



HAL
open science

Méthodes à haute résolution pour antennes non uniformes

Carine El Kassis

► **To cite this version:**

Carine El Kassis. Méthodes à haute résolution pour antennes non uniformes. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paris Sud - Paris XI, 2009. Français. NNT : . tel-00447488

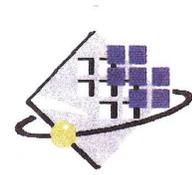
HAL Id: tel-00447488

<https://theses.hal.science/tel-00447488>

Submitted on 15 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° D'ORDRE :

UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI
Faculté des Sciences d'Orsay

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : physique

École Doctorale « Sciences et Technologies de l'Information,
des Télécommunications et des Systèmes »

Présentée par : Carine EL KASSIS

**Méthodes à haute résolution pour antennes non
uniformes**

Soutenue le 08 décembre 2009 devant les membres du jury :

M.	ADAM	Jean-Luc	Examineur
M.	DELMAS	Jean-Pierre	Rapporteur
M.	FLEURY	Gilles	Directeur de thèse
M.	HAARDT	Martin	Rapporteur
Mme	MARCOS	Sylvie	Présidente du jury
M.	MOKBEL	Chafic	Co-directeur de thèse
M.	PICHERAL	José	Co-encadrant

*“And I say that life is indeed a darkness save when there is urge.
And all urge is blind save when there is knowledge,
And all knowledge is vain save when there is work,
And all work is empty save when there is love ;
And when you work with love you bind yourself to yourself,
and to one another, and to God”.*
Gibran Khalil Gibran, *The prophet*

Remerciements

Ce manuscrit est l'aboutissement de trois années de recherche effectuées au sein du département Signaux et Systèmes Électroniques de Supélec. J'ai eu la chance et le plaisir de rencontrer durant ces trois années de nombreuses personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail et je tiens à les remercier.

J'exprime ma plus grande gratitude à mon directeur de thèse Professeur Gilles Fleury qui m'a accueillie au sein de son équipe. Je tiens à le remercier pour la confiance qu'il m'a accordée, pour m'avoir dirigée et conseillée, pour sa disponibilité mais aussi pour toutes les discussions fructueuses que nous avons eues. Je tiens également à remercier mon co-directeur de thèse Chafic Mokbel, Professeur assistant à l'université de Balamand au Liban, pour avoir accepté la co-direction, pour tous ses conseils et sa gentillesse. Je les remercie également d'avoir consacré de leur temps à la lecture attentive de mon mémoire.

C'est un réel plaisir que de travailler avec mon encadrant Monsieur José Picheral, Professeur assistant à Supélec. Travailler avec lui a été à la fois très enrichissant scientifiquement et facile humainement grâce à sa bonne humeur et son enthousiasme permanent. Je tiens à le remercier vivement des encouragements et conseils qu'il m'a prodigués, de l'infatigable sollicitude qu'il a témoignée à mon égard, et surtout de la patience et la confiance qu'il a bien voulu m'accorder pendant ces trois années de travail commun.

Je remercie sincèrement Monsieur Martin Haardt, Professeur à l'université de Technologie d'Ilmenau en Allemagne, et Monsieur Jean-Pierre Delmas, Professeur à l'Institut TELECOM et Management SudParis, pour l'attention qu'ils ont accordée à la lecture de ce mémoire ainsi que pour leur participation au jury en tant que rapporteurs. J'associe à ces remerciements Madame Sylvie Marcos, Directrice de Recherche au CNRS, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury lors de la soutenance ainsi qu'à Monsieur Jean-Luc Adam, Ingénieur à Renault, pour sa participation au jury en tant qu'examinateur.

Pour nous avoir fourni les données de la soufflerie afin de pouvoir tester les différentes méthodes, je remercie l'équipe spécialisée de Renault pour leur coopération et leur intérêt dans notre travail.

Ces trois années de thèse n'auraient pas été particulièrement réussies sans l'ensemble des permanents, des doctorants et du personnel que j'ai eu l'occasion de rencontrer à Supélec et qui ont contribué à créer une ambiance de travail très agréable. Je tiens à remercier spécialement mon collègue de bureau Sylvain Vinet pour le soutien et l'aide qu'il m'a témoignés, et surtout pour m'avoir écoutée et supportée. Je n'oublie pas mes anciens collègues Rawad Zgheib et Hassan El Abiad, je les remercie pour leurs conseils au début de ma thèse. Je remercie également

mes chères collègues Layane Abboud et Reine Talge pour leur gentillesse et leur souci de me calmer, surtout avant la soutenance ! C'est avec beaucoup de regrets que je les quitte et je leur souhaite une bonne continuation.

Mes vifs remerciements à tous mes amis qui m'ont toujours soutenue et encouragée. La liste est longue mais je tiens particulièrement à remercier Rosy Aoun, sans toi, je ne serai jamais arrivée là, Joëlle Rizk, pour ta bonne humeur et ton soutien moral, Rodrigue Imad et Kamal Muhieddine, pour votre grande aide pendant mon séjour en France. Pour tous mes amis, je ne vais jamais vous oublier. Vous avez su être là quand le besoin s'en faisait sentir, et ne serez jamais très loin à mes yeux.

Je tiens spécialement à remercier mon fiancé Carlo Khanati. En dépit de la distance, il a toujours été présent à mes côtés pour m'encourager en gardant ma morale haute. Carlo, je te remercie d'avoir partagé avec moi le stress et la fatigue durant les périodes difficiles et d'avoir célébré avec moi les moments de bonheur et de réussite.

Enfin, je remercie ma famille pour leurs valeurs et leur soutien. Je tiens à relever l'appui constant de mes sœurs Nadine et Céline et à souligner la patience et le support sans faille, même à distance, de mes parents May et Hassan. Ma réussite est le fruit de leur soutien et leur grand amour durant toutes ces années. Sachez que je vous serai toujours reconnaissante, c'est à vous que je dédie ce travail de thèse.

Finalement, le plus grand remerciement je l'adresse à mon Dieu aimable, qui surveille et éclaire mon chemin. Merci mon Dieu pour tous tes bienfaits et pour ta présence illuminante.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux méthodes de traitement d'antennes pour la localisation de sources dans le cas des antennes linéaires non uniformes. Le travail porte principalement sur les méthodes à haute résolution qui sont particulièrement adaptées aux antennes linéaires non uniformes afin de s'affranchir des problématiques associées aux lobes secondaires. Nous démontrons que Root-MUSIC peut être directement appliquée dans le cas des antennes non uniformes lacunaires. De plus, nous montrons que la suppression d'un certain nombre de capteurs d'une antenne linéaire uniforme ne dégrade que très légèrement les performances grâce à l'utilisation des méthodes à haute résolution comme Root-MUSIC. Ensuite, nous proposons une nouvelle méthode EM-ESPRIT qui peut être utilisée pour n'importe quel type de géométrie d'antenne non uniforme. Cette méthode itérative est basée sur les deux algorithmes : Expectation-Maximization (EM) et ESPRIT. L'étude des performances de EM-ESPRIT montre qu'elle présente de meilleures performances que la plupart des méthodes, en particulier pour des niveaux de bruit importants. De plus, deux variantes : EM-ESPRIT stochastique et EM-Root-MUSIC sont proposées afin d'améliorer les aspects de convergence et de consistance de EM-ESPRIT. Finalement, nous considérons une application liée à la localisation de sources aéroacoustiques sur la carrosserie d'une voiture. La mise en œuvre d'une méthode de type Zero-Forcing MUSIC a permis d'obtenir de bons résultats sur des données simulées et réelles, en particulier pour des sources proches et de puissance différente.

Abstract

In this thesis, we are interested in the signal processing methods for source localization in the case of nonuniform arrays. The work concerns mainly the high resolution methods which are particularly adapted to the linear nonuniform arrays because they reduce the effect of sidelobes. We show that Root-MUSIC can be directly applied in the case of the nonuniform arrays, particularly the arrays with missing sensors. Moreover, we show that the elimination of a certain number of sensors of a uniform array degrades only very slightly the performance thanks to the use of the high-resolution methods like Root-MUSIC. Furthermore, we propose a new method EM-ESPRIT that has the ability to deal with any type of nonuniform arrays. This iterative method is based on the two algorithms : Expectation-Maximization (EM) and ESPRIT. The study of performance of EM-ESPRIT shows that it presents better performance than most of the existing methods, in particular for high noise levels. In addition, two alternatives : Stochastic EM-ESPRIT and EM-Root-MUSIC are proposed in order to improve the convergence and consistence aspects of EM-ESPRIT. Finally, we consider an application related to the localization of aeroacoustic sources on the body of a car. The implementation of a method of the type Zero-Forcing MUSIC allowed to obtain good performance on simulated and real data, in particular for close spaced sources having different power.

Table des matières

Résumé	v
Abstract	vi
Table des matières	viii
Table des figures	xi
Liste des tableaux	xvi
Acronymes	xvii
Notations générales	xix
1 Introduction	1
1.1 Contexte	1
1.1.1 Applications	2
1.1.2 Motivation	3
1.2 Problématique du travail	4
1.3 Modèle	5
1.4 Classification des réseaux	6
1.4.1 Antennes linéaires non uniformes	7
1.4.2 Antennes non linéaires non uniformes	9
1.5 Organisation du mémoire	9
1.6 Publications relatives à ce travail	11
2 Etat de l'art	13
2.1 Méthodes non paramétriques	13
2.1.1 Formation de voies	14
2.1.2 Minimisation de la variance (MVDR / Capon)	15
2.1.3 GAPES	15
2.1.4 MAPES	16
2.2 Maximum de Vraisemblance (MV) déterministe	17
2.2.1 Critère MV	17
2.2.2 Algorithme d'Expectation-Maximization (EM)	18
2.3 Méthodes à haute résolution (HR)	19
2.3.1 Spectral MUSIC	20
2.3.2 Root-MUSIC	21
2.3.3 ESPRIT	21

2.3.4	IQML	22
2.4	Interpolation d'un réseau virtuel	23
2.4.1	Interpolation par secteur	24
2.4.2	Interpolation basée sur le modèle du signal	25
2.5	Matrice de covariance Toeplitz augmentée	26
2.6	Statistiques d'ordre supérieur	27
2.7	Méthodes se basant sur le développement de Fourier	28
2.7.1	Domaine-Fourier (DF) et Root-MUSIC	28
2.7.2	Technique de Séparation du Vecteur Direction (TSVD)	29
2.8	Résultats numériques : comparaison des méthodes	30
2.8.1	ALU	30
2.8.2	ALNU	31
2.9	Résumé du chapitre	35
3	Root-MUSIC pour les réseaux lacunaires	37
3.1	Généralité	37
3.2	L'algorithme Root-MUSIC	38
3.3	Variance de l'estimateur	40
3.3.1	Expression générale	40
3.3.2	Cas particulier : une source	42
3.4	Résultats numériques	44
3.4.1	EQM en fonction du RSB	44
3.4.2	Résolution et effet des lobes secondaires	46
3.4.3	Consistance	47
3.5	Conclusion	48
4	Géométrie lacunaire et réduction du nombre de capteurs	51
4.1	Introduction	51
4.2	Borne de Cramer-Rao pour les ALNU et ALU	52
4.2.1	Expression générale de la BCR déterministe	52
4.2.2	ALNU avec une source et une observation	53
4.2.3	ALU avec une source et une observation	55
4.3	Comparaison ALNU/ALU par la BCR	55
4.3.1	Cas général	55
4.3.2	Comparaison à même ouverture	56
4.3.3	Comparaison à même nombre de capteurs	57
4.4	Résultats numériques	57
4.4.1	EQM en fonction du nombre de capteurs	58
4.4.2	EQM en fonction du nombre de capteurs manquants	59
4.4.3	EQM en fonctions du RSB	60
4.4.4	Résolution	62
4.4.5	Effet des lobes secondaires	62
4.5	Conclusion	64
5	EM-ESPRIT	67
5.1	Généralités sur l'algorithme EM	67
5.2	Convergence de EM	69
5.3	Cas des ALNU lacunaires	70

5.3.1	EM adapté aux ALNU	70
5.3.2	Construction des données	70
5.3.3	EM-ESPRIT	72
5.3.4	Résumé de la méthode EM-ESPRIT	74
5.4	Cas des ALNU à géométrie arbitraire	74
5.4.1	Construction des données	75
5.4.2	EM-ESPRIT	76
5.5	Complexité de la méthode EM-ESPRIT	76
5.6	Critères adoptés	77
5.7	Résultats numériques	77
5.7.1	EQM en fonction du RSB	78
5.7.2	Consistance	82
5.7.3	Résolution	82
5.7.4	Convergence	84
5.7.5	Sensibilité aux valeurs initiales	88
5.7.6	Nombre de capteurs de l'AVLU	89
5.8	Conclusion	89
6	Variantes de EM-ESPRIT	91
6.1	EM-ESPRIT stochastique	91
6.1.1	Présentation de la méthode	91
6.1.2	Résultats numériques	93
6.2	Blanchiment du bruit d'interpolation	95
6.2.1	Présentation de la méthode	95
6.2.2	Résultats numériques	96
6.3	Conclusion	103
7	Application : Soufflerie Renault	105
7.1	Introduction	105
7.2	Description du problème et modèle du signal	106
7.2.1	Description du problème	106
7.2.2	Modèle du signal	106
7.3	Etat de l'art	110
7.3.1	Méthode FV	110
7.3.2	WB-CLEAN	110
7.3.3	Spectral MUSIC	111
7.4	ZF-MUSIC	111
7.5	Estimation de l'énergie des sources	112
7.6	Résultats numériques	113
7.6.1	Données simulées	113
7.6.2	Données réelles	120
7.7	Conclusion	125
	Conclusions et perspectives	130
	Références	130

Table des figures

1.1	Principe de la soufflerie : position de l'antenne, la voiture et du vent (vue de dessus).	3
1.2	Principe de l'estimation de direction d'arrivée : θ : DDA de la source à estimer, $[1, 2, \dots, M]$: position des capteurs.	4
1.3	Exemple d'antennes lacunaires, $M = 3$.	7
1.4	Réseau strictement non redondant.	7
1.5	Réseau à géométrie arbitraire avec $M = 6$.	8
1.6	Plusieurs géométries de réseaux 2-D.	10
2.1	EQM de la source à -5° pour l'ALU de 10 capteurs, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$, avec les méthodes HR.	31
2.2	EQM de la source à 0° pour l'ALU de 10 capteurs utilisant les méthodes HR, $RSB = 0$ dB et $N = 2$ sources.	32
2.3	EQM de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 4, 6] \frac{\lambda}{2}$, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$.	33
2.4	EQM de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 4, 6] \frac{\lambda}{2}$, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$, $RSB=5$ dB, en fonction de L .	34
3.1	Comportement des racines dans un plan z .	40
3.2	EQM de la source à 10° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9] \frac{\lambda}{2}$, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$.	45
3.3	EQM pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9] \frac{\lambda}{2}$, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ, 20^\circ]$.	45
3.4	EQM de la source à 10° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9] \frac{\lambda}{2}$, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$, $\gamma = 0, 0.3$ et 0.6 .	46
3.5	EQM de la source à 0° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9] \frac{\lambda}{2}$ utilisant Root-MUSIC, FV et Capon, $RSB = 0$ dB et $N = 2$ sources.	47
3.6	EQM de la source à 0° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9] \frac{\lambda}{2}$ utilisant Root-MUSIC, FV et Capon, $RSB = 20$ dB et $N = 2$ sources.	48
3.7	EQM des sources pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9] \frac{\lambda}{2}$, $RSB = 5$ dB et DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$.	49
4.1	Les trois configurations optimales d'une ALNU de M capteurs.	52
4.2	Exemple d'une ALNU avec une géométrie centro-symétrique avec un centre creux, ayant une ouverture de $M' = 9$ et un nombre de capteurs $M = 4$.	56
4.3	EQM de la source à -5° avec $M = 3, 4, \dots, 10$, $RSB=10$ dB, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$ dans le cas de l'ALNU et l'ALU.	59
4.4	EQM de la source à -5° avec $M = 5, 6, \dots, 15$, $RSB=10$ dB, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$ dans le cas de l'ALNU et l'ALU.	60
4.5	Rapport des EQMs de l'ALU ₅₁ et des ALNU _{51,M} , en fonction du nombre de capteurs manquants δ , de la source à 10° et $RSB=10$ dB.	61
4.6	EQM de la source à -5° avec $M' = 10$ dans le cas de l'ALU, $M = 6$ et $M = 4$ dans le cas de l'ALNU, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$.	61

4.7	[Résolution pour la source à 0° avec $M' = 10$ et $M' = 6$ dans le cas de l'ALU, $M = 6$ dans le cas de l'ALNU, RSB=10 dB, $N = 2$ sources.	62
4.8	Résolution pour la source à 0° avec $M' = 10$ et $M' = 4$ dans le cas de l'ALU, $M = 4$ dans le cas de l'ALNU, RSB=10 dB, $N = 2$ sources.	63
4.9	Diagramme d'antennes de l'ALNU _{10,4} et l'ALU ₁₀	63
4.10	EQM de la source à 0° avec ALU $M' = 10$ et ALNU avec $M = 6$ et $M = 4$ respectivement, RSB=10 dB, $N = 2$ sources.	64
4.11	EQM de la source à 0° avec l'ALNU _{10,4} et l'ALU ₁₀ , RSB=10 dB, $N = 2$ sources.	66
5.1	Concept de l'algorithme EM.	68
5.2	Illustration de la relation plusieurs à une de \mathcal{X} à \mathcal{Y}	69
5.3	Exemple d'une ALNU à géométrie arbitraire et son AVLU équivalent, avec $\mathbf{g} = [1, 0, 0, 0, 1]$. Dans l'AVLU, \blacksquare : capteurs existants (\mathbf{Y}), \bullet : capteurs manquants ($\hat{\mathbf{Y}}_p$).	70
5.4	Concept de EM-ESPRIT.	75
5.5	Exemple d'une ALNU à géométrie arbitraire et son AVLU équivalent, avec $\mathbf{g} = [1, 0, 0, 0, 1]$. Dans l'AVLU, \blacksquare : capteurs existants (\mathbf{Y}), \bullet : capteurs manquants ($\hat{\mathbf{Y}}_p$).	75
5.6	EQM de la source à 10° pour l'ALNU lacunaire $\mathbf{d} = [0, 2, 5] \frac{\lambda}{2}$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$	78
5.7	EQM de la source à 10° pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$	79
5.8	EQM des sources pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ, 45^\circ]$	80
5.9	EQM de la source à 10° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$, $\gamma = 0, 0.3$ et 0.6	80
5.10	EQM de la source à -5° pour l'ALNU lacunaire d'ouverture 6 avec un nombre de capteurs $M = 3$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$	81
5.11	EQM des sources pour l'ALNU à géométrie arbitraire d'ouverture 6 avec un nombre de capteurs $M = 4$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$	82
5.12	Consistance de EM-ESPRIT avec l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=5 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$	83
5.13	Résolution de la source à 0° pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=0 dB, $N = 2$ sources.	83
5.14	Résolution de la source à 0° pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=10 dB, $N = 2$ sources.	84
5.15	EQM des sources pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10, 0 et 10 dB, $N = 2$ sources.	85
5.16	Log-vraisemblance négative pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10, 0 et 10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$	85
5.17	EQM des sources pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=0 dB, $N = 3$ sources.	86
5.18	Log-vraisemblance négative pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-ESPRIT.	87
5.19	Erreur de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-ESPRIT.	87
5.20	EQM de la source pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB= -10 et 10 dB, $N = 1$ source.	88

5.21	EQM de la source pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 0.5, 1.6, 2.4, 4.76, 6.3, 8] \frac{\lambda}{2}$, RSB= -10 et 10 dB, $N = 1$ source.	89
5.22	EQM des sources pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=10 et 0 dB, $N = 2$ sources.	90
6.1	Log-vraisemblance négative pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-ESPRIT stochastique et EM-ESPRIT.	93
6.2	Erreur de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-ESPRIT stochastique et EM-ESPRIT.	94
6.3	Log-vraisemblance négative pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 2, 4, 8] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-ESPRIT stochastique et EM-ESPRIT.	94
6.4	EQM de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$	97
6.5	EQM de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 10] \frac{\lambda}{2}$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-ESPRIT et EM-Root-MUSIC.	98
6.6	EQM des sources pour l'ALNU lacunaire d'ouverture 10 avec un nombre de capteurs $M = 6$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$	98
6.7	EQM de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 10] \frac{\lambda}{2}$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$, $\gamma = 0, 0.3$ et 0.6	99
6.8	Log-vraisemblance négative pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-Root-MUSIC.	100
6.9	Erreur de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-Root-MUSIC et EM-ESPRIT.	100
6.10	Log-vraisemblance négative pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 10] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-Root-MUSIC et EM-ESPRIT.	101
6.11	EQM des sources pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=5 dB, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en fonction de L	102
6.12	EQM de la source à -5° avec $M = 3, 4, \dots, 10$, RSB= 10dB, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ dans le cas de l'ALNU et l'ALU en appliquant EM-Root-MUSIC.	102
7.1	Principe de la soufflerie : position de l'antenne, la voiture et du vent.	106
7.2	Principe de la soufflerie : position de l'antenne, la voiture et du vent (vue de dessus).	107
7.3	Position des capteurs dans le plan $z = 0$ ($M = 64$ capteurs).	107
7.4	Effet du vent sur le calcul de $d_{m,n}$	109
7.5	Positions exactes et estimées de deux sources proches ayant les mêmes puissances, en comparant les critères FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC.	114
7.6	Comparaison des positions estimées par les méthodes FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC.	115
7.7	Positions exactes et estimées de deux sources proches ayant des puissances différentes, en comparant les critères FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC.	116
7.8	Comparaison des positions estimées par les méthodes FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC.	117
7.9	Positions exactes et estimées de $N = 20$ sources proches ayant des puissances différentes, en comparant les critères FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC.	118
7.10	Comparaison des positions estimées par les méthodes FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC.	119
7.11	Estimation des positions des sources bruyantes sur la carrosserie d'une voiture, en utilisant les critères FV et MUSIC.	121

7.12 Estimation des positions des sources bruyantes sur la carrosserie d'une voiture, en utilisant les critères WB-CLEAN et ZF-MUSIC.	122
7.13 Comparaison des positions estimées par les méthodes FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC.	123
7.14 Positions et énergies des sources bruyantes sur la carrosserie d'une voiture, en utilisant ZF-MUSIC.	124
7.15 Estimation des positions des sources bruyantes sur la carrosserie d'une voiture, en utilisant le critère ZF-MUSIC.	125

Liste des tableaux

1.1	Réseaux Minimum de Redondance.	8
1.2	Réseaux Minimum de Trou.	9
4.1	Les géométries des ALNU avec une ouverture de 10 et ALU avec différentes ouvertures.	58
4.2	Les géométries des ALNU avec une ouverture de 15 et ALU avec différentes ouvertures.	58
7.1	Estimation des énergies des $N = 20$ sources à l'aide des approches FV et MC. . .	120
7.2	Estimation des énergies des sources à l'aide de l'approche MC.	124

Acronymes

ALNU	Antenne Linéaire Non Uniforme
ALU	Antenne Linéaire Uniforme
APES	Amplitude and Phase EStimation
AVLU	Antenne Virtuelle Linéaire Uniforme
BCR	Borne de Cramer-Rao
DDA	Direction D'Arrivée
DF	Domaine de Fourier
EM	Expectation-Maximization
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
FV	Formation de Voies
GAPES	Gapped-data Amplitude and Phase EStimation
HR	Haute Résolution
IQML	Iterative Quadratic Maximum Likelihood
MAPES	Missing-data Amplitude and Phase EStimation
MC	Moindre Carrée
MCTA	Matrice de Covariance Toeplitz Augmentée
ME	Maximum-Entropie
MR	Minimum de Redondance
MT	Minimum de Trous
MUSIC	MUltiple SIgnal Classification
MV	Maximum de Vraisemblance
RSB	Rapport Signal à Bruit
SOS	Statistiques d'Ordre Supérieur
TFD	Transformée de Fourier Discrète
TFDI	Transformée de Fourier Discrète Inverse
TSVD	Technique de Séparation du Vecteur Directeur

Notations générales

c^*	Valeur conjuguée du nombre complexe c
$\Re(c)$	Partie réelle de c
$\Im(c)$	Partie imaginaire de c
\mathbf{A}^\top	Transposée de \mathbf{A}
\mathbf{A}^H	Transposée conjuguée de \mathbf{A}
\mathbf{A}^\dagger	Pseudo-inverse de \mathbf{A} ($\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$)
$tr\{\mathbf{A}\}$	Trace de \mathbf{A}
$diag(\mathbf{g})$	Matrice diagonale de \mathbf{g}
$\mathcal{N}(\mathbf{A})$	Noyau de \mathbf{A}
$\mathcal{R}(\mathbf{A})$	Espace engendré par \mathbf{A}
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	Loi Normale de moyenne m et variance σ^2

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

La localisation de sources a donné lieu à de nombreuses recherches depuis les années 1970, en raison des abondantes applications où ce type de problème est rencontré. Au cours de ces quatre décennies, comme les applications se sont élargies, l'intérêt pour l'estimation des paramètres spatiaux a augmenté. Le traitement d'antennes est devenu un domaine de recherche actif et centré en particulier sur la fusion de données mesurées par plusieurs capteurs afin d'effectuer l'estimation de paramètres pertinents. Dans ce cadre, un intérêt particulier a été porté à la structure des antennes (c'est-à-dire la géométrie du réseau, les caractéristiques des capteurs, etc.). Le but essentiel du traitement des signaux des réseaux de capteurs est l'estimation des directions d'arrivée à partir de l'information spatiale capturée en échantillonnant un champ d'onde avec un ensemble de capteurs. On suppose que le champ d'onde est produit par un nombre fini d'émetteurs et contient des informations sur des paramètres du signal caractérisant les émetteurs.

Le domaine du traitement d'antenne a largement évolué pendant toutes ces années. La première approche de mise en œuvre d'un traitement spatial des données mesurées sur un réseau de capteurs était le filtrage spatial, entre autre la formation de voie. La méthode de formation de voie conventionnelle (Bartlett) est une application de l'analyse spectrale de Fourier aux données spatiales. Plus tard, des versions adaptatives et des techniques classiques d'estimation à retard de temps ont été appliquées pour augmenter la capacité de résolution des sources étroitement espacées. Cependant, l'approche de formation de voie souffre de limitations fondamentales : sa performance en particulier dépend directement de l'ouverture de l'antenne, indépendamment du nombre d'échantillons et du rapport signal-à-bruit. D'un point de vue statistique, les techniques classiques peuvent être vues comme des prolongements spatiaux du filtrage spectral de Wiener.

L'introduction des techniques d'estimation basées sur les sous-espaces a marqué le début d'une nouvelle ère dans la littérature de traitement des antennes. L'approche basée sur les sous-espaces se fonde sur certaines propriétés géométriques du modèle des données, ce qui améliore considérablement la résolution.

1.1.1 Applications

Le progrès des recherches de l'estimation et détection de paramètres dans le traitement d'antennes a eu comme conséquence une grande diversité d'applications [43]. Parmi les applications les plus évidentes on peut citer les radars [23] [40] et les sonars [47] [58] où le principe consiste à déterminer la direction d'arrivée des ondes électromagnétiques (radar) ou acoustiques (sonar) afin de localiser les sources. Le réseau d'antennes, par exemple, est employé pour la localisation des sources et la suppression d'interférence. On parle de radar actif lorsque le réseau d'antennes est utilisé pour la transmission et la réception des signaux électromagnétiques. Le radar permet l'estimation des paramètres tels que la vitesse (fréquence Doppler) et les positions des cibles d'intérêt. Il peut être placé sur la terre, sur les navires ou suspendu dans l'air. La radio astronomie est un système passif visant à détecter les objets célestes et à estimer leurs caractéristiques. Les réseaux d'antenne utilisés dans ce type d'application ont une base très longue allant de quelques dizaines à des milliers de "miles".

Dans des applications de sonar, d'autre part, le signal est en général acoustique. Des modèles déformables d'antennes sont employés dans le sonar, car l'antenne de réception est typiquement remorquée sous l'eau. En mode actif, un système de sonar, notamment pour la détection et la localisation d'un sous-marin, émet de l'énergie acoustique, surveillance et recherche n'importe quel écho existant. Ceci encore peut être employé pour l'estimation de paramètres, telle que la vitesse, utilisant le retard de l'écho. On retrouve une problématique similaire en géophysique pour l'analyse des ondes sismiques afin d'en déterminer entre autre la vitesse de propagation et d'en déduire ainsi la nature géologique du terrain.

Une autre application du traitement d'antennes sont les communications à haute fréquence [4] [69]. Ces applications jouent un rôle important dans l'adaptation d'un environnement de communication à utilisateurs multiples, sujet à trajets multiples. Un des problèmes les plus importants dans un environnement asynchrone à utilisateurs multiples est l'interférence inter-utilisateur, qui peut dégrader sévèrement les performances. C'est le cas dans le système pratique d'accès multiple à division des codes, parce que les retards variables de différents utilisateurs affectent l'orthogonalité des codes. Certaines méthodes d'estimation paramétrique développées en traitement d'antennes peuvent se révéler intéressantes pour estimer les retards de propagation [73]. Les stations de base dans des systèmes de communication mobile utilisent la diversité spatiale pour effacer l'effet des trajets multiples. L'utilisation d'un réseau de capteurs présente plus de degrés de liberté, qui permettent d'obtenir une sélectivité plus élevée.

Dans le traitement d'imagerie médicale et d'hyperthermie [25] [26], les antennes circulaires sont utilisées pour focaliser l'énergie en mode d'émission et en mode de réception. Dans les électro-cardiogrammes, des antennes planaires dépistent l'évolution des fronts d'ondes qui fournissent des informations sur l'état du cœur d'un patient. Des méthodes de traitement d'antennes ont été également adoptées pour localiser l'activité de cerveau en utilisant des capteurs bio-magnétiques.

Un domaine de recherche très actif est l'imagerie aéroacoustique utilisant un réseau de microphones afin d'obtenir des informations spatiales et temporelles correctes à propos des sources acoustiques. La réduction du bruit acoustique dans les moyens de transport est un objectif poursuivi par les constructeurs afin d'en améliorer le confort. Avec le développement de moteurs plus silencieux, le bruit aérodynamique devient de plus en plus important. La localisation de sources aéroacoustiques adresse un certain nombre de problématiques sortant du champ conventionnel du traitement d'antennes : source en champ proche, signaux à large bande, antenne plane à géométrie non uniforme. Les méthodes d'imagerie aéroacoustique utilisant un réseau planaire de microphones ont été développées pour obtenir des informations spatiales et temporelles correctes

à propos des sources acoustiques. Une expérimentation de ce type consiste à placer un objet dans le flux d'une soufflerie, un réseau de microphone est placé parallèlement au flux pour enregistrer le bruit aérodynamique à la surface de l'objet. L'objectif étant de déterminer la localisation des principales sources aéroacoustiques ainsi que leur puissance. Nous cherchons en particulier à déterminer précisément des sources dont la puissance est relativement faible par rapport aux sources principales. Le scénario est montré par la Fig. 1.1. La figure représente une vue de dessus

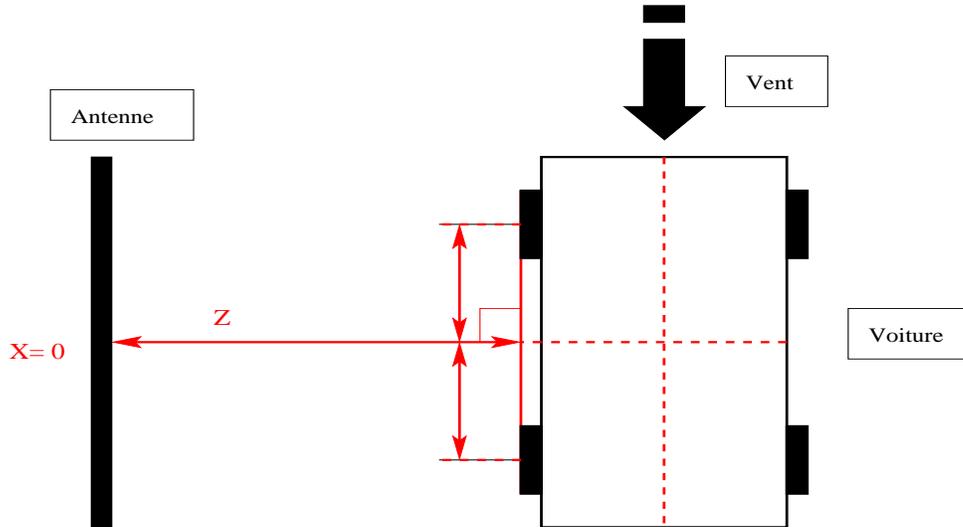


FIGURE 1.1: Principe de la soufflerie : position de l'antenne, la voiture et du vent (vue de dessus).

des positions de l'antenne, de la voiture et du vent.

1.1.2 Motivation

Les anciennes méthodes ont des principes d'estimation différents, mais la plupart se basent sur des réseaux de capteurs, linéaires ou plan, uniformément espacés. Plusieurs raisons justifient ce choix initial, comme la facilité de conception et d'étude de tels réseaux et du fait qu'ils permettent une implémentation efficace de ces algorithmes. On peut cependant se poser la question de savoir s'il existe d'autres structures de réseaux, à répartition non uniforme, plus intéressantes et quelles méthodes d'estimation de direction d'arrivée il faut adapter à ces réseaux. Plusieurs raisons nous amènent à considérer les réseaux d'antenne non uniformes :

- a. Il serait intéressant de pouvoir supprimer des capteurs d'un réseau pour limiter le coût de production sans modifier les performances.
- b. La répartition des capteurs est intentionnellement non uniforme pour bénéficier de certains avantages. L'effet de repliement disparaît ou est réduit quand la périodicité de l'Antenne Linéaire Uniforme (ALU) est supprimée (chapitre 3 de [72]). Il serait intéressant de pouvoir augmenter l'ouverture d'une antenne (étendue spatiale de la distribution des capteurs) en utilisant le même nombre de capteurs afin d'obtenir de meilleures performances.
- c. Quelques capteurs dans une ALU peuvent être défaillants. Par exemple, dans le cas des antennes utilisées pour l'estimation de la nature du sol (géophysique), on a recours à des explosions pour créer les ondes. Ces explosions peuvent mettre en panne certains détecteurs.
- d. Il faut parfois s'adapter aux contraintes physiques et géométriques ne permettant pas la conception d'une ALU.

On va voir que les réseaux de capteurs non uniformes sont intéressants parce qu'ils offrent des performances comparables voire supérieures à celles des réseaux uniformes pour un nombre inférieur de capteurs. D'autre part, en utilisant les réseaux non uniformes, pour un même nombre de capteurs, l'ouverture est plus grande. Donc la résolution est meilleure par rapport à un réseau uniforme ayant le même nombre de capteurs.

Pour toutes les raisons citées, nous allons nous intéresser dans le cadre de cette thèse au cas des antennes non uniformes.

1.2 Problématique du travail

Nous abordons dans cette thèse le problème classique de localisation de sources. Ce problème de localisation peut se résumer de manière schématique (fig. 1.2) à l'estimation de la Direction D'Arrivée (DDA) des ondes émises par une ou plusieurs sources. Pour cela, on dispose des mesures effectuées par un réseau de M antennes. Nous nous intéressons aux réseaux d'antennes non uniformes qui ne présentent pas nécessairement des espacements intercapteurs uniformes.

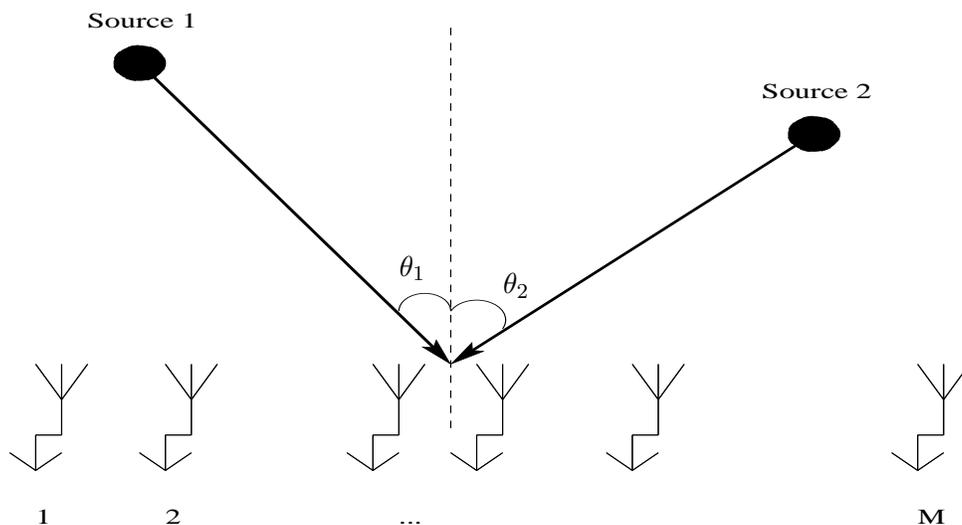


FIGURE 1.2: Principe de l'estimation de direction d'arrivée : θ : DDA de la source à estimer, $[1, 2, \dots, M]$: position des capteurs.

Nous considérons un nombre de sources connu, ainsi la localisation de sources se limite à un problème d'estimation qui est la détermination des DDA des signaux.

Dans la littérature, de nombreux ouvrages se sont intéressés à l'optimisation des Antennes Linéaires Non Uniformes (ALNU) et antennes non linéaires non uniformes, notamment dans [33] [41] [12]. Un réseau non uniforme présente une variation large du niveau de pic des lobes secondaires. Les auteurs appliquent des méthodes d'optimisation qui permettent de trouver des solutions proches des limites optimales du point de vue lobes secondaires. Tout d'abord, il y a les deux méthodes que nous allons détailler au paragraphe 1.4.1, Minimum de Redondance (MR) et Minimum de Trou (MT), qui se rapportent à des critères concernant la fonction co-réseau $\Lambda(\delta)$. L'optimisation peut se faire sur d'autres critères, tels que :

- minimiser le lobe secondaire maximal dans le diagramme d'antennes avec une condition sur la largeur du lobe principal ;

- minimiser l'énergie intégrée du lobe secondaire dans le diagramme d'antennes avec une condition sur le pic du lobe secondaire maximal et sur la largeur du lobe principal.

De plus, l'optimisation peut se faire en pondérant les capteurs dans le réseau non uniforme, et/ou en cherchant les positions optimales des capteurs dans le réseau. Certaines méthodes ont recours à une programmation linéaire pour faire l'optimisation. Mais c'est une recherche exhaustive très coûteuse. Pour cela, des méthodes de recherche heuristiques ont été employées, par exemple l'optimisation génétique et les méthodes de type recuit simulé. Cette recherche a été faite pour des réseaux 1-D et 2-D. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons juste au problème de l'estimation des DDA sans faire une étude de l'optimisation de la géométrie des réseaux.

1.3 Modèle

Après avoir établi la problématique, nous présentons le modèle du signal. Le modèle établi dans ce paragraphe est utilisé dans tout le document.

Considérons N sources lointaines à bande étroite incidentes sur une ALNU de M antennes, avec les directions $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_N]^\top$. Les capteurs omnidirectionnels sont situés aux positions d_m ($m = 1, \dots, M$). Deux types d'ALNU sont considérés : les antennes lacunaires, où $d_m = k_m \Delta$, k_m étant un entier, et les antennes à géométrie arbitraire où d_m prend des valeurs arbitraires déterministes. Nous supposons que le réseau ne présente pas d'ambiguïtés pour $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Le problème d'estimation des DDA se met aisément en équation sous certaines hypothèses. Dans ce document, les hypothèses suivantes sont faites :

- sur la nature des sources :
 - H1 : les sources sont ponctuelles.
 - H2 : les sources sont situées en champ lointain (les fronts d'ondes sont considérés plans au niveau des capteurs).
 - H3 : le signal émis est à bande étroite centré sur une fréquence f_0 commune à toutes les sources.
- sur la structure des antennes :
 - H4 : les capteurs sont alignés, à géométrie lacunaire ou arbitraire.
 - H5 : les capteurs sont omnidirectionnels et de gain unitaire.

Dans le cas où une seule source émet un signal qui arrive avec un angle d'incidence θ , la sortie du m -ième capteur $y_m(t)$ s'écrit :

$$y_m(t) = s(t)e^{-j2\pi\frac{d_m \sin \theta}{\lambda}} + \nu_m(t) \quad (1.1)$$

où $s(t)$ est l'amplitude du signal émis par la source, terme indépendant du capteur considéré, $\nu_m(t)$ est le bruit de mesure. A l'instant t , le signal s'écrit alors sous la forme d'une sinusoïde spatiale bruitée d'amplitude $s(t)$ et de fréquence spatiale $-\frac{\sin \theta}{\lambda}$. Dans le cas où N sources émettent des signaux avec un angle d'incidence sur l'antenne θ_n , par linéarité, le modèle (1.1) devient :

$$y_m(t) = \sum_{n=1}^N s_n(t)e^{-j2\pi\frac{d_m \sin \theta_n}{\lambda}} + \nu_m(t). \quad (1.2)$$

D'après (1.2), le signal observé sur sa dimension spatiale (c'est-à-dire à t fixé et pour m variable) s'écrit comme une somme de sinusoïdes d'amplitudes $s_n(t)$ et de fréquences spatiales $-\frac{\sin \theta_n}{\lambda}$ ne dépendant que de l'angle d'incidence θ_n . Plus formellement, le vecteur de données $\mathbf{y}(t)$ contenant la sortie des M capteurs s'exprime :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{n=1}^N s_n(t) \mathbf{a}(\theta_n) + \boldsymbol{\nu}(t), \quad (1.3)$$

où le vecteur direction de la n -ième source $\mathbf{a}(\theta_n)$ contient la séquence des M capteurs de la sinusoïde spatiale associée à la n -ième source. Il est exprimé par :

$$\mathbf{a}(\theta_n) = \left[e^{-j2\pi \frac{d_1 \sin \theta_n}{\lambda}}, \dots, e^{-j2\pi \frac{d_M \sin \theta_n}{\lambda}} \right]^\top. \quad (1.4)$$

Nous considérons l'origine du centre de phase est situé au premier capteur. Enfin, la somme peut s'écrire sous forme de produit matriciel de manière à rendre l'écriture plus compacte :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}(t) + \boldsymbol{\nu}(t), \quad (1.5)$$

où $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_N)]$ est la $(M \times N)$ matrice direction, le $(N \times 1)$ vecteur $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_N(t)]^\top$ contient les amplitudes complexes des signaux incidents. Le $(M \times 1)$ vecteur $\boldsymbol{\nu}(t)$ représente un bruit additif gaussien, de moyenne nulle et de matrice de covariance $E\{\boldsymbol{\nu}(t)\boldsymbol{\nu}(t)^H\} = \sigma^2 \mathbf{I}$.

Le signal reçu est échantillonné, et les données reçues $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(t_1), \dots, \mathbf{y}(t_L)]$ se mettent sous la forme :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{S} + \mathbf{V}, \quad (1.6)$$

où L est le nombre d'échantillons, $\mathbf{S} = [\mathbf{s}(t_1), \dots, \mathbf{s}(t_L)]$ et $\mathbf{V} = [\boldsymbol{\nu}(t_1), \dots, \boldsymbol{\nu}(t_L)]$. La matrice de covariance des données \mathbf{Y} est estimée de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{R}}_{YY} = \frac{1}{L} \sum_{t_l=1}^L \mathbf{y}(t_l) \mathbf{y}^H(t_l). \quad (1.7)$$

Si les capteurs ne sont pas omnidirectionnels, le vecteur direction s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{a}(\theta_n) = \left[\gamma_1(\theta_n) e^{-j2\pi \frac{d_1 \sin \theta_n}{\lambda}}, \dots, \gamma_M(\theta_n) e^{-j2\pi \frac{d_M \sin \theta_n}{\lambda}} \right]^\top \quad (1.8)$$

où $\gamma_1(\theta), \dots, \gamma_M(\theta)$ représentent les gains des différents capteurs. Si tous les capteurs sont identiques, c'est-à-dire $\gamma_1(\theta) = \gamma_2(\theta) = \dots = \gamma_M(\theta) = \gamma(\theta)$, le vecteur direction devient :

$$\mathbf{a}(\theta_n) = \gamma(\theta) \left[e^{-j2\pi \frac{d_1 \sin \theta_n}{\lambda}}, \dots, e^{-j2\pi \frac{d_M \sin \theta_n}{\lambda}} \right]^\top \quad (1.9)$$

1.4 Classification des réseaux

La plupart des études qui ont été menées sur les réseaux non uniformes se sont concentrées sur les réseaux linéaires. Pour cela, nous décrivons les différents types des ALNU tout d'abord et ensuite nous passons aux antennes non linéaires non uniformes. Cette classification est principalement tirée des références [51] et [55].

1.4.1 Antennes linéaires non uniformes

Les ALNU peuvent être divisées en trois catégories : les antennes lacunaires, les antennes à géométrie arbitraire déterministe et les antennes à géométrie arbitraire aléatoire. Les antennes lacunaires sont des réseaux uniformes à l'origine, où plusieurs capteurs ont été supprimés. Les antennes à géométrie arbitraire sont des réseaux où les capteurs sont espacés par des intervalles arbitraires déterministes, ou aléatoires.

Antennes lacunaires

Pour décrire ces réseaux d'une façon simple, nous utilisons la classification employée par Abramovich *et al.* dans [3] et les notations utilisées dans [51]. On définit une antenne lacunaire comme un réseau de M capteurs alignés de sorte que toutes les distances entre les capteurs soient des multiples entiers d'une distance fondamentale Δ . Un exemple de ce type est donné à la Fig. 1.3.

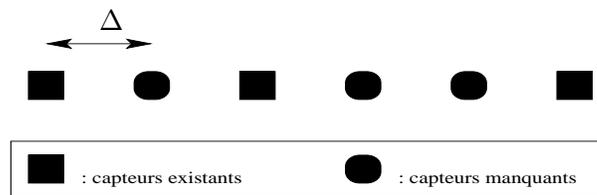


FIGURE 1.3: Exemple d'antennes lacunaires, $M = 3$.

C'est le cas des antennes uniformes auxquelles quelques capteurs ont été retirés. Des études ont été faites pour trouver les structures optimales pour ce type de réseau. Nous allons présenter les deux principaux types de structure optimale [51] : les réseaux à Minimum de Redondance (MR) et les réseaux à Minimum de Trous (MT). Quelques grandeurs doivent être définies pour la suite. Dans le repère ayant pour origine le 1^{er} capteur, la géométrie du réseau est donnée par les positions de ses capteurs désignées par d_m ($m = 1, \dots, M$), où $d_m = k_m \Delta$ et k_m est un entier. L'ensemble $\mathcal{D} = \{\delta_{ij} = d_i - d_j | i, j = 1, 2, \dots, M\}$ des écarts entre capteurs est appelé co-réseau, et soit la fonction co-réseau $\Lambda(\delta)$, $\delta \in \mathbb{Z}$ représentant le nombre de fois où un écart δ apparaît dans le réseau. Le co-réseau est dit sans trou si tous les écarts intermédiaires apparaissent au moins une fois, c.à.d si $\forall \delta \in \mathbb{Z} / -d_M \leq \delta \leq d_M, \Lambda(\delta) \geq 1$. Un réseau est dit strictement non redondant si $\Lambda(\delta) = 1, \forall \delta = 1, \dots, d_M$. Un exemple d'un tel réseau est donné à la Fig. 1.4. Dans ce réseau de $M = 4$ capteurs, nous remarquons que tous les écarts entre $\delta = 0$ et $\delta = d_M = 6$ existent une et une seule fois sauf pour l'écart 0, qui apparaît M fois. On peut montrer que les réseaux strictement non redondants n'existent que pour $M \leq 4$ [51]. Pour $M \geq 5$, certains écarts $\delta \neq 0$ apparaissent plusieurs fois. Soit \mathcal{R} le nombre de ces écarts redondants. Dans la littérature, il existe deux approches pour approcher les réseaux strictement non redondants :

1. **Réseau à minimum de redondance** Les réseaux MR sont ceux dont le co-réseau ne présente aucun trou et minimise le nombre de redondance \mathcal{R} . On peut dire que les antennes de ce type approchent le réseau strictement non redondant par excès puisque tous les



FIGURE 1.4: Réseau strictement non redondant.

Nb. de capt. M	Redondance \mathcal{R}	Ouverture	Réseaux
3	0	3	.1.2
4	0	6	.1.3.2
5	1	9	.1.3.3.2 .1.1.4.3
6	2	13	.1.1.4.4.3 .1.3.1.6.2 .1.5.3.2.2
7	4	17	.1.1.4.4.4.3 .1.1.1.5.5.4 .1.1.6.4.2.3 .1.3.6.2.3.2 .1.7.3.2.2.2

TABLE 1.1: Réseaux Minimum de Redondance.

écarts intercapteurs existent même s'il y a redondance. Comme il n'existe pas d'expression analytique de ces géométries optimales, les différentes configurations sont obtenues par recherche exhaustive pour les petites valeurs de M . Le plus grand réseau connu de ce type compte 17 capteurs [41] [48]. Au-delà, des méthodes stochastiques sont utilisées. Le tableau 1.1 fournit les réseaux MR obtenus pour $M \leq 7$, où la notation .1.2 correspond au réseau MR donné par $\mathbf{d} = [0, 1, 3]$. Le tableau peut être trouvé dans [41]. Les antennes à MR sont intéressantes puisqu'elles permettent de compléter la matrice de covariance de l'ALNU afin d'obtenir celle d'une ALU. Ceci est possible car tous les écarts intercapteurs existent.

2. **Réseau à minimum de trous** Les réseaux MT minimisent le nombre de trous sans aucune redondance. Donc ici l'antenne approche le réseau strictement non redondant par défaut car certains écarts intercapteurs n'existent pas. Aussi, la recherche de ce type de réseau se fait par une recherche exhaustive. Le plus grand réseau MT, prouvé optimal, est de $M = 19$ [17]. Le tableau 1.2 fournit les réseaux MT pour $M \leq 7$.

Antennes à géométrie arbitraire déterministe

Dans ce type de réseaux, les capteurs sont alignés et placés à des intervalles arbitraires, c'est-à-dire les écarts entre les antennes ne doivent pas être obligatoirement des multiples de Δ . Un exemple d'antennes à géométrie arbitraire est donné à la Fig. 1.5.

FIGURE 1.5: Réseau à géométrie arbitraire avec $M = 6$.

Antennes à géométrie arbitraire aléatoire

Le réseau peut être décrit par une fonction de densité de probabilité qui détermine les positions aléatoires des capteurs. Les applications pour ce type de réseau sont rares. On peut citer les géométries flexibles où les positions des capteurs sont dispersées autour d'une position connue.

Nb. de capt. M	Nb. de trous	Ouverture	Réseaux
3	0	3	.1.2
4	0	6	.1.3.2
5	1	11	.1.3.5.2 .2.5.1.3
6	2	17	.1.7.3.2.4 .1.7.4.2.3 .1.3.6.2.5 .1.3.6.5.2
7	4	25	.1.10.5.3.4.2 .1.6.4.9.3.2 .1.3.6.8.5.2 .2.5.6.8.1.3 2.1.7.6.5.4

TABLE 1.2: Réseaux Minimum de Trou.

De plus, ce type de réseau nécessite des méthodes d'estimation de DDA différentes des autres méthodes. Pour ces raisons, ce cas ne sera pas étudié dans la suite du mémoire.

1.4.2 Antennes non linéaires non uniformes

Les antennes non linéaires non uniformes sont des réseaux de géométrie 2-D et 3-D. Ce type de réseau présente un grand intérêt : il peut être utilisé pour l'imagerie médicale à ultrasons, il permet l'estimation conjointe de l'azimut et de l'élévation et il permet une couverture de 360° . Si le réseau est plan, c'est-à-dire ses capteurs sont distribués dans un plan, il permet d'estimer l'angle d'élévation en plus de l'angle d'azimut. Une extension naturelle du réseau linéaire en 2-D est un réseau carré ou rectangulaire où les capteurs sont placés sur une grille carrée ou rectangulaire. Il existe d'autres configurations qui sont des versions éparses issues des réseaux carrés ou rectangulaires, comme le montre la Fig. 1.6. Le réseau le plus connu est le réseau circulaire, dont les capteurs sont placés uniformément sur un cercle. Le réseau circulaire est approprié aux applications du radar, sonar et les télécommunications sans fil, où on désire une couverture de 360° du plan azimut. De même, il existe les antennes non linéaires non uniformes à géométrie arbitraire, comme celles utilisées dans les souffleries où les sources de bruit provenant d'un véhicule sont détectées et estimées.

1.5 Organisation du mémoire

Le chapitre 2 présente un état de l'art des différentes méthodes proposées dans la littérature pour l'estimation de direction d'arrivée avec des réseaux non uniformes. Bien que dans ce mémoire on s'intéresse principalement aux méthodes à haute résolution, d'autres méthodes non paramétriques seront brièvement présentées. En effet, certaines de ces méthodes permettent d'établir des comparaisons avec les méthodes proposées. Nous commençons par ces méthodes non paramétriques comme la formation de voie et Capon. Ensuite, nous exposons les méthodes paramétriques comme le maximum de vraisemblance et ses dérivés. Puis nous détaillons les méthodes à haute résolution les plus classiques : Spectral MUSIC, Root-MUSIC, ESPRIT et IQML. Nous passons enfin à l'exposé des méthodes qui procèdent à un pré-traitement des données

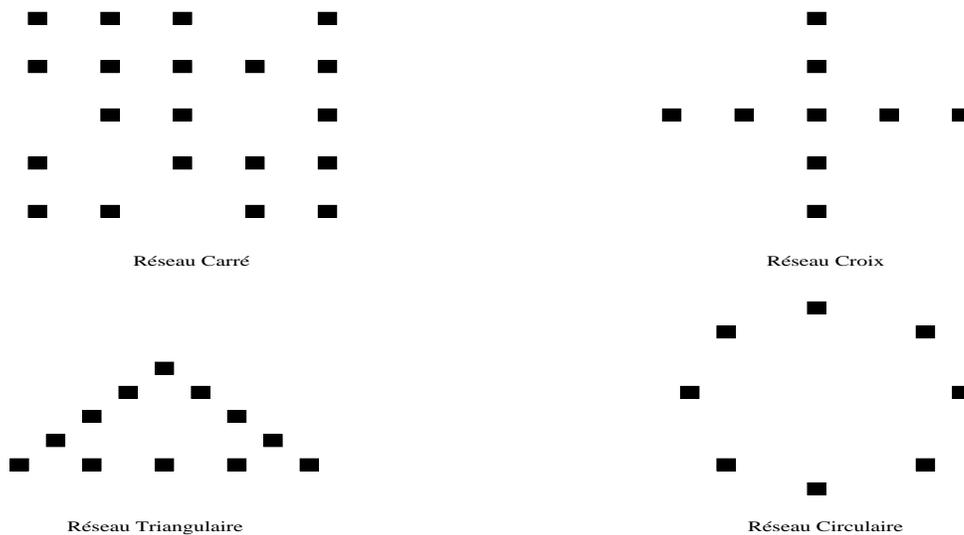


FIGURE 1.6: Plusieurs géométries de réseaux 2-D.

de l'ALNU afin de pouvoir utiliser les méthodes à haute résolution comme les méthodes d'interpolation, la méthode de la matrice de covariance de Toeplitz augmentée, la méthode se basant sur les statistiques d'ordre supérieur et les méthodes utilisant la transformée de Fourier.

L'extension de la méthode à haute résolution Root-MUSIC au cas des antennes lacunaires fait l'objet du chapitre 3. Nous y démontrons que l'algorithme peut facilement être étendu aux cas des réseaux lacunaires. De plus, nous effectuons une étude analytique pour exprimer la variance de Root-MUSIC dans le cas général et dans le cas d'une seule source. Ensuite, nous accomplissons une étude de performance basée sur des résultats de simulations et des courbes analytiques afin d'illustrer divers aspects de Root-MUSIC et montrer que cette méthode permet de s'affranchir des problèmes liés aux lobes secondaires.

En utilisant la méthode Root-MUSIC, nous faisons une comparaison des performances entre les ALU et ALNU lacunaires au chapitre 4. L'estimation des DDA basée sur Root-MUSIC étant asymptotiquement efficace lorsque le nombre d'échantillons L tend vers l'infini, cette étude est faite à l'aide des bornes de Cramer-Rao (BCR) correspondant aux ALU et ALNU. Les expressions des BCR sont établies dans le cas général et dans le cas d'une seule source. Pour faciliter le calcul, nous adoptons une géométrie centro-symétrique de l'ALNU à centre creux et nous calculons la BCR correspondante. Nous démontrons qu'une ALNU ayant la même ouverture qu'une ALU mais avec un nombre bien réduit de capteurs est capable de maintenir de bonnes performances. De plus, nous montrons qu'une ALNU présente de meilleures performances qu'une ALU ayant le même nombre de capteurs. Ces résultats sont ensuite illustrés à l'aide des simulations.

Dans le chapitre 5, nous proposons une nouvelle méthode qui peut être appliquée sur les ALNU lacunaires et à géométrie arbitraire. Cette méthode est la combinaison des deux algorithmes Expectation-Maximization (EM) et ESPRIT. L'algorithme EM interpole les données manquantes en utilisant le modèle du signal pour construire les données complètes qui forment la sortie d'un réseau virtuel linéaire uniforme. Ainsi, ESPRIT peut être appliquée à ce réseau virtuel uniforme pour estimer les DDA. La construction des données complètes est expliquée pour les deux cas d'antennes. Ensuite, des simulations sont lancées pour étudier l'efficacité de la méthode, sa résolution et sa convergence, ainsi que la dépendance des résultats sur la valeur initiale et le nombre de capteurs dans le réseau virtuel.

EM-ESPRIT souffre de quelques problèmes concernant la consistance et la convergence. Pour cela, nous proposons deux variantes au chapitre 6 qui sont EM-ESPRIT stochastique et EM-Root-MUSIC pour améliorer ces aspects dans le cas des ALNU lacunaires. EM-ESPRIT stochastique consiste à ajouter une perturbation [34] à l'estimation des amplitudes des sources. Cette perturbation est basée sur la variance du bruit d'estimation des amplitudes. Ceci permet d'améliorer la convergence. EM-Root-MUSIC permet de prendre en compte l'erreur introduite par l'interpolation des capteurs manquants. En effet, l'interpolation colore le bruit. Donc un blanchiment de ce bruit est effectué et ensuite Root-MUSIC est appliquée au lieu d'ESPRIT. Cette méthode présente de meilleures performances en comparaison avec EM-ESPRIT.

Dans le dernier chapitre, nous considérons une application à notre travail basée sur des données de soufflerie fournie par Renault. La problématique consiste à localiser les principales sources bruyantes aéroacoustiques sur la carrosserie d'une voiture placée dans un flux d'air. La localisation de sources aéroacoustiques adresse un certain nombre de problématiques sortant du champ conventionnel du traitement d'antennes : source en champ proche, signaux à large bande et antenne plane à géométrie non uniforme. Donc les méthodes proposées dans les chapitres précédents ne peuvent pas être appliquées directement. Root-MUSIC et EM-ESPRIT sont en effet mal adaptées à la problématique de champ proche. Spectral MUSIC peut par contre être facilement généralisé. Nous proposons donc d'utiliser la méthode Zero-Forcing MUSIC (ZF-MUSIC) [9] qui est une version améliorée de Spectral MUSIC afin d'estimer les positions des sources bruyantes. C'est une approche séquentielle de MUSIC qui vise à annuler le spectre pour les valeurs des positions déjà estimées. On comparera cette méthode aux méthodes déjà existantes, telle que la formation de voie classique, WB-CLEAN et Spectral MUSIC.

Finalement, nous récapitulons, dans la conclusion, les différentes méthodes développées dans ce mémoire. Différentes perspectives d'amélioration possible ainsi que de nouvelles pistes d'exploration sont mises en relief.

1.6 Publications relatives à ce travail

Le travail présenté dans ce mémoire a fait l'objet, pendant le déroulement de la thèse, d'une communication orale dans une conférence internationale à comité de lecture. Cette communication [19], présentée à SSP 2007, portait sur la nouvelle méthode proposée EM-ESPRIT. Le travail présenté dans cette publication est repris, de manière beaucoup plus détaillée, dans le chapitre 5 de ce mémoire. Le travail présenté aux chapitres 3 et 4 a été publié dans un article de revue [20] : Signal processing (Elsevier). Ce travail porte sur l'application de Root-MUSIC aux ALNU lacunaires et l'avantage des ALNU par rapport aux ALU. Voici les références des articles :

- C. El Kassis, J. Picheral and C. Mokbel, "EM-ESPRIT algorithm for direction finding with nonuniform arrays", IEEE Statistical Signal Processing Workshop 2007, August 2007, 453-457.
 - C. El Kassis, J. Picheral and C. Mokbel, "Advantages of nonuniform arrays using root-MUSIC", Signal Processing (Elsevier), 90, Issue 2 :689-695, February 2010.
 - C. El Kassis, J. Picheral, C. Mokbel and G. Fleury, "Direction of Arrival Estimation using EM-ESPRIT with nonuniform arrays", submitted to Signal Processing (Elsevier).
 - En cours de préparation, un article portant sur EM-Root-MUSIC et un article portant sur les résultats obtenus dans l'application de la soufflerie.
-

Chapitre 2

Etat de l'art

Dans ce chapitre, nous faisons un panorama des principales méthodes proposées dans la littérature pour l'estimation des DDA avec des antennes non uniformes. Nous allons exposer successivement ces méthodes en dégageant les principaux avantages et inconvénients de chacune. Les méthodes non paramétriques classiques (formation de voie et Capon) et les plus récentes (GAPES/ MAPES) sont présentées au paragraphe 2.1. Ces méthodes n'utilisent pas de modèle du signal et leur principe général est de former une fonction spectre en fonction des paramètres d'intérêt. Ensuite, les méthodes se rapportant à la maximisation du critère de vraisemblance sont développées à la section 2.2. Les méthodes à haute résolution sont surtout utilisées pour les antennes uniformes, mais nous les explicitons car certaines d'entre elles, comme Root-MUSIC (2.3.2) et ESPRIT (2.3.3) seront étendues au cas non uniforme plus loin. Au paragraphe 2.4, des méthodes qui se basent sur l'interpolation des données sur un réseau virtuel uniforme afin de permettre ensuite l'utilisation de méthodes conventionnelles pour estimer les DDA sont présentées. D'autres méthodes utilisant la structure de la matrice de covariance sont détaillées au paragraphe 2.5. Une technique se basant sur les propriétés des statistiques d'ordre supérieur, produit une matrice de cumulants dont la structure est similaire à celle utilisée par les méthodes conventionnelles (paragraphe 2.6). Enfin, deux méthodes permettant l'utilisation de Root-MUSIC grâce à une approximation du critère ou de la matrice de direction sous forme de développement en série de termes périodiques sont présentées à la section 2.7.

