



HAL
open science

Apport du filtrage particulaire au recalage altimétrique dans un contexte de navigation hybridée

Mathieu Flament

► **To cite this version:**

Mathieu Flament. Apport du filtrage particulaire au recalage altimétrique dans un contexte de navigation hybridée. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paris Sud - Paris XI, 2009. Français. NNT: . tel-00445567

HAL Id: tel-00445567

<https://theses.hal.science/tel-00445567>

Submitted on 9 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : PHYSIQUE

École Doctorale « Sciences et Technologies de l'Information, des Télécommunications et des Systèmes »

Présentée par :

Mathieu FLAMENT

Sujet :

**APPORT DU FILTRAGE PARTICULAIRE
AU RECALAGE ALTIMÉTRIQUE
DANS UN CONTEXTE DE NAVIGATION HYBRIDÉE**

Thèse dirigée par Marie-Ève DAVOUST

Soutenue le 2 décembre 2009 devant les membres du jury :

Président : M. WALTER Éric
Rapporteurs : M. HERO Alfred
M. BROSSIER Jean-Marc
Examineurs : M. LANEUVILLE Dann
M. FLEURY Gilles
Invité : M. LARCHER Éric

Titre : Apport du filtrage particulaire au recalage altimétrique dans un contexte de navigation hybridée

Résumé : Un système de navigation hybridée associe plusieurs moyens de positionnement afin d'augmenter la précision, la disponibilité, et la fiabilité de l'information délivrée. Cette thèse se focalise sur l'association d'une centrale inertielle et de mesures radio-altimétriques pour la navigation des aéronefs (drones, missiles). La problématique consiste à fusionner de manière optimale les informations inertielles et les mesures du radio-altimètre. Ce problème se formule comme une opération de filtrage non-linéaire, la non-linéarité résultant du profil arbitraire du terrain survolé. On se propose dans le cadre de la thèse d'évaluer les performances de l'algorithme de filtrage particulaire. Cet algorithme, bien qu'encore très peu utilisé pour des applications industrielles à cause de la lourdeur des calculs qu'il engendre, suscite un intérêt croissant avec l'augmentation constante des capacités de calcul des processeurs. Cette étude s'est concentrée à la fois sur le contexte applicatif (principe de la navigation inertielle, modélisation des imperfections des senseurs inertiels, description des algorithmes actuellement utilisés, principe de la mesure radio-altimétrique) et sur la théorie du filtrage particulaire. Ceci a permis de préciser les apports potentiels du filtrage particulaire par rapport aux autres algorithmes plus classiques (filtre à grille, filtre de Kalman étendu, unscented Kalman filter). L'expérience acquise sur les différentes variantes du filtre particulaire a permis de proposer des solutions satisfaisant au mieux le cahier des charges imposé par le contexte applicatif.

Mots-clés : filtrage non-linéaire, filtre particulaire, navigation par recalage altimétrique

Title : Terrain-aided navigation using particle filtering

Abstract : A hybrid navigation system combines several positioning means so as to achieve a greater accuracy, availability, and reliability. This study focuses on the association of an inertial navigation system, an on-board radar-altimeter and a digital terrain elevation model. The target application is autonomous aircrafts (UAVs, long-range missiles). The problem consists in combining the inertial data and radio-altimeter measurements in an optimal way. The problem can be expressed as a non-linear filtering operation. The non-linearity is due to the arbitrary shape of the terrain. In this thesis, we propose to assess the performances of the particle filtering algorithm. Although particle filtering is still little used in industrial application because of its heavy computation requirements, it arouses a growing interest as the processors constantly rise in performance. This study describes both the application context (principle of inertial navigation, model of inertial sensor errors, description of commonly used algorithms, principle of radar-altimeter measurements) and the theoretical aspects of particle filtering. It highlights the potential advantages of particle filtering algorithm over the classical ones (grid filtering, extended Kalman filter, unscented Kalman filter). The knowledge acquired on several variants of the particle filter (Rao-blackwellized particle filter, Gaussian particle filter) leads to solutions that meet at best the application constraints.

Keywords : Non-linear filtering, particle filter, terrain-aided navigation

*« Impose ta chance, serre ton bonheur et va vers ton risque.
À te regarder, ils s'habitueront. »*

René Char (*Les Matinaux*)

Remerciements

Cette thèse représente avant tout l'aboutissement d'un projet de recherche, dont l'ensemble des acteurs méritent d'être mis en lumière.

Ainsi, mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse Marie-Ève Davoust et à mon co-encadrant Gilles Fleury, tout deux professeurs au Département Traitement du Signal et Systèmes Électroniques de SUPÉLEC. Leurs encouragements constants et leur sérénité sans faille ont été de précieux alliés dans la conduite de mon travail de recherche.

Je tiens également à exprimer gratitude au professeur Jacques Oksman, directeur de la recherche et des relations industrielles de Supélec, sans qui cette thèse n'aurait pu aboutir dans de bonnes conditions, ainsi qu'à Éric L. et Michel S. pour la confiance qu'ils m'ont accordée.

J'exprime ma reconnaissance aux professeurs Alfred Hero et Jean-Marc Brossier, rapporteurs de cette thèse, d'avoir prêté leur temps pour un examen consciencieux, sur le fond et sur la forme, du travail présenté dans ce manuscrit. Leurs remarques pertinentes ont joué un rôle déterminant dans la qualité de ce mémoire. J'espère sincèrement qu'ils ont pris eux-aussi plaisir à prendre connaissance de mon travail. Je remercie également le professeur Éric Walter d'avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Je remercie Jean-Noël L. et Christophe F. de m'avoir transmis leur expérience en recalage altimétrique. J'ai une pensée toute spéciale pour Dann Laneuville, ingénieur de recherche expert en filtrage. Nos nombreuses discussions m'auront permis d'aiguiser ma réflexion sur le sujet. Je suis également reconnaissant à Gilles Rigal, Frédéric Lamole et Tanya Bertozzi. L'échange de nos expériences mutuelles me fut d'un grand bénéfice. Sans oublier les nombreux relecteurs anonymes de ce mémoire !

Un grand merci à Fabienne Suraud, secrétaire du Département Traitement du Signal et Systèmes Électroniques de Supélec, pour son professionnalisme et sa compétence dans les démarches administratives et l'organisation des déplacements en conférences.

Merci également à l'ensemble du personnel de l'Université Paris-Sud XI impliqué dans les diverses étapes administratives de cette thèse.

Bien sûr, tout travail sérieux ne peut s'effectuer que dans la bonne humeur : je convoque Régis, Raphaël, Élisabeth, Claude, Rémy, Stéphane & Stéphane, Jean-Philippe, Frédéric & Frédéric, Christine, Bénédicte, Christian pour atteinte grave au droit inaliénable du docteur à contempler une équation pendant des heures.

Table des matières

Introduction	1
La science de la navigation	1
Contexte de la thèse	2
Démarche et objectifs	3
Organisation du mémoire	4
Notations et symboles	5
1 Navigation et fusion d'information	7
1.1 Introduction	7
1.2 La navigation terrestre	7
1.2.1 Définition des repères	7
1.2.2 Grandeurs cinématiques	8
1.3 Structure de commande d'un véhicule autonome	10
1.3.1 Hiérarchie	10
1.3.2 La fonction pilotage	10
1.3.3 La fonction guidage	11
1.3.4 La fonction navigation	11
1.4 Exigences pour une mission autonome	11
1.4.1 Précision de positionnement	11
1.4.2 Disponibilité	11
1.4.3 Fiabilité	12
1.5 Les sources d'information	12
1.5.1 Navigation inertielle	12
1.5.2 Positionnement par satellites	15
1.5.3 Imagerie	15
1.5.4 Recalage altimétrique	15
1.6 Conclusion	16
1.6.1 Complémentarité des sources	16
1.6.2 La navigation hybridée	17

2	Cadre bayésien et méthodes numériques	19
2.1	Introduction	19
2.2	Inférence bayésienne	19
2.2.1	Caractérisation statistique d'une grandeur	19
2.2.2	Cadre bayésien pour l'estimation	20
2.2.3	Estimateurs	21
2.2.4	Cas des systèmes dynamiques	22
2.3	Filtrage linéaire	23
2.3.1	Estimateur linéaire optimal	23
2.3.2	Filtre de Kalman	25
2.3.3	Filtre de Kalman étendu (EKF)	26
2.3.4	Unscented Kalman filter (UKF)	27
2.4	Filtrage particulaire	30
2.4.1	Représentation particulaire d'une densité de probabilité	30
2.4.2	Principe du filtrage particulaire	33
2.4.3	Principe de la Rao-Blackwellisation	43
3	Filtrage optimal pour le recalage altimétrique	51
3.1	Introduction	51
3.2	Identification d'une position par mesure altimétrique	51
3.3	Outils mathématiques associés	52
3.3.1	Modèle de dérive inertielle	52
3.3.2	Modèle de mesure altimétrique	55
3.3.3	Solution optimale dans un cadre bayésien	56
3.3.4	Difficultés de mise en œuvre pratique	57
3.3.5	Représentations de la densité de probabilité filtrée	58
3.3.6	Illustration du fonctionnement d'un filtre particulaire pour la navigation	60
3.3.7	Potentialités du filtre particulaire	65
3.4	Filtrage pour le recalage altimétrique : état de l'art	65
4	Évaluation comparatives de filtres non-linéaires gaussiens	69
4.1	Cadre de l'étude	69
4.1.1	Comparaison de filtres non-linéaires pour la phase de poursuite	69
4.1.2	Contraintes d'intégration à un système de navigation	70
4.2	Filtre de Kalman étendu	71
4.2.1	Mise en œuvre	71
4.2.2	Choix des paramètres	74
4.3	Unscented Kalman Filter	74
4.3.1	Mise en œuvre	74
4.3.2	Choix des paramètres	74
4.4	Filtre à grille	77
4.4.1	Principe	77

4.4.2	Mise en œuvre	77
4.4.3	Choix des paramètres	77
4.5	Filtre particulaire gaussien	80
4.5.1	Principe	80
4.5.2	Mise en œuvre	82
4.5.3	Choix des paramètres	82
4.6	Démarche de comparaison	85
4.6.1	Critères d'évaluation	85
4.6.2	Définition des scénarios	87
5	Mise en œuvre pratique et exemples de résultats	89
5.1	Outil de simulation numérique	89
5.1.1	Introduction	89
5.1.2	Les éléments de la simulation	89
5.1.3	Détails d'implémentation	92
5.2	Exemple de résultats : filtre particulaire gaussien	94
5.2.1	Construction de la distribution d'importance	94
5.2.2	Évaluations comparées	96
	Conclusion générale	99
	Annexes	101
A	Équations de la navigation inertielle terrestre	103
A.1	Introduction	103
A.2	Intégration des accélérations	103
A.3	Intégration des vitesses de rotation	105
A.4	Récapitulatif	105
B	Modèle de dérive d'une centrale inertielle strap-down	107
B.1	Linéarisation de la dynamique de l'erreur	107
B.2	Dynamique de l'erreur de position	107
B.3	Dynamique de l'erreur de vitesse	108
B.4	Dynamique de l'erreur d'attitude	109
B.5	Expression sous forme matricielle	110
	Bibliographie	113

Table des figures

1.1	Définition du repère engin	8
1.2	Définition du trièdre géographique local et du repère terrestre	9
1.3	Angles d'attitude - Passage du repère TGL au repère engin	10
1.4	Chaîne pilotage - guidage - navigation	11
1.5	Positionnement des capteurs dans un système 'strap-down'	13
1.6	Principe des calculs de navigation inertielle	14
1.7	Mesure du radar altimétrique	16
1.8	Principe de la navigation hybridée	17
2.1	Filtrage optimal récursif	23
2.2	Filtrage linéaire optimal	24
2.3	Algorithme du filtre de Kalman	25
2.4	Position des <i>sigma points</i> en dimension 2	28
2.5	Algorithme <i>Unscented Kalman Filter</i>	29
2.6	Échantillonnage d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ avec 50 réalisations	32
2.7	Approximation de la fonction de répartition d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ avec 50 réalisations	32
2.8	Échantillonnage pondéré : cas satisfaisant	34
2.9	Échantillonnage pondéré : cas d'une <i>proposal distribution</i> de support trop étroit	35
2.10	Échantillonnage pondéré : cas d'une <i>proposal distribution</i> de support trop large	36
2.11	Algorithme de base du filtre particulaire	38
2.12	Algorithme de rééchantillonnage multinomial	39
2.13	Algorithme de régularisation gaussienne adaptative	40
2.14	Filtrage particulaire avec échantillonnage de la d.d.p. a priori	41
2.15	Échantillonnage par acceptation-rejet	41
2.16	Échantillonnage par linéarisation locale	42
2.17	Illustration du fonctionnement d'un filtre particulaire	43
2.18	Échantillonnage avec Rao-Blackwellisation	45
2.19	Rao-Blackwellisation : propagation de l'état	47
2.20	Rao-Blackwellisation : mise à jour par la règle de Bayes	49

3.1	Principe du recalage altimétrique	52
3.2	Profil du terrain survolé	58
3.3	Allure de la densité de probabilité <i>a posteriori</i> - Cas 1	59
3.4	Allure de la densité de probabilité <i>a posteriori</i> - Cas 2	59
3.5	Approximation gaussienne d'une DDP	61
3.6	Approximation d'une DDP par mélange de gaussiennes	61
3.7	Approximation d'une DDP par discrétisation	62
3.8	Approximation particulière d'une DDP	62
3.9	Évolution du nuage de particules	63
3.10	Reconstruction de la densité de probabilité	64
3.11	Phases d'acquisition et de poursuite	66
3.12	Axes de recherche	67
4.1	Structure du système de navigation	70
4.2	Flux de traitement des mesures	71
4.3	Intégration du filtre de Kalman étendu	72
4.4	Filtre de Kalman étendu pour le recalage altimétrique	73
4.5	intégration de l' <i>Unscented Kalman Filter</i>	75
4.6	<i>Unscented Kalman Filter</i> pour le recalage altimétrique	76
4.7	Intégration du filtre à grille	78
4.8	Filtre hybride grille / Kalman pour le recalage altimétrique	79
4.9	Intégration du filtre particulière gaussien	83
4.10	Filtre particulière gaussien pour le recalage altimétrique	84
4.11	Comparaison entre un échantillonnage pseudo-aléatoire (en haut) et quasi-aléatoire (en bas) selon une loi gaussienne de dimension 2 ($N = 200$)	86
5.1	Les modules de la simulation	90
5.2	Formage d'une trajectoire par points de passage	90
5.3	Exemple de trajectoire	91
5.4	Modèle de génération des données inertielles	92
5.5	Schéma de calcul de la navigation inertielle	93
5.6	Aperçu du logiciel de simulation	93
5.7	Comparaison des filtres en terrain très accidenté - Erreur d'estimation (RMSE) en position dans le plan horizontal (échelle normalisée)	97
5.8	Comparaison des filtres en terrain moyennement accidenté - Erreur d'estimation (RMSE) en position dans le plan horizontal (échelle normalisée)	98
5.9	Comparaison des filtres en terrain faiblement accidenté - Erreur d'estimation (RMSE) en position dans le plan horizontal (échelle normalisée)	98

Introduction

La science de la navigation

Qualité de l'information, précision de la mesure et algorithmes

Au cours de l'Histoire, l'essor des techniques de navigation a toujours accompagné les grandes explorations humaines. Les instruments de navigation tels que la boussole (Chine, 1^{er} siècle après JC), l'astrolabe (adapté à la navigation maritime par les Portugais au XIV^e siècle), le sextant (XVIII^e siècle) ou le chronomètre de marine (XVIII^e siècle) ont permis aux voyageurs et aux aventuriers de tirer parti des repères naturels (étoiles, champ magnétique terrestre) pour déterminer leur position géographique avec une précision croissante. Aujourd'hui, chacun d'entre nous peut bénéficier d'une assistance par le système GPS (Global Positioning System) lors de ses déplacements automobiles quotidiens.

Ces différentes techniques de navigation ont pour point commun d'être basées sur la mesure de la position d'éléments extérieurs par rapport au système d'observation. Tout voyageur voulant déterminer sa position géographique devra tout d'abord posséder une information a priori sur la localisation des objets observés. Pour les étoiles ou les satellites (GPS ou Galileo), cette information est un éphéméride. Pour la navigation terrestre, ce sont des cartes indiquant la position des éléments remarquables de la géographie. Ensuite, notre voyageur devra disposer d'un système de mesure permettant de se localiser par rapport aux objets observés. Cette localisation est souvent partielle et indirecte : elle se limite pour la plupart des systèmes à des mesures de distance ou des mesures angulaires. Dans le système GPS par exemple, seule la distance des satellites au récepteur est accessible. Avec un sextant, seule l'élévation d'un astre est mesurable. Enfin, une opération de calcul est nécessaire pour estimer sa position géographique à partir des diverses observations à sa disposition. Les mathématiques ont ici un rôle de première importance à jouer. L'équipage des grandes expéditions maritimes du XV^e au XVIII^e siècle comptait toujours un officier avec de solides compétences en mathématiques et en astronomie. Sa tâche consistait à combiner les différentes mesures (sextant, compas, chronomètre, corde à noeuds) afin d'estimer la position du navire avec le plus de précision possible.

Aujourd'hui, la problématique de la localisation géographique est renouvelée par le développement croissant d'assistances à la navigation et d'engins totalement autonomes (robots ou drones). Les capteurs électroniques ont remplacés les instruments traditionnels

et les yeux des navigateurs, les mathématiciens embarqués ont cédé la place à des micro-processeurs. Cependant, les trois points fondamentaux décrits précédemment - information a priori, système de mesure, calcul d'estimation - restent valables. En conséquence, l'extension des performances d'un système de localisation peut donc se décliner selon ces mêmes axes. Une première voie consiste à améliorer la qualité de l'information a priori sur les objets observés : meilleure cartographie ou création de nouveaux objets (balises radio, satellites GPS). Une seconde direction est l'amélioration de la qualité et de la précision des instruments d'observations. La troisième consiste à optimiser les algorithmes assurant la combinaison des différentes sources d'information dans un objectif de précision, de fiabilité ou de disponibilité.

Contexte de la thèse

Le recalage altimétrique des aéronefs autonomes et le filtre particulaire

Dans le contexte des engins volants autonomes, la navigation à court terme, c'est-à-dire sur un horizon de quelques minutes à quelques dizaines de minutes, est réalisée sur la base des mesures accélérométriques et gyrométriques d'une centrale inertielle. Cependant, une estimation uniquement inertielle n'est pas satisfaisante pour des missions de plus longue durée, car le phénomène de *dérive* induit une erreur de localisation croissante avec le temps. Il est alors nécessaire de coupler la centrale inertielle avec des capteurs additionnels fournissant une information supplémentaire sur la position géographique. Ce procédé est appelé *recalage*, à la manière d'une montre que l'on remet à l'heure périodiquement sur une horloge de référence. Une solution classique est l'utilisation d'un récepteur GPS. Plus originale est l'utilisation d'un radar altimétrique mesurant la hauteur du sol situé à la verticale de l'engin, et d'une carte altimétrique du terrain survolé.

Pour illustrer le principe de recalage altimétrique, imaginons-nous les yeux bandés, avec pour mission d'effectuer un parcours prédéterminé sur un terrain montagneux. Supposons que nos sens pour nous localiser se réduisent à notre oreille interne, organe qui permet d'estimer les accélérations et les changements de direction. On peut faire l'analogie entre une centrale inertielle et cet organe. Au fil du parcours, la précision de suivi du parcours se dégrade inévitablement à cause des erreurs de jugement sur les distances parcourues et les changements de direction. Pour nous aider, munissons-nous d'un altimètre et d'une carte topographique sur laquelle sont indiquées les lignes de niveaux. La simple mesure de l'altimètre à un instant donné réduit déjà la zone des localisations possibles. De plus, les variations d'altitude au cours du temps comme des passages de crêtes fournissent des éléments encore plus précis. Ainsi, il est possible d'affiner notre localisation pendant le parcours. Cette expérience n'est pas totalement théorique. En effet, des techniques reconnues d'orientation en montagne telles que la méthode dite de la *tangente à la courbe* sont basées sur un principe similaire et permettent de se guider par temps de brouillard.

Dans le cas du recalage altimétrique [40] [25], le principe général de localisation est celui de la corrélation (*matching*) entre le profil de variations de la hauteur du terrain mesurée et la carte altimétrique stockée sous forme informatique. Il s'agit de trouver une

estimation de la trajectoire qui satisfasse un compromis entre d'une part l'accord avec la trajectoire calculée par la centrale inertielle que l'on sait entachée d'une certaine marge d'erreur, et d'autre part la concordance entre les mesures du radar altimétrique et les données de la carte embarquée.

L'approche bayésienne offre un cadre mathématique adéquat pour résoudre ce problème d'estimation. En exprimant l'information sur les grandeurs physiques sous forme de densités de probabilité, cette approche permet de construire un ensemble d'estimateurs ayant des propriétés d'optimalité spécifiques : *maximum a posteriori (MAP)*, *estimateur à minimum de variance (MMSE)* par exemple.

Cependant, une fois l'estimateur défini mathématiquement, son calcul numérique se doit d'être compatible avec les contraintes de l'application. Le temps de calcul, la possibilité d'approximation pour simplifier les opérations et la fréquence de disponibilité du résultat sont des critères tout aussi importants que l'optimalité définie au sens purement mathématique. Ce point est d'autant plus crucial dans le cadre du recalage altimétrique que les estimateurs linéaires classiques tels que le filtre de Kalman permettent un recalage correct uniquement pour des incertitudes de positionnement *a priori* faibles (quelques centaines de mètres). Au-delà de cette précision, le problème d'estimation devient fortement non linéaire et les estimateurs optimaux ne peuvent s'approximer par un estimateur linéaire. Dans ce cas, les méthodes classiquement utilisées pour résoudre le problème sont basées sur une discrétisation de l'espace d'état (filtrage à grille, maillage) et le coût de calcul devient de plusieurs ordres de grandeur supérieur au filtre de Kalman.

Au début des années 90, des méthodes de type Monte-Carlo ont été proposées comme alternative aux méthodes par maillage pour résoudre les problèmes d'estimation non linéaire. Le *filtrage particulaire*, introduit par Del Moral, Rigal, Salut [12][13], Gordon, Salmond et Smith [23], permet un calcul récursif dans un cadre de l'estimation d'un état dynamique avec des observations non-linéaires. Les travaux de l'Université de Linköping (Suède) [39][3] puis de l'Onera (France) [36][35][10][9] ont démontré la possibilité d'utiliser un filtre particulaire pour le recalage altimétrique et ont approfondi l'adaptation de l'algorithme pour cette application.

Démarche et objectifs

La question à l'origine de cette thèse est la suivante : les gains potentiels apportés par le filtrage particulaire peuvent-ils justifier un investissement pour remplacer les méthodes actuellement mises en œuvre (méthodes par maillage et filtrage de Kalman étendu) par des algorithmes de type filtrage particulaire ?

Une partie de la réponse à cette question a déjà été formulée par les études et les publications citées ci-dessus. Ces travaux se sont principalement appliqués à optimiser et évaluer le filtre particulaire sur des scénarios pour lesquels l'incertitude en position initiale est telle que le filtre de Kalman étendu est inutilisable. Dans ce cadre, seule une comparaison avec des méthodes par maillage fait sens.

Dans cette thèse, la démarche d'évaluation et de comparaison est différente : nous nous sommes intéressés à des scénarios pour lesquels le filtre de Kalman étendu demeure utilisable en pratique, mais dont les performances sont dégradées par le caractère non-linéaire de la mesure. Par ailleurs, l'objectif d'une application industrielle impose une structure de traitement numérique dans laquelle le filtre de recalage altimétrique doit s'insérer.

Cette orientation a conduit à l'étude comparée de quatre types de filtres. Le premier est le filtre de Kalman étendu. Le second est l'*Unscented Kalman Filter (UKF)*, qui propose une amélioration du filtre de Kalman étendu vis-à-vis des non-linéarités du problème. Le troisième un filtre hybride entre méthode par maillage et filtre de Kalman. L'emploi de ces trois filtres au recalage altimétrique fait partie de l'état de l'art [27][34][26]. Le quatrième filtre est basé sur le principe du filtre particulaire gaussien [32]. Nous décrivons comment il peut être employé dans notre cadre.

Organisation du mémoire

Le chapitre 1 est consacré à la compréhension des besoins associés à un système de navigation et à la description des caractéristiques des différents capteurs embarqués.

Le chapitre 2 est un rappel général sur l'inférence bayésienne et les méthodes de résolutions numériques associées, notamment le filtre de Kalman et ses dérivés, ainsi que le filtrage particulaire.

Le chapitre 3 décrit spécifiquement la problématique du recalage altimétrique et positionne la thèse par rapport à l'état de l'art. Il précise également les contraintes imposées par une réalisation pratique dans le cadre d'application réelle.

Le chapitre 4 est consacré à la définition des quatre types de filtres étudiés et expose la démarche de comparaison adoptée.

Le chapitre 5 décrit la simulation numérique développée dans le cadre de cette étude et présente des exemples de résultats.

Notations et symboles

Navigation terrestre

$(M, \vec{x}_m, \vec{y}_m, \vec{z}_m)$	repère lié à l'engin
$(O, \vec{x}_T, \vec{y}_T, \vec{z}_T)$	repère lié à la Terre
$(O, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$	repère inertiel
$(\vec{x}_{tgl}, \vec{y}_{tgl}, \vec{z}_{tgl})$	trièdre géographique local (TGL)
r_T	rayon terrestre
(L, l, z)	latitude, longitude, altitude de l'engin
(v_n, v_e, v_z)	composantes du vecteur vitesse de l'engin dans le TGL
(ψ, θ, ϕ)	angle d'azimuth, d'assiette et de roulis de l'engin
(p, q, r)	composantes de vecteur rotation de l'engin en repère engin

Modèle de dérivation inertielle

$(\delta_n, \delta_e, \tilde{z})$	erreurs de position métrique dans le TGL
$(\tilde{v}_n, \tilde{v}_e, \tilde{v}_z)$	erreurs de vitesse dans le TGL
$(\gamma_n, \gamma_e, \gamma_z)$	micro-rotateur relatif à l'erreur d'attitude
$(\tilde{a}_x, \tilde{a}_y, \tilde{a}_z)$	erreurs de mesure des accéléromètres
$(\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z)$	erreurs de mesure des gyromètres

Modèle de terrain

$\lambda(L, l)$	hauteur du terrain au point de coordonnées (L, l)
-----------------	---

Filtrage - notation générale

\mathbf{x}_k	vecteur d'état
$\hat{\mathbf{x}}_k$	estimation de l'état
\mathbf{v}_k	vecteur bruit d'état
\mathbf{Q}_k	matrice de covariance du bruit d'état
\mathbf{m}_k	mesure altimétrique
\mathbf{r}_k	bruit de mesure
\mathbf{R}_k	covariance du bruit de mesure
\mathbf{M}_k	vecteur rassemblant les mesures depuis l'instant initial
$\mathcal{N}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m}, \mathbf{P})$	densité de probabilité gaussienne de moyenne \mathbf{m} , de covariance \mathbf{P}

Filtrage - UKF

$\mathcal{X}_{k/k-1}^i$	vecteur d'état du <i>sigma-point</i> (i)
$\mathcal{M}_{k/k-1}^i$	mesure prédite pour le <i>sigma-point</i> (i)
$W_i^{(m)}$	poids du <i>sigma-point</i> (i) pour le calcul de la moyenne
$W_i^{(c)}$	poids du <i>sigma-point</i> (i) pour le calcul de la covariance

Filtrage particulaire

N	nombre de particules
N_{eff}	nombre efficace de particules
$\mathbf{x}_k^{(i)}$	vecteur d'état de la particule (i) à l'itération k
$\tilde{\omega}_k^{(i)}$	poids non-normalisé de la particule (i) à l'itération k
$\omega_k^{(i)}$	poids normalisé de la particule (i) à l'itération k
$\mathbf{x}^{(i)} \sim p_X(\mathbf{x})$	$\mathbf{x}^{(i)}$ échantillon de la variable aléatoire X , de d.d.p. $p_X(\mathbf{x})$
\cong	égalité à une constante multiplicative près

Divers

I	matrice identité
----------	------------------

Chapitre 1

Navigation et fusion d'information

1.1 Introduction

L'évaluation d'un choix technologique – dans cette thèse, l'algorithme de filtrage particulier pour la navigation inertielle assistée par recalage altimétrique – doit être nécessairement accompagnée d'une analyse des besoins fonctionnels et des exigences imposées par l'architecture du système. Tel est l'objectif de ce chapitre.

Après avoir précisé les notations utilisées en navigation terrestre, nous décrivons les éléments de la chaîne de commande pilotage – guidage – navigation qui permet le suivi de trajectoire. À partir de cette description, nous définirons les critères de performances d'un système de navigation et les différentes méthodes de positionnement qui permettent de répondre aux exigences. Enfin, nous décrivons l'architecture générale d'un système de navigation réalisant l'hybridation de plusieurs sources d'information.

1.2 La navigation terrestre

Le terme de navigation *terrestre* désigne ici la navigation par rapport au globe terrestre. Elle concerne aussi bien des engins évoluant sur terre, sur mer ou dans les airs. En navigation terrestre, on cherche à connaître la position géographique d'un objet, son orientation dans l'espace, ainsi que ses paramètres d'évolution, c'est-à-dire son vecteur vitesse et son vecteur rotation. Ce sous-chapitre précise les repères utilisés et définit les grandeurs cinématiques utilisées en navigation terrestre. L'ensemble du mémoire y fera référence.

1.2.1 Définition des repères

Repère engin (M) Le repère engin est lié à la structure de l'engin. Il est défini par une origine arbitraire M et un trièdre direct $(\vec{x}_m, \vec{y}_m, \vec{z}_m)$ choisi conventionnellement :

- le vecteur \vec{x}_m dirigé selon l'axe longitudinal de l'engin, orienté vers l'avant ;
- le vecteur \vec{y}_m de direction radiale, orienté vers l'aile droite ;
- le vecteur \vec{z}_m de direction radiale, orienté vers le « plancher ».

Le repère engin est représenté figure 1.1.

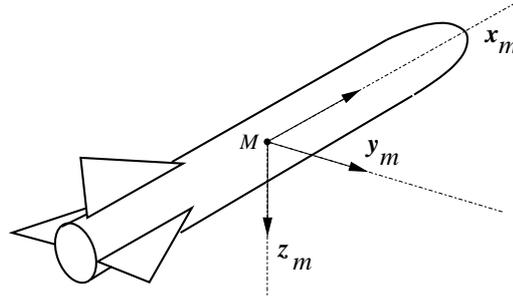


FIG. 1.1 – Définition du repère engin

Repère terrestre (T) Le repère terrestre est lié à la Terre. Il a pour origine le centre de la Terre O et les 3 vecteurs du trièdre $(\vec{x}_t, \vec{y}_t, \vec{z}_t)$ pointent respectivement vers :

- le point d'intersection de l'équateur et du méridien de Greenwich ;
- le point d'intersection de l'équateur et du méridien de longitude 90° ;
- le pôle nord.

L'axe $(O; \vec{z}_t)$ est l'axe de rotation de la Terre.

La surface terrestre est classiquement modélisée par un ellipsoïde, défini par le système géodésique WGS84. Dans la suite du document, dans le but de faire l'économie d'une complexité inutile, la Terre sera considérée comme parfaitement sphérique, de centre O et de rayon r_T (voir figure 1.2).

Trièdre géographique local (TGL) Le trièdre géographique local $(\vec{x}_{tgl}, \vec{y}_{tgl}, \vec{z}_{tgl})$ définit les directions géographiques locales (nord, est et verticale) au point M :

- le vecteur \vec{x}_{tgl} est horizontal à la surface terrestre, dans la direction du méridien local, et orienté vers le nord ;
- le vecteur \vec{y}_{tgl} est horizontal à la surface terrestre, dans la direction du parallèle local, et orienté vers l'est ;
- le vecteur \vec{z}_{tgl} est normal à la surface terrestre, et orienté vers le centre de la Terre.

Repère géocentrique (I) Le repère géocentrique a pour origine le centre de la Terre O et les 3 vecteurs du trièdre $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ pointent vers 3 directions fixes dans l'espace. Par convention, on choisit \vec{z}_i confondu avec \vec{z}_t . Le référentiel géocentrique sera considéré comme galiléen. À ce titre, il est aussi nommé référentiel *inertiel*.

1.2.2 Grandeurs cinématiques

Position géographique La position de l'engin par rapport au référentiel terrestre est défini par les angles de latitude L et longitude l ainsi que l'altitude z (voir figure 1.2). L'altitude est référencée au modèle de surface terrestre WGS84. Par convention, z est négatif pour un point situé au dessus de la surface terrestre ($z = P\vec{M} \cdot \vec{z}_{tgl}$).

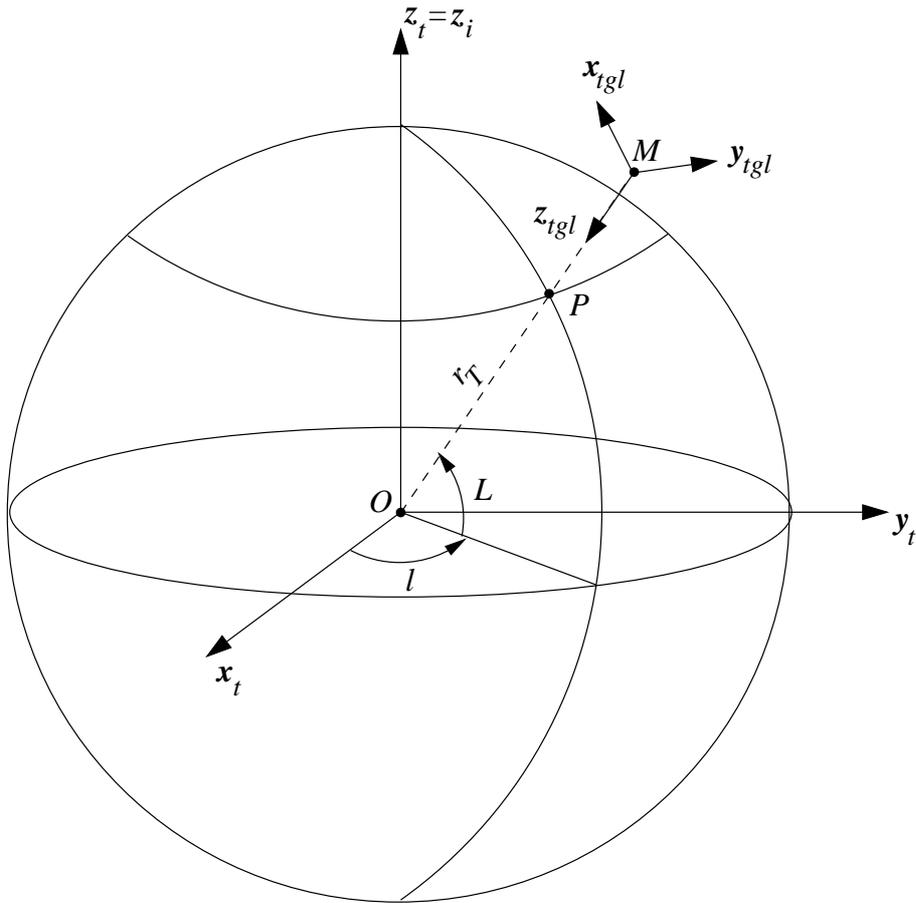


FIG. 1.2 – Définition du trièdre géographique local et du repère terrestre

Vitesse La vitesse de l'engin est la vitesse du point M par rapport au référentiel terrestre. Le vecteur vitesse est noté $\vec{v}_{m/t}$. Elle est usuellement exprimée en projetant $\vec{v}_{m/t}$ dans le trièdre géographique local. Dans la suite du document, on note :

- la vitesse selon la direction nord $v_n = \vec{v}_{m/t} \cdot \vec{x}_{tgl}$
- la vitesse selon la direction est $v_e = \vec{v}_{m/t} \cdot \vec{y}_{tgl}$
- la vitesse selon la direction verticale $v_z = \vec{v}_{m/t} \cdot \vec{z}_{tgl}$

Les vitesses v_n , v_e et v_z sont reliées aux dérivées temporelles de L , l et z par les relations :

$$\begin{aligned} v_n &= (r_T - z)\dot{L} \\ v_e &= (r_T - z)(\cos L)\dot{l} \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Attitude L'attitude de l'engin est l'orientation du corps de l'engin par rapport au trièdre géographique local. Elle est usuellement définie par les angles d'Euler : azimut ψ , assiette θ et roulis ϕ . Le passage du trièdre géographique local au repère engin s'effectue par 3 rotations successives d'angles ψ , θ et ϕ (voir figure 1.3).

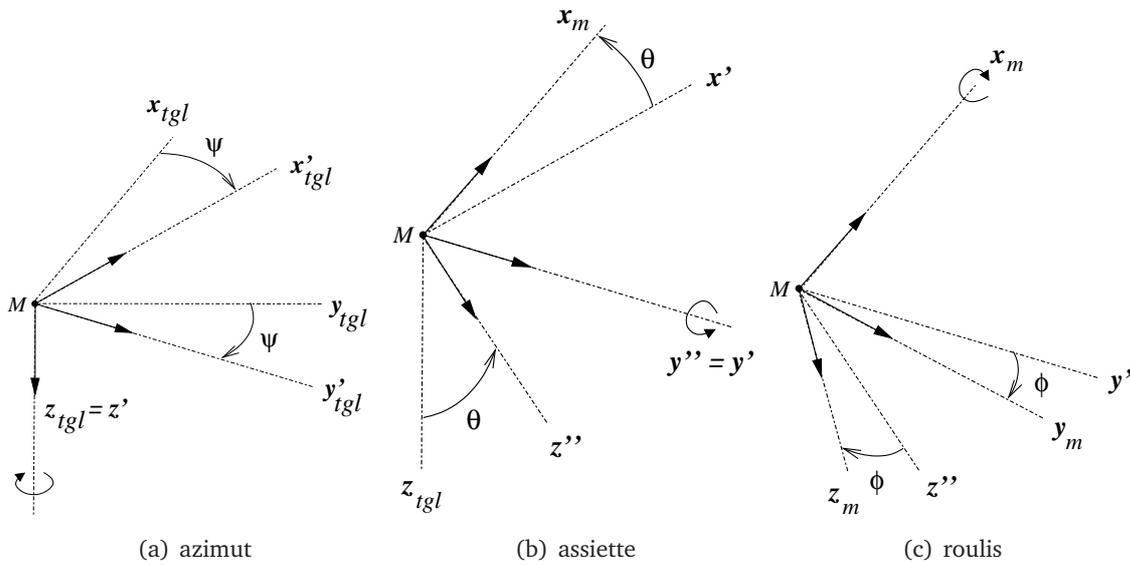


FIG. 1.3 – Angles d'attitude - Passage du repère TGL au repère engin

Vitesse de rotation Le vecteur vitesse rotation du repère engin par rapport au trièdre géographique local est noté $\vec{\omega}_{m/tgl}$. On l'exprime usuellement par ses composantes (p, q, r) dans le trièdre engin. Elles sont reliées aux vitesses de tangage, lacet et roulis par les relations :

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ q &= \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.3 Structure de commande d'un véhicule autonome

1.3.1 Hiérarchie

L'engin doit exécuter une trajectoire planifiée de manière entièrement automatisée et autonome. Cette tâche est confiée à un calculateur embarqué qui élabore les consignes à destination des actionneurs. L'ensemble forme un système asservi présenté schématiquement par la figure 1.4. Le système de commande est divisé hiérarchiquement entre les fonctions pilotage, guidage et navigation.

1.3.2 La fonction pilotage

Le module de pilotage génère les consignes des actionneurs (gouvernes aérodynamiques, propulseur) dans le but d'assurer la stabilisation de l'engin et de réaliser l'accélération demandée par le guidage.

En retour, des capteurs inertiels (accéléromètres et gyromètres) mesurent l'effet des actionneurs sur la cinématique de l'engin.

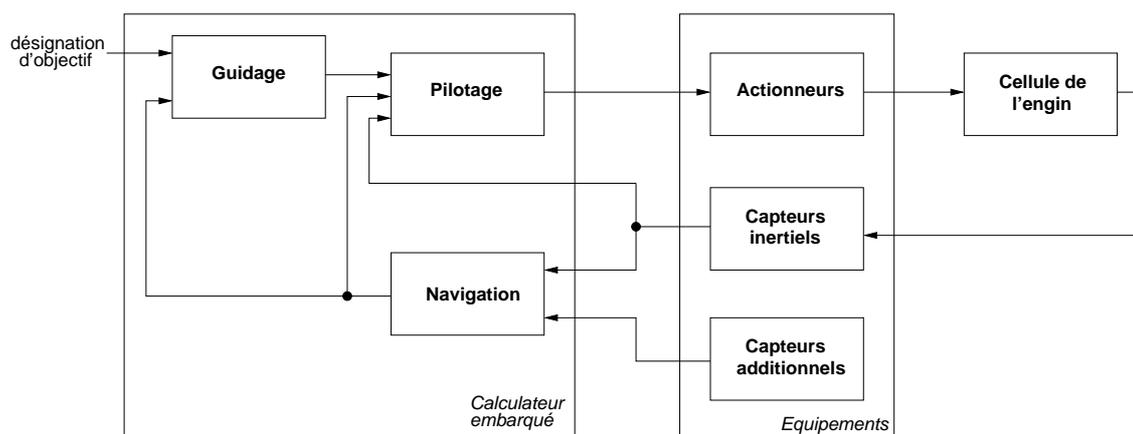


FIG. 1.4 – Chaîne pilotage - guidage - navigation

1.3.3 La fonction guidage

Le module de guidage a pour rôle d'asservir la trajectoire réalisée par l'engin à la trajectoire planifiée. Il élabore une consigne en accélération assurant le formage de la trajectoire et corrige les éventuels écarts dus aux paramètres non maîtrisés de l'environnement (présence de vent par exemple).

