comme l'auteur le dit elle-même, la mémorisation (de faits ou de règles) joue le rôle de méchant dans le rapport dichotomique qu'elle entretient avec la compréhension. Alors qu'en est-il des connaissances véritables de l'élève ? Quels sont les traitements qu'il connaît ? Quelles sont les règles qu'il applique aux expressions ? Quels sont les types d'erreurs ? Quelles sont les indices matériels de la syntaxe qui provoquent des erreurs ? Existe-t-il des raisons communes à ces erreurs ? Communes au sein du travail d'un même élève ? D'avoir approché le calcul littéral par les pôles Savoir savant et Enseignement permet maintenant de s'intéresser au pôle Élève, véritable but de ces travaux. Aussi pourrions-nous répondre aux questions précédentes, ce qui sera fait dès le chapitre 3.

Chapitre 2

Modéliser les connaissances des élèves dans un logiciel éducatif

Résumé. Ce chapitre est consacré aux logiciels éducatifs, les Environnements Informatique pour Apprentissage Humain (EIAH). En cela, il est axé informatique ou plus exactement, axé sur l'apprenant au sein de ces logiciels : quelle prise en compte de l'apprenant ? De ses connaissances ? Quelle exploitation en est faite ? Quelle théorie de l'enseignement cela cache-t-il ? Est-elle nécessaire à une représentation des connaissances de l'élève ? Le but de ce chapitre est de montrer que notre problématique s'inscrit dans un complexe de disciplines et suit inmanquablement celle de la construction d'un module d'apprenant : des observables, un diagnostic, un modèle résultant. Nous y présentons aussi le logiciel d'algèbre APLUSIX dont nous exploitons les traces dans la suite de ces travaux. Nous le positionnons et le comparons aux autres EIAH selon des critères établis sur les types de modèles d'élève.

Au fil des heures de classe, l'enseignant se représente les connaissances de ses élèves afin de prendre des décisions didactiques adéquates. Habituellement établie sur les productions papier des élèves, la description individuelle des connaissances est lente, voire fastidieuse. C'est pourquoi, dès les années 70, la modélisation des connaissances des apprenants a donné lieu à des recherches en intelligence artificielle, espérant trouver un moyen d'automatiser ce processus : interpréter automatiquement la trace de l'activité de l'élève au sein des logiciels éducatifs.

Outre l'intérêt évident de pouvoir traiter de grandes bases de données et de rendre compte, tant à l'enseignant qu'au chercheur, de l'état d'apprentissage d'un groupe d'élèves, modéliser les connaissances peut aussi servir à orienter un tuteur artificiel : faire avancer l'élève dans un nouveau thème ; lui fournir des conseils judicieux aux moments opportuns ; générer des énoncés adéquats, des explications adaptées à son niveau. L'élève qui n'a pas réussi tel exercice pourra être renvoyé à telle partie de cours, celui qui a été diagnostiqué comme maîtrisant telle notion, pourra accéder à des exercices plus complexes ou encore celui dont la conception d'une notion semble erronée pourra judicieusement être confronté à tel exercice qui aura pour but de déstabiliser sa conception. La problématique de construire un modèle à la fois computationnel, compréhensible et exploitable par un humain se trouve aujourd'hui à la confluence de l'Intelligence Artificielle, de la didactique de la discipline représentée, des sciences cognitives, de la psychologie cognitive et des sciences de l'éducation.

2.1 Modèle d'apprenant

2.1.1 Modules d'un logiciel éducatif

Nous appelons logiciel éducatif tout artefact informatique conçu *spécifiquement*¹ pour favoriser un apprentissage. Dès les années 70, de tels logiciels voient le jour avec plus ou moins de directivité. Ce sont des programmes qui veulent instruire l'élève *intelligemment* [Van Lehn, 1988]. A cette fin, il est essentiel que les systèmes recueillent de l'information concernant celui qui l'utilise. Les concepteurs affichent cette volonté en distinguant très vite le « what » (module du domaine) du « how » (module pédagogique) et du « who » (module d'apprenant) [Self, 1999] :

- Le module du domaine constitue la structure principale. Il est chargé de représenter les connaissances relatives au domaine étudié (modèle du domaine) et doit être capable de résoudre les problèmes du domaine.
- Le module pédagogique a pour rôle de gérer les stratégies d'enseignement et la gestion du curriculum.
- Le module d'apprenant est constitué de l'ensemble des informations propres à l'élève. C'est ce module qui nous intéresse dans cette thèse et nous allons le détailler un peu plus.

Comme le précisent Mendelsohn et Dillenbourg, la qualité d'un logiciel réside certainement en la combinaison performante de ces trois modules auxquels on peut ajouter celui de l'interface, module qui gère l'interaction, même si pour des raisons techniques, un projet de recherche se voit souvent obliger de concentrer son approfondissement sur un seul de ces axes [Mendelsohn and Dillenbourg, 1991].

2.1.2 Définition du modèle de l'apprenant

Le module de l'apprenant est constitué de trois composantes : des données d'entrée, un diagnostic et des sorties.

Les données d'entrée sont des informations recueillies par le système sur l'apprenant. Ce sont les comportements *observables* à partir desquels sera reconstruit de l'information. Ces données constituent ce qu'on appelle la *trace* : « une suite d'observables temporellement située, éventuellement re-jouable. » [Mille, 2007]. Elles incluent aussi bien des informations implicites (des clics souris, des gestes, des mots ou encore des clignements d'yeux) qu'explicites (des informations obtenues par dialogue avec l'apprenant). Dans la résolution de problèmes, la granularité des observations est appelée « Bandwidth » (largeur de bande) par [Van Lehn, 1988] ; nous y reviendrons en section 2.2.

La fonction diagnostic traite les données d'entrée. Wenger la définit ainsi [Wenger, 1987a] : « The word *diagnosis* has been used to refer to pedagogical activities aiming at collecting and inferring information about the student or his actions ». ² L'auteur distingue trois niveaux, qui ne sont représentatifs ni de la difficulté ni de la qualité du diagnostic.

Le niveau *comportemental* est une réorganisation du réel observé : il permet de reproduire les comportements de l'élève. Il est obtenu à partir d'observables dont sont ignorés les moins pertinents.

1. Il peut y avoir apprentissage dans bon nombre de situations qui n'ont pas été construites à des fins d'enseignement. Nous distinguons un artefact construit dans la volonté de faciliter l'acquisition d'une notion de ceux qui ne l'ont pas. Par exemple, un tableur ne sera pas considéré comme un logiciel éducatif.

2. « Le terme *diagnostic* a été utilisé en référence aux activités pédagogiques ayant comme but de rassembler et d'inférer de l'information au sujet de l'élève ou de ses actions » [TA].

Le niveau *épistémique* cherche à interpréter et relier les observables en terme de stratégies ou de connaissances. Il prend en compte les connaissances du domaine modélisé.

Le niveau *individuel* gère des informations d'un troisième ordre tel que les attitudes ou les émotions de l'apprenant lors de l'apprentissage.

Les sorties, informations diagnostiquées, peuvent être accessibles ou non aux agents humains autres que les concepteurs.

Les trois composantes d'un module d'apprenant sont évidemment étroitement liées. En fonction de l'usage que l'on souhaite faire des observations, ce ne sont pas les mêmes informations qui seront recueillies, ce n'est pas, non plus, le même diagnostic qui sera produit et, en particulier, ce n'est pas le même niveau de diagnostic qui sera lancé. Les sorties peuvent être rudimentaires ou riches, en fonction du type d'observables que le système enregistre ou exploite et en fonction du processus de diagnostic.

Définition. Nous appelons *modèle de l'apprenant* ce que le système « sait », par reconstruction, à un moment donné, de l'apprenant. Il est la sortie du module de l'apprenant.

Selon Py & Hibou [Py and Hibou, 2006], le modèle de l'apprenant peut être de trois natures : comportemental, cognitif (les connaissances de l'apprenant : ce qu'il sait, comprend mal, veut faire...) ou psychologique (les préférences de l'apprenant tel que le style tutoriel préféré, ses émotions, ses motivations...), se rapprochant ainsi du découpage des trois niveaux pré-cités de la fonction diagnostic de Wenger.

Remarque. Nous avons tenté de distinguer les différents termes trouvés dans la littérature. Il est en fait fréquent qu'il y ait confusion entre le processus de diagnostic et le modèle de l'apprenant, en dénommant les deux diagnostics, au même titre qu'un médecin rend à la fois son *diagnostic* après avoir *diagnostiqué* les symptômes de son patient.

Remarquons enfin qu'entre observable et modèle d'apprenant, la distinction est fine puisque ce dernier peut n'être constitué que de comportements reconstruits à partir d'observables. Nous les différencions par le passage via un traitement diagnostique qui transforme observables bruts en modèle d'apprenant : c'est le travail du chercheur, sous-jacent au traitement, qui permet cette transformation en donnant du sens aux observables. Comme l'exprime Ragnemalm [Ragnemalm, 1995], c'est la construction d'un pont sur le fossé qui sépare les observables du besoin d'exploitation (pour elle les besoins tutoriels du système).

Modéliser les connaissances de l'élève revient à traiter les trois composantes du module : choisir les observables, leurs processus de traitement et le modèle que l'on souhaite obtenir. À chacune de ces étapes, se posent des questions didactiques : Quels choix ? Quels modèles théoriques ? Quels besoins ? C'est ce cheminement qui aboutit à un modèle d'élève.

2.2 Classification des modules d'apprenant

Classifier a pour but d'obtenir un regard structuré selon certains critères et il n'est guère possible de faire une partition exacte (c'est-à-dire en classes disjointes) de l'objet d'étude. Cependant, c'est une tâche nécessaire pour situer nos travaux. Pour cela, nous commençons par classer les modules d'apprenant selon le critère classique chronologique pour ensuite construire nos propres critères.

2.2.1 Classification chronologique

La prise en compte de l'apprenant suit nécessairement l'évolution des techniques d'Intelligence Artificielle (IA) mais aussi celle des théories de l'enseignement, avec un inévitable décalage. Pour situer nos choix et nos travaux, il est intéressant de remonter aux origines des logiciels éducatifs : les années 70.

Comment la prise en compte des connaissances de l'apprenant, et non de celles de l'expert, a-t-elle évolué des premiers logiciels éducatifs à ceux d'aujourd'hui ?
Qu'est-ce qui a permis cette évolution ?

Du savoir enseigné à l'apprentissage

Sans rentrer dans une recherche fine de catégorisation de l'évolution des logiciels éducatifs, accessibles dans maints livres ou articles [Bruillard, 1997, Baron, 1995, Bruillard, 1997, Dillenbourg, 1993, Py, 1998, Py and Hibou, 2006, Wenger, 1987a], l'on peut remarquer que les différents noms génériques que ces logiciels ont pris sont représentatifs de l'évolution de la considération qui est faite de l'utilisateur-apprenant : Enseignement Assisté par Ordinateurs dans les années 60, puis Enseignement Intelligemment Assisté par Ordinateurs en 70 et Environnements interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur en 90, de tels systèmes s'appellent aujourd'hui, en France, Environnements Informatique pour Apprentissage Humain. La barrière est fine entre les différentes nominations, si fine qu'il n'y a pas de définition consensuelle de chacun des termes. Cependant, ce que l'on peut retenir, et qui fait consensus, c'est l'évolution des mots utilisés pour désigner les différents systèmes. Ce changement de noms reflète le passage de la représentation du *savoir expert* dans les EAO à celle de *l'apprentissage* dans les EIAH et, avec lui, celui de la préoccupation de prise en compte de l'apprenant dans son individualité.

Les théories de l'enseignement

A la fin des années 80, les concepteurs des logiciels éducatifs prennent pleinement conscience du besoin d'organiser les informations à représenter et représentées dans les logiciels selon des théories de l'enseignement, théories qui devront être adaptées aux contraintes informatiques. Il semble qu'avant cela, les concepteurs pensaient être en dehors du terrain des « philosophes de la connaissance et de l'apprentissage » [Self, 1999] même s'ils en subissaient nécessairement l'influence.

Ainsi, Les EAO des années 60, découpaient les connaissances à acquérir en éléments simples, du plus élémentaire au plus complexe. L'interaction y était réduite alors au simple « stimulus-réponse-évaluation » dans la droite ligne du béhaviorisme. La volonté d'insérer les théories cognitivistes se révèle avec le développement des EIAO, où la connaissance est représentée explicitement. Dans leur volonté d'*assistance*, ces systèmes cherchent à adapter leurs stratégies d'enseignement. L'apprenant individuel est dès lors pris en compte. L'apprentissage ne se définit plus comme changement dans les comportements mais dans les structures mentales. C'est le cas avec SCHOLAR [Carbonell, 1970] qui développe l'idée que pour maîtriser un concept, il faut le présenter dans différents contextes, sous différents aspects. Nous trouvons déjà les prémisses des théories cognitivistes encore d'actualité : l'idée de multiplicité des registres chez Duval³ ou le principe des classes de situation de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud [Vergnaud, 1991], travail qu'il a entrepris dès 1980. Dans ce cadre, un concept se construit, pour

3. « Les diverses représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont absolument nécessaires [pour l'apprentissage]. » [Duval, 1993]

un individu, à travers les nombreuses situations qui le questionnent ou l'utilisent. Le sens qui se construit est lié aux types de situations où l'individu le rencontre, principe déjà visible dans SCHOLAR.

En 1978, avec la conception de BUGGY, l'erreur devient centrale dans la modélisation des connaissances. La connaissance y est perçue comme dynamique, comme une capacité à interagir. C'est à cette même période que la Repair Theory [Brown and Van Lehn, 1980] se développe. Elle s'intéresse à l'apprentissage des compétences procédurales et tente d'expliquer l'apparition d'erreurs (appelés « bug ») particulièrement dans le domaine de l'arithmétique. L'idée principale est que l'élève, confronté à un problème qu'il ne sait résoudre, est face à une impasse qu'il tente de « réparer » (*repair* en anglais). Certaines réparations mènent à des résultats corrects, d'autres à des erreurs⁴. Il y a la volonté dans cette théorie de distinguer l'erreur « d'inattention », un dérapage (*slip* en anglais), de l'erreur conceptuelle qui est perçue comme une tentative de réparation. C'est une des rares théories construites dans l'optique d'être implémentées : le logiciel SIERRA l'incarne pour le domaine de l'arithmétique.

Dans les années 80-90, la prise de conscience des concepteurs de la nécessité d'implanter des théories de l'apprentissage voit le jour avec la création des ACT-TUTORS. Ils incarnent la théorie ACT* de l'apprentissage et de l'acquisition des compétences. Cette théorie est développée par Anderson [Anderson, 1983]. Nous la décrirons plus en détail dans la section consacrée à la présentation de COGNITIVE TUTOR. Les logiciels prennent alors le nom de Intelligent Tutoring Systems (ITS). Ils cherchent à rendre accessible le raisonnement : l'explication est perçue comme nécessaire à l'apprentissage pour transformer les connaissances déclaratives et générales en des connaissances opérationnelles et contextualisées [Dillenbourg, 1993]. Avec cette recherche d'ouverture, la connaissance prend une dimension sociale. Début des années 90, les théories de Vygotski sont exploitées pour développer l'aspect social de l'apprentissage [Self, 1999].

Avec l'introduction de l'*interactivité* des EiAO des années 90, l'apprenant participe à la fonction diagnostique bien que, selon Dillenbourg, « le diagnostic perd sa neutralité dès qu'il devient interactif » [Dillenbourg, 1993] puisque formuler ou expliciter ses connaissances influence très probablement la compréhension première et spontanée. Les concepteurs prennent en compte l'évolution des connaissances de l'élève ; ils se décident pour une « vision “constructiviste” de l'apprentissage, selon laquelle l'apprenant construit ses connaissances en interagissant avec un environnement » [Baron, 1995].

L'utilisateur humain, avec ses connaissances passées et en cours, renommé apprenant, se retrouve alors au centre d'un environnement, d'un milieu⁵, incluant le savoir et le dispositif. L'apprenant est vu comme constructeur de ses connaissances en interaction avec un milieu, pouvant être plus large que le seul tutoriel : la conception que se crée alors l'apprenant, peut être caractérisée comme une « propriété émergente des interactions au sein du système [*Sujet – Milieu*] » [Balacheff, 2002]. L'EIAH se développe avec l'idée que le contexte institutionnel doit être pris en considération [Artigue, 2002]. L'environnement informatique doit véhiculer une intention didactique (c'est-à-dire volontairement organisé pour enseigner un savoir) : un environnement sans une telle intention est insuffisant pour qu'un individu acquière les connaissances souhaitées. Cette idée est l'hypothèse didactique fondamentale de ce que signifie un milieu dans la théorie des situations de Brousseau [Brousseau, 1998]. L'EIAH n'est plus un simple artefact informatique. Il est un instrument qui répond aux mêmes questionnements que ceux des constructions

4. Cette théorie peut à nouveau être rapprochée de celle de Vergnaud avec l'idée qu'un théorème-en-acte a son domaine de validité ou de celle de [Brousseau, 1983] avec la notion d'obstacle qui est une connaissance capable de produire des réponses adaptées dans un certain contexte et erronées hors de ce contexte.

5. Au sens didactique du terme : « le milieu est le système antagoniste du système enseigné » [Brousseau, 1998, p. 93]. Ce sont les rétroactions du milieu qui favorisent l'apprentissage de l'élève.

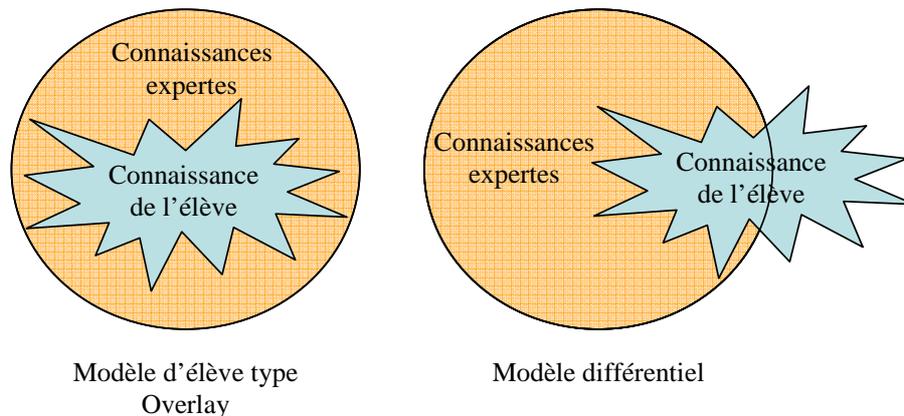


FIGURE 2.1 – Dans le modèle overlay, le modèle d'apprenant est construit sur le principe de considérer les connaissances de l'apprenant comme un sous-ensemble des connaissances d'un expert du domaine. Dans le modèle différentiel, le modèle d'apprenant est plus riche. Il peut inclure des connaissances que l'expert n'a pas : des connaissances erronées.

de situations didactiques : quelle dévolution, quel milieu, quelles connaissances, quel contrat didactique ?

L'évolution des logiciels éducatifs (appelés aussi didacticiels) a suivi celle des théories de l'enseignement. Ces théories n'ayant pas été conçues pour le contexte informatique, cela pose inévitablement des difficultés de « transposition ».

Écart des connaissances entre apprenant et expert

Dès lors que l'on s'intéresse aux erreurs des apprenants, il est aussi classique de classer les EIAH selon l'écart entre les connaissances propres de l'apprenant et les connaissances expertes ciblées. La façon de concevoir cet écart permet de distinguer deux classes de modèles [Bruillard, 1997]. D'une part, il y a le modèle d'expertise partielle (Overlay) où l'écart des connaissances est une différence de maîtrise, sans explication sur l'évolution des connaissances : les connaissances de l'apprenant forment un sous-ensemble des connaissances de l'expert. Comme le précise Greer : « *This approach assumes that all differences between the learner's behaviour and that of the expert model can be explained as the learner's lack of skill*⁶ [Greer and MacCalla, 1994, p.6]. Ce modèle peut être rapproché de la conception de l'apprentissage de « la tête vide » [Mante, 1988]. D'autre part, il y a le modèle différentiel où l'écart est une perturbation, incluant le modèle d'expertise partielle étendue et la bibliothèque de bogues dynamiques. Ce modèle peut se rapprocher, en quelque sorte, de la conception de l'apprentissage de « la tête pleine » [Mante, 1988], où l'élève part avec ses propres connaissances, dont il ne maîtrise pas toujours le domaine de validité. Ces deux modèles sont représentés dans la figure classique 2.1.

Ce découpage est, certes, lié aux évolutions des techniques d'IA et des théories de l'enseignement, et donc à la progression temporelle, mais les premiers systèmes de modèle overlay perdurent encore aujourd'hui. Plus qu'à une conception proprement dit de l'enseignement, ils répondent souvent à des besoins différents⁷. La perception des connaissances de l'apprenant,

6. Cette approche suppose que toutes les différences entre les comportements de l'apprenant et ceux du modèle expert peuvent être expliquées comme un manque de compétences de l'apprenant. [TA]

7. Au même titre d'ailleurs, que les théories de l'apprentissage : chacune a sa raison d'être pour un apprentissage

et en particulier celle de ses erreurs, n'est donc pas qu'une simple conséquence de l'évolution temporelle, et nous introduirons ce critère dans notre grille de classification.

2.2.2 Classification sémantique

Notre problématique tournant autour du modèle de l'apprenant, nous avons souhaité trouver des critères de classification adaptés à cette question. Classifier selon les données d'entrée et de sortie du module n'est pas suffisant selon Van Lehn [Van Lehn, 1988]. Il propose une classification à trois volets :

- Les Input (ou bandwidth) qui peuvent être de trois types : des états mentaux approximatés (stratégie, décision via des questionnaires, des protocoles verbaux), des états intermédiaires ou des états finaux.
- La représentation de connaissances qui peut être procédurale plate, procédurale hiérarchique ou déclarative.
- La différence entre les connaissances de l'élève et celles de l'expert, dont nous avons parlé précédemment : Overlay, Bug libraries ou Bug part libraries.

Chaque volet peut prendre trois valeurs. Ce qui crée une grille de 3^3 possibilités. Cette taxinomie a pour avantage de pouvoir associer à chaque triplet de modèle une technique de diagnostic. Cependant, ce classement est trop axé informatique pour nos travaux et il est difficile de trouver suffisamment d'informations sur les algorithmes des logiciels pour pouvoir les faire rentrer dans une des neuf combinaisons.

Nous proposons une classification à l'aide de critères portant sur les trois composantes d'un module d'apprenant : le type d'observations recueillies, les techniques de diagnostic et le modèle d'apprenant, auquel nous ajoutons des critères qui portent sur ce que nous appelons les fondements du logiciel. Chaque critère est présenté dans la suite. Comme nous l'avons déjà dit, il est difficile de mettre un EIAH dans une case. Afin de faire ressortir les grandes tendances d'EIAH, nous avons associé des valeurs numériques aux critères. Ainsi l'EIAH qui aura la valeur 0 pour un critère donné pourra être considéré comme plus proche de celui qui aura la valeur 1 que de celui qui aura la valeur 2. Nous classons 18 EIAH, choisis pour deux raisons : d'une part, ils sont dans le domaine de l'algèbre ou l'arithmétique et d'autre part, suffisamment d'informations ont pu être récoltées à leur propos pour que chaque critère puisse recevoir une valeur.

Les observables

Nous distinguons quatre critères dans cette composante.

La granularité dépend de l'environnement. Nous donnons 1 point si le diagnostic prend en compte la réponse finale de l'élève à un exercice, 1 point supplémentaire si il prend en compte les étapes intermédiaires à sa réponse et 1 point de plus si il considère des états mentaux (d'ordre stratégique).

La largeur de bande ou « bandwidth » [Van Lehn, 1988]. Le diagnostic tient-il compte de plusieurs données pour construire le modèle résultant ou n'utilise-t-il que les données d'un seul exercice et est remis à zéro après chaque exercice? 1 point est donné si le diagnostic ne réagit qu'à une réponse de l'élève sans tenir compte des réponses précédentes. Ce sera le cas d'un EIAH qui réagit systématiquement à une erreur sans la relier à d'autres. 2 points si il se base sur un certain nombre d'exercices et 3 points si les observables sont globaux, dans le sens où le diagnostic tient compte de l'activité de l'élève dans son ensemble. Ce sera le cas d'un EIAH tel que PÉPITE qui attend la globalité des réponses pour diagnostiquer le travail de l'élève.

visé sous certaines contraintes. Elles ne correspondent pas nécessairement à une époque.

La prise en compte de l'erreur. L'erreur est-elle acceptée comme un observable ou le système n'enregistre-t-il que les réponses correctes? 0 point si aucune réponse erronée n'est acceptée. 1 point si certaines réponses incorrectes sont acceptées ou proposées, comme dans un EIAH avec QCM où des réponses erronées sont proposées avec la réponse correcte à l'élève. 2 points si l'élève peut taper ce qu'il veut, comme dans APLUSIX.

L'influence du pilotage. Certains EIAH proposent de l'aide ou réagissent aux erreurs des élèves mais le nombre de réactions ou aides réclamées par l'élève peut être pris en compte dans le diagnostic. Ainsi, l'élève qui aura demandé de l'aide aura, par exemple, un moins bon score qu'un élève fournissant la même réponse mais sans avoir demandé d'aide. L'EIAH qui a 0 à ce critère est un EIAH qui ne propose pas de feedback possible ou tout au moins possède un paramètre qui permet un mode sans feedback. 1 point est donné aux EIAH qui proposent des aides mais ces aides ayant une influence sur le diagnostic et 2 points aux EIAH qui proposent des aides mais sans en tenir compte dans leur diagnostic.

Le diagnostic

Le mode du diagnostic est pris au sens de [Baron, 1995]. L'analyse et l'interprétation des observables peut se faire en ligne ou hors-session, suivi pas à pas ou analysé a posteriori. 1 point est donné si le diagnostic a lieu en ligne, 2 points si il est hors-session. Un EIAH peut donc obtenir 3 points pour ce critère si il a deux types de diagnostic : un en ligne et un hors-sessions.

Le type de diagnostic. Nous intéressant aux erreurs, il était important pour nous de savoir si l'EIAH était capable de diagnostiquer de nouvelles erreurs ou réponses auxquelles n'avait pas songé le concepteur. Nous donnons 1 point si le diagnostic permet d'associer une erreur d'élève à un type d'erreur (souvent par des règles d'écriture prédéfinies) et 1 point supplémentaire si l'EIAH est capable d'« apprendre » dynamiquement de l'erreur de l'élève. C'est le cas d'ACM, PIXIE dans le domaine mathématique mais aussi ASSERT [Baffes and Mooney, 1996] ou MEDD [Sison et al., 2000] en apprentissage de langage informatique.

Le modèle

La nature du modèle. Nous reprenons les trois niveaux proposés par Py [Py and Hibou, 2006] : comportemental, cognitif ou psychologique. 1 point est donné si le modèle est considéré comme comportemental en permettant de rejouer les comportements de l'élève, 2 points si il est d'ordre cognitif, permettant d'expliquer voire de prédire les comportements de l'élève. Le cas où le modèle serait d'ordre psychologique n'est pas apparu dans les EIAH étudiés. 0 point correspond à un logiciel qui a un modèle d'élève de type performance-score.

Les fondements

La nature des observables dépend sans conteste du domaine de l'EIAH, la difficulté du diagnostic du niveau scolaire mais aussi de l'étendue du domaine; quant au modèle d'élève résultant, il dépend de la théorie didactique que les concepteurs souhaitaient suivre. Nous avons donc tenu compte de ces critères que nous qualifions de fondateurs.

Le contenu symbolise l'étendue des activités, du domaine et du niveau scolaire visé. Il regroupe trois critères en un :

- Le niveau scolaire. 1 point est donné si les notions en jeu dans l'EIAH correspondent de une à deux années de l'enseignement, 2 points si elles sont apprises sur 3 ou 5 années et 3 points si elles s'étendent sur plus que 5 années.

- Le domaine mathématique. A quel point le système recherche-t-il l'exhaustivité des connaissances du domaine? 1 point par domaine concerné parmi l'arithmétique, l'algèbre, des problèmes en langue naturelle. Nous intéressent principalement à l'algèbre, nous ne sommes pas exhaustifs dans ce critère et octroyons 1 autre point pour tous les autres champs mathématiques (analyse, géométrie, etc). Un EIAH peut donc obtenir jusqu'à 4 points pour ce critère.
- Les activités proposées à l'élève. Les connaissances visées sont-elles de type procédural ou déclaratif? Pour répondre à cette question, nous avons discerné 4 types d'activités : des exercices en langue naturelle, formels, des preuves à fournir ou encore des parties de cours. 1 point à chaque fois qu'une de ces activités est proposée.

La théorie didactique sous-jacente. Ce critère peut aller jusqu'à 3 points. Il est assez subjectif. Nous donnons 1 point aux EIAH qui affichent des idées « élémentaires » comme « réagir à chaque action erronée de l'élève ». 2 points aux EIAH qui suivent une théorie reconnue comme telle (ACT, Les champs conceptuels, Vygotsky, etc) mais ne semblent pas réellement la mettre en œuvre. 3 points pour une théorie didactique affichée et suivie par l'EIAH.

L'autonomie de l'apprenant. Les EIAH peuvent être classés suivant le degré de liberté laissé à l'apprenant. Un tuteur est un artefact informatique où le degré d'initiative de l'utilisateur est limité. A l'opposé, se tient le micromonde, système ayant un degré de directivité minimal. A la jonction, se trouvent les environnements de découverte guidée. Plus le degré de liberté de l'apprenant est grand, plus les informations sur l'apprenant seront riches mais plus dures elles seront à recueillir. Cet axe allant du tuteur au micromonde est un critère qui permet d'échelonner le modèle d'élève. Par exemple, si l'EIAH est un tuteur, le modèle d'élève sera plus facile à construire mais, en contrepartie, aura des biais d'interprétation importants : à trop guider un apprenant, on risque de s'éloigner de ses réels processus mentaux. Ainsi, en est-il des logiciels qui proposent des choix multiples et non une réponse ouverte, ce qui, dès lors, ne laisse pas tout type de réponse émerger. Classifier les logiciels sur cet axe tiendrait compte aussi de la possibilité de l'enseignant de créer de nouveaux exercices, de l'élève qui peut explorer le système, etc. Nous ne souhaitons tenir compte uniquement de la liberté qu'a l'élève de pouvoir répondre ce qu'il veut. Nous donnons 1 point aux logiciels qui proposent un choix fermé de réponses. 2 points aux logiciels qui laissent l'élève semi-libre de sa réponse : par exemple, T-algebra qui demande à l'élève de cliquer dans un menu de règles et de préciser sur quelle sous-expression algébrique il travaille. 3 points sont donnés aux EIAH qui laissent l'élève complètement libre de sa réponse.

2.2.3 Classification de 18 EIAH

Nous classons les 18 EIAH que nous avons choisis selon les critères présentés ci-dessus. Certains EIAH ne sont pas accessibles (de part leur âge ou leur prix) et les valeurs numériques octroyées aux critères reposent sur ce que certains auteurs en disent. Nous avons sélectionné :

- ACM [Langley and Ohlsson, 1984],
- ACTIVMATH [Melis et al., 2009],
- ALGEBRATOR [Jurkovic, 2001],
- ANIMALWATCH [Beck and Woolf, 2000a],
- APLUSIX [Bouhineau et al., 2001],
- ARI-LAB [Bottino and Chiappini, 2003],
- BUGGY [Burton, 1982, Van Lehn, 1988, Py, 1998],
- COGNITIVE TUTOR (ALGEBRA I) [Anderson et al., 1990, Anderson et al., 1995],
- DIANE [Hakem, 2005],
- E-SLATE [Kynigos and M., 2002],

- LMS/PIXIE [Sleeman, 1982a],
- MATHTEACHER (<http://www.mathkalusa.com/>),
- MATHXPRT [Beeson, 1998],
- MSLINDQUIST [Heffernan, 2001],
- PÉPITE [Jean, 2000, Delozanne et al., 2002, Chenevotot-Quentin et al., 2009],
- T-ALGEBRA [Lepp, 2006, Prank et al., 2006],
- WEST [Burton, 1982],

auquel nous ajoutons APLUSIX-ANAÏS qui est le logiciel APLUSIX tel qu'il est après implantation de notre modèle. Les valeurs numériques sont données pour chaque critère et EIAH dans la figure 2.2.

Nous souhaitons obtenir des regroupements de ces EIAH. Pour cela, nous utilisons une méthode de fouille de données (clustering) : la classification ascendante hiérarchique (CAH). Elle vise à répartir n individus (ici, les 18 EIAH) caractérisés par p variables (ici, 11 critères) en un certain nombre de classes aussi homogènes que possible, sans avoir d'a priori sur ce nombre de classes. Comme toute classification hiérarchique, pour un niveau de rapprochement souhaité, deux EIAH seront confondus dans une même classe, alors qu'à un niveau plus élevé, ils appartiendront à deux classes différentes. Le résultat d'une CAH est une hiérarchie de classes où tout individu appartient à au moins une classe et où deux classes distinctes sont soit disjointes soit vérifient une relation d'inclusion.

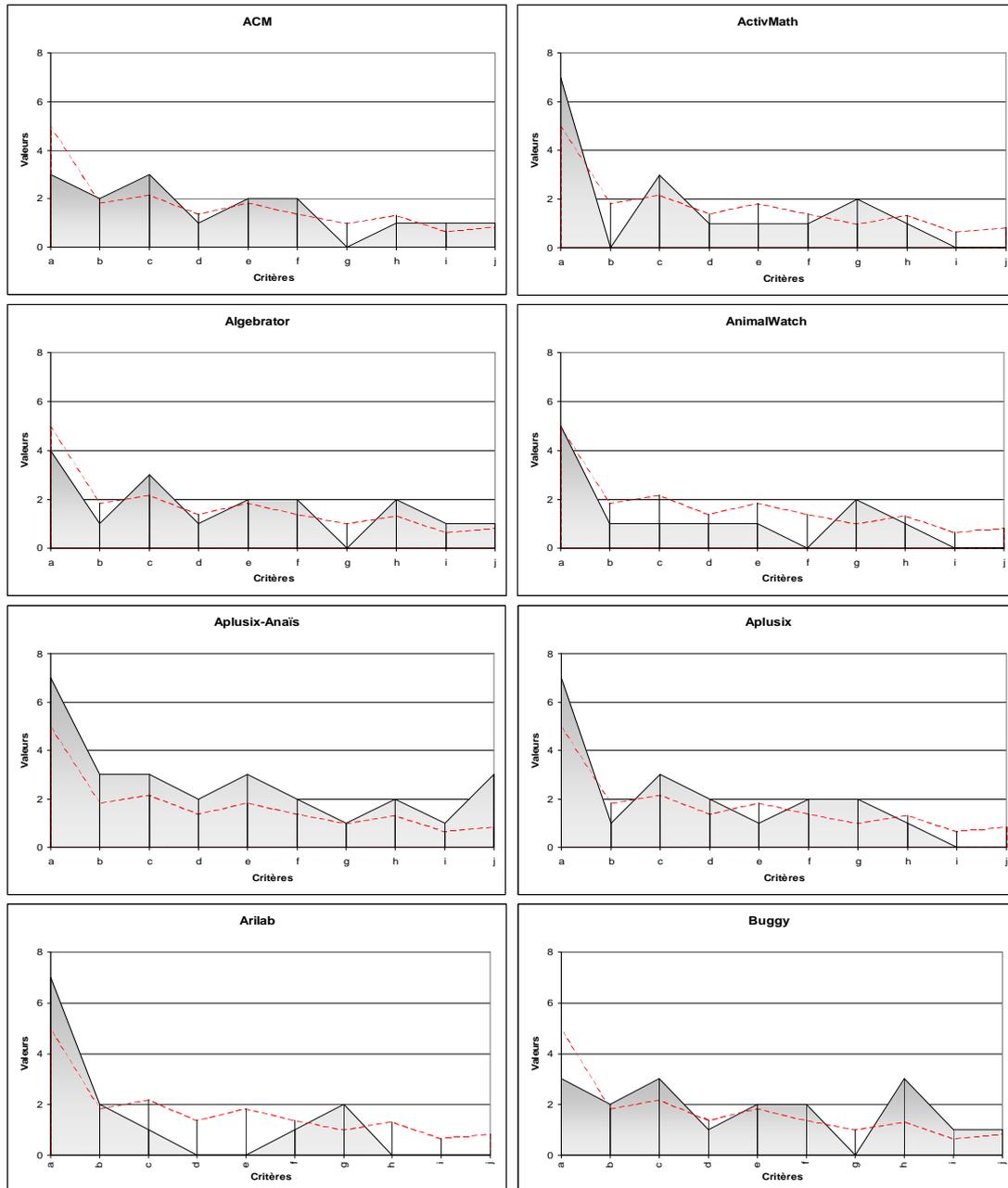
Nous avons utilisé le logiciel libre TANAGRA [Rakotomalala, 2005] accessible sur <http://eric.univ-lyon2.fr/~ricco/tanagra/fr/tanagra.html>. Ce logiciel centre et réduit les valeurs de chaque critère avant d'appliquer une CAH, ce qui permet de les rendre « comparables ».

Le dendrogramme 2.3 propose trois classes. Reste un problème classique de la classification : comprendre et interpréter les classes. Pour ce faire, on caractérise les classes en comparant les indicateurs (moyenne dans notre cas) marginaux et conditionnellement aux classes. La figure 2.4 donne pour chaque critère la moyenne prise par l'ensemble des 18 EIAH ainsi que la moyenne prise par les EIAH de la classe et la valeur test⁸.

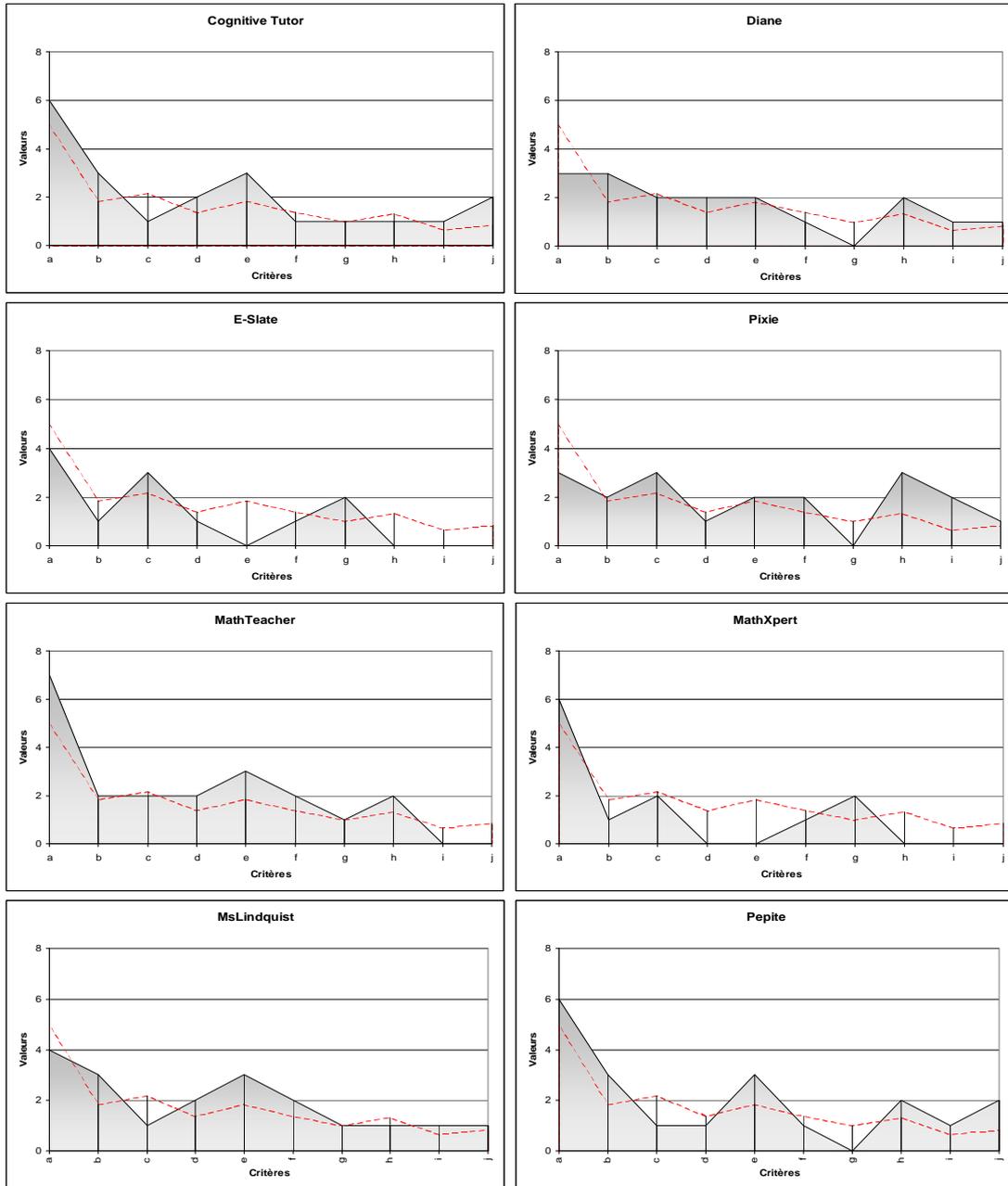
8. Parmi les variables disponibles, soit X une variable quantitative. La moyenne calculée dans l'échantillon global est μ , la variance empirique est égale à σ^2 ; la moyenne calculée dans le sous-échantillon est μ_g . La valeur test [Lebart et al., 2000, p. 181] est définie de la manière suivante :

$$t_c = \frac{\mu_g - \mu}{\sqrt{\frac{n-n_g}{n-1} \times \frac{\sigma^2}{n_g}}}$$

La valeur test t_c peut se lire comme la statistique d'un test de comparaison de moyennes où, sous l'hypothèse nulle de tirage au hasard de n_g parmi n , elle suivrait de manière asymptotique la loi normale centrée réduite. Pour les niveaux de risque usuels (5%), on considérera donc que la différence est significative lorsque la valeur absolue de la valeur test est supérieure à 2. Il ne faut pas trop s'attacher à comparer la valeur test avec un hypothétique seuil, très difficile à définir dans la pratique. Il convient avant tout de s'en servir comme un critère permettant de hiérarchiser les variables, afin de distinguer les variables qui jouent un rôle notoire dans l'interprétation des groupes. Il importe surtout de situer les décrochements de valeurs c-à-d distinguer les situations où les valeurs test s'écartent fortement des autres.



Valeurs prises par l'EIAH
 Moyennes des valeurs prises par les 18 EIAH
 Maximum des valeurs



■ Valeurs prises par l'EIAH - - - Moyennes des valeurs prises par les 18 EIAH . . . Maximum des valeurs

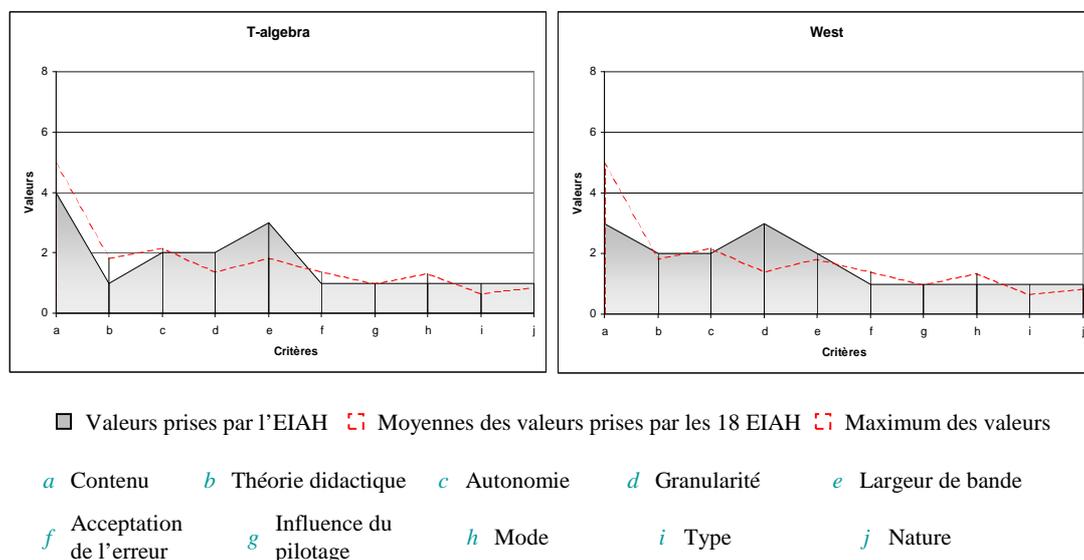


FIGURE 2.2 – Évaluation de 18 EIAH selon 11 critères : le contenu, la prise en compte d'une théorie didactique, l'autonomie de l'apprenant ; la granularité des observables, leur largeur de bande, l'acceptation de l'erreur dans les réponses de l'élève, la prise en compte du pilotage dans le diagnostic ; le mode de diagnostic, le type de diagnostic ; la nature du modèle.

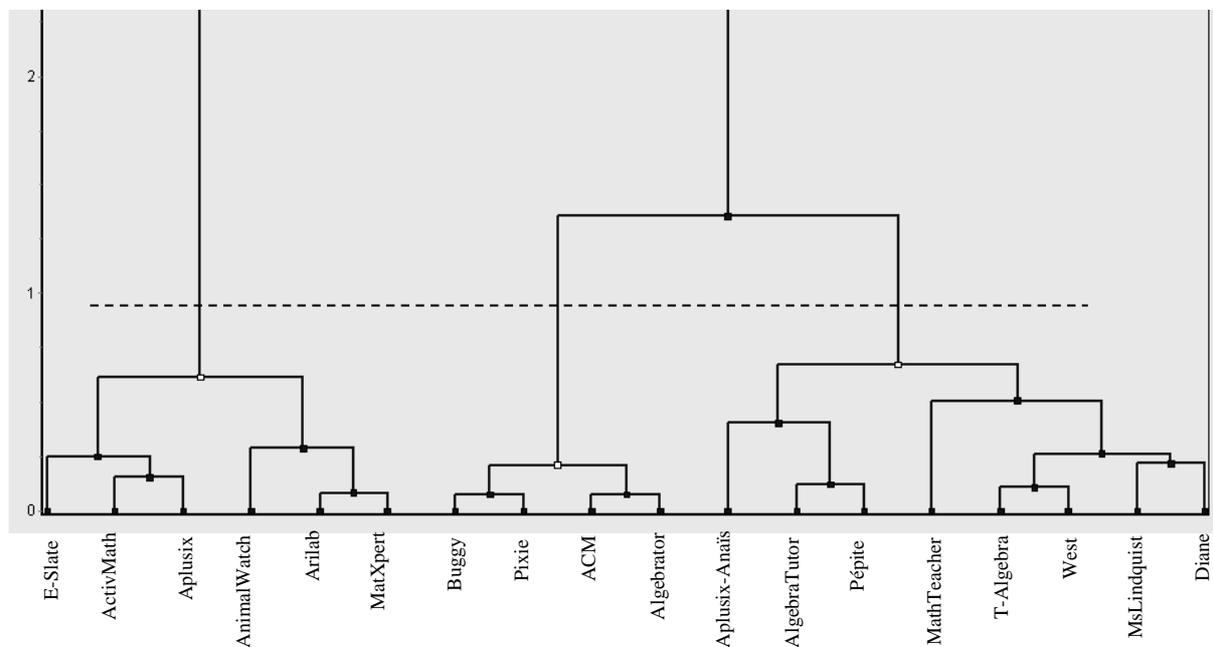


FIGURE 2.3 – Classification ascendante hiérarchique avec le critère de Ward : trois classes principales apparaissent.

Nom de la classe → Nombre d'EIAH appartenant à cette classe ↓

Description of "Cluster_HAC_EIAH"											
Cluster_HAC_EIAH=c_hac_1 [33,3 %] 6				Cluster_HAC_EIAH=c_hac_2 [22,2 %] 4				Cluster_HAC_EIAH=c_hac_3 [44,4 %] 8			
Att - Desc	Test value	Group	Overall	Att - Desc	Test value	Group	Overall	Att - Desc	Test value	Group	Overall
Influence Pilotage	3,5	2,00 (0,00)	1,00 (0,84)	Mode	2,2	2,25 (0,96)	1,33 (0,91)	Largeur de bande	3,1	2,75 (0,46)	1,83 (1,10)
Contenu	1,9	6,00 (1,26)	4,94 (1,66)	Acceptation Erreur	2,2	2,00 (0,00)	1,39 (0,61)	Granularité Théorie didactique	2,9	2,00 (0,53)	1,39 (0,78)
Autonomie Acceptation Erreur	0	2,17 (0,98)	2,17 (0,86)	Type	2,2	1,25 (0,50)	0,67 (0,59)	Nature	2,3	1,38 (0,92)	0,83 (0,86)
Granularité	-2,1	0,83 (0,75)	1,39 (0,78)	Nature	0,4	1,00 (0,00)	0,83 (0,86)	Type	1,3	0,88 (0,35)	0,67 (0,59)
Théorie didactique	-2,6	1,00 (0,63)	1,83 (0,92)	Largeur de bande	0,3	2,00 (0,00)	1,83 (1,10)	Mode	0,7	1,50 (0,53)	1,33 (0,91)
Mode	-2,7	0,50 (0,55)	1,33 (0,91)	Théorie didactique	-0,2	1,75 (0,50)	1,83 (0,92)	Contenu	0,1	5,00 (1,69)	4,94 (1,66)
Nature	-2,8	0,00 (0,00)	0,83 (0,86)	Granularité	-1,1	1,00 (0,00)	1,39 (0,78)	Acceptation Erreur	-0,1	1,38 (0,52)	1,39 (0,61)
Type	-3,3	0,00 (0,00)	0,67 (0,59)	Contenu	-2,2	3,25 (0,50)	4,94 (1,66)	Influence Pilotage	-1,1	0,75 (0,46)	1,00 (0,84)
Largeur de bande	-3,5	0,50 (0,55)	1,83 (1,10)	Influence Pilotage	-2,6	0,00 (0,00)	1,00 (0,84)	Autonomie	-1,8	1,75 (0,71)	2,17 (0,86)

Critères dans l'ordre de la contribution à la classe → Valeur du test de comparaison des moyennes → Moyenne des valeurs numériques pris par les EIAH de cette classe pour chaque critère, suivi des écarts-types estimés. → Moyenne des valeurs numériques pris par les 18 EIAH pour chaque critère

FIGURE 2.4 – Indicateurs pour les trois classes repérées par la CAH. On note, par exemple, que l'influence moyenne du pilotage est de 1 pour les 18 EIAH et de 2 pour la première classe ; Le pilotage serait donc plus influent pour cette classe, ce qui est validé par la valeur test qui est de 3.5.

Les figures 2.3 et 2.4 permettent d'analyser ainsi les trois classes :

- La première classe est constituée de 6 EIAH : E-SLATE, ACTIVMATH, APLUSIX, ANIMALWATCH, ARI-LAB, MATHXPRT. Ce qui les regroupe avant tout est la forte influence du pilotage et les faibles types de diagnostic et largeur de bande. Ce sont des EIAH qui proposent des feedback à l'élève sans pour autant tenir compte de leur utilisation dans le modèle d'élève (forte influence du pilotage), de contenu étendu, de théorie didactique absente, d'un modèle d'élève de nature faible. Cette classe correspond donc aux EIAH qui ont privilégié l'étendue du contenu au détriment d'un modèle d'élève riche.
- La seconde classe est constituée de 4 EIAH : BUGGY, LMS/PIXIE, ACM, ALGEBRATOR. Ce qui les regroupe avant tout est un fort mode, un faible contenu avec peu d'influence du pilotage. Ce sont des EIAH qui combinent souvent des diagnostics hors-session et en-ligne (le mode), sur un contenu très étroit, laissant l'élève très libre de répondre ce qu'il veut (l'autonomie et l'acceptation de l'erreur) pour obtenir un modèle très axé comportements (la nature).
- La troisième classe est constituée de 8 EIAH : APLUSIX-ANAÏS, COGNITIVE TUTOR, PE-PITE, MATHTEACHER, T-ALGEBRA, WEST, MSLINDQUIST ET DIANE. Ce qui les regroupe avant tout est une bande large avec une prise en compte importante d'une théorie didactique et laissant peu d'autonomie à l'élève. Ce sont des EIAH qui ont une forte prise en compte d'une théorie didactique et une prise en compte étendue de réponses (la granularité) et du nombre d'activités (la largeur de bande) avant de rendre un modèle d'ordre épistémique (la nature).

Nous retrouvons l'affirmation de Sleeman [Sleeman, 1987a, p. 246] comme quoi la restriction du domaine est souvent liée à un bon diagnostic. Nous pouvons aussi remarquer que les logiciels d'après 1990 mettent l'accent sur de nouvelles techniques d'extension de bibliothèque (morphing, perturbation clustering conceptuels) et ils sont axés sur une gestion de la consistance. Cela se fait au dépend de la complexité du domaine traité (classification, apprentissage de concepts, problèmes prédéfinis) et du bruit engendré (il y a souvent besoin d'une relecture humaine avant l'entrée de nouvelles règles, comme dans PIXIE).

Si l'on décide de forcer les regroupements en seulement deux classes, ce sont la deuxième et la troisième classe qui s'agrègent pour ne faire qu'une seule classe. On met le doigt sur la corrélation forte entre la présence et la prise en compte d'une théorie didactique et l'obtention d'un modèle d'élève riche (comportemental voire épistémique).

La richesse d'un modèle d'élève semble reposer sur la prise en compte d'une théorie didactique.

Nous allons maintenant détailler le fonctionnement du logiciel duquel nous avons recueilli les observables : le logiciel APLUSIX.

Aplusix

APLUSIX est un logiciel d'algèbre développé par Nicaud & Bouhineau⁹ [Bouhineau et al., 2001], basé sur un éditeur avancé d'expressions algébriques [Nicaud and Bouhineau, 2007]. Il permet à l'élève de résoudre des problèmes d'algèbre élémentaire, de la 4^e à la 2nde. Dans ce logiciel, l'élève se voit proposer des exercices, construits par l'enseignant ou le chercheur, de quatre types : calculer des expressions numériques,

9. Les dernières avancées sur ce logiciel sont accessibles sur <http://aplustix.imag.fr/>. Sur celles-ci, les articles [Bouhineau et al., 2007, Chaachoua et al., 2007a] peuvent être lus ; ils portent sur les représentations graphiques et en arbre des expressions algébriques.

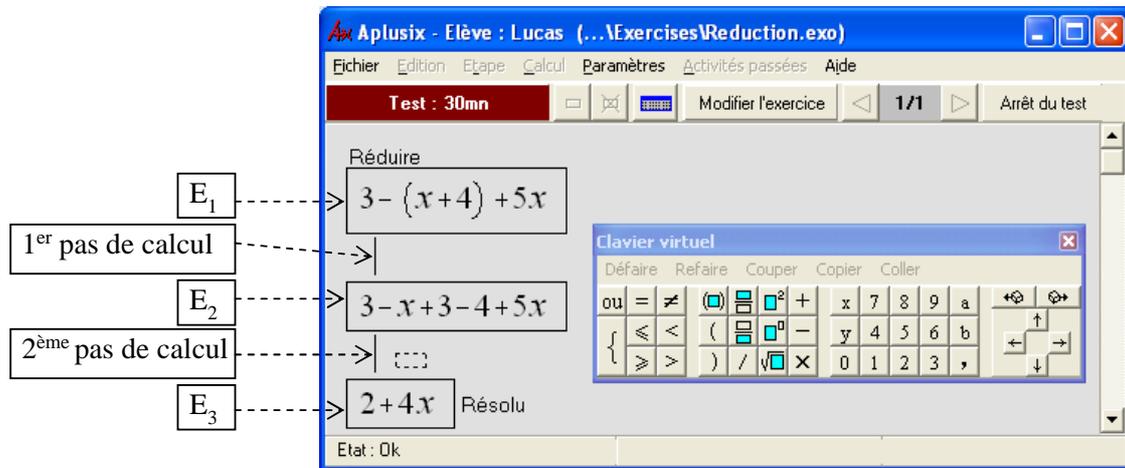


FIGURE 2.5 – Copie d’écran d’un élève ayant effectué deux pas de calculs. Le premier comporte une transformation incorrecte et le second, trois transformations correctes : deux calculs numériques et une addition de monômes. L’activité est en mode « test », c’est-à-dire sans rétroaction et avec un temps qui peut être limité.

développer et réduire des expressions polynomiales, factoriser des expressions polynomiales, résoudre des équations, inéquations ou systèmes. Dans chaque situation, une expression et une consigne sont présentées à l’élève. L’élève peut alors dupliquer l’expression et la modifier en conséquence. Comme dans le cadre papier-crayon, l’élève est libre de produire autant de pas de calcul qu’il le souhaite, un « pas de calcul » étant la transformation d’une expression E_i en une autre, $E_i + 1$, cf. figure 2.5. Son pas de calcul est correct si l’équivalence des deux expressions est conservée et erroné si elle ne l’est pas.

Les feedback. APLUSIX n’accepte de traiter que des expressions bien-formées mathématiquement. C’est pourquoi, lorsque des arguments manquent par rapport à l’arité de l’opérateur, le logiciel le représente par un point d’interrogation. Par exemple, sur la quatrième expression de la figure 2.6, l’opérateur d’addition demande à avoir un argument de part et d’autre du signe « + ». Ceci peut avoir un impact sur le comportement de l’élève : c’est une forme de rétroaction qui permet de signifier à l’élève qu’il n’a pas terminé. D’autant plus que le logiciel refuse la création d’une nouvelle étape tant que l’expression de l’étape en cours n’est pas bien-formée.

Un deuxième type de rétroaction existe : celui de la vérification de l’équivalence. Les représentations internes des expressions algébriques sont des arbres ; ceci permettant de mettre une sémantique des expressions. Elle permet de vérifier si deux expressions sont sémantiquement équivalentes. Le logiciel peut renvoyer cette information à l’écran. Ainsi, sur la figure 2.6, apparaît le signe « = » entre la première et la deuxième expression et le signe « ≠ » de couleur rouge entre la deuxième et troisième expression. Cette rétroaction est paramétrable : l’enseignant peut demander à ce que toutes les activités se fassent sans vérification, avec un nombre limité de vérification, à la demande de l’élève ou encore de manière permanente. Deux types de mode d’activités existent : le mode « entraînement » et le mode « test ». Dans ce dernier mode, la vérification n’est pas possible, permettant ainsi de s’approcher encore plus du cadre papier-crayon. L’information d’une expression mal-formée apparaît aussi à l’écran en fonction de ce paramétrage. L’information est notée dans ce cas en couleur bleu, comme dans la figure 2.6. Une dernière information peut être fournie à l’élève : l’auto-correction. Elle permet à l’élève de

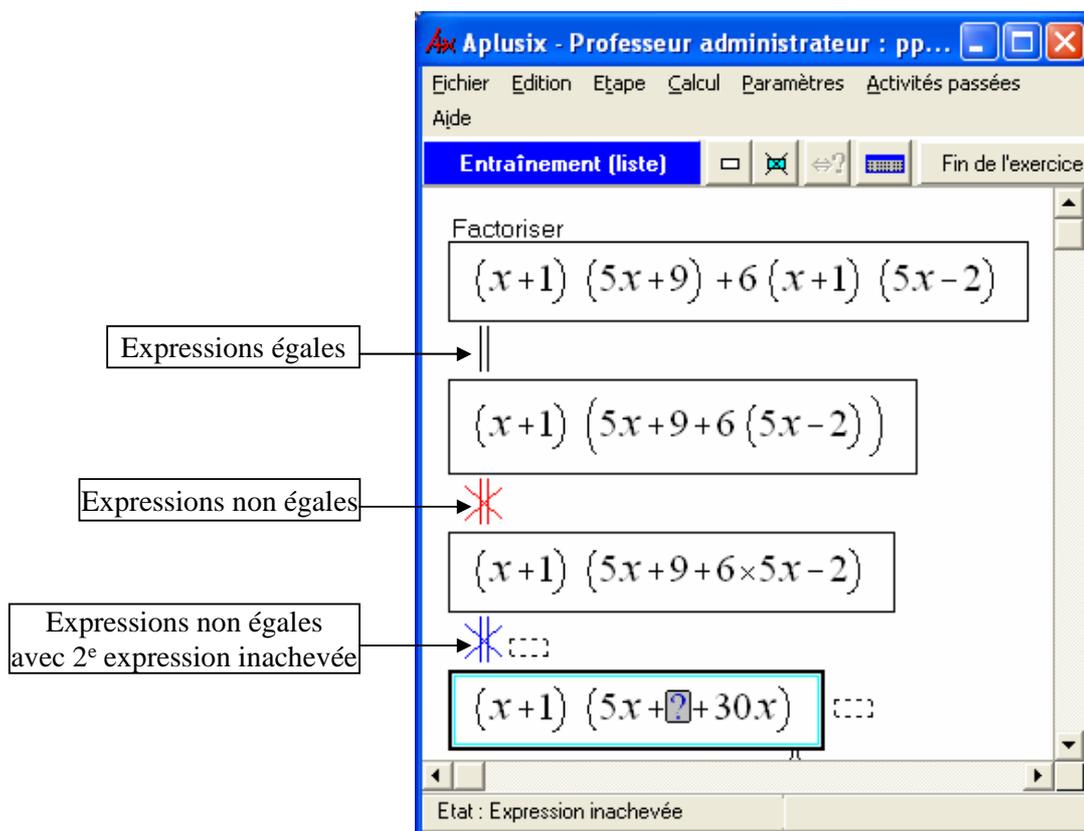


FIGURE 2.6 – Copie d'écran d'un élève ayant effectué trois pas de calcul. L'activité est en mode « rétroaction » : l'équivalence ou la non-équivalence est indiquée à l'élève à l'aide d'un symbole vertical d'égalité, barré ou non. Lorsqu'il est barré et de couleur bleue, cela signifie que l'expression est mathématiquement mal-formée.

revoir son travail (l'ensemble des expressions qu'il a validées) avec, cette fois-ci, la présence systématique de la vérification de l'équivalence.

Les biais qui peuvent influencer les interprétations. Outre la vérification de l'équivalence, rétroaction qui est paramétrable, l'outil du copier-coller peut influencer de manière conséquente sur la production des élèves : Le copier-coller fonctionne comme dans un éditeur de texte évolué tout en respectant la structure mathématique des expressions. Seules les sous-expressions peuvent être sélectionnées. Ainsi, dans l'expression $7x + 2$, l'écriture $7x+$ ne peut pas être sélectionnée. Par contre, les sous-expressions 7 , $7x$ ou $7x + 2$ peuvent l'être. Le déplacement conserve aussi la structure de l'arbre sous-jacent : dans l'expression $x - 3 = x(x + 1)$, si la sous-expression x dans $x(x + 1)$ est sélectionnée et déposée à la droite du -3 , c'est alors l'expression $x - 3 + x = (x + 1)$ qui apparaît.

Dans le même genre d'idées, supprimer des objets modifie automatiquement la structure de l'expression. Ceci peut avoir une incidence sur les productions des élèves. Par exemple, la suppression de la lettre b dans l'expression $ab^2 + cb$ produit $a^2 + c$; l'élève peut ne pas prendre conscience que le carré s'est accolé à la lettre a . De même, la suppression de la parenthèse de droite dans $4(3 + x)$ produit l'expression $43 + x$; l'élève ne pense pas nécessairement à ajouter alors le signe \times entre le chiffre 4 et 3.

Enfin, lorsqu'une nouvelle étape est demandée, l'étape peut être soit vide soit une duplication de l'expression précédente. Ceci peut grandement influencer sur le comportement de l'élève. En effet, s'il duplique l'expression précédente, il modifiera alors une expression déjà écrite. Il aura alors d'autant plus tendance à être confronté aux problèmes soulevés ci-dessus à propos de la suppression d'arguments.

Les deux actions automatiques du copier-coller et duplication sont paramétrables. En les refusant, cela permet de rester proche du papier-crayon, comme il est parfois souhaité dans les expérimentations.

Les outils de visualisation des traces. Le magnétophone est un outil d'analyse manuelle des productions d'élèves tant pour l'élève, l'enseignant ou le chercheur. Il permet de rejouer intégralement la résolution d'un exercice par un élève : l'ensemble des microactions ayant été enregistrées¹⁰, la magnétophone permet d'accéder à une partie de la sphère privée de l'élève : ses hésitations, ses corrections, le temps qu'il met, etc. Le magnétophone, figure 2.7 rejoue les actions soit en continu soit avec arrêts, avec un tempo proportionnel à celui mis par l'élève ou constant, fixé par le lecteur.

Un dernier outil est accessible dans ce logiciel : les données statistiques sur la production

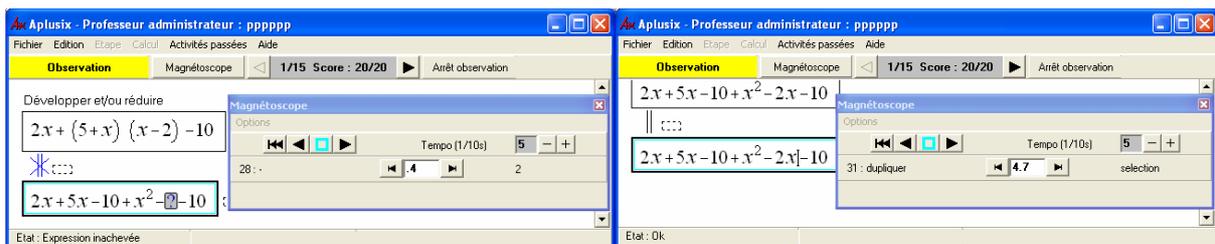


FIGURE 2.7 – Suivi d'un élève : le magnétophone.

de l'élève [Chaachoua et al., 2007b]. Après sélection de la population concernée (délimitée par l'espace temporel et les étudiants), il est possible d'afficher les informations suivantes, qui sont obtenues par une analyse statistique sommaire des traces :

- Nombre d'exercices traités (total, moyenne ou écart type)
- Nombre d'exercices bien résolus (idem) (cf. figure 2.8)
- Nombre de calculs erronés (idem)
- Score (idem)
- Temps passé (idem).

L'originalité d'Aplusix. Nombreux sont les logiciels qui demande à l'apprenant de choisir parmi une liste d'actions proposées et effectuent eux-mêmes la transformation, comme T-ALGEBRA ou les logiciels qui ne permettent qu'un pas de calcul à la fois, comme COGNITIVE TUTOR. Certes, cette dernière limitation offre la possibilité de disposer d'une description des connaissances relativement fiable puisque restreinte, par exemple par la technique du model-tracing [Corbett and Anderson, 1995]. Cependant, la restriction demandée par ces systèmes oblige à s'éloigner de la réelle complexité d'un processus mental, capable d'appliquer plusieurs transformations en un seul pas de calcul. Ainsi, cette limite empêche, peut-être, certaines connaissances (correctes, partielles ou erronées) d'apparaître. En revanche, le logiciel APLUSIX laissant

10. Les protocoles, ensemble des informations enregistrées par le logiciel seront présentés en section 3.2.3. Des exemples sont visibles en annexes D.1.

l'élève libre de ses actions, offre un cadre proche du papier-crayon, dénaturant peu le travail effectué par l'élève.

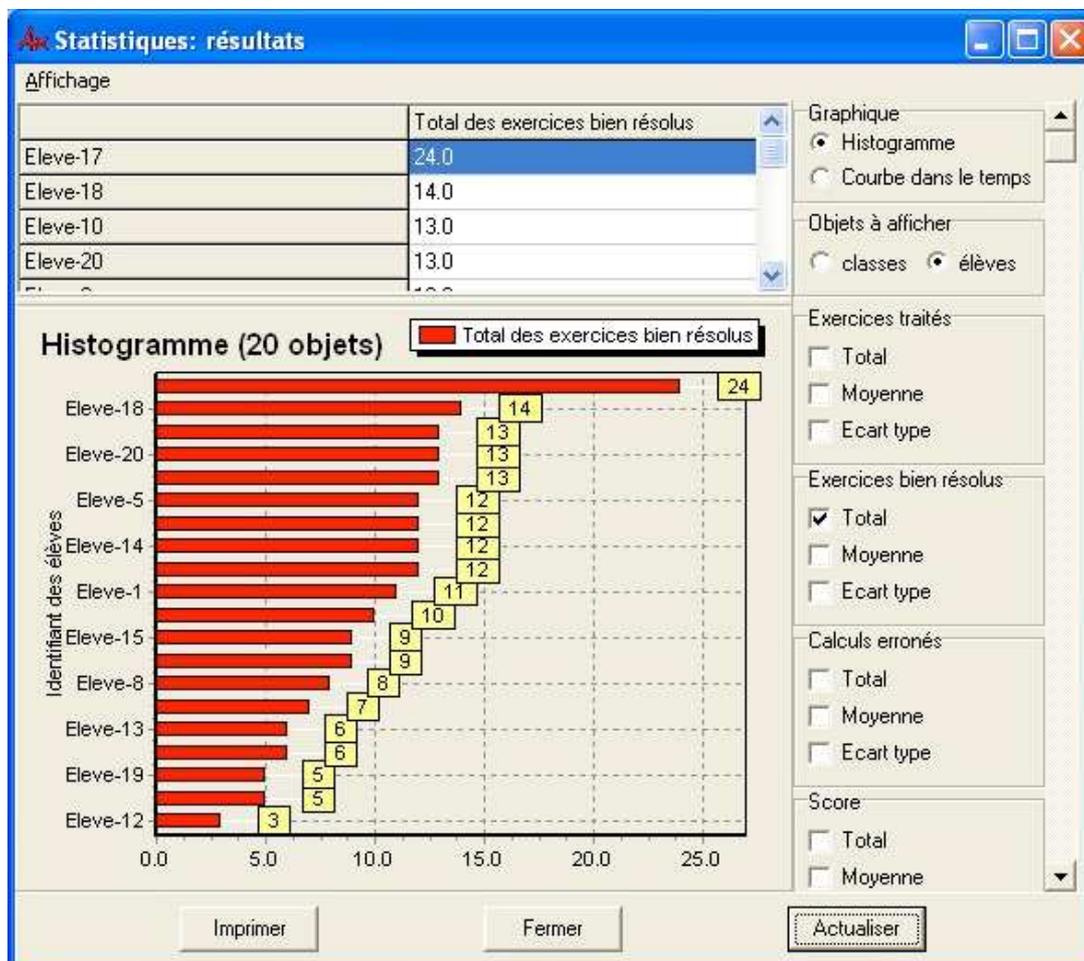


FIGURE 2.8 – Suivi de 10 élèves anonymés : les statistiques sur le total d'exercices bien résolus.

2.3 Les Modules d'apprenant : un problème de fidélité, d'utilité et de faisabilité

Depuis la création des didacticiels, certaines pistes ont été empruntées puis abandonnées. Un des textes ayant eu une forte répercussion dans la communauté est celui de [Self, 1990a]. Dans cet article, l'auteur souhaite répondre aux critiques énoncées dans la revue *Artificial Intelligence and Education* sur la contingence de la construction de modèle d'élèves au sein des ITS :

*« Detailed user models do not necessarily enhance the capability of an intelligent tutoring system... good teaching can do without a detailed user model [...] it is debatable whether the cost of constructing very detailed, complex user models that are runnable and have to be maintained all the time is worthwhile in terms of the gain in teaching efficiency. »*¹¹

11. Les modèles détaillés d'utilisateur n'améliorent pas nécessairement les capacités d'un ITS... De bons ensei-

Self ne répond par directement à la question de l'intérêt puisqu'il pose comme hypothèse que « *any intelligent*¹² *tutoring system needs a student model* »¹³. En revanche, il associe l'adjectif « intractable » à la construction d'un modèle d'apprenant et soulève aussi la question de la granularité du diagnostic et de l'intérêt de la « haute fidélité » d'un modèle : « *to promote student reflection and to foster collaborative learning it would not be necessary to develop the high-fidelity student models needed for remediation* »¹⁴.

Ce sont ces trois difficultés de faisabilité, de fidélité et d'intérêt que nous allons décrire dans les sections suivantes.

2.3.1 De la faisabilité

Comme Self le reconnaît lui-même dans un article ultérieur [Self, 1999], le titre malheureux, « Bypassing the intractable problem of student modelling », de son article de 1990 [Self, 1990a] eut pour effet d'animer les fervents détracteurs de la construction de modèles d'apprenant qui s'étaient probablement contentés de ne lire que le titre. Self ne niait certes pas les difficultés liées à la conception d'un modèle d'apprenant. Il listait même les obstacles pratiques et théoriques d'une telle entreprise, mais il préconisait aussi des lignes de conduite à tenir pour dépasser ces inconvénients. Pour dépasser la difficulté de réaliser les exigeants objectifs des premiers concepteurs optimistes des années 70, Self recommande le dialogue direct avec l'élève pour lever d'éventuelles ambiguïtés, le diagnostic uniquement de l'accessible et du certain et surtout l'anticipation des actions tutorielles : anticiper la réalisation du modèle par une réflexion didactique pour orienter le diagnostic vers ce qui est réellement nécessaire à modéliser. Cette suggestion rejoint d'ailleurs nos conclusions de la section 2.2.3 ou celles de [Van Lehn, 1988, p75]. Se pose en effet la question de déterminer le but de la construction du modèle, de savoir quelles relations entretiennent le cadre théorique en amont de la conception, le modèle de l'élève et la conception du logiciel en question. [Sison and Shimura, 1998] remarque aussi que les modèles d'apprenant peuvent consister parfois en une classification globale de l'élève avec quelques diagnostics très locaux et précis. Ce qui évite de construire des diagnostics très fidèles, demandant un travail long et parfois inutile.

Toutes ces suggestions ont été mises en application : l'élève est restreint dans ses possibilités de réponses dans les COGNITIVE TUTORS, il est amené à préciser ce qu'il est en train de faire dans T-ALGEBRA ; dans le logiciel ASSERT [Baffes and Mooney, 1996] les conceptions des élèves en programmation ne modélisent pas directement les programmes que les élèves écrivent mais sont générées en étudiant et en classant les représentations vectorielles de ces programmes ; quant au logiciel MEDD de [Sison et al., 1998], il adapte la granularité du diagnostic à l'utilisation qui en est faite : fournir des conseils, présenter des programmes où l'élève doit détecter une erreur ou encore proposer un nouvel exercice à l'élève. Remarquons, enfin, que les impossibilités des années 90 ne sont plus forcément d'actualité : les techniques ont évolué, les temps de calcul sont raccourcis.

gnements peuvent se passer de modèle détaillé d'utilisateur. Il est discutable de savoir si le coût d'une construction de modèles très détaillés, complexes, computationnels et devant être entretenus constamment vaut la peine en termes d'efficacité d'enseignement. [TA]

12. En italique dans le texte d'origine.

13. Un modèle d'élève est nécessaire à n'importe quel tuteur *intelligent*. [TA]

14. Pour favoriser la réflexion de l'élève et encourager l'apprentissage collaboratif, il ne serait pas nécessaire de développer des modèles de haute fidélité utiles dans le cadre d'une remédiation. [TA]

2.3.2 De la bonne granularité du modèle et de la fidélité à la réalité

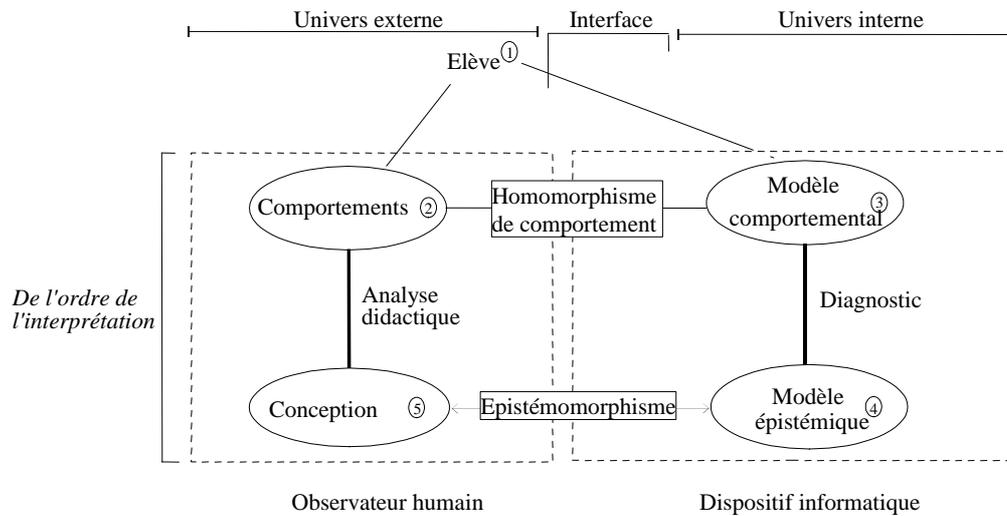
Problèmes de faisabilité mis à part, la fidélité cognitive d'un modèle à son original est essentielle même si modéliser est nécessairement lié à une perte d'information. Au même titre qu'il y a un décalage entre le modèle proposé par le didacticien et les réels comportements de l'élève qu'il modélise, il existe un écart entre le modèle implémenté et la réalité. Mais peut-être ce dernier écart est-il plus grand encore de part les contraintes informatiques et la superposition des interprétations. Expliquons ce que nous entendons par là, en reprenant le schéma 2.9 proposé par Balacheff dans [Balacheff, 1994a]. A l'extérieur se tient l'élève avec toute sa complexité. Il a des comportements qui peuvent être modélisés par deux types d'agents : le dispositif informatique, d'une part, constitué d'une interface et d'un univers interne, le didacticien, d'autre part, dans le monde extérieur au dispositif informatique. Le dispositif informatique modélise et réorganise les comportements qu'il est capable d'enregistrer et construit, par une fonction diagnostique, un modèle d'ordre épistémique.

La question de la fidélité est double : elle se pose entre les réels comportements de l'élève et le modèle comportemental interne au logiciel, mais aussi et surtout, entre le modèle épistémique et les conceptions que le didacticien extérieur a « perçues » chez l'élève. Cette deuxième fidélité est appelée par Balacheff un « épistémomorphisme ». L'épistémomorphisme est la relation qu'entretient le modèle épistémique proposé par le logiciel avec celui du didacticien. Les sources de ces deux modèles sont des représentations des comportements réels : le modèle comportemental produit par la machine, d'une part, et les observables recueillis par le didacticien, d'autre part (copies, brouillon, interview, etc). Les modèles dépendent donc de la granularité des observables récoltés. Cet épistémomorphisme est d'autant plus complexe que le modèle implémenté final se base lui-même, et ce, de plus en plus, sur le propre modèle du didacticien. Nous avons ajouté délibérément une flèche entre les deux modèles pour rendre compte de cette interaction. En effet, les concepteurs d'EIAH, nous l'avons dit, se tournent de plus en plus vers le travail des didacticiens en cherchant à implanter à la fois leurs théories mais aussi leur modèle, leur vision de l'apprenant. Il y a donc accumulation de modélisation et de pertes inévitables d'informations. Balacheff distingue trois univers relatifs à un dispositif informatique : l'univers interne de la machine, l'interface comme lieu de communication entre l'utilisateur et le dispositif informatique et enfin l'univers externe, dans lequel on trouve l'utilisateur « et où lui sont éventuellement accessibles d'autres dispositifs » [Balacheff, 1994b, p. 365].

Il n'y a, a priori, pas de réponse à la question de la granularité des observables et des modèles ni à celle de la fidélité qui en découle, comme l'avait fait remarquer Balacheff dans une discussion informelle. Il est probablement impossible de rendre compte de ce qui se passe dans le cerveau, et un bilan de performance du type réussite-échec sur des exercices est insuffisant.

Nous faisons l'hypothèse que seule l'analyse didactique des tâches pertinentes pour l'apprentissage, et judicieuses pour la modélisation, permet d'ajuster le curseur de la fidélité.

Comme nombre d'auteurs le préconisent aujourd'hui, il faut poser le problème de la modélisation en terme « épistémique ». Si l'on arrive à choisir quels sont les observables à conserver, les comportements pertinents de l'élève et quelles en sont les raisons, alors la finesse du modèle en découlera. Quant à la fidélité, elle « aura peu d'importance au regard de la pertinence pour le calcul des interactions » [discussion informelle avec Balacheff].



Les conceptions (5) sont décrites manuellement par un didacticien au vu du comportement de l'élève dans le monde extérieur.
 Le modèle comportemental (3) est une première interprétation informatique des événements (2).
 Le diagnostic automatique, fondé sur le modèle comportemental, fournit un modèle épistémique (4).

FIGURE 2.9 – La double problématique de la fidélité : l'homomorphisme de comportement et l'épistémomorphisme.

2.3.3 De l'utilité

Van Lehn [Van Lehn, 1988], puis Self [Self, 1990a], nous l'avons dit, affirment que la construction du modèle repose sur l'utilisation qui en sera faite : « *This is not really a question of how to do student modeling but, rather, when to do what kinds of student modeling* » [Van Lehn, 1988]. Or, à quoi peut bien servir un modèle d'apprenant ? Est-il efficace ? Est-il moins efficace qu'un quelconque enseignement, comme l'affirme Sleeman [Sleeman et al., 1989] ? Il y a là deux types de questions :

Quelles utilisations peuvent être faites d'un modèle ?
 Et sont-elles efficaces en terme d'apprentissage ?

Self [Self, 1988] distingue six utilisations possibles d'un modèle de l'apprenant au sein d'un logiciel éducatif :

- Éliminer de connaissances erronées identifiées,
- Choisir des activités,
- Gérer le curriculum,
- Lever les ambiguïtés du modèle d'élève,
- Prévoir le comportement de l'élève,
- Décrire l'état des connaissances de l'élève.

En dénonçant l'insuffisance de classer les modèles d'élève en fonction de « l'output » qui est trop variable, Van Lehn [Van Lehn, 1988] lui aussi donne des utilisations possibles des modèles : faire avancer l'élève dans un nouveau thème, fournir des conseils judicieux aux moments opportuns, générer des énoncés adéquats ou encore fournir des explications adaptées au niveau de l'élève.

Self comme Van Lehn ne s'intéressent à l'utilisation d'un modèle d'apprenant que dans la perspective d'un tuteur artificiel, autrement dit, dans un but d'apprentissage. Le modèle d'élève

serait pertinent pour améliorer l'acquisition chez l'élève des connaissances visées. Or, Sleeman met en doute un tel impact [Sleeman et al., 1989], sur lequel nous reviendrons longuement en début du chapitre 4 mais c'est oublié tout l'intérêt d'un tel modèle pour le didacticien lui-même : avoir un état de l'art des connaissances des élèves à un moment donné dans un but avant tout descriptif et n'aboutissant pas nécessairement à des prises de décisions didactiques. En explicitant les hypothèses sous-jacentes à la construction des modèles d'élèves, Dillenbourg note lui aussi qu'un modèle d'élève peut avoir d'autres fins que des prises de décisions didactiques :

« Learner modelling is related to some idea of what tutoring is: ITSs need diagnostics for taking decisions, which means that it is the system which takes at least some of the didactic decisions, and not the learner. (A possible alternative justification for learner modelling is that it enables the ITS to show the learner his own knowledge, misconceptions, etc.) » [Dillenbourg and Self, 1992, p. 7]

2.4 Conclusion sur les EIAH

Le module d'apprenant permet de rendre compte des connaissances de l'utilisateur-apprenant. L'état descriptif obtenu est appelé modèle d'élève. Les difficultés rencontrées pour construire un tel modèle un tant soit peu sophistiqué sont multiples : recueillir des observables, sélectionner et agréger les plus pertinents, construire un algorithme de diagnostic, . . . D'aucuns affirment que cela n'est pas faisable ; d'autres disent même que cela n'est pas nécessaire pour qu'un tuteur artificiel prenne des décisions adaptées à l'utilisateur. Cependant, une idée commune émerge : la nécessité de s'appuyer sur des modèles didactiques.

L'état de l'art mené sur les classifications habituelles de tels modules (chronologiques avec les EIAO puis EIAH ou conceptuelles avec les modules overlay ou différentiels) a permis de faire ressortir onze critères pertinents pour une description discriminante des modules des EIAH, qui peuvent être regroupés en quatre composantes : les fondements à l'origine de la construction du module, le type d'observables, l'algorithme de diagnostic et le modèle lui-même. L'évaluation de ces critères pour dix-huit EIAH a permis de distinguer trois classes. Une première classe avec les EIAH qui laissent une autonomie importante à l'élève avec une large étendue des activités tant au niveau scolaire que du domaine mathématique abordé mais proposant un modèle d'élève faible voire inexistant. Une seconde classe où les EIAH fournissent un modèle d'élève comportemental grâce à des diagnostics hors-session et en-ligne sur un champ étroit de connaissances. Enfin, une troisième classe comportant des EIAH qui produisent un modèle d'élève complexe au détriment de l'autonomie de l'élève. Forcer le regroupement des EIAH en seulement deux classes permet de faire ressortir, là aussi, l'idée qu'une théorie de l'enseignement, une réflexion didactique est nécessaire à la construction d'un modèle d'élève épistémique, au détriment bien souvent, il est vrai, d'une liberté des réponses de l'élève.

Nous utilisons le logiciel APLUSIX pour recueillir les observables de nos travaux. Une des particularités de ce logiciel est qu'il laisse justement une grande liberté à l'élève : il ne lui demande de préciser ni les règles utilisées ni les sous-expressions transformées. Ce qui contribuerait à ranger ce logiciel dans la première classe des EIAH. Pourtant, cette thèse souhaite permettre de compléter ce logiciel avec un module d'élève qui le ferait passer de la première classe à la troisième tout en laissant une grande autonomie à l'élève dans le choix de ses réponses.

Chapitre 3

Modèle local de l'activité transformationnelle de l'élève

Résumé. Des règles algébriques sont listées à partir d'une lecture de productions d'élèves enregistrées dans le logiciel APLUSIX et de quelques travaux classiques portant sur la notion d'erreur et de règles. Elles sont ensuite implémentées dans le logiciel ANAÏS. Trois algorithmes sont écrits pour permettre d'associer à un pas de calcul effectué au sein d'APLUSIX, des listes de règles reproduisant le pas. La confrontation des diagnostics ainsi produits avec une analyse manuelle permet de sélectionner un des trois algorithmes : l'algorithme heuristique probabiliste. Il se révèle satisfaisant tant en temps qu'en qualité des diagnostics. ANAÏS est ainsi lancé sur plusieurs dizaine de milliers de pas de calcul enregistrés en mode « test » dans APLUSIX, provenant d'expérimentations conduites dans des contextes très variés. Certaines règles erronées ne sont jamais diagnostiquées, d'autres de nombreuses fois. L'information de savoir si ce nombre est pertinent au vu du nombre de fois où elles auraient pu s'appliquer devient, dès lors, intéressant et sera à l'origine du chapitre prochain.

La notion de règle est présente partout : dans les traitements mais aussi dans la constitution de l'écriture et dans l'usage. Elles peuvent toutes être représentées sous la forme (1.2) d'une implication formelle : une source ou prémisse et un résultat ou conclusion. Pour être appliquées, il faut non seulement les connaître par cœur mais aussi connaître leurs conditions d'application et leur portée, savoir comment les appliquer et à quelles expressions les appliquer ainsi que, sur un plan stratégique, connaître leur pertinence d'application. Ce que sait que « connaître une règle » a été exposé dans le chapitre 1 et nous n'y reviendrons pas. Retenons que la règle de transformation est la clef de la « métamorphose » d'une expression en une autre [Serfati, 2005].

Il nous a donc semblé judicieux de modéliser la transformation algébrique d'une expression algébrique par un élève comme l'application d'une règle ou de plusieurs règles. Lors d'interviews avec des élèves, l'idée que l'activité transformationnelle consiste uniquement en l'application de règles est prédominante. Aux questions « Comment sais-tu que ton résultat est correct ? », « Comment fais-tu pour passer d'une expression à une autre ? », nombreux sont les élèves qui ont répondu « par des règles, par des suites de calculs ». Le rapport de l'élève à la notion de règle se situe bien souvent dans l'aspect syntaxique de la règle et dans la volonté que l'élève a de trouver la « bonne » règle : celle qui satisfait l'enseignant. En cas d'erreur, l'élève pense que c'est seulement parce que l'enseignant préférerait une autre règle et non parce que sa transformation

erronée ne conserve pas la dénotation [Sackur et al., 1997, p. 48]. Les règles sont, pour les élèves, des actions sur les ostensifs sans lien avec les non-ostensifs qui pourtant sont seuls à permettre de valider leur réponse.

Mais quelles sont ces règles que les élèves semblent appliquer ? Sur quels types d'expressions les élèves font-ils le plus d'erreurs ? Jusqu'où va leur inventivité en la matière ? Et jusqu'où faut-il que nous prenions en compte ces erreurs ?

3.1 Des règles de transformation

3.1.1 Modélisation locale

Le modèle que nous avons choisi consiste en la représentation de ce que fait l'élève par une succession de règles algébriques. D'une part, il y a des règles correctes, qui permettent de remplacer des expressions par d'autres syntaxiquement différentes mais dont les dénotés sont les mêmes. Par exemple, la règle :

$$(a + b)^2 \rightarrow a^2 + 2ab + b^2.$$

D'autre part, il y a des règles erronées (ou incorrectes) qui permettent de remplacer des expressions par d'autres expressions, mais sans conservation du dénoté. Par exemple, la règle :

$$(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2.$$

Nous rejoignons Brun et al. lorsqu'il note que « le sujet n'est plus considéré comme un simple exécuteur de règles imposées de l'extérieur, mais comme se forgeant lui-même ses propres règles ; ces dernières peuvent diverger plus ou moins de celles proposées par l'enseignement. » [Brun et al., 1994]. Cependant, nous nous en distinguons peut-être en précisant que les règles, qu'elles soient correctes ou erronées, sont des *modélisations des observables*, transformations qu'effectue l'élève ; elles sont des interprétations des comportements locaux. Elles ne sont pas nécessairement ce que l'élève effectue consciemment alors que Brun et al. affirment qu'elles « résultent d'anticipations et d'inférences » [Ibid.]. Lorsque l'élève transforme $(3x+2)^2$ en $9x^2+4$, il est peut-être bien incapable d'énoncer une règle du type $(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$. De même l'élève qui commute deux termes n'est pas forcément capable d'exprimer la règle $a + b \rightarrow b + a$. Les règles que nous proposons sont des moyens de décrire voire de prédire les comportements des élèves et non de les expliquer, tout au moins à ce stade là de la thèse. Un travail supplémentaire est nécessaire pour atteindre le niveau d'état de connaissances des élèves et d'explication de leur comportement. Un tel travail sera proposé dans les chapitres 5 et 6. Le choix qui a été fait pour ce modèle réside en le rapport fort que les élèves ont avec la notion de règles qui a été dénoncé plus haut. Ils ont *l'impression* d'appliquer des règles même si ils ne sont pas capables de les expliciter et, dans le cas où ils y arriveraient, elles n'auraient probablement pas le niveau de généralité et de conceptualisation des nôtres. Notre modèle va donc consister en la recherche des suites d'applications de règles qui permettent non pas d'expliquer mais de produire la même transformation que l'élève a effectuée. Pour cela, nous mettons en place le vocabulaire précis suivant qui sera dorénavant utilisé :

Définitions.

Une *règle* est un mécanisme de transformation d'une expression A en une expression B , dont la dénotation n'est pas nécessairement conservée. En ce sens, l'opérateur de raisonnement

est « orienté », à la différence des identités habituelles du calcul algébrique, puisque B ne peut pas produire A , à moins qu'une nouvelle règle ne soit implantée.

Une *expression algébrique* (rappel de la section 1.1.2, p.17) est définie comme une construction finie obtenue à partir de la définition récursive suivante.

Un ensemble de symboles et d'opérateurs étant donné (par exemple, $\{+, -, \times, /, ', \sqrt{}, =, \neq, <, \leq, >, \geq, \text{and, or, not}\}$), ainsi qu'un ensemble de symboles d'objets terminaux (par exemple, les entiers, les valeurs logiques Vrai/faux) et un ensemble de symboles de variables (par exemple, $\{x, y, z\}$), une expression algébrique est :

- un symbole d'objet terminal
- ou un symbole de variable
- ou un symbole d'opérateur appliqué à des arguments qui sont des expressions algébriques d'arité et de types corrects.

Un *pas de calcul* est la transformation qu'effectue l'élève explicitement (publiquement) d'une expression en une autre, cf figure 3.1. Cette transformation peut être faite sur papier crayon ou via le logiciel APLUSIX. Si l'élève efface une partie de l'expression et réécrit une autre expression, c'est l'expression définitive ou validée qui est prise en considération. Plus généralement, on parlera de *transformation* pour exprimer la métamorphose d'une expression en une autre, indépendamment du contexte d'apparition.

L'*expression mère* d'un pas de calcul est l'expression initiale d'un pas de calcul. Elle n'est pas nécessairement l'expression donnée dans l'énoncé de l'exercice.

L'*expression finale* est l'expression produite par l'élève lors d'un pas de calcul. L'expression finale n'est pas nécessairement la dernière expression de l'exercice.

Un *diagnostic d'un pas de calcul* est une suite d'applications de règles d'une bibliothèque de règles permettant de passer de l'expression mère à l'expression finale du pas de calcul. Pour un même pas de calcul, plusieurs diagnostics sont possibles. Si aucun diagnostic n'est trouvé (que ce soit de manière informatique ou manuelle), on dira que le processus de diagnostics est en *échec*.

Notations.

Une *règle* qui permet de passer de A à B est notée : $A \rightarrow B^1$. Cette notation provient de la théorie des règles de réécriture [Dershowitz and Jouannaud, 1990].

En cas d'ambiguïté entre un *opérateur* en tant que procédure et un opérateur en tant que structure, nous utiliserons l'opérateur entouré d'un rond pour signifier que l'opérateur est effectué. Ainsi $a + b$ signifie que l'on regarde la somme de deux expressions, a et b , tandis que $a \oplus b$ est le résultat du calcul de la somme $a + b$. La règle $a + b \rightarrow a \oplus b$ exprime le calcul de la somme de a et de b . C'est cette règle qui s'applique pour transformer par exemple $2 + 3$ en 5.

Notre modèle est local dans le sens suivant : il consiste à associer à l'activité d'un élève une séquence de règles, *indépendamment de l'ordre de l'application de ces règles et indépendamment de l'exercice dans lequel les règles ont été appliquées*. En conséquence, il n'y a pas de distinction entre l'élève qui utilise une règle de distributivité dans un premier pas de calcul et celui qui

1. Et non pas $A \Rightarrow B$, notation propre aux règles correctes. Pour être rigoureux, il faudrait, d'ailleurs, noter la règle de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, A(x) \rightarrow B(x).$$

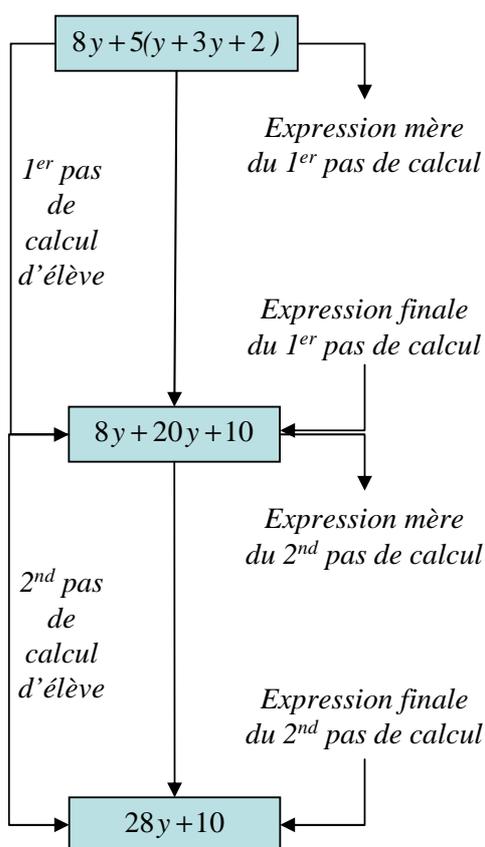


FIGURE 3.1 – Dans cet exemple, l'élève a effectué deux pas de calcul. Il y a donc 2 expressions mères et 2 expressions finales. Pour chaque pas de calcul, il peut y avoir un ou plusieurs diagnostics. Par exemple, le premier pas de calcul peut être diagnostiqué comme $a(b + c + d) \rightarrow a \otimes b + a \otimes c + a \otimes d$, suivi de $a + b \rightarrow a \oplus b$ ou par $ax + bx \rightarrow (a \oplus b)x$ suivi de $a(b + c) \rightarrow a \otimes b + a \otimes c$.

utilise la même règle dans un dernier pas de calcul. De plus, cela signifie que le diagnostic d'un exercice est le même que l'exercice ait été résolu par un élève en deux pas de calculs ou en un seul, du moment que la réponse finale est la même. Par exemple, à l'énoncé « Développer et réduire $(x + 3)^2 + 5x^2$ », que l'élève ait répondu :

$$\begin{array}{c} (x + 3)^2 + 5x^2 \\ \downarrow \\ x^2 + 3^2 + 5x^2 \\ \downarrow \\ 6x^2 + 9 \end{array}$$

ou que l'élève ait répondu :

$$\begin{array}{c} (x + 3)^2 + 5x^2 \\ \downarrow \\ 6x^2 + 9, \end{array}$$

le diagnostic n'en sera pas changé² car, que ce soit pour le premier ou le second élève, la liste des règles sera la même : $(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$, $ax^n + bx^n \rightarrow (a \oplus b)x^n$ et $a^n \rightarrow a^{\textcircled{n}}$.

À cette indépendance des règles, nous ajoutons des principes fondamentaux qui sont relativement fréquents dans les tuteurs (cf. [Py, 2001]). Ils permettent de marquer une préférence sur les diagnostics en terme de qualité :

Principes généraux du diagnostic : (HT3)

Préférer un diagnostic court à un diagnostic long. Autrement dit, entre deux diagnostics du même pas de calcul, le diagnostic *ayant le moins de règles* sera privilégié.

Préférer une erreur unique à une combinaison d'erreurs. Ce principe rejoint le précédent : la qualité du diagnostic dépend de sa longueur.

Préférer une erreur spécifique à une erreur générale. Ceci aura une influence sur les coefficients associés aux règles, page 117.

Supposer que la réponse correcte visée est la plus proche possible de la réponse incorrecte fournie. Prendre l'hypothèse inverse amènerait à reconnaître, dans toute proposition correcte, la combinaison de plusieurs erreurs s'annulant mutuellement.

3.1.2 Méthodologie

Restriction du domaine

Le domaine du calcul littéral, quoique restreint aux transformations de polynômes et ne prenant pas en compte les équations (cf. le chapitre 1, page 50), est encore très large. D'une

2. Cette information d'ordre sur les règles, d'attachement des règles à un pas de calcul pourrait être prise en compte et son automatisation ne serait probablement pas très compliquée. Toutefois, elle ne serait utile que dans une prise en compte des stratégies de l'élève. Par exemple, si l'on souhaite savoir si l'élève commence par développer une expression avant de chercher à la factoriser ou, si l'élève, pour résoudre une équation, regroupe les x d'un côté avant de réduire les membres.

part, le processus d'automatisation est lent et demande un va-et-vient incessant entre le codage et la lecture des résultats. Rétrécir le domaine permet de diminuer le nombre de règles à coder et d'obtenir plus rapidement des résultats, résultats certes plus restreints mais dont la qualité est inchangée. D'autre part, dans le système scolaire français, il est parfois délicat de convaincre les enseignants de prendre du temps pour des expérimentations au sein de leurs classes. En limitant le champ de recherche, cela permet aussi de construire des expérimentations moins longues.

Ce qui nous intéresse est, avant tout, le rapport de l'élève à l'objet *polynôme*. Une transformation portant sur un polynôme à coefficients fractionnaires provoquera, certainement, des erreurs différentes d'une transformation sur un polynôme à coefficients entiers. Cependant, bien souvent, ces erreurs se retrouvent dans le rapport de l'élève à l'objet *fraction* et ne sont pas intimement liées à l'objet polynôme. Par exemple, l'erreur classique $\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x \rightarrow \frac{3}{7}x$ est indépendante de la notion de polynôme.

Nous avons fait le choix de ne travailler que sur les *polynômes à coefficients entiers*. Les entiers sont depuis bien longtemps travaillés par les élèves alors que les décimaux n'apparaissent qu'en fin de primaire et les irrationnels en fin de collège.

Utilisation d'Aplusix

Automatiser notre modèle permet de traiter de grandes bases de données, élément essentiel pour une recherche quantitative des transformations algébriques erronées. Le logiciel APLUSIX permet d'enregistrer les actions des élèves-utilisateurs. Il laisse ces derniers libres de toutes transformations (cf. section 2.2.3). La représentation interne sous forme d'arbres des objets représentés permet d'avoir une reconnaissance sémantique des expressions. APLUSIX est ainsi capable de détecter des sous-expressions d'expressions : reconnaître la sous-expression $3 + x$ dans l'expression $4(3 + x)$ et ignorer l'écriture $4(3)$. Ceci permet d'apparier des sous-expressions de l'expression mère E d'un pas de calcul $E \rightarrow F$ à l'expression A d'une règle $A \rightarrow B$. Nous y reviendrons plus loin. Cette représentation interne permet donc la construction de modèles exécutable avec un moteur d'interprétation des règles.

À un pas de calcul d'élève effectué dans APLUSIX, nous souhaitons associer, de manière automatique, une séquence de règles de transformation dont les applications successives permettent de reproduire le pas de l'élève, cf. figure 3.2. Nous ne souhaitons diagnostiquer que les transformations d'expressions bien formées (syntaxiquement correctes) : si l'élève tape des expressions du type « $3 + x \times$ », APLUSIX le détecte et le traitement automatique ne sera pas effectué.

Processus

Une modélisation, dont l'objectif est de rendre compte de manière interprétable d'une masse d'informations suit, en général, un même schéma : recueillir des données, les filtrer afin d'en supprimer le bruit (données accessoires qui masquent l'essentiel), les compléter afin d'assurer une cohérence ; construire, ensuite, l'algorithme (qui peut consister en une équation du système) dans le but de répondre à la question à l'origine de la modélisation ; enfin, valider l'ensemble en confrontant, par exemple, la réponse à la réalité. Ce processus demande bien souvent des va-et-vient entre les résultats et les données, créant ainsi une spirale qui tend vers un équilibre satisfaisant. La mise en place et la réalisation de cette spirale ont été très longues dans cette thèse.