2.1 Méthodes non paramétriques

Les méthodes non paramétriques n'utilisent pas le modèle du signal. Le principe général de ces méthodes est de former une fonction spectre sous la forme d'un critère $S(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y})$, des paramètres d'intérêt c'est-à-dire des DDA $\boldsymbol{\theta}$ et des données \mathbf{Y} . Supposons que l'on dispose d'un filtre à réponse impulsionnelle finie de paramètre θ_n et de coefficients \mathbf{h}_{θ_n} , possédant les propriétés suivantes :

- P1 : le filtre laisse passer sans déformation le signal arrivant de la direction θ_n ;
- P2 : le filtre atténue tous les signaux arrivant avec des directions $\theta \neq \theta_n$.

Soit $z(t_l)$ le signal à la sortie du filtre spatial $z(t_l) = \mathbf{h}_{\theta_n}^H \mathbf{y}(t_l)$, de puissance :

$$S(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}(t_l)) = E \{ |z|^2 \} = \mathbf{h}_{\theta_n}^H \mathbf{R} \mathbf{h}_{\theta_n} \quad (2.1)$$

avec $\mathbf{R} = E \{ \mathbf{y}(t_l) \mathbf{y}^H(t_l) \}$. La puissance $S(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}(t_l))$ de la sortie du filtre spatial donne alors une bonne estimation de la puissance provenant de la direction θ_n . L'estimation des DDA des signaux est donc ensuite réduite à un problème de maximisation du critère $S(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}(t_l))$. Les positions des pics les plus élevés de la fonction en question sont notées comme les estimées des DDA :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} S(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}(t_l)). \quad (2.2)$$

On peut ainsi définir différents types d'estimateur selon le filtre spatial que l'on choisit. Les méthodes les plus classiques seront détaillées : la formation de voies et Capon, ainsi que les méthodes GAPES et MAPES.

2.1.1 Formation de voies

La méthode dite de Formation de Voies (FV) est la plus classique. Initialement proposée pour les ALU, elle peut être facilement généralisée pour tout type de géométrie d'antennes. Mais cela emmène une dégradation notable des performances comme évoqué plus loin. On cherche à déterminer les coefficients du filtre qui vérifient deux propriétés :

1. La sortie du filtre est égale à l'entrée pour un signal arrivant de la direction θ .
2. Il faut minimiser l'énergie transmise par le filtre pour un bruit spatialement blanc.

En optimisant ce problème, nous obtenons le critère de puissance à la sortie du faisceau pointé sur θ , qui s'écrit :

$$S_{FV}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}(t_l)) = \mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}_{YY} \mathbf{a}(\theta). \quad (2.3)$$

Notons que $S_{FV}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}(t_l))$ fournit une estimation du spectre spatial. Les N maxima de $S_{FV}(\boldsymbol{\theta})$ sont sélectionnés et notés $\theta_n, n = 1, \dots, N$. La forme du filtre qui vient d'être établie consiste à réaliser la somme des sorties des capteurs après y avoir appliqué un retard.

En utilisant (1.7), le critère (2.3) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} S_{FV}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}(t_l)) &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |\mathbf{a}(\theta) \mathbf{y}(t_l)|^2 \\ &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left| \sum_{m=1}^M e^{j2\pi \frac{d_m \sin \theta}{\lambda}} y_m(t_l) \right|^2. \end{aligned}$$

Pour $L = 1$, l'expression classique du périodogramme est retrouvée à un coefficient multiplicatif près. Lorsque plusieurs observations existent, le critère de la formation de voies revient à réaliser la moyenne des périodogrammes estimés à chaque instant $l = 1, \dots, L$.

Les principales limitations de la FV sont liées à la forme du faisceau (ou filtre spatial).

1. La largeur du lobe principal limite la résolution. L'analogie avec le périodogramme permet de la calculer aisément : $\delta\theta = \frac{\lambda}{L_{ant} \cos \theta}$, où L_{ant} est la longueur totale de l'antenne.
2. La hauteur des lobes secondaires crée des interférences entre les sources. Si dans le cas des ALU cet inconvénient reste limité, par contre pour les ALNU les lobes secondaires deviennent souvent très importants [72].

Des améliorations ont été apportées dans ces cas notamment dans [49] et [71].

2.1.2 Minimisation de la variance (MVDR / Capon)

Afin de dépasser les limitations de la méthode FV ci-dessus, telle que sa puissance de résolution de deux sources étroitement espacées, la méthode de Capon [11] a été proposée en 1969. Cette méthode peut aussi être appliquée à tout type de réseau linéaire. Le principe est proche de celui de la formation de voies. Mais la propriété P2 du filtre qui consiste à minimiser l'énergie transmise par le filtre pour les signaux provenant des directions différentes de θ_n est traduite de manière différente. Au lieu de chercher à minimiser l'énergie du signal filtré de manière identique dans toutes les directions (cas de FV avec l'hypothèse du bruit blanc), on construit un filtre qui atténue d'autant plus le signal dans une direction donnée que le signal reçu contient de l'énergie dans cette direction. Les N DDA sont estimées en maximisant le critère de puissance suivant :

$$S_{CAP}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{R}}_{YY}^{-1}\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}. \quad (2.4)$$

Par rapport à la FV, la méthode de Capon permet d'augmenter très sensiblement la résolution en limitant l'influence des interférences qui sont prises en compte dans la conception du filtre. Elle utilise tous les degrés de liberté pour concentrer l'énergie reçue sur une seule direction, notamment la direction d'intérêt. Mais elle nécessite un nombre L important d'observations afin d'obtenir une bonne estimation des interférences, c'est-à-dire de $\hat{\mathbf{R}}_{YY}$. De plus, la matrice de covariance estimée doit être bien conditionnée de manière à ce que l'opération d'inversion n'introduise pas d'erreur numérique trop importante. La qualité du critère dépend donc de l'estimation de la matrice. Enfin, la capacité de résolution de Capon reste dépendante de l'ouverture de l'antenne et du Rapport Signal à Bruit (RSB). Le comportement de cette méthode est étudié en détail dans [46].

2.1.3 GAPES

Les auteurs de [74] traitent plusieurs cas de données manquantes et proposent des méthodes adaptées à chaque cas. Le filtre dans ce cas est construit d'une manière différente. Il faut que la sortie du filtre soit le plus proche possible d'un signal sinusoïdal et l'amplitude complexe de la composante sinusoïdale ne soit pas déformée par le filtrage. Mais la problématique considérée est différente : on s'intéresse à l'estimation de l'amplitude du spectre du signal discret échantillonné $\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$. Pour une fréquence d'intérêt ω , le signal y_n est donné par :

$$y_n = \alpha(\omega)e^{j\omega n} + e_n(\omega), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (2.5)$$

où $\alpha(\omega)$ est l'amplitude complexe de la composante sinusoïdale à la fréquence ω ($\omega \in [0, 2\pi)$) et $e_n(\omega)$ est un terme résiduel.

GAPES signifie *Gapped-data Amplitude and Phase Estimation*. Elle peut être appliquée seulement au cas de données trouées, c'est-à-dire il existe des groupes de données disponibles auxquels ne manque aucun échantillon. Elle est basée sur l'algorithme APES [74] utilisé dans une ALU. L'algorithme APES estime $\alpha(\omega)$ des données $\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$ pour toute fréquence donnée ω . Dans APES, on cherche la réponse d'un filtre à réponse impulsionnelle finie $\mathbf{h}(\omega)$ et dont le signal d'entrée est partitionné en L sous-vecteurs chevauchants de dimension $M \times 1$ avec la structure translaturée $\bar{\mathbf{y}}_l = [y_l, \dots, y_{l+M-1}]^T$, $l = 0, \dots, L-1$ et $L = N - M + 1$. $\bar{\mathbf{y}}_l$ s'exprime sous la forme :

$$\bar{\mathbf{y}}_l = \alpha(\omega)\mathbf{a}(\omega)e^{j\omega l} + \bar{\mathbf{e}}_l(\omega) \quad (2.6)$$

où $\mathbf{a}(\omega) = [1, e^{j\omega}, \dots, e^{j\omega(M-1)}]$. Le bruit devient aussi une version translatée du vecteur $\bar{\mathbf{e}}_l(\omega)$: $\bar{\mathbf{e}}_l(\omega) = [e_l(\omega), \dots, e_{l+M-1}(\omega)]^\top$. L'algorithme APES se base sur l'approche Maximum de Vraisemblance (MV) pour estimer $\alpha(\omega)$ en supposant que les éléments de $\bar{\mathbf{e}}_l(\omega)$ sont des scalaires aléatoires gaussiens circulaires symétriques statistiquement indépendants les uns des autres, avec une matrice de covariance inconnue :

$$\mathbf{Q}(\omega) = E \{ \bar{\mathbf{e}}_l(\omega) \bar{\mathbf{e}}_l^H(\omega) \}. \quad (2.7)$$

Puisque les vecteurs de $\bar{\mathbf{e}}_l(\omega)$ se chevauchent, ils ne sont pas statistiquement indépendants. Donc, APES n'est pas un estimateur du MV exact. Soit $\bar{\mathbf{Y}}(\omega)$ la transformée de Fourier Discrète (TFD) de $\bar{\mathbf{y}}_l$, la matrice de covariance de $\bar{\mathbf{Y}}(\omega)$ est notée par $\hat{\mathbf{R}}$. La maximisation de la fonction de vraisemblance de $\bar{\mathbf{Y}}(\omega)$ donne l'estimée de $\alpha(\omega)$ suivante :

$$\hat{\alpha}(\omega) = \frac{\mathbf{a}^H(\omega) \hat{\mathbf{U}}^{-1}(\omega) \bar{\mathbf{Y}}(\omega)}{\mathbf{a}^H(\omega) \hat{\mathbf{U}}^{-1}(\omega) \mathbf{a}(\omega)} \quad (2.8)$$

avec $\hat{\mathbf{U}}(\omega) = \hat{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Y}}(\omega) \bar{\mathbf{Y}}^H(\omega)$.

Pour GAPES, on suppose que quelques segments de $\bar{\mathbf{y}}_l$ sont indisponibles. Le vecteur $\bar{\mathbf{y}}_l$ est divisé en deux sous-vecteurs, $\bar{\gamma}_l$ contenant les sous-parties de $\bar{\mathbf{y}}_l$ existantes et dans $\bar{\mu}_l$ se trouvent les données manquantes. L'algorithme GAPES se compose de deux étapes : (1) estimer le filtre adaptatif et le spectre correspondant via APES et (2) compléter les trous par la méthode des Moindres Carrés (MC). Donc, l'algorithme commence par une initialisation de $\mathbf{h}(\omega)$ et $\alpha(\omega)$ en appliquant APES sur les données existantes $\bar{\gamma}_l$. Ensuite, en utilisant les estimations de $\mathbf{h}(\omega)$ et $\alpha(\omega)$, les données sont interpolées pour estimer $\bar{\mu}_l$. Dans l'hypothèse où les données manquantes ont le même spectre que les données disponibles, $\bar{\mu}_l$ peut être déterminée en minimisant la fonction de coût suivante :

$$\min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{l=0}^{L-1} \left| \hat{\mathbf{h}}^H(\omega) \bar{\mathbf{y}}_l - \alpha(\omega) e^{j2\pi\omega l} \right|^2. \quad (2.9)$$

Une fois les valeurs de $\bar{\mu}_l$ calculées, on dispose d'une estimation des données complètes et ainsi on peut réestimer $\mathbf{h}(\omega)$ et $\alpha(\omega)$ en utilisant APES. Ces deux étapes sont répétées jusqu'à la convergence.

Cette méthode ne peut être utilisée que pour les réseaux troués et ne peut pas être appliquée pour le problème général des capteurs manquants qui peuvent prendre place à des endroits aléatoires. Donc les auteurs ont développé un autre algorithme d'estimation d'amplitude et de phase pour le cas général MAPES : *Missing-data Amplitude and Phase Estimation*.

2.1.4 MAPES

MAPES [74] utilise aussi APES mais le critère d'interpolation n'est plus MC mais plutôt un critère de MV. Pour le cas général des données manquantes, le critère du MV ne peut pas être directement maximisé. Pour cela, les auteurs proposent d'utiliser l'algorithme EM pour contourner ce problème. Dans une 1^{ère} approche, les échantillons $\{\bar{\mathbf{y}}_l\}_{l=1}^L$ sont supposés indépendants les uns des autres. Pour chaque $\bar{\mathbf{y}}_l$, soit $\bar{\gamma}_l$ et $\bar{\mu}_l$ les vecteurs contenant respectivement les éléments disponibles et manquants de $\bar{\mathbf{y}}_l$. Puisque $\bar{\mathbf{y}}_l$ est un vecteur gaussien, $\bar{\gamma}_l$ et $\bar{\mu}_l$ le sont aussi. Donc, la fonction de densité de probabilité de $\bar{\mu}_l$ conditionnée sur $\bar{\gamma}_l$ est une variable complexe gaussienne de moyenne $\bar{\mathbf{b}}_l$ et de matrice de covariance $\bar{\mathbf{K}}_l$ dont les valeurs sont estimées à l'aide de l'étape Expectation de l'algorithme EM. Dans l'étape Maximization, les estimées de $\alpha(\omega)$

et de la matrice de covariance du bruit sont calculées. L'algorithme est aussi itératif, le début est l'initialisation de $\alpha(\omega)$ et de la matrice de covariance du bruit. Ensuite, on calcule $\bar{\mathbf{b}}_l$ et $\bar{\mathbf{K}}_l$ et on réestime $\alpha(\omega)$ et la matrice de covariance du bruit, ainsi de suite jusqu'à atteindre la convergence.

Dans la 2^e approche, puisque la même donnée manquante peut figurer dans différents échantillons, les auteurs proposent d'implémenter l'algorithme EM en estimant la donnée manquante simultanément pour tous les échantillons. Cet algorithme est plus rapide parce qu'il estime moins d'inconnues.

2.2 Maximum de Vraisemblance (MV) déterministe

Nous passons aux méthodes qui se basent sur le modèle paramétrique bien connu.

2.2.1 Critère MV

En utilisant l'hypothèse de bruit blanc gaussien, la densité de probabilité du modèle s'écrit [72] :

$$p(\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(L)) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{LM}{2}}} \prod_{l=1}^L e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{y}(l) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(l)\|^2}. \quad (2.10)$$

On en déduit la fonction de log-vraisemblance à maximiser :

$$\mathcal{L}(\sigma, \mathbf{s}, \boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Y}) = -\frac{LM}{2} \ln 2\pi - LM \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{l=1}^L \|\mathbf{y}(l) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(l)\|^2. \quad (2.11)$$

Maximisant cette fonction par rapport au paramètre σ , en utilisant l'hypothèse que \mathbf{A} est de rang plein, donne :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{LM} \sum_{l=1}^L \|\mathbf{y}(l) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(l)\|^2. \quad (2.12)$$

Ensuite, en remplaçant dans la fonction coût, le vecteur des amplitudes $\hat{\mathbf{s}}(l)$ est estimée par :

$$\hat{\mathbf{s}}(l) = \mathbf{A}^\dagger(\boldsymbol{\theta})\mathbf{y}(l) \quad l = 1, \dots, L \quad (2.13)$$

où $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$ est la pseudo-inverse de \mathbf{A} . En remplaçant $\mathbf{s}(l)$ dans la fonction coût, l'estimation des DDA au sens de MV est donc donnée par :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \text{tr} \left\{ \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})^\dagger \hat{\mathbf{R}}_{YY} \right\}. \quad (2.14)$$

Ce critère peut être utilisé pour tout type de réseau. Il est consistant. Mais il souffre de quelques points faibles. La maximisation par rapport aux N paramètres se révèle en général trop coûteuse pour être mise en œuvre en pratique. D'autre part, quand le RSB diminue, on atteint un point où l'estimateur commence à faire des erreurs globales. Ces larges erreurs sont dominantes sur les petites erreurs et l'erreur quadratique moyenne augmente brusquement. Ce comportement de seuil est caractéristique des estimateurs paramétriques non linéaires.

2.2.2 Algorithme d'Expectation-Maximization (EM)

Dans la plupart des cas, la recherche des maxima du critère MV est une recherche exhaustive nécessitant un grand coût calculatoire. Pour cela, d'autres algorithmes ont été proposés pour faciliter cette recherche, entre autre l'algorithme EM. L'algorithme EM peut être utilisé pour estimer les DDA dans le cas des ALNU et des antennes non linéaires arbitraires. Dans ce cas, on peut considérer que l'accès aux données nécessaires pour estimer les DDA est impossible car il existe des données manquantes [53]. L'algorithme EM qui est bien adapté à de tels problèmes parce qu'il produit une estimation MV des paramètres quand la relation entre la distribution implicite et la distribution régissant l'observation est une "relation plusieurs à une". Chaque itération de l'algorithme se compose d'une étape d'Expectation (E) suivie d'une étape de Maximization (M). Dans l'étape- E , il suffit d'estimer la fonction vraisemblance des données complètes étant donné les paramètres de l'itération précédente et l'observation. L'étape- M fournit alors une nouvelle estimée des paramètres. Ces deux étapes sont itérées. Dempster *et al.* [16] ont été les premiers à s'intéresser à cette approche, ensuite Feder *et al* [24] et Miller *et al* [52] l'ont appliquée au traitement d'antennes. Il existe plusieurs manières de construire les données complètes selon l'approche utilisée. Une première approche [80] consiste à considérer que les données complètes sont formées des sorties du réseau virtuel uniforme interpolé à partir des données observées sur le réseau non uniforme. Cette approche sera développée à la section 2.4.2 et étendue au chapitre 5, issu de la première approche.

Une deuxième approche proposée par Feder et Miller consiste à former les données incomplètes à partir des sorties des capteurs et les données complètes sont les observations correspondant à chacune des sources. Le but est de trouver une transformation linéaire entre les données complètes et incomplètes et d'appliquer les étapes E et M pour estimer les DDA. Nous résumons seulement cette deuxième approche ici tandis que nous reviendrons en détail sur l'algorithme EM au chapitre 5.

Pour l'échantillon l , le modèle observé est selon (1.5) :

$$\mathbf{y}(l) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(l) + \boldsymbol{\nu}(l), \quad l = 1, \dots, L. \quad (2.15)$$

$\mathbf{y}(l)$, $l = 1, \dots, L$ sont les données incomplètes. Un choix logique des données complètes est l'observation de chaque source toute seule en présence du bruit. Donc,

$$\mathbf{x}_n(l) = \mathbf{a}(\theta_n)s_n(l) + \boldsymbol{\nu}_n(l), \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.16)$$

où on choisit le bruit tel que $E[\boldsymbol{\nu}_n(l)\boldsymbol{\nu}_n^H(l)] = \beta_n\sigma^2\mathbf{I}$ et $\sum_{n=1}^N\beta_n = 1$. En général, $\beta_n = \frac{1}{N}$. L'étape E revient à estimer

$$\hat{\mathbf{x}}_n(l) \triangleq E\left\{\mathbf{x}_n(l) \mid \mathbf{Y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}(l)\right\}. \quad (2.17)$$

qui n'est autre que :

$$\hat{\mathbf{x}}_n(l) = \mathbf{a}(\hat{\theta}_n)\hat{s}_n(l) + \frac{1}{N}\left[\mathbf{y}(l) - \mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\hat{\mathbf{s}}(l)\right]. \quad (2.18)$$

Ensuite, en maximisant le critère de MV, on aura les estimées de $\hat{\theta}_n$ et de $\hat{s}_n(l)$ de la manière suivante :

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta_n} \left\{ \sum_{l=1}^L |\mathbf{a}^H(\theta_n)\hat{\mathbf{x}}_n(l)|^2 \right\}, \quad n = 1, \dots, N \quad (2.19)$$

$$\hat{s}_n(l) = \frac{1}{M}\mathbf{a}^H(\theta_n)\hat{\mathbf{x}}_n(l), \quad n = 1, \dots, N \text{ et } l = 1, \dots, L. \quad (2.20)$$

Les maximisations se font en parallèle, chacune sur une seule dimension. Donc le coût calculatoire est diminué. Cet algorithme est itératif jusqu'à la convergence. Mais la convergence est très lente.

Une manière pour accélérer la convergence globale de l'algorithme EM est d'utiliser la méthode SAGE [14]. SAGE découpe le problème en plusieurs problèmes moins complexes et utilise l'algorithme EM pour mettre à jour l'espace du paramètre associé à chaque problème réduit. Mais l'algorithme SAGE a besoin d'un meilleur point d'initialisation que EM.

2.3 Méthodes à haute résolution (HR)

Il s'agit de méthodes développées récemment à partir des années 1980. Le principal intérêt de ces méthodes est que bien qu'elles soient sous-optimales, elles possèdent des performances proches de l'estimateur au sens du MV (notamment en terme de résolution) tout en présentant une complexité calculatoire relativement faible [50].

La plupart des méthodes à HR sont basées sur les propriétés des sous-espaces propres de la matrice de covariance des données. Celle-ci s'écrit :

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2.21)$$

où \mathbf{R}_{ss} est la matrice covariance des sources. La décomposition en valeurs propres de \mathbf{R} fournit M vecteurs propres $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,\dots,M}$ et M valeurs propres associées $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,M}$ ordonnées par ordre décroissant. Comme il existe N sources, le bruit est blanc et les sources sont décorréelées ou partiellement décorréelées¹, on peut montrer que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N < \lambda_{N+1} = \lambda_{N+2} = \dots = \lambda_M = \sigma^2$. Donc l'information relative au signal $\mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H$ se trouve dans les N vecteurs propres associés aux N plus grandes valeurs propres. On définit une base \mathbf{E}_S du sous-espace signal telle que $\mathbf{E}_S = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N]$, et une base \mathbf{E}_B du sous-espace bruit formé par $(M - N)$ vecteurs propres associés aux $(M - N)$ plus petites valeurs propres : $\mathbf{E}_B = [\mathbf{e}_{N+1}, \dots, \mathbf{e}_M]$. Les propriétés les plus utiles pour les méthodes HR sont les suivantes :

$$\mathbf{E}_S = \mathbf{A}\mathbf{T} \quad (2.22)$$

où

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H\mathbf{E}_S \begin{bmatrix} \lambda_1 - \sigma^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N - \sigma^2 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (2.23)$$

\mathbf{T} est bien inversible car $\lambda_i - \sigma^2 > 0$ pour $i \leq N$. Donc \mathbf{E}_S et \mathbf{A} engendrent le même sous-espace que l'on appelle *sous-espace signal*. Dans le sous-espace bruit, on montre que :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{E}_B &= \sigma^2\mathbf{E}_B = \mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H\mathbf{E}_B + \sigma^2\mathbf{E}_B \\ \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H\mathbf{E}_B &= 0. \end{aligned}$$

Si $\mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}$ est de rang plein (c'est-à-dire $\text{Rang}(\mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}) = N^2$), alors :

$$\mathbf{A}^H\mathbf{E}_B = 0, \quad (2.24)$$

¹cette condition peut être relaxée en utilisant le lissage ou moyenne directe-inverse (*forward-backward averaging*)

²le rang est égal à N si certaines conditions sont satisfaites :

- La matrice de corrélation des N sources est de rang N .
 - Les N sources ont des DDA différentes et l'antenne ne présente pas d'ambiguïté (une condition suffisante pour éviter les ambiguïtés est que l'antenne présente au moins un écart intercepteur Δ tel que $\Delta < \frac{\lambda}{2}$). On considère θ entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ pour éviter l'ambiguïté sur les directions provenant de l'arrière du réseau.
-

ce qui traduit que le sous-espace engendré par \mathbf{E}_B que l'on nomme *sous-espace bruit* correspond au noyau de \mathbf{A} . Comme $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^H)) = (M - N) = \dim(\mathcal{R}(\mathbf{E}_B))$, ceci implique que $\mathcal{R}(\mathbf{E}_B) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^H)$. $\mathcal{N}(\mathbf{A}^H)$ signifie le noyau de \mathbf{A}^H et $\mathcal{R}(\mathbf{E}_B)$ signifie l'espace engendré par \mathbf{E}_B .

2.3.1 Spectral MUSIC

La méthode *MUltiple SIgnal Classification* (MUSIC) a été proposée en 1979 par Schmidt [64] et par Bienvenu [8] sous le nom de goniomètre adaptatif. Il s'agit en fait d'une généralisation du travail présenté par Pisarenko en 1973 [60]. Il s'agit de la méthode à HR généralement considérée comme référence en raison de la possibilité de l'appliquer sur toutes sortes de géométrie d'antennes.

L'idée principale est d'exploiter l'orthogonalité entre le sous-espace signal et le sous-espace bruit donnée par l'équation (2.24) qui se traduit en particulier par :

$$\mathbf{E}_B^H \mathbf{a}(\theta_n) = 0 \quad \text{pour } n = 1, \dots, N. \quad (2.25)$$

On définit la fonction :

$$g(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{E}_B \mathbf{E}_B^H \mathbf{a}(\theta). \quad (2.26)$$

Soit $\{\theta_n\}_{n=1, \dots, N}$ les N DDA des sources. L'orthogonalité des sous-espaces permet de remarquer que les θ_n sont les zéros de la fonction $g(\theta)$:

$$g(\theta_n) = 0 \quad \text{pour } n = 1, \dots, N. \quad (2.27)$$

En pratique, les vraies valeurs de \mathbf{R} ne sont pas disponibles. On l'estime en général à l'aide de l'estimateur empirique :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{y}(t_l) \mathbf{y}(t_l)^H. \quad (2.28)$$

Donc l'estimée de \mathbf{E}_B est obtenue en décomposant $\hat{\mathbf{R}}$ en sous-espaces propres et en construisant $\hat{\mathbf{E}}_B$. Une estimation des DDA peut donc être obtenue en cherchant les θ_n qui maximisent le critère :

$$S_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^H \hat{\mathbf{E}}_B \hat{\mathbf{E}}_B^H \mathbf{a}(\theta)}. \quad (2.29)$$

Cette méthode s'appelle *Spectral MUSIC* car du point de vue de l'analyse spectrale, $S_{MUSIC}(\theta)$ diffère de la densité spectrale du signal mais elle présente des maxima aux mêmes fréquences spatiales. L'avantage de cette méthode est que ses performances sont très proches de celles du maximum de vraisemblance. Mais elle présente quelques points faibles. Si les sources sont corrélées, Spectral MUSIC ne peut pas atteindre la Borne de Cramer-Rao (BCR) même pour un grand nombre d'échantillons et un grand Rapport Signal à Bruit (RSB). Ce problème peut être résolu en utilisant la moyenne directe-inverse dans le cas de deux sources et le lissage spatial en présence d'un nombre de sources plus grand que deux. De plus, le coût calculatoire de cette méthode reste élevé, puisque l'estimation des DDA des N sources nécessite N optimisations à une dimension.

2.3.2 Root-MUSIC

Cette méthode a été conçue pour les ALU pour diminuer le coût calculatoire de Spectral MUSIC [5]. Il s'agit de remplacer la recherche de N maxima par une recherche de racines d'un polynôme. Dans la littérature, on peut lire que Root-MUSIC ne s'applique pas dans le cas des ALNU. Certains auteurs ont par contre proposé de réaliser l'interpolation des données afin de pouvoir utiliser Root-MUSIC pour ce type d'antennes. Mais nous démontrons au chapitre 3 que Root-MUSIC peut être directement utilisée dans le cas des antennes lacunaires sans appliquer une interpolation.

Dans le cas des ALU, Root-MUSIC peut-être présentée de la manière suivante. L'orthogonalité donnée par (2.25) est exploitée de manière différente afin de remplacer la recherche des N maxima du critère par la recherche des racines d'un polynôme. Soit le polynôme $G(z)$ défini par :

$$G(z) = \mathbf{a}(z^{-1})^H \hat{\mathbf{E}}_B \hat{\mathbf{E}}_B^H \mathbf{a}(z) \quad (2.30)$$

avec $a(z) = [1, z^{-1}, z^{-2}, \dots, z^{-(M-1)}]$ (nous rappelons que le cas considéré est l'ALU). Par orthogonalité des sous-espaces, $2N$ racines du polynôme sont données par $\left\{ z_n = e^{-2j\pi \frac{\Delta \sin \theta_n}{\lambda}} \right\}_{n=1,2,\dots,N}$ et $\left\{ \bar{z}_n = e^{2j\pi \frac{\Delta \sin \theta_n}{\lambda}} \right\}_{n=1,2,\dots,N}$. Les angles θ_n peuvent donc être estimés à partir de la phase des N racines de $G(z)$ les plus proches du cercle unité. L'intérêt de cette méthode est d'éviter la recherche de maximum souvent coûteuse et nécessitant en général une valeur d'initialisation. Les performances de Root-MUSIC sont étudiées en détail dans [61] et [70].

2.3.3 ESPRIT

ESPRIT est l'acronyme de Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques. Cette méthode a été proposée par Roy en 1989 [63]. Elle se base aussi sur les sous-espaces, mais au lieu d'utiliser l'orthogonalité sur le sous-espace bruit, elle utilise les propriétés du sous-espace signal. L'intérêt principal de ESPRIT est sa simplicité de mise en œuvre et son faible coût calculatoire. Elle ne nécessite en effet aucune optimisation de critère. Le principe de la méthode consiste à exploiter l'invariance par translation du modèle. On s'aperçoit que si l'on dispose de deux antennes multicapteurs translattées l'une par rapport à l'autre, on mesurera le même signal sur les deux antennes au temps de propagation entre les deux antennes près. Dans le cas des ALU, pour simplifier les développements mathématiques, nous nous limiterons au cas classique où les deux antennes sont formées à partir des M capteurs de la manière suivante : l'antenne 1 comporte les $(M-1)$ premiers capteurs et l'antenne 2 comporte les $(M-1)$ derniers capteurs, de telle sorte que les deux antennes sont décalées d'une distance Δ qui n'est autre que l'espacement entre deux capteurs. Soit $\mathbf{A}^{(1)}$ (resp. $\mathbf{A}^{(2)}$) le modèle de la première (resp. deuxième) antenne formée en prenant les $(M-1)$ premières (resp. dernières) lignes de \mathbf{A} . Étant donné la nature sinusoidale du modèle, $\mathbf{A}^{(2)}$ s'exprime en fonction de $\mathbf{A}^{(1)}$:

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{D} \quad (2.31)$$

où \mathbf{D} est la matrice diagonale ($N \times N$) d'invariance par translation :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} e^{-j2\pi \frac{\Delta \sin \theta_1}{\lambda}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-j2\pi \frac{\Delta \sin \theta_N}{\lambda}} \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

On définit de manière identique à $\mathbf{A}^{(1)}$ et $\mathbf{A}^{(2)}$, les sous-espaces signal $\mathbf{E}_S^{(1)}$ et $\mathbf{E}_S^{(2)}$ associés aux données de chacune des antennes. D'après l'équation (2.22), il s'en suit par construction :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_S^{(1)} &= \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{T} \\ \mathbf{E}_S^{(2)} &= \mathbf{A}^{(2)}\mathbf{T}. \end{cases} \quad (2.33)$$

En exploitant la propriété d'invariance par translation (2.31), la relation entre les deux sous-espaces signal est donnée par :

$$\mathbf{E}_S^{(2)} = \mathbf{E}_S^{(1)}\Phi \quad (2.34)$$

avec

$$\Phi = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}. \quad (2.35)$$

En observant la structure de Φ , on montre que la matrice \mathbf{D} correspond aux valeurs propres de Φ . Donc étant donné $\mathbf{E}_S^{(1)}$ et $\mathbf{E}_S^{(2)}$, on peut résoudre l'équation (2.34), pour obtenir Φ dont les valeurs propres permettent d'obtenir une estimation des θ_n . En pratique, seules les estimées des sous-espaces signal sont disponibles, alors l'équation (2.34) se résout par la méthode des moindres carrés, des moindres carrés totaux ou moindres carrés structurels [37]. Cette méthode présente de bonnes performances par rapport à d'autres méthodes à HR ou se basant sur d'autres techniques. Plusieurs articles ont étudié les performances d'ESPRIT et ses variantes, entre autres [68] [22] [57]. Unitary ESPRIT [39] est une variante d'ESPRIT qui utilise le fait que l'opérateur représentant les retards de phase entre les deux sous-espaces est unitaire. Le principe consiste à contraindre les valeurs propres de l'opérateur à se trouver sur le cercle d'unité. Unitary ESPRIT améliore les performances comparée à ESPRIT, surtout pour les sources corrélées. De plus, Unitary ESPRIT a un coût calculatoire réduit par rapport à ESPRIT car l'ensemble des calculs matriciels est effectué sur les valeurs réelles.

La principale limitation d'ESPRIT est qu'elle s'applique seulement à des géométries très spécifiques : ALU ou ALNU identiques translatées l'une par rapport à l'autre. Nous verrons cependant au chapitre 5 une méthode d'interpolation permettant d'utiliser ESPRIT sur tous les types de réseaux.

2.3.4 IQML

Nous détaillons la méthode Iterative Quadratic Maximum Likelihood (IQML). Cette méthode n'est plus basée sur les propriétés des sous-espaces. Elle se base sur la structure du modèle, plus particulièrement sur $\mathbf{A}(\theta)$ pour ensuite créer un polynôme et estimer les DDA à partir des racines de ce polynôme. L'algorithme d'IQML a été décrit indépendamment par Bresler et Macovski [10] et Kumaresan, Scharf et Shaw [45] [44] [65]. La discussion ici est semblable à celle dans [10] mais avec une petite modification due à Nagesha et à Kay [54]. Cette méthode s'applique uniquement au cas des ALU. IQML est en fait une approche polynômiale qui se base sur l'expression du critère de MV en terme de prédiction polynômiale du signal sans bruit. En effet, la fonction coût de MV qu'il faut minimiser pour obtenir les estimées des DDA est :

$$C_{MV}(\boldsymbol{\theta}) \triangleq \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}\|^2. \quad (2.36)$$

L'estimation de la matrice des amplitudes \mathbf{S} au sens de maximum de vraisemblance déterministe étant $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{A}^\dagger(\boldsymbol{\theta})\mathbf{Y}$, cette fonction devient :

$$C_{MV}(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) (\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}))^{-1} \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{Y}\|^2 = \mathbf{Y}^H \mathbf{P}_B \mathbf{Y} \quad (2.37)$$

où

$$\mathbf{P}_B \triangleq \mathbf{I} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) (\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}))^{-1} \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}). \quad (2.38)$$

L'approche polynomiale se base sur l'introduction du polynôme $b(z) = b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N$, dont les zéros sont fonction des paramètres $\{\theta_n\}_{n=1}^N : z_n = e^{-2\pi j \frac{\Delta \sin \theta_n}{\lambda}}$. Par définition, la matrice

Toeplitz \mathbf{B} de dimension $M \times (M-N) : \mathbf{B}^H \triangleq \begin{bmatrix} b_N & b_{N-1} & \dots & b_0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & b_N & b_{N-1} & \dots & b_0 \end{bmatrix}$ est orthogonale

à \mathbf{A} , c'est-à-dire $\mathbf{B}^H \mathbf{A} = 0$, alors $\mathbf{P}_B = \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H$. Donc la minimisation de (2.36) peut être exprimée en fonction des coefficients $\{b_n\}_{n=1}^N$ comme suit :

$$\mathbf{b} = \arg \min_{\mathbf{b} \in \boldsymbol{\theta}_b} \sum_{l=1}^L \mathbf{y}^H(l) \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{y}(l) \quad (2.39)$$

où $\mathbf{b} = [b_n, b_{n-1}, \dots, b_0]^T$ et $\boldsymbol{\theta}_b$ est l'espace de tous les vecteurs dont les polynômes associés ont des zéros sur le cercle unité. La minimisation de (2.39) repose sur l'équation :

$$\mathbf{B}^H \mathbf{y}(l) = \tilde{\mathbf{y}}(l) \mathbf{b} \quad (2.40)$$

où $\tilde{\mathbf{y}}(l)$ est la matrice de dimensions $(M-N) \times (N+1)$ définie par :

$$\tilde{\mathbf{y}}(l) \triangleq [\mathbf{y}(N+1 : M, l), \mathbf{y}(N : M-1, l), \dots, \mathbf{y}(1 : M-N, l)] \quad (2.41)$$

où $\mathbf{y}(k : r, l)$ est le sous-vecteur de $\mathbf{y}(l)$ contenant les éléments entre la ligne k et la ligne r . Donc (2.39) devient :

$$\mathbf{b} = \arg \min_{\mathbf{b} \in \boldsymbol{\theta}_b} \mathbf{b}^H \mathbf{C} \mathbf{b} \quad \text{où} \quad \mathbf{C} \triangleq \sum_{l=1}^L \tilde{\mathbf{y}}^H(l) (\mathbf{B} \mathbf{B}^H)^{-1} \tilde{\mathbf{y}}(l). \quad (2.42)$$

Cette méthode est itérative, elle commence par une initialisation, ensuite par le calcul de \mathbf{C} et la recherche des \mathbf{b} qui minimisent (2.42), puis recalcule \mathbf{C} et ainsi de suite jusqu'à convergence. Plusieurs approches ont été proposées afin de faire la minimisation (2.42) sous différentes contraintes. Cette méthode a un coût calculatoire plus grand que les autres méthodes HR.

2.4 Interpolation d'un réseau virtuel

Comme certaines méthodes à HR ne peuvent pas être directement utilisées sur les ALNU, nous décrivons dans cette section les méthodes se basant sur une interpolation de l'ALNU en une Antenne Virtuelle Linéaire Uniforme (AVLU) afin de pouvoir appliquer les méthodes à HR à l'AVLU. Cette interpolation peut être par secteur comme la méthode proposée par Friedlander [27]. L'AVLU est calculée à partir du réseau réel à l'aide d'une procédure d'interpolation linéaire qui ne dépend pas du modèle du signal. Un autre type d'interpolation existe, c'est l'interpolation basée sur le modèle du signal, où on utilise en général l'algorithme EM pour interpoler les données sur une AVLU, comme les méthodes proposées par Weiss [80], Nakazawa [56] et Chung [14].

2.4.1 Interpolation par secteur

Le principe de cette approche est présenté dans l'article de Friedlander [27]. L'idée clé est d'estimer les DDA à partir des sorties de l'AVLU au lieu de les estimer en utilisant le réseau réel. Les sorties de l'ALNU sont interpolées sur l'AVLU, par l'intermédiaire d'une technique d'interpolation linéaire. Les coefficients d'interpolation sont obtenus pour chaque secteur en minimisant l'erreur d'interpolation pour des signaux arrivant d'un secteur donné. Les coefficients d'interpolation ne dépendent donc que de la géométrie et sont indépendants des données. En fait, à cause de la différence des vecteurs direction entre l'ALNU et l'AVLU, l'interpolation se fait seulement sur un secteur d'angles pour minimiser l'erreur de transformation, et ce processus est répété sur plusieurs secteurs pour couvrir tout l'azimut. L'interpolation dans les différents secteurs se fait une seule fois avant le processus d'estimation des DDA. La conception de l'interpolation nécessite plusieurs étapes. La première consiste à diviser le champ visuel en T secteurs³. Le secteur t est défini par l'intervalle $[\theta_t^1, \theta_t^2]$. Ensuite on définit le pas de discrétisation δ pour couvrir chaque secteur : $\boldsymbol{\theta}_t = [\theta_t^1, \theta_t^1 + \delta, \theta_t^1 + 2\delta, \dots, \theta_t^2]$. La matrice direction associée est calculée pour chaque secteur $\boldsymbol{\theta}_t$: $\mathbf{A}_t = [\mathbf{a}(\theta_t^1), \dots, \mathbf{a}(\theta_t^2)]$. L'étape suivante consiste à construire l'AVLU de \bar{M} ($\bar{M} \leq M$) éléments : on choisit une antenne uniforme d'ouverture identique à celle de l'ALNU. On en déduit la matrice direction de ce nouveau réseau associée à chaque secteur : $\bar{\mathbf{A}}_t = [\bar{\mathbf{a}}(\theta_t^1), \dots, \bar{\mathbf{a}}(\theta_t^2)]$. L'hypothèse essentielle est que les sorties de l'AVLU sont obtenues par une interpolation linéaire des données de l'ALNU dans chaque secteur t . Cette hypothèse se traduit par : $\mathbf{B}_t \mathbf{A}(\theta_t) = \bar{\mathbf{A}}(\theta_t)$ où \mathbf{B}_t est une matrice d'interpolation fixe de dimension $\bar{M} \times M$. La matrice d'interpolation est obtenue en résolvant l'équation précédente au sens des moindres carrés :

$$\mathbf{B}_t = \bar{\mathbf{A}}_t \mathbf{A}_t^\dagger. \quad (2.43)$$

Les matrices \mathbf{B}_t se calculent une seule fois au début du traitement. Ainsi, un réseau virtuel est créé et il est uniforme, donc l'une des méthodes HR peut être appliquée, par exemple Root-MUSIC. Ensuite, l'estimation des DDA se fait secteur par secteur de la manière suivante. En calculant la matrice de covariance associée à l'AVLU, on trouve une matrice du bruit égale à $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_t = \mathbf{B}_t \mathbf{B}_t^H$. Donc le bruit n'est plus blanc, et avant d'appliquer Root-MUSIC il est nécessaire de faire un blanchiment du bruit. Ensuite, après application de Root-MUSIC, N solutions sont obtenues dans chaque secteur, donc NT solutions pour tout le champ. Les angles n'appartenant pas à leurs secteurs sont éliminés et on conserve les N angles associés aux racines les plus proches du cercle unité. Ces angles constituent l'estimation des DDA. Cette méthode souffre de l'erreur d'interpolation introduite et qui ne peut pas être diminuée. Cette erreur rend la méthode non efficace asymptotiquement. L'autre défaut de cette méthode est la présence de beaucoup de paramètres à choisir. C'est une procédure inutile pour les antennes lacunaires car Root-MUSIC peut être utilisée directement, comme c'est expliqué au chapitre 3.

Plusieurs travaux ont suivi cet article avec le même principe d'interpolation. Plusieurs algorithmes d'estimation de DDA ont été utilisés comme Root-MUSIC [27], ESPRIT [79][31], et un banc de formation de faisceau associé à Root-MUSIC [32]. Et pour résoudre les problèmes des signaux corrélés, la transformation de Friedlander a été utilisée avec Spectral MUSIC avec lissage spatial pour des sources corrélées à bande étroite [76][28], Root-MUSIC avec lissage fréquentiel pour des sources corrélées à large bande [30][29] et avec la méthode MODE [77][78].

Dans les articles [7] et [79], le réseau interpolé est une version translatée mathématiquement du réseau réel. Donc le réseau réel n'est pas limité à être physiquement réalisable. Ainsi on aura une réduction de l'erreur d'interpolation et du biais d'interpolation, et ESPRIT peut être utilisée.

³Dans les simulations, nous considérons un nombre de secteurs égal à 5 ou 6

De plus, on pourra estimer jusqu'à $(M-1)$ DDA. La différence entre ces deux articles est que dans [7] l'interpolation est faite sur les matrices direction comme d'habitude, sans nécessité de blanchir le bruit car les auteurs utilisent une variante en décomposant la matrice d'interpolation en valeurs singulières. Dans [79], après le calcul des matrices d'interpolation, elles sont directement introduites aux sous-espaces signal du réseau réel \mathbf{Y} et du réseau virtuel \mathbf{X} tel que : $\mathbf{E}_X = \mathbf{B}_t \mathbf{E}_Y$ pour chaque segment. Alors les DDA sont estimées à l'aide de ces sous-espaces pour chaque secteur et la suite est comme expliquée avant.

2.4.2 Interpolation basée sur le modèle du signal

Ce type d'interpolation est différent de celui utilisé par Friedlander. Dans ce cas, l'interpolation ne se fait pas par secteur et ne dépend pas de la géométrie. La transformation de l'ALNU en AVLU se fait en se basant sur le modèle du signal. Dans ce paragraphe, la méthode proposée par Weiss [80] est exposée. Cette méthode est composée de deux algorithmes : EM et IQML. Cette méthode s'applique seulement aux ALNU lacunaires. Comme IQML ne peut être utilisée que pour les cas des ALU, les auteurs proposent d'utiliser EM pour transformer l'ALNU en AVLU. Donc ce qui diffère avec la méthode EM présentée à la section 2.2.2 c'est le choix des données complètes, parce que dans l'algorithme EM, on avait choisi comme données complètes l'observation de chaque source toute seule en présence du bruit. Ici, ce que les auteurs proposent c'est de prendre comme données complètes les sorties d'un réseau virtuel uniforme, dont le réseau réel fait partie. Donc la relation qui joint les données observées \mathbf{Y} aux données complètes \mathbf{X} est :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G}^\top \mathbf{X} \quad (2.44)$$

où \mathbf{G} est une matrice de dimensions $M \times M'$ qui fait correspondre les capteurs existants à ceux de l'AVLU, où M' est le nombre de capteurs dans l'ALNU et M est le nombre de capteurs dans l'AVLU. Par exemple, si on prend l'ALNU formée de trois capteurs aux positions 1, 2, 5, alors l'AVLU serait formée des capteurs 1, 2, 3, 4, 5. La matrice \mathbf{G} est telle que :

$$\mathbf{G}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ De la même manière on construit la matrice } \bar{\mathbf{G}} \text{ qui relie les capteurs}$$

manquants interpolés, à ceux de l'AVLU. Pour le même exemple que précédemment, on obtient :

$$\bar{\mathbf{G}}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ A l'itération } (k), \text{ l'étape-}E \text{ consiste à estimer les données interpolées}$$

$\hat{\mathbf{X}}^{(k)} = E \{ \mathbf{X} \mid \mathbf{Y}, \Theta \}$. Soit \mathbf{A}_{VULA} la matrice direction correspondant à l'AVLU. $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ est alors égale à :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}^{(k)} &= \bar{\mathbf{G}} \left[\mathbf{A}_{VULA} (\mathbf{A}_{VULA}^H \mathbf{A}_{VULA})^{-1} \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{X}}^{(k-1)} \right] + \mathbf{G} \mathbf{Y} \\ &= \bar{\mathbf{G}} \left\{ \left[\mathbf{I} - \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \right] \hat{\mathbf{X}}^{(k-1)} \right\} + \mathbf{G} \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

L'analyse de cette formule montre que dans l'AVLU, les données existantes restent les mêmes (il s'agit du second terme de l'équation), alors que pour les capteurs manquants, les sorties correspondantes sont interpolées. D'autre part, on a introduit la matrice \mathbf{B} dans le calcul, car maintenant le réseau virtuel est uniforme et IQML peut être appliquée dans l'étape- M pour estimer les DDA.

Cette méthode tend à diminuer l'erreur d'interpolation au fur et à mesure des itérations. Mais elle ne s'applique que pour les cas des réseaux lacunaires. Elle a un coût calculatoire important et IQML ne présente pas de bonnes performances. Pour cela, nous allons remplacer IQML par

une autre méthode à HR qui est ESPRIT au chapitre 5 qui est plus simple et donne de meilleurs résultats.

Un autre papier [56] reprend la même procédure en substituant IQML par MODE car MODE converge plus rapidement que IQML. Mais cette méthode souffre des mêmes problèmes que EM-IQML.

2.5 Matrice de covariance Toeplitz augmentée

Une autre approche pour pouvoir utiliser les méthodes à HR dans le cas des ALNU consiste à compléter la matrice de covariance de l'ALNU afin d'obtenir une autre matrice de covariance ayant la même structure de celle d'une ALU. Elle peut être appliquée dans le cas des sources non corrélées. Cette méthode a été proposée au début par Pillai *et al.* [59]. Elle s'applique aux réseaux sans trou, c'est-à-dire tous les écarts possibles entre les capteurs existent (voir la section 1.4.1). Elle se base sur un théorème de Carathéodory pour les problèmes de moments finis. Étant donné M constantes complexes c_0, c_1, \dots, c_{M-1} dont l'une au moins est non nulle et $M > 1$, qui satisfont $c_{-m+M/2}^* = c_{m+M/2}$, alors il existe un entier N , $1 \leq N \leq M$ et des constantes $\alpha_n > 0$ et ω_n pour $n = 1, 2, \dots, N$ tel que :

$$c_m = \sum_{n=1}^N \alpha_n e^{-jm\omega_n} + \alpha_0 \delta(m), \quad m = 0, 1, \dots, M-1. \quad (2.45)$$

De plus, l'entier N et les constantes α_n et ω_n sont uniquement déterminés. Or, un élément (i, j) de la matrice de covariance des capteurs \mathbf{Y} se met sous la forme :

$$(\mathbf{R})_{i,j} \triangleq r_{ij} = \sum_{n=1}^N (\mathbf{R}_{SS})_{n,n} e^{-j\Delta(d_j-d_i)\omega_n} + \sigma^2 \delta(i-j) \quad (2.46)$$

en utilisant l'écriture fréquentielle au lieu de θ avec $\omega_n = 2\pi \frac{\sin \theta_n}{\lambda}$. Une comparaison entre (2.45) et (2.46) montre que la covariance exprimée en fonction des écarts intercapteurs (2.46) a une représentation naturelle de Carathéodory. De plus, l'analogie est exacte si le réseau non uniforme de M' capteurs est sans trou, c'est à dire les M' positions des éléments sont distribuées de manière à ce que l'ensemble des entiers (m) correspondant aux écarts intercapteurs tel que $(d_j - d_i) = m\Delta$ pour $(i, j = 1, 2, \dots, M')$, engendre l'ensemble $(0, 1, \dots, M-1)$ où $M \leq \frac{M'(M'-1)}{2}$. Donc avec M' capteurs, il existe M éléments d'autocorrélation $r(m)$ où :

$$r(m) = r(i-j) = \sum_{n=1}^N (\mathbf{R}_{SS})_{n,n} e^{-j\Delta(d_j-d_i)\omega_n} + \sigma^2 \delta(i-j), \quad m = 0, 1, \dots, M-1. \quad (2.47)$$

Donc pour un M' donné, un tel ensemble de positions $d_1, d_2, \dots, d_{M'}$ forme une séquence définie comme une séquence Carathéodory de longueur M' . Pour estimer les DDA, une matrice Toeplitz de dimension $M \times M$ est formée ainsi :

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \dots & r(M-1) \\ r^*(1) & r(0) & r(1) & \dots & r(M-2) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r^*(M-1) & r^*(M-2) & & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

où $r(m)$ est donné par (2.47). On appelle cette matrice matrice de covariance Toeplitz augmentée. Elle est identique à celle qu'on aurait obtenue avec un réseau uniforme de M capteurs. Donc c'est possible d'estimer un nombre de sources $N > M'$, sous réserve que $N < M$, alors qu'avant, N devait satisfaire à la condition $N < M'$. A la suite de la construction de la nouvelle matrice de covariance, on pourra appliquer une méthode à HR, par exemple Root-MUSIC pour estimer les DDA.

Abramovich *et al.* ont amélioré cette méthode. Dans [2], les auteurs se situent dans le cas des réseaux à MR. Ils étudient les performances par rapport à la Borne de Cramer-Rao (BCR). Dans le cas conventionnel, c'est-à-dire $N < M'$, les techniques basées sur la décomposition en sous-espaces (MUSIC et ses variantes) sont asymptotiquement optimales dans le sens de MV et n'ont pas besoin d'amélioration dans le domaine asymptotique. Cependant, les performances de MUSIC se dégradent par rapport à la BCR dans le domaine pré-asymptotique. Ce phénomène bien connu d'identification erronée peut être réduit par une nouvelle méthode qui utilise des propriétés spécifiques des réseaux MR et de leurs matrices de covariance. La méthode introduite se compose de deux étapes : égalisation de Maximum-Entropie (ME) de MUSIC suivie de la troncature du sous-espace signal.

Dans le cas supérieur, c'est-à-dire $M' < N < M$, il est nécessaire d'employer asymptotiquement un grand nombre d'échantillons pour avoir une BCR raisonnable. Il a été démontré, analytiquement et par simulation, que l'approche directe bien connue d'augmentation de la matrice de covariance est efficace (dans le sens de MV) seulement pour les $RSB \lesssim 0dB$. Pour les grands RSB, l'augmentation de la matrice de covariance et sa variante proposée en ajoutant la technique de troncature du sous-espace signal présentent des performances toujours beaucoup plus mauvaises que la BCR correspondante, même asymptotiquement. Ainsi, les auteurs ont présenté une optimisation locale de MV pour raffiner les estimées des DDA. Les simulations montrent que les performances convergent essentiellement à la BCR.

Un autre papier [1] discute le cas des antennes lacunaires qui présentent des trous. Cet article a démontré que l'estimation spatiale de spectre et l'estimation des DDA dans ce type de réseaux mènent au problème de remplissage optimal des matrices de covariance incomplètes de Toeplitz. Il montre que le remplissage unique de maximum d'entropie est réalisable pour toutes les conditions initiales réalisables. Quand les écarts de la matrice de covariance sont précisément connus (cas déterministe), la solution optimale existe toujours. Le manque de quelques écarts exige la modification du remplissage de ces écarts manquants. De diverses techniques pour une telle modification ont été proposées et examinées. On s'est avéré que des algorithmes de programmation convexe sont efficaces pour ces approches de "modification-remplissage".

2.6 Statistiques d'ordre supérieur

Le but est toujours le même, c'est de pouvoir appliquer les méthodes à HR aux ALNU. Dans cette méthode, le travail n'est plus fait sur la matrice de covariance, mais plutôt sur la matrice des cumulants. Ce paragraphe se base sur le travail présenté dans [13]. Cet article démontre que la condition dans ESPRIT d'avoir deux antennes translatées peut être facilement supprimée en utilisant les statistiques d'ordre supérieur (cumulants) des données observées au lieu d'utiliser les statistiques d'ordre 2 (matrice de covariance). Il faut cependant que les sources soient non gaussiennes, sinon les cumulants d'ordre 4 auront une valeur nulle. Une ALNU de M capteurs peut résoudre jusqu'à $N = M$ sources. L'ensemble des écarts entre les capteurs $(d_i - d_j) = g_m \Delta$

engendre l'ensemble $\mathbf{g} \triangleq \{-g_{max}, \dots, -g_1, 0, g_1, \dots, g_{max}\}$ où g_{max} est l'écart maximal qui existe. Soit : $\mathbf{z}_{g_m} = \mathbf{y}_i(t)\mathbf{y}_j^H(t)$ où $g_m = (d_i - d_j) \in \mathbf{g}$. Les matrices suivantes sont construites :

$$\mathbf{Z}_p(t) = [\mathbf{z}_{p_0}(t), \mathbf{z}_{p_1}(t), \dots, \mathbf{z}_{p_r}(t)]^\top \quad \mathbf{p} \triangleq \{p_0, p_1, \dots, p_r\} \subset \mathbf{g} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{Z}_q(t) = [\mathbf{z}_{q_0}(t), \mathbf{z}_{q_1}(t), \dots, \mathbf{z}_{q_r}(t)]^\top \quad \mathbf{q} \triangleq \{q_0, q_1, \dots, q_r\} \subset \mathbf{g}. \quad (2.50)$$

Les matrices de cumulants proposées sont de la forme : $\mathbf{C}_{p,q} = cum\{\mathbf{Z}_p(t)\mathbf{Z}_q^H(t)\}$, où $cum\{\cdot\}$ signifie l'opération des cumulants. On montre que les cumulants $\mathbf{C}_{p,q}$ s'écrivent :

$$\mathbf{C}_{p,q} = \mathbf{A}_p \mathbf{\Gamma} \mathbf{A}_q^H \quad (2.51)$$

où $\mathbf{A}_p = [\mathbf{a}_p(\theta_1), \dots, \mathbf{a}_p(\theta_N)]$, c'est-à-dire la matrice direction d'un réseau dont les capteurs sont situés aux positions $\mathbf{p} = \{p_0, p_1, \dots, p_r\}$. $\mathbf{\Gamma} = diag\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$, et $\gamma_n = cum\{\mathbf{s}_n(t), \mathbf{s}_n^H(t), \mathbf{s}_n^H(t), \mathbf{s}_n(t)\}$ désigne le cumulants d'ordre 4 de la source n . La structure de (2.51) permet d'appliquer MUSIC directement à $\mathbf{C}_{p,q}$ et estimer les DDA.

De plus, si on choisit $\mathbf{p} = \{0, d_2, d_3, \dots, d_M\}$ et $\mathbf{q} = \{-d_2, 0, (d_3 - d_2), \dots, (d_M - d_2)\}$, alors $p_i - q_i = d_2$, $\mathbf{C}_{p,q}$ devient

$$\mathbf{C}_{p,q} = \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Phi} \mathbf{A}^H \quad (2.52)$$

où $\mathbf{\Phi} = diag\left\{e^{-j2\pi\frac{d_2\Delta\sin\theta_1}{\lambda}}, \dots, e^{-j2\pi\frac{d_2\Delta\sin\theta_N}{\lambda}}\right\}$. La paire des matrices cumulants $\{\mathbf{C}_{p,p}, \mathbf{C}_{p,q}\} = \{\mathbf{A}\mathbf{\Gamma}\mathbf{A}^H, \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Phi}\mathbf{A}^H\}$ réserve une structure identique à la matrice de covariance utilisée dans l'algorithme ESPRIT. Si le réseau était à MR, alors $\mathbf{g} = \{-d_M, \dots, 1, 0, 1, \dots, d_M\}$. Dans ce cas, $\mathbf{p} = \{0, 1, 2, \dots, d_M\}$ et $\mathbf{q} = \{-1, 0, 1, \dots, d_M - 1\}$. Alors la matrice direction \mathbf{A} qui se trouve dans le calcul des matrices cumulants n'est autre que la matrice direction d'une ALU à M capteurs. Cette méthode exige un grand coût calculatoire et un grand nombre d'échantillons pour obtenir une bonne précision des matrices cumulants.

2.7 Méthodes se basant sur le développement de Fourier

Une autre classe de méthodes a été proposée pour pouvoir appliquer les méthodes à HR aux ALNU. Ces méthodes se basent sur le développement de Fourier. Elles se centrent sur les structures du critère de Spectral MUSIC ou bien sur la matrice de direction pour pouvoir profiter de leurs propriétés.

2.7.1 Domaine-Fourier (DF) et Root-MUSIC

Cette méthode se base sur l'article [62] présenté par Rübsamen et Gershman. Elle s'applique aux ALNU à géométrie aléatoire. Elle étend le concept de Root-MUSIC pour ce type d'antennes. Cette technique exploite le fait que la fonction spectre de Spectral MUSIC est périodique en angles. Elle utilise le développement tronqué en série de Fourier de cette fonction pour reformuler le problème d'estimation des DDA en tant que problème de recherche de racines d'un polynôme. La fonction spectre de MUSIC est donnée par (2.26) : $g(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{E}_B \mathbf{E}_B^H \mathbf{a}(\theta)$. Ce spectre est une fonction périodique de θ de période 2π . Alors, le développement en série de Fourier donne : $g(\theta) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q e^{jq\theta}$ où les coefficients de Fourier sont donnés par : $G_q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) e^{-jq\theta} d\theta$. En tronquant les séries de Fourier à $2Q - 1$ points et en utilisant la notation $z = e^{j\theta}$, $g(\theta)$ est approximée de la manière suivante : $g(\theta) \simeq \sum_{q=-Q+1}^{Q-1} G_q z^q \triangleq p(z)$. L'approximation Transformée de Fourier Discrète (TFD) suivante est utilisée : $\tilde{p}(z) \triangleq \sum_{q=-Q+1}^{Q-1} \tilde{G}_q z^q$ où \tilde{G}_q , $q = -Q + 1, \dots, Q - 1$ sont les coefficients TFD. Le degré de $\tilde{p}(z)$ est de $2Q - 2$. Il a été

démontré que les racines de ce polynôme satisfont la propriété de réciprocity conjuguée, donc les DDA sont estimées par les N racines de $\tilde{p}(z)$ les plus proches du cercle unité se trouvant à l'intérieur de ce cercle. Cette méthode s'appelle Domaine-Fourier (DF) Root-MUSIC.

De plus, les auteurs proposent une modification à l'algorithme DF Root-MUSIC qui évite l'étape de recherche des racines du polynôme en la remplaçant par une simple recherche linéaire sur θ . Ils utilisent un zero-padding à $2J - 1$ ($J > Q$) valeurs où $2J - 1$ est le nombre nécessaire de points du spectre pour $\tilde{p}(z)$:

$$\begin{aligned}\tilde{p}(z) &= \sum_{q=-J+1}^{J-1} \tilde{G}_q z^q \\ &= \sum_{q=-J+1}^{J-1} \tilde{G}_q e^{jq\theta} \\ &\triangleq \tilde{p}(\theta)\end{aligned}\tag{2.53}$$

où $\tilde{G}_q = 0$ pour $Q - 1 < |q| < J - 1$. Donc, un total de $2J - 1$ échantillons uniformes du spectre $\tilde{p}(\theta)$ dans $-\pi \leq \theta \leq \pi$ peuvent être calculés en appliquant la TFD Inverse (TFDI) à la séquence zero-padded des coefficients \tilde{G}_q , $q = -J + 1, \dots, J + 1$. Comme conséquence, il n'y a plus de recherche de racines de polynôme, cette étape a été remplacée par une recherche linéaire sur θ .

Cette méthode s'applique aux ALNU. Puisqu'elle se base sur le développement de Fourier, elle a une erreur systématique due à la troncature du développement.

2.7.2 Technique de Séparation du Vecteur Direction (TSVD)

Ce travail est présenté dans l'article [6] par Belloni *et al.*. Cette méthode s'applique aux ALNU à géométrie arbitraire et aux antennes non linéaires non uniformes [15]. Elle exploite le formalisme de modélisation de l'onde afin de décrire la Technique de Séparation du Vecteur Direction (TSVD). Le vecteur direction d'une ALNU à géométrie arbitraire peut être modélisé comme le produit d'une matrice caractéristique décrivant le réseau lui-même (matrice d'échantillonnage) et un vecteur avec une structure de Vandermonde contenant le paramètre angulaire inconnu (vecteur de coefficient). TSVD permet l'utilisation de techniques basées sur la recherche des racines d'un polynôme comme Root-MUSIC dans des configurations à géométrie arbitraire 2-D et 3-D. Elle n'exige pas une division de secteurs, et fournit une erreur plus petite en recouvrant le champ de vision de 360° .

