

Thèse

présentée par

Jérôme PLÛT

pour obtenir le grade de docteur en Sciences
de l'université de Paris-XI (Orsay)

Espaces de Banach analytiques p -adiques et espaces de Banach-Colmez

Soutenue le 29 septembre 2009 devant le jury composé de

Pierre COLMEZ (École Polytechnique),	rapporteur
Philippe ELBAZ-VINCENT (Grenoble I)	
Laurent FARGUES (Paris XI)	
J.-M. FONTAINE (Paris XI),	directeur de thèse
Emmanuel ULLMO (Paris XI)	
Jean-Pierre WINTENBERGER (Strasbourg),	rapporteur

Numéro d'ordre : 9524

Table des matières

Remerciements.....	5
Introduction.....	6

I. ESPACES DE BANACH SPECTRAUX EFFECTIFS

1. Variétés spectrales affines.....	12
1.1. Espaces de Banach.....	12
1.2. Algèbres de Banach.....	15
1.3. Algèbres pro-spectrales et variétés spectrales affines.....	15
1.4. Variétés spectrales étales.....	20
1.5. Disques de C	22
1.6. Propriétés des algèbres spectrales.....	23
2. Algèbres affinoïdes.....	28
2.1. Propriétés.....	28
2.2. Formes différentielles.....	29
2.3. Théorèmes d'inversion locale et globale.....	30
2.4. Complétude.....	33
3. Groupes spectraux affines.....	34
3.1. Groupes spectraux.....	34
3.2. Groupes spectraux étales.....	34
3.3. Groupes spectraux vectoriels.....	35
3.4. Groupes spectraux rigides et prorigides.....	36
3.5. Espaces de Banach spectraux effectifs.....	39

II. ESPACES DE BANACH-COLMEZ EFFECTIFS

4. Structures analytiques dans B_{cris}^+	42
4.1. Un lemme de calcul de valuation.....	42
4.2. Structures analytiques dans R	42
4.3. Vecteurs et covecteurs de Witt.....	44
4.4. Sous-espaces de pentes de B_{cris}^+	49
4.5. L'espace de Banach spectral d'un isocrystal de Dieudonné.....	51
5. Espaces de Banach-Colmez effectifs.....	53
5.1. Construction de groupes spectraux à partir de groupes p -divisibles.....	53
5.2. Structure analytique explicite des espaces de Banach-Colmez élémentaires.....	56
5.3. Espaces de Banach-Colmez effectifs.....	61
5.4. Enveloppe vectorielle.....	63
5.5. L'extension universelle de C par \mathbb{Q}_p	64
6. Lemme fondamental sur les espaces de Banach-Colmez effectifs de dimension un.....	69
6.1. Lemme fondamental pour $E_{1/h}$	69
6.2. Structure des espaces de Banach-Colmez de dimension un.....	71

III. PROPRIÉTÉS DES ESPACES DE BANACH-COLMEZ

7. Espaces de Banach spectraux.....	79
7.1. Localisation des espaces de Banach spectraux effectifs.....	79
7.2. Structures analytiques non effectives.....	80
7.3. Espaces de Banach spectraux connexes et étales.....	82
8. Espaces de Banach-Colmez.....	84
8.1. Construction.....	84
8.2. Espaces de Banach spectraux et Espaces de Banach.....	85
8.3. Lemme fondamental pour les espaces de Banach-Colmez.....	87
8.4. Structure abélienne.....	88
9. Homomorphismes et extensions.....	91
9.1. Structure analytique sur les B_{dR}^+ -modules de longueur finie.....	91
9.2. L'extension universelle de \tilde{B} par \mathbb{Q}_p	95
9.3. Constructibilité.....	101
9.4. Morphismes entre espaces de Banach-Colmez élémentaires.....	104
10. Filtration de Harder-Narasimhan.....	106
10.1. Catégories de Harder-Narasimhan.....	106
10.2. Catégories d'applications linéaires.....	109
10.3. Espaces de Banach-Colmez à pentes finies.....	112
10.4. Objets stables.....	113
Références.....	116

Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Jean-Marc Fontaine pour son aide scientifique qui m'a été précieuse. Je remercie également toute l'équipe du laboratoire de mathématiques d'Orsay, ainsi que de l'école doctorale de mathématiques, plus particulièrement son directeur Pierre Pansu pour sa patience, ainsi que sa secrétaire Valérie Blandin-Lavigne pour son efficacité.