1.3.4 La fonction navigation

La navigation assure le bouclage de l'asservissement en fournissant une estimation de la position, vitesse et attitude de l'engin tout au long du vol.

1.4 Exigences pour une mission autonome

1.4.1 Précision de positionnement

La précision de positionnement fait référence à la capacité du système de navigation à maintenir une erreur de localisation admissible et compatible avec les contraintes opérationnelles. Cela inclut en particulier la capacité de corriger l'erreur de localisation initiale.

1.4.2 Disponibilité

La disponibilité est à la capacité de délivrer une information la plus récente possible. La fréquence de rafraîchissement des informations de localisation dépend du temps d'acquisition des capteurs et du temps de traitement des mesures. Par exemple, pour une localisation basée sur une prise d'image, la disponibilité des données va dépendre :

- du temps d'exposition nécessaire à la formation d'image par le capteur imageur ;
- de la présence d'éléments utiles dans l'image (certaines images peuvent être vides de contenu exploitable) ;
- du temps de calcul nécessaire aux algorithmes de traitement d'image.

1.4.3 Fiabilité

La fiabilité est la capacité du système à qualifier l'information délivrée. Cette notion recouvre l'estimation de la précision des informations fournies en sortie lors d'un fonctionnement nominal et, le cas échéant, la détection d'un dysfonctionnement (absence de signal, panne de capteur, exception générée par l'algorithme de traitement des données, etc.). L'objectif est de limiter la propagation de données de mauvaise qualité.

1.5 Les sources d'information

1.5.1 Navigation inertielle

La navigation inertielle est un moyen autonome permettant de reconstituer la position courante de l'engin par intégration de mesures inertielles [41].

Mesure de l'accélération L'accélération d'un mobile par rapport à un référentiel galiléen est mesurable grâce à des capteurs appelés *accéléromètres*. Le principe général d'un accéléromètre est d'asservir une masselotte de masse m à une position fixe par rapport au boîtier de l'instrument. Si l'asservissement est parfait, le mouvement de la masselotte est confondu avec celui du boîtier. Par le principe fondamental de la dynamique, l'accélération du centre de gravité M de la masselotte par rapport à un référentiel galiléen est égale à la somme des forces appliquées divisée par la masse de la masselotte. Dans le cadre de la navigation inertielle terrestre, on considérera le référentiel géocentrique comme galiléen. Les forces appliquées à la masselotte se décomposent entre la résultante $\vec{F}_{B \rightarrow m}$ des forces exercées par le boîtier de l'instrument au travers de la structure mécanique de l'asservissement et la force de gravitation terrestre $m\vec{g}$. Ceci se traduit par l'équation :

$$\vec{F}_{B \rightarrow m} = m (\vec{a}_{m/i} - \vec{g}) \quad (1.3)$$

Ainsi, la mesure de $\vec{F}_{B \rightarrow m}$ donne accès à la connaissance de $(\vec{a}_{m/i} - \vec{g})$, appelée accélération spécifique. Le principe physique de la mesure de $\vec{F}_{B \rightarrow m}$ diffère selon les technologies d'accéléromètres. L'idée générale est de relier la masselotte au boîtier par un matériau dont les propriétés physiques vont être modifiées sous l'effet des efforts transmis. À titre d'exemple, nous pouvons citer :

- un ressort dont la variation de longueur sera proportionnelle à la force transmise selon son axe ;
- un cristal de quartz dont les propriétés électriques sont modifiées par les efforts appliqués ;
- une lame vibrante dont la fréquence propre dépend de sa tension mécanique.

Les contraintes de fabrication du mécanisme de l'accéléromètre limite la mesure selon un axe unique. La détermination complète de $\vec{F}_{B \rightarrow m}$ est effectuée en plaçant trois accéléromètres dans des directions orthogonales.

Il existe deux types principaux de systèmes de navigation inertiels, qui diffèrent par l'alignement des axes des accéléromètres. Pour les systèmes dits à *plate-forme stabilisée*,

les axes des accéléromètres sont maintenus fixes par rapport au trièdre géographique local, grâce à un dispositif de stabilisation gyroscopique. Quels que soient les mouvements de l'engin, les accéléromètres restent alignés selon les axes Nord-Sud, Ouest-Est et la verticale. Cette configuration, adoptée pour les premiers systèmes inertiels, permet de simplifier les calculs de navigation en aval.

Avec le développement de la puissance des calculateurs embarqués sont apparus les systèmes dits *strap-down*, dans lesquels les accéléromètres sont fixés au bâti de l'engin (voir figure 1.5). Le vecteur accélération $\vec{a}_{m/i}$ est alors mesuré dans le trièdre engin puis transféré par le calcul en repère inertiel. Ce transfert nécessite la connaissance de l'orientation de l'engin par rapport au repère inertiel. C'est pourquoi, en complément de l'accélération, la vitesse de rotation de l'engin par rapport au repère inertiel est mesurée par des gyromètres.

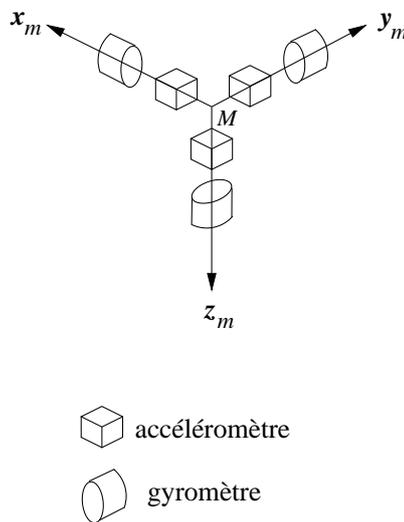


FIG. 1.5 – Positionnement des capteurs dans un système 'strap-down'

Calcul de navigation inertielle La détermination de la position est effectuée par intégration des mesures d'accélération au cours du temps. Pour la navigation inertielle terrestre, la position à l'instant t_f s'exprime dans le repère terrestre comme la double intégration de l'accélération depuis l'instant initial t_0 :

$$\overrightarrow{OM}(t_f) = \overrightarrow{OM}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \int_{t_0}^{t_f} \vec{a}_{m/t}(t) dt^2 \quad (1.4)$$

Cette intégration ne peut être effectuée directement. En effet :

- les accélérations sont mesurées par rapport au référentiel géocentrique, et non par rapport au repère terrestre ;
- le vecteur accélération est mesuré en projection dans le repère engin ;
- l'accélération mesurée inclut un terme lié à la gravité terrestre.

Pour un système de navigation inertielle *strap-down*, les grandes étapes de détermination de la position géographique sont :

- l'intégration des mesures gyrométriques qui permet de déduire l'attitude de l'engin par rapport au trièdre géographique local ;
- la projection du vecteur accélération $\vec{a}_{m/i}$ dans le trièdre géographique local grâce à l'information d'attitude ;
- le passage de $\vec{a}_{m/i}$ à $\vec{a}_{m/t}$ par correction des accélérations d'entraînement et de Coriolis dues à la rotation terrestre ;
- une première intégration de $\vec{a}_{m/t}$ pour obtenir la vitesse par rapport au repère terrestre $\vec{v}_{m/t}$ en projection dans le trièdre géographique local ;
- une deuxième intégration de $\vec{v}_{m/t}$ pour obtenir l'évolution de la position géographique.

L'ensemble de ces étapes sont rassemblées sur le schéma 1.6. Une description complète des calculs est présentée en annexe A.

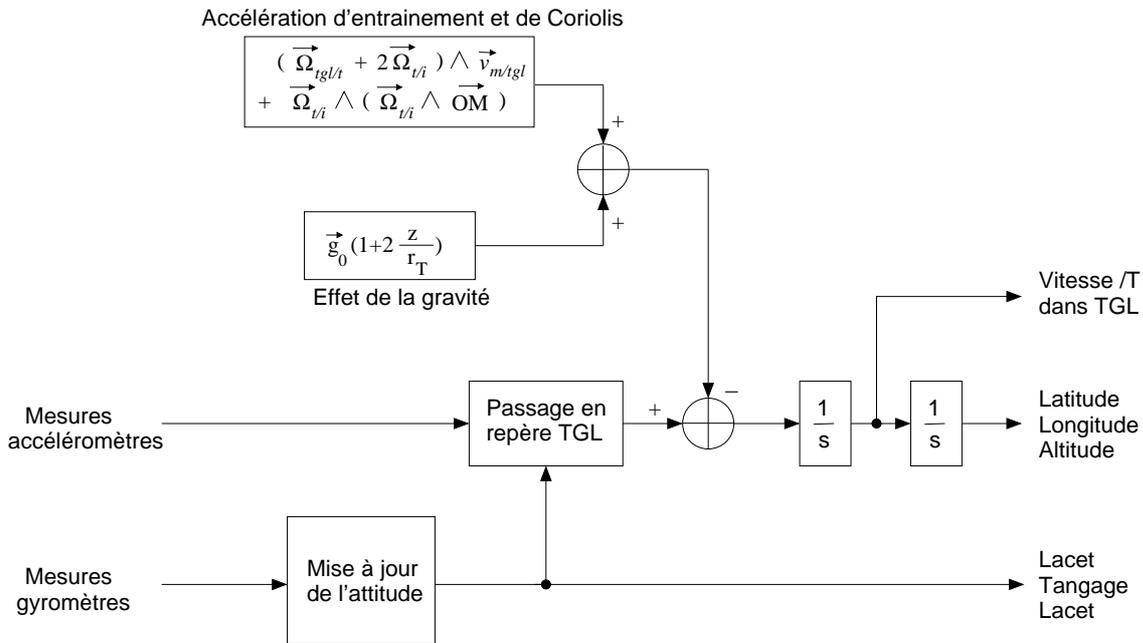


FIG. 1.6 – Principe des calculs de navigation inertielle

Caractéristiques de l'estimation inertielle La navigation inertielle s'effectue par la mise à jour permanente de la position par intégration des accélérations. En conséquence, la précision de l'estimation à un instant t est tributaire de l'ensemble des mesures antérieures à t . La précision ne peut donc que se dégrader au cours du temps. Ce phénomène est appelé *dérive*. La modélisation de ce phénomène est détaillée dans l'annexe B.

La disponibilité des mesures est permanente et le rafraîchissement des données est effectué à cadence élevée (plusieurs centaines de hertz).

La navigation inertielle est complètement autonome : elle ne dépend d'aucune infrastructure extérieure à l'engin. Le système offre une insensibilité quasi-totale à d'éventuelles perturbations extérieures. Sa fiabilité est donc très grande.

1.5.2 Positionnement par satellites

Le système GPS (*Global Positioning System*) est actuellement le principal système de positionnement par satellites, en attendant la mise en opération du système concurrent européen Galileo. Le système GPS est constitué de 24 satellites dont les orbites assurent la visibilité d'au moins 4 d'entre eux en tout point du globe et à tout instant. Le principe de localisation est celui de la *triangulation*. Les satellites émettent un signal radio-fréquence capté par un récepteur qui mesure le déphasage du signal reçu. Le décalage temporel des signaux est directement relié à la distance qui sépare le récepteur du satellite. La vitesse du récepteur est également accessible par la mesure de l'effet Doppler sur les signaux reçus.

En terme de précision, le GPS permet un positionnement avec une erreur horizontale inférieure à 10m. Contrairement à une navigation inertielle, la localisation obtenue est absolue et la précision est indépendante de l'instant de vol.

La disponibilité est permanente et couvre l'ensemble du globe terrestre. Les données en sortie d'un récepteur GPS sont rafraîchies avec une fréquence de l'ordre de quelques hertz.

La fiabilité du système GPS pour des applications sensibles est sujette à deux réserves principales. Tout d'abord, les signaux GPS sont sensibles aux perturbations électromagnétique. Ensuite, le système GPS dépend des autorités américaines.

1.5.3 Imagerie

La prise d'images du sol au cours du vol peut être effectuée par des capteurs optiques (imagerie visible ou infrarouge), ou des capteurs électromagnétiques (radar à synthèse d'ouverture). La détection d'éléments remarquables de l'image (bâtiments par exemple) et leur association avec des données issues d'une préparation de mission permet de retrouver la position relative de l'engin par rapport à ces objets et, *in fine*, d'obtenir la position géographique de l'engin.

1.5.4 Recalage altimétrique

Le recalage altimétrique est une technique basée sur la mesure de la distance verticale entre l'engin et le sol [40]. Cette distance se nomme *hauteur* ou *ground clearance*. Elle est mesurée par un radar altimétrique disposé à bord de l'engin (figure 1.7).

Les mesures sont effectuées à intervalle régulier pendant le vol. L'ensemble des mesures forment alors un *profil altimétrique* du terrain le long de la trajectoire de l'engin. Si le terrain survolé n'est pas plat, il est possible de comparer ce profil mesuré à une carte altimétrique du terrain pour obtenir une estimation de la position horizontale et verticale de l'engin au cours du vol.

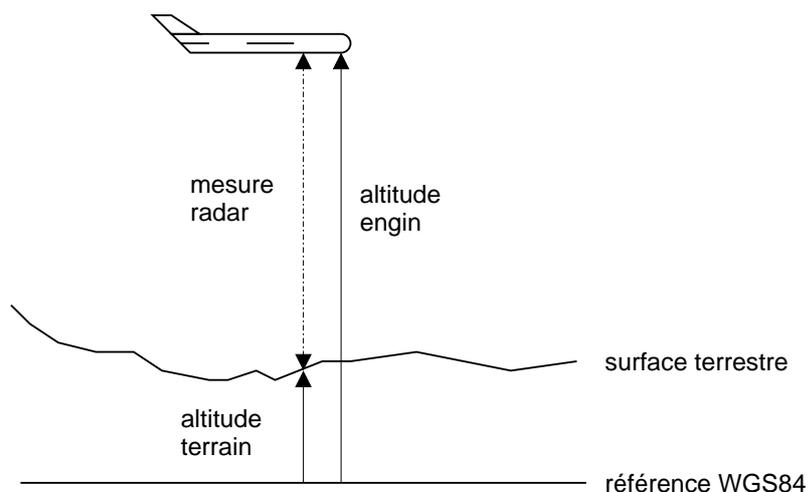


FIG. 1.7 – Mesure du radar altimétrique

Les cartes altimétriques du relief terrestre sont établies à partir de mesures satellitaires. Certaines de ces bases de données sont disponibles au public. Dans le cadre de cette thèse, nous avons utilisés les données issues de la campagne de mesure *NASA Shuttle Radar Topographic Mission (SRTM)*, dont la base de donnée est disponible par le site Internet [37].

Le recalage altimétrique ne peut constituer un moyen de positionnement si il est utilisé seul. En effet, il est nécessaire de connaître une bonne approximation de la position relative des points de mesure. Il doit donc être associé à un autre moyen de navigation (système inertiel par exemple).

La précision du recalage altimétrique dépend de la précision de la mesure du radioaltimètre, de carte altimétrique, des caractéristiques du relief, et de l'algorithme de recalage utilisé. Une discussion plus en détail sera menée dans le chapitre 2.

La disponibilité de la mesure est limitée par les manœuvres de l'engin, le lobe du radar devant être maintenu proche de la verticale, et l'altitude de vol, qui doit rester compatible avec la portée du radioaltimètre. Les conditions météorologiques peuvent également dégrader les performances.

Le radioaltimètre, bien que théoriquement sensible aux systèmes de brouillage électronique, offre dans la pratique une faible vulnérabilité, étant donné la directivité de son lobe de réception. Il offre donc une bonne fiabilité en contexte hostile.

1.6 Conclusion

1.6.1 Complémentarité des sources

Le tableau 1.1 récapitule les caractéristiques principales des différentes méthodes de positionnement. D'un point de vue disponibilité et fiabilité, la navigation inertielle offre des caractéristiques idéales : indépendance vis-à-vis de tout élément externe, complétude de l'information (position, vitesse et attitude), disponibilité permanente et taux élevé de

rafraîchissement des données. La principale limitation de l'utilisation de la navigation inertielle est le temps de vol qui affecte la précision de positionnement. Les autres sources envisagées ont pour principal avantage d'offrir une estimation de la position à partir de grandeurs physiques directement dépendantes de la position (distance engin - satellites pour le GPS, mesures angulaires en imagerie optique, distance engin - sol pour le recalage altimétrique). Leur précision et leur disponibilité ne dépend que des conditions d'acquisition de la mesure, a priori indépendante de la durée du vol, et de la présence de données exploitables dans les mesures.

1.6.2 La navigation hybridée

Le concept de navigation hybridée repose sur la complémentarité des différentes sources de positionnement dégagée précédemment [19][18]. Dans un schéma classique, un système de navigation inertielle est utilisé comme source primaire de positionnement. Il permet une mise à jour permanente et à fréquence élevée de la position, vitesse et attitude de l'engin. Les autres sources sont prises en compte pour corriger la dérive inertielle, en exploitant le fait que ces sources fournissent une erreur maîtrisée en position. Le schéma général d'un système de navigation hybridée est représenté par la figure 1.8. L'élément central est l'algorithme d'hybridation qui permet d'estimer la dérive inertielle à partir de l'estimation inertielle et des données fournies par les sources complémentaires. Nous détaillerons dans le chapitre suivant le principe théorique de cet algorithme ainsi que les différentes manières de l'implémenter dans la pratique.

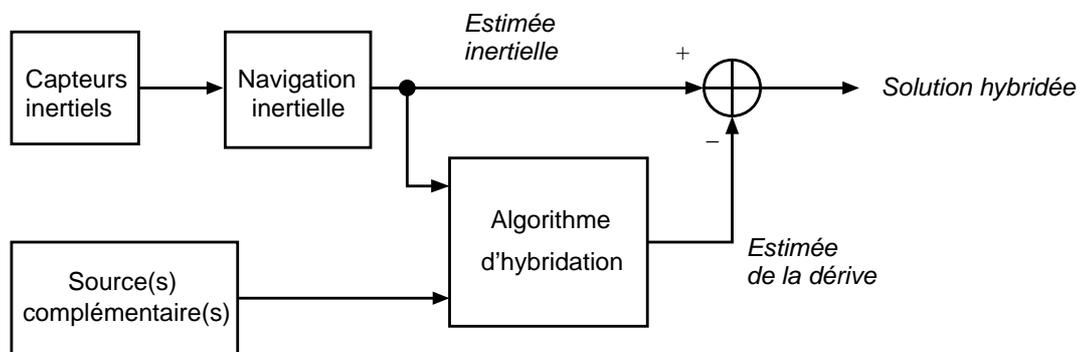


FIG. 1.8 – Principe de la navigation hybridée

	<i>Précision</i>	<i>Disponibilité</i>	<i>Fiabilité</i>
Navigation inertielle	Se dégrade avec le temps de vol	Permanente Indépendante de toute infrastructure externe	Très grande
GPS	Dépend de la position des satellites et des conditions de réception Indépendante du temps de vol	Permanente Globale	Sensible aux perturbations
Imagerie	Dépend des conditions de prises de vue Indépendante du temps de vol	Nécessite la présence d'éléments remarquables et une préparation de mission	Dépend des conditions météorologiques
Radar altimétrique	Dépend du relief terrestre Indépendante du temps de vol	Inopérant sur terrain plat et au dessus de la mer Nécessite des données altimétriques	Robuste aux perturbations

TAB. 1.1 – Comparaison les différentes méthodes de positionnement

Chapitre 2

Cadre bayésien et méthodes numériques

2.1 Introduction

Ce chapitre introduit de manière succincte les concepts probabilistes sous-jacents à toute opération de filtrage ou d'estimation de paramètres. Le concept de *probabilité conditionnelle* est l'outil central de ces méthodes. Une probabilité conditionnelle décrit l'interdépendance entre différents événements aléatoires et permet d'exploiter l'information statistique fournie par une observation (ou mesure). Dans le cas du problème de recalage altimétrique, il s'agit de relier l'information qu'apporte une mesure issue d'un système physique (radio-altimètre dans le cas de la navigation hybride) à l'état du système inaccessible directement (position, vitesse et attitude).

2.2 Inférence bayésienne

2.2.1 Caractérisation statistique d'une grandeur

Pour reprendre l'exemple de la navigation hybride, les mesures sont entachées d'une erreur aléatoire qui interdit de leur associer une valeur déterministe. De même, la position n'est pas connue avec certitude. Toutes ces grandeurs seront caractérisées de manière *statistique*. On les nomme alors *variables aléatoires*. Rappelons d'abord quelques définitions et résultats sur la caractérisation des variables aléatoires.

DÉFINITION 2.2.1 (DENSITÉ DE PROBABILITÉ)

On note $\{X \leq x\}$ l'évènement "la réalisation de la variable aléatoire X est inférieure ou égale à x ". On définit la fonction de distribution associée à la variable aléatoire X par :

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

et la densité de probabilité (sous réserve d'existence) par :

$$p_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x)$$

La densité de probabilité (ou la fonction de distribution) caractérise de façon complète la connaissance statistique de la variable aléatoire X .

DÉFINITION 2.2.2 (DENSITÉ DE PROBABILITÉ CONJOINTE)

Soient X et Y deux variables aléatoires. On définit la densité de probabilité conjointe par :

$$p_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

avec

$$F_{XY}(x, y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})$$

Le concept de densité de probabilité conjointe permet de définir une densité de probabilité pour un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]$. La densité de probabilité de \mathbf{X} est définie comme la densité de probabilité conjointe de ses composantes : $p(\mathbf{x}) = p(x_1, \dots, x_n)$. On parle alors de densité de probabilité *multi-dimensionnelle*.

DÉFINITION 2.2.3 (DENSITÉ DE PROBABILITÉ MARGINALE)

Soient X et Y deux variables (ou vecteurs) aléatoires, et $p_{XY}(x, y)$ leur densité de probabilité conjointe. Alors :

$$p_X(x) = \int p_{XY}(x, y) dx$$

$p_X(x)$ est appelée la densité de probabilité marginale de X .

DÉFINITION 2.2.4 (PROBABILITÉ CONDITIONNELLE)

La probabilité d'un évènement A conditionnellement à un évènement B est définie par :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A|B)$ caractérise la dépendance de l'évènement A à l'évènement B . Si A et B sont indépendants, alors $P(A|B) = P(A)$.

DÉFINITION 2.2.5 (DENSITÉ DE PROBABILITÉ CONDITIONNELLE)

La densité de probabilité d'une variable (ou vecteur) aléatoire X conditionnellement à une variable (ou vecteur) aléatoire Y est définie par :

$$p_X(x|y) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)} = \frac{p_{XY}(x, y)}{\int p_{XY}(x, y) dx}$$

La densité de probabilité conditionnelle $p_X(x|y)$ représente la connaissance statistique de X lorsque Y est observée. C'est l'outil de base de l'estimation : si la fonction $p_X(x|y)$ est connue, alors une observation (ou mesure) de la grandeur Y permet la connaissance statistique de la variable X .

2.2.2 Cadre bayésien pour l'estimation

La règle de Bayes permet de calculer la fonction $p_X(x|y)$:

THÉORÈME 2.2.1 (THÉORÈME DE BAYE)

Soit X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$\boxed{p_X(x|y) = \frac{p_Y(y|x) p_X(x)}{p_Y(y)} = \frac{p_Y(y|x) p(x)}{\int p_Y(y|x) p(x) dx}} \quad (2.1)$$

Nota : Dans un souci de simplifier les notations, on représentera dans la suite du document $p_X(x)$ par $p(x)$ et $p_X(x|y)$ par $p(x|y)$.

Le théorème de Bayes fournit la solution mathématique du problème d'estimation. En effet, supposons un système S décrit par le vecteur d'état \mathbf{x} . On réalise un certain nombre de mesures sur le système, dont les résultats sont rassemblés dans un vecteur \mathbf{m} . Alors, la règle de Bayes permet d'écrire :

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{m}) = \frac{p(\mathbf{m}|\mathbf{x}) p(\mathbf{x})}{\int p(\mathbf{m}|\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}$$

- $p(\mathbf{x}|\mathbf{m})$ est appelée *densité de probabilité a posteriori*. Elle correspond à la densité de probabilité du paramètre d'intérêt sachant que la mesure a pour résultat \mathbf{m} . $p(\mathbf{x}|\mathbf{m})$ reflète donc l'ensemble de l'information apportée par la mesure.
- $p(\mathbf{m}|\mathbf{x})$ est la *vraisemblance*. $p(\mathbf{m}|\mathbf{x})$ est directement issue de la modélisation du système de mesure et des bruits qui l'affectent. Dans la plupart des problèmes, cette fonction peut être calculée en tout point sans difficulté.
- $p(\mathbf{x})$ est la densité de probabilité *a priori*. Elle correspond à la connaissance sur l'état avant toute mesure.

La seule difficulté de l'application pratique de la règle de Bayes réside dans l'évaluation de l'intégrale $\int p(\mathbf{m}|\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Dans le cas général, cette intégrale n'admet pas de solution analytique (et le cas où \mathbf{x} est multi-dimensionnel augmente encore la difficulté). Le cas où \mathbf{m} dépend linéairement de \mathbf{x} et les bruits de mesure sont additifs gaussiens permet une résolution analytique exacte du problème (algorithme des moindres carrés). Hors de ce cadre très restreint, la solution ne peut être qu'une approximation. Toute la difficulté de la conception de l'algorithme d'estimation consiste à trouver la meilleure technique d'approximation pour la règle de Bayes. Il n'existe pas de solution universelle à l'estimation non-linéaire : il s'agit de trouver la technique la plus pertinente pour un problème donné.

2.2.3 Estimateurs

La construction de $p(\mathbf{x}|\mathbf{m})$ donne la connaissance statistique complète de \mathbf{x} . Dans une application pratique, on cherche plutôt à donner une valeur à \mathbf{x} qui soit la plus proche possible de la valeur vraie. C'est le but des estimateurs. Ils sont construits à partir de la densité de probabilité $p(\mathbf{x}|\mathbf{m})$. Les deux plus courants sont :

- Estimateur à minimum de variance (MMSE)

$$\hat{\mathbf{x}}_{MMSE} = \int \mathbf{x} p(\mathbf{x}|\mathbf{m}) d\mathbf{x}$$

$\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}$ correspond à la moyenne de $p(\mathbf{x}|\mathbf{m})$. Cet estimateur a la propriété de minimiser l'erreur quadratique moyenne $E [(\hat{\mathbf{x}}_{MMSE} - \mathbf{x}_{vrai})^2]$.

- Estimateur du maximum a posteriori (MAP)

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{x}|\mathbf{m})$$

$\hat{\mathbf{x}}_{MAP}$ correspond au mode de $p(\mathbf{x}|\mathbf{m})$

2.2.4 Cas des systèmes dynamiques

On entend par systèmes dynamiques des systèmes dont l'état varie dans le temps. On va considérer que cette évolution est elle-même aléatoire. Le problème sera traité en temps discret. Le problème d'estimation n'est pas différent du paragraphe précédent, le vecteur \mathbf{X}_k est constitué de l'ensemble des états du système sur l'intervalle de temps $[0; k]$:

$$\mathbf{X}_k = [\mathbf{x}_0^\top, \mathbf{x}_1^\top, \dots, \mathbf{x}_k^\top]^\top$$

Les états \mathbf{x}_k étant eux-mêmes des vecteurs.

De la même manière, les mesures aux différents instants peuvent être concaténées :

$$\mathbf{M}_k = [\mathbf{m}_0^\top, \mathbf{m}_1^\top, \dots, \mathbf{m}_k^\top]^\top$$

La règle de Bayes s'exprime alors :

$$p(\mathbf{X}_k | \mathbf{M}_k) = \frac{p(\mathbf{M}_k | \mathbf{X}_k) p(\mathbf{X}_k)}{\int p(\mathbf{M}_k | \mathbf{X}_k) p(\mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k} \quad (2.2)$$

Hypothèses supplémentaires Deux hypothèses permettent de simplifier largement les calculs induits par 2.2 en permettant d'écrire récursivement $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{M}_k)$ en fonction de $p(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{M}_{k-1})$:

1. Les états successifs du système forment une chaîne de Markov d'ordre un. C'est à dire que l'état à l'instant k ne dépend que de l'état à l'instant précédent :

$$\mathbf{x}_k = f_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_k)$$

avec \mathbf{v}_k un bruit blanc qui traduit l'évolution aléatoire de l'état. On le nomme *bruit d'état*.

2. Les mesures sont indépendantes conditionnellement à l'état :

$$p(\mathbf{m}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{M}_{k-1}) = p(\mathbf{m}_k | \mathbf{x}_k)$$

Ces deux hypothèses sont en fait assez peu restrictives d'un point de vue pratique. De nombreux systèmes peuvent être modélisés sous cette forme. On obtient alors la relation de récursion suivante :

$$p(\mathbf{X}_k | \mathbf{M}_k) = p(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{M}_{k-1}) \frac{p(\mathbf{m}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}{p(\mathbf{m}_k | \mathbf{M}_{k-1})} \quad (2.3)$$

Cette relation donne la densité de probabilité *a posteriori* pour l'ensemble de la trajectoire depuis l'instant initial à l'instant k . En filtrage, seule l'estimation de l'état courant \mathbf{x}_k est d'intérêt. La densité de probabilité marginale à \mathbf{x}_k se calcule par :

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k) = \int p(\mathbf{X}_k | \mathbf{M}_k) d\mathbf{X}_{k-1}$$

Ce qui conduit à :

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k) = \frac{1}{p(\mathbf{m}_k|\mathbf{M}_{k-1})} \cdot p(\mathbf{m}_k|\mathbf{x}_k) \cdot \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{M}_{k-1})d\mathbf{x}_{k-1} \quad (2.4)$$

Cette relation est la solution de base à tout problème d'estimation récursive dans le cadre des hypothèses exposées ci-dessus. D'un point de vue calculatoire, chaque itération du filtre se résume donc aux étapes suivantes :

1. L'étape de *prédiction* (équation de Chapman-Kolmogorov) :

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{M}_{k-1})d\mathbf{x}_{k-1} \quad (2.5)$$

2. L'étape de *correction* (règles de Bayes) :

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k) = \frac{p(\mathbf{m}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_{k-1})}{p(\mathbf{m}_k|\mathbf{M}_{k-1})} \quad (2.6)$$

avec :

$$p(\mathbf{m}_k|\mathbf{M}_{k-1}) = \int p(\mathbf{m}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_{k-1})d\mathbf{x}_k \quad (2.7)$$

FIG. 2.1 – Filtrage optimal récursif

Dans le cas général, les deux intégrales n'admettent pas d'expression analytique. Ce point constitue la principale difficulté. Seuls des cas très particuliers (par exemple, système linéaire et bruits gaussiens) conduisent à une expression simple de $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$, dont les paramètres peuvent être calculés grâce à l'algorithme de Kalman (cf. §2.3.2). Dans les autres cas, on peut envisager deux grandes familles de stratégies :

- soit formuler un modèle linéaire approché du système et considérer les bruits comme gaussiens. La solution est alors calculée analytiquement (méthode des moindres carrés, filtre de Kalman étendu). La validité de la solution dépend de la qualité de l'approximation du système par le modèle linéaire ;
- soit utiliser des méthodes numériques pour approcher $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$: discrétisation de l'espace d'état, filtrage particulière. La validité de la solution dépend alors directement de la méthode numérique et du problème traité.

2.3 Filtrage linéaire

2.3.1 Estimateur linéaire optimal

Une approche pour résoudre les difficultés de calcul de la solution du filtrage optimal consiste à construire un estimateur optimal dans une classe de solutions particulières. En particulier, la classe des estimateurs linéaires est un choix très classique. On nomme ici estimateur linéaire tout estimateur s'exprimant comme une combinaison linéaire de la séquence de mesure \mathbf{M}_k .

Dans cette approche, il s'agit de construire le meilleur estimateur (au sens de l'erreur quadratique moyenne) dans la classe des estimateurs linéaires et non biaisés :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^{opt} &= \mathbf{a} + \mathbf{B} \mathbf{M}_k \quad \text{tel que :} \\ (1) \quad E \left[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{opt} \right] &= \mathbf{0} \\ (2) \quad \text{var} \left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{opt} \right) &\text{ minimale} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Le problème se résume à trouver le vecteur \mathbf{a} et la matrice \mathbf{B} qui satisfont ces conditions. Le calcul conduit sans difficulté à :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= E(\mathbf{x}_k) - \mathbf{B} E(\mathbf{M}_k) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{M}_k} (\mathbf{P}_{\mathbf{M}_k \mathbf{M}_k})^{-1} \\ \text{avec :} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{M}_k} &= E \left[\mathbf{x}_k \mathbf{M}_k^\top \right] - E[\mathbf{x}_k] E[\mathbf{M}_k]^\top \\ \mathbf{P}_{\mathbf{M}_k \mathbf{M}_k} &= E \left[\mathbf{M}_k \mathbf{M}_k^\top \right] - E[\mathbf{M}_k] E[\mathbf{M}_k]^\top \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'estimateur linéaire optimal s'exprime donc de manière analogue à l'étape de correction du filtre de Kalman :

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{opt} = E[\mathbf{x}_k] + \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{M}_k} (\mathbf{P}_{\mathbf{M}_k \mathbf{M}_k})^{-1} (\mathbf{M}_k - E[\mathbf{M}_k]) \quad (2.10)$$

avec \mathbf{M}_k l'ensemble des mesures depuis l'instant initial.

Dans un algorithme récursif, on cherche à calculer $\hat{\mathbf{x}}_k^{opt}$ en fonction de la connaissance déjà acquise sur \mathbf{x}_k (conditionnellement à \mathbf{M}_{k-1}) et de la mesure courante \mathbf{m}_k :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^{opt} &= E[\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_{k-1}] + \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{m}_k} (\mathbf{P}_{\mathbf{m}_k \mathbf{m}_k})^{-1} (\mathbf{m}_k - E[\mathbf{m}_k | \mathbf{M}_{k-1}]) \\ \text{avec :} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{m}_k} &= E[\mathbf{x}_k \mathbf{m}_k | \mathbf{M}_{k-1}] - E[\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_{k-1}] E[\mathbf{m}_k | \mathbf{M}_{k-1}]^\top \\ \mathbf{P}_{\mathbf{m}_k \mathbf{m}_k} &= E[\mathbf{m}_k \mathbf{m}_k^\top | \mathbf{M}_{k-1}] - E[\mathbf{m}_k | \mathbf{M}_{k-1}] E[\mathbf{m}_k | \mathbf{M}_{k-1}]^\top \end{aligned} \quad (2.11)$$

FIG. 2.2 – Filtrage linéaire optimal

La question qui se pose alors est la détermination des espérances mathématiques conditionnelles qui interviennent dans l'expression. Pour un problème non-linéaire, elles ne sont pas calculables de manière exacte. Par exemple, le calcul de $E[\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_{k-1}]$ nécessite la connaissance de $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_{k-1})$. Là encore, une approximation de la densité de probabilité est nécessaire.

2.3.2 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman linéaire et ses variantes non-linéaires propagent une densité de probabilité gaussienne. À chaque étape du filtre, deux paramètres de $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ sont mis à jour : sa moyenne notée $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$ et sa matrice de covariance notée $\mathbf{P}_{k/k}$. Le filtre de Kalman linéaire s'applique aux problèmes linéaires gaussiens.

Ceux-ci sont définis par les hypothèses suivantes :

- Les équations d'état et de mesure sont linéaires et les bruits \mathbf{v}_k et \mathbf{r}_k sont additifs, gaussiens, centrés :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{m}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k \\ \mathbf{v}_k &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k) \\ \mathbf{r}_k &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)\end{aligned}\tag{2.12}$$

- La densité de probabilité de \mathbf{x}_0 est gaussienne.

$$\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0)$$

Dans ce cas particulier, les densités de probabilités $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_{k-1})$ et $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ sont gaussiennes à tout instant k . Le filtre de Kalman donne alors la solution exacte au problème de l'inférence bayésienne.

Cette solution s'exprime sous la forme suivante :

(1) Étape de prédiction :

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_{k-1}) &= \mathcal{N}_{\mathbf{x}_k}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}, \mathbf{P}_{k/k-1}) \\ \text{avec :} & \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} &= \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1} \\ \mathbf{P}_{k/k-1} &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1/k-1} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{Q}_k\end{aligned}\tag{2.13}$$

(2) Étape de correction :

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k) &= \mathcal{N}_{\mathbf{x}_k}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k}, \mathbf{P}_{k/k}) \\ \text{avec :} & \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{m}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \\ \mathbf{P}_{k/k} &= \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \\ \text{avec } \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^\top \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k \right)^{-1}\end{aligned}\tag{2.14}$$

FIG. 2.3 – Algorithme du filtre de Kalman

Ainsi, le filtre de Kalman exprime la solution optimale $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$ comme combinaison linéaire de $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$ et de la mesure \mathbf{m}_k .

2.3.3 Filtre de Kalman étendu (EKF)

Le filtre de Kalman étendu permet de traiter de façon approchée le problème de l'inférence bayésienne dans un problème où l'équation d'état et/ou de mesure ne sont pas linéaires. C'est-à-dire un système de la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= f_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_k) \\ \mathbf{m}_k &= h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k)\end{aligned}\tag{2.15}$$

Dans le cas du filtre de Kalman étendu, les équations d'évolution de l'état et de mesure sont linéarisées autour de l'état courant pour se ramener à une formulation linéaire du problème. Le problème linéarisé peut alors être résolu par le filtre de Kalman décrit au paragraphe précédent.

Sous l'hypothèse que l'estimation de l'état $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$ est suffisamment proche à tout instant de l'état vrai \mathbf{x}_k pour que les approximations au 1^{er} ordre suivantes soient valables, on effectue un développement limité des fonctions f_k et h_k :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= f_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}) + \mathcal{F}_k(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}) + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{m}_k &= h_k(\hat{\mathbf{x}}_{k/k}) + \mathcal{H}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k/k}) + \mathbf{r}_k\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k &= (\nabla_x f_k)(\mathbf{x}_k) \\ \mathcal{H}_k &= (\nabla_x h_k)(\mathbf{x}_k)\end{aligned}\tag{2.16}$$

Les équations du filtrage de Kalman étendu s'écrivent alors au premier ordre :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} &= f_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}) \\ \mathbf{P}_{k/k-1} &= \mathcal{F}_k \mathbf{P}_{k-1/k-1} \mathcal{F}_k^\top + \mathbf{Q}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{m}_k - h_k(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})) \\ \mathbf{P}_{k/k} &= \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k \mathcal{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1}\end{aligned}\tag{2.17}$$

avec $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathcal{H}_k^\top (\mathcal{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathcal{H}_k^\top + \mathbf{R}_k)^{-1}$

Le bon fonctionnement d'un filtre de Kalman étendu dépend de la pertinence de l'approximation linéaire de f_k et h_k au voisinage de l'état courant [42]. Il existe plusieurs méthodes pour calculer numériquement la matrice jacobienne de ces fonctions :

- Si f_k et h_k sont des fonctions dont on possède une expression analytique, ∇f_k et ∇h_k peuvent être calculés facilement. Cette méthode a été appliquée en annexe B pour déterminer une équation d'évolution linéaire des erreurs de navigation à partir des expressions non-linéaires des équations de la navigation.
- Dans le cas du recalage altimétrique, la fonction h_k est tabulée. Prendre la dérivée du terrain en un point particulier n'est donc pas immédiat. Il est plus intéressant de calculer une pente moyenne du terrain dans le voisinage de $\mathbf{x}_{k/k-1}$, la largeur de ce voisinage dépendant de la matrice de covariance $\mathbf{P}_{k/k-1}$. À cette fin, on choisit un ensemble de points de ce voisinage et on effectue une régression linéaire afin d'ajuster la meilleure approximation linéaire locale du terrain.

Il existe par ailleurs de nombreuses extensions du filtre de Kalman étendu. Voici trois variantes permettant d'améliorer le comportement du filtre en cas de fortes non-linéarités :

- *Filtre de Kalman du second ordre* : Ce filtre se base sur un développement limité du second ordre de f_k et h_k . $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$ dépend toujours linéairement de la mesure \mathbf{m}_k mais le gain de Kalman \mathbf{K}_k est fonction du gradient et du hessien de f_k et h_k .
- *Filtre de Kalman itéré* : la première étape du filtre est identique à celle d'un filtre de Kalman étendu classique. Les estimées $\hat{\mathbf{x}}_{k-1/k}$ et $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$ sont alors utilisées comme nouveaux points de linéarisation pour les fonctions f_k et h_k et une nouvelle estimation est calculée. Ce cycle linéarisation / estimation est arrêté après une convergence du résultat (variation de l'estimé inférieur à un seuil).
- *Unscented Kalman filter* : cf. ci-dessous.