L'élément m de l'ALNU à géométrie arbitraire peut s'écrire sous la forme :

$$[\mathbf{a}(\theta)]_m = e^{-j\omega\tau_m(\theta)} = e^{j\kappa r_m \cos(\gamma_m - \theta)}\tag{2.54}$$

où $\kappa = (\omega/c)$ est le nombre d'ondes, $\omega = 2\pi f$ est la fréquence angulaire et $\tau_m(\theta) = -(r_m/c) \cos(\gamma_m - \theta)$ représente le retard de propagation associé entre le capteur m et la source incidente de la direction θ . r_m est la distance entre le capteur et le centroïde du réseau et γ_m est la position angulaire du capteur m dans les coordonnées polaires. En utilisant le développement de Jacobi-Anger, (2.54) s'exprime :

$$\begin{aligned}e^{j\kappa r_m \cos(\gamma_m - \theta)} &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} j^q J_q(\kappa r_m) e^{jq(\gamma_m - \theta)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\mathbf{G}_s(r_m, \gamma_m)]_{m,q} e^{-jq\theta}\end{aligned}\tag{2.55}$$

où $[\mathbf{G}_s(r_m, \gamma_m)]_{m,q} = \sqrt{2\pi} j^q J_q(\kappa r_m) e^{jq\gamma_m}$ définit l'élément (m, q) de la matrice d'échantillonnage $\mathbf{G}_s(r_m, \gamma_m)$, et $J_q(\cdot)$ représente la fonction de Bessel du 1^{er} type d'ordre q . $\mathbf{G}_s(r_m, \gamma_m)$ dépend seulement de la configuration de réseau et elle est indépendante de l'onde. L'idée de modélisation de l'onde consiste à écrire la partie dépendante du signal comme un produit d'une matrice d'échantillonnage \mathbf{G}_s indépendante du signal et un vecteur de coefficients $\mathbf{d}_s(\theta)$ indépendant du réseau. En écrivant (2.55) sous une forme matricielle, on peut exprimer l'idée clé du concept de TSVD : $\mathbf{a}(\theta) = \mathbf{G}_s \mathbf{d}_s(\theta)$.

Les auteurs proposent une approche pratique pour la détermination de la matrice \mathbf{G} en s'appuyant sur des mesures calibrées d'un réseau. Ils calculent la TFDI d'un nombre K de points de l'ensemble discret de points mesurés de période 2π . Ensuite, ils considèrent la périodicité en K -points de cette TFDI et font une troncature à T points pour enfin arriver à la matrice \mathbf{G} . Le principe de TSVD se réécrit :

$$\mathbf{a}(\theta) = \mathbf{G} \mathbf{d}(\theta) + \epsilon(T, K) \quad (2.56)$$

où le vecteur de Vandermonde $\mathbf{d}(\theta)$ se met sous la forme : $\mathbf{d}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{T}} [e^{j\frac{T-1}{2}\theta}, \dots, 1, \dots, e^{-j\frac{T-1}{2}\theta}]^T$ et $\epsilon(T, K)$ contient l'erreur de modélisation due au repliement (à cause de la périodicité) et l'erreur de troncature. Quand le niveau d'erreur causé par l'erreur de troncature est bien plus petit que la variance des estimées des DDA, cette erreur peut être négligée. La matrice des données \mathbf{Y} peut être écrite :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{S} + \mathbf{V} \simeq \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} + \mathbf{V} \quad (2.57)$$

où $\mathbf{D} = [\mathbf{d}(\theta_1), \dots, \mathbf{d}(\theta_N)]$. La matrice de covariance s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}_S \mathbf{A} \mathbf{E}_S^H + \sigma^2 \mathbf{E}_B \mathbf{E}_B^H = \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{D}^H \mathbf{G}^H + \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (2.58)$$

\mathbf{E}_s , \mathbf{A} et $\mathbf{G} \mathbf{D}$ engendrent le même sous-espace. Alors $\mathbf{G} \mathbf{D}$ est orthogonale à \mathbf{E}_b . Donc on peut exprimer le spectre de MUSIC par la formule suivante :

$$S_{MUSIC}(\theta) = (\mathbf{d}(\theta)^H \mathbf{G}^H \mathbf{E}_B \mathbf{E}_B^H \mathbf{G} \mathbf{d}(\theta))^{-1} \quad (2.59)$$

ce qui permet l'utilisation des algorithmes de recherche de racines de polynôme, comme par exemple Root-MUSIC.

Cette méthode introduit deux types d'erreur : l'erreur de repliement et l'erreur de troncature. Ces erreurs la rendent moins précise et elles nécessitent un grand nombre d'échantillons pour avoir de bonnes valeurs de TFDI.

2.8 Résultats numériques : comparaison des méthodes

Dans cette section, nous nous intéressons aux résultats numériques de simulation afin de comparer les différentes méthodes citées.

2.8.1 ALU

Au début, nous allons comparer les méthodes HR les plus classiques pour les ALU. Les simulations sont effectuées sur une ALU de $M = 10$ capteurs. Dans le 1^{er} cas, nous considérons le cas de deux sources localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$ et nous disposons de $L = 500$ échantillons. Le module des sources est unitaire et leur phase est uniformément distribuée entre 0 et 2π . Les sources sont décorréliées. Nous traçons la racine carrée de l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) en degré en fonction du RSB. La Fig. 2.1 montre l'EQM de la source à -5° en fonction du RSB, en appliquant

IQML, ESPRIT, Spectral MUSIC et Root-MUSIC. De plus, nous comparons le comportement de ces méthodes avec les méthodes non paramétriques FV et Capon. Les résultats pour la source à 10° sont similaires et ne sont pas représentés. Les méthodes approchent la BCR. Dans la zone

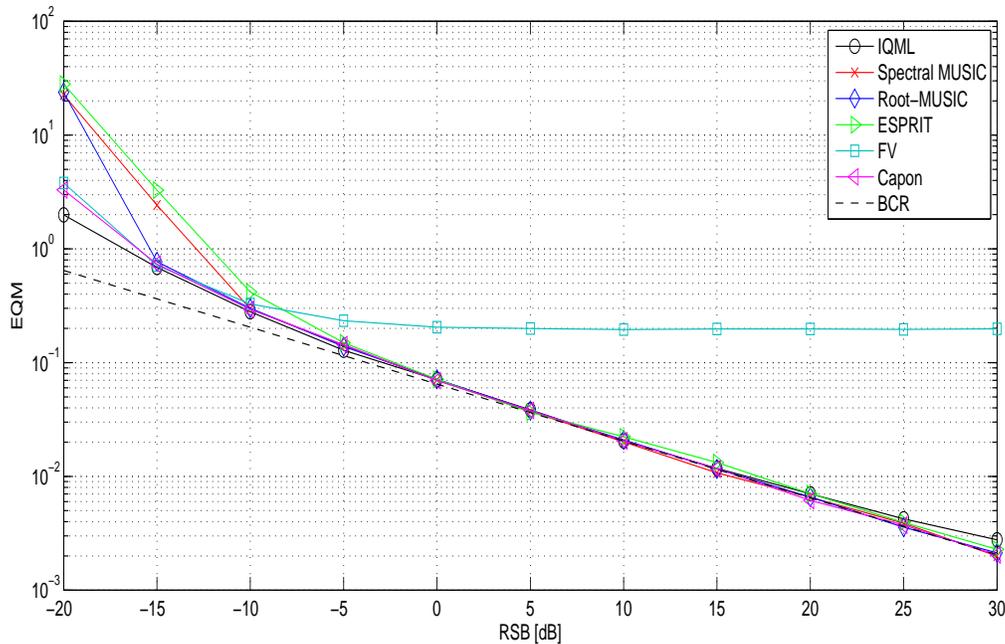


FIGURE 2.1: EQM de la source à -5° pour l'ALU de 10 capteurs, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$, avec les méthodes HR.

pré-asymptotique, c'est-à-dire pour les faibles valeurs du RSB, IQML a les meilleures performances. Capon présente de bonnes performances alors que FV n'est pas efficace. Elle s'éloigne de la BCR. Root-MUSIC est un peu mieux que Spectral MUSIC.

Ensuite, nous étudions la résolution des méthodes HR. Pour cela nous considérons de nouveau l'ALU avec 10 capteurs et un RSB égal à 0 dB. Nous considérons le cas de $N = 2$ sources, où l'angle fixé est à 0° et le second angle est séparé de $\Delta\theta$ qui augmente de 1° à 60° . Fig. 2.2 montre les résultats EQM de la source à 0° pour $RSB = 0$ dB en utilisant les algorithmes IQML, ESPRIT, Spectral MUSIC et Root-MUSIC. De même, nous comparons ces résultats aux performances de FV et Capon.

Les comportements de Root-MUSIC et ESPRIT sont similaires. Spectral MUSIC a une résolution moins bonne que les autres méthodes, surtout pour les faibles valeurs de $\delta\theta$. IQML est plus sensible aux interférences entre les deux sources, probablement l'algorithme n'a pas fini de converger. Les méthodes de FV et Capon présentent de mauvaises résolutions et l'effet des lobes secondaires est plus présent sur ces deux méthodes que sur les autres.

2.8.2 ALNU

Nous considérons l'ALNU lacunaire et à géométrie MR (pour pouvoir appliquer la méthode de la matrice de covariance Toeplitz augmentée) définie par $\mathbf{d} = [0, 1, 4, 6] \frac{\lambda}{2}$ et les sources localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$. Nous traçons la racine carrée de l'EQM de la source à -5° en fonction du RSB en appliquant différentes méthodes. On dispose de $L = 500$ échantillons. Afin de rendre

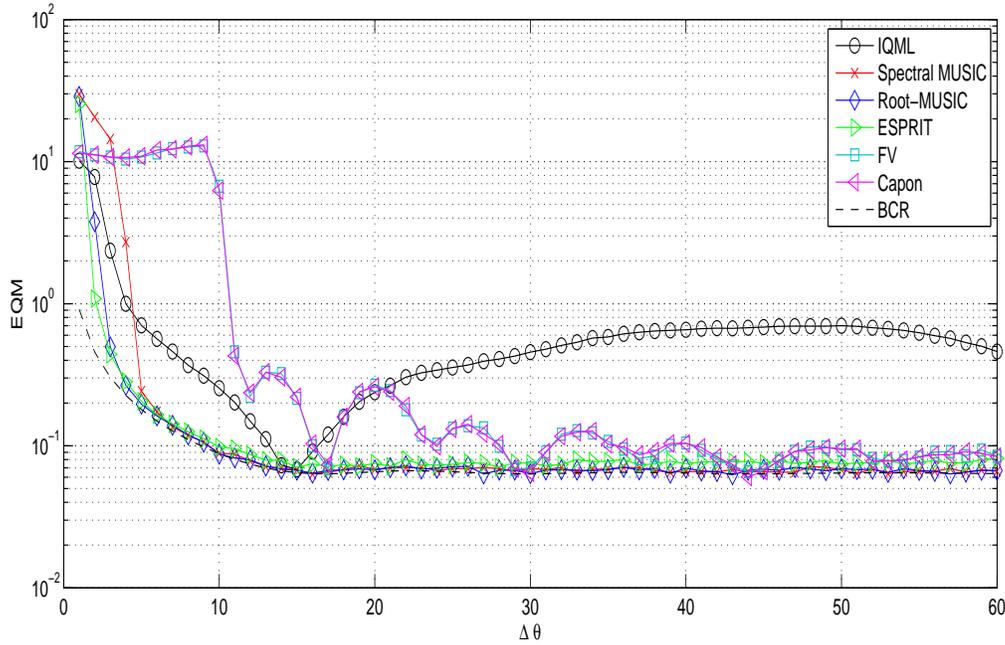
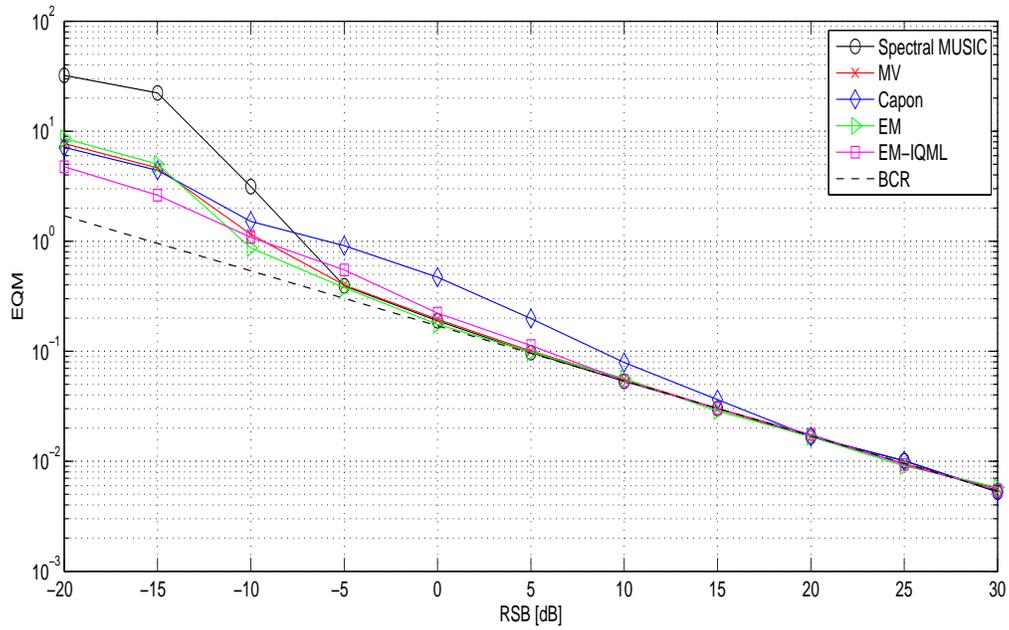


FIGURE 2.2: EQM de la source à 0° pour l'ALU de 10 capteurs utilisant les méthodes HR, $RSB = 0$ dB et $N = 2$ sources.

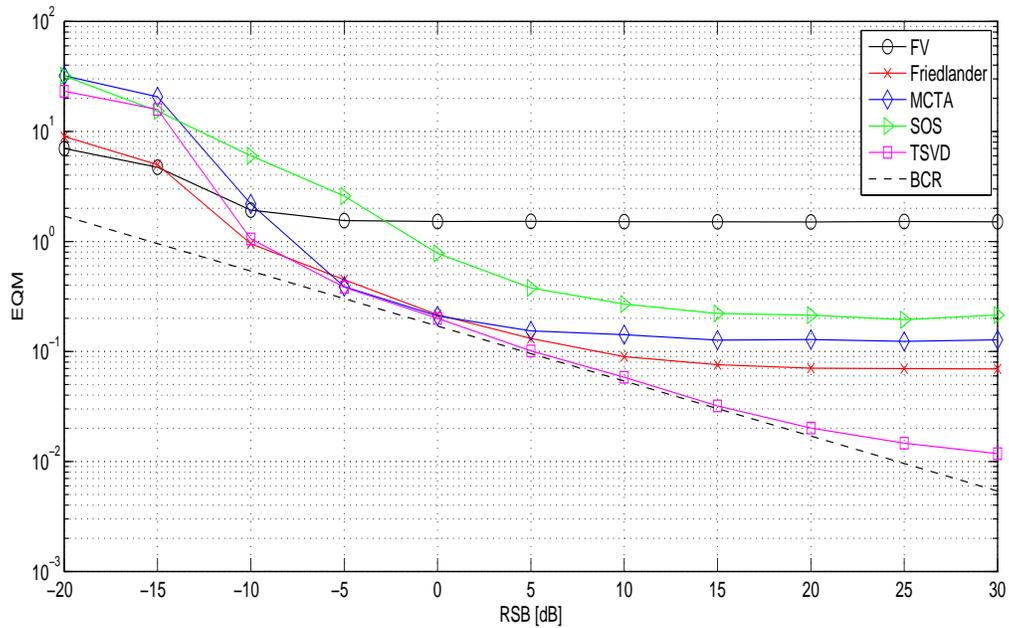
les courbes plus lisibles, les résultats sont représentés sur deux figures séparées, d'une part : Spectral MUSIC, MV, Capon, EM et EM-IQML sur la Fig. 2.3(a) et d'autre part : FV, l'interpolation de Friedlander, la méthode de la Matrice de Covariance Toeplitz Augmentée (MCTA sur le graphe), les Statistiques d'Ordre Supérieur (SOS) et la TSVD sur la Fig. 2.3(b). Pour les méthodes représentées sur la fig 2.3(b), elles ont des résultats médiocres, en particulier, aucune d'elles n'atteint asymptotiquement la BCR. La méthode TSVD donne les meilleurs résultats asymptotiques mais l'effet de l'erreur de troncature apparaît pour un RSB supérieur à 15 dB bien que le nombre de modes considéré soit de 25. Ce qui nécessite un coût calculatoire élevé pour résoudre le polynôme associé de degré 50. La méthode des statistiques d'ordre supérieur a certainement besoin d'un très grand nombre d'échantillons pour donner un bon résultat. Par contre, le premier groupe de méthodes a de bonnes performances. Capon est moins bon que les autres méthodes qui atteignent plus rapidement la BCR. EM-IQML donne les meilleurs résultats pour les très faibles valeurs du RSB. Les comportements de MV et EM sont presque identiques, alors que Spectral MUSIC a de moins bonnes performances dans la zone pré-asymptotique.

Pour étudier la consistance des méthodes, nous allons tracer la racine carrée de l'EQM en fonction du nombre d'échantillons L . On conserve le même réseau et les DDA situées à $[-5^\circ, 10^\circ]$. Le RSB est fixé à 5 dB. Nous divisons les méthodes de la même manière que précédemment et nous traçons la racine carrée de l'EQM à -5° en fonction de L sur les Fig. 2.4(a) et 2.4(b).

Dans la première série, Spectral MUSIC, MV et EM sont consistantes. Capon par contre ne l'est pas puisque l'EQM n'approche pas la BCR quand le nombre d'échantillons augmente. Ce problème existe aussi pour EM-IQML mais ici l'EQM s'éloigne de la BCR plus lentement. Pour les méthodes présentées sur la Fig. 2.4(b), FV n'est pas consistante, de même pour MCTA et SOS. La méthode de Friedlander approche la BCR mais pour les faibles valeurs de L , l'EQM

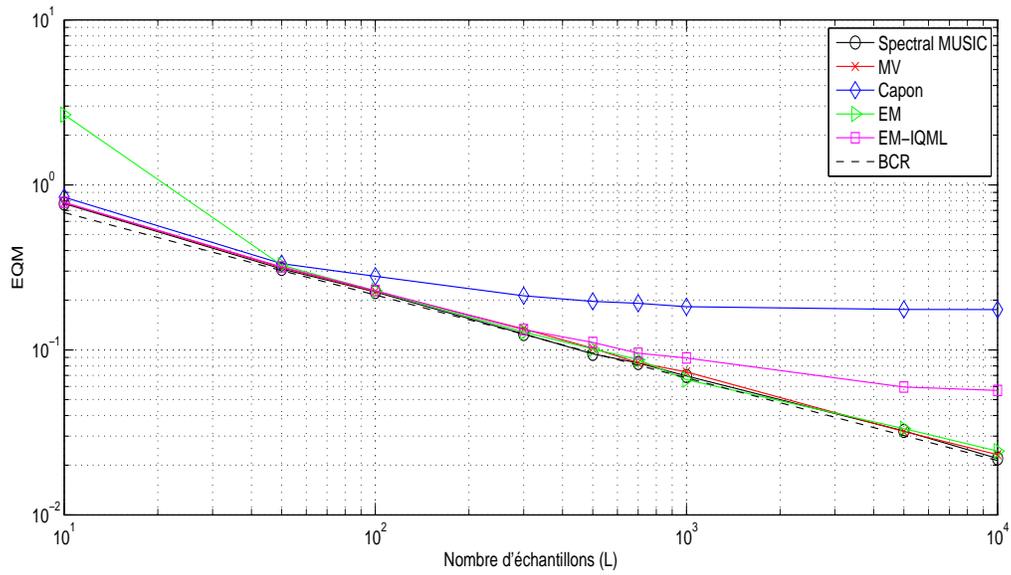


(a) Spectral MUSIC, MV, Capon, EM et EM-IQML

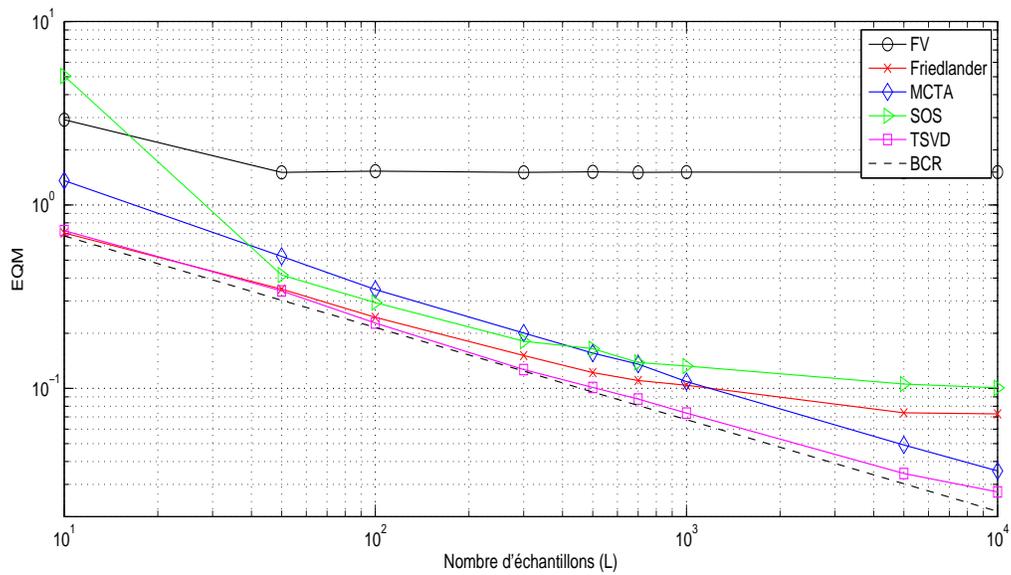


(b) FV, Friedlander, MCTA, SOS et TSVD

FIGURE 2.3: EQM de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 4, 6] \frac{\lambda}{2}$, $\text{DDA} = [-5^\circ, 10^\circ]$.



(a) Spectral MUSIC, MV, Capon, EM et EM-IQML



(b) FV, Friedlander, MCTA, SOS et TSVD

FIGURE 2.4: EQM de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 4, 6] \frac{\lambda}{2}$, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$, RSB=5 dB, en fonction de L .

est très grande. La TSVD est la plus proche de la BCR à condition de réaliser une troncature à un ordre suffisamment élevé (25 ici).

2.9 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les principales méthodes déjà proposées dans la littérature. Nous avons commencé par les méthodes non paramétriques comme FV et Capon qui présentent des performances limitées par rapport aux autres méthodes, surtout en ce qui concerne la résolution. De plus, ces deux méthodes souffrent du problème des lobes secondaires dans le cas des ALNU. D'autres méthodes non paramétriques ont été proposées dans le cas des ALNU comme GAPES et MAPES mais pour des problématiques légèrement différentes.

Ensuite, nous sommes passés aux méthodes paramétriques. Il existe les méthodes qui se basent sur le critère de vraisemblance, en particulier la méthode MV qui présente de bonnes performances mais souffre du grand coût calculatoire. L'algorithme EM est une approche générale itérative des estimées MV, il présente aussi de bonnes performances mais nécessite un grand nombre d'itérations pour converger. L'algorithme EM peut être exploité d'une meilleure façon en changeant la construction des données complètes. C'est le travail du chapitre 5. Ces deux méthodes peuvent être appliquées aux ALU et aux ALNU.

Les méthodes à HR sont aussi des méthodes paramétriques qui se basent sur les propriétés des sous-espaces propres de la matrice de covariance des données. Bien qu'elles soient sous-optimales, elles possèdent des performances proches de l'estimateur au sens du MV tout en présentant une complexité calculatoire relativement faible. Spectral-MUSIC est une méthode utilisée fréquemment. Elle peut être utilisée dans les cas des ALU et ALNU. Pour réduire sa complexité, Root-MUSIC a été proposée dans le cas des ALU : elle transforme la recherche des maxima du critère de Spectral MUSIC en une recherche des racines d'un polynôme. Nous allons démontrer au chapitre 3 que Root-MUSIC est applicable directement dans le cas des ALNU lacunaires. ESPRIT consiste à exploiter l'invariance par translation du modèle sinusoïdal. Cette méthode est très simple, mais elle ne peut être appliquée qu'aux ALU et les antennes présentant une géométrie spécifique. Par contre, si l'ALNU est interpolée en une AVLU, ESPRIT pourra être appliquée. IQML est aussi une recherche des racines d'un polynôme, mais elle est itérative donc elle nécessite un temps calculatoire plus grand et ne peut être appliquée que pour les ALU.

D'autres approches nécessitent un pré-traitement des données pour pouvoir appliquer les méthodes à HR aux ALNU. Entre autres, on trouve les méthodes qui se basent sur l'interpolation d'une AVLU. Cette interpolation peut être faite par secteur comme la méthode de Friedlander, mais elle souffre de l'erreur d'interpolation introduite qui est indépendante du RSB. Ou bien l'interpolation peut aussi se faire en se basant sur le modèle du signal en utilisant l'algorithme EM. Après avoir obtenu l'AVLU, une méthode à HR comme IQML peut être appliquée pour estimer les DDA. EM-IQML nécessite deux boucles de convergence, donc son temps de calcul est très important. Nous proposons de remplacer IQML par ESPRIT dans le chapitre 5.

Une autre approche pour appliquer les méthodes à HR dans le cas des ALNU utilise la matrice de covariance où cette matrice Toeplitz est augmentée pour obtenir une matrice de covariance semblable à celle d'une ALU. Cette méthode ne peut être appliquée que pour les ALNU à MR et présente des performances moins bonnes que d'autres approches.

La méthode des statistiques d'ordre supérieur calcule les cumulants d'ordre 4 des données de manière à avoir une matrice de covariance ayant la structure de celle d'une ALU. Cette méthode a comme but aussi de pouvoir appliquer les méthodes à HR aux ALNU. Cette méthode exige

un grand coût calculatoire et un grand nombre d'échantillons pour obtenir une bonne précision des matrices cumulants.

Enfin, nous avons présenté des méthodes qui se basent sur le développement de Fourier, comme la méthode proposée par Rübsamen et Gershman qui étend le concept de Root-MUSIC pour les ALNU à géométrie arbitraire. Elle utilise le développement tronqué en série de Fourier de la fonction spectre de MUSIC pour reformuler le problème d'estimation des DDA en tant que problème de recherche de racines d'un polynôme. Il y a aussi la méthode de technique de séparation du vecteur directeur qui aussi nécessite la recherche de racines d'un polynôme et peut être appliquée aux ALNU à géométrie arbitraire. Le principe est de modéliser le vecteur direction comme le produit d'une matrice caractéristique décrivant le réseau lui-même et un vecteur avec une structure de Vandermonde contenant le paramètre angulaire inconnu.

Chapitre 3

Root-MUSIC pour les réseaux lacunaires

3.1 Généralité

Dans le chapitre 2, nous avons étudié les méthodes à haute résolution. Ces méthodes se basent sur les propriétés des sous-espaces bruit et signal obtenus en décomposant la matrice de covariance. Nous avons vu que ces méthodes présentent de bonnes performances et sont capables de résoudre des sources étroitement espacées. Mais dans la littérature, ces méthodes ont été conçues pour les ALU seulement (à l'exception de Spectral MUSIC). Nous allons démontrer que Root-MUSIC peut être directement appliquée dans le cas des ALNU. Cette méthode est très simple et surmonte le problème des lobes secondaires rencontré en utilisant l'algorithme de FV.

Parmi les méthodes à haute résolution, l'algorithme Spectral MUSIC (voir section 2.3.1) calcule un critère spatial à partir du sous-espace bruit et détermine les DDA en recherchant les principaux maxima du critère. Cette recherche de N maxima à une dimension présente donc un coût calculatoire élevé. On a vu que cette recherche peut être remplacée par une recherche des racines d'un polynôme dans Root-MUSIC [5] (voir section 2.3.2). Root-MUSIC a été d'abord proposée pour les ALU pour profiter de la structure Vandermonde du vecteur direction.

On trouve dans la littérature plusieurs propositions afin d'utiliser Root-MUSIC pour les ALNU. La plupart font appel à un pré-traitement des données avant de pouvoir l'appliquer. Ce pré-traitement peut être une interpolation de l'ALU en une Antenne Virtuelle Linéaire Uniforme (AVLU). Par exemple, Friedlander [27] (voir section 2.4.1) propose une interpolation par secteur pour former l'AVLU et ensuite Root-MUSIC est appliquée pour l'estimation des DDA. Un autre type d'interpolation est basé sur le modèle du signal, comme la méthode EM-IQML proposée par Weiss [80] (voir section 2.4.2). Cette méthode est limitée aux réseaux non uniformes lacunaires. Dans une autre approche [13] (voir section 2.6), après avoir fait un calcul des statistiques d'ordre 4, il est possible d'appliquer Root-MUSIC à la matrice des cumulants. Parmi les méthodes proposées pour les cas des antennes aléatoires, [62] (voir section 2.7.1) exploite la périodicité du critère de Spectral MUSIC et fait un développement tronqué de Fourier de cette fonction et transforme ainsi le problème en une recherche de racines d'un polynôme. Une autre approche [6] (voir section 2.7.2) consiste à transformer la matrice direction de l'ALNU en un produit de deux matrices : la première dépend seulement des paramètres du réseau et la seconde dépend seulement des angles. Cette structure Vandermonde permet de créer un polynôme dont les racines fournissent les DDA.

L'ensemble des approches précédentes effectue donc un prétraitement afin de pouvoir employer Root-MUSIC. Dans ce chapitre, nous démontrons que contrairement à ce qu'on peut parfois lire dans la littérature, Root-MUSIC est non seulement applicable au cas des ALU mais aussi dans le cas des ALNU lacunaires. Le type de ce réseau n'est pas limité aux réseaux à minimum de redondance. De plus, une étude analytique nous permet d'établir la variance de cet estimateur. Enfin, des simulations sont menées pour évaluer numériquement les performances de Root-MUSIC. De même, nous montrons dans la partie simulations comment Root-MUSIC surmonte le problème des lobes secondaires par rapport à l'algorithme FV.

3.2 L'algorithme Root-MUSIC

Dans cette partie, nous introduisons l'algorithme Root-MUSIC dans le cas des ALNU lacunaires. Cet algorithme peut être appliqué seulement dans le cas des capteurs omnidirectionnels. Dans ce cas, on peut aussi exploiter l'orthogonalité donnée par (2.25) : $\mathbf{E}_B^H \mathbf{a}(\theta_n) = 0$ et la fonction $g(\theta)$ définie dans (2.26) par : $g(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{E}_B \mathbf{E}_B^H \mathbf{a}(\theta)$ afin de remplacer la recherche des maxima du critère de Spectral MUSIC en une recherche des racines d'un polynôme.

Nous utilisons le modèle du signal défini dans le chapitre 1. Le signal échantillonné est donné par l'éq. (1.6). Puisque l'ALNU peut être considérée comme une ALU à laquelle manquent quelques capteurs, les positions d_m ($m = 1, \dots, M$) des capteurs existants sont données par $d_m = k_m \Delta$, k_m étant un entier. Donc, le vecteur direction prend la forme :

$\mathbf{a}(\theta_n) = \left[e^{-j2\pi \frac{k_1 \Delta \sin \theta_n}{\lambda}}, \dots, e^{-j2\pi \frac{k_M \Delta \sin \theta_n}{\lambda}} \right]^T$. Soit le vecteur de dimension $(M \times 1)$ $\mathbf{a}(z) = [z^{-k_1}, z^{-k_2}, \dots, z^{-k_M}]$ et le polynôme $G(z)$ défini par :

$$G(z) = \mathbf{a}(z^{-1})^H \mathbf{E}_B \mathbf{E}_B^H \mathbf{a}(z) \quad (3.1)$$

où \mathbf{E}_B est une base du sous-espace bruit. L'évaluation du spectre $g(\theta)$ dans (2.26) est équivalente à l'évaluation du polynôme $G(z)$ sur le cercle unité. Nous allons démontrer que les racines de $G(z)$ permettent d'obtenir les DDA au lieu de chercher les minima de $g(\theta)$. Pour la démonstration, nous avons recours aux propriétés du sous-espace bruit de la matrice de covariance \mathbf{R} qui ont été détaillées à la section 2.3. Nous rappelons que l'orthogonalité traduite par $\mathbf{A}^H \mathbf{E}_B = 0$ a été démontrée à la même section et les conditions nécessaires ont été citées.

Théorème : Le polynôme $G(z)$ de degré $2M$ admet $2N$ racines de modules unitaires, ces racines sont de la forme $\left\{ z_n = e^{-j2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \sin \theta_n} \right\}_{n=1, \dots, N}$ et $\left\{ \bar{z}_n = e^{j2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \sin \theta_n} \right\}_{n=1, \dots, N}$ où $\{\theta_n\}_{n=1, \dots, N}$ sont les DDA.

Preuve : ■

1. Soit θ_n une DDA, montrons que $z_n = e^{-j2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \sin \theta_n}$ est une solution de $G(z)$. Cela est évident car si θ_n est une DDA, alors $\mathbf{a}^H(\theta_n) \mathbf{E}_B = 0$. Donc,

$$G(z_n) = \mathbf{a}(\theta_n)^H \mathbf{E}_B \mathbf{E}_B^H \mathbf{a}(\theta_n) = 0.$$

2. Soit \tilde{z}_n une racine de $G(z)$ de module unitaire, montrons que cette racine est de la forme $\tilde{z}_n = e^{-j2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \sin \theta_n}$ où θ_n est une DDA.

$$\begin{cases} |\tilde{z}_n| = 1 \\ G(\tilde{z}_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \tilde{\theta}_n / \tilde{z}_n = e^{-j2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \sin \tilde{\theta}_n} \\ \mathbf{a}(\tilde{z}_n^{-1})^H \mathbf{E}_B \mathbf{E}_B^H \mathbf{a}(\tilde{z}_n) = 0 \end{cases}$$

Ces deux égalités impliquent que :

$$\mathbf{a}(\tilde{\theta}_n)^H \mathbf{E}_B \mathbf{E}_B^H \mathbf{a}(\tilde{\theta}_n) = 0.$$

Il faut montrer que $\tilde{\theta}_n = \theta_k$ où θ_k est une DDA.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\tilde{\theta}_n)^H \mathbf{E}_B \mathbf{E}_B^H \mathbf{a}(\tilde{\theta}_n) &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{a}(\tilde{\theta}_n) &\perp \mathcal{R}(\mathbf{E}_B) \\ \Rightarrow \mathbf{a}(\tilde{\theta}_n) &\in \mathcal{N}(\mathbf{E}_B^H). \end{aligned}$$

Or $\mathcal{N}(\mathbf{E}_B^H)$ est de dimension N et $\mathcal{N}(\mathbf{E}_B^H)$ est engendré par N vecteurs indépendants $\{\mathbf{a}(\theta_k)\}_{k=1,\dots,N}$, ceci implique que ,

$$\tilde{\theta}_n = \theta_k. \quad \blacksquare$$

D'après le théorème précédent, il est clair que les minima de $g(\theta)$ correspondent aux racines de $G(z)$ qui appartiennent au cercle unité, c'est-à-dire un pôle de $G(z)$ à $z = z_1 = |z_1|e^{j \arg(z_1)}$ génère un sommet à $\sin(\theta) = \frac{\lambda}{2\pi\Delta} \arg(z_1)$. Par orthogonalité des sous-espaces, $2N$ racines du polynôme sont données par $\left\{ z_n = e^{-j2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \sin \theta_n} \right\}_{n=1,\dots,N}$ et $\left\{ \bar{z}_n = e^{j2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \sin \theta_n} \right\}_{n=1,\dots,N}$. En pratique, nous disposons seulement de l'estimation de la matrice de covariance, donc de l'estimation du sous-espace bruit $\hat{\mathbf{E}}_B$. Alors les racines correspondant aux vraies valeurs des DDA ne résident pas exactement sur le cercle unité. Par conséquence, les angles θ_n peuvent être estimés à partir de la phase des N racines de $G(z)$ les plus proches du cercle unité.

Puisque nous utilisons une matrice de covariance estimée, il y aura des erreurs dans l'emplacement des racines. L'effet de cette erreur est montré sur la fig. 3.1. Nous observons que la composante radiale de l'erreur Δz_n n'affectera pas le θ_n . Cependant, il affecterait le spectre de Spectral MUSIC. Ceci est particulièrement notable lorsque deux sources sont proches. Ainsi, on peut démontrer [61] que Root-MUSIC présente une meilleure résolution que Spectral MUSIC. De plus, l'algorithme Root-MUSIC a un coût calculatoire plus faible par rapport à Spectral MUSIC.

Exemple : Nous prenons un exemple de construction du critère $G(z)$. Soit l'ALNU dont les positions sont données par : $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 5]\lambda/2$. D'où, $a(z)$ représentant le vecteur direction de l'ALU à laquelle manquent les capteurs aux positions [2, 4] se met sous la forme : $a(z) = [1, z^{-1}, z^{-3}, z^{-5}]$. Le produit $\hat{\mathbf{E}}_B \hat{\mathbf{E}}_B^H$, aussi dans l'ALU, aura comme forme :

$$\hat{\mathbf{E}}_B \hat{\mathbf{E}}_B^H = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{14} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{24} & e_{26} \\ e_{41} & e_{42} & e_{44} & e_{46} \\ e_{61} & e_{62} & e_{64} & e_{66} \end{bmatrix}.$$

Nous aurons :

$$G(z) = [1, z^1, z^3, z^5] \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{14} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{24} & e_{26} \\ e_{41} & e_{42} & e_{44} & e_{46} \\ e_{61} & e_{62} & e_{64} & e_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ z^{-3} \\ z^{-5} \end{bmatrix}$$

Après calcul, nous aurons le polynôme suivant :

$$\begin{aligned} G(z) &= z^{-5}(e_{16} + e_{26}z^1 + e_{14}z^2 + (e_{24} + e_{46})z^3 + e_{12}z^4 + (e_{11} + e_{22} + e_{44} + e_{66})z^5 \\ &\quad + e_{21}z^6 + (e_{42} + e_{64})z^7 + e_{41}z^8 + e_{62}z^9 + e_{61}z^{10}). \end{aligned}$$

Ensuite, nous trouvons les $2N$ racines de ce polynôme et les DDA sont extraites à partir de ces racines.

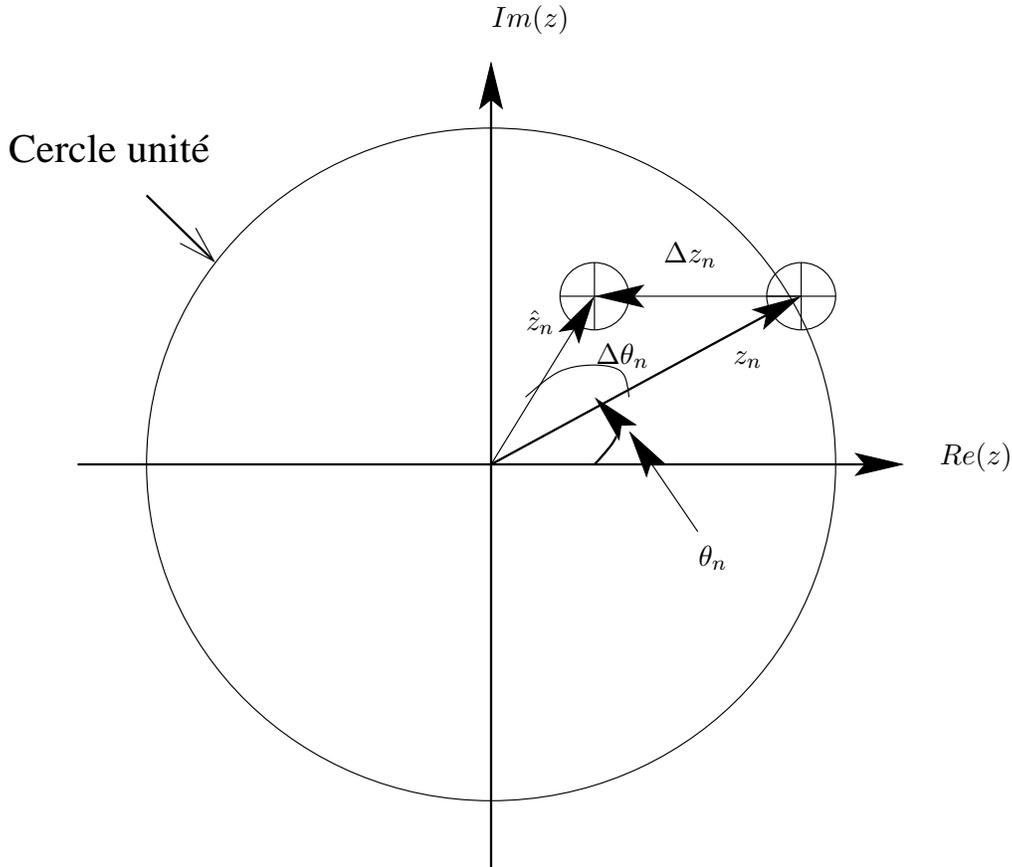


FIGURE 3.1: Comportement des racines dans un plan z .

3.3 Variance de l'estimateur

Dans cette section, nous abordons le calcul analytique de la variance de Root-MUSIC dans le cas des ALNU. Dans [61], il a été démontré que Spectral MUSIC et Root-MUSIC présentent la même erreur quadratique moyenne asymptotiquement. Nous suivrons donc les étapes de calcul présentées dans [67] où les auteurs étudient les performances de Spectral MUSIC dans le cas des ALU. Nous ferons les modifications nécessaires pour avoir la variance de l'estimateur Spectral MUSIC (qui est équivalente à la variance de Root-MUSIC) dans le cas des ALNU. D'abord, nous dérivons l'expression dans le cas général, ensuite nous passons à un calcul particulier lorsque nous ne disposons que d'une seule source $N = 1$ et d'une seule observation $L = 1$.

3.3.1 Expression générale

Nous ne reprenons pas les démonstrations faites dans [67]. Nous nous contenterons de rappeler les étapes principales. Le calcul est fait pour Spectral MUSIC dans le cas général, sans développement des termes, pour cela les expressions ne changent pas entre le cas uniforme et non uniforme.

Nous rappelons quelques définitions du chapitre 2 nécessaires pour la suite du calcul. Soit

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_M$ les valeurs propres de \mathbf{R} . Comme $\text{Rang}(\mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H) = N$, il résulte que :

$$\lambda_i > \sigma^2 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (3.2)$$

$$\lambda_i = \sigma^2 \quad \text{pour } i = N + 1, \dots, M. \quad (3.3)$$

Les vecteurs propres associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont notés par $\mathbf{e}_{s_1}, \dots, \mathbf{e}_{s_N}$ qui constituent une base du sous-espace signal $\mathbf{E}_S = [\mathbf{e}_{s_1} \dots \mathbf{e}_{s_N}]$. De même, une base du sous-espace bruit est formée par $\mathbf{E}_B = [\mathbf{e}_{b_1} \dots \mathbf{e}_{b_{M-N}}]$ dont les vecteurs sont associés aux valeurs propres correspondantes. L'expression de la variance de l'estimateur Root-MUSIC est donnée par :

$$\boxed{\text{var}_{MUSIC}(\hat{\theta}_i) \cong \frac{\sigma^2}{2Lh(\theta_i)} \{[\mathbf{R}_{ss}^{-1}]_{ii} + \sigma^2[\mathbf{R}_{ss}^{-1}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{R}_{ss}^{-1}]_{ii}\}} \quad (3.4)$$

où $h(\theta) = \mathbf{d}^H(\theta)[\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H]\mathbf{d}(\theta)$. Voici la démonstration :

Preuve : ■

Les erreurs d'estimation des vecteurs propres ($\hat{\mathbf{e}}_{s_i} - \mathbf{e}_{s_i}$) sont asymptotiquement (pour un grand L) conjointement gaussiennes distribuées avec une moyenne nulle et des matrices de covariance données par :

$$E(\hat{\mathbf{e}}_{s_i} - \mathbf{e}_{s_i})(\hat{\mathbf{e}}_{s_j} - \mathbf{e}_{s_j})^H = \frac{\lambda_i}{L} \left[\sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_i)^2} \mathbf{e}_{s_k} \mathbf{e}_{s_k}^H + \sum_{k=1}^{M-N} \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 - \lambda_i)^2} \mathbf{e}_{b_k} \mathbf{e}_{b_k}^H \right] \cdot \delta_{i,j} \quad (3.5)$$

$$E(\hat{\mathbf{e}}_{s_i} - \mathbf{e}_{s_i})(\hat{\mathbf{e}}_{s_j} - \mathbf{e}_{s_j})^\top = -\frac{\lambda_i \lambda_j}{L(\lambda_i - \lambda_j)^2} \mathbf{e}_{s_j} \mathbf{e}_{s_i}^\top (1 - \delta_{i,j}). \quad (3.6)$$

En utilisant ces équations, et la démonstration faite dans [67], nous déduisons qu'asymptotiquement les erreurs d'estimation MUSIC $\{\hat{\theta}_i - \theta_i\}$ sont conjointement gaussiennes distribuées avec une moyenne nulle et des matrices de covariance données par :

$$E(\hat{\theta}_i - \theta_i)(\hat{\theta}_j - \theta_j) = \frac{1}{2L} \frac{\Re \{ \mathbf{d}^H(\theta_j) \mathbf{E}_B \mathbf{E}_B^H \mathbf{d}(\theta_i) \mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{U} \mathbf{a}(\theta_j) \}}{h(\theta_i)h(\theta_j)} \quad (3.7)$$

où $\mathbf{U} = \sigma^2 \left[\sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{(\sigma^2 - \lambda_k)^2} \mathbf{e}_{s_k} \mathbf{e}_{s_k}^H \right]$, $\mathbf{d}(\theta) = \partial \mathbf{a}(\theta) / \partial \theta$ et $h(\theta) = \mathbf{d}^H(\theta) \mathbf{E}_B \mathbf{E}_B^H \mathbf{d}(\theta)$. D'après (3.7), nous obtenons l'expression de la variance de l'erreur $\{\hat{\theta}_i - \theta_i\}$ de l'estimation MUSIC :

$$E(\hat{\theta}_i - \theta_i)^2 = \frac{1}{2L} \frac{\mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{U} \mathbf{a}(\theta_i)}{h(\theta_i)}. \quad (3.8)$$

Nous allons développer une formule plus convenante de la variance de MUSIC où nous n'aurons pas besoin de faire la décomposition de \mathbf{R} en sous-espaces propres. Nous obtenons à partir de (3.8) :

$$\begin{aligned} \text{var}_{MUSIC}(\hat{\theta}_i) &= \frac{\sigma^2}{2L} \left[\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\lambda_k - \sigma^2} + \frac{\sigma^2}{(\lambda_k - \sigma^2)^2} \right) |\mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{e}_{s_k}|^2 \right] \Bigg/ \left[\sum_{k=1}^{M-N} |\mathbf{d}^H(\theta_i) \mathbf{e}_{b_k}|^2 \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2L} \left[\mathbf{a}^H(\theta_i) \left(\mathbf{E}_S \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{E}_S^H + \sigma^2 \mathbf{E}_S \mathbf{\Lambda}^{-2} \mathbf{E}_S^H \right) \mathbf{a}(\theta_i) \right] \Bigg/ \left[\mathbf{d}^H(\theta_i) \mathbf{E}_B \mathbf{E}_B^H \mathbf{d}(\theta_i) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\text{où } \dot{\mathbf{\Lambda}} \triangleq \mathbf{\Lambda} - \sigma^2 \mathbf{I} \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix} - \sigma^2 \mathbf{I}.$$

En se basant sur (2.21) et la décomposition de \mathbf{R} en sous-espaces propres, on peut écrire :

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I} = \mathbf{E}_S \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_S^H + \sigma^2 \mathbf{E}_B \mathbf{E}_B^H = \mathbf{E}_S \dot{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{E}_S^H + \sigma^2 \mathbf{I}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}^H &= \mathbf{E}_S \dot{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{E}_S^H \\ \mathbf{A} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}^H &= \mathbf{E}_S \dot{\mathbf{\Lambda}}^2 \mathbf{E}_S^H \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_S^H \mathbf{A}) \mathbf{R}_{ss} (\mathbf{A}^H \mathbf{E}_S) &= \dot{\mathbf{\Lambda}} \\ (\mathbf{E}_S^H \mathbf{A}) \mathbf{R}_{ss} (\mathbf{A}^H \mathbf{A}) \mathbf{R}_{ss} (\mathbf{A}^H \mathbf{E}_S) &= \dot{\mathbf{\Lambda}}^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Comme les colonnes de \mathbf{A} résident dans l'espace colonne de \mathbf{E}_S et \mathbf{A} a un rang plein, alors la matrice $\mathbf{E}_S^H \mathbf{A}$ est non singulière et

$$\mathbf{E}_S \mathbf{E}_S^H = \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}. \quad (3.11)$$

La nonsingularité de $\mathbf{E}_S^H \mathbf{A}$ et (3.10) donnent :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^H \mathbf{E}_S) \dot{\mathbf{\Lambda}}^{-1} (\mathbf{E}_S^H \mathbf{A}) &= \mathbf{R}_{ss}^{-1} \\ (\mathbf{A}^H \mathbf{E}_S) \dot{\mathbf{\Lambda}}^{-2} (\mathbf{E}_S^H \mathbf{A}) &= \mathbf{R}_{ss}^{-1} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}_{ss}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

En remplaçant (3.11) et (3.12) dans (3.9), nous obtenons la variance de Root-MUSIC donnée par (3.4). ■

L'évaluation de la variance de MUSIC selon (3.4) peut se faire directement à partir des paramètres d'origine σ^2 , \mathbf{R}_{ss} et θ_i du problème. La décomposition de \mathbf{R} n'est pas nécessaire, contrairement à (3.8).

3.3.2 Cas particulier : une source

Nous nous basons sur l'expression générale de la variance de MUSIC donnée par (3.4). Rappelons que Spectral MUSIC et Root-MUSIC ont asymptotiquement les mêmes variances. Dans le cas particulier que nous prenons, nous disposons d'une seule source $N = 1$. L'expression de la variance de Root-MUSIC est alors donnée par :

$$\boxed{\text{var}_{MUSIC}(\hat{\theta}) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 L (\cos \theta)^2 M \sigma_d^2 RSB} \left[1 + \frac{1}{M \cdot RSB} \right]} \quad (3.13)$$

où σ_d représente l'écart-type des positions des capteurs et RSB est le Rapport Signal à Bruit. La valeur de σ_d est déterministe et représente un indicateur de dispersion des positions des capteurs. Ce résultat est important car il permet d'établir explicitement la relation entre la variance de l'estimateur MUSIC et la géométrie de l'antenne. Ce résultat est d'autant plus exploitable que l'influence de la géométrie de l'antenne peut être résumée par l'écart-type de la position des

capteurs.

Preuve de (3.13) : ■

Pour $N = 1$, (3.4) devient :

$$\begin{aligned} \text{var}_{MUSIC}(\hat{\theta}) &= \frac{\sigma^2}{2Lh(\theta)} \{ \mathbf{R}_{ss}^{-1} + \sigma^2 \mathbf{R}_{ss}^{-1} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}_{ss}^{-1} \} \\ &= \frac{\sigma^2 \mathbf{R}_{ss}^{-1}}{2Lh(\theta)} \{ 1 + (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \sigma^2 \mathbf{R}_{ss}^{-1} \} \end{aligned} \quad (3.14)$$

où nous avons enlevé l'indice i puisque nous n'avons qu'une seule source et

$\mathbf{A}(\theta) = \mathbf{a}(\theta) = \left[e^{-j2\pi \frac{d_1 \sin \theta}{\lambda}}, \dots, e^{-j2\pi \frac{d_M \sin \theta}{\lambda}} \right]^T$ et $\mathbf{R}_{ss}^{-1} = \sigma_S^2$ avec σ_S^2 la variance de la source.

On définit le RSB tel que $RSB = \sigma_S^2 / \sigma^2$. Ainsi, l'expression de la variance devient :

$$\text{var}_{MUSIC}(\hat{\theta}) = \frac{1}{2LRSB h(\theta)} \left[1 + \frac{(\mathbf{a}^H \mathbf{a})^{-1}}{RSB} \right] \quad (3.15)$$

où

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \mathbf{d}^H(\theta) [\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H] \mathbf{d}(\theta) \\ &= \mathbf{d}^H(\theta) \mathbf{d}(\theta) - \mathbf{d}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta) (\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{d}(\theta) \end{aligned} \quad (3.16)$$

et

$$\mathbf{d}(\theta) = -j2\pi \frac{\cos \theta}{\lambda} \left[d_1 e^{-j2\pi \frac{d_1 \sin \theta}{\lambda}}, \dots, d_M e^{-j2\pi \frac{d_M \sin \theta}{\lambda}} \right]^T. \quad (3.17)$$

Les calculs intermédiaires suivants sont nécessaires pour la suite :

$$\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta) = M \Rightarrow (\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta))^{-1} = \frac{1}{M}; \quad (3.18)$$

$$\mathbf{d}^H(\theta) \mathbf{d}(\theta) = \sum_{m=1}^M \left| \frac{\partial \mathbf{a}_m(\theta)}{\partial \theta} \right|^2 = \left(\frac{2\pi \cos \theta}{\lambda} \right)^2 \sum_{m=1}^M d_m^2; \quad (3.19)$$

$$\mathbf{d}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta) = \frac{j2\pi \cos \theta}{\lambda} \sum_{m=1}^M d_m. \quad (3.20)$$

En remplaçant (3.18), (3.19) et (3.20) dans (3.17), nous obtenons :

$$h(\theta) = \left(\frac{2\pi \cos \theta}{\lambda} \right)^2 \left[\sum_{m=1}^M d_m^2 - \frac{\left(\sum_{m=1}^M d_m \right)^2}{M} \right]. \quad (3.21)$$

On définit σ_d l'écart-type des positions des capteurs d_m :

$$\sigma_d^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (d_m - \bar{m}_d)^2 \quad (3.22)$$

où $\bar{m}_d = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M d_m$ est la moyenne de ces positions.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M d_m^2 - \frac{\left(\sum_{m=1}^M d_m\right)^2}{M} &= M \left[\frac{\sum_{m=1}^M d_m^2}{M} - \left(\frac{\sum_{m=1}^M d_m}{M}\right)^2 \right] \\ &= M\sigma_d^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Donc, (3.21) devient :

$$h(\theta) = \left(\frac{2\pi \cos \theta}{\lambda}\right)^2 M\sigma_d^2. \quad (3.24)$$

En remplaçant (3.24) dans (3.15), nous obtenons l'expression de la variance de Root-MUSIC pour $N = 1$ donnée par (3.13). ■

3.4 Résultats numériques

Nous avons mené plusieurs simulations pour explorer différents aspects de Root-MUSIC. Dans tous les cas, les résultats sont basés sur 500 essais et $L = 500$ échantillons. Le module des sources est unitaire et leur phase est uniformément distribuée entre 0 et 2π . Sauf contre indication, les sources sont décorréliées.

3.4.1 EQM en fonction du RSB

Dans le premier cas, l'EQM de Root-MUSIC est comparée à la BCR et à la valeur théorique de la variance donnée par (3.4). D'autre part, nous comparons Root-MUSIC à Spectral MUSIC, à l'estimateur de MV, à la méthode d'interpolation de Friedlander et à la méthode TSVD. Nous considérons l'ALNU définie par les positions de ses capteurs : $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9]_{\frac{\lambda}{2}}$. Cette ALNU contient un grand nombre de capteurs manquants et les écarts intermédiaires n'existent pas tous, donc ce n'est pas un réseau sans trou. Les signaux à bande étroite sont générés par deux sources de puissance égale localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$. Nous traçons la racine carrée de l'EQM des estimées des DDA en fonction du RSB. Fig. 3.2 montre le résultat des simulations pour la seconde source ($\theta_1 = 10^\circ$). Les résultats de l'autre source ne sont pas représentés car les EQM des deux sources sont voisines.

D'après la Fig. 3.2, le comportement de Root-MUSIC est un peu meilleur que celui de Spectral MUSIC et très proche de l'estimateur MV. Asymptotiquement, pour les grandes valeurs de RSB, l'EQM de Root-MUSIC est très proche de la BCR, contrairement à la méthode de Friedlander qui ne converge pas vers la borne BCR. Ceci est dû au fait que la méthode de Friedlander introduit une erreur d'interpolation qui ne diminue ni avec les itérations, ni avec l'augmentation du nombre d'échantillons. La méthode TSVD a des résultats proches de ceux de Root-MUSIC mais avec un temps de calcul plus grand. En effet, afin de réduire l'effet de la troncature, le nombre de modes est de 51 et donc le polynôme à résoudre est de degré 102. Root-MUSIC présente donc un double avantage par rapport à TSVD : d'une part elle n'introduit pas d'erreur associée à la troncature, d'autre part Root-MUSIC présente un coût calculatoire plus faible. De plus, on peut remarquer que la formule de la variance de Root-MUSIC a été validée, puisque les valeurs de l'EQM coïncident avec les valeurs de la variance.

Pour la seconde simulation, le même réseau défini par $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9]_{\frac{\lambda}{2}}$ est utilisé, mais nous considérons $N = 3$ sources localisées à $[-5^\circ, 10^\circ, 20^\circ]$. Fig. 3.3 montre l'EQM des trois sources en fonction du RSB, ainsi que la valeur théorique de la variance et la BCR.

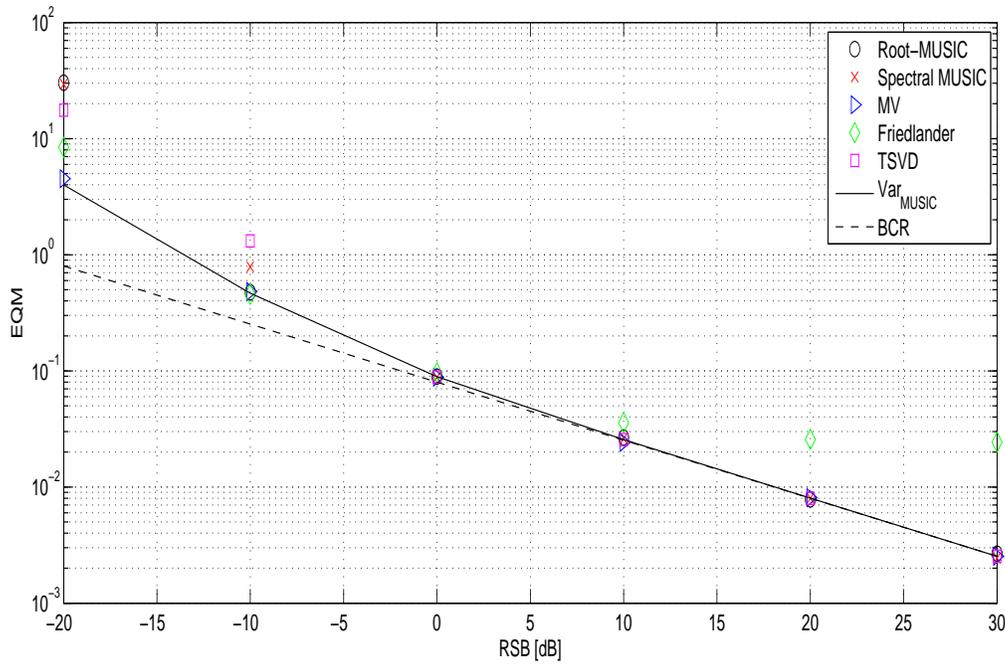


FIGURE 3.2: EQM de la source à 10° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9] \frac{\lambda}{2}$, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$.

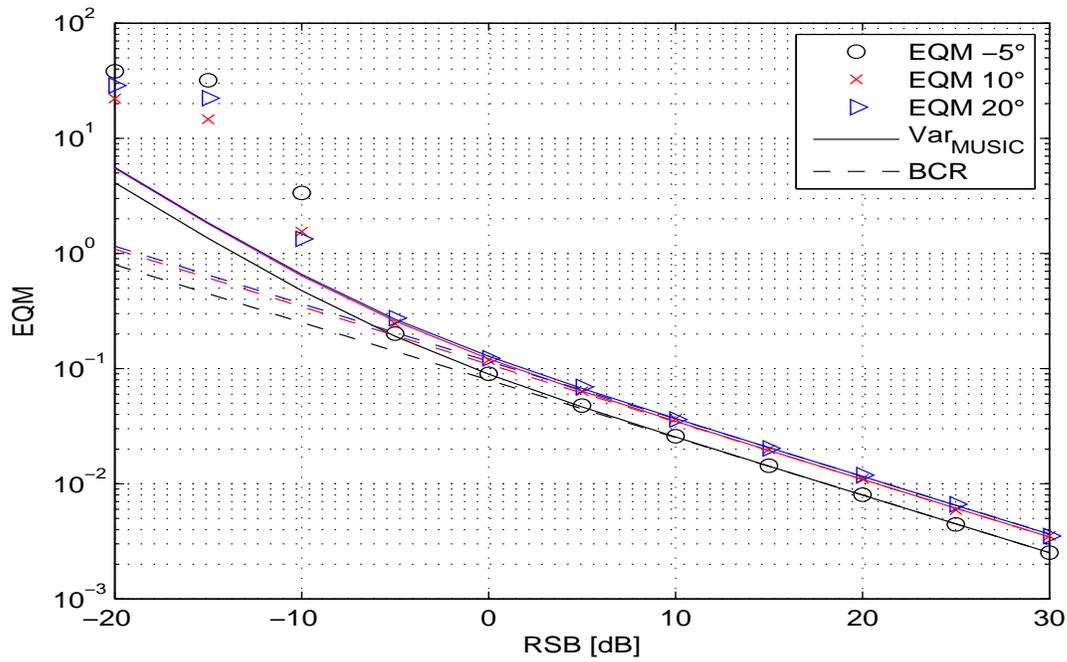


FIGURE 3.3: EQM pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9] \frac{\lambda}{2}$, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ, 20^\circ]$.

Nous pouvons conclure que Root-MUSIC est capable d'estimer la DDA de plusieurs sources sans aucun problème.