Mes remerciements vont également à Pierre Colmez et Jean-Pierre Wintenberger qui ont accepté d'être mes rapporteurs, ainsi qu'aux autres membres du jury Philippe Elbaz-Vincent, Laurent Fargues et Emmanuel Ullmo.

Enfin, merci à ma famille, à ma compagne Marie, ainsi qu'à Rachel, Angela, Anne-Laure, Boris, Claire, Clarisse, Clément, David, Emmanuel, F.-X., François, Gaëtan, Irène, Joël, Luca, Lucas, et Quentin.

Introduction

Soit C un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, complet pour une valeur absolue ultramétrique $|\cdot|$ et dont le corps résiduel est de caractéristique $p > 0$. On note \mathcal{O}_C l'anneau de valuation de C .

Pour toute C -algèbre topologique A , on note $\text{Spm } A$ l'espace topologique des morphismes continus de C -algèbres de A vers C , muni de la topologie de la convergence simple. Une partie Ω de $\text{Spm}_C A$ est dite *bornée* s'il existe un ouvert non vide U de A tel que l'ensemble des $|s(a)|$ pour $s \in \Omega$ et $a \in U$ soit borné. Pour toute partie bornée Ω de $\text{Spm } A$, l'application $\|\cdot\|_\Omega$ définie par $\|a\|_\Omega = \sup \{|s(a)|, s \in \Omega\}$ est une semi-norme sur A . On dit que A est *pro-spectrale* si l'application naturelle de A dans sa séparée complétée pour la famille des semi-normes $\|\cdot\|_\Omega$ est un homéomorphisme.

La catégorie des *variétés spectrales* sur C est la catégorie opposée à celle des C -algèbres spectrales. Il est commode de voir une variété spectrale comme un espace topologique S muni d'une *structure spectrale*, celle-ci consistant en la donnée d'une algèbre pro-spectrale A et d'un homéomorphisme de $\text{Spm } A$ sur S . On appelle alors A l'*algèbre des fonctions analytiques* sur la variété spectrale S ; les *fonctions analytiques* entre deux variétés spectrales $S = \text{Spm } A$ et $T = \text{Spm } B$ sont les morphismes de variétés spectrales, c'est-à-dire les morphismes continus de C -algèbres de B vers A . Par exemple, C est une variété spectrale et son algèbre de fonctions analytiques est l'algèbre des séries formelles de rayon de convergence infini (on voit ainsi que les fonctions analytiques sur une variété spectrale S sont bien les fonctions analytiques de S vers la variété spectrale C).

Un *espace de Banach spectral effectif* sur C est un objet en espaces de Banach p -adiques dans la catégorie des variétés spectrales sur C . Par exemple :

- tout \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie V a une structure naturelle d'espace de Banach spectral effectif, l'algèbre spectrale étant l'algèbre des fonctions continues sur V ;
- tout C -espace vectoriel de dimension finie W a une structure naturelle d'espace de Banach spectral effectif : pour tout sous- \mathcal{O}_C -module libre \mathcal{W} de W contenant une base de W , l'algèbre des fonctions analytiques sur W est la complétée de $\text{Sym}_C W^*$ pour la famille de semi-normes $\|a\|_n = \sup \{|a(x)|, x \in p^{-n}\mathcal{W}\}$;
- soit \mathfrak{m}_C l'idéal maximal de C et U l'ensemble des suites $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $1 + \mathfrak{m}_C$ vérifiant $(u^{(n+1)})^p = u^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est, de façon naturelle, un espace de Banach p -adique et $\mathcal{U} = \{u \in U, u^{(0)} \in 1 + p\mathcal{O}_C\}$ est un réseau de U . Il a aussi une structure d'espace de Banach spectral effectif : soit A_0 la limite inductive des algèbres $C[X_n]$ pour les morphismes $X_n \mapsto X_{n+1}^p$. Tout élément de U définit de façon évidente une fonction continue sur A_0 à valeurs dans C , et l'algèbre des fonctions analytiques sur U est la séparée complétée de A_0 pour la famille de semi-normes $\|a\|_n = \sup \{|a(x)|, x \in p^{-n}\mathcal{U}\}$.