Des protocoles enregistrés dans APLUSIX issus de différentes expérimentations ont permis de construire une première trame de règles erronées. Un processus automatique sommaire a permis

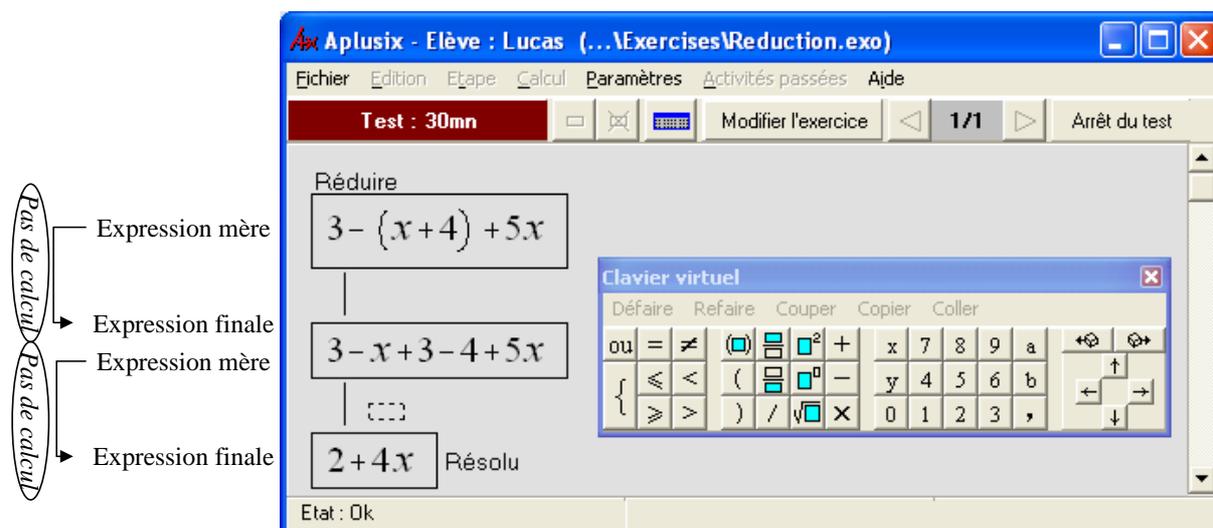


FIGURE 3.2 – Copie d'écran d'un élève ayant effectué deux pas de calculs. Le premier est une transformation erronée et le second est correct, consistué de deux calculs numériques et d'une addition de monômes.

rapidement de déceler les transformations qui n'obtenaient pas de diagnostic (l'algorithme étant en *échec*) ; une lecture attentive des résultats a validé et invalidé, à l'aide aussi du magnétoscope d'APLUSIX, les diagnostics en conservant ou modifiant les règles en conséquence, avant de relancer le processus. Il est donc bien difficile de décrire un processus circulaire de manière linéaire. Cependant, si l'on devait en retenir les grandes lignes, la modélisation locale a suivi le processus suivant (cf. figure 3.3) :

- L'élaboration d'une bibliothèque de règles de transformation grâce aux protocoles d'APLUSIX et à la littérature sur le sujet, section 3.1.3 ;
- L'automatisation d'un processus de diagnostics, qui associe à chaque pas de calcul une séquence de règles de la bibliothèque, section 3.2 ;
- L'analyse manuelle et didactique des diagnostics résultants, avec d'éventuelles modifications en conséquence sur les règles, section 3.3.3.

Les règles écrites à la main sont appelées « a priori ». Cependant, elles ne correspondent pas à une véritable analyse a priori dans le sens où elles n'ont pas été écrites a priori pour être confrontés à « la réalité ». Elles ont, au contraire, été écrites et complétées au fur et à mesure de la lecture des protocoles. Il n'y aura donc pas de rectification et modification de ces règles à la fin de ce chapitre. En revanche, il sera précisé leur nombre d'apparition au sein des protocoles étudiés et diagnostiqués automatiquement.

3.1.3 Liste des règles « a priori »

Identifier les transformations erronées à partir de protocoles d'élèves (cahiers d'élèves, exercices au sein d'APLUSIX...) n'est pas suffisant pour modéliser l'activité d'un élève générique en calcul algébrique. Prenons l'exemple suivant d'une transformation d'élève :

$$2x^2 - 3x^2 \rightarrow 5x^4. \quad (3.1)$$

Se pose d'abord la question de la pertinence de la modélisation d'une telle transformation :

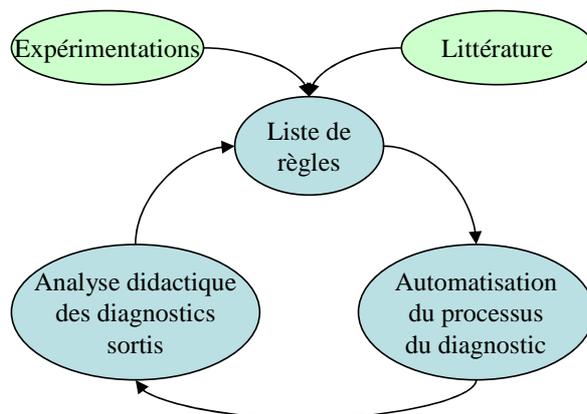


FIGURE 3.3 – Méthodologie de la modélisation locale de l'activité transformationnelle de l'élève : une spirale pour arriver à une liste stable de règles, un diagnostic automatique et des résultats satisfaisants.

faut-il chercher à modéliser cette transformation ? Est-elle suffisamment intéressante pour être prise en compte ? Quels sont les critères qui permettent de se décider : récurrence de l'erreur chez cet élève ou chez un ensemble d'élèves, présence de l'erreur dans la littérature tant elle est classique, etc. ?

Ensuite, se pose les questions relatives au type de modélisation :

quelle généralité de la modélisation faut-il atteindre ? Doit-on modéliser la transformation (3.1) sous la forme $ax^n + bx^n \rightarrow (a - b)x^{2n}$ ou sous la forme $ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n+p}$ voire même sous la forme $ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}$ avec Δ un opérateur ?

Il est évident que chaque transformation ne peut être prise en compte à la fois pour des raisons informatiques et pour des raisons didactiques. D'un point de vue informatique, les exigences sont nombreuses voire contradictoires : il faut obtenir un nombre d'objets à traiter qui évite l'explosion combinatoire, minimise le temps du diagnostic et optimise la recherche heuristique (section 3.2.4) mais tout en modélisant des transformations malheureusement sans grand intérêt didactique uniquement dans le but d'éviter de mauvais diagnostics (section 3.2.1). D'un point de vue didactique, nous l'avons noté dans l'introduction de cette thèse, il ne suffit pas de relever que la transformation n'est pas celle attendue pour lui attribuer le statut d'erreur. Il faut qu'elle réponde à des critères précis, avec un statut de reconnaissance de la part des enseignants quantitativement, d'une part (car on ne peut réagir sur tout) et qualitativement, d'autre part (car il faut pouvoir attribuer un sens à l'erreur pour pouvoir y remédier). Identifier n'est donc pas un simple synonyme de lister. Il faut sélectionner, justifier et modéliser. Nous nous sommes appuyés sur quatre moyens pour répondre à ces attentes qui seront détaillés dans les sections ultérieures :

- Les protocoles (p. 89). Des premières expérimentations ont été conduites avec une recherche d'exhaustivité des différents types d'expressions proposées à l'élève, dans le but de détecter le plus grand nombre d'erreurs. Il faut, ici, distinguer l'apparition d'une même erreur chez un même élève de l'apparition d'une même erreur dans un groupe d'élèves. Le travail

effectué pour ce chapitre consiste en la recherche d'erreurs récurrentes indépendamment de l'auteur de l'erreur et les expérimentations menées dans ce but ne cherchaient pas à confronter l'élève plusieurs fois à un même type de tâche. Nous verrons, dans les chapitres suivants, un second travail avec la prise en compte (plus délicate quoique primordiale) de l'activité de l'élève dans son individualité. Les expérimentations pour ce second travail demanderont une répétition du même type de tâches pour s'assurer la réitération des choix de transformations de l'élève.

- La recherche d'exhaustivité et la généralisation (p. 90). À partir de quelques protocoles, il faut aussi imaginer les autres erreurs possibles, en déclinant les transformations erronées observées. Il faut ensuite regrouper les règles erronées selon différents critères afin d'obtenir une règle plus générale qui les engendre.
- La littérature (p. 91). Elle propose parfois des listes non exhaustives de transformations « classiques » d'élèves. Elle permet de valider certaines règles, voire même des regroupements de règles.
- Les différentes interprétations (p. 89 et 91). Comme Brousseau le note, pour traiter une erreur, il est nécessaire de lui attribuer un statut et une origine [Brousseau, 2000, p. 14]. Certaines erreurs entravent le travail de modélisation par leur manque de pertinence : erreur d'« inattention » ou tout au moins « d'occasion », erreur de peu de conséquence sur l'apprentissage à venir ou non rattachable à des décisions didactiques, car, il faut bien le noter, le but d'une telle modélisation est de pouvoir à terme remédier aux erreurs révélées. L'idée de pouvoir mettre du sens à chacune des erreurs que nous décidions de conserver a donc guidé nos choix.

Des premiers protocoles.

Des premières expérimentations avaient été conduites dans le cadre du Master qui a précédé cette thèse [Croset, 2005] qui s'inscrivait dans le projet « Cognitique » de l'« École et sciences cognitives » [Nicaud, 2005]. Elles ont été utilisées pour la construction de la première trame de la bibliothèque de règles erronées. Le magnétoscope d'APLUSIX est, dans ce travail, essentiel. Il permet d'avoir accès à la sphère privée de l'élève, plus que ne le permettent les protocoles ou même le cadre papier/crayon : ce que l'élève accepte comme étape intermédiaire mais surtout ce qu'il efface, ce sur quoi il hésite sont autant d'éléments précieux qui apportent des précisions considérables quant aux modélisations des transformations.

Quelques interviews d'élèves, conduites plus tard (Chap. 4), ont aussi permis de valider ou de préciser nos hypothèses d'interprétation. Par exemple, le pas de calcul de factorisation $(7+x)(x+1) + (x+1) \rightarrow (x+1)(7+x)$ a été expliqué par son auteur de la manière suivante : le deuxième facteur est complété par « ce qui reste dans chaque terme, en enlevant le facteur commun ; [dans le premier terme,] il reste (7+x), [dans le second], rien », cf. Annexe F.1. Cette interview a validé a posteriori la règle de factorisation que l'on avait choisie d'associer à cette transformation : $ab + a \rightarrow a(b)$ et non une règle d'oubli du terme $x + 1$.

Par des va-et-vient réguliers entre ces trois représentations des connaissances des élèves (pas de calcul, brouillon et interview), la bibliothèque de règles a été établie. Étant donnée la lourdeur du travail manuel (plusieurs centaines d'heures), et la perspective d'atténuer cette lourdeur par la construction d'un diagnostic automatique, nous n'avons analysé manuellement que les traces recueillies dans des classes de 4^e et 3^e, niveaux susceptibles de déceler plus d'erreurs que les niveaux de 2nde et 1^{re}, pris en compte plus tard.

Exemple de recherche d'exhaustivité et de généralisation.

Nous avons été amenés à nous interroger sur l'exhaustivité des règles que nous écrivions. Il y avait évidemment une première réponse qui émanait des résultats des diagnostics : si, après une session de diagnostics, il restait des transformations en échec, il était possible de les étudier de plus près pour voir la pertinence de les modéliser par de nouvelles règles. Mais cela n'était pas suffisant. Nous avons généralisé les règles repérées manuellement. Par exemple, l'erreur consistant à distribuer le signe moins uniquement sur les termes positifs revenait souvent :

$$-(3x - 7x + 8 - y) \rightarrow -3x - 7x - 8 - y.$$

La transformation consistant à ne distribuer le signe moins que sur les termes négatifs du type $-(3x + 2 - 7x) \rightarrow 3x + 2 + 7x$ paraissait alors tout aussi envisageable et nous l'avons intégrée comme une transformation possible, même si elle était absente des protocoles considérés. À charge au diagnostic automatique de révéler si cette erreur se manifestait dans d'autres classes. Ces règles erronées d'une granularité très fine sont appelées des « règles détaillées » (une définition plus précise en sera donnée plus loin).

Outre l'imagination qui permet de créer de nouvelles règles, nous avons cherché aussi à systématiser les règles possibles. Prenons l'exemple de la gestion des parenthèses. Pour savoir si aucune règle n'était oubliée, nous nous sommes posés la question suivante : quel est l'ensemble des expressions possibles comprenant une parenthèse et quelles sont les transformations possibles à effectuer ? Pour représenter les expressions contenant au moins une parenthèse, nous avons utilisé l'écriture sous forme d'arbre. Elle permet de simplifier la notation : l'écriture algébrique $(A)\Delta B$ incite le lecteur à croire que A ne peut être lui-même constitué de parenthèses (par exemple A valant $(3x+2)$) ou d'une puissance (par exemple A valant $(3x+2)^2$). Son écriture « équivalente » en arbre est l'arbre ARBRE A1a dont les nœuds de profondeur 1 peuvent aussi bien engendrer un fils dont l'opérateur sera des parenthèses, une puissance ou encore l'addition.

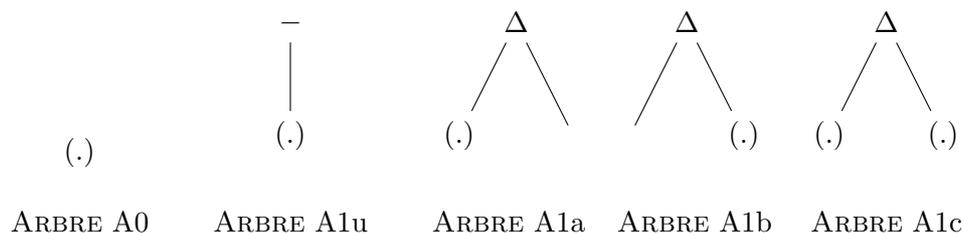
Pour construire l'exhaustivité des expressions contenant des parenthèses, il suffit de construire des expressions où les parenthèses sont de profondeur 0, ARBRE A0 ou de profondeur 1, ARBRE A1u (opérateur unaire), ARBRE A1a, ARBRE A1b et ARBRE A1c (d'opérateurs binaires). Ces cinq arbres sont suffisants : nul besoin de considérer les arbres avec opérateurs n -aires ni les arbres où les parenthèses sont de profondeur strictement supérieure à 1. En effet, toute expression peut se ramener à un arbre d'au plus deux fils ; il n'est donc pas nécessaire de construire des opérateurs n -aires. Quant aux expressions de profondeur inférieure, elles sont soit des sous-arbres des cinq expressions ci-dessus (comme les arbres de profondeur 1 sont des sous-arbres des arbres de profondeur 0) soit répertoriées dans d'autres grands types de cas. Par exemple, l'expression $3 + 5(2 + 3x)$ où les parenthèses sont à profondeur 2, transformée en $8(2 + 3x)$ est un sous-cas des expressions de type $a + bc$. Ce qui importe, avant tout, selon nous, est l'opérateur de multiplication entre le b et le c et non les parenthèses éventuelles autour de c . Aussi avons-nous restreint cette étude de l'exhaustivité des expressions avec parenthèses aux arbres ayant des parenthèses de profondeur 0 ou 1.

Des règles détaillées ont ensuite été regroupées en règles abstraites. Deux objectifs principaux organisaient ce travail : minimiser le nombre d'objets à traiter dans le processus automatique et faire ressortir des aspects cognitifs dans l'utilisation conjointe des règles. Par exemple, il est cognitivement intéressant de regrouper l'erreur consistant à appliquer la règle

$$a + (b + c) \rightarrow a + b + a + c$$

avec la règle correcte de développement d'un produit

$$a(b + c) \rightarrow ab + ac.$$



Ces deux règles détaillées donnent la règle abstraite

$$a\Delta(b + c) \rightarrow a\Delta b + a\Delta c \quad \text{où } \Delta \text{ peut valoir } + \text{ ou } \times,$$

règle qui, elle-même, pourrait être encore généralisée en

$$a\Delta(b \square c) \rightarrow a\Delta b \square a\Delta c.$$

Notons, cependant, qu'à ce niveau là, ce sont bien les règles détaillées et non celles qui les généralisent qui sont associées aux pas de calcul d'un élève. L'abstraction n'a pour but que de réduire le nombre d'objets informatiques et peut-être d'envisager, pour un travail ultérieur, des prémisses de réflexion sur une éventuelle explication du comportement de l'élève³.

Les grands groupes de règles

Nous proposons de rendre compte des règles *erronées* que nous avons écrites selon le découpage en types de tâches, présenté en section 1.3.4 qui est ressorti de l'analyse praxéologique des manuels : la réduction de sommes de monômes, le produit de monômes, les factorisations liées aux identités remarquables, les factorisations non liées aux identités remarquables, le développement d'identités remarquables, le développement non lié aux identités remarquables (qui regroupera aussi bien le développement de produit que celui d'une somme précédée d'un signe + ou -). Nous avons aussi besoin de considérer des règles traitant de la gestion de la puissance, chapitre souvent à part du calcul littéral proprement dit dans les manuels mais dont la présence est importante dans le traitement des expressions algébriques. Ces règles s'intéressant à des puissances de monômes, de la forme $(ax^n)^p$, elles ont été intégrées au groupe des règles portant sur la réduction de produits algébriques. Cela donne six grands groupes de règles, répartis dans les six sections qui suivent. Remarquons aussi, mais nous y reviendrons, que le type de tâches « développement de produit » a été élargi au concept de la gestion de parenthèse. Il y a différentes raisons à cela. D'une part, nous souhaitons englober les cas de suppressions de parenthèses autour d'une somme précédées d'un signe + ou -, dont l'appartenance au développement a été discuté en section 1.3.3. D'autre part, la généralisation décrite dans le paragraphe précédent nous pousse à regrouper les règles avec celles qui ont été généralisées. Enfin, nous avons un a priori très fort sur l'effet que peut provoquer la vue de parenthèses, en particulier le déclenchement de la distributivité, et ce, quels que soient les opérateurs en jeu. Nous reviendrons sur cette idée dans le paragraphe en question.

Chaque section se structure de manière similaire : une brève introduction à la notion en jeu suivie d'un tableau récapitulatif des règles *erronées* de notre analyse a priori. Ces règles sont au

3. Se reporter, pour cela, à la section 6.2.6 sur l'essai de regroupement de praxis-en-acte ponctuelles en praxis-en-acte locales.

moins présentées sous leur forme détaillée, quitte à ce qu'elles soient regroupées en règles générales. La liste plus exhaustive des règles correctes comme erronées est présentée en annexe C.1 sous leur forme informatique. Ces listes (ci-dessous et en annexe) sont cependant restreintes aux domaines qui nous intéressent : développement, réduction, factorisation⁴. Rappelons que le domaine est restreint aux polynômes à coefficients entiers. En particulier, l'opérateur de division n'apparaît jamais. Un bon nombre de règles est en fait généralisable aux polynômes à coefficients réels, ce qui d'ailleurs a été globalement fait lors de l'implémentation. Cependant, il est très clair qu'il manque beaucoup de règles (erronées) si l'on s'intéressait au domaine tout entier des polynômes à coefficients réels.

Développement ou gestion des parenthèses.

Ce groupement de règles regroupe en son sein les types de tâche T_{Dvt}^+ , T_{Dvt}^- , T_{Dvt}^{simple} , T_{Dvt}^{double} et T_{Dvt}^{triple} . L'a priori évoqué plus haut sur l'influence de la vue de parenthèses a beaucoup guidé la liste concernant la gestion des parenthèses. Un des premiers pas de calcul qui nous a intrigués dans la lecture des protocoles était le suivant :

$$7x - x + (2x - 12) + (-8 - 3x) - 20 \rightarrow 8x - 20 + (2x - 8) - x - 20 + (-12 - 3x)$$

Difficile à diagnostiquer au premier abord, au point que nous n'avions pas cherché à l'analyser davantage, il nous est finalement⁵ apparu que $7x - x$ donnait $8x$ et une fois le -20 isolé, il restait :

$$(2x - 12) + (-8 - 3x) \rightarrow (2x - 8) - x - 20 + (-12 - 3x)$$

Cette élève de 4^e avait *distribué* les termes de la première somme $2x - 12$ sur les termes de la seconde somme $-8 - 3x$ via l'opérateur d'addition. Au vu du reste de son activité, nous ne pouvions affirmer que cette élève était de niveau faible. Cependant, ce n'était pas non plus une règle que l'on retrouvait chez un autre élève de la même classe. Fallait-il, cependant, implanter la règle

$$(a + b) + (c + d) \rightarrow (a + c) + (a + d) + (b + c) + (b + d)?$$

La littérature nous a permis de voir que cette règle semblait avoir un sens. Le premier article lu à ce propos est celui de Matz [Matz, 1982]. Par la suite, et en fait, bien plus tard, elle nous est apparue aussi dans le chapitre IX de la thèse de Drouhard [Drouhard, 1992].

Matz rejoignait tout à fait notre volonté de parler de manière très générale de la notion de distributivité d'un opérateur sur un autre *en présence de parenthèses*. Elle proposait la formulation suivante, à laquelle nous avons songé :

$$a\Delta(b\Box c) \rightarrow a\Delta b\Box a\Delta c$$

et vice-versa :

$$(a\Box b)\Delta c \rightarrow a\Delta c\Box b\Delta c$$

Pour cette dernière règle, il nous a semblé au départ qu'elle allait à l'encontre de l'idée dénoncée bien souvent que la transformation

$$(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$$

4. D'autres règles ont été écrites pour traiter le domaine des équations et celui de l'arithmétique, cf. [Chaachoua et al., 2005] et [Nicaud, 2005]

5. Il est assez amusant de noter qu'en fait, c'est le diagnostic automatique qui a détecté cette succession de règles ! Elle nous est apparue évidente une fois diagnostiquée.

était liée à la notion de linéarité. Après réflexion, nous y avons vu non une contradiction mais une complémentarité : la notion de distributivité se place dans le cadre de l'algèbre tandis que la linéarité est un concept hérité du quotidien et donc utilisé dans un cadre plus général que l'algèbre seule. Dans nos travaux, il était cohérent de parler de distributivité pour $(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$ à l'instar des travaux de Matz et Drouhard.

Ces règles très générales ont donc été placées dans notre liste de règles a priori, débouchant sur plusieurs règles détaillées en fonction de la nature des opérateurs. Ajoutons que si l'on avait choisi un tel degré de généralisation, c'est que nous espérions voir émerger ce concept sous-jacent de distributivité chez certains élèves, et ce pour différents opérateurs. Les résultats nous montreront qu'il n'en est rien. Très peu de ces règles détaillées apparaissent en fait et encore moins de manière stable chez les élèves.

Les règles erronées ayant trait au concept de suppression de parenthèses sont regroupées dans le tableau 3.1, p. 95. Ce tableau se découpe ainsi :

- dans la première colonne « Règles », se trouvent les règles écrites sous leur forme généralisée ;
- dans la deuxième colonne « Instances », se trouvent les instances que nous avons considérées (par exemple, nous ne considérons pas l'opérateur de division) des règles générales ;
- enfin, dans la troisième colonne « Références », se trouvent les références aux auteurs qui nous ont permis de valider (en amont ou en aval) ces règles.

Ajoutons quelques remarques à propos de ce tableau :

1. Nous n'avons écrit que des sommes de deux termes de la forme $a + b$, par souci de clarté. En fait, une telle somme peut représenter une somme de plus de deux termes. De même le facteur a dans les expressions telles que $a(b + c)$ représente un monôme (pouvant être de coefficient nul, négatif, etc). Ainsi, l'expression $5x^2(x + y + 3)$ est symbolisée par $a(b + c)$ et non par $ab(c + d + e)$, par exemple.
2. Quatre opérateurs apparaissent : les opérateurs d'addition, de soustraction, de multiplication et de « naturel ». Ce dernier placé entre les chiffres 7 et 2 donne le nombre 72. Cet opérateur, noté \mathcal{Nat} , est important en particulier quand visuellement, le signe \times est absent. Certains élèves transforment par exemple $4(2 + x)$ en $42 + x$. Cette transformation est analysée comme l'application de la règle :

$$a \times (b + c) \rightarrow a\mathcal{Nat}b + c.$$

3. Tous les signes \times sont explicités pour éviter justement une confusion possible avec l'opérateur \mathcal{Nat} . Cela ne signifie pas qu'ils sont explicites lorsque les élèves sont confrontés aux expressions. Par exemple, qu'un élève transforme l'expression $4(2 + x)$ en $4 \times 2 + x$ ou l'expression $4 \times (2 + x)$ en $4 \times 2 + x$, nous analysons ces deux transformations par une seule règle :

$$a \times (b + c) \rightarrow a \times b + c.$$

4. À propos de la règle « $-(b^- + b^+) \rightarrow b^- - b^+$ », elle signifie que le signe moins qui précède les parenthèses, ne porte que sur les termes de signe positif. Cela permet d'obtenir une somme de termes de signe uniquement négatif. Inversement, la règle « $-(b^+ + b^-) \rightarrow b^+ - b^-$ » permet d'obtenir une somme de termes de signe uniquement positif.
5. En ce qui concerne les références, nous avons retenu sept références principales⁶ : [Matz, 1982], noté M82 ; [Booth, 1984], noté B84 ; [Sleeman, 1986], noté S86 ;

6. Nous avons retenu ces auteurs car les règles erronées qu'ils proposaient étaient proches des nôtres.

[Sleeman, 1987a], noté S87; [Kirshner, 1990], noté K90; [Drouhard, 1992, Chap IX, principalement], noté D92; [Sackur et al., 1997], noté S97; [Cortes and Kavafian, 1999], noté C99; [Heffernan, 2001], noté H01; [Prévit, 2008], noté P08. À la suite de ce tableau, nous ajoutons des commentaires sur ces auteurs et sur la manière dont ils ont explicités les règles que nous leur avons associées.

6. Enfin, au sein de la thématique de suppression de parenthèse, nous avons regroupé les règles autour de quatre sous-thèmes :
 - la distributivité de l'opérateur accolé aux parenthèses,
 - la distributivité partielle (l'opérateur n'est distribué que sur certains éléments à l'intérieur des parenthèses),
 - la suppression brute de parenthèses (autrement dit, la distributivité est partielle et ne porte que sur le premier élément de la parenthèse),
 - la distributivité via un autre opérateur que celui accolé aux parenthèses.

Commentaires sur les références. D'une manière générale, chaque auteur a sa propre manière d'écrire les règles. En particulier, la granularité de la représentation diffère de l'un à l'autre. Il est donc difficile d'apparenter véritablement une de nos règles à celles d'autrui. Par exemple, la problématique d'Heffernan lors de la construction de l'EIAH Ms. Lindquist n'est pas la même : il construit des réponses prédéfinies à des patrons d'exercices et compare la réponse de l'élève à une prédéterminée. Une des réponses erronées envisagées peut être interprétée comme une « omission de parenthèses » et s'avoisine donc à ce que nous avons appelé la suppression brute de parenthèses. Cette règle d'omission lui permettra de diagnostiquer une erreur de type $5g+7(30-g) \rightarrow 5g+7 \times 30-g$ [Heffernan, 2001, p. 59]. Un autre exemple est celui des travaux de Sleeman [Sleeman, 1987a]. Sleeman travaille principalement dans un contexte d'équation. Ce qui est difficilement transposable. En effet, dans ses travaux, on trouve la règle $R : ax = b \rightarrow x = b-a$ qui est différente, d'un point de vue cognitif, de la règle $R' : a \times x \rightarrow a + x$. Cependant, la règle R' permet « d'engendrer » la règle R .

Autre point notable : certaines règles de la littérature ont peut-être une généralité plus grande ou, au contraire, moins grande que celle que nous leur avons octroyée. Par exemple, la règle $(a+b) \times c \rightarrow a+bc$ introduite dans nos travaux n'a pas été repérée explicitement. Pourtant, elle est très probablement « générée » par la règle $a \times (b+c) \rightarrow a \times b+c$ de certains auteurs. À propos de l'abus de distributivité, Matz est encore plus exhaustif que nous puisqu'elle parle de la règle abstraite $a\Delta(b\Box c) \rightarrow a\Delta b\Box a\Delta c$ tandis que nous ne considérons que cinq règles détaillées. Kirshner [Kirshner, 1990] généralise aussi la notion de distributivité abusive : il l'appelle d'ailleurs « *the Overgeneralized Distributive Law* ». C'est la règle $(b\Box c)\Delta a \rightarrow b\Delta a\Box c\Delta a$ dans les cas où elle est erronée. Alors que nous nous sommes limités à ne considérer qu'une règle détaillée (où Δ est l'opérateur de puissance), Kirshner met en place une hiérarchie des opérateurs qui lui permet de déterminer quand une règle aussi générale que celle-ci est correcte ou erronée. Il considère donc cette règle dans toute sa généralité contrairement à nous qui l'avons restreinte. Dans le même ordre d'idées, Prévité [Prévité, 2008, p. 189] n'explicité pas le signe \times dans la règle $a(b+c) \rightarrow ab+c$. L'ambiguïté est donc entière : cette règle peut-elle s'appliquer à une transformation telle que $4(3+x) \rightarrow 43+x$, où l'opérateur entre les chiffres 4 et 3 n'est pas une multiplication mais l'opérateur *Nat*? Nous pensons que telle n'était pas la volonté de l'auteur. Sleeman, inversement, propose des règles très précises toujours dans le domaine des équations. Il distingue, entre autres, $Mx+Nx = P \rightarrow x+x = P-M-N$ de $Mx = Nx+P \rightarrow x+x = N+P-M$ [Sleeman, 1986, p. 29,44,45]. Étant donné que la règle $a \times (b) \rightarrow a+b$ écrite dans le tableau 3.1 permet d'engendrer ces deux règles, nous avons mis Sleeman en référence.

Règles	Instances	Références
Distributivité abusive		
$a\Delta(b\Box c) \rightarrow a\Delta b\Box a\Delta c$	$a + (b \times c) \rightarrow a + b \times a + c$	M82 ; K90
	$a \times (b \times c) \rightarrow a \times b \times a \times c$	
	$a + (b + c) \rightarrow a + b + a + c$	
	$a - (b + c) \rightarrow a - b + a - c$	
	$(a + b) + (c + d) \rightarrow a + c + a + d + b + c + b + d$	
$(a\Box b)\Delta c \rightarrow a\Delta c\Box b\Delta c$	$(a \times b) + c \rightarrow a + c \times b + c$	
	$(a \times b) \times c \rightarrow a \times c \times a \times c$	
	$(a + b) + c \rightarrow a + c + b + c$	
	$(a + b) - c \rightarrow a - c + b - c$	
	$(a + b)^n \rightarrow a^n + b^n$	
$a\Delta(b + c)\Delta(d + e) \rightarrow a\Delta b + a\Delta c + a\Delta d + a\Delta e$	$a + (b + c) + (d + e) \rightarrow a + b + a + c + a + d + a + e$	
	$a \times (b + c) \times (d + e) \rightarrow a \times b + a \times c + a \times d + a \times e$	
	$a \times (b + c) \times (d + e) \rightarrow a \times b + a \times c \times a \times d + a \times e$	
$a\Delta(b + c) \rightarrow a\Box b + a\Box c$	$a + (b + c) \rightarrow ab + ac$	
	$a + (b + c) \rightarrow a - b + a - c$	
	$a \times (b + c) \rightarrow a + b + a + c$	
	$a \times (b + c) \rightarrow a - b + a - c$	
	$a - (b + c) \rightarrow ab + ac$	
	$a - (b + c) \rightarrow a + b + a + c$	
	$(a + b) + (c + d) \rightarrow ac + ad + bc + bd$	
$(a + b) - (c + d) \rightarrow ac - ad - bc - bd$		
Distributivité partielle		
$a\Delta(b + c) \rightarrow a\Delta b + c$	$a(b + d + e) \rightarrow ab + ad + e$	
	$a - (b^- + b^+) \rightarrow a + b^- - b^+$	
	$a - (b^+ + b^-) \rightarrow a + b^+ - b^-$	
Suppression brute de parenthèses		
$a\Delta(b + c) \rightarrow a\Delta b + c$	$a \times (b + c) \rightarrow a \times b + c$	S86 ; C99 ; P08
	$a - (b + c) \rightarrow a - b + c$	H01, p.59
	$(a + b) \times (c + d) \rightarrow a + b \times c + d$	H01, p.59
$(a\Box b)\Delta c \rightarrow a\Box b\Delta c$	$(a + b) \times c \rightarrow a + b \times c$	D92, p.24
	$(a + b)^n \rightarrow a + b^n$	
	$(a \times b)^n \rightarrow a \times b^n$	
Suppression de parenthèses avec changement d'opérateur		
$a\Delta(b\Diamond c) \rightarrow a\Box b\Diamond c$	$a \times (b + c) \rightarrow a + b + c$	S86, p. 29 & 31
	$a \times (b + c) \rightarrow a \mathcal{N}at b + c$	
	$(a + b) \times (c + d) \rightarrow a + b \mathcal{N}at c + d$	S86, p. 29
	$(a + b) \times (c + d) \rightarrow a + b + c + d$	
	$(a + b) \times c \rightarrow a + b \mathcal{N}at c$	
	$a - (b + c) \rightarrow a + b + c$	
	$a + (b + c) \rightarrow a - b - c$	
$a \times (bc) \rightarrow a + bc$	S86, p. 29 ; B84	

TABLE 3.1 – Règles erronées de gestion des parenthèses. Quatre groupes peuvent être distingués : la distributivité abusive, la distributivité partielle, la suppression brute de parenthèses et la suppression brute de parenthèses avec changement d'opérateur.

Développement d'identités remarquables.

Le second type de tâches est celui qui porte sur les développements faisant appel aux identités remarquables. Les règles erronées de ce type de tâches sont données dans le tableau 3.2. Elles sont au nombre de cinq dont deux (les plus importantes) ont déjà été traitées dans le paragraphe précédent. En fait, il y a beaucoup d'autres transformations d'identités remarquables qui sont diagnostiquées par les règles de la section précédente. Ainsi, la transformation de $(e+f) + (e+f)$ en $e^2 + 2ef + f^2$ peut très bien être diagnostiquée par la règle $a\Delta(b+c) \rightarrow a\Box b + a\Box c$ avec Δ étant l'addition, \Box la multiplication, a correspondant à $(e+f)$, b à e et c à f . C'est pourquoi les règles

$$(e+f) + (e+f) \rightarrow e^2 + 2ef + f^2,$$

$$(e-f) + (e-f) \rightarrow e^2 - 2ef + f^2$$

$$\text{ou } (e-f) + (e+f) \rightarrow e^2 - 2ef + f^2$$

n'ont pas été listées dans le tableau 3.2 puisqu'elles sont prises en charge par les règles précédentes dites de la gestion des parenthèses.

Règles
$(a+b)^2 \rightarrow (a+b)(a-b)$
$(a-b)^2 \rightarrow (a+b) - (a-b)$
$(a+b)^n \rightarrow na + nb$
Rappel des cas précédemment mentionnés
$(a+b)^n \rightarrow a^n + b^n$
$(a+b)^n \rightarrow a + b^n$

TABLE 3.2 – Règles erronées liées aux développements d'identités remarquables.

Réduction de sommes de monômes.

En réduction de sommes de monômes, nous considérons la forme $ax^n + bx^p$. La transformation consiste à obtenir un monôme de la forme $(a\Delta b)x^{n\Box p}$. Une somme de plus de deux monômes sera analysée comme une itération de cette règle.

L'opérateur Δ dans $(a\Delta b)$ peut être l'opérateur :

- *Plus*, produisant le calcul de la somme de a et de b : $a \oplus b$,
- *OpPlus*, produisant la soustraction de b à a : $a \ominus b$,
- *PlusOp*, produisant la soustraction de a à b : $b \ominus a$,
- *OpPlusOp*, produisant l'opposé de la somme de a et de b : $\ominus(a \oplus b)$,
- *Proj_a(a, 1)*, produisant a (resp. b) lorsque b (resp. a) est le coefficient unitaire invisible.

L'opérateur \Box dans $(n\Box p)$ peut être l'opérateur :

- *Plus*, produisant le calcul de la somme des degrés n et de p : $n \oplus p$,
- *Max*, produisant le maximum entre n et p ,
- *Min*, produisant le minimum entre n et p .

Le tableau 3.3, p. 97 permet de lister les instances de Δ et \Box que nous avons considérées et les combinaisons que cela produit sur un exemple de somme de monômes. Le cas ($n = p$, Δ étant l'addition et \Box étant soit *Max* soit *Min*) correspond à la règle correcte. Il est donc exclu des combinaisons possibles.

Pour l'opérateur Δ , les opérateurs *Mult* (produisant $a \otimes b$), *Max*, *Min*, *Proj_a(a, b)* (produisant a) et *Proj_b(a, b)* (produisant b) ont été finalement supprimés pour différentes raisons. Tout d'abord, certains de ces opérateurs produisaient le même résultat. Par exemple, *Max(a, b)* produisait b si b était plus grand que a , tout comme l'opérateur *Proj_b(a, b)*. Ensuite, et c'est la raison principale, ces opérateurs avaient été très peu détectés lors de la lecture manuelle des protocoles. Dans un but d'implémentation, ils demandaient aussi un travail conséquent de repérage de position et de comparaison. Enfin, toujours dans le cadre informatique, ils s'appliquaient potentiellement à chaque somme de monômes pour peu de productions : ils n'étaient, en quelque sorte, « non rentables ». Pour l'opérateur \square aussi, d'autres valeurs avaient été tout d'abord considérées puis supprimées pour les mêmes raisons : l'opérateur de multiplication *Mult* et les opérateurs *OpPlus*, *PlusOp*, *OpPluOp*.

$\Delta \backslash \square$	<i>Plus</i>	<i>Max</i>	<i>Min</i>
<i>Plus</i>	$8x^4$	$8x^3$	$8x$
<i>OpPlus</i>	$-2x^4$	$-2x^3$	$-2x$
<i>PlusOp</i>	$2x^4$	$2x^3$	$2x$
<i>OpPlusOp</i>	$-8x^4$	$-8x^3$	$-8x$
<i>Proj_a(a, 1)</i>	$x^3 + 3x \rightarrow 3x^4$	$x^3 + 3x \rightarrow 3x^2$	$x^3 + 3x \rightarrow 3x$

TABLE 3.3 – Exemples d'application des règles erronées de réduction de monômes du type $ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n\square p}$, avec $n \neq p$, sur l'expression $5x^3 + 3x$. Les places de a et de b sont arbitraires (le fait que a soit à gauche dans le sens de lecture n'a pas été pris en compte). Quatre opérateurs pour les coefficients, trois pour les degrés ont été conservés. Un opérateur supplémentaire est ajouté dans le cas très particulier où l'un des coefficients vaut 1 invisible : l'opérateur de projection *Proj(a, 1) = a*.

Réduction de produits algébriques.

En réduction de produits algébriques, nous distinguons le produit explicite de monômes, de la forme $ax^n \times bx^p$ et le produit « implicite », à savoir un monôme élevé à une certaine puissance, de la forme $(ax^n)^p$.

En réduction de produits explicites de monômes, la règle générale est : $ax^n \times bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n\square p}$.

L'opérateur Δ dans $(a\Delta b)$ peut être l'opérateur :

- *Mult*, produisant le calcul du produit de a et de b : $a \otimes b$,
- *MultOp*, produisant l'opposé du produit de a et de b : $\ominus(a \otimes b)$,
- *Plus*, produisant le calcul de la somme de a et de b : $a \oplus b$,
- *OpPlus*, produisant la soustraction de b à a : $a \ominus b$,
- *PlusOp*, produisant la soustraction de a à b : $b \ominus a$,
- *OpPlusOp*, produisant l'opposé de la somme de a et de b : $\ominus(a \oplus b)$.

L'opérateur \square dans $(n\square p)$ peut être l'opérateur :

- *Plus*, produisant le calcul de la somme des degrés n et de p : $n \oplus p$,
- *Max*, produisant le maximum entre n et p ,
- *Min*, produisant le minimum entre n et p ,
- *Proj₂*, produisant le degré 2, indépendamment de la valeur de n et de p .

Le tableau 3.4, p. 98 permet de lister les instances de Δ et \square que nous avons considérées et les combinaisons que cela produit sur un exemple de produit de monômes.

$\Delta \backslash \square$	<i>Plus</i>	<i>Max</i>	<i>Min</i>	<i>Proj₂</i>
<i>Mult</i>		$15x^3$	$15x$	$15x^2$
<i>MultOp</i>	$-15x^4$	$-15x^3$	$-15x$	
<i>Plus</i>	$8x^4$	$8x^3$	$8x$	
<i>OpPlus</i>	$-2x^4$	$-2x^3$	$-2x$	
<i>PlusOp</i>	$2x^4$	$2x^3$	$2x$	
<i>OpPlusOp</i>	$-8x^4$	$-8x^3$	$-8x$	

TABLE 3.4 – Exemples d'application des règles erronées de réduction de monômes du type $ax^n \times bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n\square p}$ sur l'expression $5x^3 \times 3x$. Par exemple, si Δ vaut *MultOp*, $a\Delta b$ s'instancie en -15 , si \square vaut *Proj₂*, $n\square p$ s'instancie en 2. Le cas où Δ vaut *Mult* et \square vaut *Plus* est exclu car correspondant au cas correct.

En réduction du produit $(ax^n)^p$, la transformation consiste à supprimer les parenthèses. Le tableau 3.5, p. 98 permet de lister les règles retenues pour la gestion (erronée) de $(ax^n)^p$. Deux cas peuvent être distingués : celui où l'erreur est liée au signe moins présent à l'intérieur des parenthèses et celui où l'erreur est liée au coefficient a .

Règles
Signe moins et puissance
$(-u)^{2n} \rightarrow -u^{2n}$
$(-u)^{2n+1} \rightarrow u^{2n+1}$
$-a^{2n} \rightarrow +a^{2n}$
Coefficient et puissance, $n \neq 1$
$ax^n \rightarrow a^n x$
$ax^n \rightarrow a^n x^n$
$(ax)^n \rightarrow a^n x$
Autres cas
$u^n \rightarrow nu, n \neq 1$
$(u^n)^p \rightarrow u^{n+p}$
Rappel des cas précédemment mentionnés
$(a+b)^n \rightarrow a+b^n$
$(a \times b)^n \rightarrow a \times b^n$
$(a+b)^n \rightarrow a^n + b^n$

TABLE 3.5 – Règles de gestion des puissances de monômes : transformations erronées de $(ax^n)^p$ avec n et p des entiers strictement positifs.

Factorisation de sommes algébriques.

En factorisation, le travail de la section 1.3.3, p. 48, a fait ressortir deux grands types de tâches : les identités remarquables d'une part et les mises en facteur de sommes algébriques non identifiables à des identités remarquables, d'autre part, cas qui sera traité dans la prochaine section. Le principe de la factorisation repose sur la transformation d'une somme en un produit, principe qui nous a guidé pour la construction des règles erronées, même si certaines d'entre elles traiteront des cas de transformations de produits en produits.

Dans un premier temps, des règles de réécriture du type transformation d'une somme de deux termes contenant un facteur commun en un produit ont été écrites. Par exemple, $ba^n + ac \rightarrow a(b^n + c)$. Mais, assez rapidement, nous nous sommes tournés vers un autre type de gestion d'extraction du facteur commun de chaque terme d'une somme *indépendamment des autres termes*, et ce pour les raisons suivantes :

- D'un point de vue didactique, nous étions gênés par le nombre de termes de la somme de départ et par le nombre de cas à traiter en fonction du nombre de termes. Ainsi, si les deux règles erronées $ba^n + ac \rightarrow a(b^n + c)$ et $ab + ac \rightarrow a(b - c)$ nous intéressaient, il fallait aussi construire toutes les variantes combinées : $ba^n + ac \rightarrow a(b^n - c)$, $ba^n + ac + ad \rightarrow a(b^n + c + d)$, etc. D'autre part, conceptuellement, l'extraction indépendante des facteurs est possiblement plus proche de ce que fait l'élève. Certes, la forme finale globale obtenue guide parfois l'élève dans ses choix mais bien souvent, il écrit le facteur commun suivi de « tout ce qui reste de *chaque* terme », comme certains élèves l'expriment dans les interviews présentées en section 6.2.6 et Annexes F.1- F.2. Enfin, remarquons que ce processus permet la reconstruction a posteriori des règles sous leur présentation « plus classique ». Nous en donnerons un exemple plus loin.
- D'un point de vue informatique, le même problème se retrouvait : nous l'avons déjà dit, « l'obsession » de l'implantation est de diminuer le nombre d'objets informatiques à traiter. Implanter toutes les combinaisons de règles semblait fastidieux et difficilement réalisable, sans explosion combinatoire de l'algorithme.

Considérons un élève qui transforme une somme E en un produit de deux facteurs PQ (si le nombre de facteurs est supérieur à deux, il faut réitérer le processus). L'idée que nous proposons consiste à considérer un acte de factorisation comme la transformation de $PR + PS$ en $P(\mathcal{T}_i(R) + S)$ ou $P(R + \mathcal{T}_i(S))$ ou $\mathcal{T}_i(P)(T(R) + S)$ avec \mathcal{T}_i une application de l'ensemble des polynômes dans lui-même. L'application \mathcal{T}_i perturbe le polynôme de départ. La factorisation est correcte si et seulement si la perturbation \mathcal{T}_i est l'application identité. Les applications :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto -P \\ \text{et } \mathcal{T}_2 : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P^n &\mapsto .^n \end{aligned}$$

sont d'autres exemples d'applications \mathcal{T}_i .

L'extraction indépendante du facteur commun revient à ne regarder qu'un des termes de la somme, par exemple PR et à aboutir au produit $\mathcal{T}_i(P)R$ (ou $P\mathcal{T}_i(R)$) (il n'est pas accepté de produit dont les deux facteurs ont été transformés $\mathcal{T}_i(P)\mathcal{T}_j(R)$). Une factorisation de n termes est la donnée des n transformations portant sur chacun des termes.

Par exemple, la règle de réécriture évoquée plus haut, qui aurait pu être implantée telle qu'elle, $ba^n + ac \rightarrow a(b^n - c)$, est en fait le couple de perturbations $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$. Donnons un exemple instancié : un élève a transformé $5x^2 + 3x$ en $x(5^2 - 3)$; cette transformation est modélisée par le couple $(\mathcal{T}_2(x^2), \mathcal{T}_1(3))$.

La liste des perturbations considérées est donnée dans le tableau 3.6.

Trois autres règles ont été implantées de manière plus « classiques » car elles ne pouvaient pas être écrites comme des perturbations d'un des termes :

- La règle $(c + a)(c + b) \rightarrow c(a + b)$, qui n'est pas une factorisation proprement dite puisque l'expression initiale n'est pas une somme mais un produit.
- La règle $ab \pm ac \rightarrow a + (b \pm c)$, qui n'est pas une factorisation proprement dite puisque l'expression obtenue n'est pas à un produit.
- La règle $ab \pm ca \rightarrow abc$. Cette règle ne peut pas s'écrire comme une extraction indépendante de chaque terme puisqu'elle prend en compte *à la fois* le facteur b et le facteur c .

Nom	Action	Exemple
\mathcal{T}_1	$P \rightarrow -P$	
\mathcal{T}_2	$P^n \rightarrow .^n$	$3x^2 + 4x \rightarrow 2x(3^2 + 4)$
\mathcal{T}_3	$P \rightarrow P'$, où P' divise P	$x(-5x - 5) + 3(x + 1)y \rightarrow (x + 1)(-x + 3y)$ $x(3x + 3) + 3(x + 1)y \rightarrow (x + 1)(x + 3y)$
\mathcal{T}_4	$P \rightarrow 1$	$(x + 2)^2 + x(x + 2) \rightarrow (x + 2)(1 + x)$
\mathcal{T}_5	$P \rightarrow FP$, où F est le facteur commun	$5x + xy \rightarrow x(5x + y)$
\mathcal{T}_6	$PQ \rightarrow P + Q$	$3x(x + 1) + (x + 1) \rightarrow (x + 1)(3 + x + 1)$
\mathcal{T}_7	$P \rightarrow 0$	$3x(x + 1) + (x + 1) \rightarrow (x + 1)(3x)$ $3x(x + 1) - x - 1 \rightarrow (x + 1)(3x)$
\mathcal{T}_8	$P^n \rightarrow P$	$(x + 2)^2x + x(x + 5) \rightarrow x(x + 2 + x + 5)$

TABLE 3.6 – Règles de factorisation. Dans la première colonne apparaît le numéro de la perturbation ; dans la seconde, la perturbation subie sur un polynôme ; enfin, dans la troisième colonne, un exemple de cette perturbation appliqué sur une somme algébrique à factoriser. Dans le but d'une meilleure lisibilité des exemples, la perturbation considérée porte systématiquement sur le premier terme. Toutes ces règles fonctionnent sur des sommes de plus de deux termes.

Factorisation d'identités remarquables.

Pour terminer, le tableau 3.7, p. 101 donne les règles erronées liées à la factorisation d'identités remarquables. Contrairement au développement d'identités remarquables, où la plupart des transformations erronées possibles pouvaient être diagnostiquées grâce aux règles de « gestion de parenthèses », la factorisation d'identités remarquables a ses règles propres, relativement indépendantes de celles de la factorisation de somme. La raison en est que le système d'extraction mis en place pour la factorisation ne peut pas s'appliquer sur les identités remarquables. En effet, une identité remarquable doit être traitée dans son ensemble : tous les termes sont importants et ne peuvent pas être traités indépendamment des uns des autres.

Règles
$2a + 2b \rightarrow (a + b)(a - b)$
$a^2 + b^2 \rightarrow (a + b)(a - b)$
$a^2 - b^2 \rightarrow (a + b)(a + b)$
$-a^2 + b^2 \rightarrow (a - b)(a + b)$
$a^2 + b^2 \rightarrow (a + b)^2$
$a^2 - b^2 \rightarrow (a - b)(a - b)$
$a^2 - b^2 \rightarrow (a - b^2)(a + b^2)$
$a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow (a + b) + (a + b)$
$a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow (a + b^2)(a + b^2)$
$a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow (a - b) + (a + b)$
$a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow (a - b^2)(a - b^2)$
$a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow (a - b) + (a - b)$
$na + nb \rightarrow (a + b)^n$
$a^3 - 1 \rightarrow (a - 1) + (a^2 - 1)$
$a^3 - 1 \rightarrow (a - 1) + (a^2 + 1)$

TABLE 3.7 – Règles erronées liées aux factorisations d'identités remarquables

3.2 Automatisation du Processus

Le logiciel ANAïs a été développé pour analyser les productions des élèves. Il utilise pour cela la base des règles décrites dans la section précédente, après implémentation, en tentant de trouver le meilleur enchaînement -dans un sens que nous allons préciser- de ces règles (correctes ou erronées) entre deux expressions données. Nous verrons, dans un premier temps, comment une règle informatique fonctionne. Nous verrons, dans un deuxième temps, le mécanisme de diagnostic.

3.2.1 Codage des règles

Une règle $R : A \rightarrow B$ s'applique à une transformation $E \rightarrow F$ si A peut être unifiée à une sous-expression de E . Par exemple, si A est de la forme d'un produit de 2 facteurs ab et E est la somme $2x + 7 \times 3x$, A peut être unifiée à $2x$ mais ne peut pas être unifié à $2x + 7 \times 3x$ (qui est une somme) ni à $7 \times 3x$ (qui est un produit de 3 facteurs). À cette condition d'unification d'une règle, peut s'ajouter des conditions d'unification sur le but. Il existe, en fait, trois types de règles⁷.

1. Celles qui sont construites indépendamment du but F . C'est le cas de la règle du tableau 3.8, p.103. Celles-ci s'appliquent à toutes transformations dont une sous-expression de l'expression mère a pu être unifiée. Le résultat B est alors produit.

Ce sont les règles « classiques » au sens de la théorie des réécritures [Dershowitz and Jouannaud, 1990]. Elles sont en général syntaxiques. Dans nos travaux, l'unification a été étendue à des concepts sémantiques. Par exemple, l'expression ax dans la règle $ax + bx \rightarrow (a \oplus b)x$ ⁸ peut s'unifier à un monôme de coefficient unitaire

7. À ces trois types de règles, s'ajoutent les règles dites « faibles » dont le traitement est particulier (il sera présenté dans la note 16)

8. Nous rappelons que \oplus signifie une somme effectuée.

invisible, ce qui ne serait pas possible avec une unification purement syntaxique. De même, l'expression a^2 peut s'unifier à $4x^2$. Ces unifications sont rendues possibles par l'introduction de concept (sémantique) tel que le monôme ou le carré. Ce choix repose sur ce qui se pratique dans l'enseignement mais aussi en algèbre en général. Sans introduction de sémantique, comment écrire une règle qui permettrait d'unifier a^2 à $4x^2$, ax à x ?

2. Celles qui tiennent compte du but F en exigeant que B , le résultat que doit produire la règle, peut être unifié à une sous-expression du but F . C'est le cas de la règle du tableau 3.9. Ces règles s'appliquent donc uniquement si une sous-expression du but F a pu être unifiée à B (et, évidemment, une sous-expression de l'expression mère a pu être unifiée à A). Les contraintes introduites dans ce type de règles ainsi que dans le suivant répondent au besoin de diminuer le nombre de fois où les règles peuvent s'appliquer, afin d'éviter l'explosion combinatoire⁹.
3. Celles qui tiennent compte du but F en exigeant des conditions sur la forme de F . C'est le cas de la règle du tableau 3.10. Les conditions peuvent être du genre : « il ne faut pas qu'il y ait de monômes de degré 3 dans le but », « il faut qu'il y ait des parenthèses dans le but », etc.

Ce dernier type de règles est moins exigeant que le second, mais l'est plus que le premier. Ce type de règle est un bon compromis pour la modélisation de l'activité car ces règles ne s'appliquent pas trop (moins que les premières) mais peuvent s'appliquer même si l'élève a effectué des transformations successives en un seul pas de calcul sur la même sous-expression, contrairement au deuxième type. Prenons l'exemple de l'élève qui doit transformer $2+3x+5x^2+x$. Mettons que la règle qui nous intéresse soit celle qui transforme $a + bx$, avec a et b des réels, en $(a \oplus b)x$. C'est donc une règle erronée. Si cette règle est écrite comme une règle du premier type (sans condition sur le but), elle s'appliquera à toutes les expressions qui comportent une somme d'un monôme et d'un réel. Dans cet exemple, elle s'appliquera donc deux fois (sur $2 + 3x$ et sur $2 + x$), produira respectivement $5x$ et $3x$ et ce, même si l'élève fournit la réponse correcte $2 + 4x + 5x^2$ ou la réponse erronée $6 + 5x^2$. Évidemment, nous le verrons plus loin, le mécanisme de diagnostic ne proposera pas, au final, cette règle comme un diagnostic possible car cette règle ne permet pas, en s'associant à d'autres règles, de fournir le but recherché ($2 + 4x + 5x^2$, par exemple). Il n'en reste pas moins que la règle en s'appliquant souvent fait perdre du temps au mécanisme, pouvant avoir des incidences sur la recherche du bon chemin de diagnostic. Si, en revanche, des conditions sur le but de cette même règle sont ajoutées (par exemple, il faut que le résultat soit erroné, ou que le résultat comporte un monôme de degré 1), elle s'appliquera alors uniquement en tenant compte du but qu'a produit l'élève.

Nous pouvons introduire des nouvelles notions utiles pour la suite :

Définition. La *source* d'une règle est la sous-expression sur laquelle la règle va s'appliquer. Elle est une sous-expression de l'expression mère. Elle correspond à l'unification de A avec E .

Le *résultat* d'une règle est l'expression produite par la règle. Il n'est pas nécessairement une sous-expression de l'expression finale.

Le *but* est l'expression globale produite à un moment donné, après ré-injection du résultat dans l'expression mère.

Une règle est dite *applicable* si il y a une source correspondante et si les conditions requises par la règle sont vérifiées, dans le cas où il y a des conditions à cette règle.

Les règles ont été codées dans le langage SIM (Système d'inférence et de MétaInférences), créée par Nicaud [Nicaud, 1993]. Ce langage fonctionne en chaînage avant : détermination des

9. Un algorithme de diagnostic peut se perdre si trop de règles s'appliquent.

Règle de réécriture, indépendante du but	Explications
Transforme $(7x + 1)(2x + 3)$ en $14x^2 + 21x + 2x + 3$	
[nom GEN_Sum_Times_Sum] [sorteDe Developpement] [Com « distribution d'une somme sur une somme »] [statut correct] [reécriture << $uv - - > w >>$]	Nom de la règle Nom plus abstrait de la règle Commentaires statut de la règle <i>Réécriture</i> d'un produit uv en un argument w
[si (Début des conditions
(u APourOperateur plus) (u ListeArguments ?l1) (v APourOperateur plus) (v ListeArguments ?l2) (soit ?l3 (distribuerListeSurListe multiplier ?l2 ?l1)))]	u est une somme Soit ?l1, la liste des termes de u v est une somme Soit ?l2, la liste des termes de v Faire une liste ?l3 constituée de la liste ?l1 est distribuée sur la liste ?l2 via l'opérateur multiplier Fin des conditions
[alors (Début de production de la règle
(soit w (expression (cons plus ?l3))))]	Additionner les arguments de cette dernière liste ?l3.

TABLE 3.8 – Exemple d'une règle SIM indépendante du but : aucune condition n'est requise pour qu'elle s'applique si ce n'est que l'expression mère comporte une sous-expression de la forme d'un produit de quatre facteurs.

Règle avec comparaison au but	Explication
Transforme $2 + 3x$ en 5	
[nom ER_Cte+MonomeDonneCte] [sorteDe Somme_Monomes] [statut errone]	Nom de la règle Nom plus abstrait de la règle statut de la règle
[si ((?e SousExpression ?f APourOperateur plus) (?f Argument a) (?f Argument b) (a MonomeEnt1Var ?ca ?v ?na) (soit ?sousbut (ExpressionDePosition ?but ?#f)) (soit ?l2 (listeTermesAdditifsDegreK ?sousbut ?na)) (soit-un ?resultat ?l2) (?resultat CoefRationnelCorps q w) (= w 1) (= q (EnSomme ?ca b)))]	Début des conditions <i>?f est une somme d'un terme a et b.</i> <i>a est un monôme de degré ?na. Soit ?sousbut, l'expression à la position de f dans le but Soit ?l2 la liste des termes de degré ?na dans ?sousbut. Soit ?resultat un de ces termes. ?resultat doit être une constante égale à la somme de ?ca et b.</i> Fin des conditions
[alors ((soit z (RemplacerSousExpression ?f (p_p_p_e ?# a ?# b ?f) ?resultat)) (RemplacerSousExpression ?e ?#f z))]	Début de production de la règle <i>?f est alors remplacé par par ?resultat dans l'expression de départ.</i>

TABLE 3.9 – Exemple d'une règle SIM qui, pour être appariée, requière que l'expression finale de l'élève comporte le résultat produit par cette règle.

Règle avec contraintes sur le but	Explications
Transforme $7 \times (2x + 3)$ en $14x + 3$	
[nom ER_a_Fois1erDeSomme] [sorteDe ER_SupprBracket] [Com « distribution sur 1er terme somme »] [statut errone]	Nom de la règle Nom plus abstrait de la règle Commentaires statut de la règle
si (Début des conditions
(?e SousExpression ?Source APourOperateur multiplier) (?Source NbArguments 2) (?Source Argument1 a) (?Source Argument2 b) (b APourOperateur plus) (b Argument1 c) (b Argument2 d) (EstExpression d) (existe (?But SousExpression ?f) (Equivalent ?f d))	une sous-expression ?source doit être un produit de 2 facteurs dont le 1 ^{er} est noté <i>a</i> le 2 nd , <i>b</i> . <i>b</i> doit être une somme. Le 1 ^{er} terme de <i>b</i> est noté <i>c</i> le 2 nd , <i>d</i> . <i>d</i> doit se retrouver dans l'expression finale <i>F</i> .
alors (Début de production de la règle
(soit ?Resultat (RemplacerSousExpression b ?#c (EnProduit a c))) (RemplacerSousExpression ?e ?#source ?Resultat))	Le produit <i>ac</i> remplace <i>c</i> dans <i>b</i> la règle produit alors <i>ac + b</i>

TABLE 3.10 – Exemple d'une règle SIM qui, pour être appariée, requière des conditions sur le but.

{[nom ...]}	Nom de la règle commençant par « ER » pour une règle erronée, « GEN » ou « RES » pour une règle correcte
[sorteDe ...] [Com « ... »] [statut ...] [si] [alors] [NiveauAbstraction ...]	Nom de sa dépendance hiérarchique Commentaires éventuels Statut : erroné ou correct Début des conditions fin des conditions Début de production de la règle Fin de production de la règle Le niveau peut être fixé à fin ou très fin. Il influe sur la hiérarchie.

TABLE 3.11 – Structure d’une règle SIM

règles applicables (cf. ci-dessus), choix d’une de ces règles, application de la règle choisie avec production du résultat. Les mécanismes d’unification et d’application des règles sont écrits en Pascal-Delphi et sont appelés en SIM.

Définition. Une règle SIM est une règle codée.

Une règle détaillée est une des règles produites par la règle SIM.

Exemple. La structure d’une règle SIM est donnée dans le tableau 3.11. Les règles des tableaux 3.8, 3.9 et 3.10 sont des règles SIM et produisent chacune une seule règle détaillée. Cependant, il existe des règles SIM productrices de plusieurs règles détaillées. Par exemple, celle du tableau 3.12, qui est le codage de la règle $ax^n + bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^n$, où Δ peut prendre différentes valeurs d’opérateurs. Cette règle SIM produit trois règles détaillées : $ax^n + bx^n \rightarrow (a - b)x^n$, $ax^n + bx^n \rightarrow (-a + b)x^n$ et $ax^n + bx^n \rightarrow (-a - b)x^n$.

La construction de règles peut être très délicate. Prenons l’exemple du problème de la détection d’un facteur commun dans une somme. Soit les expressions

$$(x + 1) + y(x + 1)$$

et $x + 1 + y(x + 1)$

à factoriser. Considérons une règle codée de telle sorte qu’elle exigerait que la « source » soit une somme de deux termes où un cofacteur d’un terme divise l’autre terme. Pareille règle fonctionne sur la première expression. En revanche, elle ne fonctionne pas sur la seconde expression. Il faut donc « reconstruire » des parenthèses hypothétiques¹⁰. Cette difficulté est encore plus grande si l’expression à factoriser est du type $x + y(x + 1) + 1$! En fait, les règles construites dans la bibliothèque ne servent pas à produire une expression mais à reproduire une transformation. Ceci permet de pallier aux difficultés citées. En effet, il suffit de comparer l’expression produite par l’élève à celle que peut produire la règle. Par exemple, si l’élève produit l’expression $(x + 1)(y + 1)$, la règle que nous construisons peut demander à récupérer un des cofacteurs de l’expression produite et demander à ce cofacteur d’être supprimé de l’expression de départ puis de comparer l’expression ainsi obtenue à celle de l’élève.

10. Ces difficultés se retrouvent d’ailleurs chez l’élève.

Règle de réécriture	Explication
Transforme $ax + bx$ en $(a\Delta b)x$	
[nom ER_Somme_Monomes_meme_dg] [sorteDe Somme_Monomes_SMCoeff] [Com « $ax^n + bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^n$, où Δ est <i>PlusOp</i> , <i>OpPlus</i> ou <i>OpPlusOp</i> »] [statut erroné]	Nom de la règle Nom plus abstrait de la règle Commentaires statut de la règle
si (Début des conditions
(?e SousExpression ?u APourOperateur plus) (?u argument1 a) (?u Argument2 b) (a MonomeEnt1Var ?ca ?v ?na) (b MonomeEnt1Var ?cb ?w ?nb) (= ?v ?w) (= ?na ?nb) (soit-un ?oc (nonEval (PlusOp OpPlus Op- PlusOp))) (soit ?c (?oc ?ca ?cb))	une sous-expression ?u doit être une somme de 2 termes dont le 1 ^{er} est noté a le 2 nd , b . a doit être un monôme de degré ?na, de coef ?ca. b doit être un monôme de même variable que celle de a et de même degré que a . Soit ?oc un opérateur <i>PlusOp</i> , <i>OpPlus</i> ou <i>OpPlusOp</i> Soit ?c la construction de ?ca et ?cb via l'opé- rateur ?oc.
alors (Début de production de la règle
(soit ?Resultat (FaireMonomeEnt1Var ?c ?v ?na)) (RemplacerSousExpression ?e ?#source ?Resultat))	Soit ?Resultat le monôme de coef ?c et de degré ?na la règle produit alors $(?ca ?oc ?cb)?v^{na}$.

TABLE 3.12 – Exemple d'une règles SIM productrice de plusieurs règles détaillées.

3.2.2 Nombre de règles dans la bibliothèque

La bibliothèque de règles (SIM) a été longue à établir, car elle a demandé de longs va-et-vient entre le codage des règles, l'automatisation des diagnostics, la lecture et l'analyse des diagnostics résultants. Une version stable a enfin vu le jour et elle comporte 107 règles SIM erronées. Il y a, entre autres, 35 règles SIM erronées dans le domaine du développement, 27 dans le domaine de la réduction, et 30 dans le domaine de la factorisation. Il est plus facile de comparer les règles détaillées aux règles que l'on souhaiterait d'un point de vue didactique. Les règles SIM sont des formes de généralisation de plusieurs règles détaillées, ceci dans le but de minimiser le nombre d'objets informatiques à manipuler. Les règles détaillées sont au nombre de 153. Une liste de ces règles SIM accompagnées d'explications sommaires est donnée en Annexe C.1. Cette liste suit la hiérarchie donnée en figure 3.4. Le nombre de règle SIM et de règles détaillées selon le genre de tâche est récapitulé dans le tableau 3.13.

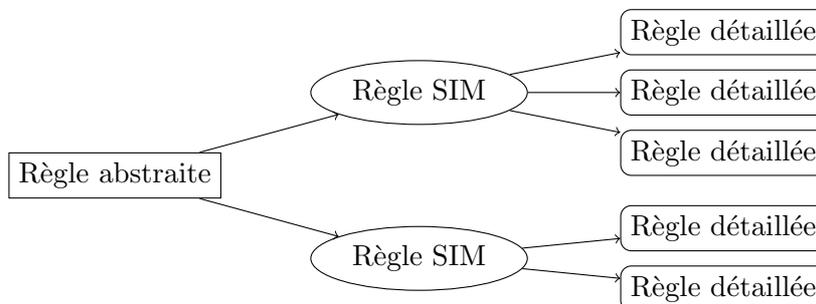


FIGURE 3.4 – Hiérarchie des règles codées.

En plus de ces règles, ont été implantées 15 règles dites *faibles*. Elles correspondent à ce que l'on pourrait appeler des « erreurs d'inattention » : des oublis d'opérateurs, des pertes d'arguments, etc. Elles ont un traitement particulier lors de la recherche heuristique (cf. note 16, p.115.). A priori, ces règles n'ont pas un sens conceptuel mais sont essentielles pour produire des diagnostics automatiques acceptables. En effet, bon nombre d'élèves font des erreurs de calcul et l'algorithme risque de produire des explications insensées si l'on n'implante pas de règles qui peuvent produire ce type d'erreurs. Par exemple,

$$-2x^2 + 3x - x - 2x^2 \rightarrow -2x^2 - 2x^2 + 3x + x$$

qui consiste en une perte de signe moins;

ou $3x - 7 - x - 8 \rightarrow 4x - 17,$

qui peut être expliqué par une erreur de calcul (sur $-7 - 8$) combinée à une erreur qui, elle, peut avoir un « sens didactique » ($a - b \rightarrow a + b$ qui transforme $3x - x$ en $4x$).

Deux autres règles particulières ont été implantées : lors des tâches de développement, certains élèves transformaient une expression polynomiale en une équation en introduisant le signe « = », cf. figure 3.5, p. 110. Ce type d'erreurs peut être lié à l'environnement APLUSIX. En effet, l'enseignement demande en général d'écrire les expressions les unes sous les autres :

$$\begin{aligned} & -3x + 4 + 2x + 4 \\ = & -x + 4 + 4 \\ = & -x + 8. \end{aligned}$$

Pourtant de nombreux élèves, écrivent les expressions à la suite des unes des autres :

$$-3x + 4 + 2x + 4 = -x + 4 + 4 = -x + 8.$$

Ce désir « d'écriture horizontale » peut être à l'origine de production comme celle de gauche dans la figure 3.5, l'élève ne « voyant » pas le signe égal déjà noté dans APLUSIX. En revanche, l'erreur dans la production de droite de la figure ne s'explique probablement pas de la même manière. Il est probable que celle-ci ne soit pas liée à l'environnement. Deux règles ont été introduites pour traiter ces erreurs : l'une, ER_IntroductionRelation, pour régler l'introduction du signe « = » lors d'exercices portant sur des expressions polynomiales et une autre, ER_DisparitionRelation, pour gérer la disparition du signe « = », lors de la résolution d'une équation. Avec ces 17 dernières règles, la bibliothèque contient 139 règles SIM dont 107 erronées couvrant les trois domaines qui nous intéressent.

La bibliothèque de règles contient 107 règles SIM erronées qui produisent 153 règles détaillées erronées qui permettent de reproduire les 108 règles « a priori » décrites dans la première partie.

Remarque. Pour des raisons informatiques, les règles inventoriées dans la première partie, dites « a priori », ne correspondent pas exactement aux règles implémentées que ce soit les règles SIM ou détaillées d'ailleurs. Ce que nous assurons, en revanche, c'est que toutes les règles listées a priori se retrouvent dans l'ensemble des règles détaillées. Il est possible qu'une seule règle « a priori » correspondent à plusieurs règles détaillées. C'est le cas de la règle $a(b + c) \rightarrow ab + c$ qui demande trois règles SIM à elle seule et donc trois règles détaillées : le cas où le facteur a est un produit (par exemple $3x$) est à différencier du cas où a ne l'est pas (par exemple x) et du cas où a est de signe moins (par exemple $-3x$ ou $-x$). En effet, lors de l'écriture informatique de la règle, nous avons besoin de préciser quel est la « forme » de l'expression mère : est-ce que l'opérateur principal est n-aire tel la multiplication ou unaire tel le signe moins ? Pour extraire la somme qui est entre parenthèses, nous avons besoin aussi de savoir si elle est en première, seconde, troisième position (comme c'est le cas quand a est un produit de 2 facteurs).

Il est aussi possible que des règles soient redondantes et que des cas soient exclus ou mis à l'écart. Par exemple, dans la somme de monôme $ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n\Box p}$, page 96, lorsque n est égal à p , les opérateurs *Max* et *Min* produisent le même résultat : $(a\Delta b)x^n$. Ce cas est donc mis à part, produisant une règle à lui seul :

$$ax^n + bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^n,$$

où Δ doit être différent de l'opérateur d'addition pour faire de cette règle une règle erronée.

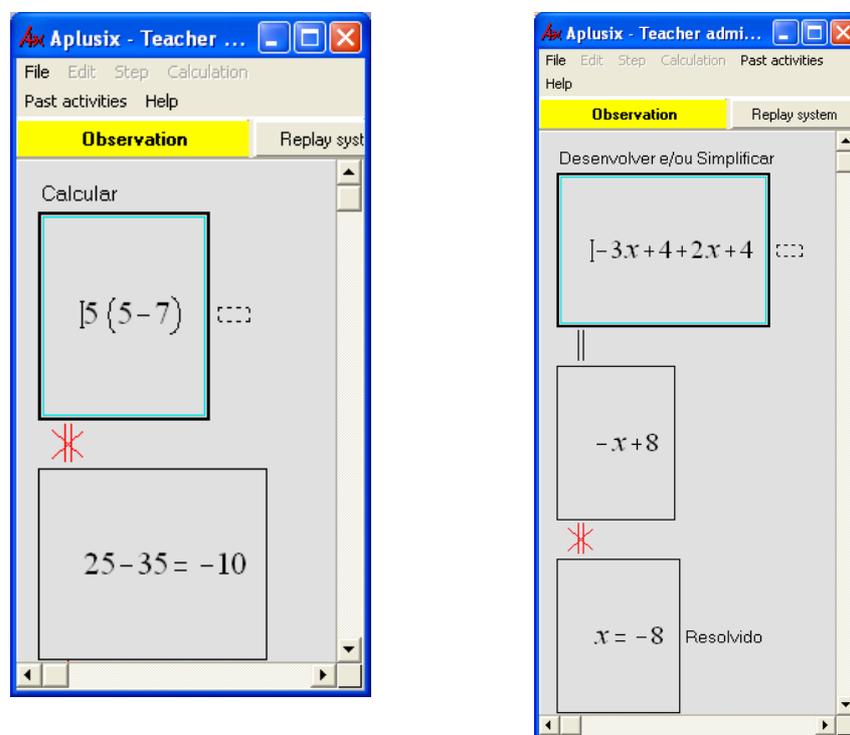


FIGURE 3.5 – Certains élèves introduisent le signe égal à mauvais escient, transformant un polynôme en une équation. Inversement, il arrive (plus rarement) que les élèves transforment une équation en un polynôme en omettant le signe égal. Ces deux erreurs peuvent être liées à l'environnement APLUSIX. En effet, dans le logiciel, l'élève doit écrire les expressions les unes sous les autres, comme cela est demandé dans l'enseignement. Cependant, bien souvent, les élèves sont tentés sur papier-crayon d'écrire les expressions les unes à la suite des autres. C'est cette mauvaise habitude qui peut être à l'origine de l'erreur.

	Correctes	Erronées	Total	Détaillées erronées
Développement	16	35	51	41
Réduction	11	27	38	67
Factorisation	3	30	33	30
Faibles	2	13	15	13
Autres	0	2	2	2
<i>Total</i>	<i>32</i>	<i>107</i>	<i>139</i>	<i>153</i>

TABLE 3.13 – Nombre de règles écrites en langage SIM pour chaque genre de tâche.

3.2.3 Les protocoles

APLUSIX enregistre deux types de données. Celles que nous appelons bruts, qui sont constituées de toutes les microactions clavier-souris que l'élève effectue pendant son travail, ainsi que le temps que met l'élève entre chaque action. Ces données sont rejouables via la fonction magnéto-scope du logiciel APLUSIX, cf. 2.2.3. Nous pouvons ainsi visualiser aussi bien les hésitations, les corrections, les retours en arrière, ou encore les expressions que l'élève décide de valider. Ces données brutes ne peuvent guère être exploitées telles qu'elles de manière automatique. En effet, un élève souhaitant écrire l'expression $4(x+2)^2$, tape son expression de gauche à droite : il tape « 4 » puis « (», puis « x », etc. Comment traiter alors cette information ? Nous pourrions considérer comme réponse intermédiaire toutes les expressions valides mathématiquement (par exemple $4(x+2)$ dans la frappe de l'expression précédente). Or, quelle exploitation pourrions-nous en faire ? Que faut-il déduire d'une telle expression ? Plus qu'une aide en terme de diagnostic, prendre en considération des expressions transitoires, inhérentes à l'écriture, risquerait de créer du bruit perturbateur (information non pertinente) pour un traitement informatique.

Des choix ont donc été faits : laisser de côté certaines données et n'exploiter, de manière automatique, que les étapes que l'élève décide de valider, d'accepter comme un résultat à rendre public, au même titre qu'une copie ne laisse voir de l'activité de l'élève que ce qu'il a bien voulu rendre public. Cela ne nous empêche pas, manuellement, d'exploiter sa sphère privée, son brouillon, l'ensemble des données brutes afin, d'une part, de lister les règles de transformation mais aussi de valider certaines hypothèses : lorsque plusieurs diagnostics d'un pas de calcul sont envisageables, le magnéto-scope permet, parfois, de lever quelques ambiguïtés d'interprétation. Nous aurions pu faire des choix plus fins tels que tenir compte du temps, ou de certaines corrections, mais de tels choix demandent un travail supplémentaire conséquent et nous n'étions pas sûr de pouvoir les exploiter judicieusement.

Définition. Les *protocoles bruts* sont constitués de l'ensemble des informations enregistrées par APLUSIX (toutes les microactions clavier-souris)

Les *protocoles filtrés* sont constitués uniquement des informations qui nous ont paru pertinentes : séquences d'expressions algébriques à la suite desquelles, l'élève a validé avec la touche « Entrée » (ie : les pas de calcul), le nom de l'élève, sa classe, etc. À moins d'une précision, nous appellerons protocoles, les protocoles filtrés car ce sont ceux que nous exploitons majoritairement.

Ces deux types de protocoles sont des fichiers textes avec séparateurs et sont donc lisibles par un tableur. Des exemples en sont donnés en Annexe D.1. Le logiciel ANAÏS est celui qui permet la transformation des protocoles brutes en protocoles filtrés, cf. Figure 3.6. Il est aussi celui qui calcule les diagnostics des pas de calcul, comme nous allons le voir dans la section suivante.

3.2.4 Les différents mécanismes

Des protocoles filtrés, est extraite la suite de pas de calcul, chacun constitué de deux expressions : l'expression mère transformée en l'expression finale. Rappelons que l'expression mère ne correspond pas nécessairement à l'expression donnée dans la consigne de l'exercice, tout comme l'expression finale ne correspond pas nécessairement à la dernière expression de la résolution de l'exercice. Nous noterons E , l'expression mère et F , l'expression finale ; le pas de calcul est donc $E \rightarrow F$. Le mécanisme de diagnostic implanté dans le logiciel ANAÏS, a pour but de chercher les diagnostics de ce pas de calcul comme un enchaînement de règles qui permet de passer de E à F .

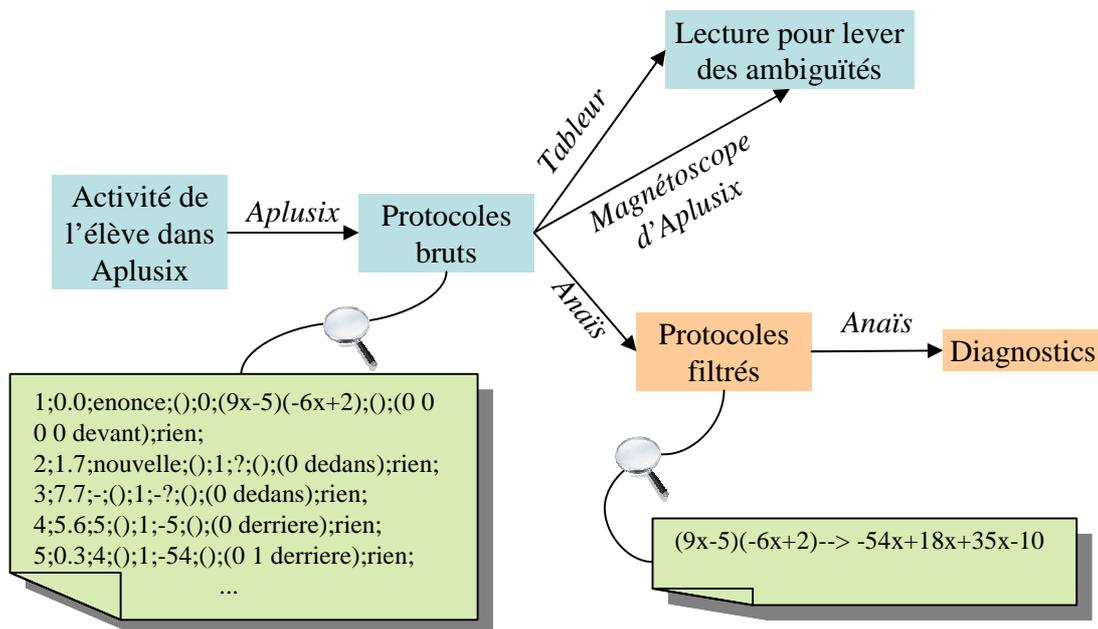


FIGURE 3.6 – Le logiciel ANAÏS permet de transformer les protocoles bruts, rejouables par le magnétoscope d'APLUSIX, en protocoles filtrés, qui ne contiennent que les pas de calcul. Le protocole filtré consiste en la transformation $(9x - 5)(-6x + 2) \rightarrow -54x + 18x + 35x - 10$ (écrite en texte). Il n'y a qu'un court extrait du protocole brut correspondant : seule la partie $(9x - 5)(-6x + 2) - - > -54$ est écrite. Chaque frappe est indiquée (le signe « -? », le signe « 5 » qui forme « -5 » puis le signe « 4 » ; le signe suivant serait « x »). L'exploitation de ces données filtrées se fera par le logiciel Anaïs.

Définition. Nous appellerons *chemin*, toute succession de règles qu'ANAÏS envisage, que ce chemin devienne un diagnostic (chemin qui permet de passer de E à F) ou non (chemin qui part de E mais ne mène pas à F).

Une *Transformation-Anaïs* est le couple transitoire constitué des sous-expressions produites par ANAÏS. Il y a autant de règles diagnostiquées que de transformation-Anaïs.

Trois mécanismes de diagnostics ont été implantés et testés. Leur présentation ne sera pas faite dans l'ordre chronologique mais dans l'ordre qui est le plus naturel : de celui que l'on a envie spontanément de tester, sans connaissance poussée en informatique, à celui qui demande connaissances et réflexion en informatique. Le premier, appelé algorithme en largeur, propose l'ensemble complet des chemins possibles. Il effectue une recherche systématique et « aveugle ». Le nombre de règles dans notre base étant importante et le mécanisme de l'algorithme étant exponentiel, les machines actuelles ne peuvent pas aller au delà des chemins constitués de trois règles.

Le second et le troisième mécanismes (algorithme heuristique de coût et probabiliste) sont basés sur une recherche heuristique. La recherche heuristique représente une technique alternative de résolution de problèmes en intelligence artificielle, utilisée pour les problèmes qui sont caractérisés par une explosion combinatoire d'états. Les techniques de recherche heuristique utilisent un ensemble de conditions qui permettent d'évaluer la probabilité qu'un chemin qui part de E atteigne F « mieux » que les autres chemins, avant même de tous les parcourir. Cette information est censée améliorer le processus de recherche en temps mais aussi en qualité.

Nous présentons ces trois modèles pour ensuite les comparer à la fois sur le plan quantitatif (temps, nombre de diagnostics, etc) et qualitatifs (évaluation manuelle de diagnostics automatiques en les comparant à notre propre analyse manuelle des protocoles).

L'algorithme en largeur

Comme les deux autres algorithmes, l'algorithme en largeur part de E et applique toutes les règles de notre bibliothèque applicables¹¹ à E . Cela crée autant de nouvelles expressions que de règles qui se sont appliquées. Nous appellerons ces nouvelles expressions, des *nœuds*. Nous dirons qu'un nœud est *développé* lorsque nous lui appliquons les règles de notre bibliothèque.

À ce moment, cet algorithme se distingue des algorithmes heuristiques. En effet, il applique, à nouveau, à *tous* les nouveaux nœuds non développés toutes les règles qui leur sont applicables, sans *aucune sélection du nœud à développer*. Et ainsi de suite, cf. figure 3.7. Il balaye ainsi tous les possibles. Cependant, il est à noter que le mécanisme est exponentiel : si l'on considère que de manière uniforme, ce sont n règles qui peuvent être appliquées à chaque nœud (dans la pratique, le n varie selon chaque nœud), n expressions seront créés au premier pas, n^2 seront créés au second pas et n^k au k -ième. Comme nous l'avons dit précédemment, le nombre de règles est tel que l'algorithme ne fonctionnera que jusqu'au troisième ou quatrième pas¹², en un temps assez long¹³. Au bout du troisième pas, le processus s'arrête. Seuls les chemins qui aboutissent à un nœud syntaxiquement égal à l'expression finale F sont retenus et sont dénommés diagnostics. Sont écartés les chemins qui n'ont pas permis de passer en quatre pas de l'expression E à F .

Cet algorithme fournit donc l'ensemble de *toutes les séquences possibles de quatre règles* de la bibliothèque permettant de passer de E à F . Sa force réside en l'exhaustivité des diagnostics proposés. Les défauts de cet algorithme ne sont pas tant liés au manque de puissance de machines : le nombre de trois règles pourrait paraître suffisant pour expliquer une transformation d'élève. Mais, d'une part, avec les règles telles que nous les avons écrites, il faut bien souvent plus de quatre règles pour expliquer un pas de calcul même élémentaire (il faut déjà deux règles et non pas une seule pour passer de $3x - 2x$ à x , car il y a une règle qui permet de passer de $3x - 2x$ à $1x$ et une autre qui transforme $1x$ en x). Nous verrons dans la suite qu'il y a une grande part des diagnostics émanant des algorithmes heuristiques qui contiennent plus de quatre règles. D'autre part, un autre inconvénient de ce processus est qu'aucune sélection n'est faite sur les diagnostics sortants. Cela peut être perçu comme une qualité puisqu'il y a exhaustivité, mais pour le lecteur de tels résultats, les résultats sont trop nombreux pour être exploités de manière fonctionnelle. Enfin, cet algorithme est lent et ne pourrait être en aucun cas exploité en temps réel au cours du travail de l'élève, ce qui peut être une des exploitations futures de nos travaux.

Les algorithmes heuristiques

Le logiciel ACM [Langley and Ohlsson, 1984] a lui aussi fini par s'orienter vers une recherche heuristique plutôt qu'une recherche exhaustive [Wenger, 1987a]. L'algorithme que nous avons

11. cf. section 3.2.1.

12. Le nombre de trois ou quatre pas varie selon les règles qui s'appliquent et surtout leur nombre. cependant, en général, l'algorithme s'arrête à trois pas.

13. Les essais ont été fait sur un ordinateur Intel Xeon de 2006, bi-processeur. Sa vitesse d'horloge est de $3Ghz$ et sa mémoire vive de $3Go$.

finalement choisi est un algorithme de recherche heuristique¹⁴ de type meilleur d'abord¹⁵. L'intérêt de la recherche heuristique réside dans la limitation du nombre de nœuds développés, ce qui conduit d'abord à un succès assuré dans certains contextes (pas dans le nôtre) mais aussi à une économie de temps, d'espace mémoire et à une sélection des diagnostics. Le principe de l'heuristique est simple : elle permet de déterminer le nœud qui va être développé, le nœud sur lequel les règles vont être appliquées. Dans notre cas, l'heuristique consiste en un nombre qui représente la proximité structurelle d'un nœud à F . Nous expliquerons plus loin quelle est cette « distance » mais pour l'heure, disons que deux expressions syntaxiquement égales sont à distance nulle et que deux expressions équivalentes sont plus proches que deux expressions non équivalentes, cf figure 3.7.

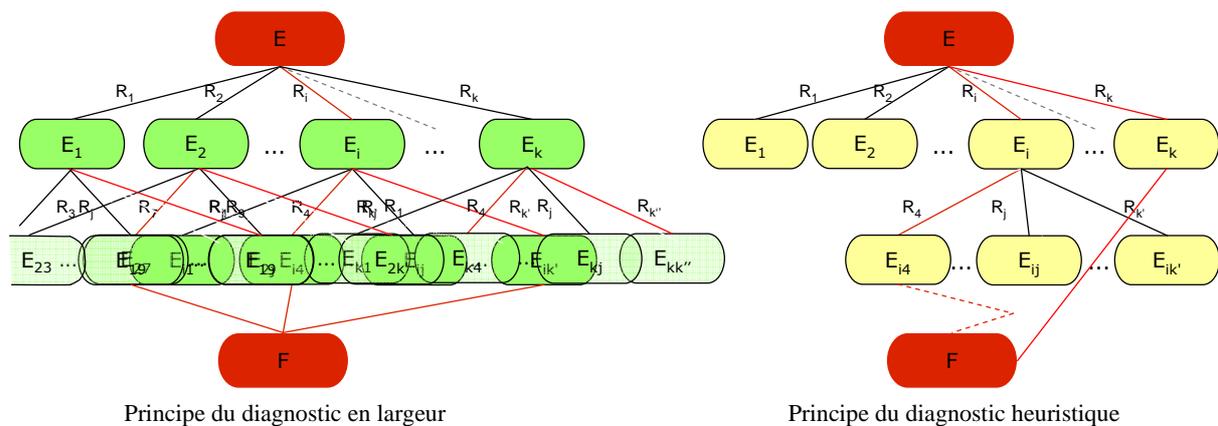


FIGURE 3.7 – Le diagnostic en largeur cherche l'ensemble complet des diagnostics possibles (cela donne un nombre exponentiel d'expressions à calculer) tandis que le diagnostic heuristique sélectionne selon des critères les nœuds à développer (au niveau 1, il y a k calculs, au niveau 2, $k + k'$ calculs...)

Partant de E , le mécanisme applique toutes les règles applicables, mettons k règles. À ce niveau 1, il existe alors k nœuds non encore développés et k distances à calculer qui séparent ces nœuds de F . Au nœud dont l'heuristique est la plus faible, sont appliquées toutes les règles applicables, mettons k' règles. À ce niveau 2, il existe alors $k + k' - 1$ nœuds non encore développés et $k + k' - 1$ distances à calculer qui séparent tous ces nœuds de F . Au nœud dont la distance est la plus courte, sont appliquées toutes les règles applicables, et ainsi de suite. Les nœuds nouvellement développés ne sont pas nécessairement ceux qui sont les plus proches, en terme de distance heuristique, de F . Il se peut qu'un des nœuds du niveau inférieur soit plus proche, auquel cas, le mécanisme est capable de revenir en arrière pour développer ce nœud, plutôt qu'un des derniers nœuds développés. Notons aussi que les algorithmes implantés pour notre travail ne sont pas des algorithmes heuristiques « classiques ». En effet, ils sont capables de sélectionner non pas *le* nœud qui va être développé mais *un ensemble* de nœuds qui semblent « judicieux » à être développé. En effet, l'heuristique que nous avons choisie n'assure pas de trouver le meilleur diagnostic en premier, nous avons donc compensé cela en n'arrêtant pas l'algorithme à la première solution qu'il trouvait¹⁶.

14. Dans la théorie de recherche heuristique, il existe, en fonction des propriétés de l'heuristique et des règles qui s'appliquent (appelées plus généralement des opérateurs) des théorèmes qui assurent la convergence de l'algorithme vers une solution, voire vers la meilleure solution [Pearl, 1984]

15. qui consiste à lister à chaque nœud toutes les règles applicables, sélectionner le « meilleur » nœud et à itérer le processus afin de construire un arbre de solutions.

16. Les règles dites faibles ont un fonctionnement différent : Lorsqu'une branche de la recherche heuristique

Cela donne donc un arbre dont plusieurs chemins permettent de passer de E à F . Il y a deux critères qui permettent d'écartier un nœud afin qu'il ne soit pas développé : si la distance heuristique qui sépare le nœud de F est trop grande, mais aussi si un certain coefficient associé au chemin qui mène à ce nœud est considéré comme « médiocre ». Le principe de l'heuristique est le même pour l'algorithme heuristique de coût et l'algorithme heuristique probabiliste. L'heuristique est une somme pondérée de trois nombres dont, seul, le dernier diffère selon si on est sous une représentation en coût ou en probabilité. Nous allons donc d'abord présenter le principe général de l'heuristique pour ensuite s'intéresser à chacun des algorithmes en particulier.

L'heuristique est une fonction qui à deux expressions associe un nombre représentant une proximité entre ces deux expressions. L'algorithme a ceci de particulier que deux expressions sémantiquement proches, voire de même dénotation, peuvent être très éloignées syntaxiquement et deux expressions qui ne diffèrent que par un seul symbole peuvent avoir des dénominations très différentes. De ce fait, nous avons choisi une heuristique H qui est la somme pondérée de deux distances et d'une « longueur » :

$$H = \alpha d_{SEM} + \beta d + \gamma_i c_i, \quad (3.2)$$

Les deux premières représentent des distances qui séparent le nœud de F , tandis que la troisième dépend de la distance qui sépare le nœud de E , c'est-à-dire qu'elle dépend de la longueur du chemin qui a mené au nœud. Contrairement aux deux autres, la fonction c_i ne vaut pas la même chose selon si on est en représentation en coût ou en probabilité. Les trois coefficients α , β et γ_i sont présents pour ajuster les poids des trois quantités : alors que d_{SEM} est de l'ordre de la dizaine, c_i est de l'ordre du centième pour l'algorithme probabiliste et de l'ordre de l'unité pour l'algorithme en coût, c'est pourquoi il est nécessaire de les pondérer. Les coefficients α et β ont été fixés respectivement à 6 et 8. De nombreux essais ont montré que ces coefficients avaient peu d'influence en termes de résultats : l'heuristique est globalement stable et les diagnostics résultants en sont peu dépendants. Pour l'algorithme en termes de coût, γ_i vaut 10 et pour l'algorithme en termes de probabilité, γ_i vaut 4000. Nous verrons plus loin comment l'élément c_i est calculé.

La distance d est une distance d'exploration basée sur des critères de longueur minimale. Elle se base sur la notion de fonction de complexité C , qui associe à un objet un nombre représentant sa complexité :

La complexité d'un entier est 1,

La complexité d'une variable est 8,

La complexité d'une expression est la somme de la complexité de ses arguments,

La complexité d'une règle appliquée à une expression est la somme de 8 et de la complexité de l'expression.

La distance d est alors calculée de la manière suivante :

a produit $E_0 \rightarrow E_i \rightarrow \dots E_{ij}$ et que le but est F , l'algorithme étudie si une règle faible peut alors faire passer de E_{ij} à F . Si c'est le cas, elle est appliquée et nous obtenons une solution. Si ce n'est pas le cas, la règle n'est pas appliquée (contrairement aux autres règles qui sont appliquées systématiquement, en espérant qu'elles nous rapprochent du but).

Calcul de la distance d

Si E_i et E_j sont égales modulo la commutativité
 Alors la distance est 0, Sinon
 Si E_i et E_j sont égales modulo l'associativité et la commutativité
 Alors la distance est 1, Sinon
 Si E_i et E_j sont égales modulo la commutativité
 quand on a supprimé les parenthèses inutiles et les signes « - »
 Alors la distance est 2, Sinon
 Si E_j est égal à E_i en ajoutant ou enlevant un opérateur unaire à la
 racine
 Alors la distance est 8, Sinon
 Si E_j est égal à E_i en ajoutant ou enlevant un argument
 Alors la distance est la complexité de cet argument, Sinon
 Si E_i et E_j ont même opérateur et un seul argument différent
 Alors la distance est celle qu'il y a entre les arguments qui diffé-
 rent, Sinon
 Si E_i et E_j ont même opérateur et plusieurs arguments différents
 Alors la distance est la somme des complexités des arguments qui diffé-
 rent, Sinon
 Si E_i et E_j ont des opérateurs différents
 Alors la distance est la somme des complexités des arguments qui diffé-
 rent augmentée de 8.

La distance d_{SEM} est une distance à une résolution experte prédéfinie. Elle mesure la séparation sémantique qui existe entre deux expressions. Elle vaut donc zéro quand les deux expressions ont même dénotation. Son calcul est un peu abscons et nous proposons de ne donner le calcul de la distance que pour quelques expressions algébriques (le code de la distance sémantique est donné en Annexe D.2) :

- Si $e_1 = 3x + 5x$ et $e_2 = 8x$, alors $d(e_1, e_2) = 42$ et $d_{SEM}(e_1, e_2) = 0$;
- Si $e_1 = 3x + 5x$ et $e_2 = 8x^2$, alors $d(e_1, e_2) = 42$ et $d_{SEM}(e_1, e_2) = 3$;
- Si $e_1 = 3x + 5x$ et $e_2 = ? + 8x$, alors $d(e_1, e_2) = 18$ et $d_{SEM}(e_1, e_2) = 3$;
- Si $e_1 = 3x + 5x$ et $e_2 = 15x$, alors $d(e_1, e_2) = 42$ et $d_{SEM}(e_1, e_2) = 2$;
- Si $e_1 = 3x + 5x$ et $e_2 = 15x^2$, alors $d(e_1, e_2) = 42$ et $d_{SEM}(e_1, e_2) = 3$;
- Si $e_1 = 3x + 5x$ et $e_2 = 3x$, alors $d(e_1, e_2) = 25$ et $d_{SEM}(e_1, e_2) = 2$.

L'algorithme heuristique de coût AHC. C'est un algorithme habituel en recherche heuristique car simple et souvent efficace.

1. Initialisation des coûts des règles

Chaque règle reçoit un coût par défaut paramétrable. Le coût a été choisi de 1 pour les règles correctes, de 3 pour les règles erronées et de 4 pour les règles dites faibles (cf. section 3.2.2). Ces coûts sont une conséquence d'une de nos hypothèses de travail (cf. section 3.1.1) : privilégier les règles correctes aux règles erronées.

2. Coût d'un chemin, c_c

Le coût d'un chemin est la somme des coûts des règles qui constituent ce chemin. Par exemple, si un chemin est constitué d'une règle correcte et d'une règle erronée, son coût est de $1 + 3$. Un chemin est d'autant « meilleur » que son coût est plus faible. À un niveau

donné, le « meilleur » chemin est celui qui a le coût le moins élevé parmi tous les chemins existants. Dans l'égalité de l'heuristique (égalité (3.2), p.115), H s'instancie ici en :

$$H = \alpha d_{SEM} + \beta d + \gamma_c c_c, \text{ où } \gamma_c = 10$$

3. Sélection des « meilleurs » nœuds

Comme il a été dit plus tôt, un nœud qui n'est pas développé est soit un nœud trop éloigné de F (calcul de la distance heuristique H ci-dessus) soit un nœud dont le coût du chemin qui y menait a été considéré comme « médiocre ». Dans ce type d'algorithme, est considéré comme coût « médiocre », un coût supérieur à la somme du coût du meilleur chemin et d'un seuil maximum paramétrable (fixé à 3). Par exemple, à un niveau donné, si le coût le plus faible des chemins est de 4, tout chemin de coût supérieur à $4 + 3$ est écarté.

Le coût du chemin a donc une double influence sur l'écartement d'un nœud : il rentre dans la composition de l'heuristique H et dans le coefficient de médiocrité.

4. Coût d'un diagnostic

Un chemin qui mène à F obtient le statut de diagnostic. Le coût associé au diagnostic est celui du chemin : ils ne diffèrent pas. C'est donc la somme des coûts des règles qui le constituent. Nous verrons une différence notable avec l'algorithme heuristique probabiliste, où le coefficient associé au diagnostic n'est pas égal à celui du chemin.

L'algorithme heuristique probabiliste AHP. Comme nous le verrons plus loin, l'algorithme heuristique de coût est satisfaisant d'un point de vue informatique : il permet d'obtenir des résultats performants. Cependant, d'un point de vue pédagogique, il n'a guère de sens : que représente réellement le « coût » ? Quelle théorie y a-t-il derrière ? Un outil simple pour mesurer la qualité d'un chemin est une représentation en termes de probabilité : nous aurions aimé que le coefficient associé à un chemin (resp. à une règle) représente la *probabilité* que l'élève a d'avoir utilisé ce chemin (resp. cette règle). Le principe de l'algorithme heuristique probabiliste que nous avons mis en place est donc le même que l'algorithme heuristique de coût, sauf en termes des coefficients associés aux règles, aux chemins et aux diagnostics.

Le processus se fait comme suit :

1. Initialisation des coefficients des règles détaillées

On initialise un coefficient sur $]0, 1]$ à chaque règle détaillée, via la hiérarchie de règles 3.4, section 3.2.1 dans le sens suivant : soit on associe manuellement à une règle détaillée un coefficient (dans ce cas, le coefficient initial de la règle détaillée est celui-ci) soit il n'y a pas de coefficient directement associé à la règle détaillée (dans ce cas, le coefficient initial de la règle détaillée est le premier coefficient rencontré dans la hiérarchie en remontant). Par exemple, si aucune des règles détaillées et SIM d'une règle abstraite n'a de coefficient, elles prennent par défaut toutes le même coefficient, celui de la règle abstraite. Voilà les coefficients retenus :

- Les règles correctes, de coefficient 1.
- Les règles erronées considérées comme rares ou dont le type de tâches dont elle relève est rare aux niveaux scolaires qui nous intéressent (par exemple, les règles sur $(a^n)^p$) ainsi que les règles « faibles ». Le coefficient 0.2 leur est associé.
- Les règles erronées considérées comme possiblement fréquentes. Le coefficient de 0.4 leur est associé.

Ces coefficients ont été stabilisés après quelques sessions de diagnostics en fonction principalement du taux d'application (cf. section 3.2.5, p. 126).

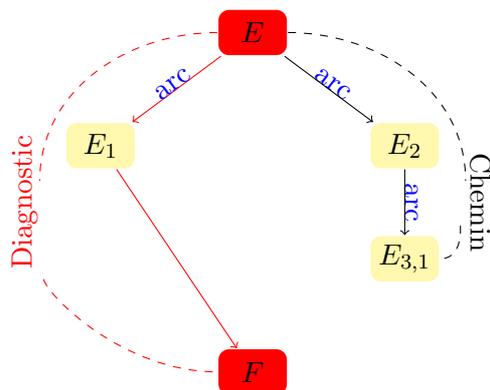


FIGURE 3.8 – Nom associé aux flèches

2. Probabilité d'un arc, P_a

Un arc est l'application d'une règle à une expression E_i , cf. figure 3.8, p. 118. La probabilité d'un arc est le quotient du coefficient de la règle appliquée par la somme des coefficients des règles qui se sont appliquées à E_i .

3. Probabilité d'un chemin, P_c

Un chemin est une suite d'arcs. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des arcs qui constituent le chemin. Cette probabilité est interprétée comme la probabilité que l'élève ait suivi ce chemin. Plus la probabilité est forte, « meilleur » est le chemin.

4. Coefficient de distance d'un nœud à E , c_p

Pour rendre homogène les trois termes dans la somme de H , il faut prendre $c_p = -\ln(P(c))$. Cela donne l'heuristique H suivante :

$$H = \alpha d_{SEM} + \beta d + \gamma_p c_p, \text{ où } \gamma_p = 4000 \text{ et } c_p = -\ln(P(c)).$$

5. Sélection des « meilleurs » nœuds

Comme plus haut, un nœud (par exemple, l'expression E_n qui n'est pas développé est soit un nœud trop éloigné de F (calcul de la distance heuristique $H(E_n, F)$) soit un nœud dont la probabilité du chemin qui y menait a été considérée comme « médiocre ». Dans ce type d'algorithme, est considéré comme probabilité « médiocre », une probabilité inférieure au produit de la probabilité du meilleur chemin par un seuil paramétrable (fixé à 0.2). Par exemple, à un niveau donné, si la probabilité du meilleur chemin est de 0.8, tout chemin de probabilité inférieure à 0.8×0.2 est écarté.

6. Probabilité d'un diagnostic, P_d

Un diagnostic est un chemin qui a abouti : un chemin qui permet de passer de E à F . La probabilité d'un diagnostic est le quotient de la probabilité du chemin par la somme des probabilités des chemins ayant abouti. Ainsi, la somme des probabilités des diagnostics vaut bien 1.

Ce qui est intéressant dans ce modèle, c'est que le coefficient associé au diagnostic $P(d)$ est vraiment la probabilité que l'élève a eu d'utiliser ce chemin plutôt qu'un des autres proposés par Anaïs. Étudions l'exemple donné en figure 3.9, p. 120. À partir de E , il y a eu créations de 4 chemins, dont deux n'ont pas abouti à F . Supposons que les coefficients initiaux des quatre

règles en présence, R_1 , R_2 , R_3 , R_4 et R_5 sont respectivement 0.5, 0.5, 1, 0.4 et 0.2. Dans ce cas,

$$P_a(\overline{EE_1}) = \frac{0.5}{0.5 + 0.5 + 1} = \frac{1}{4};$$

$$P_c(\overline{E_1F}) = \frac{1}{1} = 1;$$

$$P_c(\overline{EE_1F}) = \frac{1}{4};$$

$$P_a(\overline{EE_2}) = \frac{0.5}{0.5 + 0.5 + 1} = \frac{1}{4};$$

$$P_a(\overline{E_2E_{2,2}}) = \frac{0.2}{0.5 + 0.2} = \frac{2}{7};$$

$$P_c(\overline{EE_2E_{2,2}}) = P(\overline{EE_2}) \times P(\overline{E_2E_{2,2}}) = \frac{1}{14};$$

$$P_c(\overline{EE_2E_{2,2}F}) = P(\overline{EE_2}) \times P(\overline{E_2E_{2,2}}) \times P(\overline{E_{2,2}F}) = \frac{1}{14} \times 1 = \frac{1}{14};$$

$$P_a(\overline{EE_3}) = \frac{1}{1} = 1;$$

$$P_c(\overline{E_3E_{3,1}}) = \frac{0.4}{0.4} = 1;$$

Il reste à calculer les probabilités des deux diagnostics, $P_d(\overline{EE_1F})$ et $P_d(\overline{EE_2E_{2,2}F})$:

$$\begin{aligned} P_d(\overline{EE_1F}) &= \frac{P_c(\overline{EE_1F})}{P_c(\overline{EE_1F}) + P_c(\overline{EE_2E_{2,2}F})} \\ &= \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_d(\overline{EE_2E_{2,2}F}) &= \frac{P_c(\overline{EE_2E_{2,2}F})}{P_c(\overline{EE_1F}) + P_c(\overline{EE_2E_{2,2}F})} \\ &= \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Le chemin de gauche, via E_1 est donc plus probable que le chemin de droite, via E_2 . Le fait que le chemin de gauche soit plus court est nettement influant.

Nous pouvons maintenant répondre à la question :

Comment quantifier les règles qui modélisent
possiblement le travail de l'élève ?

À la suite d'un diagnostic d'un pas de calcul d'élève, nous associons une « probabilité d'utilisation », PU , à chacune des règles détaillées :

Définition. Soit R une règle détaillée.