Maintenant nous testons Root-MUSIC dans le cas de deux sources corrélées. La matrice de covariance des sources est donnée par :

$$\mathbf{R}_{ss} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma^* & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

où γ détermine le degré de corrélation entre les deux sources. Nous considérons le même réseau défini par $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9] \frac{\lambda}{2}$, les sources sont localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$. Nous traçons la racine carrée de l'EQM des estimées des DDA en fonction du RSB. Fig. 3.4 montre le résultat des simulations pour la seconde source 10° et pour trois valeurs de γ : 0, 0.3 et 0.6. Nous remarquons que Root-

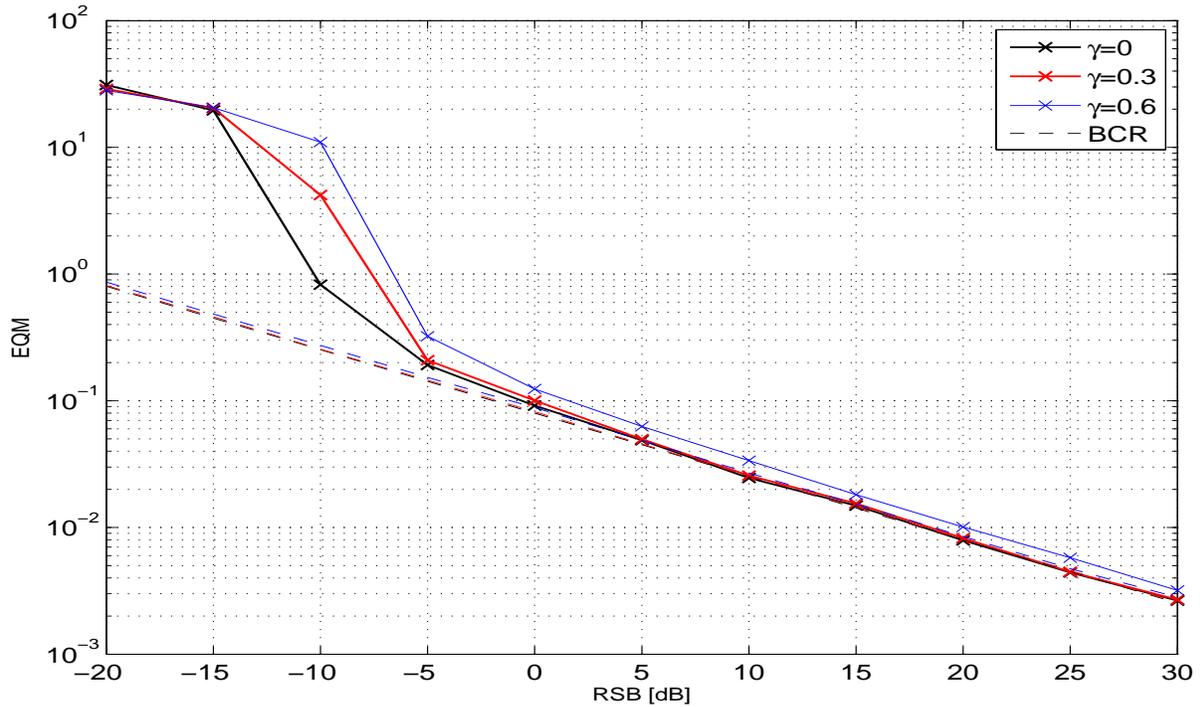


FIGURE 3.4: EQM de la source à 10° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9] \frac{\lambda}{2}$, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$, $\gamma = 0, 0.3$ et 0.6 .

MUSIC a de bonnes performances dans le cas de sources partiellement corrélées. Les résultats pour $\gamma = 0.3$ sont très proches que pour $\gamma = 0$, c'est-à-dire quand les sources sont décorréliées. Pour $\gamma = 0.6$, la courbe s'éloigne un peu de la BCR.

3.4.2 Résolution et effet des lobes secondaires

Dans cette 3^{ième} simulation, nous étudions la résolution de l'algorithme Root-MUSIC. De plus, nous la comparons à celle de l'algorithme FV et à la méthode de Capon pour montrer comment Root-MUSIC surmonte le problème des lobes secondaires. Nous conservons le même réseau et nous étudions son comportement pour une valeur de RSB égale à 0 dB. Nous considérons le cas de $N = 2$ sources, où l'angle fixé est à 0° et le second angle est séparé de $\Delta\theta$ qui augmente de

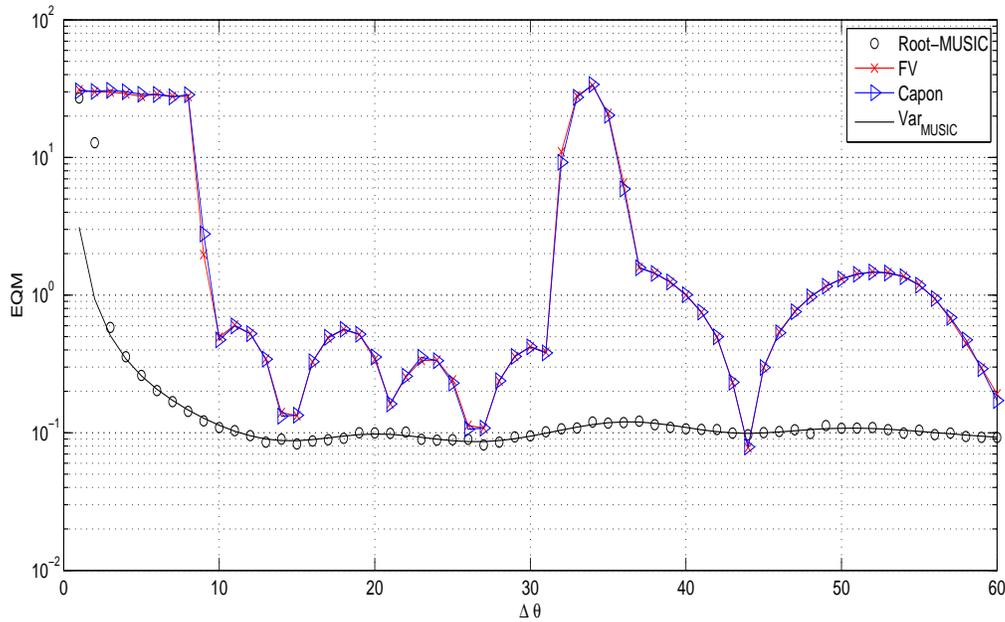


FIGURE 3.5: EQM de la source à 0° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9] \frac{\lambda}{2}$ utilisant Root-MUSIC, FV et Capon, $RSB = 0$ dB et $N = 2$ sources.

1° à 60° . Fig. 3.5 montre les résultats EQM de la source à 0° pour $RSB = 0$ dB en utilisant les algorithmes Root-MUSIC, FV et Capon.

La différence entre les algorithmes est bien claire. Tout d'abord, en comparant les algorithmes dans la zone de résolution, la limite pour Root-MUSIC est de $[0^\circ - 3^\circ]$, alors que pour FV et Capon elle est de $[0^\circ - 8^\circ]$. Ceci montre que Root-MUSIC a une meilleure résolution que les autres, ce qui est normal du fait que FV et Capon estiment les deux angles au même endroit. D'autre part, pour Root-MUSIC, les performances ne varient quasiment pas dans l'intervalle $[3^\circ - 60^\circ]$ contrairement à FV et Capon. Alors, Root-MUSIC surmonte totalement le problème des lobes secondaires.

Nous reprenons le même scénario et nous étudions le comportement de Root-MUSIC pour une valeur de RSB égale à 20 dB. Fig. 3.6 montre les résultats EQM de la source à 0° en utilisant les algorithmes Root-MUSIC, FV et Capon.

Dans ce cas, la différence entre les algorithmes s'accroît. Lorsque le RSB augmente, le niveau des lobes secondaires des méthodes non paramétriques n'est pas modifié, tandis que la variance de Root-MUSIC diminue avec le SNR.

3.4.3 Consistance

Dans la dernière simulation, nous testons la consistance de Root-MUSIC. Pour cela, nous traçons l'EQM des sources localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$ et la BCR du réseau défini par $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9] \frac{\lambda}{2}$ en fonction du nombre d'échantillons. Le RSB est fixé à 5 dB. La Fig. 3.7 montre les résultats obtenus pour les deux sources. Nous pouvons voir que la méthode est consistante puisqu'elle approche la BCR lorsque le nombre d'échantillons augmente.

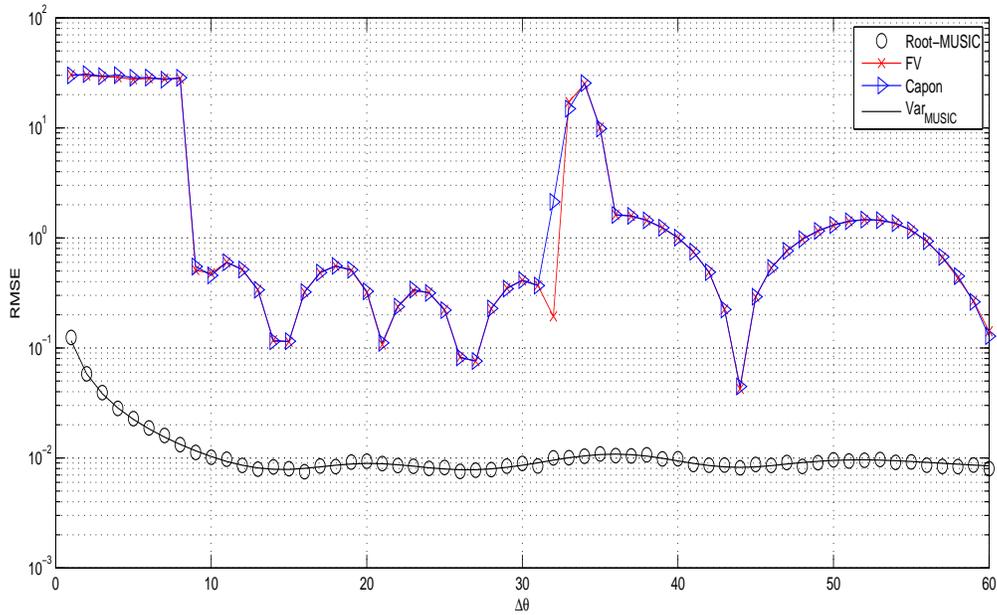


FIGURE 3.6: EQM de la source à 0° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9] \frac{\lambda}{2}$ utilisant Root-MUSIC, FV et Capon, $RSB = 20$ dB et $N = 2$ sources.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode Root-MUSIC dans les cas des ALNU lacunaires. Cette méthode est plus simple que les autres algorithmes qui nécessitent une étape d'interpolation ou un autre traitement. Root-MUSIC présente de bonnes performances en terme d'EQM, qui sont proches de l'estimateur MV et la BCR. Sa principale limitation est que l'ALNU doit être lacunaire. De plus, nous avons effectué un calcul théorique pour exprimer la variance de la méthode dans le cas général et dans le cas particulier d'une seule source et une seule observation. Nous obtenons une expression simplifiée qui permet de mettre en évidence la dépendance des performances vis à vis de la position des capteurs. Les résultats des simulations nous montrent les bonnes performances de Root-MUSIC. Enfin les simulations illustrent la très faible sensibilité de Root-MUSIC aux problèmes de lobes secondaires, ce qui constitue un résultat particulièrement intéressant pour les antennes lacunaires.

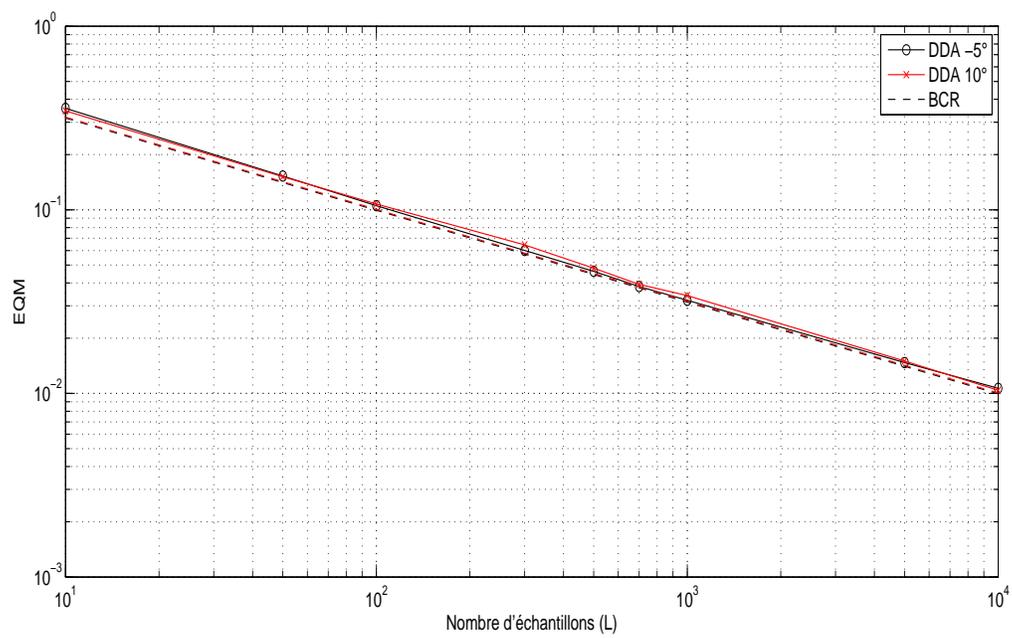


FIGURE 3.7: EQM des sources pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 9] \frac{\lambda}{2}$, $RSB = 5$ dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$.

Chapitre 4

Géométrie lacunaire et réduction du nombre de capteurs

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'étude des avantages des ALNU lacunaires sur les ALU [20]. Nous allons appliquer Root-MUSIC sur les deux géométries et faire la comparaison des performances. Dans la littérature, on trouve un certain nombre de méthodes pour optimiser la configuration des antennes. Par optimisation, la plupart des critères conduisent à une géométrie d'antenne non uniforme. Notre but est d'étudier les performances de toutes les ALNU lacunaires au-delà des configurations optimales. La définition du critère d'optimalité d'une géométrie n'est pas unique. Le critère à optimiser peut être défini pour une méthode donnée, ou bien à partir de la valeur de la BCR. L'optimisation par rapport à la BCR requiert généralement de se restreindre à une source ou un secteur. Dans ce chapitre, l'objectif principal est de comparer une ALU donnée avec des ALNU construites en enlevant des capteurs à l'ALU. Nous montrons que l'on peut éliminer des capteurs à l'ALU et conserver des performances sensiblement identiques à celle de l'ALU. Cette propriété présente un grand intérêt dans un certain nombre d'applications : construire une antenne avec moins de capteurs et conservant les mêmes performances diminue le coût de production. Une autre application est la possibilité d'étudier les performances d'un réseau si certains de ses capteurs tombent en panne.

Dans la littérature, plusieurs articles ont étudié la configuration optimale des réseaux par rapport à plusieurs critères. Dans [33], les auteurs cherchent la configuration optimale pour avoir la meilleure variance asymptotique. Leur approche consiste à optimiser numériquement les expressions de la BCR et de la variance de MUSIC. La position optimale des capteurs obtenue après optimisation tend à former $(N + 1)$ "clusters", où N est le nombre de sources. Deux clusters sont toujours localisés aux extrémités et les $(N - 1)$ restants sont localisés à peu près symétriquement tout au long de l'ouverture du réseau. De plus, les auteurs appliquent l'interpolation de Friedlander sur cette configuration optimale des capteurs de l'ALNU et utilisent Root-MUSIC sur le réseau virtuel formé ayant la même ouverture que l'ALNU. Ceci donne de meilleures performances asymptotiques par rapport à Root-MUSIC conventionnelle appliquée à l'ALU ayant la même ouverture.

Une autre étude [12] est proposée dans le cadre d'une problématique voisine : estimation passive de positions (angle et distance) de sources acoustiques. Pour l'estimation de l'angle, la configuration optimale consiste à placer la moitié des capteurs à chaque extrémité de l'ALNU.

Pour une estimation de la distance, un quart des capteurs doit être placé à chaque extrémité du réseau et la moitié restante au milieu. Pour estimer simultanément les deux paramètres angle et distance (c'est-à-dire la position dans le plan), les capteurs doivent être localisés dans trois sous-réseaux, chacun contenant $1/3$ du nombre total de capteurs. Il faut noter que pour les trois configurations citées précédemment, dans chaque sous-réseau l'espacement inter-capteurs doit être égal à la moitié de la longueur d'onde. Fig.(4.1) montre les trois configurations optimales pour une ALNU de M capteurs. Ce travail de configuration optimale par rapport à la position

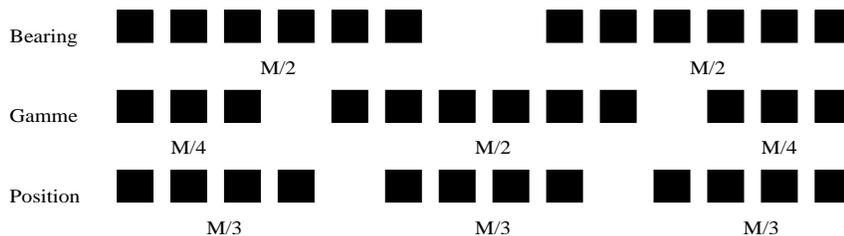


FIGURE 4.1: Les trois configurations optimales d'une ALNU de M capteurs.

est repris dans [80]. Ils affirment que la position optimale des capteurs n'est pas uniforme. On retiendra cependant que la problématique est différente de celle qui nous intéresse ici.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les performances d'une ALNU quelconque et les comparer à l'ALU équivalente. Les ALNU considérées dans ce chapitre sont toutes lacunaires par construction. Nous utilisons donc l'algorithme Root-MUSIC pour faire la comparaison. L'intérêt de Root-MUSIC est qu'elle présente de bonnes performances et qu'elle peut être appliquée directement aux deux géométries comme nous l'avons vu au chapitre précédent. L'étude des performances est faite en comparant les expressions des BCR respectives des ALNU et ALU. La BCR est le critère utilisé pour étudier le comportement asymptotique du réseau. Root-MUSIC étant efficace dans le cas des sources non corrélées, ses performances asymptotiques approchent la BCR. Pour cela, nous commençons par établir les expressions de la BCR pour les deux types de géométrie. Ensuite, nous comparons les expressions respectives des BCR analytiquement. Nous allons voir qu'une ALNU ayant la même ouverture qu'une ALU mais avec un nombre bien réduit de capteurs est capable de maintenir de bonnes performances. De plus, nous montrons qu'une ALNU présente de meilleures performances qu'une ALU ayant le même nombre de capteurs. Plusieurs simulations sont effectuées pour étudier le comportement de l'ALNU dans différentes conditions. De plus, nous étudions de nouveau l'effet des lobes secondaires sur l'ALNU en jouant sur le nombre de capteurs omis du réseau. Cet effet reste négligeable avec Root-MUSIC par rapport à l'algorithme de FV même pour un grand nombre de capteurs manquants.

4.2 Borne de Cramer-Rao pour les ALNU et ALU

4.2.1 Expression générale de la BCR déterministe

La BCR permet de donner une borne inférieure de l'erreur quadratique moyenne des estimateurs non biaisés. La matrice de covariance d'un tel estimateur s'écrit :

$$\Gamma = E \left\{ (\hat{\boldsymbol{\theta}}_g - \boldsymbol{\theta}_g)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_g - \boldsymbol{\theta}_g)^H \right\}. \quad (4.1)$$

Nous dérivons la BCR sur la matrice de covariance de n'importe quel estimateur non biaisé de $\boldsymbol{\theta}$. Les $2LN + N$ paramètres à estimer pour le modèle donné par (1.5) forment le vecteur $\boldsymbol{\theta}_g$:

$$\boldsymbol{\theta}_g = [\alpha_1^\top, \beta_1^\top, \dots, \alpha_L^\top, \beta_L^\top, \boldsymbol{\theta}^\top]^\top \quad (4.2)$$

où $\alpha_i = \Re(s(i))$ and $\beta_i = \Im(s(i))$. Nous définissons la matrice d'information de Fisher pour le modèle (1.5) :

$$\mathbf{F} = E \left\{ \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_g)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_g)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^H \right\}. \quad (4.3)$$

La relation traduisant la BCR s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\Gamma} \succeq \mathbf{F}^{-1} \quad (4.4)$$

ce qui se traduit ici par le fait que $(\boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{F}^{-1})$ est définie semi-positive. En général, nous nous intéressons plus particulièrement à la variance de chacune des estimations scalaires, c'est-à-dire aux éléments de la diagonale de la matrice $\boldsymbol{\Gamma}$. (4.4) se traduit alors par la relation :

$$E \left\{ (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{g,i} - \boldsymbol{\theta}_{g,i})^2 \right\} \geq [\mathbf{F}^{-1}]_{ii}, \quad (4.5)$$

où $[\mathbf{F}^{-1}]_{ii}$ représente le i -ème élément de la diagonale de \mathbf{F}^{-1} .

Le bruit $\boldsymbol{\nu}$ est supposé être un bruit blanc gaussien circulaire tel que :

$$\begin{cases} E\{\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^H\} &= \sigma^2 \mathbf{I} \\ E\{\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^\top\} &= 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Nous rappelons la densité de probabilité de \mathbf{y} donnée dans (2.10) :

$$p(\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(L)) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{LM}{2}}} \prod_{l=1}^L e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{y}(l) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(l)\|^2}.$$

L'expression de la matrice de Fisher peut alors être mise sous la forme [66] :

$$\mathbf{F} = \frac{2}{\sigma^2} \Re(\mathbf{D}^H \mathbf{D}) \quad (4.7)$$

où la matrice \mathbf{D} contient les dérivées du modèle par rapport aux différents paramètres :

$$\mathbf{D} = [\dot{\boldsymbol{\rho}}_1, \dot{\boldsymbol{\rho}}_2, \dots, \dot{\boldsymbol{\rho}}_{N+2LN}], \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \theta_i} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(t). \quad (4.8)$$

Dans le cas général, nous pouvons écrire de manière explicite la BCR sous la forme (Voir [67] pour les détails de calcul) :

$$BCR(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \sum_{t=1}^L \Re \left[\mathbf{X}^H(t) \dot{\mathbf{A}}^H \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H] \dot{\mathbf{A}} \mathbf{X}(t) \right] \right\}^{-1}, \quad (4.9)$$

où $\mathbf{X}(t) = \text{diag}[\mathbf{s}_1(t), \dots, \mathbf{s}_N(t)]$, $\dot{\mathbf{A}} = [\partial \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_1, \dots, \partial \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_N]$. Cette expressions générale s'applique pour n'importe quelle géométrie de réseau.

4.2.2 ALNU avec une source et une observation

Dans ce qui suit, nous calculons la BCR dans le cas d'une observation unique ($L = 1$) et pour une seule source ($N = 1$). L'expression générale de la BCR pour l'estimation de θ dans le cas des ALNU est donnée par :

$$\boxed{BCR(\theta) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 (\cos \theta)^2 M \sigma_d^2 RSB}} \quad (4.10)$$

où RSB désigne le rapport signal à bruit et σ_d représente l'écart-type des positions des capteurs. L'expression de la BCR montre que celle-ci dépend de la géométrie de l'antenne uniquement par le paramètre σ_d^2 . En particulier, si σ_d^2 augmente, la valeur de la BCR diminue, donc de meilleures performances sont obtenues pour des configurations d'ALNU ayant une grande valeur de σ_d^2 .

Preuve de (4.10) : ■

Le modèle $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\theta}_g)$ s'écrit en fonction des trois paramètres réels $\boldsymbol{\theta} = [\alpha, \beta, \theta]$:

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\theta}_g) = \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})(\alpha + j\beta), \quad (4.11)$$

où $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) = \left[e^{-j2\pi \frac{d_1 \sin \theta}{\lambda}}, \dots, e^{-j2\pi \frac{d_M \sin \theta}{\lambda}} \right]^\top$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 &= \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \alpha} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}), \\ \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 &= \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \beta} = j\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}), \\ \dot{\boldsymbol{\rho}}_3 &= \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \theta} = \dot{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\theta})(\alpha + j\beta), \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec $\dot{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\theta}) = \left[-j2\pi \frac{d_1 \cos \theta}{\lambda} e^{-j2\pi \frac{d_1 \sin \theta}{\lambda}}, \dots, -j2\pi \frac{d_M \cos \theta}{\lambda} e^{-j2\pi \frac{d_M \sin \theta}{\lambda}} \right]^\top$. On calcule ensuite les termes de la matrice d'information de Fisher :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{11} &= \frac{2}{\sigma^2} \Re(\dot{\boldsymbol{\rho}}_1^H \dot{\boldsymbol{\rho}}_1) = \frac{2}{\sigma^2} \Re(\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})) = \frac{2M}{\sigma^2}; \\ \mathbf{F}_{22} &= \frac{2}{\sigma^2} \Re(\dot{\boldsymbol{\rho}}_2^H \dot{\boldsymbol{\rho}}_2) = \frac{2}{\sigma^2} \Re(\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})) = \frac{2M}{\sigma^2}; \\ \mathbf{F}_{33} &= \frac{2}{\sigma^2} \Re(\dot{\boldsymbol{\rho}}_3^H \dot{\boldsymbol{\rho}}_3) = \frac{2|s|^2}{\sigma^2} \Re(\dot{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\theta})^H \dot{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\theta})) = \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{2\pi|s| \cos \theta}{\lambda} \right)^2 \sum_{m=1}^M d_m^2; \\ \mathbf{F}_{12} &= \frac{2}{\sigma^2} \Re(\dot{\boldsymbol{\rho}}_1^H \dot{\boldsymbol{\rho}}_2) = \frac{2}{\sigma^2} \Re(j\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})^H \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})) = 0; \\ \mathbf{F}_{13} &= \frac{2}{\sigma^2} \Re(\dot{\boldsymbol{\rho}}_1^H \dot{\boldsymbol{\rho}}_3) = \frac{2}{\sigma^2} \Re(\mathbf{sa}(\boldsymbol{\theta})^H \dot{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\theta})) = \frac{2}{\sigma^2} \frac{2\pi\beta \cos \theta}{\lambda} \sum_{m=1}^M d_m; \\ \mathbf{F}_{23} &= \frac{2}{\sigma^2} \Re(\dot{\boldsymbol{\rho}}_2^H \dot{\boldsymbol{\rho}}_3) = \frac{2}{\sigma^2} \Re(-j\mathbf{sa}(\boldsymbol{\theta})^H \dot{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\theta})) = \frac{2}{\sigma^2} \frac{2\pi\alpha \cos \theta}{\lambda} \sum_{m=1}^M d_m. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Afin d'inverser \mathbf{F} , nous l'écrivons sous la forme de blocs avec \mathbf{F}_s une matrice 2×2 :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s & \mathbf{F}_{s\theta}^H \\ \mathbf{F}_{s\theta} & \mathbf{F}_\theta \end{bmatrix}.$$

D'après les résultats obtenus (4.13), ces blocs s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s &= \frac{2}{\sigma^2} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_{s\theta} &= \frac{2}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \frac{2\pi\beta \cos \theta}{\lambda} \sum_{m=1}^M d_m & \frac{2\pi\alpha \cos \theta}{\lambda} \sum_{m=1}^M d_m \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_\theta &= \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{2\pi|s| \cos \theta}{\lambda} \right)^2 \sum_{m=1}^M d_m^2. \end{aligned}$$

Si l'on adopte la même écriture sous forme de blocs pour \mathbf{F}^{-1} :

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} BCR_s & BCR_{s\theta}^H \\ BCR_{s\theta} & BCR_\theta \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

et d'après le lemme d'inversion des matrices, nous avons : $BCR_\theta^{-1} = \mathbf{F}_\theta - \mathbf{F}_{s\theta}\mathbf{F}_s^{-1}\mathbf{F}_{s\theta}^H$. D'où l'expression générale de la BCR pour l'estimation de θ dans le cas des ALNU :

$$BCR_\theta = \frac{\lambda^2}{8\pi^2(\cos \theta)^2 \text{RSB} \left[\sum_{m=1}^M d_m^2 - \frac{(\sum_{m=1}^M d_m)^2}{M} \right]}, \quad (4.15)$$

où $\text{RSB} = \frac{|s|^2}{\sigma_s^2}$. En utilisant σ_d l'écart-type des positions des capteurs d_m tel que $\sigma_d^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (d_m - \bar{m}_d)^2$, où $\bar{m}_d = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M d_m$ est la moyenne de ces positions, nous obtenons l'expression de la BCR donnée par (4.10). ■

4.2.3 ALU avec une source et une observation

A l'aide de (4.15), on peut retrouver l'expression connue de la BCR pour une ALU dans le cas d'une seule source et une observation, avec :

$$\sum_{m=1}^M d_m = \Delta \cdot \frac{M(M+1)}{2} \quad (4.16)$$

$$\sum_{m=1}^M d_m^2 = \Delta^2 \cdot \frac{M(M+1)(2M+1)}{6} \quad (4.17)$$

En remplaçant (4.16) et (4.17) dans (4.15), nous obtenons :

$$BCR_\theta = \frac{3\lambda^2}{2\pi^2(\cos \theta)^2 \Delta^2 \text{RSB} M(M^2 - 1)}. \quad (4.18)$$

4.3 Comparaison ALNU/ALU par la BCR

Dans cette section, nous montrons les avantages de l'ALNU comparée à l'ALU équivalente en utilisant les résultats obtenus précédemment sur la BCR dans le cas monosource. On appelle ALU équivalente l'ALU ayant la même ouverture que l'ALNU. On notera $ALU_{M'}$ l'ALU avec une ouverture et un nombre de capteurs égal à M' et $ALNU_{M',M}$ l'ALNU ayant une ouverture M' et un nombre de capteurs égal à M .

4.3.1 Cas général

D'après (4.10), nous savons que maximiser σ_d^2 minimise la BCR pour une source. En exploitant les propriétés de l'écart-type et pour toutes les $ALNU_{M',M}$, nous avons :

$$\sigma_{d_{ALU_M}}^2 < \sigma_{d_{ALNU_{M',M}}}^2 \Rightarrow BCR_{ALU_M} > BCR_{ALNU_{M',M}}. \quad (4.19)$$

Cette inégalité signifie que si nous comparons une ALNU ayant le même nombre de capteurs M qu'une ALU mais avec une plus grande ouverture M' , l'ALNU présente une BCR inférieure à celle de l'ALU. Les performances sont donc améliorées pour l'ALNU ayant un même nombre de capteurs que l'ALU.

4.3.2 Comparaison à même ouverture

Dans ce qui suit, nous considérons une ALNU ayant une géométrie centro-symétrique et étant creuse au centre. Cela signifie que l'ensemble des capteurs manquants se situe au centroïde du réseau et vers les extrémités. La géométrie centro-symétrique signifie que les positions des capteurs sont symétriques par rapport au centre du réseau. Un exemple d'une telle géométrie est représenté sur la Fig. 4.2. Puisque le réseau est symétrique, cela implique que $\bar{m}_d = 0$. On peut

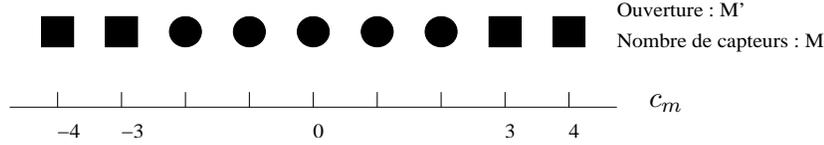


FIGURE 4.2: Exemple d'une ALNU avec une géométrie centro-symétrique avec un centre creux, ayant une ouverture de $M' = 9$ et un nombre de capteurs $M = 4$.

montrer que pour un nombre donné de capteurs M et une ouverture M' , cette structure maximise l'écart-type σ_d . C'est donc la configuration optimale d'une ALNU pour le cas monosource. Calculons dans ce cas l'expression de σ_d afin d'obtenir la BCR.

Nous rappelons que l'ALNU est lacunaire, donc $d_m = k_m \Delta$ où k_m est un entier. Nous rappelons aussi que Δ doit être $\leq \frac{\lambda}{2}$ pour éviter les problèmes d'ambiguïté. En exploitant la propriété de symétrie de la géométrie, nous avons :

$$M\sigma_d^2 = \sum_{m=1}^M (d_m - \bar{m}_d)^2 = \sum_{m=1}^M d_m^2 = 2\Delta^2 \sum_{m=\frac{M'-M+1}{2}}^{\frac{M'-1}{2}} k_m^2. \quad (4.20)$$

Soit $\delta = M' - M$ le nombre de capteurs manquants dans l'ALNU. (4.20) se réécrit :

$$\begin{aligned} M\sigma_d^2 &= 2\Delta^2 \sum_{m=\frac{\delta+1}{2}}^{\frac{M'-1}{2}} k_m^2 = \Delta^2 \left[2 \sum_{m=1}^{\frac{M'-1}{2}} k_m^2 - 2 \sum_{m=1}^{\frac{\delta+1}{2}-1} k_m^2 \right] \\ \Rightarrow M\sigma_d^2 &= \frac{\Delta^2}{12} [M'(M'^2 - 1) - \delta(\delta^2 - 1)]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

En remplaçant (4.21) dans (4.10), nous obtenons l'expression de la BCR d'une $ALNU_{M',M}$ à géométrie centro-symétrique avec un centre creux :

$$BCR_{ALNU_{M',M}} = \frac{3\lambda^2}{2\pi^2(\cos \theta)^2 \Delta^2 RSB [M'(M'^2 - 1) - \delta(\delta^2 - 1)]}. \quad (4.22)$$

En supposant M' et δ suffisamment grands, on a : $M' \ll M'^3$ et $\delta \ll \delta^3$. Les BCR de l'ALNU et l'ALU peuvent alors être approximées par :

$$BCR_{ALNU_{M',M}} \approx \frac{3\lambda^2}{2\pi^2(\cos \theta)^2 \Delta^2 RSB (M'^3 - \delta^3)} \quad (4.23)$$

$$BCR_{ALU_{M'}} \approx \frac{3\lambda^2}{2\pi^2(\cos \theta)^2 \Delta^2 RSB (M')^3}. \quad (4.24)$$

Supposons maintenant que l'on enlève δ capteurs à une ALU de manière à former une ALNU centro-symétrique creuse au centre. Les deux réseaux ont donc la même ouverture M' mais un nombre de capteurs M différents. Si on compare les BCR de ces deux antennes, on obtient :

$$\frac{BCR_{ALU_{M'}}}{BCR_{ALNU_{M',M}}} \approx 1 - \left(\frac{\delta}{M'}\right)^3. \quad (4.25)$$

Si le nombre de capteurs manquants δ est relativement petit par rapport à M' , le second terme de (4.25) est négligeable. Alors, les performances d'une ALNU sont presque identiques à celles d'une ALU ayant la même ouverture. Donc, en enlevant quelques capteurs du réseau, l'ALNU maintient l'ouverture donc une bonne résolution et donne des performances similaires à l'ALU de même ouverture. Ceci montre que les ALNU sont économiques puisque nous utilisons moins de capteurs et nous obtenons des performances proches.

4.3.3 Comparaison à même nombre de capteurs

Après avoir effectué une comparaison entre l'ALU et l'ALNU ayant la même ouverture et un nombre de capteurs différent, nous passons à la comparaison de l'ALU et de l'ALNU ayant le même nombre de capteurs avec une ouverture différente. Nous considérons une ALU et une ALNU ayant le même nombre de capteurs, c'est-à-dire ALU_M et $ALNU_{M',M}$. L'ALNU aura donc une ouverture plus grande que l'ALU :

$$\begin{aligned} \frac{BCR_{ALU_M}}{BCR_{ALNU_{M',M}}} &= \frac{M'^3 - \delta^3}{M^3} = \frac{M'^3 - (M' - M)^3}{M^3} \\ &= \left(\frac{M'}{M}\right)^3 - \left(\frac{M'}{M} - 1\right)^3 \\ \Rightarrow \frac{BCR_{ALU_M}}{BCR_{ALNU_{M',M}}} &= 1 + 3\left(\frac{M'}{M}\right)^2 - 3\frac{M'}{M} > 1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

(4.26) confirme ce qui a été déjà dit : une ALNU avec une ouverture plus grande que l'ALU mais ayant le même nombre de capteurs présente de meilleures performances. De plus, (4.26) permet de remarquer que dans le cas des antennes symétriques à centre creux, le rapport des BCR varie d'une manière quadratique en fonction de $\frac{M'}{M}$. Cela signifie que les performances de l'ALNU s'améliorent rapidement en comparaison avec l'ALU quand l'ouverture M' augmente. Les résultats démontrés dans ce paragraphe sont illustrés par des simulations dans la section suivante.

4.4 Résultats numériques

Dans ce paragraphe, nous illustrons par des simulations les avantages de l'utilisation d'une ALNU au lieu de l'ALU équivalente en appliquant Root-MUSIC. Dans nos simulations, nous considérons une ALU_{10} avec $M' = 10$ capteurs espacés d'une demie longueur d'onde. Les ALNU sont formées en éliminant successivement les capteurs un à un. Le choix des structures des ALNU est fait en plaçant 1/3 des capteurs à chaque extrémité et au milieu du réseau. Des résultats similaires sont obtenus en choisissant d'autres structures. Les ALNU et ALU que nous avons choisies sont données dans le tableau 4.1.

Nombre de capteurs (M)	ALNU			ALU		
	Réseau	Ouverture (M')	Positions $[\lambda/2]$ (\mathbf{d})	Réseau	Ouverture (M')	Positions $[\lambda/2]$ (\mathbf{d})
10	-	-	-	ALU ₁₀	10	[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9]
9	ALNU _{10,9}	10	[0 1 2 3 4 6 7 8 9]	ALU ₉	9	[0 1 2 3 4 5 6 7 8]
8	ALNU _{10,8}	10	[0 1 2 4 5 7 8 9]	ALU ₈	8	[0 1 2 3 4 5 6 7]
7	ALNU _{10,7}	10	[0 1 2 4 5 8 9]	ALU ₇	7	[0 1 2 3 4 5 6]
6	ALNU _{10,6}	10	[0 2 4 5 8 9]	ALU ₆	6	[0 1 2 3 4 5]
5	ALNU _{10,5}	10	[0 1 4 8 9]	ALU ₅	5	[0 1 2 3 4]
4	ALNU _{10,4}	10	[0 5 8 9]	ALU ₄	4	[0 1 2 3]
3	ALNU _{10,3}	10	[0 4 9]	ALU ₃	3	[0 1 2]

TABLE 4.1: Les géométries des ALNU avec une ouverture de 10 et ALU avec différentes ouvertures.

Nombre de capteurs (M)	ALNU			ALU		
	Réseau	Ouverture (M')	Positions $[\lambda/2]$ (\mathbf{d})	Réseau	Ouverture (M')	Positions $[\lambda/2]$ (\mathbf{d})
15	-	-	-	ALU ₁₅	15	[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14]
14	ALNU _{15,14}	15	[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 12 13 14]	ALU ₁₄	14	[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13]
13	ALNU _{15,13}	15	[0 1 2 4 5 6 7 8 9 10 12 13 14]	ALU ₁₃	13	[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12]
12	ALNU _{15,12}	15	[0 1 2 4 5 6 7 8 9 10 13 14]	ALU ₁₂	12	[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11]
11	ALNU _{15,11}	15	[0 1 4 5 6 7 8 9 10 13 14]	ALU ₁₁	11	[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]
10	ALNU _{15,10}	15	[0 1 4 5 6 7 8 10 13 14]	ALU ₁₀	10	[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9]
9	ALNU _{15,9}	15	[0 1 4 5 7 8 10 13 14]	ALU ₉	9	[0 1 2 3 4 5 6 7 8]
8	ALNU _{15,8}	15	[0 1 4 5 7 10 13 14]	ALU ₈	8	[0 1 2 3 4 5 6 7]
7	ALNU _{15,7}	15	[0 1 5 7 10 13 14]	ALU ₇	7	[0 1 2 3 4 5 6]
6	ALNU _{15,6}	15	[0 1 5 7 13 14]	ALU ₆	6	[0 1 2 3 4 5]
5	ALNU _{15,5}	15	[0 1 7 13 14]	ALU ₅	5	[0 1 2 3 4]

TABLE 4.2: Les géométries des ALNU avec une ouverture de 15 et ALU avec différentes ouvertures.

Notons que toutes les ALNU_{10, M} ont la même ouverture que l'ALU₁₀ d'origine avec 10 capteurs. Dans un autre cas, nous considérons l'ALU₁₅ avec $M' = 15$ capteurs. Le tableau 4.2 contient les positions des capteurs des ALU et ALNU.

Les DDA sont localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$. Les sources sont décorréélées et le module des sources est unitaire et leur phase est uniformément distribuée entre 0 et 2π . Le nombre d'échantillons L est choisi égal à 500. Nous appliquons l'algorithme Root-MUSIC pour estimer les DDA dans les deux géométries.

4.4.1 EQM en fonction du nombre de capteurs

Considérons tout d'abord les géométries du tableau 4.1. Nous fixons le RSB à 10 dB et nous traçons la racine carrée de l'EQM en fonction du nombre de capteurs. De plus, nous traçons la valeur théorique de la variance de Root-MUSIC. Rappelons que les expressions sont données au chapitre précédent à la section 3.3. Fig. 4.3 montre les performances des ALNU et des ALU définies dans le tableau 4.1 pour la source localisée à -5° . Les résultats de la 2^{de} source sont identiques et ne sont pas représentés. Pour chaque valeur de M , nous comparons les performances des deux réseaux donnés par la ligne correspondante dans le tableau 4.1. Nous pouvons voir sur la Fig. 4.3 que l'ALNU _{M',M} apporte de meilleures performances que l'ALU _{M} ayant le même nombre de capteurs. Par exemple, l'utilisation de l'ALNU_{10,5} avec $M = 5$ capteurs et une ouverture de 10 donne de meilleurs résultats que l'ALU₅ qui comporte aussi 5 capteurs. Ceci illustre le résultat de la section 4.3.1. On note aussi que comme prévu, l'écart entre l'ALU₁₀ et l'ALNU_{10, M} croît rapidement quand $\delta = 10 - M$ augmente. De plus, Root-MUSIC exploite efficacement la grande ouverture de l'ALNU par rapport à l'ALU. (Voir les expressions des BCR pour le cas monosource à la section 4.3).

D'autre part, si nous nous concentrons sur la courbe de l'ALNU_{10, M} , pour M allant de $M = 9$ à $M = 4$, les performances de l'antenne ne sont pas sensiblement modifiées lorsqu'on

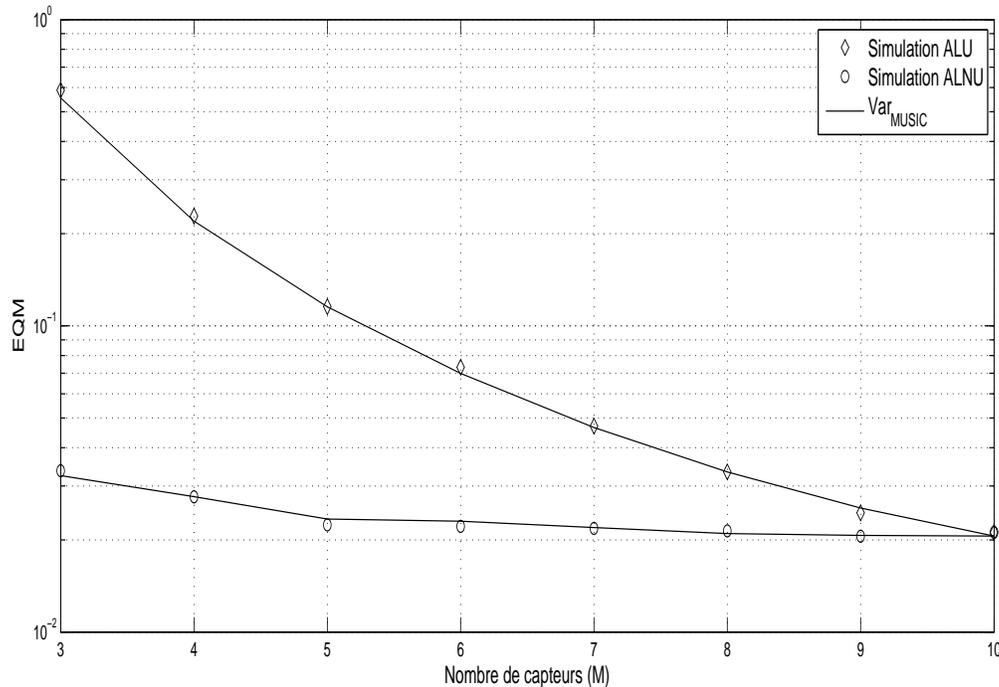


FIGURE 4.3: EQM de la source à -5° avec $M = 3, 4, \dots, 10$, RSB=10 dB, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$ dans le cas de l'ALNU et l'ALU.

supprime des capteurs centraux. Ceci étend à deux sources le résultat théorique de la section 4.3.2. Cela signifie qu'au lieu d'utiliser 10 capteurs, une EQM similaire est atteinte en utilisant seulement la moitié des capteurs, grâce aux méthodes à haute résolution telle que Root-MUSIC. Nous pouvons conclure que l'ALNU peut présenter plusieurs trous sans affecter sensiblement l'EQM.

Considérons maintenant la courbe obtenue avec les géométries du tableau 4.2. La Fig. 4.4 représente la racine carrée de l'EQM de la source à -5° en fonction du nombre de capteurs, pour les ALU et ALNU définies dans le tableau 4.2. Rappelons que le RSB est toujours à 10 dB.

Les résultats sont similaires à la Fig. 4.3. D'une part, les performances d'une $ALNU_{M',M}$ sont meilleures que l' ALU_M ayant le même nombre de capteurs. D'autre part, les performances de l' $ALNU_{15,7}$ sont très proches de l' ALU_{15} , ce qui signifie qu'on peut utiliser juste la moitié des capteurs pour obtenir les résultats de l'ALU d'origine.

4.4.2 EQM en fonction du nombre de capteurs manquants

Le but de cette simulation est d'étendre à deux sources le résultat obtenu à l'éq. (4.25), qui calcule le rapport entre l'EQM d'une ALU et les EQM des ALNU à géométrie centro-symétrique et à centre creux, ayant la même ouverture que l'ALU. Nous considérons une ALU_{51} et nous construisons les ALNU de la manière suivante : nous enlevons des capteurs à partir du centre du réseau, 2 par 2. Si les capteurs sont numérotés de 0 à 50, le 1^{er} capteur supprimé est le numéro 25, ce qui crée une $ALNU_{51,50}$. Ensuite, les capteurs 24 et 26 sont supprimés et l' $ALNU_{51,48}$ est construite avec $\delta = 3$ capteurs manquants. Et ainsi de suite jusqu'à $\delta = 47$, c'est-à-dire $ALNU_{51,4}$. La source est unique et la DDA est de 10° . Le RSB est fixé à 10 dB. Nous utilisons

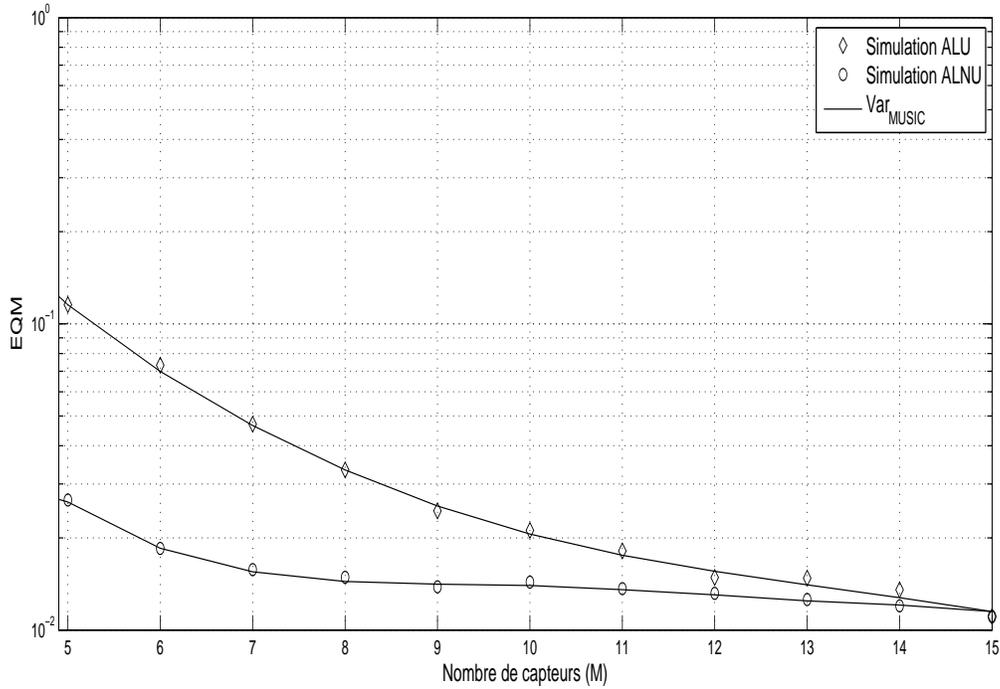


FIGURE 4.4: EQM de la source à -5° avec $M = 5, 6, \dots, 15$, RSB=10 dB, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$ dans le cas de l'ALNU et l'ALU.

toujours Root-MUSIC pour l'estimation de la DDA. La Fig. 4.5 contient deux courbes : une courbe théorique correspondant à l'éq. (4.25) avec $M' = 51$ et δ variant de 1 à 47 avec un pas de 2. La seconde courbe représente le rapport entre l'EQM de la source pour l'ALU₅₁ et l'EQM des différentes ALNU de $M = 50$ jusqu'à $M = 4$. Les résultats des simulations sont cohérents avec ceux de la courbe théorique, donc l'approximation utilisée est valable. De plus, le rapport de l'EQM de l'ALU avec l'ALNU_{51,50} ($\delta = 1$) et l'ALNU_{51,36} ($\delta = 15$) demeure très proche de 1. Donc on obtient de résultats similaires en utilisant l'ALU₅₁ et l'ALNU_{51,36}. Si δ augmente jusqu'à 29, le rapport entre l'EQM reste de l'ordre de 0.1, donc les performances de l'ALNU_{51,22} restent encore relativement proches de l'ALU, alors que plus que la moitié des capteurs ont été supprimées. De nouveau, c'est un résultat qui prouve l'avantage de l'ALNU sur l'ALU et d'autre part, il met en valeur l'aspect économique de Root-MUSIC.

4.4.3 EQM en fonctions du RSB

Dans cette simulation, nous comparons les performances de deux des ALNU_{10,M} mentionnées précédemment à la section 4.4.1 respectivement avec $M = 6$ et $M = 4$ capteurs et nous les comparons à l'ALU₁₀ avec $M' = 10$ capteurs. Fig. 4.6 représente la racine carrée de l'EQM en fonction du RSB pour la source à -5° . (Les résultats pour la source à 10° sont similaires et ne sont pas représentés.)

Les performances de l'ALNU_{10,6} avec $M = 6$ capteurs apparaissent très proches des performances de l'ALU₁₀. Et même pour $M = 4$, la différence entre l'ALNU_{10,4} et l'ALU₁₀ est de moins de 3 dB. Cet exemple illustre le fait que l'utilisation d'une ALNU ayant un nombre de

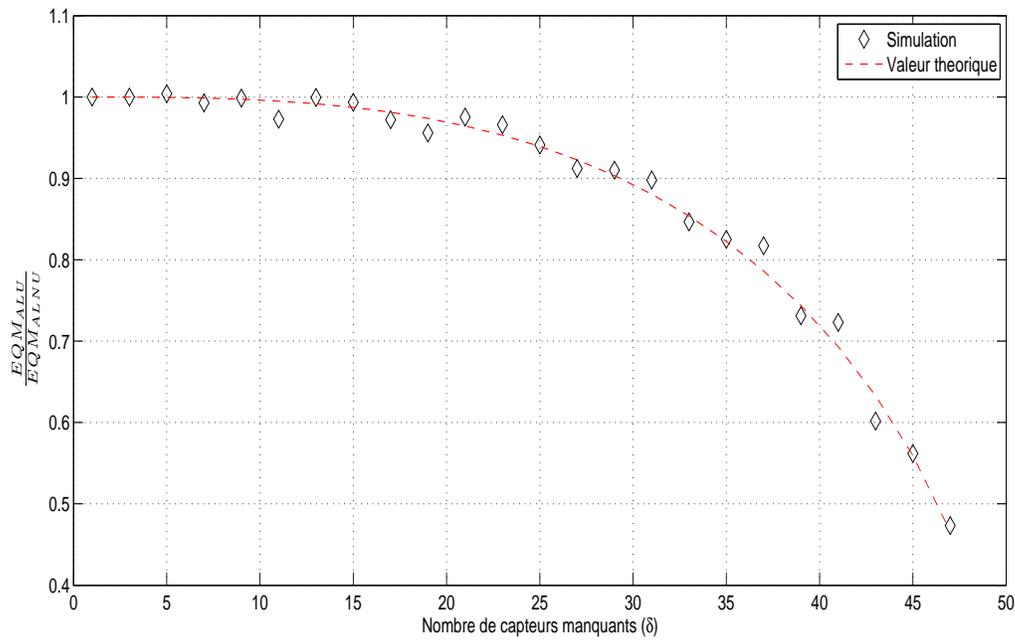


FIGURE 4.5: Rapport des EQMs de l'ALU₅₁ et des ALNU_{51,M}, en fonction du nombre de capteurs manquants δ , de la source à 10° et RSB=10 dB.

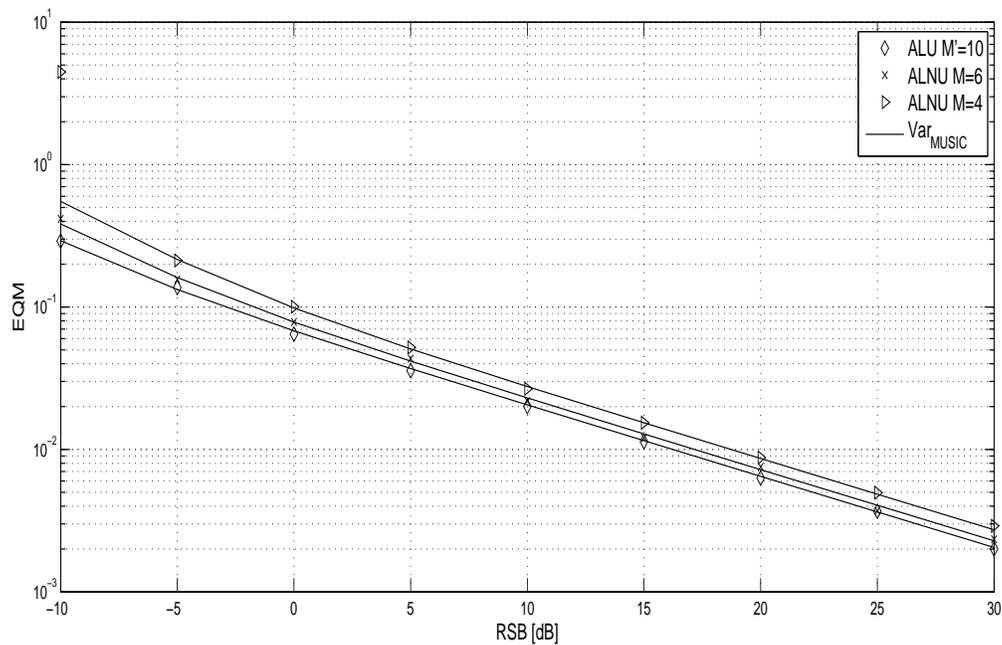


FIGURE 4.6: EQM de la source à -5° avec $M' = 10$ dans le cas de l'ALU, $M = 6$ et $M = 4$ dans le cas de l'ALNU, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$.

capteurs inférieur à l'ALU équivalente permet de maintenir des performances similaires en terme de EQM.

4.4.4 Résolution

Nous évaluons la résolution de la méthode Root-MUSIC pour les trois capteurs utilisés en haut. Nous considérons le cas de deux sources $N = 2$, où l'angle fixe est à 0° et le 2nd angle est séparé de $\Delta\theta$ qui croît de 1° à 10° . Le RSB est fixé à 10 dB. Fig. 4.7 montre les résultats de la source à 0° pour l'ALNU_{10,6} en comparaison avec l'ALU₁₀ et l'ALU₆ et Fig. 4.8 montre les résultats de la source à 0° pour l'ALNU_{10,4} en comparaison avec l'ALU₁₀ et l'ALU₄.

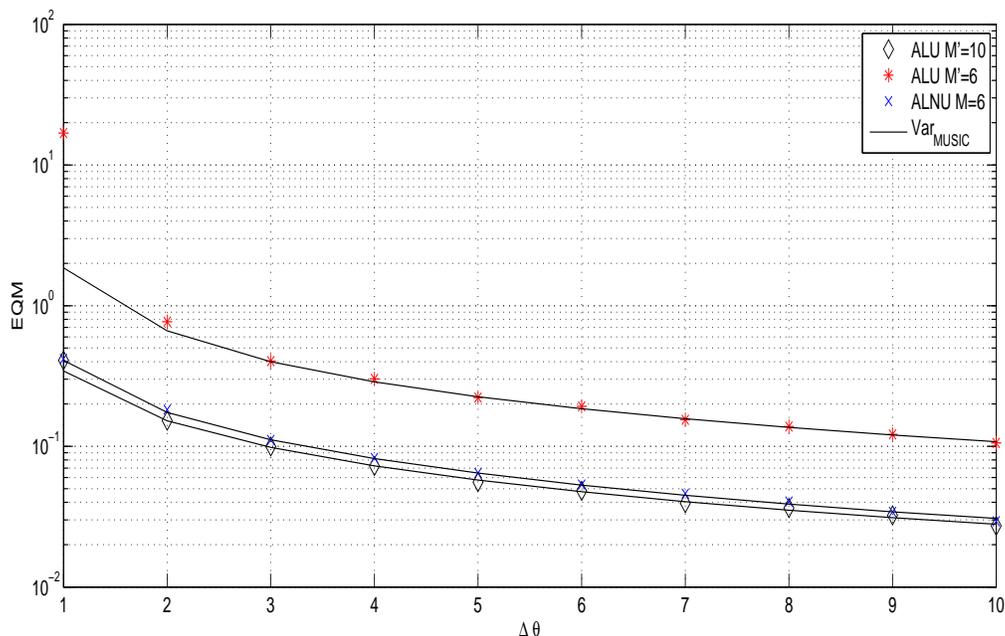


FIGURE 4.7: [Résolution pour la source à 0° avec $M' = 10$ et $M' = 6$ dans le cas de l'ALU, $M = 6$ dans le cas de l'ALNU, RSB=10 dB, $N = 2$ sources.

Dans le cas de l'ALNU, Root-MUSIC permet d'obtenir une résolution angulaire similaire à l'ALU équivalente (c'est-à-dire ayant la même ouverture). D'autre part, si nous comparons l'ALNU et l'ALU ayant le même nombre de capteurs, nous constatons que la résolution dans le cas de l'ALNU est améliorée.

4.4.5 Effet des lobes secondaires

Dans cette dernière simulation, nous reprenons le problème des lobes secondaires lié à l'utilisation des ALNU, mentionné au chapitre précédent. Nous considérons les mêmes géométries que précédemment, c'est-à-dire l'ALU₁₀ avec $M' = 10$ capteurs et les ALNU_{10,M} avec $M = 6$ et $M = 4$ capteurs respectivement. Tout d'abord, nous représentons le diagramme d'antenne pour l'ALU₁₀ et l'ALNU_{10,4} sur la Fig. 4.9, où nous prenons l'écart entre les deux angles $\Delta\theta$ entre 0° et 60° . La largeur du lobe principal qui fixe la résolution limite de FV est sensiblement la

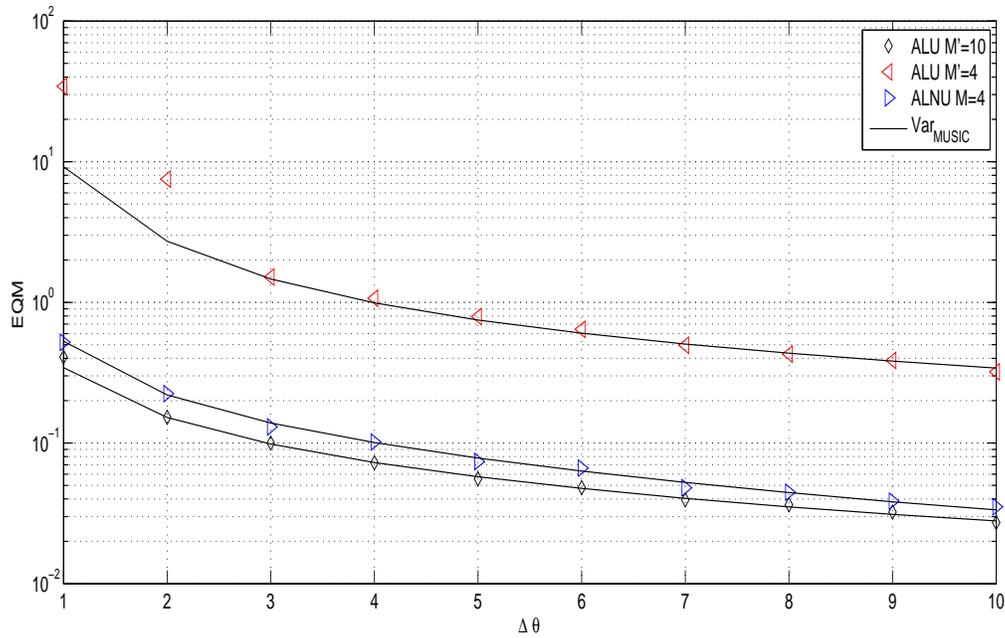


FIGURE 4.8: Résolution pour la source à 0° avec $M' = 10$ et $M' = 4$ dans le cas de l'ALU, $M = 4$ dans le cas de l'ALNU, $\text{RSB}=10$ dB, $N = 2$ sources.

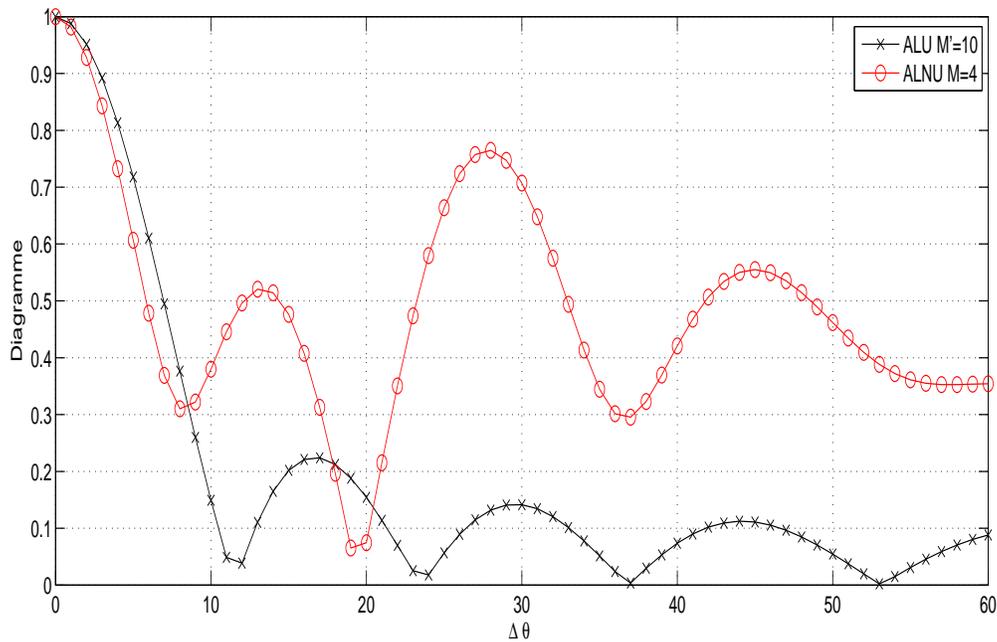


FIGURE 4.9: Diagramme d'antennes de l'ALNU_{10,4} et l'ALU₁₀.