2.3.4 Unscented Kalman filter (UKF)

L'algorithme *Unscented Kalman Filter* [44], ou *filtre de Kalman sans biais* est fondé sur l'expression du filtrage linéaire optimale dégagée dans le paragraphe précédent. Pour rendre calculable les coefficients du filtre, on considère que les densités de probabilité $p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{M}_{k-1})$ sont gaussiennes à tout instant k . Il reste alors à déterminer :

- $E[\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_{k-1}] = E[f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_k)|\mathbf{M}_{k-1}]$;
- $E[\mathbf{m}_k|\mathbf{M}_{k-1}] = E[h(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k)|\mathbf{M}_{k-1}]$;
- Les matrices de covariance $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{m}_k}$ et $\mathbf{P}_{\mathbf{m}_k \mathbf{m}_k}$.

Ces différentes quantités peuvent être approximées par une opération nommée *unscented transformation* ou *transformation UT* [29].

Unscented transformation Cette méthode permet d'approximer moyenne et covariance de l'image d'une variable aléatoire \mathbf{x} par une fonction non-linéaire f , sans calculer de manière explicite le développement de Taylor de f . Le principe de cette méthode est le suivant :

1. Supposons que la variable aléatoire X de dimension n_x a pour moyenne $\hat{\mathbf{x}}$ et pour covariance \mathbf{P} . La première étape est le choix de $(2n_x + 1)$ points caractéristiques appelés *sigma points*. Ces points sont déterminés comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^0 &= \hat{\mathbf{x}} \\ \mathcal{X}^i &= \hat{\mathbf{x}} + \alpha \left(\sqrt{n_x + \lambda} \right) \mathbf{s}^{(i)} \quad i \in [1; n_x] \\ \mathcal{X}^i &= \hat{\mathbf{x}} - \alpha \left(\sqrt{n_x + \lambda} \right) \mathbf{s}^{(i)} \quad i \in [n_x + 1; 2n_x] \end{aligned} \tag{2.18}$$

avec $\mathbf{s}^{(i)}$ la i^e colonne de la décomposition de Cholesky de la matrice \mathbf{P}

La figure 2.4 présente la position des *sigma points* pour une variable aléatoire bi-dimensionnelle. Le paramètre α permet de faire varier l'écartement des points par rapport à la valeur moyenne $\hat{\mathbf{x}}$.

2. La deuxième étape est le calcul de l'image de chacun des *sigma points* par la fonction f :

$$\mathcal{M}^i = f(\mathcal{X}^i) \quad i \in [0; 2n_x] \tag{2.19}$$

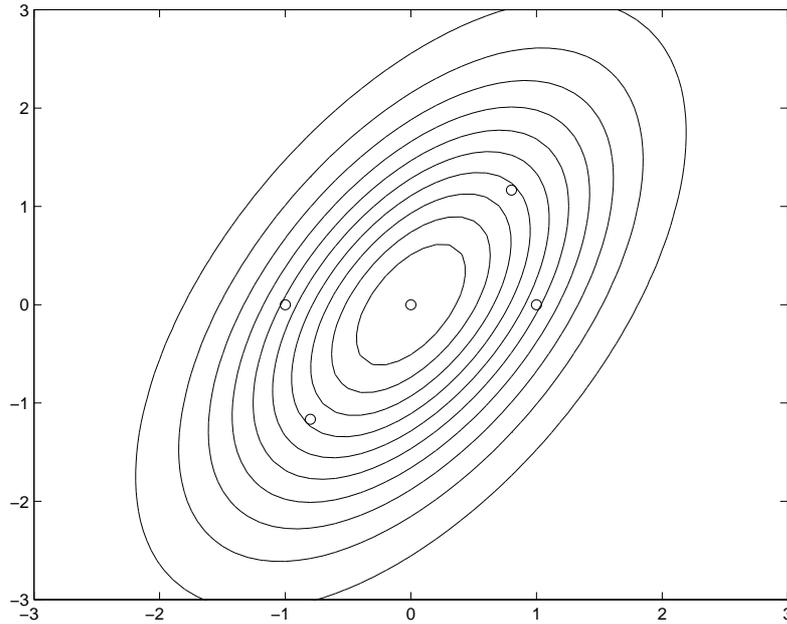


FIG. 2.4 – Position des *sigma points* en dimension 2

3. Enfin, la moyenne et la covariance de $f(\mathbf{x})$ sont approximées par une moyenne pondérée :

$$\begin{aligned}\hat{E}[f(\mathbf{x})] &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} \mathcal{M}^i \\ \hat{\mathbf{P}}_{f(\mathbf{x})} &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (\mathcal{M}^i - \hat{\mathbf{m}})(\mathcal{M}^i - \hat{\mathbf{m}})^\top\end{aligned}\tag{2.20}$$

avec comme pondération :

$$\begin{aligned}W_0^{(m)} &= \lambda / (n_x + \lambda) \\ W_0^{(c)} &= \lambda / (n_x + \lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_i^{(m)} &= W_i^{(c)} = 1/2(n_x + \lambda) \quad i \in [1; 2n_x] \\ \lambda &= \alpha^2(n_x + \kappa) - n_x\end{aligned}\tag{2.21}$$

En général, on choisit $\kappa = 0$, $\beta = 2$ et α autour de l'unité. Les choix de κ et β ne sont pas critiques. Au contraire, α est un paramètre important qui permet de régler le filtre en fonction du caractère non-linéaire de f .

Algorithme UKF Les différentes étapes de calcul pour une itération du filtre sont présentées page ci-contre.

(1) Étape de prédiction

Il s'agit d'évaluer $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$ et $\mathbf{P}_{k/k-1}$ par la méthode *unscented transformation*. Pour tenir compte des bruits \mathbf{v} et \mathbf{r} , l'opération est effectuée sur un vecteur d'état étendu $\mathbf{x}^a = [\mathbf{x}^\top, \mathbf{v}^\top, \mathbf{r}^\top]^\top$ de covariance :

$$\mathbf{P}_k^a = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_k \end{bmatrix}$$

Les *sigma points* obtenus sont de la forme $\mathcal{X}^i = [\mathcal{X}_x^i, \mathcal{X}_v^i, \mathcal{X}_r^i]^\top$.

L'étape de prédiction s'effectue alors comme suit :

- Calcul des *sigma points* associés à $\mathbf{x}_{k-1/k-1}^a$ et notés $\mathcal{X}_{k-1/k-1}^i$
- Calcul de leurs images par f_k :

$$\mathcal{X}_{k/k-1}^i = f_k(\mathcal{X}_{k-1/k-1}^i, \mathcal{X}_{\mathbf{v}_k}^i)$$

- Évaluation de $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$ et $\mathbf{P}_{k/k-1}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} \mathcal{X}_{k/k-1}^i \\ \mathbf{P}_{k/k-1} &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (\mathcal{X}_{k/k-1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})(\mathcal{X}_{k/k-1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})^\top \end{aligned} \quad (2.22)$$

(2) Calcul du gain de Kalman

Les matrices de covariance $\mathbf{P}_{\mathbf{xm}}$ et $\mathbf{P}_{\mathbf{mm}}$ sont évaluées en utilisant les *sigma points* :

- Calcul des images de $\mathcal{X}_{k/k-1}^i$ par h_k :

$$\mathcal{M}_{k/k-1}^i = h_k(\mathcal{X}_{k/k-1}^i, \mathcal{X}_{\mathbf{r}_k}^i)$$

- Évaluation de $\mathbf{P}_{\mathbf{xm}}$ et $\mathbf{P}_{\mathbf{mm}}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}}_{k/k-1} &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} \mathcal{M}_{k/k-1}^i \\ \mathbf{P}_{\mathbf{xm}} &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (\mathcal{X}_{k/k-1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})(\mathcal{M}_{k/k-1}^i - \hat{\mathbf{m}}_{k/k-1})^\top \\ \mathbf{P}_{\mathbf{mm}} &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (\mathcal{M}_{k/k-1}^i - \hat{\mathbf{m}}_{k/k-1})(\mathcal{M}_{k/k-1}^i - \hat{\mathbf{m}}_{k/k-1})^\top \\ \mathbf{K} &= \mathbf{P}_{\mathbf{xm}} (\mathbf{P}_{\mathbf{mm}})^{-1} \end{aligned} \quad (2.23)$$

(3) Étape de correction

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k/k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}(\mathbf{m}_k - \hat{\mathbf{m}}_{k/k-1}) \\ \mathbf{P}_{k/k} &= \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K} \mathbf{P}_{\mathbf{mm}} \mathbf{K}^\top \end{aligned} \quad (2.24)$$

 FIG. 2.5 – Algorithme *Unscented Kalman Filter*

2.4 Filtrage particulière

2.4.1 Représentation particulière d'une densité de probabilité

2.4.1.1 Introduction

Dans tous les cas classiques du filtrage non-linéaire, la densité de probabilité conditionnelle $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ est représentée et propagée de façon paramétrique. Chaque itération du filtre correspond à la mise à jour des paramètres en fonction de la nouvelle mesure disponible. Dans le cas du filtrage particulière, la représentation de $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ est d'une nature tout à fait différente : on ne cherche pas une représentation analytique approchée d'une densité de probabilité mais à construire un ensemble d'échantillons (appelés ici particules) distribués selon $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$.

2.4.1.2 Approximation des moments d'une d.d.p.

L'inférence Bayésienne dans le cadre d'un filtrage non-linéaire impose de propager une expression analytique de la densité $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$. Mais pour l'ingénieur, moyenne et variance de $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ sont bien souvent les deux paramètres pertinents dans le cadre d'une estimation d'état. Le calcul de $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ apparaît donc comme un intermédiaire de calcul, dont la détermination analytique n'est pas le cœur du problème vis à vis de la finalité pratique du filtre. La question est alors comment calculer le premier moment de $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$:

$$E[g(\mathbf{x}_k)|\mathbf{M}_k] = \int g(\mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k) d\mathbf{x}_k \quad (2.25)$$

avec :

$$\begin{aligned} g : \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{x} && \text{pour le calcul le premier moment,} \\ g : \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{x}\mathbf{x}^\top && \text{pour le calcul du second moment.} \end{aligned}$$

Ceci est possible, sans utiliser une expression analytique de la densité de probabilité, si on dispose d'un ensemble d'échantillons distribués selon $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$. Notons cet ensemble $[\mathbf{x}_k^{(i)}]_{i=1..N}$. Les échantillons sont supposés indépendants entre eux. On montre alors que l'approximation suivante est asymptotiquement valide lorsque N tend vers $+\infty$:

$$E[g(\mathbf{x}_k)|\mathbf{M}_k] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_k^{(i)})$$

La quantité $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_k^{(i)})$ est une variable aléatoire dont la moyenne est $E[g(\mathbf{x}_k)|\mathbf{M}_k]$ et dont la variance tend vers zéro quand N tend vers $+\infty$. Pour N suffisamment grand, la différence du résultat sur deux tirages distincts des N échantillons est statistiquement faible. On montre que la variance de l'approximation du premier moment est :

$$\text{var} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^{(i)} \right] = \frac{1}{N} \text{var} [\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k]$$

Retenons simplement que la variance décroît en $1/N$.

Exemple La figure 2.6 montre la répartition de 50 échantillons d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$. La fonction de répartition approchée (figure 2.7) s'exprime par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x') dx' \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{[-\infty, x_i]}(x)$$

avec :

$$\delta_{[-\infty, x_i]}(x) = 1 \quad \text{si } x \leq x_i, \quad 0 \quad \text{sinon}$$

2.4.1.3 Échantillonnage pondéré d'une d.d.p.

Dans le paragraphe précédent, on suppose qu'il est possible de générer des échantillons selon $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k)$. Si cette densité de probabilité n'est pas une loi simple (uniforme, gaussienne, exponentielle), alors il n'est pas facile d'un point de vue calculatoire d'en générer des échantillons. Bien qu'il existe des méthodes pour générer des échantillons à partir d'une distribution arbitraire, le coût de calcul est généralement élevé, surtout lorsque la densité de probabilité est multidimensionnelle. Ainsi, on supposera ici que l'on ne peut générer des échantillons que selon une loi $q(\mathbf{x}_k)$ (appelée par la suite *proposal distribution*, ou distribution d'importance) et que l'on sait calculer $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k)$ en tout point \mathbf{x}_k . Il est alors possible d'approximer les moments de $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k)$ en utilisant les échantillons $[\mathbf{x}_k^{(i)}]_{i=1..N}$ distribués selon $q(\mathbf{x}_k)$. Pour cela, on associe à chaque échantillon un poids :

$$\tilde{\omega}_k^{(i)} = \frac{p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{M}_k)}{q(\mathbf{x}_k^{(i)})} \quad (2.26)$$

et un poids normalisé :

$$\omega_k^{(i)} = \frac{\tilde{\omega}_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^{(i)}} \quad (2.27)$$

Le résultat s'exprime par une somme pondérée :

$$E[g(\mathbf{x}_k) | \mathbf{M}_k] \approx \sum_{i=1}^N \omega_k^{(i)} g(\mathbf{x}_k^{(i)}) \quad (2.28)$$

La variance du résultat est toujours supérieure au cas où les échantillons sont distribués selon $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k)$ [16]. Pour obtenir une dégradation raisonnable de la qualité de l'approximation, la *proposal distribution* doit être choisie avec soin. C'est un point très important, comme nous le reverrons pour le filtre particulaire.

Exemples :

- La figure 2.8 montre l'échantillonnage pondéré d'une loi exponentielle bilatérale avec une *proposal distribution* gaussienne. Les échantillons sont représentés en fonction de leurs poids. On notera que les deux lois sont relativement similaires et en conséquence, la disparité entre les poids des échantillons est faible.

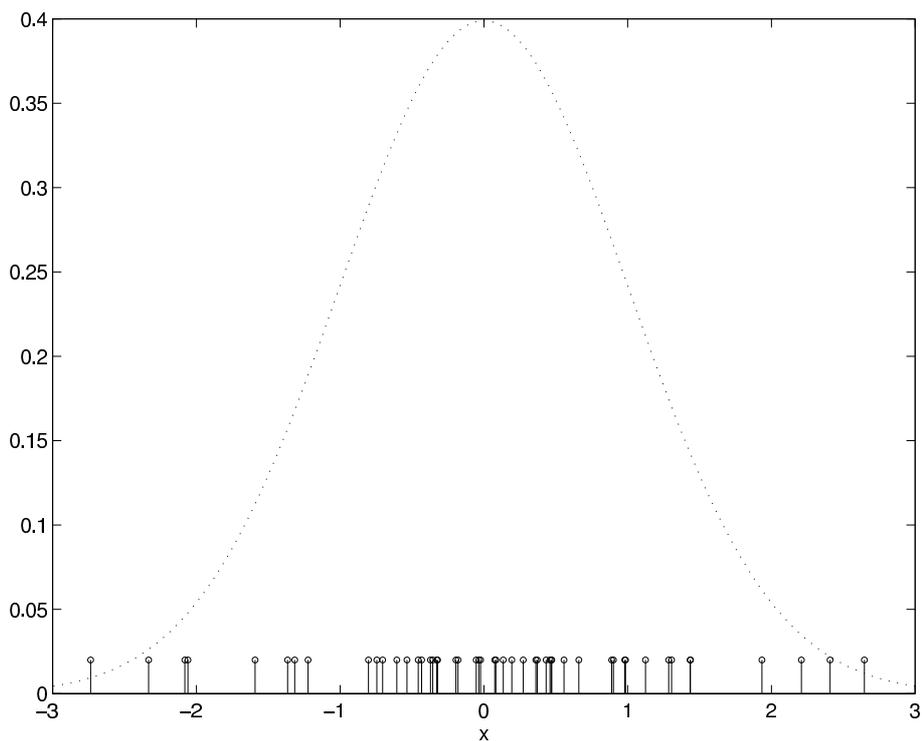


FIG. 2.6 – Échantillonnage d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ avec 50 réalisations

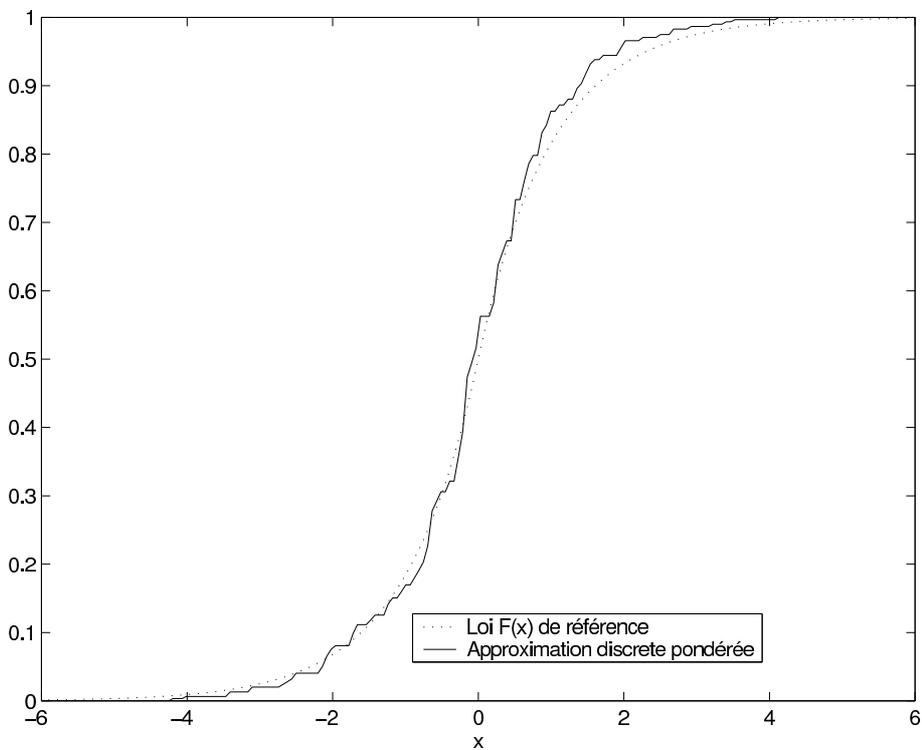


FIG. 2.7 – Approximation de la fonction de répartition d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ avec 50 réalisations

- La figure 2.9 reprend le même exemple mais en choisissant une loi exponentielle de support plus étroit. La *proposal distribution* est alors mal adaptée : l'écart-type de la gaussienne étant trop faible, les échantillons ne sont pas assez dispersés. On voit nettement sur la reconstruction de la fonction de répartition l'effet négatif induit par l'inadéquation de la *proposal distribution* à la distribution cible.
- La figure 2.10 présente l'effet inverse. Dans ce cas, le support de *proposal distribution* est trop large par rapport à la distribution cible. En conséquence, beaucoup de particules possèdent un poids quasiment nul et peu de particules sont présentes dans la zone "intéressante" de la distribution cible. En conséquence, la reconstruction de la fonction de répartition est très grossière.

2.4.1.4 Nombre efficace d'échantillons

Un indicateur permet d'apprécier la qualité de l'approximation. Il est nommé *nombre efficace d'échantillons* et est défini par :

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\omega_k^{(i)})^2} \quad (2.29)$$

N_{eff} est par définition compris entre 0 et N . Il vaut N lorsque tous les poids des échantillons sont égaux. La variance de l'erreur d'approximation est inversement proportionnelle au nombre efficace de particules [39].

2.4.2 Principe du filtrage particulaire

2.4.2.1 Introduction

L'algorithme du filtre particulaire consiste à propager un ensemble d'échantillons pondérés (appelés particules) de telle façon qu'à chaque itération k , les particules soient représentatives de la loi $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{M}_k)$. Ceci est effectué récursivement en modifiant l'état et le poids de chaque particule, selon des règles qui dépendent des équations d'état et de mesure du problème. On peut faire l'analogie avec le filtrage de Kalman, dans lequel l'état estimé et sa covariance sont récursivement mis à jour. Cependant, deux différences importantes sont à souligner. D'une part, le fonctionnement du filtre particulaire est de nature stochastique : le mouvement des particules est le résultat de tirages aléatoires. D'autre part, il n'existe pas un algorithme unique de filtrage particulaire. On a vu dans le chapitre précédent que la représentation d'une densité de probabilité par un échantillonnage pondéré n'est pas unique mais dépend de la *proposal distribution* choisie et que la qualité de l'approximation particulaire dépendait de ce choix. Le filtre particulaire fait aussi appel à la notion de *proposal distribution*. De même, les performances du filtre dépendent de ce choix. Ce chapitre présente le principe du filtre particulaire, ainsi que les choix classiques pour la *proposal distribution*.

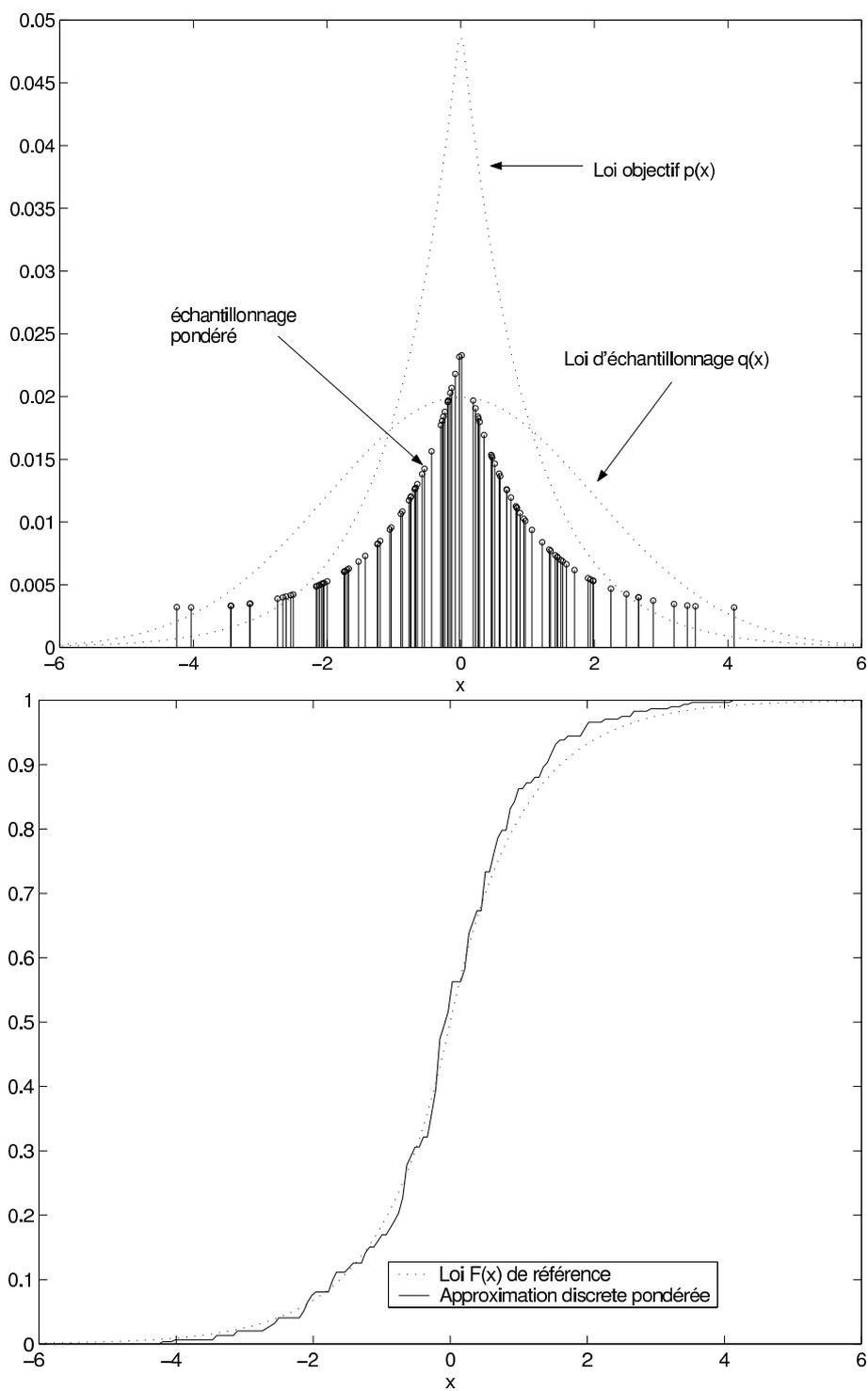


FIG. 2.8 – Échantillonnage pondéré : cas satisfaisant

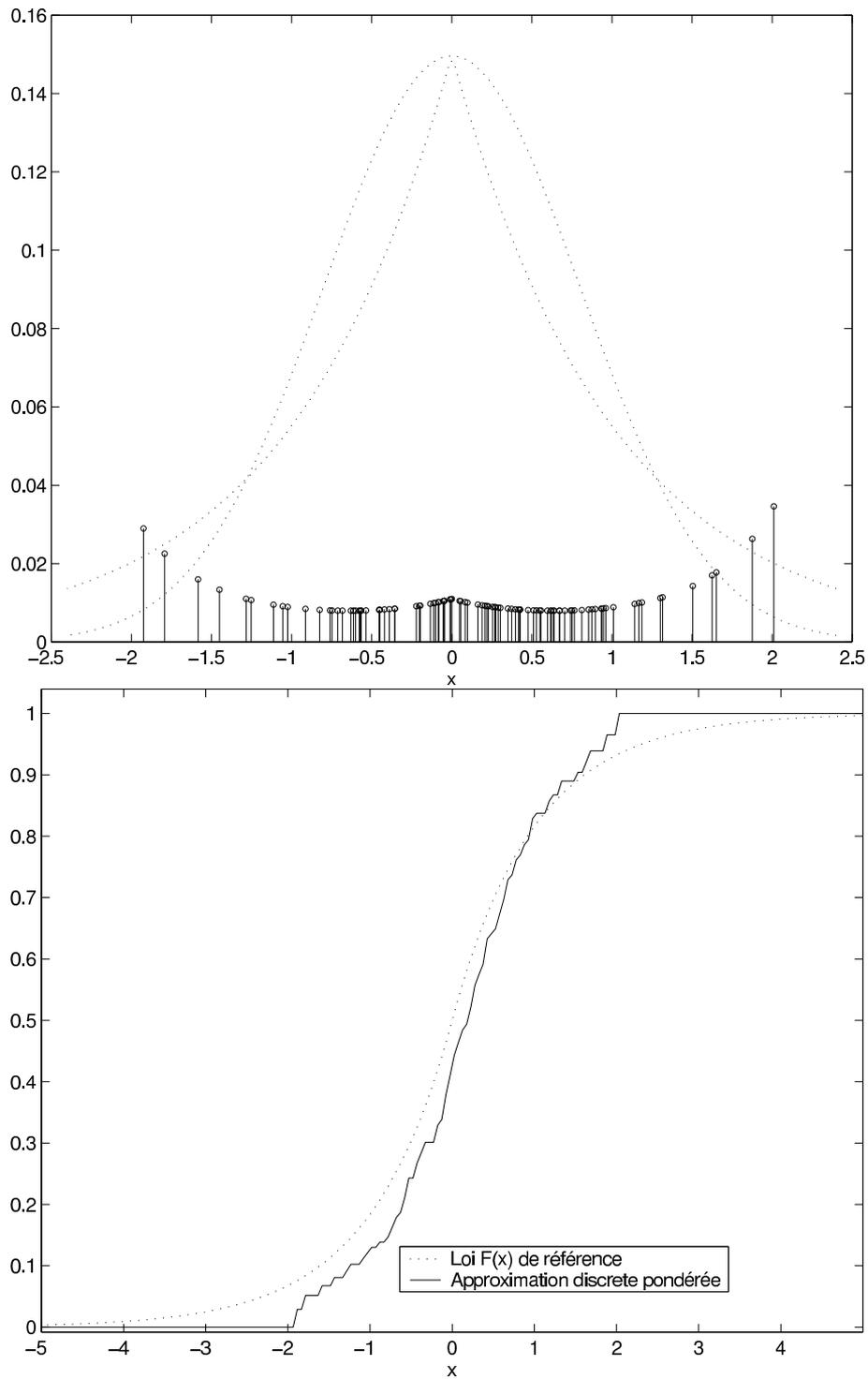


FIG. 2.9 – Échantillonnage pondéré : cas d'une *proposal distribution* de support trop étroit

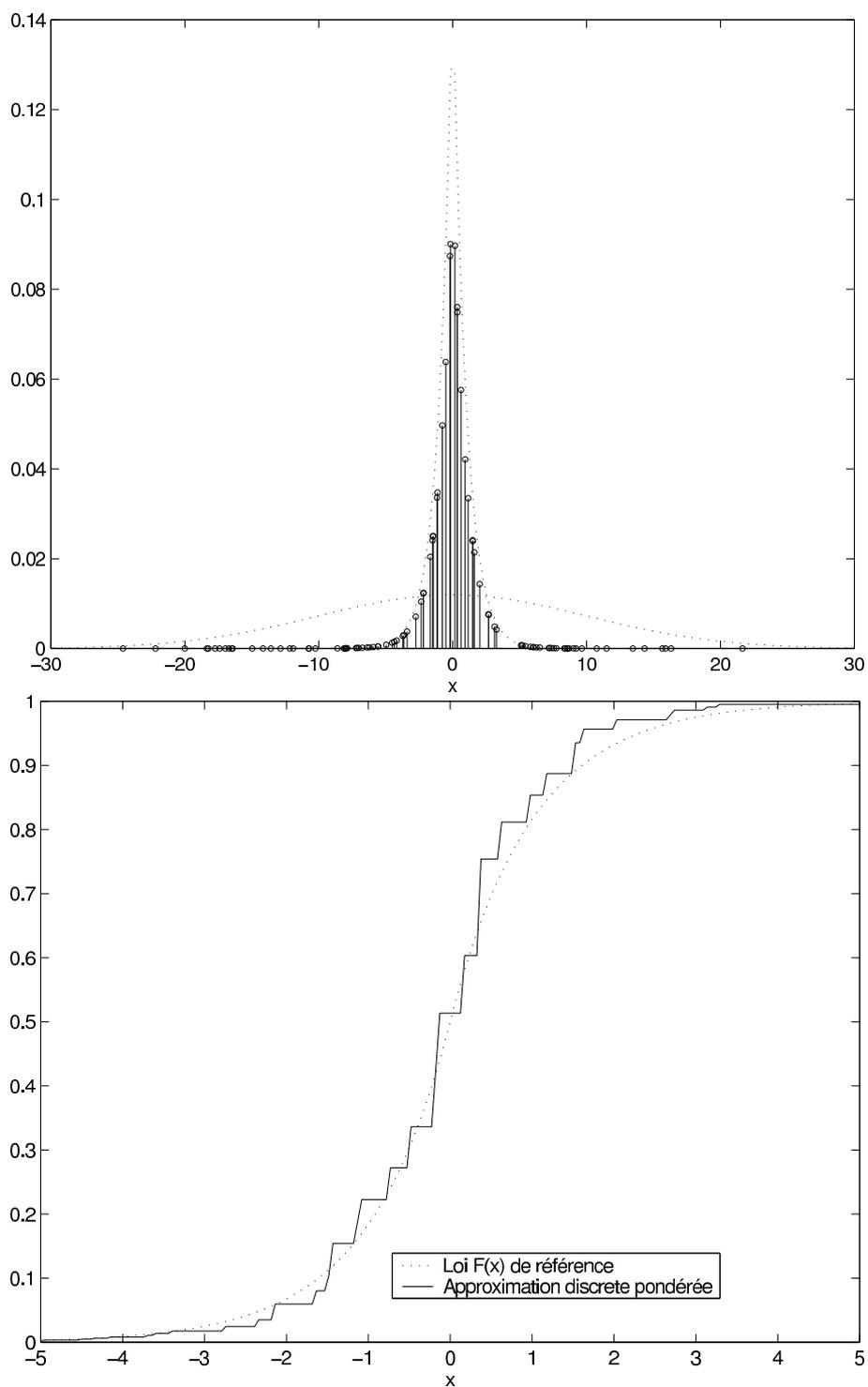


FIG. 2.10 – Échantillonnage pondéré : cas d'une *proposal distribution* de support trop large

2.4.2.2 Notion de particule

Une particule est un échantillon issu d'une loi de probabilité, auquel on associe un poids. Elle évolue dans le temps, au fur et à mesure des itérations du filtre, définissant ainsi une trajectoire stochastique dans l'espace d'état. Pour un filtre particulaire constitué de N particules, on note $\mathbf{X}_k^{(i)} = [\mathbf{x}_0^i, \dots, \mathbf{x}_k^i]$ l'ensemble des états successifs de la particule i depuis l'instant initial jusqu'à l'instant courant k . Son poids courant est noté $\omega_k^{(i)}$.

2.4.2.3 Étapes : prédiction et correction

On note $q(\mathbf{X}_k|\mathbf{M}_k)$ la *proposal distribution* du filtre particulaire à l'instant k . C'est à partir de cette loi que sont générées les trajectoires aléatoires des particules. Cette loi est exprimée conditionnellement aux observations \mathbf{M}_k car dans le cas général, on peut choisir de faire dépendre la *proposal distribution* des observations.

Une fois les trajectoires des particules tirées selon la *proposal distribution*, les poids sont ajustés pour que l'ensemble des particules soit une approximation particulaire de la densité de probabilité $p(\mathbf{X}_k|\mathbf{M}_k)$. Le poids de chaque particule est donc :

$$\tilde{\omega}_k^{(i)} = \frac{p(\mathbf{X}_k^{(i)}|\mathbf{M}_k)}{q(\mathbf{X}_k^{(i)}|\mathbf{M}_k)} \quad (2.30)$$

Cette discussion est tout à fait théorique car en pratique, on ne connaît pas l'expression analytique de $p(\mathbf{X}_k|\mathbf{M}_k)$, c'est justement la densité que l'on cherche à approximer. Cependant, le calcul des poids admet une expression récursive. En effet, la solution bayésienne du problème d'estimation peut se mettre sous la forme (voir §2.2) :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{X}_k|\mathbf{M}_{k-1}) &= \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{X}_{k-1}|\mathbf{M}_{k-1})d\mathbf{X}_{k-1} \\ p(\mathbf{X}_k|\mathbf{M}_k) &= \frac{1}{p(\mathbf{m}_k|\mathbf{M}_{k-1})}p(\mathbf{m}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{X}_k|\mathbf{M}_{k-1}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Les calculs conduisent à l'expression de la mise à jour des poids :

$$\omega_k^{(i)} \cong \omega_{k-1}^{(i)}p(\mathbf{m}_k|\mathbf{x}_k^{(i)})p(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)})\frac{q(\mathbf{X}_{k-1}^{(i)}|\mathbf{M}_{k-1})}{q(\mathbf{X}_k^{(i)}|\mathbf{M}_k)} \quad (2.32)$$

Le signe \cong indique une égalité à une constante multiplicative près qui ne dépend pas de $\mathbf{x}_k^{(i)}$ (identique pour toutes les particules). Les densités $p(\mathbf{m}_k|\mathbf{x}_k)$ et $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$ sont connues analytiquement, elles dépendent des équations d'état et de mesure et des modèles des bruits.

De plus, dans une implémentation récursive de l'algorithme, les trajectoires des particules sont générées en ajoutant un point à chaque itération, sans modifier les points précédents. C'est le principe du *sequential importance sampling* (ou échantillonnage d'importance). Alors, $q(\mathbf{X}_k|\mathbf{M}_k)$ peut se mettre sous la forme :

$$q(\mathbf{X}_k|\mathbf{M}_k) = q(\mathbf{X}_{k-1}|\mathbf{M}_{k-1})q(\mathbf{x}_k|\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{M}_k) \quad (2.33)$$

$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{M}_k)$ est la loi qui permet d'échantillonner le $k^{ième}$ point de la trajectoire, conditionnellement aux points précédents et aux mesures. On la nomme aussi *proposal distribution*, ou *distribution d'importance*. L'expression récursive des poids devient alors :

$$\omega_k^{(i)} \cong \omega_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{m}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{X}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{M}_k)} \quad (2.34)$$

En résumé, un filtre particulaire est basé sur :

- Une *proposal distribution* $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{M}_k)$ utilisée pour générer des trajectoires dans l'espace d'état. Cette loi est choisie par le concepteur du filtre.
- Une règle de mise à jour des poids qui dépend des densités de probabilité $p(\mathbf{m}_k | \mathbf{x}_k)$ et $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ imposées par le problème.

L'algorithme se divise en deux étapes fondamentales :

(1) Échantillonnage des particules

$$i \in [1, N] : \quad \mathbf{x}_k^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{M}_k)$$

(2) Mise à jour des poids et normalisation

$$i \in [1, N] : \quad \tilde{\omega}_k^{(i)} = \omega_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{m}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{X}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{M}_k)}$$

$$i \in [1, N] : \quad \omega_k^{(i)} = \frac{\tilde{\omega}_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^{(i)}}$$

FIG. 2.11 – Algorithme de base du filtre particulaire

2.4.2.4 Nécessité de l'étape de rééchantillonnage

Dans un problème classique d'estimation récursive, l'incertitude sur l'état est initialement importante, puis au fur et à mesure de l'accumulation des observations, celle-ci diminue : la connaissance de l'état est de plus en plus précise. En d'autres termes, le support de $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k)$, initialement large, se réduit au cours du temps. Par contre, les particules se dispersent dans l'espace d'état suivant une marche aléatoire analogue à un mouvement brownien. En conséquence, on se retrouve après quelques itérations du filtre dans une situation analogue à la figure 2.10. Une majorité de particules sont dispersées dans des zones où $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k)$ est très faible, et donc possèdent un poids très faible. L'intensité de ce phénomène dépend du problème (plus la variance du bruit de mesure est faible, plus la dégénérescence est rapide) et du choix de la *proposal distribution*.

Pour pallier la dégénérescence des particules, l'idée est d'éliminer les particules de poids négligeable et de dupliquer les particules de fort poids. Ainsi, sans altérer la qualité

de l'approximation particulaire, et sans modifier le nombre total de particules, on assure qu'un maximum de particules seront présentes dans les zones de forte densité de probabilité. Il existe différentes méthodes pour le choix des particules à dupliquer ou éliminer. La plus utilisée est nommée *SIR* (pour *Sampling Importance Resampling*), qui consiste à construire un nouvel ensemble de particules en effectuant N tirages avec remise parmi l'ensemble des particules avec la probabilité de choisir la particule i égale à son poids $\omega^{(i)}$. Cet algorithme est appelé *multinomial resampling* (rééchantillonnage multinomial) :

(1) Tirage de N variables aléatoires selon une loi uniforme $[0,1]$:

$$u_n \sim \mathcal{U}(0, 1)$$

et la séquence u_n est ordonnée dans l'ordre croissant.

(2) Calcul de la somme cumulée des poids des particules :

$$v_n = \sum_{i=1}^N \omega^{(i)}$$

(3) Sélection des particules :

Pour $j = 1$ à N , déterminer i tel que $v_i \leq u_j < v_{i+1}$ et copier la particule i dans le nouvel ensemble.

(4) égalisation des poids : $\omega^{(i)} = 1/N$

FIG. 2.12 – Algorithme de rééchantillonnage multinomial

L'étape de redistribution peut être effectuée à chaque itération du filtre, ou bien uniquement lorsque la dégénérescence des particules est importante. Un indicateur permettant de la détecter est le *nombre efficace de particules* défini §2.4.1.3. N_{eff} vaut N si tous les poids sont égaux et diminue avec la dégénérescence. Un seuil usuel de déclenchement d'une redistribution est $N_{eff} \leq 2/3 N$.

Il est important de noter que l'étape de redistribution, si elle est indispensable au bon fonctionnement du filtre particulaire, possède aussi des effets néfastes sur le fonctionnement du filtre et sur la qualité de l'approximation particulaire. En effet, les particules de fort poids sont dupliquées en de nombreuses particules filles, qui ont même vecteur d'état. Il y a donc regroupement des particules autour d'une même position. Si le bruit d'état est faible (c'est le cas du recalage altimétrique, la dérive de la centrale inertielle est un phénomène lent), les particules filles restent très proches les unes des autres au cours des itérations suivantes et l'espace d'état est insuffisamment exploré.

2.4.2.5 Utilisation d'une procédure de régularisation

Pour pallier les effets négatifs de la redistribution, on introduit une étape de régularisation qui permet d'aider la dispersion des particules dans l'espace d'état dans des problèmes où le bruit d'état est faible. Il s'agit, après l'étape de redistribution, d'ajouter un bruit sur l'état de chaque particule (en quelque sorte, un bruit d'état artificiel). Ce bruit est en général choisi gaussien pour des raisons de simplicité. La variance peut être constante ou bien être adaptée à la variance du nuage de particules.

(1) Calcul de la covariance des particules :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^N \omega_k^{(i)} \mathbf{x}_k^{(i)}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \sum_{i=1}^N \omega_k^{(i)} (\mathbf{x}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k)^\top$$

(2) Calcul de la décomposition de Choleski \mathbf{S}_k tel que $\hat{\mathbf{P}}_k = \mathbf{S}_k^\top \mathbf{S}_k$.

(3) Tirage du bruit de régularisation pour chaque particule :

$$\mathbf{r}^{(i)} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

$$\mathbf{x}_k^{(i)} = \mathbf{x}_k^{(i)} + \alpha \mathbf{S}_k \mathbf{r}^{(i)}$$

(Le coefficient α permet de régler la dispersion)

FIG. 2.13 – Algorithme de régularisation gaussienne adaptative

2.4.2.6 Échantillonnage de la *proposal distribution*

Redistribution et régularisation permettent de maintenir le nuage de particules ni trop dispersé, ni trop regroupé autour des particules de fort poids. Cependant, ces deux opérations perturbent le filtre (il devient sous-optimal). Une solution consiste alors à choisir judicieusement la *proposal distribution* pour que la vitesse de dégénérescence des particules soit limitée au maximum et ainsi réduire la fréquence des redistributions. On montre que la *proposal distribution* optimale en ce sens est :

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{M}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{M}_k) \quad (2.35)$$

En d'autres termes, la densité $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{M}_k)$ est la densité de probabilité de l'état à l'instant k , sachant que l'état à l'instant $k - 1$ est \mathbf{x}_{k-1} et conditionnellement aux mesures \mathbf{M}_k . On retombe sur un problème de filtrage non-linéaire dont on ne peut donner la solution exacte.