La *probabilité d'utilisation* de la règle R est la somme $\sum_{i/R \in d_i} P(d_i)$: la somme des probabilités des diagnostics où R est apparue.

Cette somme est toujours inférieure à 1. Elle représente la probabilité que l'élève ait utilisé R pour transformer la source en but.

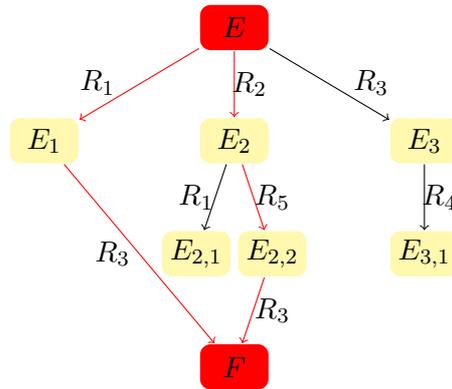


FIGURE 3.9 – Exemple d'un processus de diagnostic.

Dans l'exemple ci-dessus, nous obtenons :

$$PU_{R_1} = \frac{7}{9}$$

$$PU_{R_2} = \frac{2}{9}$$

$$PU_{R_3} = \frac{2}{9} + \frac{7}{9}$$

$PU_{R_4} = 0$, R_4 n'a jamais été diagnostiquée par Anaïs

$$PU_{R_5} = PU_{R_2} = \frac{2}{9}$$

$PU_{R_6} = 0$, R_6 n'a jamais été appliquée par Anaïs.

Mise en œuvre et représentation des diagnostics

Les pas de calcul effectués par les élèves sont enregistrés dans une base de données, cf. figure 3.10. Cela permet de faire des sélections de sous-ensembles de données sur lesquels est étudiée la pertinence des diagnostics. Par exemple, pour travailler sur les erreurs ne portant pas sur les équations, les transformations erronées contenant un signe égal sont exclues grâce à une requête en langage SQL (cf. section 3.2.5 et figure 3.11). L'algorithme est ensuite lancé sur les pas de calcul sélectionnés. Nous appelons ce processus une « session de diagnostics ».

À la suite d'une session, un diagnostic de règles provenant de notre bibliothèque est attribué à chaque pas de calcul. Chacune des règles produit une étape intermédiaire (un nœud) au pas de calcul, cf. 3.12. Les transformations intermédiaires diagnostiquées sont appelées des *transformations-Anaïs*.

Trois critères sont influents à la fois sur le calcul de la probabilité mais aussi sur l'heuristique et reposent sur les principes généraux des diagnostics, H73, énoncés au début de ce chapitre :

- les règles correctes sont privilégiées aux règles erronées que ce soit dans le calcul de la probabilité d'un chemin (et donc de l'heuristique) ou dans le calcul de la probabilité d'un diagnostic ;
- un chemin comportant moins de règles est privilégié sur un autre ayant plus de règles ;
- de part les coefficients initiaux donnés aux règles et surtout le mécanisme lui-même, les règles « conceptuelles » sont privilégiées aux règles dites « faibles ».

Choix de la base des pas de calculs

Pas de calcul de la base de données

Id	DerSession	Source	But	Equiv	Qualif	Eleve
13982	75	$5x^2+3x-7-3x^2+2x+8$	$x(5+5+3+3+3+2)-7+8$	0	Effondre	BLESBOIS
13983	74	$-11x=-22/2$	$x=0$	0	RedAddMon	BLESBOIS
13984	75	$6x^2-8x$	$x(6+6-8)$	0	Effondre	BLESBOIS
13985	74	$-3+2x=-2x-2$	$-1=-2x-2x$	1	RedAddMon	BLESBOIS
13986	74	$5x(-2+3x)-8x(-5x+8)$	$5x(-2)+5x^3x+(-8x)(-5x)-8x^8$	1	AjoutParenthese	BLESBOIS
13987	74	$5x^2(-2)+5x^3x+(-8x)(-5x)-8x^8$	$-10x+15xx+40xx-64x$	1	SuppParenthese	BLESBOIS
13988	74	$-9=x-7$	$-9+7=x$	1	MoveAddRel	BLESBOIS
13989	74	$-9+7=x$	$x=2$	1	CalculNum	BLESBOIS
13990	74	$-3(-7+2x)+4(7+6x^2)$	$49-6x+24x^2$	1	SuppParenthese	BLESBOIS
13991	74	$-7/2)x=5$	$x=5-7/2$	0	AntiRedAddMon	BLESBOIS
13992	74	$x=5-7/2$	$x=5-7/2$	1	idem	BLESBOIS

4910 enregistrements

Expression mère

Expression finale

Pas de calcul

Equivalence : 0 pour un pas de calcul erroné, 1 pour un pas de calcul correct

Qualification du pas de calcul

Nom élève

FIGURE 3.10 – Copie d'écran d'Anaïs : base de données d'une classe de 3^e.

The screenshot shows the 'Calculs de diagnostics' window. At the top, there are menu options: 'Enregistrer en CSV', 'Requête', 'Fenêtre principale', 'Fenêtre résultat', 'Diag d'une transfo', and 'SIM'. Below the menu is a 'Champs' section with a list of fields. A 'Requête pour effectuer un diagnostic' text area contains the following SQL-like query:

```
Select Id, Source, But, Equiv, Qualif, Eleve, TypeExo, ExTypeSolve, ExTypeExpand, ExTypeRed, ExTypeFactor, ExTypeCalcul, Resultat, Resolu, ResultTypeUnit, ResultTypePri
From TransfoEleve
Where (Source Not LIKE '%=%')
and (But Not LIKE '%=%')
order by id
```

To the right of the query is an 'Exécuter la requête' button. Below the query editor are several options: 'Fichier CSV avec contextes et règles' (with checkboxes for 'Très abstraites', 'Abstraites', 'Peu abstraites', 'Fines', 'Très fines'), 'Résultats spécifiques' (checked), 'Description du diagnostic: ECR courant : ModeleA', 'Lancer le calcul des diagnostics' button, 'Diag avec les coûts' (unchecked), 'Diag probabiliste' (checked), 'Toutes les règles' (unchecked), and 'Règles de la qualif' (checked). A 'Choix de l'algorithme' label points to these options.

The main part of the window is a table with the following columns: Id, Source, But, Equiv, Qualif, Eleve, TypeExo, and Exi. The table contains 10 rows of data. A 'Pas de calcul' label points to the 'Source' column.

At the bottom of the screenshot, there are labels for the columns: 'Expression mère' (pointing to Source), 'Expression finale' (pointing to But), 'Equivalence' (pointing to Equiv), 'Qualification du pas de calcul' (pointing to Qualif), and 'Nom élève' (pointing to Eleve).

FIGURE 3.11 – Copie d'écran d'une requête portant sur des transformations ne contenant pas de signe =.

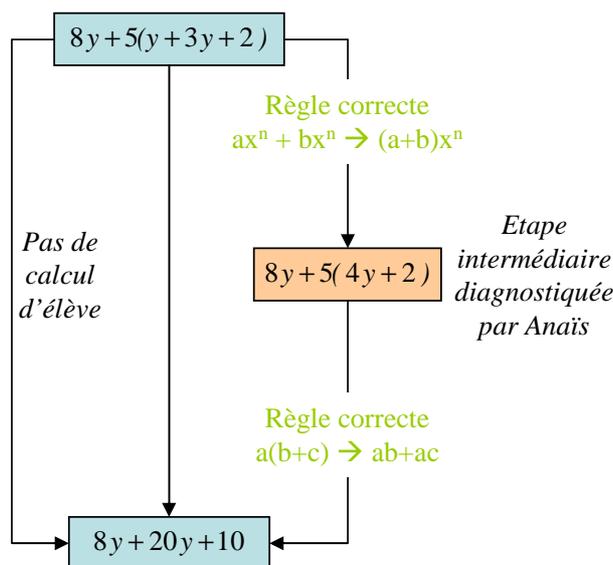


FIGURE 3.12 – Exemple d'un diagnostic d'un pas de calcul : deux règles lui sont associées. La première fournit un pas de calcul intermédiaire. Les passages de $8y + 5(y + 3y + 2)$ à $8y + 5(4y + 2)$ et de $8y + 5(4y + 2)$ à $8y + 20y + 10$ s'appellent des transformations Anaïs.

Bien que ces critères soient nettement décisifs, en particulier dans le calcul de l'heuristique, il n'en reste pas moins que parfois, l'heuristique se perd ou tout au moins ne privilégie pas le chemin que l'on aurait souhaité privilégier. La probabilité d'un diagnostic que l'on aurait souhaité être de probabilité la plus forte est elle aussi parfois plus faible que celle d'un autre diagnostic. Pour ces raisons, nous avons « relu » des chemins diagnostiqués automatiquement afin de les comparer à ceux que nous aurions attendus. Ce sont les mêmes critères que ceux ci-dessus qui ont guidé notre lecture critique.

Nous distinguons trois types de qualité d'un diagnostic associé à un pas de calcul. Considérons un diagnostic d , associé à un pas de calcul $E \rightarrow F$.

- S'il n'existe pas d'association de règles provenant de notre *bibliothèque a priori* permettant de passer de E à F et comportant moins de règles erronées ou plus de règles conceptuelles que d , alors d est considéré comme *correct* ou *bon*.
- S'il existe au moins une association de règles provenant de notre bibliothèque a priori permettant de passer de E à F , comportant moins de règles erronées ou plus de règles conceptuelles que d mais qui *pour des raisons de codage de règles* n'est pas diagnosticable ou si une règle conceptuelle devrait être ajoutée, alors d est considéré comme *moyen*.
- S'il existe au moins une association de règles provenant de notre *bibliothèque SIM* permettant de passer de E à F , comportant moins de règles erronées ou plus de règles conceptuelles que d ou si un échec vaudrait mieux que d , alors d est considéré comme *mauvais*.

Des exemples de ces trois types de diagnostics sont donnés dans le tableau 3.14, p. 124. D'autre part, L'algorithme peut aussi être mis en échec, si aucune séquence de règle n'a permis de diagnostiquer un pas de calcul. L'échec est rarement dû à une heuristique qui se perd. En général, il est dû à des pas de calcul soit complexes (combinaison de plusieurs règles), soit des règles manquantes soit des pas extravagants. L'échec est considéré comme « correct » si le pas de calcul est inexplicable ou trop extravagant ; il est considéré comme « moyen » si le pas de calcul comporte une combinaison de plus de 3 règles qui auraient pu être diagnostiquées ; il est considéré comme « mauvais » si le pas de calcul aurait dû être diagnostiqué par exemple par une règle qui n'a pas été implantée ou qui ne peut s'appliquer à cause de condition au but trop fortes ou de paramètres trop restrictifs (exp : nombre de pas). Des exemples de ces trois types d'échecs sont aussi donnés dans le tableau 3.15, p. 124.

Les résultats de la session sont eux aussi regroupés dans une base de données sur laquelle des requêtes peuvent à nouveau être effectuées : lister les règles détaillées diagnostiquées, leurs occurrences, idem pour les règles SIM ; La mise au point du diagnostic et de la bibliothèque de règles s'effectue ensuite en effectuant plusieurs réglages : modifier le codage d'une règle, ajouter, supprimer ou modifier des règles, paramétrer différemment l'algorithme, cf. section 3.2.5.

3.2.5 Les différents outils d'amélioration

Afin d'améliorer les diagnostics, différents outils ont été mis en place ; certains, afin d'améliorer la recherche heuristique en réduisant l'explosion combinatoire (isolation, qualification, incompatibilité, taux d'application, paramètres) ; d'autres, pour mieux évaluer la qualité des diagnostics (trace, différentes requêtes). Il est difficile d'être exhaustif dans cette section. Notons, en particulier, que les conditions sur le but de certaines règles (cf. section 3.2.1, p. 101) sont aussi un moyen d'améliorer la recherche, même si ce processus n'est pas re-décrit ici.

Pas de calcul	Diagnostic de probabilité la plus forte	Qualité	Explications
$-2x^2 - 2x^2 \rightarrow 0$	$ax^n + ax^n \rightarrow 0$	bon	Règle attendue
$-2x^2 - 2x^2 \rightarrow 0x^2$	Erreur de groupement additif	moyen	Règle faible non conceptuelle. La règle a priori $ax^n + ax^n \rightarrow 0$ aurait pu être attendue. Cependant, elle ne s'applique pas ici.
$3x - 18 + 3x + 6 + 5x^2 \rightarrow 31x - 12$	$-18+6 \rightarrow -12$ (Plus- Nombre) $3x + 5x^2 \rightarrow 8x$ (ER_AddMon-plusCoef- minDg) $3x + 8x \rightarrow 31x$ (ER_groupAdditif)	mauvais	Soit la règle faible ER_groupAdditif (sans l'association avec ER_AddMon-plusCoef-minDg) soit un échec aurait été mieux.

TABLE 3.14 – Exemples de qualité de diagnostics.

Pas de calcul	Qualité	Explications
$5x \times (-2)5x \times 3x - 8x \times (-5x) + 8x + 8 \rightarrow (-42x) + 8$	bon	Pas de calcul incompréhensible.
$5x(-2+3x) - 8x(-5x+8) \rightarrow 5x(-2+8) - 8x(3x-5x)$	moyen	La règle $a(b+cx) + d(e+fx) \rightarrow a(b+e) + d(cx+fx)$ est manquante pour que ce pas soit diagnosticable.
$-2x - 2x - 2x + 7x \times 2x - 1 + x + 4 + 3x \rightarrow 12x + 3$	mauvais	L'algorithme aurait dû fonctionner car toutes les règles expliquant ce pas sont implémentées (une seule erreur : perte du carré). C'est le trop grand nombre de règles devant s'associer pour expliquer le pas qui perturbe l'heuristique. En effet, le diagnostic devrait comporter 6 règles correctes et une erronée.

TABLE 3.15 – Exemples de qualité attribuée à des pas de calcul sur lesquels le logiciel a échoué.

Le principe de l'isolation

Une propriété d'isolation des sous-expressions concernées par la transformation a été mise en place. L'isolation consiste à comparer les deux expressions et enlever les arguments communs. Par exemple, après isolation, le pas de calcul $3x+5x+2x \rightarrow 8x+2x$ devient $3x+5x \rightarrow 8x$. Cependant, certaines règles ne pourraient jamais s'appliquer si l'isolation s'appliquait systématiquement à toutes les transformations. Prenons l'exemple du pas de calcul suivant T :

$$3 + (5x + 2) \rightarrow 3 + 5x + 3 + 2,$$

où l'élève « distribue » le terme « 3 » sur chacun des termes de la somme parenthésée via l'opérateur « + ». La règle qui permet d'expliquer ce pas de calcul est la règle R :

$$a + (b + c) \rightarrow a + b + a + c.$$

Or, l'isolation fournit la transformation :

$$(5x + 2) \rightarrow 5x + 3 + 2.$$

La règle ci-dessus ne peut alors plus s'appliquer. Ce problème a été résolu en précisant, dans certaines règles, que l'isolation devait, dans un premier temps, ne pas avoir lieu. C'est le cas de la règle R . Ainsi, deux arbres se crée pour le pas de calcul T : l'un qui part de $3 + (5x + 2)$ et qui cherche à aboutir à $3 + 5x + 3 + 2$ et un second qui part de $(5x + 2)$ et qui cherche à aboutir à $5x + 3 + 2$.

Malgré cette souplesse, certains cas ne fonctionnent pas. Prenons l'exemple du pas de calcul :

$$x(8x + 2) + (8x + 2) = 0 \rightarrow (8x + 2)(x) = 0.$$

Nous aimerions que la règle

$$ab + a \rightarrow a(b)$$

soit diagnostiquée. Or, elle ne peut pas s'appliquer sur $x(8x + 2) + (8x + 2) = 0$ puisque c'est une égalité. Il faut donc que le pas de calcul subisse une première isolation pour donner

$$x(8x + 2) + (8x + 2) \rightarrow (8x + 2)(x)$$

et que l'isolation s'arrête ici afin de ne pas donner

$$(8x + 2) \rightarrow 0$$

car si tel était le cas, la règle $ab + a \rightarrow a(b)$ ne pourrait toujours pas s'appliquer. Face à cette situation, il n'y a pas de solution simple : isoler mais pas trop dans certains cas devient difficile. Nous avons fait le choix de soit isoler totalement soit ne pas isoler.

Le principe de la qualification

Un processus de qualification des transformations d'expressions a été mis en place par Gélis [Gelis, 1994]. Basé sur de la reconnaissance de formes, ce processus permet d'associer à certains types de transformations une des 19 caractéristiques listées en Annexe D.3, appelées « qualification » (Réduction dans une somme de monômes (moins de monômes), Antiréduction dans une somme de monômes (plus de monômes), etc.).

Ce processus a été utilisé pour améliorer la recherche heuristique. Tout d'abord, à chaque qualification, nous avons associé un ensemble de règles relevant de cette qualification. L'association peut se faire facilement en utilisant la hiérarchie de règles, figure 3.4. Par exemple, à la qualification de « Réduction dans une somme de monômes », nous avons associé toutes les règles dites faibles, les règles de groupement additif et de réduction « 0-1 », cf. C.1. Ensuite, chaque transformation d'un nœud en F est qualifiée. L'algorithme se restreint alors à appliquer au nœud uniquement les règles (applicables) appartenant à cette qualification. Par exemple, le pas de calcul $3x + 5x \rightarrow 8x$ étant qualifié de « Réduction dans une somme de monômes », seules les règles faibles, de groupement additif et de réduction « 0-1 » seront alors appliquées à ce nœud, selon le processus habituel décrit plus haut. Le gain de temps est indéniable. La qualité du diagnostic se fait aussi ressentir.

Le principe de l'incompatibilité

Une propriété d'incompatibilité a été implantée. Elle consiste en une liste de règles qui ne peuvent s'appliquer sur un même chemin. Si l'une des listes est $(R_1 R_2 R_3)$, le diagnostic est rejeté s'il contient deux de ces trois règles. La hiérarchie des règles SIM permet là aussi de créer des incompatibilités entre groupes de règles et non pas qu'entre règles SIM.

Par exemple, nous avons décidé que les règles relevant de la factorisation étaient incompatibles avec celles relevant du développement. Cela empêche de diagnostiquer un pas de calcul au sein duquel il y aurait à la fois une factorisation et un développement, y compris sur deux termes différents. Le pas de calcul

$$4(x + 1) + 7x + 7y \rightarrow 4x + 4 + 7(x + y)$$

aboutit donc à un échec. Remarquons, toutefois, qu'il est bien rare que de telles transformations arrivent et qu'il vaut mieux quelques éventuels échecs plutôt que de mauvais diagnostics ou une explosion combinatoire.

Le taux d'application

Des règles peuvent s'appliquer sans pour autant être diagnostiquées : elles font partie d'un chemin qui n'est pas un diagnostic. Certaines d'entre elles, s'appliquent souvent, voire très souvent, alors qu'elles sont rarement diagnostiquées. Ce taux, rapport du nombre d'application sur le nombre d'apparitions a été utilisé pour améliorer le diagnostic. Lorsque le taux était trop élevé, le codage de la règle était modifié en ajoutant par exemple des conditions au but (cf. section 3.2.1). Actuellement, le taux d'application moyen est de 5400 : les règles s'appliquent en moyenne 5400 fois plus qu'elles n'apparaissent. La médiane est de seulement 142. En effet, les taux de quelques règles atteignent des valeurs très fortes. Ce sont les règles de sommes de monômes telles que $ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{\min(n,p)}$: elles ne sont que peu diagnostiquées alors qu'elles ont beaucoup d'opportunité d'être appliquées. Ajouter des conditions au but pour réduire leur taux est délicat étant donné que les élèves les combinent souvent avec d'autres règles au sein d'un même pas de calcul.

Différents autres paramètres

- Quelques paramètres permettent le réglage de l'algorithme de diagnostic. En voici la liste :
- Le nombre maximum de noeuds que l'on développe, si l'on ne trouve pas de diagnostic (généralement 30 ou 50)

- Le nombre maximum de noeuds que l'on développe après avoir trouvé un premier diagnostic (généralement 20)
- Le nombre maximum de règles acceptées dans une solution (généralement 10)
- Le nombre maximum de règles erronées acceptées dans une solution (généralement 3)
- L'utilisation uniquement, ou non, des règles correctes pour les transformations correctes est aussi paramétrable. En cohérence avec nos hypothèses de travail, nous effectuons généralement cette limitation.

Gestion de la redondance des noeuds

Si, pendant la phase de développement des noeuds, un noeud correspond à une expression déjà obtenue par un autre chemin, alors le dernier noeud est conservé que si le chemin qui y mène est de probabilité supérieure à l'autre chemin. À la fin, les morceaux de chemin laissés de côté sont récupérés lorsqu'ils fournissent des diagnostics.

Ceci permet de réduire l'explosion combinatoire en diminuant le nombre de noeuds développés. Cela permet aussi de gérer la commutativité des règles en supprimant un des deux chemins, simple commuté de l'autre.

La trace d'une règle

Un mécanisme pour tracer une règle en particulier lors d'un diagnostic a été implanté. Cet outil a été très utilisé pour vérifier le bon codage des règles. En effet, cet outil est accessible depuis une fenêtre où ANAÏS peut être lancé sur seulement un pas de calcul. Il faut indiquer la règle que l'on souhaite tracer et une fenêtre nous indique sur quelle sous-expression la règle s'applique, ce qu'elle produit pas à pas, et la raison pour laquelle elle ne s'est, par exemple, pas appliquée.

il est aussi possible, par un autre processus accessible dans cette même fenêtre, forcer à ce qu'un noeud en particulier se développe. Ceci permet de mieux comprendre pourquoi tel chemin attendu comme diagnostic n'est pas proposé, connaître les coûts des chemins, etc.

Les requêtes en SQL

Différentes requêtes peuvent être effectuées dans le langage SQL (*Structured Query Language*), langage de définition et de manipulation de bases de données relationnelles :

- Comparer des sessions de diagnostic. Une fonctionnalité de comparaison de diagnostics, permet de voir si la pertinence du diagnostic a progressé ou régressé entre deux sessions de diagnostics. Plus précisément, quand une règle est modifiée entre deux sessions, l'algorithme de comparaison entre sessions fait apparaître les pas de calcul qui ont été diagnostiqués différemment, l'expertise humaine peut alors choisir de garder ou non les modifications. Les comparaisons de sessions ont souvent porté sur des bases de données d'environ 2000 pas de calcul erronés, une session durant environ 11 heures sur un ordinateur cadencé à 3 GHz. Étant donné qu'il est possible de lancer plusieurs ANAÏS en parallèle, il est relativement rapide d'obtenir des résultats comparatifs.
- Demander le nombre d'occurrences de telles règles dans un groupe d'élèves ou chez un même élève.
- Vérifier la co-occurrence de règles.
- Interroger l'existence de la co-occurrence de telle règle avec la présence de tel caractère dans une des expressions algébriques.

- Sélectionner de sous-ensembles de données sur lesquels est étudiée la pertinence des diagnostics. Par exemple, pour travailler sur les erreurs ne portant pas sur les équations, les transformations erronées contenant un signe égal peuvent être exclues.
- ...

3.2.6 Impact sur la bibliothèque de règles

L'automatisation du processus de diagnostic permet de déceler le nombre d'applications d'une règle détaillée et d'en démontrer la pertinence. Après avoir listé, généralisé et codé un premier ensemble de règles à partir de centaines de transformations, le processus automatique est lancé sur un nombre conséquent de transformations (de l'ordre du millier). Le diagnostic automatique permet de préciser le nombre d'occurrences de chaque règle. Étant donné que les règles n'ont d'intérêt que si on les observe chez un certain nombre d'élèves, celles qui apparaissent marginalement sont supprimées ou modifiées. Pour des raisons informatiques (risque d'explosion combinatoire), il est aussi tenu compte du rapport du nombre d'applications d'une règle par le nombre de ses occurrences. Si ce taux est trop élevé, cela signifie que la règle s'applique souvent et, souvent de façon inutile, puisqu'elle ne permet pas d'aboutir à un diagnostic ; nous pouvons chercher à ajouter des conditions liées au but, pour qu'elle s'applique moins souvent. Ce processus est décrit dans la figure 3.13.

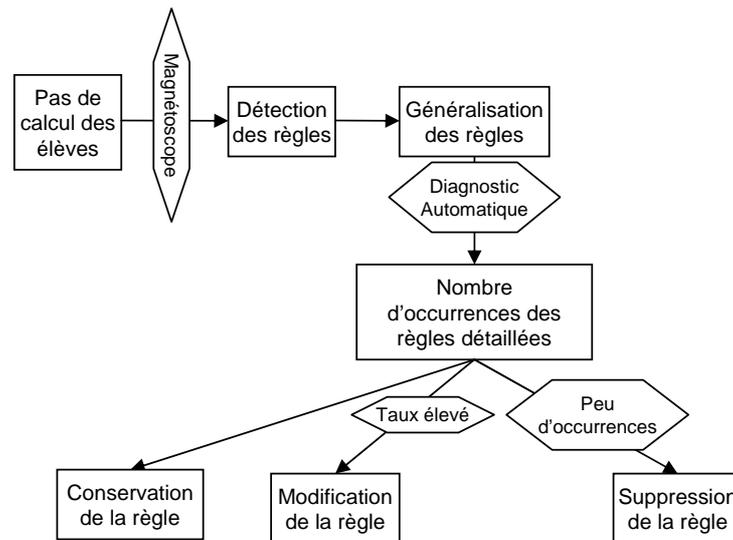


FIGURE 3.13 – Les différents outils d'ANAïs permettent d'améliorer la bibliothèque de règles algébriques en comparant les diagnostics pour conserver, modifier ou supprimer des règles.

3.2.7 Comparaisons quantitative et qualitative des algorithmes

Comparaison entre l'algorithme en largeur et les algorithmes heuristiques. Sur un ensemble de 95722 diagnostics, la répartition du nombre de règles dans un diagnostic est la suivante :

- 32270 diagnostics comportent 1 règle seulement, (34% de l'ensemble) ;
- 25355 diagnostics comportent 2 règles exactement, (26% de l'ensemble) ;
- 15762 diagnostics comportent 3 règles exactement, (16% de l'ensemble) ;
- 9252 diagnostics comportent 4 règles exactement, (10% de l'ensemble) ;

6251 diagnostics comportent 5 règles exactement, (7% de l'ensemble) ;
 2496 diagnostics comportent 6 règles exactement, (3% de l'ensemble) ;
 2412 diagnostics comportent 7 règles exactement, (3% de l'ensemble) ;
 1924 diagnostics comportent 8 règles exactement (2% de l'ensemble).

Autrement dit, 22335 diagnostics comportent plus de 3 règles : 23% de la totalité ne pourrait donc être produit par l'algorithme en largeur. Reste à savoir si cette proportion comporte de bons diagnostics ou non. Une analyse de 551 diagnostics de pas de calcul erronés a été faite. 21% des diagnostics comportent plus de 3 règles et 15% des diagnostics comportent plus de 3 règles et sont de bons diagnostics. Le nombre important de pas de calcul nécessitant un diagnostic de plus de 3 règles s'explique par la nature même des règles. En effet, dans un souci d'exhaustivité des cas, les règles qui ont été écrites généralisent le concept sans généraliser le calcul. Expliquons nous sur un exemple : le passage de $5(x+3)$ en $5x+15$ pourrait s'expliquer par une seule règle :

$$a(b+c) \rightarrow a \otimes b + a \otimes c.$$

Ce n'est pourtant pas cette règle qui a été implantée mais la règle :

$$a(b+c) \rightarrow a \times b + a \times c.$$

Cette dernière laisse la possibilité d'être appliquée même si il y a des erreurs de calcul sur le produit de a et de b , par exemple. Le simple pas de calcul $5(x+3) \rightarrow 5x+15$ nécessite donc, à lui seul, trois règles :

$$a(b+c) \rightarrow a \times b + a \times c,$$

$$a \times b \rightarrow a \otimes b,$$

$$\text{et } a \times c \rightarrow a \otimes c.$$

En conclusion, parmi les diagnostics comportant plus de 3 règles et ne pouvant donc être produit par l'algorithme en largeur, plus de 70% sont de bons diagnostics et qui seraient perdus avec un tel algorithme.

Comparaison entre l'algorithme heuristique de coût et l'algorithme heuristique probabiliste.

Comparaison quantitative. La comparaison quantitative s'est faite sur un ensemble de plus de 11000 pas de calcul, découpés en quatre sessions pour des facilités de gestion, sur l'ordinateur décrit en note 13.

L'AHP analyse environ 40 pas de calculs à la minute contre 35 pour l'AHC. Autrement dit, ces algorithmes diagnostiquent, en moyenne, un pas de calcul en moins de deux secondes¹⁷.

L'AHP applique environ 265 règles à la seconde contre 193 pour l'AHC.

L'AHP applique environ 395 règles par pas de calcul contre 332 pour l'AHC.

En moyenne, l'AHP est mis en échec sur 23% des pas de calcul contre 22% pour l'AHC. Notons qu'aucune sélection sur les types de transformations n'a été faite à ce niveau. Les pas de calcul portent aussi bien sur des expressions comportant des coefficients fractionnaires que sur des équations. Les taux d'échecs ne sont donc pas pertinents pour juger de la qualité des algorithmes ; seule une comparaison des deux taux a un sens. Nous verrons, dans le paragraphe suivant, quel est le taux d'échecs sur des transformations ne concernant que notre domaine d'étude.

17. Cette information peut être intéressante pour un diagnostic-en-ligne.

D'un point de vue quantitatif, la différence entre les deux algorithmes n'est pas vraiment significative. D'autant plus, que la durée du processus et le nombre de pas de calcul ne sont pas proportionnels : la durée peut être légèrement influencée par des paramètres extérieurs tels que l'utilisation de l'ordinateur pour d'autres tâches en parallèle, le nombre de pas par session (une session de 6000 pas dure plus longtemps que deux sessions de 3000 pas). L'ensemble des données pour l'AHP et l'AHC est regroupé dans le tableau 3.16.

	Nombre de pas de calculs	Nombre de règles <i>appliquées</i>	Temps	Échecs
AHP	11648	4606893	6 : 06 : 10	23%
AHC	11640	3859717	5 : 33 : 46	22%

TABLE 3.16 – Résultats quantitatifs sur des pas de calcul quelconques afin de comparer l'algorithme heuristique probabiliste et l'algorithme heuristique en coût.

Comparaison qualitative. Parmi l'ensemble des transformations issues de quatre expérimentations¹⁸, nous avons sélectionné les transformations erronées ne comportant ni de signe égal, ni de signe de division et dont la qualification n'était pas du calcul numérique. Aussi ont été supprimées les pas de calcul où il y a introduction ou suppression d'un signe égal (section 3.2.2) et qui sont, quant à elles, toutes correctement diagnostiquées. Parmi celles-ci, environ 1000 ont été sélectionnées « au hasard » (par ordre alphabétique sur le login de l'élève, dans chacune des quatre expérimentations). Certains pas de calcul peuvent donc être redondants : deux élèves peuvent avoir eu la même expression à transformer et l'avoir transformée de la même manière. Nous avons extrait de ces 1000 transformations toutes celles qui étaient différentes. Après avoir enlevé les doublons, il reste alors 760 pas de calcul différents.

ANAÏS a été lancé sur ces 760 transformations d'une part avec l'AHC et d'autre part, avec l'AHP. Il en sorti plusieurs milliers de diagnostics. Seuls ont été conservés ceux de coût minimum pour l'AHC et de probabilité la plus forte pour l'AHP : c'est-à-dire les « meilleurs » diagnostics, selon les algorithmes. Il y a eu 787 diagnostics pour l'AHP et 870 pour l'AHC¹⁹. Ces « meilleurs » diagnostics (soit un ensemble de 1657) ont tous été analysés à la main. Comme nous l'avons indiqué plus haut, ils sont considérés comme « bons », si ils sont en accord avec ce que nous aurions, en tant qu'enseignants, proposé comme « règles erronées ». Ils sont considérés comme « mauvais » s'ils ne correspondent pas, et comme « moyens » s'ils correspondent mais d'autres diagnostics auraient pu être proposés pour cette même transformation. Des exemples (issus des ces analyses) en sont donnés en tableau 3.17.

18. Deux expérimentations effectuées en France, dans un cadre en dehors de notre recherche : une en classe de 4^e et une, en 3^e française. Deux expérimentations montées par nos soins : l'une s'étant déroulée au Brésil dans une classe équivalente à la 4^e et la seconde sur une élève de 3^e française. Le but de cette diversité (pays différents, niveaux différents mais aussi expérimentations travaillées dans le cadre de notre recherche ou non) est de considérer un échantillon plus aléatoire. En effet, des expérimentations montées par nos soins ont tendance à être mieux diagnostiquées puisque les règles erronées correspondantes aux erreurs prévues ont été implantées.

19. Cette différence s'explique par le fait que la probabilité d'un diagnostic tient compte des autres chemins et, en particulier, des autres diagnostics. Il est donc rare de trouver exactement les mêmes probabilités sur deux diagnostics tandis que le coût d'un chemin est indépendant des autres coûts, ce qui explique qu'il est moins rare de trouver des diagnostics d'exactly même coût.

Pas de calcul	Diagnostic	Qualité
$-4x - 28x^2 \rightarrow -32x^3$	ER_AddMon-plusCoef-plusDg	bon
Le diagnostic automatique de cette transformation correspond à celui attendu : la somme des coefficients des deux monômes ainsi que la somme des degrés.		
$-10x + 15x^2 - 45x^2 + 64x \rightarrow -30x^2 + 64x$	ER_AddMon-plusCoef-maxDg ER_grouptAdditif	mauvais
Cette transformation est diagnostiquée comme la transformation de $-10x + 15x^2$ en $5x^2$ suivi d'une erreur de somme de monômes qui a transformé $5x^2 - 45x^2$ en $-30x^2$. Le diagnostic attendu aurait pu être une perte du terme $-10x$ et d'une somme correcte de $15x^2 - 45x^2$ en $-30x^2$ ²⁰ .		
$3x - 18 + 3x + 6 + 5x^2 \rightarrow 5x^2 + 6x + 12$	GEN_AddMon-PlusCoef-MemeDg Plus- Nombre ER_PerteMoins	moyen
Le diagnostic automatique de cette transformation est correct : addition des monômes $3x$ et $3x$ pour donner $6x$, addition de -18 à 6 pour donner -12 , puis perte du signe moins de -12 pour donner 12 . Ce diagnostic n'est pas absurde mais nous aurions attendu (peut-être à tort ?) un diagnostic portant sur la transformation de $-18 + 6$ en 12 . Il se trouve d'ailleurs que la probabilité de ce diagnostic est de 0.47 et dans les diagnostics de probabilité plus faible, se trouve le diagnostic attendu.		

TABLE 3.17 – Exemples de qualité de diagnostics : la première ligne concerne un bon diagnostic, la seconde un diagnostic moyen et la troisième un mauvais diagnostic.

Sur les 771 pas de calcul sans doublon considérés, l'AHP en diagnostique 390 et échoue 381, soit 51% des pas de calculs (erronés et portant sur des transformations ne comportant ni signe égal ni signe de division) sont diagnostiqués. Il faut noter que ces transformations incluent des transformations absurdes telles que :

$$5x^2 + 3x \rightarrow ?,$$

$$4y + y \rightarrow 5x,$$

ou encore $7(x + 5) \rightarrow lol$.

Intéressons-nous aux 390 diagnostics.

L'AHP propose 406 « meilleurs » diagnostics, soit une moyenne de 1,04 « meilleurs » diagnostics par pas de calculs. 13% sont des mauvais diagnostics 11% sont des diagnostics moyens et 76% de bons diagnostics²¹. Quant à l'AHC, sur les 745 pas de calcul sans doublon considérés, l'AHC en diagnostique 423 et échoue 322, soit 57% des pas de calculs sont diagnostiqués.

Intéressons-nous aux 423 diagnostics.

L'AHP propose 548 « meilleurs » diagnostics, soit une moyenne de 1,30 « meilleurs » diagnostics

21. Avec les doublons, l'AHP propose 11% de mauvais diagnostics, 10% de diagnostics moyens et 79% de bons diagnostics

par pas de calculs. 22,4% sont des mauvais diagnostics 9% sont des diagnostics moyens et 67% de bons diagnostics²².

La différence sur les bons diagnostics est-elle significative ? Un simple test de comparaison d'échantillons permet de répondre à cette question. On voudrait montrer que l'AHP est meilleure que l'AHC, autrement dit que $p_P = 76\%$ de bons diagnostics est nettement au-dessus de $p_C = 67\%$. On veut donc tester \mathcal{H}_0 : « les proportions de bons diagnostics sont les mêmes par les deux algorithmes » contre \mathcal{H}_1 : la proportion de bons diagnostics est plus importante par AHP que par AHC.

Notons X_P (resp. X_C) la qualité des diagnostics par l'AHP (resp. l'AHC). Ces deux variables aléatoires suivent des lois de Bernoulli de paramètre p_P et p_C . Les estimateurs sans biais de la variance sont notés respectivement $S'_P{}^2$ et $S'_C{}^2$. Les échantillons analysés étant indépendants et de grande taille, la région de rejet est :

$$W_\alpha = \left\{ X_P - X_C > u_{2\alpha} \sqrt{\frac{S'_P{}^2}{406} + \frac{S'_C{}^2}{548}} \right\}^{23}.$$

Au seuil $\alpha = 5\%$, on obtient $u_{2\alpha} \sqrt{\frac{S'_P{}^2}{406} + \frac{S'_C{}^2}{548}} = 4.8$. La différence des deux proportions étant de $76 - 67$, soit 9% , au seuil 5% , \mathcal{H}_0 est invalidée et on conclue à la différence significative de la qualité de l'AHP sur l'AHC²⁴.

Autre comparaison : intérêt de la qualification. La prise en compte de la qualification des pas de calcul (section 3.2.5) pour orienter le diagnostic est nettement intéressante, en termes de temps. En effet, sur 719 pas de calculs, sans l'introduction de la qualification, l'algorithme (HAP) atteint une moyenne de 1,90 seconde par pas de calcul. Sur le même nombre de pas, avec la prise en compte de la qualification, le même algorithme a une moyenne de 0,85 seconde par pas de calcul. La différence de temps est due au fait que beaucoup plus de règles s'appliquent lorsque le pas de calcul n'est pas qualifié puisqu'il n'y pas de sélection supplémentaire : 174721 règles appliquées contre 94650 lorsque le pas est qualifié.

En conclusion. Les diagnostics produits par l'AHP correspondent plus à notre analyse manuelle que ceux produits par l'AHC. De plus, la qualité est encore meilleure si la qualification des pas de calcul est prise en compte.

ANAÏS tournera dorénavant avec l'algorithme heuristique probabiliste (AHP) avec prise en compte de la qualification et possibilité ponctuelle d'empêcher l'isolation.

3.3 Résultats bruts : une modélisation locale

Nous avons construit un algorithme qui permet d'associer à un pas de calcul d'élève au sein d'APLUSIX une liste non ordonnée de règles algébriques émanant de la bibliothèque de règles. La puissance de l'automatisation de l'algorithme réside dans sa capacité à traiter de grandes bases de données car pour diagnostiquer quelques pas de calcul, il est fort probable qu'une analyse manuelle ferait tout aussi bien mais d'ailleurs, est-ce réellement le cas ?

22. Avec les doublons, l'AHP propose les mêmes proportions de bons, moyens et mauvais diagnostics.

23. α est le risque de première espèce.

24. La p-valeur est, en fait, de 0,0008 ; autrement dit, cela signifie que l'on accepte \mathcal{H}_1 presque sans risque de se tromper.

Quelle est la proportion de pas de calcul diagnostiqués différemment par l'algorithme que par une analyse manuelle ?
 Sur un grand nombre de pas de calcul, quelles sont les occurrences des règles implémentées ? Est-ce que les règles qui apparaissent le plus correspondent à celles présentes dans la littérature ?

3.3.1 Les expérimentations

Depuis que le projet APLUSIX a été monté, de nombreuses expérimentations ont été mises en place dans des cadres différents : des niveaux différents, des pays différents, des expressions différentes. Nous distinguons 6 grands groupes d'expérimentations. Le tableau 3.19, p.135, récapitule le nombre de classes, d'élèves et de transformations moyennes par élève pour chaque groupe d'expérimentation.

Toutes les expérimentations utilisées ici ont été faites sous le mode test d'APLUSIX, c'est-à-dire sans rétroaction de la part du logiciel. De plus, la plupart n'avait pas accès à la fonctionnalité du copier-coller et de la duplication d'expressions.

1. Les expérimentations du projet Cognitique [Nicaud, 2005]. Menées dans le cadre d'une ACI financée par le ministère de la recherche, ces expérimentations ont été conduites à la fois en France et au Brésil, en classe de 4^e et 3^e, sur l'année scolaire 2003-2004. Ce groupe d'expérimentations est dénommé « Cognitique ». Le nombre de pas de calcul étant relié à notre domaine d'étude est de 34611. Ceci n'est évidemment pas le nombre d'exercices auxquels les élèves ont été confrontés : en un exercice, il peut y avoir plusieurs pas de calcul. Le nombre d'élèves dans ce groupe est de 772.
2. Des expérimentations menées dans le cadre de masters ou de stages PLC2, en classe de 2nde sur les années scolaires 2003-2004. Ce groupe d'expérimentations est dénommé « Master ». Ce groupe est constitué de 6812 pas de calcul provenant de 125 élèves.
3. Les expérimentations conduites en 2nde et 1^{re}, dans le cadre la thèse de Nguyen [Nguyen, 2006]. Elles ont eu lieu en France et au Vietnam. Elles portent principalement sur des résolutions d'équations et de systèmes d'équations. Cependant, elles contiennent bon nombre de pas de calcul consacré au développement, réduction et factorisation. Ce groupe d'expérimentations est dénommé « T_Nguyen », comme abréviation de « thèse de Nguyen ». Le nombre de pas de calcul est de 22342 produits par 524 élèves.
4. Les expérimentations du projet « Effet des émotions sur l'apprentissage » [Rodrigo et al., 2008]. Menées aux Philippines en février 2007, elles avaient pour but d'étudier l'effet des jeux éducatifs alliant compétitivité, curiosité et fantaisie sur l'apprentissage, comparé à un logiciel éducatif « classique » tel que APLUSIX²⁵. Les élèves ayant travaillé avec APLUSIX avaient en moyenne 14 ans et étaient en première année de lycée (le lycée commence plus tôt en Philippines que dans la plupart des autres pays). Au vu du programme scolaire en vigueur, leur niveau en algèbre correspond bien à une 2nde française. Ce groupe d'expérimentations est dénommé « Émotions ». Le nombre de pas de calcul est de 5227 produits par 151 élèves.
5. Les expérimentations du projet Remaths en 2007. Elles avaient pour objectif de travailler sur les expressions sous forme d'arbres et de voir si ce travail spécifique avait un gain en

25. Les résultats font ressortir un effet négatif et perturbateur des jeux dits éducatifs sur l'apprentissage. Pour plus d'informations à ce sujet, vous pouvez lire l'article [Rodrigo et al., 2008].

terme d'apprentissage [Chaachoua and Trgalová, 2009]. Nous exploitons ici les protocoles du pré-test, effectué dans deux classes de 2^{nde} françaises. Ce groupe d'expérimentations est dénommé « Remaths ». Le nombre de pas de calcul est de 2366 produits par 67 élèves.

6. Les expérimentations mises en place dans le cadre de cette thèse. Conduites en France (en classe de 4^e, 3^e et 2^{nde} de 2005 à 2008), au Brésil (en 4^e en 2006 et 2007) et en Tunisie (en 4^e en 2007). Ce groupe d'expérimentations est dénommé « T-Croset », comme abréviation de « thèse de Croset ». Le nombre de pas de calcul est de 16215 produits par 341 élèves.

3.3.2 Lancement d'ANAÏS sur l'ensemble des expérimentations

ANAÏS a été lancé sur l'ensemble des protocoles de ces groupes d'expérimentations pour un temps moyen de 2 secondes par pas de calcul.

Au total, 87573 pas de calcul ont été diagnostiqués, émanant de cinq pays différents : le Vietnam, la Tunisie, les Philippines, le Brésil et la France et de quatre niveaux scolaires différents.

Cet ensemble de pas demande une centaine d'heures pour être diagnostiqués avec 30% d'échecs. Nous pouvons lire dans le tableau 3.19, page 135, que l'algorithme de diagnostic échoue beaucoup plus pour les productions lycéennes que collégiennes, surtout si elles ne sont pas françaises : plus de 50% d'échecs sur les productions vietnamiennes de 2^{nde} et 1^{re} contre, par exemple, moins de 30% pour les 3^e françaises. De plus, l'algorithme met beaucoup plus de temps pour de telles productions : plusieurs heures sont demandées contre moins d'une heure pour autant de pas de calcul. Ceci s'explique par le fait que les règles implémentées ciblent avant tout le niveau collège, et en particulier le collège français.

La répartition des pas de calcul en fonction du niveau scolaire et du pays est donné dans le tableau 3.18. Les expérimentations ont été avant tout françaises mais aussi brésiliennes. Elles ont été réalisées majoritairement en classes de 3^e : 35635 pas de calcul ont été produits par des élèves de 3^e. Ces informations se lisent aussi dans la figure 3.14, page 136, qui en propose une représentation graphique. Il y est aussi précisé quelle est la part du groupe « T-Croset » relativement à l'ensemble des expérimentations (portions hachurée en rouge). Ces expérimentations montées par nos soins touchent majoritairement des classes de 3^e françaises mais aussi brésiliennes.

Niveau \ Pays	Vietnam	Tunisie	Philippines	France	Brésil	Total
4 ^e		2442		4247	2488	9177
3 ^e				6486	29149	35635
2 ^{nde}	2356		5227	20588		28171
1 ^{re}	12787			1803		14590
Total	15143	2442	5227	33124	31637	87573

TABLE 3.18 – Répartition du nombre de pas de calcul par pays et par niveau.

	Cognitique						Master		T_Nguyen				Émo- tions	Rem- aths	T_Croset					Total
Pays	France			Brésil		France		Vn		France		Phil.	Fr.	Tuni.	France			Brésil		
Niv	4 ^e	3 ^e	2 ^{nde}	4 ^e	3 ^e	2 ^{nde}	1 ^{re}	2 ^{nde}	1 ^{re}	2 ^{nde}	1 ^{re}	2 ^{nde}	2 ^{nde}	4 ^e	4 ^e	3 ^e	2 ^{nde}	3 ^e		
Cla	3	3	1	2	10	4	1	2	8	2	2	15	2	1	1	6	2	3	68	
Élè	30	23	28	30	53	28	13	35	42	34	27	10	34	22	24	17	21	14	1980	
Pas	42	49	104	34	41	59	33	37	39	84	26	35	36	111	19	45	58	68	87573	
Éch	16%	15%	27%	14%	21%	26%	28%	58%	54%	42%	46%	24%	8%	38%	45%	24%	29%	27%	30%	
Tps	0 :39	0 :26	2 :20	0 :27	0 :55	1 :04	0 :05	2 :57	4 :37	3 :16	1 :12	0 :12	0 :19	3 :59	1 :02	0 :26	1 :46	3 :35	97 :53	

TABLE 3.19 – Données, en partie reconstruites par ANAÏS, sur les différentes expérimentations exploitées dans cette thèse. Il y a six grands groupes d’expérimentations. Pour chacune d’entre eux, on trouve les pays où ont eu lieu les expérimentations ; puis, pour chaque pays d’un groupe, est précisé les niveaux des expérimentations : « Niv ». La ligne suivante donne le nombre de classes (« Cla »).

Les données des lignes suivantes sont donc des moyennes pour une classe d’un niveau donné d’un pays issu d’un groupe. En revanche, la colonne « Total » est bien le nombre de chaque entité de l’ensemble de toutes les classes des expérimentations. Vient ensuite le nombre moyen d’élèves par classe (« Élè ») puis le nombre moyen de pas de calcul par élève (« Pas »). L’avant dernière ligne (« Éch ») donne le pourcentage d’échecs de l’algorithme de diagnostic. La dernière ligne (« Tps ») précise le temps moyen que l’algorithme a mis pour diagnostiquer les productions d’une classe (d’un niveau donné d’un pays d’un groupe).

Par exemple, dans le groupe « Cognitique », il y a trois classes françaises de 3^e. En moyenne, chacune de ces classes a 23 élèves et chacun de ces élèves a produit, en moyenne, 49 pas de calcul dans APLUSIX. Sur l’ensemble des productions des classes, il y a eu, en moyenne, 15% d’échecs, c-à-d que l’algorithme n’a pas produit de diagnostic sur 15% des productions. Toujours en moyenne, l’algorithme a mis plus d’une demi-heure pour diagnostiquer les productions d’une de ces trois classes.

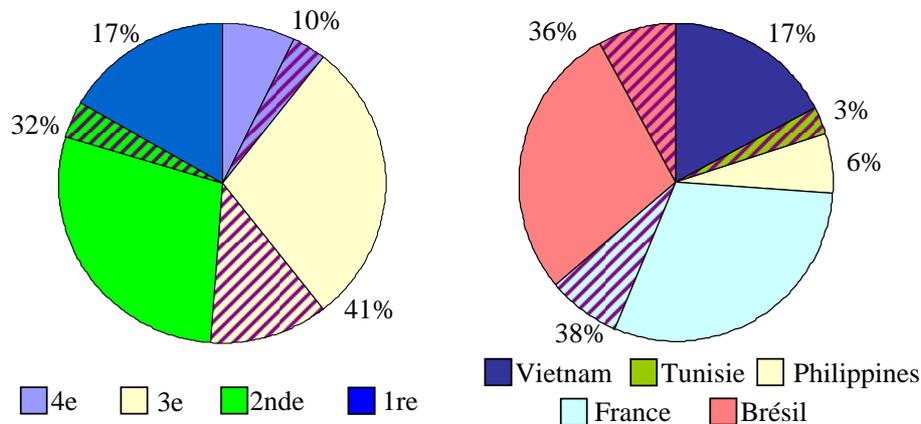


FIGURE 3.14 – Répartition des expérimentations utilisées dans cette thèse par niveaux (à gauche) puis par pays (à droite). Dans chaque camembert, est indiquée la contribution du groupe « T_Croset » : ce sont les portions hachurées en rouge. Par exemple, nous pouvons lire qu'il y a 41% des expérimentations qui ont été menées en classes de 3^e dont près d'un tiers par nos soins. Toutes les expérimentations menées en Tunisie ont été conduites pour cette thèse.

3.3.3 Seconde validation de l'AHP

Plus de 3800 pas de calcul portant sur les domaines de développement, factorisation et réduction²⁶ ont été analysés à la main. Comme expliqué précédemment, la qualification de bon, moyen ou mauvais a été assignée à chacun des diagnostics ou échecs fournis par Anaïs. Le principe a déjà été présenté et utilisé pour une comparaison de l'algorithme AHC avec l'algorithme AHP. Dans cette section, nous ne nous intéressons plus qu'à la qualité de l'AHP.

3836 pas de calcul erronés ont été prélevés de 6 expérimentations différentes (4e, 3e et 2nde). 1345 pas de calcul étaient erronés contre 2491 pas corrects. Certains d'entre-eux étaient en double ou triple (des élèves différents ou non ayant fait l'exact même pas de calcul). Après suppression des doublons, il restait 1111 pas de calcul *erronés*.

Regardons dans un premier temps, les pas erronés sans doublon, soit les 1111 pas de calcul. Sur ces 1111 pas, 594 ont été mis en échec et 496 ont suscité un diagnostic d'Anaïs. Les 496 pas diagnostiqués ont en fait fournis 516 diagnostics différents de probabilité la plus forte. En effet, certains pas suscitent en général plusieurs diagnostics et parfois, plusieurs diagnostics de même probabilité. Nous n'avons analysé uniquement les diagnostics de probabilité la plus forte. Malgré cela, il peut encore rester des diagnostics différents (de même probabilité) pour un même pas de calcul. C'est le cas de 20 pas de calcul parmi les 496.

La répartition des qualités des diagnostics est la suivante : 82 mauvais diagnostics, 56 moyens et 378 bons. Ce qui donne une répartition de 16% de mauvais diagnostics, 11% de moyens et 73% de bons diagnostics.

Regardons maintenant les pas avec doublon éventuels, soit les 1345 pas de calcul.

Sur ces 1345 pas, 670 ont été mis en échec et 620 ont suscité un diagnostic d'Anaïs. Les 620 pas diagnostiqués ont fournis 675 diagnostics de probabilité la plus forte (toujours pour la même raison que ci-dessus, plusieurs diagnostics de même probabilité peuvent être proposés pour un même pas de calcul).

26. Cette sélection s'est faite sur la qualification associée aux pas de calcul. De plus, ont été supprimés les pas de calcul dont une des expressions comportaient le signe « / » ou le signe « = ». Les pas de calcul avec introduction de relation ou disparition de relation toujours correctement diagnostiquées n'ont pas été prises en compte.

La répartition des qualités des diagnostics est la suivante : 91 mauvais diagnostics, 70 moyens et 514 bons. Ce qui donne une répartition de 13% de mauvais diagnostics, 10% de moyens et 76% de bons diagnostics.

Étudions les échecs des transformations erronées.

594 pas de calcul (sans doublon) sont mis en échecs. La répartition est la suivante : 138 mauvais échecs, 58 moyens et 399 bons. Ce qui donne une répartition de 23% de mauvais échecs, 10% de moyens et 67% de bons échecs.

Quant aux échecs, avec prise en compte des doublons, on obtient 670 échecs dont la répartition est la suivante : 178 mauvais échecs, 62 moyens et 430 bons. Ce qui donne une répartition de 27% de mauvais échecs, 9% de moyens et 64% de bons échecs.

Au total, échec et diagnostic confondus, que ce soit avec ou sans doublon, on obtient exactement la même proportion : 20% de mauvais résultats 10% de moyens contre 70% de bons.

Des tableaux récapitulatifs sont présentés sur les figures 3.15 et 3.16, p. 137 et 138.

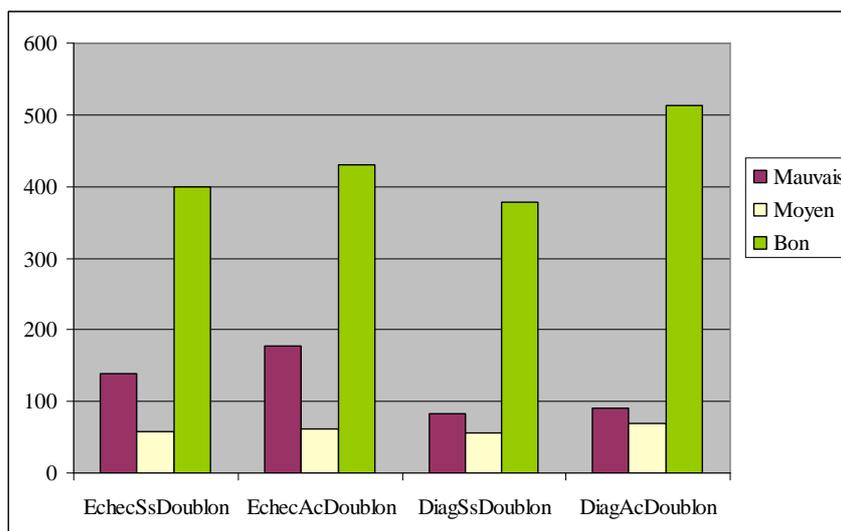


FIGURE 3.15 – Analyse qualitative d’Anais : plus de 1100 pas de calcul erronés ont été évalués à la main. Un qualificatif (bon, moyen ou mauvais) leur a été attribué. Par exemple, plus de 500 pas diagnostiqués, sans compter les doublons, sont considérés comme bons contre moins de 100 mauvais.

Revenons à l’ensemble des pas de calculs erronés et corrects.

Les pas de calculs corrects sont toujours correctement diagnostiqués. Parfois, ils sont mis en échec. Principalement, lorsque l’élève transforme de manière « plus compliquée » l’expression de départ : par exemple, si il ajoute des parenthèses à l’expression ou si il transforme x^3 en $x \times x \times x$... Nous considérons comme mauvais les échecs de pas de calcul corrects, comme bons les diagnostics de pas de calcul corrects. 91% des 2491 pas de calcul corrects sont diagnostiqués. La qualité est visible sur le camembert 3.17, p. 138 :

Ajoutons tous les bons diagnostics (que ce soit sur des pas de calcul corrects ou erronés) et bons échecs, on obtient alors une répartition de 84% de bons, contre 13% de mauvais (et 3% de moyens).

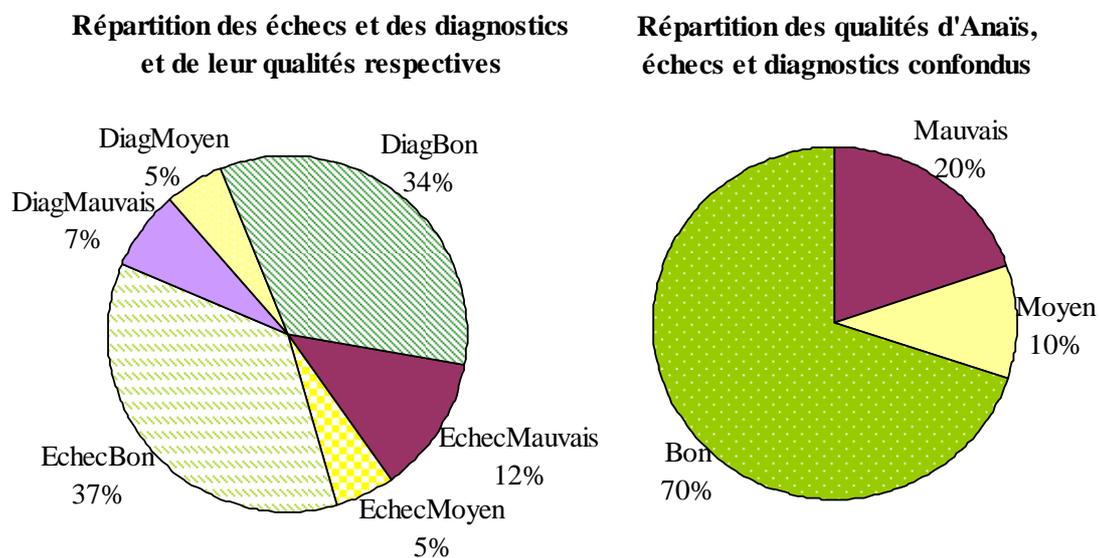


FIGURE 3.16 – Analyse qualitative de 1111 pas de calcul erronés sans doublon.

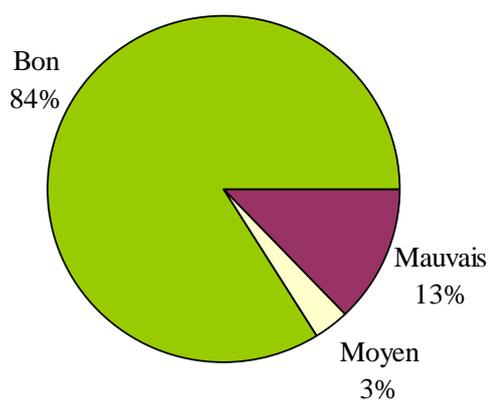


FIGURE 3.17 – Répartition des qualités associées aux diagnostics et aux échecs sur un total de 3836 pas de calcul corrects et erronés.

Sans traiter tous les cas, nous avons pu tirer quelques généralités sur les pas de calcul difficile à diagnostiquer, que ce soit un mauvais diagnostic ou une mise en échec :

- Les pas de calcul qui combinent beaucoup de transformations en leur sein. La distance entre les nœuds et le but est trop importante. Les transformations pourraient être diagnostiquées si le nombre de développements permis avec des règles correctes ou des règles erronées était plus élevé (cf. 3.2.5).
- Les transformations où il y a des changements de signe : l'intégration d'une règle telle que $a \rightarrow -a$, sans condition ferait exploser le diagnostic. C'est donc une règle faible qui a été introduite mais, en tant que règle faible, elle ne s'applique que très peu et parfois, lorsqu'il y a changement de signe combiné avec d'autres transformations au sein d'un même pas de calcul, l'algorithme se perd ou échoue.
- Les transformations où il y a des oublis de termes. Dans la même veine que les cas précédents, l'algorithme a tendance à se perdre pour peu qu'il y ait d'autres explications. Par exemple, le pas de calcul

$$10x + 1 - 6x^2 + 5 - 3x^2 + 6x - 6 \rightarrow 16x - 3x^2,$$

où la seule erreur est l'oubli probable du terme $-6x^2$ est mal diagnostiqué car la somme de $-6x^2$ et de $-3x^2$ produit justement le terme $-3x^2$, noté dans le but.

- Les transformations absurdes. Nous en avons précédemment donnés des exemples :

$$7(x + 5) \rightarrow lol.$$

- Des mauvaises utilisations d'APLUSIX. Par exemple, taper la lettre « x » au lieu du signe opératoire « \times ».
- Les oublis de signe opératoire. Par exemple, le pas de calcul :

$$5x^2 + 3x - 7 - 3x^2 + 2x + 8 \rightarrow 2x^2 5x + 1.$$

3.3.4 Premier retour sur les règles

À la suite d'un diagnostic d'un pas de calcul d'élève, nous avons associé une « probabilité d'utilisation », PU , à chacune des règles détaillées ayant été diagnostiquée (section 3.2.4, p. 120). À la suite d'une *session* de diagnostics, nous attribuons un coefficient d'utilisation pour toutes les règles détaillées ayant été diagnostiquées :

Définition. Le coefficient d'utilisation d'une règle détaillée est la somme du nombre de fois où cette règle a été diagnostiquée pondérée par les probabilités d'utilisation de chaque diagnostic où la règle est apparue²⁷. Nous notons CU ce coefficient.

Par exemple, si une première réponse d'un sujet a été diagnostiquée par une règle R_1 avec une probabilité PU_{R_1} de 0.7 et par une règle R_2 avec une probabilité PU_{R_2} de 0.3, puis une seconde réponse a été diagnostiquée par la règle R_1 avec une probabilité PU_{R_1} de 1, alors le coefficient d'utilisation associée à la règle R_1 , CU_{R_1} , est de 1.7 tandis que CU_{R_2} reste à 0.3.

Reprenons maintenant la présentation proposée en section 3.1.3 des règles construites a priori pour le thème de la gestion des parenthèses²⁸. Dans les deux premières colonnes du tableau 3.20, page 140 et 3.21, page 141, nous retrouvons la règle très générale et les instances que nous avons conservées. Dans la troisième colonne, se trouve le CU de chaque règle. Enfin, dans la quatrième colonne, sont donnés des exemples des règles repérés dans les protocoles des élèves.

Règles	Instances	CU	Exemples
Distributivité abusive			
$a\Delta(b\Box c) \rightarrow a\Delta b\Box a\Delta c$	$a + (b \times c) \rightarrow a + b \times a + c$	0	
	$a \times (b \times c) \rightarrow a \times b \times a \times c$	0	
	$a + (b + c) \rightarrow a + b + a + c$	12.2	$7x + (2x - 8) \rightarrow 7x + 2x + 7x - 8$
	$a - (b + c) \rightarrow a - b + a - c$	8.5	$5 - (3x + 4) \rightarrow 5 - 3x + 1$
	$(a + b) + (c + d) \rightarrow a + c + a + d + b + c + b + d$	2	$(2x - 8) + (-3x + 12) \rightarrow -x + 2x + 12 - 8 - 3x + 4$
$(a\Box b)\Delta c \rightarrow a\Delta c\Box b\Delta c$	$(a \times b) + c \rightarrow a + c \times b + c$	0	
	$(a \times b) \times c \rightarrow a \times c \times a \times c$	0	
	$(a + b) + c \rightarrow a + c + b + c$	0	
	$(a + b) - c \rightarrow a - c + b - c$	0	
	$(a + b)^n \rightarrow a^n + b^n$	167.8	$(8 - 3x)^2 \rightarrow 8^2 - 9x^2$
$a\Delta(b + c)\Delta(d + e) \rightarrow a\Delta b + a\Delta c + a\Delta d + a\Delta e$	$a + (b + c) + (d + e) \rightarrow a + b + a + c + a + d + a + e$	0	
	$a \times (b + c) \times (d + e) \rightarrow a \times b + a \times c + a \times d + a \times e$	20.5	$4 \times (x + 1) \times (x - 2) \rightarrow 4 \times x + 4 \times 1 + 4 \times x + 4 \times (-2)$
	$a \times (b + c) \times (d + e) \rightarrow a \times b + a \times c \times a \times d + a \times e$	16.5	$4 \times (x + 1) \times (x - 2) \rightarrow 4x + 4 \times 4x - 8$
$a\Delta(b + c) \rightarrow a\Box b + a\Box c$	$a + (b + c) \rightarrow ab + ac$	11.8	$2 + (25 + 9x) \rightarrow 50 + 18x$
	$a + (b + c) \rightarrow a - b + a - c$	0	
	$a \times (b + c) \rightarrow a + b + a + c$	7.2	$7x(3x + 5) \rightarrow 21x + 7x + 5$
	$a \times (b + c) \rightarrow a - b + a - c$	0	
	$a - (b + c) \rightarrow ab + ac$	14	$5x - (5 - 2x) \rightarrow 25x - 10x$
	$a - (b + c) \rightarrow a + b + a + c$	7.7	$9x - (6 - (5x + 1)) \rightarrow 9x + 30x + 6$
	$a - (b + c) \rightarrow a + b + a + c$		$-3x - (-4 - (-3x - 5)) \rightarrow -3x - (-7x + 9)$
	$(a + b) + (c + d) \rightarrow ac + ad + bc + bd$	17	$(2 + 3x) + (2 + 5x) \rightarrow 2 \times 2 + 2 \times 5x + 3x \times 2 + 3x \times 5x$
$(a + b) - (c + d) \rightarrow ac - ad - bc - bd$	0		

TABLE 3.20 – Retour sur les règles de gestion des parenthèses ayant été diagnostiquées.

Règles	Instances	CU	Exemples
Distributivité partielle			
$a\Delta(b+c) \rightarrow$ $a\Delta b+c$	$a(b+d+e) \rightarrow ab+ad+e$	8.3	$2(3x+x^2-3) \rightarrow 2 \times 3x+2x^2-3$
	$a-(b^-+b^+) \rightarrow a+b^- - b^+$	27.2	$-(x^2-5) \rightarrow x^2+5$
	$a-(b^++b^-) \rightarrow a+b^+ - b^-$	39.7	$-(x^2-3+x) \rightarrow -x^2-3-x$
Suppression brute de parenthèses			
$a\Delta(b+c) \rightarrow$ $a\Delta b+c$	$a \times (b+c) \rightarrow a \times b+c$	232.9	$3x^2(4+x) \rightarrow 12x^2+x$
	$a-(b+c) \rightarrow a-b+c$	152	$7-(x+3) \rightarrow 7-x+3$
	$(a+b) \times (c+d) \rightarrow a+b \times c+d$	22.4	$(4+5x)(3+x) \rightarrow 4+15x+x$
$(a\Box b)\Delta c \rightarrow$ $a\Box b\Delta c$	$(a+b) \times c \rightarrow a+b \times c$	7.2	$(-2-x) \times 5 \rightarrow -2-5x$
	$(a+b)^n \rightarrow a+b^n$	69.4	$(y+5)^2 \rightarrow y+25$
	$(a \times b)^n \rightarrow a \times b^n$	136.1	$(3x)^2 \rightarrow 3x^2$
Suppression de parenthèses avec changement d'opérateur			
$a\Delta(b\Diamond c) \rightarrow$ $a\Box b\Diamond c$	$a \times (b+c) \rightarrow a+b+c$	129.2	$4(3+x) \rightarrow 4+3+x$
	$a \times (b+c) \rightarrow a\mathcal{N}at b+c$	21.9	$4(3+x) \rightarrow 43+x$
	$(a+b) \times (c+d) \rightarrow a+b\mathcal{N}at c+d$	1.8	$(x^2-7)(3+x) \rightarrow x^2-73+x$
	$(a+b) \times (c+d) \rightarrow a+b+c+d$	20	$(x^2-7)(3+x) \rightarrow x^2-7+3+x$
	$(a+b) \times c \rightarrow a+b\mathcal{N}at c$	0	
	$a-(b+c) \rightarrow a+b+c$	70.8	$5-(7-3x) \rightarrow 12-3x$
	$a+(b+c) \rightarrow a-b-c$	19.7	$4x+(8-x) \rightarrow 5x-8$
	$a \times (bc) \rightarrow a+bc$	4	$(6x)(9x) \rightarrow 6x+9x$

TABLE 3.21 – Retour sur les règles de gestion des parenthèses ayant été diagnostiquées (Suite et fin).

Que pouvons-nous dire d'un tel tableau ?

Tout d'abord, il y a un biais très fort sur les coefficients trouvés dont il faut avoir conscience à ce niveau là : ces coefficients sont bruts dans le sens où ils ne tiennent pas compte du nombre d'opportunités que les élèves ont eu d'appliquer ces règles. Ainsi, si une règle a un *CU* nul, les élèves ont-ils seulement eu l'occasion d'appliquer cette règle ? Ou, par exemple, la règle $a + (b + c) \rightarrow a + b + a + c$ est plus souvent diagnostiquée que la règle $(a + b) \times c \rightarrow a + b \times c$ mais cela peut être uniquement dû au fait que les élèves ont été confrontés plus souvent à l'expression $a + (b + c)$ qu'à l'expression $(a + b) \times c$. Nous distinguerons donc l'adjectif « diagnostiquée » de « utilisée ». Utiliser ne sera employé que pour signifier que l'élève aurait pu appliquer une règle mais a « choisi » de ne pas l'utiliser. Une règle diagnostiquée signifie bien qu'elle a été utilisée mais la réciproque est fautive : une règle non diagnostiquée (de *CU* nul) ne signifie pas nécessairement qu'elle ne pourrait pas être utilisée.

*Une règle de *CU* nul ne signifie pas qu'elle n'a jamais été utilisée. Cela signifie qu'elle n'a jamais été diagnostiquée. De tels tableaux donnent donc un aperçu des erreurs les plus fréquentes indépendamment du nombre de fois où les élèves ont eu à factoriser, à développer, etc.*

Que dire des occurrences malgré la non prise en compte des opportunités d'application ?

Les occurrences des règles ayant même prémisses peuvent, en fait, être comparées. Par exemple, le tableau montre que la règle $a + (b + c) \rightarrow ab + ac$ est plus *utilisée* que la règle $a + (b + c) \rightarrow a + b + a + c$ qui est elle-même plus utilisée que la règle $a + (b + c) \rightarrow a - b + a - c$ puisqu'elles s'appliquent toutes trois à la même expression $a + (b + c)$. Nous pouvons même affirmer que la règle $a + (b + c) \rightarrow a - b + a - c$ n'a jamais été utilisée puisque les élèves en auraient eu l'opportunité : ils ont été confrontés au type de tâches $a + (b + c)$ et le *CU* de la règle est nul.

De plus, les élèves, dans leur ensemble, ont été confrontés à 1231.3 expressions relevant de ce genre de tâche. Or, les règles écrites dans ce tableau portent sur des expressions relativement classiques. On peut donc « imaginer » qu'il y a eu à peu près le même nombre de fois où les élèves ont été confrontés à des expressions telles que $a + (b + c)$ que des expressions telles que $(a + b) + (c + d)$. Nous pouvons donc presque affirmer que la règle $a + (b + c) \rightarrow a + b + a + c$ est plus utilisée que la règle $(a + b) + (c + d) \rightarrow a + c + a + d + b + c + b + d$.

Après avoir vérifié que les règles ont bien eu l'opportunité d'être appliquées, nous pouvons lister les règles d'occurrence nulle : ce sont des règles qui n'ont jamais été diagnostiquées ni même utilisées.

Après avoir listé les règles d'occurrence nulle, nous pouvons aussi regarder le taux d'erreurs dans chaque pays et chaque niveau. En effet, cette information est obtenue dès maintenant car il suffit de considérer l'ensemble des règles erronées et l'ensemble des règles correctes ayant été diagnostiquées.

Les règles de coefficient d'utilisation nul

Si une règle a pu s'appliquer (par exemple, en vérifiant qu'une autre de même prémisses a un coefficient d'utilisation non nul) et qu'elle a, malgré tout, un coefficient d'utilisation nul, nous

27. Rappelons aussi que ces coefficients sont les résultats du diagnostic automatique avec ses 20% d'échecs et ses 20% de mauvais diagnostics. Ainsi si une règle n'a pas été diagnostiquée, cela ne signifie pas qu'un humain ne serait pas capable de la diagnostiquer dans un des protocoles analysés.

28. Les occurrences pour les règles des autres thèmes (réduction, factorisation, etc.) sont donnés en Annexe C.2.

pouvons affirmer que sur l'ensemble des expérimentations, cette règle n'a jamais été utilisée. Cette information est intéressante pour faire le tri des règles à conserver et à exploiter.

Dans le domaine de *la gestion des parenthèses*, les règles de coefficient d'utilisation nul sont :

$$\begin{aligned}
 a + (b \times c) &\rightarrow a + b \times a + c, \\
 a \times (b \times c) &\rightarrow a \times b \times a \times c, \\
 (a \times b) + c &\rightarrow a + c \times b + c, \\
 (a \times b) \times c &\rightarrow a \times c \times a \times c, \\
 (a + b) + c &\rightarrow a + c + b + c, \\
 (a + b) - c &\rightarrow a - c + b - c \\
 a + (b + c) + (d + e) &\rightarrow a + b + a + c + a + d + a + e, \\
 a + (b + c) &\rightarrow a - b + a - c, \\
 a \times (b + c) &\rightarrow a - b + a - c, \\
 (a + b) - (c + d) &\rightarrow ac - ad - bc - bd, \\
 (a + b) \times c &\rightarrow a + b \mathcal{N}at c.
 \end{aligned}$$

Toutes ces règles ont eu des occasions d'être utilisées : en effet, nous avons vérifié que les règles correctes de même prémisses avaient été diagnostiquées. Par exemple, la règle qui permet de passer $(a + b) + c$ à $a + b + c$ avait un coefficient d'utilisation non nul (égal à 235.3) ; ce qui nous a permis d'en déduire que la règle $(a + b) + c \rightarrow a + c + b + c$, n'avait jamais été utilisée.

Il est intéressant de regarder si ces règles avaient été toutefois repérées dans la littérature (Tableau 3.1, p. 95). Les deux premières règles très générales de distributivité de l'opérateur précédant ou suivant la parenthèse apparaissaient dans deux articles [Matz, 1982, Kirshner, 1990]. Cependant, seules quatre des dix instances considérées ont été diagnostiquées chez les élèves des expérimentations :

$$\begin{aligned}
 a + (b + c) &\rightarrow a + b + a + c, \\
 a - (b + c) &\rightarrow a - b + a - c, \\
 (a + b) + (c + d) &\rightarrow a + c + a + d + b + c + b + d, \\
 \text{et } (a + b)^n &\rightarrow a^n + b^n.
 \end{aligned}$$

Cela s'explique par le fait que Matz et Kirshner proposaient le concept de distributivité pour expliquer certaines erreurs mais sans pour autant affirmer que ce concept était réellement détectable dans le sens où ces règles n'étaient pas nécessairement utilisées dans toutes leurs instances possibles. Il semble, en fait, que ces règles ne soient réellement utilisées par les élèves que lorsque l'opérateur dans la parenthèse est l'opérateur d'addition. C'est particulièrement vrai pour la règle

$$a\Delta(b\square c) \rightarrow a\Delta b\square a\Delta c$$

qui a des *CU* nuls lorsque l'opérateur \square est l'opérateur de multiplication et des *CU* non nuls lorsque l'opérateur \square est l'opérateur d'addition. Notons aussi que l'instance la plus *diagnostiquée* des règles de distributivité est la règle :

$$(a + b)^n \rightarrow a^n + b^n,$$

règle qui d'ailleurs se retrouve dans de nombreux articles.

Dans le domaine du *développement d'identités remarquables*, les règles de coefficient d'utilisation nul sont :

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &\rightarrow (a + b) - (a - b), \\ (a + b)^2 &\rightarrow (a + b)(a - b), \\ (a + b)^n &\rightarrow na + nb.\end{aligned}$$

Dans le domaine de la *réduction de sommes de monômes*, aucune règle n'est de coefficient d'utilisation nul.

Dans le domaine de la *réduction de produits algébriques*, les règles de coefficient d'utilisation inférieur à 1 sont :

$$\begin{aligned}ax^n \times bx^p &\rightarrow -abx^{Min(n,p)}, \\ ax^n \times bx^p &\rightarrow (-a + b)x^{Max(n,p)}, \\ ax^n \times bx^p &\rightarrow (-a + b)x^{Min(n,p)}, \\ ax^n \times bx^p &\rightarrow (-a - b)x^{Max(n,p)}, \\ ax^n \times bx^p &\rightarrow (-a - b)x^{Min(n,p)}, \\ ax^n \times bx^p &\rightarrow (a - b)x^{Max(n,p)}, \\ ax^n \times bx^p &\rightarrow (a - b)x^{Min(n,p)}.\end{aligned}$$

Ce sont toutes des règles qui combinent deux erreurs : l'une sur le coefficient du monôme résultant, l'autre sur le degré.

En ce qui concerne les règles portant sur le monôme $(ax^n)^p$, il y a une seule règle de *CU* nul :

$$(ax)^n \rightarrow a^n x.$$

Dans le domaine de la *factorisation de sommes algébriques*, aucune règle n'est de coefficient d'utilisation nul.

Dans le domaine de la *factorisation d'identités remarquables*, les règles de coefficient d'utilisation nul sont :

$$\begin{aligned}2a + 2b &\rightarrow (a + b)(a - b), \\ -a^2 + b^2 &\rightarrow (a - b)(a + b), \\ a^2 - b^2 &\rightarrow (a - b^2)(a + b^2), \\ a^2 + 2ab + b^2 &\rightarrow (a + b) + (a + b), \\ a^2 + 2ab + b^2 &\rightarrow (a + b^2)(a + b^2), \\ a^2 - 2ab + b^2 &\rightarrow (a - b) + (a + b), \\ a^2 - 2ab + b^2 &\rightarrow (a - b) + (a - b), \\ a^3 - 1 &\rightarrow (a - 1) + (a^2 - 1), \\ a^3 - 1 &\rightarrow (a - 1) + (a^2 + 1), \\ na + nb &\rightarrow (a + b)^n.\end{aligned}$$

Cette dernière règle est la réciproque d'une des règles de développement d'identités remarquables qui, elle-même, a aussi un coefficient d'utilisation nul. Fait d'autant plus remarquable que la règle $a^n \rightarrow na$ est, elle, très souvent utilisée (un *CU* de 178).

L'ensemble des occurrences des règles correctes comme erronées est donné en Annexe C.2. Dorénavant, dans les chapitres ultérieurs, nous ne considérerons plus que les règles de coefficient d'utilisation non nul. De plus, outre les règles de factorisation d'identités remarquables, deux autres règles ne trouveront pas leur place dans le travail ultérieur. Ce sont des règles de gestion de parenthèses (tableau 3.20 et 3.21, page 140 et 141) :

$$(a + b)c \rightarrow a + bc, \text{ de } CU \text{ 7.2,}$$

$$\text{et } a(bc) \rightarrow a + bc, \text{ de } CU \text{ 4.}$$

Ces règles erronées ne seront pas exploitées par la suite car les types de tâche de référence dont ces techniques relèvent sont d'occurrence trop faible.

La répartition des règles erronées

Il est possible d'obtenir la répartition des règles erronées en prenant le quotient des règles erronées diagnostiquées sur le nombre total de règles diagnostiquées qu'elles soient erronées ou correctes. Sur l'ensemble des productions issues des différentes expérimentations, il y a 6645 règles erronées diagnostiquées contre 116064 règles correctes, le tout pour les six grands groupes de règles. Les répartitions de ces erreurs selon le niveau scolaire et selon les pays sont représentées figure 3.18. Le nombre d'erreurs diminue avec l'avancée dans la scolarité : plus de la moitié des règles erronées diagnostiquées émanent des classes de 4^e contre 5% dans les classes de 1^{re}. Les expérimentations où il y a eu le plus d'erreurs diagnostiquées (proportionnellement aux nombres de règles diagnostiquées) sont celles qui ont eu lieu en Tunisie; le pays où il y en a eu le moins est le Vietnam. Cette répartition sera affinée dans le chapitre suivant en fonction des types de tâche.

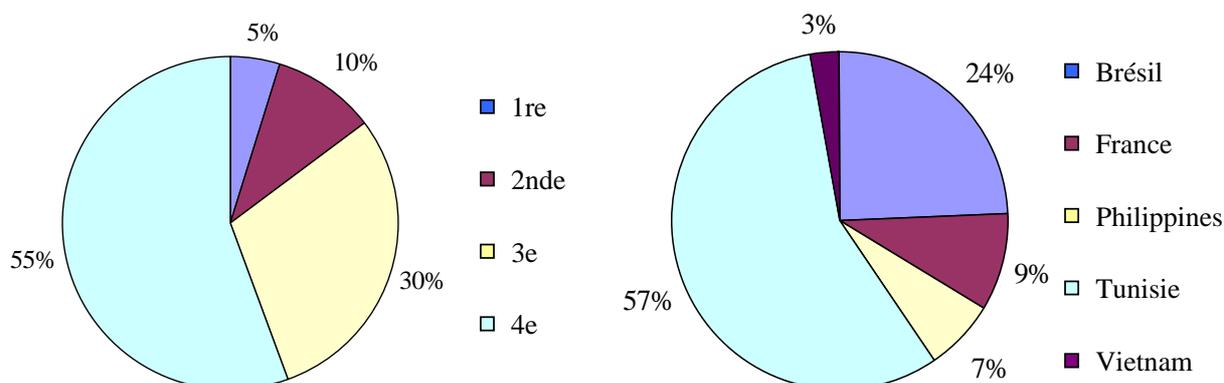


FIGURE 3.18 – À gauche, répartition par niveau scolaire des règles erronées diagnostiquées proportionnellement à l'ensemble des règles correctes diagnostiquées. À droite la répartition selon les pays.

À propos d'autres règles

D'autres règles « hors domaine » avaient été implantées. Citons, en particulier, les règles « faibles » ou les règles d'introduction du signe égal (dont le *CU* est de 551) ou de suppression du signe égal (dont le *CU* est de 1916) (cf. section 3.2.2). L'ensemble de ces règles se retrouve

en Annexe C.2.7. Il y a aussi une autre règle qui a été implantée mais sans trouver place dans un des six grands groupes de règles :

$$a + bc \rightarrow (a + b)c,$$

règle très représentée dans les expérimentations puisqu'elle obtient un coefficient d'utilisation de 313. Cette règle est bien connue et se retrouve dans certains des travaux cités précédemment ([Sleeman, 1986, Cortes and Kavafian, 1999]). Elle n'a pas trouvé une véritable place dans nos travaux mais nous l'avons cependant implantée afin d'améliorer l'algorithme de diagnostic.

Les règles sur les puissances ne trouveront pas non plus leur place dans la suite car il est difficile de construire dynamiquement un type de tâches regroupant des expressions sur lesquelles sont appliquées des règles portant sur les puissances, qui peuvent tout aussi bien être de la forme $(5x)^2$ que de la forme $3x \times 2x^2$. Pourtant, ce sont des règles dont les coefficients peuvent être importants :

$$\begin{aligned} ax^n &\rightarrow a^n x, \text{ de CU 71.3,} \\ -a^{2n} &\rightarrow +a^{2n}, \text{ de CU 40.8,} \\ (-u)^{2n} &\rightarrow -u^{2n} \text{ de CU 45.5,} \\ u^n &\rightarrow nu \text{ de CU 178.1.} \end{aligned}$$

3.4 Conclusion sur le modèle local

Pour rendre compte des activités en calcul littéral, nous avons décidé de modéliser ces activités cognitives qui passent par des activités syntaxiques par des applications de règles algébriques. Une bibliothèque de 108 règles erronées, dites « a priori », a été élaborée à la suite de lecture de productions enregistrées dans APLUSIX, de leur visionnement via le magnétoscope et de quelques articles portant sur le sujet. Sa construction ne s'est, en fait, pas faite linéairement : elle a demandé des va-et-vient entre élaboration manuelle de la liste de règles, codage et algorithme. Les règles « a priori », écrites à la main, ont été, en effet, implantées au fur et à mesure dans le logiciel ANAÏS en langage SIM. Au total, 107 règles erronées ont été codées en SIM, produisant 153 règles détaillées, équivalent plus contextualisé des règles a priori. Ces règles codées sont, en grande partie, des règles d'unification étendue, dans le sens où elles ne sont pas de simples règles de réécriture mais véhiculent une sémantique.

Un diagnostic d'un pas de calcul d'élève consiste en une liste non ordonnée de ces règles qui permet de reproduire le pas. Trois algorithmes ont été testés pour permettre de sélectionner les chemins (associations de règles) qui permettent de reproduire le pas de calcul, ce qui fait d'eux des diagnostics. L'algorithme en largeur permet d'obtenir toutes les listes possibles d'au plus trois règles écrites dans la bibliothèque. Une étude de pas de calcul montre qu'il y a fréquemment besoin de diagnostics comportant plus de trois règles ; de plus, il semble nécessaire de mettre en place une forme de sélection sur l'ensemble des diagnostics possibles. C'est pourquoi, cet algorithme a été mis de côté et deux algorithmes heuristiques ont été installés. Leur heuristique détermine si deux expressions sont proches l'une de l'autre. Elle prend en compte la proximité à la fois sémantique et syntaxique des expressions. Le premier algorithme, dit d'« heuristique de coût », est classique en recherche heuristique. Il attribue un coût au chemin selon sa longueur. Le second algorithme, dit d'« heuristique probabiliste », a été élaboré par nos soins. Il repose sur l'idée que des calculs type additif ou multiplicatif sur les coûts n'auraient pas de sens tandis qu'attribuer au chemin un coefficient qui serait une probabilité permettrait de les manipuler. Une étude manuelle des diagnostics produits par ces deux algorithmes et des mises en échec a montré

une meilleure qualité des diagnostics du second : les diagnostics de l'algorithme d'heuristique probabiliste sont plus proches de ceux que nous aurions attribués manuellement. Cet algorithme a ceci d'intéressant qu'il permet d'associer une probabilité à un diagnostic et de reconstruire le nombre de fois qu'une règle a été appliquée. Si une règle a été diagnostiquée plusieurs fois mais dans des diagnostics de probabilité faible, son « coefficient d'utilisation » en sera amoindri.

Des outils supplémentaires ont permis d'améliorer encore cet algorithme. Par exemple, qualifier les types de pas de calcul permet de pré-sélectionner les règles qui s'appliqueront au pas. Isoler dans l'expression mère les arguments qui diffèrent de ceux du but simplifie aussi la recherche heuristique. Cependant, comme l'isolation empêche certaines règles de s'appliquer alors que nous le souhaiterions, il est possible de l'interdire ponctuellement. Il est aussi possible de notifier que certaines règles ne doivent pas se retrouver au sein d'un même diagnostic.

Tous les diagnostics utilisés dorénavant ont été produits avec l'algorithme heuristique probabiliste (AHP) avec prise en compte de la qualification et possibilité d'empêcher l'isolation. Plusieurs dizaines de milliers de pas de calcul d'élèves effectués au sein d'APLUSIX et émanant de différentes expérimentations ont été récupérés. Toutes ces expérimentations ont été conduites en mode « test » du logiciel, c'est-à-dire sans rétroaction. Elles ont eu lieu dans des contextes et des pays différents et à des niveaux scolaires différents. ANAÏS a été lancé sur l'ensemble de ces productions et a produit près de cent mille diagnostics et une mise en échec sur 30% des pas. Cela signifie que deux centaines de règles erronées et correctes ont permis de reproduire près de 60000 pas de calcul. Environ cinq cents diagnostics de pas de calcul erronés ont été étudiés et comparés à ce que nous aurions souhaité comme enchaînement de règles. Échecs et diagnostics confondus, il y a environ 20% de mauvais résultats, 10% de moyens et 70% de bons. Quant aux diagnostics de pas de calcul correct, ils sont tous de bons diagnostics. Les règles erronées diagnostiquées ont des coefficients d'utilisation très variables : de 0 à 910 pour une règle erronée de réduction. Cependant, ces coefficients ne prennent pas en compte le nombre de fois où les règles auraient pu s'appliquer. C'est cette faiblesse qui sera pallier dans les prochains chapitres afin de répondre à la question essentielle de la présence d'une stabilité au sein des productions des élèves.

Chapitre 4

Opportunités d'application d'une règle

Résumé. Dans les protocoles étudiés pour nos travaux, nous ne sommes pas maîtres des types d'expressions algébriques que les élèves transforment : soit parce que l'expression a été écrite par un enseignant ou proposée et construite par le logiciel, soit parce qu'elle est une expression intermédiaire au travail de l'élève, produite par l'élève même. Or, cette information doit être reconstruite pour pouvoir comparer les coefficients d'utilisation des règles en vue de capturer des stabilités dans les comportements des élèves. En effet, le coefficient d'utilisation d'une règle doit tenir compte du nombre de fois où une règle a l'opportunité de s'appliquer. Pour cela, nous réintroduisons la notion de type de tâches dont relève une tâche, la tâche consistant, ici, en l'expression initiale d'une transformation-Anaïs diagnostiquée par le logiciel. Nous considérons qu'une règle a deux types d'opportunité de s'appliquer à une telle expression. Soit les conditions d'appariement de la règle à l'expression-mère sont vérifiées, auquel cas, nous parlons d'opportunité mathématique. Soit la règle relève du même type de tâches que la règle associée automatiquement à la transformation-Anaïs, auquel cas, nous parlons d'opportunité-Anaïs. Les règles relevant d'un même type de tâches ont donc, toutes, eu les mêmes opportunités d'être appliquées et nous pouvons ainsi comparer leur taux d'utilisation.

Dans le chapitre précédent, nous avons associé au travail de l'élève une liste de règles algébriques affectées d'un coefficient représentant l'utilisation que l'élève ou un groupe d'élèves en avait faite. Nous ne tenions, entre-autre, nul compte du nombre de fois où l'élève *aurait pu* aussi utiliser ces règles, sans pour autant le faire. Puisque ce qui nous intéresse n'est pas la simple utilisation intermittente d'une règle mais sa persistance et sa résistance à des contextes différents, nous devons nous interroger sur ce qu'est une *opportunité* d'appliquer une règle.

Cette opportunité dépend-elle de l'expression algébrique ?

Est-elle une occasion que tout un chacun perçoit, une occasion acceptée et reconnue comme telle par une institution ? Ou, est-elle liée à l'élève même, à ce qu'il perçoit et interprète de l'expression ?

Nous n'aborderons, dans ce chapitre, qu'une première approche de la notion d'opportunité d'appliquer une règle : celle de type de tâche. Cette notion sera affinée dans le chapitre suivant par la prise en compte de caractéristiques décrivant encore plus précisément les expressions

algébriques. Il y sera aussi abordé le problème du seuil d'acceptation d'une action stable : ce que l'on accepte comme une application *préférentielle* d'une règle.

Habituellement, le chercheur interprétant les réponses des élèves confronte ses élèves à une même série d'exercices. Il interprète et modélise la ou les réponses de l'élève par l'application d'une seule technique. Dans nos travaux, la problématique de l'opportunité d'application soulève en fait deux difficultés, que nous allons tenter de résoudre dans ce chapitre :

- les productions des élèves exploités dans ces travaux émanent d'expérimentations très variées (section 3.3.1). Ces élèves n'ont pas tous été confrontés aux mêmes consignes : certains ont, par exemple, travaillé beaucoup la notion de factorisation, d'autres ne l'ont qu'à peine abordée. Comment alors récupérer l'information consistant à savoir sur quel type d'expression l'élève a travaillé ?
- Quand bien même un groupe d'élèves serait confronté aux mêmes exercices (ce qui est, par exemple, le cas dans certaines de nos propres expérimentations), tous ces élèves ne résolvent pas un même exercice nécessairement de la même manière. Au sein de leur résolution, ils écrivent des expressions intermédiaires possiblement différentes de celles de leurs collègues, chaque expression pouvant être perçue comme un nouveau sous-exercice. L'importance de la prise en compte des étapes intermédiaires est aussi soulevée par Payne & Squibb : « *students' intermediate steps towards a solution are not merely a convenience for cognitive diagnosis : they are necessary in principle* » [Payne and Squibb, 1990, p. 451]. Comment alors tenir compte des étapes intermédiaires des élèves, chacune des étapes fournissant de nouvelles opportunités d'appliquer de nouvelles règles ?

Pour répondre à ces questions, nous distinguons l'opportunité « mathématique » d'appliquer une règle de l'opportunité qui consiste à détecter le domaine dans lequel l'élève se place, dite « opportunité-Anaïs ».

4.1 Une définition de l'opportunité d'appliquer une règle : les types de tâche

Des auteurs ont travaillé sur l'idée de récurrence des erreurs des élèves et ont inmanquablement abordé la notion d'opportunité. Citons en particulier : Sleeman [Sleeman, 1986, Sleeman et al., 1989], Payne & Squibb [Payne and Squibb, 1990], Corbett & Anderson [Corbett and Anderson, 1995] et [Corbett, 2002]. Certains reconnaissent la difficulté d'en donner une définition : « [...] *different mal-rules have widely different "opportunities" of occurring, and in some cases the number of opportunities is impossible to quantify without looking closely at individual students' protocols.* »¹ [Payne and Squibb, 1990, p. 456]. D'autres s'interrogent sur l'influence de la présence de certains ostensifs sur le comportement de l'élève : « *Does the pupil's perception of algebraic tasks vary from one task type to another?* »² [Sleeman, 1986, p. 30]. Mais aucun ne semble avoir explicitement défini ce qu'ils entendaient par « l'opportunité d'appliquer une règle ». Il semble qu'ils aient suivi le parti pris de Payne & Squibb de considérer toute occasion, *indépendamment de caractéristiques contextuelles*, d'appliquer une règle comme étant une opportunité, choix sur lequel nous reviendrons en section 4.1.4.

1. « Les différentes règles erronées ont largement des « opportunités » distinctes d'apparition et, dans certains cas, le nombre d'opportunités est impossible à mesurer sans étudier étroitement les protocoles des différents élèves. » [TA]

2. « Est-ce que la perception de l'élève des tâches algébriques varie d'un type de tâches à un autre ? » [TA]

4.1.1 Opportunité mathématique

Considérons une règle et posons-nous la question de savoir si l'élève l'a utilisée quand il en avait l'occasion. Autrement dit,

quelles sont les expressions algébriques qui sont des occasions d'application de cette règle ?

Nous pouvons trivialement éliminer les expressions qui ne vérifient pas les *conditions* d'application de la règle. Par exemple, si l'on considère une règle de réduction de somme de monômes, elle ne peut pas s'appliquer sur un produit algébrique. Pour pouvoir affirmer qu'un élève n'a pas utilisé une règle alors qu'il en avait l'opportunité il faut donc s'assurer de prime abord qu'il a transformé une expression sur laquelle elle pouvait « mathématiquement » s'appliquer. Nous dirons qu'il y a *opportunité mathématique* d'appliquer une règle à une expression si l'expression vérifie les conditions d'application de cette règle.

Analysons l'exemple 4.1 où l'élève transforme $5x + 3x + 2(x + 1 + 5)$ en $5x + 3x + 2x + 2 + 10$. Les règles de réduction de la somme de deux monômes ont l'opportunité mathématique d'être appliquées à $5x + 3x + 2(x + 1 + 5)$ ou plus exactement à $5x + 3x$. Il en est de même des règles de développement (sur $2(x + 1 + 5)$) ou celles du calcul numérique (sur $1 + 5$). En revanche, les règles portant sur les équations n'ont pas l'opportunité mathématique d'être appliquées.

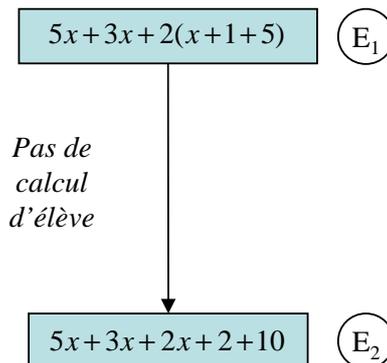


FIGURE 4.1 – Exemple d'un pas de calcul d'élève : dans le domaine du développement, cet élève a utilisé une règle correcte. Même si il a eu théoriquement l'occasion d'appliquer des règles de réduction ou de calcul numérique, nous ne considérons pas qu'il en a eu l'opportunité en son sens puisqu'il s'est placé dans un « domaine » différent, celui du développement.

Cependant, ce n'est pas parce qu'une règle peut mathématiquement s'appliquer, que l'élève se doit de l'appliquer. Dans l'exemple 4.1, nous ne souhaitons pas dire que cet élève n'a pas appliqué de règle de réduction de monômes à $5x + 3x + 2(x + 1 + 5)$ alors qu'il aurait pu l'appliquer à la sous-expression $5x + 3x$. Cela n'a pas de sens de le lui reprocher puisqu'il a travaillé sur une autre partie de l'expression : $2(x + 1 + 5)$. La seconde nécessité est donc de vérifier que la règle que l'on considère peut s'appliquer mathématiquement sur la *sous-expression transformée* par l'élève. Mais cela reste insuffisant.

Nous ne souhaitons pas non plus affirmer que l'élève de l'exemple 4.1 a manqué une occasion d'appliquer une règle de calcul numérique : il utilise une règle de développement et c'est dans ce *domaine* qu'il a fait le choix d'utiliser une règle *correcte*. Déclarer que la sous-expression $2(x + 1 + 5)$ sur laquelle l'élève travaille était une occasion d'appliquer une règle de calcul numérique est d'ordre stratégique. C'est, sans nul doute, une information intéressante et exploitable

mais ce n'est pas notre sujet d'étude. Ce qui nous intéresse est de savoir quelle est la règle de développement (correcte ou incorrecte) que l'élève utilise puisqu'il a eu la volonté d'appliquer une règle de ce « domaine ». Quand l'élève est amené à développer une expression, développe-t-il correctement ? Sinon, applique-t-il la même règle erronée ? Pour répondre à ces questions, il faut détecter quels sont les « domaines » possibles, puis, dans quel domaine l'élève « pense » être, quelles sont les règles associées à un domaine, et, enfin, parmi celles-là, quelle est la règle que l'élève a tendance à utiliser. Autrement dit, nous avons besoin de détecter le *type de tâche* dans lequel *l'élève se place* pour pouvoir dire si il aurait pu ou non appliquer une autre règle « relativement proche » de celle qu'il a utilisée.

4.1.2 Découpage en types de tâches

Au sein de la résolution d'un exercice dans APLUSIX, l'élève transforme librement des expressions algébriques. Nul besoin de préciser sur quelle sous-expression il travaille ou quel genre de tâche il effectue sur cette sous-expression. Nous avons pourtant besoin de ces informations pour modéliser la stabilité du travail de l'élève : le genre de tâche et la sous-expression ou le type de sous-expression qu'il transforme.

Pour accomplir une tâche (dictée par l'énoncé de l'exercice), l'élève met en place une technique, enchaînement de sous-tâches : il choisit quel genre de tâche il va effectuer et sur quelle sous-expression il va travailler. Emboîtées, ces sous-tâches constituent la réponse de l'élève à l'exercice. Cet emboîtement peut être pensé, réfléchi, justifiable, comme c'est le cas chez le bon élève ou l'expert. L'enchaînement de ces sous-tâches peut être considéré comme une technique si l'on s'intéresse à *l'accomplissement de la tâche dictée par l'énoncé de l'exercice*. Mais, dans notre travail, nous ne nous intéressons pas à l'analyse de cet enchaînement. Nous regardons la sous-tâche *découpée* de celles qui précèdent ou suivent. Elle perd son statut de sous-tâche dès lors qu'on la regarde séparément. Détachée de sa position au sein de la résolution de l'exercice, l'expression intermédiaire acquiert le statut de *tâche* relevant d'un *type de tâche*.

Le choix de la « bonne » segmentation d'un corpus d'observations revient au chercheur. Comme le note Chevillard, « [...] tâches, types de tâches ne sont pas des données de la nature : ce sont des « artefacts », des « oeuvres », des *construits institutionnels*, dont la reconstruction en telle institution, et par exemple *en telle classe*, est un problème à part entière, *qui est l'objet même de la didactique*. » [Chevillard, 1998a]. Cela pose naturellement des difficultés de justification. Artaud et Cirade se sont confrontées à ce problème de granularité du découpage en sous-tâche et de re-modélage en tâches. Dans le corpus étudié par Artaud [Artaud, 1998, p. 185], trois types de tâches identifiés comme tels apparaissent comme sous-tâches dans l'accomplissement d'un autre type de tâche. Dans [Cirade and Matheron, 1998, p. 200], Cirade prévient le lecteur que « le découpage choisi peut sembler arbitraire. Il ne faut cependant pas oublier qu'il s'agit là d'un modèle : les sous-tâches considérées sont d'une certaine dimension et ce découpage permet de mettre correctement en évidence l'organisation mathématique et de l'évaluer. »

Le découpage en types de tâche doit suivre celui d'une institution. Les pas de calcul étudiés ont été produits par des élèves de l'institution « enseignement de l'algèbre élémentaire ». Le découpage choisi est donc celui de cette institution. Un « bon sujet » sera alors à même de reconnaître ce découpage, de s'y conforter et de répondre en fonction (et ce de manière stable). Il est important de noter que le découpage des types de tâche que propose l'institution correspond aux techniques qui sont enseignées : comme nous l'avons noté dans le chapitre 1, à chaque type de tâche, ne correspond qu'une seule technique (hypothèse H_{T1}). La granularité que nous choisissons pour décrire les tâches au sein des pas de calcul est donc celle préconisée par l'analyse praxéologique des manuels de la section 1.3.3, revue selon trois exigences à nos travaux :

- Il fallait que toutes les règles d'un type de tâches donné s'appliquent toutes sur un même type d'expression. Cela permettait d'affirmer que, dès lors qu'une règle R avait été diagnostiquée, toutes les règles relevant du même type de tâches que R auraient alors pu être elles aussi utilisées.
- Nous avons veillé à ce que chaque transformation-Anaïs diagnostiquée par ANAÏS puisse relever d'un type de tâches et d'un seul. Autrement dit, une transformation-Anaïs étant l'application d'une et une seule règle, nous avons fait en sorte qu'une règle n'appartienne qu'à un seul type de tâche.
- Enfin, le découpage devait afficher une certaine exhaustivité pour que l'ensemble des types de tâche recouvre un maximum de règles détaillées.

Ces trois exigences nous ont poussés à modifier légèrement le découpage qui était ressorti de l'analyse praxéologique des manuels. Nous proposons un nouveau découpage qui répond, cette fois-ci, à nos attentes tout en conservant l'idée du découpage construit à partir des manuels scolaires :

1. Réduire une somme de monômes, (RedAdd);
2. Réduire un produit de monômes, (RedMult);
3. Développer une somme précédée d'une signe +, (DvtPlus);
4. Développer une somme précédée d'une signe −, (DvtMoins);
5. Développer le produit de deux facteurs où le premier est un monôme et le second une somme, (DvtSimple);
6. Développer le produit de deux facteurs où les deux sont des sommes, (DvtDouble);
7. Développer le produit de trois facteurs dont le premier est un monôme et les deux autres sont des sommes, (DvtTriple);
8. Développer le carré d'une somme, (DvtCarre);
9. Factoriser une somme de termes ayant un facteur commun, (Fact).