La catégorie des espaces de Banach spectraux effectifs est une catégorie exacte : une suite exacte est une suite $0 \rightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \rightarrow 0$, où f et g sont des applications \mathbb{Q}_p -linéaires analytiques, qui est exacte dans la catégorie des \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels.

Par exemple, la suite $0 \rightarrow \mathbb{Q}_p(1) \rightarrow U \rightarrow C \rightarrow 0$, où $\mathbb{Q}_p(1)$ est le sous- \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de U formé des $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $u^{(0)}$ soit une racine de l'unité, et $U \rightarrow C$ est le morphisme $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \log(u^{(0)})$, est une suite exacte d'espaces de Banach spectraux effectifs.

Un *espace de Banach-Colmez effectif* sur C est un espace de Banach spectral effectif qui est extension d'un C -espace vectoriel de dimension finie W par un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie V . Un *espace de Banach-Colmez* est le quotient d'un espace de Banach-Colmez effectif par un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie : de façon plus précise, la catégorie des espaces de Banach-Colmez est la localisée de la catégorie des paires $(V \subset E)$ (où V est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie et E un espace de Banach-Colmez effectif) par les quasi-isomorphismes, c'est-à-dire les morphismes $(V \subset E) \rightarrow (V' \subset E')$ qui induisent une bijection $E/V \rightarrow E'/V'$.

La catégorie des espaces de Banach-Colmez est abélienne et le foncteur d'oubli de cette catégorie vers celle des espaces de Banach p -adiques est exact et fidèle. On peut donc voir un espace de Banach-Colmez comme un espace de Banach p -adique muni d'une structure supplémentaire ; on appelle *applications \mathbb{Q}_p -linéaires analytiques* les morphismes de la catégorie des espaces de Banach-Colmez. Le foncteur naturel de la catégorie \mathbf{BC}_C^+ des espaces de Banach-Colmez effectifs vers la catégorie \mathbf{BC}_C des espaces de Banach-Colmez est exact et pleinement fidèle, ce qui identifie \mathbf{BC}_C à l'abélianisation de \mathbf{BC}_C^+ (c'est-à-dire que tout foncteur exact de \mathbf{BC}_C^+ vers une catégorie abélienne se factorise uniquement (à un isomorphisme de foncteurs près) par \mathbf{BC}_C).

Comme la terminologie le suggère, il existe une équivalence naturelle de catégories entre \mathbf{BC}_C et la catégorie introduite dans [4] sous le nom d'*Espaces de Banach de dimension finie*. Outre le fait de donner une nouvelle approche de la catégorie introduite par Colmez, le but de ce travail est d'étudier en détail cette catégorie, qui est liée d'assez près, comme l'avait remarqué Colmez, aux anneaux de périodes B_{cris} et B_{dR} . En particulier, nous redémontrons certains résultats de Colmez et mettons également en évidence une filtration de Harder-Narasimhan sur une sous-catégorie intéressante de \mathbf{BC}_C .

Ce travail prouve en particulier les résultats suivants :

- (i) Soit X un espace de Banach-Colmez ; alors on peut représenter X par les deux suites exactes

$$0 \longrightarrow V_- \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow V_+ \longrightarrow E \longrightarrow W \longrightarrow 0,$$

où W est un C -espace vectoriel de dimension finie et V_+ , V_- deux \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels de dimension finie. Alors les entiers

$$\dim(X) = \dim_C W \quad \text{et} \quad \text{ht}(X) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V_+ - \dim_{\mathbb{Q}_p} V_-$$

ne dépendent pas des choix effectués pour V_+ , V_- et W . On les appelle respectivement *dimension* et *hauteur* de X . De plus, ces fonctions sont additives sur la catégorie \mathbf{BC}_C .