Examinons maintenant les méthodes les plus classiques pour approcher cette *proposal distribution* optimale.

Densité de probabilité a priori C'est la méthode la plus simple et la plus rapide. On ne tient pas compte de l'observation courante :

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{M}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$$

Cette solution revient à générer les trajectoires des particules en appliquant simplement l'équation d'état (avec un tirage du bruit d'état différent pour chaque particule). La dernière mesure disponible \mathbf{y}_k n'est introduite que dans l'étape de correction des poids, dont l'expression se simplifie.

Pour $i = 1$ à N :

(1a) Tirage du bruit d'état : $\mathbf{v}^{(i)} \sim p_{\mathbf{v}}$

(1b) Application de l'équation d'état : $\mathbf{x}_k^{(i)} = f(\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{v}^{(i)})$

(2a) Calcul des poids : $\tilde{\omega}_k^{(i)} = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)})$

$$\tilde{\omega}_k^{(i)} = \omega_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{m}_k | \mathbf{x}_k^{(i)})$$

(2b) Normalisation des poids

FIG. 2.14 – Filtrage particulaire avec échantillonnage de la d.d.p. a priori

Cette méthode a l'avantage de ne demander qu'un minimum de calculs par particule. C'est pourquoi elle est très souvent adoptée. Cependant, la *proposal distribution* ne tenant pas compte des observations, le résultat n'est pas optimal.

Méthode par réjection Il s'agit d'approcher un échantillonnage de $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{M}_k)$ par une méthode d'acceptation-rejet. Les particules sont générées suivant $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ mais ne sont acceptées que si leur vraisemblance $p(\mathbf{m}_k | \mathbf{x}_k)$ est suffisante. On montre alors que les particules retenues sont distribuées selon $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{M}_k)$. L'algorithme d'acceptation-rejet est le suivant :

Soit M un majorant de $p(\mathbf{m}_k | \mathbf{x}_k)$

Pour $i = 1$ à N :

(1) Tirage d'une variable aléatoire uniforme : $u^{(i)} \sim \mathcal{U}(0, 1)$

(2) Tirage de l'état de la particule : $\mathbf{x}_k^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})$

(3) Si $u^{(i)} \leq p(\mathbf{m}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) / M$ alors la particule est acceptée, sinon on itère les étapes (1) et (2).

FIG. 2.15 – Échantillonnage par acceptation-rejet

Cette méthode est incompatible avec une implémentation en temps-réel. En effet, le nombre de tirages nécessaires avant d'accepter une particule n'est pas connu a priori. De plus, le choix de M est délicat : M doit majorer $p(\mathbf{m}_k | \mathbf{x}_k)$ sans être trop grand, sinon le taux d'acceptation devient faible.

Méthode par linéarisation locale L'idée est d'approcher $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{M}_k)$ en linéarisant le problème autour de chaque particule et en appliquant une itération d'un filtre de Kalman. La particule est alors échantillonnée selon la loi *a posteriori* du filtre.

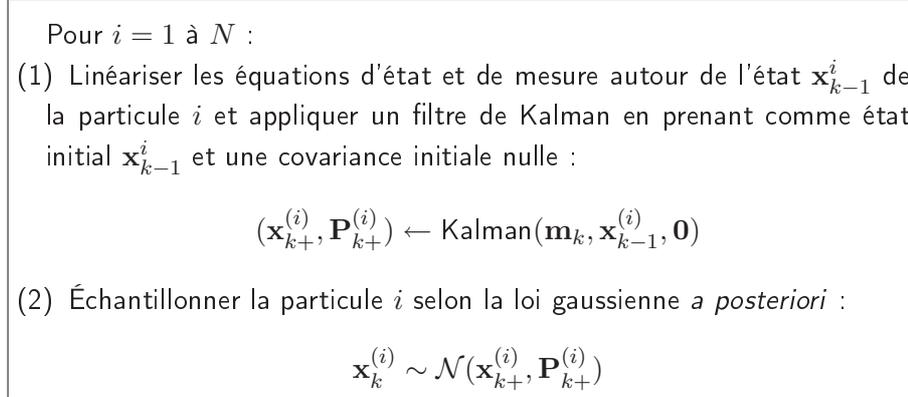


FIG. 2.16 – Échantillonnage par linéarisation locale

Cette méthode est lourde en calculs : l'équivalent d'un filtre de Kalman par particule. De plus, le nombre de particules couramment utilisé dans les filtres particulières s'élève de plusieurs centaines à plusieurs milliers. Le filtre de Kalman utilisé peut être un filtre EKF ou UKF.

Critères de choix de la *proposal distribution* Le choix de la *proposal distribution* est au cœur du compromis efficacité-performance. La méthode par échantillonnage de la densité de probabilité *a priori* entraîne une dégénérescence rapide des particules, mais sa rapidité autorise l'utilisation d'un grand nombre de particules. À l'inverse, la méthode par linéarisation locale limite au maximum la dégénérescence, mais en contrepartie, ne permet pas d'utiliser un nombre important de particules. À nombre de particules égal, la méthode par linéarisation locale donne de meilleures performances [43]. À coût de calcul égal, la question ne peut être résolue de façon générale, tout dépend du problème considéré.

2.4.2.7 Illustration du fonctionnement

La figure 2.17 présente graphiquement les étapes du filtrage pour un problème de dimension 1 et pour une *proposal distribution* $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{M}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$.

- (a) La densité de probabilité à l'instant $k-1$ est représentée par un ensemble de particules distribuées selon $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{M}_{k-1})$.
- (b) Les particules sont échantillonnées selon $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$. Le nuage de particules se disperse.
- (c) Les poids sont mis à jour en fonction de la vraisemblance des particules. Ici, la vraisemblance (courbe en pointillés) a été choisie non gaussienne. Les particules sont alors représentatives de la densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k)$.
- (d) Les particules sont rééchantillonnées. On note que les particules de faible poids (sur les bords de la distribution) ont été éliminées.

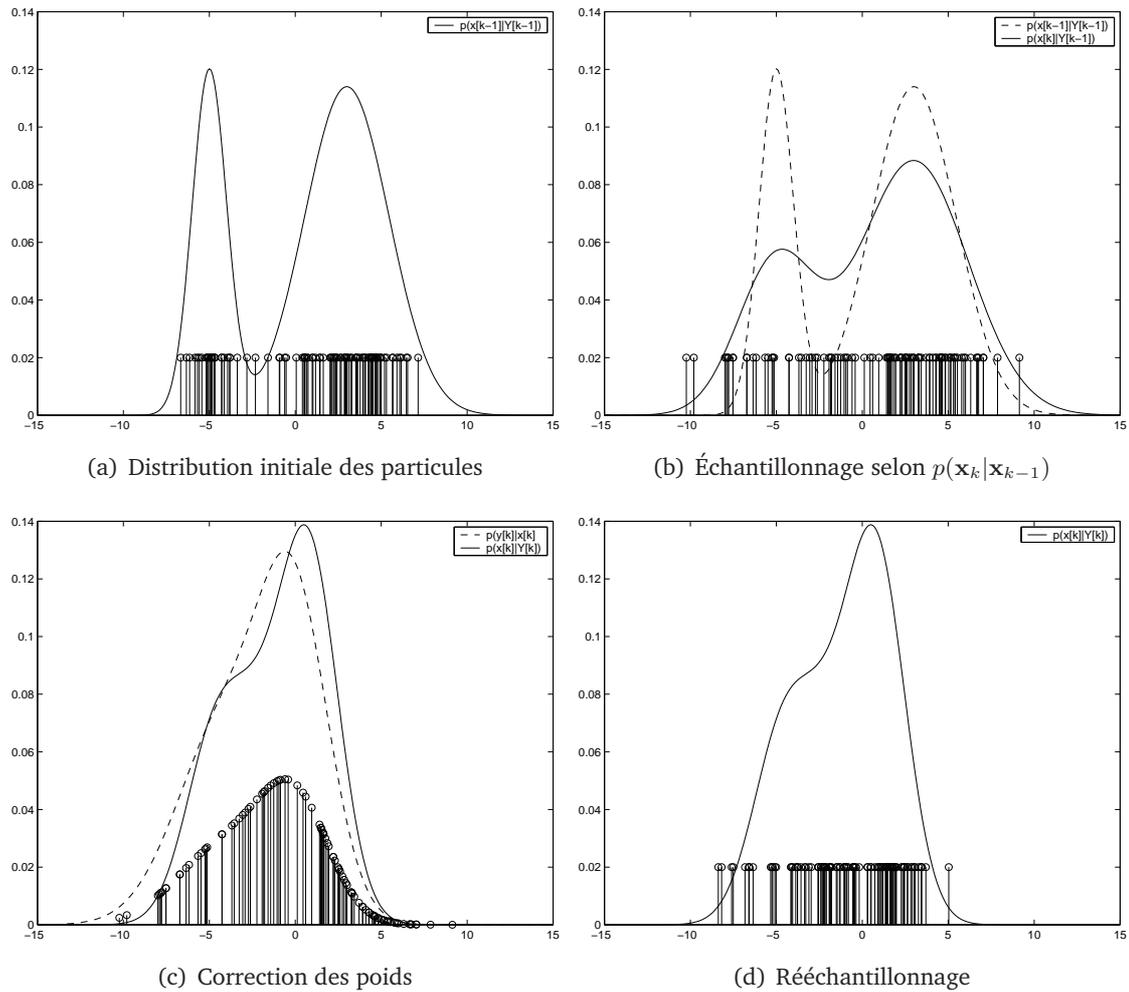


FIG. 2.17 – Illustration du fonctionnement d'un filtre particulaire

2.4.3 Principe de la Rao-Blackwellisation

2.4.3.1 Introduction

Dans le cas d'un problème de recalage de navigation, la dimension de l'espace d'état est importante : 9 si l'on considère seulement un recalage position/vitesse/attitude (3.5) ; 15 ou plus si on inclut les biais accélérométriques et gyrométriques. Or la réalisation d'un échantillonnage représentatif d'une densité d'état avec un nombre d'échantillons de l'ordre de quelques centaines ou quelques milliers n'est valable dans la pratique que pour des dimensions faibles (2 ou 3 au maximum). De plus, dans un problème de recalage altimétrique, une dispersion des particules uniquement dans le plan horizontal est suffisante pour prendre en compte des non-linéarités de la mesure du radio-altimètre (3.11). La procédure décrite ci-dessous, dite Rao-Blackwellisation [14][17], permet justement de construire un ensemble de particules dans un espace de grande dimension, mais en effectuant un tirage aléatoire uniquement sur certaines composantes de l'état. Cette section en résume les résultats principaux.

2.4.3.2 Principe

Considérons X une variable aléatoire définie sur un espace d'état E de dimension L et deux sous-espaces E_H et E_N tels que $E = E_H \times E_N$. On note n_H la dimension de l'espace E_H . Pour une application en recalage altimétrique, E_H est le sous-espace *position horizontale*, de dimension 2. Cette procédure de Rao-Blackwellisation est basée sur une factorisation de la densité d'état $p(\mathbf{x})$:

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}^H, \mathbf{x}^N) = p(\mathbf{x}^H | \mathbf{x}^N) p(\mathbf{x}^H) \quad \text{avec} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^H \\ \mathbf{x}^N \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Soit maintenant un ensemble d'échantillons pondérés $\{\mathbf{x}^{H,(i)}; w^{(i)}\}_{i=1..N}$ réalisant une approximation de la loi $p(\mathbf{x}^H)$. La dimension des échantillons est n_H (au lieu de n dans le cas d'un échantillonnage direct dans l'espace E). L'approximation particulière de la loi complète $p(\mathbf{x})$ s'écrit sous la forme :

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}^H, \mathbf{x}^N) \approx \sum_{i=1}^N w^{(i)} p(\mathbf{x}^N | \mathbf{x}^{H,(i)}) \delta_{\mathbf{x}^{H,(i)}}(\mathbf{x}^H) \quad (2.37)$$

avec :

$$\delta_{\mathbf{x}^{H,(i)}}(\mathbf{x}^H) = 1 \quad \text{si} \quad \mathbf{x}^H = \mathbf{x}^{H,(i)} \quad ; \quad 0 \quad \text{sinon}$$

La mise en pratique d'une telle procédure nécessite que la loi $p(\mathbf{x}^N | \mathbf{x}^H)$ admette une expression analytique simple (gaussienne par exemple).

Les paragraphes suivants expliquent comment les 3 opérations de base du filtrage particulière (échantillonnage, prédiction, correction) sont appliquées sur une représentation particulière avec Rao-Blackwellisation.

2.4.3.3 Échantillonnage d'une densité gaussienne avec Rao-Blackwellisation

Ce paragraphe décrit la construction d'un ensemble de particules à partir d'une densité gaussienne de probabilité d'état, en utilisant la méthode de Rao-Blackwellisation. Supposons que la densité de probabilité de l'état \mathbf{x} soit décrite par une gaussienne de moyenne $\hat{\mathbf{x}}$ et de covariance \mathbf{P} . La première étape consiste à séparer les variables de position horizontale \mathbf{x}^H du reste du vecteur d'état \mathbf{x}^N .

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^H \\ \hat{\mathbf{x}}^N \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^H & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{P}^N \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

La deuxième étape consiste à calculer les paramètres de la loi (gaussienne) $p(\mathbf{x}^N | \mathbf{x}^H)$: sa moyenne $\hat{\mathbf{x}}^{N|H}$ et sa covariance $\mathbf{P}^{N|H}$. Les calculs sont similaires à un filtre de Kalman :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{N|H} &= \hat{\mathbf{x}}^N + \mathbf{K}(\mathbf{x}^H - \hat{\mathbf{x}}^H) \\ \mathbf{P}^{N|H} &= \mathbf{P}^N - \mathbf{K}\mathbf{P}^H\mathbf{K}^T \\ \mathbf{K} &= \mathbf{L}^T(\mathbf{P}^H)^{-1} \end{aligned} \quad (2.39)$$

On notera que la covariance $\mathbf{P}^{N|H}$ de $p(\mathbf{x}^N | \mathbf{x}^H)$ ne dépend pas de \mathbf{x}^H .

L'algorithme d'échantillonnage avec Rao-Blackwellisation se déroule alors selon le schéma suivant :

(1) Calcul de \mathbf{K} et $\mathbf{P}_{N|H}$

$$\mathbf{P}^{N|H} = \mathbf{P}^N - \mathbf{K}\mathbf{P}^H\mathbf{K}^T$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}^T (\mathbf{P}^H)^{-1}$$

(2) Échantillonnage avec une proposal distribution $q(\mathbf{x}^H)$
 Pour $i = 1..N$:

$$\mathbf{x}^{H,(i)} \sim q(\mathbf{x}^H)$$

$$\tilde{w}^{(i)} = \frac{\mathcal{N}_{\mathbf{x}^{H,(i)}}(\hat{\mathbf{x}}^H, \mathbf{P}^H)}{q(\mathbf{x}^{H,(i)})}$$

$$w^{(i)} = \frac{\tilde{w}^{(i)}}{\sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)}}$$

(3) Calcul de la moyenne de $p(\mathbf{x}^N | \mathbf{x}^{H,(i)})$
 Pour $i = 1..N$:

$$\hat{\mathbf{x}}^{N|H,(i)} = \hat{\mathbf{x}}^N + \mathbf{K}(\mathbf{x}^{H,(i)} - \hat{\mathbf{x}}^H)$$

FIG. 2.18 – Échantillonnage avec Rao-Blackwellisation

2.4.3.4 Application de l'équation d'évolution de l'état

Supposons que l'on dispose d'un ensemble d'échantillons $\{\mathbf{x}_k^{H,(i)}, \hat{\mathbf{x}}_k^{N|H,(i)}, \mathbf{P}_k^{N|H}, w_k^{(i)}\}_{i=1..N}$ approximant la densité d'état filtrée $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k)$ à l'instant k . On cherche à déterminer une approximation de la densité d'état à l'instant $k + 1$:

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{M}_k) = \int p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k) d\mathbf{x}_k \quad (2.40)$$

On se place dans le cas d'une équation d'évolution linéaire, avec un bruit additif gaussien :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_{k+1}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{k+1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{v}_{k+1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$$

La modélisation de la dérive d'une centrale inertielle correspond effectivement à une telle dynamique d'état linéaire. L'équation d'évolution peut être réécrite en séparant les composantes \mathbf{x}^H et \mathbf{x}^N :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1}^H \\ \mathbf{x}_{k+1}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{k+1}^{HH} & \mathbf{F}_{k+1}^{HN} \\ \mathbf{F}_{k+1}^{NH} & \mathbf{F}_{k+1}^{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^H \\ \mathbf{x}_k^N \end{bmatrix} + \mathbf{v}_{k+1} \quad (2.41)$$

Il s'agit de construire un ensemble d'échantillons $\{\mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{N|H,(i)}, \mathbf{P}_{k+1/k}^{N|H}, w_{k+1/k}^{(i)}\}_{i=1..N}$ réalisant une approximation de $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{M}_k)$.

En substituant $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ par son approximation particulière :

$$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{M}_k) = \sum_{i=1}^N \left[w_k^{(i)} \int p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k^{H,(i)}, \mathbf{x}_k^N, \mathbf{M}_k) \mathcal{N}_{\mathbf{x}_k^N}(\hat{\mathbf{x}}_k^{N,(i)}, \mathbf{P}_k^{N|H}) d\mathbf{x}_k^N \right] \quad (2.42)$$

La densité $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k^{H,(i)}, \mathbf{x}_k^N, \mathbf{M}_k)$ étant elle-même gaussienne, l'intégrale apparaissant dans l'expression précédente admet une expression analytique :

$$\int p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k^{H,(i)}, \mathbf{x}_k^N, \mathbf{M}_k) \mathcal{N}_{\mathbf{x}_k^N}(\hat{\mathbf{x}}_k^{N,(i)}, \mathbf{P}_k^{N|H}) d\mathbf{x}_k^N = \mathcal{N}_{\mathbf{x}_{k+1}}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{(i)}, \mathbf{P}_{k+1/k}^{(i)})$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{*(i)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{k+1}^{HH} & \mathbf{F}_{k+1}^{HN} \\ \mathbf{F}_{k+1}^{NH} & \mathbf{F}_{k+1}^{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^{H,(i)} \\ \hat{\mathbf{x}}_k^{N,(i)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_{k+1/k}^* &= \mathbf{F}_{k+1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_k^{N|H} \end{bmatrix} \mathbf{F}_{k+1}^T + \mathbf{Q}_k \end{aligned} \quad (2.43)$$

La densité $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{M}_k)$ se présente donc sous la forme d'une somme pondérée de fonctions gaussiennes. Il s'agit maintenant d'échantillonner la densité $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{M}_k)$ pour obtenir une approximation particulière que l'on notera $\left\{ \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{N|H,(i)}, \mathbf{P}_{k+1/k}^{N|H}, w_{k+1/k}^{(i)} \right\}_{i=1..N}$. Si l'on travaille à nombre de particules constant, une solution simple est de tirer une particule par terme gaussien de la somme, puis d'appliquer les résultats du paragraphe précédent. En notant :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{*(i)} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{*H,(i)} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{*N,(i)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_{k+1/k}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k+1/k}^{*H} & \mathbf{L}_{k+1/k}^* \\ \mathbf{L}_{k+1/k}^{*T} & \mathbf{P}_{k+1/k}^{*N} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.44)$$

(1) Échantillonnage de la composante $\mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}$:

$$\mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)} \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{*H,(i)}, \mathbf{P}_{k+1/k}^{*H}) \quad (2.45)$$

(2) Mise à jour du reste du vecteur d'état des particules :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{N|H,(i)} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{*N,(i)} + \mathbf{K}(\mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{*H,(i)}) \\ \mathbf{P}_{k+1/k}^{N|H} &= \mathbf{P}_{k+1/k}^{*N} - \mathbf{K}\mathbf{P}_{k+1/k}^{*H}\mathbf{K}^T \\ \mathbf{K} &= \left(\mathbf{L}_{k+1/k}^* \right)^T \left(\mathbf{P}_{k+1/k}^{*H} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.46)$$

(3) Le poids des particules reste inchangé :

$$w_{k+1/k}^{(i)} = w_k^{(i)}$$

L'algorithme correspondant à l'ensemble de ces opérations est alors le suivant :

$\left\{ \mathbf{x}_k^{H,(i)}, \hat{\mathbf{x}}_k^{N|H,(i)}, \mathbf{P}_k^{N|H}, w_k^{(i)} \right\}_{i=1..N}$ les paramètres de $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$
 $\left\{ \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{N|H,(i)}, \mathbf{P}_{k+1/k}^{N|H}, w_{k+1/k}^{(i)} \right\}_{i=1..N}$ les paramètres de $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{M}_k)$

(1) Calcul de $\mathbf{P}_{k+1/k}^*$, $\mathbf{P}_{k+1/k}^{N|H}$ et du gain \mathbf{K}

$$\mathbf{P}_{k+1/k}^* = \mathbf{F}_{k+1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_k^{N|H} \end{bmatrix} \mathbf{F}_{k+1}^T + \mathbf{Q}_k$$

$$\mathbf{P}_{k+1/k}^{N|H} = \mathbf{P}_{k+1/k}^{*N} - \mathbf{K} \mathbf{P}_{k+1/k}^{*H} \mathbf{K}^T$$

$$\mathbf{K} = \left(\mathbf{L}_{k+1/k}^* \right)^T \left(\mathbf{P}_{k+1/k}^{*H} \right)^{-1}$$

(2) Échantillonnage de $\left\{ \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)} \right\}_{i=1..N}$:

Pour $i = 1..N$:

$$\mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)} \sim \mathcal{N} \left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{*H,(i)}, \mathbf{P}_{k+1/k}^{*H,(i)} \right)$$

avec $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{*H,(i)} = \mathbf{F}_{k+1}^{HH} \mathbf{x}_k^{H,(i)} + \mathbf{F}_{k+1}^{HN} \hat{\mathbf{x}}_k^{N|H,(i)}$

(3) Mise à jour de $\left\{ \hat{\mathbf{x}}_k^{N|H,(i)} \right\}_{i=1..N}$:

Pour $i = 1..N$:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{*N,(i)} = \mathbf{F}_{k+1}^{NH} \mathbf{x}_k^{N,(i)} + \mathbf{F}_{k+1}^{NN} \hat{\mathbf{x}}_k^{N|H,(i)}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{N|H,(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{*N,(i)} + \mathbf{K} \left(\mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{*H,(i)} \right)$$

FIG. 2.19 – Rao-Blackwellisation : propagation de l'état

2.4.3.5 Application de la règle de Bayes

Soit d'un ensemble d'échantillons $\left\{ \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{N|H,(i)}, \mathbf{P}_{k+1/k}^{N|H}, w_{k+1/k}^{(i)} \right\}_{i=1..N}$ approximant la densité d'état *a priori* $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{M}_k)$.

En utilisant (2.37), l'expression de la densité d'état *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{M}_{k+1})$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{M}_{k+1}) &= \frac{p(\mathbf{m}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1})p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{M}_k)}{\int p(\mathbf{m}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1})p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{M}_k)d\mathbf{x}_{k+1}} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^N w_{k+1/k}^{(i)} p(\mathbf{m}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \mathbf{x}_{k+1}^N)p(\mathbf{x}_{k+1}^N|\mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)})\delta_{\mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}}(\mathbf{x}_{k+1}^H)}{\sum_{i=1}^N w_{k+1/k}^{(i)} \int p(\mathbf{m}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}^H, \mathbf{x}_{k+1}^N)p(\mathbf{x}_{k+1}^N|\mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)})d\mathbf{x}_{k+1}^N}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Il reste à déterminer les quantités :

$$p(\mathbf{m}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \mathbf{x}_{k+1}^N) p(\mathbf{x}_{k+1}^N | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}) \text{ et } \int p(\mathbf{m}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \mathbf{x}_{k+1}^N) p(\mathbf{x}_{k+1}^N | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}) d\mathbf{x}_{k+1}^N$$

La densité $p(\mathbf{x}_{k+1}^N | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)})$ étant gaussienne, ces quantités admettent une expression analytique simple si $p(\mathbf{m}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \mathbf{x}_{k+1}^N)$ est elle-même gaussienne. C'est le cas lorsque la mesure \mathbf{m}_{k+1} dépend linéairement de \mathbf{x}_{k+1}^N et le bruit de mesure est additif gaussien :

$$\mathbf{m}_{k+1} = h_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}^H) + \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}^N + \mathbf{r}_{k+1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{r}_{k+1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_{k+1}) \quad (2.48)$$

Dans le cadre du recalage altimétrique, ces conditions sont bien respectées : la mesure du radio-altimètre dépend non-linéairement de la position horizontale (\mathbf{x}^H) mais linéairement de l'altitude de l'engin (première composante de \mathbf{x}^N).

Le calcul de $p(\mathbf{m}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \mathbf{x}_{k+1}^N) p(\mathbf{x}_{k+1}^N | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)})$ est mené en remarquant que :

$$p(\mathbf{x}_{k+1}^N | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \mathbf{m}_{k+1}) = \frac{p(\mathbf{m}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \mathbf{x}_{k+1}^N) p(\mathbf{x}_{k+1}^N | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)})}{\int p(\mathbf{m}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \mathbf{x}_{k+1}^N) p(\mathbf{x}_{k+1}^N | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}) d\mathbf{x}_{k+1}^N}$$

est une densité gaussienne, dont la détermination des paramètres est un problème de filtrage linéaire (type filtrage de Kalman) :

$$p(\mathbf{x}_{k+1}^N | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \mathbf{m}_{k+1}) = \mathcal{N}_{\mathbf{x}_{k+1}^N} \left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{N|H,(i)}, \mathbf{P}_{k+1}^{N|H} \right)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{N|H,(i)} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{N|H,(i)} + \mathbf{K} \boldsymbol{\xi}^{(i)} \\ \boldsymbol{\xi}^{(i)} &= \mathbf{m}_{k+1} - h_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}) - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{N,(i)} \\ \mathbf{P}_{k+1}^{N|H} &= \mathbf{P}_{k+1/k}^{N|H} - \mathbf{K} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{K}^T \\ \mathbf{K} &= \mathbf{P}_{k+1/k}^{N|H} \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k}^{N|H} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1} \end{aligned} \quad (2.49)$$

et :

$$\int p(\mathbf{m}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \mathbf{x}_{k+1}^N) p(\mathbf{x}_{k+1}^N | \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}) d\mathbf{x}_{k+1}^N = \mathcal{N}_0 \left(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \mathbf{S} \right) \quad (2.50)$$

On reconnaît l'expression de la vraisemblance de l'innovation du filtre de Kalman.

Au final, l'expression de la densité de probabilité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{M}_{k+1})$ se met sous la forme suivante :

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{M}_{k+1}) \approx \sum_{i=1}^N w_{k+1}^{(i)} p(\mathbf{x}_{k+1}^N | \mathbf{x}_{k+1}^{H,(i)}, \mathbf{m}_{k+1}) \delta_{\mathbf{x}_{k+1}^H}(\mathbf{x}_{k+1}^H)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^{H,(i)} &= \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)} \\ p(\mathbf{x}_{k+1}^N | \mathbf{x}_{k+1}^{H,(i)}, \mathbf{m}_{k+1}) &= \mathcal{N}_{\mathbf{x}_{k+1}^N} \left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{N|H,(i)}, \mathbf{P}_{k+1}^{N|H} \right) \\ w_{k+1}^{(i)} &= \tilde{w}_{k+1}^{(i)} / \sum_{i=1}^N \tilde{w}_{k+1}^{(i)} \quad \text{avec} \quad \tilde{w}_{k+1}^{(i)} = w_{k+1/k}^{(i)} \mathcal{N}_0 \left(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \mathbf{S} \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

L'algorithme de mise à jour des paramètres de l'approximation particulière sous une forme Rao-Blackwellisée est présenté ci-dessous.

$\left\{ \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{N|H,(i)}, \mathbf{P}_{k+1/k}^{N|H}, w_{k+1/k}^{(i)} \right\}_{i=1..N}$ les paramètres de $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{M}_k)$
 $\left\{ \mathbf{x}_{k+1}^{H,(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{N|H,(i)}, \mathbf{P}_{k+1}^{N|H}, w_{k+1}^{(i)} \right\}_{i=1..N}$ les paramètres de $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{M}_{k+1})$

(1) Calcul de $\mathbf{P}_{k+1}^{N|H}$ et du gain \mathbf{K}

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k}^{N|H} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_{k+1/k}^{N|H} \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{S}^{-1}$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^{N|H} = \mathbf{P}_{k+1/k}^{N|H} - \mathbf{K} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{K}^T$$

(2) Calcul des innovations $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$:

Pour $i = 1..N$:

$$\boldsymbol{\xi}^{(i)} = \mathbf{m}_{k+1} - h_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}) - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{N,(i)}$$

(3) Mise à jour de l'état des particules :

Pour $i = 1..N$:

$$\mathbf{x}_{k+1}^{H,(i)} = \mathbf{x}_{k+1/k}^{H,(i)}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{N|H,(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^{N|H,(i)} + \mathbf{K} \boldsymbol{\xi}^{(i)}$$

(4a) Mise à jour des poids :

Pour $i = 1..N$:

$$\tilde{w}_{k+1}^{(i)} = w_{k+1/k}^{(i)} \mathcal{N}_0 \left(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \mathbf{S} \right)$$

(4b) Normalisation des poids :

Pour $i = 1..N$:

$$w_{k+1}^{(i)} = \tilde{w}_{k+1}^{(i)} / \sum_{i=1}^N \tilde{w}_{k+1}^{(i)}$$

FIG. 2.20 – Rao-Blackwellisation : mise à jour par la règle de Bayes

Chapitre 3

Filtrage optimal pour le recalage altimétrique

3.1 Introduction

Dans le premier chapitre, on a dégagé les exigences d'un système de navigation autonome selon trois aspects : précision de positionnement, disponibilité et fiabilité. On a montré pourquoi l'hybridation entre différents capteurs est intéressante. Dans ce chapitre, nous nous focaliserons sur la navigation hybridée par recalage altimétrique. À partir de la modélisation du problème, des paramètres influants et des limitations des algorithmes classiques, nous ciblerons sur quels aspects précis on cherche un apport du filtre particulière sur la fonction navigation.

3.2 Identification d'une position par mesure altimétrique

Le radar altimétrique fournit, en fonctionnement idéal, une mesure de la distance verticale entre l'engin et la surface terrestre. Cette mesure est répétée à période fixe au cours du vol. Ainsi, l'ensemble des mesures forme un *profil altimétrique* du terrain survolé le long de la trajectoire de l'engin.

La problématique générale du recalage altimétrique peut alors être formulée par la question suivante : *À partir du profil altimétrique mesuré, comment retrouver la trajectoire suivie par l'engin au cours de son vol ?*

Notons que la démarche inverse, c'est-à-dire prédire le profil altimétrique mesuré à partir d'une trajectoire donnée, est un problème beaucoup plus simple à condition d'avoir à sa disposition :

- une carte altimétrique du terrain qui permet d'associer une altitude à une coordonnée géographique,
- un modèle de mesure altimétrique, qui est ici la simple différence d'altitude entre la trajectoire et le terrain.

L'ensemble des algorithmes de recalage altimétrique reposent sur la comparaison entre le profil mesuré par le radio-altimètre et un (ou plusieurs) profil prédit à partir de la carte altimétrique. Ce principe général est illustré par la figure 3.1. Avant toute mission, le terrain est cartographié pour en extraire un modèle numérique qui sera embarqué dans le calculateur de l'engin. Au cours du vol, le radio-altimètre mesure le profil correspondant

à la trajectoire effectivement suivie par l'engin. Ce profil est comparé avec un ensemble de profils générés à partir du modèle de terrain et des trajectoires générées par un algorithme d'estimation. Tout l'art du recalage altimétrique réside dans cet algorithme dont la mission est de faire converger la trajectoire estimée vers la trajectoire vraie à partir de la comparaison entre profil mesuré et profil estimé.

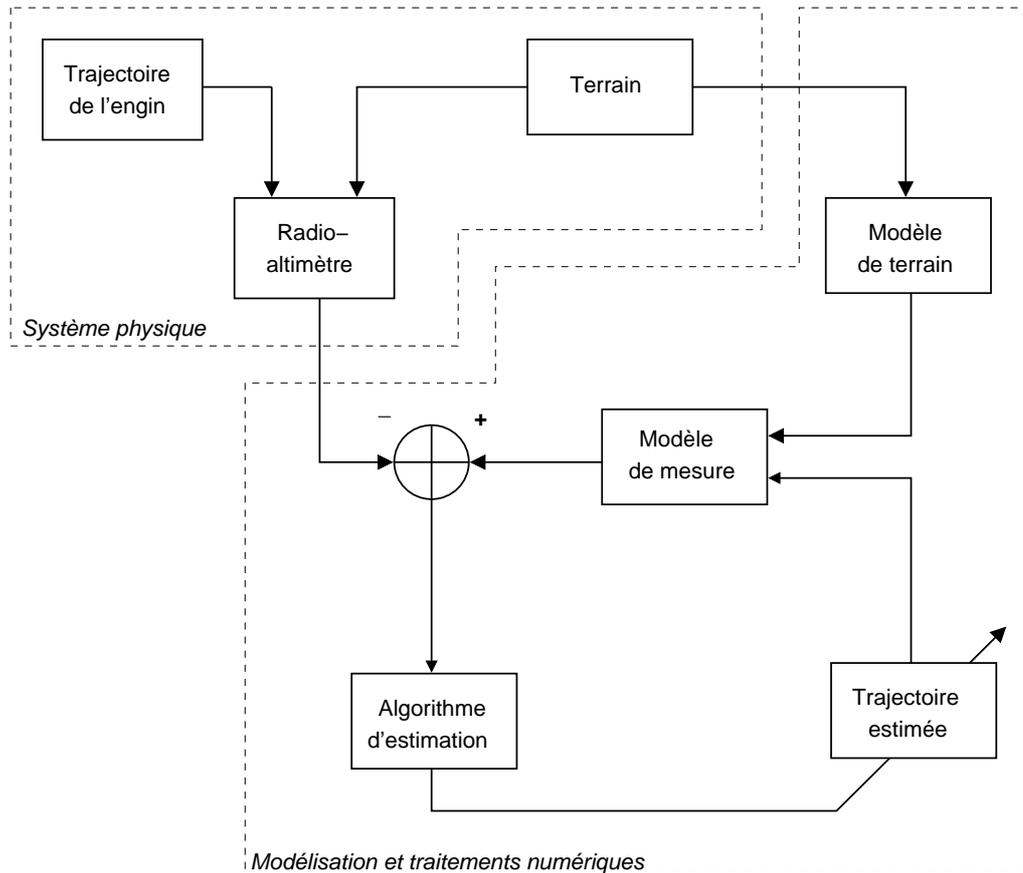


FIG. 3.1 – Principe du recalage altimétrique

3.3 Outils mathématiques associés

3.3.1 Modèle de dérivation inertielle

3.3.1.1 Introduction

Un système de navigation inertielle exploite un ensemble de mesures accélérométriques et gyrométriques. L'évolution de la précision de navigation au cours du vol est directement liée à la qualité de ces mesures. Savoir prédire la précision de l'estimation fournie par la centrale inertielle est tout aussi important que l'estimation elle-même. En effet, dans une phase de conception du système, elle oriente le choix des capteurs en fonction de la précision de navigation requise par les contraintes opérationnelles. D'autre part,

dans une optique d'hybridation de différentes sources d'information de navigation, il est nécessaire de quantifier la qualité de l'information fournie par les différentes sources.

Dans la section 3.3.1.2, nous rappellerons de manière succincte les principales sources d'erreur qui affectent les mesures inertielles. La section 3.3.1.3 présente un modèle linéaire de propagation des erreurs au cours du temps. Ce modèle, relativement complexe, peut être simplifié si l'on considère des intervalles de temps réduits. Cette réduction du niveau de complexité présente un intérêt pour simplifier la conception des algorithmes d'hybridation.

3.3.1.2 Sources d'erreur

Bruits de mesures Ils désignent l'ensemble des erreurs aléatoires intervenant dans la chaîne d'acquisition électronique de la mesure (conditionnement, conversion analogique-numérique). Classiquement, ils sont modélisés par des processus aléatoires $\epsilon(t)$ stationnaires, de moyenne nulle et caractérisés par leur densité spectrale. Ils interviennent de manière additive sur la mesure :

$$\hat{x}(t) = \bar{x}(t) + \epsilon(t) \quad (3.1)$$

où $\hat{x}(t)$ désigne la mesure bruitée et $\bar{x}(t)$ la vraie valeur de la grandeur mesurée.

Biais Les biais correspondent aux erreurs systématiques commises sur les mesures. Les biais sont dus, par exemple, aux dérives des caractéristiques des composants électroniques avec la température ou le vieillissement. Elles sont modélisées par une erreur additive constante :

$$\hat{x}(t) = \bar{x}(t) + b \quad (3.2)$$

où b est le biais. Il est a priori inconnu.

Facteurs d'échelle Ils font référence aux erreurs de gain dans les amplificateurs. Ils apparaissent comme un facteur multiplicatif dans l'expression de la mesure :

$$\hat{x}(t) = (1 + k)\bar{x}(t) \quad (3.3)$$

Erreurs de calage Chacun des accéléromètres et gyromètres mesure idéalement la projection du vecteur accélération (respectivement rotation) sur leur axe de mesure. Cependant, il existe toujours un couplage entre les différents axes, dû en particulier aux tolérances mécaniques lors du montage des capteurs. Si l'on note $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ les composantes du vecteur mesuré, les erreurs de calage s'expriment par :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & 1 & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

avec $\{k_{ij}\}$ les coefficients de couplage entre les axes.

3.3.1.3 Linéarisation des équations de la navigation inertielle terrestre

Ayant caractérisé les différentes sources d'erreur, il s'agit maintenant de modéliser leurs effets sur l'estimation délivrée par les calculs de navigation inertielle. Une manière de procéder au plus près de la réalité consisterait à générer en simulation l'ensemble des signaux d'erreur et de calculer l'estimation inertielle en appliquant les équations présentées en annexes A. En répétant l'opération avec de nombreuses réalisations aléatoires des variables d'erreur (simulation type Monte Carlo), il est possible de caractériser statistiquement la précision de navigation au cours du temps de vol. Une telle méthode est couramment utilisée lors de la phase de développement d'un système où les simulations sont réalisées sans contrainte de temps d'exécution. Elle est cependant inadaptée à une estimation temps-réel sur calculateur embarqué.

La difficulté de principe pour estimer la propagation des erreurs d'un système de navigation inertielle est l'ensemble des non-linéarités apparaissant dans les calculs (changement de repères, globe terrestre sphérique). Cependant, l'ordre de grandeur des erreurs classiquement mises en jeu est toujours faible devant les non-linéarités. Pour les changements de repère, les erreurs angulaires en attitude sont au maximum de l'ordre du degré. L'erreur en position horizontale ne dépasse pas quelques kilomètres, ce qui est faible au regard du rayon terrestre. Il est donc pertinent d'utiliser un modèle linéaire de propagation d'erreur.

Ce modèle linéaire est établi en annexe B en temps continu. Nous en résumons ici les hypothèses et les résultats.

Le vecteur d'état \mathbf{x} du modèle rassemble les erreurs en position, vitesse et attitude :

$$\mathbf{x} = [\delta_n \ \delta_e \ \tilde{z} \ \tilde{v}_n \ \tilde{v}_e \ \tilde{v}_z \ \gamma_n \ \gamma_e \ \gamma_d]^\top \quad (3.5)$$

avec :

- $\{\delta_n, \delta_e, \tilde{z}\}$ l'erreur de positionnement (en m) selon les directions nord, est et verticale du repère TGL,
- $\{\tilde{v}_n, \tilde{v}_e, \tilde{v}_z\}$ l'erreur de vitesse (en m.s^{-1}) dans le repère TGL
- $\{\gamma_n, \gamma_e, \gamma_d\}$ le micro-rotateur relatif à l'erreur d'attitude (en rad).

Le vecteur d'erreur inertielle \mathbf{v} rassemble les erreurs sur le vecteur accélération et rotation en projection dans le repère engin M :

$$\mathbf{v} = [\tilde{a}_x \ \tilde{a}_y \ \tilde{a}_z \ \tilde{\omega}_x \ \tilde{\omega}_y \ \tilde{\omega}_z]^\top \quad (3.6)$$

L'équation d'évolution de l'erreur inertielle se met sous la forme :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{v}(t) \quad (3.7)$$

Les matrices $\mathbf{A}(t)$ et $\mathbf{B}(t)$ sont explicitées en annexe B.

3.3.1.4 Modèle de dérive inertielle en temps discret

Dans la suite du document, les calculs seront présentés en temps discret, avec un pas de discrétisation T_e . Les variables correspondant à l'instant kT_e seront indicées par k . Afin

de simplifier le passage continu-discret de l'équation 3.7, nous ferons plusieurs hypothèses supplémentaires :

- les matrices $\mathbf{A}(t)$ et $\mathbf{B}(t)$ seront considérées comme constantes sur les intervalles de temps $[kT_e ; (k+1)T_e]$,
- le bruit $\mathbf{v}(t)$ est considéré comme un bruit blanc gaussien stationnaire de moyenne nulle et de matrice de covariance \mathbf{Q}_v .