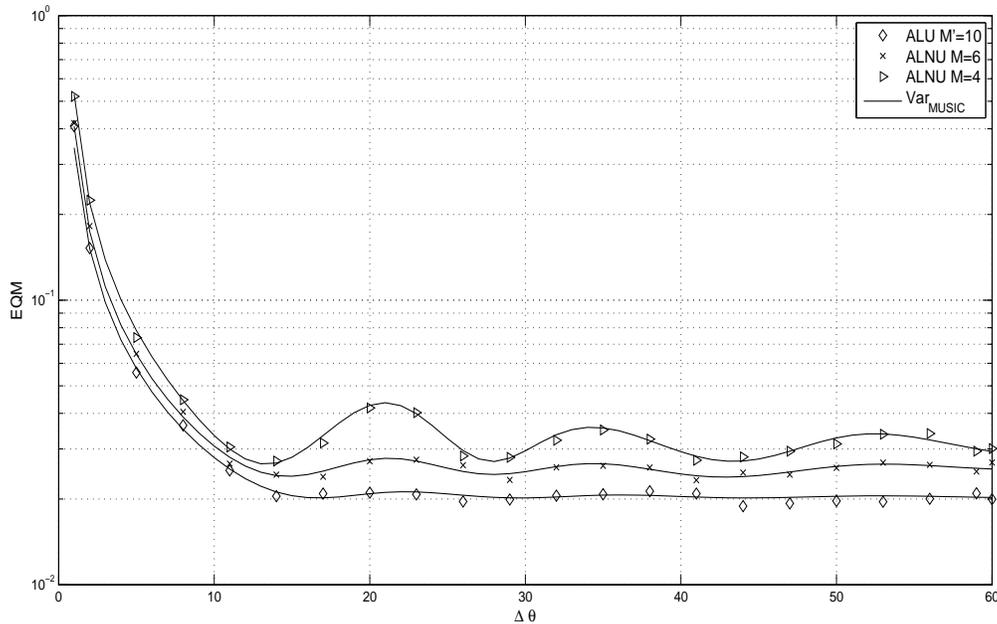


FIGURE 4.10: EQM de la source à 0° avec ALU $M' = 10$ et ALNU avec $M = 6$ et $M = 4$ respectivement, RSB=10 dB, $N = 2$ sources.

même pour les deux antennes (approximativement 10°). On peut remarquer l'importance des lobes secondaires dans la diagramme de l'ALNU, notamment à 28° .

Nous réalisons maintenant une simulation pour étudier l'influence de ces lobes secondaires. Le RSB est fixé à 10 dB. Nous considérons le cas de deux sources où le 1^{er} angle est fixé à 0° et $\Delta\theta$ varie de 1° à 60° . Sur la Fig. 4.10, nous représentons la racine carrée de l'EQM de l'angle 0° dans le cas des trois réseaux déjà mentionnés.

Cette figure montre que la résolution ne varie pas trop quand le nombre de capteurs diminue. De plus, l'effet des lobes secondaires est négligeable en utilisant Root-MUSIC. Pour l'ALNU_{10,6}, cet effet est très faible. Pour l'ALNU_{10,4}, cet effet apparaît un peu plus. Pour cela, nous allons comparer les performances de l'ALNU_{10,4} en utilisant Root-MUSIC et l'algorithme FV.

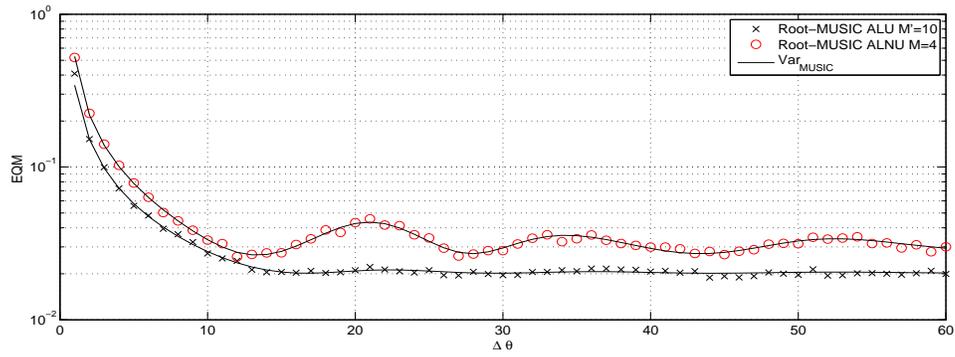
Sur la Fig. 4.11, nous comparons la racine carrée de l'EQM dans le cas de l'ALNU_{10,4} ayant $M = 4$ capteurs et l'ALU₁₀, en utilisant Root-MUSIC, la méthode de FV classique et la méthode de Capon. Les résultats sont représentés respectivement sur les Fig. 4.11(a), 4.11(b) et 4.11(c).

Cette figure montre que l'utilisation des méthodes à haute résolution au lieu de l'algorithme classique FV et de Capon peut réduire fortement l'effet des lobes secondaires. Pour les méthodes de FV et de Capon, la différence de performances entre l'ALU et l'ALNU est très grande, alors que cet écart est réduit en utilisant Root-MUSIC. Pour l'ALNU_{10,4}, l'effet des lobes secondaires est négligeable en le comparant aux résultats de l'algorithme FV et de Capon.

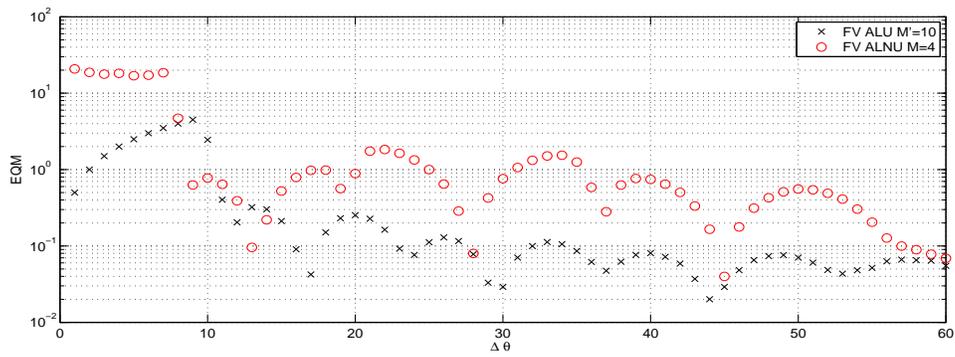
4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi l'expression générale de la BCR dans le cas des ALNU et ALU, ainsi que les expressions particulières dans le cas monosource et disposant d'une seule

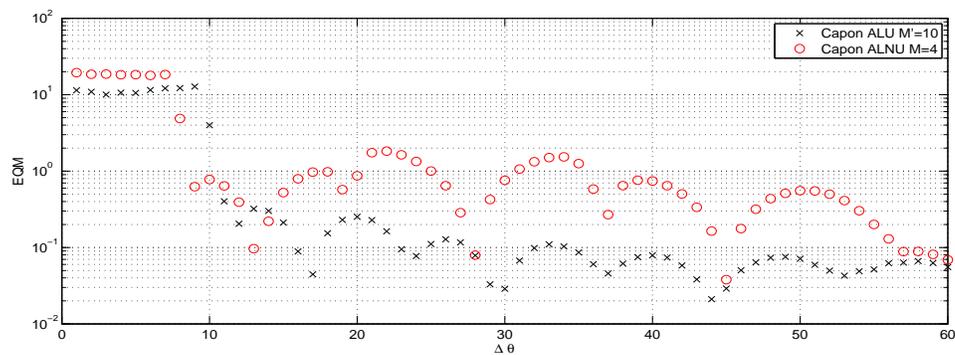
observation. D'après ces formules, nous avons pu comparer les performances de l'ALNU par rapport à l'ALU dans le cas particulier où la géométrie de l'ALNU est centro-symétrique à un centre creux. Nous pouvons conclure que pour le même nombre de capteurs, l'ALNU présente de meilleures performances que l'ALU puisque l'ouverture est plus grande, ce qui signifie que la résolution est améliorée. Pour la même ouverture, les performances sont très proches entre les deux géométries des réseaux. Ce qui implique qu'une ALNU avec un nombre de capteurs raisonnablement inférieur à l'ALU équivalente conserve les mêmes performances. Par conséquent, l'un des avantages de l'ALNU est la réduction des coûts de construction (nombre de capteurs réduit) et de traitement (taille des données réduite). Dans les simulations, nous avons utilisé Root-MUSIC pour les deux types de géométries parce que cet estimateur est efficace dans le cas de sources non corrélées. Les résultats des simulations confirment nos conclusions. De plus, nous avons montré qu'en augmentant le nombre de capteurs manquants dans une ALNU, l'effet des lobes secondaires reste négligeable par rapport aux performances de l'algorithme FV.



(a) Root-MUSIC



(b) FV



(c) Capon

FIGURE 4.11: EQM de la source à 0° avec l'ALNU_{10,4} et l'ALU₁₀, RSB=10 dB, $N = 2$ sources.

Chapitre 5

EM-ESPRIT

On a vu au chapitre 3 que Root-MUSIC peut être directement appliquée aux ALNU lacunaires. Mais elle ne peut pas être appliquée dans le cas des ALNU à géométrie arbitraire. Pour cela, nous allons proposer dans ce chapitre une nouvelle méthode qui peut être appliquée à n'importe quel type de géométrie d'antenne : EM-ESPRIT. L'algorithme EM a été présenté précédemment au chapitre 2. Nous avons vu que le choix des données complètes n'est pas unique. Dans le cadre de l'estimation des DDA, nous reprenons le principe proposé dans l'article [80] et nous apportons des améliorations notamment en utilisant ESPRIT au lieu de IQML dans l'étape de maximisation. ESPRIT est une méthode à HR plus simple que IQML. Par ailleurs, l'originalité de EM-ESPRIT [19] est qu'elle peut être appliquée à n'importe quel type de géométrie d'antennes non uniformes : les antennes lacunaires et les antennes à géométrie arbitraire, tandis que la méthode proposée dans [80] se limite aux antennes lacunaires. Et on a vu au chapitre 3 que Root-MUSIC était mieux adaptée à ce type de géométrie. Nous commençons le chapitre par une présentation de l'algorithme EM et une démonstration de la convergence de cet algorithme vers un maximum local de la vraisemblance. Dans la partie suivante, nous appliquons EM-ESPRIT aux deux types de géométrie des ALNU. A la fin, des simulations sont présentées pour étudier les performances de la méthode proposée.

5.1 Généralités sur l'algorithme EM

Dans certains problèmes d'estimation de paramètres, les données nécessaires pour estimer ces paramètres ne sont pas disponibles soit parce que l'accès à ces données est impossible, soit parce que certaines données sont manquantes. De telles difficultés surviennent par exemple quand une sortie est le résultat d'une accumulation de plusieurs sorties élémentaires ou bien quand plusieurs sorties sont rassemblées (par exemple dans un histogramme). Il peut également y avoir des données perdues ou groupées de telle manière que le nombre de points de données implicites soit inconnu (effacement et/ou troncature). L'algorithme Expectation-Maximisation (EM) est bien adapté à de tels problèmes parce qu'il produit une estimation MV des paramètres quand il y a une "relation plusieurs à une" entre la distribution implicite et la distribution régissant l'observation. L'algorithme EM est remarquable à cause de sa simplicité et de la généralité du théorème associé et d'autre part à cause du grand nombre d'applications auxquelles cet algorithme peut être appliqué.

L'algorithme EM consiste en deux étapes majeures : l'étape "Espérance" (*étape-E*) suivie de l'étape "Maximisation" (*étape-M*). Dans l'*étape-E*, il suffit d'exprimer la fonction vraisemblance des données complètes étant donnés les paramètres de l'itération précédente et l'observation.

L'étape- M fournit alors une nouvelle estimée des paramètres. Ces deux étapes sont itérées jusqu'à convergence. Ce concept est illustré par la Fig. (5.1). Le terme "données incomplètes" dans sa

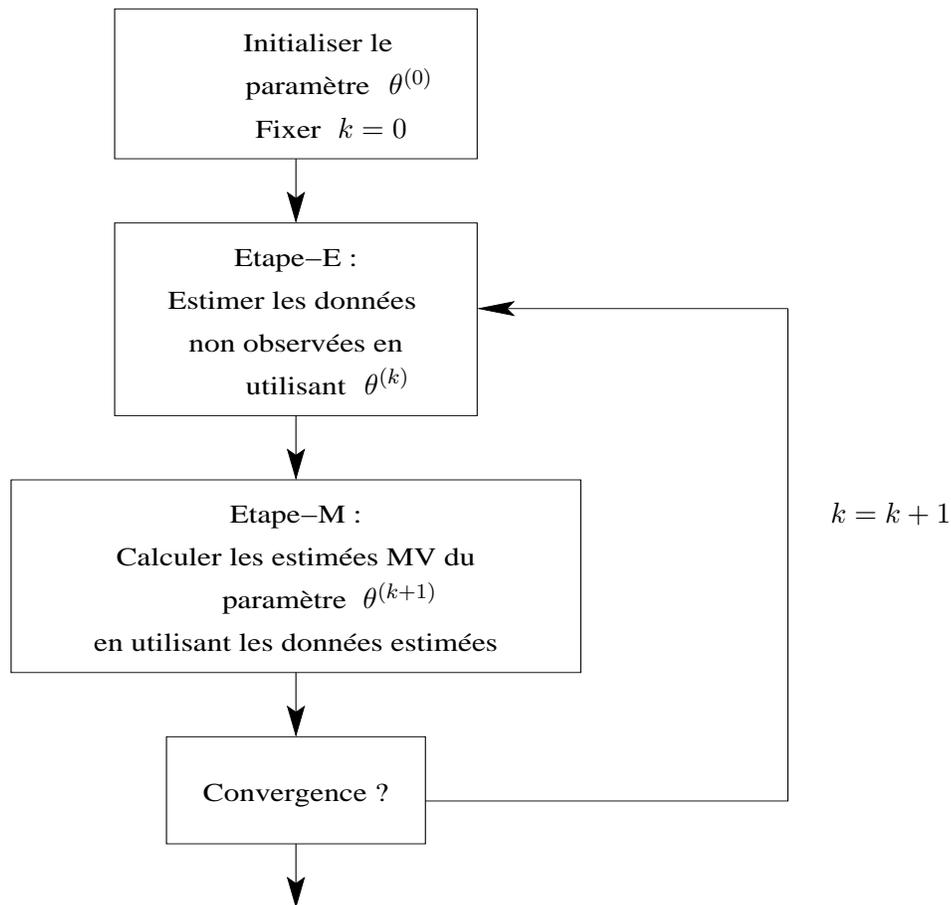


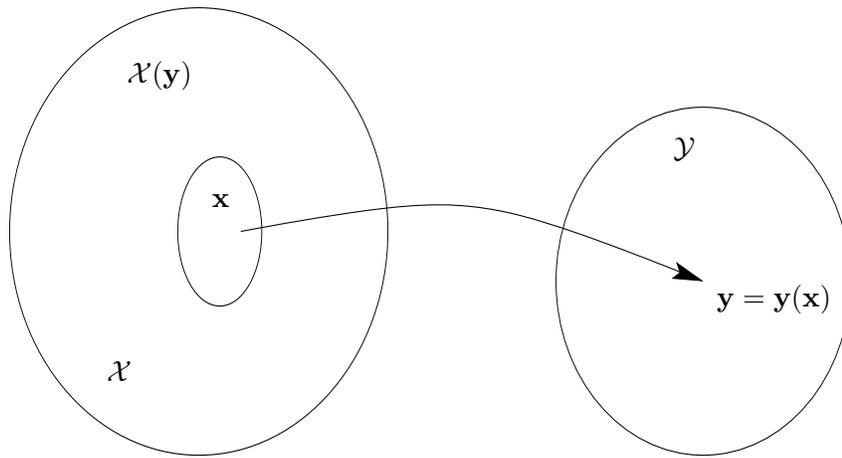
FIGURE 5.1: Concept de l'algorithme EM.

forme générale implique l'existence de deux espaces \mathcal{Y} et \mathcal{X} et une relation plusieurs à une de \mathcal{X} à \mathcal{Y} . Les données observées \mathbf{y} forment une réalisation de \mathcal{Y} . Les données \mathbf{x} correspondant dans \mathcal{X} ne sont pas observées directement, mais seulement indirectement à travers \mathbf{y} . Plus spécialement, nous supposons qu'il existe une relation $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{x})$ de \mathcal{X} à \mathcal{Y} , et que \mathbf{x} est inclus seulement dans un sous-ensemble de \mathcal{X} déterminé par l'équation $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ où \mathbf{y} constitue les données observées. Nous appelons \mathbf{x} les "données complètes" même si dans certains cas \mathbf{x} contient aussi \mathbf{y} . La Fig. (5.2) illustre cette relation. Dans cette figure, le point \mathbf{y} est une image de \mathbf{x} et l'ensemble $\mathcal{X}(\mathbf{y})$ est le "chemin" inverse de \mathbf{y} .

Nous définissons une famille de densités $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta})$ dépendant des paramètres $\boldsymbol{\theta}$ et nous dérivons la famille de densités $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta})$ correspondante. La densité des données complètes $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta})$ est reliée à celle des données incomplètes $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta})$ par la formule suivante :

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}) = \int_{\mathcal{X}(\mathbf{y})} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x}. \quad (5.1)$$

L'algorithme EM consiste à estimer une valeur de $\boldsymbol{\theta}$ qui maximise $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta})$ étant donné les \mathbf{y} observées, mais il fait cela en utilisant principalement la famille associée $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta})$ des données complètes.

FIGURE 5.2: Illustration de la relation plusieurs à une de \mathcal{X} à \mathcal{Y} .

5.2 Convergence de EM

Voici une justification de l'algorithme EM. En utilisant la règle de Bayes et en prenant le logarithme des densités de probabilité, nous avons :

$$\ln f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}) = \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta}) - \ln f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{X} | \mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta}). \quad (5.2)$$

En prenant l'espérance conditionnée de (5.2) sachant \mathbf{Y} pour une valeur du paramètre égale à $\boldsymbol{\theta}'$, nous obtenons :

$$L(\boldsymbol{\theta}) \triangleq \ln f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}) = U(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}') - V(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}'), \quad (5.3)$$

où

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}') &= E\{\ln\{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta})\} | \mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta}'\}, \\ V(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}') &= E\{\ln\{f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{X} | \mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})\} | \mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta}'\}. \end{aligned}$$

$L(\boldsymbol{\theta})$, la log-vraisemblance des données observées, est la fonction à maximiser. Sachant que $V(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}') \leq V(\boldsymbol{\theta}' | \boldsymbol{\theta}')$ (inégalité de Jensen), si $U(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}') > U(\boldsymbol{\theta}' | \boldsymbol{\theta}')$, alors $L(\boldsymbol{\theta}) > L(\boldsymbol{\theta}')$. Ainsi, la maximisation de $U(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}')$ augmente le critère MV. En exploitant cette propriété, l'algorithme EM peut être décrit de la manière suivante :

L'algorithme EM commence avec une initialisation du paramètre $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$, et maximise $L(\boldsymbol{\theta})$ en répétant les étapes *E* et *M*. A l'itération k :

Étape-E : Calculer $U(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})$.

Étape-M : Estimer $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$ tel que $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} U(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})$.

A chaque cycle de l'algorithme la fonction de vraisemblance $L(\boldsymbol{\theta})$ est augmentée, puisque :

$$\begin{aligned} L(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) &= U(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) - V(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) \\ &\geq U(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) - V(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) = L(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) \end{aligned}$$

où l'inégalité est vraie grâce à l'inégalité de Jensen et à l'*étape-M*.

Notons que la mise en oeuvre de l'algorithme EM n'est pas unique puisqu'elle dépend du choix des données complètes. La transformation qui relie les données complètes \mathbf{X} aux données observées \mathbf{Y} peut en effet être une transformation non inversible quelconque. Cependant, le choix des données complètes peut affecter la complexité et la vitesse de convergence de l'algorithme. Un mauvais choix des données complètes peut aboutir à un algorithme non performant.

5.3 Cas des ALNU lacunaires

5.3.1 EM adapté aux ALNU

Dans le cas des ALNU, la sortie du réseau peut être considérée comme les données incomplètes. L'idée principale consiste à interpoler ces données incomplètes de manière à créer une Antenne Virtuelle Linéaire Uniforme (AVLU) dont la sortie constitue les données complètes. EM semble donc bien approprié pour réaliser l'interpolation des données et l'estimation des DDA. Le choix des données incomplètes peut être fait de manière différente. Dans [24], les données complètes sont obtenues en décomposant les données observées $\mathbf{y}(t)$ en ses N composantes de signal. Par contre dans [80], les auteurs considèrent le cas des ALNU lacunaires et les données complètes sont formées des sorties de tous les capteurs de l'AVLU, constituée des capteurs existants et capteurs manquants. Nous nous situons dans cette perspective et nous construisons les données complètes suivant la géométrie de l'ALNU : ALNU lacunaire ou ALNU à géométrie arbitraire. Nous commençons par l'étude d'une méthode d'optimisation pour les ALNU lacunaires et ensuite nous proposons de la généraliser pour les ALNU à géométrie arbitraire.

5.3.2 Construction des données

Soit l'ALNU lacunaire de M capteurs et d'ouverture M' . Elle peut être considérée comme une ALU de M' capteurs à laquelle il manque quelques capteurs. Considérons l'AVLU de M' capteurs ($M' > M$) formée par les capteurs de l'ALNU et les capteurs manquants virtuels comme représentés sur la Fig. 5.3.

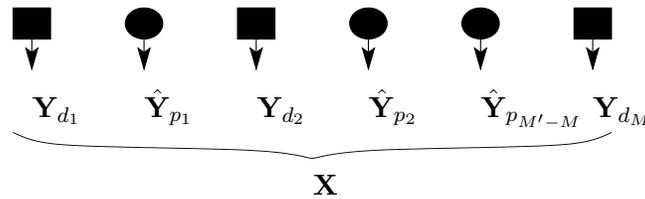


FIGURE 5.3: Exemple d'une ALNU à géométrie arbitraire et son AVLU équivalent, avec $\mathbf{g} = [1, 0, 0, 0, 1]$. Dans l'AVLU, \blacksquare : capteurs existants (\mathbf{Y}), \bullet : capteurs manquants ($\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{p}}$).

Soit \mathbf{Y} les données observées (ou incomplètes) qui correspondent à la sortie de l'ALNU. Soit \mathbf{X} les données complètes qui correspondent à la sortie de l'AVLU. Elles sont constituées des données observées (sortie de l'ALNU) et des données correspondant aux capteurs manquants notées par $\mathbf{Y}_{\mathbf{p}}$. Ainsi, l'algorithme EM s'applique directement. Nous pouvons décrire la relation entre les données incomplètes \mathbf{Y} et les données complètes \mathbf{X} par une transformation linéaire :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G}^T \mathbf{X} \quad (5.4)$$

où la matrice \mathbf{G} de dimension $M' \times M$ est construite en éliminant toutes les colonnes nulles de $\text{diag}(\mathbf{g})$ et où \mathbf{g} décrit l'ALNU lacunaire. \mathbf{g} est un vecteur binaire de longueur M' . Le m -ième élément de \mathbf{g} vaut 1 si le capteur numéro m de l'AVLU fait partie de l'ALNU lacunaire, sinon il vaut 0. Si nous prenons comme exemple la Fig. 5.3, comme les capteurs 0, 2, 5 de l'AVLU

forment l'ALNU, alors $\mathbf{g} = [1, 0, 1, 0, 0, 1]$. Dans l'exemple de la Fig. 5.3, nous trouvons :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La relation qui relie les données des capteurs manquants $\mathbf{Y}_{\mathbf{p}}$ et les données complètes \mathbf{X} peut être exprimée sous la forme :

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{G}}^{\top} \mathbf{X} \quad (5.5)$$

où la matrice $\bar{\mathbf{G}}$ est de dimension $M' \times (M' - M)$. Elle est construite identiquement à \mathbf{G} . Dans l'exemple précédent, nous avons :

$$\bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par construction, le modèle paramétrique sans bruit de \mathbf{X} est donné par :

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{G}\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{A}_{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta}))\mathbf{S}. \quad (5.6)$$

$\mathbf{A}_{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta})$ est la matrice direction des capteurs manquants. Soit le vecteur $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_{M'-M}]$ de longueur $(M' - M)$ représentant les positions des capteurs manquants. Nous pouvons écrire $\mathbf{A}_{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta})$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta}) &= [\mathbf{a}_{\mathbf{p}}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}_{\mathbf{p}}(\theta_N)], \\ \mathbf{a}_{\mathbf{p}}(\theta_n) &= \left[e^{-j2\pi \frac{p_1 \sin \theta_n}{\lambda}}, \dots, e^{-j2\pi \frac{p_{M'-M} \sin \theta_n}{\lambda}} \right]^{\top}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Notons que le modèle $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ peut être reformulé en :

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}_{AVLU}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}, \quad (5.8)$$

où $\mathbf{A}_{AVLU}(\boldsymbol{\theta})$ est la réponse d'une ALU et dans ce cas, de l'AVLU.

$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ est la moyenne inconnue du vecteur \mathbf{X} des données complètes qui est gaussien avec une matrice de covariance égale à $\sigma^2 \mathbf{I}$. Le vecteur des paramètres à estimer est formé de $\boldsymbol{\theta}$ et de \mathbf{S} . Donc si $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta})$ est la densité de \mathbf{x} sachant $\boldsymbol{\theta}$, nous avons :

$$\ln f_{\mathbf{x}}(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta}) = -M'L \ln(\pi\sigma^2) - \|\mathbf{X} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})\|^2 / \sigma^2 \quad (5.9)$$

et l'estimée MV de $\boldsymbol{\theta}$ sachant \mathbf{X} est facile à calculer. En effet, elle nécessite la minimisation de :

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})\|^2 = \|\mathbf{X} - \mathbf{A}_{AVLU}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}\|^2. \quad (5.10)$$

Quand nous ne disposons que du vecteur des observations \mathbf{Y} des données incomplètes et si $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta})$ représente la densité de \mathbf{y} sachant $\boldsymbol{\theta}$, l'estimée MV de $\boldsymbol{\theta}$ sachant \mathbf{Y} est égale à :

$$\boldsymbol{\theta} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}) = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \ln f_{\mathbf{y}}(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}) \quad (5.11)$$

où Θ est l'espace des paramètres. Cependant, l'expression de $\ln f_{\mathbf{y}}(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta})$ n'est pas simple comme dans (5.9) et (5.10), la maximisation de $\ln f_{\mathbf{y}}(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta})$ est une tâche difficile. L'approche EM pour le problème d'estimation MV consiste à estimer le vecteur des données complètes \mathbf{X} à partir des données observées \mathbf{Y} , ensuite substituer l'estimée de \mathbf{X} dans (5.10) pour faire la minimisation dans l'espace Θ . Cependant, puisque \mathbf{X} dépend de $\boldsymbol{\theta}$ et de \mathbf{Y} , plusieurs itérations de cette procédure sont nécessaires afin que $\boldsymbol{\theta}$ converge.

5.3.3 EM-ESPRIT

Dans ce paragraphe, nous proposons une nouvelle méthode pour l'estimation des DDA dans le cas des ALNU lacunaires. En utilisant le formalisme établi dans les paragraphes précédents, nous montrons que l'*étape-E* est équivalente à l'estimation des sorties des capteurs manquants en utilisant une interpolation basée sur le modèle du signal. Dans l'*étape-M*, nous proposons de remplacer la maximisation du critère (5.11) par la méthode à HR ESPRIT puisque le réseau virtuel formé est uniforme. Ceci permet de réduire considérablement le coût calculatoire. Tandis que dans l'*étape-E* l'approche proposée suit exactement l'estimation EM classique, l'algorithme ESPRIT dans l'*étape-M* est une méthode sous-optimale en comparaison avec l'estimateur MV. La convergence vers un maximum de la fonction de vraisemblance n'est donc plus garantie, mais en pratique nous n'avons pas observé de problème dans la majorité des configurations testées. Ce problème est apparu dans quelques rares configurations et des solutions sont proposées dans le chapitre suivant. Ces étapes sont décrites dans ce qui suit.

Étape-E

L'application de l'algorithme général à notre cas nécessite de déterminer $U(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}')$. D'après (5.9), nous avons :

$$\begin{aligned} \ln f_{\mathbf{x}}(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta}) &= -M'L \ln(\pi\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \left\{ [\mathbf{X} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})]^H [\mathbf{X} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})] \right\} \\ &= c - \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{J}^H(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^H \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{J}^H(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{X} - \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^H \mathbf{X} \end{aligned}$$

où c désigne une constante indépendante de $\boldsymbol{\theta}$. Donc $U(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}')$ devient :

$$U(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}') = c - \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{J}^H(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\sigma^2} \hat{\mathbf{X}}^H \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{J}^H(\boldsymbol{\theta}) \hat{\mathbf{X}} \quad (5.12)$$

où $\hat{\mathbf{X}} = E\{\mathbf{X} | \mathbf{Y}; \boldsymbol{\theta}'\}$. Puisque \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont reliés par la transformation linéaire $\mathbf{Y} = \mathbf{G}^T \mathbf{X}$, ils sont conjointement gaussiens et l'espérance conditionnée $\hat{\mathbf{X}}$ peut être calculée par une modification directe des formules existantes. Pour l'itération k , l'espérance de \mathbf{X} est calculée sachant \mathbf{Y} et $\boldsymbol{\theta}' = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}$, c'est-à-dire

$$\hat{\mathbf{X}}^{(k)} = E\{\mathbf{X} | \mathbf{Y}; \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}\}. \quad (5.13)$$

Cette espérance est égale à :

$$\hat{\mathbf{X}}^{(k)} = \mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) + \mathbf{G}[\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1} \left(\mathbf{Y} - \mathbf{G}^T \mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) \right). \quad (5.14)$$

Les calculs intermédiaires suivants sont nécessaires afin d'explicitier les termes de $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$:

$$\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) = \mathbf{G}\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)} + \overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)}; \quad (5.15)$$

$$\mathbf{G}^T \overline{\mathbf{G}} = \mathbf{0}; \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^T \mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) &= \mathbf{G}^T \mathbf{G}\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)} + \mathbf{G}^T \overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)} \\ \Rightarrow \mathbf{G}^T \mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) &= \mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

D'après ces calculs, (5.14) devient :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}}^{(k)} &= \mathbf{GA}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)} + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)} + \mathbf{GY} - \mathbf{GA}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)} \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{X}}^{(k)} &= \mathbf{GY} + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)}.\end{aligned}\quad (5.18)$$

$\hat{\mathbf{S}}^{(k)}$ est l'estimée du signal de la source. Elle est égale à :

$$\hat{\mathbf{S}}^{(k)} = \mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)})\mathbf{Y}, \quad (5.19)$$

où le symbole $()^\dagger$ représente la pseudo-inverse. Donc la maximisation de $U(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})$ se réduit à la minimisation de $\|\hat{\mathbf{X}}^{(k)} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})\|^2$ où $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ est donnée par (5.18). Donc dans l'étape-E il faut calculer $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$. D'après l'éq. (5.18), nous pouvons dire que les données complètes $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ sont égales aux données observées \mathbf{Y} pour les lignes de $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ correspondant aux capteurs existants et pour les lignes correspondant aux capteurs manquants, les données sont interpolées en utilisant le modèle paramétrique $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$. Soit $\hat{\mathbf{Y}}_p^{(k)} = \mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)}$ ces données manquantes interpolées. La contribution du bruit dans $\hat{\mathbf{Y}}_p^{(k)}$ est éliminée parce que son espérance est nulle, considérant que le bruit a une moyenne nulle.

Étape-M

Les données complètes estimées $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ constituent la sortie d'un réseau uniforme. Donc c'est comme si nous avons interpolé les données de l'ALNU pour obtenir celle d'une AVLU. Puisque le réseau virtuel créé est uniforme, il est possible d'appliquer n'importe quelle méthode conventionnelle pour l'estimation des DDA dans le cas des réseaux uniformes à condition que cette méthode assure une croissance au moins de la fonction de vraisemblance. Ceci est justifié par l'éq. (5.8). Nous avons choisi d'appliquer la méthode à haute résolution ESPRIT pour estimer les $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$ car ESPRIT présente de bonnes performances et un coût calculatoire réduit. Nous avons déjà vu au chapitre 2 que la méthode ESPRIT se base sur la décomposition de la matrice de covariance en espaces propres. Donc nous avons besoin de calculer la matrice de covariance des données complètes de l'AVLU $\hat{\mathbf{R}}^{(k)}$. Cette matrice est estimée en utilisant $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ et la contribution du bruit sur les données interpolées. Cette contribution est modélisée par $\bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{G}}^H\hat{\sigma}^2$, en supposant que la contribution du bruit sur $\hat{\mathbf{Y}}_p^{(k)}$ possède les mêmes propriétés statistiques que $\boldsymbol{\nu}(t)$:

$$\hat{\mathbf{R}}^{(k)} = \frac{1}{L}\hat{\mathbf{X}}^{(k)}\hat{\mathbf{X}}^{(k)H} + \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{G}}^H\hat{\sigma}^2, \quad (5.20)$$

où $\hat{\sigma}^2$ est une estimée consistante de σ^2 obtenue à partir de la moyenne des N plus petites valeurs propres de la matrice de covariance de \mathbf{Y} . Une fois $\hat{\mathbf{R}}^{(k)}$ estimée, il est possible d'estimer les valeurs de $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$ en utilisant ESPRIT qui exploite la propriété d'invariance par translation de la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}^{(k)}$ des données de l'AVLU. Le détail de l'algorithme ESPRIT a déjà été décrit au paragraphe 2.4 du chapitre 2. En conclusion, l'étape-M se réduit à l'application de la méthode à haute résolution ESPRIT aux données complètes $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$.

Remarques

1. EM-ESPRIT peut aussi être appliquée en présence de capteurs non omnidirectionnels de gains connus et identiques pour tous les capteurs. Le modèle du signal est modifié en utilisant le vecteur directeur selon l'éq. (1.9). L'étape-E peut être appliquée de la même manière en utilisant toujours le modèle modifié et ESPRIT est connue pour pouvoir être utilisée lorsque les deux sous-réseaux sont identiques à une translation près, ce qui est le cas si les gains sont identiques pour tous les capteurs.

2. Il est possible d'utiliser la technique de la moyenne directe-inverse (*forward-backward averaging*) pour la méthode EM-ESPRIT. Ceci se fait en changeant l'estimation de la matrice de covariance des données complètes, elle devient :

$$\hat{\mathbf{R}}^{(k)} = \frac{1}{L} \hat{\mathbf{X}}^{(k)} \hat{\mathbf{X}}^{(k)H} + \frac{1}{L} \hat{\mathbf{X}}^{(k)} \hat{\mathbf{X}}^{(k)H} \quad (5.21)$$

où $\hat{\mathbf{X}}^{(k)} = \mathbf{\Pi}_M \hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ et $\mathbf{\Pi}_M$ de dimension $M \times M$ est la matrice d'échange des lignes [37]. Cette technique permet de robustifier le comportement de EM-ESPRIT en faisant la moyenne sur les différentes configurations de l'antenne.

5.3.4 Résumé de la méthode EM-ESPRIT

Dans ce paragraphe, nous allons résumer notre méthode proposée EM-ESPRIT sous forme algorithmique en donnant les étapes de calcul. Nous rappelons que l'algorithme est itératif.

1. Initialisation : $k = 0$, choisir $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$ et estimer la variance du bruit $\hat{\sigma}^2$.
2. Estimer les données complètes $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ en utilisant (5.18) et estimer la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}^{(k)}$ en appliquant (5.20).
3. Utiliser ESPRIT pour estimer $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$.
4. Vérifier la convergence de $\boldsymbol{\theta}$. Sinon, $k = k + 1$, aller à l'étape 2.

Le test de convergence est calculé de la manière suivante :

$$\left| \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)} \right| \leq \rho \quad (5.22)$$

où ρ est fixé en fonction des contraintes de précision requises par l'application.

Le concept de cette méthode est aussi schématisé sur la Fig. 5.4, en reprenant les étapes E et M .

5.4 Cas des ALNU à géométrie arbitraire

L'un des avantages de la méthode proposée EM-ESPRIT est sa capacité de traiter le problème d'estimation des DDA pour n'importe quel type de géométrie des ALNU. En particulier, nous allons généraliser EM-ESPRIT pour le cas des ALNU à géométrie arbitraire. Ce type de réseaux est important car il peut être utilisé quand la géométrie est imposée par des contraintes physiques, par exemple si la nature du terrain ne permet pas le placement d'une antenne dans une position donnée. Pour l'étude du cas des ALNU à géométrie arbitraire, nous allons reprendre l'explication faite dans 5.3.2 pour le cas des ALNU lacunaires et proposer les modifications nécessaires.

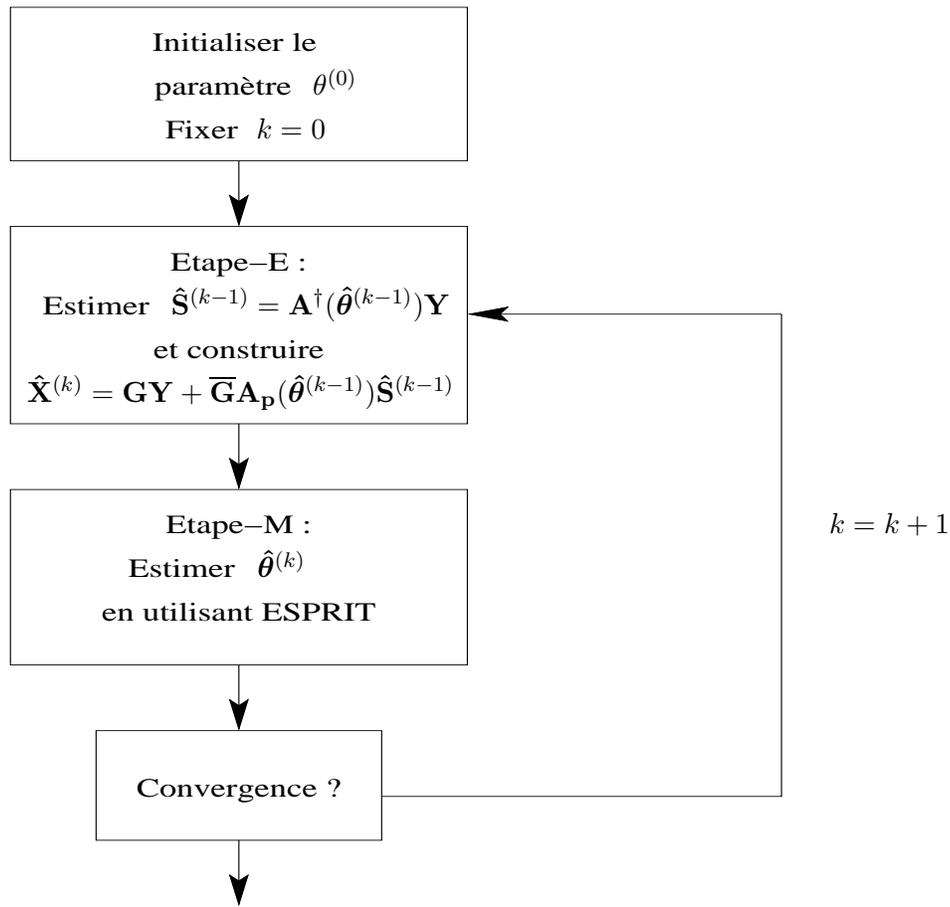
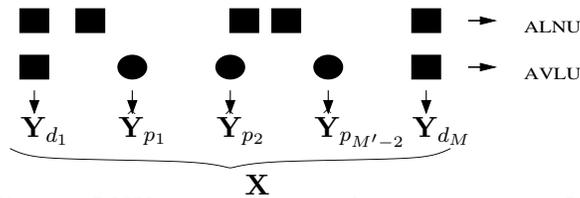


FIGURE 5.4: Concept de EM-ESPRIT.

FIGURE 5.5: Exemple d'une ALNU à géométrie arbitraire et son AVLU équivalent, avec $\mathbf{g} = [1, 0, 0, 0, 1]$. Dans l'AVLU, ■ : capteurs existants (\mathbf{Y}), ● : capteurs manquants ($\hat{\mathbf{Y}}_p$).

5.4.1 Construction des données

Dans l'ALNU à géométrie arbitraire, les espacements entre les capteurs ne sont pas des multiples de Δ . Les capteurs sont placés d'une manière arbitraire. Soit l'ALNU à géométrie arbitraire de M capteurs représentée sur la Fig. 5.5.

Contrairement aux ALNU lacunaires, il n'existe pas d'AVLU telle que tous les capteurs de l'ALNU à géométrie arbitraire appartiennent aussi à l'AVLU, donc nous ne pouvons pas simplement compléter les capteurs existants pour former les données complètes. Afin de pouvoir appliquer ESPRIT, nous conservons le principe d'une AVLU. Celle-ci est constituée de M' capteurs, possède la même ouverture que l'ALNU, de telle sorte que les capteurs des extrémités des deux antennes coïncident. Les sorties des autres ($M' - 2$) capteurs sont interpolées. La construction de l'AVLU est schématisée sur la Fig. 5.5. L'ouverture du réseau virtuel est la même que l'ALNU mais le nombre de capteurs M' n'est pas nécessairement égal à celui du réseau

d'origine. Nous verrons plus tard l'effet du choix de M' : les meilleurs résultats sont obtenus pour $M' = M$ sous réserve que cela garantisse un espacement intercapteur $\Delta < \frac{\lambda}{2}$. Le changement de construction de l'AVLU entraîne une modification dans la construction des données complètes \mathbf{X} . Puisque seulement les premier et dernier capteurs sont pris en considération dans l'AVLU, le vecteur \mathbf{g} de dimension M' a seulement les premier et dernier éléments égaux à 1, les autres éléments sont nuls : $\mathbf{g} = [1, 0, \dots, 0, 1]$. La matrice \mathbf{G} est de dimension $M' \times 2$, le vecteur des capteurs manquants vaut $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_{M'-2}]$ et la matrice $\bar{\mathbf{G}}$ sont de dimension $M' \times (M' - 2)$. Dans l'exemple de la Fig. 5.5, nous avons pris $M' = M$. Nous avons :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Le modèle paramétrique sans bruit de \mathbf{X} est toujours donné par (5.6) : $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{G}\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\boldsymbol{\theta}))\mathbf{S}$. De même, $\ln f_{\mathbf{x}}(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta})$ ne change pas et à partir de là, les DDA sont toujours estimées en faisant la minimisation de (5.10).

5.4.2 EM-ESPRIT

Dans l'étape-*E*, l'algorithme ne change pas. Les mêmes procédures sont appliquées puisque nous disposons des mêmes propriétés statistiques pour les données complètes. Donc nous calculons $\hat{\mathbf{X}}^{(k)} = E\{\mathbf{X} | \mathbf{Y}; \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}\}$ qui est égale à l'éq. (5.18). Donc le calcul des données complètes $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ consiste à prendre les données observées \mathbf{Y} pour les lignes de $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ correspondant aux capteurs situés aux extrémités et pour les lignes correspondant aux capteurs ajoutés, les données sont interpolées en utilisant le modèle paramétrique $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$:

$$\hat{\mathbf{Y}}_p^{(k)} = \mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)}$$

avec $\hat{\mathbf{S}}^{(k)} = \mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)})\mathbf{Y}$, même expression que dans l'éq. (5.19). Il est vrai que seulement le premier et le dernier capteurs sont pris en considération dans la construction de l'AVLU, mais toutes les données disponibles \mathbf{Y} sont utilisées dans l'interpolation. Ceci se fait en calculant $\hat{\mathbf{S}}^{(k)}$ qui utilise les valeurs de \mathbf{Y} pour son estimation, comme le montre l'éq. (5.19).

L'étape-*M* est identique à celle explicitée au paragraphe 5.3.3. L'algorithme ESPRIT est appliqué sur l'AVLU afin d'obtenir les estimées des DDA. En conclusion, le même algorithme résumé dans la section 5.3.4 est appliqué dans le cas des ALNU à géométrie arbitraire, mais avec une différente construction de \mathbf{X} .

5.5 Complexité de la méthode EM-ESPRIT

Dans cette section, nous faisons un calcul approximatif de la complexité de EM-ESPRIT. Nous rappelons que M est le nombre de capteurs dans l'ALNU, M' est le nombre de capteurs dans l'AVLU, N le nombre de sources et L le nombre d'échantillons. Nous désignons par opération toute opération mathématique effectuée durant le processus, que ce soit multiplication ou addition. Le calcul est tout d'abord fait pour chaque itération. Au début, il y a le calcul de $\hat{\mathbf{S}}^{(k)} = \mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)})\mathbf{Y}$ dont la complexité est de $(2MNL)$. De plus, le calcul de $\mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) = (\mathbf{A}^H(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)})\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}))^{-1}\mathbf{A}^H(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)})$ nécessite à peu près N^3 opérations. Le calcul des données complètes $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$, dont l'étape la plus importante est le calcul de $\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)})\hat{\mathbf{S}}^{(k)}$, est de

complexité $(2(M' - M)NL)$. L'étape suivante consiste à estimer la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}^{(k)}$ des données complètes $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$. Cette étape nécessite (M'^2L) opérations. La décomposition de $\hat{\mathbf{R}}^{(k)}$ en vecteurs et valeurs propres requiert $\frac{4}{3}M'^3$ opérations. Il s'agit d'une phase très coûteuse dont la complexité peut être réduite par des méthodes de poursuite de sous-espaces car seul N vecteurs propres associés aux N plus grandes valeurs propres sont utiles. A la fin, l'étape- M , c'est-à-dire ESPRIT, requiert le calcul de la matrice Φ par la méthode des moindres carrés (éq. (2.34) au paragraphe 2.3.3 au chapitre 2). Ceci exige $O(N^3)$ opérations. Donc au total, pour une itération, le nombre d'opérations est : $O(2MNL + N^3 + 2(M' - M)NL + M'^2L + \frac{4}{3}M'^3 + N^3)$, donc $O(2N^3 + 2M'NL + M'^2L + \frac{4}{3}M'^3)$ opérations. Ce nombre doit être multiplié par le nombre d'itérations.

5.6 Critères adoptés

En général, nous comparons l'EQM à la BCR dont l'expression est donnée par (4.9) au chapitre 4. Nous allons continuer à l'utiliser, quand nous traçons l'EQM de EM-ESPRIT en fonction du RSB et même en fonction des itérations. Mais d'après la section 5.2, EM maximise le critère de MV pour estimer les DDA. Il est donc plus approprié d'étudier la convergence de ce critère en fonction des itérations. La log-vraisemblance des données \mathbf{Y} est donné par :

$$\mathcal{L}(\theta, \mathbf{Y}) = -\frac{LM}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{l=1}^L \|\mathbf{y}(l) - \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(l)\|^2. \quad (5.24)$$

L'évolution de $\mathcal{L}(\hat{\theta}^{(k)}, \mathbf{Y})$ montre si l'algorithme converge avec les itérations. À chaque itération, la matrice d'amplitude des sources \mathbf{S} et la matrice de direction \mathbf{A} sont estimées en utilisant les DDA de l'itération précédente. Ainsi, la valeur de $\mathcal{L}(\hat{\theta}^{(k)}, \mathbf{Y})$ est recalculée à la fin de l'itération. Après simplification, la maximisation du critère donné en (5.24) revient à la minimisation de la log-vraisemblance négative simplifiée :

$$\mathcal{L}_1(\theta, \mathbf{Y}) = \sum_{l=1}^L \|\mathbf{y}(l) - \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(l)\|^2. \quad (5.25)$$

On utilisera le critère $\mathcal{L}_1(\theta, \mathbf{Y})$ dans la suite.

5.7 Résultats numériques

Afin d'étudier différents aspects de la méthode EM-ESPRIT, nous avons réalisé quelques simulations. Le but est d'étudier les performances de la méthode proposée dans différentes conditions. Les différents paramètres étudiés sont l'EQM en fonction du RSB, la consistance, la résolution, la convergence, la sensibilité aux valeurs initiales et le nombre de capteurs de l'AVLU. Dans la plupart des simulations, sauf contre indication, nous choisissons un nombre maximal d'itérations de 30. Le nombre d'échantillons est fixé à 500 et 500 essais sont réalisés pour chaque valeur. L'initialisation est faite en utilisant l'algorithme de FV classique.

5.7.1 EQM en fonction du RSB

Nous commençons avec l'étude de l'EQM des estimées des DDA par la méthode EM-ESPRIT. Nous traçons la racine carrée de l'EQM en fonction du RSB. Nous allons faire cette étude pour les deux géométries des ALNU. Nous commençons avec le réseau lacunaire. Soit l'ALNU lacunaire définie par $\mathbf{d} = [0, 2, 5] \frac{\lambda}{2}$. Ce réseau n'est pas sans trou puisqu'il présente des trous dans l'ensemble des espacements entre capteurs. Les sources sont localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$ et elles sont décorréliées. Le module des sources est unitaire et leur phase est uniformément distribuée entre 0 et 2π . Nous traçons sur la Fig. 5.6 la racine carrée de l'EQM de la source à 10° . Le résultat de la 2nde source étant identique, il n'est pas représenté. De plus, nous traçons la BCR dont l'expression est donnée par (4.15). D'autre part, nous comparons EM-ESPRIT à Root-MUSIC, à la méthode d'interpolation de Friedlander et à EM-IQML. L'EQM approche la BCR.

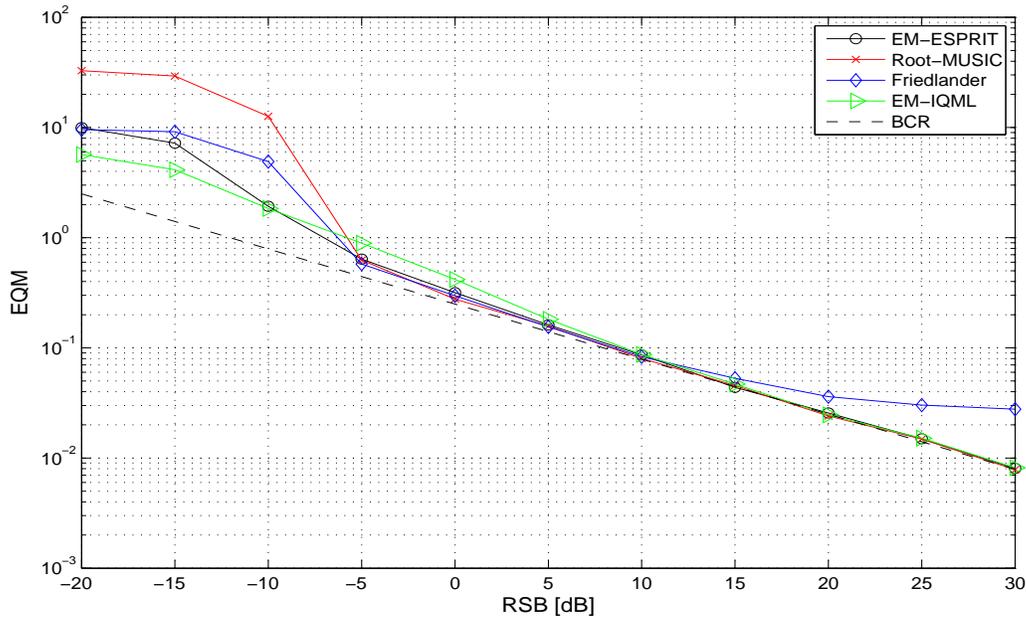


FIGURE 5.6: EQM de la source à 10° pour l'ALNU lacunaire $\mathbf{d} = [0, 2, 5] \frac{\lambda}{2}$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$.

D'autre part, en comparant avec les autres méthodes, il apparaît que EM-ESPRIT présente de meilleurs résultats. Dans la zone pré-asymptotique, c'est-à-dire pour les faibles valeurs de RSB, EM-ESPRIT a une plus petite EQM que Root-MUSIC et la méthode de Friedlander. EM-IQML a une EQM plus faible que EM-ESPRIT, mais pour la zone des moyens RSB, EM-ESPRIT devient plus performant et d'ailleurs, le coût calculatoire de EM-ESPRIT est beaucoup plus faible que celui de EM-IQML. Dans la zone asymptotique (grandes valeurs RSB), EM-ESPRIT a des résultats semblables à Root-MUSIC, alors que les résultats de la méthode de Friedlander s'éloignent de la BCR, ce qui est normal puisque l'erreur d'interpolation introduite par cette méthode est indépendante du RSB.

Nous répétons la même expérience pour une ALNU à géométrie arbitraire. Ici, nous ne pouvons appliquer Root-MUSIC ni EM-IQML. Pour cela, nous allons comparer EM-ESPRIT à Spectral MUSIC, à Friedlander et à la méthode TSVD. Le réseau utilisé est défini par $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$. Nous prenons les mêmes sources qu'avant localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$. La racine

carrée de l'EQM de la source à 10° est tracée sur la Fig. 5.7 en fonction du RSB. De même, la BCR est tracée pour tester l'efficacité de la méthode. Nous concluons que l'EQM approche la

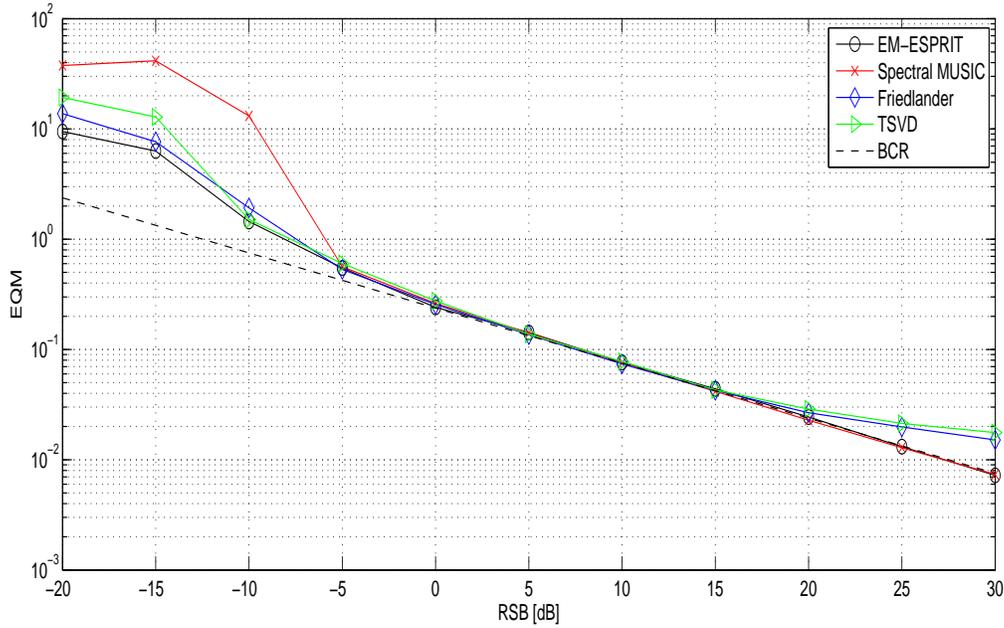


FIGURE 5.7: EQM de la source à 10° pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$.

BCR. Dans la zone pré-asymptotique, l'EQM correspondant à EM-ESPRIT est plus faible que celle correspondant à Spectral MUSIC, à la méthode de Friedlander et à la méthode TSVD. Dans la zone asymptotique, les résultats des deux méthodes EM-ESPRIT et Spectral MUSIC sont identiques, alors que ceux correspondant à la méthode de Friedlander et à la TSVD s'éloignent de la BCR à cause de l'erreur d'interpolation et à l'erreur de troncature, respectivement.

Nous faisons un autre test en fonction du RSB avec $N = 3$ sources non corrélées localisées à $[-5^\circ, 10^\circ, 45^\circ]$. Nous conservons le même réseau : $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$. La racine carrée de l'EQM des trois sources est tracée sur la Fig. 5.8 en fonction du RSB ainsi que la BCR de chacune des sources. Pour les faibles valeurs du RSB, l'EQM a de grandes valeurs, ensuite elle diminue au fur et à mesure des valeurs du RSB. Donc en résumé, nous pouvons dire que la méthode EM-ESPRIT présente de bonnes performances asymptotiquement ainsi qu'à bas RSB. De plus, elle donne de meilleurs résultats par rapport à d'autres méthodes surtout dans la zone pré-asymptotique.

Maintenant, nous testons EM-ESPRIT dans le cas de deux sources corrélées. La matrice de covariance des sources est donnée par :

$$\mathbf{R}_{ss} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma^* & 1 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

où γ détermine le degré de corrélation entre les deux sources. Nous considérons le réseau utilisé précédemment défini par $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, les sources sont localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$. Nous traçons la racine carrée de l'EQM des estimées des DDA en fonction du RSB. Fig. 5.9 montre le résultat des simulations pour la seconde source 10° et pour trois valeurs de γ : 0, 0.3 et 0.6.

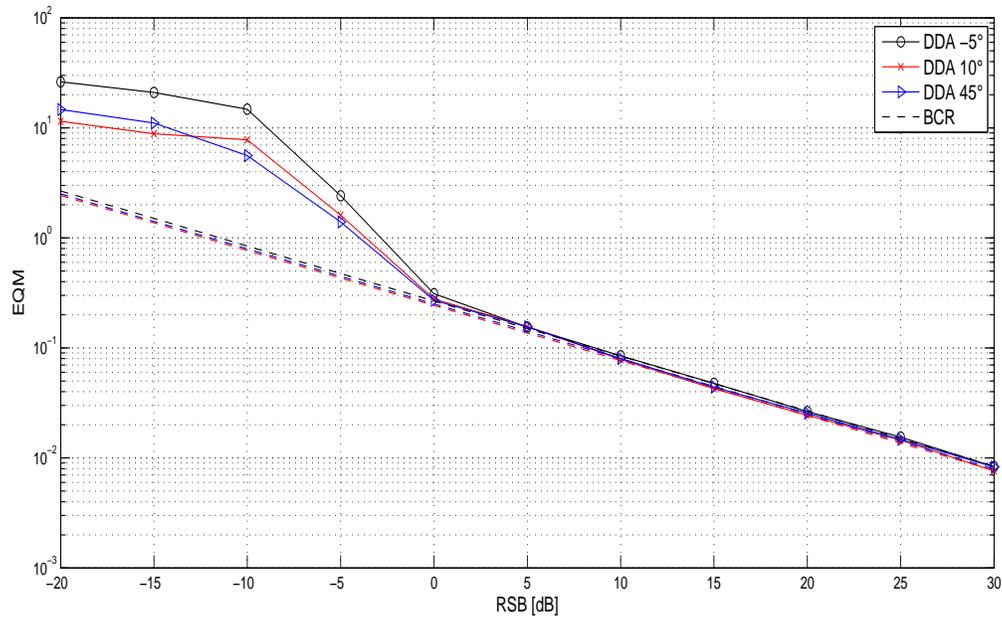


FIGURE 5.8: EQM des sources pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ, 45^\circ]$.

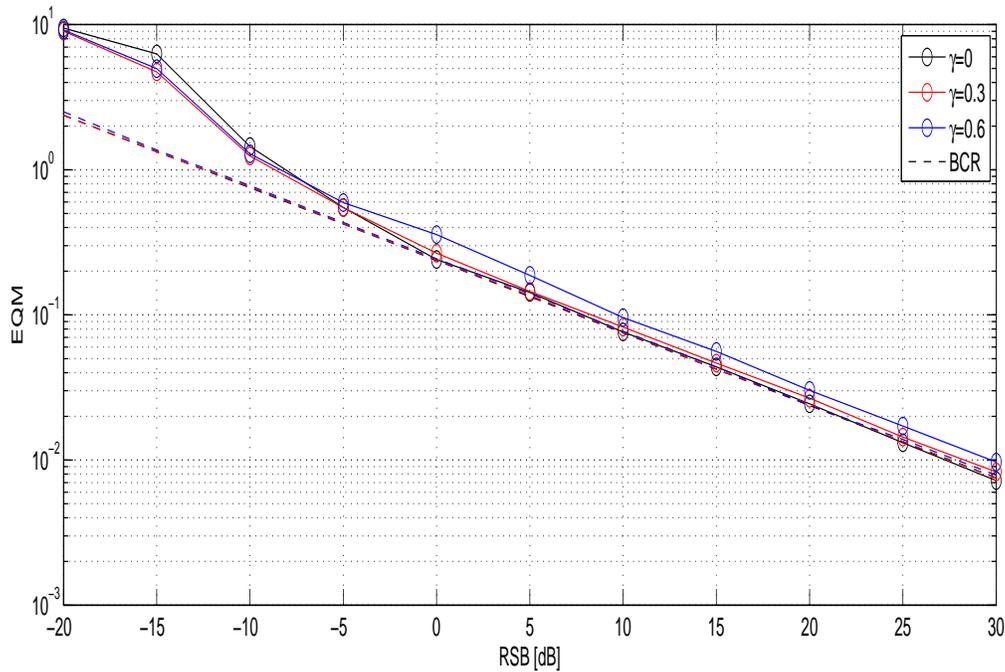


FIGURE 5.9: EQM de la source à 10° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$, $\gamma = 0, 0.3$ et 0.6 .

EM-ESPRIT présente de bonnes performances dans le cas de sources partiellement corrélées. Les résultats pour $\gamma = 0.3$ sont très proches que pour $\gamma = 0$, c'est-à-dire quand les sources sont décorréélées. Pour $\gamma = 0.6$, la courbe s'éloigne un peu de la BCR.

Enfin, nous allons étudier le comportement moyen de la méthode non plus sur une géométrie fixée mais sur un ensemble de réseaux dont la position des capteurs est choisie aléatoirement. Le principe est de fixer l'ouverture et le nombre de capteurs et à chaque réalisation, nous générons les différentes positions des capteurs. Seules les positions du premier et dernier capteurs sont fixés par l'ouverture. Les autres positions sont choisies de sorte que toutes les positions soient équiprobables. Cela revient à faire la moyenne de l'EQM sur tous les réseaux possibles.