Cinq de ces types de tâche sont exactement ceux proposés par les manuels. Ce sont $RedAdd$, $RedMult$, $DvtPlus$, $DvtMoins$ et $Fact$ qui correspondent, respectivement, aux quatre types institutionnels T_{Red}^{Σ} , T_{Red}^{Π} , T_{Dvt}^+ , T_{Dvt}^- et T_{Fact} . Les quatre autres types de tâche se distinguent quelque peu de ceux définis dans le premier chapitre :

- $DvtSimple$, abréviation de « développement simple », regroupe les types $T_{Dvt}^{simple+}$ et $T_{Dvt}^{simple-}$ car, d'une part, certains manuels le font et, d'autre part, dans nos travaux, nous ne nous cantonnons pas à des tâches relevant uniquement et clairement de $T_{Dvt}^{simple+}$ ou $T_{Dvt}^{simple-}$. En effet, de quel de ces deux types relève, par exemple, la tâche $7(x^2 + x - 5)$? La réponse n'est pas évidente. En revanche, cette tâche appartient sans conteste à $DvtSimple$ tel que défini ci-dessus. Enfin, nous n'avons que très peu travaillé la difficulté du signe moins et il n'y a pas de règle détaillée distinctes implémentée pour le type $T_{Dvt}^{simple+}$ et le type $T_{Dvt}^{simple-}$. Toutefois, les tâches du type $(a + b)c$ sont exclues de $DvtSimple$ en étant trop peu diagnostiquée, elles n'ont pas nécessité la création d'un dixième type de tâche. Une même expression algébrique recouvre bien toutes les tâches du type $DvtSimple$: $a(\sum_i a_i)$.
- $DvtDouble$, abréviation de « développement double », englobe T_{Dvt}^{double} et T_{Dvt}^{Id3} (« Développer $(a + b)(a - b)$ ») car la description pertinente de l'expression sur laquelle s'appliquent les règles est la même : un produit de deux facteurs, $(\sum_i a_i)(\sum_i b_i)$.

- *DvtTriple*, abréviation de « développement triple », a été ajouté car ce type se retrouve parfois dans certains exercices de quelques manuels. De plus, il n'est pas une variante déclinée des deux autres ni en terme d'expression algébrique pouvant le décrire ni en terme de technique pouvant l'accomplir. En effet, nous avons vu en section 1.3.3, page 44, qu'il est attendu par l'institution scolaire que les tâches du type $a(b+c)(d+e)$ s'accomplissent par l'application successive des techniques associées à *DvtSimple* et *DvtDouble*. Aussi de telles tâches ne peuvent-elles relever ni de *DvtSimple* ni de *DvtDouble* exclusivement et forment un type à part entière. En résumé, étant donné que des règles erronées ayant pour prémisses des formes de type $a(b+c)(d+e)$ ont été implémentées et diagnostiquées (tableau 3.20) et que la seconde exigence citée plus haut imposait qu'une règle ne relève que d'un seul type de tâches et non de deux, le type de tâches *DvtTriple* a été implanté.
- *DvtCarre*, abréviation de « développement d'un carré », regroupe les types T_{Dvt}^{Id1} et T_{Dvt}^{Id2} . Les techniques de résolution de ces deux types institutionnels se déduisent l'une de l'autre et, comme pour *DvtSimple*, la prise en compte du signe moins ne nous intéresse pas au point qu'aucune prémisses de règle ne demande de distinguer $(a+b)^2$ de $(a-b)^2$. En fait, une même expression algébrique regroupe ces deux types : $(a+b)^2$. Le type *DvtCarre* se distingue de *DvtDouble* car les deux identités remarquables $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$ ne sont pas explicitement écrites sous la forme d'un produit.

Les types de tâche de factorisation d'identités remarquables T_{Fact}^{Id1} , T_{Fact}^{Id2} et T_{Fact}^{Id3} n'ont pas été conservés car les coefficients d'utilisation des règles détaillées erronées portant sur ces identités remarquables sont très faibles (leur somme fait 15) comparativement aux coefficients d'utilisation des règles détaillées correctes de ce même domaine : moins de 3% des factorisations d'identités remarquables sont diagnostiquées par une des règles erronées. Or, nous avons souhaité regrouper les règles détaillées comme des techniques de types de tâche suffisamment représentés dans les expérimentations. Si nous avons, malgré tout, besoin de tenir compte de ces types de tâches, nous les regrouperons sous le terme de *FactId*. À ces types de tâche, s'en ajoutent deux autres que nous ne considérons pas même si nous les nommons ponctuellement : le calcul numérique et la résolution d'équation.

Un pas de calcul, qui peut consister en plusieurs tâches, sera découpé selon cette granularité. Prenons le cas d'un élève qui transforme en un pas de calcul :

$$2(x+5-3x) \text{ en } -4x+10.$$

Ce pas de calcul relève-t-il de *DvtSimple*? De *RedAdd*? La réponse est des deux. En effet, le travail de cet élève peut être découpé par la résolution de deux tâches (qui sont celles que le logiciel ANAÏS pourrait diagnostiquer) :

Développer $2(x+5-3x)$

et Réduire $2x-6x^3$.

Ces tâches relèvent des types de tâches respectifs :

DvtSimple

et *RedAdd*.

3. Ce pas de calcul pourrait, d'ailleurs être aussi modélisé par une réduction de x et $-3x$, suivie d'un développement.

4.1.3 Processus du diagnostic automatique des types de tâches.

Association des règles aux types de tâche

Nous allons décrire maintenant comment un type de tâches est associé à une transformation, à la suite d'une session de diagnostics. Un travail manuel de rattachement des règles aux types de tâche a précédé l'automatisation.

Dans un premier temps, à chaque règle détaillée ou groupe de règles nous associons un type de tâche. Par exemple, les règles

$$a(b + c) \rightarrow ab + ac,$$

$$a(b + c) \rightarrow ab + c$$

$$\text{et } a(b + c) \rightarrow a + b + c$$

sont associées au type de tâches de développement simple, *DvtSimple*. Les règles

$$(a + b)(c + d) \rightarrow ac + ad + bc + bd,$$

$$(a + b)(c + d) \rightarrow a + bc + d$$

$$\text{et } (a + b)(c + d) \rightarrow a + b + c + d$$

sont associées au type de tâches *DvtDouble*.

Dans le chapitre précédent, les règles « a priori » avaient été regroupées par type de tâches (avec regroupement de certaines sous l'appellation de la gestion de parenthèses) afin de rendre plus lisible pareille présentation. Ici, le travail porte sur les règles *détaillées*, produits informatiques. Le tableau 4.1, p. 157 récapitule les neuf types de tâche et inclut les règles erronées comme correctes, ce qui n'était pas le cas dans les tableaux de la section 3.1.3. Rappelons aussi que dorénavant seules les règles dont le coefficient d'utilisation s'est avéré non nul sont présentées.

- Pour le type de tâches « DvtSimple », 11 règles détaillées sont associées : 6 règles correctes et 5 erronées.
- Pour le type de tâches « DvtDouble », 5 règles détaillées sont associées : 2 règles correctes et 3 erronées.
- Pour le type de tâches « DvtTriple », 4 règles détaillées sont associées : 1 règle correcte et 3 erronées.
- Pour le type de tâches « DvtMoins », 8 règles détaillées sont associées : 1 règle correcte et 7 erronées.
- Pour le type de tâches « DvtPlus », 7 règles détaillées sont associées : 1 règle correcte et 6 erronées.
- Pour le type de tâches « DvtCarre », 4 règles détaillées sont associées : 2 règles correctes et 2 erronées.
- Pour le type de tâches « RedAdd », 20 règles détaillées sont associées : 1 règle correcte et 19 erronées.
- Pour le type de tâches « RedMult », 25 règles détaillées sont associées : 1 règle correcte et 24 erronées.
- Pour le type de tâches « Fact », 11 règles détaillées sont associées : 1 règle correcte et 10 erronées.

Types	Règles	Types	Règles
<i>DotSimple</i>	$a(b+c) \rightarrow ab+ac$ $a(b+c+d) \rightarrow ab+ac+d$ $a(b+c) \rightarrow ab+c$ $a(b+c) \rightarrow a+b+a+c$ $a(b+c) \rightarrow a+b+c$ $a(b+c) \rightarrow a\mathcal{N}at\ b+c$	<i>DotDouble</i>	$(a+b)(c+d) \rightarrow ac+ad+bc+bd$ $(a+b)(a-b) \rightarrow a^2-b^2$ $(a+b)(c+d) \rightarrow a+b \times c+d$ $(a+b)(c+d) \rightarrow a+b+c+d$ $(a+b)(c+d) \rightarrow a+b\mathcal{N}at\ c+d$
<i>DotTriple</i>	$a(b+c)(d+e) \rightarrow$ $abd+acd+abe+ace$ $a(b+c)(d+e) \rightarrow ab+ac(d+e)$ $a(b+c)(d+e) \rightarrow ab+ac+ad+ae$ $a(b+c)(d+e) \rightarrow ab+ac \times ad+ae$	<i>DotMoins</i>	$-(a+b) \rightarrow -a-b$ $a-(b+c) \rightarrow a-b+a-c$ $a-(b+c) \rightarrow ab+ac$ $a-(b+c) \rightarrow a+b+a+c$ $-(a+b) \rightarrow -a+b$ $-(a+b) \rightarrow a+b$ $-(a^+ + b^-) \rightarrow a^+ - b^-$ $-(a^- + b^+) \rightarrow a^- - b^+$
<i>DotPlus</i>	$+(a+b) \rightarrow a+b$ $(a+b) + (c+d) \rightarrow$ $a+c+a+d+b+c+b+d$ $(a+b) + (c+d) \rightarrow ac+ad+bc+bd$ $a+(b+c) \rightarrow a+b+a+c$ $a+(b+c) \rightarrow ab+ac$ $+(a+b) \rightarrow -a-b$	<i>RedMult</i>	$ax^n \times bx^n \rightarrow a \otimes bx^{n+p}$ $ax^n \times bx^p \rightarrow abx^{Max(n,p)}$ $ax^n \times bx^n \rightarrow abx^n$ $ax^n \times bx^p \rightarrow abx^{Min(n,p)}$ $ax^n \times bx^p \rightarrow -abx^{Max(n,p)}$ $ax^n \times bx^n \rightarrow -abx^n$ $ax^n \times bx^p \rightarrow -abx^{Min(n,p)}$ $ax^n \times bx^p \rightarrow -abx^{n+p}$ $ax^n \times bx^p \rightarrow (-a+b)x^{Max(n,p)}$ $ax^n \times bx^n \rightarrow (-a+b)x^n$ $ax^n \times bx^p \rightarrow (-a+b)x^{Min(n,p)}$ $ax^n \times bx^p \rightarrow (-a+b)x^{n+p}$ $ax^n \times bx^p \rightarrow (-a-b)x^{Max(n,p)}$ $ax^n \times bx^n \rightarrow (-a-b)x^n$ $ax^n \times bx^p \rightarrow (-a-b)x^{Min(n,p)}$ $ax^n \times bx^p \rightarrow (-a-b)x^{n+p}$ $ax^n \times bx^p \rightarrow (a+b)x^{Max(n,p)}$ $ax^n \times bx^n \rightarrow (a+b)x^n$ $ax^n \times bx^p \rightarrow (a+b)x^{Min(n,p)}$ $ax^n \times bx^p \rightarrow (a+b)x^{n+p}$ $ax^n \times bx^p \rightarrow (a-b)x^{Max(n,p)}$ $ax^n \times bx^n \rightarrow (a-b)x^n$ $ax^n \times bx^p \rightarrow (a-b)x^{Min(n,p)}$ $ax^n \times bx^p \rightarrow (a-b)x^{n+p}$ $ax^n \times bx^p \rightarrow (a-b)x^2$
<i>RedAdd</i>	$ax^n + bx^n \rightarrow a \oplus bx^n$ $ax^n + x^p \rightarrow ax^{Max(n,p)}$ $ax^n + x^p \rightarrow ax^{Min(n,p)}$ $ax^n + x^p \rightarrow ax^{n+p}$ $ax^n + ax^n \rightarrow 0$ $ax^n + bx^p \rightarrow (-a+b)x^{Max(n,p)}$ $ax^n + bx^n \rightarrow (-a+b)x^n$ $ax^n + bx^p \rightarrow (-a+b)x^{Min(n,p)}$ $ax^n + bx^p \rightarrow (-a+b)x^{n+p}$ $ax^n + bx^p \rightarrow (-a-b)x^{Max(n,p)}$ $ax^n + bx^n \rightarrow (-a-b)x^n$ $ax^n + bx^p \rightarrow (-a-b)x^{Min(n,p)}$ $ax^n + bx^p \rightarrow (-a-b)x^{n+p}$ $ax^n + bx^p \rightarrow (a+b)x^{Max(n,p)}$ $ax^n + bx^p \rightarrow (a+b)x^{Min(n,p)}$ $ax^n + bx^p \rightarrow (a+b)x^{n+p}$ $ax^n + bx^p \rightarrow (a-b)x^{Max(n,p)}$ $ax^n + bx^n \rightarrow (a-b)x^n$ $ax^n + bx^p \rightarrow (a-b)x^{Min(n,p)}$ $ax^n + bx^p \rightarrow (a-b)x^{n+p}$		

Types	Règles	Types	Règles
DvtCarre	$(a + b)^2 \rightarrow a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 \rightarrow a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$ $(a + b)^2 \rightarrow a + b^2$	Fact	$ab + ac \rightarrow a(b + c)$ $ab + a \rightarrow a(b)$ $ab + ac \rightarrow a(-b + c)$ $ab + ac \rightarrow a(ab + c)$ $ba^n + ac \rightarrow a(b^n + c)$ $ab + ca \rightarrow bca$ $ab - ac \rightarrow bca$ $-ab + ac \rightarrow a(b + c)$ $ab + ac \rightarrow a(1 + c)$ $ab + ac \rightarrow a + (b + c)$ $abc + ad \rightarrow a(b + c + d)$

TABLE 4.1 – Chaque règle détaillée dont le coefficient d'utilisation s'était avéré non nul pour la session de diagnostics sur l'ensemble des expérimentations est associée à un type de tâche. Les règles, comme souvent au long du manuscrit, sont présentées sous leur forme algébrique « classique » même si elles correspondent, en fait, à des cas plus génériques. Par exemple, la règle $a(b + c) \rightarrow ab + c$ s'applique quand bien même la somme est de plus de deux termes. Ce choix répond à une meilleure lisibilité, pensons-nous, pour le lecteur, au détriment, il est vrai, d'une véritable rigueur.

Les règles de factorisation sont présentées, ici, sur des sommes de deux termes pour simplifier la lecture. Cependant, elles sont codées de telle sorte qu'elles ne portent que sur un terme et il faut une combinaison d'autant de règles que de termes à factoriser pour diagnostiquer une factorisation (cf. section 3.1.3).

Les types de tâches de résolution d'équation et de calcul numérique sont aussi diagnostiqués, puisque les règles correspondantes ont été implantées (en ce qui concerne la résolution d'équation, se référer à [Chaachoua et al., 2007b]). Cependant, n'exploitant pas les résultats de ces domaines, nous ne donnons pas les règles en question, bien que parfois ces types de tâche soient nommés par la suite.

Le découpage répond au besoin d'obtenir, de la part des règles relevant d'un même type de tâche, qu'elles aient même prémisse.

Découpage d'un pas de calcul

Dans un second temps, nous considérons un pas de calcul d'un élève produit dans le logiciel APLUSIX. Après une session de diagnostics, une liste de règles est diagnostiquée comme ayant été possiblement appliquée par l'élève lors de ce pas de calcul. Le pas de calcul est découpé en transformations-Anaïs, chacune étant expliquée par l'application d'une règle. Par le travail précédent, récapitulé dans le tableau 4.1, chaque règle est attachée à un type de tâche. On dit alors que chaque transformation-Anaïs relève de ce type de tâche.

À une transformation-Anaïs, correspond donc un seul type de tâches alors qu'à un pas de calcul, correspond autant de types de tâches non nécessairement distincts que de transformations-Anaïs diagnostiquées.

Un exemple est donné figure 4.2. L'élève produit le pas de calcul :

$$8y + 5(y + 3y + 2) \rightarrow 8y + 5 \times 4y + 10.$$

Ce pas est diagnostiqué comme une suite de trois transformations-Anaïs :

$$5(y + 3y + 2) \rightarrow 5(4y + 2),$$

$$5(4y + 2) \rightarrow 5 \times 4y + 5 \times 2,$$

$$5 \times 2 \rightarrow 10.$$

Il y a donc trois types de tâches associés à ce seul pas de calcul : une réduction de somme, un développement simple et un calcul numérique.

4.1.4 Opportunité-Anaïs

Dorénavant, nous ne considérons plus le pas de calcul de l'élève mais la transformation-Anaïs reconstruite comme une étape intermédiaire possible du pas de calcul. En début de cette section, nous avons exprimé qu'il était nécessaire de définir les conditions d'application d'une règle mais surtout de préciser quel était le « domaine » dans lequel l'élève se plaçait pour pouvoir affirmer que l'élève avait manqué une occasion d'appliquer une règle. Pour répondre à ce besoin, nous introduisons la notion d'« opportunité-Anaïs ».

Définition. Soit une transformation-Anaïs $TrA : E_1 \rightarrow E_2$. Il y a *opportunité-Anaïs* d'appliquer une règle R à E_1 si cette règle R relève du même type de tâches que la règle diagnostiquée par Anaïs pour cette transformation TrA .

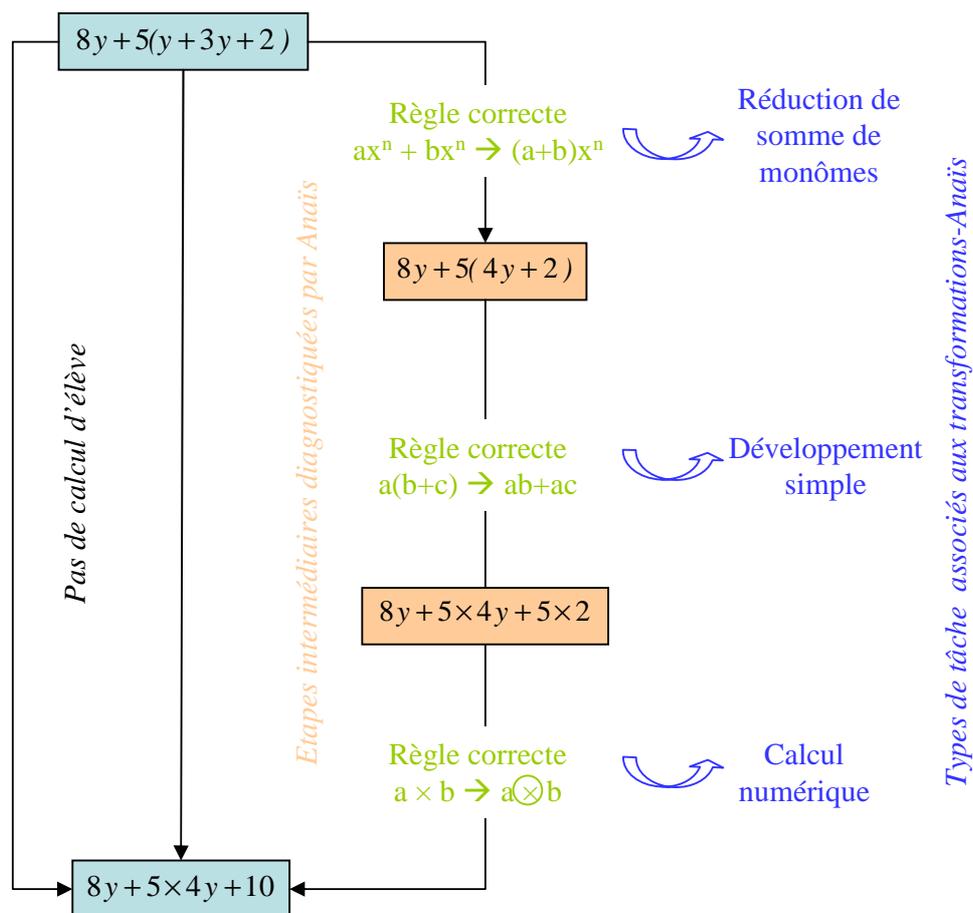


FIGURE 4.2 – Exemple de processus de diagnostic des types de tâche. Trois types de tâche sont diagnostiqués pour ce simple pas de calcul : *RedAdd*, *DvtSimple* et *Calculnumrique*. Si un second diagnostic comportant n règles est proposé en plus de celui-là, il y aura alors n types de tâche supplémentaires associés à ce pas de calcul.

Exemple. Dans l'exemple 4.1, où l'élève transforme $5x + 3x + 2(x + 1 + 5)$ en $5x + 3x + 2x + 2 + 10$, la règle diagnostiquée par ANAÏS est la règle $a(b + c) \rightarrow ab + ac$. Cette règle relève du type *DvtSimple*. Toutes les règles relevant de ce type *DvtSimple* ont donc l'opportunité-Anaïs d'être appliquées à E_1 . En revanche, ni les règles de développement double ni même les règles de réduction de somme de monômes n'ont l'opportunité-Anaïs d'être appliquées.

Remarques. L'opportunité-Anaïs n'est pas déterminée a priori, contrairement à ce qui se fait habituellement. Elle n'est détectée qu'à la suite d'un pas de calcul diagnostiqué puisqu'elle dépend de ce que l'élève a fait. Elle dépend du choix de type de tâches dans lequel se place l'élève.

Contrairement à l'opportunité mathématique, l'opportunité-Anaïs tient compte non de l'expression-mère⁴ mais de la sous-expression sur laquelle l'élève a effectivement travaillé. Enfin, quand il y a opportunité-Anaïs d'appliquer une règle, il y a nécessairement opportunité mathématique de l'appliquer non seulement à l'expression-mère mais aussi à la sous-expression sur laquelle l'élève a travaillé.

Des exemples d'opportunité-Anaïs et d'opportunité mathématique sont regroupés dans le tableau 4.2. Le pas de calcul de $5x + 3x + 2(x + 1 + 5)$ en $5x + 3x + 2x + 2 + 10$ est analysé en terme d'opportunités mathématique tandis qu'une de ses transformations Anaïs sous-jacentes est analysée en terme d'opportunités-Anaïs.

<i>Pas de calcul d'élève</i>	$5x + 3x + 2(x + 1 + 5) \rightarrow 5x + 3x + 2x + 2 + 10$
Exemples de règles ayant l'opportunité mathématique d'être appliquées	$ax^n + bx^n \rightarrow (a + b)x^n$
Exemples de règles n'ayant pas l'opportunité mathématique d'être appliquées	$a + b = c \rightarrow a + b - c = 0$ $(a + b)(c + d) \rightarrow ac + ad + bc + bd$
<i>Une des transformations-Anaïs de ce pas</i>	$2(x + 1 + 5) \rightarrow 2x + 2 \times 1 + 2 \times 5$
Règle diagnostiquée	$a(b + c) \rightarrow ab + ac$
Exemples de règles ayant l'opportunité-Anaïs d'être appliquées	$a(b + c) \rightarrow ab + ac,$ $a(b + c) \rightarrow ab + c$
Exemples de règles n'ayant pas l'opportunité-Anaïs d'être appliquées	$ax^n + bx^n \rightarrow (a + b)x^n,$ $ab + ac \rightarrow a(b + c)$

TABLE 4.2 – Exemples d'opportunités et de non-opportunités d'application de règles. Le pas ce calcul de l'élève est diagnostiqué comme une succession de transformation Anaïs dont le passage de $2(x + 1 + 5)$ à $2x + 2 \times 1 + 2 \times 5$.

Ces dernières remarques montrent que l'opportunité-Anaïs répond en partie aux difficultés présentées dans la section 4.1.1. L'idée, en effet, est que :

L'expression initiale d'une transformation-Anaïs présente une opportunité d'appliquer une règle R du moment que R relève du même type de tâches que la règle diagnostiquée par Anaïs.

Les auteurs cités dans l'introduction de la section 4.1 (Payne, Squibb, Corbet...) ne se sont pas penchés sur la détection du type de tâches car les tâches que ces chercheurs proposaient étaient souvent encore plus élémentaires que les nôtres. De plus, les ITS, dans lesquels ont été

4. Rappelons que l'expression-mère est l'expression de départ dans un pas de calcul d'un élève.

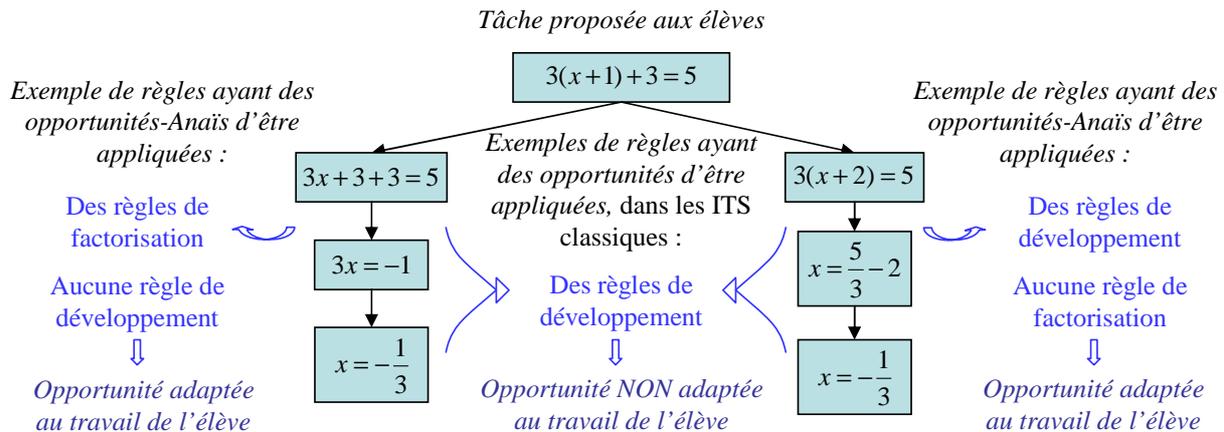


FIGURE 4.3 – Exemple de différence de perception de ce qu'est une opportunité d'appliquer une règle : les ITS classiques ne font pas de distinction fine en fonction des actions des élèves tandis que nous proposons de tenir compte du type de tâches dans lequel se place l'élève. La résolution de gauche comme celle de droite offre pour les ITS classiques les mêmes opportunités d'appliquer des règles tandis que nous percevons l'opportunité d'appliquer des règles de développement seulement dans la résolution de droite.

implantées ces recherches, n'acceptaient soit que la réponse finale (c'est le cas du logiciel LMS) soit une seule transformation par pas de calcul (comme pour le logiciel COGNITIVE-TUTOR). Ce qui a laissé croire aux auteurs de ne pas avoir à diagnostiquer les types de tâches (ou équivalent). Or, selon nous, il n'en est rien. Considérons, par exemple, la tâche suivante :

$$\text{Résoudre l'équation } 3(x+1)+3=5.$$

Dans LMS, il est considéré qu'au cours de la résolution, l'élève aura *une* occasion et une seule de développer (et donc d'utiliser par exemple la règle $a(b+c) \rightarrow ab+c$). Dans notre modèle, par contre, cela dépend de ce que l'élève répondra. Ainsi, si l'élève décide de factoriser le membre de gauche par 3 puis de diviser les deux membres par 3, il pourra résoudre l'équation sans avoir fait appel à du développement. Dans ce cas, nous considérerons que l'équation n'a *jamais* présenté d'occasion de développement : il n'y a pas eu d'opportunité-Anaïs, comme c'est le cas de la partie gauche de la figure 4.3. Si, par contre, l'élève décide de développer $3(x+1)$ puis de regrouper les monômes de même degré, nous considérons bien que l'équation a présenté une occasion de développement, cas présenté dans la partie de droite de la figure 4.3.

Alors que l'on peut dire d'une expression algébrique qu'elle a l'opportunité mathématique que telle règle soit appliquée, sans rien savoir du devenir de cette expression, il est essentiel de comprendre que la notion d'opportunité-Anaïs est reconstruite a posteriori. Elle est définie ni pour une expression-mère ni même pour un pas de calcul mais pour une transformation-Anaïs : elle est dépendante de la règle diagnostiquée par Anaïs.

4.2 Second retour sur les règles

ANAÏS a été lancé sur l'ensemble des protocoles venant des expérimentations présentées en section 3.3.1. Chaque pas de calcul a été associé à un ou plusieurs diagnostics à moins que le logiciel n'ait été mis en échec. L'ensemble des règles diagnostiquées sur la totalité des productions a été présenté succinctement dans le chapitre précédent. Un coefficient d'utilisation *CU* a été

attribué à chacune des règles, représentant le nombre de fois où la règle a été diagnostiquée pondérée par la probabilité que le diagnostic soit « le bon ». Pour pouvoir exploiter pleinement ces coefficients d'utilisation, il manquait la prise en compte des occasions ratées d'utiliser une règle, manque auquel nous pouvons, maintenant remédier.

Une règle R donnée aurait pu s'appliquer si et seulement si une autre règle relevant du même type de tâches que R a été diagnostiquée. Il suffit donc de faire le rapport du CU de chaque règle par la somme des coefficients d'utilisation des règles relevant du même type de tâches pour obtenir le taux d'utilisation d'une règle. Par exemple, pour savoir si la règle de factorisation $ab + a \rightarrow a(b)$ est utilisée souvent comparativement aux autres règles, il faut diviser son CU par la somme des CU des 11 règles correctes et erronées relevant du type de tâches $Fact$. Nous obtenons le taux de 10%. Nous appellerons ce quotient le « *taux d'utilisation* ». Il signifie que les élèves ont utilisé cette règle dix fois sur les cent fois où ils en ont eu l'occasion (tout au moins selon notre modélisation). Les quatre-vingt autres fois, ils lui ont préféré la règle correcte ou les neuf autres règles erronées. Il n'est pas possible de dire qu'une des cent fois, un élève a développé ou réduit au lieu de factoriser car, de la manière dont cela a été construit, les cent fois en question ne concernent que des applications de règles relevant de $Fact$.

La section 4.2.1 présente la répartition des types de tâche au sein des expérimentations puis selon différents critères : le niveau, les pays et enfin, les types d'expérimentations. Elle permet d'avoir une idée de l'influence de ces critères sur les types de tâche ; par exemple, savoir si un type de tâches est le propre d'un niveau ou d'une expérimentation. Viennent ensuite les véritables résultats : les taux d'utilisation des règles algébriques erronées : le nombre de fois où la règle est utilisée au prorata du nombre de types de tâche auquel ont été confrontés les élèves.

4.2.1 Répartition des types de tâches

Grâce au mécanisme de reconstruction des types de tâche décrit en section 4.1.3, il est possible d'obtenir la répartition des types de tâches sur l'ensemble des expérimentations. Cette répartition, présentée dans la figure 4.4, est indépendante du niveau ou des pays des expérimentations. Le tableau fait ressortir une très forte proportion de réduction, principalement de réduction de sommes de monômes. Ceci n'est évidemment pas dû au fait qu'il y a eu plus d'expérimentations sur ce sujet mais cela est dû au fait que ce type de tâches est bien souvent une tâche élémentaire des types de tâche de développement ou de factorisation. En revanche, le travail sur les identités remarquables représente une part assez faible (2.3%) de la totalité des types de tâche. Ceci s'explique bien cette fois-ci par le peu d'expérimentations sur ce sujet.

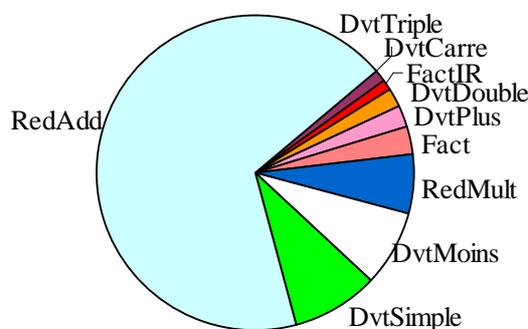


FIGURE 4.4 – Répartition des types de tâche diagnostiqués et reconstruits par ANAÏS sur l'ensemble des expérimentations. Cette répartition est reconstruite à la suite de la session de diagnostics présentée dans le chapitre précédent.

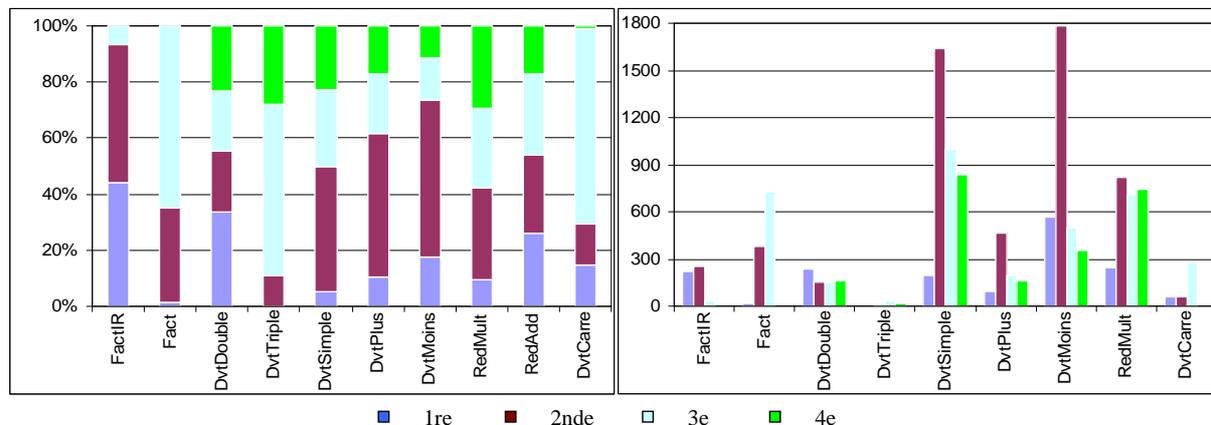


FIGURE 4.5 – Répartition des types de tâche diagnostiqués et reconstruits par ANAÏS sur l'ensemble des expérimentations en fonction des niveaux scolaires.

Le graphique de gauche donne les proportions de chaque type de tâches selon le niveau ; le graphique de droite donne le nombre de transformations-Anaïs selon chaque niveau scolaire expérimenté pour chacun des types de tâche, hormis *RedAdd*. Dans le graphique de gauche, les rectangles les plus bas (resp. les plus hauts) correspondent au niveau scolaire le plus à gauche de la légende (resp. le plus à droite) : le niveau « 1^{re} » (resp. « 4^e »).

DvtCarre est un type de tâches très présent en classe de 3^e proportionnellement aux trois autres niveaux scolaires, même si en terme de nombre de tâche, il est peu présent comparativement à *DvtSimple*, *Fact* ou même *RedMult*.

La figure 4.5, p.163, donne la répartition des types de tâche selon le niveau scolaire. Le graphique de gauche donne les proportions de chaque type de tâches selon le niveau scolaire ; le graphique de droite donne le nombre de transformations-Anaïs relevant de chacun des types de tâche (sauf *RedAdd*), selon le niveau scolaire. Le type *RedAdd* est, en effet, exclu du graphique de droite car les occurrences des règles diagnostiquées pour ce type de tâches sont trop importantes et rendent illisible le graphique tant elles écrasent les autres données. Les types *FactIR*, *Fact* et *DvtCarre* n'apparaissent évidemment pas en classe de 4^e. Le type *Fact* a surtout eu lieu dans les expérimentations de 3^e. Les transformations-Anaïs relevant de *DvtSimple* et *DvtMoins* sont nombreuses en classe de 2^{de}.

La figure 4.6, p.164, donne la répartition des types de tâche selon le pays. Le graphique de gauche donne les proportions de provenance pour chaque type de tâche ; le tableau de droite donne le nombre de transformations-Anaïs par pays pour chacun des types de tâche. Nous pouvons voir que les expérimentations ont eu lieu principalement en France et au Brésil, information que nous avons donné dans le chapitre précédent. En revanche, nous voyons que les productions de ces pays se répartissent de manière assez équilibrée parmi les différents types de tâche (graphique de gauche) même si il y a eu plus de transformations diagnostiquées pour le type *DvtSimple*.

La figure 4.7, p.164, donne la répartition des types de tâche en fonction des six grands types d'expérimentations présentés en section 4.1.3. Le type de tâches *DvtTriple* n'a été étudié quasiment que lors de nos propres expérimentations (le groupe *T_Croset* hachuré jaune sur fond orange) tandis que le type *FactIR* a été étudié principalement lors de la thèse de Nguyen (*T_Nguyen*).

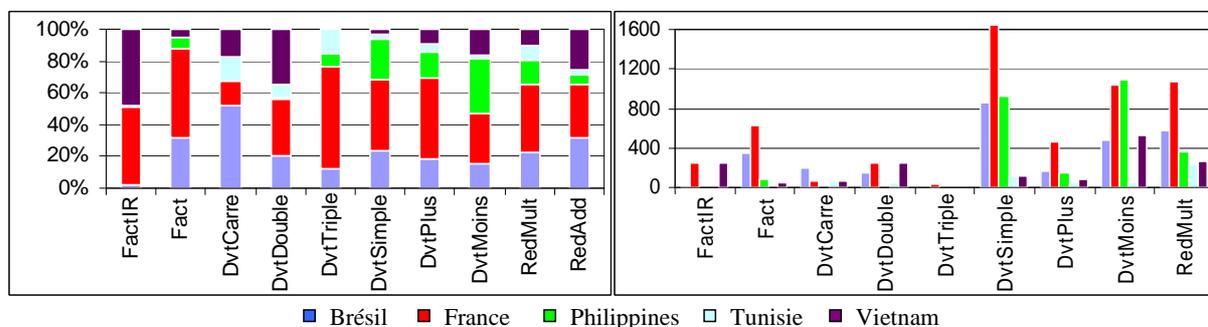


FIGURE 4.6 – Répartition des types de tâche diagnostiqués et reconstruits par ANAïs sur l'ensemble des expérimentations en fonction des pays. Le graphique de gauche donne les proportions de chaque type de tâches selon le pays; le graphique de droite donne le nombre de transformations-Anaïs dans chaque pays expérimenté pour chacun des types de tâche, hormis *RedAdd*.

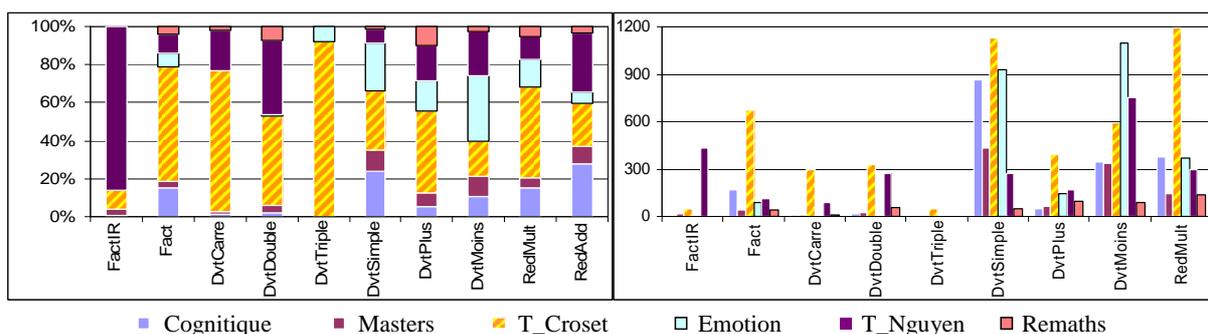


FIGURE 4.7 – Répartition des types de tâche diagnostiqués et reconstruits par ANAïs sur l'ensemble des expérimentations en fonction des six types d'expérimentations. Le graphique de gauche donne les taux des groupes d'expérimentation pour chaque type de tâches proportionnellement aux autres groupes d'expérimentations. Le graphique de droite donne le nombre de transformations-Anaïs dans chaque groupe d'expérimentations pour chaque type de tâche, hormis celui de *RedAdd*.

4.2.2 Répartition des règles erronées

Répartition des règles erronées par types de tâche en fonction des niveaux

Dans le chapitre précédent, p. 145, le taux d'erreurs (nombre de règles erronées diagnostiquées rapporté au nombre total de règles correctes et erronées diagnostiquées) baissait lorsque le niveau scolaire montait. Le phénomène est le même pour chaque type de tâches pris individuellement : quel que soit le type, plus le niveau scolaire augmente, moins le taux d'erreurs est élevé. C'est ce qu'indique la figure 4.8. Le type de tâches *DvtTriple* provoque sans conteste plus d'erreurs que n'importe quel autre type de tâche. Il y a aussi de nombreuses règles erronées concernant le type de tâches *DvtCarre* en classe de 3^e. En revanche, en classe de 1^{re}, il y a tout autant d'erreurs pour *DvtCarre* que pour le type de tâches *Fact* : environ 20% des transformations-Anaïs relevant des types de tâche *DvtCarre* et *Fact* sont erronées. Hormis ces deux types de tâche, les autres types de tâche ne provoquent quasiment pas d'erreurs à ce niveau scolaire là. En classe de 4^e, l'ordre croissant des types de tâche suscitant l'utilisation de règles erronées sont *DvtPlus* et *DvtSimple* qui sont ex-aequo et provoquent légèrement moins d'erreurs que *DvtDouble* (ce qui sera revu dans les chapitres suivants). Viennent ensuite *DvtMoins* et *RedAdd* ex-aequo, où plus de 30% des transformations-Anaïs relevant de ces types sont erronées. Autant de règles erronées que de correctes sont diagnostiquées pour le type *RedMult*. Enfin, arrive le type *DvtTriple* avec 86% d'erreurs : cela signifie que près de 9 fois sur 10 expressions du type *DvtTriple*, les élèves utilisent une règle erronée. Un graphe plus précis est accessible en Annexe E.1 : il donne les taux d'erreurs en fonction du type de tâches pour chaque niveau scolaire et pays.

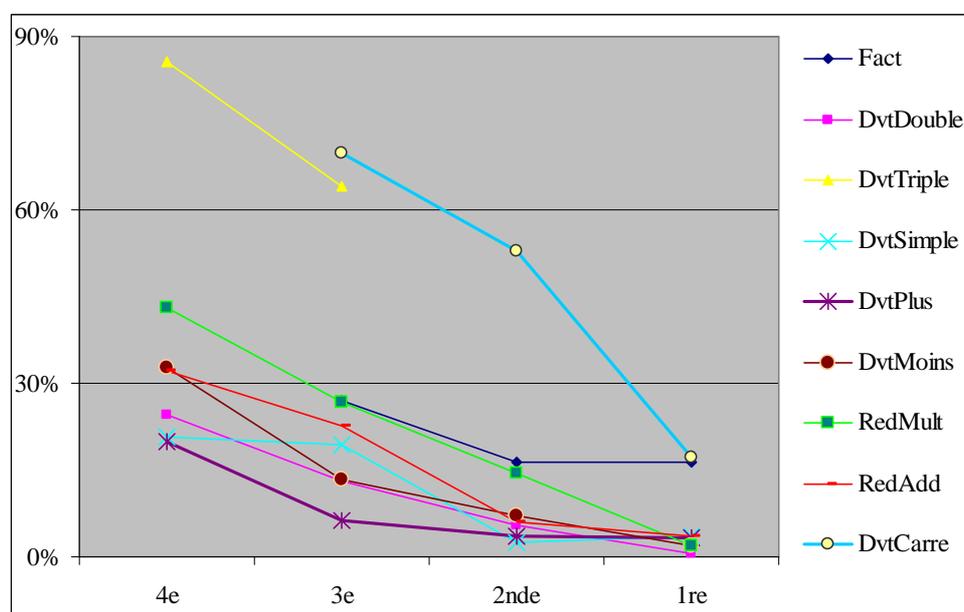


FIGURE 4.8 – Proportion des erreurs en fonction des niveaux pour chaque type de tâches diagnostiqué et reconstruit par ANAÏS sur l'ensemble des expérimentations. Les types *Fact* et *DvtCarre* n'apparaissent évidemment pas pour les classes de 4^e puisque les tâches qui en relèvent ne sont au programme que des classes supérieures.

Taux des règles erronées

Quelle est la règle erronée la plus utilisée ? C'est à cette question que ce paragraphe répond. Pour le savoir, il suffit de considérer les taux d'utilisation de chaque règle : chaque taux peut être comparé les uns aux autres. Ainsi, si une règle R qui relève de T a un taux d'utilisation de 60% tandis qu'une autre règle R' relevant de T' a un taux de 30%, nous pourrions bien dire que R a été deux fois plus utilisée que R' même si elles ne relèvent pas du même type de tâche.

Pour rendre plus lisible les données, nous avons décidé de regrouper les dix-neuf règles erronées de *RedAdd* en seulement cinq règles, dont trois ne portent que sur l'erreur du degré (*Max*, *Min*, *Plus*), indépendamment de ce qui se passe sur le coefficient, une autre ne porte que sur une erreur de calcul du coefficient erroné, avec un degré correct du monôme résultant et une dernière qui regroupe toutes les erreurs qui concernent le coefficient invisible d'un des deux monômes. Par exemple, nous regroupons la règle $ax^n + bx^p \rightarrow ((-a) \oplus (-b))x^{n+p}$ et la règle $ax^n + bx^p \rightarrow (-a \oplus b)x^{n+p}$ sous la règle $ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}$. Cela sera revu dans la section 5.3.5. Cela donne les règles suivantes :

$$\begin{aligned} ax^n + bx^p &\rightarrow (a\Delta b)x^{Max(n,p)} \\ ax^n + bx^p &\rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)} \\ ax^n + bx^p &\rightarrow (a\Delta b)x^{n+p} \\ ax^n + bx^n &\rightarrow (a\Delta b)x^n, \text{ où } \Delta \text{ n'est pas l'opérateur d'addition} \\ ax^n + x^p &\rightarrow ax^{n\Box p}. \end{aligned}$$

De même, pour les règles de réduction de produits de monômes, les vingt-quatre règles erronées ont été regroupées en cinq règles, dont quatre portent sur une erreur de degré, indépendamment d'une erreur sur le coefficient, et une porte sur une erreur dans le calcul du coefficient avec un calcul correct du degré du monôme résultant :

$$\begin{aligned} ax^n \times bx^p &\rightarrow (a\Delta b)x^{Max(n,p)} \\ ax^n \times bx^p &\rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)} \\ ax^n \times bx^p &\rightarrow (a\Delta b)x^2 \\ ax^n \times bx^n &\rightarrow (a\Delta b)x^n \\ ax^n \times bx^p &\rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}, \text{ où } \Delta \text{ n'est pas l'opérateur de multiplication.} \end{aligned}$$

La répartition de l'ensemble des taux des 45 règles erronées est indiquée sur le camembert de la figure 4.9, p.167. Quatre règles erronées expliquent à elles seules le quart des erreurs, *si toutes les règles avaient toutes le même nombre d'opportunités-Anaïs d'être appliquées*. Ce sont les règles :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &\rightarrow a^2 + b^2, \\ a(b+c) &\rightarrow ab + c, \\ ax^n \times bx^n &\rightarrow (a\Delta b)x^n, \\ (a+b)(c+d) &\rightarrow (a+b) \times (c+d). \end{aligned}$$

Le fait que la règle $(a+b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$ soit prédominante n'est guère surprenant tant elle est décrite dans de nombreux ouvrages. La deuxième et quatrième règles sont des suppressions brutes de parenthèses.

Nous reviendrons dans le dernier chapitre sur la répartition des règles erronées en fonction du nombre de fois où elles auraient eu l'opportunité-Anaïs d'être appliquées.

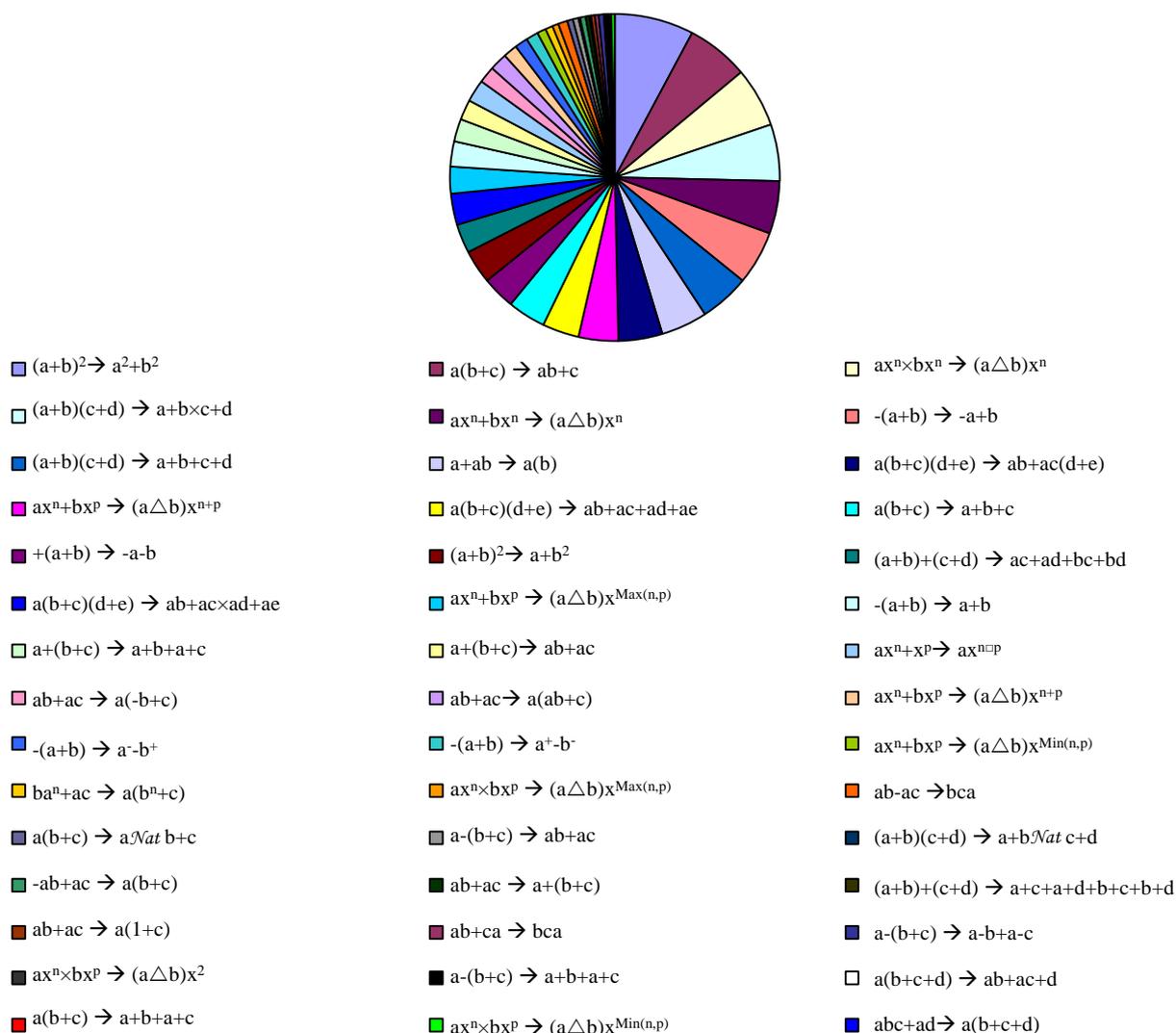


FIGURE 4.9 – Répartition des règles erronées. Cette répartition tient compte du nombre de fois où les règles auraient pu s'appliquer. Les pourcentages sont ceux que les règles auraient obtenues si elles avaient toutes eu le même nombre d'opportunités-Anaïs d'être appliquées.

La légende se lit de gauche à droite : la règle la plus utilisée est $(a+b)^2 \rightarrow a^2+b^2$, vient ensuite $a(b+c) (\rightarrow ab+c)$. La règle erronée la moins utilisée est $abc+ad \rightarrow a(b+c+d)$.

Répartition des règles erronées pour chaque type de tâche

Dans cette section, nous étudions la répartition des règles erronées associées à chaque type de tâche, dont les camemberts sont présentés en figure 4.10, p. 170.

Pour *DvtSimple*, 411.7⁵ règles erronées relevant de ce type ont été diagnostiquées. La suppression brute de parenthèses est largement prédominante : $a(b+c) \rightarrow ab+c$ constitue plus de 50% des erreurs relevant de ce type de tâche. La seconde erreur est le changement d'opérateur : $a(b+c)$ est transformé en $a+b+c$. Cette erreur sera étudiée dans les deux chapitres à venir afin de détecter si l'absence du signe \times est bien à l'origine de cette erreur. Cette erreur est, d'ailleurs, régulière selon Sleeman [Sleeman, 1986, p. 29 & 31].

Ces deux règles erronées se retrouvent aussi pour le type *DvtDouble*. En effet, les deux règles qui dominent sont $(a+b)(c+d) \rightarrow a+b \times c+d$ et $(a+b)(c+d) \rightarrow a+b+c+d$ avec les taux respectifs de 51% et 45%. La suppression brute de parenthèses « sans sens opératoire » est assez peu représentée : $a(b+c) \rightarrow aNat b+c$ est diagnostiquée 5% du temps face au type *DvtSimple* et $(a+b)(c+d) \rightarrow a+bNat c+d$, 4% du temps face au type *DvtDouble*. 44.3 règles de ce type de tâches ont été diagnostiquées.

Pour *DvtTriple*, là aussi, c'est une forme de suppression brute de parenthèses qui domine : $a(b+c)(d+e) \rightarrow ab+ac(d+e)$. En revanche, les deux autres règles erronées sont, elles aussi, largement représentées : $a(b+c)(d+e) \rightarrow ab+ac+ad+ae$ avec 33% et $a(b+c)(d+e) \rightarrow ab+ac \times ad+ae$ avec 27%. 70 règles ont été diagnostiquées.

En revanche, pour le type de tâches *DvtCarre*, face auquel les élèves auraient utilisé des règles erronées 237.3 fois, c'est la règle de « distributivité abusive » qui est prédominante alors que ce principe de distributivité abusive étaient peu présent dans les autres types : $(a+b)^2 \rightarrow a^2+b^2$ avec 71% contre 29% pour la règle de suppression brute de parenthèses $(a+b)^2 \rightarrow a+b^2$.

Pour *DvtPlus*, 62.7 règles erronées relevant de ce type ont été diagnostiquées. La suppression de parenthèses entraîne les élèves à modifier les signes des termes : $+(a+b) \rightarrow -a-b$ est utilisée 32%. La règle $(a+b)+(c+d) \rightarrow ac+ad+bc+bd$, probable confusion de la règle correcte de *DvtDouble* est, elle aussi, assez représentée avec ses 27% d'utilisation. Elle aurait pu être regroupée avec la règle $a+(b+c) \rightarrow ab+ac$ pour constituer une seule règle : elles auraient alors représentées à elles deux 46% des erreurs de ce type de tâche. Alors que ces deux règles sont autant l'une que l'autre diagnostiquée. Il n'en est pas de même de la distributivité abusive. En effet, alors que $a+(b+c) \rightarrow a+b+a+c$ a un taux de 19%, $(a+b)+(c+d) \rightarrow a+c+a+d+b+c+b+d$ n'apparaît que 3% du temps.

Pour *DvtMoins*, nous retrouvons la suppression brute de parenthèses : $-(a+b) \rightarrow -a+b$ avec 48%. Vient ensuite la non-modification des signes des termes de la somme entre parenthèses : $-(a+b) \rightarrow a+b$ avec 22%. La distributivité abusive $a-(b+c) \rightarrow a-b+a-c$ et le rapprochement avec la formule correcte de *DvtSimple*, $a-(b+c) \rightarrow ab+ac$ n'apparaissent que peu : 3% pour la première et 4% pour la seconde. Au total, les élèves auraient utilisé des règles erronées 320.2 fois sur les 3200 fois où ils auraient été confrontés à ce type de tâche.

Le type de tâches *Fact* a suscité 261.6 utilisations de règles erronées, dont 42% de la règle $a+ab \rightarrow a(b)$, que l'on appellera par la suite *ER_Rien*. Vient ensuite la règle $ab+ac \rightarrow a(ab+c)$ avec 16% d'utilisation. Cette règle, encore appelée *ER_NoFact* pour « non factorisée » sera, en fait souvent associée et ce, de manière stable, à l'utilisation conjointe de *ER_Rien* dans un cas

5. Nous n'arrondissons pas volontairement pour rappeler au lecteur que le coefficient d'utilisation d'une règle donnée à la suite d'une session de diagnostics tient compte de la probabilité de chaque diagnostic où la règle est apparue. Il est la somme du nombre de fois où la règle est diagnostiquée pondérée par la probabilité du diagnostic auquel elle « appartient ». Ce coefficient n'est donc pas nécessairement un entier. La somme des coefficients des règles relevant d'un même type, qui constitue le nombre de fois où l'élève est confronté (selon ANAïs) à ce type de tâche, n'est donc elle non plus pas nécessairement un entier.

particulier (section 6.1.2) : cela donnera la règle $a^2 + ab \rightarrow a(ab)$.

Enfin, en ce qui concerne la réduction de somme ou de produit, *RedAdd* et *RedMult*, nous avons fait le choix, comme précédemment, de regrouper les règles autour des erreurs portant soit sur le degré soit sur le coefficient du monôme résultant. cette fois, cependant, la règle où le coefficient est erroné est précisé. Cela donne sept règles pour *RedAdd* et huit règles pour *RedMult* :

$$\begin{aligned}
 ax^n + bx^p &\rightarrow (a\Delta b)x^{Max(n,p)} \\
 ax^n + bx^p &\rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)} \\
 ax^n + bx^p &\rightarrow (a\Delta b)x^{n+p} \\
 ax^n + bx^p &\rightarrow (a-b)x^{n\Box p} \\
 ax^n + bx^p &\rightarrow (-a+b)x^{n\Box p} \\
 ax^n + bx^p &\rightarrow (-a-b)x^{n\Box p} \\
 ax^n + x^p &\rightarrow ax^{n\Box p}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ax^n \times bx^p &\rightarrow (a\Delta b)x^{Max(n,p)} \\
 ax^n \times bx^p &\rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)} \\
 ax^n \times bx^p &\rightarrow (a\Delta b)x^2 \\
 ax^n \times bx^p &\rightarrow (-ab)x^{n\Box p} \\
 ax^n \times bx^p &\rightarrow (a+b)x^{n\Box p} \\
 ax^n \times bx^p &\rightarrow (a-b)x^{n\Box p} \\
 ax^n \times bx^p &\rightarrow (-a+b)x^{n\Box p} \\
 ax^n \times bx^p &\rightarrow (-a-b)x^{n\Box p}.
 \end{aligned}$$

Il faut noter qu'une même règle erronée détaillée peut contribuer à deux règles ci-dessus. Par exemple, la règle $ax^n + bx^p \rightarrow (-a \oplus b)x^{n+p}$ contribue à la fois à la règle $ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}$ et à la règle $ax^n + bx^p \rightarrow (-a-b)x^{n\Box p}$. Les répartitions de toutes les règles erronées détaillées de ces deux types de tâches sont données dans les tableaux 4.3 et 4.4. En revanche, dans la figure 4.10, seules apparaissent les sept règles erronées de *RedAdd* et huit de *RedMult*.

Pour *RedAdd*, plus de 4000 utilisations de règles erronées relevant de ce type ont été diagnostiquées. L'erreur prédominante de ce type de tâches est celle qui consiste à prendre l'opposé de la somme des coefficients des deux monômes à sommer. Vient ensuite l'erreur qui consiste à ne conserver que le degré maximal des degrés des deux monômes à additionner comme dans $5x^2 + 3x \rightarrow 8x^2$. Si les règles portant sur des erreurs du coefficient avec un degré correct étaient regroupées en une seule règle erronée $ax^n + bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^n$, où Δ n'est pas l'opérateur d'addition, cette règle expliquerait 41% des erreurs.

Face à *RedMult*, les élèves ont utilisé 632.5 fois des règles erronées. Ici, encore, c'est la règle qui consiste à prendre l'opposé du produit des coefficients : $ax^n \times bx^p \rightarrow (-ab)x^{n\Box p}$ avec 50% d'utilisation. La règle qui consiste à prendre le maximum des deux degrés quitte à faire une erreur sur le coefficient arrive en troisième position avec 10% d'utilisation. Ici comme pour *RedAdd*, la règle la moins utilisée consiste à prendre le minimum des degrés des deux monômes qu'ils soient à additionner ou à multiplier.

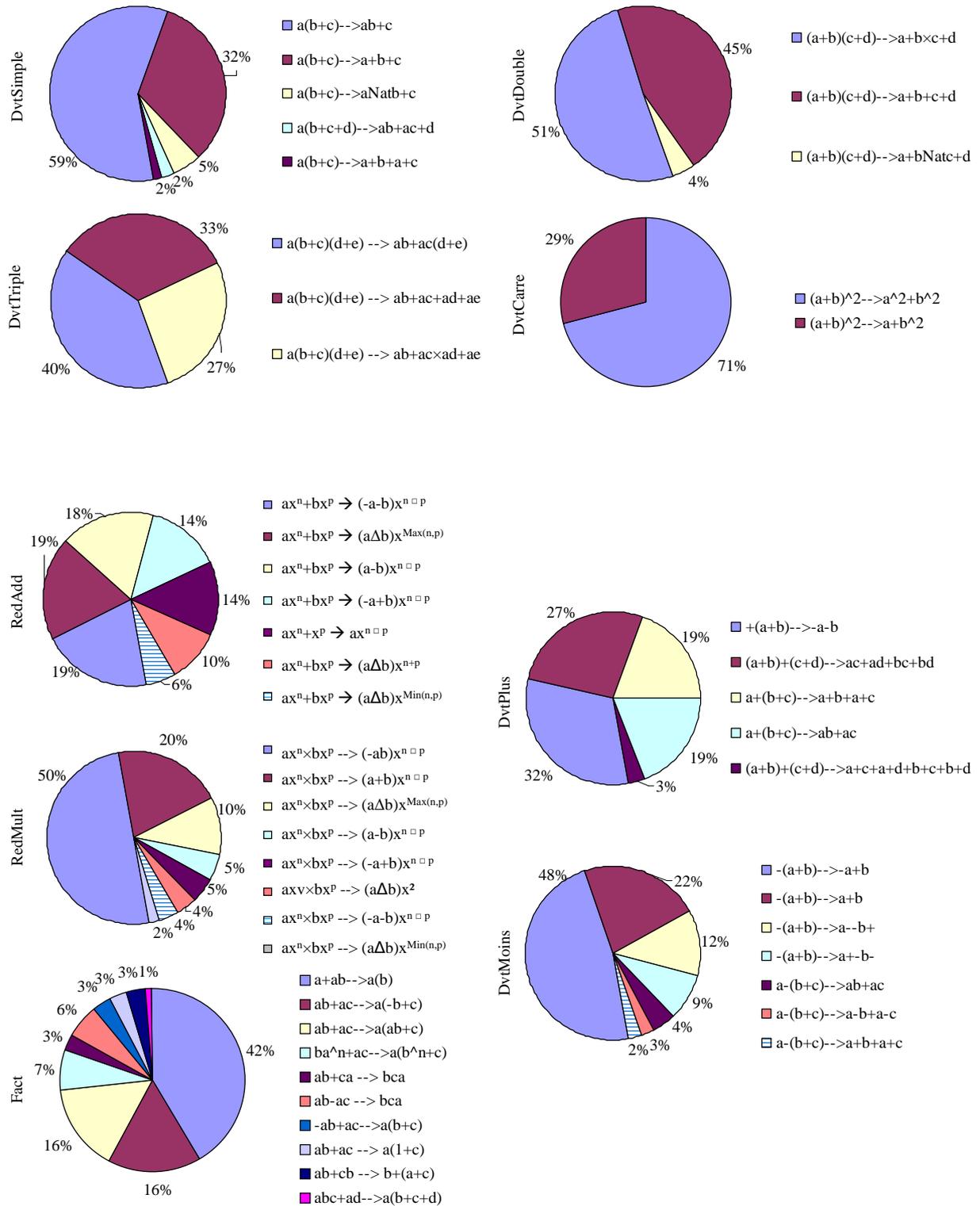


FIGURE 4.10 – Répartition des règles erronées pour chaque type de tâche. Dans la légende, les règles sont triées par ordre décroissant de leur taux d'utilisation.

Règles	Taux
$ax^n + x^p \rightarrow ax^{Max(n,p)}$	10%
$ax^n + x^p \rightarrow ax^{Min(n,p)}$	4%
$ax^n + x^p \rightarrow ax^{n+p}$	5%
$ax^n + ax^n \rightarrow 0$	3%
$ax^n + bx^p \rightarrow (-a + b)x^{Max(n,p)}$	5%
$ax^n + bx^n \rightarrow (-a + b)x^n$	11%
$ax^n + bx^p \rightarrow (-a + b)x^{Min(n,p)}$	0%
$ax^n + bx^p \rightarrow (-a + b)x^{n+p}$	0%
$ax^n + bx^p \rightarrow (-a - b)x^{Max(n,p)}$	5%
$ax^n + bx^n \rightarrow (-a - b)x^n$	22%
$ax^n + bx^p \rightarrow (-a - b)x^{Min(n,p)}$	0%
$ax^n + bx^p \rightarrow (-a - b)x^{n+p}$	1%
$ax^n + bx^p \rightarrow (a + b)x^{Max(n,p)}$	0%
$ax^n + bx^p \rightarrow (a + b)x^{Min(n,p)}$	3%
$ax^n + bx^p \rightarrow (a + b)x^{n+p}$	7%
$ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{Max(n,p)}$	6%
$ax^n + bx^n \rightarrow (a - b)x^n$	15%
$ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{Min(n,p)}$	0%
$ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n+p}$	1%

TABLE 4.3 – Règles erronées liées à la réduction de sommes de monômes .

Règles	Taux
$ax^n \times bx^p \rightarrow abx^{Max(n,p)}$	5%
$ax^n \times bx^n \rightarrow abx^n$	35%
$ax^n \times bx^p \rightarrow abx^{Min(n,p)}$	1%
$ax^n \times bx^p \rightarrow -abx^{Max(n,p)}$	0%
$ax^n \times bx^n \rightarrow -abx^n$	3%
$ax^n \times bx^p \rightarrow -abx^{n+p}$	30%
$ax^n \times bx^p \rightarrow (-a + b)x^{Max(n,p)}$	0%
$ax^n \times bx^n \rightarrow (-a + b)x^n$	2%
$ax^n \times bx^p \rightarrow (-a + b)x^{Min(n,p)}$	0%
$ax^n \times bx^p \rightarrow (-a + b)x^{n+p}$	1%
$ax^n \times bx^p \rightarrow (-a - b)x^{Max(n,p)}$	0%
$ax^n \times bx^n \rightarrow (-a - b)x^n$	2%
$ax^n \times bx^p \rightarrow (-a - b)x^{n+p}$	1%
$ax^n \times bx^p \rightarrow (a + b)x^{Max(n,p)}$	1%
$ax^n \times bx^n \rightarrow (a + b)x^n$	8%
$ax^n \times bx^p \rightarrow (a + b)x^{Min(n,p)}$	0%
$ax^n \times bx^p \rightarrow (a + b)x^{n+p}$	4%
$ax^n \times bx^p \rightarrow (a - b)x^{Max(n,p)}$	0%
$ax^n \times bx^n \rightarrow (a - b)x^n$	2%
$ax^n \times bx^p \rightarrow (a - b)x^{Min(n,p)}$	0%
$ax^n \times bx^p \rightarrow (a - b)x^{n+p}$	1%
$ax^n \times bx^p \rightarrow (a - b)x^2$	3%

TABLE 4.4 – Règles erronées liées à la réduction de produits de monômes. Les règles de coefficient d'utilisation nul sont aussi rappelées.

4.3 Conclusion sur les opportunités d'application d'une règle

L'analyse des manuels du premier chapitre avait abouti à un découpage institutionnel des types de tâche proposés dans les établissements scolaires français. Un pas de calcul d'élève effectué au sein d'APLUSIX peut relever de plusieurs de ces types de tâche à la fois. En effet, l'élève, étant libre de taper ce qu'il veut, peut produire un pas de calcul complexe, combinant possiblement plusieurs transformations sur différentes sous-expressions de l'expression-mère du pas de calcul. Un pas de calcul est découpé par le logiciel de diagnostic ANAÏS en plusieurs transformations-Anaïs, chacune étant l'application d'une seule des règles algébriques de la bibliothèque établie dans le chapitre précédent. Pour être cohérent avec l'hypothèse [H_T1](#), il était nécessaire que le découpage proposé par ANAÏS corresponde au découpage des types de tâche institutionnels, permettant ainsi qu'à une transformation-Anaïs, autrement dit à l'application d'une règle, corresponde un type de tâche. Pour ce faire et pour pouvoir implémenter le processus, il a fallu remodeler légèrement le découpage institutionnel pour attribuer à chacune des règles de la bibliothèque un et un seul type de tâche. En particulier, il a été ajouté un type de tâches (*DvtTriple*) qui relève du savoir visé en développement par l'institution scolaire, sans pour autant qu'il ait montré une existence importante en tant que type de tâches dans les manuels étudiés au chapitre 1. Cela était possible sous l'hypothèse [H_T2](#). L'expression initiale E d'une transformation-Anaïs relève alors d'un seul type de tâches (institutionnel), qui dépend en fait de la règle diagnostiquée. Une telle expression E présente une même opportunité d'appliquer toutes les règles qui relèvent du type de tâches associé à E : c'est ce que nous appelons l'opportunité-Anaïs. Deux expressions initiales de transformations-Anaïs présentent une même opportunité-Anaïs si et seulement si les deux règles associées aux deux transformations-Anaïs relèvent du même type de tâche.

Ce travail permet de comparer les utilisations qui ont été faites des différentes règles. En effet, dans le chapitre précédent, à la suite de la session de diagnostics portant sur l'ensemble des expérimentations, un coefficient d'utilisation avait été attribué à chacune des règles. Il représentait le nombre de fois où la règle avait été diagnostiquée pondéré par la probabilité que le diagnostic soit le bon. Ce coefficient ne tenait pas compte de toutes les occasions où les élèves avaient pu utiliser cette règle sans pour autant l'appliquer. Avec la notion d'opportunité-Anaïs, il est maintenant possible d'en tenir compte. Additionner les coefficients d'utilisation de toutes les règles relevant d'un même type de tâches produit le nombre de fois où les élèves ont été confrontés à ce type de tâche. Ce nombre tient compte du cas possible où il y aurait plusieurs diagnostics pour un même pas de calcul puisque ce cas influence le calcul du coefficient d'utilisation d'une règle. Il suffit alors de ramener le coefficient d'utilisation d'une règle au nombre de confrontations du type de tâches dont relève la règle pour pouvoir comparer l'utilisation de chacune des règles. Ceci a été fait et a permis de reconstruire la contribution des niveaux scolaires, des pays, ou encore des groupes d'expérimentations au nombre de confrontations à chaque type de tâche, d'étudier le taux d'erreurs face à chaque type de tâches et, enfin, d'ordonner les règles erronées selon leur utilisation.

L'opportunité-Anaïs n'est, cependant, pas encore suffisamment précise pour déterminer si un élève a un comportement stable ou non. Prenons l'exemple d'un élève qui utilise deux règles distinctes face à deux expressions (initiale d'une transformation-Anaïs) relevant d'un même type de tâche. Cet élève avait l'opportunité-Anaïs d'appliquer la même règle à ces deux expressions. Il a pourtant décidé d'appliquer deux règles différentes. Devons-nous en déduire que son comportement est incohérent ? Balacheff explique que deux comportements, plus précisément dans notre cas l'utilisation de deux règles différentes, « peuvent sembler contradictoires, mais cette incohérence peut s'expliquer localement, soit par le temps soit par la situation/contexte »

[Balacheff, 2000]. Pour l'élève, il est possible qu'il n'ait pas pris conscience que les deux expressions dépendaient d'un même type de tâche, découpage proposé par l'institution, et devait donc provoquer, de sa part, l'utilisation d'une seule et même règle. Il se peut que les ostensifs employés dans chacune des deux expressions les aient rendues éloignées l'une de l'autre aux yeux de l'élève. C'est cette hypothèse qui va nous pousser à revoir une nouvelle fois le découpage des types de tâche. En prenant en considération ces caractéristiques, nous déterminerons *les types de tâche-en-acte* d'une expression, affinement du découpage institutionnel.

Chapitre 5

Modèle global : la praxéologie-en-acte

Résumé. Il se peut que la résolution d'un exercice par un élève, qu'elle soit correcte ou non, s'éloigne de celle attendue par l'institution. Dans ce chapitre, nous mettons en place le modèle de praxis-en-acte pour décrire l'activité d'un sujet institutionnel. Le type de tâche-en-acte englobe des expressions provoquant la même action chez l'élève; il est construit comme un raffinement d'un type de tâches institutionnel. La technique-en-acte est la règle détaillée que l'élève utilise préférentiellement; elle pose la question du seuil de ce qui est considéré comme une action stable.

Différents auteurs ont réfléchi sur l'intérêt et l'exploitation possible de diagnostiquer les erreurs de manière individuelle. D'aucuns ont remis en question les effets positifs d'une remédiation spécifique à chaque élève assurés par les travaux d'auteurs tels que Bloom [Bloom, 1984], Swan [Swan, 1983] et Sleeman [Sleeman, 1986]. Plus précisément, ils s'entendent pour ne pas réagir à chaque erreur sans que cette erreur soit regroupée avec d'autres ou ait montré une certaine stabilité ou encore qu'elle ait pu être rattachée à une remédiation d'ordre conceptuelle [Sleeman et al., 1989], [McArthur et al., 1990], [Brousseau, 1983], [Resnick, 1984].

Sleeman et al. [Sleeman et al., 1989] conduisent des expérimentations afin de comparer les vertus éventuelles d'une remédiation spécifique à l'erreur (*The Model-Based Remediation*) à celles d'une simple répétition de la présentation de la procédure correcte (*Reteaching*). Les études sont conduites dans le domaine de l'algèbre et plus précisément, de la résolution d'équations algébriques. Les auteurs comparent les effets d'apprentissage par une comparaison des scores obtenus à un pré-test et à un post-test entre trois groupes différents :

- Dans le premier groupe, une remédiation adaptée automatique effectuée par un ITS est proposée à chaque élève à la suite du pré-test. Chaque élève a un retour « précis » et systématique sur l'erreur qu'il a faite avant d'être à nouveau évalué par le post-test.
- Dans le second groupe, le cours est ré-enseigné à la suite du pré-test. L'attention n'est évidemment pas portée sur les erreurs décelées par le pré-test. Cependant, le laps de temps entre les deux tests étant très court (moins d'une semaine), il est envisageable que les élèves aient encore en mémoire leurs réponses.
- Le troisième groupe n'a, quant à lui, ni ré-enseignement ni remédiation entre le pré-test et le post-test, seulement l'effet du temps.

Après une première étude ayant remis en question le design de l'ITS, une seconde étude est menée. Celle-ci montre alors que les scores du troisième groupe au post-test sont significativement moins bons que ceux des deux premiers groupes tandis que les scores entre le premier et le deuxième groupe ne présentent pas de différence notable. Lors de cette deuxième étude, la remédiation ayant été systématique dès l'apparition d'une erreur chez un élève, les auteurs se demandent si il n'y a pas eu un effet négatif d'une remédiation qui se révélerait être, en fait, abusive. Une troisième étude alors conduite, où seules les erreurs diagnostiquées comme *stables* suscitent une remédiation. À nouveau, cette dernière étude ne montre pas de différence significative « d'apprentissage » entre une remédiation spécifique et un ré-enseignement. En conséquence de quoi, les auteurs remettent en question le contenu de la remédiation. Elle pourrait, en effet, être trop proche du ré-enseignement lui-même : un simple ré-enseignement peut susciter chez certains élèves ayant leur pré-test en mémoire une certaine forme d'auto-remédiation. . .

Bien qu'il soit difficile de conclure quant à l'intérêt ou l'inutilité d'une remédiation adaptée à l'erreur, nous retenons deux points cruciaux de cette lecture :

- Il semble nécessaire de tenir compte de la stabilité des erreurs avant une quelconque réaction. Bien que Sleeman et al. aient tenté d'en tenir compte, il n'est pas clair pour le lecteur de la manière dont la stabilité a été prise en compte : la notion d'opportunité de produire une erreur face à telle expression n'est pas décrite rigoureusement et semble dépendre de ce que les auteurs ont bien voulu percevoir de l'expression de départ, sans tenir compte par exemple des éventuelles expressions intermédiaires produites par l'élève. De toutes façons, les auteurs reconnaissent qu'il est crucial de différencier une erreur stable d'une erreur d'inattention, afin d'éviter une remédiation éventuellement contre-productive. Cette idée est renforcée par les auteurs présentés ci-après et par l'idée de chercher une explication d'ordre conceptuelle à ces erreurs stables.
- Il est, en effet, important d'avoir une réflexion sur les décisions didactiques à prendre à la suite de tels diagnostics. Les auteurs conseillent de se tourner vers des explications conceptuelles et des regroupements d'erreurs. Pour cela, l'utilité d'un cadre théorique semble indéniable, quoique absent de leurs travaux.

Resnick, Mc Arthur et al., Brun et al. et Brousseau, pour ne citer qu'eux, renforcent ces réflexions. Le premier mène une étude sur les erreurs en arithmétique et en vient à la conclusion qu'il faut non seulement repérer des erreurs stables mais les regrouper autour de ce qu'il appelle des « *conceptual misunderstanding* » [Resnick, 1984]. McArthur et al. dénoncent le logiciel GEOMETRY TUTOR de cette époque car les utilisateurs qui effectuent un même type d'erreurs reçoivent, en retour, le même message et ce, indépendamment de leurs activités passées et surtout du nombre de fois où ils ont fait cette même erreur [McArthur et al., 1990, p. 200]. Brun et al., quant à eux, illustrent le fait que « les modèles des erreurs s'ils veulent être fidèles doivent rendre compte, outre du caractère régulé des erreurs, du fait qu'elles résultent d'anticipations et d'inférences faites par le sujet » [Brun et al., 1994, p204]. Enfin, Brousseau évoque l'importance de prendre en compte les erreurs fréquentes : « Le professeur ne peut tenir compte d'une erreur d'un élève que sous certaines conditions ; il faut que la production de cette erreur soit suffisamment fréquente chez cet élève ou suffisamment répandue sur un ensemble d'élèves [...] » [Brousseau, 2000, p. 17]. Ces auteurs s'entendent donc tous sur l'importance d'avoir une représentation conceptuelle des connaissances de l'élève et, pour cela, de déceler, en amont, si les erreurs affichent une certaine stabilité.

5.1 Présentation du modèle de praxis-en-acte

5.1.1 Mise en place théorique

Souhaitant faire ressortir les actions stables liées à un contexte algébrique bien précis, nous avons été amené à nous interroger sur l'utilisation du modèle praxéologique. En effet, celui-ci étant exploité pour l'analyse des manuels, il semblait judicieux voire important de maintenir une cohérence de description pour pouvoir comparer facilement le modèle des connaissances institutionnelles à celui des connaissances de l'apprenant. Bien peu de travaux exploitent l'organisation praxéologique pour modéliser des connaissances non institutionnellement reconnues, en particulier celles d'un sujet d'une institution. Citons, cependant, Castela qui l'a utilisée pour décrire des apprentissages en mathématique ignorés de l'institution, pourtant essentiels pour la réussite dans ce domaine [Castela, 2008]. Le travail de Nguyen qui est plus proche de notre problématique compare les systèmes vietnamien et français en faisant ressortir des praxéologies différentes tant dans les institutions que chez les élèves de ces deux institutions [Nguyen, 2006]. L'organisation praxéologique est bien plus souvent utilisée à des fins de modélisation de pratiques institutionnelles. Nous pensons que, pour des raisons exposées plus loin, cette organisation institutionnelle en tant que telle ne répond pas directement à notre problématique. C'est pourquoi nous proposons un modèle décliné de cette organisation qui permet, selon nous de modéliser les connaissances d'un *apprenant assujetti à une institution* :

Définition. Nous appelons *praxéologie-en-acte*, le modèle triptyque, d'organisation praxéologique, de l'activité d'un sujet institutionnel constitué des trois composantes :

- Un type de tâche-en-acte qui est un objet¹ que connaît ou *reconnaît* le sujet, dans le sens où le sujet a un rapport à cet objet [Chevallard, 1992, p87]. Le type de tâche-en-acte est l'ensemble des situations que le sujet perçoit comme similaires, provoquant chez lui l'application d'une même technique. Deux types de tâche-en-acte se distinguent par l'induction possible de deux techniques différentes par le sujet modélisé. Le découpage en types de tâche-en-acte ne correspond pas nécessairement à celui de l'institution.
- Une technique-en-acte utilisée par l'élève pour résoudre le type de tâche-en-acte. Elle peut être erronée, correcte, légitimée par l'institution de référence ou non. Elle doit présenter une certaine stabilité dans son utilisation pour être considérée comme technique de résolution. La technique n'acquiert sa légitimité chez l'élève que si elle est régulièrement utilisée. Nous évitons ainsi de considérer comme une technique-en-acte, des erreurs d'étourderie ou de dérapage ponctuel.
- Une technologie-en-acte qui, explicite ou non, gouverne et légitime l'utilisation de la technique-en-acte.

Remarque. La *praxis-en-acte* est le couple constitué des deux premières composantes, à savoir le type de tâches et la technique.

5.1.2 Commentaires sur la terminologie utilisée

Il nous paraît important de faire le point sur la terminologie choisie. Le nouveau terme de « praxéologie-en-acte » n'est pas introduit par hasard ou par simple plaisir d'être novateur. Il répond à un besoin de distinguer cet objet de ceux déjà existants. Nous n'avons délibérément pas choisi le terme de « organisation praxéologique » (sans épithète) ou le modèle des « conceptions »,

1. « un objet existe s'il est connu d'au moins une personne ou une institution (il pourra d'ailleurs n'exister -cas limite- que pour cette personne ou pour cette institution). » [Chevallard, 1992, p87].

qui semblent, pourtant de prime abord, pouvoir être exploités pour nos travaux et nous allons expliquer pourquoi.

Pourquoi le terme de praxéologie, sans épithète, ne peut être satisfaisant ? « Toute activité humaine *met en œuvre* une organisation qu'on peut noter $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et qu'on nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique*. » [Chevallard, 2002b, p. 3]. Cette affirmation nous laisse à penser que ce que fait l'élève au sein d'APLUSIX, activité humaine indéniable, peut être modélisé par le quadruplet praxéologique. Mais nous allons préciser en quoi nous nous en distinguons ou plutôt, en quoi nous nous en distinguons dans ce qui est pratiqué puisque rien n'obstrue, dans la théorie elle-même, d'utiliser un quadruplet pour décrire l'activité de l'élève quand bien même elle serait celle d'un « mauvais » sujet, à savoir non conforme à celle de l'institution de référence.

- Tout d'abord, et c'est le point central, la théorie anthropologique s'intéresse aux interrelations entre *institution* et savoir. Et précisons même entre institution *didactique*² et savoir. Les organisations praxéologiques sont là pour décrire le rapport d'une institution à un savoir ou, plus généralement, à un objet. La question de savoir si l'activité de l'élève peut être modélisé par le quadruplet praxéologique peut alors être reformulé ainsi : l'élève que nous considérons est-il une institution ?

L'autodidacte peut être à lui seul une institution mais l'élève auquel nous nous intéressons dans nos travaux est *sujet* d'une institution didactique. Nous l'avons posé comme postulat à nos travaux, cf. Chapitre . L'élève appartient à un système didactique constitué d'un enseignant, d'élèves et d'objets du calcul littéral à enjeux didactiques pour l'institution considérée. En étant inscrit dans une institution, l'élève n'est pas, à ce titre et dans nos travaux, une institution à proprement parlé.

Les points qui suivent sont des précisions consécutives à cette première remarque.

- Regardons, ensuite, plus précisément la première composante du triplet qui constitue la praxéologie-en-acte : le type de tâche-en-acte. En quoi diffère-t-elle de la composante habituelle « type de tâche » ?

D'une part, les types de tâche-en-acte sont perçus et reconnus par un ou plusieurs élèves mais ne le sont pas de l'institution. Les types de tâches, eux, sont des objets tels que les rapports institutionnels à ces objets sont « localement stables » au sens de [Chevallard, 1992, p. 94], c'est-à-dire « qui aillent de soi » pour l'institution. « La vie institutionnelle est donc faite d'un large éventail de tâches accomplies selon des “manières de faire” institutionnalisées, loi d'airain qui tend à identifier tout type de tâches à la technique normalement utilisée dans l'institution pour accomplir les tâches de ce type. » [Bosch and Chevallard, 1999, p. 84]. Les types de tâche-en-acte sont non pas des objets institutionnels mais seulement, au mieux, des objets *institutionnellement visibles* depuis l'institution. Ils ne sont pas des enjeux d'apprentissage proprement dit. Ils appartiennent à des types de tâches plus larges, types de tâches qui s'instancieront peut-être, dans une classe donnée, en ces types de tâche-en-acte. Ils ne sont pas des savoirs stricto sensu puisque à tout savoir est associée une institution : l'institution de production de ce savoir [Chevallard, 1992, p. 107].

D'autre part, nous rejoignons Castela quand elle préconise de réserver « [...] la notion de *Types de tâches* à des ensembles de tâches rapprochées par la nature de la question mathématique à résoudre » [Castela, 2007, p. 121]. Distinguer $a(b + c)$ de $a(b + c + d)$ en deux types de tâches alors même qu'ils répondent à une même question mathématique

2. Est institution *didactique* une institution ayant l'intention manifeste d'amener le rapport de ses sujets à des objets à devenir conforme à celui que l'institution a vis à vis de ces mêmes objets [Chevallard, 1992, p91].

(« développer un produit de deux facteurs ») et font appel à une même technique reconnue viendrait à contredire le découpage conseillé par Castela.

- Intéressons nous à la deuxième composante qui tient lieu de technique. La règle détaillée stable diagnostiquée peut être erronée. Par conséquent, elle est illicite aux yeux de l'institution. Or, « en une institution I donnée, à propos d'un type de tâches T donné, il existe en général une *seule* technique, ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues » [Chevallard, 1998a].

Enfin, nous l'avons déjà noté plus haut et la citation ci-dessus nous y conforte, en général, il n'existe qu'une technique pour un type de tâches donnée. Ce qui est relevé aussi par Castela : « la notion d'OM [Organisation Mathématique] ponctuelle est massivement utilisée en référant à une seule technique, comme le confirme la représentation classique $[T/\tau/\theta/\Theta]$. » [Castela, 2008, p. 35]. Or, dans la communauté du sujet considéré et pour un type de tâches donné, il peut exister autant de techniques que de sujets.

Ainsi, la technique-en-acte ne peut systématiquement obtenir le statut de technique institutionnelle, de part son illégitimité potentielle pour la dite institution et de ses « pluri-déclinaisons ».

- Quant à la troisième composante du triplet, elle correspond, quant à elle, à la technologie au sens de Chevallard. Sa raison d'être est bien de justifier, d'expliquer la technique-en-acte. Elle n'est pas toujours consciente ou explicitable, comme nous le verrons par la suite. Cependant, nous faisons l'hypothèse qu'elle est présente et donneuse de sens à la mise en œuvre *récurrente* de la technique-en-acte de l'élève.

Pourquoi ne pas utiliser le modèle des « conceptions » ? L'idée de la praxéologie-en-acte ne vient en aucun cas se mettre en porte-à-faux avec celle de schèmes ou de théorème-en-acte. Bien au contraire, cette description s'appuie sur l'organisation praxéologique en s'enrichissant des termes issus de la théorie de Vergnaud et, en particulier, du dynamisme qui leur est sous-jacent. La description que nous proposons est bien un modèle des connaissances *mises en acte* par le sujet, des « savoir-faire-dans-l'action » [Castela, 2008].

Nous rejoignons aussi Vergnaud lorsqu'il dit que « c'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire. » [Vergnaud, 1991]. Notre recherche de régularité dans les actions des élèves relève bien de l'organisation invariante de la conduite de l'élève face à une classe de situation, que nous appelons type de tâche-en-acte. La technique erronée de l'élève provient probablement de l'application d'une règle d'action ou d'un théorème-en-acte hors de leur domaine de validité. Alors, pourquoi ne pas avoir utilisé le cadre des conceptions mis en place par Vergnaud puis Artigue [Artigue, 1984] ou encore celui de Balacheff [Balacheff, 1995] ?

La description que nous souhaitons faire est celle de l'activité d'un élève en particulier et non du « bon sujet » d'une institution et encore moins celle préconisée par l'institution. C'est, certes, vers elle que doit tendre l'activité de l'élève mais elles ne sont, à l'instant de la modélisation, pas encore confondues (si tel était le cas, il n'y aurait plus de phase d'apprentissage possible). Le modèle choisi doit permettre de comparer les connaissances d'un vrai sujet à celles d'un sujet idéal de l'institution. Il a pour objectif principal d'expliquer ce qu'un élève sait, fait, comparé à ce qui est préconisé par une institution, l'assujettissement du sujet à une institution pouvant être à l'origine de l'écart du comportement du sujet. Notre approche avait donc une double entrée : l'apprenant, d'une part et l'institution dans laquelle il s'inscrit, d'autre part.

Pour répondre à ces objectifs, nous avons délibérément choisi l'organisation praxéologique plutôt que le vecteur de la conception. Outre peut-être la curiosité de contorsionner une théorie pour chercher à l'appliquer à un nouveau domaine, il y a, à ce choix, deux idées justificatives :

- Un des objectifs de la description des conceptions, clairement cité dans [Artigue, 1990], est justement de différencier le savoir à enseigner de celui effectivement assimilé par l'élève. Cependant, la construction des conceptions repose avant tout sur une analyse épistémologique du concept, une recherche approfondie dans son histoire. La description se veut être celle des connaissances d'un sujet *épistémique* ou *cognitif*. Notre modèle se fonde sur des observables de l'activité d'un sujet assujéti à une institution, le rendant sujet *didactique* ou institutionnel et adhère en cela avec la théorie praxéologique de Chevallard. La conception est axée « savoir en jeu » [Artigue, 1990, p. 270] tandis que la praxéologie est plus axée « savoir institutionnel ». L'analyse des manuels, classiquement modélisable par le quadruplet pouvait être efficacement et directement (ce qui présente un intérêt indéniable dans un système informatique) comparé à un modèle relevant de la même structure.
- La conception n'a pas été, de prime abord, considérée comme un outil opératoire [Artigue, 1990]. Or, l'outil adéquat est, selon ce même auteur, l'objet local [Artigue, 1990, p. 271] et l'organisation très fine que propose l'approche anthropologique correspondait bien à notre besoin de modélisation locale. Il est vrai que cette limitation n'est en fait plus nécessairement d'actualité. En particulier, le modèle cK \acute{c} proposé par Balacheff a pour objectif justement de compléter ce manque et des travaux récents ([Pedemonte, 2002], [Miyakawa, 2005], [Gaudin, 2005], [Lima, 2006]) ont montré que ce modèle pouvait être opératoire. Quoiqu'il en soit, au même titre que le rapport personnel à l'objet est *l'ensemble* des interactions, sans exception, que le sujet peut entretenir avec l'objet, la conception est un outil puissant et d'envergure large. L'idée sous-jacente de la conception est de montrer la pertinence de diversifier les cadres d'apprentissage d'un même concept. L'articulation des différents cadres permet l'acquisition et la maîtrise du concept. Notre travail n'est attaché qu'à un seul cadre : celui de l'écriture symbolique. Nous n'avons pas accès à un autre registre de représentation³. Ce qui induisait de fixer une composante de la notion de la conception : celle de l'ensemble des signifiants associés. De plus, pour reprendre les termes de El Bouazzaoui, notre cadre d'étude se limite aux « conceptions incontrôlées [probablement] induites par l'enseignement » [El Bouazzaoui, 1988, cité dans [Artigue, 1990]]. La granularité et la puissance du modèle des conceptions ne coïncidait pas à notre modélisation très locale des connaissances d'élève.

Résumons : il n'y a évidemment pas d'« interdictions » formelles à ne pas utiliser la théorie anthropologique pour décrire les connaissances d'un apprenant, même si bien peu de travaux ont abordé cet aspect là. Si nous avançons un nouveau terme, c'est, d'une part, pour mettre l'accent sur la position centrale du *point de vue du sujet institutionnel* et, d'autre part, pour distinguer cette description de celle attendue par l'institution. Ceci nous permettra de comparer aisément et habilement les deux modèles. Au même titre que Vergnaud adapte la description triptyque du concept au sujet à travers la notion de conception (idée reprise et développée par Artigue), la praxéologie-en-acte est l'analogue du quadruplet praxéologique du côté du sujet. Dans l'esprit anthropologique, le quadruplet praxéologique permet de décrire l'activité non pas d'une institution, ni d'un sujet en particulier mais d'un sujet « générique » ; sa généricité émanant de sa conformité à l'institution, dans son « existence collective ». Les praxis-en-acte se distinguent dans l'idée que le sujet considéré n'est justement pas conforme à son institution de référence.

3. Du point de vue de l'institution, il y a en effet un seul registre de représentation. Cependant, nous pouvons considérer que les élèves, quant à eux, se placent dans des registres de représentations possiblement différents lorsqu'ils utilisent des règles erronées.

5.2 Méthodologie pour recueillir les praxis-en-acte

La mise en place du modèle de praxéologie-en-acte repose sur une hypothèse de recherche portant sur les types de tâche-en-acte :

Hypothèse de recherche 3. *Le découpage institutionnel en type de tâches ne correspond pas toujours à celui que l'élève perçoit. Autrement dit, il existe des types de tâche-en-acte distincts des types de tâche institutionnels.*

Si cette hypothèse est validée, elle justifie a posteriori le choix d'avoir distingué la praxis-en-acte de la praxis institutionnelle. En effet, elle prouve que ce que l'institution regroupe sous un même type d'expressions *en ne proposant qu'une seule technique officielle de résolution* ne l'est pas pour le sujet. De même, la validation de l'hypothèse de recherche 2, consistant à supposer qu'un apprentissage est nécessaire pour maîtriser l'itération et la combinaison de techniques acquises, renforcerait, elle aussi, l'intérêt du modèle. En effet, les types de tâche dont les techniques de résolution sont des combinaisons ou itérations d'autres techniques, incitent, peut-être, les élèves à mettre en œuvre de nouvelles techniques.

Nous avons cherché à valider ces hypothèses 2 et 3 sur quelques choix d'expressions tout en nous interrogeant sur ce qui semble être une même opportunité d'appliquer une même règle selon les élèves, permettant d'aboutir à la construction de types de tâche-en-acte. Pour cela, le découpage en type de tâches proposé dans les manuels est affiné par des variables dites de contexte, décrivant finement les expressions algébriques et qui constitueront les types de tâche-en-acte. Les techniques, quant à elles, sont les règles diagnostiquées et sélectionnées par le travail précédent décrit dans le Chapitre 3.

5.2.1 Distinction inter et intra

Nous avons défini la technique-en-acte comme étant une technique qui affiche une certaine stabilité. Cette stabilité peut être de deux types.

- Soit une même technique est utilisée plusieurs fois par *un groupe* d'individus et non pas nécessairement utilisée de manière régulière par un même élève ; dans ce cas, on parlera de **praxis-en-acte inter-élèves**. Il peut y avoir stabilité dans un groupe d'individus quand bien même chacun n'aurait pas une action stable, voire utiliserait une *autre* technique de manière stable. En revanche, tous les individus de ce groupe utilisent au moins une fois la technique considérée.
- Soit une même technique est fréquemment utilisée par *un même* individu ; dans ce cas, on parlera de **praxis-en-acte intra-élève**. Dans cette configuration, le sujet considéré est l'individu lui-même.

Pour recueillir des praxéologies-en-acte, l'idée est de travailler, dans un premier temps, sur les praxis-en-acte inter-élèves pour ensuite s'intéresser aux technologies-en-acte justifiant ces praxis inter pour enfin, détecter les praxéologies-en-acte intra-élève. Nous fondons cette méthodologie sur l'hypothèse de travail H_T4 sur laquelle nous allons revenir dans la section suivante :

Quatrième hypothèse de travail :

Les praxis-en-acte inter sont des candidats potentiels pour d'éventuels praxis-en-acte intra. (H_T4)

Après avoir validé les hypothèses 2 et 3 et lister les types de tâche-en-acte potentiels, nous chercherons des praxis-en-acte inter parmi lesquelles, nous regarderons celles qui s’instancient en praxis-en-acte intra.

5.2.2 Interrogation sur la cohérence du modèle

La praxis-en-acte intra est bien cohérente avec le modèle classique, en particulier dans sa dimension cognitive du sujet. La notion d’apprentissage a un sens, celui de l’évolution de la praxis intra vers la praxis institutionnelle. La technologie-en-acte explique et justifie la stabilité de la technique choisie par l’élève. En cela, nous pouvons bien parler de *praxéologie-en-acte* intra.

En revanche, qu’en est-il de l’inter ? La notion de praxis, comme l’entend Chevallard, n’est pas reliée directement à la notion de *sujet* : elle exprime un invariant tangible, plus qu’un aspect cognitif ou didactique. Il n’en est pas de même de la notion de logos. Elle est, quant à elle, rattachée à la dimension cognitive du sujet puisqu’elle *justifie, explique* et *valide* l’invariance. Le passage de praxis-en-acte inter aux praxéologies-en-acte inter n’est donc ni immédiat ni évident. Dans l’esprit de Chevallard, le quadruplet est représentatif non vraiment d’une institution mais d’un *sujet* d’une institution ; le sujet, rappelons-le, étant une personne « entrant dans une institution » [Chevallard, 1992, p. 89]. Lorsque l’on s’intéresse au passage de praxis-en-acte inter à la notion de praxéologie-en-acte inter, quel est alors le sujet institutionnel considéré ? La notion de sujet peut-elle être étendue à un groupe de personnes et non plus être restreinte à une seule personne ?

Étudions ce cas de plus près : considérons que le sujet de la praxis inter $[T, \tau]_{inter}$ soit un groupe \mathcal{S} d’individus s_i ayant été regroupés autour de cette praxis pour deux raisons distinctes possibles : soit ils utilisent *régulièrement* τ face à T soit ils l’utilisent parfois. Ces deux cas d’appartenance sont en fait à distinguer. Dans le premier cas de régularité, l’action est aussi stable en intra et on pourra ainsi remonter jusqu’à la notion de praxéologie-en-acte inter tandis que dans le second cas de régularité inter, sans régularité intra, cela ne pourra être fait :

- Si « globalement » les s_i utilisent régulièrement τ face à T , et ce, de manière individuelle (ou intra), $[T, \tau]_{inter}$ s’instancie alors à chaque individu s_i : $[T, \tau]_{intra}$ peut être attribué à chaque s_i . La technologie inter peut bien expliquer chaque comportement individuellement. La technologie intra associée sera héritée de celle du modèle inter. La notion de praxéologie-en-acte inter a alors du sens autour du sujet « groupe d’individus », dont la dimension cognitive est celle de chaque individu.
- Si $[T, \tau]_{inter}$ a été constitué autour d’individus qui, en fait, n’utilisaient pas régulièrement τ face à T , $[T, \tau]_{intra}$ ne peut être attribué à chaque individu s_i . Pour appartenir à \mathcal{S} , les individus ont au moins utilisé une fois la technique τ face à T mais sans pour autant la privilégier. Dans ce cas, il est délicat de parler de notion de technologie-en-acte inter car que représenterait-elle ? Elle serait là pour valider une stabilité perçue chez un groupe d’individus sans que chacun n’agisse avec cette invariance, invariance donc à laquelle ne peut être attribué d’aspect cognitif.

Seul le premier cas permet de reconstruire la technologie-en-acte ; dans le second cas, cela n’aurait pas de sens. C’est donc sous l’hypothèse très forte H_{74} , que la praxis-en-acte inter peut remonter jusqu’au niveau de praxéologie-en-acte inter : c’est en considérant que la praxis-en-acte inter n’est capturée que parce qu’il y a réellement stabilité individuelle. Sous cette hypothèse, la technologie d’une praxis-en-acte intra sera héritée de celle de la praxis-en-acte inter à laquelle appartient l’individu.

5.2.3 Méthodologie

La première étape est de valider l'hypothèse de recherche 3 : lister les variables de contexte algébrique décrivant finement les expressions algébriques et vérifier que, bien que relevant d'un même type de tâches institutionnel, elles provoquent des comportements différents chez les élèves.

De manière parallèle à cette validation, les types de tâche-en-acte sont énumérés. Pour cela, trois méthodes sont proposées en fonction du genre de tâche :

- En *développement*, section 5.3.3, les variables de contexte sont suffisamment peu nombreuses pour que les types de tâche-en-acte soient les types de tâche accompagnés des valeurs des dites variables. C'est sur ce genre de tâche que sera validée l'hypothèse 3. Des expérimentations en classes de 3^e vont permettre de vérifier que les élèves ne se comportent pas de la même manière, par exemple, face à $a(b + c)$ que face à $a(b + c + d)$.
- En *factorisation*, section 5.3.4, les variables de contexte sont très nombreuses. Cela crée de très nombreux types de tâche-en-acte. Un travail est nécessaire pour donner du sens à ces types de tâche-en-acte et les regrouper en types de tâche-en-acte moins élémentaires. Pour cela, une méthode statistique, l'Analyse Statistique Implicative, va être utilisée pour discriminer les associations de variables à l'origine de l'utilisation de certaines techniques-en-acte chez les élèves. Des expérimentations spécifiques ont là aussi été conduites.
- En *réduction*, section 5.3.5, les variables de contexte sont, à nouveau, très nombreuses. Cependant, la méthode suivie pour la factorisation n'a pu être ici appliquée. En effet, d'une part, l'Analyse Statistique Implicative ne pouvait pas être utilisée car les variables étaient trop nombreuses et leurs associations exponentielles. D'autre part, il est difficile de monter des expérimentations spécifiquement dédiées au domaine de la réduction, la réduction, comme nous l'avons noté dans les chapitres précédents, étant, avant tout, une sous-tâche des exercices dédiés au développement ou factorisation. Nous avons donc utilisé une autre méthode : nous avons cherché à donner un sens a priori sur les associations plausibles des variables qui pouvaient expliquer l'apparition des règles erronées repérées dans les chapitres 3 et 4. Ce travail repose aussi sur une analyse des manuels, à la recherche de valeurs rares des variables pouvant être explicatives des dites erreurs.

Ensuite, une réflexion autour de ce qui est acceptable comme seuil de stabilité permet de déterminer ce qui est acceptable comme technique-en-acte inter et surtout intra. Ceci est fait en section 5.4. Cette section permet d'instancier précisément le modèle théorique de praxis-en-acte à nos travaux.

Dans le chapitre 6, des résultats sur les praxis-en-acte inter sont présentés, suivis d'une élaboration a priori des technologies-en-acte de ces praxis (section 6.1.5). La section 6.2 expose les praxis-en-acte intra élèves avec différentes exploitations de ces résultats : l'apanage des praxis-en-acte erronées en classes de collège, des différences entre les pays ou encore selon les types de tâche-en-acte considérés. Ces praxis-en-acte intra ponctuelles tentent ensuite d'être regroupées en praxis-en-acte intra locales sur quelques exemples ; quelques interviews viennent valider les technologies-en-acte construites a priori. Ce chapitre se termine par l'ouverture sur une nouvelle hypothèse. L'ensemble de ces étapes est récapitulé sur la figure 5.1.

5.2.4 Validité de la méthodologie

Avec une telle méthodologie -recueil de l'inter puis de l'intra-, cf. figure 5.1, il est évident que toutes les praxéologies-en-acte intra ne vont pas être recueillies. En effet, seules celles ayant montré une certaine stabilité en inter pourront être capturées.