L'intégration (dans un sens stochastique) de l'équation 3.7 entre t et $t + T_e$ conduit à :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t + T_e) &= \Phi_{t,t+T_e} \mathbf{X}(t) + \epsilon(t) \\ \text{avec :} \\ \Phi_{t,t+T_e} &= \exp(T_e \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$E[\epsilon(t)\epsilon(t)^\top] = \int_t^{t+T_e} \Phi_{\tau,t+T_e} \mathbf{B} \mathbf{Q}_v \mathbf{B}^\top \Phi_{\tau,t+T_e}^\top d\tau$$

Une approximation au premier ordre (méthode d'Euler) conduit à :

$$\begin{aligned} \Phi_{t,t+T_e} &\approx \mathbf{I} + T_e \mathbf{A} \\ E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}(t)^\top] &\approx T_e (\mathbf{I} + \frac{T_e}{2} \mathbf{A}) \mathbf{B} \mathbf{Q}_v \mathbf{B}^\top (\mathbf{I} + \frac{T_e}{2} \mathbf{A})^\top = \mathbf{Q}_k \end{aligned} \quad (3.9)$$

En notant $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kT_e)$, le modèle à temps discret s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_k \\ \text{avec :} \\ \mathbf{F}_k &= \mathbf{I} + T_e \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.10)$$

et \mathbf{v}_k un bruit blanc discret de moyenne nulle et de covariance \mathbf{Q}_k .

3.3.2 Modèle de mesure altimétrique

La mesure m_k ¹ du radio-altimètre s'exprime simplement comme la différence entre l'altitude z_k de l'engin et la hauteur du terrain (figure 1.7) :

$$m_k = -z_k - \lambda(L_k, l_k) + r_k \quad (3.11)$$

où $\lambda(L_k, l_k)$ est la hauteur du terrain aux coordonnées de l'engin (L_k, l_k) .

L'erreur de mesure r_k par le radio-altimètre est difficile à modéliser, elle dépend de multiples facteurs :

- La distance mesurée n'est jamais exactement la distance engin-sol selon la direction verticale. Le cône d'émission radar est relativement large (quelques dizaines de degrés). La mesure n'est donc pas une mesure ponctuelle ;
- Les performances du radio-altimètre dépendent de la nature du sol. Par exemple, au dessus d'une forêt, il peut y avoir ambiguïté entre l'écho du sol et l'écho renvoyé par la cime des arbres ;

¹la mesure est ici un scalaire, et sera notée m_k dans la suite du document

- La variance de l’erreur est aussi fonction de l’altitude par rapport au sol ;
- L’erreur de mesure inclut également l’erreur de carte, toute aussi difficile à modéliser ;
- Il existe une corrélation temporelle entre les erreurs de mesure successives. Cette corrélation dépend de la distance parcourue entre deux mesures du radio-altimètre, c’est-à-dire de la vitesse de déplacement et de la période de mesure.

En conséquence, il est très difficile d’établir un modèle fin pour la mesure. Bien que le filtrage particulière permette l’utilisation d’un modèle non gaussien pour le bruit de mesure, on fera l’hypothèse de r_k bruit blanc gaussien, de variance $\sigma_{r_k}^2$.

3.3.3 Solution optimale dans un cadre bayésien

Soit le problème de filtrage en temps discret, constitué de l’équation d’évolution (3.10) et de l’équation de mesure (3.11) :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_k \\ m_k &= h_k(\mathbf{x}_k) + r_k\end{aligned}\quad (3.12)$$

avec :

$$\begin{aligned}h_k(\mathbf{x}_k) &= z_k^* + \tilde{z}_k - \lambda \left(L_k^* + \frac{\delta_{n,k}}{r_T}, \quad l_k^* + \frac{\delta_{e,k}}{r_T \cos(L_k^*)} \right) \\ \{L_k^*, l_k^*, z_k^*\} &\text{ l'estimation inertielle de la position} \\ \mathbf{x}_k &= [\delta_{n,k} \ \delta_{e,k} \ \tilde{z}_k \ \tilde{v}_{n,k} \ \tilde{v}_{e,k} \ \tilde{v}_{z,k} \ \gamma_{n,k} \ \gamma_{e,k} \ \gamma_{d,k}]^\top \text{ l'erreur inertielle}\end{aligned}\quad (3.13)$$

Dans un cadre statistique bayésien, toute la connaissance apportée par les mesures sur l’état à l’instant k est condensée dans la densité de probabilité $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k)$. Résoudre le problème d’estimation est équivalent à déterminer cette fonction sur tout l’espace d’état (pour tout \mathbf{x}_k). La section 2.2 décrit de façon plus détaillée la théorie de l’inférence bayésienne et établit les formules pour calculer $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k)$ de manière récursive :

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k) = \frac{p(m_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_{k-1})}{p(m_k | \mathbf{M}_{k-1})} \quad (3.14a)$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{M}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (3.14b)$$

$$p(m_k | \mathbf{M}_{k-1}) = \int p(m_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_{k-1}) d\mathbf{x}_k \quad (3.14c)$$

Le passage de $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{M}_{k-1})$ à $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k)$ fait intervenir deux étapes :

1. Une étape de *prédiction*

Elle correspond à l’intégration (3.14b). Cette étape fait intervenir la densité de probabilité $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ qui est directement reliée à l’équation de la dynamique des erreurs $\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_k$. En considérant \mathbf{v}_k un vecteur aléatoire gaussien de covariance \mathbf{Q}_k , $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ est une densité gaussienne :

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \mathcal{N}_{\mathbf{x}_k}(\mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k)$$

2. Une étape de *correction*

Elle correspond à l'application de la règle de Bayes (3.14a). Cette étape fait intervenir la mesure à l'instant k via la densité de probabilité $p(m_k|\mathbf{x}_k)$ (ou *vraisemblance*). Dans le cas général (h_k non linéaire et/ou \mathbf{v}_k non gaussien), cette fonction peut prendre une allure quelconque. Cette étape nécessite en plus l'évaluation d'un facteur de normalisation $p(m_k|\mathbf{M}_{k-1})$ par l'intégration (3.14c).

Si l'inférence bayésienne donne l'expression théorique du calcul de $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$, l'application numérique sur un problème réel est complexe car elle nécessite l'intégration de fonctions multidimensionnelles. Il est alors nécessaire de construire une représentation approchée de $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ permettant de conduire les calculs de manière simple.

3.3.4 Difficultés de mise en œuvre pratique

Dans notre application, l'allure de la fonction h présente une grande diversité selon les régions survolé. Si le terrain est peu accidenté, l'observabilité du système est faible pour estimer la dérive horizontale. Si au contraire, le terrain est très accidenté (montagnes), les non-linéarités de h rendent le problème difficile à filtrer. Cette difficulté est illustrée par l'exemple suivant :

La figure 3.2 représente le profil altimétrique du terrain (l'exemple est en dimension 1). À l'instant k , on réalise une mesure. Le résultat donne une altitude mesurée du terrain de 1130m. On détermine alors la densité de probabilité $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ en appliquant les équations (3.14). Dans cet exemple, l'application numérique est effectuée en discrétisant l'espace d'état (ici de dimension 1) avec un pas fixe.

Deux cas sont alors envisagés :

- Premier cas (figure 3.3) : la position de l'engin est *a priori* connue avec une bonne précision (la densité $p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{M}_{k-1})$ est une gaussienne centrée sur 4,5, de variance 0,5). Le terrain peut être considéré comme approximativement linéaire sur la zone d'incertitude *a priori*. En conséquence, la densité $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ est approximativement gaussienne. Dans ce cas, l'algorithme de Kalman étendu aurait suffi à effectuer un filtrage proche de l'optimal.
- Deuxième cas (figure 3.4) : l'incertitude sur la position de l'engin est *a priori* grande (la densité $p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{M}_{k-1})$ est une gaussienne centrée sur 8, de variance 10). En conséquence, le terrain ne peut plus être approché par une droite, et la densité de probabilité $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ possède une forme complexe : on y distingue trois maximums principaux. Dans un tel cas, le filtre de Kalman est mis en échec : une densité gaussienne ne peut constituer une approximation satisfaisante de la densité *a posteriori*.

En conclusion de cet exemple se dégagent les limitations du filtre de Kalman étendu et l'intérêt des méthodes de filtrage capables de prendre en compte des densités de probabilités non-gaussiennes. Dans le cadre du recalage altimétrique, on peut espérer que des filtres non-linéaires plus raffinés offrent une meilleure robustesse sur des terrains très accidentés et une meilleure convergence lorsque la zone d'incertitude initiale sur la position est grande.

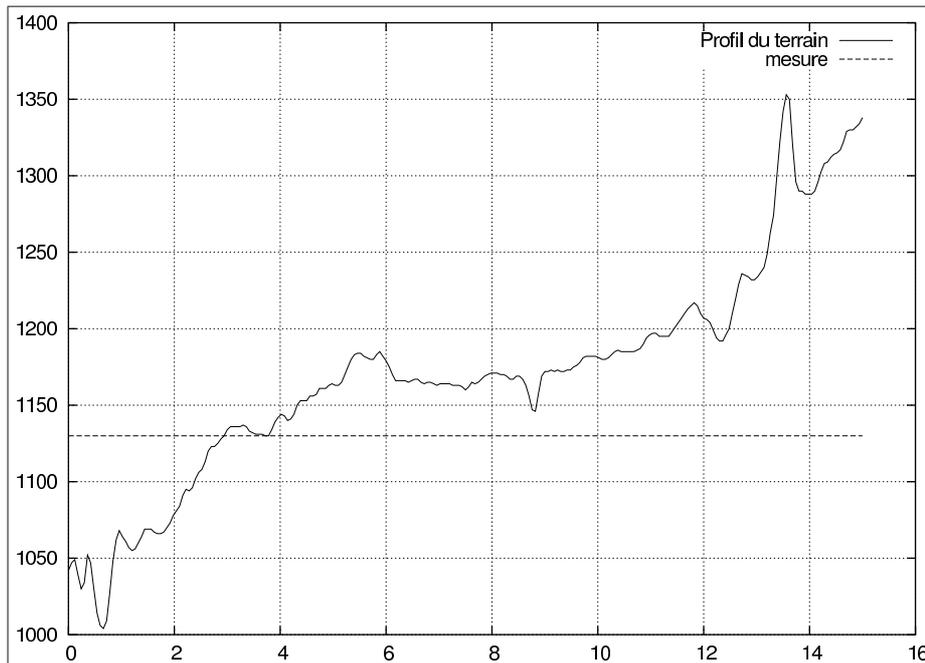


FIG. 3.2 – Profil du terrain survolé

3.3.5 Représentations de la densité de probabilité filtrée

Concevoir un filtre non-linéaire pour une application donnée, c'est d'abord choisir une représentation pour la densité de probabilité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ qui va être mise à jour récursivement par les équations du filtre optimal (3.14). Dans le cas non-linéaire, cette représentation ne peut être qu'approchée et doit satisfaire deux contraintes :

- L'approximation de $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ doit être suffisamment fidèle à la vraie densité de probabilité ;
- Les étapes de prédiction (3.14b) et de correction (3.14a) doivent pouvoir être appliquées numériquement sur cette représentation et de manière efficace (coût de calcul).

Ces deux contraintes limitent fortement le champ des possibilités. Voici les différentes solutions adoptées dans le domaine du filtrage non-linéaire :

- **Densité de probabilité gaussienne** (figure 3.5) : c'est la représentation la plus simple et de loin la plus courante. Elle est à la base du filtre de Kalman [30]. Son principal avantage est le faible nombre de paramètres nécessaires (moyenne et matrice de covariance), même pour de grandes dimensions de l'espace d'état. Son deuxième point fort est la simplicité de la récursion. Cependant, dans des problèmes fortement non-linéaires, la densité $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ exacte peut être très différente d'une simple gaussienne. Le cas le plus défavorable étant une densité comportant plusieurs modes (ou "pics").

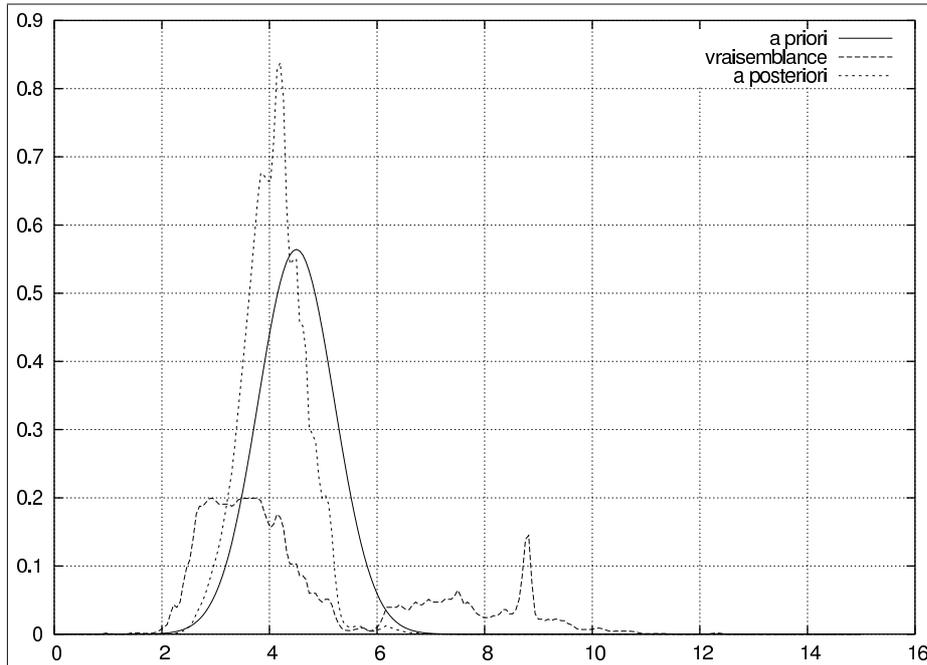


FIG. 3.3 – Allure de la densité de probabilité *a posteriori* - Cas 1

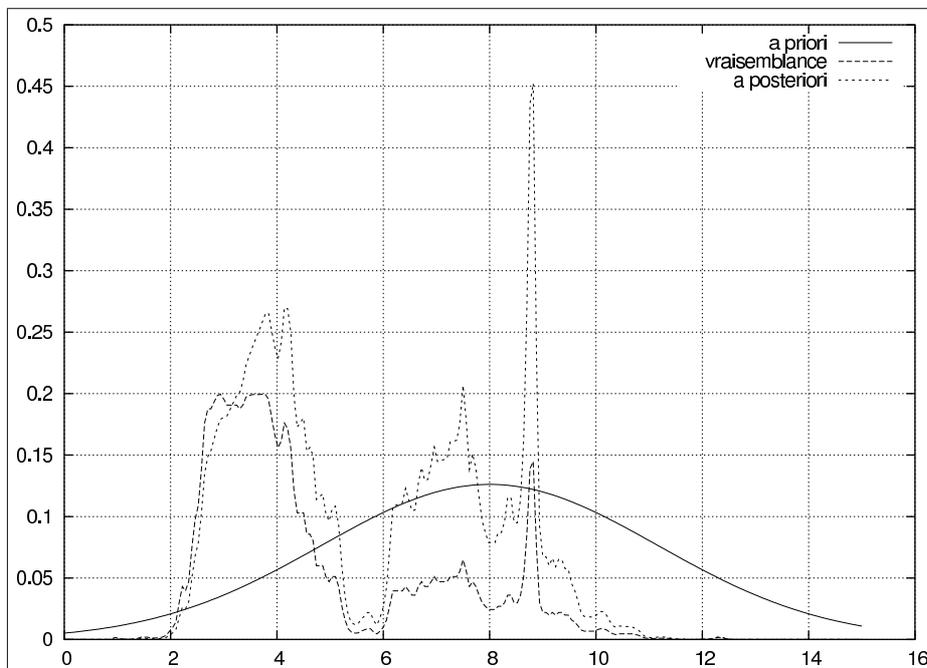


FIG. 3.4 – Allure de la densité de probabilité *a posteriori* - Cas 2

- **Mélange pondéré de gaussiennes** (figure 3.6) : $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ est décrite comme une somme pondérée de N densités gaussiennes

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k) = \sum_{i=1}^N \mu^{(i)} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k^{(i)}, \mathbf{P}_k^{(i)}) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^N \mu^{(i)} = 1 \quad (3.15)$$

Cette représentation offre une description beaucoup plus apte à représenter des densités de probabilité "exotiques", notamment multi-modales. Une des difficultés est le choix de N , qui traduit le compromis entre la fidélité de représentation (liée au final aux performances du filtre) et le coût en calcul et en mémoire. Cette représentation conduit au *filtre à mélange de gaussiennes* ou *gaussian-sum filter* [1][8].

- **Représentation sur une grille** (figure 3.7) : $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ est décrite par un ensemble de valeurs $\{p(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{M}_k)\}_{i=1..N}$ avec $\{\mathbf{x}_k^{(i)}\}$ un ensemble de points de l'espace d'état. En général, ces points sont choisis de manière à constituer un maillage régulier de l'espace d'état (une "grille" en deux dimensions). Le point crucial est le choix de la résolution de la grille et de sa taille. Ce type de méthode est limitée à des espaces d'état de faible dimension (2 ou 3 au maximum). Le filtre associé est nommé *filtre à grille* ou *point-mass filter* [5].
- **Représentation particulière** (figure 3.8) : $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$ est représentée par un ensemble d'échantillons pondérés $\{\omega_k^{(i)}, \mathbf{x}_k^{(i)}\}$ distribués selon $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{M}_k)$. On peut voir l'ensemble des particules comme une grille adaptative. Ce concept est la base du filtrage particulière [2] [15].

3.3.6 Illustration du fonctionnement d'un filtre particulière pour la navigation

Le recalage altimétrique fournit un exemple de problème où le bruit d'état est faible (la dérive de la centrale inertielle est lente), ainsi que le bruit de mesure. Pour obtenir de bons résultats avec un nombre raisonnable de particules, la *proposal distribution* doit être choisie proche du choix optimal. Le filtre particulière utilisé dans cet exemple possède les caractéristiques suivantes :

- 1000 particules
- La *proposal distribution* est construite par une méthode de linéarisation locale autour de chaque particule (un filtre de Kalman étendu est associé à chaque particule).
- Le seuil de rééchantillonnage est fixé à $N_{eff} < 0,5 N$.

La figure 3.9 montre la convergence du nuage de particules vers la solution (dans le plan latitude-longitude) pour les itérations [0, 50, 100, 200, 300, 400]. La figure 3.10 présente la reconstruction de la densité de probabilité à partir du nuage de particules. Dans les premières itérations du filtre, cette densité présente de nombreux maximum locaux qui traduisent l'ambiguïté sur la position. Cette ambiguïté est levée au fur et à mesure de l'accumulation des données radio-altimétriques.

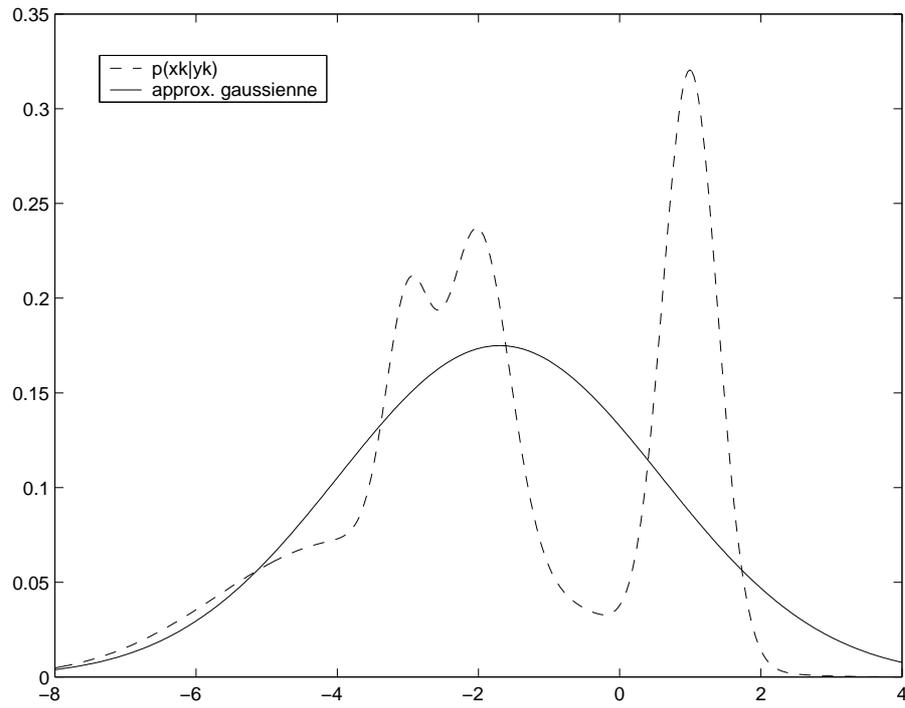


FIG. 3.5 – Approximation gaussienne d'une DDP

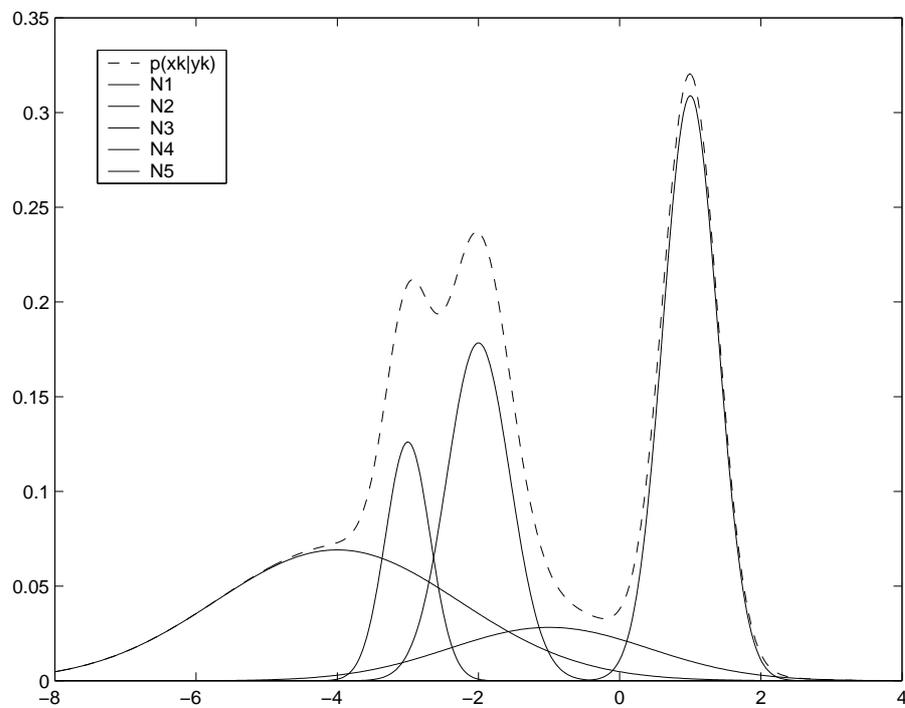


FIG. 3.6 – Approximation d'une DDP par mélange de gaussiennes

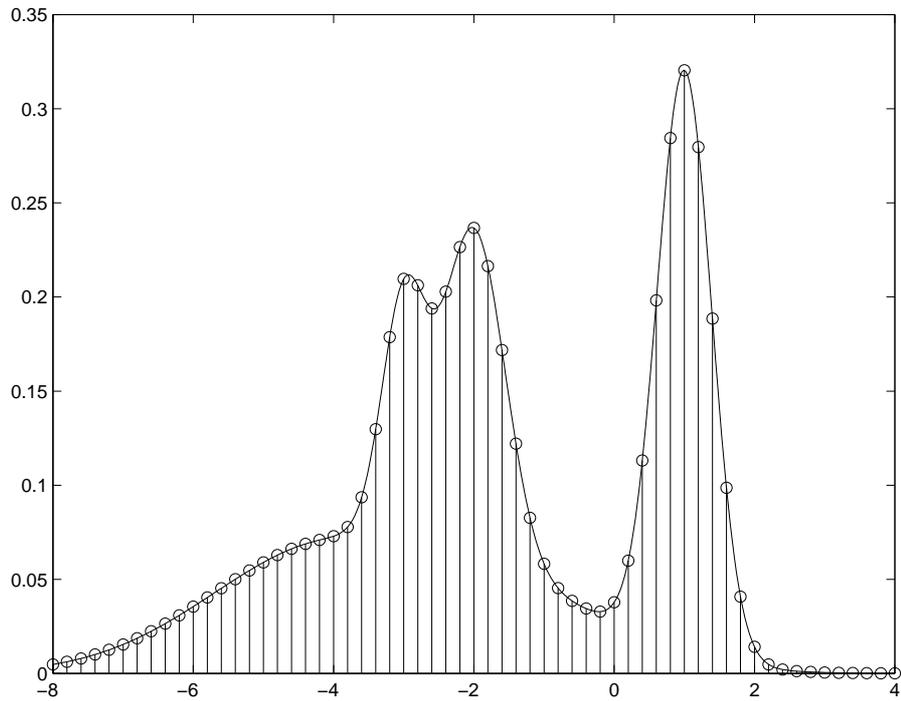


FIG. 3.7 – Approximation d'une DDP par discrétisation

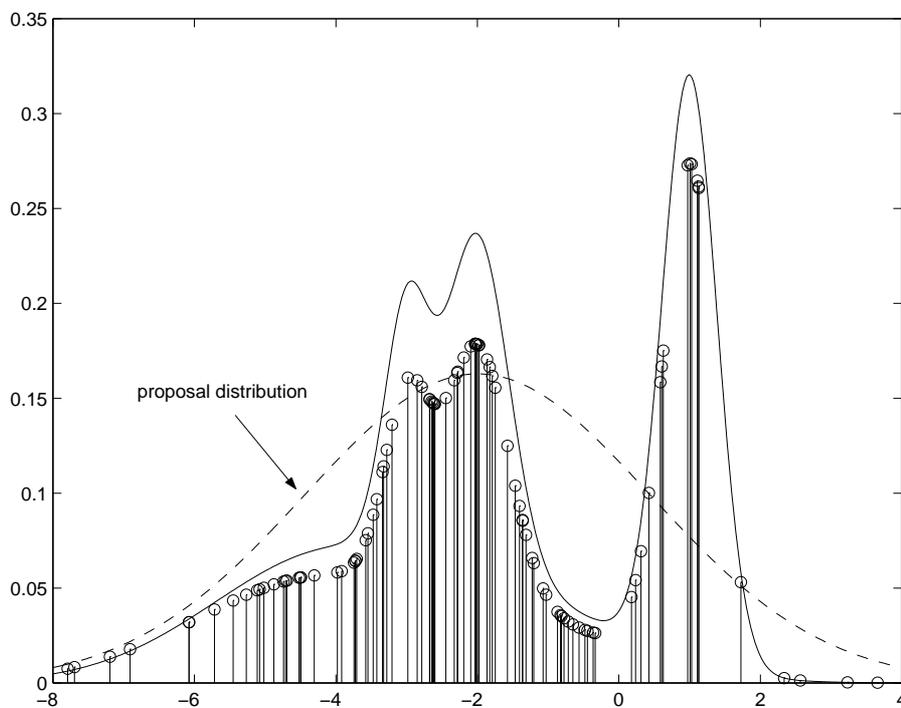


FIG. 3.8 – Approximation particulière d'une DDP

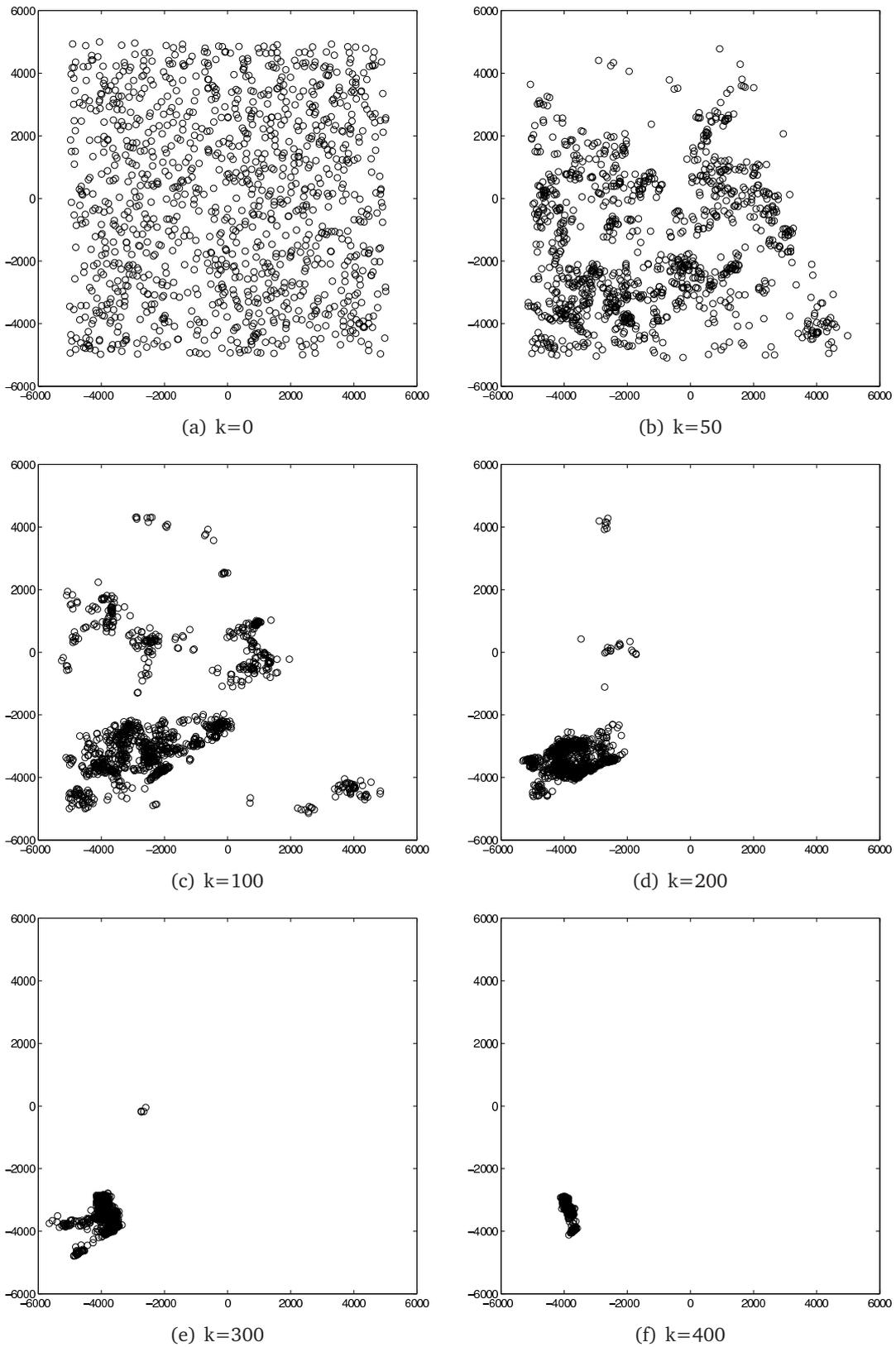


FIG. 3.9 – Évolution du nuage de particules

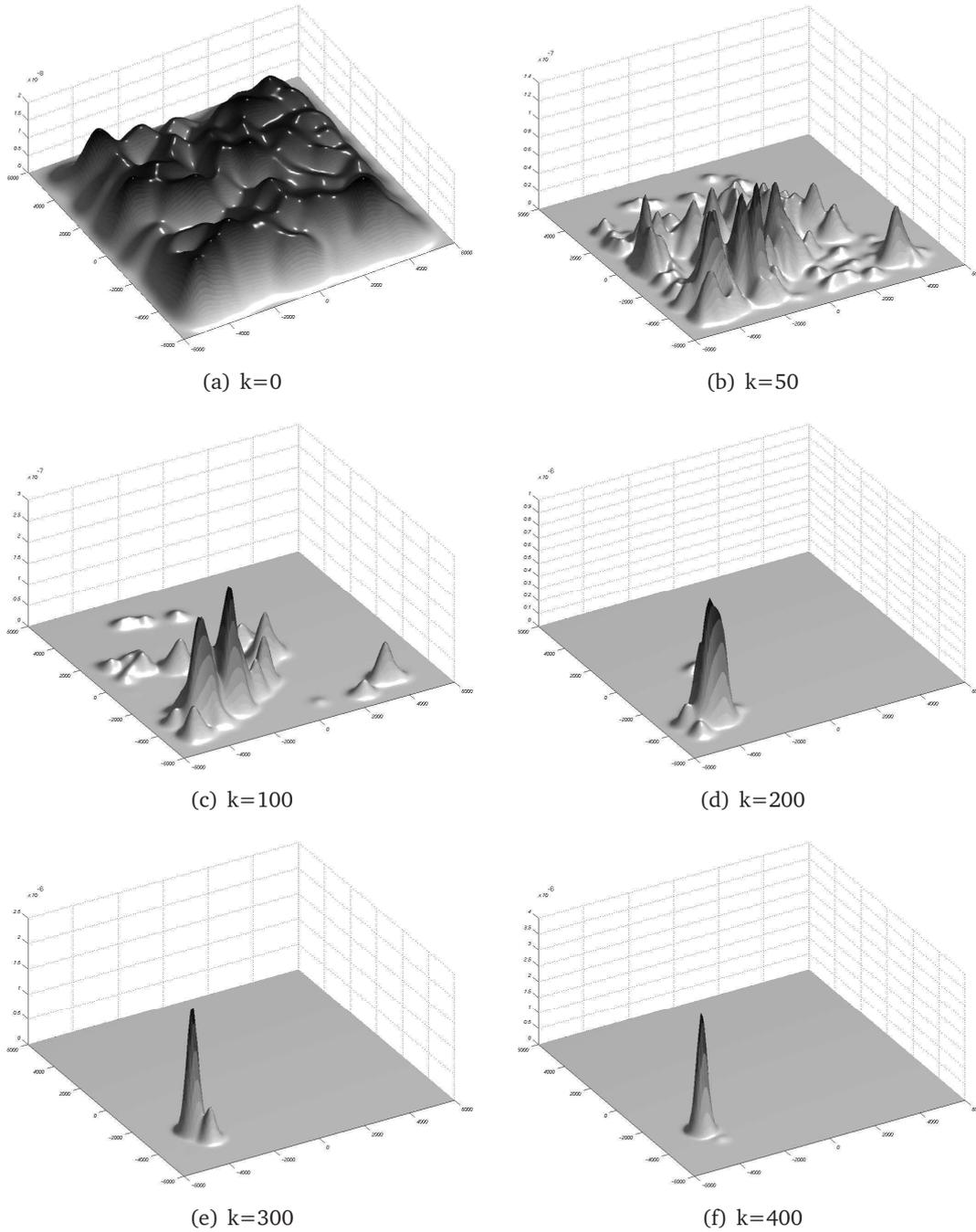


FIG. 3.10 – Reconstruction de la densité de probabilité

3.3.7 Potentialités du filtre particulaire

Le filtre particulaire offre deux principaux avantages :

Domaine d'application : Le filtrage permet de résoudre en théorie tout problème d'estimation récurrente avec un minimum de contrainte sur les équations d'état et de mesure, ainsi que sur les distributions des bruits.

Flexibilité : Lors de la conception d'un filtre particulaire pour une application donnée, il est possible de jouer sur de nombreux facteurs (choix de la *proposal distribution*, du nombre de particules, de la fréquence des rééchantillonnages, ...) pour adapter le filtre au problème et aux contraintes de puissance de calcul.

Cependant, il est nécessaire de porter attention aux points suivants :

Dimension de l'espace d'état : Le nombre de particules nécessaires augmente rapidement avec la dimension de l'espace d'état. En conséquence, un filtrage particulaire n'est envisageable que pour des systèmes de dimension inférieure à 3 ou 4. Pour traiter les problèmes de dimension supérieure, il est dans certains cas possible de diviser l'espace d'état en deux sous-espaces : le filtrage particulaire ne s'opère que sur le premier, et un filtre de Kalman classique effectue l'estimation sur l'autre. Cette méthode est appelée Rao-Blackwellisation.

Nombre de particules : Le nombre de particules nécessaires pour assurer la consistance du filtre dépend beaucoup du problème considéré (intensité des non-linéarités, paramètres des bruits). Généralement, ce nombre est compris entre 500 et 10000. Cela impose une puissance de calcul généralement élevée et une mémoire suffisante pour stocker les paramètres de chaque particule.

Bruits d'état et de mesure : La variance des bruits d'état et de mesure influe beaucoup sur le comportement du filtre. Grossièrement, plus ces variances sont faibles, plus le filtrage particulaire est mis en difficulté. Un faible bruit de mesure entraîne une dégénérescence rapide des particules. Un faible bruit d'état ne permet pas d'assurer une bonne exploration de l'espace d'état par les particules après l'étape de rééchantillonnage. Dans ce dernier cas, il est nécessaire de disperser artificiellement les particules (régularisation).

3.4 Filtrage pour le recalage altimétrique : état de l'art

Pour un problème de recalage altimétrique, on distingue souvent deux phases de fonctionnement de l'algorithme : une phase de convergence initiale (ou *acquisition*) et une phase de régime permanent (ou *poursuite*) [40]. La figure 3.11 présente l'évolution typique de la dérive inertielle en position et de son estimation par le filtre de recalage, à partir de l'instant d'initialisation.

Les difficultés d'approximation du filtre optimal sont sensiblement différentes entre ces deux phases de fonctionnement.

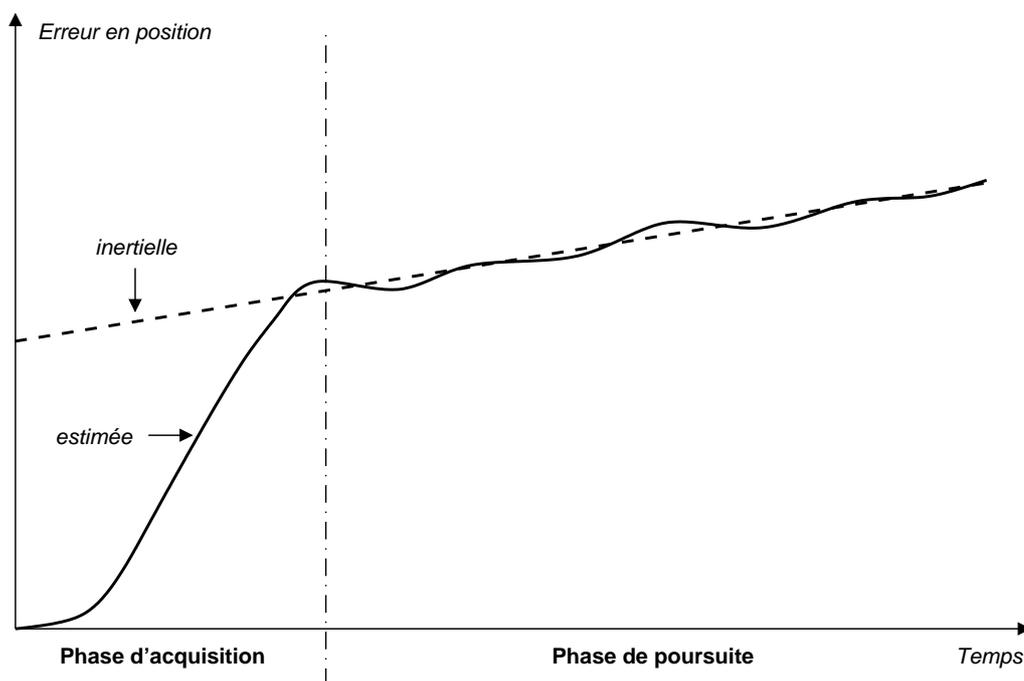


FIG. 3.11 – Phases d’acquisition et de poursuite

À la mise en fonctionnement du recalage, l’erreur inertielle en position est importante, de l’ordre de quelques centaines de mètres à plusieurs kilomètres. Cette situation correspond par exemple à un scénario dans lequel le début de vol a été effectué en navigation inertielle uniquement, sans disponibilité de moyens de recalage (survol d’un terrain plat par exemple). La correction de cette erreur initiale en position correspond à la phase d’acquisition. C’est dans cette phase que sont rencontrées des densités de probabilité filtrées multimodales. Elles correspondent à des cas où la séquence de mesures accumulées ne permet pas de discriminer plusieurs positions probables. Ainsi, durant cette phase, les algorithmes approxinant la densité filtrée par un simple modèle gaussien ne sont pas utilisables, notamment le filtre de Kalman étendu. L’approche générale suivie par les algorithmes existants consiste à explorer l’espace d’état en de multiples nœuds de calcul. Elle se décline en plusieurs variantes.

Historiquement, le procédé TERCOM [22][28] se base sur un calcul de corrélation entre la séquence de mesures et les profils de terrain calculés en chaque nœud d’une grille. La grille recouvre la zone d’incertitude initiale dans le plan horizontal. Plus récemment, le *point-mass filter* [4][5] fait également appel à une grille de calcul pour résoudre le problème dans un cadre bayésien, et notamment en tenant compte de l’évolution de l’erreur en position sur la durée de la phase d’acquisition.