Nous prenons tout d'abord le cas des ALNU lacunaires avec une ouverture de 6 et un nombre de capteurs de $M = 3$. Les sources sont localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$. La racine carrée de l'EQM de la source à -5° est tracée sur la Fig. 5.10 en fonction du RSB, ainsi que la racine carrée de l'EQM de cette même source pour l'antenne lacunaire fixe considérée au premier cas : $\mathbf{d} = [0, 2, 5]\frac{\lambda}{2}$. De plus, nous représentons le comportement moyen de EM-ESPRIT dans ce cas en appliquant la technique de moyenne directe-inverse (notée sur la courbe par FB). Les résultats moyens ne

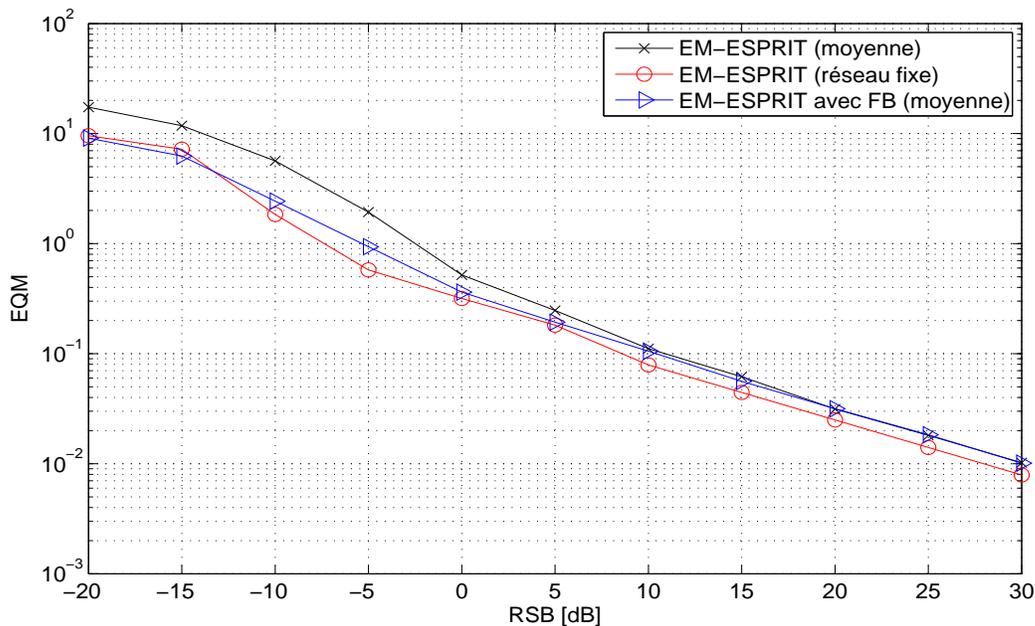


FIGURE 5.10: EQM de la source à -5° pour l'ALNU lacunaire d'ouverture 6 avec un nombre de capteurs $M = 3$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$.

diffèrent pas trop de l'exemple présenté précédemment basé sur la géométrie $\mathbf{d} = [0, 2, 5]\frac{\lambda}{2}$. Ce résultat permet d'affirmer que EM-ESPRIT ne présente pas de dysfonctionnement pour des cas particuliers de géométrie. De plus, nous remarquons que l'utilisation de la moyenne directe-inverse permet de robustifier le comportement moyen de EM-ESPRIT.

Nous reprenons le test dans le cas des ALNU à géométrie arbitraire. L'ouverture est fixée à 6 et le nombre de capteurs $M = 4$. Les sources sont placées à $[-5^\circ, 10^\circ]$. La racine carrée de l'EQM des deux sources est tracée sur la Fig. 5.11 en fonction du RSB et nous traçons de nouveau les résultats du réseau $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5]\frac{\lambda}{2}$ pour faire la comparaison. De même, les résultats sont proches de ce qu'on a obtenu pour le réseau $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5]\frac{\lambda}{2}$ étudié précédemment. Ici la

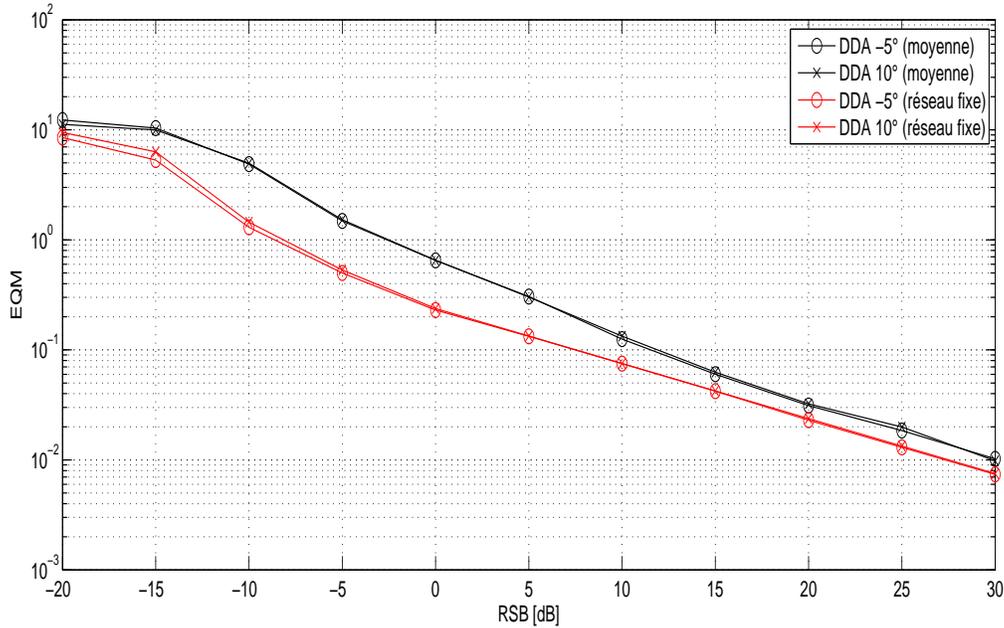


FIGURE 5.11: EQM des sources pour l'ALNU à géométrie arbitraire d'ouverture 6 avec un nombre de capteurs $M = 4$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$.

moyenne est plus élevée que l'EQM du réseau fixe. Donc EM-ESPRIT fonctionne quelque soit la position des capteurs pour les ALNU lacunaires et à géométrie arbitraire.

5.7.2 Consistance

Dans ce paragraphe, nous allons étudier la consistance de la méthode EM-ESPRIT. Nous considérons le réseau défini par $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 5] \frac{\lambda}{2}$, les sources localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$ et le RSB fixé à 5 dB. La Fig. 5.12 montre la racine carrée de l'EQM des sources en fonction du nombre d'échantillons L . La courbe de l'EQM n'approche pas la BCR quand le nombre d'échantillons L augmente. Donc la méthode n'est pas consistante. Mais nous allons proposer une solution à ce problème au chapitre suivant.

5.7.3 Résolution

Dans cette série d'expérience, nous passons à l'étude de la résolution de la méthode EM-ESPRIT. Cette étude est importante pour savoir si la méthode est capable de distinguer deux sources proches. Nous faisons l'étude sur l'ALNU à géométrie arbitraire citée précédemment. Les résultats sont semblables pour l'ALNU lacunaire. Dans la 1^{ère} simulation, nous considérons donc l'ALNU définie par $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$. Nous prenons $N = 2$ sources dont le 1^{er} angle est fixé à 0° . Le second angle est séparé de $\Delta\theta$ du 1^{er} angle, $\Delta\theta$ augmentant de 1° à 30° . Nous fixons le RSB à 0 dB. La racine carrée de l'EQM de la source à 0° est tracée sur la Fig. 5.13 en fonction de $\Delta\theta$. Nous comparons l'EQM qui correspond à EM-ESPRIT à celle obtenue en utilisant Spectral MUSIC. De plus, nous traçons la BCR. EM-ESPRIT présente une bonne résolution : pour les angles très proches, l'EQM a une petite valeur, donc EM-ESPRIT est capable de distinguer entre les deux sources. Quand $\Delta\theta$ augmente, l'EQM approche la BCR. Les performances de

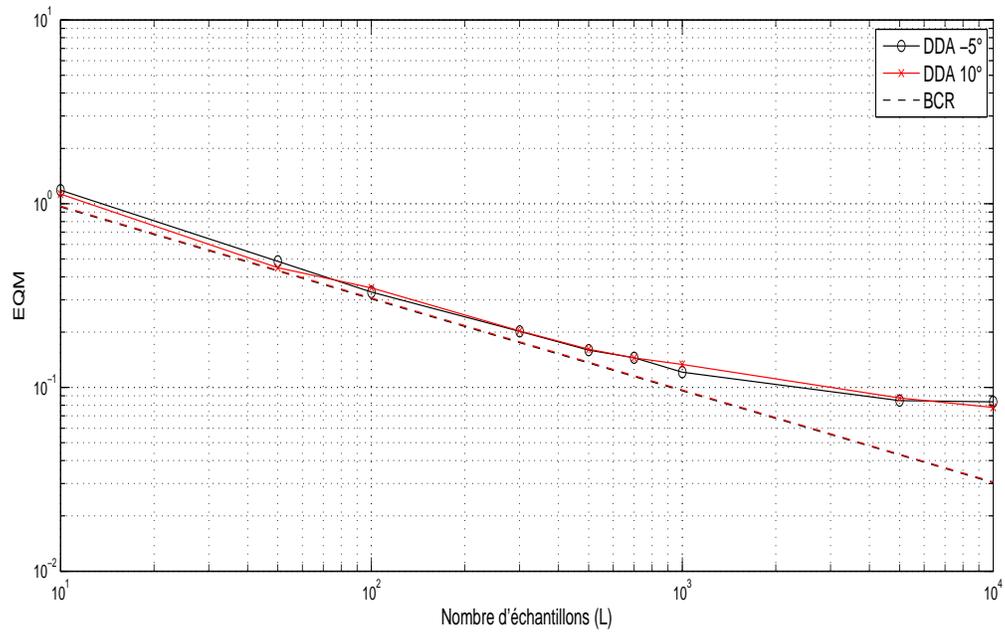


FIGURE 5.12: Consistance de EM-ESPRIT avec l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=5 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$.

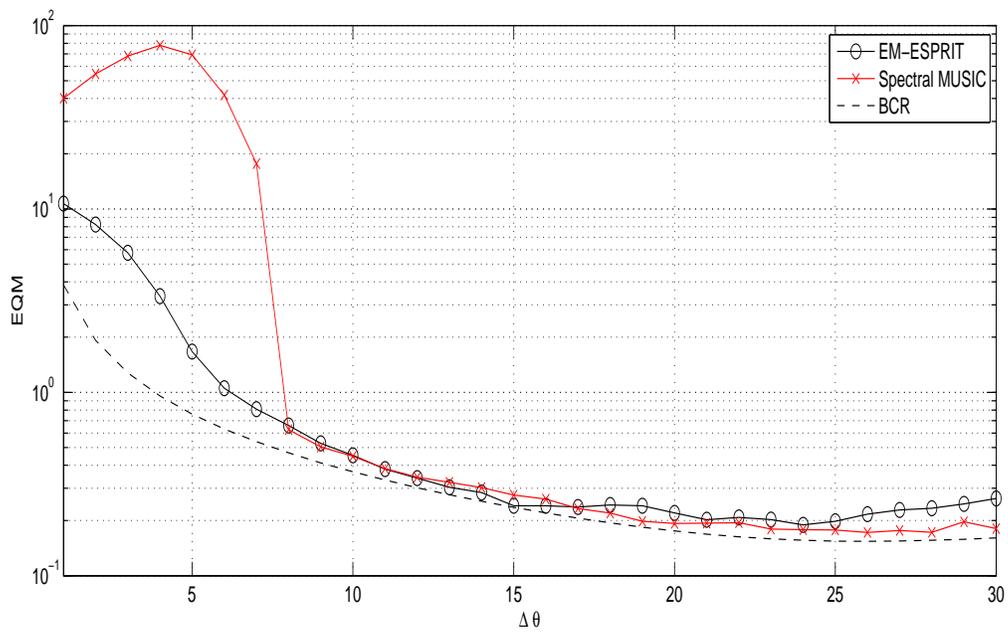


FIGURE 5.13: Résolution de la source à 0° pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=0 dB, $N = 2$ sources.

EM-ESPRIT sont meilleures que celles de Spectral MUSIC pour les faibles valeurs de $\delta\theta$. Dans la 2nde simulation, nous prenons le même cas de figure en changeant le RSB. Il est maintenant fixé à 10 dB. De nouveau, la racine carrée de l'EQM de la source à 0° est tracée en fonction de $\Delta\theta$ sur la Fig. 5.14. La résolution est logiquement améliorée. L'EQM est presque égale à

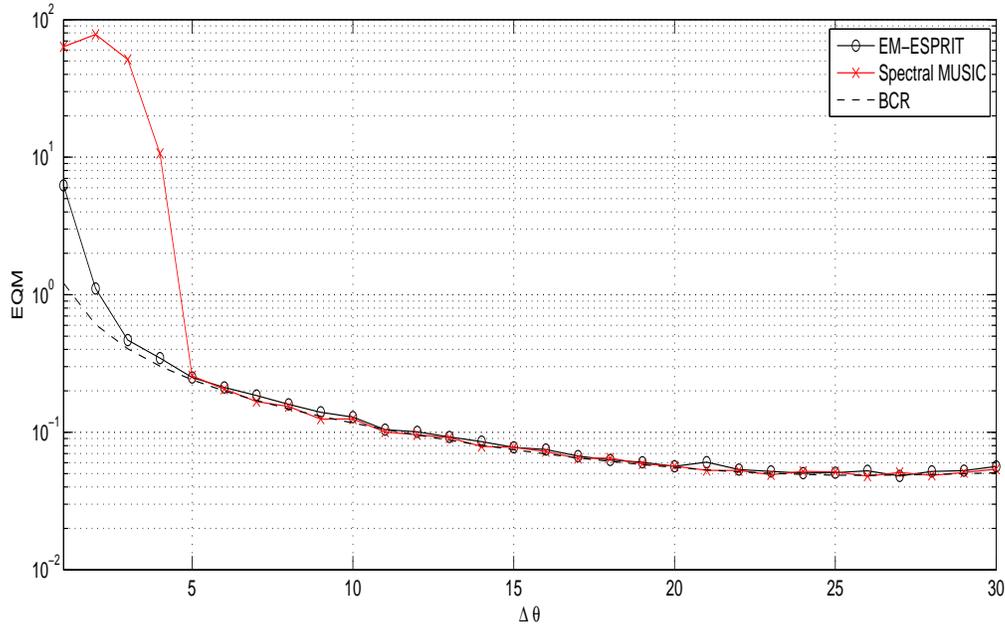


FIGURE 5.14: Résolution de la source à 0° pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=10 dB, $N = 2$ sources.

la BCR pour $\Delta\theta \geq 3^\circ$. Donc cette courbe est une autre illustration de la bonne résolution de EM-ESPRIT : pour de petites valeurs de $\Delta\theta$, par exemple pour une valeur de 3° , EM-ESPRIT est capable de distinguer entre les deux angles. De même, nous trouvons ici que le comportement de EM-ESPRIT est meilleur que celui de Spectral MUSIC pour les faibles valeurs de $\delta\theta$. Donc nous pouvons conclure que EM-ESPRIT présente une meilleure résolution que Spectral MUSIC.

5.7.4 Convergence

Dans cette série de simulations, nous allons étudier la convergence de la méthode proposée. C'est un point important, puisqu'en général, l'algorithme EM est réputé de convergence lente. Donc ici nous allons tester la convergence pour différentes valeurs de RSB et voir combien d'itérations sont nécessaires pour arriver à la convergence. Pour cela, nous prenons la même ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$ avec les sources incidentes de $[-5^\circ, 10^\circ]$. Nous prenons un nombre maximal d'itérations égal à 50 et nous étudions le comportement de l'EQM des sources en fonction de ces itérations. Nous traçons la racine carrée de l'EQM des deux sources en fonction du nombre d'itérations sur la Fig. 5.15 pour trois valeurs de RSB : -10 , 0 et 10 dB. L'itération 0 correspond à la valeur de l'initialisation avec la méthode de FV classique. EM-ESPRIT converge pour les deux sources dans les trois cas. De plus, le nombre d'itérations nécessaires pour arriver à la convergence est petit : pour RSB= -10 dB, il est de

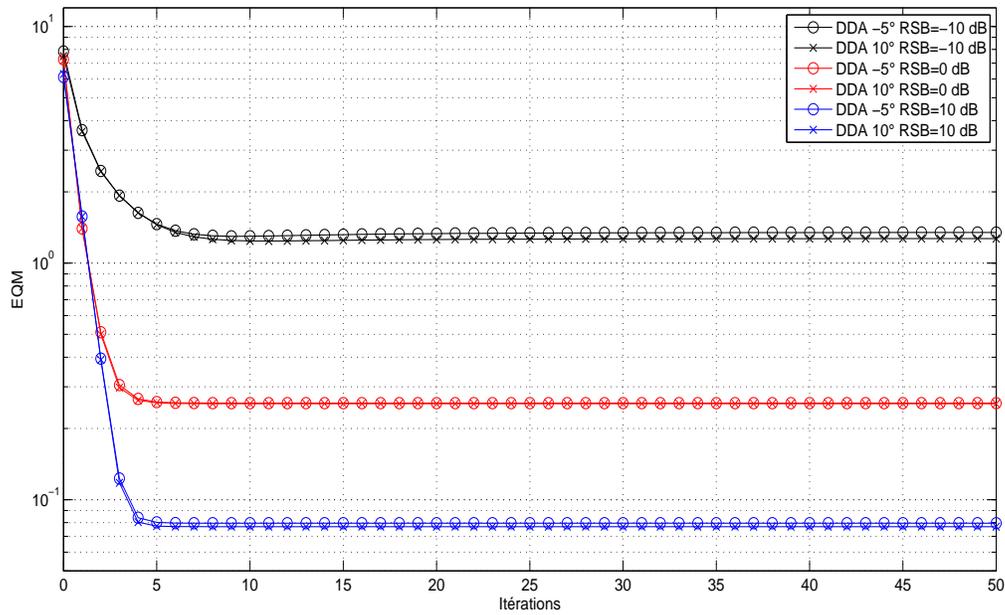


FIGURE 5.15: EQM des sources pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10, 0 et 10 dB, $N = 2$ sources.

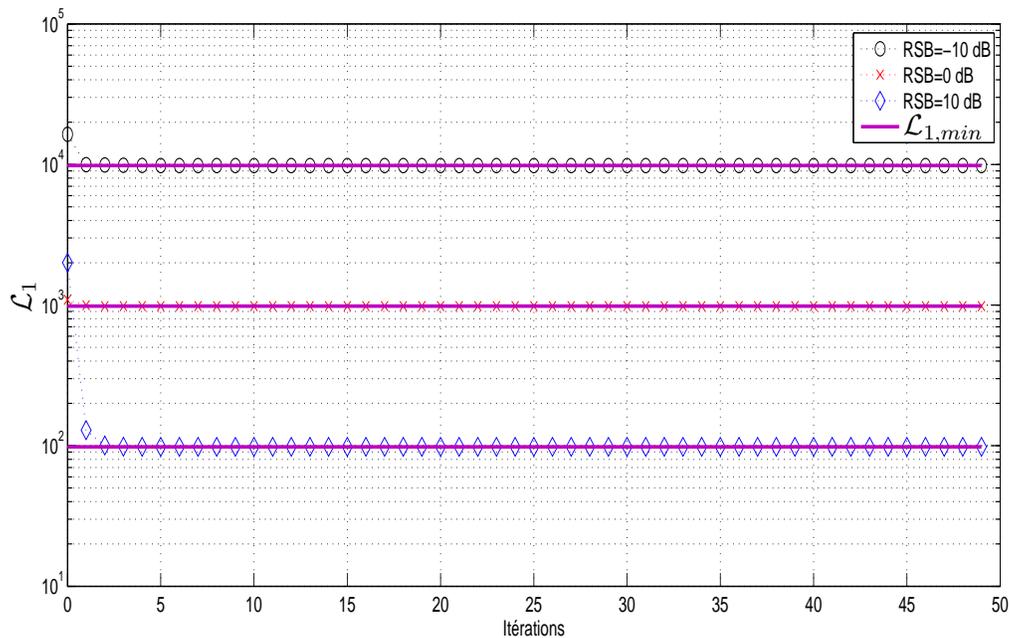


FIGURE 5.16: Log-vraisemblance négative pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10, 0 et 10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$.

l'ordre de 10 et pour RSB=0 et 10 dB, il est de l'ordre de 5. Donc nous pouvons dire que la convergence est relativement rapide.

Nous allons maintenant tracer la log-vraisemblance négative $\mathcal{L}_1(\theta, \mathbf{Y})$ calculée selon (5.25) pour le même cas. Donc nous considérons l'antenne $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$ avec les sources incidentes de $[-5^\circ, 10^\circ]$. Nous prenons le nombre maximal d'itérations égal à 50 et nous traçons $\mathcal{L}_1(\theta, \mathbf{Y})$ en fonction des itérations. Fig. 5.16 montre les résultats obtenus pour les trois valeurs du RSB : $-10, 0$ et 10 dB. De plus, nous représentons la valeur minimale de la log-vraisemblance négative $\mathcal{L}_{1,min}(\theta_{MV}, \mathbf{Y})$ obtenue en calculant $\mathcal{L}_1(\theta, \mathbf{Y})$ pour la valeur de θ estimée par le critère MV.

La log-vraisemblance négative diminue dans les trois cas et les trois courbes atteignent $\mathcal{L}_{1,min}(\theta_{MV}, \mathbf{Y})$ calculée pour chaque RSB. Donc, EM-ESPRIT converge. Par ailleurs, on remarque que la convergence est très rapide.

Nous prenons un autre exemple pour le cas de $N = 3$ sources. Nous considérons le même réseau $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, les sources sont localisées à $[-5^\circ, 10^\circ, 45^\circ]$ et le RSB est fixé à 0 dB ; La racine carrée de l'EQM des trois sources est représentée à la Fig. 5.17, toujours en fonction des itérations. Nous remarquons ici encore que la méthode converge pour un nombre d'itérations

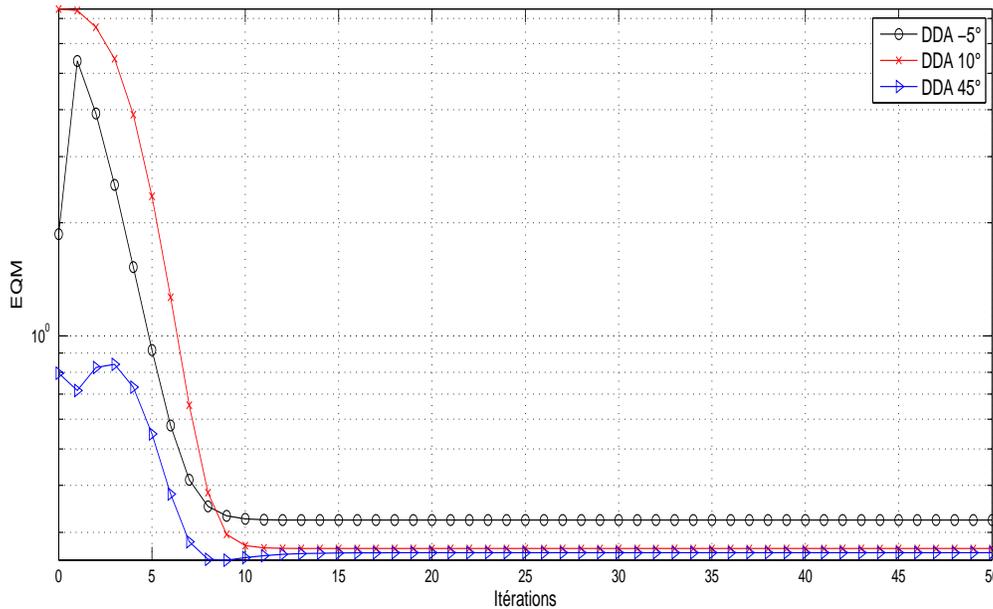


FIGURE 5.17: EQM des sources pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=0 dB, $N = 3$ sources.

de l'ordre de 10.

Dans certains cas, EM-ESPRIT ne converge pas. Prenons le cas du réseau défini par $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$ et où les sources sont localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$. Nous traçons la log-vraisemblance négative (5.25) en fonction des itérations sur la Fig. 5.18 pour un RSB égal à -10 dB, ainsi que l'erreur d'estimation de la source à -5° en fonction des itérations sur la Fig. 5.19. Nous comparons cette courbe à la valeur $\mathcal{L}_{1,min}(\theta_{MV}, \mathbf{Y})$ calculée dans ce cas. EM-ESPRIT ne converge pas pour ce réseau à un RSB égal à -10 dB. La log-vraisemblance négative augmente avec les itérations et s'éloigne de $\mathcal{L}_{1,min}(\theta_{MV}, \mathbf{Y})$. De même, l'erreur augmente avec les itérations comme le montre

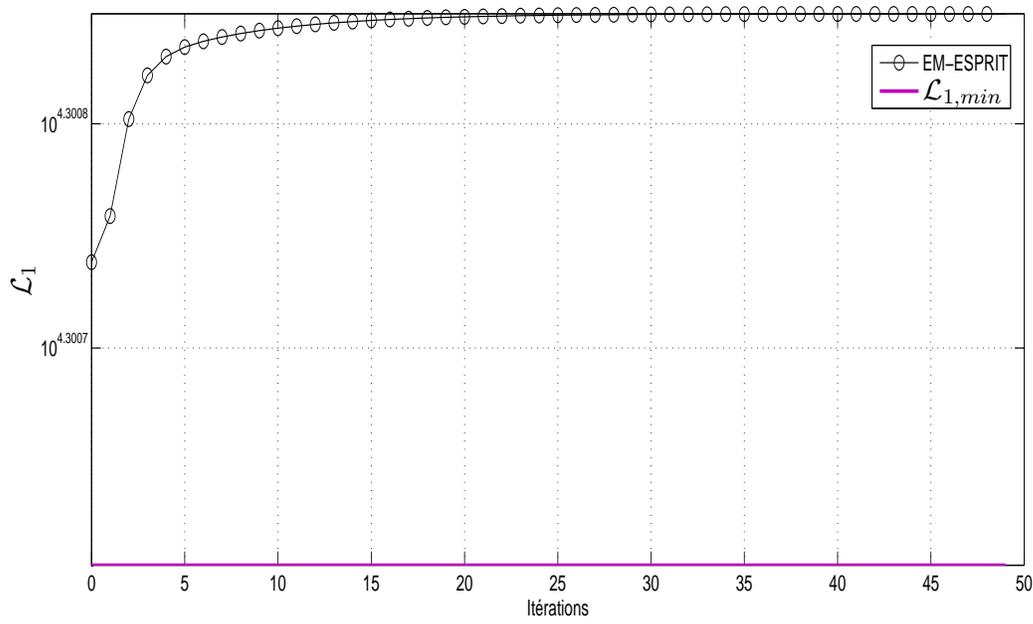


FIGURE 5.18: Log-vraisemblance négative pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9]_{\frac{\lambda}{2}}$, RSB=-10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-ESPRIT.

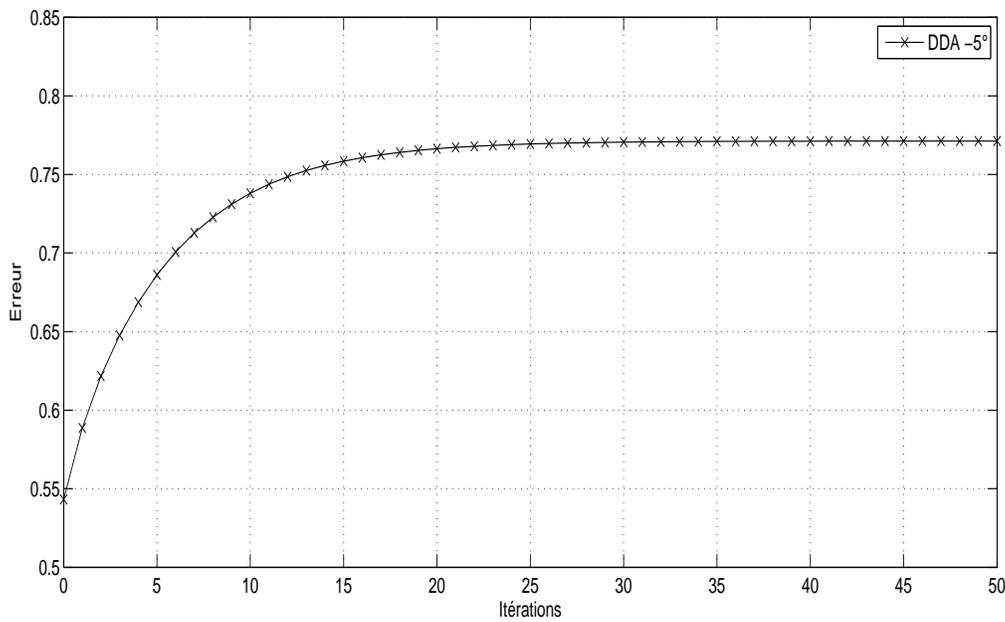


FIGURE 5.19: Erreur de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9]_{\frac{\lambda}{2}}$, RSB=-10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-ESPRIT.

la Fig. 5.19. Ceci est dû à l'étape- M où l'algorithme ESPRIT est utilisé qui est sous-optimal en comparaison avec la maximisation du critère de vraisemblance. Pour cela, nous allons proposer des variantes au chapitre suivant pour résoudre ce problème.

5.7.5 Sensibilité aux valeurs initiales

Maintenant, nous passons à l'étude de l'initialisation du processus EM-ESPRIT. Il est connu que l'algorithme EM est très sensible à l'initialisation. Dans notre méthode, nous avons dit que nous utilisons la méthode de FV classique en tant qu'initialisation. Dans cette expérience, nous prenons le cas monosource et étudions l'effet du choix de l'angle d'initialisation sur le comportement de l'EQM. Soit le réseau défini par $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, la source localisée à $\theta_1 = 10^\circ$. Nous allons prendre un intervalle d'initialisation de 60° pour les simulations, c'est-à-dire la valeur de l'initialisation θ^0 varie dans l'intervalle $[\theta_1 - 30^\circ, \theta_1 + 30^\circ]$. Nous traçons la racine carrée de l'EQM de la source en fonction de θ^0 sur la Fig. 5.20 pour RSB= -10 et 10 dB. Dans

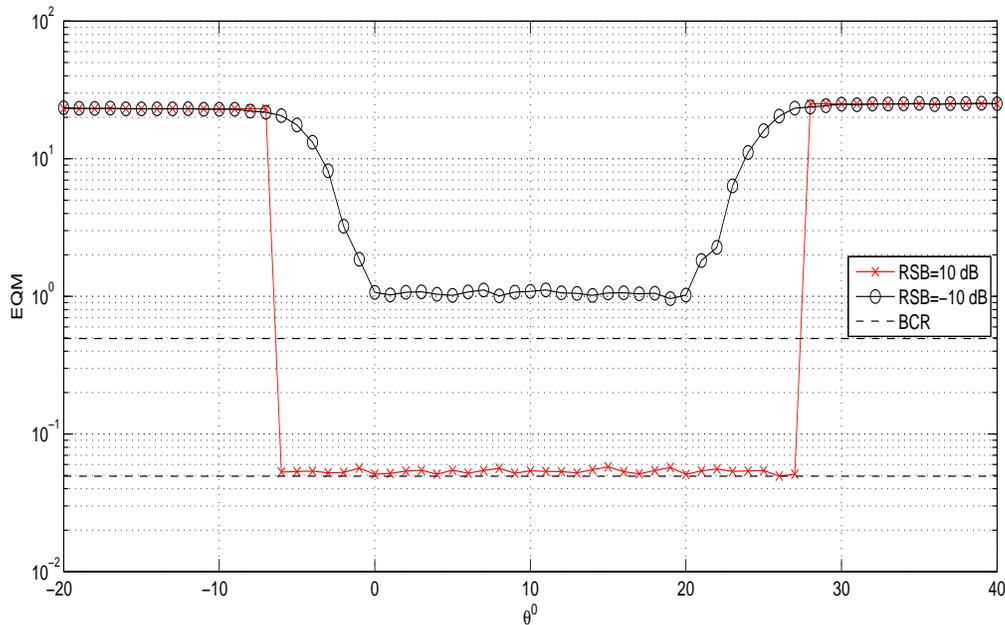


FIGURE 5.20: EQM de la source pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB= -10 et 10 dB, $N = 1$ source.

le cas de RSB = -10 dB et pour $0^\circ \leq \theta^0 \leq 20^\circ$, EM-ESPRIT est capable d'estimer la DDA 10° . Ceci nous donne une marge d'erreur de 10° pour la valeur d'initialisation. Pour RSB = 10 dB, la marge d'erreur augmente notamment : elle devient de 17° . On a pu constater en pratique que l'initialisation fournie par FV était suffisante.

Nous faisons le même travail pour une autre antenne ayant une plus grande ouverture : $\mathbf{d} = [0, 0.5, 1.6, 2.4, 4.76, 6.3, 8] \frac{\lambda}{2}$. De même, la source localisée à $\theta_1 = 10^\circ$ et θ^0 varie entre dans l'intervalle $[\theta_1 - 30^\circ, \theta_1 + 30^\circ]$. Nous traçons la racine carrée de l'EQM de la source en fonction de θ^0 sur la Fig. 5.21 pour RSB= -10 et 10 dB. Dans le cas du RSB égal à -10 dB, la marge d'erreur pour la valeur d'initialisation est de 8° alors que pour le RSB égal à 10 dB, elle devient de 10° . Donc pour un réseau de plus grande ouverture la marge d'erreur diminue. Mais la méthode

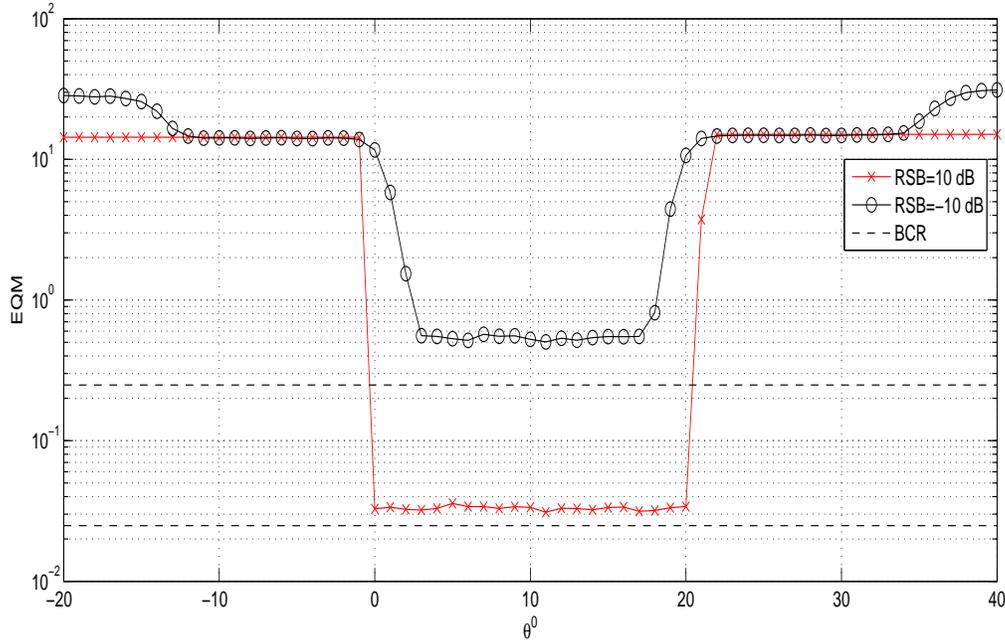


FIGURE 5.21: EQM de la source pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 0.5, 1.6, 2.4, 4.76, 6.3, 8] \frac{\lambda}{2}$, RSB= -10 et 10 dB, $N = 1$ source.

de FV est plus performante quand l'ouverture est plus grande, elle a une meilleure précision. Donc, en pratique, nous n'avons pas rencontré de problème en utilisant la méthode de FV comme initialisation.

5.7.6 Nombre de capteurs de l'AVLU

Dans la dernière série d'expériences, nous étudions le choix du nombre de capteurs M' dans l'AVLU, dans le cas des ALNU à géométrie arbitraire. Nous considérons le cas $M' \geq M$. Nous prenons le réseau $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$ et les sources à $[-5^\circ, 10^\circ]$. Nous traçons la racine carrée de l'EQM des deux sources, ainsi que la BCR, en fonction du nombre de capteurs M' sur la Fig. 5.22 pour RSB=10 et 0 dB. En abscisse, on note le nombre de capteurs supplémentaires $\alpha = M' - M$. Pour RSB=10 dB les courbes des EQM sont presque constantes jusqu'à $M' = M + 8$, ensuite les résultats se détériorent. Pour RSB=0 dB, M' ne doit pas être trop grand par rapport à M ($M' - M \leq 5$). Donc notre choix se porte sur $M' = M$ qui nécessite moins de temps de calcul par rapport à de plus grandes valeurs de M' pour n'importe quelle valeur de RSB.

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle méthode itérative pour l'estimation des DDA dans le cas des ALNU. Cette méthode est EM-ESPRIT, où l'algorithme EM interpole les données existantes en se basant sur le modèle du signal pour former une AVLNU. Ensuite l'algorithme ESPRIT est appliqué sur cette AVLNU pour estimer les DDA. Cette méthode a l'avantage de pouvoir être utilisée pour n'importe quel type de géométrie de réseau non uniforme. De plus, nous avons étudié les performances de EM-ESPRIT sous forme de simulations. Nous avons trouvé

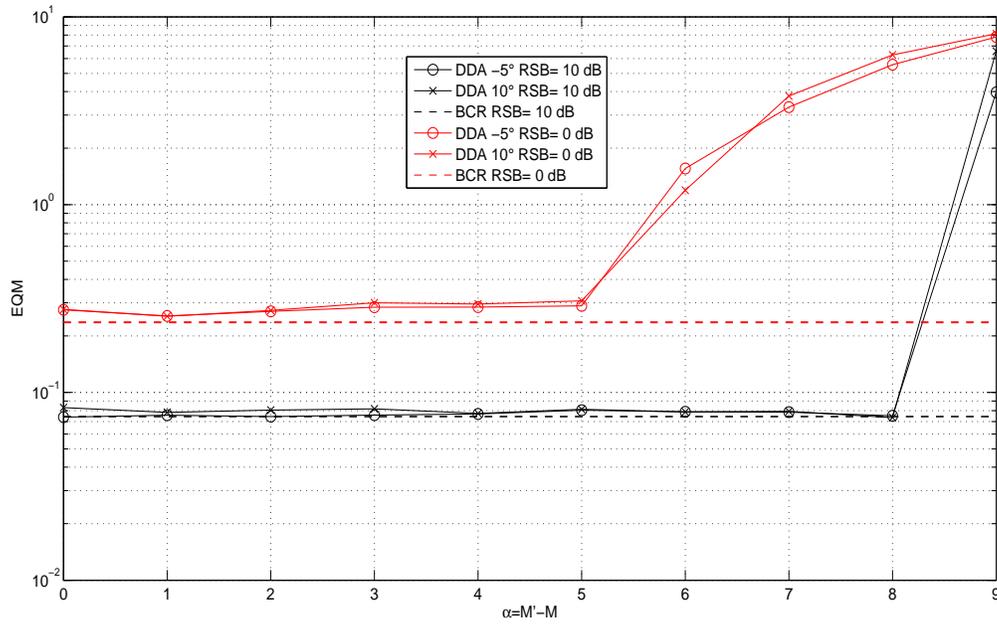


FIGURE 5.22: EQM des sources pour l'ALNU à géométrie arbitraire $\mathbf{d} = [0, 1.32, 3.03, 5] \frac{\lambda}{2}$, RSB=10 et 0 dB, $N = 2$ sources.

qu'elle est meilleure que d'autres méthodes surtout dans la zone pré-asymptotique. Elle présente une bonne résolution, donc EM-ESPRIT est capable de distinguer entre deux sources proches. Cette nouvelle méthode converge rapidement, même dans des conditions difficiles. Cependant, elle est sensible à la valeur initiale. Mais nous avons étudié la marge d'erreur de l'initialisation et nous avons décidé d'utiliser l'algorithme de FV classique pour l'initialisation. A la fin, nous avons étudié l'effet du choix du nombre de capteurs de l'AVLU dans le cas des antennes à géométrie arbitraire. Nous avons trouvé que les meilleures performances sont en général pour un nombre de capteurs égal ou légèrement supérieur à celui du réseau d'origine. Cependant, EM-ESPRIT ne converge pas dans toutes les conditions et elle n'est pas consistante. Nous proposons deux variantes pour améliorer ces aspects au chapitre 6.

Chapitre 6

Variantes de EM-ESPRIT

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé une nouvelle méthode EM-ESPRIT pour l'estimation des DDA dans le cas des ALNU. Nous avons vu que cette méthode peut être appliquée pour tout type d'ALNU et nous avons étudié ses différents aspects. De même, nous avons remarqué la présence de quelques problèmes, comme la convergence et la consistance de EM-ESPRIT. Ces problèmes proviennent essentiellement du bruit introduit par l'estimation des sorties des capteurs manquants. Ce bruit a un effet non négligeable sur la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}^{(k)}$ définie dans (5.20). Plusieurs approches peuvent être proposées pour prendre en compte ce bruit. Dans ce chapitre, nous allons proposer deux variantes de cette méthode qui visent à améliorer les performances. Ces deux variantes se basent toutes les deux sur la matrice de covariance de l'ALVU estimée. La première méthode s'appelle EM-ESPRIT stochastique. Elle vise à ajouter une perturbation à l'estimation des amplitudes des sources afin de faire rapprocher ces estimées des vraies valeurs. Cette méthode permet d'améliorer donc la convergence de EM-ESPRIT. La deuxième variante s'appelle EM-Root-MUSIC. Celle-ci prend en compte la coloration du bruit après interpolation. Ce bruit est blanchi et Root-MUSIC est appliquée au lieu de ESPRIT pour estimer les DDA. Cette méthode améliore la convergence et la consistance de EM-ESPRIT. De même, elle permet à l'EQM de s'approcher davantage de la BCR.

6.1 EM-ESPRIT stochastique

6.1.1 Présentation de la méthode

On a vu au chapitre 5 que EM-ESPRIT ne converge pas pour toutes les géométries. Ceci est dû à l'étape- M où la maximisation du critère sur θ est réalisée de manière sous-optimale à l'aide d'ESPRIT. Nous proposons une variante afin d'améliorer l'estimation de θ à l'étape- M . L'idée est de remplacer l'interpolation des données complètes par un ensemble de réalisations de ces données distribuées [34] selon la loi de densité de probabilité connue des données complètes. C'est une sorte de discrétisation de la distribution des données complètes conditionnellement à la connaissance de l'observation et des paramètres de l'itération précédente. A partir de l'ensemble des réalisations des données complètes, on peut alors obtenir un ensemble d'estimées du paramètre θ dont la moyenne pondérée par leur loi de distribution donne $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$.

L'ensemble des réalisations des données complètes est construit en introduisant une perturbation sur l'estimation de l'amplitude des sources $\hat{\mathbf{S}}^{(k)}$. Cette perturbation est basée sur la distribution de l'estimée $\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)}$.

Afin d'établir cette distribution, rappelons que $\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)}$ est estimée en utilisant l'éq. (5.19) :

$$\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)} = \hat{\mathbf{A}}^{\dagger(k-1)} \mathbf{Y} \quad (6.1)$$

où pour simplifier les notations, la dépendance du $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}$ a été omise. En introduisant le modèle de \mathbf{Y} selon (1.6), $\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)}$ s'écrit :

$$\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)} = \hat{\mathbf{A}}^{\dagger(k-1)} \mathbf{A} \mathbf{S} + \hat{\mathbf{A}}^{\dagger(k-1)} \mathbf{V}. \quad (6.2)$$

Le deuxième terme ($\hat{\mathbf{A}}^{\dagger(k-1)} \mathbf{V}$) correspond au bruit de mesure coloré par l'interpolation et sa covariance est donnée par :

$$\mathbf{cov}_{\hat{\mathbf{A}}^{\dagger} \mathbf{V}} = \sigma^2 \hat{\mathbf{A}}^{\dagger(k-1)} \hat{\mathbf{A}}^{\dagger H(k-1)}. \quad (6.3)$$

Par ailleurs, $E\{\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)}\} = \mathbf{S}$ sous réserve que $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)} \rightarrow \boldsymbol{\theta}$, car le bruit d'observation a une moyenne nulle $E\{\mathbf{V}\} = 0$. Nous proposons donc d'introduire une perturbation \mathbf{s}_i à $\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)}$ de la forme : $\mathbf{s}_i \sim \mathcal{N}(0, \beta \mathbf{cov}_{\hat{\mathbf{A}}^{\dagger} \mathbf{V}})$, où $i = 1, \dots, I$. β est un paramètre < 1 pour introduire une petite perturbation afin de garantir que l'algorithme converge. En pratique, $\beta = 0.005$. Nous obtenons I réalisations de $\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)}$, notées par $\hat{\mathbf{S}}_i^{(k-1)}$ comme suit :

$$\hat{\mathbf{S}}_i^{(k-1)} = \hat{\mathbf{S}}^{(k-1)} + \mathbf{s}_i. \quad (6.4)$$

Ceci assure d'avoir $\hat{\mathbf{S}}_i^{(k-1)} \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)}, \beta \mathbf{cov}_{\hat{\mathbf{A}}^{\dagger} \mathbf{V}})$. Pour chaque valeur de $\hat{\mathbf{S}}_i^{(k-1)}$, nous obtenons $\hat{\mathbf{X}}_i^{(k)}$ selon l'éq. (5.18). Nous appliquons ensuite EM-ESPRIT et estimons le $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i^k$ correspondant. Finalement, les DDA sont estimées de la manière suivante :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} = \sum_{i=1}^I f(\mathbf{Y}/\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k-1)}, \hat{\mathbf{S}}_i^{(k-1)}) \hat{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (6.5)$$

où $f(\mathbf{Y}/\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k-1)}, \hat{\mathbf{S}}_i^{(k-1)})$ est la densité de probabilité de $\hat{\mathbf{S}}_i^{(k-1)}$:

$$f(\mathbf{Y}/\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k-1)}, \hat{\mathbf{S}}_i^{(k-1)}) = \frac{e^{\mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y})}}{\sum_{i=1}^I e^{\mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y})}}. \quad (6.6)$$

$\mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y})$ est calculée par (5.24) en remplaçant \mathbf{S} par $\hat{\mathbf{S}}_i^{(k-1)}$.

Cette variante peut être résumée de la manière suivante :

1. Initialisation : $k = 0$, choisir $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$ et estimer la variance du bruit $\hat{\sigma}^2$.
2. Si $k = 1$ appliquer les étapes 2 à 4 de l'algorithme EM-ESPRIT à la section 5.3.4.
3. Si $k > 1$:
 - Estimer $\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})$, le $\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)}$ correspondant et $\mathbf{cov}_{\hat{\mathbf{A}}^{\dagger} \mathbf{V}}$ selon les éq. (6.1) et (6.3).
 - Pour $i = 1 \dots I$, calculer $\hat{\mathbf{S}}_i^{(k-1)}$ et $f(\mathbf{Y}/\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k-1)}, \hat{\mathbf{S}}_i^{(k-1)})$ correspondant selon (6.4) et (6.6).
 - Pour $i = 1 \dots I$, répéter les étapes 2 de 4 de EM-ESPRIT que nous rappelons ici :
 - a) Estimer les données complètes $\hat{\mathbf{X}}_i^{(k)}$ en utilisant (5.18) et estimer la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}_i^{(k)}$ en appliquant (5.20).
 - b) Utiliser ESPRIT pour estimer $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i^{(k)}$.

c) Vérifier la convergence de θ_i . Sinon, répéter les étapes a) et b).

Ainsi, nous obtenons les I valeurs de $\hat{\theta}_i$.

- L'estimation finale des DDA à l'itération k est calculée suivant l'éq. (6.5).

4. Aller à l'étape 3. Répéter jusqu'à convergence.

Cette méthode peut améliorer les performances de convergence comme on verra avec les simulations suivantes.

6.1.2 Résultats numériques

Pour le 1^{er} exemple, nous verrons ce qui se passe avec le réseau $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$ dont les résultats de convergence par EM-ESPRIT sont représentés sur la Fig. 5.18. Nous reprenons les mêmes paramètres pour tester EM-ESPRIT stochastique, donc les sources sont localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$ et le RSB est fixé à -10 dB. Le graphe de la log-vraisemblance négative est représenté à la Fig. 6.1 en utilisant EM-ESPRIT stochastique et EM-ESPRIT, ainsi que la valeur minimale de cette log-vraisemblance négative $\mathcal{L}_{1,min}(\theta_{MV}, \mathbf{Y})$ calculée en estimant θ à l'aide du critère de MV. L'erreur d'estimation de la source à -5° est tracée en fonction des itérations à la Fig. 6.2.

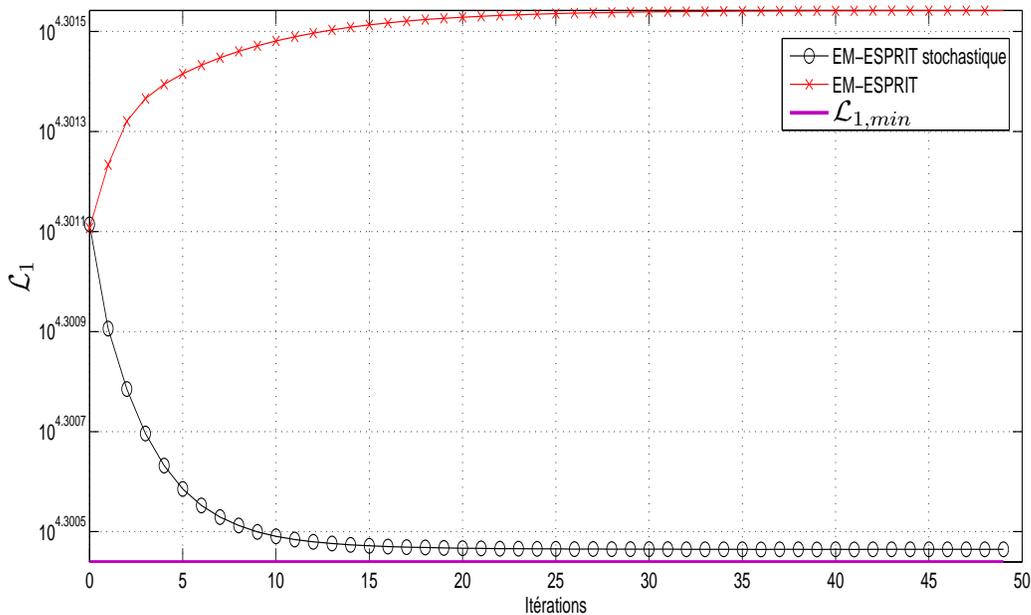


FIGURE 6.1: Log-vraisemblance négative pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$, RSB= -10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-ESPRIT stochastique et EM-ESPRIT.

Cette variante peut bien résoudre le problème de convergence du réseau. La log-vraisemblance négative diminue avec les itérations et s'approche de la valeur de $\mathcal{L}_{1,min}(\theta_{MV}, \mathbf{Y})$, contrairement au résultat obtenu en appliquant EM-ESPRIT.

Nous prenons un autre exemple avec un autre réseau et nous montrons les performances de convergence de EM-ESPRIT stochastique. Le réseau considéré est défini par $\mathbf{d} = [0, 2, 4, 8] \frac{\lambda}{2}$, les sources sont localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$ et le RSB est fixé à -10 dB. Fig. 6.3 montre la log-vraisemblance négative en utilisant EM-ESPRIT stochastique et EM-ESPRIT et $\mathcal{L}_{1,min}(\theta_{MV}, \mathbf{Y})$.

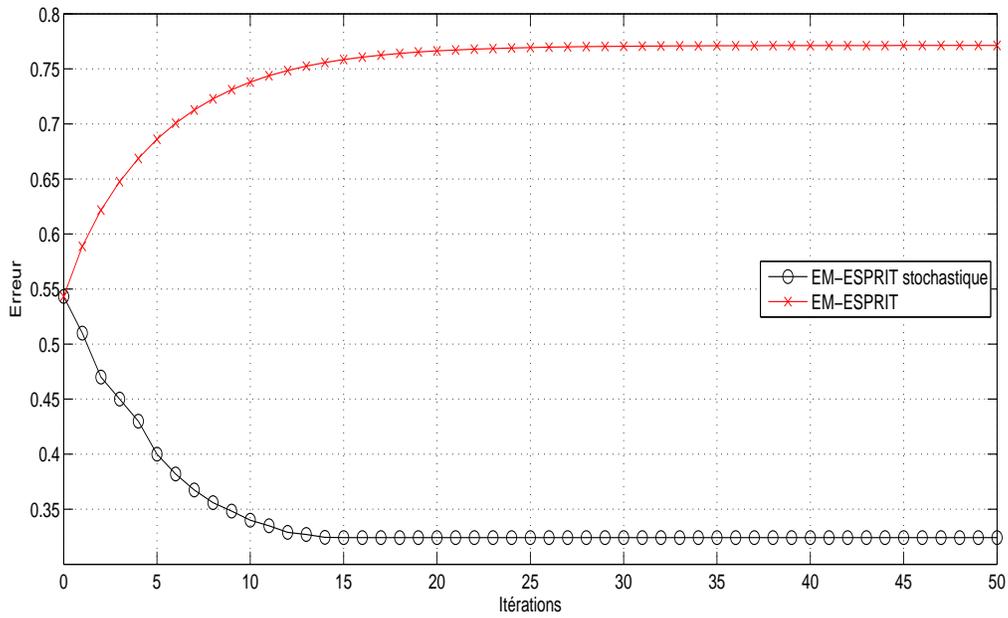


FIGURE 6.2: Erreur de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-ESPRIT stochastique et EM-ESPRIT.

De même pour ce réseau, avec EM-ESPRIT stochastique, la log-vraisemblance négative diminue

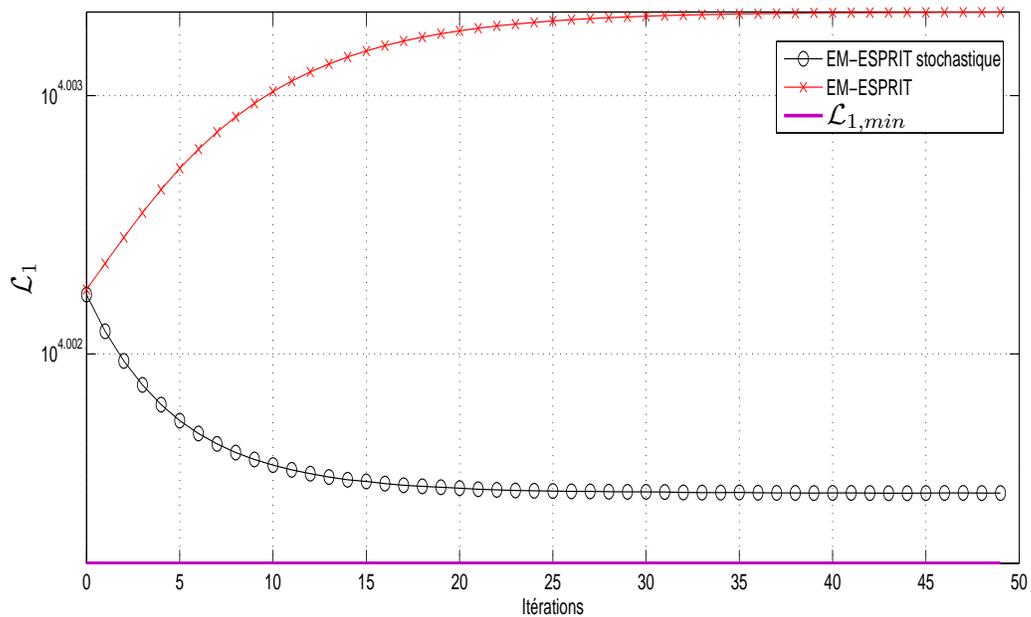


FIGURE 6.3: Log-vraisemblance négative pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 2, 4, 8] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-ESPRIT stochastique et EM-ESPRIT.

et s'approche de la valeur minimale $\mathcal{L}_{1,min}(\theta_{MV}, \mathbf{Y})$. De même, l'erreur d'estimation diminue avec EM-ESPRIT stochastique contrairement à EM-ESPRIT. Donc EM-ESPRIT stochastique est capable de résoudre le problème de convergence.

6.2 Blanchiment du bruit d'interpolation

6.2.1 Présentation de la méthode

Nous allons montrer que l'erreur introduite durant l'interpolation rend le bruit coloré. En appliquant directement ESPRIT, nous ne prenons pas en compte ce bruit. En fait, jusqu'à maintenant nous n'avons pas encore explicité l'expression du bruit introduit. Pour cela, nous commençons par trouver l'expression du bruit coloré, ensuite nous proposons une variante à EM-ESPRIT pour blanchir le bruit.

Le but est de calculer la matrice de covariance du bruit à l'itération $(k + 1)$ de :

$$\mathbf{V}_X^{(k)} = \hat{\mathbf{X}}^{(k)} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$$

dont l'expression de $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ est donnée dans l'éq. (5.8). Donc on cherche :

$$\mathbf{V}_X^{(k)} = \hat{\mathbf{X}}^{(k)} - \mathbf{A}_{VULA}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}, \quad (6.7)$$

avec $\hat{\mathbf{X}}^{(k)} = \mathbf{G}\mathbf{Y} + \overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)}$ d'après (5.18). Comme $\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)} = \mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{Y}$ (5.19), l'expression de $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ devient :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}^{(k)} &= \mathbf{G}\mathbf{Y} + \overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\hat{\mathbf{S}}^{(k-1)} \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{X}}^{(k)} &= \left(\mathbf{G} + \overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) \right) \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Donc le bruit devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_X^{(k)} &= \hat{\mathbf{X}}^{(k)} - \mathbf{A}_{VULA}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S} \\ \Rightarrow \mathbf{V}_X^{(k)} &= \left(\mathbf{G} + \overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) \right) \mathbf{Y} - \mathbf{A}_{VULA}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}. \end{aligned}$$

Or $\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S} + \mathbf{V}$ et $\mathbf{A}_{VULA}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{G}\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) + \overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\boldsymbol{\theta})$, ceci implique :

$$\mathbf{V}_X^{(k)} = \left(\overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) - \overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\boldsymbol{\theta}) \right) \mathbf{S} + \left(\mathbf{G} + \overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) \right) \mathbf{V}. \quad (6.8)$$

Ce bruit est composé de deux parties : la 1^{ère} partie contient l'erreur d'interpolation qui est égale à :

$$\left(\overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) - \overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\boldsymbol{\theta}) \right),$$

et l'autre partie correspond au bruit de mesure coloré par l'interpolation pour les capteurs manquants :

$$\left(\mathbf{G} + \overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) \right) \mathbf{V}.$$

En calculant la matrice de covariance du bruit, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{V_X}^{(k)} &= \left(\overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) - \overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\boldsymbol{\theta}) \right) \mathbf{R}_{ss} \left(\overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) - \overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\boldsymbol{\theta}) \right)^H \\ &\quad + \sigma^2 \left(\overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) \right) \left(\overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) \right)^H. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Dans la variante que nous proposons, on blanchit le bruit coloré qu'on vient de calculer, se trouvant dans la matrice des sorties de l'AVLU $\hat{\mathbf{R}}^{(k)} = \frac{1}{L}\hat{\mathbf{X}}^{(k)}\hat{\mathbf{X}}^{(k)H}$ (on n'ajoute plus le bruit $\overline{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{G}}^H\hat{\sigma}^2$ sur la diagonale des capteurs interpolés). Pour le premier terme de (6.9) (la partie qui correspond à l'erreur d'interpolation), nous ne possédons ni les valeurs de $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$, ni les valeurs de $\mathbf{A}_p(\boldsymbol{\theta})$ ni les valeurs de \mathbf{R}_{ss} , nous ne pouvons pas l'évaluer. D'une manière un peu brutale et empirique, nous l'approximons par la matrice identité. Celle-ci n'est pas nécessairement proche de la structure de l'erreur d'interpolation mais elle permet de robustifier l'estimation. Des travaux ultérieurs peuvent être menés pour remplacer la matrice identité par une matrice plus proche de celle de l'erreur d'interpolation. Le second terme (le bruit de mesure coloré) peut par contre être facilement calculé. La matrice de covariance de bruit utilisée dans les simulations devient alors :

$$\mathbf{R}_{V_X}^{(k)} = \mathbf{I} + \sigma^2 \left(\overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) \right) \left(\overline{\mathbf{G}}\mathbf{A}_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)})\mathbf{A}^\dagger(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}) \right)^H. \quad (6.10)$$

Comme ce bruit est coloré, nous faisons un blanchiment. Soit $\mathbf{R}_{V_X} = \mathbf{B}\mathbf{B}^H$ où \mathbf{B} représente la matrice racine carrée de \mathbf{R}_{V_X} . En multipliant avant et après la matrice de covariance de \mathbf{X} par \mathbf{B} donne :

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{B}^{-1})^H = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{AVLU}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}_{AVLU}^H(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{B}^{-1})^H + \mathbf{I}. \quad (6.11)$$

Le blanchiment modifie la structure de la matrice de covariance et donc ESPRIT ne peut pas être directement appliquée. Le sous-espace bruit obtenu par décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance blanchie $\tilde{\mathbf{R}}$ est orthogonale à la matrice de direction modifiée $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{AVLU}(\boldsymbol{\theta})$. Ainsi, nous pouvons appliquer Root-MUSIC après avoir modifié le polynôme. Nous appelons cette méthode : EM-Root-MUSIC. En réalité, la vraie valeur de la matrice de covariance n'est pas disponible, nous l'estimons par :

$$\hat{\mathbf{R}}^{(k)} = \frac{1}{L}\hat{\mathbf{X}}^{(k)}\hat{\mathbf{X}}^{(k)H}. \quad (6.12)$$

Faisons un résumé de la méthode proposée :

1. Initialisation : $k = 0$, choisir $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$ et estimer la variance du bruit $\hat{\sigma}^2$.
2. Estimer les données complètes $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ en utilisant (5.18) et estimer la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}^{(k)}$ selon (6.12).
3. Faire un blanchiment du bruit et utiliser Root-MUSIC pour estimer $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$.
4. Vérifier la convergence de $\boldsymbol{\theta}$. Sinon, $k = k + 1$, aller à l'étape 2.

6.2.2 Résultats numériques

Maintenant nous illustrons à l'aide des simulations les performances de EM-Root-MUSIC.