- (ii) Tout B_{dR}^+ -module de longueur finie peut naturellement être muni d'une structure d'espace de Banach-Colmez ; sa dimension est alors égale à sa longueur comme B_{dR}^+ -module et sa hauteur est nulle. Le foncteur ainsi défini de la catégorie des B_{dR}^+ -modules de longueur finie vers celle des espaces de Banach-Colmez est exact et pleinement fidèle.
- (iii) Soient k un sous-corps parfait du corps résiduel de C , $K_0 = \text{Frac} W(k)$, et σ le Frobenius absolu sur K_0 . Un φ -isocrystal effectif sur k est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie D , muni d'une application σ -linéaire $\varphi : D \rightarrow D$ bijective et telle qu'il existe un réseau de D stable par φ . Pour tout φ -isocrystal effectif D , le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel $E(D)$ des applications \mathbb{Q}_p -linéaires φ -équivariantes $D \rightarrow B_{\text{cris}}^+$ a une structure naturelle d'espace de Banach-Colmez ; de plus, la dimension de $E(D)$ est égale au nombre de Newton $t_{\mathbb{N}}(D)$ (c'est-à-dire à la valuation p -adique du déterminant de φ) et la hauteur de $E(D)$ est égale à $\dim_{K_0} D$. Si les pentes de D sont ≤ 1 (i.e. s'il existe un réseau \mathcal{D} tel que $p\mathcal{D} \subset \varphi(\mathcal{D})$), alors $E(D)$ est effectif.

Cette construction est fonctorielle et le foncteur ainsi défini de la catégorie des φ -isocristaux vers celle des espaces de Banach-Colmez est exact et fidèle.

- (iv) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $B_m = B_{\text{dR}}^+ / \text{Fil}^m B_{\text{dR}}^+$; on note encore \tilde{B} le B_{dR}^+ -module $B_{\text{dR}} / B_{\text{dR}}^+ = \varinjlim_{m \in \mathbb{N}} B_m(-m)$. Pour tout espace de Banach-Colmez X , on note

$$X_{\text{dR}}^* = \text{Hom}(X, \tilde{B}) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathbf{BC}_C}(X, B_n(-n)),$$

$$X_{\text{dR}}^+ = \text{Hom}_{B_{\text{dR}}^+}(X_{\text{dR}}^*, \tilde{B}) \quad \text{et} \quad X_{\text{dR}} = X_{\text{dR}}^+ \otimes_{B_{\text{dR}}^+} B_{\text{dR}}.$$

Alors X_{dR}^+ est un B_{dR}^+ -module de type fini, et donc X_{dR} est un B_{dR} -espace vectoriel de dimension finie. On dit que X est *constructible* si l'application naturelle $X \rightarrow X_{\text{dR}}^+$ est injective et que X est à *pentés finies* si $X \rightarrow X_{\text{dR}}$ est injective, ce qui revient à dire que X est constructible et que le B_{dR}^+ -module X_{dR}^+ est sans B_{dR}^+ -torsion. Si X est constructible alors $\dim_{B_{\text{dR}}} X_{\text{dR}} = \text{ht}(X)$; en particulier, la hauteur de X est positive.

Un espace de Banach-Colmez X est constructible si et seulement s'il admet une *pseudo-présentation*, c'est-à-dire une suite exacte d'espaces de Banach-Colmez

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où V est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie, et M un B_{dR}^+ -module de longueur finie. En particulier, tout espace de Banach-Colmez effectif est constructible.

Lorsque X est constructible, on identifie l'espace de Banach p -adique sous-jacent à son image dans X_{dR}^+ et on note $F^\infty X$ le sous- B_{dR}^+ -module de torsion de X ; alors le quotient $X/F^\infty X$ est à pentés finies (et c'est le plus grand quotient à pentés finies de X).

- (v) La catégorie des espaces de Banach-Colmez constructibles est exacte et le foncteur $X \mapsto X_{\text{dR}}^+$ vers la catégorie des B_{dR}^+ -modules est exact et fidèle. Pour tous espaces de Banach-Colmez constructibles X et Y , le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel des applications \mathbb{Q}_p -linéaires analytiques de X dans Y s'identifie à l'ensemble des applications B_{dR}^+ -linéaires $f : X_{\text{dR}}^+ \rightarrow Y_{\text{dR}}^+$ telles que $f(X) \subset Y$.

La catégorie des B_{dR}^+ -modules de longueur finie s'identifie à la sous-catégorie pleine des espaces de Banach-Colmez constructibles qui sont de hauteur nulle.