D’autres approches font appel à un banc de filtres de Kalman étendu, initialisés de façon à couvrir la zone d’incertitude initiale. Le procédé SITAN [6][26] en est un exemple. Le ou les filtres de Kalman initialisés à faible distance de l’état vrai convergent. Une surveillance de l’innovation de chacun des filtres permet de discriminer les filtres présentant

une bonne convergence de ceux qui divergent. Cette technique est à rapprocher du filtre à mélange de gaussiennes [1]. Enfin, certains algorithmes combinent les deux techniques : TERPROM, SPARTAN [28], [33].

L'utilisation du filtre particulaire pour le recalage altimétrique a été initié par N. Bergman [39], et C. Musso [35]. Les premières implémentations ont été ensuite améliorées par :

- l'introduction d'une procédure de Rao-Blackwellisation [3] ;
- l'utilisation d'une procédure de régularisation améliorée, conduisant au *Local Rejection Regularized Particle Filter (L2RPF)* [36] ;
- l'utilisation de particules gaussiennes et optimisation de la procédure de rééchantillonnage [10][9].

L'ensemble de ces travaux définit un axe de recherche représenté sur la figure 3.12 (axe n°1). Ces techniques ont en commun de gérer des densités filtrées multimodales, et se différencient par leur manière de prendre en compte l'aspect dynamique du problème.

Cette thèse s'intéresse à un autre aspect du problème (axe n°2) : la phase de poursuite, dans laquelle la densité filtrée est essentiellement mono-modale.

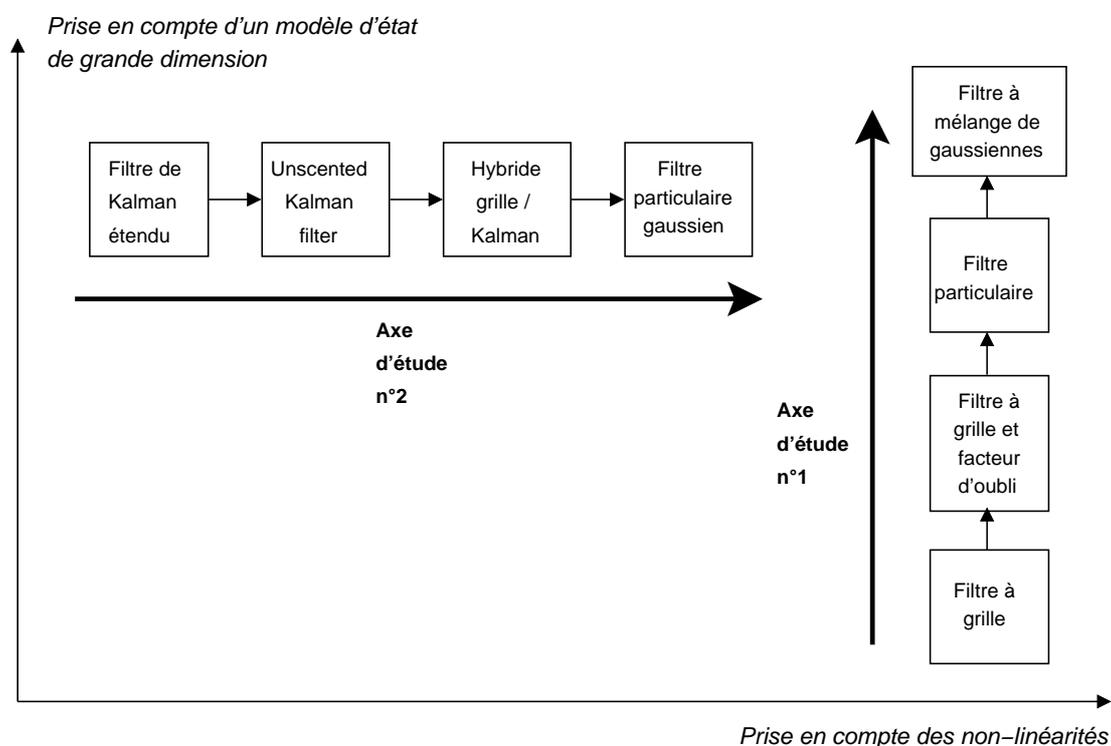


FIG. 3.12 – Axes de recherche

Chapitre 4

Évaluation comparatives de filtres non-linéaires gaussiens

4.1 Cadre de l'étude

4.1.1 Comparaison de filtres non-linéaires pour la phase de poursuite

Pour la phase de poursuite, le filtre de Kalman étendu est une méthode classique, donnant satisfaction dans certaines limites. Si le terrain admet une bonne approximation linéaire sur l'ellipsoïde de confiance en position, la convergence est correcte. Dans le cas contraire, le risque de divergence est important.

L'avantage majeur du Kalman est de prendre en compte de façon simple un vecteur d'état de grande dimension et un modèle d'évolution complexe. Un tel modèle est nécessaire pour la modélisation fine de la dérive d'une centrale inertielle (dimension 15 à 20). Ainsi, le filtre de Kalman réalise conjointement un recalage continu de la position et une correction des erreurs de vitesse, d'attitude, des biais gyrométriques et accélérométriques du système de navigation inertiel.

La question de la thèse est de savoir si les méthodes de type particulières peuvent être efficacement appliquées à cette phase de poursuite. C'est-à-dire, offrir la même simplicité pour un modèle d'état linéaire et de grande dimension, tout en étant plus robustes aux non-linéarités par rapport aux méthodes de l'état de l'art.

Notre démarche est donc de comparer entre différents filtres, dans un cadre limité à la phase de poursuite. La structure commune dans laquelle les différents filtres doivent s'intégrer est définie par l'application, ici un système de navigation embarqué.

Dans le souci de construire une progression logique entre le filtre de Kalman étendu et les méthodes particulières, nous avons retenu quatre types de filtres :

- le filtre de Kalman étendu, basé sur une linéarisation locale du terrain (cf. §2.3.3),
- l'*Unscented Kalman Filter* (ou filtre de Kalman sans biais), basé sur un calcul du gain de Kalman optimisé pour des problèmes non-linéaire (cf. §2.3.4),
- un filtre hybride grille / Kalman, inspiré de la méthode SPARTAN [28], reposant sur la construction de la fonction vraisemblance en chaque nœud d'une grille,
- le filtre particulière gaussien [31][32], qui est une variante du filtre particulière classique, mieux adapté à la phase de poursuite, pour laquelle la densité de probabilité filtrée est essentiellement monomodale.

Cette progression définit un axe d'étude représenté par l'axe 2 sur la figure 3.12. L'implémentation pratique de chacun de ces filtres sera décrite plus loin dans ce chapitre. On s'attachera principalement à mettre en relief les différences de principe entre les algorithmes, notamment comment sont traitées les non-linéarités de la mesure et à quelle est la nature de l'approximation dans le calcul de la règle de Bayes. Un second point important est l'intégration dans la structure commune définie en §4.1.2. Enfin, dans une perspective de comparaison, il est nécessaire de préciser, pour chacun des filtres, quelles sont les variantes et les possibilités de réglage qui ont potentiellement un impact sur les performances.

4.1.2 Contraintes d'intégration à un système de navigation

Le cadre de l'étude est contraint par la structure du système de navigation dans lequel le recalage altimétrique doit s'insérer. Cette structure est fixée a priori. Elle est représentée sur la figure 4.1. Les éléments la constituant sont : le système de navigation inertiel, le filtre de navigation, le filtre de recalage altimétrique, le radioaltimètre, le modèle numérique de terrain.

Le filtre de navigation est un filtre de Kalman, dont le modèle d'état représente la modélisation de la dynamique de la dérive inertielle. Ce modèle est linéaire à bruit additif gaussien. L'annexe B présente un exemple de modèle d'état de dimension 9 (erreur en position, vitesse, attitude). Ce filtre permet d'une part la prédiction de la dérive au cours du temps, par la propagation de l'estimée et de sa covariance. D'autre part, il effectue la synthèse des informations complémentaires de navigation (GPS, recalage altimétrique) qui permettent d'affiner l'estimé lorsqu'elles sont disponibles.

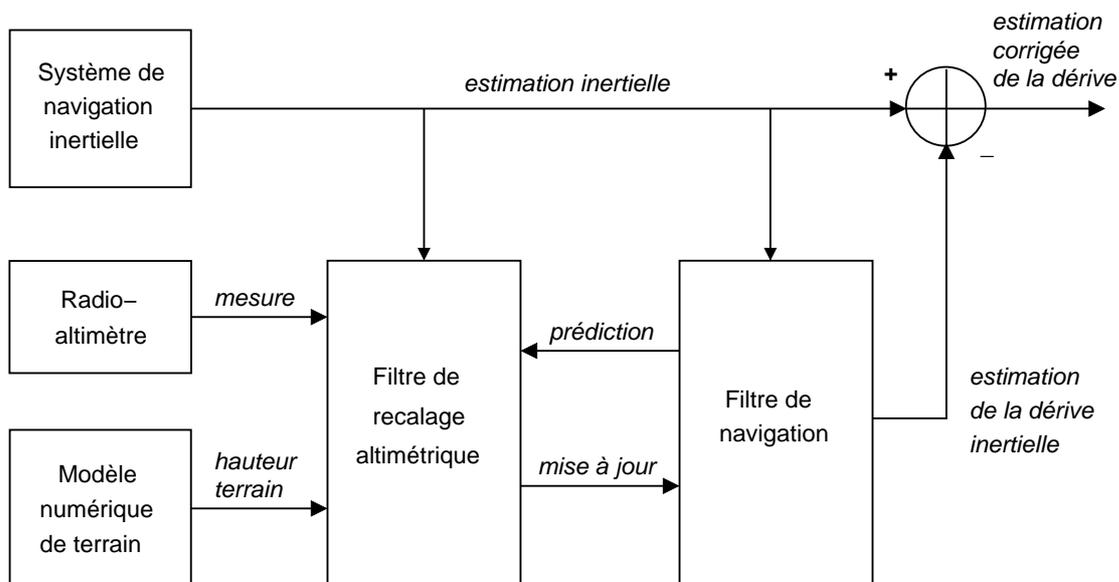


FIG. 4.1 – Structure du système de navigation

Dans ce schéma, le filtre de recalage altimétrique fournit au filtre de navigation les éléments nécessaires à la mise à jour de l'estimé. Ces éléments sont calculés à partir de la comparaison des mesures du radioaltimètre et du modèle numérique de terrain. Ainsi, le filtre de recalage est un pré-traitement des mesures, dans le but d'intégrer l'information dans le filtre de navigation.

L'ordonnancement des calculs est décrit par la figure 4.2. Une des caractéristiques importantes du système est que la fréquence d'arrivée des mesures est généralement supérieure à la cadence de mise à jour du filtre de navigation. La dérive de la centrale inertielle est un phénomène lent, les constantes de temps caractéristiques sont largement supérieures à la seconde. Au contraire, la prise de mesure du radioaltimètre est très brève et peut être répétée plusieurs fois par seconde.

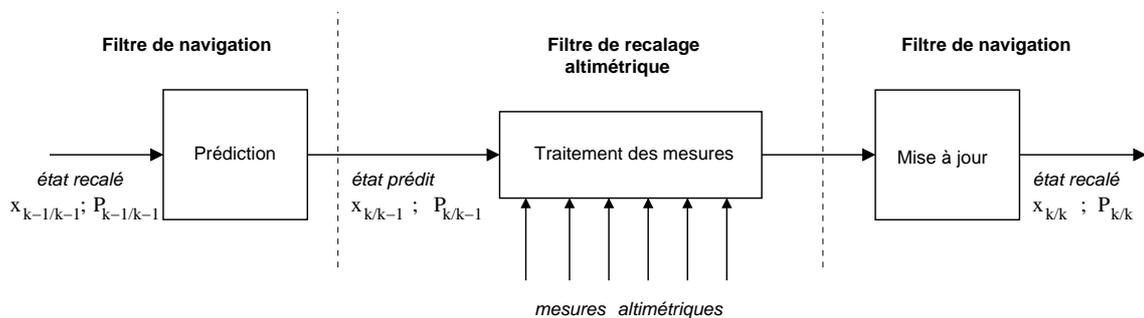


FIG. 4.2 – Flux de traitement des mesures

4.2 Filtre de Kalman étendu

4.2.1 Mise en œuvre

Le principe général de l'algorithme du filtre de Kalman étendu est décrit en §2.3.3. Il constitue une des méthodes de base pour le recalage altimétrique en phase de poursuite [27].

L'intégration du filtre de Kalman étendu dans le système de navigation hybridée est présentée par le schéma 4.3, et le pseudo-code de l'algorithme par la figure 4.4. Le déroulement d'un cycle de l'algorithme se décompose entre le filtre de la navigation et le filtre de recalage. L'étape de propagation de l'état est dédiée au filtre de navigation. Le filtre de recalage inclut une méthode d'interpolation du modèle numérique de terrain ainsi qu'une méthode de calcul du gradient local de la hauteur du terrain, autour de la position estimée. Cette pente intervient dans la détermination du gain de Kalman. Ce gain, ainsi que l'innovation (différence entre mesure radioaltimètre et mesure prédite à partir du modèle de terrain), est transmise en retour au filtre de navigation, pour mettre à jour l'estimation de l'état.

Ainsi, pour le filtre de Kalman étendu, l'approximation fondamentale est le passage du modèle numérique de terrain, fonction à deux dimensions stockée sous forme tabulée, à une forme analytique affine définie par la hauteur terrain et son gradient local.

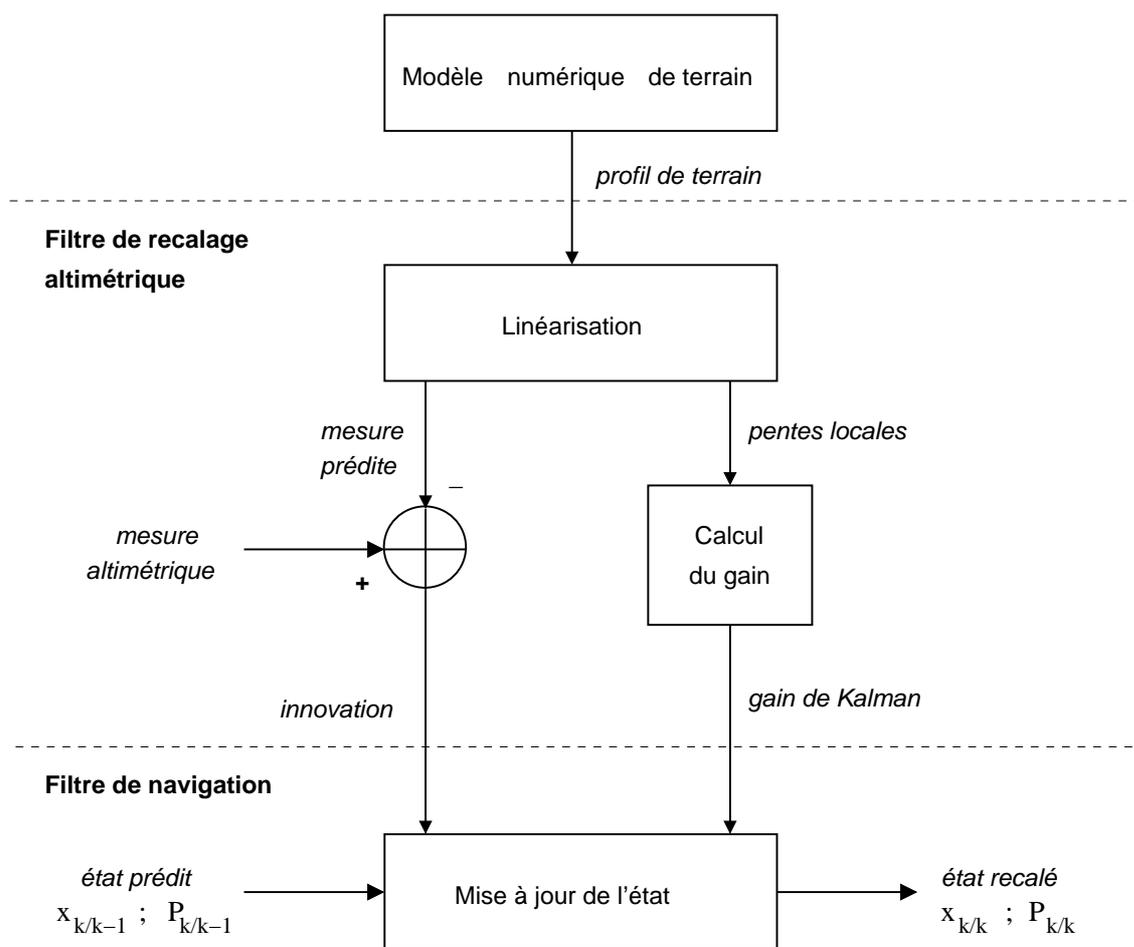


FIG. 4.3 – Intégration du filtre de Kalman étendu

Filtre de navigation :

(1) *Prédiction*

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} &= \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1} \\ \mathbf{P}_{k/k-1} &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1/k-1} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{Q}_k\end{aligned}$$

Filtre de recalage :

(2) *Linéarisation du terrain*

À partir du modèle de terrain, une procédure estime :

- La hauteur terrain $\hat{m}_k = h_k(\mathbf{x}_{k/k-1})$
- le gradient de hauteur terrain dans les directions Nord et Est $\{g_n, g_e\}$

on note $\mathbf{H}_k = - \begin{bmatrix} g_n & g_e & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

(3) *Calcul de l'innovation*

$$\xi_k = m_k - \hat{m}_k$$

(4) *Calcul du gain de Kalman*

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^\top \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^\top + \sigma_{r_k}^2 \right)^{-1}$$

Filtre de navigation :

(5) *Mise à jour de l'état*

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k/k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k \xi_k \\ \mathbf{P}_{k/k} &= \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1}\end{aligned}$$

FIG. 4.4 – Filtre de Kalman étendu pour le recalage altimétrique

4.2.2 Choix des paramètres

Dans une application pratique, le concepteur d'un algorithme basé sur le filtrage de Kalman étendu dispose de plusieurs voies d'optimisation des performances du filtre. Tout d'abord, la variance du bruit de mesure $\sigma_{r_k}^2$ peut être adaptée aux caractéristiques du radioaltimètre et au type de terrain. Ensuite, le choix de la méthode d'estimation du gradient du terrain est très influente sur les performances globales. Par exemple, l'article [27] met en avant une méthode de linéarisation stochastique, avec l'ajustement d'un plan au profil du terrain selon le critère des moindres carrés.

4.3 Unscented Kalman Filter

4.3.1 Mise en œuvre

Le principe général de l'*Unscented Kalman Filter* (ou *filtre de Kalman sans biais*) est décrit en annexe 2.3.4. Dans le cas du recalage altimétrique, plusieurs simplifications sont possibles pour améliorer l'efficacité de l'algorithme par rapport à sa version générique :

- Le modèle d'évolution de l'état est linéaire à bruit additif gaussien. L'étape de prédiction par *unscented transformation* n'est pas nécessaire. On utilise de façon classique :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} &= \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1} \\ \mathbf{P}_{k/k-1} &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1/k-1} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{Q}_k\end{aligned}\quad (4.1)$$

- Le bruit de mesure est additif gaussien. L'extension du vecteur d'état n'est pas nécessaire.
- La mesure dépend non linéairement de la position horizontale, linéairement de la position verticale et ne dépend pas des autres composantes du vecteur d'état. Nous avons appliquée le principe Rao-Blackwellisation au filtre UKF, tel que décrit en [7]. Cette méthode réduit le nombre de *sigma-points* nécessaires à 5 et uniquement dispersés selon 2 dimensions (plan de position horizontale).

Le pseudo-code de l'algorithme correspondant est présenté par la figure 4.6.

L'intégration de l'UKF dans le système de navigation hybridée est décrit par la figure 4.5. Le schéma est très similaire au filtre de Kalman étendu. Seul le principe de calcul du gain et de la prédiction de la mesure diffèrent. L'*Unscented transformation* remplace la linéarisation du terrain. Si le profil de terrain est parfaitement linéaire (un plan incliné), le filtre de Kalman et le *Unscented Kalman Filter* donnent numériquement le même résultats. Lorsque le terrain est non-linéaire, il a été montré [44] que l'*Unscented Kalman Filter* est plus robuste et plus précis que le filtre de Kalman étendu

4.3.2 Choix des paramètres

D'une part, la variance du bruit de mesure $\sigma_{r_k}^2$ permet d'ajuster le gain de façon analogue au filtre de Kalman étendu. Les coefficients α et β (cf. 2.3.4) permettent de contrôler la dispersion et le poids W^i des *sigma-points*. En particulier, le coefficient α permet de régler le filtre en fonction du caractère non-linéaire du terrain.

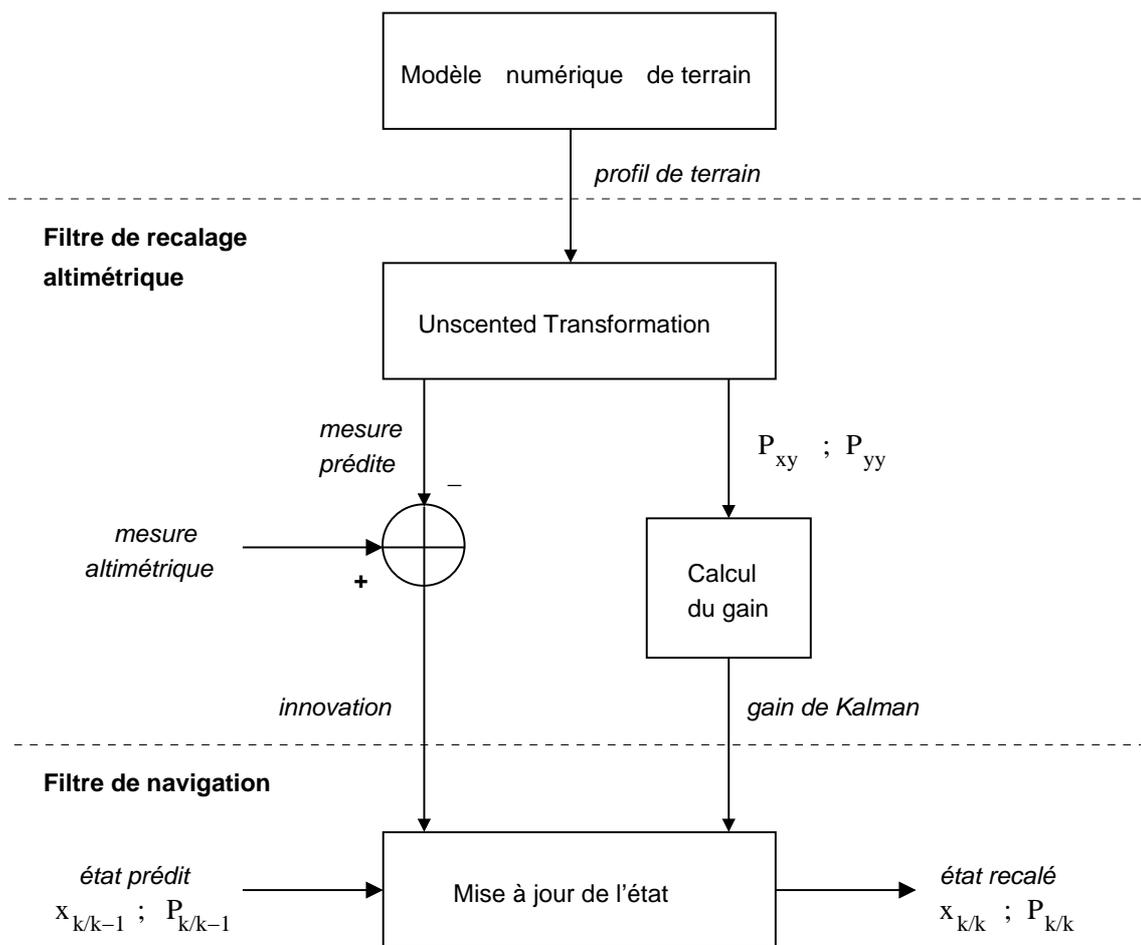


FIG. 4.5 – intégration de l'Unscented Kalman Filter

Filtre de navigation :

(1) Prédiction

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} &= \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1} \\ \mathbf{P}_{k/k-1} &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1/k-1} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{Q}_k\end{aligned}$$

Filtre de recalage :

(2) Partition de l'espace d'état

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^N \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^H \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{k/k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k/k-1}^H & \mathbf{L}_{k/k-1} \\ \mathbf{L}_{k/k-1}^\top & \mathbf{P}_{k/k-1}^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H} = \mathbf{P}_{k/k-1}^N - \mathbf{L}_{k/k-1}^\top \left(\mathbf{P}_{k/k-1}^H \right)^{-1} \mathbf{L}_{k/k-1}$$

(3) Calcul des sigma-points

$\mathbf{S}_{k/k-1}$ la décomposition de Choleski de la matrice $\mathbf{P}_{k/k-1}^H$ et $\mathbf{s}_{k/k-1}^{(i)}$ ses colonnes.

$$\mathcal{X}^{(i)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^H \pm \alpha (\sqrt{n_x + \lambda}) \mathbf{s}_{k/k-1}^{(i)} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^N \pm \alpha (\sqrt{n_x + \lambda}) \mathbf{L}_{k/k-1}^\top \left(\mathbf{P}_{k/k-1}^H \right)^{-1} \mathbf{s}_{k/k-1}^{(i)} \end{bmatrix}$$

(4) Prédiction de la mesure et calcul de l'innovation

$$\begin{aligned}\hat{m}^{(i)} &= h_k(\mathcal{X}^{(i)}) \\ \hat{m}_k &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_m^{(i)} \hat{m}^{(i)} \\ \xi_k &= m_k - \hat{m}_k\end{aligned}$$

(5) Calcul du gain de Kalman

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathbf{x},m} &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_c^{(i)} \left(\mathcal{X}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \right) \left(\hat{m}^{(i)} - \hat{m}_k \right) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H} \left(\mathbf{H}_k^N \right)^\top \end{bmatrix} \\ \sigma_m^2 &= \sum_{i=0}^{2n_x} W_c^{(i)} \left(\hat{m}^{(i)} - \hat{m}_k \right)^2 + \mathbf{H}_k^N \mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H} \left(\mathbf{H}_k^N \right)^\top + \sigma_{r_k}^2 \\ \mathbf{K}_k &= \frac{1}{\sigma_m^2} \mathbf{P}_{\mathbf{x},m}\end{aligned}$$

Filtre de navigation :

(6) Mise à jour de l'état

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k/k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k \xi_k \\ \mathbf{P}_{k/k} &= \mathbf{P}_{k/k-1} - \frac{1}{\sigma_m^2} \mathbf{P}_{\mathbf{x},m} \mathbf{P}_{\mathbf{x},m}^\top\end{aligned}$$

FIG. 4.6 – Unscented Kalman Filter pour le recalage altimétrique

4.4 Filtre à grille

4.4.1 Principe

L'algorithme est inspiré de celui décrit dans l'article [26]. L'idée centrale de l'algorithme est de construire la fonction de vraisemblance $p(\mathbf{m}_k | \mathbf{x}_k^H)$ sur une discrétisation du plan horizontal (une "grille"). Le vecteur \mathbf{m} contient l'ensemble des mesures prises entre la k^e et $(k + 1)^e$ mises à jour du filtre de navigation. À l'issue de cette étape, la fonction $p(\mathbf{m}_k | \mathbf{x}_k^H)$ est approximée par une fonction gaussienne, définie par sa moyenne et sa covariance. Ces deux paramètres sont alors utilisés pour mettre à jour le filtre de navigation.

Ainsi, l'approximation fondamentale est ici la réduction de la vraisemblance à une fonction gaussienne. Contrairement au filtre de Kalman étendu et à l'UKF, le nombre de mesures prises en compte à chaque cycle du filtre est ici un paramètre important.

4.4.2 Mise en œuvre

L'intégration dans le système de navigation hybridée est présentée par la figure 4.7. Le pseudo-code de l'algorithme est présenté par la figure 4.8.

4.4.3 Choix des paramètres

Cet algorithme présente un nombre important de paramètres de réglage qu'il s'agit d'adapter en fonction des conditions d'utilisation du filtre. Les paramètres principaux sont les suivants :

Taille de la grille La surface couverte par la grille dans le plan horizontal doit inclure le support de la densité d'état a priori. Dans notre schéma, cette densité est gaussienne, donc de support infinie. Dans la pratique, on pourra se limiter, par exemple, à un intervalle $[-3\sigma_{\delta_n}, +3\sigma_{\delta_n}] \times [-3\sigma_{\delta_e}, +3\sigma_{\delta_e}]$ avec σ_{δ_n} et σ_{δ_e} l'écart-type de la dérive en position selon respectivement les axes nord-sud et est-ouest. La taille de la grille est alors variable en fonction du temps et de la convergence de l'algorithme.

Résolution de la grille Ce choix influe sur le compromis entre précision et temps de calcul. En effet, le coût de calcul de l'algorithme est, en première approximation, proportionnel au nombre de nœuds de la grille, d'où la nécessité d'optimiser ce paramètre. Deux éléments permettent d'orienter ce choix. D'une part, la précision des méthodes de recalage altimétrique est intrinsèquement limitée par la résolution du modèle numérique de terrain utilisé. Il est donc inutile que la résolution de la grille soit très supérieure à celle du modèle numérique de terrain. D'autre part, il est souhaitable pour une application temps-réel que le temps de calcul pour une itération du filtre de recalage soit constant. Dans ce cas, le nombre de nœuds doit rester constant. Si on choisit une taille de grille adaptative, alors la résolution de grille est également variable.

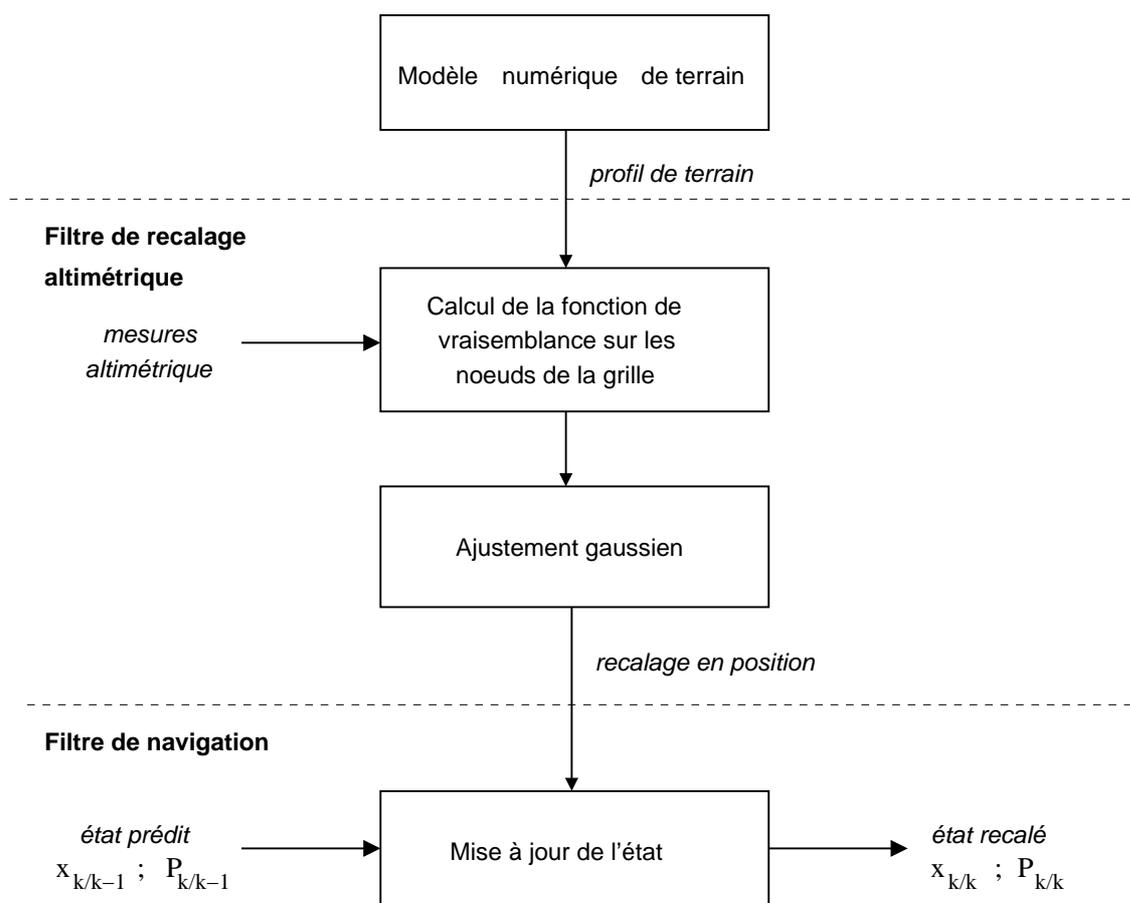


FIG. 4.7 – Intégration du filtre à grille

Filtre de navigation :

(1) *Prédiction*

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} &= \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1} \\ \mathbf{P}_{k/k-1} &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1/k-1} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{Q}_k\end{aligned}$$

Filtre de recalage :

(2) *Construction de la grille*

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^{H,(i)} &\text{ noeuds de la grille centrée autour de } \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^H \\ \sigma_{z,0}^2 &\text{ choisi très grand} \\ \Sigma_0^{(i)} &= 0\end{aligned}$$

(3) *Intégration des mesures*

Pour $j = 1..L$:

$$\begin{aligned}K_{z,j} &= \sigma_{z,j}^2 (\sigma_{z,j}^2 + \sigma_{r_k}^2)^{-1} \\ \xi_j^{(i)} &= m_{k,j} - h_{k,j}(\mathbf{x}_k^{(i)}) \\ z_j^{(i)} &= z_{j-1}^{(i)} + K_{z,j} \xi_j^{(i)} \\ \Sigma_j^{(i)} &= \Sigma_{j-1}^{(i)} + \xi_j^{(i)2} (\sigma_{z,j-1}^2 + \sigma_{r_k}^2)^{-1} \\ \sigma_{z,j}^2 &= (1 - K_{z,j}) \sigma_{z,j-1}^2\end{aligned}$$

(4) *Ajustement quadratique*

À partir de $\Sigma_L^{(i)}$, $\sigma_{z,L}^2$ et $z_L^{(i)}$ un ajustement quadratique permet d'estimer moyenne \mathbf{x}_v et covariance \mathbf{P}_v de la vraisemblance.

Filtre de navigation :

(5) *Mise à jour de l'état*

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_v &= \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}^\top (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}^\top + \mathbf{P}_v)^{-1} \\ \text{avec } \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_v (\mathbf{x}_v - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \\ \mathbf{P}_{k/k} &= \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_v \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}\end{aligned}$$

FIG. 4.8 – Filtre hybride grille / Kalman pour le recalage altimétrique

Nombre de mesures prises en compte à chaque cycle Il doit répondre à une triple contrainte. Premièrement, il est limité par la fréquence minimale de mise à jour du filtre de navigation, elle-même liée à la dynamique de l'erreur de navigation inertielle. L'erreur inertielle en position doit pouvoir être considérée comme constante sur la période d'accumulation des mesures nécessaire à la reconstruction de la fonction vraisemblance. Ainsi, l'évolution de l'erreur inertielle en position, c'est-à-dire l'effet de l'erreur inertielle en vitesse, doit être négligeable par rapport à la précision de recalage recherchée. Deuxièmement, si le nombre de mesures accumulées est trop faible, l'approximation gaussienne risque d'être médiocre (vraisemblance multimodale par exemple). Cet effet est majoré par un terrain présentant de faibles variations d'altitude. À l'inverse, si un grand nombre de mesures est accumulée, et notamment en terrain très accidenté, le support de la vraisemblance sera très concentré autour de son maximum. Dans de tel cas, la résolution de la grille peut s'avérer insuffisante. Il y a donc une logique à mettre en place, dans le but d'adapter la quantité d'information prise en compte à chaque cycle du filtre de recalage.

Variance du bruit de mesure De manière analogue au filtre de Kalman étendu et à l'UKF, $\sigma_{r_k}^2$ doit être adapté aux caractéristiques du radioaltimètre et au type de terrain.

4.5 Filtre particulaire gaussien

4.5.1 Principe

L'algorithme du filtre particulaire gaussien [31][32] diffère du filtre particulaire classique sur des points essentiels. Premièrement, la densité de probabilité a posteriori est approximée par une loi gaussienne et seules sa moyenne et sa matrice de covariance sont propagées récursivement au cours des itérations. Deuxièmement, l'ensemble des particules est ré-échantillonné à chaque itération selon une loi gaussienne. Ceci élimine le problème de dégénérescence et le besoin d'une procédure de ré-échantillonnage complexe. De plus, nous avons utilisé une procédure de Rao-Blackwellization pour réduire la dimension de l'espace dans lequel les particules sont échantillonnées au seul plan horizontal. Le principe général de la Rao-Blackwellization est exposé en §2.4.3.

Notre filtre particulaire gaussien pour la navigation recalée terrain est le suivant :

Étape de prédiction :

Étant donné que l'équation d'évolution est linéaire, cette étape est identique à celle d'un filtre de Kalman classique :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} &= \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \mathbf{P}_{k/k-1} &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{Q}_k\end{aligned}$$

Étape de correction :

Le vecteur d'état est divisé en deux parties : $\mathbf{x}_k^H = [\delta_{n,k}, \delta_{e,k}]$ le sous-vecteur de position horizontale et \mathbf{x}_k^N sa partie complémentaire. Suivant le même schéma, on note :

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k/k-1}^H & \mathbf{L}_{k/k-1} \\ \mathbf{L}_{k/k-1}^\top & \mathbf{P}_{k/k-1}^N \end{bmatrix}$$

• Échantillonnage :

(a) Les particules sont échantillonnées dans le plan horizontal selon la *proposal distribution* $q_k^H(\mathbf{x}^H)$:

$$\mathbf{x}_{k/k-1}^{H,(i)} \sim q_k^H(\mathbf{x}^H)$$

Nous avons choisi $q_k^H(\mathbf{x}^H) = \mathcal{N}_{\mathbf{x}^H}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^H, \alpha \mathbf{P}_{k/k-1}^H)$. Le paramètre $\alpha > 1$ contrôle la dispersion du nuage de particules. Le choix $\alpha = 1.4$ permet un bon équilibre entre précision et robustesse.

(b) Pour chaque particule, les paramètres de la densité de probabilité conditionnelle $p(\mathbf{x}_k^N | \mathbf{x}_k^{H,(i)}, \mathbf{M}_{k-1}) = \mathcal{N}_{\mathbf{x}_k^N}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^{N|H,(i)}, \mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H})$ sont déterminés par :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^{N|H,(i)} &= \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^N + \mathbf{K}_1(\mathbf{x}_{k/k-1}^{H,(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^H) \\ \mathbf{K}_1 &= \mathbf{L}_{k/k-1}^\top (\mathbf{P}_{k/k-1}^H)^{-1} \\ \mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H} &= \mathbf{P}_{k/k-1}^N - \mathbf{K}_1 \mathbf{P}_{k/k-1}^N \mathbf{K}_1^\top \end{aligned}$$

• Pondération :

(a) Pour chaque particule, l'innovation est calculé par :

$$\xi_k^{(i)} = m_k - h_k(\mathbf{x}_k^{(i)})$$

(b) Le poids des particules est calculé par :

$$w_k^{(i)} = \frac{p(\mathbf{x}_{k/k-1}^{H,(i)}) l(\mathbf{x}_{k/k-1}^{H,(i)})}{q_k^H(\mathbf{x}_{k/k-1}^{H,(i)})}$$

avec :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{k/k-1}^{H,(i)}) &= \mathcal{N}_{\mathbf{x}_{k/k-1}^H}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^H, \mathbf{P}_{k/k-1}^H) \\ l(\mathbf{x}_{k/k-1}^{H,(i)}) &= p(m_k | \mathbf{x}_{k/k-1}^{H,(i)}, \mathbf{M}_{k-1}) \\ &= \mathcal{N}_{\xi^{(i)}}(0, \mathbf{H}^N \mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H} (\mathbf{H}^N)^\top + \sigma_{r_k}^2) \end{aligned}$$

où $\mathbf{H}^N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

(c) En utilisant la relation linéaire entre \mathbf{x}_k^N et m_k , la densité de probabilité $p(\mathbf{x}_k^N | \mathbf{x}_k^{H,(i)}, \mathbf{M}_k) = \mathcal{N}_{\mathbf{x}_k^N}(\hat{\mathbf{x}}_k^{N|H,(i)}, \mathbf{P}_k^{N|H})$ a pour paramètres :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^{N|H,(i)} &= \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^N + \mathbf{K}_2 \xi_k^{(i)} \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H} \mathbf{H}^\top (\mathbf{H}^N \mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H} (\mathbf{H}^N)^\top + \sigma_{r_k}^2)^{-1} \\ \mathbf{P}_k^{N|H} &= \mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H} - \mathbf{K}_2 \mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H} \mathbf{K}_2^\top \end{aligned}$$

- *Calcul des estimés :*

Enfin, la densité de probabilité a posteriori $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_k)$ est approximée par une loi gaussienne $\mathcal{N}_{\mathbf{x}_k}(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k)$ dont les paramètres sont extraits de l'ensemble des particules pondérées :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \mathbf{x}_k^{(i)} \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k/k-1}^{H,(i)} \\ \mathbf{x}_k^{N|H,(i)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_k = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \left(\mathbf{x}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k \right) \left(\mathbf{x}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k \right)^\top + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 3} & \mathbf{P}_k^{N|H} \end{bmatrix}$$

4.5.2 Mise en œuvre

L'intégration du filtre particulaire gaussien dans le système de navigation hybridée est présentée par la figure 4.9. Le pseudo-code de l'algorithme est présenté par la figure 4.10.