EQM en fonction du RSB

Nous considérons le réseau défini par $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$. Les sources sont localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$. Elles sont décorréées et le module des sources est unitaire et leur phase est uniformément distribuée entre 0 et 2π . Nous traçons sur la Fig. 6.4 la racine carrée de l'EQM de la source à -5° en fonction du RSB. Nous comparons les résultats de EM-Root-MUSIC à ceux de EM-ESPRIT, Root-MUSIC et à la BCR. Le graphe montre comment EM-Root-MUSIC permet à la

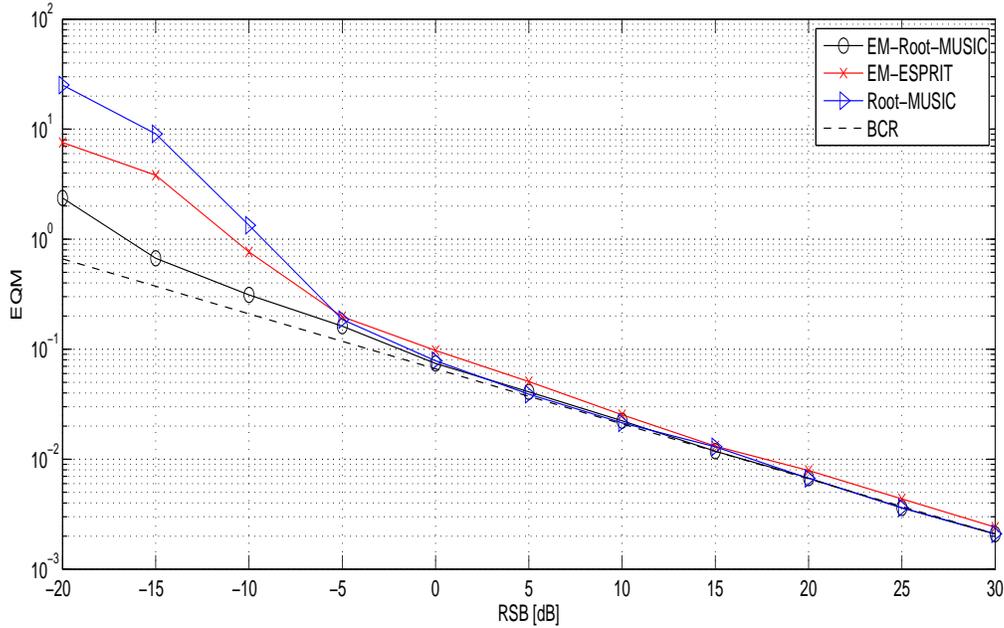


FIGURE 6.4: EQM de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$.

courbe de l'EQM d'approcher la BCR asymptotiquement par rapport à EM-ESPRIT. De plus, EM-Root-MUSIC présente de meilleures performances que celles de Root-MUSIC dans la zone pré-asymptotique.

Nous essayons la même expérience avec un autre réseau, le $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 10] \frac{\lambda}{2}$. La Fig. 6.5 représente la racine carrée de l'EQM de la source à -5° en utilisant EM-Root-MUSIC et EM-ESPRIT. Les performances sont meilleures en appliquant EM-Root-MUSIC.

Maintenant, nous étudions le comportement de la méthode non plus sur une géométrie fixée mais sur un ensemble de réseaux dont la position des capteurs est choisie aléatoirement. Nous fixons l'ouverture à 10 et le nombre de capteurs $M = 6$ et choisissons aléatoirement la position des autres capteurs à chaque réalisation. Les sources sont localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$. La racine carrée de l'EQM des deux sources est tracée sur la Fig. 6.6 en fonction du RSB en utilisant EM-Root-MUSIC et EM-ESPRIT. Les résultats moyens de EM-Root-MUSIC ne diffèrent pas trop de l'exemple présenté précédemment basé sur la géométrie $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$. De même, les performances de EM-Root-MUSIC sont légèrement meilleures que celles de EM-ESPRIT.

Enfin, nous testons EM-Root-MUSIC dans le cas de deux sources corrélées. La matrice de covariance des sources est donnée par :

$$\mathbf{R}_{ss} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma^* & 1 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

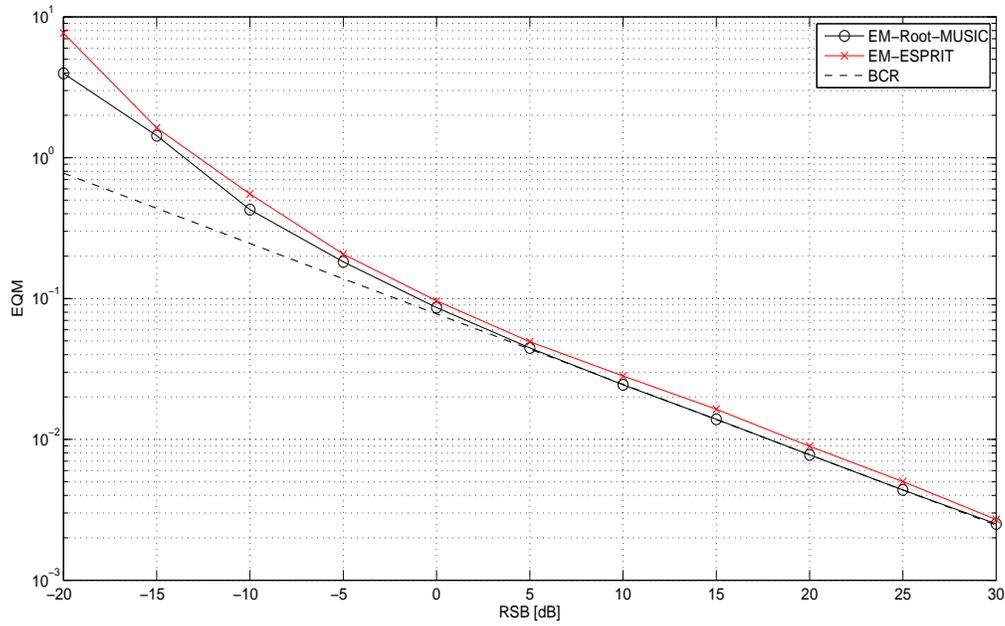


FIGURE 6.5: EQM de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 10] \frac{\lambda}{2}$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-ESPRIT et EM-Root-MUSIC.

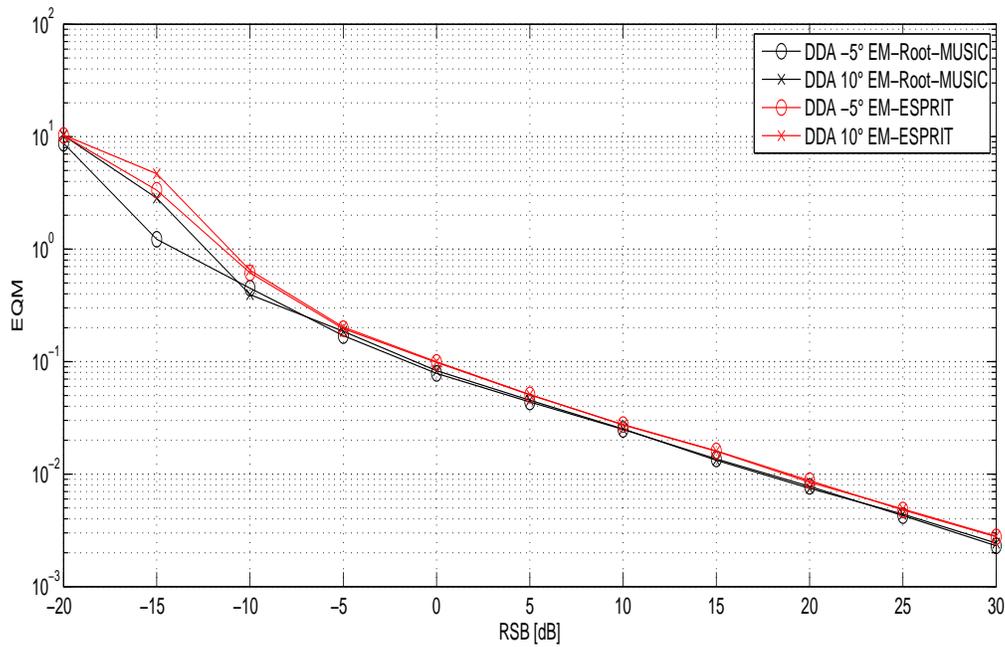


FIGURE 6.6: EQM des sources pour l'ALNU lacunaire d'ouverture 10 avec un nombre de capteurs $M = 6$, $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$.

où γ détermine le degré de corrélation entre les deux sources. Nous considérons le réseau utilisé précédemment défini par $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 10] \frac{\lambda}{2}$, les sources sont localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$. Nous traçons la racine carrée de l'EQM des estimées des DDA en fonction du RSB. Fig. 6.7 montre le résultat des simulations pour la première source -5° et pour trois valeurs de γ : 0, 0.3 et 0.6. Nous

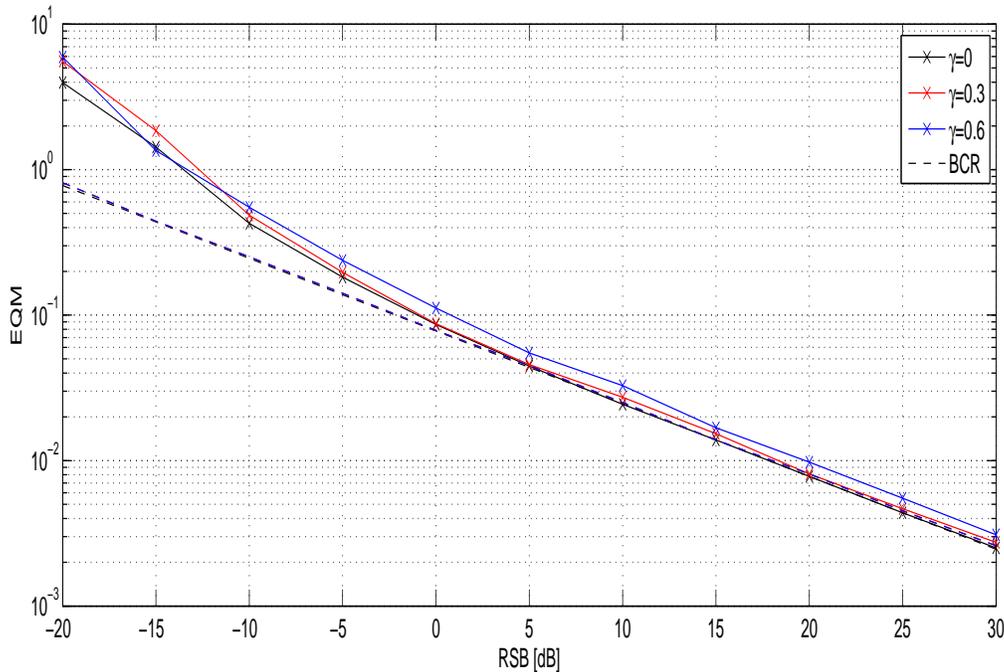


FIGURE 6.7: EQM de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 10] \frac{\lambda}{2}$, DDA = $[-5^\circ, 10^\circ]$, $\gamma = 0, 0.3$ et 0.6 .

remarquons que EM-Root-MUSIC a de bonnes performances dans le cas de sources partiellement corrélées. Les résultats pour $\gamma = 0.3$ sont très proches que pour $\gamma = 0$, c'est-à-dire quand les sources sont décorrélées. Pour $\gamma = 0.6$, la courbe s'éloigne un peu de la BCR.

Convergence

D'autre part, nous allons montrer que EM-Root-MUSIC améliore aussi la convergence de la méthode. Pour le réseau $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$ dont les résultats de convergence en appliquant EM-ESPRIT sont montrés à la Fig. 5.18, nous obtenons le résultat suivant en appliquant EM-Root-MUSIC (Fig. 6.8). Nous traçons aussi la valeur minimale $\mathcal{L}_{1,min}(\theta_{MV}, \mathbf{Y})$. L'erreur d'estimation de la source à -5° est tracée en fonction des itérations à la Fig. 6.9. Donc avec cette variante, EM-Root-MUSIC converge pour ce réseau et à RSB égal à -10 dB. La log-vraisemblance négative diminue avec les itérations et s'approche de $\mathcal{L}_{1,min}(\theta_{MV}, \mathbf{Y})$ contrairement à EM-ESPRIT. De même, l'erreur d'estimation diminue avec EM-Root-MUSIC contrairement à EM-ESPRIT.

Nous reprenons la même expérience pour le réseau $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 10] \frac{\lambda}{2}$. Le résultat de la log-vraisemblance en utilisant EM-Root-MUSIC et EM-ESPRIT est représenté à la Fig. 6.10, ainsi que la valeur de $\mathcal{L}_{1,min}(\theta_{MV}, \mathbf{Y})$. Dans cet exemple, la log-vraisemblance négative correspondant à EM-Root-MUSIC diminue aussi avec les itérations et arrive à la valeur minimale. Donc EM-Root-MUSIC améliore la convergence.

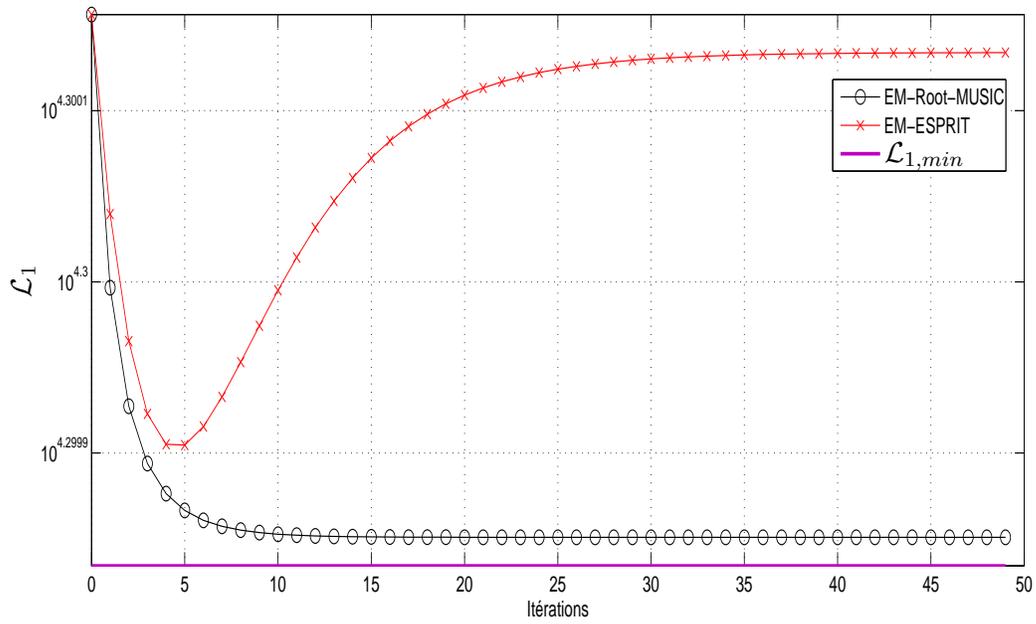


FIGURE 6.8: Log-vraisemblance négative pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-Root-MUSIC.

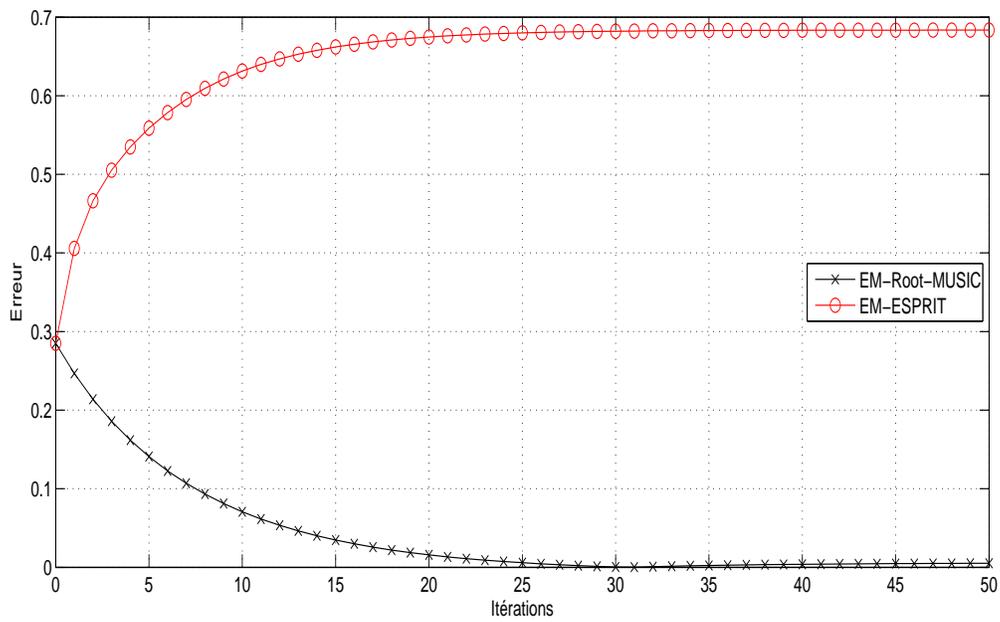


FIGURE 6.9: Erreur de la source à -5° pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 2, 7, 8, 9] \frac{\lambda}{2}$, RSB=-10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-Root-MUSIC et EM-ESPRIT.

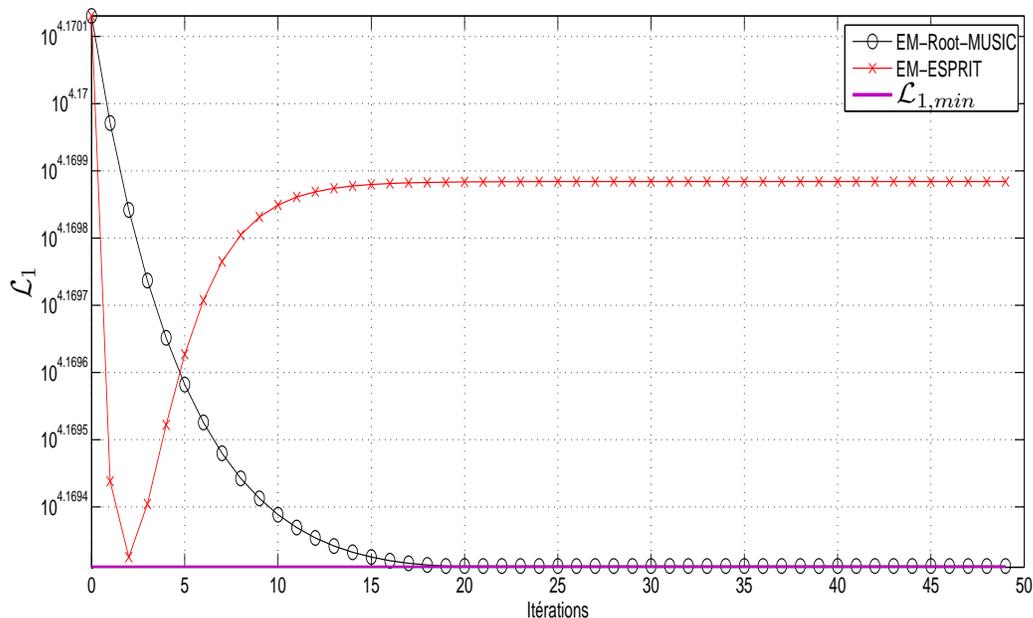


FIGURE 6.10: Log-vraisemblance négative pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 6, 10] \frac{\lambda}{2}$, RSB = -10 dB et $DDA = [-5^\circ, 10^\circ]$ en appliquant EM-Root-MUSIC et EM-ESPRIT.

Consistance

Maintenant, nous allons voir si la méthode devient consistante en appliquant EM-Root-MUSIC. Nous considérons le réseau défini par $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 5] \frac{\lambda}{2}$, les sources localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$ et le RSB fixé à 5 dB. La Fig. 6.11 montre la racine carrée de l'EQM des sources en fonction du nombre d'échantillons L en utilisant EM-Root-MUSIC et EM-ESPRIT. La méthode devient consistante en appliquant la variante. Pour les faibles valeurs de L , EM-ESPRIT a un meilleur comportement, mais l'EQM correspondant à EM-Root-MUSIC s'approche de la BCR quand le nombre d'échantillons L augmente, contrairement à EM-ESPRIT.

Comparaison ALNU/ALU

Le dernier test compare l'ALNU lacunaire à l'ALU, en fonction du nombre de capteurs et l'ouverture, comme présenté au chapitre 4. Pour cela, nous prenons les réseaux d'ALU et ALNU définis au tableau 4.1 où l'ouverture est de 10. Les sources sont localisées à $[-5^\circ, 10^\circ]$ et le RSB est à 10 dB. Nous traçons la racine carrée de l'EQM en fonction du nombre de capteurs. La Fig. 6.12 montre les performances des ALNU et les ALU définies dans le tableau 4.1 pour la source localisée à -5° . Les DDA sont estimées à l'aide de Root-MUSIC dans le cas de l'ALU.

Nous obtenons des résultats similaires à ceux obtenus dans le chapitre 4. Pour un même nombre de capteurs M , l'ALNU a de meilleures performances. De plus, si nous comparons l'ALNU ayant 5 capteurs avec l'ALU ayant 10 capteurs, les résultats ne changent presque pas. Donc il est possible d'obtenir les mêmes performances en utilisant juste la moitié des capteurs.

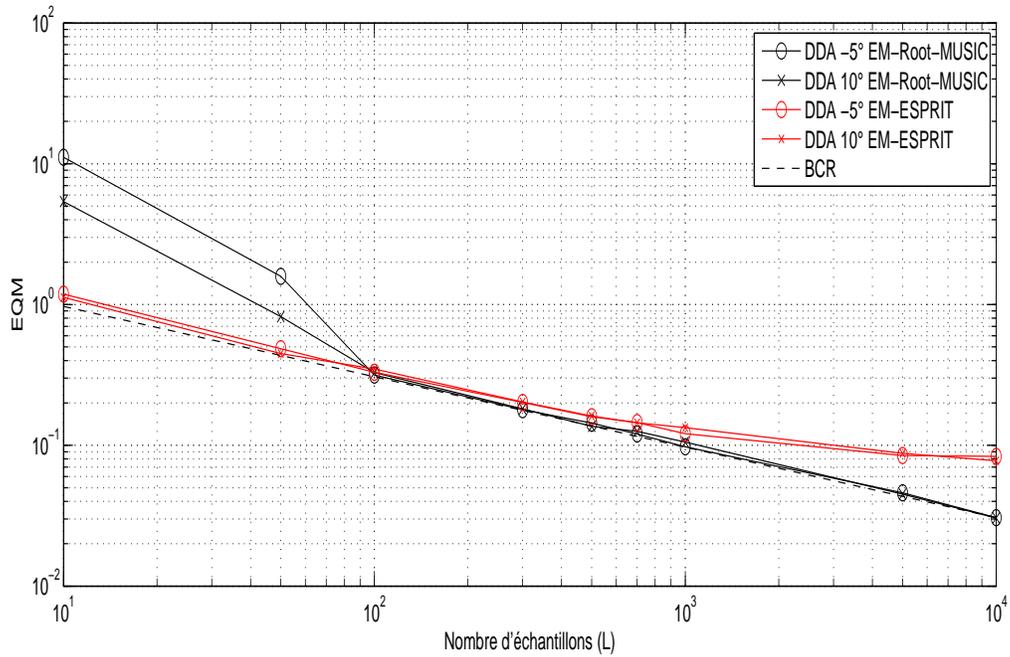


FIGURE 6.11: EQM des sources pour l'ALNU $\mathbf{d} = [0, 1, 3, 5] \frac{\lambda}{2}$, $\text{RSB}=5$ dB, $\text{DDA} = [-5^\circ, 10^\circ]$ en fonction de L .

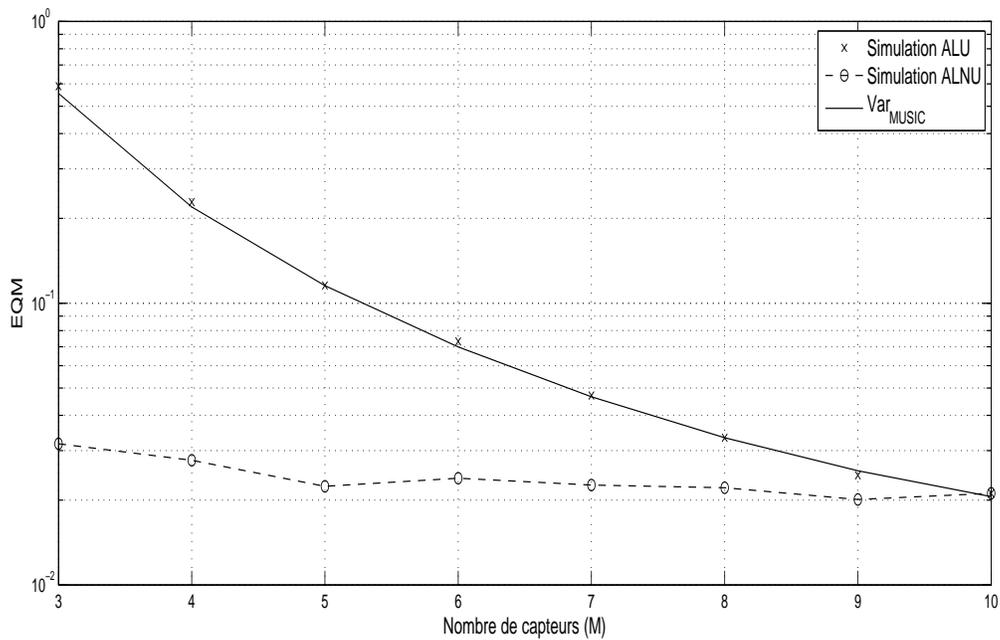


FIGURE 6.12: EQM de la source à -5° avec $M = 3, 4, \dots, 10$, $\text{RSB}=10$ dB, $\text{DDA} = [-5^\circ, 10^\circ]$ dans le cas de l'ALNU et l'ALU en appliquant EM-Root-MUSIC.

6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé deux variantes à la méthode EM-ESPRIT pour améliorer ses performances. Il s'agit principalement de prendre en compte l'erreur introduite par interpolation. Dans EM-ESPRIT stochastique, nous ajoutons une perturbation à la matrice des amplitudes dépendant de l'erreur introduite durant l'estimation de cette matrice. Cette perturbation permet à l'algorithme de converger. Cette variante permet d'améliorer la convergence de la méthode. L'autre variante (EM-Root-MUSIC) consiste à prendre en considération la coloration du bruit après interpolation. Donc nous blanchissons le bruit et nous appliquons Root-MUSIC au lieu d'ESPRIT. Cette méthode améliore la convergence et permet à l'EQM d'approcher asymptotiquement la BCR.

Chapitre 7

Application : Soufflerie Renault

7.1 Introduction

La réduction du bruit acoustique dans les moyens de transport est un objectif poursuivi par les constructeurs afin d'en améliorer le confort. Avec le développement de moteurs plus silencieux, le bruit aérodynamique devient une gêne de plus en plus importante. Pour concevoir des véhicules plus silencieux, la localisation des sources de bruit et l'analyse de ses propriétés s'avère indispensable.

La localisation de sources aéroacoustiques adresse un certain nombre de problématiques sortant du champ conventionnel du traitement d'antennes : source en champ proche, signaux à large bande, antenne plane (et à géométrie non uniforme dans le cas de l'application traitée ici). Il s'agit d'un domaine de recherche très actif pour lequel des méthodes d'imagerie aéroacoustique utilisant un réseau planaire de microphones ont été développées. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à une expérience dont le principe consiste à placer un objet dans le flux d'une soufflerie, un réseau de microphone est placé parallèlement au flux pour enregistrer le bruit aérodynamique à la surface de l'objet. L'objectif est de déterminer la localisation des principales sources aéroacoustiques ainsi que leur puissance. Nous cherchons en particulier à déterminer précisément des sources dont la puissance est relativement faible par rapport aux sources principales.

Pour former des images acoustiques de qualité élevée en utilisant un réseau de microphones, les méthodes de formation de voie [42] et adaptatives [18] [35] ont été considérées. En plus du problème des lobes secondaires élevés, un autre problème se pose pour la méthode de formation de voie pour les signaux large bande : la largeur du lobe principal varie en fonction de la fréquence quand le signal à large bande est divisé en plusieurs intervalles de fréquences à bande étroite. Une approche pour résoudre ce problème consiste à pondérer la méthode de formation de voie ou à utiliser des méthodes de focalisation. Les méthodes adaptatives présentent une meilleure résolution et une meilleure capacité à supprimer l'interférence entre les sources (contrairement à la méthode de FV qui souffre du problème des lobes secondaires, en particulier dans le cas des réseaux non uniformes). Cependant, ces méthodes souffrent aussi du problème de la variation de la largeur du lobe principal quand la fréquence change. De plus, elles souffrent de dégradation de performances quand le nombre d'échantillons est petit et les sources sont fortement corrélées ou cohérentes [72].

D'autres méthodes ont été proposées pour surmonter les problèmes de la méthode de formation de voie. Wideband RELAX (WB-RELAX) [75] est une approche paramétrique et itérative

qui peut être utilisée efficacement dans l'imagerie de points sources afin d'atténuer l'effet des lobes secondaires. Une autre méthode itérative est le WB-CLEAN [75] qui de même vise à réduire l'effet des lobes secondaires par effacement des sources déjà localisées. C'est une approche non-paramétrique et elle peut être utilisée pour localiser les points sources ou les sources distribuées.

7.2 Description du problème et modèle du signal

7.2.1 Description du problème

Dans cette application, l'objectif est de localiser les sources bruyantes sur la carrosserie d'une voiture placée dans une soufflerie. Le scénario est représenté sur les Fig. 7.1 et 7.2 qui présente une vue de dessus de la première. La Fig. 7.1 représente le scénario qu'on utilise à la soufflerie de Renault. Les positions relatives de l'antenne et de la voiture et la direction du flux du vent



FIGURE 7.1: Principe de la soufflerie : position de l'antenne, la voiture et du vent.

sont données sur la Fig. 7.1. L'antenne utilisée est une antenne plane non uniforme qui comporte $M = 64$ capteurs (microphones) dans le plan $z = 0$ (Fig. 7.3). L'axe X est orienté dans le sens du vent et son origine est au centre de l'antenne, l'axe Y est orienté vers le haut et son origine est au niveau du sol. On suppose que les sources sont toutes dans le plan $z = z_0$ (avec ici $z_0 = 4.45$ m).

7.2.2 Modèle du signal

Nous considérons une antenne de M capteurs recevant le bruit de N sources à large bande en champ proche. Les capteurs sont omnidirectionnels. Les sources sont distribuées car il s'agit de sources aéroacoustiques créées par la turbulence qui se développe partout autour du véhicule.

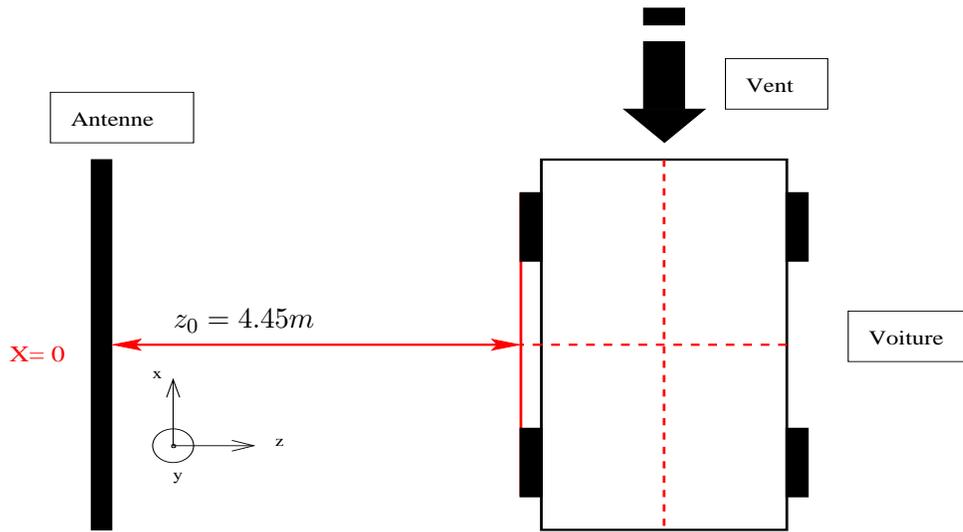


FIGURE 7.2: Principe de la soufflerie : position de l'antenne, la voiture et du vent (vue de dessus).

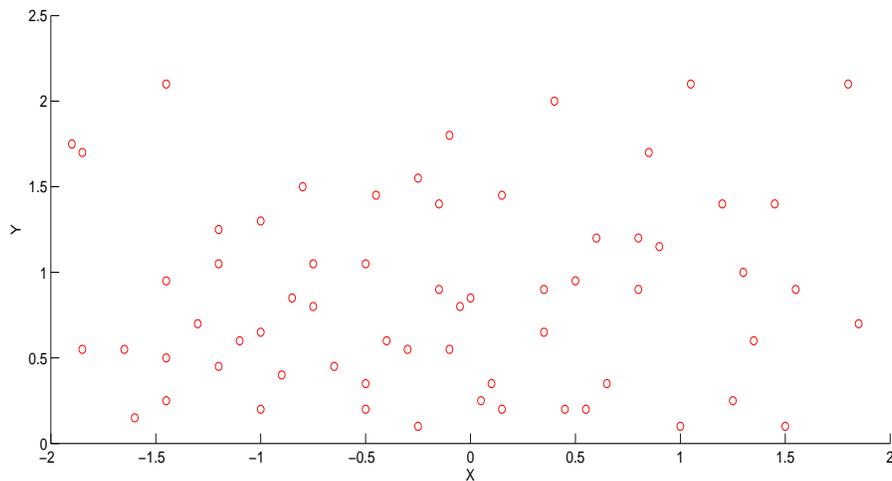


FIGURE 7.3: Position des capteurs dans le plan $z = 0$ ($M = 64$ capteurs).

On fait l'hypothèse que les sources les plus énergétiques qui sont vues par l'antenne, comme le rétroviseur, peuvent généralement se ramener à des sources de faible étendue. De plus, les zones bien séparées comme le passage de roue, le rétroviseur, etc. ne sont pas corrélées entre elles. La corrélation potentielle entre les sources est liée à la corrélation des phénomènes turbulents sous-jacents, elle est généralement de quelques centimètres pour des fréquences supérieures à quelques centaines de Hz.

Nous ne considérons pas l'approximation Fresnel pour le modèle comme dans [38] [36]. Dans un premier temps, nous supposons que l'effet du vent sur la propagation du son est négligeable. Le signal $s_n(t)$ issu de la source n est mesuré par le microphone m sous la forme :

$$x_{m,n}(t) \approx \frac{1}{d_{m,n}} s_n \left(t - \frac{d_{m,n}}{c} \right), \quad (7.1)$$

où $d_{m,n}$ est la distance entre la source n et le capteur m et c est la vitesse du son. Dans le cas où N sources émettent des signaux, par linéarité, le modèle (7.1) devient :

$$x_m(t) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{d_{m,n}} s_n \left(t - \frac{d_{m,n}}{c} \right) + b_m(t). \quad (7.2)$$

$b_m(t)$ représente le bruit de mesure sur le capteur m . En notant $y_m(\omega)$ la transformée de Fourier de $x_m(t)$ et en notant $\omega = 2\pi f$, le signal devient :

$$y_m(\omega) = \sum_n \frac{1}{d_{m,n}} e^{-j\omega \frac{d_{m,n}}{c}} \tilde{s}_n(\omega) + \tilde{b}_m(\omega) \quad (7.3)$$

où $\tilde{s}_n(\omega)$ et $\tilde{b}_m(\omega)$ sont les transformées de Fourier de $s_n(t)$ et $b_m(t)$ respectivement. Soit : $\mathbf{y}(\omega) = [y_1(\omega), y_2(\omega), \dots, y_M(\omega)]^\top$ la transformée de Fourier des M microphones, $\mathbf{s}(\omega) = [\tilde{s}_1(\omega), \tilde{s}_2(\omega), \dots, \tilde{s}_N(\omega)]^\top$ le vecteur des amplitudes des sources, $\mathbf{b}(\omega) = [\tilde{b}_1(\omega), \tilde{b}_2(\omega), \dots, \tilde{b}_M(\omega)]^\top$ le vecteur groupant la transformée de Fourier du bruit de mesure.

Donc en passant à l'écriture matricielle, les données reçues s'écrivent :

$$\mathbf{y}(\omega) = \mathbf{A}(\mathbf{P}, \omega) \mathbf{s}(\omega) + \mathbf{b}(\omega) \quad (7.4)$$

avec $\mathbf{A}(\mathbf{P}, \omega)$ la matrice direction de dimension $M \times N$: $\mathbf{A}(\mathbf{P}, \omega) = [\mathbf{a}(\mathbf{p}_1, \omega), \dots, \mathbf{a}(\mathbf{p}_N, \omega)]$. $\mathbf{a}(\mathbf{p}_n, \omega)$ est le vecteur direction de dimension $M \times 1$ exprimé par :

$$\mathbf{a}(\mathbf{p}_n, \omega) = \left[\frac{1}{d_{1,n}} e^{-j\omega \frac{d_{1,n}}{c}}, \frac{1}{d_{2,n}} e^{-j\omega \frac{d_{2,n}}{c}}, \dots, \frac{1}{d_{M,n}} e^{-j\omega \frac{d_{M,n}}{c}} \right]^\top. \quad (7.5)$$

La matrice $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N]^\top$ est la matrice des positions 2D des sources incidentes : $\mathbf{p}_n = [x_n, y_n]$. La distance $d_{m,n}$ entre la source n et le capteur m s'exprime en fonction de \mathbf{p}_n de la manière suivante :

$$d_{m,n} = \sqrt{(x_n - \bar{x}_m)^2 + (y_n - \bar{y}_m)^2 + z_0^2} \quad (7.6)$$

où $[\bar{x}_m, \bar{y}_m]$ sont les coordonnées du capteur m .

A partir des données $\mathbf{y}(\omega)$, on veut estimer les positions \mathbf{p}_n des sources bruyantes (rappelons que les sources sont placées dans le plan $z = z_0$) et les amplitudes de ces sources $\mathbf{s}(\omega)$ afin d'en reconstruire l'énergie.

Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas tenu compte de l'effet du vent sur la propagation du son. Le déplacement d'air lié au vent modifie le temps de propagation entre la source et le capteur, ce qui revient à prendre en compte cet aspect dans le calcul de la distance $d_{m,n}$ sur la composante des x . En présence du vent, la distance parcourue par l'onde entre la source m et le capteur n_0 n'est pas la distance géométrique d_{m,n_0} , mais la distance $d_{m,n}$, comme le montre la Fig. 7.4. Soit v la vitesse du vent, le déplacement provoqué par le vent vaut $d_1 = t_1 v$ où

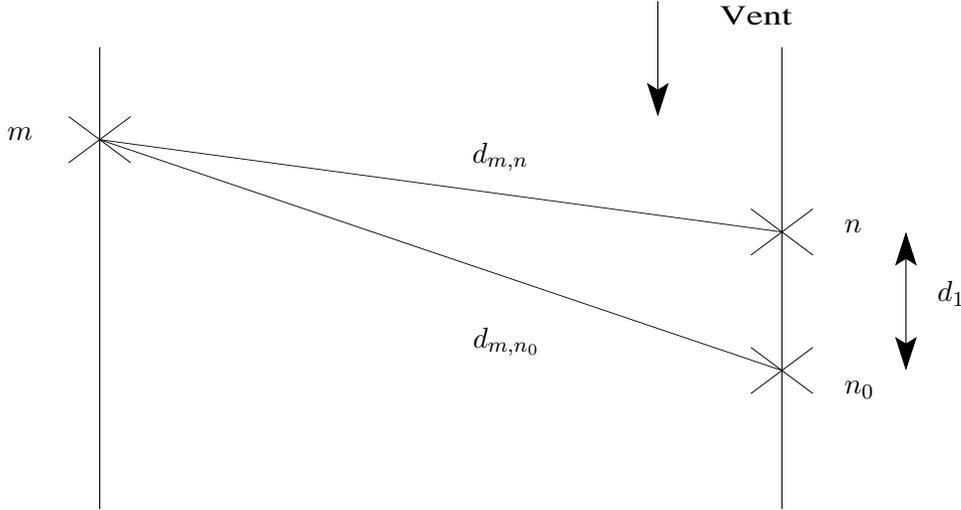


FIGURE 7.4: Effet du vent sur le calcul de $d_{m,n}$.

$t_1 = \frac{d_{m,n}}{c}$ (c la célérité du son). Donc $d_1 = \frac{d_{m,n}v}{c}$. D'autre part, $d_{m,n}$ est exprimée par :

$$d_{m,n} = \sqrt{(x_{n_0} - \bar{x}_m - d_1)^2 + (y_n - \bar{y}_m)^2 + z_0^2} \quad (7.7)$$

avec $y_n = y_{n_0}$. En notant $\Delta x_0 = x_{n_0} - \bar{x}_m$, $\Delta y_0 = y_{n_0} - \bar{y}_m$ ($y_{n_0} = y_n$) et en remplaçant d_1 par $\frac{d_{m,n}v}{c}$, (7.7) devient :

$$d_{m,n}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + 2\frac{v}{c}\Delta x_0 d_{m,n} - \Delta^2 x_0 - \Delta^2 y_0 - z_0^2 = 0, \quad (7.8)$$

avec $\Delta^2 x_0 + \Delta^2 y_0 + z_0^2 = d_{m,n_0}^2$. En résolvant cette équation d'ordre 2, nous obtenons la nouvelle valeur de $d_{m,n}$:

$$d_{m,n} = \frac{-\frac{v}{c}\Delta x_0 \pm \sqrt{\frac{v^2}{c^2}\Delta x_0^2 + d_{m,n_0}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (7.9)$$

Puisqu'il s'agit d'une distance, on retient la valeur positive.

Afin d'obtenir une estimation robuste de la matrice de covariance $\mathbf{R}(\omega) = E\{\mathbf{y}(\omega)\mathbf{y}^H(\omega)\}$, les échantillons sont séparés en I segments chacun contenant L échantillons. On applique la Transformée de Fourier Discrète (TFD) sur les segments de longueur L . Le signal devient :

$$\mathbf{y}_i(\omega_l) = \mathbf{A}(\mathbf{P}, \omega_l)\mathbf{s}_i(\omega_l) + \mathbf{b}_i(\omega_l) \quad l = 1, \dots, L \quad \text{et} \quad i = 1, \dots, I \quad (7.10)$$

et la matrice de covariance correspondante :

$$\hat{\mathbf{R}}(\omega_l) = \frac{1}{I} \sum_i \mathbf{y}_i(\omega_l)\mathbf{y}_i^H(\omega_l). \quad (7.11)$$

Il faut choisir une valeur de L suffisamment grande pour garantir l'hypothèse de bande étroite. De plus, il faut que $I > M$ afin d'obtenir une bonne estimation de la matrice de covariance (chapitre 5 de [72]).

7.3 Etat de l'art

Dans cette section, nous citons les principales méthodes pour la localisation de sources aéroacoustiques dans les hypothèses de travail suivantes : sources en champ proche, signaux à large bande, antenne plane à géométrie non uniforme.

7.3.1 Méthode FV

Nous commençons par la méthode classique de FV. Le critère de la FV est d'abord calculé pour chaque fréquence et la maximisation se fait sur la somme des critères calculés pour chaque fréquence. En effet, pour la fréquence ω_l , le critère de la FV s'écrit sous la forme :

$$S_{FV}(\mathbf{p}, \omega_l) = \mathbf{a}^H(\mathbf{p}, \omega_l) \hat{\mathbf{R}}(\omega_l) \mathbf{a}(\mathbf{p}, \omega_l) \quad (7.12)$$

où $\hat{\mathbf{R}}(\omega_l)$ désigne la matrice de covariance estimée des données. La maximisation du critère de FV se fait sur la somme des critères calculés dans (7.12) :

$$S_{FV}(\mathbf{p}) = \sum_{l=1}^L S_{FV}(\mathbf{p}, \omega_l). \quad (7.13)$$

la maximisation de ce critère fournit les positions des sources les plus bruyantes.

7.3.2 WB-CLEAN

La méthode WB-CLEAN est une méthode non-paramétrique. Il est connu que le critère obtenu à l'aide de l'algorithme de FV est proportionnel à la convolution de la vraie distribution des intensités des sources avec l'antenne. À cause du nombre fini d'échantillons, les lacunes entre les données et l'irrégularité du processus de l'échantillonnage des données, le faisceau créé contient des lobes secondaires indésirables. L'algorithme WB-CLEAN tend à faire une déconvolution du critère pour obtenir une vraie distribution des intensités des sources d'une part et de l'antenne d'autre part, en utilisant une méthode itérative.

À l'itération k , afin d'estimer le signal le plus significatif incident sur l'antenne, nous éliminons une partie du signal qui correspond aux sources déjà localisées de la manière suivante :

$$\mathbf{y}_{i,k}(\omega_l) = \mathbf{y}_i(\omega_l) - \sum_{\tilde{k}=1}^{k-1} \rho \mathbf{a}(\hat{\mathbf{p}}_{\tilde{k}}, \omega_l) \hat{\mathbf{s}}_{i,\tilde{k}}(\omega_l) \quad (7.14)$$

où $\hat{\mathbf{p}}_{\tilde{k}}$ et $\hat{\mathbf{s}}_{i,\tilde{k}}(\omega_l)$, $\tilde{k} = 1, \dots, k-1$ sont obtenues dans les itérations précédentes et ρ est le gain d'effacement. Expérimentalement, une valeur comprise entre 0.1 et 0.25 semble un bon choix. Les valeurs de $\hat{\mathbf{p}}_k$ et $\hat{\mathbf{s}}_{i,k}(\omega_l)$ sont trouvées de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{p}}_k = \arg \max_{\mathbf{p}_k} \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \frac{|\mathbf{a}^H(\hat{\mathbf{p}}_k, \omega_l) \mathbf{y}_{i,k}(\omega_l)|^2}{\|\mathbf{a}(\hat{\mathbf{p}}_k, \omega_l)\|^2}. \quad (7.15)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{i,k}(\omega_l) = \frac{\mathbf{a}^H(\hat{\mathbf{p}}_k, \omega_l) \mathbf{y}_{i,k}(\omega_l)}{\mathbf{a}^H(\hat{\mathbf{p}}_k, \omega_l) \mathbf{a}(\hat{\mathbf{p}}_k, \omega_l)} \quad (7.16)$$

Les étapes de WB-CLEAN se résument de la manière suivante :

1. Choisir ρ , initialisation avec $k = 1$ et soit $\mathbf{y}_{i,1}(\omega_l) = \mathbf{y}_i(\omega_l)$.
2. Estimer \mathbf{p}_k et $\mathbf{s}_{i,k}(\omega_l)$ en utilisant les éq. (7.15) et (7.16), pour $l = 1, \dots, L$ et $i = 1, \dots, I$.
3. Calculer le signal $\mathbf{y}_{i,k+1}(\omega_l)$ selon (7.14).
4. Ajouter la valeur de la position estimée et l'amplitude de la source multipliée par ρ à la liste des signaux estimés.
5. Vérifier si le signal a une puissance égale à la puissance du bruit. Sinon, incrémenter l'index d'itération de 1 et répéter les étapes 2-5.

7.3.3 Spectral MUSIC

La dernière approche à laquelle nous allons comparer nos résultats est Spectral MUSIC. Le principe est le même que celui de MUSIC pour le champ proche, sauf que le critère est la somme des différentes valeurs du critère de Spectral MUSIC calculé pour chaque fréquence ω_l . Le critère de MUSIC pour chaque fréquence est exprimé sous la forme :

$$S_{MUSIC}(\mathbf{p}, \omega_l) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\mathbf{p}, \omega_l) \hat{\mathbf{E}}_B(\omega_l) \hat{\mathbf{E}}_B^H(\omega_l) \mathbf{a}(\mathbf{p}, \omega_l)} \quad (7.17)$$

où $\hat{\mathbf{E}}_B(\omega_l)$ est l'estimée du sous-espace bruit calculé en décomposant $\hat{\mathbf{R}}(\omega_l)$ en valeurs et vecteurs propres. $\hat{\mathbf{E}}_B(\omega_l)$ est calculée pour chaque valeur de ω_l . Le critère final de Spectral MUSIC est calculé en sommant les valeurs de $S_{MUSIC}(\mathbf{p}, \omega_l)$:

$$S_{MUSIC}(\mathbf{p}) = \sum_{l=1}^L S_{MUSIC}(\mathbf{p}, \omega_l). \quad (7.18)$$

Nous proposons une amélioration de l'approche WB-MUSIC en appliquant le Zero-Forcing MUSIC (ZF-MUSIC) comme on le verra au paragraphe suivant.

7.4 ZF-MUSIC

Nous proposons ici d'étendre le principe de ZF-MUSIC proposée dans [9] [21] au cas large bande et 2D. ZF-MUSIC est une nouvelle approche séquentielle de MUSIC permettant d'améliorer les performances de MUSIC notamment dans le cas de deux sources proches ou à puissances différentes. ZF-MUSIC peut aussi être appliquée dans le cas de capteurs non omnidirectionnels ayant des gains identiques pour tous les capteurs, il suffit d'ajouter $\gamma(\theta)$ au modèle. De plus, le comportement de cette méthode est étudié dans [21] dans le cas de sources en champ proche. On remarque que parmi les avantages de cette méthode est qu'elle approche la CRB pour une valeur du RSB suffisante dans la plupart des scénarios, en particulier en présence de sources corrélées. Cette méthode ne fait pas une déflation du sous-espace signal et change directement le critère de MUSIC afin de conserver un coût calculatoire réduit. Le critère classique de MUSIC pour chaque fréquence ω_l est modifié. Le critère de ZF-MUSIC est la somme des valeurs du critère calculé à chaque fréquence. Les itérations se font sur le nombre de sources. Le principe consiste à forcer le critère à prendre la valeur zéro autour des sources trouvées. La position de la source n est estimée en maximisant le critère de ZF-MUSIC :

$$S_{ZF-MUSIC}(\mathbf{p}, \omega_l) = \frac{f_n^{(M)}(\mathbf{p}, \omega_l)}{\mathbf{a}^H(\mathbf{p}, \omega_l) \hat{\mathbf{E}}_B(\omega_l) \hat{\mathbf{E}}_B^H(\omega_l) \mathbf{a}(\mathbf{p}, \omega_l)} \quad (7.19)$$

où $n \in [1, \dots, N]$ et la fonction zero-forcing est la fonction quadratique définie par :

$$f_n^{(M)}(\mathbf{p}, \omega_l) = \mathbf{a}^H(\mathbf{p}, \omega_l) \mathbf{P}_n^\perp \mathbf{a}(\mathbf{p}, \omega_l). \quad (7.20)$$

$\mathbf{P}_n^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_n$ est le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par les $n - 1$ sources et positions déjà estimées. Nous avons :

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{A}_n (\mathbf{A}_n^H \mathbf{A}_n)^{-1} \mathbf{A}_n^H \quad \text{pour } n = 2, \dots, N$$

et

$$\mathbf{A}_n = [\mathbf{a}(\mathbf{p}_1, \omega_l), \dots, \mathbf{a}(\mathbf{p}_{n-1}, \omega_l)] \quad \text{for } n = 2, \dots, N.$$

La fonction zero-forcing est égale à zéro pour les valeurs des positions déjà estimées. Le spectre de MUSIC est forcé à être zéro pour les valeurs des positions déjà estimées et idéalement, il ne doit pas varier pour les autres valeurs. Dans le cas du champ lointain, le critère ZF vaut zéro pour les DDA déjà estimées et est exactement égal au critère MUSIC si le nombre de capteurs est grand [9]. Dans le cas du champ proche, ce résultat est montré empiriquement [21]. Le critère final de ZF-MUSIC est de la forme :

$$S_{ZF-MUSIC}(\mathbf{p}) = \sum_{l=1}^L S_{ZF-MUSIC}(\mathbf{p}, \omega_l). \quad (7.21)$$

L'algorithme séquentiel ZF-MUSIC peut être résumé de la manière suivante :

Initialisation : Calculer le critère de ZF-MUSIC avec $\mathbf{P}_1^\perp = \mathbf{I}$ c'est-à-dire $f_1^{(M)}(\mathbf{p}, \omega_l) = 1$ pour chaque fréquence ω_l . Calculer le critère final selon (7.21) et estimer la position p_1 . Calculer le projecteur $\mathbf{P}_2^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{a}_M(p_1, \omega_l) \mathbf{a}_M^H(p_1, \omega_l)$ pour chaque fréquence ω_l .

Boucle : Pour $n = 2, \dots, N$, calculer la fonction zero-forcing selon (7.20) pour chaque valeur de ω_l . Calculer le critère final en appliquant (7.19) et (7.21) et estimer les positions.

7.5 Estimation de l'énergie des sources

Après avoir estimé les positions des sources bruyantes, il est intéressant de pouvoir estimer l'énergie de ces sources. Pour cela, on utilise deux méthodes : la méthode de FV et la méthode des Moindres Carrés (MC).

La première approche consiste à estimer l'amplitude de la source en filtrant le signal reçu à l'aide du filtre à FV, dans la direction de la source n . L'estimation de l'amplitude s'exprime alors :

$$\hat{s}_{i,n}(\omega_l) = \frac{\mathbf{a}^H(\hat{\mathbf{p}}_n, \omega_l) \mathbf{y}_i(\omega_l)}{\|\mathbf{a}(\hat{\mathbf{p}}_n, \omega_l)\|^2} \quad (7.22)$$

pour $l = 1, \dots, L$ et $i = 1, \dots, I$. $\hat{\mathbf{p}}_n$ est la position de la source n , c'est-à-dire estimée à l'itération n . L'énergie de la source ayant comme position $\hat{\mathbf{p}}_n$ est donnée par :

$$D_{FV}(\hat{\mathbf{p}}_n) = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \|\hat{s}_{i,n}(\omega_l)\|^2. \quad (7.23)$$

Une deuxième approche consiste à résoudre l'équation (7.10) au sens des MC. La solution s'écrit :

$$\hat{s}_i(\omega_l) = \mathbf{A}^\dagger(\hat{\mathbf{P}}, \omega_l) \mathbf{y}_i(\omega_l) \quad (7.24)$$

pour $l = 1, \dots, L$ et $i = 1, \dots, I$. Cette estimation est faite une seule fois à la fin des itérations. L'énergie des sources est exprimée par :

$$D_{MC}(\hat{\mathbf{P}}) = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \|\hat{s}_i(\omega_l)\|^2. \quad (7.25)$$

7.6 Résultats numériques

Dans cette section, nous allons comparer la méthode ZF-MUSIC aux méthodes présentées au paragraphe 7.3. Les simulations sont divisées en deux parties. La première partie des simulations est réalisée sur des données simulées. Dans la seconde partie, nous comparons les différentes méthodes sur des données réelles de soufflerie fournie par Renault.

7.6.1 Données simulées

Pour la première simulation, nous testons les différentes méthodes dans le cas de deux sources proches. Les positions des 64 capteurs sont celles des données réelles représentées sur la Fig. 7.3. Les sources ont les positions suivantes :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ -0.9 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Les sources sont décorréélées et sont générées à partir d'un bruit blanc filtré par un basse-bas de fréquence de coupure de 10 kHz. La fréquence d'échantillonnage est de 25.6 kHz et la durée d'acquisition est de 4 secondes, le RSB est de 10 dB.

Dans un premier temps, nous considérons deux sources de puissance identique. La Fig. 7.5 donne les positions obtenues en utilisant les méthodes FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC ainsi que les contours des critères utilisés¹ et les valeurs exactes des positions. Les positions estimées par les différentes méthodes sont regroupées sur la Fig. 7.6.

Nous remarquons que les méthodes FV et MUSIC n'arrivent pas à résoudre les deux sources et donc elle n'estiment qu'une seule source, alors que WB-CLEAN en estime trois. Donc ces estimations sont erronées. ZF-MUSIC estime deux sources proches des valeurs exactes.

¹Dans les cas des méthodes itératives, il s'agit du critère à la dernière itération, et ceci pour toutes les simulations

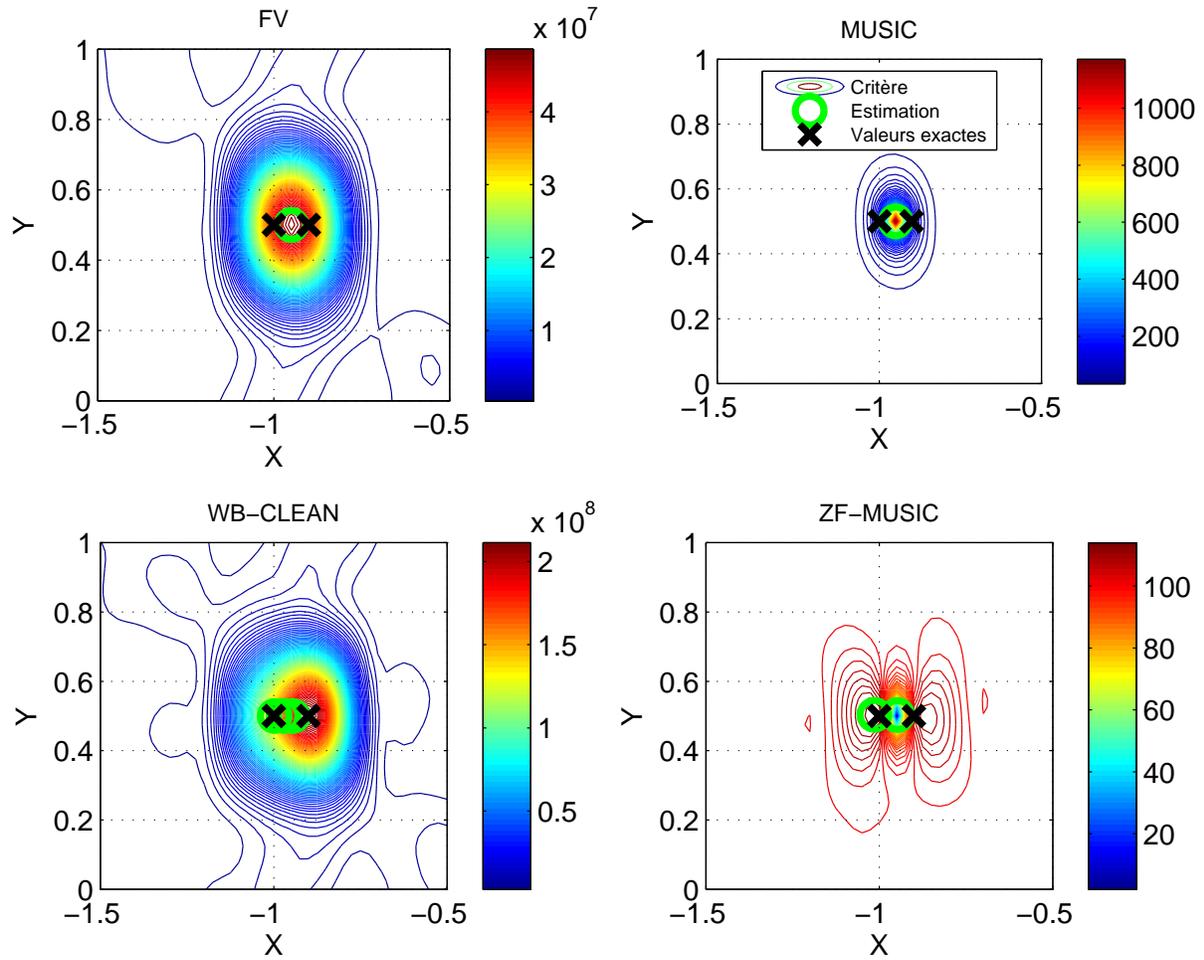


FIGURE 7.5: Positions exactes et estimées de deux sources proches ayant les mêmes puissances, en comparant les critères FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC.

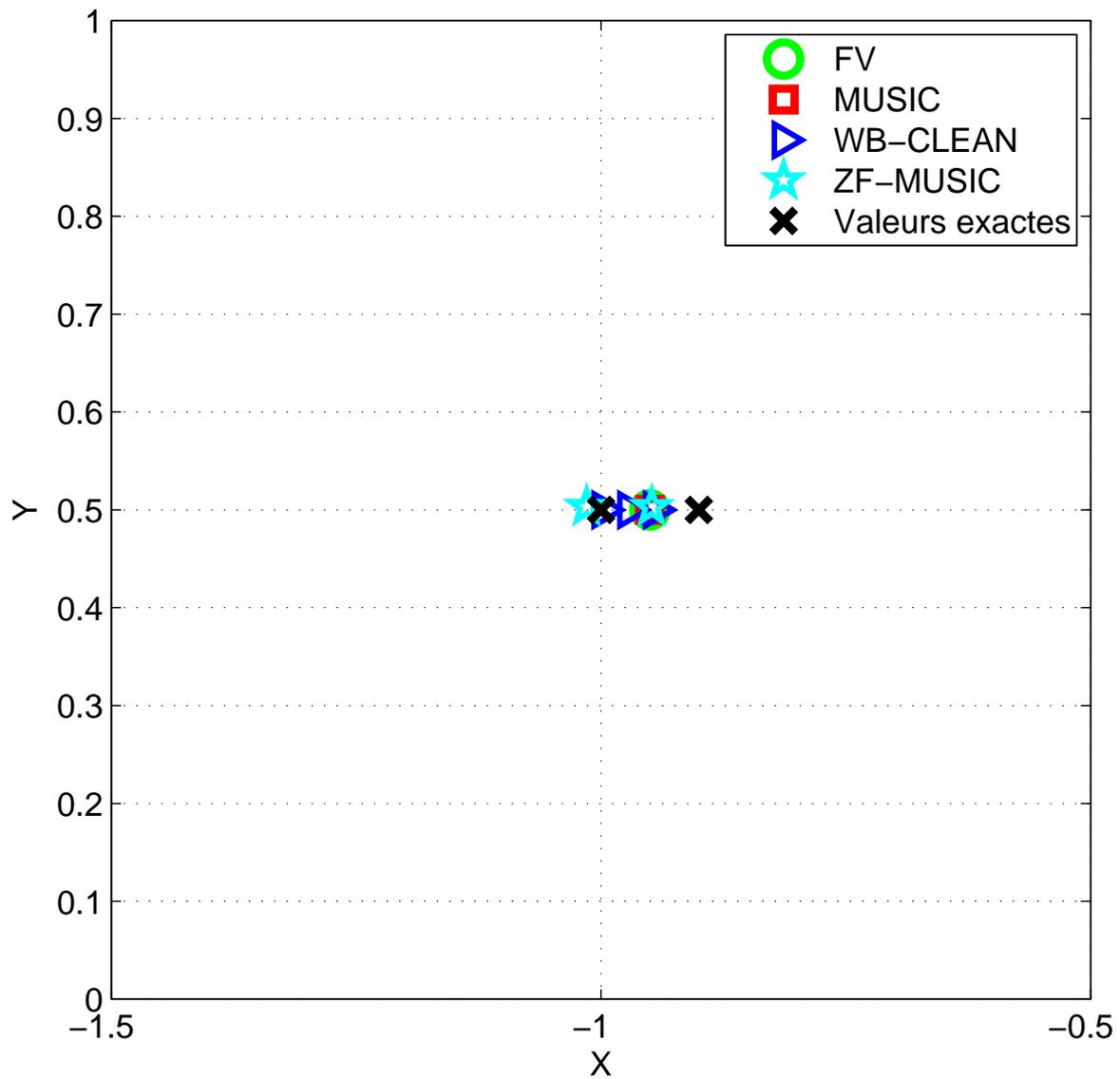


FIGURE 7.6: Comparaison des positions estimées par les méthodes FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC.