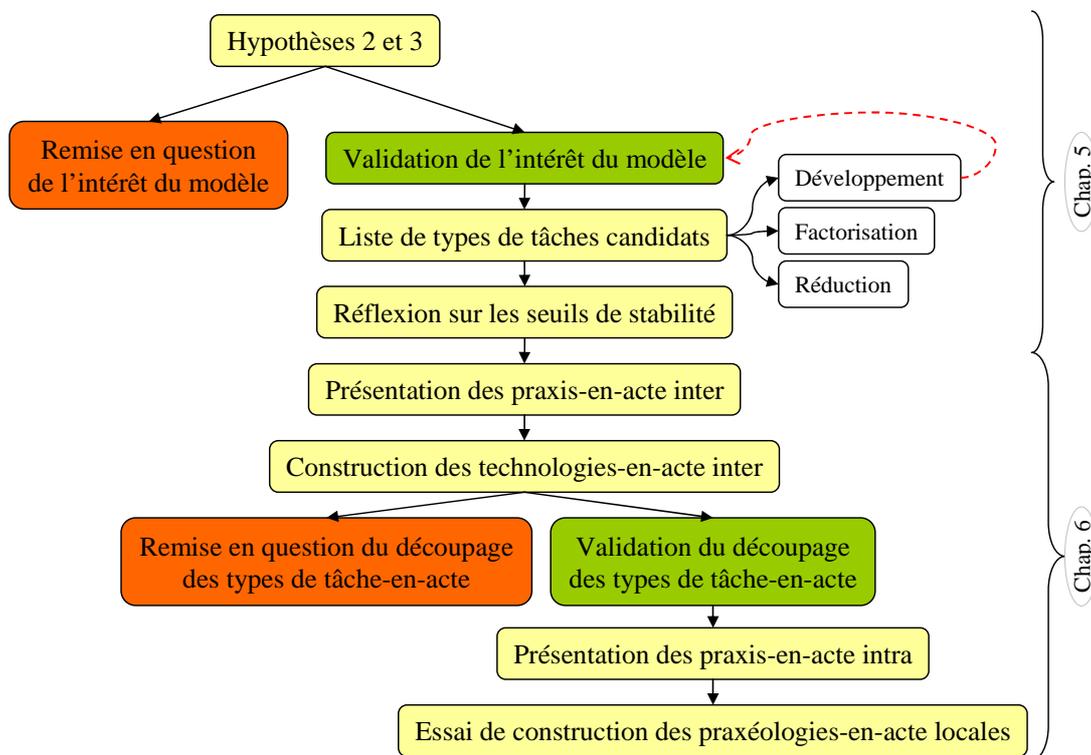


FIGURE 5.1 – Schéma récapitulatif de la méthodologie suivie. Le chapitre 5 est consacré à la présentation de modèle de praxis-en-acte avec l'instanciation à nos travaux : liste des types de tâche-en-acte et réflexion sur les techniques-en-acte. Le chapitre 6 présente les résultats des praxis-en-acte inter et intra avec une réflexion sur les technologies-en-acte et un essai de regroupement de praxis-en-acte ponctuelles en locales.

Alors, pourquoi un tel choix ? Pourquoi ne pas avoir cherché les praxéologies-en-acte intra directement, sans passer par les inter ? Pourquoi, de plus, ne pas avoir construit les technologies intra après avoir recueilli les praxis-en-acte intra plutôt que de les construire a priori, au niveau de l'inter alors même qu'elles ne sont pas nécessairement attribuables aux praxis-en-acte inter si l'on remet en question l'hypothèse [H74](#).

Pour répondre à ces interrogations, il est intéressant de regarder ce qui se fait en pratique. Que ce soit l'enseignant dans sa classe ou des études telles que Pisa faites sur une grande population, le discours porte toujours sur une stabilité avant tout inter. Ainsi, l'enseignant sera amené à revenir sur certaines notions s'il voit que certaines erreurs sont récurrentes dans plusieurs copies. Il est bien rare qu'il ait à la fois le temps et surtout les informations nécessaires pour déterminer qu'un même élève a tendance au fil du temps à rester dans son erreur. La prise en compte d'une erreur devient, en fait, effective lorsque cette erreur a, avant tout, été détectée en inter. De même, dans les rapports des études faites sur de grandes populations, se tient un discours assez général sur les connaissances à partir de données recueillies en inter et non en intra : un même élève n'est généralement pas confronté plusieurs fois au même type de tâches pour déceler une quelconque stabilité intra. Habituellement, plusieurs élèves sont confrontés au même type de tâches et de là, sont déduites les grandes lignes de connaissances mais rares sont les études où des mêmes élèves sont confrontés plusieurs fois à des mêmes types de tâches.

Cette pratique est fondée sur une évidence pragmatique : il y a bien peu de données similaires sur un même élève, « naturellement ». Ceci est dû principalement aux contraintes et exigences scolaires : il est difficile et peu intéressant de faire travailler un même élève sur un même type de tâches sans réagir et lui apporter de nouvelles informations. L'élève pourra être confronté plusieurs fois à un même type de tâches mais son interaction avec l'extérieur le fera sans cesse évoluer et empêchera de capturer une certaine stabilité. Nous pensons qu'il faut des conditions d'expérimentations très exigeantes pour capturer une régularité chez un même élève, et ceci est rarement fait hors du contexte de recherche. En fait, si l'on regarde même les études faites sur les conceptions, l'élève est rarement confronté plusieurs fois à un même type de tâche.

Il est donc rare de réagir à une pratique intra sans l'avoir préalablement diagnostiquée en inter à cause d'un possible manque de données et de difficultés matérielles (comment retenir que tel élève sur le devoir précédent avait déjà fait telle erreur ?). C'est bien évidemment la force des EIAH que de pouvoir faire un tel suivi et une telle prise en compte. Il n'en reste pas moins que dans des travaux de recherche, il est aussi bien rare d'avoir accès à de telles données pour des raisons de temps imparti aux expérimentations mais aussi d'intérêt : il semble plus « rentable » de réfléchir à une remédiation qui concerne un certain nombre d'élèves et non un seul élève. Nous considérons donc que le critère qui guide l'enseignant ou le chercheur dans la prise en compte d'une erreur est la représentativité de masse. La méthodologie que nous adoptons est donc très liée à ce qui est pratiqué dans la « réalité ». Avec une telle méthodologie, sont donc capturées les praxis-en-acte intra qui ont une certaine représentativité inter. Autrement dit :

S'il existe une praxéologie-en-acte intra représentative d'une représentativité de masse, elle sera diagnostiquée.

Toutes les praxis-en-acte intra recueillies sont donc des praxis-en-acte inter. Quant à la réciproque, elle est l'hypothèse [H74](#) elle-même : les inter se retrouvent-elles toutes en intra ? Est-ce que du moment qu'il y a une représentativité de masse d'une certaine technique-en-acte, il y a au moins quelques élèves qui ont tendance à l'utiliser de manière stable ? ou se peut-il que des techniques-en-acte soient utilisées en grand nombre sans qu'un même élève l'utilise régulièrement ? Nous reviendrons sur ces questions dans le chapitre suivant.

Enfin, il y a deux justifications quant au choix fait de travailler sur la notion de logos au niveau de l'inter et non d'attendre l'intra pour l'introduire. D'une part, et c'est la raison principale, l'octroi des logos aux praxis-en-acte inter permet de valider le découpage proposé des types de tâche-en-acte. En effet, si nous arrivons à expliquer et à justifier les praxis-en-acte inter par une technologie, c'est que le découpage proposé a une certaine cohérence, et ce, sans a priori sur un élève donné. D'autre part, les contraintes matérielles étant ce qu'elles sont, il est possible de ne pas capturer au cours de nos expérimentations certaines praxis-en-acte intra alors qu'elles pourraient l'être lors d'autres expérimentations. Le travail fait en amont permettant de s'abstraire de la possibilité de ne pas capturer toutes les praxis-en-acte intra pourra ainsi être réutilisé ultérieurement. Il est donc intéressant de travailler sur la notion de technologie en amont des expérimentations intra.

5.3 Types de tâche-en-acte

Rappelons que les types de tâche repérés dans l'analyse des manuels (section 1.3) étaient au nombre de 14. Ils ont été relus pour répondre plus adéquatement à nos besoins. Dans la section 4.1.2, nous en avons proposé un découpage légèrement différent et surtout moins complet puisque nous avons supprimé les factorisations d'identités remarquables. Ce sont ces types de tâche au nombre de 9, que nous considérons dorénavant.

- | | |
|--|--------------|
| 1. Réduire une somme de monômes, | (RedAdd); |
| 2. Réduire un produit de monômes, | (RedMult); |
| 3. Développer une somme précédée d'une signe +, | (DvtPlus); |
| 4. Développer une somme précédée d'une signe −, | (DvtMoins); |
| 5. Développer le produit de deux facteurs où le premier est un monôme et le second une somme, | (DvtSimple); |
| 6. Développer le produit de deux facteurs où les deux sont des sommes, | (DvtDouble); |
| 7. Développer le produit de trois facteurs dont le premier est un monôme et les deux autres sont des sommes, | (DvtTriple); |
| 8. Développer le carré d'une somme, | (DvtCarre); |
| 9. Factoriser une somme de termes ayant un facteur commun, | (Fact). |

5.3.1 Analyse a priori des variables de contexte

Le type de tâche-en-acte est constitué d'un genre de tâche et d'une expression générique, dont la généralité semble perçue par l'élève dans le sens où il utilise une même technique pour répondre à l'ensemble des tâches relevant de ce type. Sous l'hypothèse de recherche 3, le découpage institutionnel des types de tâches ne correspond pas à celui des types de tâches-en-acte. Par exemple, un élève ne se comporte pas nécessairement de la même façon face à $2(x + 3)$ et face à $2(x + 3 + x^2)$ alors que ces tâches appartiennent pourtant au même type de tâches institutionnel : le « développement simple ». La raison du changement de son comportement réside probablement en la valeur différente du nombre de termes dans le second facteur. La granularité proposée par l'institution a alors été affinée par des caractéristiques décrivant plus précisément les expressions algébriques, caractéristiques portant sur des notions syntaxiques, aussi bien matérielles que structurales (Hypothèse de recherche 1, p. 18).

Définition. Nous définissons une *variable de contexte algébrique* comme étant une caractéristique de l'expression algébrique, dont les valeurs modifient potentiellement le comportement des élèves.

Exemples. Le degré de l'expression, le nombre de terme dans une somme, le nombre de terme dans un des facteurs, l'ostentation du signe \times sont des variables de contexte algébrique.

Remarque. Les variables et leurs valeurs dépendent évidemment du type de tâches considéré. Par exemple, la variable « ostentation du signe \times » n'a peut-être d'impact que lorsque le genre de tâche est du développement.

À chaque type de tâches est associé un ensemble de variables de contexte et de valeurs qu'elles peuvent prendre. Cet ensemble ne porte que sur les expressions algébriques et permet, ainsi, de préciser le *contexte algébrique* de la sous-expression que l'élève transforme. Ne sont alors pas prises en considération des variables telles que le « type de verbe utilisé » (simplifier vs. réduire) ou le « langage de présentation de l'expression » (en langue naturelle vs. en langage algébrique)⁴. Une des questions que l'on s'est posée en parallèle à l'énumération des variables est de savoir si elles ont le statut de variables didactiques ou non.

Des variables didactiques ?

Rappelons la définition de la notion de variable cognitive et variable didactique donnée par Brousseau [Brousseau, 1997, p4] : « Nous appelons *variable cognitive*, une variable de la situation telle que par le choix de valeurs différentes on peut provoquer des changements de la connaissance optimale. Les *variables didactiques* seront parmi les variables cognitives celles qui peuvent être fixées par l'enseignant. » Un texte plus ancien donne des précisions sur la notion de variable, en particulier sur la variable didactique :

« Un champ de problèmes peut être engendré à partir d'une situation par la modification des valeurs de certaines variables qui, à leur tour, font changer les caractéristiques des stratégies de solution (coût, validité, complexité, etc.) [...] Seules les modifications qui affectent la hiérarchie des stratégies sont à considérer (variables pertinentes) et parmi les variables pertinentes, celles que peut manipuler un professeur sont particulièrement intéressantes : ce sont les variables didactiques. » [Brousseau, 1982b, cité dans [Bessot, 2003]].

Au vu de ces définitions, nous pouvons donner le statut de variable cognitive et pertinente à l'élément « nombre de termes dans le second facteur » pour le problème précédent du développement simple. Nous faisons l'hypothèse que certaines valeurs prises par cette variable provoquera un changement dans le comportement de certains élèves, autrement dit l'utilisation d'une technique différente. Mais peut-on lui octroyer l'épithète de *didactique* ?

En particulier, les variables de contexte algébrique sont-elles fixées par l'enseignant ? Provoquent-elles un apprentissage ? Sont-elles liées *au savoir en jeu* du type de tâches auquel elles se réfèrent ?

Les variables didactiques sous tendent deux aspects qu'il est intéressant d'interroger : celui de la mise à disposition de ces variables auprès de l'enseignant et celui de l'impact de ces variables sur l'apprentissage en jeu. Regardant le premier aspect, les expressions algébriques que nous modélisons ont ceci de particulier : elles ne sont pas toutes produites par l'enseignant. Les expressions sur lesquelles travaille l'élève sont en partie des expressions qu'il a lui-même écrites. En effet, si le pas de calcul étudié n'est pas le premier pas, l'expression mère que l'élève transforme

4. Ces informations pourraient être englobées dans ce que Castela appelle le contexte institutionnel.

est une expression écrite par lui-même. S'il a choisi d'expliciter ou non le signe \times dans sa résolution n'est pas du ressort de l'enseignant qui a construit uniquement l'énoncé. Peut-on alors maintenir que les caractéristiques de l'expression-mère *produite par l'élève* sont modélisables par des valeurs de variables *didactiques* ? Nous répondons par l'affirmative : les variables didactiques sont *potentiellement* à la disposition de l'enseignant. Nous postulons qu'un enseignant pourrait les manipuler afin que l'élève maîtrise le concept sous-jacent au type de tâches dont relève cette expression. Nous ne faisons pas de différence de description entre l'expression de l'énoncé, produite par l'enseignant, et l'expression en cours de calcul, produite par l'élève. Que les valeurs de ces variables ne soient pas choisies délibérément par un enseignant dans notre contexte de modélisation n'entache pas, sur cet aspect là, l'appartenance possible de ces variables à l'ensemble des variables didactiques. Ce que nous affirmons est qu'un éventuel enseignant pourrait les manipuler pour provoquer un possible apprentissage complet de la notion.

Autant la mise à disposition des variables de contexte algébrique auprès de l'enseignant n'empêche pas de qualifier ces variables de *didactique*, autant la notion d'apprentissage en jeu ne permet pas systématiquement de les qualifier ainsi. En effet, Brousseau mentionne que les « variables [didactiques] sont pertinentes à un âge donné dans la mesure où elles commandent des comportements différents. Ce seront des variables didactiques dans la mesure où en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations et des régulations : des apprentissages. » [Brousseau, 1982a, cité dans [Bessot, 2003]]. Or, autant le nombre de termes dans le second facteur du développement simple est un moyen, pour l'enseignant, de tester si l'élève a acquis la notion de distributivité sous-jacente au développement, autant cela nous semble discutable pour d'autres variables. En effet, l'ostentation ou non du signe \times , par exemple, n'est pas, selon nous, une variable didactique *dans le type de tâches « développer $a(b + c)$ »* : elle influence, certes, le comportement de l'élève mais le savoir en jeu de ce type de tâches est la distributivité et non la connaissance du signe opératoire entre un monôme et une parenthèse. En jouant sur cette variable, l'enseignant peut induire l'apprentissage de cette règle syntaxique mais pas l'acquisition de la notion de développement. C'est pourquoi, l'épithète didactique ne peut être attribué à cette variable de contexte algébrique. Nous verrons d'autres exemples, par la suite, lors d'interviews sur la factorisation, où il semble que la modification de valeurs de variables de contexte ne provoque pas d'apprentissage malgré un changement notable de comportement.

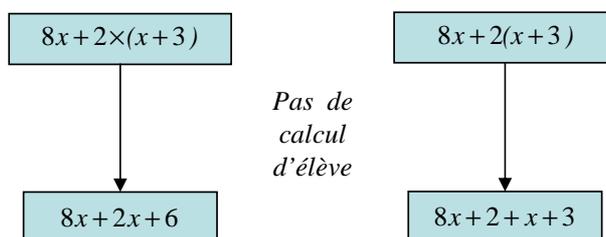


FIGURE 5.2 – L'ostentation ou l'absence du signe \times dans une même expression provoque un comportement différent chez un même élève. Elle est une variable cognitive pertinente sur laquelle l'enseignant peut jouer pour provoquer un apprentissage « complet » de la règle syntaxique du signe opératoire entre un monôme et une parenthèse, en la proposant dans un contexte, par exemple, de développement. Cependant, cette variable ne permet pas une acquisition meilleure de la notion de développement : en cela, elle n'est pas une variable didactique pour le type de tâches de développement.

Le choix et la liste des variables de contexte.

Un polynôme est constitué de sommes et de produits de monômes, un monôme pouvant être caractérisé par son degré et son coefficient. Dans la notion de produit, intervient le fait que le signe opératoire \times soit visible ou non. Ainsi, des caractéristiques d'un polynôme sont :

- le nombre de termes de la somme,
- le nombre de facteurs du produit,
- l'ostentation ou non du signe \times ,
- le degré du monôme,
- le coefficient du monôme.

Le choix des valeurs des variables s'est fait à partir, d'une part, des valeurs pouvant provoquer l'apparition de certaines règles et, d'autre part, des valeurs pouvant jouer un rôle particulier dans l'apprentissage. Un exemple de la première situation est le cas du coefficient invisible du monôme : la règle $ax^n + x^n \rightarrow ax^n$ peut être utilisée alors qu'elle ne semble avoir aucun sens si le coefficient est indiqué. En effet, au vu des erreurs relevées dans les protocoles (Chapitre 3), la règle $ax^n + bx^n \rightarrow ax^n$, avec b visible n'a pas été implantée. Un exemple de la seconde situation est le cas de la distinction du degré 2 et du degré 3 et du regroupement du degré 3 et du degré 4. Ceci est lié à ce qui se fait dans l'institution et nous y reviendrons dans la section 5.3.5 pour la construction de types de tâche-en-acte. Le fait que la variable « degré » prenne rarement certaines de ces valeurs dans les manuels nous laisse croire que, proposées à l'élève, elles peuvent, en fait, provoquer un comportement erroné : il y a eu rupture de contrat⁵. De même, le principe de ne présenter aux élèves qu'une somme de deux termes est tout aussi fréquent dans bon nombre de situations d'enseignement : dans les tâches de développement mais aussi de factorisation. Ce qui constitue une *coutume didactique* : « [...] un ensemble de pratiques obligatoires, de façons d'agir établies par l'usage ; le plus souvent implicitement. » [Balacheff, 1988]. En créant une perturbation dans l'énoncé (proposer 3 termes au lieu de 2), l'élève est déstabilisé. Ce que l'institution percevait comme un seul et même type de tâches est perçu différemment par l'élève, par habitude de n'y avoir été jamais confronté.

Avec cette base de caractéristiques, les variables de contexte et les valeurs qu'elles prennent et qui dépendent du type de tâches sont les suivantes :

- Cinq variables de contexte pour le type de tâches *RedAdd*, « somme de deux monômes » :
 - * Le degré de chaque monôme, qui peut prendre 5 valeurs : degré 0, degré 1, visibilité du degré 1, degré 2 ou supérieur à 2 strictement.
 - * Le signe de chaque coefficient, qui se décline en positif vs. négatif.
 - * La comparaison des deux coefficients en valeur absolue : soit le premier (celui qui est à gauche) est plus grand strictement que le second, plus petit strictement que le second ou égal au second.
 - * La visibilité du coefficient 1 : si l'un des coefficients vaut 1 en valeur absolue, il peut être visible ou non.
 - * La présence d'un signe moins accolé au monôme de gauche dans l'expression mère⁶.

5. Le contrat didactique, introduit par Brousseau, est une relation spécifique au contenu mathématique qui « détermine -explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement- ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera [...] responsable devant l'autre. » [Brousseau, 1998, p. 61]

6. Rappelons, en effet, que le type de tâches et donc les variables sont attachés à une transformation-Anaïs (cf. Chapitre 4) mais cette transformation-Anaïs appartient à une transformation plus large : le pas de calcul de l'élève. C'est pourquoi, une réduction de somme de deux monômes (par exemple, $5x + 3x \rightarrow 8x$) peut faire partie d'une transformation incluant d'autres monômes (par exemple, $5x - 2x + 3x \rightarrow 8x - 2x$ ou $5x - 2x + 3x \rightarrow 6x$, diagnostiquée par deux transformations-Anaïs).

- Des exemples des valeurs que peuvent prendre ces valeurs sont proposés dans le tableau 5.1.
- Une variable de contexte pour le type de tâches *RedMult*, « produit de deux monômes » :
 - * Le degré de chaque monôme, qui peut prendre 5 valeurs : degré 0, degré 1, visibilité du degré 1, degré 2 ou supérieur à 2 strictement.
 - Deux variables de contexte pour le type de tâches *DvtSimple*, « développement simple » :
 - * l'ostentation du signe \times .
 - * Le nombre de termes de la somme du facteur : 2 ou plus.
 - Deux variables de contexte pour le type de tâches *DvtDouble*, « développement double » :
 - * l'ostentation du signe \times .
 - * Le nombre de facteurs : 2 ou plus.
 - Deux variables de contexte pour le type de tâches *DvtMoins*, « développement moins » :
 - * La visibilité du 1 devant la parenthèse afin de distinguer $-1(a+b)$ de $-(a+b)$.
 - * Le signe de chaque terme de la somme entre parenthèses.
 - Trois variables de contexte pour le type de tâches *DvtPlus*, « développement plus » :
 - * La visibilité du 1 devant la parenthèse afin de distinguer $+1(a+b)$ de $+(a+b)$.
 - * Le signe de chaque terme de la somme entre parenthèses.
 - * La forme de ce qui précède le signe $+$: vide ($+(a+b)$), monôme ($a+(b+c)$) ou somme entre parenthèse ($(a+b)+(c+d)$)
 - Cinq variables de contexte pour le type de tâches *Fact*, « factorisation d'une somme » :
 - * La nature du facteur commun⁷ : Polynomial Monôme (par exemple, $3x^2$), Polynomial Multinôme (par exemple, $2x+3$), Polynomial Autre (par exemple, $3x(2x+3)$), Numérique (entier).
 - * Le degré du facteur commun : 0, 1 ou 2.
 - * La visibilité du facteur commun : Évident (le facteur est le même partout), Commuté ($x+4$ et $4+x$), Opposé ($x-4$ et $4-x$), UnFacteur ($x+4$ et $2x+8$), DeuxFacteurs ($3x+12$ et $2x+8$).
 - * La nature du cofacteur du facteur commun dans chaque terme : Unitaire invisible (par exemple, le facteur commun x dans $x(x+2)+x$ a un cofacteur Unitaire invisible dans le premier terme), Opposé-Unitaire invisible, Numérique visible, Monôme ou Polynôme.
 - * Le nombre de termes dans la somme à factoriser : 2 ou plus.
 - Aucune variable de contexte pour les type de tâches *DvtTriple*, « développement triple » et *DvtCarre*, développement d'un carré.

7. Par facteur commun, nous entendons le facteur commun maximal. Ainsi dans la factorisation de $5x(x+3)+5x+18$, le facteur commun est $5(x+3)$ et non $x+3$ ou 5.

	Degrés		Coefficients			Signe moins accolé	Coef 1 invisible
			Signe		Ordre		
$5x^2 + 3x^2$	$n = 2$	$p = 2$	a positif	b positif	$ a > b $	non	
$5x^2 + 7x - 3x^3$	$n = 2$	$p > 2$	a positif	b négatif	$ a > b $	non	
$5x^3 - 7x - 3x$	$n > 2$	$p = 1$ invisible	a positif	b négatif	$ a > b $	oui	
$x^4 + 3$	$n > 2$	$p = 0$	a positif	b positif	$ a < b $	oui	a invisible

TABLE 5.1 – Exemples de valeurs prises par les variables de contexte attachées au type de tâches « somme de deux monômes » : $ax^n + bx^p$. La transformation-Anaïs porte sur l'expression surlignée en jaune au sein d'une expression-mère, possiblement plus grande. Par exemple, en ligne 2, l'élève a travaillé sur $5x^2 - 3x^3$ au sein de l'expression $5x^2 + 7x - 3x^3$.

5.3.2 Application du modèle à notre travail

Notre question initiale était de savoir quelles étaient les règles que l'élève appliquait préférentiellement et si il les appliquait à chaque fois qu'il en avait l'opportunité. Voulant automatiser le processus, il a fallu décrire très précisément ce que l'on entendait par opportunité d'appliquer une règle. Nous l'avons dit dans le chapitre 4, bon nombre d'auteurs se sont contentés de modéliser à la main les erreurs des élèves et n'ont pas eu à préciser rigoureusement si l'élève avait eu ou non manqué une opportunité d'appliquer telle règle. Ils se contentaient de manière informelle, sans définition, explicitation et critères précis, de compter ce qui leur semblait être une opportunité.

Dans notre travail, nous avons mis en place une notion précise d'occasion d'appliquer une règle : l'opportunité-Anaïs, enrichi d'un jeu de valeurs de variables caractérisant l'expression algébrique que l'élève transforme. Cette opportunité très précise constitue le type de tâche-en-acte dans lequel l'élève se place.

Définition. Soit une transformation-Anaïs TrA et le type de tâches T associé. Soit G_T , le groupe de variables de contexte associées à T .

Dans notre travail, le *type de tâche-en-acte* associée à TrA est un vecteur composé du type de tâches T et de valeurs prises par des variables de contexte de G_T .

Le type de tâche-en-acte sera noté TA relevant d'un type de tâches (institutionnel) T .

Il prendra la forme $T + \dots$. Par exemple « *DvtSimple* + $V_1 + V_2$ », où V_i est une valeur d'une variable de contexte.

Remarques. Le type de tâche-en-acte est un contexte algébrique plus ou moins précis : c'est un vecteur de $k + 1$ composantes, où $k \leq n$ et n est le nombre de variables attachées au type de tâche. Les TA les plus précis sont des vecteurs à $n + 1$ composantes. Un exemple est donné Figure 5.3.

Comme c'était déjà le cas pour le type de tâches (cf. section 4.1, p. 150), le type de tâche-en-acte est décrit pour chaque transformation-Anaïs et non pour chaque pas de calcul, même si, au risque de nous répéter, il faut noter qu'il est en fait reconstruit en aval du pas de calcul de l'élève.

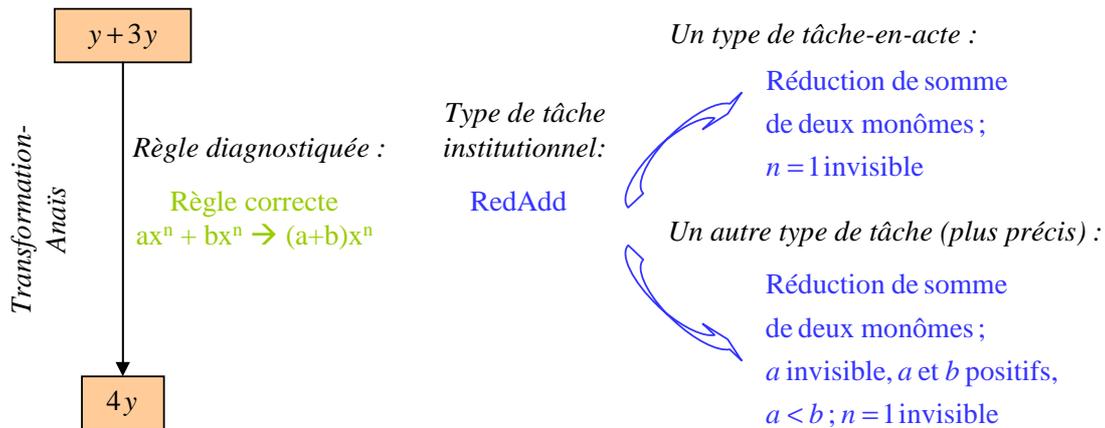


FIGURE 5.3 – Exemple d’une transformation-Anaïs et de la description qui peut en être faite en termes de types de tâche-en-acte. À partir de la règle diagnostiquée, un type de tâches institutionnel est associé puis des types de tâche-en-acte plus ou moins précis.

Dans le cas de la réduction de sommes et produits de deux monômes ainsi que dans la factorisation d’une somme, les variables sont nombreuses et leurs valeurs encore plus. Ceci crée donc un grand nombre de types de tâche-en-acte possibles : si chacune des n variables prend k_n valeurs, cela produit $\prod_{i=1}^{i=n} k_i$ TA possibles ; tout au moins, théoriquement puisqu’il se peut que certaines valeurs soient incompatibles (voir le décompte encadré ci-dessous dans le cas de la réduction de somme). Idéalement, un sujet serait confronté aux $\prod_{i=1}^{i=n} k_i$ TA à $n + 1$ composantes ; puis, les TA ayant suscité une même action chez le sujet étudié seraient alors réunis pour produire un TA plus grossier. Or, pour des raisons évidentes d’infaisabilité matérielle, de telles expérimentations ne peuvent avoir lieu. Dans le cas de la somme de deux monômes, un sujet ne peut être testé sur 1000 TA différents. Il y a donc tout intérêt à regrouper ces TA élémentaires en vecteurs plus grossiers, en espérant trouver la bonne granularité pour que les tâches regroupées autour d’un même TA soient bien perçues comme « similaires » par le sujet.

L’idée est donc de construire a priori des TA à moins de $n + 1$ composantes. Ce qui ne nous empêche pas d’implémenter, outre ceux-là, les TA élémentaires.

Décompte du nombre des TA les plus fins dans le cas de la somme de deux monômes

Il y a 4×3 possibilités pour les coefficients des deux monômes, avec la possibilité que le premier monôme soit suivi d’un signe moins et dans certains cas, que le coefficient soit unitaire invisible : le cas où les deux coefficients sont unitaires est incompatible avec le fait que l’un des deux coefficients soit plus grand que l’autre, en valeur absolue. Ce qui donne 40 possibilités pour les coefficients et 5×5 pour les degrés. Il y a donc 1000 types de tâche-en-acte potentiels qui permettent de « préciser » le type de tâches RedAdd.

Le choix a priori des variables et de leurs valeurs sera validé par le traitement automatique. En

effet, si certaines valeurs ne provoquent pas de changement de comportement dans un ensemble d'élèves, ces valeurs ou variables seront a posteriori invalidées. Cependant, avant de passer à cette validation, nous allons vérifier les hypothèses 2 et 3.

5.3.3 Types de tâches-en-acte relevant du développement

Liste des types de tâche-en-acte et techniques-en-acte associées

Dans les types de tâches développement simple, double, plus ou moins, les variables sont suffisamment peu nombreuses pour tenir compte des types de tâche-en-acte élémentaires ainsi construits. Aussi obtenons-nous les types de tâche-en-acte suivants :

- DvtSimple+MultVisible : développement simple avec l'opérateur multiplier visible ;
- DvtSimple+MultNoVisible : développement simple avec l'opérateur multiplier invisible.
- DvtSimple>2 : développement simple où la somme est d'au moins 3 termes.
- DvtDouble+MultVisible : développement double avec l'opérateur multiplier visible ;
- DvtDouble+MultNoVisible : développement double avec l'opérateur multiplier invisible.
- DvtTriple : développement de trois facteurs.
- DvtPlus
- DvtPlus+TermPlus : développement plus précédé d'un terme ;
- DvtPlus+SumPlus : développement plus précédé d'une somme.
- DvtMoins
- DvtMoins+TermMoins : développement moins précédé d'un terme ;
- DvtMoins+SumMoins : développement moins précédé d'une somme.
- DvtCarre : développement du carré d'une somme de deux facteurs.

Les types de tâche institutionnel *DvtSimple*, *DvtDouble* ne sont pas donnés car ils sont les unions disjointes de $\dots + MultVisible$ et $\dots + MultNoVisible$. De plus, le travail du chapitre précédent a déjà permis de répertorier les techniques que les élèves leur avaient associées. En revanche, les types de tâche *DvtTriple*, *DvtCarre* sont rappelés car ils ne sont pas déclinés en types de tâche-en-acte. Les types de tâche $\dots + TermPlus$ et $\dots + SumPlus$ ne permettent pas de reconstituer les types de tâche dont ils dépendent. Nous ajoutons donc *DvtPlus* et *DvtMoins*. Pour le genre de tâche « développer », les TA produits sont en fait tous justifiés par le fait qu'ils sont des opportunités d'application de certaines règles répertoriées dans le chapitre 3. Par exemple, *DvtSimple+MultNoVisible* « permet » d'utiliser la règle $a(b+c) \rightarrow a+b+c$ qui semble être beaucoup moins pertinente face au TA *DvtSimple+MultVisible*. En effet, il est envisageable (et cela a été repéré) qu'un élève transforme $a(b+c)$ en $a+b+c$ mais ce n'est guère vraisemblable qu'il transforme $a \times (b+c)$ en $a+b+c$. Les techniques-en-acte associées a priori aux types de tâche-en-acte de développement sont récapitulées dans le tableau 5.2. Certaines sont communes à différents TA relevant d'un même type de tâches *T*.

9. Cet opérateur a déjà été présenté en section 3.1.3 : $Nat : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $(a, b) \mapsto a \times 10 + b$

9. Cette écriture a déjà été présentée en section 3.1.3 : c^- signifie qu'il est de signe négatif, c^+ signifie qu'il est de signe positif.

Nom du TA	TA	Résultat des techniques-en-acte
DvtSimple+MultVisible	$a \times (b + c)$	$ab + ac$ $ab + c$ $a \text{ Nat }^8 b + c.$
DvtSimple+MultNoVisible	$a(b + c)$	$a + b + c$ $a + b + a + c$
DvtSimple>2	$a(b + c + d)$	$ab + ac + ad$ $ab + ac + d$
DvtDouble+MultVisible	$(a + b)(c + d)$	$ac + ad + bc + bd$ $a + bc + d$
DvtDouble+MultNoVisible	$(a + b) \times (c + d)$	$a + b \text{ Nat } c + d$ $a + b + c + d$
DvtTriple	$a(b + c)(d + e)$	$abd + abe + acd + ace$ $ab + ac + ad + ae$ $ab + ac \times ad + ae$ $ab + ac(d + e)$
DvtPlus	$+(b + c)$	$b + c$ $a - b - c$
DvtPlus+TermPlus	$a + (b + c)$	$a + b + c$ $a + b + a + c$ $ab + ac$
DvtPlus+SumPlus	$(a + b) + (c + d)$	$a + b + c + d$ $a + c + a + d + b + c + b + d$ $ac + ad + bc + bd$
DvtMoins	$-(b + c)$	$-b - c$ $b + c$ $-b + c$ $b^+ - c^-$ ⁹ $b^- - c^+$
DvtMoins+TermMoins	$a - (b + c)$	$a - b - c$ $a - b + a - c$ $a + b + a + c$ $ab + ac$
DvtMoins+SumMoins	$(a + b) - (c + d)$	$a + b - c - d$ $a - c + a - d + b - c + b - d$ $-ac - ad - bc - bd$ $ac + ad + bc + bd$
DvtCarre	$(a + b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$ $a^2 + b^2$ $a + b^2$

TABLE 5.2 – Liste des 48 praxis-en-acte a priori dans le cas du développement, dont 13 correctes et 35 erronées. La technique-en-acte correcte est toujours citée en premier dans la liste des techniques-en-acte attachées à un TA. Pour deux TA distincts, les techniques-en-acte a priori peuvent être les mêmes. Par exemple pour les deux premiers TA, il y a cinq techniques-en-acte possibles.

Les expérimentations.

Nous avons monté des expérimentations avec un double but : valider la pertinence du choix des types de tâche-en-acte et par là-même, valider que cela valait la peine de distinguer les types de tâche-en-acte des types de tâche institutionnels (hypothèse de recherche 3), fondement du modèle de la praxéologie-en-acte. En fait, dans cette section, c'est bien la deuxième validation qui nous importe, étant donné, comme nous l'avons dit plus haut, que les choix des TA qui relèvent du genre de tâche *Développer* sont validés d'eux-même puisqu'étant des opportunités d'application de règles du chapitre 3. Nous validerons aussi l'hypothèse de recherche 2.

Les expérimentations ont eu lieu dans deux classes de troisième de deux établissements différents. La première (ExpeDvt1) a eu une moyenne de 13 sur 20 au premier trimestre et de 8.6/20 à un devoir commun, tandis que la seconde (ExpeDvt2) a eu une moyenne de 9.3/20 au premier trimestre et de 7.9/20 à un devoir commun. Il y a 26 élèves dans la classe ExpeDvt1 et 21 élèves dans la classe ExpeDvt2. Les expérimentations ont eu lieu au second trimestre, soit après des révisions sur le développement et le cours sur les identités remarquables. Les élèves ont travaillé individuellement sans aucune aide de l'enseignant. Ils ont eu une prise en main du logiciel APLUSIX sur des tâches simples avec rétroaction du logiciel puis ont eu à résoudre les tâches de l'expérimentation en mode *test* du logiciel (sans rétroaction). L'ordre des exercices n'était pas aléatoire et le paramètre concernant la création de nouvelles étapes interdisait de dupliquer l'étape précédente¹⁰.

Nous nous sommes centrés sur les TA relevant du développement simple double ou triple, en laissant le développement moins et plus, types qui nous paraissaient moins appropriés pour des classes de troisième. Les variables de contexte retenues ont été les suivantes :

- (i) En développement, le nombre de termes du deuxième facteur ; pour cela, nous avons choisi d'étudier si le nombre d'erreurs est significativement plus important face à $a(b + c + d)$ ($DvtSimple > 2$) que face à $a(b + c)$ ($DvtSimple$) ;
- (ii) En développement, la visibilité du signe \times ; pour cela, nous avons choisi d'étudier si le nombre d'erreurs est significativement plus important face à $a(b + c)$ (resp. $(a + b)(c + d)$) que face à $a \times (b + c)$ (resp. $(a + b) \times (c + d)$).

Nous avons ajouté une troisième étude qui valide tout autant le modèle de praxis-en-acte, en validant l'hypothèse de recherche 2 :

- (iii) étudier si le nombre d'erreurs est significativement plus important face à $a(b + c)(d + e)$ ($DvtTriple$) que face à $(a + b)(c + d)$ ($DvtDouble$). Étant donné que les manuels n'expliquent pas la technique de ce type de tâches en laissant à la charge des élèves de comprendre qu'il faut combiner deux techniques enseignées, il est intéressant de voir s'ils en sont capables.

Les tâches.

Les tâches testées ont été les suivantes :

1. Développer $2(3 - x)$
2. Développer $(2x + 5)(4x + 3)$
3. Développer $2(3x + x^2 - 3)$
4. Développer $5(x - 1)(x + 3)$
5. Développer $3 \times (2 - x)$

10. Se reporter au chapitre 2, p. 71 pour un récapitulatif de ces fonctionnalités.

6. Développer $(5x + 2) \times (3x + 4)$
7. Développer $(3x + 2) \times (x + 5)$
8. Développer $4 \times (x + 1) \times (x - 2)$
9. Développer $3 \times (2x - x^2 + 2)$

L'idée était de n'utiliser que des monômes de coefficients entiers « simples », pour éviter des erreurs de calcul. Les coefficients pouvaient prendre des valeurs inférieures à 10. Nous avons veillé à conserver une grande similarité entre les tâches que l'on souhaitait comparer. Par exemple, la différence entre la tâche 1 et la tâche 5 réside, selon nous, dans la visibilité de l'opérateur \times et non dans le changement de 2 en 3 et de 3 en 2. Nous souhaitons mettre en parallèle les résolutions produites face aux tâches suivantes :

- (i) Comparaison des résolutions des tâches 1/5 et des tâches 3/9 pour évaluer l'impact du nombre de termes dans le second facteur d'un développement.
- (ii) Comparaison des résolutions des tâches 1/2/3/4 et des tâches 5/6/7/8 pour évaluer l'impact de la visibilité du signe \times . Les tâches 1, 2, 3 et 4 étant similaires respectivement aux tâches 5, 6/7, 9 et 8.
- (iii) Comparaison des résolutions des tâches 1/2/5/6/7 et des tâches 4/8 pour évaluer l'impact du nombre de facteurs d'un développement.

Pour la moitié de chaque classe, l'ordre des exercices suivait l'ordre donné ci-dessus, pour l'autre moitié de chacune des classes, l'ordre était inversé : résolution des tâches 5 à 9 suivie de la résolution des tâches 1 à 4. Ceci afin d'éviter un quelconque effet d'apprentissage. La tâche 6 n'a été proposée qu'à une des deux classes (ExpeDvt2). Pour des raisons de temps, elle n'a pas pu être proposée dans la seconde classe.

Analyse des résultats : validation des variables et des hypothèses de recherche 2 et 3.

Bien que les expérimentations aient été faites avec le logiciel APLUSIX, le diagnostic a été fait à la main et non avec le logiciel ANAÏS car les effectifs étant faibles, nous ne pouvions nous permettre d'avoir un pourcentage d'échecs ou de « mauvais » diagnostics. De plus, ce qui nous importe ici est de comptabiliser les erreurs face à un type de tâche-en-acte et non la technique utilisée. Ainsi, face à *DvtSimple* > 2, ANAÏS ne diagnostique que deux techniques-en-acte (cf. tableau 5.2) alors que les élèves font d'autres types d'erreurs que nous souhaitons, ici, comptabiliser (erreurs ne montrant évidemment ni régularité inter, ni régularité intra ni un quelconque sens ; sinon, elles auraient été intégrées à la bibliothèque de règles). Ont été comptabilisées comme des résolutions « correctes », des réponses soit correctes mathématiquement soit erronées mais où l'erreur n'était pas liée directement avec la notion de distributivité (principalement, des erreurs de calcul). Par exemple, si, lors de la résolution de la tâche 3, « Développer $2(3x + x^2 - 3)$ », l'élève répond :

$$2 \times 3x + 2 \times x^2 + 2 \times 3,$$

sa production est alors comptabilisée comme « correcte » malgré l'erreur de signe¹¹.

11. Nous avons conscience que cela est discutable. Il est, en effet, envisageable que l'erreur de signe soit liée au fait que la concentration de l'élève étant déjà requise par la difficulté de la tâche, elle se soit dispersée sur le calcul du signe et donc que cette erreur soit bien liée au fait qu'il y ait trois termes. Lorsque, comme ici, le choix est contestable, le parti a été pris d'aller à l'encontre de ce que nous souhaitons valider. Ainsi, sur la transformation erronée proposée, si nous l'avions considérée comme erronée, cela aurait eu plus tendance à valider l'hypothèse 3 qu'à l'invalidier ; c'est pourquoi, dans le doute, le choix a été fait de la considérer comme « correcte ».

Pour valider la variable « *nombre de termes dans le second facteur du développement simple* » (i), il faut que les tâches 1 et 5 soient mieux réussies que les tâches 3 et 9. Nous testons alors l'hypothèse « les proportions d'erreurs sont égales dans les deux séries » (première série : tâches 1 et 5 et deuxième série : tâches 3 et 9) contre l'hypothèse « les proportions sont différentes », cf. tableau 5.4. La p-valeur est de 3%, ce qui permet de conclure que les élèves font proportionnellement plus d'erreurs lorsque le second facteur a 3 termes que lorsqu'il n'en a que 2, et ce, de manière nettement significative. Il est donc justifié de distinguer le type de tâche-en-acte « Développer $a(b + c + d)$ » du type de tâche-en-acte « Développer $a(b + c)$ ».

Pour valider la variable « *visibilité du signe \times dans le développement simple ou double* » (ii), il faut que les tâches 1, 2, 3 et 4 soient mieux réussies que les tâches 5, 6, 7, 8 et 9, cf. tableau 5.5. La p-valeur est de 10%. La prise en compte de la variable « visibilité du signe \times » est toujours pertinente au seuil de 10%. Nous conservons les distinctions des types de tâches-en-acte « Développer $a(b + c)$ » du type de tâche-en-acte « Développer $a \times (b + c)$ » ou le type de tâche-en-acte « Développer $(a+b)(c+d)$ » du type de tâche-en-acte « Développer $(a+b) \times (c+d)$ ».

Pour valider la capacité des élèves à traiter des tâches relevant *DvtTriple* comparativement à leur capacité de traiter *DvtDouble* ou *DvtSimple*, il faut que les tâches 1, 2, 5, 6 et 7 soient mieux réussies que les tâches 4 et 8, cf. tableau 5.6. La p-valeur est inférieure à 1%. Autant dire qu'il ne va pas de soi qu'il faut combiner les techniques de *DvtSimple* et *DvtDouble* pour accomplir *DvtTriple*.

Expressions	ExpeDvt1			ExpeDvt2		
	correct	erroné	Total	correct	erroné	Total
1 $2(3 - x)$	23	3	26	15	6	21
2 $(2x + 5)(4x + 3)$	13	11	24	16	5	21
3 $2(3x + x^2 - 3)$	20	5	25	12	9	21
4 $5(x - 1)(x + 3)$	3	23	26	4	16	20
5 $3 \times (2 - x)$	23	2	25	16	3	19
6 $(5x + 2) \times (3x + 4)$.	.	.	16	5	21
7 $(3x + 2) \times (x + 5)$	14	11	25	16	5	21
8 $4 \times (x + 1) \times (x - 2)$	4	19	23	4	16	20
9 $3 \times (2x - x^2 + 2)$	20	4	24	14	6	20

TABLE 5.3 – Résultats des expérimentations conduites dans deux classes de 3^e, en France, afin de valider, avant tout, l'hypothèse 3.

TA		Correct	Erroné	Total	Proportion d'erreurs	p-valeur
DvtSimple	Tâches 1 et 5	77	14	91	15%	3%
DvtSimple>2	Tâches 3 et 9	66	24	90	27%	

TABLE 5.4 – Test de comparaison de proportions d'erreurs pour valider la distinction du type de tâche-en-acte « Développer $a(b + c + d)$ » du type de tâche-en-acte « Développer $a(b + c)$ ».

		Correct	Erroné	Total	Proportion d'erreurs	p-valeur
Invisibilité du signe \times	Tâches 1, 2, 3 et 4	106	78	184	42%	10%
Visibilité du signe \times	Tâches 5, 6, 7, 8 et 9	127	71	198	36%	

TABLE 5.5 – Test de comparaison de proportions d'erreurs qui invalide la distinction des types de tâche-en-acte « Développer $a(b+c)$ » du type de tâche-en-acte « Développer $a \times (b+c)$ » ou du type de tâche-en-acte « Développer $(a+b)(c+d)$ » du type de tâche-en-acte « Développer $(a+b) \times (c+d)$ ».

TA		Correct	Erroné	Total	Proportion d'erreurs	p-valeur
DvtSimple & DvtDouble	Tâches 1, 2, 5, 6 et 7	152	51	203	25%	< 1%
DvtTriple	Tâches 4 et 8	15	74	89	83%	

TABLE 5.6 – Test de comparaison de proportions d'erreurs pour invalider l'hypothèse qu'avec la seule maîtrise des techniques de résolution de *DvtSimple* et *DvtDouble*, les élèves sont capables d'accomplir *DvtTriple*.

En conclusion, ces différences de proportions d'erreurs justifient d'affiner les types de tâches institutionnels en types de tâche-en-acte : l'hypothèse de recherche 3 est ainsi validée. Les élèves n'agissent pas de la même manière face à certaines tâches considérées, pourtant, par l'institution comme relevant d'un même type de tâches puisque résolubles avec la même technique officielle.

Les techniques qui consistent à itérer ou combiner des techniques maîtrisées et institutionnellement présentées ne vont pas de soi, contrairement à l'hypothèse que l'institution semble poser (H_T2), ce qui valide l'hypothèse de recherche 2.

Autres résultats.

D'autres résultats ont pu être exploités même si le but de l'expérimentation ne portait pas sur ces notions. Premièrement, les tâches 1 et 5 ont été mieux résolues que les tâches 2, 6 et 7, de manière significative. Les élèves de troisième de l'expérimentation maîtrisent mieux le développement de $a(b+c)$ que le développement de $(a+b)(c+d)$: les proportions d'erreurs respectives sont de 15% et 33% avec une p-valeur inférieure à 1%. Deuxièmement, il est intéressant de regarder les règles erronées utilisées par ces élèves. Face aux tâches 4 et 8, trois techniques-en-acte inter-élèves ressortent parmi les 74 erreurs collectées sur ces deux tâches :

Distribuer le premier terme sur chaque terme de chaque somme :

$$a(b+c)(d+e) \rightarrow ab+ac+ad+ae \quad (23 \text{ fois sur } 74);$$

Distribuer le premier terme sur les termes de la première somme uniquement et supprimer « brutalement » les parenthèses (pouvant être suivi de différents comportements) :

$$a(b+c)(d+e) \rightarrow ab+ac \times (d+e) \quad (15 \text{ fois sur } 74);$$

Distribuer le premier terme sur chaque terme de chaque somme tout en laissant la multiplication entre les deux derniers facteurs :

$$a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac \times ad + ae \quad (13 \text{ fois sur } 74).$$

5.3.4 Types de tâche-en-acte relevant de la factorisation

Devant le nombre important de valeurs de variables liées à la factorisation et en conséquence le nombre considérable de TA élémentaires, il a fallu construire des TA grossiers provoquant l'utilisation potentielle de techniques-en-acte. Des expérimentations ont été conduites sur l'année 2006-2007 auprès de trois groupes différents : une classe brésilienne d'équivalence 3^e de 28 élèves, un groupe de 10 élèves en difficulté de 2nde française et une élève de 3^e française effectuant son stage de 3^e au sein du laboratoire Leibniz. Comme précédemment, après une prise en main d'APLUSIX, les élèves ont travaillé seul, en mode test et sans l'aide de l'enseignant ou du logiciel.

Les tâches.

Les tâches ont été construites en essayant de faire varier au mieux les combinaisons des valeurs des cinq variables de contexte (cf. section 5.3.1) : la nature du facteur commun, le degré du facteur commun, la visibilité du facteur commun, la nature du cofacteur du facteur commun dans chaque terme ainsi que le nombre de termes dans la somme à factoriser. Pour l'analyse statistique que nous souhaitons faire des données, nous avons fait en sorte de qualifier chaque expression algébrique par des variables binaires. Plutôt que de décrire un facteur commun comme un entier dont la visibilité prend la valeur « évidente », le facteur prend la valeur d'« entier évident ». Les variables binaires ainsi construites sont au nombre de 27.

1. Le facteur commun peut prendre les valeurs suivantes :

FEnt : le facteur commun est un entier, et dans ce cas, il peut être :

FEnt_Evident : le facteur commun est un entier « naturellement » visible comme le facteur commun 2 dans $2y^2 + 2$;

FEnt_1Fact : le facteur commun est un entier qui est un diviseur strict d'un des deux termes comme 2 dans $-2x - 14$.

FMono : le facteur commun est un monôme, et dans ce cas, il peut être :

FMono_Evident : le facteur commun est un monôme « naturellement » visible comme le facteur commun y dans $3y + 5y^2$ ou $4x$ dans $-4x + x(4x)$;

FMono_1Fact : le facteur commun est un monôme diviseur strict d'un des deux termes comme le facteur commun $2x$ dans $2x + 6x^2$.

FSum2Term : le facteur commun est une somme de deux termes, et dans ce cas, il peut être :

FSum2Term_Evident : le facteur commun est une somme de deux termes « naturellement » visible comme le facteur commun $(x - 4)$ dans $(x - 4) + (x - 4)x$;

FSum2Term_Opp : le facteur commun est une somme de deux termes « opposée » comme le facteur commun dans $x(-x-1)+5x(x+7)(x+1)$;

FSum2Term_Commut : le facteur commun est une somme de deux termes « commutée » comme le facteur commun dans $x(x + 2) + 3(2 + x)$;

FSum2Term_ComOpp : le facteur commun est une somme de deux termes « commutée et opposée » comme le facteur commun dans $(x - 3)(1 - 4x) - 5(3 - x)$;

- FSum2Term_NoAdj** : le facteur commun est une somme de deux termes « non adjacents » comme le facteur commun dans $5 + t(2t + 10) + t$;
- FSum2Term_1Fact** : le facteur commun est une somme de deux termes visible dans un des termes de la somme à factoriser et diviseur strict de l'autre terme comme le facteur commun $(x + 8)$ dans $3(x + 8)^2 + x^2 + 8x$;
- FSum2Term_2Fact** : le facteur commun est une somme de deux termes diviseur strict de chaque terme de la somme à factoriser comme le facteur commun $(-2 - x)$ dans $-6 - 3x + (2 - x)(-4 - 2x)$.
- FSum3Term** : le facteur commun est une somme de trois termes comme le facteur commun dans $-(x + 3 + y) + x(y + x + 3)$.
2. diverses caractéristiques pouvant se combiner avec un facteur commun numérique, monomial, une somme de deux ou trois termes :
- FProduit** : le facteur commun est un produit comme le facteur commun $x(x + 1)$ dans $x(-x - 1) + 5x(x + 7)(x + 1)$;
- 3Term** : la somme à factoriser est une somme de trois termes comme dans $(x + 1)(x + 2) - (x + 1) - (5x + 5)x$;
- SMmere** : un des termes de la somme à factoriser est précédée d'un signe moins, comme dans $x(7x + 1) - x$ ou dans $-x(x + 1) + 5x(2x + 2)(x + 7)$;
- SMFact** : le signe moins est « factorisable » comme dans $-2x - 14$.
3. Chaque cofacteur du facteur commun peut prendre les valeurs suivantes :
- CofUnitVA** : un des cofacteurs vaut 1 en valeur absolue et est invisible comme dans $2y^2 + 2$ ou dans $-7x + x(7x)$;
- CofUni** : un des cofacteurs vaut 1 et est invisible comme dans le second terme de $2y^2 + 2$;
- CofOppUni** : un des cofacteurs vaut -1 et est invisible comme dans le premier terme de $-7x + x(7x)$;
- CofNum** : un des cofacteurs est numérique (visible), comme dans le second terme de $-2x - 14$, où le cofacteur prend la valeur 7 ;
- CofMono** : un des cofacteurs est un monôme (de degré supérieur à 0) comme dans le second terme de $(x - 4) + (x - 4)x$, où le cofacteur est x ;
- CofId** : un des cofacteurs est égal au facteur commun (et le facteur commun est élevé au carré) comme dans le premier terme de $(x - 2)^2 + 3x(-2 + x)$, où le cofacteur est $x - 2$;
- CofPoly** : un des cofacteurs est un polynôme (non réduit à un monôme) comme dans le premier terme de $y(5y - 1) + y$, où le cofacteur est $5y - 1$;
- Cof2Poly** : un des cofacteurs est un produit comme dans le second terme de $x(-x - 1) + 5x(x + 7)(x + 1)$, où le cofacteur est $5x(x + 7)$;

Les tâches proposées lors des expérimentations sont les factorisations de :

1. $3y + 5y^2$
2. $-4x + x(4x)$
3. $(z - 3) + z(z - 3)$
4. $2y^2 + 2$
5. $-2x - 14$

6. $-7x - 3x^2$
7. $-7x + x(7x)$
8. $(x - 4) + (x - 4)x$
9. $-x^2 + x$
10. $2x + 6x^2$
11. $3x^2 + yx$
12. $(x + 2)(9x + 3) + x + 2$
13. $(3x + 5)(x + 1) - (x + 1)(2x + 4)$
14. $(x - 2)^2 + 3x(-2 + x)$
15. $(8y - 5)(6y + 3) + (8y - 5)$
16. $(x - 3)(1 - 4x) - 5(3 - x)$
17. $x(x + 2) + (x^2 + 2x)(x + 6)$
18. $(x + 1)(x + 2) - (x + 1) - (5x + 5)x$
19. $-5x - y \times 5$
20. $5(3x + 12) - (2x + 8)5x^2$
21. $-x(x + 1) + 5x(2x + 2)(x + 7)$
22. $x(x + 2) + 3(2 + x)$
23. $y(5y - 1) + y$
24. $x(-x - 1) + 5x(x + 7)(x + 1)$
25. $3(x + 8)^2 + x^2 + 8x$
26. $(-8 - x)(x + 7) - x - 8$
27. $x(x - 7) + (7 - x)$
28. $-6 - 3x + (2 - x)(-4 - 2x)$
29. $-(5x - 5)(x + 6) + (7 - 7x)(-6 - x)x$
30. $-(x + 3 + y) + x(y + x + 3)$
31. $-2x - 7 + (2x + 7)(x + 5)$
32. $x(7x + 1) - x$
33. $(z + 2)z + 3(z + 5)z(-z - 2)$
34. $6(t + 3)^2 + t^2 + 3t$
35. $9t^2 - 9$
36. $-16 - 4y$
37. $t(-t + 3) - t + 3$
38. $-x + 2 + x(-x + 2)$
39. $5 + t(2t + 10) + t$
40. $2x + (x + 2) \times 3 + x^2$
41. $7(3x + 2) - (3x + 2)(x - 7)$
42. $(t - 1)^2 + (-1 + t)$

Tâches Expressions	Facteur Commun								Cofacteurs					
	FNumericEvident	FMonoEvident	FSum2	Fsum2Evident	Fsum2Opp	Fsum2Communt	Fsum2Term_ComOpp	Fsum2Term_1Fact	Fsum2Term_2Fact	CoFUnitVA	CoFNum	CoFMono	CoFId	CoFPoly
$2y^2 + 2$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
$-7x - 3x^2$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
$3x^2 + yx$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$3(x + 8)^2 + x^2 + 8x$	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
$(x - 3)(1 - 4x) - 5(3 - x)$	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
$-6 - 3x + (2 - x)(-4 - 2x)$	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
$(x - 4) + (x - 4)x$	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
$-(x + 3 + y) + x(y + x + 3)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0

TABLE 5.7 – Extrait de la description des tâches en fonction de certaines valeurs de variables de contexte. par exemple, l'expression $2y^2 + 2$ a un facteur commun numérique évident, l'un de ses cofacteurs est unitaire en valeur absolue et le second est un monôme.

Les 42 tâches ont été traitées par les élèves de troisième en environ 3 heures. En revanche, seules 12 des tâches ont été proposées aux élèves de seconde qui ne disposaient que d'une heure. Ce sont les tâches de 9 à 18 comprise et les tâches 22 et 23.

Chaque tâche est qualifiée par l'ensemble de valeurs des variables binaires données ci-dessus. Un exemple de qualification de chaque expression est donné dans le tableau 5.7 : dans une cellule (i, j) , un 1 signifie que l'expression i est caractérisée par la valeur j ; un 0 signifie que l'expression i n'est pas caractérisée par la valeur j .

L'Analyse Statistique Implicative.

Le but de ces expérimentations en factorisation est de construire des sous-ensembles de variables qui semblent avoir un impact sur l'utilisation de certaines règles, sous-ensembles qui constitueront les types de tâche-en-acte. Par exemple, si en présence conjointe des variables $FSum2Opp$ et $CoFMono$, les élèves ont tendance à utiliser la règle R_0 , alors nous considérerons et construirons le TA « Factoriser une somme où le facteur commun est une somme de 2 termes dite « opposée » et d'au moins un cofacteur monomial ». Nous cherchons donc à construire des règles d'inférence partielle, des implications « presque vraies » $a \Rightarrow b$, où a entraîne souvent b et où la prémisse¹² a peut être la conjonction de plusieurs propositions. En effet, dans les situations « réelles », les implications sont rarement vraies au sens mathématique du terme¹³. Malgré les quelques exceptions qui entachent l'implication, il serait souhaitable d'avoir une « quasi-implication », une règle d'inférence partielle.

12. La prémisse d'une implication est la proposition dont est tirée une conclusion.

13. Rappelons qu'une implication $A \Rightarrow B$ est vraie si et seulement si quand A est vrai, alors B est vrai. Si A est faux, la véracité ou non de B ne contredit en rien l'implication.

Pour modéliser l'extraction de telles règles de variables décrivant une population d'objets (ici, les expressions algébriques), il existe différentes méthodes. L'Analyse Statistique Implicative (ASI) [Gras and Kuntz, 2008] semblait répondre à notre besoin : extraire de l'ensemble de données des règles asymétriques d'une ou plusieurs prémisses. Cette analyse prend ses fondements dans la méthode de mesure de la similarité de Lerman [Lerman, 1970] et a été développée par Gras [Gras, 1979]. Ce dernier définit une mesure de la quasi-implication en fonction de l'in vraisemblance de l'apparition du nombre de contre-exemples. Cette mesure est d'autant plus grande qu'il est étonnant de constater des cas qui infirment l'implication en regard du nombre surprenant des instances de l'implication. Nous ne redonnerons pas, ici, la théorie mathématique sous-jacente à cette analyse et qui est présentée dans les travaux pré-cités de Gras. Cependant, nous allons en donner les grandes lignes afin de comprendre l'idée de l'indice d'implication.

Soient S , un ensemble de sujets s et V , un ensemble de variables binaires¹⁴ a, b, \dots . Si le sujet s vérifie a , on dit que $a(s) = 1$, sinon, $a(s) = 0$. Soit A (resp. B), l'ensemble des sujets vérifiant a (resp. b). On note \bar{A} , le complémentaire de A . Si $a \Rightarrow b$ est logiquement vraie, A est inclus dans B : tous les sujets de A vérifient b .

Soient maintenant deux parties quelconques X et Y de S , de même cardinal respectif que A et B , pris aléatoirement et indépendamment. Gras [Gras and Kuntz, 2008] définit l'admissibilité d'une implication de la façon suivante :

La quasi-implication $a \Rightarrow b$ est dite *admissible au niveau de confiance* $1 - \alpha$ si et seulement si la probabilité d'avoir la variable aléatoire $Card(X \cap \bar{Y})$ inférieure ou égale à $Card(A \cap \bar{B})$ est inférieure ou égale à α .

L'idée est donc que s'il est peu probable de trouver aléatoirement deux parties de S , X et Y , telles que le nombre de contre-exemples à $x \Rightarrow y$ soit inférieur à celui des contre-exemples de $a \Rightarrow b$, alors l'implication est « acceptable ». Un cas extrême est celui où A est inclus dans B et B a un cardinal qui tend vers celui de S , l'implication $a \Rightarrow b$ est donc vérifiée et pourtant, son niveau de confiance tend vers 0 [Gras, 1996]. En effet, intuitivement, on peut dire qu'il est « trop naturel » que a implique b puisque B est quasiment égal à S et il est donc « naturel » que B contienne A . L'in vraisemblance étant faible, le niveau de confiance de l'implication l'est tout autant.

L'analyse statistique implicative est implantée dans le logiciel CHIC¹⁵ [Couturier, 2000, Couturier, 2008]. Le logiciel reçoit, en entrée, un fichier .csv constitué de colonnes-variables (ici, les variables de contexte et les techniques), de lignes-individus (ici, les transformations algébriques) et des valeurs 0 et 1 dans les cellules.

Mise en place du fichier à traiter.

Nous avons utilisé l'ASI pour analyser les données issues des expérimentations sur la factorisation. Nous cherchons des quasi-implications entre un sous-ensemble de variables de contexte et une action. Ceci s'interprétant bien comme un type de tâche-en-acte, réunion de ces variables, qui « génère » une certaine technique-en-acte. Les techniques-en-acte que nous avons introduites dans les données sont les deux ayant montré les plus grandes fréquences toutes expérimentations confondues, cf. Chapitre 3, dans le domaine de la factorisation : *ER_Rien* et *ER_NoFact* expliquent à, elles deux, 57% des erreurs de factorisation et même 70% si l'on fait abstraction

14. N'est présenté, ici, que le cas de variables binaires même si l'ASI s'étend à des variables modales ou fréquentielles.

15. Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive.

des erreurs de signe moins. À ces deux là, nous avons ajouté la règle $ab + ac \rightarrow a(b + 1)$ car la présence du terme 1 dans la somme nous paraissait possiblement en lien avec l'apparition de *ER_Rien*. Au final, ce sont la règle correcte et les trois règles erronées suivantes qui ont été retenues :

- *RES_Fact* : $ab + ac \rightarrow a(b + c)$;
- *ER_Rien* : $ab + a \rightarrow a(b)$;
- *ER_NoFact* : $ab + ac \rightarrow a(b + ac)$;
- *ER_CoFact1* : $ab + ac \rightarrow a(b + 1)$.

Dans les trois expérimentations ci-citées -2^{nde} française, 3^e brésilienne et 3^e française- ANAÏS diagnostique une apparition respective de 9, 18,2, 10 pour *ER_Rien*, 3, 12,6, 2 pour *ER_NoFact* et 0, 3, 0 pour *ER_CoFact1*. À partir du diagnostic, sont extraits les élèves qui ont utilisé au moins une fois (avec un coefficient d'utilisation CU ¹⁶ supérieur à 1) une de ces trois règles erronées. Ils sont au nombre de 12 : 5 sur les 10 élèves de 2^{nde}, seulement 6 sur les 28 élèves de la classe de 3^e brésilienne¹⁷ ainsi que l'élève de 3^e française.

À ces quatre règles, ont été ajoutées une règle correcte et une règle erronée qui permettent une analyse plus fine des productions et une meilleure gestion de l'analyse statistique :

- *RES_Partiel* : factorisation correcte mais partielle d'une expression. Par exemple, la transformation :

$$x(x + 2) + (x^2 + 2x)(x + 6) \rightarrow (x + 2)(x + x(x + 6)) \quad (T_p)$$

au lieu de :

$$x(x + 2) + (x^2 + 2x)(x + 6) \rightarrow x(x + 2)(1 + x + 6).$$

Cette règle est importante à ajouter pour l'analyse automatique : si l'on considère que l'expression ci-dessus a pour facteur commun $x(x + 2)$, alors elle présente l'opportunité d'utiliser *ER_Rien*. Pourtant, si un élève factorise partiellement comme dans T_p , alors il n'y a pas eu, pour lui, opportunité d'appliquer *ER_Rien* : en factorisant partiellement, il reste un cofacteur visible.

- *ER_Autre* : regroupement de toutes les autres erreurs qui ne sont pas diagnosticables par une des quatre règles erronées conservées.

Le remplissage du fichier .csv à analyser automatiquement s'est alors fait à la main, afin d'éviter, comme pour les expérimentations sur le développement, des échecs ou mauvais diagnostics éventuels de la part d'Anaïs. Pour chacun des 12 élèves, à chacune des tâches abordées par l'élève est associée une des 6 règles ci-dessus. Le tableau 5.8 récapitule le nombre exact de tâches proposées et abordées par chacun des élèves, tous n'ayant pas, pour différentes raisons, abordé les 42 expressions (ou 12 exercices dans le cas des élèves de 2^{nde}), ainsi que le nombre de fois où l'élève a utilisé *ER_Rien*, *ER_NoFact*, *ER_CoFact1*.

L'Analyse statistique implicite des réponses.

Le fichier .csv est ainsi constitué de 35 colonnes, dont 29 pour les 29 variables de contexte et 6 pour les techniques, et 244 lignes pour l'ensemble des expressions abordées par les 12 élèves retenus.

Soient $\{V_j\}_{1 \leq j \leq 29}$, l'ensemble des variables de contexte et $\{T_k\}_{30 \leq k \leq 35}$, l'ensemble des techniques. Dans une cellule (i, j) , avec $i \leq 244$, le 1 signifie que l'expression i est caractérisée par

16. Se référer à la section 3.3.4 pour une définition du coefficient d'utilisation.

17. Ce petit nombre s'explique en analysant les productions : près de XXX élèves ont développé les expressions malgré la consigne explicite de les factoriser.

Nom de l'élève	Tâches proposées	Tâches abordées	Utilisation de <i>ER_Rien</i>	Utilisation de <i>ER_NoFact</i>	Utilisation de <i>ER_CoFact1</i>
2 ^{nde} F1	1 à 42	10-15;18;22;23	12;15;18	18	
2 ^{nde} F2	1 à 42	9;10;12-17	12;15;17		
2 ^{nde} F3	1 à 42	9-11;15-18	17;18	15;18	
2 ^{nde} F4	1 à 42	9-15;18	12;15;18	18	
2 ^{nde} F5	1 à 42	9-11;15;17;18	15;17;18	18	
3 ^e B1	1 à 42	1-4;6-21;24; 26; 30; 31;33-38;41	15; 26; 31		
3 ^e B2	1 à 42	1-3;8;13;15-17;20 21;23;24;26;27; 29-33;37;38;40;41	15; 23; 26; 27; 31		
3 ^e B3	1 à 42	1;2;6;8; 10-15;18;20;22-27 29;30;32;38;41	15; 18; 23; 30	1;18;25	
3 ^e B4	1 à 42	1-15;18-21 24-27;29-31 33-34;38;39	15; 30; 31		34
3 ^e B5	1 à 42	1-16; 18-38; 41; 42		1;2;36	14;34
3 ^e B6	1 à 42	1-3; 6-18 20-26;29-32; 34;37-39;41	15; 31	11	
3 ^e F	1 à 42	4-16;18;20-23; 26;27;29;30; 34-37;41;42	8; 12; 15; 23;26;18; 27;30;37	14;18;42	

TABLE 5.8 – Chaque ligne est dédiée à un des élèves des trois expérimentations : 2^{nde}F_n pour un élève de seconde française, 3^eB_n pour un élève de la troisième brésilienne et 3^eF pour l'élève de troisième française. Dans la première colonne, sont re-précisées les tâches qui leur ont été soumises; dans la deuxième colonne, les numéros des tâches qu'ils n'ont pas abordées et dans les trois dernières colonnes, les numéros des tâches où il y a eu utilisation de chaque règle, diagnostiquée à la main.

la variable V_j tandis que dans la cellule (i, k) , le 1 signifie que l'expression i a été transformée par la technique T_k .

Par l'ASI, nous pouvons obtenir quatre types d'implications à une prémisse :

- $V_j \rightarrow T_k$. Cette implication signifie que quand l'expression est caractérisée par la variable de contexte V_j , la technique T_k est souvent utilisée. C'est l'implication qui nous intéresse le plus.
- $T_k \rightarrow V_j$. Cette implication signifie que quand la technique T_k est utilisée, V_j est souvent une des caractéristiques. La contraposée est plus facile à comprendre : quand la variable V_j n'est pas présente, alors T_k n'est pas utilisée. C'est aussi une des implications qui nous intéresse.
- $V_j \rightarrow V_{j'}$, où $1 \leq j' \leq 29$. Cette implication signifie que quand la variable V_j permet de décrire l'expression algébrique, la variable $V_{j'}$ la décrit aussi. Par exemple, la variable « le facteur commun est un entier » (*FEnt*) entraîne la variable « le facteur commun est un entier dont la visibilité est évidente » (*FEnt_Evident*).
- $T_k \rightarrow T_{k'}$, où $30 \leq k' \leq 35$. Cette implication signifie que lorsqu'il y a utilisation de T_k , les élèves utilisent alors aussi souvent $T_{k'}$. Il faut, pour cela, qu'une même transformation soit diagnostiquée simultanément par deux techniques différentes : sur une même ligne, il faut deux 1 dans les colonnes 30 à 35. Ce phénomène est possible puisqu'une technique n'explique que la transformation sur un des deux ou trois termes de la somme à factoriser. Il se peut donc que l'élève utilise autant de techniques erronées (répertoriées) que de termes. Mais ce phénomène étant assez rare dans nos données, nous n'attendons pas de telle implication.

Une option du logiciel CHIC (le mode Cône) permet de ne sélectionner que les implications que l'on souhaite, à savoir les deux premières. Les résultats sont représentables par des graphes implicatifs, figures 5.4, 5.5 et 5.6. Tous ont été calculés selon la théorie classique présentée brièvement dans la section précédente et par une modélisation par la loi de Poisson, de paramètre $\frac{n_a n_b}{n}$, de la loi que suit la variable aléatoire $Card(X \cap \bar{Y})$ ¹⁸.

Pour les règles *ER_NoFact*, *ER_CoFact1* et *ER_Autre*, seul le graphe à une prémisse est présenté, figure 5.4, deux prémisses n'apportant pas d'informations supplémentaires. Le seuil d'implication retenu est à 85, même si aucune information ne ressort entre le seuil 90 et 85.

Pour la règle *ER_Rien*, le mode retenu est celui de trois prémisses et le seuil de 90. Le graphe implicatif est présenté figure 5.5.

Pour les règles *RES_Fact* et *RES_Partiel*, le mode retenu est celui de deux prémisses, une prémisse n'étant pas suffisamment riche. Le seuil retenu est de 90 car en dessous, l'information n'est plus exploitable et est non pertinente. Le graphe implicatif est présenté figure 5.6.

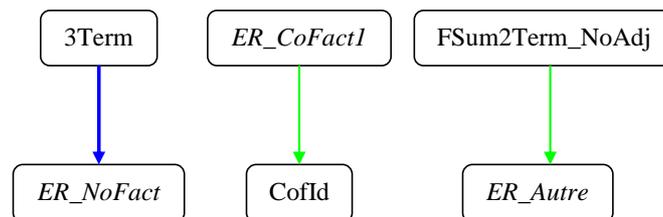


FIGURE 5.4 – A une prémisse, seuil 85

18. Se référer à la section 5.3.4 pour les notations. L'entier n_a (respectivement n_b, n) est le cardinal de la partie A (respectivement B, S)

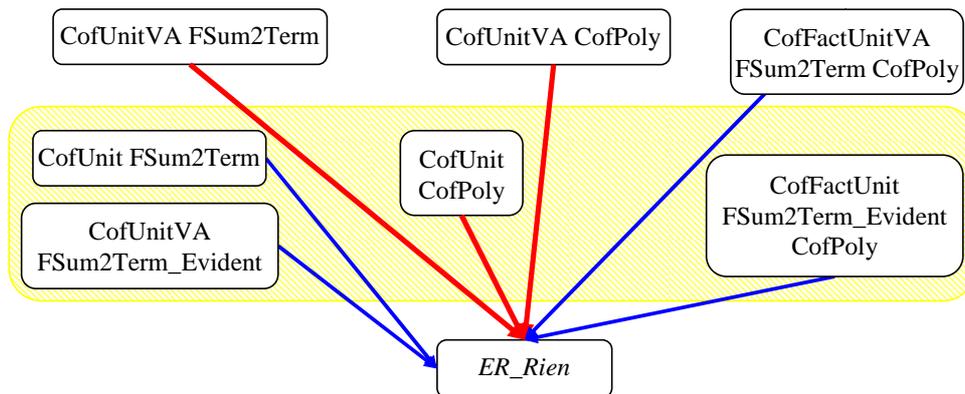


FIGURE 5.5 – A deux prémisses, seuil 90

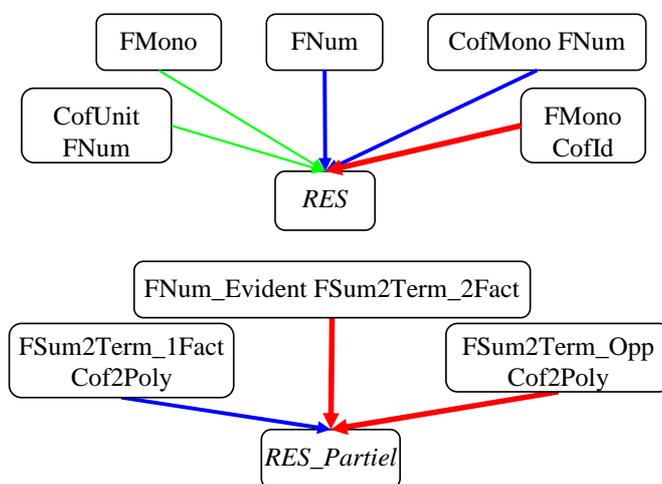


FIGURE 5.6 – A une prémisses, seuil 90

Il ressort de l'analyse statistique :

- En ce qui concerne la technique *ER_Rien*, on trouve trois implications principales (celles du sommet du graphe 5.5).
 - * Si le cofacteur est unitaire en valeur absolue et que le facteur commun est une somme de deux termes (*FSum2Term*), alors cette règle a tendance à être très utilisée. Il faut donc un type de tâche-en-acte « factoriser $ab + a$ » ou « factoriser $ab - a$ », où a est une somme. Cette implication est précisée par deux autres (dans le cadre jaune du graphe, à gauche) : cette implication est particulièrement vraie si le cofacteur est unitaire ($ab + a$) ou que la somme de deux termes est évidente visuellement.
 - * Si le cofacteur est unitaire en valeur absolue et le second cofacteur est lui même une somme (*CofPoly*), alors cette règle a tendance à être très utilisée. Il faut donc un type de tâche-en-acte « factoriser $ab + a$ » ou « factoriser $ab - a$ », où b est une somme. Cette implication est particulièrement vraie si le cofacteur est unitaire (cadre jaune du graphe, au centre).
 - * Enfin, si le cofacteur est unitaire en valeur absolue et que le facteur commun est une somme de deux termes (en particulier évidente) et que le second cofacteur est lui même une somme, alors cette règle a tendance à être utilisée. Il faut donc un type de tâche-

- en-acte « factoriser $ab + a$ » ou « factoriser $ab - a$ », où a et b sont une somme.
- En ce qui concerne la technique *ER_NoFact*, on trouve une implication.
 - * Si il y a trois termes dans la somme à factoriser, cette règle a tendance à être utilisée. Par exemple, l'expression $(x + 1)(x + 2) - (x + 1) - (5x + 5)x$ qui est transformée en $(x + 1)((x + 2) - 1 - (5x+5)x)$. Il faut donc un type de tâche-en-acte « factoriser $ab + ac + ad$ ».
 - En ce qui concerne la technique *ER_CoFact1*, on ne trouve pas de condition suffisante mais une condition nécessaire.
 - * Si la règle est utilisée, alors c'est que l'un des cofacteurs est dit « identique », comme dans $(x - 2)^2 + 3x(-2 + x)$ ou $-x^2 + x$. Nous verrons plus loin pour la règle *RES_Fact*, qu'en fait quand la factorisation est « simple », (en particulier lorsque le facteur commun est un monôme, comme dans la deuxième expression), les élèves ont eu tendance à factoriser correctement. Aucune condition suffisante plus précise n'est ressortie sur cette règle, y compris à trois prémisses. Il faut créer une variable supplémentaire du type « facteur commun non monomial », complémentaire de *FMono*, pour que puisse ressortir l'information que dans ce contexte et en présence de *CoId*, alors cette règle est utilisée. Il faut donc au moins un type de tâche-en-acte « factoriser $a^2 + ab$ ».
 - En ce qui concerne le regroupement d'autres erreurs *ER_Autre*, il y a une implication.
 - * Elle a eu tendance à être utilisée lorsque le facteur commun était une somme de deux termes non adjacents (*FSum2Term_NoAdj*), comme dans $5 + t(2t + 10) + t$. Bien que ce contexte suscite une réponse erronée, nous n'avons pas pu déceler l'utilisation d'une même technique chez plusieurs élèves : aucune stabilité inter, ce qui explique qu'aucune règle particulière n'ait été implantée. Les élèves répondent à ce type de tâche-en-acte mais de manière inconsistante.
 - En ce qui concerne la règle correcte de résolution *RES_Fact*, il y a trois implications à deux prémisses.
 - * Lorsque le cofacteur est unitaire mais que le facteur est numérique, la résolution est en général correcte. Si l'on compare ce résultat à l'utilisation de la règle erronée *ER_Rien*, il peut y avoir deux réflexions. Soit il semble que lorsque la factorisation est simple, il n'y a pas d'erreur, soit les élèves n'acceptent pas d'obtenir un produit final dans lequel il n'y a pas de somme.
 - * Si le facteur commun est numérique et l'un des cofacteurs est monomial, la résolution est là aussi correcte. Ce cas peut toujours être considéré comme un cas simple.
 - * Si le facteur commun est monomial et le cofacteur « identique », comme nous l'avons fait remarquer plus haut, la résolution est correcte.
 - En ce qui concerne la règle correcte de résolution partielle *RES_Partial*, il y a trois implications à deux prémisses. Aucune information « surprenante » ne ressort : les élèves ont tendance à résoudre partiellement soit lorsque le facteur commun est un produit d'un facteur numérique évident et d'une somme beaucoup moins évidente (*FSum2Term_2Fact*) soit lorsque le cofacteur est un produit de deux polynômes, complexifiant certainement l'expression aux yeux de l'élève.

Liste des types de tâche-en-acte et techniques-en-acte associées

Pour le type de tâches de factorisation, outre les types de tâche-en-acte élémentaires, nous avons construit, grâce à l'analyse précédente, quatre types de tâche-en-acte, dont les techniques-

en-acte associées a priori¹⁹ sont données dans le tableau 5.9. Cela donne onze praxis-en-acte a priori.

- Fact+CoFactRien ;
- Fact+CoFactRien+Sum, précision de Fact+CoFactRien.
- Fact+CofactId.
- Fact+3Term.

Nom du TA	TA	Techniques-en-acte
Fact+CoFactRien	$a + ab$	$a(1 + b)$
Fact+CoFactRien+Sum	$a + ab$	$a(b)$
	avec a ou b une somme	$a(a + b)$
Fact+CofactId	$a^2 + ab$	$a(a + b)$
	ou $a \times a + ab$	$a(b)$ $a(1 + b)$
Fact+3Term	$ab + ac + ad$	$a(b + c + d)$ $a(b + c + ad)$

TABLE 5.9 – Liste des 11 praxis-en-acte a priori pour le genre de tâche de la factorisation. La technique correcte est toujours citée en premier. Dans la troisième colonne, pour une question de place, seule l’expression produite est précisée.

5.3.5 Types de tâche-en-acte relevant de la réduction

Pour les deux types de tâches, *RedAdd* et *RedMult*, dépendant du genre de tâche de la réduction, le nombre de variables de contexte est important. Il est donc nécessaire, dans ces deux domaines, de faire un regroupement sur des TA élémentaires. Deux critères ont guidé la construction et sélection des types de tâche-en-acte pour la réduction additive sur l’expression $ax^n + bx^p$:

- Il y a, d’une part, les types de tâche-en-acte qui sont des opportunités d’application des règles correctes ou erronées recensées dans le chapitre 3.
C’est le cas de la réduction d’une somme de deux monômes de même degré. Il est intéressant de regrouper toutes les occasions d’appliquer la règle correcte : les sommes de deux monômes de même degré sont à distinguer des sommes de monôme de degrés différents, la première proposant l’opportunité d’appliquer la règle correcte, contrairement à la seconde. En reprenant la liste des règles diagnostiquées dans le chapitre 3, il faut s’assurer que les conditions d’application de chacune d’entre elles correspondent bien à au moins un TA.
- Il y a, d’autre part, les types de tâche-en-acte qui peuvent expliquer l’utilisation de règles erronées recensées dans le chapitre 3. Ce travail repose sur une anticipation de la construction des technologies-en-acte : nous nous sommes penchés sur les raisons, les justifications qui pouvaient provoquer les erreurs les plus fréquentes repérées dans le chapitre 3. Les règles algébriques du tableau 3.3 peuvent être regroupées selon deux caractéristiques du monôme : le coefficient et le degré, comme cela a été rapidement présenté dans le chapitre précédent.

19. Toutes les règles de factorisation correcte ou erronées sont en fait implantées de telle sorte qu’elles peuvent apparaître face à l’ensemble des types de tâche-en-acte. Cependant, les règles du tableau 5.9 sont celles que l’on s’attend à voir diagnostiquer en techniques-en-acte, ie : des règles montrant une certaine fréquence.

En ce qui concerne le coefficient, il y a, d'une part, les erreurs qui portent sur le signe moins ($ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n\Box p}$ avec \Box quelconque et Δ valant *OpPlus*, *PlusOp* ou *OpPlusOp*). Nous nous sommes demandés si la présence d'un signe moins accolé au premier monôme pouvait expliquer certaines erreurs. En particulier, la règle $ax^n + ax^n \rightarrow 0$ nous intriguait : est-elle basée sur la volonté de réduire à tous prix ? L'élève voyant alors deux monômes égaux les supprime ? Ou est-elle basée sur une notion mal acquise du signe moins ? Ceci permet de distinguer deux types de tâche-en-acte : le premier *RedAdd + CoefEgaux*, où les coefficients a et b de $ax^n + bx^p$ sont égaux, et le second où *RedAdd + MSide*, où le monôme ax^n de $ax^n + bx^p$ est suivi d'un signe moins, comme dans $5x^2 - 3(x + 1) + 2x^2$. Chacun de ces deux TA pouvant se décliner selon si les degrés n et p sont égaux ou non. Il y a, d'autre part, les erreurs qui portent sur la valeur du coefficient en valeur absolue, la valeur 1 *invisible* semblant jouer un rôle important (\Box quelconque et Δ valant *Proj_a(a, 1)*). Ceci aboutit à la création du TA *RedAdd + NoCoef*.

En ce qui concerne le degré, comme il est indiqué en section 5.3.1, la recherche de regroupement de certaines valeurs de degré s'est faite sur une analyse des manuels qui ont servi pour l'analyse praxéologique du chapitre 1. Nous y avons étudié la prédominance de certaines valeurs de degré. Le tableau 5.10 récapitule l'ensemble des 11 manuels analysés. Autant les 11 manuels proposent bien des tâches relevant du type $ax^n + bx^n$ avec n inférieur ou égal à 2, autant seuls 3 des manuels proposent des tâches avec n supérieur strictement à 2²⁰. À la lecture de ces manuels, il semble important de distinguer le TA *RedAdd + DegSup2*, où les degrés sont supérieurs strictement à 2 du TA *RedAdd + DegInf2*, où les degrés sont inférieurs ou égaux à 2. À nouveau, ces TA peuvent en plus se distinguer selon si les degrés n et p sont égaux ou non.

Pour la réduction multiplicative sur l'expression $ax^n \times bx^p$, nous ne nous sommes pas attachés au coefficient, seul le degré nous a intéressé : le fait que n et p soient égaux pouvant être à l'origine de la règle $ax^n \times bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^n$ aboutit à la création du TA *RedMult + MemeDegre*. Le fait que, comme pour la réduction additive, les valeurs 1 et 2 soient nettement plus fréquentes dans les manuels que les valeurs supérieures à 3, cf. tableau 5.11, aboutit aux TA *RedMult + DegInitSup2*, où la somme des degrés n et p est inférieure ou égale à 2, et *RedMult + DegInitInf2*, où la somme des degrés est supérieur à 2.

20. Ce manque peut en partie s'expliquer par la raison suivante : même si le manuel propose le chapitre sur les puissances, en amont du chapitre sur le calcul littéral, il peut, cependant, sembler intéressant de rendre les deux chapitres indépendants pour le cas où l'enseignant choisirait de ne pas suivre l'ordre prescrit par le manuel.

Sommes de monômes			
	Présence de degré 1	Présence de degré 2	Présence de degré ≥ 3
[Malaval and Courbon, 2002]	1	1	0
[Fourton et al., 2002]	1	1	0
[Delord and Vinrich, 1998]	1	1	0
[Le Hir et al., 2002]	1	1	1
[Pene and Depresle, 2002]	1	1	0
[Serra et al., 1998]	1	1	1
[Bonnefond et al., 1998]	1	1	0
[Charmaty et al., 2003]	1	1	0
[Goutodier and Lévi, 2002]	1	1	1
[Deneuil et al., 1998]	1	1	0
[Chapiron et al., 1998]	1	1	0
TOTAL	11	11	3

TABLE 5.10 – La lecture de chaque manuel a abouti à l'énumération du nombre de tâches portant sur la variable de contexte « degré » : 1 signifie que le manuel propose des tâches où apparaît la valeur du degré, 0 signifie que le manuel n'en propose pas, ni dans la partie cours ni dans la partie exercice.

Produits de monômes			
	Présence de degré 1	Présence de degré 2	Présence de degré ≥ 3
[Malaval and Courbon, 2002]	1	1	0
[Fourton et al., 2002]	1	1	0
[Delord and Vinrich, 1998]	1	1	0
[Le Hir et al., 2002]	1	1	1
[Pene and Depresle, 2002]	1	1	0
[Serra et al., 1998]	1	1	1
[Bonnefond et al., 1998]	1	1	0
[Charmaty et al., 2003]	1	1	0
[Goutodier and Lévi, 2002]	1	1	1
[Deneuil et al., 1998]	1	1	0
[Chapiron et al., 1998]	1	1	1
TOTAL	11	11	4

TABLE 5.11 – La lecture de chaque manuel a abouti à l'énumération du nombre de tâches portant sur la variable de contexte « degré » : 1 signifie que le manuel propose des tâches où apparaît la valeur du degré, 0 signifie que le manuel n'en propose pas, ni dans la partie cours ni dans la partie exercice. Il est à noter qu'à une exception, ce sont les mêmes manuels qui proposent des tâches de réduction additive avec présence de degré 3 que ceux qui proposent des tâches de réduction multiplicative avec présence de degré 3.

Liste des types de tâche-en-acte et techniques-en-acte associées.

Outre les types de tâche-en-acte élémentaires, nous avons construit 19 types de tâche-en-acte. Les techniques associées sont données dans le tableau 5.12.

- RedMult+MemeDegre
- RedMult+DegInitSup2
- RedMult+DegInitInfEg2
- RedAdd+MemeDegre.
- RedAdd+DegreDiff.
- RedAdd+DegSup2.
- RedAdd+MemeDegreSup2.
- RedAdd+DegInfEg2.
- RedAdd+MemeDegreInfEg2.
- RedAdd+MemeDegre+MSide ;
- RedAdd+MemeDegre+MNoSide ;
- RedAdd+DegreDiff+MSide ;
- RedAdd+DegreDiff+MNoSide.
- RedAdd+MemeDegre+NoCoef ;
- RedAdd+DegreDiff+NoCoef.
- RedAdd+DegreDiff+CoefEgaux ;
- RedAdd+MemeDegre+CoefEgaux.

Nom du TA	TA	Techniques-en-acte
RedMult+MemeDegre	$ax^n \times bx^n$	$(a\Delta b)x^{2n}$ $(a\Delta b)x^n$
RedMult+DegInitSup2	$ax^n \times bx^p; n + p > 2$	$(a\Delta b)x^{n+p}$
RedMult+DegInitInfEg2	$ax^n \times bx^p; n + p \leq 2$ ie : $n = 1; p = 1$	$(a\Delta b)x^{Min(n,p)}$; $(a\Delta b)x^{Max(n,p)}$;
RedAdd+MemeDegre	$ax^n + bx^n;$	$(a\Delta b)x^n$
RedAdd+MemeDegreSup2	$ax^n + bx^n; n > 2$	$(a\Delta b)x^{2n}$
RedAdd+MemeDegreInfEg2	$ax^n + bx^n; n \leq 2$	$(a\Delta b)x^n$
RedAdd+DegreDiff	$ax^n + bx^p; \text{avec } n \neq p$	Aucune règle correcte $(a\Delta b)x^{n+p}$ $(a\Delta b)x^{Min(n,p)}$; $(a\Delta b)x^{Max(n,p)}$;
RedAdd+DegreSup2	$ax^n + bx^p;$ avec $n > 2$ ou $p > 2$	$(a\Delta b)x^n$ si $n = p$, Aucune règle correcte, sinon.
RedAdd+DegreInfEg2	$ax^n + bx^p;$ avec $n \leq 2$ et $p \leq 2$	$(a\Delta b)x^{n+p}$ $(a\Delta b)x^{Min(n,p)}$; $(a\Delta b)x^{Max(n,p)}$.
RedAdd+MemeDegre+MSide	$ax^n - \dots + bx^n$	$(a + b)x^n$
RedAdd+MemeDegre+MNoSide	$ax^n + \dots + bx^n$	$(a - b)x^n$
RedAdd+MemeDegre+CoefEgaux	$ax^n + bx^n; \text{avec } a = b$	
RedAdd+DegreDiff+MSide	$ax^n - \dots + bx^p; \text{avec } n \neq p$	Aucune règle correcte $(a - b)x^{n\Box p}$
RedAdd+DegreDiff+MNoSide	$ax^n + \dots + bx^p; \text{avec } n \neq p$	
RedAdd+DegreDiff+CoefEgaux	$ax^n + bx^p;$ avec $a = b$ et $n \neq p$	
RedAdd+MemeDegre+NoCoef	$ax^n + x^n$ ou $x^n + ax^n$	$(a + 1)x^n$ $ax^{n\Box p}$
RedAdd+DegreDiff+NoCoef	$ax^n + x^p$ ou $x^n + ax^p$ avec $n \neq p$	Aucune règle correcte $ax^{n\Box p}$

TABLE 5.12 – Liste des 38 praxis-en-acte dans le genre de tâche de réduction, dont 12 correctes. Contrairement aux TA de développement ou de factorisation, certains TA de réduction n'ont aucune technique-en-acte correcte associée; c'est le cas de la somme de deux monômes de degré différent. Les premières praxis concernent des erreurs sur le degré, indépendamment de ce qui se passe sur le coefficient. Puis, cela s'inverse : l'attention porte sur le coefficient.

L'opérateur Δ (cf. tableaux 3.3 et 3.4) prend les valeurs *Plus*, *OpPlus*, *PlusOp*, *OpPlusOp*, *Mult* ou *MultOp*; l'opérateur \Box prend les valeurs *Plus*, *Max* ou *Min*. Comme auparavant, seule l'expression produite par la technique est donnée. Les coefficients des monômes résultants sont calculés : par exemple, $(a - b)x^n$ est le monôme dont le coefficient est la somme effectuée de a et de $-b$.

5.3.6 Processus du diagnostic automatique des types de tâches-en-acte

L'hypothèse 3 ayant été validée, les types de tâche-en-acte répertoriés dans les sections précédentes ont été implémentés. Dans la section 4.1.3 du chapitre précédent, nous avons présenté comment les types de tâche (institutionnels) T étaient reconstruits à partir du diagnostic d'Anaïs : chaque règle de la bibliothèque ayant été attachée à un T , à chaque transformation-Anaïs (associée à une seule règle de la bibliothèque) est associé un T . Chaque type de tâches étant décrit par un ensemble de variables de contexte, est alors calculé si chacune des variables caractérise ou non la transformation-Anaïs. Un type de tâche-en-acte élémentaire est alors construit comme le type de tâches institutionnel suivi des valeurs des variables caractérisant l'expression. Puis, plusieurs types de tâche-en-acte élémentaires peuvent être regroupés en types de tâche-en-acte grossiers qui ont été détectés par les différentes expérimentations des sections précédentes.

Pour la transformation-Anaïs

$$5x^2 - x^3 \rightarrow 4x^5,$$

le type de tâches associé a posteriori est la « réduction d'une somme de deux monômes » (cf. section 4.1.3). Les variables de contexte sont alors au nombre de 5 (cf. section 5.3.1). Elles prennent alors certaines valeurs, qui permettent de créer un premier type de tâche-en-acte élémentaire. Celui-ci appartient à différents types de tâche-en-acte grossiers tels que *RedAddMemeDgInfEg2* (réduction de somme de deux monômes de même degré inférieur ou égal à 2) ou *RedAddNoCoeef* (réduction de somme de deux monômes dont l'un des coefficients est invisible). Un autre exemple est donné dans la figure 5.7.

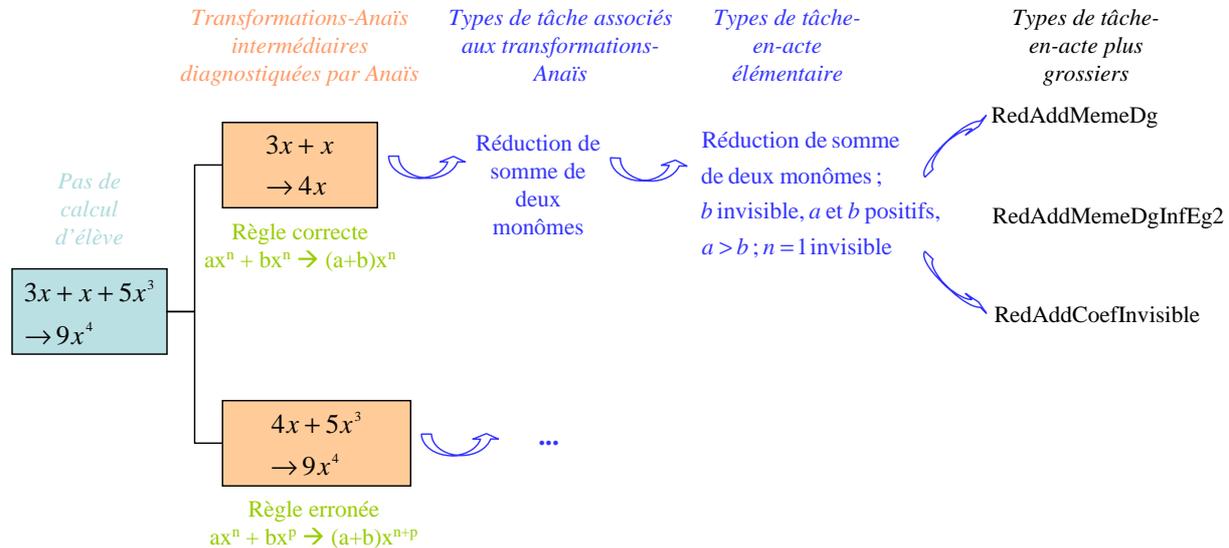


FIGURE 5.7 – Construction des types de tâches-en-acte plus ou moins fin.

Nous avons ainsi répondu à la question de ce qu'est une opportunité d'appliquer une règle : elle est propre à l'élève et nous la caractérisons par un type de tâche-en-acte. Reste la seconde difficulté de déterminer ce que signifie l'utilisation préférentielle d'une règle, que nous pouvons maintenant préciser et reformuler ainsi :

Face à un même type de tâche-en-acte, quelle est la règle que le sujet applique préférentiellement ? Quelle est sa technique-en-acte ?

5.4 Techniques-en-acte

La question de l'utilisation récurrente d'une technique ne se pose pas de la même manière si l'on considère un groupe d'élèves ou si l'on regarde un élève donné. La stabilité inter-élèves a été résolue en construisant la bibliothèque de règles algébriques (chapitre 3) : n'ont été implémentées que les règles ayant montré une certaine stabilité inter. Ainsi les techniques-en-acte inter sont potentiellement les règles algébriques erronées ou correctes de la base de règles. Dès lors, ne se pose pas la question de seuil à partir duquel il est acceptable de considérer comme stable en inter l'utilisation d'une règle. Même si une technique-en-acte ne présente un taux d'utilisation que faible proportionnellement aux autres techniques-en-acte (relevant du même TA), il faut avoir à l'esprit qu'elle a cependant une certaine représentativité dans l'ensemble des erreurs commises (pour ce même TA) mais qui ne sont pas diagnostiquées par justement faiblesse de leur représentativité. En effet, un TA peut provoquer d'autres erreurs que les règles erronées implémentées et ces cas là ne sont pas diagnostiqués. Seuls finalement les cas affichant une certaine stabilité sont diagnostiqués.

*Dans la suite, nous nous intéressons donc aux praxis-en-acte intra.
Autrement dit, nous nous intéressons à un élève donné, où les
transformations-Anaïs sont toutes issues du travail d'un même élève.*

Définition. On appelle *comportement*, l'ensemble des règles utilisées par un élève, face à un même type de tâche-en-acte auquel l'élève a été confronté.

Remarques. La notion de comportement ne prend pas en compte la temporalité, comme dans tout le reste de nos travaux. En particulier, l'ordre des règles ne correspond pas nécessairement à l'ordre de leur utilisation.

Des régularités peuvent être extraits à partir des comportements : une règle utilisée largement majoritairement par rapport aux autres (on la dira « dominante ») peut être considérée comme régulière. L'ensemble (TA, règle dominante) donnera lieu à une praxis-en-acte.

Un élève a autant de comportements différents que de types de tâche auquel il a été confronté.

Un exemple de comportement face à *DvtTriple*. L'élève *X*, face à *DvtTriple*, a utilisé trois règles qui ont été diagnostiquées :

ER_DistTermMultSumMultSum : $a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac + ad + ae$ avec le coefficient d'utilisation 6.5

ER_Dvt_Puis_SupprDbleBracket : $a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac(d + e)$ avec le coefficient d'utilisation 0.5

RES_DvtTriple : $a(b + c)(d + e) \rightarrow abd + acd + abd + ace$ avec le coefficient d'utilisation 2.7

Nous nous sommes interrogés dans un premier temps sur la corrélation entre la diversité des erreurs et la proportion d'erreurs. Dans un second temps, nous chercherons à interroger plus précisément la notion de stabilité.

5.4.1 Généralités

Dans cette section, nous souhaitons analyser statistiquement la nature du comportement. Il a été diagnostiqué 10544 comportements dans l'ensemble des expérimentations présentés en section 3.3.1.

Nature du comportement.

Pour prendre en compte la diversité des erreurs, nous avons extrait l'information suivante des comportements des élèves pour un type de tâche-en-acte donné : une liste constituée de n lettres E et éventuellement la lettre R où n représente le nombre de règles erronées distinctes diagnostiquées pour cet élève et ce type de tâche-en-acte. Si la règle correcte a été diagnostiquée au moins une fois, la liste contient un R ; sinon, la liste ne contient que des E .

Sur l'ensemble des protocoles diagnostiqués, les natures suivantes de comportement ont été trouvées :

E : l'élève applique toujours qu'une même règle erronée face à un même type de tâche-en-acte ;

EE : l'élève applique deux règles erronées distinctes face à un même type de tâche-en-acte ;

$EE+$: l'élève applique au moins trois règles erronées distinctes face à un même type de tâche-en-acte ; dans les données sélectionnées, cela va de trois règles à cinq règles distinctes ;

R : l'élève résout toujours correctement face à un même type de tâche-en-acte,

ER : l'élève applique une même règle erronée et résout parfois correctement face à un même type de tâche-en-acte ;

$RE+$: l'élève applique au moins deux règles erronées distinctes et résout parfois correctement face à un même type de tâche-en-acte ; l'on trouve dans les données jusqu'à cinq règles erronées distinctes, en plus de l'utilisation conjointe de la règle correcte.

Pour l'élève X , la nature du comportement est REE , soit $RE+$.

Dépendance du taux d'erreur.

Nous avons cherché à répondre, dans un premier temps, aux questions suivantes :

Quel est la nature du comportement des élèves qui font un grand nombre d'erreurs ?
 Ont-ils tendance à utiliser une même règle erronée, auquel cas ils sont relativement stables, ou appliquent-ils des règles erronées différentes ?

Afin de répondre à ces questions, nous avons cherché des liaisons éventuelles entre la nature du comportement et le taux d'erreurs. Le taux d'erreurs est le rapport des coefficients d'utilisation de règles erronées sur la somme totale des coefficients, pour chaque comportement. Par exemple, pour l'élève X , le taux d'erreur vaut $\frac{7}{97}$.

Parmi les 10544 comportements, seuls ont été conservés ceux qui comportaient au moins une erreur (ie : la somme des coefficients d'utilisation de règles erronées est supérieure ou égale à 1), soit un total de 3102 comportements. La nature R des comportements est donc exclue. Les taux d'erreurs ont été répartis uniformément en quatre catégories : les comportements où il y a entre 1% et 15% d'erreurs, ceux qui ont entre 15% et 33% d'erreurs, ceux qui ont entre 33% et 75% d'erreurs et enfin, ceux qui ont entre 75% et 100% d'erreurs.

La table de contingence 5.13 croise le nombre de règles erronées distinctes et le taux d'erreurs commises²¹. L'hypothèse testée est l'indépendance de ces deux variables avec un test du khi-2. L'hypothèse est rejetée au seuil de 1% ; autrement dit, le taux d'erreurs commises est fortement lié au nombre de règles erronées distinctes.

De ce tableau peuvent être tirés les résultats suivants :

Plus le pourcentage d'erreurs croît, plus les erreurs se diversifient. En effet, entre 1% et 15% d'erreurs, la colonne contribuant le plus (compartivement aux autres lignes) est la première ; entre 15% et 33% d'erreurs, c'est la troisième entre 33% et 75% d'erreurs, ce sont

21. Cette table a été obtenue par la procédure FREQ du logiciel SAS.

Taux d'erreurs	Nombre de règles erronées distinctes				Total
	1	2	3	4 ou 5	
1% – 15%	812	203	94	39	1148
	47.74	28.27	21.12	16.39	37.01
15% – 33%	480	184	159	56	879
	28.22	25.63	35.73	23.53	28.34
33% – 75%	280	178	105	54	617
	16.46	24.79	23.60	22.69	19.89
75% – 100%	129	153	87	89	458
	7.58	21.31	19.55	37.39	14.76

TABLE 5.13 – Table de contingence croisant le nombre de règles erronées distinctes et le taux d'erreurs commises par comportement.

les deuxièmes et troisièmes colonnes ; et enfin, entre 75% et 100% d'erreurs, c'est la dernière colonne qui contribue le plus.