4.5.3 Choix des paramètres

Le filtre particulaire gaussien offre un cadre très flexible. Les principales possibilités de réglages sont les suivantes :

Distribution d'importance La distribution d'importance $q_k^H(\mathbf{x}_k^H)$ la plus évidente dans notre schéma est la densité a priori $p(\mathbf{x}_k^H | \mathbf{M}_{k-1}) = \mathcal{N}_{\mathbf{x}_k^H}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}, \mathbf{P}_{k/k-1}^H)$. Dans un objectif de robustesse, il peut être intéressant d'élargir le support de la distribution d'importance, en choisissant par exemple $q_k^H(\mathbf{x}_k^H) = \mathcal{N}_{\mathbf{x}_k^H}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}, \alpha \mathbf{P}_{k/k-1}^H)$, avec $\alpha > 1$ un paramètre de réglage permettant d'ajuster la dispersion du nuage de particules.

Méthode d'échantillonnage Trois grandes classes de méthodes sont envisageables : échantillonnage pseudo-aléatoire, quasi-aléatoire, ou déterministe.

Les générateurs de nombres pseudo-aléatoires utilisés pour le filtrage particulaire sont traditionnellement basés sur des générateurs à congruence linéaire comme, par exemple, la fonction MATLAB *rand()*. La principale caractéristique de tels algorithmes est l'apparente indépendance des échantillons de la séquence. Cependant, cette caractéristique est inutile pour le filtre particulaire gaussien. Dans le but de minimiser l'erreur d'estimation, le point essentiel est de générer un ensemble de particules avec une distribution empirique aussi proche que possible de la distribution d'importance choisie. Ainsi, on pressent que les méthodes dites de *réduction de variance* peuvent ici apporter un bénéfice.

Parmi celles-ci, les générateurs quasi-aléatoires sont plus efficaces que les générateurs pseudo-aléatoires [38] et sont utilisés couramment pour les problèmes d'estimation d'intégrales par Monte-Carlo. Un générateur de Halton bidimensionnel [24] est un exemple possible de générateur uniforme primaire. Après transformation uniforme vers gaussien, le résultat d'un échantillonnage pour une distribution gaussienne deux dimensions est présenté par la figure 4.11, en comparaison avec un générateur pseudo-aléatoire classique.

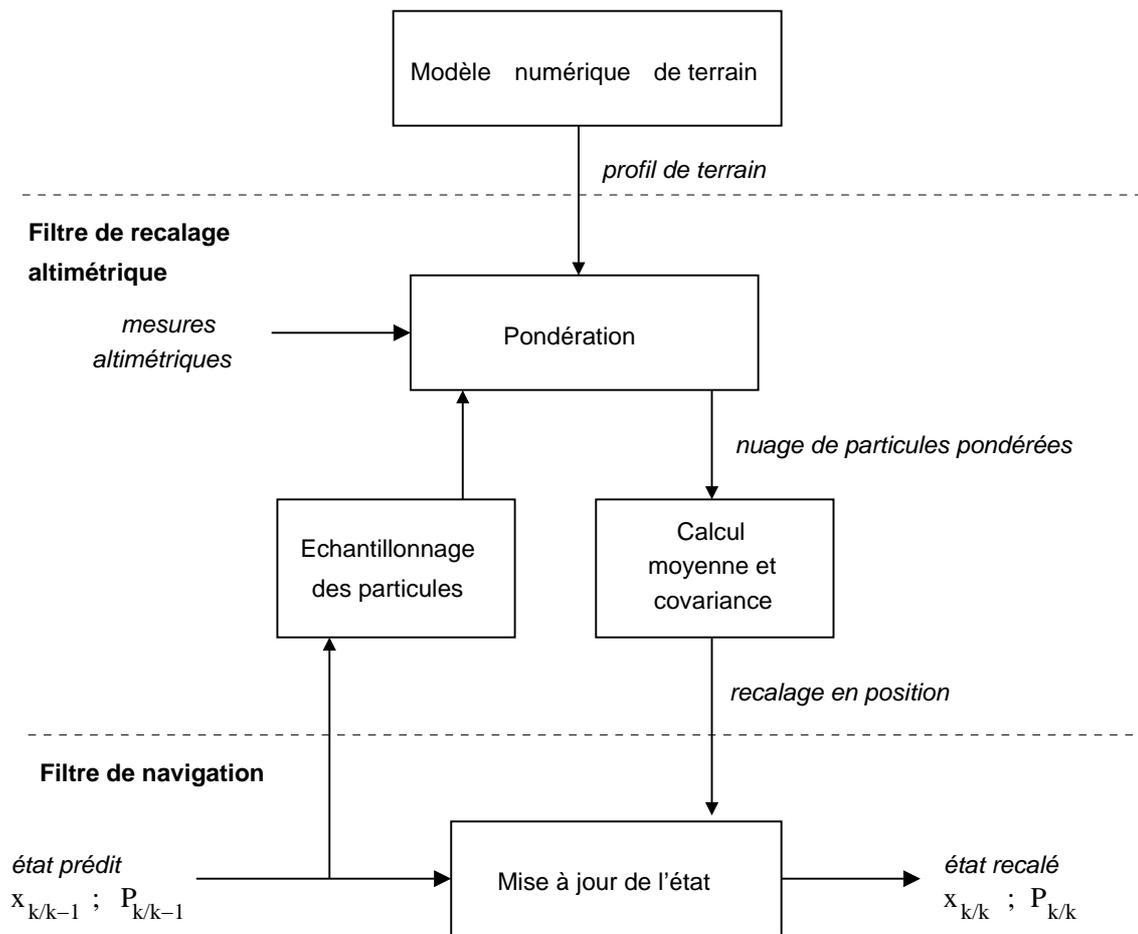


FIG. 4.9 – Intégration du filtre particulaire gaussien

Filtre de navigation :

$$(1) \text{ Prédiction} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1/k-1} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{Q}_k$$

Filtre de recalage :

(2) Partition de l'espace d'état

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^H \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^N \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{P}_{k/k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k/k-1}^H & \mathbf{L}_{k/k-1} \\ \mathbf{L}_{k/k-1}^\top & \mathbf{P}_{k/k-1}^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H} = \mathbf{P}_{k/k-1}^N - \mathbf{L}_{k/k-1}^\top \left(\mathbf{P}_{k/k-1}^H \right)^{-1} \mathbf{L}_{k/k-1}$$

(3) Échantillonnage des particules

$$\mathbf{x}_{k/k-1}^{H,(i)} \sim q_k^H(\mathbf{x}_H)$$

$$\mathbf{x}_{k/k-1}^{N|H,(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^N + \mathbf{L}_{k/k-1}^\top \left(\mathbf{P}_{k/k-1}^H \right)^{-1} \left(\mathbf{x}_{k/k-1}^{H,(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^H \right)$$

$$w_{k/k-1}^{(i)} = \mathcal{N}_{\mathbf{x}_H}^{(i)} \left(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^H, \mathbf{P}_{k/k-1}^H \right) / q_k^H(\mathbf{x}_H^{(i)})$$

(4) Prédiction de la mesure et pondération

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H} \left(\mathbf{H}_k^N \right)^\top \left(\mathbf{H}_k^N \mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H} \left(\mathbf{H}_k^N \right)^\top + \mathbf{R}_k \right)^{-1}$$

$$\mathbf{P}_k^{N|H} = \mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k^N \mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H}$$

$$\boldsymbol{\xi}_k^{(i)} = \mathbf{m}_k - h_k(\mathbf{x}_{k/k-1}^{(i)})$$

$$\mathbf{x}_k^{N|H,(i)} = \mathbf{x}_{k/k-1}^{N|H,(i)} + \mathbf{K}_k \boldsymbol{\xi}_k^{(i)}$$

$$\tilde{w}_k^{(i)} = w_k^{(i)} \mathcal{N}_{\boldsymbol{\xi}_k}^{(i)} \left(\mathbf{0}, \mathbf{H}_k^N \mathbf{P}_{k/k-1}^{N|H} \left(\mathbf{H}_k^N \right)^\top + \mathbf{R}_k \right)$$

$$w_k^{(i)} = \frac{\tilde{w}_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N \tilde{w}_k^{(i)}}$$

(5) Calcul moyenne et covariance du nuage de particules

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \mathbf{x}_k^{(i)} \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k/k-1}^{H,(i)} \\ \mathbf{x}_k^{N|H,(i)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_k = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \left(\mathbf{x}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k \right) \left(\mathbf{x}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k \right)^\top + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 3} & \mathbf{P}_k^{N|H} \end{bmatrix}$$

Filtre de navigation :

$$(6) \text{ Mise à jour de l'état} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_k$$

$$\mathbf{P}_{k/k} = \mathbf{P}_k$$

FIG. 4.10 – Filtre particulaire gaussien pour le recalage altimétrique

À l'extrême, on peut aussi imaginer une répartition des particules suivant un schéma entièrement déterministe, une grille uniforme par exemple, avec une pondération ad-hoc des particules.

Nombre de particules Le nombre N de particules est directement lié à la précision d'estimation, et donc est au cœur du compromis précision - coût de calcul. Pour des générateurs pseudo-aléatoires, la variance d'un estimateur particulière varie selon $1/N$. Pour des générateurs quasi-aléatoire, la convergence en fonction du nombre de particules est plus rapide.

Nombre de mesures De façon analogue au filtre à grille, le nombre de mesures qu'il est possible d'intégrer par cycle du filtre de recalage est limité par la dynamique de l'erreur inertielle. Par ailleurs, le phénomène de dégénérescence des particules (cf. §2.4.2.4) affecte la précision d'estimation des deux premiers moments de la densité a posteriori. Ce phénomène est d'autant plus marqué que l'information apportée par les mesures est importante (terrain accidenté et/ou bruit de mesure faible). Un critère de décision pour limiter le nombre de mesures prises en compte à chaque cycle est le *nombre efficace de particules* (cf. §2.4.2.4). Lorsque ce critère devient inférieur à un seuil fixé, le cycle courant du filtre doit être achevé.

Variance du bruit de mesure Le choix de la variance $\sigma_{r_k}^2$ du bruit de mesure doit être adapté aux caractéristiques du radio-altimètre et du modèle numérique de terrain.

4.6 Démarche de comparaison

4.6.1 Critères d'évaluation

Les critères listés ci-dessous correspondent aux performances opérationnelles recherchées pour un algorithme de recalage altimétrique. Ils servent de base pour bâtir une démarche de comparaison les algorithmes présentés dans le chapitre 3.

Vitesse de convergence Elle correspond à la capacité à délivrer une précision de positionnement maximum avec un nombre de mesures altimétriques limitées. Elle dépend intrinsèquement du relief du terrain et du bruit de mesure. Le ratio pente du terrain sur écart-type du bruit de mesure définit un rapport signal/bruit. Cette vitesse dépend également du caractère plus ou moins optimal de l'algorithme utilisé dans la pratique. Si le terrain est assimilable à un plan, réduisant le problème à un filtrage linéaire, alors le filtre de Kalman étendu et l'UKF sont optimaux (au sens de l'erreur quadratique moyenne). Le filtre à grille et le filtre particulière gaussien seront nécessairement moins performants. Une question importante est de déterminer sur quel type de terrain cette tendance s'inverse.

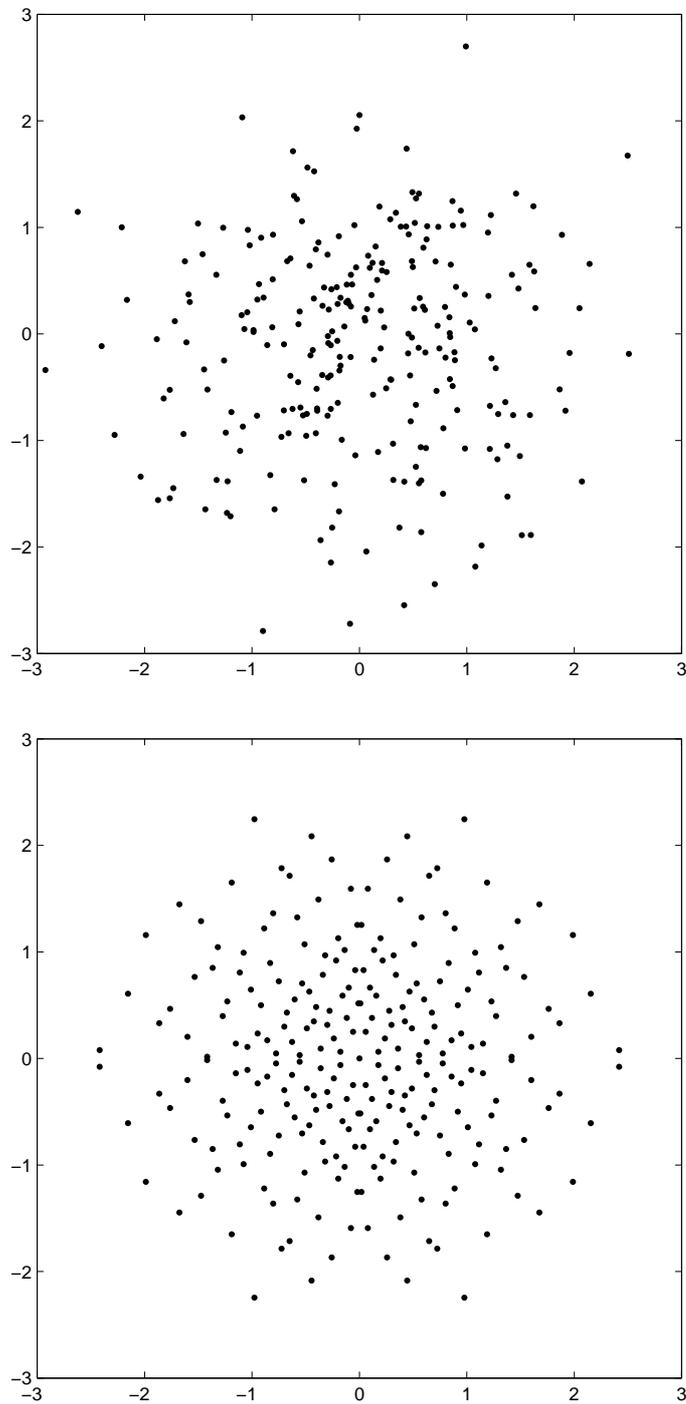


FIG. 4.11 – Comparaison entre un échantillonnage pseudo-aléatoire (en haut) et quasi-aléatoire (en bas) selon une loi gaussienne de dimension 2 ($N = 200$)

Précision en régime stabilisé Elle correspond à la capacité à délivrer une précision de positionnement maximum une fois que le filtre a atteint un régime stabilisé. La problématique est identique à celle de la vitesse de convergence : sur des terrains admettant une bonne approximation linéaire à l'échelle de la précision de positionnement, le filtre de Kalman étendu et l'UKF sont optimaux. Sur des terrains plus accidentés, cette approximation n'est plus valable, et on s'attend alors à ce que les filtres à grille et particulaire gaussien donnent de meilleurs résultats.

Robustesse aux non-linéarités Dans des scénarios de terrains fortement accidentés, présentant de fortes non-linéarités, il y a risque de divergence de l'estimation ("faux recalages"). Ce risque intervient principalement lors de la phase de convergence, dans laquelle l'incertitude sur la position est la plus importante. Afin de limiter le taux de divergence, on cherche donc à concevoir des algorithmes d'une part plus robuste aux non-linéarités, et d'autre part, à mettre en place des logiques de détection de divergence.

Comportement sur terrain plat Sur un scénario de terrain parfaitement plat, le recalage n'est possible que selon la verticale (recalage de l'altitude seulement). Pour le filtre de Kalman étendu ou pour l'UKF, cette configuration ne pose pas de problème, c'est un cas particulier de terrain linéaire. Par contre, pour le filtre particulaire gaussien, les cycles successifs échantillonnages / estimations des moments peuvent conduire à une dérive du filtre en position horizontale, alors même que l'information apportée par les mesures est nulle, et connue comme telle. Ainsi, il est important de quantifier ce phénomène, et éventuellement trouver des logiques pour s'en prémunir.

Coût de calcul Le coût de calcul est a priori très supérieur pour le filtre à grille et le filtre particulaire gaussien que pour le filtre de Kalman étendu et l'UKF. Le nombre de particules (ou de nœud de la grille) est un des paramètres essentiels. S'il ne fait pas sens de comparer filtre particulaire gaussien et filtre de Kalman étendu à iso-coût de calcul, il est par contre intéressant de connaître combien de particules sont nécessaires pour obtenir des performances comparables.

4.6.2 Définition des scénarios

À partir des critères définis dans le paragraphe précédent, nous proposons l'évaluation des différents filtres sur une progression constituée des scénarios suivants :

Terrain plat - recalage en altitude Ce scénario permet de vérifier la convergence des filtres selon l'axe vertical, et d'évaluer la stabilité de l'estimation dans le plan horizontal (filtre à grille et filtre particulaire gaussien).

Terrain plan (linéaire) - une mesure par cycle Ce scénario a pour objectif d'évaluer les performances du filtre à grille et du filtre particulaire gaussien sur un problème de filtrage linéaire. Il s'agit notamment de cerner le nombre de nœuds (respectivement le nombre de particules) nécessaires pour approcher le filtre de Kalman étendu, optimal dans cette

configuration. Pour ce scénario, le ratio pente du terrain sur écart-type du bruit de mesure est un paramètre prépondérant sur le comportement des filtres.

Terrain plan - multiples mesures par cycle - erreur de vitesse nulle Il s'agit de quantifier l'intérêt d'accumuler plusieurs mesures consécutives dans le cadre du filtre à grille et du filtre particulaire gaussien. L'objectif est ici de mettre au point les critères d'arrêt du cycle en fonction de la quantité d'information apportées par les mesures.

Terrain plan - multiples mesures par cycle - erreur de vitesse non nulle L'objectif est de quantifier la dégradation des performances en fonction de la dynamique de l'erreur en position. En effet, en cas d'erreur de vitesse non nulle, les mesures accumulées pendant un cycle ne correspondent pas exactement au même vecteur d'état, puisque celui-ci varie au cours du cycle. Le domaine de bon fonctionnement est ainsi limité, et on cherche ici à déterminer cette limite.

Terrain réel - phase de convergence Les paramètres essentiels définissant ce scénario sont l'incertitude initiale en position, l'erreur de vitesse initiale et la dureté du terrain. Les critères de performances associés sont le taux de divergence et le temps de convergence. Un second objectif de ce scénario est la mise au point des logiques de détection de divergence.

Terrain réel - régime stabilisé Une fois la convergence assurée, les critères d'évaluation sont la précision de navigation en fonction de la dureté du terrain, ainsi que le taux de divergence.

Chapitre 5

Mise en œuvre pratique et exemples de résultats

5.1 Outil de simulation numérique

5.1.1 Introduction

La simulation a pour but de permettre l'étude comparée de différents algorithmes de filtrage pour le problème de fusion des données de la centrale inertielle et du radio-altimètre. L'objectif est maintenant de tester différents algorithmes sur un large éventail de situations (trajectoires et profil de terrain) afin d'évaluer leur efficacité.

L'environnement de simulation a pour fonction de générer des données réalistes à l'entrée des algorithmes de filtrage. Ces données sont l'estimation (position, vitesse, attitude) d'un système inertiel et la mesure du radio-altimètre.

L'estimation inertielle est elle-même calculée à partir des mesures accélérométriques et gyrométriques qu'il faut par conséquent aussi générer.

5.1.2 Les éléments de la simulation

5.1.2.1 Architecture générale

La figure 5.1 présente les différents modules de l'environnement de simulation :

- Un premier module a pour fonction de générer les données de référence du vol : les positions successives de l'engin au cours de sa trajectoire, ainsi que les vitesses, accélérations, attitudes et vitesses de rotation correspondantes ;
- Le module des capteurs inertiels ;
- La module du radio-altimètre. Elle nécessite une carte altimétrique du terrain survolé ;
- Le module de filtrage lui-même. Il utilise aussi une carte altimétrique. Celle-ci peut être différente (en terme de précision et de résolution) de la carte utilisée pour la modélisation du radio-altimètre.

Chacun de ces modules sera détaillé dans les paragraphes à suivre.

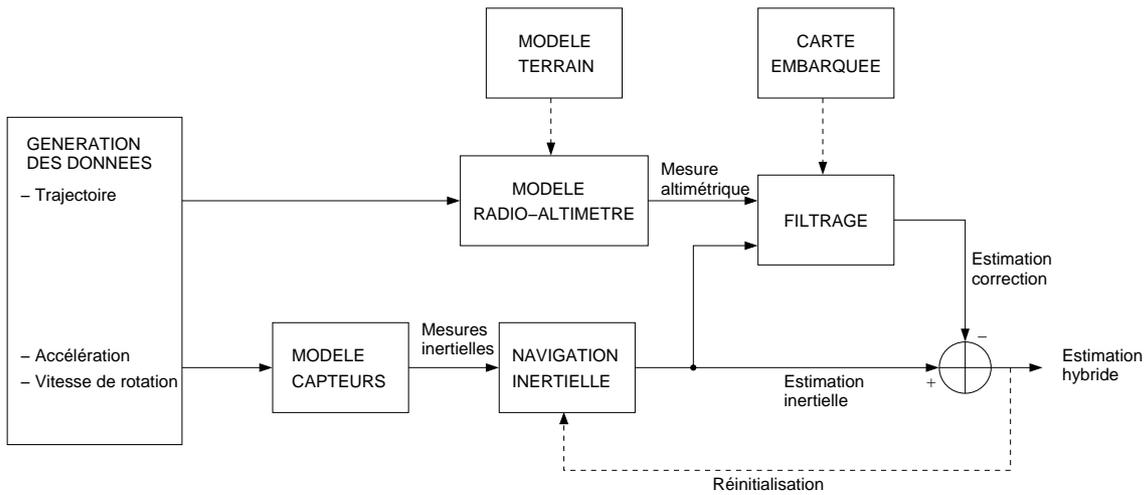


FIG. 5.1 – Les modules de la simulation

5.1.2.2 Définition d'une trajectoire

La trajectoire est définie par un ensemble de points de passages repérés par leurs coordonnées géographiques (*latitude, longitude, altitude*). Une loi de guidage est ensuite utilisée pour générer une commande d'accélération adéquate afin que l'engin atteigne successivement les points de passage (figure 5.2). Un point de passage est considéré comme atteint lorsque l'engin passe à une distance inférieure à une distance d_c .

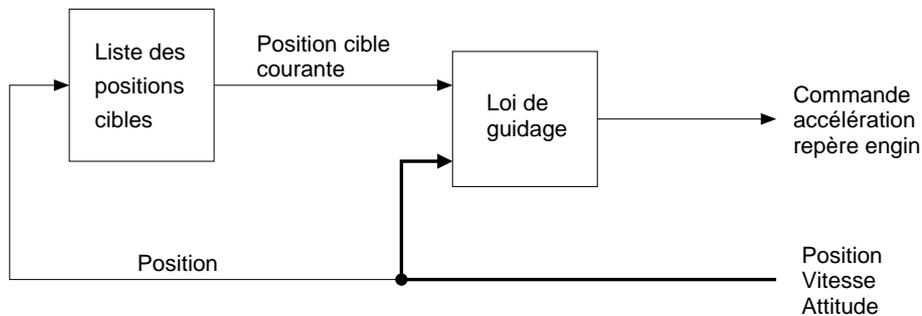


FIG. 5.2 – Formage d'une trajectoire par points de passage

5.1.2.3 Loi de guidage

La loi de guidage utilisée est une loi en poursuite pure dans le plan horizontal. Dans le plan vertical, l'altitude de l'engin est asservie au profil du terrain pour maintenir une distance engin-sol approximativement constante. La figure 5.3 présente un exemple de trajectoire générée.

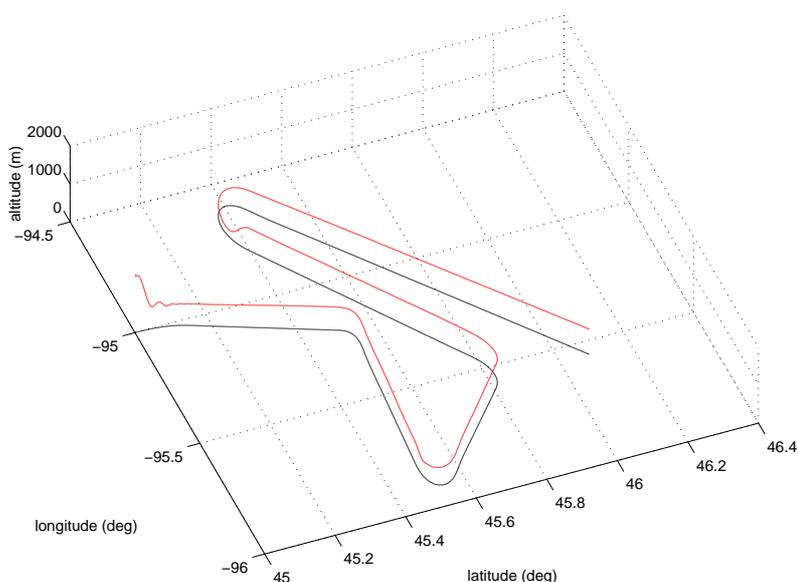


FIG. 5.3 – Exemple de trajectoire

5.1.2.4 Modèle pilote

On utilise un modèle de pilotage *Bank-To-Turn* très simplifié :

- La relation entre accélération commandée et accélération réalisée est approximée par un simple premier ordre :

$$a(s) = \frac{1}{1 + T_s} a_c(s)$$

- L'engin vole à incidence constante et sans dérapage ;
- Le roulis est fonction du facteur de charge F_c :

$$\cos(\phi) = \frac{g}{F_c}$$

À partir de l'accélération réalisée sont calculées :

- l'accélération spécifique mesurée par les accéléromètres, qui inclut les accélérations d'entraînement, de Coriolis et de gravitation.
- la vitesse dans le repère TGL et la position géographique par intégration.

L'attitude de l'engin est dérivée pour déduire les vitesses de rotation (p, q, r) mesurées par les gyromètres.

5.1.2.5 Modélisation des capteurs inertiels

La réponse des accéléromètres et les gyromètres est modélisée par l'équation suivante :

$$y_{mesure}(t) = y_{vrai}(t) + b + u(t)$$

avec b un biais et $u(t)$ un bruit blanc.

Les mesures inertielles sont effectuées à la cadence de 100Hz.

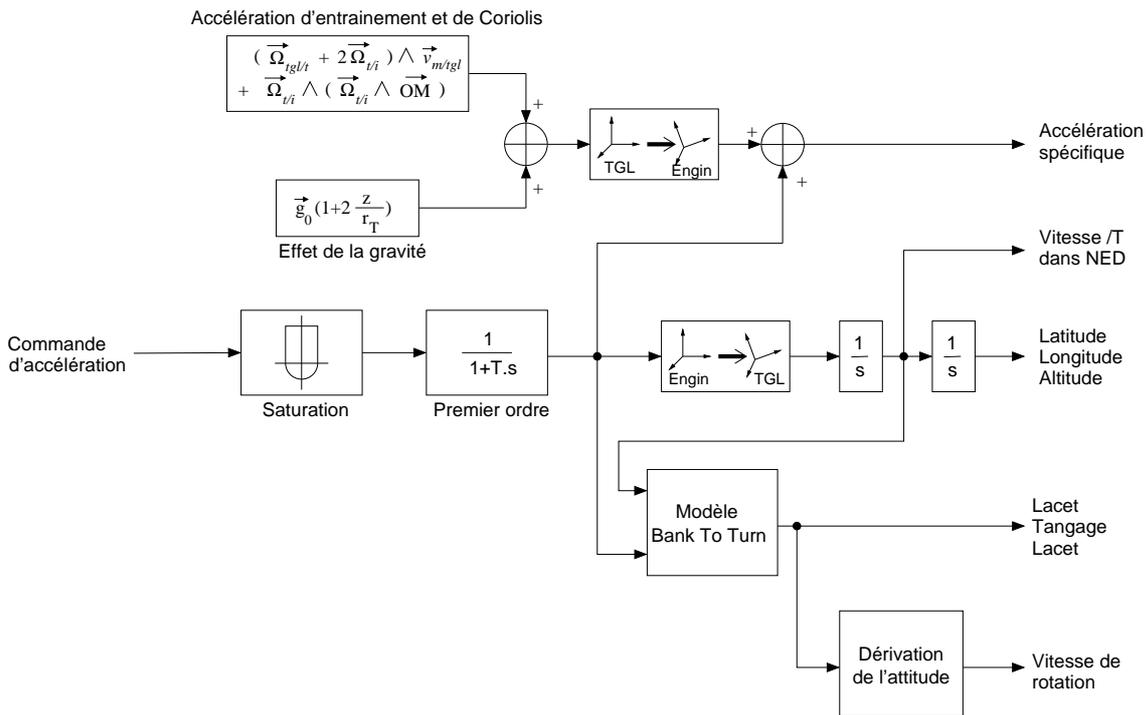


FIG. 5.4 – Modèle de génération des données inertielles

5.1.2.6 Navigation inertielle

Le module de navigation inertielle (figure 5.5) permet de calculer l'estimation inertielle de la position à partir des équations présentées en Annexe B.

5.1.2.7 Base de données altimétrique

Les cartes altimétriques utilisées sont des cartes avec une résolution d'une centaine de mètres (3 arc-secondes). L'ensemble du territoire américain est disponible gratuitement sur Internet [37], ce qui permet de disposer d'une grande variété de terrains pour tester l'algorithme de recalage altimétrique.

5.1.2.8 Interface graphique

Le logiciel de simulation inclut une interface graphique permettant de visualiser le fonctionnement du filtre particulaire. Sa mise au point étant dans un premier temps relativement empirique, il est indispensable de pouvoir surveiller visuellement l'évolution du nuage de particules (voir figure 5.6).

5.1.3 Détails d'implémentation

L'environnement de simulation ainsi que les différents filtres ont été programmés en langage C++. Ce choix a été essentiellement guidé par la rapidité du C++ par rapport

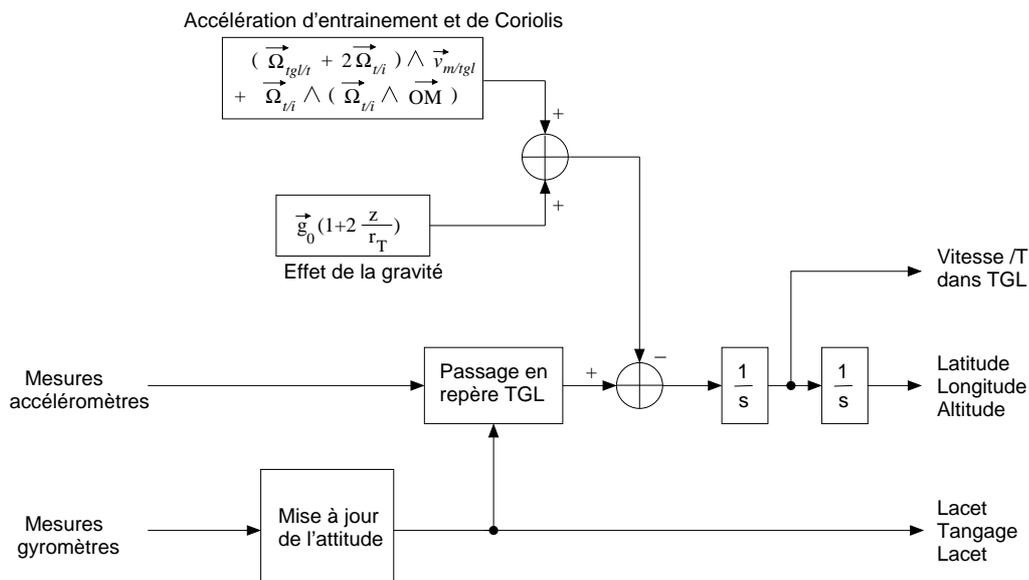


FIG. 5.5 – Schéma de calcul de la navigation inertielle

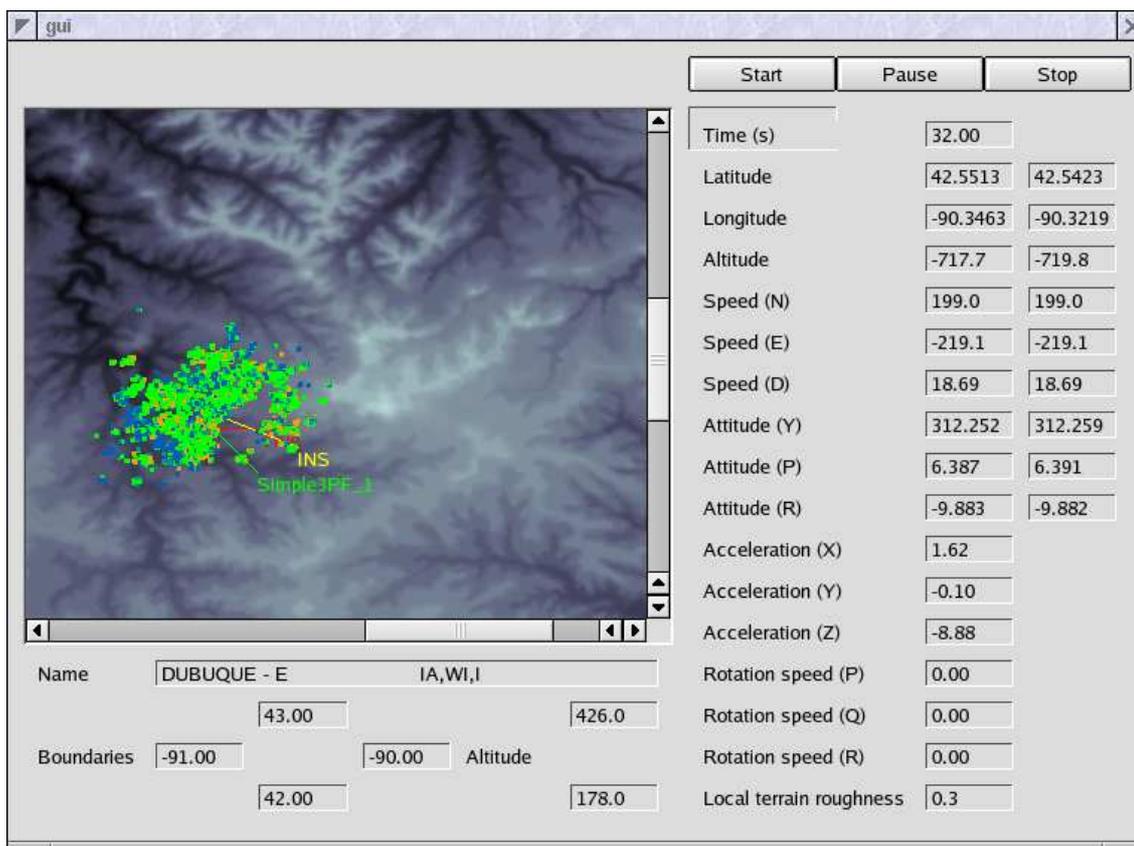


FIG. 5.6 – Aperçu du logiciel de simulation

à *MatLab/Simulink*, notamment pour le filtrage particulaire, très gourmand en calcul. Le gain en temps de calcul est supérieur à un facteur 10.

Le programme de simulation fait appel à un certain nombre de bibliothèques extérieures :

- *prng* : bibliothèque pour la génération de nombres aléatoires uniformes (licence *GNU-GPL*)

Site Web <http://statistik.wu-wien.ac.at/prng/>

- *unuran* : bibliothèque pour la génération de nombres aléatoires selon diverses densités de probabilité (licence *GNU-GPL*)

Site Web <http://statistik.wu-wien.ac.at/unuran/>

L'ensemble de la simulation a été développé sur une plateforme PC/Linux. Elle peut être portée facilement sur tout système de type Unix.

5.2 Exemple de résultats : filtre particulaire gaussien

5.2.1 Construction de la distribution d'importance

Il reste à choisir la distribution d'importance $q(\mathbf{x}^H)$ dont sont issues les particules. Une solution simple et peu coûteuse en calcul consiste à choisir la densité d'état a priori $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{M}_{k-1})$ (gaussienne) comme distribution d'importance. Cependant, dans le cas d'une mesure très informative (ou aberrante), la densité a posteriori (distribution d'importance optimale) peut être très éloignée de la densité a priori. L'idée est alors de faire une première approximation de la densité a posteriori avec une approche de type Kalman étendu puis de générer des particules dans cette distribution approchée. Il reste cependant à déterminer comment calculer au mieux les gains du filtre de Kalman étendu. Nous proposons ici une méthode originale simple à mettre en œuvre :

- (a) Génération de N particules selon la distribution a priori :

$$\mathbf{x}^{H,(i)} \sim \mathcal{N}_{\mathbf{x}_{k/k-1}^H}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^H, \mathbf{P}_{k/k-1}^H)$$

- (b) Modélisation linéaire de la composante $h(\cdot)$ de l'équation d'observation autour de la position $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^H$:

$$h(\mathbf{x}^H) = \mathbf{\Lambda}^\top (\mathbf{x}^H - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^H) + m_0 + \epsilon(\mathbf{x}^H)$$

puis identification des paramètres et par regression linéaire s'appuyant sur les particules. Le terme $\epsilon(\mathbf{x}^H)$ correspond à l'erreur de linéarisation. La solution minimisant l'erreur quadratique moyenne sur l'ensemble des particules est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{\Lambda}} \\ \hat{m}_0 \end{bmatrix} = (\mathbf{\Sigma}^\top \mathbf{\Sigma})^{-1} \mathbf{\Sigma}^\top \mathbf{h}$$

avec

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}^{H,(1)}) \\ \vdots \\ h(\mathbf{x}^{H,(i)}) \\ \vdots \\ h(\mathbf{x}^{H,(N)}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}^{H,(1)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^H)^\top & 1 \\ \vdots & \vdots \\ (\mathbf{x}^{H,(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^H)^\top & 1 \\ \vdots & \vdots \\ (\mathbf{x}^{H,(N)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}^H)^\top & 1 \end{bmatrix}$$

Le terme $(\Sigma^\top \Sigma)^{-1}$ n'a pas besoin d'être calculé explicitement, il peut être approché par :

$$(\Sigma^\top \Sigma)^{-1} \approx \frac{1}{N} \begin{bmatrix} (\mathbf{P}_{k+1/k}^H)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

La démarche proposée revient à déterminer l'approximation linéaire de $h(\cdot)$ qui minimise le critère :

$$J = \int \|\epsilon(\mathbf{x}^H)\|^2 p(\mathbf{x}_{k/k-1}^H) d\mathbf{x}_{k/k-1}^H$$

Ce critère est assez naturel : on cherche la meilleure approximation linéaire dans un voisinage défini par la densité de probabilité a priori.

- (c) Itération d'un filtre de Kalman étendu pour déterminer de manière approchée la moyenne de la densité d'état a posteriori :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k}^H = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^H + \mathbf{K}^H (m_k - m_0 - \Lambda \mathbf{x}_{k/k-1}^H)$$

avec \mathbf{K}^H le gain de Kalman calculé en utilisant la linéarisation de $h(\cdot)$ déterminée à l'étape précédente.

- (d) Il s'agit ensuite d'échantillonner les particules suivant la densité d'état a posteriori approximée. En toute rigueur, on doit régénérer un ensemble complet de particules. Nous proposons d'adopter un schéma plus simple en déplaçant globalement le nuage de particules de la quantité $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}^H - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^H$. Cela revient à générer des particules selon une densité de moyenne $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}^H$ et de covariance la covariance a priori. Cette stratégie, outre sa simplicité, peut être justifiée par un argument concernant la robustesse du filtre. Dans des cas de non-linéarité marquée, il est envisageable que l'approximation de la densité a posteriori par filtrage de Kalman étendu donne de mauvais résultats. Si les particules sont échantillonnées selon cette densité a posteriori, il se peut que l'ensemble des particules soient éloignées de l'état vrai. En choisissant de disperser les particules selon la covariance a priori, et non celle a posteriori (forcement plus faible), on assure une meilleure exploration de l'espace d'état et une plus grande capacité du filtre à rattraper des situations de divergence.

5.2.2 Évaluations comparées

Pour évaluer la pertinence des différentes approches, nous avons comparé 3 algorithmes :

(*Kalman*) : Un algorithme de filtrage de Kalman étendu simple. Le calcul du gain de Kalman est effectué selon la méthode présentée en §5.2.1.

(*FPG-Prior*) : Un algorithme de filtrage particulaire gaussien, utilisant la Rao-Blackwellisation, et dont la densité a priori est choisie comme densité d'importance. Le nombre de particules est fixé à 100.

(*FPG-Post*) : Un algorithme de filtrage particulaire gaussien, utilisant la Rao-Blackwellisation, et densité d'importance est obtenue par approximation de la densité a posteriori. Le nombre de particules est fixé à 100.

Les résultats sont basés sur 100 simulations. Chacune des simulations comporte 200 itérations. L'évaluation a été menée sur trois types de terrain de dureté croissante, pour apprécier le comportement des filtres dans des situations de faibles, moyennes et fortes non-linéarités.