- (vi) La catégorie des espaces de Banach-Colmez à pentes finies est une catégorie exacte et le foncteur $X \mapsto X_{\text{dR}}$ vers la catégorie des B_{dR} -espaces vectoriels est exact et fidèle. Soient X un espace de Banach-Colmez à pentes finies et Y un sous-objet de X ; alors Y est à pentes finies et Y_{dR} est un sous- B_{dR} -espace vectoriel de X_{dR} . L'adhérence de Y dans X est $\overline{Y} = X \cap Y_{\text{dR}}$; c'est un sous-objet strict de X (c'est-à-dire que le quotient X/\overline{Y} est à pentes finies) et $\dim Y \subset \dim \overline{Y}$ avec égalité si et seulement si $Y = \overline{Y}$.

Ces propriétés permettent de munir la catégorie des espaces de Banach-Colmez à pentes finies d'une *structure de Harder-Narasimhan* : cette catégorie a des propriétés formelles analogues à celle des fibrés vectoriels sur une courbe projective lisse, la hauteur jouant le rôle du rang, et la dimension celui du degré. Plus précisément, la *pente* d'un objet X est le nombre rationnel positif $\mu(X) = \dim X / \text{ht } X$; on dit que X est *semi-stable* si pour tout sous-objet strict Y de X , on a $\mu(Y) \leq \mu(X)$. Alors tout objet non nul X admet une unique filtration par des sous-objets stricts

$$0 = X_0 \supsetneq X_1 \dots \supsetneq X_m = X,$$

telle que chaque quotient X_i/X_{i-1} soit semi-stable et que la suite des pentes $\mu(X_i/X_{i-1})$ soit strictement décroissante.

Il est commode de renuméroter cette filtration et d'introduire la filtration décroissante $(\text{Fil}^\alpha X)$ indexée par les réels positifs, en notant $\text{Fil}^\alpha X = X_i$, où i est le plus petit entier tel que $\mu(X_i/X_{i-1}) \leq \alpha$ (et $\text{Fil}^\alpha X = 0$ pour $\alpha \geq \mu(X_1)$). Les gradués de cette filtration sont les $\text{Gr}^\alpha X = \text{Fil}^\alpha X / \varinjlim_{\beta > \alpha} \text{Fil}^\beta X$. Cette filtration est exhaustive et séparée, les sauts (i.e. les α tels que $\text{Gr}^\alpha X \neq 0$) sont des nombres rationnels et sont en nombre fini.

- (vii) Soit X un espace de Banach-Colmez constructible. On munit X d'une filtration décroissante indexée par $[0, +\infty]$ en notant $\text{Fil}^\alpha X$ l'image inverse dans X de $\text{Fil}^\alpha(X/F^\infty X)$ et $\text{Fil}^\infty X = F^\infty X$. Tout morphisme d'espace de Banach-Colmez constructibles $X \rightarrow Y$ est compatible avec les filtrations sur X et Y .
- (viii) Pour tout $\alpha \in [0, +\infty[\cap \mathbb{Q}$, soit $\alpha = d/h$ l'écriture irréductible de α ; on pose alors $E_\alpha = \{x \in B_{\text{cris}}^+, \varphi^h(x) = p^d \cdot x\}$. Alors tout espace de Banach-Colmez semi-stable de pente α est isomorphe à une somme directe d'un nombre fini de copies de E_α .

Pour tout espace de Banach-Colmez à pentes finies X et pour tout $\alpha \in [0, +\infty[$, il existe un entier $n_X(\alpha)$ tel que $\text{Gr}^\alpha X$ soit isomorphe à $(E_\alpha)^{n_X(\alpha)}$, et la filtration $(\text{Fil}^\alpha X)$ est (non canoniquement) scindée. Autrement dit, il existe une (unique) fonction $n_X : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{N}$, presque partout nulle, et telle que

$$X \simeq \bigoplus_{\alpha} E_{\alpha}^{n_X(\alpha)}.$$

Pour tout réel α , le sous-objet $\text{Fil}^\alpha X$ s'identifie alors à $\bigoplus_{\beta \geq \alpha} E_{\beta}^{n_X(\beta)}$ pour $\beta \geq \alpha$.

Signalons enfin que la définition des espaces de Banach-Colmez sur C se généralise en une définition des espaces de Banach-Colmez sur tout sous-corps fermé K de C dont la clôture algébrique est dense dans C . Les propriétés de ces espaces permettent alors de retrouver le

théorème de [5] qui dit que lorsque la valuation sur K est discrète, alors tout φ -module filtré sur K qui est faiblement admissible est admissible.