Nous considérons maintenant le cas de deux sources proches avec des puissances différentes. Les paramètres de simulation restent inchangés mais les puissances respectives des sources sont de 0 et -5 dB. La Fig. 7.7 donne les positions obtenues en utilisant les méthodes FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC ainsi que les contours des critères utilisés et les valeurs exactes des positions. Nous représentons ensuite tous les résultats sur la Fig. 7.8.

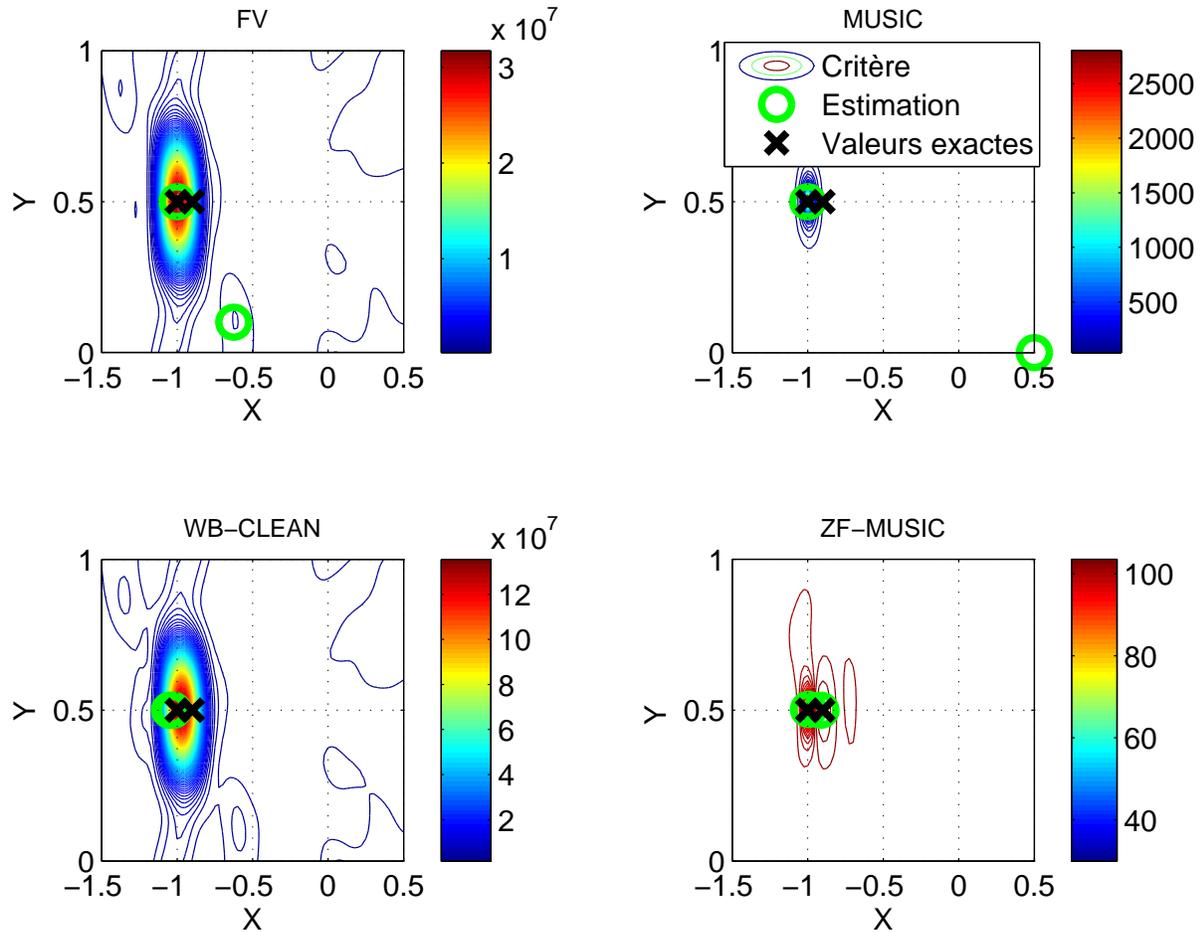


FIGURE 7.7: Positions exactes et estimées de deux sources proches ayant des puissances différentes, en comparant les critères FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC.

Sur ces figures, il est clair que ZF-MUSIC est la seule méthode capable de résoudre deux sources proches ayant des puissances différentes. FV et MUSIC estiment une seule source, WB-CLEAN estime une source correctement, l'autre n'étant pas à la position exacte.

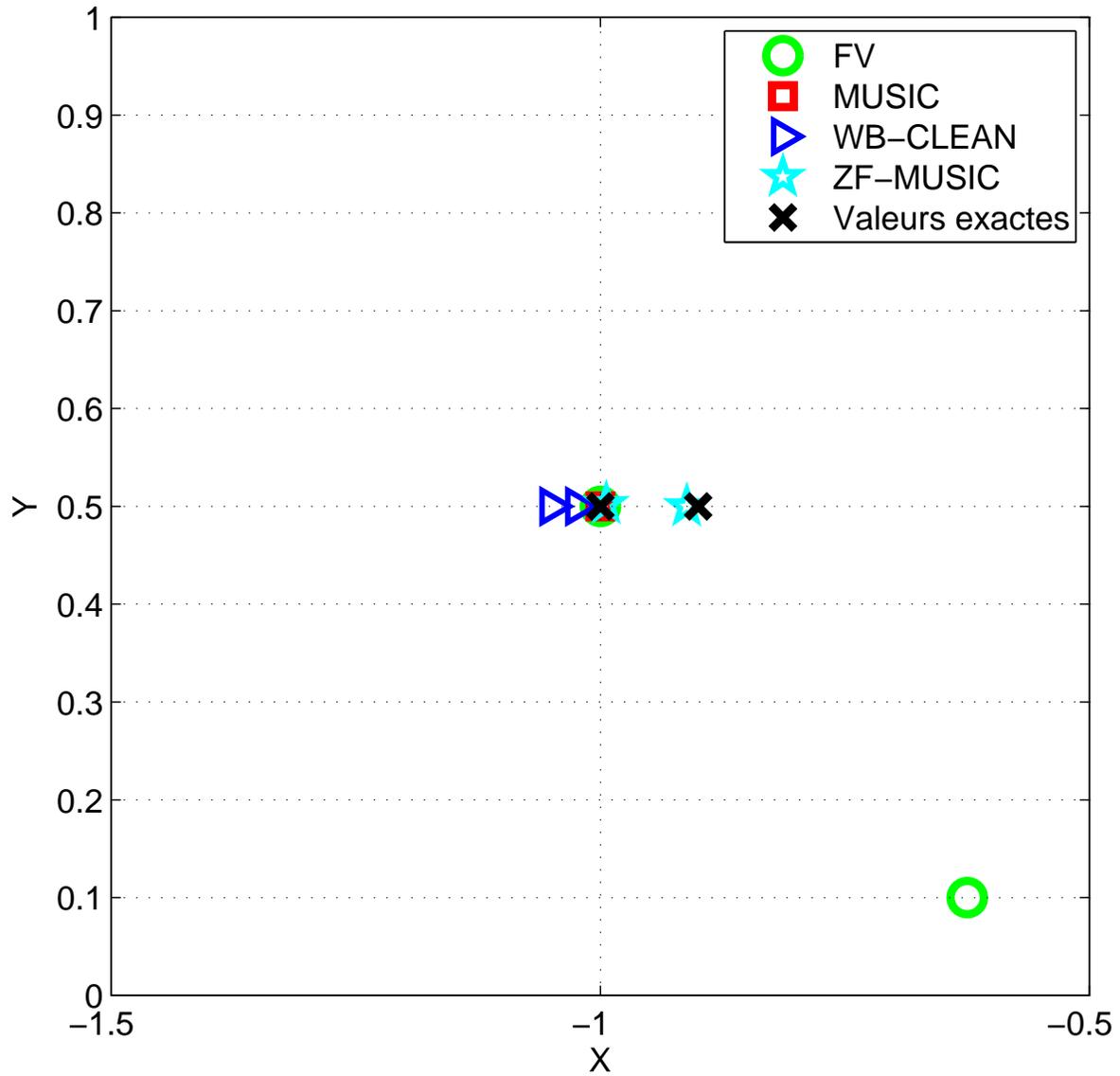


FIGURE 7.8: Comparaison des positions estimées par les méthodes FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC.

Enfin, nous testons ZF-MUSIC et la comparons aux autres méthodes pour $N = 20$ sources ayant des puissances différentes. Les positions des sources sont choisies de manière aléatoire uniforme dans un secteur de $4 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ et la durée d'observation est de 8 secondes. Les puissances des sources sont aussi choisies de manière aléatoire uniforme dans l'intervalle $[-10, 0] \text{ dB}$. De même, nous traçons les positions estimées par les méthodes FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC sur la Fig. 7.9 ainsi que les contours des critères utilisés et les valeurs exactes des positions. Sur la Fig. 7.10 nous traçons toutes la valeurs estimées des postions ainsi que les positions exactes.

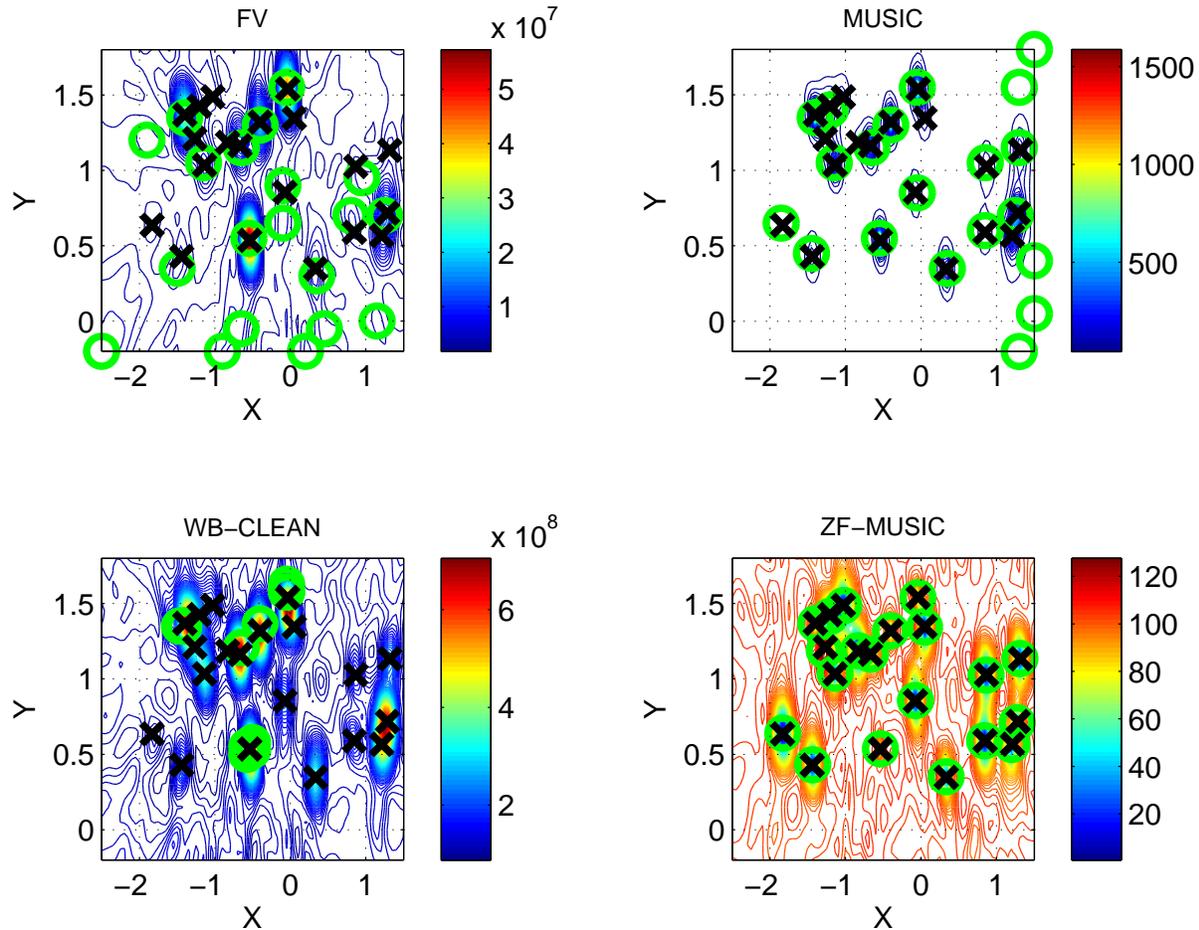


FIGURE 7.9: Positions exactes et estimées de $N = 20$ sources proches ayant des puissances différentes, en comparant les critères FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC.

Les cercles sur la Fig. 7.9 représentent les valeurs estimées et les croix représentent les valeurs exactes. ZF-MUSIC a estimé correctement toutes les sources, contrairement aux autres méthodes. WB-CLEAN a été lancée sur 60 itérations et n'a pu estimer que 5 sources. MUSIC a estimé la position de 15 sources et n'a pas pu estimer la position de 5 sources trop voisines d'autres sources. FV permet d'estimer la position de 11 sources mais avec une mauvaise précision. En conclusion, sur cette simulation, la supériorité de ZF-MUSIC apparaît clairement.

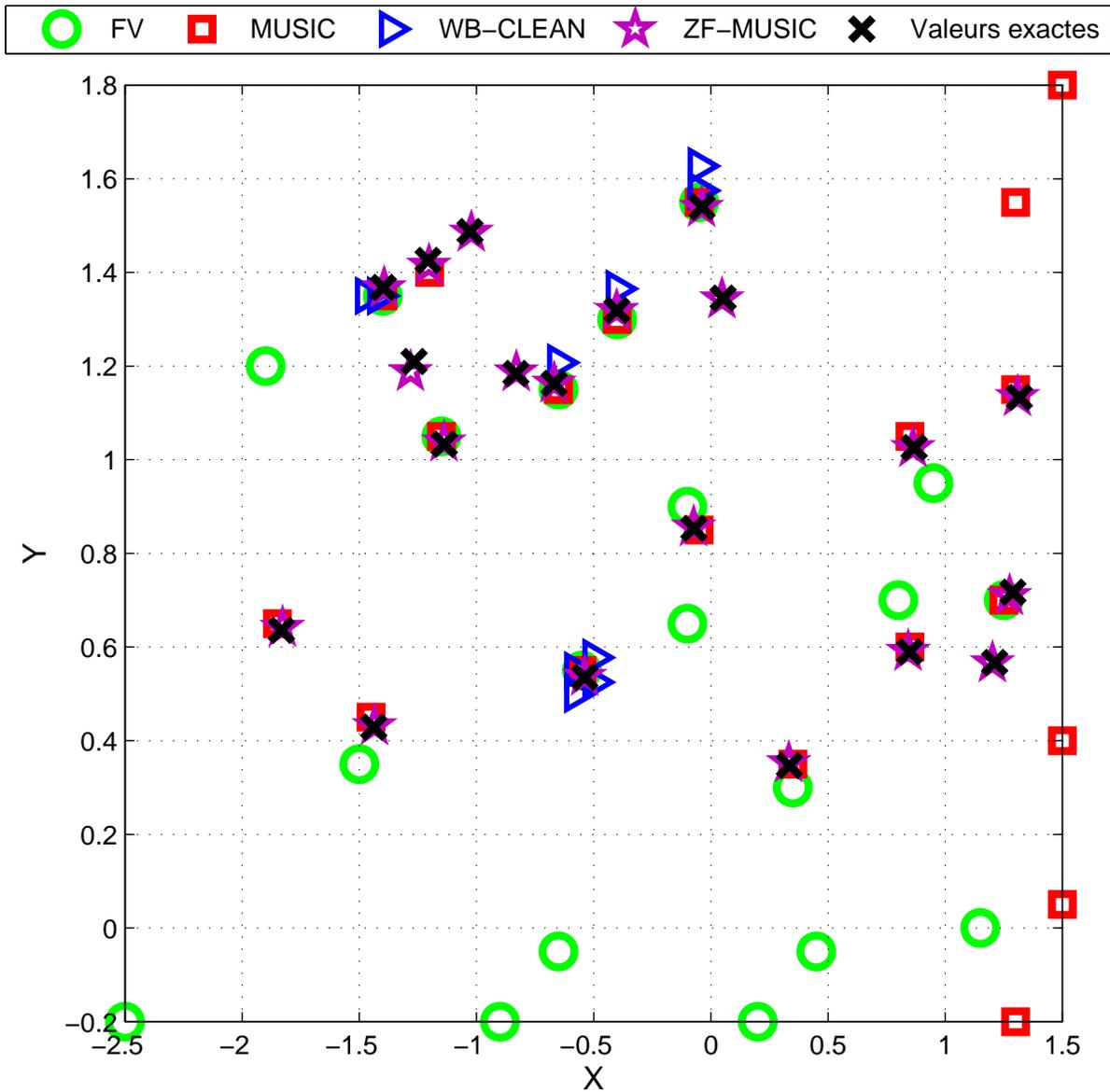


FIGURE 7.10: Comparaison des positions estimées par les méthodes FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC.

Numéro de la source	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Énergie réelle	0.25	0.7041	0.6829	0.3544	0.5902	0.6884	0.2961	0.8353	0.5458	0.4884
$D_{FV}(\hat{\mathbf{p}}_n)$	0.3735	0.7955	0.7723	0.4423	0.6328	0.7254	0.3629	0.8741	0.6051	0.5425
$D_{MC}(\hat{\mathbf{P}})$	0.2978	0.7282	0.6972	0.3872	0.6065	0.7023	0.3328	0.8512	0.5672	0.5033
Numéro de la source	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Énergie réelle	0.3608	0.1493	0.1786	0.1606	0.8245	0.1009	0.1221	0.2895	0.2045	0.2218
$D_{FV}(\hat{\mathbf{p}}_n)$	0.4310	0.3014	0.2699	0.3121	0.8686	0.3194	0.2343	0.3969	0.3367	0.3390
$D_{MC}(\hat{\mathbf{P}})$	0.3916	0.2097	0.1454	0.2439	0.8488	0.2430	0.1480	0.3224	0.2515	0.2687

TABLE 7.1: Estimation des énergies des $N = 20$ sources à l'aide des approches FV et MC.

Pour cette dernière simulation, nous avons estimé les énergies des sources en utilisant les deux approches FV et MC. Les résultats sont donnés au tableau 7.1. Les vraies valeurs des énergies sont aussi données.

Nous remarquons d'après les résultats que les valeurs correspondant à l'approche MC sont plus proches des valeurs réelles que celles correspondant à l'approche FV. Donc on peut dire que l'estimation des énergies des sources avec l'approche MC est meilleure car cette approche est plus sélective.

7.6.2 Données réelles

Dans cette partie, nous utilisons les données de soufflerie fournies par Renault. Nous rappelons que les capteurs sont omnidirectionnels. La largeur de bande des sources est de 1 à 10 kHz. La fréquence d'échantillonnage est de 25.6 kHz et la durée d'acquisition est de 20 secondes. Les données sont découpées en $I = 204$ intervalles chacun contenant $L = 101$ échantillons. Les positions des capteurs est celle de la Fig. 7.3. Nous travaillons dans le domaine 2 – 3 kHz. Nous représentons les positions estimées par les méthodes FV, MUSIC sur la Fig. 7.11 et les méthodes WB-CLEAN et ZF-MUSIC sur la Fig. 7.12 ainsi que les contours des critères utilisés. Nous représentons ensuite tous les résultats ensemble sur la Fig. 7.13.

Les cercles sur les Fig. 7.11 et 7.12 représentent les valeurs estimées. Nous remarquons d'après ces figures, que les méthodes FV et MUSIC sont capables de détecter plusieurs points bruyants, comme sur les roues, le rétroviseur, l'essuie-glace, l'antenne et les poignées des portes. Mais plusieurs points estimés ne correspondent à aucune source bruyante. D'autre part, WB-CLEAN a été lancée sur 200 itérations et pour $\rho = 0.15$. Seules les sources bruyantes sur les roues ont été repérées. Le processus est très lent par rapport aux autres méthodes. ZF-MUSIC a pu détecter la plupart des sources avec une plus grande précision, comme sur les roues et sur le rétroviseur, avec un temps de calcul faible en comparaison avec WB-CLEAN.

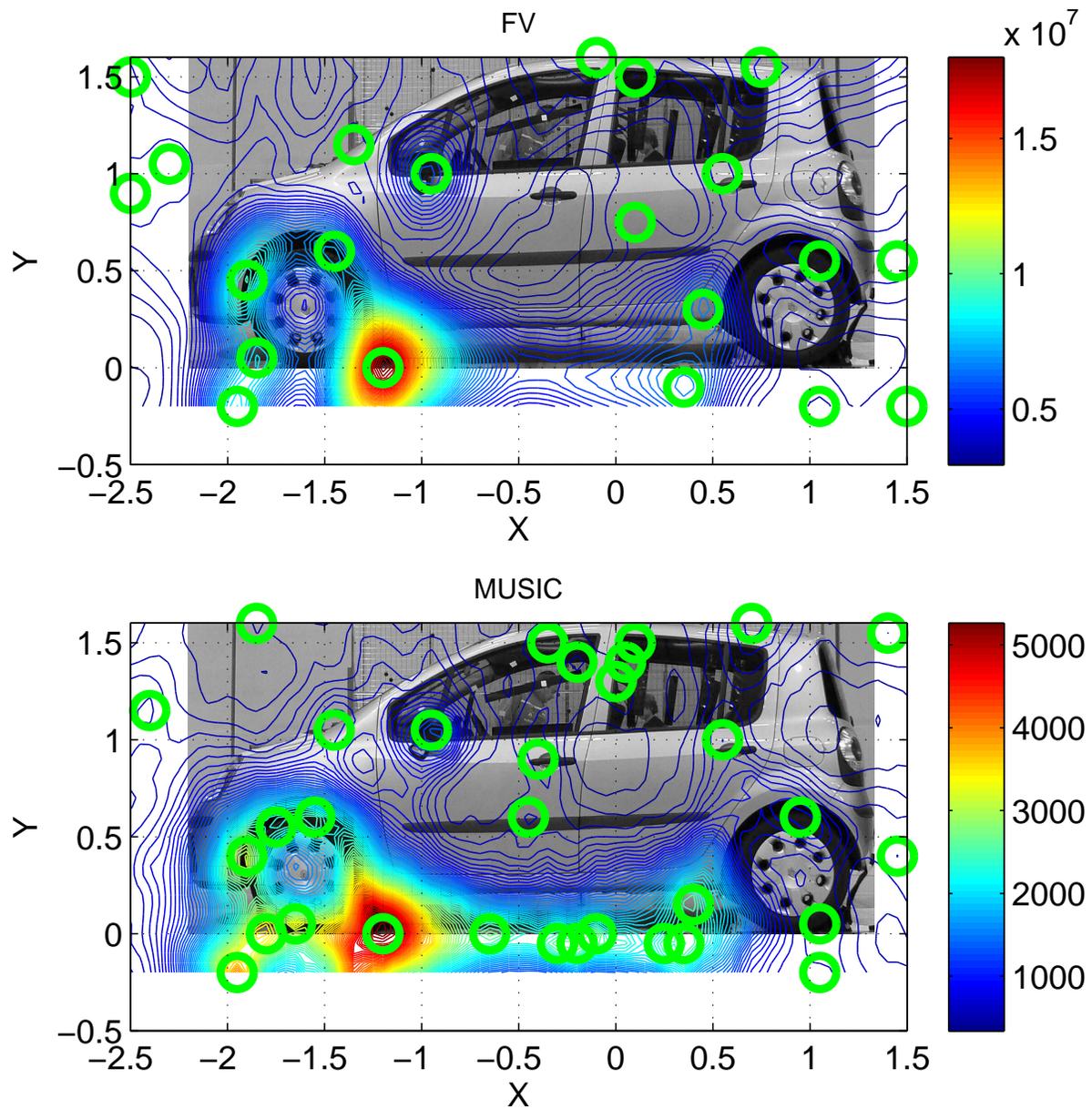


FIGURE 7.11: Estimation des positions des sources bruyantes sur la carrosserie d'une voiture, en utilisant les critères FV et MUSIC.

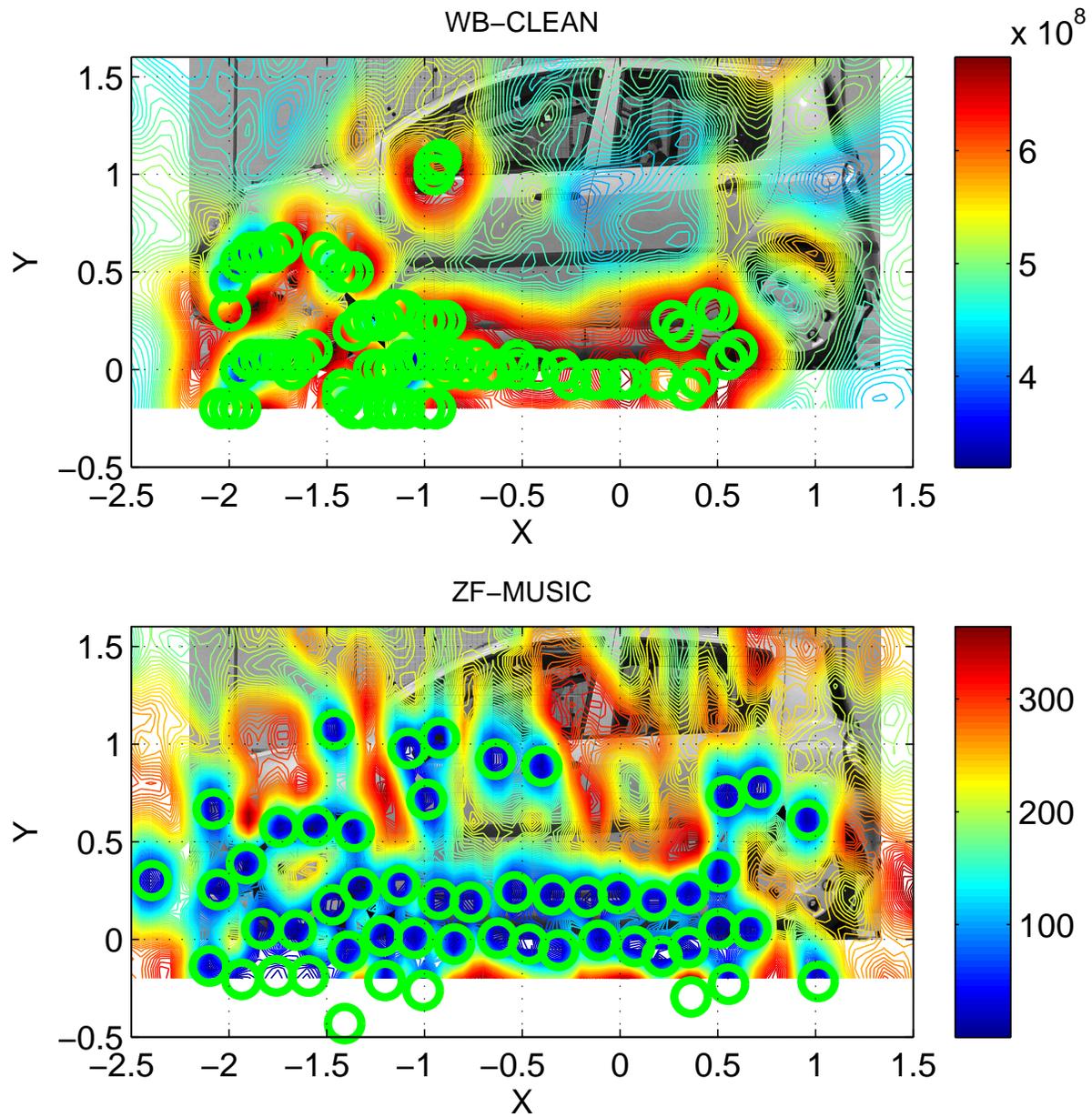


FIGURE 7.12: Estimation des positions des sources bruyantes sur la carrosserie d'une voiture, en utilisant les critères WB-CLEAN et ZF-MUSIC.

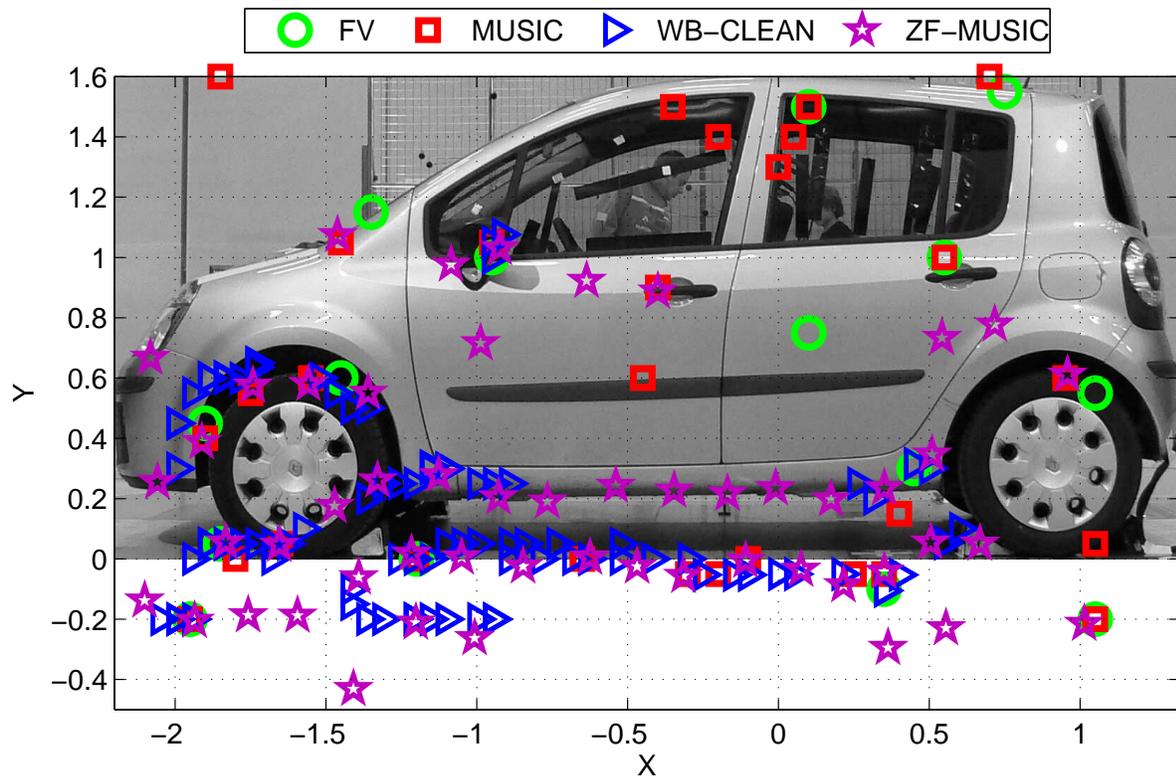


FIGURE 7.13: Comparaison des positions estimées par les méthodes FV, MUSIC, WB-CLEAN et ZF-MUSIC.

Numéro de la source	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D_{MC}(\mathbf{P})$	-18.5932	-18.5031	-18.3198	-17.9498	-17.0228	-17.0135	-16.9885	-16.7663	-16.5467	-16.5316
Numéro de la source	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$D_{MC}(\mathbf{P})$	-16.4768	-15.9521	-15.3048	-15.2275	-14.5152	-13.8385	-13.6309	-13.3227	-13.2415	-12.9876
Numéro de la source	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$D_{MC}(\mathbf{P})$	-12.8456	-12.1454	-11.8612	-11.8216	-11.4180	-11.3035	-10.8384	-10.8826	-10.6182	-9.4245
Numéro de la source	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$D_{MC}(\mathbf{P})$	-8.87	-8.2583	-8.0546	-8.0441	-7.8866	-7.8396	-7.7296	-7.5358	-6.7344	-6.5318
Numéro de la source	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
$D_{MC}(\mathbf{P})$	-6.3468	-5.8499	-5.3477	-4.6918	-4.4540	-4.1942	-3.1237	-2.8932	-2.8519	-2.0989
Numéro de la source	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$D_{MC}(\mathbf{P})$	-1.9164	-1.8282	-1.7371	-1.5084	-0.9227	-0.6530	-0.3391	-0.2202	-0.1868	0

TABLE 7.2: Estimation des énergies des sources à l'aide de l'approche MC.

De plus, nous estimons l'énergie des sources estimées en utilisant la méthode des MC après avoir appliqué ZF-MUSIC pour l'estimation des positions. Les énergies des sources sont données au tableau 7.2 en représentant les rapports de ces énergies avec l'énergie maximale et en dB. Les énergies sont représentées en ordre croissant.

Nous remarquons que la différence entre la source ayant la plus grande énergie et celle ayant la plus petite énergie est de 18 dB. En plus, nous représentons les énergies des sources bruyantes correspondantes aux positions estimées à l'aide de ZF-MUSIC sur la Fig. 7.14. Les couleurs des positions varient selon l'intensité des énergies correspondantes. Deux aspects importants peuvent

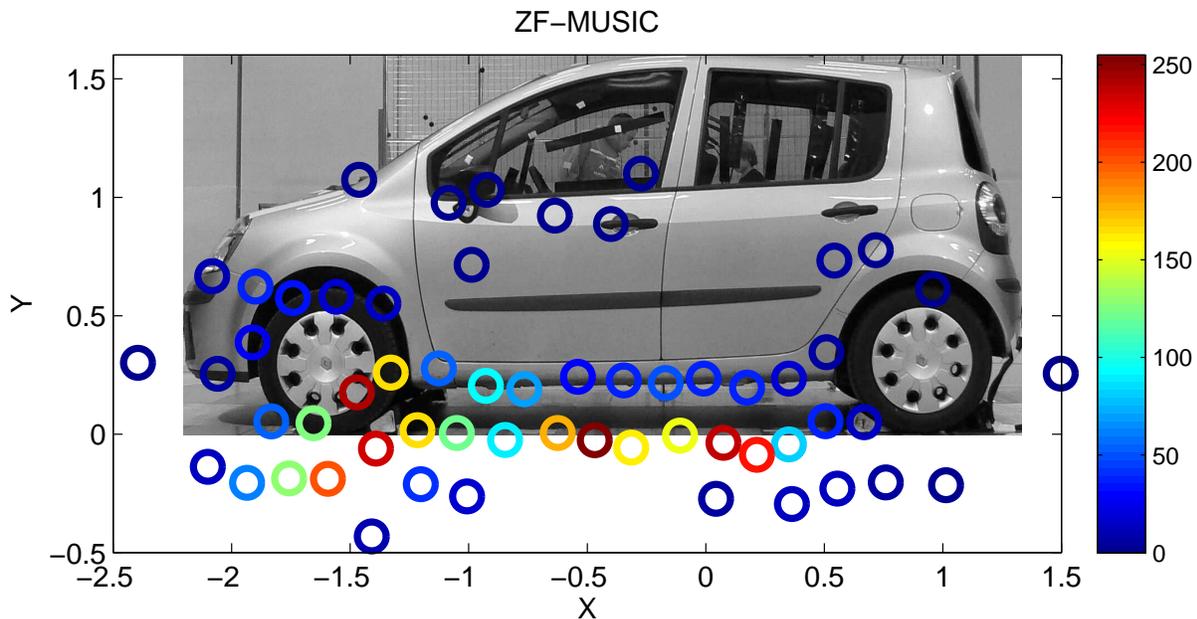


FIGURE 7.14: Positions et énergies des sources bruyantes sur la carrosserie d'une voiture, en utilisant ZF-MUSIC.

être notés dans la Fig. 7.14. Le premier est que le sol introduit des parasites, pour cela on voit des sources bruyantes sur le sol. Le second aspect est l'effet de réflexion des sources de bruit sur le sol. Cet effet devra être pris en considération en faisant l'estimation des positions des sources.

Enfin, nous estimons les positions des sources bruyantes pour d'autres données qui correspondent à une voiture sans rétroviseur. Les paramètres sont choisis de la même manière que précédemment, nous travaillons toujours dans le domaine 2 – 3 kHz. Nous estimons les positions

en utilisant ZF-MUSIC seulement. Nous représentons ces positions estimées sur la Fig. 7.15 ainsi que les contours du critère. Nous remarquons ici l'absence des points bruyants autour du

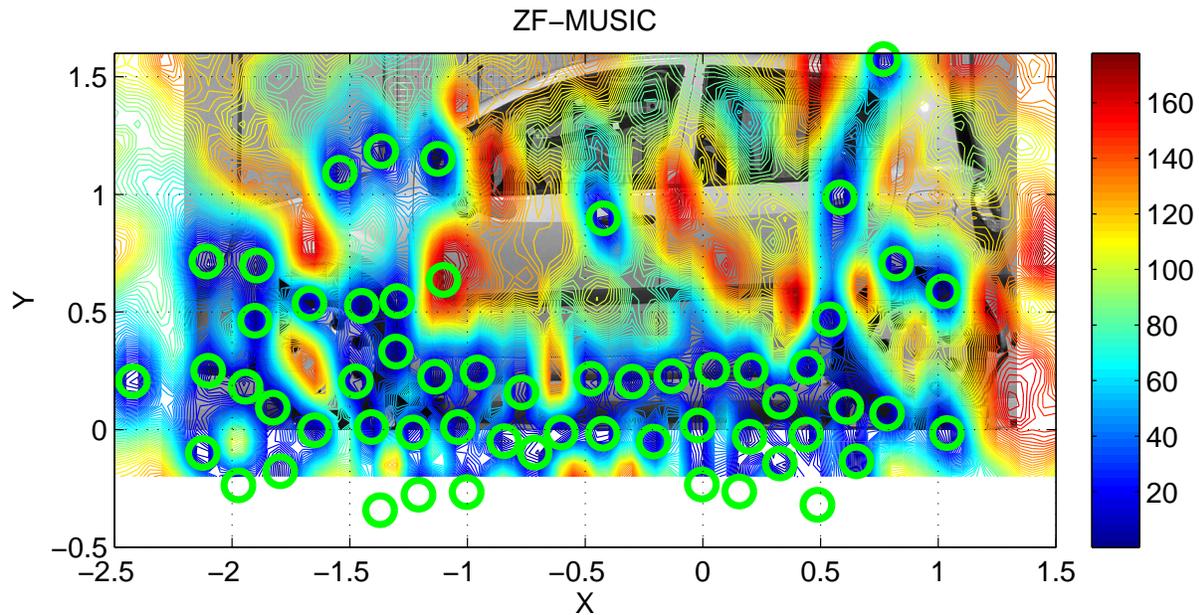


FIGURE 7.15: Estimation des positions des sources bruyantes sur la carrosserie d'une voiture, en utilisant le critère ZF-MUSIC.

rétroviseur, en comparaison avec la Fig. 7.12.

7.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une application au traitement d'antennes a été considérée. C'est la localisation de sources aéroacoustiques sur la carrosserie d'une voiture. Les hypothèses de travail sont différentes de celles utilisées dans les travaux théoriques des chapitres précédents : champ proche, signaux à large bande et antenne non linéaire. Nous avons proposé d'appliquer ZF-MUSIC dans ce cas. Cette méthode est capable de distinguer deux sources proches ayant des puissances différentes et elle est plus précise que d'autres méthodes. Nous l'avons testée sur des données réelles de soufflerie fournies par Renault. Elle est capable de détecter les principales sources bruyantes de la voiture avec un temps de calcul relativement faible.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'estimation des DDA dans le cas des ALNU. Les différents points étudiés sont :

- Les différentes géométries des ALNU,
- Root-MUSIC appliquée directement aux ALNU lacunaires,
- les avantages de l'ALNU par rapport à l'ALU,
- une nouvelle méthode proposée EM-ESPRIT qui s'applique à n'importe quel type de géométrie d'ALNU,
- deux variantes : EM-ESPRIT stochastique et EM-Root-MUSIC pour améliorer les performances de convergence et de consistance de EM-ESPRIT.

Les méthodes proposées utilisent les méthodes à HR qui présentent de bonnes performances à un coût calculatoire relativement faible.

Dans la première partie de cette thèse (chapitres 1 et 2), la problématique étudiée a été présentée, ainsi que le modèle du signal, les différentes géométries de l'ALNU, les hypothèses de travail et les différentes méthodes proposées dans la littérature pour des problématiques de même type.

Dans le chapitre 3, il a été démontré que la méthode à HR Root-MUSIC, initialement proposée pour les ALU, peut être directement appliquée aux ALNU lacunaires. Le principal intérêt de cette méthode est qu'elle ne nécessite aucune interpolation ou n'importe quel autre pré-traitement des données contrairement aux autres méthodes. Root-MUSIC estime les DDA en recherchant les racines d'un polynôme qui représente le critère de Spectral MUSIC. Donc son coût calculatoire est faible. Les principales conclusions de cette étude sont :

- Root-MUSIC, directement appliquée aux ALNU lacunaires, peut être considérée comme l'une des méthodes d'estimation les plus simples.
 - L'expression générale de la variance de l'estimateur et l'expression dans le cas d'une source et d'une observation ont été explicitées. La variance de l'estimateur peut être exprimée en fonction de l'écart-type des positions des capteurs de l'ALNU.
 - Les résultats numériques illustrent certaines propriétés intéressantes de Root-MUSIC :
 - l'efficacité asymptotique;
-

- la faible sensibilité aux lobes secondaires.

Ensuite, une comparaison des performances des ALNU par rapport aux ALU est effectuée au chapitre 4 en utilisant Root-MUSIC comme méthode d'estimation des DDA. Tout d'abord, l'expression générale de la BCR est établie, ensuite elle est déduite pour l'ALNU et l'ALU dans le cas d'une source et d'une observation. Les performances des deux antennes ont été comparées en utilisant les expressions des BCR. La géométrie utilisée pour l'ALNU est une structure centrosymétrique à centre creux. Voici les principales conclusions de cette étude :

- L'ALNU ayant le même nombre de capteurs qu'une ALU mais avec une plus grande ouverture, présente une BCR inférieure à celle de l'ALU. Donc les performances sont améliorées pour l'ALNU.
- Les performances d'une ALNU sont presque identiques à celles d'une ALU ayant la même ouverture. En enlevant quelques capteurs du réseau, l'ALNU maintient l'ouverture et donne des performances similaires à l'ALU de même ouverture. Ainsi l'utilisation d'une ALNU est avantageuse vis à vis du coût de production.
- Les résultats numériques montrent qu'en enlevant la moitié des capteurs, les performances de l'ALNU restent proches de l'ALU.
- Les résultats numériques montrent que Root-MUSIC dans le cas de l'ALNU permet d'obtenir une résolution angulaire similaire à l'ALU ayant la même ouverture.
- Les résultats numériques montrent que même en enlevant un grand nombre de capteurs pour l'ALNU, l'effet des lobes secondaires en utilisant Root-MUSIC est négligeable en le comparant aux résultats de l'algorithme de FV.

Comme Root-MUSIC ne peut être appliquée que pour les ALNU lacunaires, une nouvelle méthode est proposée au chapitre 5 : EM-ESPRIT. Cette méthode peut être utilisée pour les ALNU lacunaires et les ALNU à géométrie arbitraire. L'algorithme EM interpole les données de l'ALNU sur une AVLU suivant le modèle du signal, ensuite ESPRIT est appliquée pour estimer les DDA. Cette méthode est itérative. La construction de l'AVLU diffère entre les géométries lacunaires et les géométries arbitraires, mais le principe reste le même. Sur la base des résultats numériques, les principales conclusions sont :

- EM-ESPRIT présente de bonnes performances en fonction du RSB. Pour les faibles valeurs du RSB, les performances sont meilleures que d'autres méthodes et asymptotiquement elle est efficace.
 - EM-ESPRIT ne présente pas de dysfonctionnement pour des cas particuliers de géométrie.
 - EM-ESPRIT a une meilleure résolution que Spectral MUSIC.
 - La convergence de EM-ESPRIT est rapide, elle est de l'ordre de 10 itérations pour un RSB de -10 dB et de 5 pour un RSB de 0 dB.
 - EM-ESPRIT est sensible aux valeurs initiales. Cependant, la précision requise pour l'initialisation est compatible avec celle de la méthode FV utilisée pour le calcul de la valeur initiale.
 - Pour la construction de l'AVLU dans le cas des ALNU à géométrie arbitraire, le mieux est de prendre un nombre de capteurs égal à celui de l'ALNU.
-

Dans le chapitre 6, deux variantes sont proposées pour améliorer certains aspects de EM-ESPRIT dans le cas des ALNU lacunaires. La première variante, EM-ESPRIT stochastique, consiste à ajouter une perturbation à l'estimation des amplitudes des sources. Cette perturbation est basée sur la variance du bruit d'estimation des amplitudes. Ceci permet de remplacer l'estimation des données manquantes par un ensemble de réalisations de ces données distribuées selon la loi de probabilité connue des données manquantes. Cette méthode améliore la convergence de la méthode. La deuxième variante, EM-Root-MUSIC, permet de prendre en compte l'erreur introduite par l'interpolation des capteurs manquants. En effet, l'interpolation colore le bruit. Donc un blanchiment de ce bruit est effectué et ensuite Root-MUSIC est appliquée au lieu d'ESPRIT. Cette méthode présente de meilleures performances en fonction du RSB, elle permet à l'EQM de s'approcher davantage de la BCR et améliore aussi la convergence.

Dans le chapitre 7, nous avons considéré une application pour le traitement d'antennes qui est la localisation des sources aéroacoustiques des voitures. Nous avons proposé la méthode ZF-MUSIC qui est une version améliorée de Spectral MUSIC. Nous avons comparé ses performances à celle des méthodes FV, Spectral MUSIC et WB-CLEAN. Pour les données simulées, ZF-MUSIC est meilleure que les autres, elle est plus précise et elle est capable de distinguer deux sources proches ayant des puissances différentes. De même, nous testons ZF-MUSIC dans le cas des données réelles, qui sont les données obtenues de soufflerie fournies par Renault. Nous la comparons aussi aux autres méthodes. ZF-MUSIC est plus précise que les autres méthodes et elle est capable de détecter un nombre de sources bruyantes plus important avec un temps de calcul relativement faible par rapport à WB-CLEAN.

Perspectives

Les travaux effectués dans le cadre de cette thèse offrent de nombreuses perspectives. Nous en résumons ici quelques unes.

- Nous avons calculé à la section 4.2.3 l'expression de la BCR pour une source. Il serait intéressant de pouvoir l'exprimer pour deux sources afin de pouvoir écrire sous forme analytique le gain apporté par l'utilisation des antennes lacunaires comme cela a été fait dans le cas d'une source au chapitre 4.
 - Nous avons vu que EM-ESPRIT pouvait être appliquée à n'importe quelle géométrie d'ALNU. Par ailleurs, ESPRIT est une méthode particulièrement intéressante et performante pour les réseaux planaires, il pourrait donc être intéressant d'étendre cette méthode aux réseaux planaires, ainsi elle pourra être utilisée pour estimer l'azimut et l'élévation.
 - Une étude approfondie de la convergence de la méthode proposée EM-ESPRIT doit être menée dans des travaux ultérieurs.
 - Le bruit coloré calculé dans (6.8) est blanchi avant l'application de Root-MUSIC. Il serait intéressant de pouvoir appliquer ESPRIT avec le blanchiment à l'aide d'une matrice de pondération.
 - EM-Root-MUSIC devrait être élargie pour l'appliquer aux ALNU à géométrie arbitraire et ceci pour améliorer les performances de EM-ESPRIT pour ce cas d'antennes.
 - On a vu dans différents chapitres que les méthodes proposées peuvent être appliquées dans le cas de deux sources partiellement corrélées. On pourra envisager d'approfondir cette étude.
-

- Nous avons proposé d'appliquer ZF-MUSIC pour estimer les positions des sources bruyantes dans les voitures. L'étude pourrait être poursuivie notamment en exploitant différemment l'aspect large bande.
-

Bibliographie

- [1] Y. I. Abramovich, D. A. Gray, A. Y. Gorokhov, and N. K. Spencer. Positive-definite Toeplitz completion in DOA estimation for fully-augmentable nonuniform linear antenna arrays. In *8th IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, 1996.
 - [2] Y. I. Abramovich, D. A. Gray, A. Y. Gorokhov, and N. K. Spencer. Positive-definite Toeplitz completion in DOA estimation for nonuniform linear antenna arrays-part I : fully augmentable arrays. *IEEE Trans. Signal Processing*, 46, no. 9 :2458–2471, September 1998.
 - [3] Y. I. Abramovich, N. K. Spencer, and A. Y. Gorokhov. Positive-definite Toeplitz completion in DOA estimation for nonuniform linear antenna arrays-part II : Partially augmentable arrays. *IEEE Trans. Signal Processing*, 47, no. 6 :1502–1521, June 1999.
 - [4] S. Anderson, S. Millnert, M. Viberg, and B. Wahlberg. An adaptive array for mobile communication systems. *IEEE Trans. on Veh. Tec.*, 40, 1991.
 - [5] A. J. Barabell. Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithm. *Proc. on IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Boston, M.A.*, pages 336–339, 1983.
 - [6] F. Belloni, A. Richter, and V. Koivunen. DoA estimation via manifold separation for arbitrary array structures. *IEEE Trans. Signal Processing*, 55, no. 10 :4800–4810, October 2007.
 - [7] M. BÅ¼hren, M. Pesavento, and J. F. BÅ¼hme. A new approach to array interpolation by generation of artificial shift invariances : Interpolated ESPRIT. *ICASSP*, 5 :V–205–208, 2003.
 - [8] G. Bienvenu and L. Kopp. Optimality of high-resolution array processing using the eigen-system approach. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 31, no. 5 :1235–1248, October 1983.
 - [9] G. Bouleux and R. Boyer. Zero-Forcing based sequential MUSIC algorithm. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Honolulu, HI*, April 2007.
 - [10] Y. Bresler and A. Macovski. Exact maximum likelihood parameter estimation of superimposed exponential signals in noise. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 34, no. 5 :1081–1089, October 1986.
 - [11] J. Capon. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proc. IEEE*, 57 :1408–1418, August 1969.
-

-
- [12] G. C. Carter. Coherence and time delay estimation. *Proceedings of the IEEE*, 75, Issue : 2 :236–255, Feb. 1987.
- [13] Y. H. Chen and Y. S. Lin. Direction finding with nonuniform arrays via higher-order statistics. *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, 3 :1576–1579, 1994.
- [14] P. J. Chung and J. F. Böhme. DOA estimation using fast EM and SAGE algorithms. *Signal Processing*, 82 :1753–1762, November 2002.
- [15] M. Costa, V. Koivunen, and A. Richter. Low complexity azimuth and elevation estimation for arbitrary array configurations. *ICASSP International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, April 2009.
- [16] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Royal Statistical Society, series B*, 39 :1–38, 1977.
- [17] A. Dollas, W. T. Rankin, and D. McCracken. A new algorithm for golomb ruler derivation and proof of the 19 mark ruler. *IEEE Trans. on Information Theory*, 44 :379–382, Jan. 1998.
- [18] R. P. Dougherty and R. W. Stoker. Sidelobe suppression for phased array aeroacoustic measurements. *4th Aeroacoustics Conference, AIAA/CEAS (19th AIAA Aeroacoustics Conference), Toulouse, France*, pages 235–245, June 1998.
- [19] C. El Kassis, J. Picheral, and C. Mokbel. EM-ESPRIT algorithm for direction finding with nonuniform arrays. *IEEE Statistical Signal Processing Workshop 2007*, pages 453–457, August 2007.
- [20] C. El Kassis, J. Picheral, and C. Mokbel. Advantages of nonuniform arrays using root-MUSIC. *Signal Processing*, 90, Issue 2 :689–695, February 2010.
- [21] M. N. El Korso, G. Bouleux, R. Boyer, and S. Marcos. Sequential estimation of the range and the bearing using the zero-forcing MUSIC approach. *Proc. of the 17th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, August 2009.
- [22] A. Eriksson, P. Stoica, and T. Soderstrom. Asymptotical analysis of MUSIC and ESPRIT frequency estimates. *ICASSP International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 4 :556–559, April 1993.
- [23] A. Farina. *Antenna-based signal processing techniques for radar systems*. Artech House, Norwood, MA, 1992.
- [24] M. Feder and E. Weinstein. Parameter estimation of superimposed signals using the EM algorithm. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 36, no. 4 :477–489, April 1988.
- [25] A. J. Fenn and G. A. King. Adaptive nulling in the hyperthermia treatment of cancer. *The Lincoln Laboratory Journal*, 5 (2) :223–240, 1992.
- [26] A. J. Fenn and G. A. King. Adaptive radio-frequency hyperthermia-phased array system for improved cancer therapy : phantom target measurements. *International Journal of Hyperthermia*, 10 (2) :189–208, March-April 1994.
-

-
- [27] B. Friedlander. The root-MUSIC algorithm for direction finding with interpolated arrays. *Signal Process.*, 30, no. 1 :15–29, January 1993.
- [28] B. Friedlander and A. J. Weiss. Direction finding using spatial smoothing with interpolated arrays. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 28 :574–587, April 1992.
- [29] B. Friedlander and A. J. Weiss. Performance analysis of wideband direction finding using interpolated arrays. *Proc. IEEE ICASSP'92*, 4 :457–460, April 1992.
- [30] B. Friedlander and A. J. Weiss. Direction finding for wide-band signals using an interpolated arrays. *IEEE Trans. Signal Processing*, 41 :1618–1634, April 1993.
- [31] M. Gavish and A. J. Weiss. Performance analysis of the VIA-ESPRIT algorithm. *IEEE proc. Radar and Signal Processing*, 140 :123–128, April 1993.
- [32] A. B. Gershman. Direction finding using beamspace root estimator banks. *IEEE Trans. Signal Processing*, 46 :3131–3135, November 1998.
- [33] A. B. Gershman and J. F. Böhme. A note on most favorable array geometries for DOA estimation and array interpolation. *IEEE Signal Processing Lett.*, 4, no. 8 :232–235, August 1997.
- [34] A. B. Gershman and M. Haardt. Improving the performance of Unitary ESPRIT via pseudo-noise resampling. *IEEE Trans. Signal Processing*, 47, no. 8 :2305–2308, August 1999.
- [35] R. A. Granmann and J. Mocio. Aero-acoustic measurements in wind tunnels using conventional and adaptive beamforming methods. *15th Aeroacoustics Conference, AIAA, Long Beach, USA*, October 1993.
- [36] E. Grosicki, K. Abed-Meraim, and Y. Hua. A weighted linear prediction method for near-field source localization. *IEEE Trans. Signal Processing*, 53, no. 10 :3651–3660, October 2005.
- [37] M. Haardt. *Efficient one-, two-, and multidimensional high-resolution array signal processing*. PhD thesis, Munich University of Technology, 1996.
- [38] M. Haardt, R.N. Challa, and S. Shamsunder. Improved bearing and range estimation via high-order subspace based unitary ESPRIT. *Conference Record of the Thirtieth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 1 :380–384, 1996.
- [39] M. Haardt and J. A. Nossék. Unitary ESPRIT : how to obtain increased estimation accuracy with a reduced computational burden. *IEEE Trans. Signal Processing*, 43, no. 5 :1232–1242, May 1995.
- [40] S. Haykin. *Array signal processing*, chapter Radar Array Processing for angle of arrival estimation. Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, NJ, 1985.
- [41] S. Holm, A. Austeng, K. Iranpour, and J.-F. Hopperstad. *Nonuniform sampling Theory and Practice*, chapter Sparse sampling in array processing, pages 787–834. Springer, 2001.
- [42] W.M. Humphreys, T.F. Brooks, W.W. Hunter, and K.R. Meadows. Design and use of microphone directional arrays for aeroacoustic measurements. *AIAA Paper 98-0471, 36st Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Reno NV*, January 1998.
-

-
- [43] H. Krim and M. Viberg. Two decades of array signal processing research : the parametric approach. *IEEE Signal Processing Magazine*, 13, no. 4 :67–94, July 1996.
- [44] R. Kumaresan, L. L. Scharf, and A. K. Shaw. Superresolution by structured matrix approximation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 36, no. 1 :34–44, January 1988.
- [45] R. Kumaresan, L. L. Scharf, and A. K. Shaw. An algorithm for pole-zero modeling and spectral analysis. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 34, no. 3 :637–640, June 1986.
- [46] R. T. Lacoss. Data adaptive spectral analysis methods. *Geophysics*, 36 :661, 1971.
- [47] W. S. Liggett. Passive sonar : Fitting models to multiple time series. *Academic Press, New York, J. W. R. Griffiths, P. L. Stocklin, and C. Van Schooneveld edition*, Signal Processing :327–345, 1973.
- [48] D.A. Linebarger, I. H. Sudborough, and I.G. Tollis. Difference bases and sparse sensor arrays. *IEEE. Trans. on Information Theory*, 39, no. 2 :716–721, March 1993.
- [49] N. R. Lomb. Least-squares frequency analysis of unevenly spaced data. *Astrophysical and Space Science*, 39 :447–462, 1976.
- [50] S. Marcos. *Les méthodes à haute résolution*. Hermes, 1998.
- [51] Y. Meurisse and J. P. Delmas. Bounds for sparse planar and volume array. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47, no. 1 :464–468, January 2001.
- [52] M. I. Miller and D. R. Fuhrmann. Maximum-likelihood narrow-band direction finding and the EM algorithm. *IEEE Trans. Acoust., speech, signal process.*, ASSP-38 :1560–1577, September 1990.
- [53] T. K. Moon. The expectation-maximization algorithm. *IEEE Signal Processing Mag.*, 13 :47–60, November 1996.
- [54] V. Nagesha and S. Kay. On frequency estimation with the IQML algorithm. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42, no. 9 :2509–2513, September 1984.
- [55] P. S. Naidu. *Sensor Array Signal Processing*. CRC Press, 2000.
- [56] T. Nakazawa, H. Yamada, and Y. Yamaguchi. EM-MODE in high-resolution DOA estimation for nonuniform array. *Electronics and Communications in Japan, Part 1*, 85 :47–56, 2002.
- [57] B. Ottersten, M. Viberg, and T. Kailath. Performance analysis of the total least squares ESPRIT algorithm. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 39, no. 5 :1122–1135, May 1991.
- [58] N. H. Owsley. *Sonar array processing*, chapter 3, pages 115–184. Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, NJ, 1985.
- [59] S.U. Pillai, Y. Bar-Ness, and F. Haber. A new approach to array geometry for improved spatial spectrum estimation. *Proceedings of the IEEE*, 73, no. 5 :1522–1524, October 1985.
- [60] V. F. Pisarenko. The retrieval of harmonics from a covariance function. *Geophysics J. Roy. Astron. Soc.*, 33 :347–366, 1973.
-

-
- [61] B. D. Rao and K. V. S. Hari. Performance analysis of root-MUSIC. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 37, no. 12 :1939–1949, December 1989.
- [62] M. Rubsamen and A. B. Gershman. Root-MUSIC direction-of-arrival estimation methods for arbitrary non-uniform arrays. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Issue , March 31 2008–April 4 2008 :2317 – 2320, 2008.
- [63] R. Roy and T. Kailath. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37 :984–995, 1989.
- [64] R. O. Schmidt. *A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation*. PhD thesis, Dept. Elect. Eng., Stanford Univ., Stanford, CA, 1981.
- [65] A. K. Shaw. *Structured matrix approximation problems in signal processing*. PhD thesis, University of Rhode Island, Kingston, 1987.
- [66] P. Stoica and R. Moses. *Introduction to spectral analysis*. Prentice Hall, 1997.
- [67] P. Stoica and A. Nehorai. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 37, no. 5 :720–741, May 1989.
- [68] P. Stoica and T. Soderstrom. Statistical analysis of MUSIC and ESPRIT estimates of sinusoidal frequencies. *ICASSP International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 5 :3273–3276, April 1991.
- [69] M. Stojanovic and Z. Zvonar. Adaptive spatial/ temporal multiuser receivers for time-varying channels with severe ISI. *Proc. of Conf. on signals and systems, Princeton*, March 1994.
- [70] A. Swindlehurst, B. Otterstein, and T. Kailath. An analysis of MUSIC and root-MUSIC in the presence of sensor perturbations. *Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 2 :930–934, 1989.
- [71] T. Thong, J. McNames, and Aboym M. Lomb-Wech periodogram for non-uniform sampling. *Proceedings of the 26th Annual International Conference of the IEEE EMBS, San Francisco, CA, USA*, pages 271–274, September 2004.
- [72] H.L. Van Trees. *Optimum array processing, part IV of detection, estimation and modulation theory*. Wiley, 2002.
- [73] M. Vanderveen, A.-J. Van Der Veen, and A. Paulraj. Estimation of multipath parameters in wireless communications. *IEEE Trans. Signal Processing*, 46, no. 3 :682–690, March 1998.
- [74] W. Wang, P. Stoica, J. Li, and T. Marzetta. Nonparametric spectral analysis with missing data via the EM algorithm. *Digital signal processing*, 15, no. 2 :191–206, March 1995.
- [75] Y. Wang, J. Li, P. Stoica, M. Sheplak, and T. Nishida. Wideband RELAX and wideband CLEAN for aeroacoustic imaging. *Journal Acoustical Society of America*, 115, Issue 2 :757–767, February 2004.
- [76] A. J. Weiss and B. Friedlander. Performance analysis of spatial smoothing with interpolated array. *IEEE Trans. Signal Processing*, 41 :1881–1892, May 1993.
-

- [77] A. J. Weiss, B. Friedlander, and P. Stoica. Direction-of-arrival estimation using MODE with interpolated arrays. *IEEE Trans. Signal Processing*, 43 :296–300, January 1995.
 - [78] A. J. Weiss, B. Friedlander, and P. Stoica. Direction finding with interpolated MODE. *Proc. IEEE Asilomar Conf. Signals, Syst., Comput.*, 2 :1376–1380, November 1993.
 - [79] A. J. Weiss and M. Gavish. Direction finding using ESPRIT with interpolated arrays. *IEEE Trans. Signal Processing*, 39, no. 6 :1473–1478, June 1991.
 - [80] A. J. Weiss, A. S. Willsky, and B. C. Levy. Nonuniform array processing via the polynomial approach. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 25, no. 1 :48–55, January 1989.
-