Les résultats en termes de robustesse sont présentés dans le tableau 5.1. Nous avons considéré comme un cas d'échec le fait que l'erreur résiduelle d'estimation en position sorte du couloir de covariance à sur 5 itérations successives. La supériorité du filtre particulaire gaussien (*FPG-Prior* ou *FPG-Post*) apparaît de façon claire. Sur le terrain très accidenté, le filtre de Kalman classique accuse 90p.c. d'échec, alors que les deux filtres particuliers gaussiens maintiennent un faible taux d'échec.

Les figures 5.7, 5.8 et 5.9 présentent les résultats en termes de précision d'estimation de la position dans le plan horizontal (les échelles sont normalisées). Pour le terrain faiblement accidenté, les écarts entre les différents filtres ne sont pas significatifs, les non-linéarités étant faiblement marquées. Pour les terrains moyennement et fortement accidenté, les différences sont plus visibles. La comparaison entre le filtre de Kalman étendu et le filtrage particulaire gaussien simple (*FPG-Prior*) ne permet pas de dégager un avantage net de l'un par rapport à l'autre. Par contre le filtre particulaire gaussien avec une densité d'importance bien choisie (*FPG-Post*) offre de façon constante la meilleure précision. Ce dernier peut être considéré comme la synthèse d'une approche Kalman étendu (pour la pré-approximation de la densité de probabilité a posteriori) et d'une approche particulaire (les non-linéarités sont prises en compte lors de l'étape de pondération des échantillons).

	Kalman	FPG - Prior	FPG - Post
Très accidenté	90	14	13
Moyenn. accidenté	7	3	2
Faiblement accidenté	14	19	14

TAB. 5.1 – Taux d'échec (en pourcentage) des différents filtres pour les 3 types de terrains

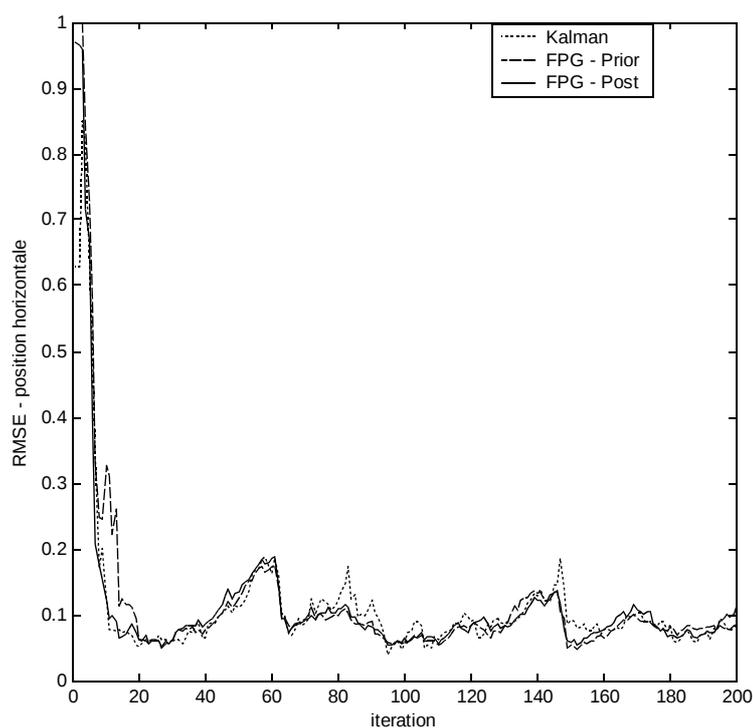


FIG. 5.7 – Comparaison des filtres en terrain très accidenté - Erreur d'estimation (RMSE) en position dans le plan horizontal (échelle normalisée)

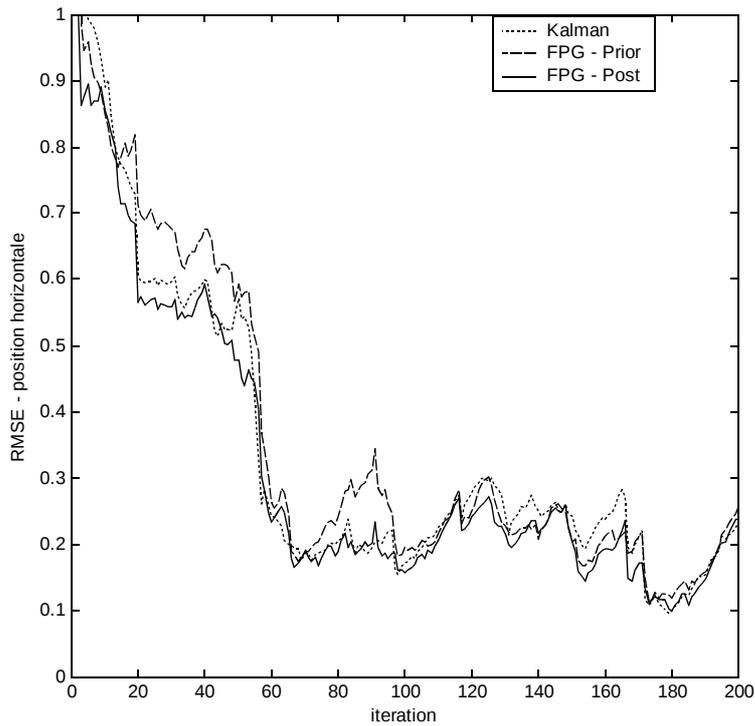


FIG. 5.8 – Comparaison des filtres en terrain moyennement accidenté - Erreur d'estimation (RMSE) en position dans le plan horizontal (échelle normalisée)

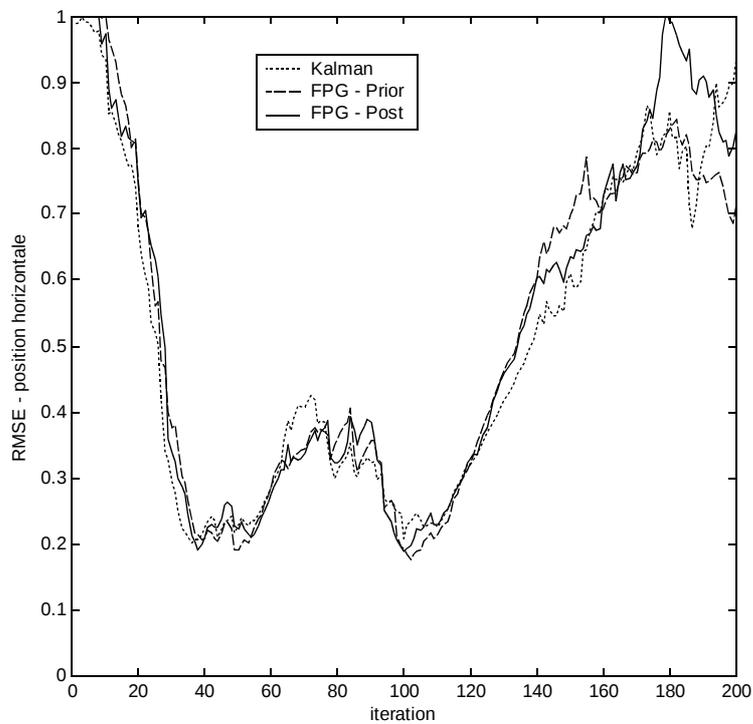


FIG. 5.9 – Comparaison des filtres en terrain faiblement accidenté - Erreur d'estimation (RMSE) en position dans le plan horizontal (échelle normalisée)

Conclusion générale

Contributions

Le premier objectif du projet était de mettre en œuvre une technique de filtrage particulière appliquée à un système de navigation hybridée caractérisé par un système principal de navigation inertielle et un procédé de recalage altimétrique continu. Dans cette axe, nous avons proposé un algorithme basé sur le filtre particulaire gaussien. Cet algorithme s'intègre harmonieusement dans l'architecture imposée par la conception globale du système de navigation. Le filtre particulaire gaussien est utilisé comme pré-traitement non-linéaire des mesures altimétriques, afin de mettre à jour le filtre de navigation.

Dans un second temps, le but était de comparer les mérites respectifs de la méthode classique EKF et de la technique de filtrage particulaire retenue pour différents contextes d'emplois plus ou moins dimensionnant en termes de filtrage. Ainsi, nous avons proposé la comparaison de quatre types de filtres : du filtre de Kalman étendu au filtre particulaire gaussien, en passant par l'*Unscented Kalman Filter* et un filtre à grille. Ces quatre filtres forment une progression logique dans l'approximation numérique du filtre optimal dans un cadre bayésien. En outre, nous avons défini des critères pertinents par rapport à l'application et un ensemble de scénarios d'évaluation, dans l'objectif d'apprécier comment les différents principes algorithmiques se traduisent en terme de performances utiles à l'application. De plus, un code de simulation a été réalisé. Il inclut la génération de données d'entrée réalistes, l'implémentation des différents filtres, ainsi que des outils de visualisation et d'exploitation des résultats.

Apports académiques

Cette thèse a fait l'objet de deux communications scientifiques [21][20] :

FLAMENT M., LACAVE J.-N., FLEURY G., DAVOUST M.-E., *Particle filtering for non-linear sensor fusion : application to terrain-aided navigation*, in Proceedings of the European Conference for Aerospace Sciences, Moscow (Russia), July 4-7, 2005.

FLAMENT M., FLEURY G., DAVOUST M.-E., *Particle filter and gaussian-mixture filter efficiency evaluation for terrain-aided navigation*, in Proceedings of 12th European Signal Processing Conference, pp. 605-608, Vienna (Austria), September 6-10, 2004.

Perspectives

Cette thèse a abouti à la définition d'un cadre de travail pour produire et interpréter des résultats dans l'objectif de comprendre et de quantifier les apports du filtrage particulière dans une problématique de recalage altimétrique. Une première perspective est donc tout naturellement la mise en œuvre effective de ce plan d'étude. Ce premier pas permettra de mieux cerner les avantages et inconvénients intrinsèques des méthodes particulières, non de façon générale, mais dans un cadre dédié à l'application.

Une deuxième perspective est ouverte par la grande flexibilité que permet le filtre particulière dans le choix de la méthode d'échantillonnage des particules. Dans notre application, la problématique induite par l'association du filtre de recalage avec le filtre de navigation est la suivante : à partir d'une densité d'état a priori gaussienne et de mesures dépendant non-linéairement de l'état, comment évaluer le plus précisément possible, et au moindre coût de calcul, les deux premiers moments de la densité d'état a posteriori ? Reformulée dans ce sens, la problématique se rapproche des travaux menés au sein du laboratoire par J.-I. De La Rosa De Vargas sur l'estimation de la densité de probabilité d'une mesure dans un cadre non-linéaire et non-gaussien [11].

Une troisième perspective est l'association au sein d'un même système de différentes méthodes de filtrage. Les quatre types de filtres décrits dans cette thèse utilisent comme support commun un ensemble de points dispersés dans l'espace d'état. C'est le cas de la linéarisation nécessaire au filtre de Kalman étendu, de l'*Unscented Kalman Filter* (les *sigma-points*), du filtrage à grille (noeuds) et du filtre particulière (particules). Ainsi, il serait envisageable de concevoir un placement de ces points permettant de faire fonctionner plusieurs des filtres sur le même support, et obtenir plusieurs estimateurs. L'avantage d'un support commun est de n'effectuer qu'une seule fois l'interpolation du modèle numérique de terrain en chacun des points. Ainsi, le coût de calcul de plusieurs estimateurs est inférieur à la somme des coûts des filtres pris isolément. Le problème qui se pose ensuite est de fusionner ces différents estimateurs pour mettre à jour le filtre de navigation.

Par ailleurs, les méthodes à grille ou particulière contraignent le concepteur de l'algorithme à un compromis entre performances et coût de calcul. En première approximation, les performances sont directement liées à la densité de noeud de calcul dans l'espace d'état. Pour le recalage altimétrique, le nombre de noeuds est donc proportionnelle à la surface du support de la densité de probabilité d'état marginale au plan horizontal. Ceci est particulièrement pénalisant à l'initialisation de l'algorithme, où le support de la densité d'état a priori est large. Dans une perspective plus large que le cadre de cette thèse, il serait intéressant d'étudier si des algorithmes utilisant la transformée de Fourier rapide peuvent être mis à profit pour optimiser le calcul de corrélation entre le modèle numérique de terrain et le profil mesuré. Dans un autre ordre d'idée, il faut se poser la question s'il serait possible de ne calculer qu'un contour des zones probables de l'espace d'état (iso-contour de la densité de probabilité), et non la densité complète comme fonction à deux dimensions.

Annexes

Annexe A

Équations de la navigation inertielle terrestre

A.1 Introduction

La navigation inertielle consiste à déterminer à tout instant :

- les coordonnées géographiques de l'engin (latitude L , longitude l , altitude z) ;
- sa vitesse, exprimée comme la vitesse de déplacement de l'engin par rapport à la surface terrestre dans le trièdre géographique local. On la note $\mathbf{v}_{m/t}^{tgl}$;
- son attitude, donnée par les trois angles ψ, θ, ϕ (lacet, tangage, roulis).

A.2 Intégration des accélérations

Une première étape consiste à relier l'incrément en vitesse à la mesure d'accélération. La vitesse recherchée est ici $\mathbf{v}_{m/t}^{tgl}$. On note sa dérivée temporelle $\dot{\mathbf{v}}_{m/t}^{tgl}$. Elle correspond à la projection dans le repère TGL du vecteur $\left[\frac{\partial \vec{v}_{m/t}}{\partial t} \right]_{tgl}$.

Relions ce vecteur à l'accélération de l'engin $\vec{a}_{m/i}$:

- en utilisant la formule de dérivation vectorielle ;

$$\left[\frac{\partial \vec{v}_{m/t}}{\partial t} \right]_{tgl} = \left[\frac{\partial \vec{v}_{m/t}}{\partial t} \right]_t + \vec{\omega}_{t/tgl} \wedge \vec{v}_{m/t} = \vec{a}_{m/t} - \vec{\omega}_{t/tgl} \wedge \vec{v}_{m/t}$$

- en appliquant maintenant la composition des accélérations ;

$$\vec{a}_{m/i} = \vec{a}_{m/t} + 2\vec{\omega}_{t/i} \wedge \vec{v}_{m/t} + \vec{\omega}_{t/i} \wedge (\vec{\omega}_{t/i} \wedge \overrightarrow{OM})$$

- et en introduisant l'accélération spécifique $\vec{a}_s = \vec{a}_{m/i} - \vec{g}$;

on obtient finalement :

$$\left[\frac{\partial \vec{v}_{m/t}}{\partial t} \right]_{tgl} = \vec{a}_s - \vec{\omega}_{t/tgl} \wedge \vec{v}_{m/t} - 2\vec{\omega}_{t/i} \wedge \vec{v}_{m/t} - \vec{\omega}_{t/i} \wedge (\vec{\omega}_{t/i} \wedge \overrightarrow{OM}) + \vec{g} \quad (\text{A.1})$$

La projection dans le repère TGL donne l'équation de base de la navigation inertielle :

$$\dot{\mathbf{v}}_{m/t}^{tgl} = \mathbf{C}_m^{tgl} \mathbf{a}_s^m - \boldsymbol{\omega}_{t/tgl}^{tgl} \wedge \mathbf{v}_{m/t}^{tgl} - 2\boldsymbol{\omega}_{t/i}^{tgl} \wedge \mathbf{v}_{m/t}^{tgl} - \boldsymbol{\omega}_{t/i}^{tgl} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{t/i}^{tgl} \wedge [\mathbf{OM}]^{tgl}) + \mathbf{g}^{tgl} \quad (\text{A.2})$$

Précisons les éléments apparaissant dans cette formule :

- \mathbf{C}_m^{tgl} est la matrice de passage du repère engin au trièdre géographique local. Elle s'exprime en fonction des angles d'attitude (ψ, θ, ϕ) :

$$\mathbf{C}_m^{tgl} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

Cette matrice est calculée à partir des mesures gyroscopiques. Les calculs seront détaillés dans la suite de ce document.

- $\vec{\omega}_{tgl/t}$ est le vecteur rotation du repère TGL par rapport au repère terrestre. Ce vecteur dépend de la vitesse $\vec{v}_{m/t}$:

$$\omega_{tgl/t}^{tgl} = \frac{1}{r_T - z} \begin{bmatrix} v_e \\ -v_n \\ -v_e \tan L \end{bmatrix}$$

- $\vec{\omega}_{t/i}$ est le vecteur rotation du repère terrestre par rapport au repère géocentrique. Il est orienté selon l'axe nord-sud de la Terre :

$$\vec{\omega}_{t/i} = \omega_{t/i} \vec{z}_t$$

$$\omega_{t/i}^{tgl} = \omega_{t/i} \begin{bmatrix} \cos L \\ 0 \\ -\sin L \end{bmatrix}$$

- Le terme $\vec{\omega}_{t/i} \wedge (\vec{\omega}_{t/i} \wedge \overrightarrow{OM})$ représente l'accélération centripète due à la rotation de la Terre sur elle-même. Le calcul des coordonnées dans le repère TLG conduit à :

$$\omega_{t/i}^2 (r_T - z) \cos L \begin{bmatrix} \sin L \\ 0 \\ \cos L \end{bmatrix}$$

- Le vecteur gravitation \vec{g} est donné dans l'hypothèse d'une Terre sphérique et homogène :

$$\mathbf{g}^{tgl} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0 \frac{r_T^2}{(r_T - z)^2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0 \left(1 + 2\frac{z}{r_T}\right) \end{bmatrix}$$

La deuxième étape consiste à déduire la position géographique du mobile par intégration de $\mathbf{v}_{m/t}^{tgl}$:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{1}{r_T} v_n \\ \dot{l} &= \frac{1}{r_T \cos L} v_e \\ \dot{z} &= v_d \end{aligned} \tag{A.3}$$

avec $\begin{bmatrix} v_n & v_e & v_d \end{bmatrix}^T = \mathbf{v}_{m/t}^{tgl}$

A.3 Intégration des vitesses de rotation

Dans l'expression A.1, il est nécessaire de connaître l'attitude du repère engin par rapport au trièdre géographique local (matrice \mathbf{C}_t^{tgl}). Cette information est déduite par intégration des mesures gyrométriques.

Relions $\dot{\mathbf{C}}_m^{tgl}$ au vecteur $\boldsymbol{\omega}_{m/i}^m$ mesuré par les gyromètres :

- Les colonnes de \mathbf{C}_m^{tgl} sont les coordonnées des vecteurs de base du repère engin dans le repère TGL :

$$\mathbf{C}_m^{tgl} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m^{tgl} & \mathbf{y}_m^{tgl} & \mathbf{z}_m^{tgl} \end{bmatrix}$$

- En appliquant la formule de dérivation vectorielle :

$$\left[\frac{\partial \vec{x}_m}{\partial t} \right]_{tgl} = \left[\frac{\partial \vec{x}_m}{\partial t} \right]_i + \vec{\omega}_{i/tgl} \wedge \vec{x}_m = \vec{\omega}_{m/i} \wedge \vec{x}_m - \vec{\omega}_{tgl/i} \wedge \vec{x}_m$$

- Puis en projetant sur le repère TGL :

$$\dot{\mathbf{x}}_m^{tgl} = \mathbf{C}_m^{tgl} \left(\boldsymbol{\omega}_{m/i}^m \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right) - \boldsymbol{\omega}_{tgl/i}^{tgl} \wedge \mathbf{x}_m^{tgl}$$

La même opération peut être effectuée sur \mathbf{y}_m^{tgl} et \mathbf{z}_m^{tgl} . La synthèse des résultats s'écrit sous la forme :

$$\dot{\mathbf{C}}_m^{tgl} = \mathbf{C}_m^{tgl} \boldsymbol{\Omega}_{m/i}^m - \boldsymbol{\Omega}_{tgl/i}^{tgl} \mathbf{C}_m^{tgl} \quad (\text{A.4})$$

où les matrices $\boldsymbol{\Omega}_{m/i}^m$ et $\boldsymbol{\Omega}_{tgl/i}^{tgl}$ sont construites à partir de $\boldsymbol{\omega}_{m/i}^m$ et $\boldsymbol{\omega}_{tgl/i}^{tgl}$ selon la forme :

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

A.4 Récapitulatif

Le système d'équations différentielles ci-dessous résument les résultats établis précédemment :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{m/t}^{tgl} &= \mathbf{C}_m^{tgl} \mathbf{a}_s^m - \left(\frac{1}{r_T - z} \begin{bmatrix} v_e \\ -v_n \\ -v_e \tan L \end{bmatrix} + 2\boldsymbol{\omega}_{t/i} \begin{bmatrix} \cos L \\ 0 \\ -\sin L \end{bmatrix} \right) \wedge \mathbf{v}_{m/t}^{tgl} \\ &\quad - \omega_{t/i}^2 (r_T - z) \cos L \begin{bmatrix} \sin L \\ 0 \\ \cos L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0 \left(1 + 2\frac{z}{r_T} \right) \end{bmatrix} \\ \dot{L} &= \frac{1}{r_T} v_n \\ \dot{l} &= \frac{1}{r_T \cos L} v_e \\ \dot{z} &= v_d \\ \dot{\mathbf{C}}_m^{tgl} &= \mathbf{C}_m^{tgl} \boldsymbol{\Omega}_{m/i}^m - \boldsymbol{\Omega}_{tgl/i}^{tgl} \mathbf{C}_m^{tgl} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Annexe B

Modèle de dérivation d'une centrale inertielle *strap-down*

B.1 Linéarisation de la dynamique de l'erreur

Il s'agit d'établir un modèle d'évolution linéaire de l'erreur commise par une centrale inertielle strap-down à partir des équations de la navigation terrestre vue en annexe A. Par la suite, l'erreur commise sur une grandeur g sera notée \tilde{g} :

$$g = \hat{g} + \tilde{g}$$

Soit g_j une grandeur régie par l'équation différentielle :

$$\dot{g}_j = f_j(g_1, \dots, g_N)$$

La linéarisation est obtenue par un développement au premier ordre en considérant les \tilde{g}_i faibles devant g_i :

$$\dot{\hat{g}}_j + \dot{\tilde{g}}_j = f_j(\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_N) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial g_i} \tilde{g}_i$$

D'où :

$$\boxed{\dot{\tilde{g}}_j = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial g_i} \tilde{g}_i} \quad (\text{B.1})$$

B.2 Dynamique de l'erreur de position

Appliquons B.1 à l'équation différentielle de la position A.3 :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\tilde{L}} &= \frac{1}{r_T} \tilde{v}_n \\ \dot{\tilde{l}} &= \frac{1}{r_T \cos L} \tilde{v}_e + \frac{v_e \tan L}{r_T \cos L} \tilde{L} \\ \dot{\tilde{z}} &= \tilde{v}_d \end{aligned}} \quad (\text{B.2})$$

On peut aussi exprimer l'erreur en latitude et en longitude, en distance plutôt qu'en écart angulaire :

$$\begin{aligned} \delta_L &= r_T \tilde{L} \\ \delta_l &= (r_T \cos L) \tilde{l} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Dans ce cas, la dynamique de (δ_L, δ_l) s'exprime par :

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_L &= r_T \dot{\tilde{L}} \\ \dot{\delta}_l &= (r_T \cos L) \dot{\tilde{l}} - (r_T \dot{\tilde{L}} \sin L) \tilde{l}\end{aligned}\tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_L &= \tilde{v}_n \\ \dot{\delta}_l &= \tilde{v}_e + \frac{v_e \tan L}{r_T} \delta_L - \frac{v_n \tan L}{r_T} \delta_l\end{aligned}\tag{B.5}$$

B.3 Dynamique de l'erreur de vitesse

Reprenons l'expression de la dérivée de la vitesse (A.2) :

$$\dot{\mathbf{v}}_{m/t}^{tgl} = \mathbf{C}_m^{tgl} \mathbf{a}_s^m - \boldsymbol{\omega}_{tgl/t}^{tgl} \wedge \mathbf{v}_{m/t}^{tgl} - 2\boldsymbol{\omega}_{t/i}^{tgl} \wedge \mathbf{v}_{m/t}^{tgl} - \boldsymbol{\omega}_{t/i}^{tgl} \wedge \left(\boldsymbol{\omega}_{t/i}^{tgl} \wedge [\mathbf{OM}]^{tgl} \right) + \mathbf{g}^{tgl}$$

En appliquant (B.1) :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}_{m/t}^{tgl} &= \tilde{\mathbf{C}}_m^{tgl} \mathbf{a}_s^m + \mathbf{C}_m^{tgl} \tilde{\mathbf{a}}_s^m \\ &\quad - \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{tgl/t}^{tgl} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{t/i}^{tgl} \right) \wedge \mathbf{v}_{m/t}^{tgl} \\ &\quad - \left(\boldsymbol{\omega}_{tgl/t}^{tgl} + 2\boldsymbol{\omega}_{t/i}^{tgl} \right) \wedge \tilde{\mathbf{v}}_{m/t}^{tgl} \\ &\quad - r_T w_{t/i}^2 \tilde{L} \begin{bmatrix} \cos(2L) \\ 0 \\ -\sin(2L) \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{g}}^{tgl}\end{aligned}\tag{B.6}$$

Précisons l'expression de chacun des termes de cette expression :

- $\tilde{\mathbf{C}}_m^{tgl}$ représente l'erreur sur l'attitude de l'engin. $\tilde{\mathbf{C}}_m^{tgl}$ peut s'exprimer au 1er ordre en fonction du micro-rotateur $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_n & \gamma_e & \gamma_d \end{bmatrix}^\top$:

$$\tilde{\mathbf{C}}_m^{tgl} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_d & \gamma_e \\ \gamma_d & 0 & -\gamma_n \\ -\gamma_e & \gamma_n & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C}_m^{tgl} = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{C}_m^{tgl}$$

- $\tilde{\mathbf{a}}_s^m$ est l'erreur sur la mesure de l'accélération ;
- $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{tgl/t}^{tgl}$ est l'erreur commise sur le vecteur rotation du repère TGL par rapport au repère terrestre :

$$\boldsymbol{\omega}_{tgl/t}^{tgl} = \frac{1}{r_T - z} \begin{bmatrix} v_e \\ -v_n \\ -v_e \tan L \end{bmatrix}$$

D'où, au 1er ordre :

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{tgl/t}^{tgl} = \frac{1}{r_T} \begin{bmatrix} \tilde{v}_e \\ -\tilde{v}_n \\ -\tilde{v}_e \tan L + \frac{v_e}{\cos^2 L} \tilde{L} \end{bmatrix} = \frac{1}{r_T} \begin{bmatrix} \tilde{v}_e \\ -\tilde{v}_n \\ -\tilde{v}_e \tan L + \frac{v_e}{r_T \cos^2 L} \delta_L \end{bmatrix}\tag{B.7}$$

- $\tilde{\omega}_{t/i}^{tgl}$ est l'erreur commise sur le vecteur rotation du repère terrestre par rapport au repère inertiel :

$$\omega_{t/i}^{tgl} = \omega_{t/i} \begin{bmatrix} \cos L \\ 0 \\ -\sin L \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\tilde{\omega}_{t/i}^{tgl} = \omega_{t/i} \begin{bmatrix} -\sin L \\ 0 \\ -\cos L \end{bmatrix} \tilde{L} = \frac{\omega_{t/i}}{r_T} \begin{bmatrix} -\sin L \\ 0 \\ -\cos L \end{bmatrix} \delta_L \quad (\text{B.8})$$

- $\tilde{\mathbf{g}}^{tgl}$ est l'erreur commise sur le vecteur gravitation :

$$\mathbf{g}^{tgl} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0 \left(1 + 2\frac{z}{r_T}\right) \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\tilde{\mathbf{g}}^{tgl} = -g_0 \tilde{z} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{r_T} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

B.4 Dynamique de l'erreur d'attitude

On cherche à connaître la dynamique de l'erreur d'attitude représentée par le micro-rotateur $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_n & \gamma_e & \gamma_d \end{bmatrix}^\top$.

D'après l'équation différentielle vérifiée par \mathbf{C}_m^{tgl} :

$$\dot{\mathbf{C}}_m^{tgl} = \mathbf{C}_m^{tgl} \Omega_{m/i}^m - \Omega_{tgl/i}^{tgl} \mathbf{C}_m^{tgl}$$

on déduit :

$$\dot{\tilde{\mathbf{C}}}_m^{tgl} = \tilde{\mathbf{C}}_m^{tgl} \Omega_{m/i}^m + \mathbf{C}_m^{tgl} \tilde{\Omega}_{m/i}^m - \tilde{\Omega}_{tgl/i}^{tgl} \mathbf{C}_m^{tgl} - \Omega_{tgl/i}^{tgl} \tilde{\mathbf{C}}_m^{tgl}$$

et en introduisant la définition du microrotateur $\tilde{\mathbf{C}}_m^{tgl} = \Gamma \mathbf{C}_m^{tgl}$:

$$\dot{\Gamma} \mathbf{C}_m^{tgl} + \Gamma \dot{\mathbf{C}}_m^{tgl} = \Gamma \mathbf{C}_m^{tgl} \Omega_{m/i}^m + \mathbf{C}_m^{tgl} \tilde{\Omega}_{m/i}^m - \tilde{\Omega}_{tgl/i}^{tgl} \mathbf{C}_m^{tgl} - \Omega_{tgl/i}^{tgl} \Gamma \mathbf{C}_m^{tgl}$$

$$\dot{\Gamma} \mathbf{C}_m^{tgl} + \Gamma \left(\mathbf{C}_m^{tgl} \Omega_{m/i}^m - \Omega_{tgl/i}^{tgl} \mathbf{C}_m^{tgl} \right) = \Gamma \mathbf{C}_m^{tgl} \Omega_{m/i}^m + \mathbf{C}_m^{tgl} \tilde{\Omega}_{m/i}^m - \tilde{\Omega}_{tgl/i}^{tgl} \mathbf{C}_m^{tgl} - \Omega_{tgl/i}^{tgl} \Gamma \mathbf{C}_m^{tgl}$$

Après simplification :

$$\dot{\Gamma} = \mathbf{C}_m^{tgl} \tilde{\Omega}_{m/i}^m \mathbf{C}_{tgl}^m - \tilde{\Omega}_{tgl/i}^{tgl} - \Omega_{tgl/i}^{tgl} \Gamma + \Gamma \Omega_{tgl/i}^{tgl}$$

Ce qui s'exprime sous la forme équivalente :

$$\dot{\gamma} = \mathbf{C}_m^{tgl} \tilde{\omega}_{m/i}^m - \tilde{\omega}_{tgl/i}^{tgl} - \Omega_{tgl/i}^{tgl} \gamma \quad (\text{B.10})$$

Dans cette expression intervient $\tilde{\omega}_{m/i}^m$ qui représente l'erreur sur la mesure gyrométrique.

B.5 Expression sous forme matricielle

L'ensemble des résultats sur l'évolution de l'erreur de l'estimation inertielle peut se mettre sous la forme matricielle.

En posant $\mathbf{x} = [\delta_L \ \delta_l \ \tilde{z} \ \tilde{v}_n \ \tilde{v}_e \ \tilde{v}_d \ \gamma_n \ \gamma_e \ \gamma_d]^\top$ le vecteur des erreurs et $\mathbf{v} = [\tilde{a}_x \ \tilde{a}_y \ \tilde{a}_z \ \tilde{\omega}_x \ \tilde{\omega}_y \ \tilde{\omega}_z]^\top$ le vecteur des erreurs inertielles :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}$$

Les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont explicitées page ci-contre.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{v_e \tan L}{r_T} & -\frac{v_n \tan L}{r_T} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 -\frac{v_e^2}{r_T^2 \cos^2 L} - \frac{2\omega_{t/i} v_e \cos L}{r_T} - \omega_{t/i}^2 \cos(2L) & 0 & 0 & \frac{v_d}{r_T} & -\frac{2v_e \tan L}{r_T} - 2\omega_{t/i} \sin L & \frac{v_n}{r_T} & 0 & a_s^d & -a_s^e \\
 \frac{v_e v_n}{r_T^2 \cos^2 L} - \frac{2\omega_{t/i} (v_d \sin L - v_n \cos L)}{r_T} & 0 & 0 & \frac{v_e \tan L}{r_T} + 2\omega_{t/i} \sin L & \frac{v_d + v_n \tan L}{r_T} & \frac{v_e}{r_T} + 2\omega_{t/i} \cos L & -a_s^d & 0 & a_s^n \\
 \frac{2\omega_{t/i} v_e \sin L}{r_T} + \omega_{t/i}^2 \sin(2L) & 0 & \frac{2g_0}{r_T} & -\frac{v_n}{r_T} & -\frac{v_e}{r_T} - 2\omega_{t/i} \cos L & 0 & a_s^e & -a_s^n & 0 \\
 \hline
 \frac{\omega_{t/i} \sin L}{r_T} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r_T} & 0 & 0 & \omega_{tgl/i}^d & -\omega_{tgl/i}^e \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_T} & 0 & 0 & -\omega_{tgl/i}^d & 0 & \omega_{tgl/i}^n \\
 \frac{v_e}{r_T^2 \cos^2 L} + \frac{\omega_{t/i} \cos L}{r_T} & 0 & 0 & 0 & \frac{\tan L}{r_T} & 0 & \omega_{tgl/i}^e & -\omega_{tgl/i}^n & 0
 \end{array} \right]$$

avec : $\omega_{tgl/i}^n = \frac{v_e}{r_T - z} + \omega_{t/i} \cos L$ $\omega_{tgl/i}^e = -\frac{v_n}{r_T - z}$ $\omega_{tgl/i}^d = -\frac{v_e \tan L}{r_T - z} - \omega_{t/i} \sin L$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c}
 \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\
 \mathbf{C}_{tgl}^m & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\
 \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{tgl}^m
 \end{array} \right]$$

(B.11)

Bibliographie

- [1] D.L. Alpaugh and H.W. Sorenson. Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17(4) :439–448, August 1972.
- [2] M.S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp. A tutorial on particle filters for on-line nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50 :174–88, February 2002.
- [3] N. Bergman. *Recursive Bayesian Estimation - Navigation and Tracking Applications*. PhD thesis, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden, 1999.
- [4] N. Bergman, L. Ljung, and F. Gustafsson. Terrain navigation using Bayesian statistics. Technical Report LITH-ISY-R-2139, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden, 1999.
- [5] Niclas Bergman, Ljung Lennart, and Gustafsson Fredrik. Point-mass filter and cramer-rao bound for terrain-aided navigation. In *Proceedings of the 36th IEEE conference on decision and control (CDC)*, pages 565–570, 1997.
- [6] D.D. Boozer, M.K. Lau, and J.R. Fellerhoff. The AFTI/F-16 terrain-aided navigation system. In *Proceedings of the IEEE National Aerospace and Electronics Conference - NAECON*, pages 351–357. IEEE, May 1985.
- [7] M. Briers, S. Maskell, and R. Wright. A Rao-Blackwellised unscented Kalman filter. In *Proceedings of 6th International Conference on Information Fusion*, volume 1, pages 55–61, 2003.
- [8] R. Chen and J.S. Liu. Mixture Kalman filter. *Journal of the Royal Statistical Society*, 62(3) :493–508, 2000.
- [9] K. Dahia. *Nouvelles méthodes en filtrage particulière - Application au recalage de navigation inertielle par recalage altimétrique*. PhD thesis, ONERA / Université Joseph Fourier, France, 2005.
- [10] K. Dahia, C. Musso, P. Dinh Tuan, and J.P. Guibert. Application of the kalman-particle kernel filter to the updated inertial navigation system. In *Proceedings of 12th European Signal Processing Conference*, pages 601–604, September 2004.

- [11] J.-I. De La Rosa de Vargas. *Estimation de la densité de probabilité d'une mesure dans un cadre non-linéaire, non-gaussien*. PhD thesis, SUPELEC, Services des Mesures, 2002.
- [12] P. Del Moral. *Résolution particulière des problèmes d'estimation et d'optimisation non-linéaire*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, France, 1994.
- [13] P. Del Moral, J-C. Noyer, G. Rigal, and G. Salut. Traitement particulière du signal radar : détection, estimation et reconnaissance de cibles aériennes. Technical Report 92495, LAAS, 1993.
- [14] A. Doucet and C. Andrieu. Particle filtering for partially observed Gaussian state space models. Technical Report CUED/FINFENG/TR393, Departement of Engineering, University of Cambridge, 2000.
- [15] A. Doucet, S.J. Godsill, and C. Andrieu. On sequential simulation-based methods for Bayesian filtering. *Statistics and Computing*, 10(3) :197–208, 2000.
- [16] A. Doucet, N.J. Gordon, and V. Krishnamurphy. Particle filter for state estimation of jump Markov linear systems. Technical Report CUED/FINFENG/TR359, Departement of Engineering, University of Cambridge, 1999.
- [17] Arnaud Doucet, Nando De Freitas, Kevin Murphy, and Stuart Russel. Rao-backwellised particle filtering for dynamic Bayesian networks. In *Proceedings of the Sixteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 176–183, 2000.
- [18] H. Durrant-Whyte. A critical review of the state-of-the-art in autonomous land vehicle systems and technology. Technical Report SAND2001-3685, Sandia National Laboratories, 2001.
- [19] P. Faurre. *Navigation inertielle optimale et filtrage statistique*. Dunod, 1971.
- [20] M. Flament, G. Fleury, and M.E. Davoust. Particle filter and gaussian-mixture filter efficiency evaluation for terrain-aided navigation. In *Proceedings of 12th European Signal Processing Conference*, pages 605–608, September 2004.
- [21] M. Flament, J.N. Lacave, G. Fleury, and M.E. Davoust. Particle filtering for non-linear sensor fusion : application to terrain-aided navigation. In *Proceedings of the European Conference for Aerospace Sciences*, July 2005. CDRom edition.
- [22] J.P. Golden. Terrain contour matching (TERCOM) : a cruise missile guidance aid. *Image Processing for Missile Guidance*, 238 :10–18, 1980.
- [23] N. Gordon, D.J. Salmond, and A.F.M. Smith. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *IEEE Proceedings*, 2(10) :107–113, 1993.
- [24] J.H. Halton. On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. *Numerische Mathematik*, 2 :84–90, 1960.
- [25] A.G. Henley. Terrain aided navigation - Current status, techniques for flat terrain and reference data requirements. In *Position, Location and Navigation Symposium Record*, pages 608–615. IEEE, March 1990.

- [26] J. Hollowell. HELI/SITAN : A terrain referenced navigation algorithm for helicopters. In *Position, Location and Navigation Symposium Record*, pages 616–625. IEEE, March 1990.
- [27] L. Hostetler and R. Andreas. Nonlinear Kalman filtering techniques for terrain-aided navigation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(3) :315–323, 1983.
- [28] N. Johnson, W. Tang, and G. Howell. Terrain aided navigation using maximum a posteriori estimation. In *Position, Location and Navigation Symposium Record*, pages 464–469. IEEE, March 1990.
- [29] S.J. Julier and Uhlmann J.K. The scaled unscented transformation. In *Proceedings of the 2002 American Control Conference*, pages 4555–4559, 2002.
- [30] R. E Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82 :35–45, 1960.
- [31] J.H. Kotecha and P.M. Djuric. Gaussian particle filtering. In *Proceedings of Workshop on Statistical Signal Processing*, pages 429–432. IEEE, August 2001.
- [32] J.H. Kotecha and P.M. Djuric. Gaussian particle filtering. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 51(10) :2592–2601, October 2003.
- [33] J. Metzger, K., J. Wendel, and G.F. Trommer. Hybrid terrain referenced navigation using a bank of Kalman filters and a comparison technique. In *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, August 2004. DVDROM edition.
- [34] J. Metzger, K. Wisotzky, J. Wendel, and G.F. Trommer. Sigma-point filter for terrain referenced navigation. In *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, August 2005. DVDROM edition.
- [35] C. Musso and N. Oudjane. Particle methods for multimodal filtering. Application to terrain navigation. In *Target Tracking : Algorithms and Applications (Ref. No. 1999/090, 1999/215)*, IEE Colloquium on, pages 6/1–6/5, 1999.
- [36] C. Musso and N. Oudjane. Recent particle filter applied to terrain navigation. In *Proceedings of the Third International Conference on Information Fusion*, volume 2, pages 26–33, July 2000.
- [37] NASA/NGA. Site web <http://srtm.usgs.gov/>.
- [38] H. Niederreiter. *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*. SIAM, 1992.
- [39] P. Nordlund. *Sequential Monte Carlo Filters and Integrated Navigation*. PhD thesis, Division of Automatic Control, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden, 2002.
- [40] N. Priest. Terrain referenced navigation. In *Position, Location and Navigation Symposium Record*, pages 482–489. IEEE, March 1990.
- [41] J.C. Radix. *Systèmes inertiel à composants liés «strap-down»*. CÉPADUÈS ÉDITIONS, 1993.
- [42] H.W. Sorenson. *Kalman Filtering : Theory and Applications*. IEEE Press, 1985.

- [43] R. Van Der Merwe, A. Doucet, N. De Freitas, and E. Wan. The Unscented Particle Filter. Technical Report CUED/F-INFENG/TR 380, Department of Engineering, University of Cambridge, 2000.
- [44] E. Wan and R. van der Merwe. The Unscented Kalman Filter for nonlinear estimation. In *Proceedings of Symposium 2000 on Adaptive Systems for Signal Processing, Communication and Control*, pages 153–158. IEEE, 2000.