Décrivons à présent l'organisation de ce travail; il est divisé en trois parties. La première se compose des chapitres 1 à 3 et construit le cadre général des groupes spectraux dans lequel se situe toute la suite. La deuxième partie (chapitres 4 à 6) donne la définition des espaces de Banach-Colmez ainsi que leur propriété principale, le lemme fondamental 6.0.1. Enfin, la troisième partie (chapitres 7 à 10) tire les conséquences de ce résultat sur la structure de la catégorie des espaces de Banach-Colmez.

Le chapitre 1 donne le cadre des variétés spectrales. Soient K un corps p -adique et C la complétion de la clôture algébrique de K . À toute K -algèbre de Fréchet A (ceci incluant les algèbres de Banach) on associe son *spectre* $\mathrm{Spm} A$, qui est l'espace topologique des morphismes continus de K -algèbres de A vers C . Par la transformation de Gelfand, A est une sous-algèbre des fonctions continues de $\mathrm{Spm} A$ vers C ; on dit que A est *spectrale* si sa topologie est celle de la convergence uniforme sur tout borné de $\mathrm{Spm} A$ et *pro-spectrale* si c'est une limite projective dénombrable d'algèbres spectrales. La catégorie des *variétés spectrales* sur K est la catégorie opposée à celle des K -algèbres pro-spectrales.

Le chapitre 2 considère le cas particulier des algèbres affinoïdes, c'est-à-dire des algèbres de Banach topologiquement de type fini sur K . Les *variétés spectrales rigides* sont celles qui sont associées à des algèbres affinoïdes.

Le troisième chapitre est consacré aux groupes spectraux affines, c'est-à-dire aux objets en groupes dans la catégorie des variétés spectrales affines, et aux espaces de Banach spectraux effectifs.

Le chapitre 4 élargit la gamme des espaces de Banach spectraux effectifs à notre disposition en étudiant les structures analytiques obtenues à partir des objets classiques de la théorie des périodes p -adiques. En particulier, l'anneau $R = \varprojlim(\dots \rightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_C)$ est muni d'une structure spectrale, ainsi que son anneau de vecteurs de Witt $W(R)$; il en est de même du $W(R)$ -module $BW(R)$ des *bivecteurs de Witt* à coefficients dans R , c'est-à-dire des vecteurs $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ indexés par \mathbb{Z} tels que $\limsup_{n \rightarrow -\infty} |x_n| < 1$.

Le cinquième chapitre introduit les espaces de Banach-Colmez effectifs, et en donne plusieurs constructions (à partir de groupes p -divisibles sur le corps résiduel de k ou à partir de sous-objets de $BW(R)$). Enfin, ce chapitre montre que $E_1 = \{x \in B_{\mathrm{cris}}^+, \varphi(x) = px\}$ est l'extension universelle de C par \mathbb{Q}_p dans la catégorie des espaces de Banach spectraux; ceci permet de classifier les extensions spectrales d'un C -espace vectoriel de dimension finie par un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie.

Le sixième chapitre établit le lemme fondamental (analogue à ceux présents dans [5, 4]) : soit E un espace de Banach-Colmez effectif admettant une présentation de dimension un (c'est-à-dire qui s'écrit comme extension de C par un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel V de dimension finie h). Alors tout morphisme analytique u de E vers C vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- (i) l'image de u est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie ;
- (ii) u est surjectif, et son noyau est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension h .

Ce résultat est établi en deux étapes. La première partie le montre pour l'espace de Banach-Colmez élémentaire $E_{1,h} = \{x \in B_{\text{cris}}^+, \varphi^h(x) = px\}$, à l'aide de la structure analytique explicite de $E_{1,h}$ établie au paragraphe 5.2. La deuxième partie ramène le cas général à celui-ci en utilisant l'extension universelle du chapitre précédent.

Le chapitre 7 construit la catégorie des espaces de Banach spectraux. C'est une catégorie localisée de morphismes d'espaces de Banach spectraux effectifs ; elle contient comme sous-catégorie pleine celle des espaces de Banach spectraux effectifs étudiée jusque-là, et tout morphisme dont la source est un espace de Banach spectral étale a un conoyau par construction.