Plus particulièrement, dans la dernière ligne, la cellule qui contribue le plus est celle de la quatrième colonne. Cela signifie que ceux qui font plus de 75% d'erreurs ont tendance à diversifier le type d'erreurs qu'ils font. Ceux qui font plus de 75% d'erreurs face à un même TA ont tendance à appliquer plus de 4 règles erronées distinctes.

La cellule contribuant le moins est celle de la première colonne, c'est-à-dire que ceux qui font plus de 75% d'erreurs ont rarement été diagnostiqués par qu'une seule règle erronée (comparativement aux autres lignes). Ces derniers sont au nombre de 129, soit 4% de la population totale.

La seconde table de contingence 5.14 croise la variable « Nature du comportement » et le taux d'erreurs commises. Les données analysées sont restées les mêmes, soit 3102 comportements.

Pourcentage d'erreurs	Nature du comportement					Total
	<i>E</i>	<i>EE</i>	<i>EE+</i>	<i>RE</i>	<i>RE+</i>	
1% – 15%	0	0	3.23	50.62	29.06	37.01
15% – 33%	0	0	1.94	29.93	34.77	28.34
33% – 75%	0	0	5.81	17.46	28.80	19.89
75% – 100%	100	100	89.03	2.00	7.37	14.76

TABLE 5.14 – Table de contingence croisant la nature du comportement et le taux d'erreurs commises.

La dernière ligne de ce tableau montre des évidences : les natures de comportement ne contenant pas de *R* sont le propre de ceux qui font beaucoup d'erreurs : ceux qui n'utilisent pas la règle correcte font nécessairement des erreurs. En revanche, il est intéressant de noter que plus le taux d'erreurs augmente, plus la nature du comportement se diversifie avec une augmentation de *E* : alors qu'entre 1% et 15%, la nature dominante est *RE*, au dessus de 15%, la nature caractéristique est *RE+*.

Plus le taux d'erreurs augmente, plus le nombre de règles erronées distinctes augmente.

Ces tableaux semblent montrer une forte instabilité dans l'erreur : les élèves faisant un grand nombre d'erreurs, ne restent pas constants dans l'utilisation d'une même règle erronée. Cependant, ces tableaux ne reposent pas sur les coefficients d'utilisation des règles. Ils tiennent compte du nombre de règles distinctes au sein d'un même comportement mais il est possible que certaines d'entre elles soient de coefficient d'utilisation très faible, en particulier, comparativement aux coefficients d'utilisation des autres règles. Un élève pourrait se retrouver avec un comportement de nature *RE+* (c'est-à-dire utilisant différentes règles erronées pour un même type de tâche) mais avec, en fait, une règle préférentielle.

L'utilisation d'une règle ne domine-t-elle pas l'utilisation des autres règles au sein d'un même comportement ?

Si tel était le cas, cela pourrait contrarier l'idée que les élèves sont individuellement instables dans l'utilisation de règles erronées. C'est cette question qui va être abordée dans la section suivante avec la quantification de l'utilisation des règles : la prise en compte du *CU*.

5.4.2 Objectif : des implications presque vraies

Des Implications

Soit TA_i , un type de tâche-en-acte. Nous cherchons à savoir si le sujet a tendance à appliquer une règle particulière face à ce type de tâche-en-acte TA_i . Nous voulons déceler des implications du type :

$$TA_i \Rightarrow R_j, \text{ où } R_j \text{ est une règle.}$$

Cette implication signifie que face à un même type de tâche-en-acte, TA_i , le sujet agit toujours de la même manière en utilisant R_j . Par exemple, quand le sujet est confronté plusieurs fois à un produit de deux facteurs qu'il souhaite développer, supprime-t-il brutalement les parenthèses ? Développe-t-il correctement ? Et dans ce cas, le fait-il systématiquement ? Souvent ? Parfois ?

Du Sens au coefficient d'implication

Étudions l'exemple fictif donné en figure 5.8. Cet exemple donne les occurrences de règles utilisées et des type de tâche-en-actes dans lesquels ces règles ont été utilisées. En abscisse, se trouvent 7 types de tâche-en-actes auxquels l'élève a été confronté : TA_1, \dots, TA_7 . En ordonnée, nous trouvons 4 règles que l'élève a appliquées. Le chiffre écrit au point de coordonnées (i, j) est le nombre de fois où l'élève a utilisé R_j pour le type de tâche-en-acte TA_i . L'absence de chiffre signifie qu'il n'y a pas eu utilisation de la règle R_j dans le type de tâche-en-acte TA_i .

Analysons maintenant ce que l'on souhaite exprimer de cette situation :

- À propos du type de tâche-en-acte TA_1 . L'élève n'a été confronté que 2 fois à ce TA. Nous pouvons estimer que cela n'est pas suffisant pour en tirer une information pertinente. Cela pose la question du seuil minimum de confrontation à un type de tâche-en-acte à partir duquel nous acceptons de modéliser ce que fait l'élève.
- À propos du type de tâche-en-acte TA_2 . L'élève a été confronté 6 fois à ce TA. Cela peut paraître suffisant pour analyser ce qu'il a répondu à ce type de tâche-en-acte. En outre, il a utilisé 6 fois la *même* règle, R_2 . Son comportement semble *stable*. Nous pouvons affirmer que $TA_2 \Rightarrow R_2$.
- À propos du type de tâche-en-acte TA_3 . L'élève a été confronté 8 fois à ce TA. Cela peut paraître suffisant pour analyser ce qu'il a répondu à ce type de tâche-en-acte. Il a utilisé 7

Règles

R_4			7	1			2
R_3	2		1	1	4	8	8
R_2		6		2		4	2
R_1				1	3	4	2
	TA ₁	TA ₂	TA ₃	TA ₄	TA ₅	TA ₆	TA ₇

Types de tâche-en-acte

FIGURE 5.8 – Exemple du travail d'un élève fictif : les occurrences de 4 règles utilisées dans 7 types de tâche-en-acte différents. Cet élève a utilisé la règle R_4 : 7 fois face au type de tâche-en-acte TA₃, 1 fois face à TA₄ et 2 fois face au type de tâche-en-acte TA₇.

fois la *même* règle, R_4 . Son comportement semble *stable* malgré l'exception qui l'entache. Nous voudrions affirmer que $TA_3 \Rightarrow R_4$.

- À propos du type de tâche-en-acte TA₄. L'élève l'a rencontré 5 fois. Mais il a utilisé 4 règles différentes. Son comportement peut être analysé comme *instable*.
- À propos du type de tâche-en-acte TA₅. L'élève l'a rencontré 7 fois. Cependant, il n'a pas eu un comportement stable : il a utilisé 3 fois la règle R_1 , 4 fois la règle R_3 . Nous pouvons l'interpréter de deux manières différentes : soit l'élève est instable comme c'était le cas pour le type de tâche-en-acte TA₄, soit nous pouvons remettre en question la granularité des types de tâche-en-acte. En effet, il se peut que le type de tâche-en-acte TA₅ ne soit pas assez fin. Il peut, peut-être, être coupé en deux types de tâche-en-acte, chacun pouvant expliquer pourquoi l'élève a appliqué R_1 plutôt que R_3 ou vice-versa. Il faudrait alors prendre en considération une variable de contexte supplémentaire pour discriminer l'utilisation de R_1 et celle de R_3 .
- À propos des type de tâche-en-acte TA₆ et TA₇. Pour ces deux types, il existe un pic modal pour l'utilisation de la règle R_3 . Non seulement il l'a utilisée 8 fois mais de plus, ce chiffre est, au moins, le double des occurrences des autres règles. Le nombre de fois où l'élève l'a utilisée dans chacun de ces types de tâche-en-acte est-il significativement important en comparaison avec les autres occurrences pour que l'on considère que le comportement de l'élève est stable mais qu'il a dérapé quelques fois, comme dans le contexte TA₃ ? Peut-on dire qu'il a une *tendance* à utiliser la règle R_3 face à ces deux types de tâche-en-acte ? Cette situation pose la question délicate de l'acceptation du nombre d'exceptions à une implication, sur laquelle nous allons revenir. Elle donne aussi à penser que cela vaut la peine de, peut-être, regrouper les deux types de tâche-en-acte TA₅ et TA₆.

Une action est perçue comme stable si elle présente une certaine récurrence, si l'élève, confronté un certain nombre de fois à un même type de tâche-en-acte, agit de la même manière. Notons m , le nombre de fois où l'élève est confronté à un même type de tâche-en-acte. Dans l'analyse ci-dessus, nous avons exprimé le besoin de déterminer le seuil à partir duquel on considère m suffisamment grand pour modéliser les actions de l'élève dans ce type de tâche-en-acte.

De plus, dans le cas où m est plus grand que ce seuil, se pose la question du nombre d'exceptions à l'implication à accepter. Comme la réalité est rarement aussi rigoureuse que le forma-

lisme mathématique, des implications, au sens mathématique, ne peuvent rarement être établies à cause des exceptions qui les entachent, comme nous l'avons déjà noté pour la problématique de la construction des TA dans le domaine de factorisation lors de la présentation de l'Analyse Statistique Implicative. Par conséquent, il faut accepter des implications « quasiment » vraies : des cas où, comme dans le type de tâche-en-acte TA_3 , l'élève applique majoritairement une même règle. Nous introduisons un coefficient d'implication, prenant ses valeurs entre $[0,1]$, qui symboliserait la « vraisemblance » de l'implication. Nous voudrions que ce coefficient prenne la valeur 1 si l'implication est vraie au sens mathématique (toutes les fois où l'élève a été confronté à TA_i , il a utilisé R_j), et qu'il ait une valeur d'autant plus proche de 1 qu'il y a peu d'exceptions. Il faudrait alors déterminer les valeurs respectives à partir desquelles nous acceptons que le comportement peut avoir le statut de *stable* et le statut de *tendance* ainsi que la valeur sous laquelle le comportement peut être qualifié d'*instable*.

5.4.3 Notre choix

Nous avons décidé d'utiliser la méthode utilisée par Payne et Squibb [Payne and Squibb, 1990, p. 456]. Même si nous suivons le même simple décompte, nous nous distinguons de leur démarche par ce que nous avons défini comme étant une opportunité d'application : pour eux, toute expression présente une opportunité d'appliquer une règle dès lors que les conditions d'application de cette règle sont vérifiées. Ils considèrent seulement ce que nous avons appelé l'opportunité mathématique dans le chapitre précédent. L'idée théorique est donc, pour chaque élève et pour chaque type de tâche-en-acte TA :

- compter combien de fois le sujet a été confronté à ce TA, soit m .
- fixer un seuil à partir duquel le nombre de TA est suffisant pour considérer avoir suffisamment d'informations pour modéliser, soit s . Ne pas poursuivre si $m < s$, poursuivre sinon.
- lister les règles, R_i , utilisées dans ce contexte et de compter leur occurrence : soit o_i .
- calculer les fréquences $f_i = \frac{o_i}{m}$.
- conserver la règle R_{i_0} qui a la fréquence la plus élevée, f_{i_0} .
- fixer un coefficient de stabilité c_s , au dessus duquel on considère que la fréquence f_{i_0} est suffisamment grande pour que l'utilisation de cette règle R_{i_0} soit considérée comme stable.
- fixer un coefficient de tendance c_t , au dessus duquel on considère que la fréquence f_{i_0} est suffisamment grande pour que l'utilisation de cette règle R_{i_0} soit considérée comme tendancielle.
- si $m \geq s$ et si $f_{i_0} > c_s$, nous pouvons considérer que face à ce type de tâche-en-acte, cet élève utilise de manière stable la règle R_{i_0} .
- si $m \geq s$ et si $c_t < f_{i_0} < c_s$, nous pouvons considérer que face à ce type de tâche-en-acte, cet élève a tendance à utiliser la règle R_{i_0} .

Prenons l'exemple d'un sujet qui est confronté 5 fois au type de tâche-en-acte « développement simple de $a(b+c)$ ». Fixons m à 3 et le coefficient de stabilité c_s à $\frac{2}{3}$. L'élève utilise 4 fois la règle de suppression brute de parenthèses :

$$R_1 : a(b+c) \rightarrow ab+c.$$

L'élève utilise 1 fois la règle correcte :

$$R_2 : a(b+c) \rightarrow ab+ac.$$

Dans ce cas,

les occurrences sont : $o_1 = 4$ et $o_2 = 1$,

les fréquences sont : $f_1 = \frac{4}{5}$ et $f_2 = \frac{1}{5}$.

Comme $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$, on conclut que face au type de tâche-en-acte « développement simple de $a(b+c)$ », cet élève utilise de manière stable la règle de suppression brute de parenthèses.

5.4.4 Les coefficients et les seuils.

Les coefficients d'utilisation d'une règle.

Dans la pratique, il peut y avoir plusieurs diagnostics (manuels ou automatiques) pour un même pas de calcul. Dans ce cas, comment compter les occurrences des règles ? Dans nos travaux, le coefficient d'utilisation d'une règle est le coefficient CU défini dans la section 3.3.4, p. 139 : la somme du nombre de fois où la règle a été diagnostiquée pondérée par les probabilités des diagnostics où la règle est apparue. Ce coefficient CU_R n'est donc pas nécessairement un entier, il représente le nombre de fois où, selon ANAïs, le sujet a utilisé la règle R .

Le seuil s de TA.

Le nombre m de fois où un sujet est confronté à un même TA est la somme de tous les coefficients CU_{R_i} des règles R_i rattachées à ce TA. Par exemple, si l'on s'intéresse au TA $Fact + CoFactRien$, les règles rattachées sont RES_Fact , ER_Rien et ER_NoFact , cf. p. 209. Si, pour un sujet, les CU respectifs sont de 1.3, 2.5 et 0.1, alors on considère que ce sujet a été confronté 3.9 fois au type de tâche-en-acte $Fact + CoFactRien$.

$$m = \sum_{R_i \in TA} CU_{R_i}$$

Quant au seuil s à partir duquel nous considérons que le nombre de fois où le sujet a été confronté à un même TA est suffisant, un compromis a été de le fixer à 3.

$$s = 3$$

Ce seuil a été fixé arbitrairement mais raisonnablement suite à une recherche infructueuse de résultats d'analyse statistique. En dessous de ce seuil, si le sujet utilise deux règles différentes face aux deux fois où il est confronté au TA, il est souhaitable de le confronter une troisième fois au même TA afin de départager laquelle des deux règles est utilisée préférentiellement. En quelque sorte, un nombre impair est préférable à un nombre pair. Au dessus de 3, l'information deviendrait certainement plus fiable. Malheureusement, comme il a été noté déjà maintes fois dans ce manuscrit, pour des raisons de temps, il est difficile de confronter un sujet plus que trois fois à un même TA.

Les seuils c_t et c_s de tendance et stabilité.

Un premier seuil « naturel » est celui de 50% : celui de la majorité. Si l'élève a majoritairement utilisé une règle, on peut lui octroyer au moins la statut d'utilisation tendancielle de cette règle.

$$c_t = 0.5$$

Plus délicate a été la question du seuil de stabilité qui a été fixé à 70%. Si plus de deux fois sur trois, le sujet a utilisé une même règle, nous considérons que son action est stable. Nous avons, de plus ajouté un seuil de « constance », c_c fixé à 90%, où nous considérons que le sujet est réellement constant dans l'utilisation de la règle.

$$c_s = 0.7 \text{ et } c_c = 0.9$$

5.5 Conclusion sur le modèle de praxéologie-en-acte

Dans le domaine des équations, Payne & Squibb ont conduit différentes expérimentations pour tenter de capturer des erreurs stables [Payne and Squibb, 1990]. Au cours de ce travail, ils se résolvent à considérer qu'il y a opportunité d'appliquer une règle dès que les conditions d'application de cette règle sont vérifiées par une expression. Par exemple, la règle $M \times X \rightarrow M + X$, où M est un entier, s'applique aussi bien sur l'expression $3 \times x$ que $3x$ ou encore x . Ces auteurs ne considèrent pas que l'expression x ne présente peut-être pas une opportunité d'application de cette règle : ils ne font pas de distinction d'ordre ostensive. Ils font bien une distinction sur le *sens* des expressions (différence entre $3x + 2x$ et $5x$) mais pas sur le choix des ostensifs (différence entre $3(2 + x)$ et $3 \times (2 + x)$).

Nous avons un point de vue différent. Nous considérons que des expressions équivalentes ne se différenciant que par la présence d'ostensifs peuvent être différentes aux yeux des élèves. Elles peuvent, selon, présenter ou non une occurrence d'appliquer telle règle. En outre, nous pensons que certaines autres caractéristiques d'expressions algébriques (telle que le nombre de termes dans une somme) relevant, pourtant, d'un même type de tâches institutionnel peuvent influencer sur le type de règle que l'élève utilisera. Pour prendre en compte ces caractéristiques des expressions, nous avons mis en place un modèle qui permet de décrire les productions d'élèves tout en les distinguant de celles qu'attend l'institution. Le modèle de praxis-en-acte est une adaptation du modèle praxéologique au sujet institutionnel et se voudrait indépendant de notre domaine d'étude. Le type de tâche-en-acte regroupe des tâches affichant une similarité aux yeux des élèves. Les techniques-en-acte associées sont le type ou les types de résolution mis en œuvre pour répondre au type de tâche. Nous distinguons ainsi les praxis-en-acte inter décrivant les pratiques d'un groupe d'élèves et où la technique-en-acte affiche une certaine stabilité inter-élèves, des praxis-en-acte intra décrivant les pratiques d'un même élève, où une technique-en-acte devrait être privilégiée. Pour un élève donné, il ne devrait y avoir qu'une seule technique-en-acte, rejoignant ainsi l'hypothèse de travail faite pour décrire les praxis institutionnelles (hypothèse H_T1). Le découpage en types de tâche-en-acte, construction du chercheur, ne suit pas nécessairement le découpage en types de tâche de l'institution dans laquelle s'inscrit pourtant le sujet : il peut être plus fin comme il peut être plus grossier.

Dans notre travail, des variables de contexte algébrique décrivant finement les expressions algébriques ont été listées a priori pour permettre de construire des types de tâche-en-acte élémentaires qui répondaient à la fois à des contraintes didactiques et informatiques. D'avantage axés sur la dimension didactique, des types de tâche-en-acte, regroupements de types de tâche-en-acte élémentaires, ont été construits soit dynamiquement sur des expérimentations montées dans ce but soit à la main en prenant en compte des valeurs de variables qui semblaient plus rares dans les manuels scolaires. Trente-quatre types de tâche-en-acte ont été retenus : 13 en développement, 4 en factorisation et 17 en réduction. Les techniques-en-acte potentielles sont les règles détaillées diagnostiquées par ANAïs par l'algorithme AHP (cf. Chapitre 3). Elles ont été associées a priori aux différents types de tâche-en-acte afin qu'elles aient des mêmes prémisses, selon les valeurs des variables associées au TA. Cela a permis de construire 97 praxis-en-acte a

priori dont 29 corrects et 68 erronés : 48 praxis-en-acte en développement, 11 en factorisation et 38 en réduction. Pour qu'une praxis-en-acte soit attribuée à un élève donné, il faut que la technique-en-acte ait affiché une certaine stabilité. Nous avons décidé qu'une règle détaillée acquérait le statut de technique-en-acte face à un TA si elle était diagnostiquée plus de 7 fois sur 10 confrontations au même TA.

L'hypothèse de l'existence d'un écart entre le découpage institutionnel et le découpage que perçoit l'élève (H 3) a été validée par des expérimentations dont les protocoles ont été étudiés à la main. Sur ces mêmes expérimentations, nous avons pu valider l'hypothèse de recherche H 2 posée à la suite de l'analyse des manuels scolaires : le savoir visé par l'institution en développement ou même en factorisation est loin d'être acquis par seulement les techniques exposées dans les manuels. Nous remettons en question l'hypothèse faite par l'institution comme quoi les élèves sont capables d'itérer ou de combiner des techniques travaillées en classe. Nous verrons dans le chapitre suivant que les élèves mettent, en effet, en place des techniques-en-acte éloignées de celles souhaitées par l'institution.

Chapitre 6

Les praxis-en-acte inter et intra

Résumé. La capture de l'utilisation stable d'une technique-en-acte dans un groupe d'élèves ou chez un même élève se poursuit. Nous utilisons le modèle de praxis-en-acte mis au point dans le chapitre précédent pour modéliser les comportements de l'ensemble des expérimentations. Dans un premier temps, nous étudions la stabilité inter-élèves. Nous aboutissons à un classement des praxis-en-acte erronées inter-élèves les plus utilisées. Nous justifions leur présence par des technologies-en-acte communes. Dans un second temps, nous étudions la présence de praxis-en-acte erronées en intra. Elles sont assez peu présentes et sont difficiles à valider ou justifier, y compris lors d'interviews menées auprès de sujets chez qui elles avaient été repérées. Enfin, nous avançons une justification commune à la présence de praxis-en-acte erronées et la présence d'instabilité dans les erreurs faites par un même sujet : la non-mobilisation de la technologie correcte.

Nous poursuivons, dans ce chapitre la méthodologie donnée dans le chapitre précédent : étudier, tout d'abord, les praxis-en-acte inter, où les techniques-en-acte ont montré une stabilité inter-élèves ; construire, ensuite, des technologies-en-acte explicatives des praxis-en-acte inter repérées et validant ainsi les types de tâche-en-acte préconstruits ; analyser, enfin, la répartition des praxis-en-acte intra, où les techniques-en-acte ont montré une stabilité intra-élève et les analyser de plus près à travers des études de cas.

Nous rappelons que la manière de coder les types de tâche-en-acte TA est de noter tout d'abord le type de tâches dont il relève suivi d'un signe d'addition et des valeurs de variables. Par exemple, *RedAdd + MemeDegre + MSide* signifie le TA de réduction de sommes de deux monômes de même degré où un signe moins est accolé au premier monôme. Les types de tâche-en-acte considérés sont ceux décrits en section 5.3 ; ils sont au nombre de 34. Il y a, a priori, 97 praxis-en-acte possibles dont 68 erronées.

6.1 Les praxis-en-acte inter

À partir des diagnostics fournis par ANAÏS sur l'ensemble des expérimentations présentées dans la section 3.3.1, p. 133, il est attribué à chaque transformation-Anaïs un type de tâche-en-acte, selon le processus de diagnostic automatique décrit en section 5.3.6. Nous pouvons alors reconstruire dynamiquement quelles sont les techniques-en-acte utilisées face aux différents types de tâche-en-acte et quels sont leurs coefficients d'utilisation. Les résultats qui suivent portent

sur l'ensemble des expérimentations : nous regardons, indépendamment de l'élève, quelles sont les techniques-en-acte utilisées sur l'ensemble des productions de tous les élèves.

L'ensemble des taux d'utilisation de chaque règle face à chaque TA est donné en Annexe E.2. Dans ce tableau, nous trouvons le nom du TA suivi des règles diagnostiquées pour ce TA, chacune suivie par leur CU puis le nombre de confrontations au TA considéré, vient, enfin, le taux d'utilisation, rapport des deux nombres précédents arrondis à l'unité. Ce tableau donne l'ensemble des règles diagnostiquées pour tous les TA. Nous les avons laissées pour que le lecteur intéressé puisse s'y référer si besoin, l'information pouvant se révéler utile, en particulier pour connaître le pourcentage d'erreurs sur un TA donné. Cependant, nous n'exploiterons que les règles *attachées a priori* au TA selon le travail effectué dans le chapitre précédent¹. De plus, pour une meilleure lisibilité, nous n'avons conservé dans l'analyse qui suit que les techniques-en-acte ayant montré un taux d'utilisation supérieur strictement à 3%².

Dans cette étude, trois types d'informations nous intéressent :

- I₁ : Il y a les types de tâche que nous souhaitons tester ou valider comme étant explicatif de l'utilisation d'une technique. Par exemple, nous souhaitons savoir si l'absence du signe multiplier pouvait provoquer l'utilisation de règle telle que $a(b+c) \rightarrow a+b+c$ car, dans le chapitre précédent, nous avons seulement montré que son absence entraînait plus d'erreurs sans noter si il y avait une erreur « préférentielle ». Un autre exemple est celui des types de tâche *RedAdd + MemeDegre + MSide* et *RedAdd + MemeDegre + MNoSide* : est-ce que la règle $ax^n + bx^n \rightarrow (a-b)x^n$ est liée à la présence d'un signe moins accolé à ax^n ? Ce qui ferait d'elle une technique-en-acte du type de tâches *RedAdd + MemeDegre + MSide*.
- I₂ : Il y a les types de tâche pour lesquels nous souhaitons seulement savoir quelle est la technique-en-acte erronée la plus utilisée ou quel est le taux d'utilisation de telle technique-en-acte. C'est le cas, par exemple, de *Fact + CoFactId*, de *RedMult + MemeDegre* ou encore de *RedAdd + MemeDegre + NoCoef* : y-a-t-il des techniques-en-acte (préférentielles) face à $a^2 + ab$? Quel est le taux d'utilisation de $ax^n + x^n \rightarrow ax^n$? Etc.
- I₃ : Une dernière information nous intéresse : l'ordre de l'utilisation des règles erronées, présenté sur la figure 4.9 du chapitre 4, est-il toujours le même lorsque l'on tient compte des variables de contexte décrivant une expression ? En tenant compte du nombre d'opportunité qu'une règle a d'être appliquée, opportunité qui s'est affinée par la description des types de tâche-en-acte, obtenons-nous la même répartition des règles que lorsque nous tenions compte uniquement des types de tâche institutionnels ? Par exemple, la règle $(a+b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$ était la règle la plus utilisée, y compris lorsque nous tenions compte du nombre de fois où les élèves avaient été confrontés à *DvtCarre*. Cette règle devient-elle alors la praxis-en-acte la plus diagnostiquée ? Ou encore, la règle *ER_Rien* ($a+ab \rightarrow a(b)$) dont le taux d'utilisation ne dépendait pas du nombre de fois où les élèves étaient confrontés au type $a+ab$ mais dépendait du nombre de confrontations au type de tâches institutionnel, plus général, $ac+ab$, obtient-elle le même taux d'utilisation ? Reste-t-elle à la huitième place ?

Une sous-section est consacrée à chaque genre de tâche : développer, factoriser puis réduire. Dans chaque section, nous étudions les deux premiers types d'information, I₁ et I₂. La dernière

1. Par exemple, le tableau donne les coefficients d'utilisation de la règle $a - (b+c) \rightarrow ab + ac$ comme de la règle $-(b+c) \rightarrow -b+c$ pour le TA *DvtMoins + TermMoins*. Or, autant la première est bien attachée a priori au TA *DvtMoins + TermMoins* (c'est une technique-en-acte possible) autant la seconde ne l'est pas : elle n'est pas spécifiquement attachée (selon nous) à la présence d'un terme devant le signe moins. Cependant, rien n'empêche un élève d'utiliser cette règle même si il y a un terme devant le signe moins. C'est, d'ailleurs, le cas dix-neuf fois.

2. Attention, les taux d'utilisation des règles dans le tableau E.2 et dans ce chapitre sont arrondis à l'unité. Or, pour ce travail, nous considérons bien sûr les taux supérieur strictement à 3% avant l'arrondi.

information I_3 sera vue dans la section 6.1.4. Toutes les praxis-en-acte inter correctes ont été diagnostiquées et ne seront donc pas rappelées. Lorsque les praxis-en-acte erronées ont montré une différence importante d'utilisation selon le niveau scolaire, cela est précisé.

6.1.1 Développer

Dans le domaine du développement, les classes de tous les niveaux des expérimentations sont concernées. La première section est consacrée au premier type d'information I_1 : l'étude de l'impact du signe \times dans le développement d'un produit. Cette étude avait été faite dans le chapitre précédent par une analyse uniquement manuelle et sur des effectifs restreints. De plus, elle tenait compte de tous les types d'erreurs face au TA où le signe \times était absent, contrairement au travail qui suit qui se base uniquement sur les règles erronées diagnostiquées. Dans la seconde section, c'est le type d'information I_2 qui est donné avec la liste des praxis-en-acte inter erronées relevant du genre « Développer ».

Prise en compte du signe multiplier ?

Nous retrouvons l'impact de l'absence du signe multiplier dans le développement sur le nombre d'erreurs diagnostiquées. En effet, pour *DvtSimple+MultVis* et *DvtDouble+MultVis*, le taux d'erreurs est de 8% (pour 192 confrontations) tandis que pour *DvtSimple+MultNoVis* et *DvtDouble+MultNoVis*, le taux est de 11% (pour 3752 confrontations). La p-valeur de comparaison de proportions étant de 5%, nous pouvons relier l'origine de ces erreurs à ce qui fait la différence de ces deux types de tâche : la présence ou l'absence du signe \times .

Quelles sont les règles à relier à la présence du signe multiplier ? Quelles sont les règles parmi les cinq (respectivement quatre) règles associées a priori à *DvtSimple+MultNoVis* (respectivement *DvtDouble*) et *DvtDouble+MultNoVis* (respectivement *DvtDouble*) qui sont influencées par la présence du signe multiplier ? Comme nous pouvions nous y attendre, seules les règles $a(b+c) \rightarrow a+b+c$ et $(a+b)(c+d) \rightarrow a+b+c+d$ sont nettement plus utilisées lorsque le signe \times est absent que lorsqu'il est marqué : une p-valeur de 1% pour des proportions respectives de 4% et 2%³. En revanche, les autres règles ne sont pas significativement plus utilisées pour l'un ou l'autre TA. Nous attribuons donc l'utilisation de ces techniques-en-acte non à *DvtSimple+MultNoVis* ou *DvtDouble+MultNoVis* mais à *DvtSimple* ou *DvtDouble* sans précision sur l'ostensivité du signe \times . Du tableau de l'annexe E.2, nous extrayons donc les règles ayant un taux d'utilisation supérieur à 3%. Ce qui donne les praxis-en-acte inter suivantes :

$[DvtDouble, (a+b)(c+d) \rightarrow a+bc+d]$,	Taux de 3%
$[DvtDouble+MultNoVis, (a+b)(c+d) \rightarrow a+b+c+d]$,	Taux de 3%
$[Dvtsimple, a(b+c) \rightarrow ab+c]$,	Taux de 7%
$[Dvtsimple+MultNoVis, a(b+c) \rightarrow a+b+c]$,	Taux de 4%

Praxis-en-acte erronées pour le genre de tâche Développer

Les autres règles ayant affiché un taux d'utilisation supérieur à 4% sont bien des techniques-en-acte inter des TA considérés puisque les règles en question sont reliées directement au TA. Par exemple, $a+(b+c) \rightarrow a+b+a+c$ ne peut apparaître que face au TA *DvtPlus+TermPlus* et non *DvtPlus* sans précision sur ce qui précède les parenthèses. Au final, les praxis-en-acte erronées pour le genre de tâche « Développer » sont :

3. Les « tailles » des TA considérés sont donnés dans le tableau E.2.

1. [<i>DvtCarre</i> , $(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$],	(42%)
2. [<i>DvtCarre</i> , $(a + b)^2 \rightarrow a + b^2$],	(18%)
3. [<i>DvtDouble</i> , $(a + b)(c + d) \rightarrow a + bc + d$],	(3%)
4. [<i>DvtDouble + MultNoVis</i> , $(a + b)(c + d) \rightarrow a + b + c + d$],	(3%)
5. [<i>DvtMoins + TermMoins</i> , $a - (b + c) \rightarrow ab + ac$],	(4%)
6. [<i>DvtMoins</i> , $-(b + c) \rightarrow -b + c$],	(5%)
7. [<i>DvtPlus + SumPlus</i> , $(a + b) + (c + d) \rightarrow ac + ad + bc + bd$],	(4%)
8. [<i>DvtPlus + TermPlus</i> , $a + (b + c) \rightarrow a + b + a + c$],	(11%)
9. [<i>DvtPlus + TermPlus</i> , $a + (b + c) \rightarrow ab + ac$],	(10%)
10. [<i>DvtSimple</i> , $a(b + c) \rightarrow ab + c$],	(7%)
11. [<i>DvtSimple + MultNoVis</i> , $a(b + c) \rightarrow a + b + c$],	(4%)
12. [<i>DvtTriple</i> , $a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac(d + e)$],	(33%)
13. [<i>DvtTriple</i> , $a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac + ad + ae$],	(27%)
14. [<i>DvtTriple</i> , $a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac \times ad + ae$],	(22%)

6.1.2 Factoriser

Rappelons que, dans le domaine de la factorisation, les classes de niveau 4^e des expérimentations ne sont pas concernées.

Cette section est plus développée que les deux autres consacrées au développement et à la réduction car, d'une part, certaines praxis-en-acte semblent être liées au niveau scolaire et, d'autre part, les praxis-en-acte erronées peuvent être des combinaisons de règles. En effet, les règles de factorisation ont été implantées de sorte qu'elles permettent de ne se concentrer que sur un des termes de la somme à factoriser (cf. section 3.1.3, p. 99) : une règle de factorisation ne concerne qu'un des termes de la somme à factoriser. Ainsi, sur une transformation de factorisation d'une somme de deux termes (resp. trois), il y a, en fait, deux (resp. trois) règles algébriques associées. Prenons l'exemple suivant :

$$4x + 4x(x + 1) \rightarrow 4x(4x + x + 1),$$

les règles associées sont *ER_NoFact*⁴ sur la gestion du premier terme (conservation du terme $4x$) et *RES_Fact* sur la gestion correcte du second terme :

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{4x + 4x(x + 1) \rightarrow 4x(4x + x + 1)}^{ER_NoFact} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{RES_Fact}
 \end{array}$$

Si l'on considère alors le type de tâche-en-acte *Fact + CoFactId* ($a^2 + ab$ ou $a \times a + ab$), la technique-en-acte que l'on regarde porte sur le terme a^2 ou $a \times a$. Ce que l'élève fait sur le

4. Les règles de factorisation sont préférentiellement nommées en « langue naturelle » plutôt que sous leur forme algébrique pour éviter une confusion possible sur la prise en compte par une seule règle de factorisation de l'ensemble des termes. Ainsi, nous préférons parler de *ER_NoFact* plutôt que de $ab + ac \rightarrow a(ab + c)$, cette dernière écriture n'étant pas exacte puisqu'elle spécifie que la factorisation sur le premier terme était correcte, ce qui n'est pas nécessairement le cas.

terme ab n'est pas pris en compte dans ce TA. Cependant, si une technique-en-acte montre une stabilité sur le second terme de ce même TA, conjointement à celle appliquée sur a^2 , elle pourra être capturée, comme c'est le cas dans le paragraphe suivant.

Enfin, les erreurs portant sur le signe moins ne sont pas signalées : elles sont volontairement englobées dans les résolutions correctes (*RES_Fact*) car nous considérons qu'elles ne portent pas directement sur des erreurs de factorisation.

Type de tâche-en-acte *Fact+CoFactId* : $a^2 + ab$ ou $a \times a + ab$.

Huit classes ont été diagnostiquées comme ayant été confrontées au TA *CoFactId*. Elles sont issues des expérimentations suivantes : une seconde française de la thèse de Nguyen, *T_Nguyen*, une seconde française du projet *ReMaths*, trois troisièmes brésiliennes, deux troisièmes françaises et un groupe de seconde française issues de nos propres expérimentations, *T_Croset*.

Les techniques-en-acte diagnostiquées face au TA *CoFactId* sont données dans la table 6.1 pour ce qui est des résultats quantitatifs. La figure 6.1 permet de distinguer selon les niveaux scolaires (seconde versus troisième) quelle est la répartition de ces techniques-en-acte.

Au total, le TA *CoFactId* a été diagnostiqué 50.4 fois. 67% des fois où ils sont confrontés à *CoFactId*, les élèves ont correctement transformé $a^2 + ab$ en $a(\mathbf{a} + b)$.

23% des fois où ils sont confrontés à *CoFactId*, ils ont transformé $a^2 + ab$ en $a(\mathbf{ab})$: c'est-à-dire qu'ils ont utilisé la règle *ER_Rien* sur le premier terme et la règle *ER_NoFact* sur le second terme. Cette association de techniques s'explique peut-être par le fait que les élèves prennent « deux fois » le facteur a dans le premier terme et cela suffit alors. Ils n'ont pas « besoin » de le prendre dans le second terme. Alors que nous n'avons pas d'a priori sur l'action faite sur le second membre lorsque la technique-en-acte sur le premier membre est *ER_Rien*, il ressort que systématiquement, elle est en fait associée à une autre technique-en-acte erronée sur le second membre : *ER_NoFact*.

Enfin, 10% des fois où ils sont confrontés à *CoFactId*, les élèves transforment $a^2 + ab$ en $a(\mathbf{1} + b)$. Entre-autre, certaines fois, ils transforment $a^2 + ab$ en $a(\mathbf{1} + \mathbf{ab})$. Comme pour la technique-en-acte précédente, ceci peut s'expliquer par le fait que ces élèves prennent déjà deux fois le facteur commun mais deux fois dans le même terme et non une fois dans chaque terme. Cette association de techniques n'étant pas systématique, elle n'est pas considérée. Notons que *ER_CoFact1* n'est pas présente dans les classes de seconde mais l'est très nettement en classe de troisième. Elle acquière bien pour ce niveau là le statut de technique-en-acte.

Ces trois règles sont bien considérées comme des techniques-en-acte étant donné qu'elles montrent une stabilité inter-élèves face au TA *CoFactId*.

TA <i>CoFactId</i>	Nom de la technique-en-acte	Technique-en-acte	CU
$a^2 + ab$ ou $a \times a + ab$ (50.4)	<i>RES</i>	$a(a + b)$	33.8
	<i>ER_Rien</i> <i>ER_NoFact</i>	$a(ab)$	11.5
	<i>ER_CoFact1</i>	$a(1 + b)$	5.1

TABLE 6.1 – Trois règles algébriques pour le TA : *Fact + CoFactId*. Elles prennent toutes les trois le statut de technique-en-acte.

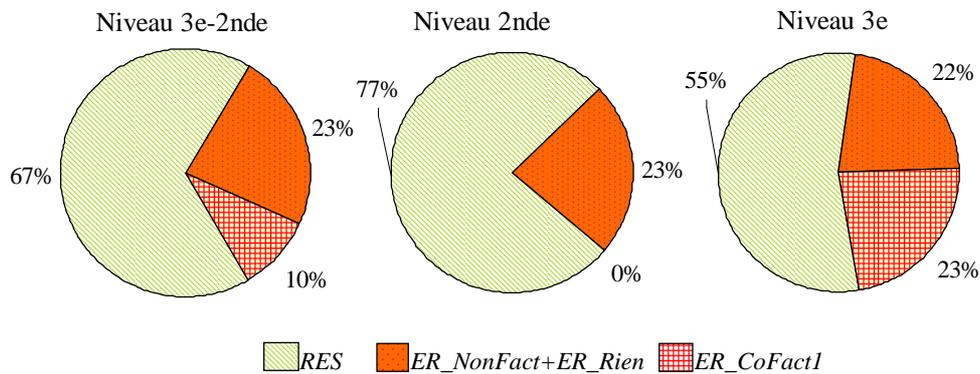


FIGURE 6.1 – Répartition des trois praxis-en-acte inter pour le TA *Fact + CoFactId* : la praxis correcte *RES* qui englobe des erreurs éventuelles sur le signe moins et les deux praxis erronées *ER_CoFact1* et *ER_Rien* (toujours associée à *ER_NoFact*). Ce TA provoque plus d’erreurs en 3^e qu’en 2nde.

Type de tâche-en-acte *Fact+CoFactRien* : $a + ab$.

Dix-sept classes ont été diagnostiquées comme ayant été confrontées au TA *CoFactRien*. Elles sont issues des expérimentations suivantes : une seconde française, une seconde vietnamienne et une première vietnamienne de la thèse de Nguyen, une seconde française du projet *ReMaths*, quatre secondes philippines du projet *Émotions*, trois troisièmes brésiliennes issues du projet *Cognitique*, trois troisièmes brésiliennes, une troisième tunisienne et une troisième française et un groupe de seconde française issues de nos propres expérimentations.

Les règles algébriques diagnostiquées face au TA *CoFactRien* sont données dans la table 6.2 pour ce qui est des résultats quantitatifs. Seules deux de ces trois règles prennent le statut de techniques-en-acte. La règle *ER_NoFact* ne prend pas le statut de technique-en-acte car son CU est trop faible comparativement au nombre de confrontations à ce TA. Il n’y a pas de figure sur la présence des techniques-en-acte selon les niveaux scolaires car aucune différence n’a été diagnostiquée.

Les élèves ont été confrontés 195.8 fois au TA *CoFactRien* face auquel, 43% du temps, ils ont fait l’erreur *ER_Rien*. La technique-en-acte erronée *ER_Rien* montre donc une très forte stabilité inter quel que soit le niveau scolaire (classes de 2nde ou 3^e).

TA <i>CoFactRien</i>	Nom de la technique-en-acte	Technique-en-acte	CU
$a + ab$	<i>RES_Fact</i>	$a(1 + b)$	106.7
	<i>ER_Rien</i>	$a(b)$	84.8
(195.8)	<i>ER_NoFact</i>	$a(a + b)$	4

TABLE 6.2 – Trois règles algébriques pour le TA *Fact + CoFactRien* auquel ont été confrontés 195.8 fois les élèves.

Type de tâche-en-acte *Fact+CoFactRien+Sum* : $a + ab$ avec a ou b une somme.

Ce type de tâche-en-acte est une précision du type de tâche-en-acte précédent. On retrouve huit des dix-sept classes précédentes : une seconde française, une seconde vietnamienne et une première vietnamienne de la thèse de Nguyen, une seconde française du projet *ReMaths*, deux

troisièmes brésiliennes, une troisième française et un groupe de seconde française issues de nos propres expérimentations. Les élèves ont été confrontés à ce type de tâche-en-acte 122 fois.

Les règles algébriques diagnostiquées face au TA *CoFactRien + Sum* sont données dans la table 6.3 pour ce qui est des résultats quantitatifs. La figure 6.2 permet de distinguer selon les niveaux scolaires (seconde versus troisième) quelle est la répartition des deux techniques-en-acte *RES* et *ER_Rien*.

La technique-en-acte erronée *ER_Rien* montre une très forte stabilité en particulier en classe de seconde, stabilité encore plus forte face à ce TA que face au TA précédent *Fact+CoFactRien*. Il est à noter que, contrairement aux deux précédents TA, ce TA provoque majoritairement plus d'erreurs que de résolutions correctes, en particulier en seconde.

TA <i>CoFactRien + Sum</i>	Nom de la technique-en-acte	Technique-en-acte	CU
$a + ab$, avec a ou b une somme (122)	<i>RES_Fact</i>	$a(1 + b)$	52
	<i>ER_Rien</i>	$a(b)$	68.4
	<i>ER_NoFact</i>	$a(a + b)$	2

TABLE 6.3 – Trois règles algébriques pour le TA *Fact + CoFactRien + Sum* auquel ont été confrontés 122 fois les élèves.

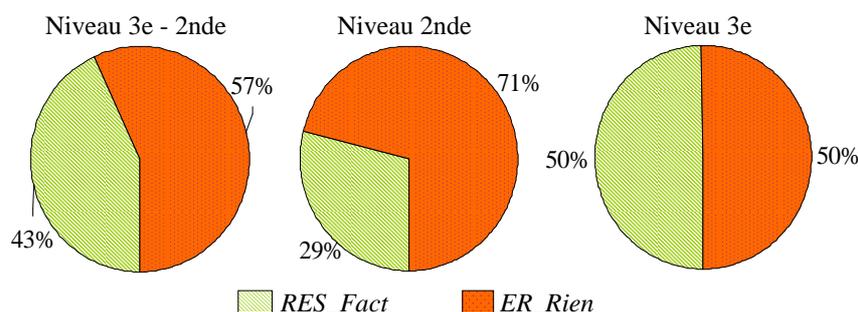


FIGURE 6.2 – Répartition des deux praxis-en-acte inter pour le TA *Fact + CoFactRien + Sum* : $a + ab$ avec a ou b une somme. La praxis correcte *Res_Fact* et la praxis erronée *ER_Rien*. Dans les classes de 2^{nde}, 71% des résolutions des tâches relevant de ce TA ont été diagnostiquées par la règle *ER_Rien* contre seulement 29% de résolutions correctes.

Type de tâche-en-acte *Fact+3Term* : $ab + ac + ad$.

Sept classes ont été diagnostiquées comme ayant été confrontées au TA *Fact + 3Term*. Elles sont issues des expérimentations suivantes : une seconde française de la thèse de Nguyen, une seconde philippine du projet *Émotions*, deux troisièmes brésiliennes, une troisième française et un groupe de seconde française issues de nos propres expérimentations.

Face à ce TA (auquel ils ont été confrontés 42.2 fois), les élèves ont eu tendance soit à factoriser correctement soit à ne pas factoriser le troisième terme. 86% des résolutions de *Fact+3Term* ont été correctement résolues contre 14% d'utilisation de la technique-en-acte erronée *ER_NoFact*. Il y a une légère différence entre les niveaux scolaires : 19% d'utilisation de *ER_NoFact* en classes de seconde contre 11% en classes de troisième. Cependant, nous rappelons que cela ne signifie pas que les élèves de seconde font plus d'erreurs que les élèves de troisième! En effet, seules les erreurs produites par les règles implémentées sont diagnosticables mais les élèves

peuvent faire d'autres types d'erreur, qui n'ont pas montré de stabilité inter et n'ont donc pas été pris en compte.

Praxis-en-acte erronées pour le genre de tâche Factoriser

1. $[Fact + 3Term, ER_NonFact]$,	(14%)
2. $[Fact + CoFactId, ER_Rien + ER_NonFact]$,	(23%)
3. $[Fact + CoFactId, ER_CoFact1]$,	(10%)
4. $[Fact + CoFactRien, ER_Rien]$,	(43%)
5. $[Fact + CoFactRien + Sum, ER_Rien]$,	(56%)

6.1.3 Réduire

Dans le domaine de la réduction, les classes de tous les niveaux des expérimentations sont concernées. Les deux premières sections sont consacrées au premier type d'information I_1 : l'étude de l'impact du degré dans la réduction de sommes et de produits de monômes puis l'impact du signe moins entre les monômes. Dans le chapitre précédent, ces variables de contexte algébrique avaient été établies non à partir d'expérimentations mais de l'analyse de manuels scolaires. Dans la troisième section, c'est le type d'information I_2 qui est donné avec la liste des praxis-en-acte inter erronées relevant du genre « Réduire ».

L'impact du degré.

Face à $RedMult + DegInitSup2$, le taux d'erreurs est de 43%. Face à $RedMult + DegInitInfEg2$, le taux d'erreurs est de 13%. Malgré l'écart important du nombre total de confrontations à $RedMult + DegInitSup2$ (60) et à $RedMult + DegInitInfEg2$ (2842,7), la différence de proportions d'erreurs est nettement significative (p-valeur inférieure à 1%). Ainsi, le fait que le produit de deux monômes soit de degré supérieur strictement à 2 augmente le taux d'erreurs chez les élèves. Aussi retenons-nous la distinction de $RedMult + DegInitInfEg2$ et de $RedMult + DegInitSup2$. Il en est de même pour $RedAdd$: que les deux monômes à additionner soient de même degré ou non, dès lors que l'un des deux a un degré supérieur strictement à 2, les erreurs augmentent.

L'impact du signe moins entre les monômes.

Nous nous étions demandé si l'erreur qui consiste à prendre la différence de deux monômes au lieu de la somme était possiblement liée à la présence d'un signe moins accolé au premier monôme. Par exemple, est-ce que la transformation de $5x - 2x + 4x$ en $x - 2x$ diagnostiquée par la règle $ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n \square p}$, est liée au signe moins accolé au monôme $5x$? Pour cela, nous avons intégré les TA $RedAdd + DgDiff + MNoSide$, $RedAdd + DgDiff + MSide$, $RedAdd + MemeDegre + MNoSide$ et $RedAdd + MemeDegre + MSide$. Cette règle a un taux d'utilisation de 3.7% en présence d'un signe moins (indépendamment du degré) et de 3.5% lorsqu'il n'y a pas de signe moins. Nous ne retenons donc pas les praxis-en-acte $[RedAdd + DgDiff + MSide, ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n \square p}]$, $[RedAdd + MemeDegre + MSide, ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n \square p}]$. En revanche, nous retenons les praxis-en-acte relevant de $RedAdd + MemeDg$

et $RedAdd + DgDiff$ ⁵ avec toutes les techniques-en-acte dont l'erreur porte sur le coefficient (puisque celles qui portent sur le degré dépendent de TA plus précis) et dont le taux d'utilisation est supérieur à 3%⁶ :

$[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n \square p}]$,	Taux de 15%
$[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (-a + b)x^{n \square p}]$,	Taux de 14%
$[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (-a - b)x^{n \square p}]$,	Taux de 13%
$[RedAdd + MemeDg, ax^n + bx^p \rightarrow (-a - b)x^{n \square p}]$,	Taux de 3%

Dorénavant, nous ne considérerons plus les TA $RedAdd + DgDiff + MNoSide$, $RedAdd + DgDiff + MSide$, $RedAdd + MemeDg + MNoSide$ et $RedAdd + MemeDg + MSide$, portant à 30 les TA construits dans le chapitre précédent.

Praxis-en-acte erronées pour le genre de tâche Réduire

Les praxis-en-acte erronées pour le genre de tâche « réduire » sont donc au nombre de 17. Dans l'ordre alphabétique des TA, nous trouvons :

- | | |
|---|---------|
| 1. $[RedAdd + DgSup2, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}]$, | (41%) |
| 2. $[RedAdd + DgSup2, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)}]$, | (9%) |
| 3. $[RedAdd + DgSup2, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Max(n,p)}]$, | (4%) |
| 4. $[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}]$, | (46%) |
| 5. $[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)}]$, | (40%) |
| 6. $[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Max(n,p)}]$, | (14%) |
| 7. $[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n \square p}]$, | (15%) |
| 8. $[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (-a + b)x^{n \square p}]$, | (14%) |
| 9. $[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (-a - b)x^{n \square p}]$, | (13%) |
| 10. $[RedAdd + MemeDg, ax^n + bx^p \rightarrow (-a - b)x^{n \square p}]$, | (3%) |
| 11. $[RedAdd + MemeDgSup2, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}]$, | (11%) |
| 12. $[RedAdd + DgDiff + CoefEgaux, ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n \square p}]$, | (17%) |
| 13. $[RedAdd + DgDiff + NoCoef, ax^n + x^p \rightarrow ax^{n \square p}]$, | (77%) |
| 14. $[RedAdd + MemeDg + CoefEgaux, ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n \square p}]$, | (7%) |
| 15. $[RedMult + DegInitSup2, ax^n \times bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Max(n,p)}]$, | (23%) |
| 16. $[RedMult + DegInitSup2, ax^n \times bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)}]$, | (12%) |
| 17. $[RedMult + MemeDg, ax^n \times bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^n]$, | (13%) |

5. Nous continuons à distinguer $RedAdd + MemeDg$ et $RedAdd + DgDiff$ car même si le degré ne devrait pas avoir directement d'impact sur la manière de traiter le coefficient, il n'en reste pas moins que le TA présente une opportunité d'utiliser la règle correcte, ce qui n'est pas le cas du seconde TA $RedAdd + DgDiff$.

6. Pour obtenir les taux d'utilisation de cette liste de techniques-en-acte face à $RedAdd + MemeDg$, par exemple, il suffit de regrouper les CU données en Annexe E.2 des différentes règles face aux deux TA $RedAdd + MemeDg + MNoSide$ et $RedAdd + MemeDg + MSide$.

6.1.4 Praxis-en-acte inter erronées par ordre décroissant

Le classement par ordre croissant d'utilisation des 36 praxis-en-acte inter erronées est donné dans le tableau 6.4. La praxis-en-acte erronée dominante consiste à oublier d'additionner le coefficient unitaire invisible d'un monôme. La technique-en-acte $ab + a \rightarrow a(b)$ arrive en seconde place si l'on tient compte du fait que a ou b est une somme dans l'expression $ab + a$ qui est à factoriser. En revanche, les praxis-en-acte $[DvtDouble, (a+b)(c+d) \rightarrow a+bc+d]$, $[RedAdd + MemeDg, ax^n + bx^p \rightarrow (-a-b)x^{n \square p}]$ et $[DvtDouble + MultNoVis, (a+b)(c+d) \rightarrow a+b+c+d]$ sont assez peu fréquentes avec un taux d'utilisation de 3%. Remarquons, enfin, que ce tableau ne sert pas à trier les TA provoquant le plus d'erreurs. En effet, ce sont les praxis-en-acte qui sont listées et un même TA peut donc apparaître plusieurs fois si plusieurs techniques-en-acte lui ont été associées.

Les données ayant été déjà présentées dans les sections dédiées à chaque genre de tâche, il est surtout intéressant de comparer ce tableau des praxis-en-acte erronées avec le tableau 6.5 des 36 praxis erronées⁷ (sans prise en compte des valeurs des variables de contexte) diagnostiquées au chapitre 4. Alors que la règle $(a+b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$ était la plus utilisée lorsque nous ne tenions compte que du nombre de fois où l'élève était confronté aux types de tâche institutionnels, cette règle descend au cinquième rang lorsque nous prenons en compte les confrontations aux différents types de tâche-en-acte. Le TA *DvtTriple* reste peu correctement résolu mais dans des proportions moindres que lorsque seuls les types de tâche institutionnels étaient considérés. La règle $ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}$ prend deux places importantes : la troisième place avec le TA *RedAdd + DgDiff* et la sixième avec le TA *RedAdd + DgSup2*. Cette règle n'avait qu'un taux d'utilisation de 1% si l'on considérait tous les types de tâche de réduction de monômes comme des opportunités d'appliquer cette règle. D'avoir affiné ces opportunités par la prise en compte des valeurs des variables de contexte, montre qu'elle est, en fait, loin d'être négligeable. De même, la règle $ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)}$ prend une place plus importante qu'elle n'avait alors.

Praxis-en-acte	Taux
$[RedAdd + DgDiffNoCoeF, ax^n + x^p \rightarrow ax^{n \square p}]$	77%
$[Fact + CoFactRien + Sum, ER_Rien]$	57%
$[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}]$	46%
$[Fact + CoFactRien, ER_Rien]$	43%
$[DvtCarre, (a+b)^2 \rightarrow a^2 + b^2]$	42%
$[RedAdd + DgSup2, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}]$	41%
$[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)}]$	40%
$[DvtTriple, a(b+c)(d+e) \rightarrow ab + ac(d+e)]$	33%
$[DvtTriple, a(b+c)(d+e) \rightarrow ab + ac + ad + ae]$	27%
$[RedMult + DegInitSup2, ax^n \times bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Max(n,p)}]$	23%
$[Fact + CoFactId, ER_Rien + ER_NonFact]$	23%
$[DvtTriple, a(b+c)(d+e) \rightarrow ab + ac \times ad + ae]$	22%
$[DvtCarre, (a+b)^2 \rightarrow a + b^2]$	18%
$[RedAdd + DgDiffCoeF, ax^n + bx^p \rightarrow (a-b)x^{n \square p}]$	17%
$[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (a-b)x^{n \square p}]$	15%
$[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Max(n,p)}]$	14%
À suivre ...	

7. C'est un hasard que le nombre de praxis-en-acte erronées soit le même que celui des praxis erronées.

... Suite	
Praxis-en-acte	Taux
[<i>Fact + 3Term, ER_NonFact</i>]	14%
[<i>RedAdd + DgDiff, axⁿ + bx^p → (-a + b)x^{n□p}</i>]	14%
[<i>RedAdd + DgDiff, axⁿ + bx^p → (-a - b)x^{n□p}</i>]	13%
[<i>RedMult + MemeDg, axⁿ × bxⁿ → (aΔb)xⁿ</i>]	13%
[<i>RedMult + DegInitSup2, axⁿ × bx^p → (aΔb)x^{Min(n,p)}</i>]	12%
[<i>RedAdd + MemeDgSup2, axⁿ + bx^p → (aΔb)x^{n+p}</i>]	11%
[<i>DvtPlus + TermPlus, a + (b + c) → a + b + a + c</i>]	11%
[<i>DvtPlus + TermPlus, a + (b + c) → ab + ac</i>]	10%
[<i>Fact + CoFactId, ER_CoFact1</i>]	10%
[<i>RedAdd + DgSup2, axⁿ + bx^p → (aΔb)x^{Min(n,p)}</i>]	9%
[<i>Dvtsimple, a(b + c) → ab + c</i>]	7%
[<i>RedAdd + MemeDgCoefEgaux, axⁿ + bx^p → (a - b)x^{n□p}</i>]	7%
[<i>DvtMoins, -(b + c) → -b + c</i>]	5%
[<i>Dvtsimple + MultNoVis, a(b + c) → a + b + c</i>]	4%
[<i>RedAdd + DgSup2, axⁿ + bx^p → (aΔb)x^{Max(n,p)}</i>]	4%
[<i>DvtPlus + SumPlus, (a + b) + (c + d) → ac + ad + bc + bd</i>]	4%
[<i>DvtMoins + TermMoins, a - (b + c) → ab + ac</i>]	4%
[<i>DvtDouble, (a + b)(c + d) → a + bc + d</i>]	3%
[<i>RedAdd + MemeDg, axⁿ + bx^p → (-a - b)x^{n□p}</i>]	3%
[<i>DvtDouble + MultNoVis, (a + b)(c + d) → a + b + c + d</i>]	3%

TABLE 6.4 – Classement des 36 praxis-en-acte inter erronées par ordre décroissant d'utilisation dans l'ensemble des expérimentations.

T	Règles	Taux
DvtCarre	$(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$	42%
DvtTriple	$a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac(d + e)$	33%
DvtTriple	$a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac + ad + ae$	27%
DvtTriple	$a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac \times ad + ae$	22%
DvtCarre	$(a + b)^2 \rightarrow a + b^2$	18%
RedMult	$ax^n \times bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^n$	13%
Fact	<i>ER_Rien</i>	10%
DvtSimple	$a(b + c) \rightarrow ab + c$	6%
DvtMoins	$-(b + c) \rightarrow -b + c$	5%
RedAddCoef	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a - b)x^{n\Box p}$	4%
Fact	$ab + ac \rightarrow a(-b + c)$	4%
Fact	<i>ER_NonFact</i>	4%
DvtSimple	$a(b + c) \rightarrow a + b + c$	4%
RedAddCoef	$ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n\Box p}$	3%
DvtDouble	$(a + b)(c + d) \rightarrow a + b \times c + d$	3%
DvtDouble	$(a + b)(c + d) \rightarrow a + b + c + d$	3%
RedAddCoef	$ax^n + x^p \rightarrow ax^{n\Box p}$	3%
À suivre ...		

... Suite		
TA	Règles	Taux
RedAddCoef	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a + b)x^{n \square p}$	3%
RedAddDg	$ax^n + bx^p \rightarrow (a \Delta b)x^{Max(n,p)}$	2%
DvtMoins	$-(b + c) \rightarrow b + c$	2%
DvtPlus	$+(b + c) \rightarrow -b - c$	2%
DvtPlus	$(a + b) + (c + d) \rightarrow ac + ad + bc + bd$	2%
RedMult	$ax^n \times bx^n \rightarrow (a \Delta b)x^{Max(n,p)}$	2%
Fact	$ba^n + ac \rightarrow a(b^n + c)$	2%
Fact	$ab - ac \rightarrow bca$	1%
DvtPlus	$a + (b + c) \rightarrow a + b + a + c$	1%
RedAddDg	$ax^n + bx^p \rightarrow (a \Delta b)x^{n+p}$	1%
DvtPlus	$a + (b + c) \rightarrow ab + ac$	1%
DvtMoins	$-(a + b) \rightarrow a^- - b^+$	1%
DvtMoins	$-(a + b) \rightarrow a^+ - b^-$	1%
Fact	$-ab + ac \rightarrow a(b + c)$	1%
Fact	$ab + ac \rightarrow a + (b + c)$	1%
Fact	$ER_CoFact1$	1%
Fact	$ab + ca \rightarrow bca$	1%
DvtSimple	$a(b + c) \rightarrow a \mathcal{N}at b + c$	1%
RedAddDg	$ax^n + bx^p \rightarrow (a \Delta b)x^{Min(n,p)}$	1%

TABLE 6.5 – Classement des 36 praxis erronées (c'est-à-dire avec prise en compte des types de tâche mais sans prise en compte des valeurs des variables de contexte) par ordre décroissant des taux d'utilisation.

6.1.5 Technologie-en-acte inter

Il a été déjà noté plusieurs fois dans ce manuscrit l'importance de donner du sens aux erreurs repérées, de les relier entre elles pour mieux y remédier, de tendre vers une origine conceptuelle et explicative de leur apparition. Cela demande un travail considérable voire à part entière. Nous proposons de donner plutôt des grandes lignes de réflexion autour d'une double entrée conceptuelle et didactique : concept mathématique manquant, travail spécifique qui pourrait aider en vue d'une remédiation ou encore explication possible de la mise en œuvre de la technique-en-acte erronée considérée. Ce sont donc là les prémisses des technologies-en-acte qui permettent, et nous le reverrons en section 6.2.6, une recherche de praxéologie-en-acte non plus ponctuelles mais locales. Le manque très probable de profondeur à cette partie du travail réside principalement dans l'idée dénoncée à la fin de ce chapitre que l'explication commune à tous ces comportements est la non-accessibilité à la technologie correcte chez les élèves, que leurs comportements soient stables ou instables, dans l'erreur ou non. Un travail approfondi sur les technologies explicatives et justificatives permettant la mise en œuvre de la technique préconisée par l'institution semble, selon nous, la meilleure réponse et remédiation à ces techniques-en-acte erronées.

Nous allons procéder à l'énumération des praxis-en-acte et de leur possible technologie-en-acte pour les praxis ayant un taux d'utilisation supérieur à 3%. Il est à noter que la technologie-en-acte se veut explicative du *couple* [type de tâche-en-acte, technique-en-acte] et non de la technique-en-acte prise isolément. En effet, une même technique-en-acte n'est pas justifiée de la même manière selon le type de tâches où elle est mise en œuvre. La technique $ER_NonFact$ en

est une bonne illustration. L'utilisation de cette technique-en-acte peut s'expliquer comme étant un « réflexe », un « automatisme » lorsque les élèves sont confrontés à une factorisation de trois termes, tandis qu'elle s'expliquera par un travail purement visuel lorsqu'elle se combinera avec la technique *ER_Rien* lors de la factorisation d'une somme de la forme $a + ab$.

Enfin, nous ajoutons quelques extraits d'échanges entre deux enseignants et leurs élèves. Nous avons observé deux enseignements sur une période d'environ trois semaines. L'un des enseignements portait sur la réduction et le développement dans une classe de 4^e de bon niveau scolaire. Le second enseignement auquel nous avons assisté porte sur des rappels du développement de produits, suivis du cours sur les identités remarquables. Il a eu lieu dans une classe de 3^e d'un niveau estimé assez faible par l'enseignant. Ces extraits d'enseignements se veulent illustratifs d'une possible origine didactique à certaines praxis-en-acte erronées mais, surtout, ils appuient notre choix d'avoir associé telle ou telle technologie-en-acte aux praxis-en-acte. À nouveau, nous aimerions être prudents : en particulier, nous précisons que ce n'est, en aucun cas, une critique des enseignements suivis. Nous avons conscience que l'enseignant ne peut pas toujours, systématiquement, faire appel à des bribes de technologie pour justifier la démarche correcte.

1. Nous percevons une première technologie autour de la notion d'*implicite*. Elle concerne les éléments syntaxiques dont la matérialité syntaxique est absente. Cette technologie recouvre 28% des erreurs diagnostiquées⁸. Elle englobe deux cas :

- le signe multiplier \times n'est pas indiqué,
- le facteur 1 n'est pas indiqué.

Les erreurs liées à l'absence du signe \times sont assez peu nombreuses ; elle justifie, selon le travail précédent, les deux praxis-en-acte :

$$\begin{array}{ll} DvtSimple + MultNoVis & a(b+c) \rightarrow a+b+c, \\ \text{Par exemple,} & 2(x+1) \rightarrow 2+x+1; \\ DvtDouble + MultNoVis & (a+b)(c+d) \rightarrow a+b+c+d, \\ \text{Par exemple,} & (x+1)(x+3) \rightarrow x+1+x+4. \end{array}$$

L'explicitation du signe \times est ce que Chaachoua, dans son HDR⁹, appellerait un savoir-faire *intrinsèque* dans le sens où il n'est pas associé à une tâche qui peut être prescrite. Elle correspond d'ailleurs à une règle de *convention*, donnée en classe de 5^e, rappelée en classe de 4^e, comme allant relativement de soi. Pourtant, la confusion est présente comme l'atteste l'extrait d'une discussion entre deux élèves de la classe de 4^e :

- E_X¹⁰ : x^2 c'est $2x$?
 E_Y : Euh, c'est xx .
 E_X : Et donc $+x$ ça donne x^3 ?
 E_Y : Ben non, c'est un fois.
 E_X : Ah oui, puisque quand il n'y a rien, c'est fois. Ah oui, donc...

L'enseignant avait pourtant rappelé, de manière un peu confuse et sur laquelle nous reviendrons, la convention d'écriture :

P_{4e} : On dira ab sous-entendu multiplié. On pourra dire 8 « pommes-poires ».

8. Ce pourcentage est au prorata des taux d'utilisation : il tient compte du poids de chaque erreur.

9. Travail en cours dont la présentation est prévue en 2010.

Au cours d'une séance d'exercices dans la classe de 3^e, l'enseignant rappelle deux règles de convention concernant l'implicite. La première est la convention de ne pas écrire le signe de la multiplication entre deux parenthèses; la seconde concerne le signe « + » d'un nombre que l'on peut omettre. Les élèves ont-ils bien perçu la distinction du signe implicite ?

E_X : Entre les parenthèses, il y a... ?

P_{3e} : Ah ben, puisqu'il n'y a rien, c'est que c'est un signe « × » !

Un peu plus tard, dans la même séance, lors de la résolution de la tâche $G = (5 + 3x)^2$, des questions se posent sur le signe de 5 et 3x, l'enseignant rappelle alors :

P_{3e} : Quand il n'y a rien devant le 5, il y a un « + » !...

Le « rien » prend ainsi tantôt la valeur « + », tantôt la valeur « × ». À l'élève de décoder que le « rien » de l'enseignant ne désigne pas la même chose selon si il est confronté à un opérateur sous-entendu ou le signe d'un argument.

Le facteur 1 peut être invisible dans un coefficient de monôme (ce qui crée les types de tâche-en-acte *RedAdd + DgDiffNoCoef* et *RedAdd + MemeDgNoCoef*) ou comme cofacteur d'un facteur à factoriser dans une somme (ce qui crée les types de tâche-en-acte *Fact + CoFactRien* et *Fact + CoFactRien + Sum*). Ce cas concerne trois des quatre praxis-en-acte erronées les plus utilisées :

<i>RedAdd + DgDiffNoCoef</i>	$ax^n + x^p \rightarrow ax^{n \square p},$
Par exemple,	$5x^2 + x^3 \rightarrow 5x^{2 \square 3};$
<i>Fact + CoFactRien + Sum</i>	<i>ER_Rien,</i>
Par exemple,	$x(x + 2) + (x + 2) \rightarrow (x + 2)(x);$
<i>Fact + CoFactRien</i>	<i>ER_Rien,</i>
Par exemple,	$4(x + 2) + x(x + 2) \rightarrow (x + 2)(4 + x);$

L'invisibilité du 1 renvoie à la notion du *neutre* de la multiplication. Elle nécessiterait, peut-être, d'être plus travaillée ou, tout au moins, plus explicitée lors de la résolution de tâches où elle apparaît de manière intrinsèque. En effet, dans les manuels étudiés, nous n'avons pas trouvé d'exercice dont la résolution corrigée présenterait un travail tel que :

$$\begin{aligned} & x(x + 2) + (x + 2) \\ = & x(x + 2) + (x + 2) \times 1 \\ = & (x + 2)(x + 1). \end{aligned}$$

Quant à la pratique enseignante, à propos de l'absence du 1 devant le coefficient du monôme, nous n'avons pas vu de prise en charge explicite alors que cette connaissance ne semble pas encore parfaitement acquise :

En 3^e, l'enseignant a transformé l'expression $7x - 8x$ en $-x$. Un élève lui demande alors :

E_X : C'est pas $-1x$?

L'enseignant lui répond :

P_{3e} : Ben, c'était dans les petites classes, maintenant, c'est bon.

Dans la classe de 4^e, un élève, devant transformer au tableau $5c - 2c^2 + 5c^2 - 4c$, aboutit à l'expression $1c + 3c^2$. Il retourne alors à sa place. L'enseignant ne dit mot sur la production (par ailleurs, correcte) de cet élève : il ne profite pas de cette occasion pour rappeler une convention d'écriture encore en cours d'acquisition.

2. La deuxième technologie concerne le principe de *concaténation*. Elle est à l'origine de 25% des erreurs diagnostiquées. Elle justifie trois praxis-en-acte relevant de *RedAdd*, une de *Fact* et une de *RedMult* :

<i>RedAdd + DgDiff</i>	$ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p},$
Par exemple,	$5x^2 + 4x^3 \rightarrow (5\Delta 4)x^5;$
<i>RedAdd + DgSup2</i>	$ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p},$
Par exemple,	$5x^3 + 2x^3 \rightarrow (5\Delta 2)x^6;$
<i>RedAdd + MemeDgSup2</i>	$ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p},$
Par exemple,	$2x^3 + 5x^3 \rightarrow (2\Delta 5)x^6;$
<i>Fact + CoFactId</i>	<i>ER_Rien + ER_NonFact,</i>
Par exemple,	$(x + 2)^2 + x(x + 2) \rightarrow (x + 2)(x(x + 2));$
<i>RedMult + MemeDg</i>	$ax^n \times bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^n,$
Par exemple,	$4x^2 \times 7x^2 \rightarrow (4\Delta 7)x^2;$
<i>RedAdd + MemeDgCoeFegaux</i>	$ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n\Box p},$
Par exemple,	$5x^2 + 5x^2 \rightarrow 0;$
<i>RedAdd + DgDiffCoeFegaux</i>	$ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n\Box p},$
Par exemple,	$5x^2 + 5x^3 \rightarrow 0.$

Ces praxis consistent à transformer les expressions algébriques suivant une règle syntaxique : faire en sorte que tous les arguments et opérateurs visibles (les ostensifs) soient utilisés, suivant le principe de concaténation, assemblant ce qui se ressemble : les x avec les x , les exposants avec les exposants, ... Il y a, là, une forme de prise en compte de la structure syntaxique et d'un minimum de connaissances (en particulier, dans les praxis de factorisation) pour assembler les arguments. Ainsi, les trois premières praxis s'expliquent par la somme des « termes semblables¹¹ » *au sens de l'élève* : le symbole « x ». Ceci permet d'obtenir une expression « achevée ». Un discours technologique est difficile à maintenir dans la classe et l'enseignant peut avoir tendance à le négliger ou à l'altérer.

Sur un questionnaire passé auprès de 14 enseignants, 10 d'entre eux ont recours à une métaphore pour exprimer la notion de termes semblables. À la question « Utilisez-vous une métaphore (par exemple, 2 pommes et 3 pommes donnent 5 pommes) pour la réduction ? », un des enseignants écrit : « Oui tout à fait pour essayer de donner du sens et également que 3 pommes + 2 poires ne donne rien du tout ! ». Pourtant, lors du travail sur le produit de monômes, cette métaphore atteint ses limites et l'enseignant est, en quelque sorte, pris au piège :

P_{4e} : On dira ab sous-entendu multiplié. On pourra dire 8 « pommes-poires ».

De même, l'idée d'énumérer les « x » (cf. section 1.3.3) pose des difficultés :

Un élève E_X passe au tableau pour développer $3(10x + 9x^2)$. Il écrit $30x + 18x^2$.

E_X : Monsieur, je peux aller plus loin ?

P_{4e} : Non, c'est pas pareil !

11. La notion de terme semblable est utilisée dans l'enseignement pour désigner des monômes de même degré (section 1.3.3).

Plus tard, dans la séance, un élève E_Y a à réduire $5c - 2c^2 + 5c^2 - 4c$ sans y arriver¹² :

P_{4e} : Recompte les c. Il y en a combien ?

E_Y : 4!... Euh... 6!

La quatrième praxis-en-acte relève de la factorisation. Elle est contrôlée par l'idée qu'il est nécessaire de prendre *deux* fois le facteur commun dans la somme (indépendamment de l'endroit où il est pris). La praxis [*RedMult + MemeDg*, $ax^n \times bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^n$] permet de multiplier des monômes de même degré tout en conservant le même degré (syntaxiquement parlant). Enfin, lorsque les coefficients des monômes sont égaux, quel que soit leur degré, les élèves les suppriment suivant le principe de réduction, erreur possible d'étourderie, basée sur une visualisation rapide des objets ressemblants.

3. La troisième technologie concerne la notion de *distributivité*. Elle est à l'origine de 16% des erreurs diagnostiquées. Elle justifie quatre praxis-en-acte :

$$\begin{array}{ll}
 \text{DvtCarre} & (a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2, \\
 \text{Par exemple,} & (5 + x)^2 \rightarrow 5^2 + x^2; \\
 \text{DvtTriple} & a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac + ad + ae, \\
 \text{Par exemple,} & 2(x + 1)(x + 3) \rightarrow 2x + 2 + 2x + 6; \\
 \text{DvtTriple} & a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac \times ad + ae, \\
 \text{Par exemple,} & 2(x + 1)(x + 3) \rightarrow 2x + 2 \times 2x + 6; \\
 \text{DvtPlus + TermPlus} & a + (b + c) \rightarrow a + b + a + c, \\
 \text{Par exemple,} & 2 + (x + 1) \rightarrow 2 + x + 2 + 1.
 \end{array}$$

Dans ces praxis, la distributivité est utilisée de manière « abusive » : la puissance distributive sur l'addition, l'addition sur l'addition, etc. Elle permet de mettre en place des formules harmonieuses comme les élèves apprécient d'en voir. Les élèves ont compris qu'une des forces de l'algèbre résidait dans la généralisation de cas particuliers, activité qui leur est demandée bien souvent d'ailleurs. Cependant, une activité de généralisation demande une étude de cas particulier ou le recours à une technologie, ce qui n'est aucunement fait lorsque les élèves développent $a(b + c)(d + e)$ en $ab + ac + ad + ae$. Ils sur-généralisent des identités qu'ils connaissent. Notons que le principe de sur-généralisation a, bien sûr, son domaine de validité. Par exemple, lorsque les élèves sont confrontés au type de tâches *DvtSimple* > 2 (développement de $a(b + c + d)$), les élèves arrivent relativement bien à trouver la règle correcte. En effet, seules 8 des 397 transformations (Annexe E.2) d'une tâche en relevant ont été diagnostiquées par l'unique règle erronée que l'on avait attribuée à ce TA : $a(b + c + d) \rightarrow ab + ac + d$. Cet abus de généralisation, dans notre cas, de distributivité, a poussé les élèves à répondre globalement correctement à *DvtSimple* > 2 et incorrectement à *DvtTriple*. Selon Kirshner [Kirshner, 2004], les règles qui ont tendance à être « sur-généralisées » par les élèves sont celles qui sont « visuellement remarquables » (“visual salient”). Cette caractéristique, qu'il dit lui-même difficile à expliquer (ibid, p.11), signifie qu'il y a une cohérence visuelle des deux côtés du signe égal, par exemple, la répétition des arguments de part et d'autre du signe égal. Ainsi, l'erreur $(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$ viendrait, selon lui, de la sur-généralisation de la règle correcte et « visuellement remarquable » $(xy)^2 = x^2y^2$. Dans le même ordre d'idées, nous rappelons que cette praxis est

12. Réduire avait été rappelé comme « c'est additionner les a ensemble et les b ensemble ».

introduite en classe de 3^e (section 1.3.3), en parallèle aux deux autres identités remarquables, dont l'une permet justement de produire une expression visuellement proche de l'expression $a^2 + b^2$: c'est l'identité $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

4. La quatrième technologie concerne la notion de *parenthésage inutile*. Elle est à l'origine de 10% des erreurs diagnostiquées. Elle justifie cinq praxis-en-acte :

$$\begin{array}{ll}
 \textit{DvtTriple} & a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac(d + e), \\
 \text{Par exemple,} & 2(x + 1)(x + 3) \rightarrow 2x + 2(x + 3); \\
 \textit{DvtCarre} & (a + b)^2 \rightarrow a + b^2, \\
 \text{Par exemple,} & (5 + x)^2 \rightarrow 5 + x^2; \\
 \textit{Dvtsimple} & a(b + c) \rightarrow ab + c, \\
 \text{Par exemple,} & 2(x + 1) \rightarrow 2x + 1; \\
 \textit{DvtMoins} & -(b + c) \rightarrow -b + c, \\
 \text{Par exemple,} & -(x + 1) \rightarrow -x + 1; \\
 \textit{DvtDouble + MultVis} & (a + b)(c + d) \rightarrow a + b \times c + d, \\
 \text{Par exemple,} & (x + 1)(x + 3) \rightarrow x + 1 \times x + 3.
 \end{array}$$

Les erreurs de ces praxis résident dans la non prise en compte des parenthèses. Pour ces élèves, parenthèses ou non, cela ne change rien. D'ailleurs, parfois, les élèves qui transforment, dans un premier temps, des expressions telles que $2(x + 1)(x + 3)$ en $2x + 2(x + 3)$ seront capables, par la suite, de transformer $2x + 2(x + 3)$ en $2x^2 + 6x + 2x + 6$.

5. La cinquième technologie concerne un *automatisme* lié à des formes prototypiques. Elle est à l'origine de 5% des erreurs diagnostiquées. Elle justifie quatre praxis-en-acte :

$$\begin{array}{ll}
 \textit{Fact + 3Term} & \textit{ER_NonFact}, \\
 \text{Par exemple,} & 4(x + 2) + x(x + 2) + y(x + 2) \rightarrow (x + 2)(4 + x + y(x + 2)); \\
 \textit{DvtPlus + TermPlus} & a + (b + c) \rightarrow ab + ac, \\
 \text{Par exemple,} & 2 + (x + 1) \rightarrow 2x + 2; \\
 \textit{DvtPlus + SumPlus} & (a + b) + (c + d) \rightarrow ac + ad + bc + bd, \\
 \text{Par exemple,} & (x + 1) + (x + 3) \rightarrow x^2 + 3x + x + 3; \\
 \textit{DvtMoins + TermMoins} & a - (b + c) \rightarrow ab + ac, \\
 \text{Par exemple,} & 2 - (x + 1) \rightarrow 2x + 2.
 \end{array}$$

La première praxis-en-acte peut s'expliquer par l'automatisme de ne factoriser que des sommes de deux termes. Oubliant le troisième terme, ces élèves ne factorisent que les deux premiers. Les trois autres praxis-en-acte sont plus liées à des formes prototypiques : celles, en l'occurrence, du développement de l'expression $a(b + c)$ ou de l'expression $(a + b)(c + d)$.

Nous avons tenté de regrouper les praxis-en-acte selon des grands thèmes. Nous avons comme souhait, à l'origine, lors de la construction de ces technologies, que les praxis intra (d'un même élève) soient regroupées autour d'une même technologie. Aussi, espérons-nous déceler chez des élèves quelques praxis-en-acte relevant de la technologie « implicite » (par exemple, les praxis-en-acte [*RedAddDgDiffNoCoef*, $ax^n + x^p \rightarrow ax^{n \square p}$] et [*CoFactRien + Sum*, *ER_Rien*] diagnostiquées chez un même élève) ou « parenthésage inutile ». En fait, ce résultat n'a jamais pu

être obtenu (nous y reviendrons dans ce qui suit). L'idée donc de cette section est plus de pointer du doigt certaines notions clefs possiblement manquantes à une bonne maîtrise du calcul littéral (travail sur les implicites à travers, en particulier, la notion de neutre, travail sur les parenthèses ou encore l'attention à porter sur l'effet de généralisation, ...). Nous retrouvons aussi deux idées relativement évidentes : certaines valeurs de variables de contexte sont rares dans l'enseignement et les TA qui en découlent ont tendance à provoquer l'apparition d'erreurs (factorisation de trois termes, degré de monômes supérieur à 3, développement de trois facteurs...). D'autre part, les erreurs sont avant tout liées à un travail purement syntaxique. Il y a des concepts mal acquis mais il y a, finalement, assez peu d'erreurs liées à des utilisations de concepts en dehors de leur domaine de validité. Enfin, cette section avait pour but de vérifier que les praxis-en-acte diagnostiquées avaient un sens, ce qui permettait de valider le découpage des TA : le découpage des TA a une certaine cohérence puisque nous avons pu attribuer un sens, un lien entre les différents types de tâche-en-acte.

6.2 Les praxis-en-acte intra

Nous allons nous intéresser maintenant aux techniques-en-acte qui montrent une stabilité chez un même élève face à un type de tâche-en-acte donné. Face à un type de tâche-en-acte, l'élève peut être plus ou moins constant dans le choix de la règle qu'il utilise. De plus, le logiciel ANAÏS peut proposer différentes interprétations, différents diagnostics pour un même pas de calcul. S'est posée la question du seuil de stabilité : quand accepte-t-on qu'une règle a été utilisée de manière régulière ? Cette difficulté a été soulevée et résolue en section 5.4. Nous allons rappeler brièvement la réponse apportée à ce problème.

À la suite d'une session de diagnostics, une suite de comportements, ensemble de TA, de règles et de coefficients d'utilisation, est construite. Comme indiqué précédemment (section 5.4.4, p.221), ne sont dorénavant considérées que les fois où un même élève a été confronté à un même TA au moins trois fois¹³. En deçà, nous estimons ne rien pouvoir dire.

Sur l'ensemble des expérimentations décrites dans la section 3.3.1, 3779 comportements ont été diagnostiqués pour 39543,4 utilisations de règles, soit une moyenne de 10 par comportement. Cela signifie qu'en moyenne, les élèves considérés ont été confrontés 10 fois au même TA. Cependant, l'écart-moyen¹⁴ est de 6.3. Autrement dit, il y a une grande dispersion du nombre de fois où les élèves ont été confrontés à un même TA : cela peut dépendre à la fois de l'élève, de l'expérimentation, ou du TA lui-même. Le nombre de fois où l'élève est confronté au même TA varie entre 3 et 77¹⁵.

Dans la section 5.4 consacrée à la technique-en-acte instanciée à nos travaux, un coefficient de stabilité a été mis en place ainsi qu'un coefficient de tendance et de constance (section 5.4.4) :

$$c_t = 0.5, c_s = 0.7, c_c = 0.9.$$

Cela signifie que, face à un même TA :

- si l'élève utilise plus de 90% de fois la même règle, alors son comportement est considéré comme constant ;
- s'il utilise entre 70% (exclus) et 90% de fois une même règle, son comportement est qualifié de stable ;

13. Pour que l'élève soit confronté au moins trois fois au même TA, cela signifie que la somme des coefficients d'utilisation des règles associées à ce TA est supérieure ou égale à 3.

14. L'écart moyen est la moyenne des écarts absolus des observations par rapport à leur moyenne arithmétique ; ce qui mesure la dispersion dans un ensemble de données.

15. C'est face à *RedAdd + MemeDg* qu'un élève a été confronté 77 fois.

- s’il utilise entre 50% (exclus) et 70% de fois une même règle, son comportement est qualifié de tendanciel ;
- si, en revanche, l’élève n’utilise aucune règle majoritairement (toutes les fréquences d’utilisation des règles diagnostiquées sont inférieures ou égales à 50%), son comportement est qualifié d’instable.

On peut extraire d’un comportement une praxis-en-acte intra lorsqu’une règle est utilisée de manière constante ou stable, c’est-à-dire lorsque l’élève utilise une même règle plus de 70% du temps face à un même TA.

En deçà, nous dirons que le comportement de l’élève n’est pas stable.

Considérons l’exemple du comportement imaginaire de l’élève X présenté déjà dans le chapitre précédent : face à $DvtTriple$, l’utilisation de trois règles a été diagnostiquée chez cet élève :

$ER_DistTermMultSumMultSum : a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac + ad + ae$ avec le coefficient 6.5

$ER_Dvt_Puis_SupprDbleBracket : a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac(d + e)$ avec le coefficient 0.5

$RES_DvtTriple : a(b + c)(d + e) \rightarrow abd + acd + abd + ace$ avec le coefficient 2.7

L’élève X a un comportement tendanciel. Aucune praxis-en-acte intra ne peut lui être attribuée puisque le taux maximum d’utilisation d’une même règle est de 67%.

6.2.1 Répartition de la stabilité et des praxis-en-acte intra

La règle dominante peut être correcte ou erronée. Cela donne sept grandes tendances de comportements :

- $R_Constant$ si l’élève face à un même TA, utilise plus de 90% de fois une même règle *correcte* ;
- R_Stable s’il utilise entre 70% (exclus) et 90% de fois une même règle *correcte* ;
- $R_Tendance$ s’il utilise entre 50% (exclus) et 70% de fois une même règle *correcte* ;
- $Instable$ si aucune règle n’est utilisée majoritairement¹⁶.
- $E_Constant$ si l’élève face à un même TA, utilise plus de 90% de fois une même règle *erronée* ;
- E_Stable s’il utilise entre 70% (exclus) et 90% de fois une même règle *erronée* ;
- $E_Tendance$ s’il utilise entre 50% (exclus) et 70% de fois une même règle *erronée*.

La praxis-en-acte intra est erronée (respectivement correcte) si le comportement est $E_Constant$ ou E_Stable (respectivement $R_Constant$ ou R_Stable). La répartition des différents comportements, sur l’ensemble des expérimentations, est donnée figure 6.3. Globalement, les élèves ont tendance à répondre correctement : 89% répondent correctement de manière au moins tendancielle. Seuls 7% des comportements sont au moins « tendanciellement » erronés. 4% des comportements sont instables.

84% des comportements sont $R_Constant$ ou R_Stable . Cela donne 3156 praxis-en-acte intra correctes contre seulement 168 pour les praxis-en-acte intra erronées. Rappelons, de plus, que le corpus étudié a déjà subi une sélection : seuls les élèves ayant été confronté au moins trois fois à un même TA ont été conservés.

16. Nous rappelons qu’à un type de tâche, et donc aussi à un type de tâche-en-acte, il n’y a qu’une seule règle correcte possible. Le cas où l’élève n’utiliserait que des règles correctes sans l’utilisation majoritaire de l’une d’entre elles est ici impossible. En conséquence, lorsqu’un comportement est instable, c’est qu’il y a eu utilisation de différentes règles dont au moins une erronée.

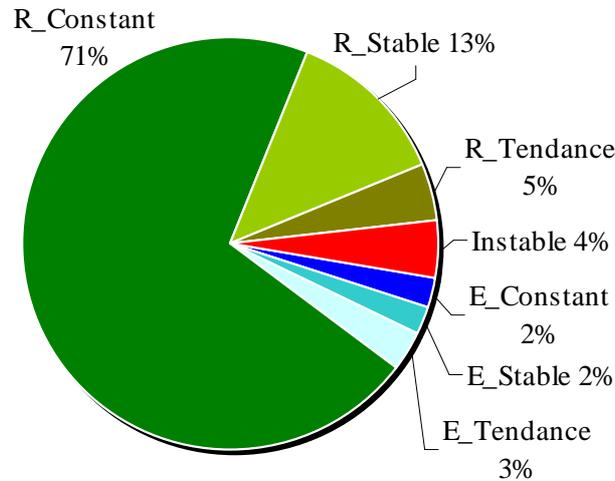


FIGURE 6.3 – Répartition des sept comportements possibles pour $c_t = 0.5$, $c_s = 0.7$, $c_c = 0.9$.

Il est difficile d'accéder aux praxis-en-acte intra erronées. En effet, d'un ensemble de près de 110000 actions regroupées en plus de 3700 comportements, seuls 4% d'entre-eux montrent une stabilité dans l'erreur !

À ce niveau là, se pose la question suivante : Vu la proportion de praxis-en-acte correctes, le modèle reste-t-il pertinent ? En particulier, cela sert-il à quelque chose d'avoir distingué les types de tâche-en-acte des types de tâche institutionnels ?

Tout d'abord, il est bon de remarquer que ces résultats sont toujours à relativiser puisqu'ils dépendent de la qualité du diagnostic ANAïs. En particulier, ANAïs diagnostique nettement mieux les pas de calcul corrects que les pas de calcul erronés (Chapitre 3).

Ensuite, il se trouve que, dans nos travaux, à un TA ne correspond qu'au plus, une seule technique-en-acte correcte et plus globalement, à un seul type de tâches institutionnel T, ne correspond aussi qu'une seule technique correcte. Cependant, cela n'est pas toujours le cas et le modèle que nous proposons a pour lui une généricité qui permet de pallier à toute nouvelle situation. En effet, admettons que face à un TA dépendant d'un T, un élève utilise la technique τ correcte et face à TA' dépendant du même T, il utilise τ' correcte alors que l'institution privilégie la technique τ_0 pour répondre à T. Les praxis-en-acte correctes $[TA, \tau]$ et $[TA', \tau']$ seraient associées à cet élève. Le fait d'avoir diagnostiqué que cet élève aient des praxis-en-acte certes correctes mais distinctes pour deux TA relevant d'un même T pourrait aboutir sur un travail spécifique sur la généricité et la force de la technique τ_0 qui semble faire défaut à cet élève.

Enfin, la proportion globale de praxis-en-acte correctes est, certes, importante mais ce résultat est donné pour tout niveau scolaire et tout type de tâche-en-acte confondus. Les praxis-en-acte erronées ne seraient-elles pas l'apanage d'un niveau ou d'un type de tâche-en-acte en particulier ? Ce sont à ces nouvelles questions que nous allons répondre, après avoir listé les praxis-en-acte intra erronées diagnostiquées.

6.2.2 Praxis-en-acte intra erronées par ordre décroissant

Nous allons maintenant nous intéresser aux occurrences des praxis-en-acte intra. Le tableau 6.6 récapitule les TA qui ont été proposés plus de trois fois à des élèves, le nombre d'élèves

concernés, le nombre de praxis-en-acte erronées, de praxis-en-acte correctes et de comportements instables que chaque TA a suscité. Au total, 3771 comportements ont été diagnostiqués ; cela n'est pas le nombre d'élèves distincts puisqu'un même élève a pu être confronté (plus de trois fois) à plusieurs TA différents. Certains types de tâche-en-acte n'ont été que rarement proposés (plus de trois fois) à un même élève. C'est le cas des TA *DvtMoins + TermMoins*, *DvtPlus + TermPlus*, *Fact + 3Term* et *Fact + CofactId* qui n'ont été proposés plus de trois fois qu'à un seul élève sur l'ensemble des expérimentations.

Au total, 25 types de tâche-en-acte ont été proposés plus de trois fois à des élèves. Les neuf TA manquant par rapport à ceux construits dans le chapitre précédent sont les quatre qui concernent le signe moins entre deux monômes à réduire (cf. section 6.1.3), les trois TA *RedAdd + DegInfEg2*, *RedAdd + MemeDegreInfEg2* et *RedMult + DegInitInfEg2* qui ne présentaient des intérêts que pour l'analyse inter afin de vérifier que la variable degré des monômes avait un impact et enfin, *RedAdd + MemeDgSup2* et *DvtMoins + SumMoins*, qui n'ont jamais été proposé plus de trois fois à un même élève, selon l'algorithme de diagnostic. Quatre des 25 TA n'ont provoqué que des praxis-en-acte correctes. Ce sont les TA :

- *DvtSimple > 2*
- *DvtDouble + MultVis*
- *DvtPlus + TermPlus*
- *Fact + 3Term*

Le TA *DvtTriple* est le seul à n'avoir provoqué que des comportements instables (sans présence de praxis-en-acte correctes ou erronées). Dix TA n'ont pas provoqué de comportements stables dans l'erreur. Ce sont les TA :

- *RedAdd + MemeDgCoefEgaux*
- *DvtSimple > 2*
- *DvtPlus*
- *DvtPlus + SumPlus*
- *DvtSimple + MultVis*
- *DvtDouble + MultVis*
- *RedAdd + DgDiffCoefEgaux*
- *DvtPlus + TermPlus*
- *Fact + 3Term*
- *DvtTriple*

Les quinze autres TA ont donc tous provoqué au moins chez un élève un comportement erroné suffisamment stable pour qu'il soit diagnosticable comme une praxis-en-acte erronée.

Types de tâche-en-acte diagnostiqués	Nb E concernés	Nb PE	Nb PC	Nb CI
DvtSimple	746	5	682	59
DvtMoins	646	2	594	44
RedAdd+MemeDgNoCoef	558	2	534	22
RedAdd+MemeDg	525	6	438	81
RedMult+MemeDg	350	23	267	58
RedAdd+MemeDgCoefEgaux	244	0	224	20
DvtDouble+MultNoVis	117	3	111	3
RedAdd+DgDiff	103	30	0	73
RedMult+DegInitSup2	79	2	64	13
DvtSimple>2	76	0	76	0
RedAdd+DgDiffNoCoef	72	49	0	22
DvtPlus	70	0	69	1
DvtCarre	55	23	19	13
RedAdd+DgSup2	45	14	18	13
DvtPlus+SumPlus	23	0	22	1
Fact+CoFactRien	22	4	10	8
Fact+CoFactRien+Sum	16	3	5	8
DvtSimple+MultVis	11	0	8	3
DvtDouble+MultVis	4	0	4	0
DvtTriple	3	0	0	3
RedAdd+DgDiffCoefEgaux	2	0	1	1
DvtMoins+TermMoins	1	1	0	0
DvtPlus+TermPlus	1	0	1	0
Fact+3Term	1	0	1	0
Fact+CofactId	1	1	0	0

TABLE 6.6 – Les 25 types de tâche qui ont été proposés plus de trois fois à un élève, par ordre décroissant d’occurrence. La deuxième colonne donne l’effectif des élèves (« Nombre d’élèves concernés ») qui ont été confrontés à chaque TA. 746 élèves ont été confrontés plus de trois fois au type de tâche-en-acte *DvtSimple* contre 1 élève pour le type de tâche-en-acte *CofactId*. Les TA qui n’apparaissent pas n’ont jamais été proposés plus de trois fois à un élève (tout au moins selon l’algorithme de diagnostic).

La troisième colonne intitulée « Nb PE » donne le « nombre de praxis-en-acte erronées » (associées au TA de la première colonne). Il y a, par exemple, 6 praxis-en-acte erronées pour le TA *RedAdd + MemeDg* sur les 525 possibilités. Ces praxis-en-acte erronées ne sont pas nécessairement les mêmes (il y a effectivement deux techniques-en-acte sous-jacentes : $ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}$, $ax^n + bx^p \rightarrow (-a + b)x^{n\Box p}$ et $ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n\Box p}$).

La quatrième colonne intitulée « Nb PC » donne le « nombre de praxis-en-acte correctes » (associées au TA de la première colonne). Il y a, par exemple, 438 praxis-en-acte correctes pour le TA *RedAdd + MemeDg* sur les 525 possibilités. Ces 438 praxis-en-acte correctes sont toutes la même : $ax^n + bx^n \rightarrow (a + b)x^n$.

La cinquième colonne intitulée « Nb CI » donne le « nombre de comportements instables ». Il y en a 81 pour le TA *RedAdd + MemeDg*.

La somme des nombres des trois dernières colonnes donne bien le nombre d’élèves.

Le tableau 6.7 donne le classement des praxis-en-acte intra dans l'ordre décroissant des taux d'utilisation des praxis-en-acte intra erronées. Ce taux est donc le nombre d'occurrences de chaque praxis-en-acte erronée sur le nombre d'élèves concernés par le TA. Ainsi, face au TA *DvtCarre*, la technique-en-acte $(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$ a été diagnostiquée chez 20 élèves, la technique-en-acte $(a + b)^2 \rightarrow a + b^2$ chez 3 élèves. 13 élèves n'ont pas montré de stabilité face à ce TA, et 19 ont utilisé la technique-en-acte correcte. Au total, il y a donc eu 55 élèves qui ont été confrontés plus de trois fois à ce type de tâche-en-acte, information que l'on retrouve dans la dernière colonne de ce tableau 6.7. Les taux des praxis-en-acte [*DvtCarre*, $(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$] et [*DvtCarre*, $(a + b)^2 \rightarrow a + b^2$] sont donc respectivement $\frac{20}{55}$, soit 36% et $\frac{3}{55}$, soit 5%. Évidemment, ces taux sont très influencés par le nombre d'élèves concernés par le TA. Ainsi, *Fact + CoFactId* n'a été proposé plus de trois fois qu'à un seul élève, qui a utilisé de manière stable la technique-en-acte *ER_Rien + ER_NonFact*. Cela donne un taux de 100% pour la praxis-en-acte erronée [*CoFactId*, *ER_Rien + ER_NonFact*]; c'est pourquoi, elle est en première place dans le tableau 6.7. Il faut donc lire avec précautions ce tableau. En revanche, si nous mettons de côté les deux premières lignes qui sont biaisées par le peu d'élèves concernés, nous remarquons que les six lignes suivantes sont les six premières praxis-en-acte diagnostiquées en inter et présentées dans la section précédente, tableau 6.4. Ce sont les praxis-en-acte (reprises dans l'ordre des inter) :

$$\begin{aligned} & [\text{RedAdd} + \text{DgDiffNoCoef}, ax^n + x^p \rightarrow ax^{n \square p}] \\ & [\text{Fact} + \text{CoFactRien} + \text{Sum}, \text{ER_Rien}] \\ & [\text{RedAdd} + \text{DgDiff}, ax^n + bx^p \rightarrow (a \Delta b)x^{n+p}] \\ & [\text{Fact} + \text{CoFactRien}, \text{ER_Rien}] \\ & [\text{DvtCarre}, (a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2] \\ & [\text{RedAdd} + \text{DgSup2}, ax^n + bx^p \rightarrow (a \Delta b)x^{n+p}] \end{aligned}$$

Ces praxis-en-acte erronées montrent donc une forte stabilité à la fois inter et intra.

Vingt des vingt-cinq praxis-en-acte intra étaient diagnostiquées en inter (avec un taux supérieur strictement à 3%). Les quatre ayant été diagnostiquées chez des élèves en intra sans l'être en inter sont :

$$\begin{aligned} & [\text{RedAdd} + \text{MemeDg}, ax^n + bx^p \rightarrow (a \Delta b)x^{n+p}] \\ & [\text{RedAdd} + \text{MemeDg}, ax^n + bx^p \rightarrow (-a + b)x^{n \square p}] \\ & [\text{RedAdd} + \text{MemeDg}, ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n \square p}] \\ & [\text{RedAdd} + \text{MemeDgNoCoef}, ax^n + x^p \rightarrow ax^{n \square p}] \end{aligned}$$

Cependant, ces quatre praxis-en-acte intra font partie des cinq dernières praxis-en-acte intra dont les taux sont les plus faibles. De plus, elles étaient évidemment diagnostiquées en inter mais n'avaient pas été retenues car leur taux était inférieur à 3%.

La réciproque est plus intéressante, à savoir la possibilité que des praxis-en-acte inter ne se retrouvent pas en intra. Il y a quinze praxis-en-acte erronées qui affichent une stabilité inter sans afficher de stabilité intra. Ce sont les praxis-en-acte erronées :

$$\begin{aligned} & [\text{DvtTriple}, a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac(d + e)] & (33\%) \\ & [\text{DvtTriple}, a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac + ad + ae] & (27\%) \\ & [\text{DvtTriple}, a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac \times ad + ae] & (22\%) \\ & [\text{RedAdd} + \text{DgSup2}, ax^n + bx^p \rightarrow (a \Delta b)x^{Max(n,p)}] & (15\%) \\ & [\text{Fact} + \text{3Term}, \text{ER_NonFact}] & (14\%) \end{aligned}$$

$[RedAdd + DgSup2, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)}]$	(13%)
$[RedMult + DegInitSup2, ax^n \times bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)}]$	(12%)
$[RedAdd + MemeDegreSup2, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}]$	(11%)
$[DvtPlus + TermPlus, a + (b + c) \rightarrow a + b + a + c]$	(11%)
$[DvtPlus + TermPlus, a + (b + c) \rightarrow ab + ac]$	(10%)
$[Fact + CoFactId, ER_CoFact1]$	(10%)
$[RedAdd + MemeDgCoefEgaux, ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n\Box p}]$	(7%)
$[Dvtsimple + MultNoVis, a(b + c) \rightarrow a + b + c]$	(4%)
$[DvtPlus + SumPlus, (a + b) + (c + d) \rightarrow ac + ad + bc + bd]$	(4%)
$[RedAdd + MemeDg, ax^n + bx^p \rightarrow (-a - b)x^{n\Box p}]$	(3%)

Les trois techniques-en-acte associées au type de tâche-en-acte *DvtTriple* n'ont pas été diagnostiquées en intra malgré une forte présence en inter. Certes, seuls trois élèves ont été confrontés à ce TA plus de trois fois. Mais aucun de ces élèves n'a utilisée une même technique-en-acte de manière dominante. La réduction de monômes dont un des degrés est supérieur strictement à 2, *RedAdd + DgSup2*, a été présentée à 45 élèves mais aucun d'entre eux n'a privilégié, de manière stable, la méthode erronée de ne conserver que le plus grand ou le plus petit des deux degrés, méthode qui avait montré une présence inter-élèves. Toutefois, 14 ont privilégié de sommer les degrés des monômes : $ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}$. La factorisation d'une somme de trois termes n'a été proposée qu'à un élève plus de trois fois. Cet élève a globalement factorisé correctement.

Praxis-en-acte intra	Taux	Nb PE	Nb E
$[Fact + CofactId, ER_NonFact + Rien]$	100,0%	1	1
$[DvtMoins + TermMoins, a - (b + c) \rightarrow ab + ac]$	100,0%	1	1
$[RedAdd + DgDiffNoCoef, ax^n + x^p \rightarrow ax^{n\Box p}]$	68,1%	49	72
$[DvtCarre, (a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2]$	36,4%	20	55
$[RedAdd + DgSup2, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}]$	31,1%	14	45
$[Fact + CoFactRien + Sum, ER_Rien]$	18,8%	3	16
$[Fact + CoFactRien, ER_Rien]$	18,2%	4	22
$[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}]$	15,5%	16	103
$[RedMult + MemeDg, ax^n \times bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^n]$	6,6%	23	350
$[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)}]$	5,8%	6	103
$[DvtCarre, (a + b)^2 \rightarrow a + b^2]$	5,5%	3	55
$[RedMult + DegInitSup2, ax^n \times bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Max(n,p)}]$	2,5%	2	79
$[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Max(n,p)}]$	1,9%	2	103
$[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (-a + b)x^{n\Box p}]$	1,9%	2	103
$[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n\Box p}]$	1,9%	2	103
$[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (-a - b)x^{n\Box p}]$	1,9%	2	103
$[DvtDouble + MultNoVis, (a + b)(c + d) \rightarrow a + bc + d]$	1,7%	2	117
$[DvtDouble + MultNoVis, (a + b)(c + d) \rightarrow a + b + c + d]$	0,9%	1	117
$[DvtSimple, a(b + c) \rightarrow ab + c]$	0,7%	5	746
$[RedAdd + MemeDg, ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}]$	0,6%	3	525

À suivre ...

... Suite			
Praxis-en-acte intra	Taux	Nb PE	Nb E
$[RedAdd + MemeDg, ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n \square p}]$	0,4%	2	525
$[RedAdd + MemeDgNoCoeef, ax^n + x^p \rightarrow ax^{n \square p}]$	0,4%	2	558
$[DvtMoins, -(b + c) \rightarrow -b + c]$	0,3%	2	646
$[RedAdd + MemeDg, ax^n + bx^p \rightarrow (-a + b)x^{n \square p}]$	0,2%	1	525

TABLE 6.7 – Classement des 24 praxis-en-acte intra erronées par ordre décroissant des taux d'utilisation dans l'ensemble des expérimentations.

6.2.3 Répartition des praxis-en-acte intra selon le niveau scolaire

Nous nous sommes interrogés sur un lien éventuel entre la stabilité et le niveau scolaire. Le tableau de contingence 6.8 croisant les couples de variables niveau scolaire et stabilité indique les co-occurrences entre les différentes valeurs de ces variables. L'indicateur usuel, la statistique du khi-2, caractérise le degré de liaison entre les variables. Il permet de quantifier l'écart entre le tableau 6.8 et le tableau obtenu si l'hypothèse d'indépendance entre les variables était avérée. Il vaut, ici, 331.87. La p-valeur étant inférieure à 1%, cela permet de rejeter l'hypothèse d'indépendance : la nature du comportement dépend fortement du niveau scolaire. Comme l'indiquent les pourcentages de contribution dans le tableau 6.8, la liaison repose avant tout sur une forte attraction entre les comportements « tendance » et les classes de 4^e ainsi que sur une répulsion des comportements « constants » et des classes de 4^e.

Comportement \ Niveau	Niveau				Total
	4 ^e	3 ^e	2 ^{nde}	1 ^{re}	
Constant	385 (-13%)	721 (0%)	1049 (+1%)	599 (+5%)	2754
Stable	162 (+8%)	109 (-3%)	209 (+0%)	82 (-1%)	562
Tendance	126 (+26%)	112 (+5%)	42 (-11%)	10 (-11%)	290
Instable	62 (+8%)	51 (+0%)	48 (-1%)	4 (-7%)	165
Total	735	993	1348	695	3771

TABLE 6.8 – Effectifs croisant le niveau scolaire et le comportement. Par exemple, il y a 162 élèves de 4^e qui ont un comportement dit stable. Les contributions des cases au Chi-2 sont indiquées entre parenthèses ; le signe indique s'il s'agit d'une attraction ou d'une répulsion entre les valeurs des variables. Les contributions sont indiquées en pourcentage du total chi-deux=331.87).

Il est intéressant, à ce niveau là, de globaliser encore les natures des comportements en considérant le regroupement des comportements « constants » et « stables » en « Praxis-en-acte » et regroupement des comportements « tendanciels » et « instables » en « Non-stabilité ». Le test d'indépendance donne pour un Chi-2 de 247.27 une très forte attraction (+45%) de la non-stabilité pour les classes de 4^e tandis qu'il existe une répulsion entre la non-stabilité et les classes de lycée, cf. tableau 6.9.

Comportement \ Niveau	4 ^e	3 ^e	2 ^{nde}	1 ^{re}	Total
Praxis-en-acte	547 (-6%)	830 (-1%)	1258 (+2%)	681 (+3%)	3316
Non-stabilité	188 (+45%)	163 (+6%)	90 (-13%)	14 (-24%)	455
Total	735	993	1348	695	3771

TABLE 6.9 – Effectifs croisant le niveau scolaire et le regroupement de comportements en praxis-en-acte intra d’une part et la non-stabilité d’autre part. Il y a, par exemple, 547 élèves de 4^e chez lesquels une praxis-en-acte intra (erronée ou correcte) a été diagnostiquée. La contribution la plus forte au Chi-2 (qui vaut 247.27) est la co-occurrence de la classe de 4^e et de la non-stabilité..

Indépendamment du fait de savoir si le comportement est majoritairement erroné ou correct, il semble que les praxis-en-acte intra soient plus importantes chez les lycéens que chez les collégiens.

Cependant, qu’en est-il des praxis-en-acte intra uniquement erronées ? Ces attractions et répulsions sont-elles conservées ? Le phénomène est en fait inversé : les praxis-en-acte intra erronées se retrouvent plus chez les collégiens que chez les lycéens. Les lycéens sont proportionnellement plus instables dans l’erreur que ne le sont les élèves de 4^e. Comme le montre la figure 6.4, plus le niveau scolaire augmente, plus la proportion de praxis-en-acte erronées diminue relativement aux comportements instables : de 41% de praxis-en-acte erronées contre 59% de non-stabilité dans l’erreur en classes de 4^e, ces proportions ne deviennent plus que, respectivement, 7% et 93% en classes de 1^{re}. Nous avancerons l’idée plus loin que cela peut être dû à l’accès à une technologie correcte permettant aux lycéens de faire moins d’erreurs stables, ce qui ne les empêche pas de faire des erreurs d’étourderie. La partie droite de la figure 6.4 présente la même idée uniquement pour les expérimentations ayant eu lieu en France. Pour les classes françaises, le phénomène reste le même, voire plus prononcé : de 43% de praxis-en-acte erronées pour les classes de 4^e, la proportion de stabilité dans l’erreur tombe à 15% dans les classes de 3^e et 5% en classes de 2^{nde}.

Les praxis-en-acte intra *erronées* sont, proportionnellement à l’ensemble total des comportements, plus importantes chez les collégiens que chez les lycéens.

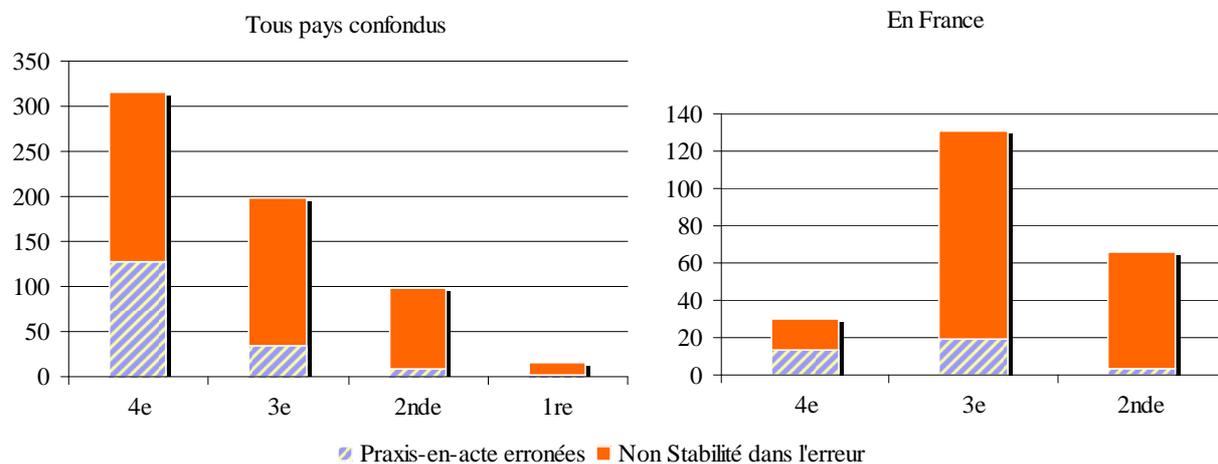


FIGURE 6.4 – Répartition des praxis-en-acte intra erronées et de la non stabilité dans l'erreur selon le niveau scolaire : tous pays confondus puis que pour les classes françaises. Ce graphique se lit, avant tout, en comparant la proportion de praxis-en-acte erronées et non la quantité. En effet, le fait qu'il y ait plus de praxis-en-acte erronées (sans tenir compte des proportions) au collège qu'au lycée est lié au fait qu'il y a eu plus d'expérimentations en collège.

6.2.4 Répartition des praxis-en-acte intra erronées selon les TA

Nous étudions de plus près le lien entre l'existence de praxis-en-acte erronées certains types de tâche-en-acte. Cela a déjà été partiellement fait dans la section 6.2.2. Nous faisons de nouvelles remarques en comparant plus particulièrement la présence de comportements stables versus non-stables pour un même type de tâche-en-acte. La répartition des praxis-en-acte intra erronées en fonction des 21 types de tâche-en-acte ayant présenté des comportements soit à tendance erronée soit instable est représentée figure 6.5. Les types de tâche-en-acte de la légende sont dans l'ordre décroissant du nombre total de praxis-en-acte erronées associées. Cette figure peut se lire verticalement mais aussi horizontalement par une comparaison entre la présence de praxis et la non-stabilité.

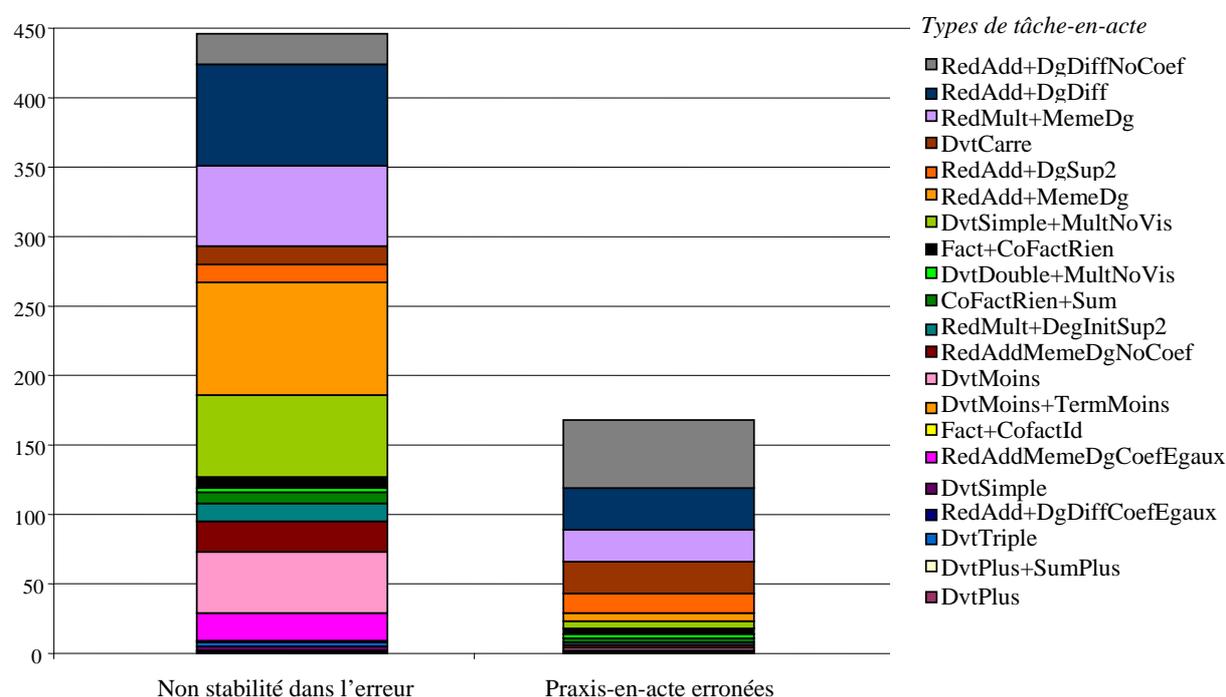


FIGURE 6.5 – Répartition des praxis-en-acte intra erronées et de la non stabilité dans l'erreur selon les types de tâche-en-acte. Les types de tâche-en-acte de la légende sont dans l'ordre décroissant du nombre total de praxis-en-acte erronées associées. Ainsi, *RedAdd + DgDiffNoCoef* est le TA pour lequel les élèves ont fait le plus d'erreurs stables. En revanche, c'est le TA *RedAdd + MemeDg* qui a provoqué le plus d'instabilité.

Nous pouvons lire, verticalement, dans le pilier de droite, que c'est face à *RedAdd + DgDiffNoCoef* qu'il y a eu plus de praxis-en-acte erronées sans tenir compte du nombre de confrontations. Les comportements face aux TA *RedAdd+DgDiffNoCoef*, *RedAdd+DgDiff*, *RedMult + MemeDg*, *DvtCarre* sont plus stables que les comportements face à *DvtTriple* et *DvtPlus*. En revanche, c'est face au TA *RedAdd + MemeDg* que les élèves sont quantitativement instables dans l'erreur, puis face au TA *RedAdd + DgDiff*, *DvtSimple + MultNoVis*, *RedMult + MemeDg* et *DvtMoins*. Cependant, ces informations peuvent, encore une fois, être dues au fait que les élèves ont plus été confrontés à ces TA qu'aux autres TA. La lecture horizontale est plus intéressante. En effet, nous pouvons lire que les élèves sont proportionnellement plus stables face à *RedAdd+DgDiffNoCoef* que face à *RedAdd+MemeDg*. De même, la proportion de praxis-en-acte erronées est importante face au TA *DvtCarre* : $(a + b)^2$. les élèves ont

plus tendance à être stables dans l'erreur face à ce TA qu'instables, contrairement à *DvtMoins*.

Il semble donc intéressant d'affiner ce qui avait été fait en section 6.2.1 et particulièrement la figure 6.3 afin de regarder quels sont les comportements pour un TA donné et non tous types de tâche-en-acte confondus. La figure 6.6 montre la répartition des différentes natures de comportements pour le TA *RedAdd + DgSup2* : $ax^n + bx^n$, où n est supérieur strictement à 2. Contrairement à la figure 6.3, où la proportion de praxis correcte était très importante (84%), cette proportion diminue nettement pour ce TA donné. En effet, elle ne vaut plus que 40% (somme de R_Constant et de R_Stable). Les parts d'instabilité et de praxis-en-acte erronées, par contre, augmentent nettement.

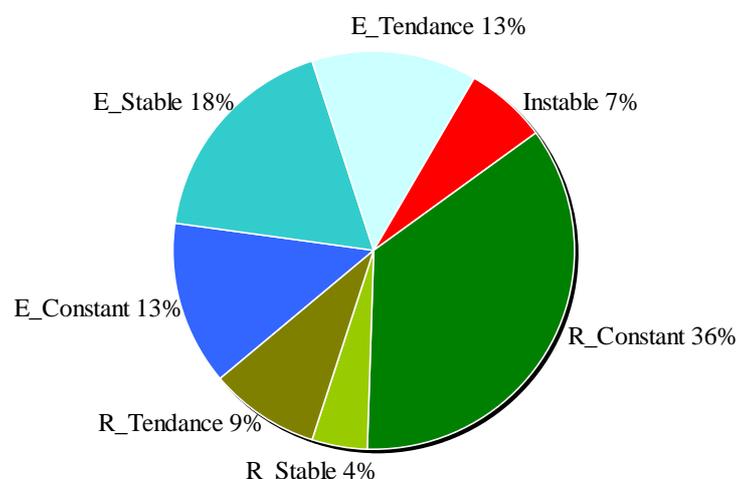


FIGURE 6.6 – Répartition des sept comportements possibles pour $c_t = 0.5$, $c_s = 0.7$, $c_c = 0.9$ pour le TA *RedAdd + DgSup2*, qui consiste à sommer deux monômes dont l'un est de degré supérieur strictement à 2.

6.2.5 Bilan : une tendance à l'instabilité ?

Si nous nous intéressons uniquement aux comportements erronés, certes, en moins grand nombre que les comportements corrects¹⁷, nous obtenons une répartition des comportements bien différentes de celles de la figure 6.3. En effet, alors que les élèves semblent globalement répondre correctement, les comportements affichent une forte instabilité dès lors que les élèves font des erreurs. Nous aurions pu penser, comme nous l'avions envisagé dans la section 5.4.1, page 216, qu'une règle erronée pouvait dominer l'utilisation des autres règles erronées au sein d'un même comportement. Or, ce phénomène n'est pas aussi fréquent qu'escompté. Comme le montre la figure 6.7, seuls 38% des comportements (qui ne sont pas au moins à tendance correcte) sont des praxis-en-acte erronées. Les 62% restant sont des comportements non-stables (avec 36% d'instabilité). Cette non-stabilité peut s'expliquer de différentes manières, sur lesquelles nous reviendrons à la fin de ce chapitre : remise en question de la granularité du modèle, de l'écriture des règles, du diagnostic, etc. Cependant, il est intéressant de voir que cette idée ressort d'anciens travaux tels que ceux de Sleeman [Sleeman, 1982b, Sleeman et al., 1989], Payne & Squibb [Payne and Squibb, 1990] et Laurillard [Laurillard, 1990] et de travaux plus récents :

17. Par comportement correct, nous entendons un comportement soit stable soit constant dans la résolution correcte : comportement R_Constant et R_Stable.

However, empirical evidence suggests that student's thinking tends to be more fragmentary and inconsistent than [the usual conception framework used to explain different aspects of students' learning]. [Garcia-Franco and Flores-Camacho 2009]

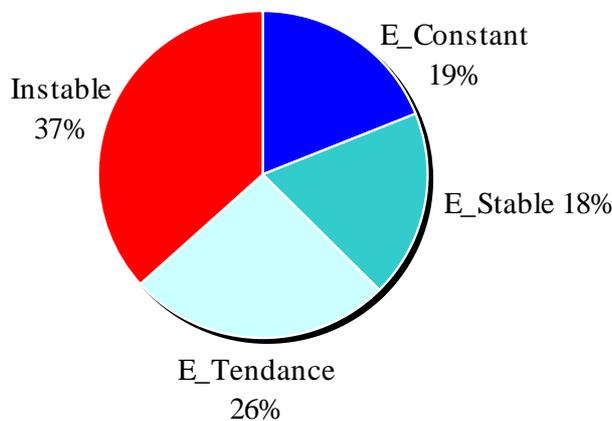


FIGURE 6.7 – Répartition des comportements qui ne sont pas à tendance correcte sur l'ensemble des expérimentations : la part des praxis-en-acte erronées est faible.

Un autre phénomène est intéressant à remarquer. Comme il a été déjà remarqué, le TA *DvtTriple* n'a provoqué que des comportements instables chez les trois élèves qui y ont été confronté plus de trois fois. Ce TA avait pourtant provoqué une instabilité inter assez importante, avec trois techniques-en-acte associées. Il semble que ce type de tâche-en-acte pose des problèmes de résolution aux élèves mais ils ne répondent pas systématiquement de la même manière, même si ils utilisent tous globalement les mêmes techniques-en-acte erronées (section 6.2.2). En revanche, un autre type de tâches tout autant peu travaillé en classe, *DvtSimple* > 2 ne provoque que des comportements stables et corrects (toujours chez les élèves confrontés plus de trois fois à ce TA). De même en est-il du TA *Fact + 3Term* qui est correctement résolu. Il semble donc que :

Les types de tâche-en-acte qui demandent de combiner des techniques travaillées par l'institution sont moins bien résolus et provoquent des instabilités qui n'ont pas été repérées pour les types de tâche-en-acte dont la technique est une itération d'une technique travaillée par l'institution.

En fait, dans nos travaux, les tâches qui font appel à des itérations peuvent tout aussi bien être résolues non comme des itérations mais des généralisations de règles « connues » des élèves. Par exemple, l'expression $5(x + 2 + x^2)$ peut être développée en généralisant la règle $k(a + b) \rightarrow ka + kb$ pour produire directement $5 \times x + 5 \times 2 + 5 \times x^2$, activité de généralisation au sens de Kieran [Kieran, 2004] et assez fréquente dans l'enseignement lors de l'introduction de l'algèbre. Il n'est pas nécessaire (contrairement à ce que l'institution scolaire attend dans un premier temps (cf. section 1.3.3) et qui justifie, ici, le principe de généralisation) d'itérer cette règle pour produire $5(x + 2) + 5x^2$ puis $5 \times x + 5 \times 2 + 5x^2$. Itérer ne revient pas toujours à généraliser¹⁸ mais la distinction n'est pas faite par l'algorithme de diagnostic mis en place.

Enfin, quelle est la part des technologies-en-acte dans les praxis-en-acte intra ? Dans la section 6.1.5, nous en avons listées cinq. Y-en-aurait-il une plus dominante que les autres dans les

18. Par exemple, développer $(a + b + c)^2$ ne peut se faire en généralisant mais seulement en itérant le développement de $(a + b)^2$.

régularités intra diagnostiquées ? En fait, les cinq technologies-en-acte se répartissent à l'intra d'une manière assez similaire à l'inter. Ce qui s'explique très bien par le fait que les praxis-en-acte intra qui dominent sont les mêmes que celles qui dominent en inter (cf. l'analyse de l'ordre des praxis-en-acte intra, page 249). Il y a, à nouveau, une forte place aux techniques-en-acte qui sont liées à la notion d'*implicite* et du « 1 implicite », en particulier (c'est-à-dire le neutre) avec une présence importante de praxis-en-acte telles que $ax^n + x^n \rightarrow ax^n$ et *ER_Rien*. Le processus de *concaténation* de deux monômes de degrés différents apparaît d'autant plus si l'un des degrés est supérieur strictement à 2 (*RedAdd + DgSup2*), témoignant de la difficulté des élèves à traiter des cas peu fréquents dans l'enseignement. La notion de *distributivité* se retrouve principalement avec l'utilisation de la règle $(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$ puisque les techniques-en-acte attribuées à *DvtTriple* et qui étaient attribuables à de la distributivité n'affichent pas, nous l'avons dit, de stabilité en intra.

Les quelques exploitations proposées dans ces différentes sections ne se veulent pas exhaustives. Elles ne montrent que quelques résultats exploitables mais pourraient encore être affinées, détaillées, complétées. Nous avons voulu illustrer quatre idées :

- Selon les niveaux scolaires et les types de tâche-en-acte, la proportion à la stabilité dans l'erreur varie.
- Les praxis-en-acte erronées sont assez difficiles à diagnostiquer de par leur faible poids.
- Si l'on s'intéresse à un niveau scolaire donné et un TA donné, les praxis-en-acte erronées peuvent prendre une proportion non négligeable.
- En ne tenant pas compte des comportements corrects, les comportements sont autant instables que stables ou que tendanciels. La non-stabilité, qui regroupe les comportements instables et seulement tendanciels, représente 63% des comportements non corrects.

Avant de s'interroger sur ce qui est peut expliquer à la fois la stabilité dans l'erreur mais aussi l'instabilité, nous allons vérifier que certaines technologies-en-acte construites a priori pour les praxis-en-acte inter restent bien sensées pour les praxis-en-acte erronées intra et sont, parfois, décelables dans le discours des élèves.

6.2.6 Études de cas : vers des praxis-en-acte locales ?

L'idée originale de ces travaux, héritée des travaux de Chaachoua et al. dans le domaine des équations [Chaachoua et al., 2005] qui cherchait à construire des théorèmes-en-acte, était de regrouper des praxis-en-acte autour d'une même technologie. Autrement dit, l'idée était de passer de praxis-en-acte ponctuelles à des praxis-en-acte locales¹⁹. Nous espérons trouver chez un même élève des praxis-en-acte (intra et ponctuelles) qui pouvaient se justifier par une même technologie. Nous espérons, par exemple, diagnostiquer chez un même élève, les praxis-en-acte intra [*DvtPlus + TermPlus*, $a + (b + c) \rightarrow a + b + a + c$], [*DvtMoins + TermMoins*, $a - (b + c) \rightarrow a - b + a - c$] et [*DvtSimple*, $a(b + c) \rightarrow ab + ac$] toutes justifiées par la distributivité de l'opérateur précédant la parenthèse sur l'addition. Mais il n'en fût rien. L'explication la plus plausible est que, comme il a été noté plus haut, les cas de stabilité dans l'erreur sont assez rares sur une population donnée. Il est donc rare de trouver un élève pour lequel ces trois praxis-en-acte

19. « Généralement, en une institution I donnée, une théorie répond de plusieurs technologies j , dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques ij correspondant à autant de types de tâches Tij . Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisations locales, $[Ti/i//]$, centrées sur une technologie déterminée, ensuite en organisations régionales, $[Tij//j/]$, formées autour d'une théorie. [...] Or le passage d'une praxéologie ponctuelle $[T//]$ à une praxéologie locale $[Ti/i//]$ met en avant la technologie. » [Chevallard, 1998a]

dont deux erronées soient attribuées. Il faut monter des expérimentations très spécifiques pour recueillir de telles praxis-en-acte : confronter un même élève plus de trois fois à un même TA et espérer que son comportement soit relativement stable à chaque fois. Quoiqu'il en soit, à l'heure actuelle, nous n'avons pas pu obtenir de tels treillis des connaissances des élèves. Cependant, nous avons cherché à valider certaines technologies-en-acte construites a priori et attribuées aux praxis-en-acte inter, ceci grâce à quelques interviews.

En développement.

Suite à une expérimentation manuelle où les praxis $[DvtPlus + TermPlus, a + (b + c) \rightarrow ab + ac]$ et $[DvtMoins + TermMoins, a - (b + c) \rightarrow -ab - ac]$ ont été attribuées à deux élèves de 2^{nde}, E_J et E_B , ces élèves sont interviewés (cf. Annexe F.3). Le déclencheur de ces techniques-en-acte semble être la présence de parenthèses et la proximité de la forme avec la forme « prototypique » $a(b + c)$.

L'élève E_J de 2^{nde}. Il est demandé à E_J de réduire $3x - (2 + x) + 5x^2$. Contrairement à ce qu'il a fait lors de l'expérimentation, il ne produit pas tout de suite $-6x - 3^2 + 5x^2$. Il ne sait pas comment transformer l'expression initiale, mais il précise que c'est à cause du signe $-$ devant la parenthèse. Un signe $+$ ne le dérangerait pas et dans ce cas, il aurait tendance « à vouloir multiplier $3x$ par ça $[2 + x]$ vu que c'est entre parenthèse ».

L'élève E_B de 2^{nde}. Quant à l'élève E_B , il lui est demandé de réduire l'expression $2x - (4 + x) + 5x^2$ et d'expliquer ce qu'elle fait. L'élève utilise comme, lors de l'expérimentation, la même technique-en-acte en fournissant la réponse $-8x + 3x^2$. L'ostensif « parenthèses » semble aussi être important chez cette élève, ce mot revenant souvent : « On commence par ce qu'il y a entre parenthèses », « juste avant les parenthèses », « avec ce qu'il y a entre parenthèses ».

Lorsque les élèves tentent de justifier leur travail, ils utilisent, ici, des formulations de règles. C'est cela que nous appelons la technologie-en-acte « automatisme » dû à une proximité visuelle à une forme prototypique (section 6.1.5) car ces élèves ont recours à une formule ou font un lien avec une formule correcte, qu'ils généralisent abusivement. Pour nous, ces élèves sont dans le visuel et le rapprochement à la formule, sans recherche de sens : l'élève se rappelle qu'il faut « changer les signes » à cause du moins qui est devant la parenthèse, elle pense à multiplier parce que la forme est très proche de la forme classique $a(b + c)$. Il eut d'ailleurs été intéressant de vérifier quel était l'opérateur sous-jacent dans $a(b + c)$ pour ces élèves car il est envisageable que ce soit, pour elles, l'opérateur $+$. Malheureusement, cette hypothèse n'a pu être vérifiée.

En factorisation.

Nous avons voulu étudier de plus près les praxis-en-acte $[Fact + CoFactRien, ER_Rien]$ et $[Fact + CoFactRien + Sum, ER_Rien]$. Différents cas sont envisageables. Le comportement d'un même élève peut être diagnostiqué comme stable face à ces deux TA : la présence éventuelle d'une somme dans le résultat n'a pas d'influence sur son comportement. Un élève qui montre une stabilité face à $CoFactRien$ sans qu'elle soit diagnostiquée face à $CoFactRien + Sum$ peut soit ne pas avoir été confronté suffisamment de fois à $CoFactRien + Sum$, soit afficher un comportement tendanciel face à $CoFactRien + Sum$ qui a été « tranché » par une nouvelle confrontation au TA $CoFactRien$. La différence de diagnostics face à ces deux TA est donc seulement due à un nombre différent de confrontations à ces deux TA. Plus intéressants sont

les comportements d'élèves pour lesquels la praxis-en-acte [*CoFactRien + Sum, ER_Rien*] a été attribuée sans que [*CoFactRien, ER_Rien*] le soit. En effet, cela signifie que la présence d'une somme dans le résultat est un critère déterminant puisque le TA *CoFactRien* englobe le TA *CoFactRien + Sum*. L'une de ces deux élèves de 3^e française, E_V , a été interviewée ainsi qu'une autre élève, E_M , n'ayant travaillé que sur papier/crayon, dans le cadre d'un master de recherche [Guyon, 2008] mais pour laquelle cette même praxis-en-acte a aussi été bien établie manuellement.

L'élève E_V de 3^e. Chez l'élève E_V , la praxis-en-acte a été diagnostiquée 9 fois face à *CoFactRien + Sum* pour 10 confrontations à ce TA : cette élève montre une stabilité de 90% sur ce TA. Tandis que face aux 15 confrontations à *CoFactRien*, cette élève montre une *tendance* à *ER_Rien* avec un taux de 60%. Lors de l'entretien avec cette élève, retranscrit en Annexe F.1, nous avons voulu vérifier que la technologie-en-acte construite a priori de cette praxis était bien l'invisibilité du cofacteur 1 dans la forme $a_{\blacksquare} + ab$ et non pas, par exemple, l'oubli du terme a , qui permet tout autant de produire $a(b)$.

Deux semaines après l'expérimentation, E_V est interrogée sur le travail qu'elle a produit : elle visionne son travail grâce à la fonction magnétoscope du logiciel APLUSIX. Interrogée sur la manière dont elle factorise, E_V n'arrive pas à exprimer ce qu'elle a fait ; elle répond seulement qu'elle donnerait à nouveau la même réponse s'il lui était demandé de résoudre la même tâche :

E_V : ... Là, en fait, je laisserai comme ça. Je ne changerai pas d'avis.

Comme cela se voit dans l'extrait ci-dessous de l'interview, l'interviewer lui propose de construire un exercice qui lui semble « similaire » et qui produirait le même type de réponse, sans plus de précision. E_V produit alors l'expression $(-8+x)+(-8+x)7$. Ceci conforte alors notre découpage de types de tâche-en-acte puisque pour E_V , les tâches $(x-4)+(x-4)x$ et $(-8+x)+(-8+x)7$ sont « similaires ». E_V exprime alors l'idée que, pour résoudre pareille tâche, il faut prendre le facteur commun dans chaque élément qui se trouve de chaque côté du + puis écrire « ce qui reste dans chaque terme, en enlevant le facteur commun ». Dans l'un des termes, il reste donc « b », dans l'autre terme, il ne reste « rien », tout au moins rien de visible :

I²⁰ : Est-ce que tu peux me donner un exemple, de quelque chose d'un peu similaire ?

Invente un exercice que tu aurais à donner à une camarade et sur lequel tu pourrais faire un peu le même genre de réponse.

L'élève s'exécute, en écrivant l'expression $(-8+x)+(-8+x)7$.

I : Hum, hum. Et alors, tu répondrais quoi ?

E_V : Ben...

L'élève s'exécute et fournit la réponse $(-8+x)7$.

I : Et comment tu lui expliquerais ?

E_V : Ben, ça [E_V désigne l'expression $(-8+x)$], comme il est du chaque côté du +, ... dans les deux...

Silence

I : « Termes », ça, ça s'appelle un « terme » : de « chaque côté du plus », comme tu dis.

E_V reprend : Comme il est dans les deux termes, on s'en sert de facteur commun et... Voilà !

I : Et comment tu complètes, après ? Ce qui est entre parenthèses ?

E_V : Ben, ce qui reste dans chaque terme, en enlevant le facteur commun !

20. En début de phrase, [I] signifie l'interviewer et [E_X], l'élève X. En italique se trouvent des commentaires précisant au lecteur ce qu'il ne peut pas voir.

I : Donc ?

E_V : Donc, ici, il reste un 7.

I : Hum, hum.

E_V : Et dans l'autre, rien.

Plus tard, lors de la correction et sous la demande insistante de l'interviewer de savoir ce que E_V entend par « rien », E_V déclare que « rien » signifie « zéro » :

I : Mais c'est quoi le « rien » ?

E_V : C'est un zéro.

I : C'est un zéro ? !

E_V : J'en sais rien.

L'invisibilité du cofacteur 1 est bien à l'origine de l'erreur. Cependant, sur la nécessité d'obtenir une somme dans un des facteurs du résultat, l'élève ne dit mot. Deux semaines s'étaient écoulées entre le travail sur APLUSIX et l'interview. Lorsqu'en début d'entretien, quelques nouveaux exercices lui ont été soumis, cette fois, l'élève a utilisé *ER_Rien* aussi bien face à *CoFactRien* que face à *CoFactRien + Sum* : elle transformait $5(x+1) + x(x+1)$ en $(x+1)(5+x)$ tout comme $2x^2 + 2$ en $2(x^2)$. Lorsqu'interrogée sur le fait que, lors du premier test, elle avait agi différemment face à *CoFactRien* (en utilisant la règle correcte) que face à *CoFactRien + Sum* (en utilisant la règle *ER_Rien*), elle répondit qu'elle ne comprenait pas pourquoi elle avait fait ça puisqu'aujourd'hui, elle utiliserait bel et bien *ER_Rien* pour toutes les expressions. Cette élève avait donc affiché une stabilité qui n'a pas perduré dans le temps. C'est pourquoi, elle n'a pas pu être interrogée sur la raison de son comportement différent en présence d'une somme, lors de l'expérimentation.

L'élève E_M de 3^e. Une autre interview a été conduite sur le sujet, à nouveau dans le but de comprendre un peu mieux l'impact de la présence d'une somme dans un des facteurs. L'interview de E_M est retranscrite en Annexe F.2.

La praxis-en-acte erronée [*CoFactRien + Sum*, *ER_Rien*] a été diagnostiquée pour cette élève. Lors de l'interview, il lui est demandé de :

- décrire ses étapes pour les factorisations des expressions pour lesquelles E_M a utilisé la technique *ER_Rien* lors de l'expérimentation ;
- juger de la véracité de la production (correcte) de deux autres élèves ;
- factoriser trois nouvelles expressions : $x^3 + x^2$, $18x + 9$ et $(x+1) + 5(x+1)$.

Comme E_V, l'élève E_M cherche un facteur commun « de chaque côté du signe + ou - » puis rajoute « la suite après » : « la suite de l'expression dans la parenthèse ». Elle s'aide pour cela d'ostensifs : elle souligne les termes de chaque côté du signe dominant puis encadre le facteur commun, qui est « deux fois le même facteur de chaque côté du signe ». Cela lui permet de « voir ce qu'il reste » : « le seul truc qui n'est pas entouré » ; autrement dit, elle met entre parenthèses les cofacteurs visibles en les séparant d'un signe +. Ainsi :

$$\boxed{x+8} + \boxed{2x-1}(x+8) \text{ devient } (x+8)(2x-1);$$

$$\text{et } \boxed{x+1} + \underline{3(x+1)}(x+1) \text{ devient } (x+1)[(x+1) + 3].$$

E_M exprime bien l'idée de l'invisibilité du cofacteur 1 puisqu'elle ne considère que ce qui n'est pas entouré. Qu'en est-il de l'influence de la présence d'une somme ? Interrogée sur l'expression

$2x^2 + 2$, qu'elle a correctement factorisée, elle répond qu'elle voit que si elle n'ajoute pas 1, « ça fera pas l'énoncé de départ. Ça fera que $2x^2$. Il faut [rajouter] 1 pour que ça fasse +2 ». Elle est même capable de mobiliser le contrôle du développement pour vérifier l'exactitude de son résultat :

E_M : Donc après on peut vérifier en développant : $2x^2$, plus 2 fois 1, ça fait 2 donc +2.

ou plus loin :

E_M : Je pense qu'on peut vérifier si on développe l'expression du début et qu'on développe ça, si on trouve pas pareil c'est faux et si on trouve pareil, ça doit être juste.

Intriguée, l'interviewer lui demande si ce contrôle est aussi mobilisé pour les expressions précédentes, qui sont de la forme $a + ab$ avec a ou b une somme et sur lesquelles E_M a appliqué *ER_Rien*. E_M répond que non, par manque de temps et à cause de la longueur des expressions : « Non, là j'avais pas vraiment le temps donc là [pour $2x^2 + 2$], comme elle était assez courte, j'ai vu qu'elle était facile à faire. » À ce stade là de l'interview, nous en avons conclu que la présence de la somme dans un des facteurs complexifiait l'expression, causant ainsi un changement de comportement de E_M . Cependant, lorsqu'interrogée sur les productions correctes d'un autre élève (l'expression $(x + 8) + (2x - 1)(x + 8)$ transformée en $(x + 8)(1 + 2x - 1)$ et l'expression $(x + 1)(x + 9) - (x + 1)$ transformée en $(x + 1)(x + 9 - 1)$), E_M répond :

E_M : Bah déjà, il a bien vu que c'était le facteur commun $x + 8$. Par contre, je sais pas pourquoi il a mis 1 parce qu'il suffisait juste de rajouter $2x - 1$. Bah là, je pense qu'il s'est trompé, qu'il a voulu faire comme dans celle-là comme dans la sept²¹, mettre 1 pour que ça fasse l'énoncé de départ, sauf que là, il n'y avait pas besoin. Il y avait juste besoin de rajouter $2x - 1$.

I : Comment tu sais qu'ici n'y en a pas besoin alors qu'ici on en avait besoin, dans la sept ?

E_M : Bah ça je sais pas... Enfin ça, je l'ai appris. Je sais pas comment l'expliquer. Bah c'était pour faire l'énoncé de départ parce que si je ne mettais pas le 1, ça faisais $2x$ au carré tout court. Or là, c'était +2. Il fallait que je rajoute un nombre qui fait que quand je le multiplie ça fasse 2, c'était que 1. Alors que là, c'était $2x - 1$, enfin je sais pas pourquoi il a mis 1.

I : Donc tu penses que c'est faux ?

E_M : Ouais. Bah moi j'ai pas dû faire comme lui, moi j'ai laissé juste $2x - 1$.

I : Et pour la douze ? [I] fait référence à l'expression $(x + 1)(x + 9) - (x + 1)$ qui a été transformée par un autre élève en $(x + 1)(x + 9 - 1)$.

E_M : Alors pour la douze, en fait, il a fait la même erreur que pour la dix. Donc il a rajouté le -1 en pensant que ça pouvait être compléter.

Fort de cet échange, il nous paraît finalement plus plausible que la forme finale influence l'utilisation du contrôle, plus que la simplicité de la forme de l'expression initiale. Cette élève utilise bien la technique-en-acte *ER_Rien* uniquement face à des expressions de la forme $a + ab$, où a ou b est une somme (par exemple, pour factoriser $(x + 8) + (2x - 1)(x + 8)$) et non face à des expressions de la forme $a + ab$, où ni a ni b est une somme, où elle utilisera la technique-en-acte correcte (par exemple, pour factoriser $2x^2 + 2$). Ceci lui permet d'obtenir, après application de l'une ou l'autre technique-en-acte selon le contexte, un produit de deux facteurs dont l'un est

21. L'élève fait référence à l'expression $2x^2 + 2$.

une *somme*. Une forme finale constituée d'un produit de deux facteurs dont l'un est une somme est *satisfaisante* pour cette élève :

$(8 + x)(2x - 1)$ est une forme satisfaisante suite à une factorisation tandis que $2(x^2)$ ne l'est pas pour l'élève E_M car cette dernière expression ne comporte pas de somme.

Nous voyons donc trois formes d'éléments technologiques dans l'échange verbal. Premièrement, il y a la partie « explicative » de la production de l'élève et qui correspond à la technologie-en-acte que nous lui avons octroyée a priori : « prendre ce qui est explicitement visible comme cofacteur ». Deuxièmement, il y a la fonction de « contrôle » qui consiste, chez cet élève, à vérifier que l'expression produite comporte au moins une somme dans un des deux facteurs. Enfin, il y a la fonction « justificative » lorsque l'élève décide de rajouter le terme « 1 » afin de reproduire l'expression de départ lorsqu'elle re-développera. Ces trois éléments sont nos propres reconstructions : l'élève ne les a pas donnés explicitement mais nous les avons déduits de ce qu'elle avait exprimé, montré, produit. Ce qui les distingue d'éléments d'une technique (car après tout, « prendre ce qui est explicitement visible comme cofacteur » pourrait être tout aussi bien des éléments de la technique) est l'intention que l'élève met derrière : il n'est plus dans l'action mais dans l'explicitation de ce qu'il fait.

Enfin, il est intéressant de revenir sur la question de savoir si la variable de contexte « présence/absence d'une somme dans un des facteurs d'un des termes de la somme à factoriser » est une variable didactique ou non. En effet, en section 5.3.1, p. 187, nous avons conclu que toutes les variables de contexte algébrique présentées n'étaient pas nécessairement didactiques car certaines d'entre elles n'influençaient pas l'apprentissage du savoir en jeu. Ici, nous avons a priori que proposer une expression du type $a + ab$, où ni a ni b n'est une somme pouvait provoquer chez E_M non seulement un comportement différent (ce qui est le cas) mais aussi et surtout un apprentissage ! Nous pensions que, après avoir réalisé qu'il fallait ajouter +1 dans le cofacteur du facteur commun pour conserver l'équivalence, E_M serait alors capable d'utiliser la technique correcte pour toutes les expressions, y compris face à *CoFactRien + Sum*. Or, il n'en est rien. En effet, dans la troisième phase de l'entretien, E_M doit factoriser trois nouvelles expressions :

$$x^3 + x^2, 18x + 9 \text{ et } (x + 1) + 5(x + 1).$$

Les deux premières expressions sont correctement factorisées par *RES_Fact* : ces expressions sont du type $a + ab$ avec ni a ni b une somme. Cependant, E_M applique à nouveau *ER_Rien* sur la troisième expression, malgré la « prise de conscience » qu'il fallait rajouter « un +1 » aux autres expressions pour conserve l'équivalence. Il n'y a donc pas eu déstabilisation de la technique-en-acte erronée : la variable « présence/absence d'une somme dans un des facteurs d'un des termes d'une somme à factoriser » n'a pas permis un apprentissage. Elle n'obtient pas le statut de variable didactique. De même, ni cette variable ni même le développement ne peuvent être considérés comme un véritable « contrôle »²² puisqu'ils ne permettent à E_M d'accéder à une véritable remise en question de sa production.

6.3 Vers une nouvelle hypothèse

La capture de praxis-en-acte erronées s'est révélée difficile et décevante en termes de quantité. Les erreurs stables ne sont pas aussi fréquentes qu'escomptées. En effet, près de 100000 pas de

22. Au sens du modèle CK ζ .

calcul ont été exploités. De ceux-ci ont été extraits seulement 168 praxis-en-acte erronées (et 4154 praxis-en-acte correctes) soit seulement 168 utilisations stables d'une même technique-en-acte erronée. En revanche, 989 comportements se sont révélés instables. Cette forte propension à l'instabilité a suscité trois pistes de réflexion :

- Tout d'abord, nous nous sommes interrogés sur la possibilité d'un *découpage en types de tâche-en-acte non adéquat* pour capturer les stabilités. En effet, la première remise en question concerne l'éventualité d'un découpage non suffisamment fin : un comportement instable pouvant s'expliquer par deux contextes algébriques différents. C'est, d'ailleurs, cette idée qui est à l'origine de la prise en compte des variables de contexte algébrique. Ont-elles alors été suffisamment nombreuses ? Aurait-il fallu encore plus détailler les expressions algébriques et prendre en considération plus de types de tâche-en-acte ? Nous pensons que tel n'est pas le cas. Outre le fait que les types de tâche-en-acte étaient déjà nombreux, une certaine stabilité inter s'était révélée : avec environ cent règles algébriques erronées, 70% des comportements erronés ont pu être reproduits. Nous ne sommes donc pas très éloignés de ce que les élèves font et perçoivent.
- Nous avons fait le choix de construire un modèle axé sémantique avec l'implantation de règles algébriques²³ prenant en compte des concepts tels que le monôme pour, en fait, une pratique très syntaxique. Si nous avons implanté des règles de réécriture pures, aurions-nous pu capturer plus de praxis-en-acte erronées ? Autrement dit, plus de stabilité ? En effet, l'idée principale qui ressort de la construction des technologies-en-acte inter est que les praxis-en-acte erronées sont, avant tout, liées à un excès de « formalisme ». En effet, d'une part, ce formalisme, certes essentiel en calcul littéral, pousse les élèves à des actions « automatiques »²⁴ : voir des formes prototypiques là où il n'y en a pas et confondre $a+(b+c)$ avec $a(b+c)$. D'autre part, ce formalisme se retrouve aussi dans la recherche par les élèves d'obtenir de belles formes d'expressions, ce qu'Artigue nomme une « régularisation formelle abusive » [Artigue, 1990], processus producteur d'obstacles. Cet attrait pour la régularisation formelle pousse les élèves à faire des erreurs telles que $(a+b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$, ou $a(b+c)(d+e) \rightarrow ab + ac + ad + ae$.

Il est donc envisageable qu'une autre forme de technologie-en-acte guide les choix et les actions des élèves, une *meta-technologie-en-acte* transversale à celles proposées dans nos travaux, un processus qui pourrait expliquer non seulement bon nombres de techniques-en-acte diagnostiquées dans nos travaux (en étant une forme de dénominateur commun aux technologies-en-acte que nous proposons) et qui offrirait aussi un autre regard sur les comportements que nous avons considérés comme instables. Peu importe peut-être pour certains élèves d'utiliser telle ou telle règle, ce qui les guide est une recherche de *belles formes régulières*, ou *d'obtention d'une forme particulière*. Par exemple, l'élève qui transforme $(a+b)^2$ parfois en $a+b^2$ et, parfois, en $2a+2b$ peut être considéré comme instable mais n'est-il pas stable dans sa volonté de conserver les ostensifs ? Ou encore, sous la consigne du développement de $a(b+c)$, un élève qui supprime les parenthèses, quelques fois, en distribuant (pour obtenir $ab+ac$), d'autres fois, brutalement (pour obtenir $ab+c$ ou $a+b+c$) est-il réellement instable ? Que cette suppression se fasse avec l'utilisation de la distributivité ou la suppression brute de parenthèses avec ou non changement d'opérateurs, cela importe, peut-être, peu pour cet élève. C'est la suppression de parenthèses, l'obtention d'une expression sans parenthèse qui est importante pour l'élève. En cela, il y aurait bien stabilité, une idée *constante* de ce qu'est le développement pour l'élève même si cela passe

23. Voir à ce propos la section 3.2.1 avec la notion d'unification étendue des règles implantées qui ne sont pas uniquement des règles de réécriture.

24. Se référer à la section 6.1.5.

par des règles algébriques bien différentes de notre modèle.

- Nous nous sommes aussi interrogés sur une éventuelle explication commune à la présence des praxis-en-acte et des comportements instables dont font preuve les élèves. Nous avançons une troisième réflexion qui est, de surcroît, satisfaisante en termes de remédiation. Les élèves ayant des comportements erronés stables ou instables *ne mobilisent pas la technologie institutionnelle* voire n'en disposent pas. C'est cette technologie qui permet non seulement d'expliquer et de produire la technique adéquate mais surtout de contrôler les productions :

« On entend par technologie un discours rationnel - le logos - sur la technique, discours ayant pour objet premier de justifier "rationnellement" la technique, [...] On notera ensuite qu'une deuxième fonction de la technologie est d'expliquer, de rendre intelligible, d'éclairer la technique. Enfin une troisième fonction correspond à un emploi plus actuel du terme de technologie : la fonction de production de techniques. » [Chevallard, 1998a]

Cette hypothèse n'a rien de novateur. Mais il est intéressant d'en prendre conscience et de réexpliquer les comportements sous cet aspect-là. Tout d'abord, disposer de la bonne technologie et savoir la mobiliser permet de prendre conscience du domaine de validité de la technique utilisée et de l'adapter raisonnablement si le contexte (le type de tâche) est modifié. C'est l'aspect « contrôle » de la technique. Il y a aussi l'aspect « production de techniques ». L'élève de collège doit fournir un gros travail de mémorisation pour retenir l'ensemble du catalogue de règles à retenir. Cela lui devient de plus en plus difficile à faire si ce travail de mémorisation n'est pas associé à un travail de coordination et de mise en relation des connaissances locales [Sackur et al., 1997]. L'élève risque de devoir parfois reconstruire une règle et sans mobilisation forte d'une technologie, il peut piocher une règle au hasard, ou en inventer une en réponse à des stimuli syntaxiques par exemple. Si l'on veut que l'élève dépasse la simple mécanique du stimulus visuel-réponse, il est nécessaire qu'il ait accès à une technologie : « *Any technique, if it has to become more than a mechanically-learned gesture, requires some accompanying theoretical discourse.* » [Artigue, 2002]

L'absence d'un discours technologique pourrait expliquer les différents types de comportements repérés dans nos travaux. Si les élèves avaient une technologie fiable, ils ne distingueraient pas des types de tâches autres que ceux proposés par l'institution scolaire. Or, nous avons vu que tel n'était pas le cas. Le fait que l'hypothèse de recherche 3²⁵ ait été validée justifie la non mobilisation voire la non disponibilité de la technologie adéquate chez certains élèves. Mais d'où cela vient-il ? Qu'en est-il dans l'enseignement ? Quelle est la part faite aux éléments technologiques dans le calcul littéral ?

Dans l'enseignement, la technologie apparaît, en général, dans une phase introductive de la notion. Justification de la réduction par la factorisation, justification de la simple et double distributivité par des illustrations géométriques sont autant d'éléments présents dans les manuels scolaires (cf. section 1.3.3). Ils ont, avant tout, un rôle de justification de la technique. En revanche, nous l'avons noté, il est assez peu fait de lien entre les différentes formules de distributivité : différencier le développement de $k(a+b)$ et de $k(a-b)$ sans appuyer l'importance de la possibilité de passer de l'un à l'autre ainsi que de leur utilisation pour « retrouver » la formule de la double distributivité. Il est vrai que le but final est d'obtenir une routinisation des techniques de calcul littéral sans toujours mobiliser la technologie sous-jacente. Cependant, l'expert peut y avoir recours en cas de besoin afin de mettre en œuvre d'autres procédures. Les

25. L'hypothèse de recherche 3 est qu'il existe des types de tâche-en-acte distincts des types de tâche institutionnels.

techniques en devenant routinières se dé-mathématisent [Artigue, 2002]. Aux enseignants, de maintenir l'évocation régulière de la technologie lors de l'utilisation des techniques.

Quelques courts extraits des enseignements, auxquels nous avons assisté et dont nous avons déjà parlé en section 6.1.5, d'une classe 4^e et d'une classe de 3^e montrent que cette prise en charge n'est pas toujours faite. Chez l'enseignant de 4^e, l'illustration géométrique du rectangle divisé en deux rectangles qui permet de justifier la formule de la simple distributivité apparaît non en amont de la technique mais en aval. Les élèves s'attendent à ce que cette illustration, présentée comme application de la formule, leur apporte quelque chose. Les élèves ne voient pas l'intérêt de l'illustration puisqu'ils ont déjà la formule, comme le montrent les questions posées par deux élèves :

*Après avoir donné la formule de distributivité, l'enseignant l'illustre avec un rectangle constitué de deux rectangles, de longueur respective 3 et x et de largeur 2*²⁶.

E_X : ça nous aide à déterminer x ?

E'_X : Est-ce qu'avec toutes les autres valeurs, on peut trouver x ?

L'enseignant de 3^e, quant à lui, veille à toujours proposer des tâches visuellement proches de formes prototypiques. Aussi propose-t-il la tâche²⁷ « Développer $(7 \times x)^2$ ». Cet enseignant est donc conscient de la place trop importante faite aux formules. Pourtant, il demande aux élèves de connaître par cœur les trois formules de distributivité et les trois identités remarquables sans, tout comme bon nombre de manuels, expliciter comment passer de l'une à l'autre formule. Le sens des formules manque aux élèves. Ils ne sont ni capables de reconstruire une technique ni de comprendre la sémantique d'une formule. En effet, face à la tâche « Calculer $(7 - 4)^2$ » toujours issue de l'observation de la classe de 3^e, certains élèves utilisent l'une des formules d'identité remarquable. Mais ce n'est pas tant le fait que cette formule se trouve être inadéquate ou, tout au moins, moins efficace que le calcul direct qui a retenu notre attention, c'est la remarque d'un de ces élèves qui n'avait pas trouvé la réponse 9 :

E_X : J'trouve pas 9, moi.

E_X : ...

E_X : Ah... mais c'est parce que j'ai développé !

Pour cet élève, le fait d'avoir eu un résultat faux provenait de l'utilisation de la formule et non d'une erreur de calcul lors de son application.

Ces exemples très courts illustrent le manque de travail de la technologie ou tout au moins le manque de capacité des élèves à mobiliser adéquatement les éléments technologiques. Les justifications lors d'une transformation d'expression algébrique, équivalent du théorème lors d'une démonstration de géométrie, pourraient être une occasion de raviver les éléments technologiques explicatifs des techniques utilisées.

6.4 Conclusion

L'analyse des productions de l'ensemble des expérimentations a abouti à un diagnostic de 36 praxis-en-acte erronées différentes. Contrairement à ce que nous avons posé comme hypothèse au chapitre précédent, les praxis-en-acte ne se retrouvent pas nécessairement toutes en intra. Certaines techniques-en-acte, en effet, ont pu être utilisées par un groupe d'élèves sans pour

26. Unités non précisées.

27. Notons que le verbe choisi pousse, probablement, les élèves à l'erreur.

autant afficher une stabilité chez un même élève. C'est en particulier le cas pour les tâches demandant de combiner des techniques travaillées par l'institution. En inter, trois techniques-en-acte erronées revenaient très régulièrement pour traiter de telles tâches :

$$a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac(d + e),$$

$$a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac + ad + ae,$$

$$a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac \times ad + ae.$$

Pourtant, ces mêmes techniques-en-acte n'ont pas montré de stabilité en intra. Cependant, les six praxis-en-acte erronées ayant montré le plus d'occurrence en inter sont bien aussi en haut de la liste des praxis-en-acte erronées intra. Ce sont les praxis :

$$[RedAdd + DgDiffNoCoeef, ax^n + x^p \rightarrow ax^{n \square p}]$$

$$[Fact + CoFactRien + Sum, ER_Rien]$$

$$[RedAdd + DgDiff, ax^n + bx^p \rightarrow (a \Delta b)x^{n+p}]$$

$$[Fact + CoFactRien, ER_Rien]$$

$$[DvtCarre, (a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2]$$

$$[RedAdd + DgSup2, ax^n + bx^p \rightarrow (a \Delta b)x^{n+p}]$$

Au total, 24 praxis-en-acte erronées différentes ont été diagnostiquées en intra, dont la totalité des occurrences ne constitue que 4% de l'ensemble des comportements analysés et 37% des comportements erronés.

Ces comportements stables dans l'erreur doivent, selon nous, pouvoir s'expliquer, se justifier par la présence d'une technologie-en-acte chez ces élèves. C'est parce qu'ils ont en tête des éléments technologiques (erronés) qu'ils sont capables d'avoir un comportement stable (dans l'erreur). Nous avons construit cinq technologies-en-acte a priori : des implicites, des tendances à la concaténation, une utilisation abusive de la distributivité, un manque de maîtrise des parenthèses ou encore l'impact des formes prototypiques peuvent expliquer partiellement les praxis-en-acte erronées. Ces technologies-en-acte ne présentent, en fait, qu'une partie des fonctions complexes qu'une technologie peut avoir. Pour accéder à des éléments plus complets, nous avons mené quelques interviews. Nous avons pu, sur un exemple, reconstruire une technologie-en-acte plus complète, alliant des éléments d'explication, de justification et de contrôle. Cela reste un travail difficile et, quoiqu'il en soit, une reconstruction du chercheur, l'élève de collège étant difficilement capable d'explicitier les critères déterminant la mise en œuvre de sa technique-en-acte.

Les 63% de comportements erronés restants sont ceux auxquels nous n'avons pu attribués une règle algébrique dominante. Ils peuvent s'expliquer par une remise en cause de la granularité des types de tâche-en-acte ou par d'autres formes de stabilité que nous n'avons pas considérées (stabilité purement syntaxique sans aucun recours au sémantique des objets manipulés, stabilité non pas dans le pas de calcul même de l'élève mais dans l'enchaînement de ses pas...) mais il se peut aussi que cette forte proportion de comportements non stables dans l'erreur soit avant tout liée au domaine du calcul littéral. Après tout, un élève qui fait de nombreuses erreurs ne met probablement pas de sens aux objets algébriques qu'il manipule et n'a donc pas de « raison » de se comporter de la même manière à chaque fois que lui sont présentés ces objets. Il n'a pas de « technologie-en-acte » lui permettant de guider ses actions de manière stable.

Un trait commun à la fois aux comportements stables erronés et aux comportements instables erronés est que les élèves qui ont de tels comportements ne mettent pas en place la « bonne » technologie, qui leur fournirait les limites des techniques qu'ils connaissent, des moyens de contrôle ou encore de quoi produire de nouvelles techniques correctes.

Chapitre 7

Conclusion et Perspectives

7.1 Conclusion

Pour conclure, nous proposons de reprendre certaines questions formulées dans l'introduction ou dans les différents chapitres puis de s'attarder sur deux points-clefs de ces travaux qui permettront de présenter les résultats de cette thèse.

7.1.1 Synthèse

Nous avons commencé par chercher à définir le domaine de référence des activités où étaient mises en œuvre les connaissances que nous souhaitions modéliser. Le calcul littéral a pu être défini comme une activité dans le registre de l'écriture symbolique de l'algèbre qui consiste à effectuer des traitements sur des polynômes tout en conservant la dénotation. Cette définition a pu être obtenue sans référence à son véritable lieu d'existence : l'institution scolaire. Dans l'enseignement, le calcul littéral n'est, en fait, pas clairement défini, nous obligeant à modéliser ce qui avait trait à ce domaine afin de comprendre ce que l'institution propose, attend et enseigne à ses sujets. Grâce à la caractérisation du calcul littéral, établie indépendamment de l'enseignement, c'est-à-dire avant transposition, il a été possible de cibler les activités qui relevaient de ce domaine et ainsi, de répertorier les praxéologies ponctuelles du calcul littéral trouvées dans les manuels scolaires de 4^e et de 3^e. De ce travail préliminaire de caractérisation et de description sont ressorties trois idées (chapitre 1) : l'importance que prenait la matérialité syntaxique dans les transformations de polynômes (Hypothèse de recherche 1) ainsi que la notion de règle sans pour autant qu'il y ait un véritable travail d'enseignement sur ces notions et l'impression que l'institution scolaire visait un savoir plus large que les seuls types de tâche travaillés explicitement (Hypothèse de travail H_T2). Cette hypothèse de travail a abouti à l'idée de tester si les élèves étaient véritablement capables de mettre en œuvre la technique adéquate pour résoudre des tâches dépendant du savoir visé mais dont la technique de résolution n'est pas explicitement travaillée et consiste souvent en des itérations et combinaisons de techniques travaillées (Hypothèse de recherche 2).

Afin de gérer de grandes bases de données tout en ayant accès à l'activité détaillée de chaque élève, nous avons fait le choix d'utiliser un EIAH pour à la fois recueillir les observables et diagnostiquer les connaissances. Situer le logiciel choisi APLUSIX ainsi que ce logiciel tel qu'il serait si l'on implantait le modèle que nous avons construit parmi un ensemble de dix-sept autres EIAH a permis d'aboutir à l'idée que prendre en compte une théorie de l'enseignement était essentiel au développement d'un module de l'élève performant (chapitre 2). L'originalité d'APLUSIX d'être proche du cadre papier-crayon en laissant l'élève très libre de ses réponses ne nous a pas

empêchés de nous interroger sur les biais que son utilisation pouvait entraîner et de les limiter lors de nos expérimentations (pas de rétroaction ni de duplication d'expressions). Quant à l'automatisation du diagnostic, elle a nécessairement influencé, orienté voire parfois limité la modélisation des connaissances. Ainsi, parce que les capacités d'un ordinateur ne sont pas celles d'un être humain, nous n'avons pu nous contenter d'un algorithme de diagnostic balayant tous les possibles. Il a fallu l'orienter par la construction d'une heuristique prenant en compte la proximité syntaxique et sémantique des expressions, perdant ainsi certains diagnostics possibles. Cependant, les retombées de l'utilisation d'un EIAH ont surtout résidé dans la nécessité d'expliquer ce qu'une lecture manuelle aurait très probablement laissé dans l'ombre d'une information plus globale. Par exemple, un pas de calcul a été diagnostiqué comme une succession de transformations alors qu'il est possible qu'à la main, cela ait été limité à une modélisation globale faisant ressortir l'idée principale du pas. De même, l'algorithme de diagnostic implémenté dans le logiciel ANAïs a permis de proposer de nombreux diagnostics pour un même pas de calcul, nous obligeant à chiffrer leur probabilité de vraisemblance selon des critères tels que minimiser le nombre d'enchaînements d'erreurs ou le nombre de règles (Hypothèse [H73](#), chapitre 3). Informatiser le modèle local comme global nous a obligés à écrire des règles algébriques de manière probablement différentes de celles que nous aurions écrites à la main. Ainsi en est-il des règles de factorisation qui proposent de ne travailler que terme par terme et non sur la somme de termes, comme cela se fait en général. Enfin, les difficultés d'explicitation rencontrées lors de la construction de l'automatisation sont proches des difficultés que les élèves rencontrent : sens de lecture d'une égalité, besoin d'introduire des éléments sémantiques dans le codage des règles, généralité d'une règle et traitement de cas particulier, ...

La construction du modèle s'est faite en deux temps. Le modèle local repose sur une bibliothèque de règles algébriques correctes et erronées ainsi que sur un algorithme heuristique dit probabiliste. Il interprète un pas de calcul d'élève comme une liste de règles algébriques dont nous avons choisi de ne pas conserver l'ordre. L'enchaînement des pas de calcul n'a donc aucune incidence. Une liste de règles est attribuée au travail d'un élève, dont l'utilisation de chaque règle est mesurée par un coefficient qui tient compte du nombre de diagnostic et de leur vraisemblance. Un modèle plus global a été construit à partir du modèle local. Il repose sur l'hypothèse de recherche 3 consistant à penser que les élèves utilisent des règles algébriques différentes pour résoudre des tâches relevant pourtant d'un même type de tâche institutionnel. Cette hypothèse a été validée sur des expérimentations spécifiques pour les genres de tâche développer et factoriser. Ce modèle prend en compte la transversalité des activités de l'élève à la recherche de ce que nous avons considéré dans l'introduction comme inhérent à un travail sur les erreurs : la stabilité et la nécessité de donner du sens en reliant les erreurs entre elles. Ces deux idées transversales aux différents chapitres vont être développées dans les sections suivantes.

7.1.2 La question de la stabilité

La modélisation des connaissances s'est rapidement centrée sur la question de la stabilité des actions. D'une suite de règles permettant de reproduire un pas de calcul, le modèle est passé à une prise en compte des erreurs uniquement « significatives » pour l'élève. En voulant exclure de la modélisation les erreurs sporadiques, nous en sommes venus à nous intéresser aux erreurs montrant une stabilité inter-élèves pour ensuite, seulement, nous intéresser aux erreurs stables chez un même élève. Cette méthode repose sur l'idée que non seulement, c'est une pratique usuelle mais aussi qu'il était probable que les erreurs affichant une stabilité inter se retrouveraient en intra (Hypothèse [H74](#)). Nous avons alors proposé, dans le chapitre 5, le modèle global de praxéologie-en-acte qui permet de rendre compte tout aussi bien d'actions stables dans

un groupe d'élève que chez un seul élève, qu'elles soient conformes ou non à celles attendues par l'institution scolaire. Ce modèle se veut indépendant du domaine du calcul littéral dans lequel ont lieu les activités que nous souhaitons modéliser. Il est constitué des trois premières composantes du modèle praxéologique avec une granularité propre aux élèves. L'hypothèse de travail [H_T1](#) consistant à distinguer autant de types de tâche que de techniques, qui nous avait servi à décrire les attentes de l'institution dans le chapitre 1, s'avérait, à nouveau, exploitable ici. L'idée de la praxéologie-en-acte est, en effet, de construire autant de types de tâche-en-acte que de techniques-en-acte mises en œuvre par l'élève pour répondre à un même type de tâche institutionnel.

En fait, nous pouvons distinguer deux grandes catégories de types de tâche-en-acte. Il y a, d'une part, ceux dont les techniques de résolution consistent en des itérations ou des combinaisons des techniques institutionnalisées. Ces types de tâche-en-acte dépendent d'un même savoir visé que ceux dont les techniques sont travaillées par l'institution mais les itérations et combinaisons de techniques ne sont pas explicitement travaillées. Les itérations semblent mieux maîtrisées que les combinaisons ; elles consistent, en fait, dans nos travaux, en des activités de généralisation classiques en algèbre. En revanche, les combinaisons de techniques travaillées en classe posent des difficultés aux élèves. Ce résultat éprouvé à la fois sur des expérimentations spécifiques mais aussi à grande échelle valide l'hypothèse de recherche 2. D'autre part, il y a les types de tâche-en-acte dont les techniques de résolution sont bien directement celles travaillées par l'institution mais qui font appel implicitement à une convention d'écriture ou à une règle censées être maîtrisées par l'élève du niveau considéré. Pareils types de tâche-en-acte sont donc des déclinaisons des types de tâche institutionnels avec l'explicitation ou non de cette convention.

Les techniques-en-acte posent le problème du seuil à partir duquel nous acceptons de considérer qu'une action, une règle dans notre travail, peut prendre ce statut. Nous avons alors considéré le rapport entre le coefficient d'utilisation de cette règle et le nombre d'opportunité d'application de cette même règle. Le coefficient d'utilisation a pris en compte la possibilité qu'il y ait plusieurs diagnostics pour une même réponse d'élève et donc, dans nos travaux, plusieurs règles pouvant expliquer un même pas de calcul de l'élève (section 3.2.4). Cette notion de seuil a aussi suscité des questions autour de ce qu'il fallait considérer comme une expression présentant une opportunité d'application pour une règle. Nous avons considéré que les seules conditions d'appariement de la prémisse d'une règle avec une sous-expression n'étaient pas suffisantes pour être un critère d'opportunité (chapitre 4). Deux expressions ont été considérées comme présentant une opportunité d'appliquer une même règle si elles relèvent toutes deux d'un même type de tâche-en-acte. Pour savoir, alors, si deux expressions relevaient d'un même type de tâche-en-acte, il a été pris en considération la règle diagnostiquée par ANAÏS sur les transformations de ces expressions. Ainsi, l'opportunité d'appliquer une règle dépend de l'élève même et non de ce que l'expert perçoit.

Nous avons obtenu une forme de stabilité inter-élèves puisque nous avons établi un répertoire de seulement deux cents règles qui a permis de reproduire plus de 70% des pas de calcul provenant de plusieurs pays, différents niveaux et d'expérimentations variées (chapitre 3). Trente-six praxis-en-acte erronées ont été obtenues en inter-élèves, dont les six les plus nombreuses se sont aussi retrouvées comme étant les plus diagnostiquées en intra. Cependant, en intra-élève, toutes les praxis-en-acte erronées inter n'ont pas été diagnostiquées : une technique-en-acte ayant montré une forte utilisation dans un groupe d'élèves pour un certain type de tâche-en-acte n'a pas été nécessairement utilisée régulièrement par un même élève (chapitre 6). En fait, autant le nombre de praxis-en-acte erronées inter était « satisfaisant », autant le peu de capture des praxis-en-acte erronées intra a été « déroutant ». Sur de très grandes quantités de productions d'élèves, il a été finalement assez difficile d'obtenir des praxis-en-acte erronées intra : difficulté à confronter un

même élève plusieurs fois au même type de tâche-en-acte ou élèves ne semblant pas afficher une grande stabilité dans ses actions erronées. Cependant, cette forme d'instabilité ne remet pas en question la cohérence de ses actes. En effet, cette instabilité peut s'expliquer par le fait que l'élève ne mobilise pas, voire ne dispose pas d'une technologie correcte et il est, en fait, sensé qu'un élève qui ne met pas de sens ni à ce qu'il fait ni à l'expression qu'il lit ne réagisse pas systématiquement de la même manière. Aussi en avons-nous conclu que l'absence de technologie correcte était à l'origine aussi bien des praxis-en-acte erronées que des réponses erronées instables.

7.1.3 Les technologies-en-acte

Notre volonté à terme de regrouper d'une manière ou d'une autre les erreurs autour de grands thèmes possiblement explicatifs de leurs apparitions a influencé l'écriture et le choix des règles. En effet, c'est la présence d'une explication commune qui nous a poussé, entre-autre, à coder les règles a priori en des règles plus globales (par exemple, les règles de réduction de monômes qui permettent de regrouper toutes les erreurs de coefficient, versus de degrés), à généraliser certaines erreurs (par exemple, les règles de gestion de parenthèses) ou encore à insérer des éléments sémantiques dans le codage des règles (tels que le monôme regroupant ainsi les éléments x et $4x$ sous un même type d'argument).

Ce qui était sous-jacent à un tel travail était de supposer qu'un élève qui affiche une stabilité aussi bien dans ses actions correctes que dans l'erreur était sous-tendue par des éléments technologiques. C'est l'accès à une technologie-en-acte, selon nous, qui permettrait à l'élève de reproduire la même action face à des contextes similaires. Nous avons construit a priori cinq technologies-en-acte permettant d'expliquer la présence de la plupart des praxis-en-acte erronées diagnostiquées en inter : la présence d'implicites, une tendance à la concaténation, une utilisation abusive de la distributivité, un manque de maîtrise des parenthèses ou encore l'impact des formes prototypiques très présentes en calcul littéral pourraient en expliquer l'origine. Ces technologies-en-acte ont pu être parfois complétées par des éléments justificatifs et de contrôle en interrogeant quelques élèves sur leurs praxis-en-acte erronées. De ce regroupement des praxis-en-acte ponctuelles en locales est ressortie l'information que les erreurs diagnostiquées étaient, d'une part, liées à des tâches peu présentes dans les manuels et, d'autre part, d'origine avant tout syntaxiques. Les erreurs liées à des traitements qui ne portent que sur ce qui est visible, sans prise en compte de l'opérateur « implicite » ou du coefficient et du cofacteur « implicites » ont dominé.

En voulant considérer les élèves n'ayant pas nécessairement affiché une stabilité dans leurs comportements, nous avons pointé du doigt le non accès à une bonne technologie chez ces élèves. C'est, en effet, son absence qui peut expliquer que des élèves traitent différemment des tâches relevant d'un même type de tâche institutionnel, qu'ils les traitent avec constance ou non. L'analyse praxéologique des manuels scolaires (chapitre 1) avait indiqué le peu de liens technologiques entre les techniques présentées, laissant probablement à la charge de l'enseignant pareil travail. Ce travail technologique semble pourtant nécessaire pour la maîtrise du savoir visé par l'enseignement qui est plus global que les simples types de tâche explicites. Il passe non seulement par une mobilisation lors de la résolution de tâches différentes, comme le fait l'institution, mais aussi par une articulation explicite des trois aspects d'une technologie : explicatif, justificatif et de contrôle. Le seul changement de valeurs de variables de contexte n'est à lui seul pas suffisant pour « déstabiliser » la technique-en-acte erronée de certains élèves (chapitre 6). Ceux-ci sont capables de mettre en œuvre une technique-en-acte correcte face à certains types de tâche-en-acte et une erronée face à d'autres types de tâche-en-acte sans prendre conscience qu'ils relèvent tous du même type de tâche institutionnel. Ils ne sont pas « déstabilisés » puisqu'ils ne perçoivent

pas la « ressemblance » des tâches proposées. Le contrôle qu'ils ont de la forme à obtenir, qui se montre, par ailleurs, correct dans les exemples exploités, semble insuffisant pour les pousser à utiliser la bonne technique pour tous les types d'expressions algébriques.

7.2 Limites et Perspectives

Le propre de la modélisation est de faire des choix, de négliger ce qui ne semble pas important. Ces choix bien qu'expliqués, conscients et justifiés ont des conséquences importantes sur les résultats. Les remettre en question permet de relativiser les résultats et d'ouvrir le travail sur de nouvelles perspectives.

7.2.1 Autour de la stabilité : vers une prise en compte des enchaînements

La capture des praxis-en-acte repose sur les diagnostics établis automatiquement. Or, l'algorithme fonctionne nettement mieux sur des transformations correctes d'expressions algébriques qu'erronées. Ceci a pour conséquence que la proportion de praxis-en-acte correctes peut être « faussement » importante. De plus, l'algorithme a ses limites : non seulement, il peut se tromper mais il a été limité en termes de diagnostics proposés pour un pas de calcul. Ceci a pour conséquence que des pas de calcul ont pu ne pas être diagnostiqués voire mal diagnostiqués. Certes, un même pas de calcul recevra toujours le même diagnostic automatique mais il est possible qu'un pas de calcul un peu complexe soit attribué à une « mauvaise » règle ou à un « mauvais » enchaînement de règles, falsifiant les résultats de stabilité. Il serait donc intéressant de valider les résultats sur une lecture manuelle de protocoles émanant d'*expérimentations montées spécifiquement*. En effet, dans le même ordre d'idées, les protocoles exploités proviennent d'expérimentations variées, dont nous n'avons pas toujours pu maîtriser les conditions. Cela a pu influencer sur la capture des actions stables : un élève a pu avoir accès à des informations qui ont pu provoquer un changement de comportement. Monter des expérimentations spécifiques est délicat car cela nécessite de proposer plus de trois fois des tâches relevant d'un même type de tâche-en-acte, dans un laps de temps très restreint afin qu'un éventuel changement de comportement ne puisse être mis sur le compte d'un accès à une nouvelle information, cela provoquant, en contrepartie, une possible lassitude chez l'élève.

Sans remettre en question les diagnostics automatiques, il serait intéressant de relire *l'enchaînement temporel* du changement de règles associées à un même type de tâche-en-acte. En effet, un comportement diagnostiqué dans notre modèle comme instable peut peut-être afficher une évolution vers une amélioration. Après tout, l'instabilité est preuve d'apprentissage en cours d'acquisition. Le changement d'utilisation de règles algébriques peut peut-être révéler une évolution des connaissances, qui pourrait être révélée en analysant l'évolution des diagnostics.

Dans cette thèse, nous nous sommes limités à regarder les transformations-Anaïs indépendamment du pas de calcul et encore plus, de l'enchaînement des pas de calcul. L'algorithme d'association de règles algébriques pourrait, en fait, aussi bien servir à une *analyse verticale* des productions d'élèves. Il peut aisément conserver l'ordre des règles au sein d'un diagnostic. Des exploitations pourraient avoir lieu, permettant d'accéder à *de nouvelles formes de stabilité* :

- Cela permettrait peut-être de capturer des stratégies d'élèves, en considérant qu'une stratégie est un enchaînement stable de règles algébriques pour une consigne donnée.
- Plus proche de notre travail, cela permettrait de lire une transformation d'élève différemment de ce que nous avons proposé. Nous pensons, en particulier à deux types d'enchaînements exploitables. Le premier porte sur la gestion de la parenthèse : un élève qui transforme $a(b + c)(d + e)$ en $ab + ac(d + e)$ puis, dans un second pas de calcul, en

$abd + acd + abe + ace$ ou un élève qui transforme $(ax + b)^2$ en $ax^2 + 2abx + b^2$ puis, dans un second pas de calcul, en $a^2x^2 + 2abx + b^2$ ne maîtrise, certes, pas parfaitement la gestion de la parenthèse mais il a compris ce qui était en facteur ou ce sur quoi portait l'exposant. Le deuxième type d'enchaînements à prendre en compte serait pour permettre de différencier un processus de généralisation de celui d'itération. Par exemple, un élève qui a transformé $a(b + c + d)$ en $a(b + c) + ad$ n'a pas été considéré dans notre travail comme résolvant une tâche de développement de produit dont le deuxième facteur est une somme de trois termes. Ceci est lié à la reconstruction dynamique des types de tâche (en-acte ou non) : en fonction de la règle diagnostiquée (ici, $k(a + b) \rightarrow ka + kb$), le type de tâche est reconstruit. Or, si ce même élève transforme, dans un second pas de calcul, $a(b + c) + ad$ en $ab + ac + ad$ et que nous tenons compte de l'enchaînement, nous pourrions capturer le fait qu'il a résolu correctement une tâche relevant de ce que nous avons nommé *DvtSimple* > 2, en itérant le processus de développement.

- Par ailleurs, notre choix d'avoir choisi d'écrire des règles à unification étendue n'était peut-être pas le plus adapté pour modéliser des manipulations erronées d'ostensifs. Des éléments bien différents de ceux auxquels nous avons songés peuvent être à l'origine de changements de règles utilisées. Il se peut que ce qui guide l'élève soit bien au-delà de la simple transformation locale. Il se peut qu'au delà du type de règle utilisée, l'élève soit guidé par une forme syntaxique à obtenir à la fin de son exercice, par exemple, par une meta-technologie-en-acte transversale à ses activités et relativement indépendante de ses choix locaux.

Pour ces différentes raisons, une étude approfondie de l'enchaînement des règles avec une prise en compte temporelle semble une piste à exploiter afin de capturer d'autres formes éventuelles de stabilité.

7.2.2 Autour du modèle de praxéologie-en-acte

Le modèle a soulevé des questions autour de la notion de stabilité en mettant en exergue la différence entre une stabilité inter et une stabilité intra mais il a été exploité pour un domaine particulier où les procédures de résolution sont très algorithmiques. Elles se prêtent donc bien à une description très « technique ». Qu'en est-il donc de la *généricité* d'un tel modèle ? Il serait intéressant de l'utiliser pour d'autres types de connaissances. Cependant, le fait que les stabilités intra n'aient pas été aussi nombreuses qu'escomptées renforce, a posteriori, de ne pas avoir utilisé un modèle plus classique, plus naturel pour décrire les connaissances d'élèves. Utiliser notre modèle pour un domaine tel que la géométrie où les conceptions semblent exister sans conteste ne serait peut-être pas tout aussi judicieux même si le modèle praxéologique a déjà montré sa pertinence dans ce domaine pour décrire les praxéologies institutionnelles. D'avoir utilisé ce modèle nous a peut-être permis de révéler la co-existence de praxis-en-acte erronées avec des marques d'instabilité : cela nous a poussés à pointer du doigt l'*absence de la dimension technologique* dans l'enseignement du calcul littéral et en conséquence, dans les travaux des élèves.

Malgré tout, la dépendance au domaine de ce modèle reste à tester ; en particulier, l'aspect technologie-en-acte qui permet de justifier les techniques stables des élèves est une notion qui mérite d'être approfondie. Atteindre les technologies-en-acte s'est révélé difficile : difficile de les construire dynamiquement, difficile de les obtenir même en interrogeant directement l'élève. De nouveau, construire des expérimentations spécifiques pour interroger telle ou telle technologie-en-acte construite a priori paraît sensé. Cependant, les élèves de collège n'ont guère d'occasions d'exploiter les différentes fonctions des technologies (contrôle, justification, explication) dans le

calcul littéral en particulier. En effet, seul le contrôle de l'équivalence par une substitution numérique commence à être exploité en classes de collège mais justifier et expliquer ses transformations par des « lois » n'est pas (ou plus) d'actualité. Nous voyons trois perspectives à cette remarque. Premièrement, et c'est un retour sur la dépendance du modèle au domaine, il serait intéressant de déterminer si les technologies-en-acte ne peuvent pas être plus facilement atteintes dans un autre domaine. Dans le domaine de la géométrie, à nouveau, où des démonstrations rigoureuses sont demandées, se peut-il que l'accès aux technologies-en-acte soit plus aisé ? Plus aisé dans le sens où non seulement elles pourraient mieux s'exprimer (les élèves étant plus habitués à justifier leur travail) mais aussi se révéler. En effet, le fait que les élèves utilisent une géométrie « pratique », présente à l'extérieur de l'institution scolaire influe possiblement sur la présence de conceptions dans ce domaine, sur une forme de stabilité car certaines notions sont ancrées bien avant le moment où ils abordent la symétrie ou la notion d'aire... Deuxièmement, il serait intéressant d'aller interroger des *lycéens* qui, eux, commencent peut-être à pouvoir expliquer et exprimer ce qu'ils font. Les quelques interviews menées sur des élèves de seconde n'ont pas été concluantes mais le niveau de ces élèves était considéré comme très faible par l'enseignant. De plus, et nous en arrivons à la troisième perspective, interroger un élève n'est pas chose facile et mener un entretien demande certaines compétences. Les *entretiens d'explicitation* mis en place par Vermersch [Vermersch, 1996] semblent être judicieux pour accéder à des éléments technologiques de contrôle et d'explication des techniques que les élèves mettent en œuvre. Ils pourraient même permettre aux élèves d'accéder à la prise de conscience de l'existence d'une technologie correcte et de l'intérêt de la mobiliser.

Annexe A

Programmes et Documents d'accompagnement

A.1 Chronologie des apprentissages du calcul littéral de la 6^e à la 2^{nde}

CHRONOLOGIE DES APPRENTISSAGES : Calcul littéral

Classe de 6 ^e	Classe de 5 ^e	Classe de 4 ^e	Classe de 3 ^e	Classe de 2 ^{de}
<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Appliquer une formule littérale dans une situation familière à l'élève (aire du rectangle, longueur du cercle). <input type="checkbox"/> Utiliser un formulaire pour calculer une aire. <input type="checkbox"/> Trouver une formule exprimant le périmètre d'une figure en fonction d'une ou deux longueurs désignées par une ou deux lettres. 	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Utiliser les formules d'aires et de volumes (parallélogramme, triangle, disque, prisme droit, cylindre de révolution et configurations de 6^e). <input type="checkbox"/> Utiliser le vocabulaire terme d'une somme, facteur d'un produit. <input type="checkbox"/> Connaître les conventions d'écriture $2 \times a = 2a$. <input type="checkbox"/> Utiliser les expressions "en fonction de ", "est fonction de ". 	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Utiliser les formules d'aires et de volumes (pyramide, cône et configurations de 6^e et 5^e). <input type="checkbox"/> Connaître et utiliser l'égalité $d = v \times t$. <input type="checkbox"/> Utiliser des expressions littérales pour des calculs numériques. 	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Utiliser les formules d'aires et de volumes (sphère et configurations de 6^e, 5^e et 4^e). <input type="checkbox"/> Connaître la notion de variable, de fonction. 	
	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Connaître et utiliser les identités $k(a + b) = ka + kb$ $k(a - b) = ka - kb$ dans les deux sens. 	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Réduire une expression littérale à une variable du type : $3x - (4x - 2)$ ou $2x^2 - 3x + x^2$. <input type="checkbox"/> Sur des exemples littéraux, développer les expressions du type $(a + b)(c + d)$. 	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Connaître et utiliser les identités $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. <input type="checkbox"/> Maîtriser le développement d'expressions simples. <input type="checkbox"/> Maîtriser la factorisation d'expressions très simples. 	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée ...). <input type="checkbox"/> Modifier une expression : la développer, la réduire, la factoriser selon l'objectif poursuivi.
	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Tester si une égalité est vraie pour des valeurs numériques données. 	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques. 		
<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Savoir utiliser le signe =. <input type="checkbox"/> Calculer un nombre manquant dans une égalité (lettre non nécessaire). 	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Calculer un nombre manquant dans une égalité (la lettre peut être utilisée). 	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Mettre en équation un problème. 	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Mettre en équation et résoudre des problèmes (équations et inéquations à une inconnue, système d'équations à deux inconnues). 	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. <input type="checkbox"/> Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction.

A.2 Le statut de la lettre au collège, notion de variable.

Le tableau qui suit est extrait du projet 2007 de document d'accompagnement du programme de mathématiques pour le collège, intitulé « du numérique au littéral ». Il donne des éléments pour une programmation des apprentissages au collège et se veut une aide aux enseignants pour programmer les apprentissages sur les quatre années du collège.

	6 ^e	5 ^e	4 ^e	3 ^e
Statut de la lettre rencontré <i>Les statuts n'ont pas à faire l'objet d'une explicitation devant les élèves</i> Travail sur les formules	Variable <ul style="list-style-type: none">Utilisation de formules pour : - déterminer une grandeur dépendant d'autres grandeurs ; - déterminer par des procédures personnelles et dans des cas simples la valeur attribuée à une variable quand toutes les autres valeurs sont connues.Production de formules à une ou deux variables en réponse à la difficulté de formulation d'une méthode de calcul dans la langue naturelle.	Indéterminée Le travail engagé en 6 ^e sur les formules, qui n'était qu'une approche, devient un objectif du programme en 5 ^e .	Inconnue	Paramètre <ul style="list-style-type: none">Utilisation de l'expression littérale d'une fonction linéaire ou affine.
Résolution algébrique d'un problème			<ul style="list-style-type: none">Mise en évidence des limites d'une résolution arithmétique.Introduction d'une lettre pour désigner une valeur inconnue.Mise en équation d'un problème en introduisant au besoin des inconnues auxiliaires.	<ul style="list-style-type: none">Mise en équation et résolution d'un problème conduisant à une équation ou une inéquation du premier degré à une inconnue, un système de deux équations du premier degré à une inconnue, à une équation de la forme $A(x)B(x) = 0$ où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux expressions du premier degréRésolution d'un système de deux équations du premier degré à une inconnue.
Résolution d'équations, d'inéquations	<ul style="list-style-type: none">Utilisation d'égalités à trou.Première approche de la notion de solution d'une équation, notamment à l'occasion du travail sur la notion de quotient non décimal. L'emploi du mot équation n'est pas indispensable.	<ul style="list-style-type: none">Notion de solution d'une équation : rester à l'occasion de la résolution de problèmes si une égalité où figure un ou deux nombres indéterminés est vrai quand on leur attribue des valeurs numériques.	<ul style="list-style-type: none">Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.	<ul style="list-style-type: none">Résolution d'une équation de la forme $A(x)B(x) = 0$ où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux expressions du premier degréRésolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue.
Expressions littérales	<ul style="list-style-type: none">Utilisation d'un symbole ou d'une lettre pour désigner une grandeur variable dans une formule	<ul style="list-style-type: none">Utilisation et production d'expressions littérales à l'occasion de l'élaboration de formules ou de la traduction d'un programme de calcul.Mise en place des conventions d'écriture bc pour $b \times c$, $3a$ pour $3 \times a$ ou $a \times 3$ et des notations a^2 et a^3, sans	<ul style="list-style-type: none">Réduction d'une expression littérale à une variable, ce qui nécessite d'une part de maîtriser les conventions d'écriture mises en place et d'autre part les différences de signification d'écritures comme a, a^2 et a^3Travail sur l'aspect « structural »	<ul style="list-style-type: none">Distinction du rôle joué par les parenthèses dans les écritures comme $f(x)$ et $k(a + b)$.Détermination de l'expression algébrique d'une fonction linéaire ou affine.Factorisation d'une expression

		<p>rendre leur utilisation immédiatement obligatoire</p> <ul style="list-style-type: none"> • Travail sur l'aspect « structural » d'une expression, traduction du fait qu'un nombre est le suivant d'un nombre, qu'un nombre est multiple de 7, ... • Test avec des valeurs numériques de l'égalité de deux expressions littérales. • Justification de l'égalité (au sens de l'identité) de deux expressions littérales. 	<p>d'une expression : désignation d'un nombre impair, nombres qui se suivent ...</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reconnaissance de la forme d'une expression algébrique : somme, produit. Développement d'une expression de la forme $(a + b)(c + d)$ 	<p>algébrique dans laquelle le facteur est apparent.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Mise en place et utilisation des identités figurant aux programmes.
Calcul littéral et démonstration		<ul style="list-style-type: none"> • Utilisation du cadre algébrique pour démontrer des résultats arithmétiques comme la somme de deux nombres pairs est un nombre pair. • Utilisation du cadre algébrique pour démontrer des règles de calcul sur les quotients. 	<ul style="list-style-type: none"> • Démonstration de l'équivalence $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $ad = bc$. • Démonstration de $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ • Démonstration des règles liant ordre et opérations. • Démonstration de règles de calcul sur les quotients. • Démonstration de la « double distributivité » à l'aide de la distributivité. 	<ul style="list-style-type: none"> • Démonstration de la proportionnalité des accroissements dans le cas d'une fonction affine • Utilisation du cadre algébrique pour démontrer des résultats arithmétiques comme : <ul style="list-style-type: none"> - si d divise a et b, alors d divise $a - b$ et b et réciproquement ; - si d divise a et b, alors d divise b et r, reste de la division euclidienne de a par b, et réciproquement.

A.3 Extrait des programmes de collège des années 98

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
6ème		
Initiation aux écritures littérales.	Appliquer une formule littérale dans une situation familière à l'élève.	On entraînera l'élève à schématiser un calcul en utilisant des lettres qui, à chaque usage, seront remplacées par des valeurs numériques.
5ème		
Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.	Connaître et utiliser les identités : $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ dans les deux sens.	La distributivité est à connaître sous forme générale d'identité. La comparaison avec une formulation en français – « le produit d'un nombre par la somme de deux nombres est égal à la somme des produits du premier par chacun des deux autres »...– pourra être l'occasion de montrer un intérêt (en économie et précision) de l'écriture symbolique. On entraînera les élèves à la convention usuelle d'écriture bc pour $b \times c$, $3a$ pour $3 \times a$. Les applications donnent lieu à deux types d'activités bien distinctes : le développement qui correspond au sens de lecture de l'identité indiquée, et la factorisation qui correspond à la lecture « inverse » $ka + kb = k(a + b)$. Cette réversibilité se retrouve dans l'initiation à la résolution d'équations.
4ème		
	Réduire une expression littérale à une variable, du type: $3x - (4x - 2)$, $2x^2 - 3x + x^2$...	L'apprentissage du calcul littéral doit être conduit très progressivement en recherchant des situations qui permettent aux élèves de donner du sens à l'introduction de ce type de calcul. Le travail proposé s'articule sur deux axes : – utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques – utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes divers. Les situations proposées aux élèves doivent exclure tout type de virtuosité et répondre chaque fois à un objectif précis (résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique). On évitera en particulier les expressions à plusieurs variables introduites a priori.
Développement	Sur des exemples numériques ou littéraux, développer une expression du type $(a + b)(c + d)$. Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.	Les activités de développement poursuivent celles de 5 ^e en utilisant l'identité $k(a + b) = ka + kb$. L'introduction progressive des lettres et des nombres relatifs s'intégrant aux expressions algébriques représente une difficulté importante qui doit être prise en compte. À cette occasion, le test d'une égalité par substitution de valeurs numériques aux lettres prendra tout son intérêt. Le développement de certaines expressions du type $(a+b)(c+d)$ peut conduire à des simplifications d'écriture, mais les identités remarquables ne sont pas au programme. L'objectif est d'apprendre aux élèves à développer pas à pas ce type d'expression en une somme de termes. La factorisation d'expressions analogues à $x(3x+4) - 5(3x+4)$ n'est pas au programme.
3ème		
Écritures littérales ; identités remarquables	Factoriser des expressions telles que : $(x+1)(x+2) - 5(x+2)$; $(2x+1)^2 + (2x+1)(x+3)$. Connaître les égalités : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et les utiliser sur des expressions numériques ou littérales simples telles que : $1012 = (100+1)^2 = 100^2 + 200 + 1$, $(x+5)^2 - 4 = (x+5)^2 - 2^2 = (x+5+2)(x+5-2)$.	La reconnaissance de la forme d'une expression algébrique faisant intervenir une identité remarquable peut représenter une difficulté qui doit être prise en compte. Les travaux s'articuleront sur deux axes : – utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ; – utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes. Les activités viseront à assurer la maîtrise du développement d'expressions simples ; en revanche, le travail sur la factorisation qui se poursuivra au lycée, ne vise à développer l'autonomie des élèves que dans des situations très simples. On consolidera les compétences en matière de calcul sur les puissances, notamment sur les puissances de 10.

A.4 Extrait des programmes de 4^e des années 07

2. Nombres et Calculs

La pratique du calcul numérique (exact ou approché) sous ses différentes formes en interaction (calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine ou avec un ordinateur) permet la maîtrise des procédures de calcul effectivement utilisées, l'acquisition de savoir-faire dans la comparaison des nombres ainsi que la réflexion et l'initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre suivant la situation.

Le calcul littéral qui a fait l'objet d'une première approche en classe de cinquième, par le biais de la transformation d'écritures, se développe en classe de quatrième, en veillant à ce que les élèves donnent du sens aux activités entreprises dans ce cadre, en particulier par l'utilisation de formules issues des sciences et de la technologie.

Objectifs
<p><i>La résolution de problèmes</i> a pour objectifs :</p> <ul style="list-style-type: none"> d'entretenir et d'enrichir la pratique du calcul mental, du calcul à la main et l'utilisation raisonnée des calculatrices ; d'assurer la maîtrise des calculs sur les nombres relatifs et les expressions numériques ; de conduire les raisonnements permettant de traiter diverses situations (issues de la vie courante, des différents champs des mathématiques et des autres disciplines, notamment scientifiques) à l'aide de calculs numériques, d'équations ou d'expressions littérales ; de savoir choisir l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation.

Connaissances	Capacités	Commentaires
<p>2.1. Calcul numérique Opérations (+, -, ×, :) sur les nombres relatifs en écriture décimale. Produit de nombres positifs en écriture fractionnaire.</p> <p><i>* Opérations (+, -, ×) sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire (non nécessairement simplifiée).</i></p> <p><i>Division de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire.</i></p> <p><i>Enchaînement d'opérations.</i></p> <p>Puissances d'exposant entier relatif.</p> <p>[Thèmes de convergence]</p>	<p>- Calculer le produit de nombres relatifs simples.</p> <p>- Déterminer une valeur approchée du quotient de deux nombres décimaux (positifs ou négatifs).</p> <p><i>- * Multiplier, additionner et soustraire des nombres relatifs en écriture fractionnaire.</i></p> <p><i>- Diviser des nombres relatifs en écriture fractionnaire.</i></p> <p><i>- Connaître et utiliser l'égalité : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.</i></p> <p><i>- Sur des exemples numériques, écrire en utilisant correctement des parenthèses, des programmes de calcul portant sur des sommes ou des produits de nombres relatifs.</i></p> <p><i>- Organiser et effectuer à la main ou à la calculatrice les séquences de calcul correspondantes.</i></p> <p>- Comprendre les notations a^n et a^{-n} et savoir les utiliser sur des exemples numériques, pour des exposants très simples et pour des égalités telles que : $a^2 \times a^3 = a^5$; $(ab)^2 = a^2b^2$; $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$, où a et b sont des nombres relatifs non nuls.</p> <p>- Utiliser sur des exemples numériques les égalités : $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$; $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$; $(10^m)^n = 10^{m \times n}$ où m et n sont des entiers relatifs.</p>	<p>Les élèves ont une pratique de la multiplication des nombres positifs en écriture décimale <i>ou fractionnaire</i>. Les calculs relevant de ces opérations sont étendus au cas des nombres relatifs.</p> <p><i>*L'addition de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire demande un travail sur la recherche de multiples communs à deux ou plusieurs nombres entiers dans des cas où un calcul mental est possible.</i> Savoir additionner et soustraire des entiers relatifs et multiplier deux nombres positifs écrits sous forme décimale ou fractionnaire deviennent des capacités exigibles dans le cadre du socle commun.</p> <p><i>* Un travail est mené sur la notion d'inverse d'un nombre non nul ; les notations $\frac{1}{x}$ et x^{-1} sont utilisées, ainsi que les touches correspondantes de la calculatrice.</i></p> <p>À la suite du travail entrepris en classe de cinquième les élèves sont familiarisés à l'usage des priorités ainsi qu'à la gestion d'un programme de calcul utilisant des parenthèses. En particulier, la suppression des parenthèses dans une somme algébrique est étudiée.</p> <p>Pour des nombres autres que 10, seuls des exposants très simples sont utilisés. Les résultats sont obtenus en s'appuyant sur la signification de la notation puissance et non par l'application de formules.</p>

Connaissances	Capacités	Commentaires
<p>Notation scientifique.</p> <p>[Thèmes de convergence]</p>	<p>- Sur des exemples numériques, écrire et interpréter un nombre décimal sous différentes formes faisant intervenir des puissances de 10.</p> <p>- Utiliser la notation scientifique pour obtenir un encadrement ou un ordre de grandeur du résultat d'un calcul.</p>	<p>Par exemple, le nombre 25 698,236 peut se mettre sous la forme : $2,569\ 823\ 6 \cdot 10^4$ ou $25\ 698\ 236 \cdot 10^{-3}$ ou $25,698\ 236 \cdot 10^3$.</p>
<p>2.2. Calcul littéral</p> <p>Développement.</p> <p>Comparaison de deux nombres relatifs.</p>	<p>- Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.</p> <p>- Réduire une expression littérale à une variable, du type : $3x - (4x - 2)$, $2x^2 - 3x + x^2 \dots$</p> <p>- Développer une expression de la forme $(a + b)(c + d)$.</p> <p>- Comparer deux nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire, en particulier connaître et utiliser :</p> <ul style="list-style-type: none"> • l'équivalence entre $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $ad = bc$ (b et d étant non nuls) ; • l'équivalence entre $a \geq b$ et $a - b \geq 0$; • l'équivalence entre $a > b$ et $a - b > 0$. <p>- Utiliser le fait que des nombres relatifs de l'une des deux formes suivantes sont rangés dans le même ordre que a et b : $a + c$ et $b + c$; $a - c$ et $b - c$</p> <p>- Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ac et bc sont dans le même ordre (respectivement l'ordre inverse) que a et b si c est strictement positif (respectivement négatif).</p> <p>- Écrire des encadrements résultant de la troncature ou de l'arrondi à un rang donné d'un nombre positif en écriture décimale ou provenant de l'affichage d'un résultat sur une calculatrice (quotient ...).</p>	<p>L'apprentissage du calcul littéral est conduit très progressivement à partir de situations qui permettent aux élèves de donner du sens à ce type de calcul.</p> <p>Le travail proposé s'articule autour de trois axes :</p> <ul style="list-style-type: none"> - utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ; - utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ; - utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique). <p>Les situations proposées doivent exclure tout type de virtuosité et viser un objectif précis (résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique, établissement d'un résultat général).</p> <p>L'objectif reste de développer pas à pas puis de réduire l'expression obtenue. Les identités remarquables ne sont pas au programme. Les activités de factorisation se limitent aux cas où le facteur commun est du type a, ax ou x^2.</p> <p>La première équivalence est notamment utile pour justifier la propriété dite « d'égalité des produits en croix », relative aux suites de nombres proportionnelles.</p> <p>Le fait que x est strictement positif (respectivement x strictement négatif) se traduit par $x > 0$ (respectivement $x < 0$) est mis en évidence.</p> <p>Le fait que « comparer deux nombres est équivalent à chercher le signe de leur différence », intéressant notamment dans le calcul littéral, est dégagé. Ces propriétés sont l'occasion de réaliser des démonstrations dans le registre littéral.</p>
<p>Résolution de problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.</p>	<p>- Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.</p>	<p>Les problèmes issus d'autres parties du programme et d'autres disciplines conduisent à l'introduction d'équations et à leur résolution. À chaque fois sont dégagées les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.</p> <p>Les élèves, dans le cadre du socle commun, peuvent être amenés à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible.</p>

Annexe B

Différentes définitions ayant trait au calcul littéral

B.1 Extrait du dictionnaire des mathématiques élémentaires de [Baruk, 1992]

Développer, développable, développement

développer : v. tr., XII^e s., origine obscure; *développable* : adj., 1811; *développement* : n. m., XV^e s.

- a.** Déplier, étendre ce qui est enveloppé; on rencontre cette acception surtout au sens figuré : *développer un récit, une argumentation.*
b. Faire croître, donner de l'ampleur, de l'étendue : *développer le corps par l'exercice, l'esprit par la lecture, l'observation; des sociétés qui se développent grâce à une bonne gestion.*

1. Arithmétique et algèbre

a. Quand il est demandé de développer une expression donnée, c'est qu'elle a généralement la *forme d'un *produit et qu'on aimerait lui voir prendre la forme de ce qu'on appelle une *somme algébrique : il s'agit donc de *distribuer, soit un terme sur plusieurs, soit deux, soit plusieurs termes sur plusieurs. Par exemple :

- $a(b + c - d)$ est un produit; en distribuant le *facteur simple, a , sur les trois termes de la parenthèse, on aura développé ce produit :

$$\begin{array}{l} a(b + c - d) = ab + ac - ad \\ \text{forme produit} \quad \text{forme somme} \end{array}$$

- $(a + b)(c - d + e)$ est un produit; on le développe en distribuant, cette fois, les deux termes, a et b , du premier facteur sur les trois termes du second :

$$\begin{array}{l} (a + b)(c - d + e) = ac - ad + ae + bc - bd + be \\ \text{forme produit} \quad \text{forme somme} \end{array}$$

C'est sur le second exemple, mieux que sur le premier, que l'on voit apparaître l'idée de déploiement, de développement.

b. "Développer" est généralement suivi de *réduire (II, 2, b); on pourra voir que, lorsque des développements sont suivis de réductions de termes semblables, le résultat final prend parfois moins de place que l'énoncé, comme, en particulier, dans l'exemple bien connu de l'identité *remarquable :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

c. Le mot "développer" est souvent remplacé dans les énoncés par *effectuer.

d. ② "Développer" est souvent utilisé inutilement, et comme mécaniquement, semble-t-il, dans certains énoncés tels que "développer et réduire".

• $A = \frac{5x-8}{3} + \frac{4x-3}{2}$: comme il n'y a rien à développer, et que le calcul principal porte sur une réduction au même dénominateur, les auteurs de l'exercice ont peut-être voulu éviter de dire "réduire au même dénominateur, puis réduire", c'est-à-dire éviter d'utiliser *réduire (II, 3) dans deux sens différents. Dans ce cas, il est plus simple de demander d'effectuer puis de réduire.

• $B = 8 - (x + 5) + (3 - y)$: ici, l'utilisation de "développer" est complètement hors de propos, il suffit de demander de réduire.

2. Réduire une expression numérique ou littérale

a. Réduire, c'est 'compter ensemble' les termes semblables afin d'éviter la répétition, et certains exercices ne sont destinés qu'à cela. Par exemple, s'il est demandé de réduire l'expression :

$$A = 5 + a + 2b - 2 - 3a - b - 7 + 5b + 10a,$$

elle comporte trois 'sortes' d'unités, deux qui sont *littérales, les "a", les "b", et une qui est numérique. En comptant ensemble les "a", on en trouve 8 ; en recommençant avec les b, on en trouve 6 ; et en comptant "5" avec "- 2" et "- 7", on trouve - 4. D'où l'expression réduite de A :

$$A = 8a + 6b - 4.$$

b. Réduire est très souvent accompagné de *développer* dans l'expression "développer et réduire", où *développer (II, 1) se justifie généralement par le sentiment d'un déploiement de l'écriture, et *réduire* par le sentiment contraire, celui d'un resserrement, d'une 'diminution de volume'. Ces deux mots sont particulièrement indiqués quand ils prescrivent les calculs que mettent en jeu les *polynômes (II, IV). Par exemple :

$$P(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

est un polynôme en x du cinquième degré, puisqu'il est le *produit d'un facteur du premier degré par un facteur du quatrième degré.

L'expression produite par la distribution des deux termes du premier facteur sur les cinq du second comporte donc dix termes, c'est le développement ; les termes semblables, ici, se *neutralisent*, et, sur les dix termes obtenus, il n'en reste plus que deux, c'est la réduction.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\ &= x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \\ &\quad \text{développement} \\ &= x^5 - 1. \\ &\quad \text{réduction} \end{aligned}$$

c. Réduire est souvent remplacé par *simplifier.

B.2 Extrait du dictionnaire des mathématiques de [Bouvier et al., 1993]

Développement

Lorsqu'un produit AB est une factorisation d'une somme $C + D$ ou d'une différence $C - D$, on dit que le produit AB a pour développement la somme $C + D$ ou la différence $C - D$. Exemples : pour tous réels x , y et z , les sommes ou différences $xy - xz$, $x^2 + 2xy + y^2$, $5x^3y + 20xy^2 - 10xy$ sont respectivement les développements de $x(y - z)$ (distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction), de $(x + y)^2$ et de $5xy(x^2 + 4y - 2)$.

V. FACTORISATION, IDENTITÉ.

Annexe C

À propos des règles

C.1 Bibliothèque des règles SIM

Les règles SIM sont classées par genre de tâche : développement, réduction, factorisation. Auxquelles s'ajoutent les règles « faibles » et les deux règles de gestion d'introduction ou disparition du signe égal.

Le nom de chaque règle est donné. Souvent le nom de la règle peut être suffisamment explicite pour être comprise : le nom de la règle commence toujours par « *ER* » si la règle est erronée et par « *RES* » ou « *GEN* » si elle est correcte, le nom peut être parfois en anglais. Toutefois, il est souvent suivi d'un commentaire (com :) qui explique la règle soit avec une écriture algébrique soit en langue naturelle. À la suite du commentaire, si la règle SIM produit plus d'une règle détaillée, cela est notifié par un chiffre suivi de RD pour « règles détaillées ». Quelques abréviations sont utilisées : « dist. » pour « distribution », « SM » pour « signe moins », « Mult » pour multiplier, « RD » pour « règles détaillées ». Prenons l'exemple de :

ER_DistSum_Sum_OtherOp, com : $(a + b)\#(c + d) \rightarrow a@c + a@d + b@c + b@d;$
où # est plus ou Mult ; @ est Plus ou Mult différent de # ; 2RD

Cela signifie que la règle se nomme « ER_DistSum_Sum_OtherOp ». Elle est erronée (présence de « *ER* ») et distribue une somme sur une somme via un autre opérateur. En commentaires, on trouve la règle algébrique : $(a + b)\#(c + d) \rightarrow a@c + a@d + b@c + b@d$ avec des indications sur les opérateurs. Cette règle produit 2 règles détaillées.

La disposition suit la hiérarchie des règles : des sous-titres possibles en italique (ex : *DeveloppementAvecIdentite* suivi de *DeveloppementAvecIdentiteDg2*) et ensuite, les règles elles-même.

Ne sont pas données ni les règles d'arithmétique ni les règles de réduction basique telle que la transformation de $a + 0$ en a .

C.1.1 Les règles de développement

DeveloppementSimpleCorrect

RES_a_fois_somme2, com: dist. d'un terme sur une somme
 RES_a_fois_somme>2, com: dist. d'un terme sur une somme de plus de 2 termes
 RES_ax_fois_somme2, com: dist. d'un terme sur une somme
 RES_ax_fois_somme>2, com: dist. d'un terme sur une somme de plus de 2 termes
 RES_moins_a_fois_somme2, com: dist. d'un terme sur une somme
 RES_moins_a_fois_somme>2, com: dist. d'un terme sur une somme
 de plus de 2 termes

RES_moins_fois_somme, com: dist. de - sur une somme
 RES_moins_fois_somme2, com: dist. de - sur une somme de plus de 2 termes
 DeveloppementAvecIdentite, com: développement avec une identité remarquable
 DeveloppementAvecIdentiteDg2, com: développement avec une identité
 de degré 2
 RES_a+b_fois_a-b, com: développement de $(a+b)(a-b)$
 RES_a+b^2, com: développement de $(a+b)^2$
 RES_a-b^2, com: développement de $(a-b)^2$
 ER_ConfusionIR3, com: $(a-b)^2 \rightarrow (a+b)-(a-b)$
 RES_produit^n, com: $(abc)^n \rightarrow a^n*b^n*c^n$
 GEN_DistSumTimesSum, com: développement d'un produit de 2 facteurs
 GEN_DistTermTimesSumTimesSum, com: développement d'un produit de 3 facteurs
 ER_a_fois_somme>2, com: $a(b+c+d) \rightarrow ab+ac+d$
 ER_ax_fois_somme>2, com: $a(b+c+d) \rightarrow ab+ac+d$
 ErreurDistribution, com: dist. abusive
 ErreurDistributionOp, com: dist. abusive via l'opérateur donné;
 $a\#(b\ c) \rightarrow a\#b\ a\#c$
 ER_DistRight_Op, com: $a+(b+c) \rightarrow a+b+a\#c$;
 ER_DistRight_Minus, com: $a-(b+c) \rightarrow a-b+a\#c$;
 ER_DistLeft_Exp, com: $(b+c)^a \rightarrow b^a+c^a$;
 ER_DistSum_Sum_Op, com: $(a+b)+(c+d) \rightarrow a+c+a\#d+b+c+b\#d$;
 ER_DistRight_3Arg1, com: $a(b+c)(d+e) \rightarrow ab+ac+ad+ae$;
 ER_DistRight_3Arg2, com: $ax(b+c)(d+e) \rightarrow axb+axc+axd+axe$;
 ER_TermDistSumMultTermDistSum, com: $a(b+c)(d+e) \rightarrow ab+ac*ad+ae$;
 ErreurDistributionOtherOp, com: dist. abusive via un autre opérateur;
 $a\#(b\ c) \rightarrow a@b\ a@c$
 ER_Dist_OtherOp1, com: $a*(b+c) \rightarrow a+b+a@c$;
 ER_Dist_OtherOp2, com: $a+(b+c) \rightarrow a*b+a*c$;
 ER_DistMinus_OtherOp4, com: $a-(b+c) \rightarrow a@b+a@c$;
 où @ est Plus, Mult; 2RD
 ER_DistSum_Sum_OtherOp, com: $(a+b)\#(c+d) \rightarrow a@c+a@d+b@c+b@d$;
 où # est plus ou Mult;
 @ est Plus ou Mult différent de #; 2RD
 ER_DistSumMinusSum_OtherOp, com: $(a+b)-(c+d) \rightarrow$
 $a@(-c)+a@(-d)+b@(-c)+b@(-d)$;
 où @ est Plus ou Mult; 2RD
 ER_xx_vaut_x_Dvt, com: perte du carre dans le developpement,
 ex: $3x(2x+1) = 6x+3x$
 ER_Pertex_Dans_x^2Dvt, com: perte du x dans x^2 lors d'une dist.
 d'une somme sur somme,
 ex: $(2+7x)(3x+5) \rightarrow 6x+10+21^2+35x$;
 ER_Pertex_Dans_x^2Dvt2, com: perte du x dans x^2 lors d'une dist.
 d'un terme sur somme, ex: $7x(3x+5) \rightarrow 21^2+35x$;
 ErreurSignDistribution, com: erreur de signe dans le developpement
 ER_Moins_FoisNbNegatifsDeSomme, com: dist. du signe moins
 sur nbNegatifs seulement
 ER_Moins_FoisNbPositifsDeSomme, com: dist. du signe moins
 sur nbPositifs seulement

ER_Moins_FoisAucunDeSomme, com: aucune dist. du signe moins sur somme
 ER_PlusSum_OpposeSum, com: $+(a+b) \rightarrow -a-b$
 ErreurSupprBracket, com: suppression brute de parenthèses
 ER_SupprDbleBracketRough, com: $(x+2)(3+x) \rightarrow x+23+x$
 ER_SupprDbleBracket, com: $(x+2)(3+x) \rightarrow x+2*3+x$
 ER_SupprBracketLeft, com: $(a+b)c \rightarrow a+bc$
 ER_SupprBracketExp, com: $(a+b)^n \rightarrow a+b^n$
 ER_a_Fois1erDeSomme, com: $a(b+c) \rightarrow ab+c$
 ER_Moins_a_Fois1erDeSomme, com: $-a(b+c) \rightarrow -ab+c$
 ER_Moins_Fois1erDeSomme, com: $-(a+b) \rightarrow -a+b$
 ER_ax_Fois1erDeSomme, com: $ax^n(b+c) \rightarrow abx^n+c$
 ER_SupprBracketRough, com: $4(3+x) \rightarrow 43+x$
 ER_SupprDbleBracket_Add, com: $(x+4)(3+x) \rightarrow x+4+3+x$
 ER_SupprBracket1_Add, com: $4(3+x) \rightarrow 4+3+x$
 ER_SupprBracketProd_Add, com: $4(3x) \rightarrow 4+3x$
 ER_SupprBracket2_Add, com: $4x(3+x) \rightarrow 4x+3+x$
 ER_SupprBracket3_Add, com: $2x^2(-2-3x) \rightarrow 2x^2-2-3x$
 ER_Dvt_Puis_SupprDbleBracket, com: $a(b+c)(d+e) \rightarrow ab+ac(d+e)$

C.1.2 Les règles de réduction

ReductionPuissance, com: reduction d'une puissance
 RES_a^n^p, com: $(a^n)^p \rightarrow a^{(np)}$
 RES_a^2p, com: $(-a)^n \rightarrow a^n$, n pair
 RES_a^2p+1, com: $(-a)^n \rightarrow -a^n$, n impair
 ER_a^n^p, com: $(a^n)^p \rightarrow a^{(n+p)}$
 ER_a^2p, com: $(-a)^n \rightarrow -a^n$, n pair
 ER_a^2p+1, com: $(-a)^n \rightarrow a^n$, n impair
 ER_a^n_Donne_na, com: $a^n \rightarrow na$
 ER_ax^n_Donne_a^nx, com: $-ax^n \rightarrow -(a^n)x$ ou $ax^n \rightarrow (a^n)x$
 ER_Minusax^n_Donne_a^nx, com: puissance de x porte sur le coefficient négatif: $-ax^n \rightarrow (-a)^nx$
 ER_Minusax^n_Donne_Minusa^nx^n, com: $-ax^n \rightarrow -(a^n)x^n$
 ER_Minusax^n_Donne_a^nx^n, com: $-ax^n \rightarrow -(a^n)x^n$
 ER_ax^n_Donne_a^nx^n, com: $ax^n \rightarrow (a^n)(x^n)$
 ER_Exp_Sur_Signe, com: $-ab@[2n]c \rightarrow +ab@[2n]c$; ex: $-3^2 \rightarrow 9$
 ER_exp_Sur_Coef, com: $(ax)^n \rightarrow a^nx$
 GroupementAdditif, com: Groupement additif, Ex: $2x+3x \rightarrow 5x$
 RES_groupAdditifCoefRationnel, com: groupement additif, ex: $ax+bx \rightarrow (a+b)x$
 RES_groupAdditifGene, com: groupement additif coefs complexes, ex: $ax+bx \rightarrow (a+b)x$
 RES_groupAdditifNul, com: termes qui s'annule, ex: $ax-ax \rightarrow 0$
 SommeMonomes, com: Somme très variée de monômes
 SommeMonomes_SMCoeff, com: Somme de monômes avec erreur SM sur coef
 ER_Somme_Monomes_meme_dg, com: $ax^n+bx^n \rightarrow (a\#b)x^n$, où # est PlusOp, OpPlus ou OpPlusOp; 3RD
 ER_Somme_Monomes_MemeCoef_MemeDg, com: $ax^n+ax^n \rightarrow 0$;

ER_Somme_Monomes_DgDifferent_SMCoeff, com: $ax^n+bx^p \rightarrow (a\#b)x^{(n\ p)}$,
 où # est OpPlus, PlusOp ou OpPlusOp
 et est Plus, Max ou Min; 9RD
 GEN_Somme_Monomes_meme_dg, com: Somme correcte de 2 monômes
 ER_Somme_Monomes_Coeff1, com: $1x^n+ax^p \rightarrow ax^{(n\#p)}$,
 où # est Plus, Max ou Min; 3RD
 ER_Somme_Monomes_DgDifferent, com: $ax^n+bx^p \rightarrow (a+b)x^{(n\ p)}$,
 où est Plus, Max ou Min; 3RD
ErreurPriorite, com: erreur de priorité
 ER_AdditionPrioritaire, com: $a+cQU \rightarrow (a+c)QU$;
 a et b rationnels, U peut être vide;
 ER_SoustractionPrioritaireParenthese, com: $a-cQU \rightarrow (a-c)QU$;
 a et b rationnels,
 U peut être vide;
 ER_AdditionPrioritaire2, com: $a+bQ \rightarrow (a+b)Q$; a et b monômes;
 ER_SoustractionPrioritaireSimilitude, com: $uX-Xv \rightarrow u-v$;
 ER_SoustractionPrioritaireSimilitude2, com: $uX-X \rightarrow u$;
GroupementMultiplicatif, com: Groupement multiplicatif.
 RES_xx_g, com: $AA \rightarrow A^2$
 RES_xx^n_g, com: Groupement multiplicatif, Ex: $AA^n \rightarrow A^{(n+1)}$
 RES_x^nx^p_g, com: Groupement multiplicatif, Ex: $A^n*A^p \rightarrow A^{(n+p)}$
Produit_Monomes, com: Produit très varié de monômes d'une variable
 GEN_Produit_Monomes_meme_var, com: Produit correct de 2 monômes;
 ER_ProduitMon_DgDiff_PbDegre, com: $ax^n*bx^p \rightarrow (a*b)x^{(n\ p)}$,
 où est Max ou Min; 2RD
 ER_ProduitMon_MemeDegre, com: $ax^n*bx^n \rightarrow (a*b)x^n$;
 ER_Produit_Entiers, com: $a*b \rightarrow -ab$, où a et b sont des entiers;
 ER_ProduitMon_PbCoef, com: $ax^n*bx^p \rightarrow (a\#b)x^{(n+p)}$,
 où # est Multiplier, Plus, PlusOp,
 OpPlus, OpPlusOp; 5RD
 ER_ProduitMon_DgDiff_PbCoefDg, com: $ax^n*bx^p \rightarrow (a\#b)x^{(n\ p)}$,
 où est Max ou Min,
 et # est Mult, Plus, PlusOp,
 OpPlus ou OpPlusOp; 10RD
 ER_ProduitMon_MemeDegre_PbCoefDg, com: $ax^n*bx^n \rightarrow (a\#b)x^n$,
 où # est Mult, Plus, PlusOp,
 OpPlus, OpPlusOp; 5RD

C.1.3 Les règles de factorisation

FactorisationAvecIdentite, com: factorisation avec une identité
FactorisationAvecIdentiteDg2, com: factorisation avec une
 identité de degré 2
 RES_a^2-b^2, com: factorisation avec a^2-b^2
 RES_a^2+2ab+b^2, com: factorisation avec $a^2+2ab+b^2$
 RES_a^2-2ab+b^2, com: factorisation avec $a^2-2ab+b^2$
 ER_A2+B2CommeA2-B2, com: $a^2+b^2 \rightarrow (a+b)(a-b)$
 ER_2EnCarreEtCommeA2-B2, com: $2a+2b \rightarrow (a+b)(a-b)$

```

ER_ConfusionIRouLinearite, com: (a-b)(a-b) --> a^2-b^2
ER_ConfusionIR1, com: a^2-b^2 --> (a+b)(a+b)
ER_ConfusionIR11, com: -a^2+b^2 --> (a-b)(a+b)
ER_ConfusionIR2, com: (a+b)^2 --> (a+b)(a-b)
ER_A2+B2Linearite, com: a^2+b^2 --> (a+b)^2
ER_ConfusionIR111, com: a^2-b^2 --> (a-b)(a-b)
ER_ConfusionIR1111, com: a^2-b^2 --> (a-b^2)(a+b^2)
ER_a^2+2ab+b^2, com: a^2+2ab+b^2 --> (a+b)+(a+b)
ER_a^2+2ab+b^2_2, com: a^2+2ab+b^2 --> (a+b^2)(a+b^2)
ER_a^2-2ab+b^2, com: a^2-2ab+b^2 --> (a-b)+(a+b)
ER_a^2-2ab+b^2_2, com: a^2-2ab+b^2 --> (a-b^2)(a-b^2)
ER_a^2-2ab+b^2_3, com: a^2-2ab+b^2 --> (a-b)+(a-b)
FactorisationAvecIdentiteDg3, com: factorisation avec une
    identité de degré 3
ER_A3-B3errone1, com: x@[3]-1 --> (x-1)(x^2-1)
ER_A3-B3errone2, com: x@[3]-1 --> (x-1)(x^2+1)
FactorisationAvecIdentiteDgN, com: factorisation avec une
    identité de degré n
ER_2LineariteFact, com: na+nb --> (a+b)@[n]
FacteurCommun,
    FacteurCommunDiag,
ER_FacteurCommunDiagPerte2termes, com: UB+U --> U(B)
ER_FacteurCommunDiagPerte2termes2, com: UB+U^2 --> U(B)
ER_FacteurCommunDiagPerte2termesMoins, com: UB-U --> U(B)
ER_FacteurCommunDiagPerte3TermOuPlus, com: UB+UC+U --> U(B+C)
ER_FacteurCommunDiagPerte3TermOuPlus2, com: UB+UC-U --> U(B+C)
FacteurCommunNumDiag, com: ()
ER_FacteurCommunDiagPerte2termesNum, com: ()
ER_FactoCommunDansProduit, com: (c+a)(c+b) --> c(a+b)
ER_FactoProduitEnSomme1, com: ab+cb --> b+(a+c)
ER_FactoProduitEnSomme2, com: ab-cb --> b+(a-c)
ER_FactoSommeEnProduit2, com: ab+ca --> bca
ER_FactoSommeEnProduit3, com: ab-ac --> bca
ER_FactPerteCarre, com: a^2-b^2a --> a(a-b)
ER_FactPerteCarreErreurSigne, com: a^2-b^2a --> a(a+b)

```

C.1.4 Les règles faibles et règles de décomposition d'une relation

```

ErreurPerte, com: Perte opérateur ou argument algébrique
PerteOperateur, com: Perte opérateur algébrique
    ER_PerteMoins, com: Perte signe moins
PerteArgument, com: Perte argument
    ER_PerteArgumentSomme, com: Perte argument somme
    ER_PerteArgumentProduit, com: Perte argument produit
    ER_PerteNumerateur, com: Perte numérateur
    ER_PerteDenominateur, com: Perte denominateur
    ER_PerteExposant, com: Perte exposant
ErreurAjout, com: Ajout opérateur ou argument algébrique

```

ER_AjoutMoins, com: Ajout signe -
CalculFaux, com: calcul numérique erroné
ER_somme, com: Somme erronée, ex: $2+3 \rightarrow 4$
ER_Produit, com: Produit erroné, ex: $2*3 \rightarrow 5$
ER_Quotient, com: Quotient erroné, ex: $6/3 \rightarrow 4$
ER_EntierToRationnel, com: en forme fractionnaire
ER_grouptAdditif, com: groupement additif erroné, ex: $2x+3x \rightarrow 4x$
ER_grouptMultiplicatif, com: groupement multiplicatif erroné,
ex: $2*3x \rightarrow 5x$
RES_Exp2_En_Produit, com: $x^2 \rightarrow xx$
RES_Exp3_En_Produit, com: $x^3 \rightarrow xxx$

ConfusionRelation, com: décomposition d'une relation
ER_DisparitionRelation, com: Une relation disparaît
ER_IntroductionRelation, com: Une relation apparaît

C.2 Coefficients d'utilisation des règles diagnostiquées sur l'ensemble des expérimentations

La présentation des occurrences des règles reprend celle faite pour les règles a priori du chapitre 3.

C.2.1 Gestion de la parenthèse.

Règles	Instances	CU	
Distributivité abusive			
$a\Delta(b\Box c) \rightarrow$ $a\Delta b\Box a\Delta c$	$a + (b \times c) \rightarrow a + b \times a + c$	0	
	$a \times (b \times c) \rightarrow a \times b \times a \times c$	0	
	$a + (b + c) \rightarrow a + b + a + c$	12.2	
	$a - (b + c) \rightarrow a - b + a - c$	8.5	
	$(a + b) + (c + d) \rightarrow a + c + a + d + b + c + b + d$	2	
$(a\Box b)\Delta c \rightarrow$ $a\Delta c\Box b\Delta c$	$(a \times b) + c \rightarrow a + c \times b + c$	0	
	$(a \times b) \times c \rightarrow a \times c \times a \times c$	0	
	$(a + b) + c \rightarrow a + c + b + c$	0	
	$(a + b) - c \rightarrow a - c + b - c$	0	
	$(a + b)^n \rightarrow a^n + b^n$	167.8	
$a\Delta(b +$ $c)\Delta(d + e) \rightarrow$ $a\Delta b + a\Delta c +$ $a\Delta d + a\Delta e$	$a + (b + c) + (d + e) \rightarrow a + b + a + c + a + d + a + e$	0	
	$a \times (b + c) \times (d + e) \rightarrow a \times b + a \times c + a \times d + a \times e$	20.5	
	$a \times (b + c) \times (d + e) \rightarrow a \times b + a \times c \times a \times d + a \times e$	16.5	
$a\Delta(b + c) \rightarrow$ $a\Box b + a\Box c$	$a + (b + c) \rightarrow ab + ac$	11.8	
	$a + (b + c) \rightarrow a - b + a - c$	0	
	$a \times (b + c) \rightarrow a + b + a + c$	7.2	
	$a \times (b + c) \rightarrow a - b + a - c$	0	
	$a - (b + c) \rightarrow ab + ac$	14	
	$a - (b + c) \rightarrow a + b + a + c$	7.7	
	$(a + b) + (c + d) \rightarrow ac + ad + bc + bd$	17	
	$(a + b) - (c + d) \rightarrow ac - ad - bc - bd$	0	
	Distributivité partielle		
	$a\Delta(b + c) \rightarrow$ $a\Delta b + c$	$a(b + d + e) \rightarrow ab + ad + e$	8.3
$a - (b^- + b^+) \rightarrow a + b^- - b^+$		27.2	
$a - (b^+ + b^-) \rightarrow a + b^+ - b^-$		39.7	
Suppression brute de parenthèses			
$a\Delta(b + c) \rightarrow$ $a\Delta b + c$	$a \times (b + c) \rightarrow a \times b + c$	232.9	
	$a - (b + c) \rightarrow a - b + c$	152	
	$(a + b) \times (c + d) \rightarrow a + b \times c + d$	22.4	
$(a\Box b)\Delta c \rightarrow$ $a\Box b\Delta c$	$(a + b) \times c \rightarrow a + b \times c$		
	$(a + b)^n \rightarrow a + b^n$	69.4	
	$(a \times b)^n \rightarrow a \times b^n$	136.1	
Suppression de parenthèses avec changement d'opérateur			
À suivre ...			

... Suite		
Règles	Instances	CU
$a\Delta(b\Diamond c) \rightarrow a\Box b\Diamond c$	$a \times (b + c) \rightarrow a + b + c$	129.2
	$a \times (b + c) \rightarrow a\mathcal{N}at\ b + c$	21.9
	$(a + b) \times (c + d) \rightarrow a + b\mathcal{N}at\ c + d$	1.8
	$(a + b) \times (c + d) \rightarrow a + b + c + d$	20
	$(a + b) \times c \rightarrow a + b\mathcal{N}at\ c$	0
	$a - (b + c) \rightarrow a + b + c$	70.8
	$a + (b + c) \rightarrow a - b - c$	19.7
	$a \times (bc) \rightarrow a + bc$	4

TABLE C.1 – Coefficients d’utilisation des règles concernant la gestion de la parenthèse.

C.2.2 Développement d’identités remarquables.

Règles	CU
Règles correctes	
$(a + b)^2 \rightarrow a^2 + 2ab + b^2$	152,9
$(a - b)^2 \rightarrow a^2 - 2ab + b^3$	162,2
$(a + b)(a - b) \rightarrow a^2 - b^2$	48,5
Règles erronées	
$(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$	335,8
$(a + b)^2 \rightarrow a + b^2$	139,3

TABLE C.2 – Retour sur les règles correctes et erronées liées aux développements d’identités remarquables qui ont été diagnostiquées : règles où le CU est non nul.

C.2.3 Réduction de sommes de monômes.

$\Delta \backslash \Box$	Plus	Max	Min	n si n = p
Plus	292	11.8	106.9	23615
OpPlus	13.1	218.5	16.3	452.9
PlusOp	38.3	232	17.2	630.9
OpPlusOp	25.2	194.8	8.3	910.2
Proj _a (a, 1)	189	414.4	165.9	

TABLE C.3 – Retour sur les règles correctes et erronées liées aux réductions de somme de deux monômes de la forme $(a\Delta b)x^{n\Box p}$. Les trois premières colonnes concernent le cas où $n \neq p$. La dernière colonne a été ajoutée pour distinguer les cas corrects des cas erronés. Le cas correct correspond à la cellule grisée. La règle $ax^n + ax^n \rightarrow 0$ a été ajoutée comme un cas particulier. Son CU est de 142.

C.2.4 Réduction de produits algébriques.

$\Delta \backslash \square$	<i>Plus</i>	<i>Max</i>	<i>Min</i>	<i>Proj₂</i>
<i>Mult</i>		33.7	6.3	16.7
		221.3 si $n = p$		
<i>MultOp</i>	191.8	2.6	0	
		17 si $n = p$		
<i>Plus</i>	28.2	7	1.1	
		50.4 si $n = p$		
<i>OpPlus</i>	4.2	0.4	1	
		13.9 si $n = p$		
<i>PlusOp</i>	7.8	0.3	0.1	
		13.3 si $n = p$		
<i>OpPlusOp</i>	3.8	0.1	0	
		11.3 si $n = p$		

TABLE C.4 – Coefficients d'utilisation pour les règles des produits de deux monômes. Le cas où Δ vaut *Mult* et \square vaut *Plus* est exclu car correspondant au cas correct. Le cas $n = p$ a été ajouté comme un cas particulier car la règle $ax^n \times bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^n$ utilisait aussi bien l'opérateur *Max* que *Min*.

Règles	<i>CU</i>
$ax^n \rightarrow a^n x$	71.3
$-a^{2n} \rightarrow +a^{2n}$	40.8
$ax^n \rightarrow a^n x^n$	9.8
$(-u)^{2n} \rightarrow -u^{2n}$	45.5
$(u^n)^p \rightarrow u^{n+p}$	2.5
$u^n \rightarrow nu$	178.1

TABLE C.5 – Retour sur les règles correctes et erronées liées aux produits algébriques qui ont été diagnostiquées : règles où le *CU* est non nul.

C.2.5 Factorisation d'identités remarquables

Règles	<i>CU</i>
Règles correctes	
$a^2 - b^2 \rightarrow (a - b)(a + b)$	127,7
$a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow (a + b)^2$	185
$a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow (a - b)^2$	177,2
Règles erronées	
$a^2 + b^2 \rightarrow (a + b)(a - b)$	1
$a^2 - b^2 \rightarrow (a + b)(a + b)$	6
$a^2 + b^2 \rightarrow (a + b)^2$	1
$a^2 - b^2 \rightarrow (a - b)(a - b)$	2
$a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow (a - b^2)(a - b^2)$	5

TABLE C.6 – Retour sur les règles correctes et erronées liées aux factorisations d'identités remarquables qui ont été diagnostiquées : règles où le *CU* est non nul.

C.2.6 Factorisation

Règles	<i>CU</i>
Règle correcte	
$ab + ac \rightarrow a(b + c)$	859,7
Règles erronées d'extraction	
$a + ab \rightarrow a(b)$	107,9
$ab + ac \rightarrow a(-b + c)$	42,1
$ab + ac \rightarrow a(ab + c)$	39,5
$ba^n + ac \rightarrow a(b^n + c)$	19
$-ab + ac \rightarrow a(b + c)$	9
$ab + ac \rightarrow a(1 + c)$	8
$a + ab \rightarrow a(b)$	1,1
$abc + ad \rightarrow a(b + c + d)$	3
Autres règles erronées	
$ab + ca \rightarrow bca$	7,3
$ab - ac \rightarrow bca$	15,6
$ab + ac \rightarrow a + (b + c)$	8,3

TABLE C.7 – Retour sur les règles correctes et erronées de factorisation qui ont été diagnostiquées : règles où le *CU* est non nul. L'action erronée porte, dans ce tableau, sur le premier terme d'une somme de deux termes mais se généralise à n'importe quel terme grâce à la mise en place d'un système d'extraction.

C.2.7 Règles faibles et autres règles

Règles	<i>CU</i>
ER_DisparitionRelation	1916,1
ER_IntroductionRelation	550,7
ER_grouptAdditif	623,8
ER_grouptMultiplicatif	209,2
ER_PerteArgumentProduit	575
ER_PerteArgumentSomme	247,5
ER_PerteExposant	325,4
ER_PerteMoins	1245,1
ER_Produit	163,1
ER_Quotient	444,5
ER_RationnelToDecimal	477,5
ER_somme	788,7

TABLE C.8 – Retour sur les règles faibles erronées.

Annexe D

À propos d'Anaïs

D.1 Exemple de fichier de protocole brut et de protocole filtré.

D.1.1 Le protocole brut, lisible par le magnétoscope :

Ci-dessous un extrait de protocole brut qui est rejouable par le magnétoscope d'APLUSIX. On peut lire chaque déplacement de curseur.

```
;ACTIONS;#Heure=14:26:49;#TypeProbleme=Développer, réduire et ordonner
1;0.0;enonce;();0;9x-(-4+5x)-(5x+10);();(0 0 devant);rien;
2;6.4;nouvelle;();1;?;();(0 dedans);rien;
3;5.1;9;();1;9;();(derriere);rien;
4;1.1;x;();1;9x;();(1 derriere);rien;
5;2.6;+;();1;9x+?;();(1 dedans);rien;
6;1.2;4;();1;9x+4;();(1 derriere);rien;
7;4.5;-;();1;9x+4-?;();(2 0 dedans);rien;
8;1.2;5;();1;9x+4-5;();(2 0 derriere);rien;
9;1.0;x;();1;9x+4-5x;();(2 0 1 derriere);rien;
10;3.5;-;();1;9x+4-5x-?;();(3 0 dedans);rien;
11;1.1;5;();1;9x+4-5x-5;();(3 0 derriere);rien;
12;2.8;x;();1;9x+4-5x-5x;();(3 0 1 derriere);rien;
13;1.0;-;();1;9x+4-5x-5x-?;();(4 0 dedans);rien;
14;0.8;1;();1;9x+4-5x-5x-1;();(4 0 derriere);rien;
15;0.4;0;();1;9x+4-5x-5x-10;();(4 0 1 derriere);rien;
16;2.0;nouvelle;();2;?;();(0 dedans);rien;
17;5.0;placerCurseur;();1;9x+4-5x-5x-10;();(2 0 1 derriere);rien;
18;11.0;placerCurseur;();2;?;();(dedans);rien;
19;7.3;9;();2;9;();(derriere);rien;
20;0.7;x;();2;9x;();(1 derriere);rien;
21;6.8;-;();2;9x-?;();(1 0 dedans);rien;
22;0.4;6;();2;9x-6;();(1 0 derriere);rien;
```

D.1.2 Le protocole filtré, sur lequel se base Anaïs :

Le protocole filtré ci-dessous est une reconstruction du protocole brut de la section précédente. Il est exploitable par le logiciel ANAÏS.

Eleve hele; Développer, réduire et ordonner;
 $9x - (-4 + 5x) - (5x + 10)$; 19/11/2002; 14:26:49;

Etape 1, action 15, étape mère 0; transformation correcte;
(diag << $9x - (-4 + 5x) - (5x + 10) \rightarrow 9x + 4 - 5x - 5x - 10$ >>)
BUT : $9x - (-4 + 5x) - (5x + 10) \rightarrow 9x + 4 - 5x - 5x - 10$
SOUS-BUT : $-(-4 + 5x) - (5x + 10) \rightarrow 4 - 5x - 5x - 10$
transfo : $-(-4 + 5x) - (5x + 10) \rightarrow -(-4 + 5x) - 5x - 10; -(5x + 10) \rightarrow (-1)5x + (-1)10;$
SOUS-BUT : $-(-4 + 5x) \rightarrow 4 - 5x$
transfo : $-(-4 + 5x) \rightarrow 4 - 5x;$
RETOUR EN ARRIERE
RETOUR EN ARRIERE

Etape 2, action 22, étape mère 1; transformation ERRONEE;
(diag << $9x + 4 - 5x - 5x - 10 \rightarrow 9x - 6$ >>)
BUT : $9x + 4 - 5x - 5x - 10 \rightarrow 9x - 6$
SOUS-BUT : $4 - 5x - 5x - 10 \rightarrow -6$
transfo : $4 - 5x - 5x - 10 \rightarrow 4 - 10; -5x - 5x \rightarrow 4 - 10;$
transfo : $4 - 10 \rightarrow -6;$

D.2 Code de la distance sémantique entre deux expressions algébriques, écrit en Pascal.

```

function indice_prem_equiv(u,l:alo):integer;
var n:integer;
begin
result:=-1; n:=0;
while (result=-1) and (l<>nil) do
begin
if equivalent(nil,u,car(l)) then result:=N;
l:=cdr(l); inc(n);
end;
end;

function DistanceSEMlistes(l1,l2:alo):integer;
var n,i,j:integer;
begin
n:=longueur(l2);
l1:=copylist(l1);
l2:=copylist(l2);
for i:=0 to longueur(l1)-1 do
begin
j:=indice_prem_equiv(nth(l1,i),l2);
if j>=0 then l2:=del_nth(l2,j);
end;
result:=(100*longueur(l2)) div n;
end;

{function DistanceSEMlistes(l1,l2:alo):integer;
var ligne,mat,m1,m2,u,NumL1Pris,NumL2Pris,Ent100:alo; i,j,k,lemin:integer;
begin
// on forme la matrice de coût
mat:=nil; m1:=l1;
while m1<>nil do
begin
u:=car(m1); ligne:=nil; m2:=l2;
while m2<>nil do
begin
ligne:=cons(inttoent(DistanceSEMSur100(u,car(m2))),ligne);
m2:=cdr(m2);
end;
mat:=cons(nreverse(ligne),mat);
m1:=cdr(m1);
end;
mat:=nreverse(mat);
lier(mat);
}

```

```

result:=0; NumL1Pris:=nil; NumL2Pris:=nil;
Ent100:=inttoent(100);
for k:=1 to min(longueur(l1),longueur(l2)) do
  begin
  GetMinMatriceCout(mat,lemin,i,j);
  result:=result+lemin;
  NumL1Pris:=cons(inttoent(i),NumL1Pris);
  NumL2Pris:=cons(inttoent(j),NumL2Pris);
  fillLigne(mat,i,Ent100);
  fillCol(mat,j,Ent100);
  end;
lier(NumL1Pris); lier(NumL2Pris);
for k:=0 to longueur(l1)-1 do
  if memq(inttoent(k),NumL1Pris)=nil then result:=result+100;
for k:=0 to longueur(l2)-1 do
  if memq(inttoent(k),NumL2Pris)=nil then result:=result+100;
result:=result div (longueur(l1)+longueur(l2));

delier(mat); delier(NumL1Pris); delier(NumL2Pris);
//trace3('dist,distanceListesAC(#,#) = #',l1,l2,inttoent(result));
end; }

// distance sémantique entre 2 expressions
function DistanceSEMSur100(e1,e2:alo):integer;
begin
if (e1=Err) or (e2=Err) then result:=100
else if equivalent(nil,e1,e2) then result:=0
// ci-dessous : e1 et e2 ne sont pas équivalents
else if EstExprAtomique(e1) or EstExprAtomique(e2) then result:=100
else if EstMonomeEnt1Var(e1) or EstMonomeEnt1Var(e2) then result:=100
else if e1.operateur=e2.operateur then // même opérateur
  begin
  if e1.classtype=ExpUnaireNonEnt then result:=
    DistanceSEMSur100(car(e1.arguments),car(e2.arguments))
  else if e1.classtype=ExpBinaire then
    result:=(DistanceSEMSur100(car(e1.arguments),car(e2.arguments))
      +DistanceSEMSur100(cadr(e1.arguments),cadr(e2.arguments))) div 2
  else result:=DistanceSEMlistes(e1.arguments,e2.arguments);
  end
else result:=100; // 2 Expr d'opérateurs différents
end;

function NbFeuilles(e:alo):integer;
var args:alo;
begin
if EstExprAtomique(e) then result:=1
else
  begin

```

```
args:=e.arguments;
result:=0;
while args<>nil do
  begin
    result:=result+NbFeuilles(car(args));
    args:=cdr(args);
  end;
end;

function DistanceSEM(e1,e2:alo):integer;
begin
result:=(NbFeuilles(e2)*DistanceSEMsur100(e1,e2)) div 100;
end;

function SIMdistanceSEM(l:alo):alo;
begin
result:=inttoent(DistanceSEM(car(l),cadr(l)));
end;

function SIMdistances(l:alo):alo;
begin
result:=liste4(Sdistance,SIMdistance(l),Strtoch('distanceSEM'),SIMdistanceSEM(l));
end;
```

D.3 Qualifications des pas de calcul.

Une qualification est attribuée à chaque pas de calcul. Il y a 19 qualifications possibles, répertoriées ci-dessous. Le nom en gras de la qualification est suivi d'une explication.

Idem. Même expression modulo commutativité.

RedAddMon. Réduction dans une somme de monômes (moins de monômes).

AntiRedAddMon. Antiréduction dans une somme de monômes (plus de monômes).

MoveAutre. Autre mouvement.

Ajout. Ajout dans une expression.

Suppr. Suppression dans une expression.

Decompose. Décomposition d'une relation (ex : eq1 \rightarrow eq2 ou eq3).

MoveAddRel. Mouvement additif dans une relation.

MoveMultRel. Mouvement multiplicatif dans une relation.

AntiEffondre. Anti-effondrement (le degré formel augmente).

Effondre. Effondrement (le degré formel diminue).

CalculNum. Calcul numérique.

FactoPoly. Factorisation polynomiale.

DevelPoly. Développement polynomial.

AjoutParenthese. Ajout de parenthèses.

SuppParenthese. Suppression de parenthèses.

ReducAdd. Réduction additive.

AntiReducAdd. Anti-réduction additive.

Bizarre. Bizarre.

Annexe E

À propos des praxis-en-acte

E.1 Répartition des erreurs diagnostiquées avec prise en compte des types de tâche institutionnels

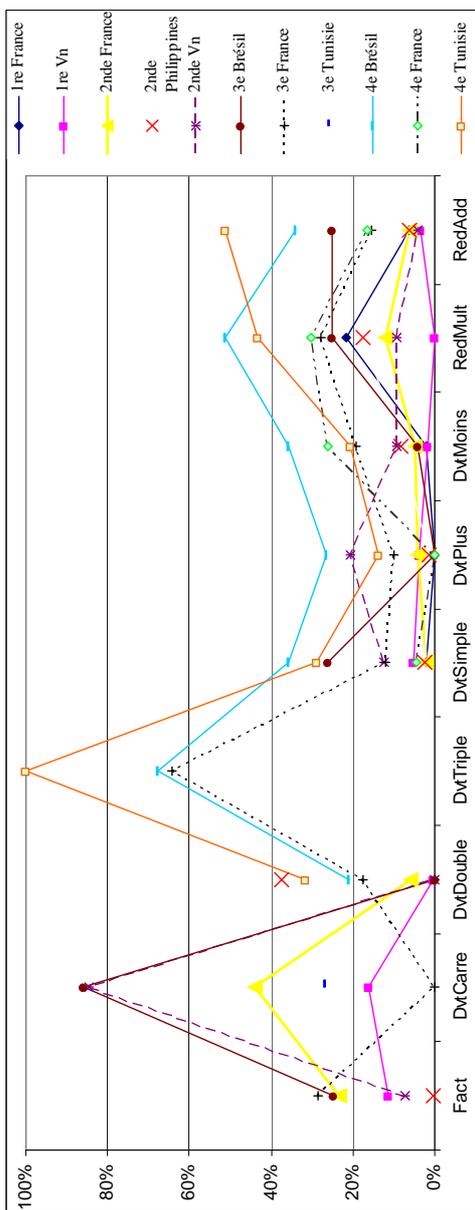


FIGURE E.1 – Pourcentage de règles erronées diagnostiquées sur la totalité des transformations-Anaïs en fonction du *type de tâche institutionnel* pour un niveau scolaire donné et un pays.

E.2 Taux d'utilisation des praxis-en-acte erronées diagnostiquées

Le tableau ci-dessous récapitule l'ensemble des types de tâche-en-acte, suivi des règles et de leur *CU*. Toutes les règles n'ont pas le statut de techniques-en-acte. Seules les règles attribuées a priori dans le chapitre 5 acquièrent ce statut. L'avant dernière colonne, intitulée « $|TA|$ », donne le nombre de fois où les élèves des expérimentations ont été confrontés au TA de la ligne concernée. La dernière colonne donne le rapport du *CU* sur $|TA|$, autrement dit, le taux d'occurrence de la règle en prenant en compte les types de tâche-en-acte. Les TA sont donnés par ordre alphabétique

TA	Règle	CU	$ TA $	Taux
DvtCarre	$(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$	168	396	42%
DvtCarre	$(a + b)^2 \rightarrow a + b^2$	69	396	18%
DvtDouble+MultNoVis	$(a + b)(c + d) \rightarrow a + b + c + d$	20	630	3%
DvtDouble+MultNoVis	$(a + b)(c + d) \rightarrow a + b \times c + d$	19	630	3%
DvtDouble+MultVis	$(a + b)(c + d) \rightarrow a + b \times c + d$	3	49	6%
DvtMoins	$-(a + b) \rightarrow a^+ - b^-$	27,2	3017,9	0,9%
DvtMoins	$-(a + b) \rightarrow a + b$	70,7	3017,9	2,3%
DvtMoins	$-(a + b) \rightarrow a^- - b^+$	39,7	3017,9	1,3%
DvtMoins	$-(a + b) \rightarrow -a + b$	152,1	3017,9	5,0%
DvtMoins+TermMoins	$-(b + c) \rightarrow -b + c$	19	390	5%
DvtMoins+TermMoins	$a - (b + c) \rightarrow ab + ac$	14	390	4%
DvtMoins+TermMoins	$-(b + c) \rightarrow b + c$	9	390	2%
DvtMoins+TermMoins	$a - (b + c) \rightarrow a - b + a - c$	9	390	2%
DvtMoins+TermMoins	$a - (b + c) \rightarrow a + b + a + c$	8	390	2%
DvtMoins+TermMoins	$-(a + b) \rightarrow a^- - b^+$	5	390	1%
DvtMoins+TermMoins	$-(a + b) \rightarrow a^+ - b^-$	3	390	1%
DvtPlus	$+(b + c) \rightarrow -b - c$	19,6	864,3	2,3%
DvtPlus+SumPlus	$(a + b) + (c + d) \rightarrow ac + ad + bc + bd$	17	468	4%
DvtPlus+SumPlus	$+(b + c) \rightarrow -b - c$	11	468	2%
DvtPlus+TermPlus	$a + (b + c) \rightarrow a + b + a + c$	12	113	11%
DvtPlus+TermPlus	$a + (b + c) \rightarrow ab + ac$	12	113	10%
DvtPlus+TermPlus	$+(b + c) \rightarrow -b - c$	9	113	8%
Dvtsimple+MultNoVis	$a(b + c) \rightarrow ab + c$	224	3122	7%
Dvtsimple+MultNoVis	$a(b + c) \rightarrow a + b + c$	126	3122	4%
Dvtsimple+MultNoVis	$a(b + c) \rightarrow aNat b + c$	22	3122	1%
Dvtsimple+MultVis	$a(b + c) \rightarrow ab + c$	9	143	6%
Dvtsimple+MultVis	$a(b + c) \rightarrow a + b + c$	3	143	2%
DvtSimple>2	$a(b + c + d) \rightarrow ab + ac + d$	8	397	2%
DvtTriple	$a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac(d + e)$	25	75	33%
DvtTriple	$a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac + ad + ae$	21	75	27%

À suivre ...

... Suite					
TA	Règle	CU	TA	Taux	
DvtTriple	$a(b+c)(d+e) \rightarrow ab+ac \times ad+ae$	17	75	22%	
Fact+3Term	<i>ER_NonFact</i>	6	43	14%	
Fact+CoFactId	<i>ER_NonFact + Rien</i>	12	50	23%	
Fact+CoFactId	<i>ER_CoFact1</i>	5	50	10%	
Fact+CoFactRien	<i>ER_Rien</i>	86	200	43%	
Fact+CoFactRien	<i>ER_NonFact</i>	4	200	2%	
Fact+CoFactRien+Sum	<i>ER_Rien</i>	68	122	56%	
Fact+CoFactRien+Sum	<i>ER_NonFact</i>	2	122	2%	
RedAdd+DegreInfEg2	$ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}$	316	22787	1%	
RedAdd+DegreInfEg2	$ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)}$	167	22787	1%	
RedAdd+DegreSup2	$ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}$	141	340	41%	
RedAdd+DegreSup2	$ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)}$	30	340	9%	
RedAdd+DegreSup2	$ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Max(n,p)}$	12	340	4%	
RedAdd+DgDiff	$ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}$	212	463	46%	
RedAdd+DgDiff	$ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)}$	185	463	40%	
RedAdd+DgDiff	$ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{Max(n,p)}$	66	463	14%	
RedAdd+MemeDegreInfEg2	$ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}$	226	22487	1%	
RedAdd+MemeDegreSup2	$ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}$	20	176	11%	
RedAdd+MemeDg	$ax^n + bx^p \rightarrow (a\Delta b)x^{n+p}$	248	23034	1%	
RedAddDgDiffCoefEgaux	$ax^n + x^p \rightarrow ax^{n\Box p}$	39	83	47%	
RedAddDgDiffCoefEgaux	$ax^n + bx^p \rightarrow (a-b)x^{n\Box p}$	14	83	17%	
RedAddDgDiffCoefEgaux	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a-b)x^{n\Box p}$	7	83	9%	
RedAddDgDiffMNoSide	$ax^n + x^p \rightarrow ax^{n\Box p}$	518	1232	42%	
RedAddDgDiffMNoSide	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a+b)x^{n\Box p}$	182	1232	15%	
RedAddDgDiffMNoSide	$ax^n + bx^p \rightarrow (a-b)x^{n\Box p}$	178	1232	14%	
RedAddDgDiffMNoSide	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a-b)x^{n\Box p}$	142	1232	12%	
RedAddDgDiffMSide	$ax^n + x^p \rightarrow ax^{n\Box p}$	49	183	27%	
RedAddDgDiffMSide	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a-b)x^{n\Box p}$	44	183	24%	
RedAddDgDiffMSide	$ax^n + bx^p \rightarrow (a-b)x^{n\Box p}$	37	183	20%	
RedAddDgDiffMSide	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a+b)x^{n\Box p}$	13	183	7%	
RedAddDgDiffNoCoef	$ax^n + x^p \rightarrow ax^{n\Box p}$	565	738	77%	
RedAddDgDiffNoCoef	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a+b)x^{n\Box p}$	55	738	7%	
RedAddDgDiffNoCoef	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a-b)x^{n\Box p}$	40	738	5%	
RedAddDgDiffNoCoef	$ax^n + bx^p \rightarrow (a-b)x^{n\Box p}$	31	738	4%	
RedAddMemeDgCoefEgaux	$ax^n + bx^p \rightarrow (a-b)x^{n\Box p}$	126	1833	7%	
RedAddMemeDgCoefEgaux	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a-b)x^{n\Box p}$	61	1833	3%	
RedAddMemeDgCoefEgaux	$ax^n + x^p \rightarrow ax^{n\Box p}$	19	1833	1%	
RedAddMemeDgMNoSide	$ax^n + bx^p \rightarrow (a-b)x^{n\Box p}$	461	17256	3%	
RedAddMemeDgMNoSide	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a-b)x^{n\Box p}$	450	17256	3%	
RedAddMemeDgMNoSide	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a+b)x^{n\Box p}$	257	17256	1%	
RedAddMemeDgMSide	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a-b)x^{n\Box p}$	271	5210	5%	
RedAddMemeDgMSide	$ax^n + bx^p \rightarrow (a-b)x^{n\Box p}$	164	5210	3%	

À suivre ...

... Suite				
TA	Règle	CU	TA	Taux
RedAddMemeDgMSide	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a + b)x^{n \square p}$	79	5210	2%
RedAddMemeDgNoCoef	$ax^n + x^p \rightarrow ax^{n \square p}$	68	3819	2%
RedAddMemeDgNoCoef	$ax^n + bx^p \rightarrow (a - b)x^{n \square p}$	67	3819	2%
RedAddMemeDgNoCoef	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a - b)x^{n \square p}$	60	3819	2%
RedAddMemeDgNoCoef	$ax^n + bx^p \rightarrow (-a + b)x^{n \square p}$	30	3819	1%
RedMultDegInitInfEg2	$ax^n \times bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^n$	366	2843	13%
RedMultDegInitSup2	$ax^n \times bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^{Max(n,p)}$	14	60	23%
RedMultDegInitSup2	$ax^n \times bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^{Min(n,p)}$	7	60	12%
RedMultDegInitSup2	$ax^n \times bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^n$	5	60	8%
RedMultMemeDg	$ax^n \times bx^n \rightarrow (a\Delta b)x^n$	371	2903	13%

TABLE E.1 – Taux d'utilisation des praxis-en-acte erronées dans l'ensemble des expérimentations. Les taux sont arrondis à l'unité.

Annexe F

Interviews

Ci-dessous se trouvent les transcriptions de différentes interviews. En début de phrase, [I] signifie l'interviewer et [E_X], l'élève X. En italique se trouvent des commentaires précisant au lecteur ce qu'il ne peut pas voir.

F.1 Élève E_V de 3^e

Suite à une expérimentation, il a été diagnostiquée la praxis-en-acte erronée (*CoFactRien + Sum, ER_Rien*) chez l'élève E_V. Elle est interrogée sur ce qu'elle a produit. Pour cela, l'interviewer lui fait visionner son travail au magnétoscope d'APLUSIX.

Expression concernée : $(x - 4) + (x - 4)x$.

Réponse de l'élève : $(x - 4)(x)$

I : Tu avais $(x - 4) + (x - 4)x$ à factoriser. Voilà ce que tu as fait.
[I] rejoue le travail de E_V au magnétoscope.

Alors, qu'as-tu voulu faire, là ?

E_V : J'ai voulu mettre $(x - 4)$ en facteur commun.

I : Oui. Et après t'as fait quoi ?

E_V : Ben j'ai fini, là. J'ai mis x en... je sais pas comment ça s'appelle...
Silence

I : Qu'est-ce que tu as voulu faire ?

E_V : ... Là, en fait, je laisserai comme ça. Je ne changerai pas d'avis.

L'élève fait référence à un exercice précédent où elle aurait fourni une réponse différente de ce qu'elle avait produit au cours de l'expérimentation.

I : Hum, hum. Et alors, tu peux m'expliquer ?

E_V : ...

I : Donc, $(x - 4)$, tu m'as dit que tu voulais le mettre en facteur ?

E_V : Ouais...

Silence

I : Est-ce que tu peux me donner un exemple, de quelque chose d'un peu similaire ? Invente un exercice que tu aurais à donner à une camarade et sur lequel tu pourrais faire un peu le même genre de réponse.

L'élève s'exécute, en écrivant l'expression $(-8 + x) + (-8 + x)7$.

I : Hum, hum. Et alors, tu répondrais quoi ?

E_V : Ben...

L'élève s'exécute et fournit la réponse $(-8 + x)7$.

I : Et comment tu lui expliquerais ?

E_V : Ben, ça [E_V désigne l'expression $(-8 + x)$], comme il est du chaque côté du +, ... dans les deux...

Silence

I : « Termes », ça, ça s'appelle un « terme » : de « chaque côté du plus », comme tu dis.

E_V reprend : Comme il est dans les deux termes, on s'en sert de facteur commun et... Voilà !

I : Et comment tu complètes, après ? Ce qui est entre parenthèses ?

E_V : Ben, ce qui reste dans chaque terme, en enlevant le facteur commun !

I : Donc ?

E_V : Donc, ici, il reste un 7.

I : Hum, hum.

E_V : Et dans l'autre, rien.

Expression concernée : $(x + 1)(x + 2) + (x + 1) - (5x + 5)x$.

Réponse de l'élève : $(x + 1)(x + 2 - (5x + 5)x)$

I : Comment as-tu fait ?

E_V : Là, je me suis trompée. J'ai cru que le $(x + 1)(x + 2)$ était un terme et $(x + 1) - (5x + 5)x$, c'était un autre terme. Mais en fait, $(x + 1)(x + 2)$ sont multipliés l'un par l'autre alors que $(x + 1)$, il est soustrait à $(5x + 5)x$. Euh, non c'est l'inverse, $(5x + 5)x$ est soustrait à $(x + 1)$. Ce ne sont pas des facteurs.

I : En fait, il y a combien de termes, là ?

E_V : Trois. Et j'en avais vu deux.

I : Si tu avais à refaire l'exercice maintenant ?

E_V : ...

I : Déjà est-ce que tu vois un facteur commun ?

E_V : Ben le facteur commun, il n'est que dans deux termes. Donc...

I : Tu ne le vois pas dans le troisième ?

E_V : Non. Ah, si ! Il faut multiplier par 5.

I : Hum.

Silence

E_V : C'est $x + 1$, le facteur commun !

I : Oui, alors comment ferais-tu ?

E_V : Je ferais...

I : Tu peux le faire sur la feuille, si tu veux.

E_V : Non, c'est bon. Ca fait : $(x + 1)(x + 2 - 5(x + 1))$!

I : Redis le, s'il te plaît.

E_V : $(x + 1)(x + 2 - 5(x))$! Euh, non, attends... Comme on l'a enlevé, il n'y ait pas... Oui, c'est ça : $(x + 1)(x + 2 - 5(x))$!

Expression concernée : $(8y - 5)(6y + 3) + (8y - 5)$.

Réponse de l'élève : $(8y - 5)(6y + 3)$

E_V : J'ai supprimé $8y - 5$ et il ne réapparaît pas dans le deuxième. . . N'empêche que je ne vois pas pourquoi j'ai faux. C'est ça que je ne comprends pas.

L'élève voit qu'il y a une erreur car lorsqu'une activité est rejouée avec le magnétoscope d'APLUSIX, la non-équivalence des expressions est précisée.

I : Ici, si tu prends le $(8y - 5)$, il reste quoi ici ?

E_V : $6y + 3$.

I : Et puis tu veux le prendre ici, et il reste quoi ici ?

E_V : Rien.

I : Et le « rien » c'est quoi ?

E_V : Ben, rien !

I : C'est quoi, la technique inverse de la factorisation ?

E_V : . . .

I : Qu'est-ce qui te permet de passer de là à là ?

E_V : Développer.

I : Oui. Alors, essayons de développer cela. Est-ce que l'on obtient ça ?

E_V : Non.

L'élève voit qu'il y a une erreur mais ne la trouve pas.

I : Bon, ce n'est pas grave. On le reverra.

Retour sur l'expression : $(x - 4) + (x - 4)x$.

Rappel de la réponse de l'élève : $(x - 4)(x)$

I : D'accord. C'est terminé. Je vais maintenant t'expliquer tes erreurs. On prend $(x - 4)$ en facteur. C'est vrai, il apparaît à la fois dans ce terme et dans ce terme là. On le prend, on le met en facteur. Ça fait $(x - 4)$ facteur de . . . , de quoi ? De x , qui vient d'ici. Plus de quoi ?

E_V : De rien.

I : Mais c'est quoi le « rien » ?

E_V : C'est un zéro.

I : C'est un zéro ? !

E_V : J'en sais rien.

I : En fait, si tu devais multiplier par quelque chose qui ne change pas l'expression ?

E_V : 1.

I : Oui. Ce serait $\times 1$.

E_V : Ah ouais donc partout il faudrait que je mette $\times 1$.

I : C'est-à-dire ?

E_V : Ben. . . $(x - 4)(x + 1)$.

I : Oui. Et d'ailleurs, si tu développes $(x - 4)(x + 1)$, ça fait quoi ?

E_V : Ça fait. . . $(x - 4) + (x - 4)$.

I : Tu peux l'écrire, si tu veux.

E_V : $(x - 4)(x) + (x - 4)$.

I : Est-ce que c'est bien la même chose que ça ?

E_V : Oui. Ah oui... D'accord!

I : On peut en revoir d'autres, si tu veux.

Les autres expressions sont revues et corrigées correctement par l'élève.

F.2 Élève E_M de 3^e

Expressions concernées :

7. $2x^2 + 2$,

9. $(3x + 7)^2(x + 1) - (3x + 7)$,

10. $(x + 8) + (2x - 1)(x + 8)$,

11. $(x + 1) + 3(x + 1)^2$,

12. $(x + 1)(x + 9) - (x + 1)$,

15. $(x + 4)(2x - 7) + 2x - 7$.

I : Je voulais te poser quelques questions sur ce que tu as fait, sur les factorisations que tu as faites et sur certaines en particulier. Tu vas essayer de m'expliquer les étapes que tu as faites. Qu'est ce que tu t'es dit dans ta tête pour factoriser ces expressions ?

E_M : Je vais essayer.

I : Donc on va commencer par la dix, ça c'est l'énoncé et voilà ce que tu as fait. Essaie de m'expliquer un peu pourquoi t'es passée de cette expression à cette expression.

[I] fait référence à l'expression $(x + 8) + (2x - 1)(x + 8)$ que E_M a transformé en $(x + 8)(2x - 1)$.

E_M : En fait j'ai vu que dans l'énoncé de départ, il y avait deux fois le même facteur donc $x+8$ de chaque côté du signe + donc je l'ai réduit en... à un facteur et j'ai rajouté la suite après, pour que ce soit plus facile.

I : D'accord et pour la onze ?

[I] fait référence à l'expression $(x+1)+3(x+1)^2$ que E_M a transformé en $(x+1)[(x+1)+3]$.

E_M : Alors celle là, je l'ai faite au brouillon parce que j'ai eu du mal. J'ai vu que de chaque côté du plus, il y avait $x + 1$ mais que, à droite, il était au carré donc je l'ai développé, ça $x + 1$ facteur de $x + 1$. Donc après c'était plus facile pour moi de factoriser. Donc je l'ai mis une fois en facteur ici et après, pour écrire la suite je l'ai mis une deuxième fois et j'ai rajouté le 3 qui était ici.

I : Alors comment tu sais que c'est ça qu'il fallait que tu écrives ? Ta grande parenthèse là, $x + 1 + 3$?

E_M : Bah je sais que avec ce que j'ai appris c'est ça qu'il fallait faire. Il fallait la réduire au maximum et rajouter la suite de l'expression dans la parenthèse.

I : Et là, la suite de ton expression c'est quoi ?

E_M : C'était +3, enfin il restait que +3 donc je l'ai mis après le $x + 1$.

I : Et le $x + 1$, il vient d'où ? Celui qui est dans la grande parenthèse ?

E_M : Et ben, il vient du développement de $(x + 1)^2$.

- I : Et pour la douze ?
[I] fait référence à l'expression $(x+1)(x+9)-(x+1)$ que E_M a transformée en $(x+1)(x+9)$.
- E_M : Ah bah la douze, c'est pareil. J'ai fait, en fait je fais un schéma pratiquement à chaque expression. Je prends le signe soit + soit -, je fais un petit... Enfin, je souligne les facteurs de chaque côté du signe et je regarde celui qui est en commun. Je l'entoure et comme ça je sais bien que c'est celui là qu'il faut mettre en facteur et je rajoute la suite comme ce que j'ai fait...
- I : Est-ce que tu peux m'écrire ce que tu fais, ça tu le fais au brouillon ?
- E_M : Ouais. Ça, c'est ce que je faisais au début quand je n'y arrivais pas trop après c'est devenu automatique.
- I : Oui, d'accord.
- E_M : Donc là, j'ai souligné les expressions de chaque côté du moins et j'entoure le facteur commun et après c'est plus facile pour moi de voir ce qu'il reste.
- I : Alors comment tu reconnais ce qu'il reste ici ?
- E_M : Je vois que c'est le seul truc qui n'était pas entouré donc $x + 9$, donc je sais que c'est ça qu'il faut que je mette après $x + 1$.
- I : Et pour la sept : $2x^2 + 2$?
[I] fait référence à l'expression $2x^2 + 2$ que E_M a transformée en $2(x^2 + 1)$.
- E_M : Là je fais pareil. Je peux écrire ?
- I : Oui, oui, vas-y.
- E_M : Donc je regarde de chaque côté du + donc je fais pareil le petit schéma. Je vois que c'est 2 le facteur donc je le mets devant la parenthèse et je mets ce qu'il reste. C'est $x + 2$, enfin x au carré plutôt, et euh... comme je vois que sinon ça fera pas l'énoncé de départ. Ça fera que $2x$ au carré. Il faut que je rajoute 1 pour que ça fasse +2. Donc après on peut vérifier en développant : $2x^2$, plus 2 fois 1, ça fait 2 donc +2.
- I : Donc là, tu essaies de revenir à ton énoncé de départ ?
- E_M : Ouais, voilà.
- I : Et pour les autres expressions dont on a parlé avant celle qu'on vient de voir, la dix, la douze ? Là, est ce que tu essayes de revenir au départ pour voir si... ?
[I] fait référence aux expressions précédentes $(x+8)+(2x-1)(x+8)$ et $(x+1)(x+9)-(x+1)$ sur lesquelles E_M a appliqué la technique-en-acte ER_Rien.
- E_M : Non, là j'avais pas vraiment le temps donc là, comme elle était assez courte, j'ai vu qu'elle était facile à faire.
- I : D'accord pour la quinze ?
[I] fait référence à l'expression $(x+4)(2x-7)+2x-7$ que E_M a transformé en $(2x-7)(x+4)$.
- E_M : Pour la quinze, là je me suis dit que là, il y avait des parenthèses que c'était comme si il y avait des parenthèses donc j'ai fait pareil, j'ai fait le même procédé. J'ai vu que c'était $2x-7$ le facteur et après j'ai rajouté la suite qui était $x+4$.
- I : La neuf ? *[I] fait référence à l'expression $(3x+7)^2(x+1)-(3x+7)$ que E_M a transformé en $(3x+7)[(3x+7)-(x+1)]$.*
- E_M : Bah là, j'ai développé enfin j'arrivais pas trop à faire du premier coup donc j'ai réécrit toute l'expression développée donc $3x+7$ facteur de $3x+7$ et euh après, j'ai fait le même schéma. J'ai vu que c'était $3x+7$ le facteur et je l'ai mis devant le crochet et je l'ai réduit

enfin je l'ai mis deux fois au lieu de trois dans l'énoncé et après j'ai rajouté le $-x + 1$. Après dans les crochets j'ai développé parce que $-x + 1$ ça fait $-x - 1$ après j'ai additionné les x avec les x et les nombres entiers avec les nombres entiers et après ça fait le résultat.

I : Et là est-ce que tu as procédé pareil en entourant et en regardant ?

E_M : Ouais bah, comme ceux là, ils sont un peu compliqués et que je suis super anxieuse de me tromper Bah... je préfère faire comme ça.

I : Je vais te montrer quelques productions d'élèves et tu vas me dire si tu penses qu'ils ont juste ou faux et me justifier ta réponse. Donc ici pour la dix.

[I] fait référence à l'expression $(x + 8) + (2x - 1)(x + 8)$ qui a été transformée par un autre élève en $(x + 8)(1 + 2x - 1)$.

E_M : Bah déjà, il a bien vu que c'était le facteur commun $x + 8$. Par contre, je sais pas pourquoi il a mis 1 parce qu'il suffisait juste de rajouter $2x - 1$. Bah là, je pense qu'il s'est trompé, qu'il a voulu faire comme dans celle-là comme dans la sept, mettre 1 pour que ça fasse l'énoncé de départ, sauf que là il n'y avait pas besoin, il y avait juste besoin de rajouter $2x - 1$.

I : Comment tu sais qu'ici n'y en a pas besoin alors qu'ici on en avait besoin, dans la sept ?

E_M : Bah ça je sais pas... Enfin ça, je l'ai appris. Je sais pas comment l'expliquer. Bah c'était pour faire l'énoncé de départ parce que si je ne mettais pas le 1, ça faisais $2x$ au carré tout court. Or là, c'était $+2$. Il fallait que je rajoute un nombre qui fait que quand je le multiplie ça fasse 2, c'était que 1. Alors que là, c'était $2x - 1$, enfin je sais pas pourquoi il a mis 1.

I : Donc tu penses que c'est faux ?

E_M : Ouais. Bah moi j'ai pas dû faire comme lui, moi j'ai laissé juste $2x - 1$.

I : Et pour la douze ? [I] fait référence à l'expression $(x + 1)(x + 9) - (x + 1)$ qui a été transformée par un autre élève en $(x + 1)(x + 9 - 1)$.

E_M : Alors pour la douze, en fait, il a fait la même erreur que pour la dix. Donc il a rajouté le -1 en pensant que ça pouvait peut être compléter. Après il a fait enfin la démarche elle était juste il a enlevé les parenthèses. Il a soustrait les nombres entiers entre eux et il a laissé le x sauf qu'il fallait pas enlever le nombre 1. Il fallait juste laisser le $x + 9$. Moi je pense qu'il a faux aussi. Je pense qu'on peut vérifier si on développe l'expression du début et qu'on développe ça, si on trouve pas pareil c'est faux et si on trouve pareil ça doit être juste.

I : Là tu peux vérifier ici ?

E_M : Bah oui, là déjà ça fait x au carré $+8x + x + 8$; ça fait x au carré $+9x + 8$ et là, ça fait... Là, si on fait celle là, ça fait, x au carré $+9x + x + 9 - x - 1$ et là ça fait x au carré $+9x + 8$. C'est peut être moi qui ai faux alors, parce que là, on a trouvé le même résultat.

I : Oui, là, ça veut dire qu'il a juste, je t'expliquerai après. Juste pour finir, est-ce que tu peux essayer de factoriser quelques expressions en me décrivant tes étapes. Juste pour savoir si tu avais eu ça, qu'est-ce que tu aurais fait ? Donc $x^3 + x^2$?

[I] présente à E_M trois nouvelles expressions : $x^3 + x^2$, $18x + 9$ et $(x + 1) + 5(x + 1)$.

E_M : Donc je vois que le facteur commun c'est x , donc je le mets ici et euh... je peux même le mettre au carré donc euh... pour que ça fasse x au cube je rajoute un x et pour que ça fasse x au carré je mets $+1$ et là comme c'est à la puissance 1, ça va faire x au cube, plus 1 fois le x au carré ça fera x au carré. Donc là, je pense que c'est bon ?

I : Oui, oui c'est juste. Et pour $18x + 9$?

E_M : Alors là, il n'y a aucun facteur commun mais on sait que 9 fois 2 ça fait 18 donc, on peut mettre 9 en facteur et pour que ça fasse $18x$, on fait $2x$, ça fait bien $18x$ et pour que ça fasse 9, on rajoute 1 et on peut vérifier ça fait bien $18x + 9$.

I : Et la dernière ?

E_M : Là de chaque côté du +, on a ça et on a ça. Donc le facteur commun, c'est $x + 1$ donc on peut l'écrire et euh... Bah ce qui reste c'est 5, donc on peut le mettre devant la parenthèse. Moi, j'aurais fais comme ça mais je ne sais pas si c'est juste.

F.3 Élèves E_J et E_B de 2^{nde}

Suite à une expérimentation où les praxis (*DvtPlus*, $a + (b + c) \rightarrow ab + ac$) et (*DvtMoins*, $a - (b + c) \rightarrow -ab - ac$) ont été attribuées à E_J et E_B , ces élèves sont interviewés.

Il est demandé à E_J de réduire $3x - (2 + x) + 5x^2$. Au début, l'élève ne sait pas comment faire.

I : Qu'est ce que réduire ?

E_J : C'est mettre sous une forme plus simple. Et là je ne vois pas comment on peut réduire... vu qu'on a un x^2 et un x . On peut pas les assembler. Donc peut-être qu'on a $2 + x$, on peut peut-être le mettre avec lui. Mais je ne sais pas comment faire. parce que moi j'aurais tendance à vouloir multiplier $3x$ par ça vu **que c'est entre parenthèse** mais il y a le moins devant... Ca m'embrouille. Je ne sais pas comment faire.

I : C'est le moins qui gêne ? S'il y avait + à la place du - ? Si il y avait $3x + (2 + x)$?

E_J : Alors, j'aurais fait ça fois ça : $6x + 3x^2$.

Il est demandé à E_B de réduire l'expression $2x - (4 + x) + 5x^2$ et d'expliquer ce qu'elle fait. L'élève E_B fournit la réponse $-8x + 3x^2$.

I : Comment tu fais ?

E_B : On commence par ce qu'il y a entre parenthèses donc on voit $4 + x$. Ensuite, **on voit $2x$ juste avant** les parenthèses. Il va falloir multiplier $2x$ avec ce qu'il y a entre parenthèses et donc on développe. D'abord, on change les signes quand même : on fait - par +, ça fait -. Et - par -, ça fait +. Alors on va pouvoir multiplier $2x$ par 4. Ca fait $8x$.

Lexique

But Le *but* est une sous-expression intermédiaire à un pas de calcul, l'expression finale d'une transformation-Anaïs.

Chemin Un *chemin* est une succession de règles qu'ANAÏS envisage, dont la première règle s'applique à l'expression mère. Ce chemin peut être un diagnostic (chemin qui permet de passer de l'expression mère à l'expression finale du pas de calcul) ou non (chemin qui part de l'expression mère mais ne mène pas à l'expression finale du pas de calcul).

Coefficient d'utilisation d'une règle Le *coefficient d'utilisation d'une règle* détaillée est la somme du nombre de fois où cette règle a été diagnostiquée pondérée par les probabilités d'utilisation de chaque diagnostic où la règle est apparue. Elle est notée CU_R .

Comportement Le *comportement* d'un élève est l'ensemble des règles utilisées par cet élève face à un même type de tâche-en-acte auquel il a été confronté.

Diagnostic Un *diagnostic* est une succession de règles qu'ANAÏS envisage, dont la première règle s'applique à l'expression mère et qui permet de passer de l'expression mère à l'expression finale du pas de calcul.

Expression mère L'*expression mère* d'un pas de calcul est l'expression initiale d'un pas de calcul. Elle n'est pas nécessairement l'expression donnée dans l'énoncé de l'exercice.

Expression finale L'*expression finale* est l'expression produite par l'élève lors d'un pas de calcul. L'expression finale n'est pas nécessairement la dernière expression de l'exercice.

Opportunité-Anaïs Soit une transformation-Anaïs $TrA : E_1 \rightarrow E_2$. Il y a *opportunité-Anaïs* d'appliquer une règle R à E_1 si cette règle R relève du même type de tâche que la règle diagnostiquée par ANAÏS pour cette transformation TrA .

Opportunité mathématique Il y a *opportunité mathématique* d'appliquer une règle à une expression si l'expression vérifie les conditions d'application de cette règle.

Pas de calcul Un pas de calcul est un pas dans le logiciel APLUSIX. Il est un couple d'expressions algébriques : la sous-expression initiale et finale que l'élève a effectivement transformées.

Probabilité d'utilisation La *probabilité d'utilisation* de la règle R est la somme des probabilités des diagnostics où R est apparue. Elle est notée PU_R .

Protocole brut Les *protocoles bruts* sont constitués de l'ensemble des informations enregistrées par APLUSIX (toutes les microactions clavier-souris. Ce sont des fichiers textes. Chap 3.

Protocole filtré Les *protocoles filtrés* sont constitués uniquement des séquences d'expressions algébriques à la suite desquelles, l'élève a validé avec la touche « Entrée ». À moins d'une précision, nous appellerons protocoles, les protocoles filtrés car ce sont ceux que nous exploitons majoritairement. Ce sont des fichiers textes. Chap 3.

Règle a priori Les *règles a priori* sont les règles écrites à la main.

Règle détaillée Une *règle détaillée* est une des règles produites par la règle SIM. Elles correspondent aux règles a priori bien qu'elles puissent être de granularité plus fine.

Règle SIM Une *règle SIM* est une règle codée (dans le langage SIM). Elles peuvent consister en des regroupements de règles détaillées.

Règle abstraite Une *règle abstraite* est un regroupement de règles détaillées ou a priori.

Résultat Le *résultat* est la sous-expression produite par une règle SIM.

Source La *source* est la sous expression sur laquelle s'applique une règle SIM.

Transformation-Anaïs Une *transformation-Anaïs* est le couple des sous-expressions source et but diagnostiquée par Anaïs ; chacune correspond à un sous-type de tâche. On la note TrA.

Bibliographie

- Anderson, J. (1983). *The Architecture of Cognition*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Anderson, J., Boyle, C., Corbett, A., and Lewis, M. (1990). Cognitive modeling and intelligent tutoring. *Artificial Intelligence*, Vol 42, n°1.
- Anderson, J. R., Corbett, A. T., Koedinger, K. R., and Pelletier, R. (1995). Cognitive tutors: lessons learned. *The journal of the learning sciences*, 4-2: 167–207.
- Arsac, G. (2004). Démonstration en géométrie et en algèbre, figure et calcul littéral : quels rapports? In *Journée Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public régionale de Lyon*, Université Lyon 1.
- Artaud, M. (1998). Les nombres relatifs. Étude d'un compte rendu d'observations d'une classe de cinquième. In *Actes de l'école d'été de la Rochelle : Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, Université de la Rochelle. IREM de Clermont-Ferrand.
- Artigue, M. (1984). *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques*. Thèse d'état, Université de Paris VII.
- Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 2-3 : 241–286.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7: 245–274.
- Arzarello, F., Bazzini, L., and Chiappini, G. (2000). A model for analysing algebraic thinking. In Sutherland, R., Roiano, T., Bell, A., and Lins, R., editors, *Perspectives on School Algebra*, volume 22, pages 243–262. Kluwer Academic publishers, Dordrecht.
- Azarquiel, G. (1993). *Ideas y actividades para enseñar algebra*. Editorial Sintesis, Madrid.
- Bachelard, G. (1996). *La formation de l'esprit scientifique*. Vrin. Paris.
- Baffes, P. and Mooney, R. (1996). Refinement-based student modeling and automated bug library construction. *Journal of Artificial Intelligence in Education*, 7 : 75–116.
- Balacheff, N. (1988). Le contrat et la coutume : deux registres des interactions didactiques. In Laborde, C., editor, *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, pages 15–26, Marseille-Lumigny. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Balacheff, N. (1994a). Didactique et intelligence artificielle. In Balacheff, N. and Vivet, M., editors, *Didactique et intelligence artificielle*, pages 9–42. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Balacheff, N. (1994b). La transposition informatique. note sur un nouveau problème pour la didactique. In Artigue, M., Gras, R., Laborde, C., and Tavnogot, P., editors, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, pages 364–370. La pensée sauvage, Grenoble.
- Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In Grenier, D., editor, *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques*, pages 219–244, Grenoble : IMAG.

- Balacheff, N. (2000). Les connaissances, pluralité de conceptions. le cas des mathématiques. In Tchounikine, P., editor, *Actes de la conférence Ingénierie de la connaissance (IC 2000)*, pages 83–90, Toulouse.
- Balacheff, N. (2002). Cadre, registre et conception. *Cahier du laboratoire Leibniz n° 58*.
- Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*. Thèse de Doctorat, Université Paris VII - Denis Diderot.
- Baron, M. (1995). EIAO, quelques repères. *Terminal*.
- Baruk, S. (1992). *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Seuil edition.
- Beck, J. E. and Woolf, B. P. (2000a). High-level student modeling with machine learning. In *Proceedings of Fifth International Conference on Intelligent Tutoring Systems*, volume 1839, pages 584–593. Gauthier, G. Frasson, C. VanLehn, K.
- Beeson, M. (1998). Design principles of mathpert: software to support education in algebra and calculus. In Kajler, N., editor, *Computer-Human Interaction in Symbolic Computation*, pages 89–115. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- Bellard, N., Bronner, A., Boullis, M., Girmens, Y., Larguier, M., Lewillion, M., Pellequer, S., Rebillard, E., Roche, M., Seco, M., Vergne, C., and Noirfalise, R. (2005). *La règle dans tous ses états*. Brochure APMEP n°165, Montpellier, IREM de Montpellier edition.
- Bessot, A. (2003). Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Les Cahiers Leibniz*, 91 : 91.
- Bloom, B. S. (1984). The 2 sigma problem: the search for methods of group instruction as effective as one-to-one tutoring. *Educational Researcher*, 13 : 4–16.
- Booth, L. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit X*, 5 : 5–17.
- Bosch, M. and Chevillard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 : 77–124.
- Bottino, R. M. and Chiappini, G. (2003). An innovative teaching and learning environment for school mathematics. In *International Conference on Technology-Enhanced Learning*, pages 73–80, Milan, Italy.
- Bouhineau, D., Nicaud, J.-F., Pavard, X., and Sander, E. (2001). Un micromonde pour aider les élèves à apprendre l'algèbre. *Sciences et Techniques Educatives, Numéro spécial : Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur EAIO 2001*, 8, n°1-2 : 33–47.
- Bouhineau, D., Nicaud, J.-F., and Viudez, C. (2007). Adding new representations of mathematical objects to applusix. In *8th ICTMT conference*, Hradec, Czech Republic.
- Bouvier, A., Georges, M., and Le Lionnais, F. (1993). *Le dictionnaire des mathématiques*. Presses Universitaires de France.
- Brousseau, G. (1982a). Ingénierie didactique : d'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. In *Actes de la deuxième école d'été de Didactique des mathématiques*, Orléans. IREM d'Orléans.
- Brousseau, G. (1982b). Les objets de la didactique des mathématiques. In *Actes de la deuxième école d'été de Didactique des mathématiques*, Orléans. IREM d'Orléans.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In *Recherches en Didactique des Mathématiques*, volume 4-2, pages 165–198. La pensée sauvage edition.

- Brousseau, G. (1997). Théorie des situations didactiques. In *Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal*. http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf, dernier accès le 3 juin 2008.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Brousseau, G. (2000). Les erreurs des élèves en mathématiques. *Petit X*, 57.
- Brown, J. and Van Lehn, K. (1980). Repair theory : A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science*, 4 : 379–426.
- Bruillard, G. (1997). *Les machines à enseigner*. Paris, Hermès Sciences Publications edition.
- Brun, J., Conne, F., Cordey, P. A., Floris, R., Lemoyne, G., Leutenegger, F., and Portugais, J. (1994). Erreurs systématiques et schèmes-algorithmes. In Artigue, M., Gras, R., Laborde, C., and Tavignot, P., editors, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et à Gérard Vergnaud*, pages 203–209. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Burton, R. (1982). Diagnosing bugs in a simple procedural skill. In *Intelligent Tutoring Systems*, pages 157–184. New York: Academic Press, sleeman, derick brown, john seeley edition.
- Carbonell, J. (1970). AI in CAI: an artificial intelligence approach to computer-assisted instruction. *IEEE Transactions on Man-Machine Systems*, 11, 4 : 190–202.
- Castela, C. (2007). Travail de la question des enjeux non explicités d'apprentissage avec les outils de la théorie anthropologique : curriculum et chronogenèse praxique. In Higuera, L. R., Castro, A. E., and García, F. J., editors, *Sociedad, escuela y matemáticas : aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico*, pages 117–138, Jaén, España. Universidad de Jaén, Servicio de Publicaciones.
- Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 28 (2) : 135–182.
- Chaachoua, H., Bittar, M., and Nicaud, J.-F. (2006). Student's modelling with a lattice of conceptions in the domain of linear equations and inequations. In *Actes PME30*, volume 2, pages 281–288.
- Chaachoua, H., Bouhineau, D., Viudez, C., and Nicaud, J.-F. (2007a). Introduction de nouvelles représentations dans le micromonde aplusix, représentation sous forme mixte naturel & arbre et sous forme graphique. In *Actes de la conférence EIAH'07*, Lausanne.
- Chaachoua, H. and Comiti, C. (2007). L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. In *II Congrès sur la Théorie Anthropologique du Didactique*, Uzès, France.
- Chaachoua, H., Crosset, M.-C., Bouhineau, D., Bittar, M., and Nicaud, J.-F. (2007b). Description et exploitations des traces du logiciel d'algèbre Aplusix. *STICEF, numéro spécial "Analyses des traces d'utilisation dans les EIAH"*, 14 : 347–387.
- Chaachoua, H., Nicaud, J.-F., and Bittar, M. (2005). Détermination automatique des théorèmes-en-acte des élèves en algèbre. le cas des équations et inéquations de degré 1. In *Actes de la conférence EIAH'05*, pages 33–45, Montpellier. INRP de Lyon.
- Chaachoua, H. and Trgalová, J. (2009). Un scénario pédagogique avec le logiciel aplusix. In *EMF*, Dakar, Sénégal.
- Charnay, R. and Mante, M. (1992). De l'analyse d'erreur en mathématiques aux dispositifs de re-médiation. *Repères n° 7*.

- Chenevotot-Quentin, F., Grugeon-Allys, B., and Delozanne, E. (2009). Vers un diagnostic cognitif dynamique en algèbre élémentaire. In *EMF*, Dakar, Sénégal.
- Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège : l'évolution de la transposition didactique. *Petit X*, 5 : 51–94.
- Chevallard, Y. (1989a). Le concept de rapport au savoir. rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. In *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, volume 108, Grenoble.
- Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège, 2ème partie. perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit X*, 19 : 45–75.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12-1 : 73–111.
- Chevallard, Y. (1996). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. In Noïrfalise, R., editor, *Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques*, St. Sauves, Auvergne. IREM de Clermont-Ferrand.
- Chevallard, Y. (1997). Familiale et problématique, la figure du professeur. In *Recherches en Didactique des Mathématiques*, volume 17-3, pages 17–54. La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1998a). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In *Actes de l'école d'été de la Rochelle*, Université de la Rochelle. IREM de Clermont-Ferrand.
- Chevallard, Y. (1998b). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (2002b). Structures & fonctions. In Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., and Floris, R., editors, *Actes de la XIème école de didactique des mathématiques*, pages 3–32, Corps, Isère. La Pensée Sauvage.
- Chukhray, A. G., Kulik, A. S., and Chukhray, M. (2007). Diagnostic models of intelligent tutor system for teaching skills to solve algebraic equations. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)*, 2, n°1.
- Cirade, G. and Matheron, Y. (1998). Equations du premier degré et modélisation algébrique. In *Actes de l'école d'été de la Rochelle : Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, Université de la Rochelle. IREM de Clermont-Ferrand.
- Corbett, A. (2002). Cognitive tutor algebra I: adaptive student modeling in widespread classroom use. In *Technology and Assessment: Thinking Ahead, Proceedings from a Workshop*, pages 51–63. National Academy Press, Board on Testing and Assessment, Washington, DC.
- Corbett, A. and Anderson, J. (1995). Knowledge tracing: modeling the acquisition of procedural knowledge. *User modeling and user-adapted interaction*, 4 : 253–278.
- Cortes, A. and Kavafian, N. (1999). Les principes qui guident la pensée dans la résolution des équations. *Petit X*, 51.
- Couturier, R. (2000). Traitements de l'analyse implicative avec CHIC. In *Journées sur l'implication statistique*, pages 33–50, Caen, France.
- Couturier, R. (2008). Chic : Cohesive hierarchical implicative classification. In Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., and Spagnolo, F., editors, *Statistical Implicative Analysis*, volume 127 of *Studies in Computational Intelligence*, pages 41–52. Springer Verlag.

- Croset, M.-C. (2005). *Modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves en algèbre*. Mémoire de Master 2 de Recherche, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Davis, R. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations. *The journal of Children's Mathematical Behaviour*, 1-3.
- Delozanne, E., Grugeon, B., Artigue, M., and Rogalski, J. (2002). Modélisation et mise en oeuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet lingot. In *Réponse à l'appel à Projet Cognitif 2002. Ecole et sciences cognitives : Les apprentissages et leurs dysfonctionnements*.
- Dershowitz, N. and Jouannaud, J.-P. (1990). Rewrite systems. In Van Leeuwen, J., editor, *Handbook of Theoretical Computer Science, Formal Models and Semantics*, volume B: Formal methods and semantics, pages 243–320. Amsterdam, North-Holland.
- Dillenbourg, P. (1993). Evolution épistémologique en EIAO. *Ingenierie Educative. Sciences et Techniques Educatives*, 1 (1) : 39–52.
- Dillenbourg, P. and Self, J. (1992). A framework for learner modelling. In *Interactive Learning Environments*, volume 2, pages 111–137.
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques-une réalisation dans tout le cursus primaire*. Thèse d'Etat, Université Paris VII.
- Drouhard, J. P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de Doctorat, Université de Lille III.
- Drouhard, J. P. and Teppo, A. R. (2004). Symbols and language. In Stacey, K., Chick, H., and Kendal, M., editors, *The Future of the Teaching and Learning of Algebra : The 12th ICMI Study*, volume 9, pages 227–264. Kluwer Academic Publishers, Melbourne, Australia.
- Durand-Guerrier, V. and Herault, J.-L. (2006). Définition et règle, le mythe de la transparence en géométrie. In *Interactions verbales, didactiques et apprentissage*, pages 139–167. Presses Universitaires de Franche-Comté.
- Durand-Guerrier, V., Le Berre, M., Pontille, M.-C., and Reynaud-Feurly, J. (2000). *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques. Eléments d'analyse pour les enseignants*. Villeurbanne : Université Claude Bernard, IREM de Lyon edition.
- Duroux, A. (1983). La valeur absolue : Difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x*, 3 : 43–66.
- Duval, R. (1990). Pour une approche cognitive de l'argumentation. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 3 : 195–221.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5 : 37–65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- El Bouazzaoui, H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction*. Thèse de Doctorat, Université Laval, Quebec.
- El Mouhayer, R. (2007). *Etude en France et au Liban des pratiques d'enseignement des mathématiques au niveau de l'école moyenne (11-15 ans) dans le cas de l'algèbre*. Thèse de Doctorat, Université de Lyon 1.
- Fischbein, E. (1993). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. *Didactics of mathematics as a scientific discipline. Netherlands, Dordrecht : Kluwer*, pages 231–24.

- Flajolet, P. (2008). Mathématique. calcul.
<http://www.universalis-edu.com/article2.php?napp=\&nref=NT01067>, Dernier Accès le 2 janvier 2009.
- Frege, G. (1971). *Ecrits logiques et philosophiques*. Traduit par Claude Imbert, Seuil Edition, 1994.
- Garcia-Franco, A. and Flores-Camacho, F. (2009). Functional mechanisms to construct explanations, actes de ESERA'09. Istanbul (à paraître).
- Gascon, J. (1993). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit X*, 37 : 43–63.
- Gaudin, N. (2005). *Place de la validation dans la conceptualisation le cas du concept de fonction*. Didactique des mathématiques. Thèse de Doctorat, Université Grenoble 1.
- Gelis, J.-M. (1994). *Un cadre général pour une modélisation cognitive et computationnelle de l'algèbre*. Rapport Interne du Laboratoire de Recherche en Informatique à l'Université de Paris-Sud, n°907.
- Girmens, Y. (2003). *Le statut de la règle en algèbre : place et rôle possibles de l'étude d'une égalité entre expressions littérales dans l'apprentissage des règles en algèbre*. Mémoire de DEA, IREM de Montpellier.
- Goody, J. (1977). *La raison graphique. La domestication de la pensée sauvage*. Paris, éditions de minuit edition.
- Granger, G.-G. (1979). *Langages et épistémologie*. Klincksieck.
- Gras, R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*. Thèse d'Etat, Université de Rennes I.
- Gras, R. (1996). *L'implication statistique, nouvelles méthodes exploratoire des données*. Collection Associée à la Recherches en Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Gras, R. and Kuntz, P. (2008). An overview of the statistical implicative analysis (SIA) development. In Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., and Spagnolo, F., editors, *The Statistical Implicative Analysis - Its theoretical foundations*, volume 127 of *Studies in Computational Intelligence*, pages 11–40. Springer-Verlag.
- Greer, J. E. and MacCalla, G. I. (1994). *Student modelling: the key to individualized knowledge based instruction*, volume 125. Springer Verlag, NATO ASI Series F.
- Grugeon, B. (1995). *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G*. Thèse de Doctorat, Université Paris VII, Paris, France.
- Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse mutidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherche en didactique des Mathématiques*, Vol 17/2 : 167–210.
- Guyon, E. (2008). *Etude des raisons d'apparition d'erreurs stables chez les élèves de troisième sur un sous domaine du calcul littéral : la factorisation*. Mémoire de Master 2 de Recherche, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Hakem (2005). Diane : Diagnostic informatique sur l'arithmétique au niveau élémentaire. In INRP, editor, *Actes de la conférence EIAH'05*, Montpellier.
- Heffernan, N. T. (2001). *Intelligent Tutoring Systems have Forgotten the Tutor : Adding a Cognitive Model of Human Tutors*. PhD Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh.

- Jean, S. (2000). *Pépète : un système d'assistance au diagnostic de compétences*. Thèse de Doctorat, Université du Maine.
- Jurkovic, N. (2001). Diagnosing and correcting student's misconceptions in an educational computer algebra system. In *Proceedings of the 2001 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, pages 195–200, London, Ontario, Canada. ACM Press.
- Kieran, C. (1991). A procedural-structural perspective on algebra research. In Furinghetti, F., editor, *Proceedings of the 15th Conference of Psychology of Mathematics Education*, pages 245–251, Assisi, Italy.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pages 390–419.
- Kieran, C. (2004). The core of algebra: reflections on its main activities. In Stacey, K., Chick, H., and Kendal, M., editors, *The Future of the Teaching and Learning of Algebra : The 12th ICMI Study*, pages 21–34. Kluwer academic publishers, Melbourne, Australia.
- Kirshner, D. (1987). *Linguistic analysis of symbolic elementary algebra*. PhD Thesis, University of British Columbia, national council of teachers of mathematics edition.
- Kirshner, D. (1990). Acquisition of algebraic grammar. In Booker, G., Cobb, P., and De Mendicuti, T. N., editors, *Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, volume 2, pages 75–83, Oaxtepec, Mexico.
- Kirshner, D. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35 : 224–257.
- Kouki, R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique*. Thèse de Doctorat, Université Lyon 1.
- Kynigos, C. and M., K. (2002). E-slate : A 'black-and-white box' approach to component computing. In *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, New Orleans.
- Lagrange, J.-B. (2001). Tasks for students using computer algebra : a study of the design of educational computer applications. In Stacey, K., Chick, H., and Kendal, M., editors, *The Future of the Teaching and Learning of Algebra : The 12th ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers, Melbourne, Australia.
- Langley, P. and Ohlsson, S. (1984). Automated cognitive modeling. In *Proceedings of the Fourth National Conference of the American Association for Artificial Intelligence*, pages 193–197, Austin, Texas. Morgan Kaufmann.
- Laurillard, D. (1990). Generative student models: The limits of diagnosis and remediation. In Elsom Cook, editor, *Guided discovery tutoring: a framework for ICAI research*, pages 42–53. Paul Chapman.
- Lebart, L., Morineau, A., and Piron, M. (2000). *Statistique Exploratoire Multidimensionnelle*. Dunod.
- Lee, L. (1997). *Algebraic understanding : The search for a model in the mathematics education community*. Education. PhD Thesis, Université du Québec, Montréal.
- Lepp, D. (2006). Error diagnosis in problem solving environment using action-object-input scheme. In *Intelligent Tutoring Systems*, pages 769–771.
- Lerman, I. C. (1970). *Les bases de la classification automatique*. Gauthier-Villars, Paris.
- Lima, I. (2006). *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs : étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

- Mante, M. (1988). Des erreurs aux conceptions de l'apprentissage. In Chapiro, G. and Guichard, Y., editors, *Travaux didactiques. Quelques idées pour nos classes*. IREM de Lyon.
- Matz, M. (1982). Towards a process model for school algebra errors. In Sleeman, D. and Brown, J. S., editors, *Intelligent Tutoring Systems*, pages 25–50. New York: Academic Press.
- McArthur, D., Stasz, C., and Zmuidzinas, M. (1990). Tutoring techniques in algebra. *Cognition and Instruction*, 7, n°3 : 197–244.
- Melis, E., Gogvadze, G., Libbrecht, P., and Ullrich, C. (2009). Activemath – a learning platform with semantic web features. In Dicheva, D. and Greer, J., editors, *Ontologies and Semantic Web for e-Learning*. IOS Press.
- Mendelsohn, P. and Dillenbourg, P. (1991). Le développement de l'enseignement intelligemment assisté par ordinateur. Rome. Conférence donnée à la réunion de Association de Psychologie Scientifique de Langue Française Symposium Intelligence Naturelle et Intelligence Artificielle.
- Menssouri, D. (1994). *Essai de délimitation en terme de problématique des effets de contrat et de transposition Didactique des mathématiques*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Mille, A. (2007). Traces, traces d'interactions, traces d'apprentissage : définitions, modèles informatiques, structurations, traitements et usages. In *Communication présentée à la 5ème école thématique du CNRS sur les EIAH - Personnalisation des EIAH*, Saint Quentin sur Isère.
- Miyakawa, T. (2005). *Une étude du rapport entre connaissance et preuve : le cas de la notion de symétrie orthogonale*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Nguyen, A. Q. (2006). *Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Vietnam et en France*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Nicaud, J. F. (1993). Cognition assistée par ordinateur. In *Modèles conceptuels pour la Science Cognitive, Hommage à J.-F. Le NY*, pages 125–138. Presses Universitaires de Grenoble.
- Nicaud, J.-F. (2005). Modélisation cognitive d'élèves en algèbre et construction de stratégies d'enseignement dans un contexte technologique. *Cahier du laboratoire Leibniz*, 123.
- Nicaud, J.-F. and Bouhineau, D. (2007). Natural editing of algebraic expressions. In *Proceedings of the MathUI workshop*, Linz, Austria.
- Nicaud, J.-F. c., Bouhineau, D., and Gélis, J.-M. (2001). Syntax and semantics in algebra. In Chick, H., Stacey, K., and Vincent, J., editors, *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference : The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, pages 475–486, Melbourne, Australie : The University of Melbourne.
- Oresme, N. (1377). *Livre du ciel et du monde. Réédition 1968*. Menut, A.D. Denomy, A.J., Madison, Wisconsin: University of Wisconsin Press, 1968 edition.
- Pascal, D. (1980). *Le Problème du zéro. L'économie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur*. Mémoire de DEA, IREM d'Aix-Marseille, Marseille.
- Payne, S. J. and Squibb, H. R. (1990). Algebra mal-rules and cognitive accounts of error. *Cognitive science*, 14, n°3 : 445–481.
- Pearl, J. (1984). *Heuristics: intelligent search strategies for computer problem solving*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. Boston, MA, USA.
- Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

- Perrin-Glorian, M. (2002). Didactique des mathématiques. In Bressoux, P., Amigues, R., Arnoux, M., Barré-De Miniac, C., Clanet, J., Dessus, P., Halté, J. F., Maurice, J. J., and Perrin-Glorian, M. J., editors, *Les stratégies de l'enseignant en situation d'interaction*, pages 167–189. Laboratoire LSE, Université Pierre Mendès France, Grenoble.
- Polguère, A. (2008). Pour un transfert des savoirs lexicographiques. In *Congrès Mondial de Linguistique Française*, Paris, France. Transfert et généralisation des connaissances lexicographiques. Actes de la section « Lexique » du Congrès Mondial de Linguistique Française (CMLF), Paris, 1265-1273.
- Prank, R., Issakova, M., Lepp, D., and Vaiksaar, V. (2006). Using action-object-input scheme for better error diagnosis and assessment in expression manipulation tasks. *Maths, Stats and OR Network, Maths CAA Series*, <http://mathstore.ac.uk/articles/maths-cao-series/mar2006/>.
- Prévit, D. (2008). *Génération d'exercices et analyse multicritère automatique de réponses ouvertes - PépiGen, un système auteur en algèbre élémentaire*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI.
- Py, D. (1998). Quelques méthodes d'intelligence artificielle pour la modélisation de l'élève. *Science et Techniques éducatives*, 5/2 : 123–140.
- Py, D. (2001). *Environnements interactifs d'apprentissage et démonstration en géométrie*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Rennes 1.
- Py, D. and Hibou, M. (2006). Représentation des connaissances de l'apprenant. In Grandbastien, M. and Labat, J.-M., editors, *Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain*, volume 2, Chapitre 4. Hermès.
- Rabelais (1548). *Quart Livre, Ancien prologue. Réédition 1994*, volume 5. Marichal, R.
- Ragnemalm, E. L. (1995). Student diagnosis in practice; bridging a gap. *User Modeling and User-Adapted Interaction*, 5(2) : 93–116.
- Rakotomalala, R. (2005). Tanagra : un logiciel gratuit pour l'enseignement et la recherche. *Actes de EGC'2005, RNTI-E-3*, vol. 2 : 697–702.
- Resnick, L. B. (1984). *Beyond Error Analysis : The Role of Understanding in Elementary School Arithmetic*. Learning Research and Development Center, University of Pittsburgh, Pittsburgh, PA.
- Rodrigo, M. M. T., Baker, R. S. J., D'Mello, S., Gonzalez, M. C. T., Lagud, M. C. V., Lim, S. A. L., Macapanpan, A. F., Pascua, S., Santillano, J. Q., and Sugay, J. O. (2008). Comparing learners' affect while using an intelligent tutoring system and a simulation problem solving game. In Springer Berlin, H., editor, *Intelligent Tutoring Systems*, volume 5091 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 40–49.
- Ruffieux, C. (2005). *La naissance du concept de structure algébrique en Grande-Bretagne dans la première moitié du 19e siècle*. Thèse de Doctorat, Université de Genève.
- Sackur, C., Drouhard, J.-P., Maurel, M., and Pécal, M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? In Topiques, editor, *Repères*, volume 28, pages 37–68. IREM, Pont à Mousson.
- Sanner, M. (1983). *Du concept au fantasme. Psychologie de la connaissance et pédagogie : de Bachelard à Piaget et à Freud*. Presses universitaires de France, Paris.
- Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*, 112 : 85–118.

- Self, J. (1988). Student models: what use are they? In Ercoli, P. and Lewis, R., editors, *Artificial intelligence tools in education: proceedings of the IFIP-TC3 working conference on artificial intelligence tools in education, 26-28 May*, pages 73–96. Amsterdam: Elsevier Science, Frascati, Italy.
- Self, J. (1990a). Bypassing the intractable problem of student modelling. In Frasson, C. and Gauthier, G., editors, *Intelligent Tutoring Systems : At the crossroads of artificial intelligence and education*, pages 107–123. Ablex Publishing, Norwood.
- Self, J. (1995). *Computational Mathematics: Towards a Science of Learning. Systems Design*. <http://telearn.noe-kaleidoscope.org/warehouse/Self1995.pdf>. Dernier accès le 6 juin 2008, Computer Based Learning Unit. University of Leeds.
- Self, J. (1999). The defining characteristics of intelligent tutoring systems research: itss care, precisely. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 10: 350–364.
- Serfati, M. (1997). *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Thèse de Doctorat, Université Paris I.
- Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique - La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Pétra, Paris, collection : transphilosophiques edition.
- Sison, R., Numao, M., and Shimura, M. (1998). Detecting errors in novice programs via unsupervised multistrategy learning. *Proceedings of the Fourth International Workshop on Multistrategy Learning*, pages 135–140.
- Sison, R., Numao, M., and Shimura, M. (2000). Multistrategy discovery and detection of novice programmer errors. *Machine Learning*, 38 : 157–180.
- Sison, R. and Shimura, M. (1998). Student modeling and machine learning. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 9 : 128–158.
- Sleeman, D. (1982a). Assessing aspects of competence in basic algebra. In Sleeman, D. and Brown, J. S., editors, *Intelligent Tutoring Systems*, pages 185–200. New York: Academic Press.
- Sleeman, D. (1982b). Inferring (mal) rules from pupils' protocols. In *Proceedings of the European Conference on Artificial Intelligence*, Orsay, France.
- Sleeman, D. (1986). Introductory algebra: a case study of misconceptions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 5.
- Sleeman, D. (1987a). PIXIE: a shell for developing intelligent tutoring systems. In Lawler, R. and Yazdani, M., editors, *Artificial Intelligence in Education: learning environments and tutoring systems*, volume 1, pages 239–263. New Jersey: Ablex.
- Sleeman, D. H. (1985). Basic algebra revisited: a study with 14-year-olds. *International Journal of Man-Machine Studies*, 22, 2 : 127–149.
- Sleeman, D. H., Kelly, A. E., Martinak, R., Ward, R. D., and Moore, J. L. (1989). Studies of diagnosis and remediation with high school algebra students. *Cognitive Science*, 13 : 551–568.
- Swan, M. (1983). *Teaching decimal place value : a comparative study of "conflict" and "positive only" approaches*. Research Report n^o31, Shell Centre for Mathematical Education, Nottingham University, Nottingham, England.
- Tonnelle, J. (1979). *Le monde clos de la factorisation au 1er cycle*. Mémoire de DEA de Didactique des mathématiques, IREM de Bordeaux.
- Van Lehn, K. (1988). Student modeling. In Polson, M. C. and Richardson, J., editors, *Foundations of Intelligent Tutoring Systems*, pages 55–78. Hillsdale, NJ : Erlbaum.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3 : 133–170.

Vermersch, P. (1996). *L'entretien d'explicitation*. ESF, Paris.

Wenger, E. (1987a). *Artificial intelligence and tutoring systems*. Morgan Kaufmann Publishers.

Woodhouse, R. (1801). On the necessary truth of certain conclusions obtained by means of imaginary quantities. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 91 : 89–119.

Manuels scolaires utilisés

- Amigo, P., Jeuffroy, M., and Picchiottino, J.-D. (2003). *Mathématiques, 3e*. Multimaths. Hatier.
- Andrieu, X., Fourton, J.-L., Lanoelle, A., Maimaran, S., and Perrinaud, J.-C. (2007). *Mathématiques, 4e*. Dimathème. Didier.
- Audren, H., Cecconi, S., Le Goff, E., Lehours, J.-M., Lefèvre, M., Letessier, A.-G., Quiviger, P., and Riou, E. (2007). *Maths, 4e*. Bréal.
- Audren, H., Cecconi, S., Le Goff, E., Lehours, J.-M., Lefèvre, M., Letessier, A.-G., Quiviger, P., and Riou, E. (2008). *Maths, 3e*. Bréal.
- Bareil, H. and Zehren, C. (1984). *Mathématiques, 4e*. Livre du professeur. Hachette.
- Bonnefond, G., Daviaud, D., and Revfranche, B. (1998). *Mathématiques, 4e*. Pythagore. Hatier.
- Brault, R., Daro, I., Ferrero, C., Perbos-Raimbourg, D., and Telmon, C. (2007). *Mathématiques, 4e*. Hachette.
- Brault, R., Daro, I., Ferrero, C., Perbos-Raimbourg, D., and Telmon, C. (2008). *Mathématiques, 3e*. Collection « Phare ». Hachette.
- Chapiron, G., Mante, M., Mulet, R., and Perotin, C. (1998). *Mathématiques, 4e*. Triangle. Hatier.
- Chapiron, G., Mante, M., Mulet, R., and Perotin, C. (1999). *Mathématiques, 3e*. Triangle. Hatier.
- Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R., and Pérotin, C. (2007). *Mathématiques, 4e*. Triangle. Hatier.
- Charmaty, O., Merlier, J.-M., and Freyenet, P. (2003). *Mathématiques, 4e*. Diabolo. Hachette.
- Deledicq, A., Lassave, C., Missenard, C., and Missenard, D. (1988). *Mathématiques, 4e*. Nathan.
- Delord, R. and Vinrich, G. (1998). *Mathématiques, 4e*. Cinq-Sur-Cinq. Hachette.
- Delord, R. and Vinrich, G. (2002). *Mathématiques, 3e*. Cinq-Sur-Cinq. Hachette.
- Deneuil, J., Redding, A., Samson, C., Taillade, F., and Van Blitz, M. (1998). *Mathématiques, 4e*. Collection « Tout simplement ». Hachette.
- Fauvergue, P., Jeannot, J., and Rieu, R. (1975). *Mathématique, 4e*. Mauguin, A ; Istra.
- Fourton, J.-L., Lanoelle, A., Nassiet, F., and Perrinaud, J.-C. (2002). *Mathématiques, 4e*. Dimathème. Didier.
- Fourton, J.-L., Lanoelle, A., Nassiet, F., and Perrinaud, J.-C. (2003). *Mathématiques, 3e*. Dimathème. Didier.
- Goutodier, M. and Lévi, M.-C. (2002). *Mathématiques, 4e*. Collection « Les petits manuels ». Hatier.
- Le Hir, G., Lanata, F., Huvey, S., and Deliez, D. (2002). *Maths, 4e*. Magnard.

- Lombard, P. and Muniglia, M. (1988). *Mathématiques, 4e*. IREM de Lorraine. Didier.
- Maillard, R. and Millet, A. (1948). *Algèbre, Classe de mathématiques du second degré (équivalent Terminale)*. Hachette.
- Malaval, J. and Courbon, D. (2002). *Mathématiques, 4e*. Transmath. Edition spéciale pour le professeur. Nathan.
- Nonnotte, M. and Favier, A. (1967). *Mathématiques, 5e*. Hatier.
- Pene, N. and Depresle, P. (2002). *Mathématiques, 4e*. Nouveau Décimale. Belin.
- Queysanne-Revuz (1973). *Mathématiques, 4e*. Série rouge, Fernand Nathan.
- Serra, E., Barberi, D., Concas, C., Escalier, E., Germoni, L., Germoni, M., and Pupin-Wirth, C. (1998). *Maths, 4e*. Bordas.