En localisant de la même façon la catégorie des espaces de Banach-Colmez effectifs, on obtient la catégorie des espaces de Banach-Colmez, qui est une sous-catégorie pleine de celle des espaces de Banach spectraux. Le chapitre 8, à partir du lemme fondamental 6.0.1, montre que la catégorie des espaces de Banach-Colmez est abélienne et qu'il existe d'unique fonctions de dimension et de hauteur (notées \dim et ht), additives sur les suites exactes courtes et telles que $\dim C = 1$, $ht C = 0$, $\dim \mathbb{Q}_p = 0$ et $ht \mathbb{Q}_p = 1$. Le chapitre 8 montre également que la catégorie des espaces de Banach-Colmez est équivalente à celle des Espaces de Banach de [4], pour lesquels ce résultat est déjà connu.

Le chapitre 9 est consacré aux homomorphismes et aux extensions d'espaces de Banach-Colmez. On commence par construire un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des B_{dR}^+ -modules de longueur finie vers celle des espaces de Banach-Colmez, qui prolonge la structure spectrale naturelle sur les C -espaces vectoriels (qui sont les B_{dR}^+ -modules annulés par tB_{dR}^+). Soient $B_e = \{x \in B_{\text{cris}}^+, \varphi(x) = x\}$ et $\tilde{B} = B_{\text{dR}}/B_{\text{dR}}^+$; alors la suite exacte fondamentale $0 \rightarrow \mathbb{Q}_p \rightarrow B_e \rightarrow \tilde{B} \rightarrow 0$ est naturellement munie d'une structure analytique, et c'est même l'extension universelle de \tilde{B} par \mathbb{Q}_p .

Enfin, le chapitre 10 classe les espaces de Banach-Colmez à pentes finies. Il établit la structure de Harder-Narasimhan de cette catégorie et donne la nature des gradués de la filtration.

Partie I. Espaces de Banach spectraux effectifs

I. Variétés spectrales affines

Dans tout ce qui suit, p est un nombre premier, et K est un corps complet pour une valuation p -adique v_K , normalisée par $v_K(p) = 1$. On note également $|\cdot|$ la valeur absolue associée, définie par $|x| = p^{-v_K(x)}$. L'anneau des entiers de K est noté \mathcal{O}_K et son idéal maximal \mathfrak{m}_K . On note \overline{K} une clôture algébrique de K , \mathcal{G}_K le groupe de Galois de \overline{K} sur K , et C la complétion de \overline{K} ; c'est un corps algébriquement clos, et l'action de \mathcal{G}_K sur \overline{K} se prolonge de façon unique en une action continue sur C .

Tous les anneaux et algèbres considérés sont, sauf mention explicite du contraire, supposés unitaires et commutatifs.

I.1. Espaces de Banach. —

Définition 1.1.1. — Soit V un K -espace vectoriel. On appelle *réseau* de V tout sous- \mathcal{O}_K -module \mathcal{V} de V séparé pour la topologie p -adique et tel que l'application canonique $\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \rightarrow V$ soit bijective. Deux réseaux \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 sont dits *commensurables* s'il existe un entier n tel que $p^n \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$ et $p^n \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$.

Pour tout réseau \mathcal{V} de V , l'application $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ définie sur V par $\|x\|_{\mathcal{V}} = \inf \{|\lambda|, x \in \lambda \mathcal{V}\}$ est une norme sur V . Inversement, si N est une norme sur V , alors sa boule unité \mathcal{B} est un réseau de V , et $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ est une norme équivalente à N . Deux normes sont équivalentes si et seulement si les réseaux correspondants sont commensurables; un réseau est commensurable au réseau définissant la norme si et seulement s'il est ouvert et borné pour cette norme.

Par conséquent, il revient au même de munir un K -espace vectoriel d'une classe d'équivalence de normes, ou d'une famille de réseaux commensurables. Ceci définit de façon unique une topologie sur V .

Définition 1.1.2. — La catégorie des *K -espaces de Banach* est la catégorie dont les objets sont les K -espaces vectoriels topologiques complets dont la topologie provient d'une norme, et dont les morphismes sont les applications K -linéaires continues.

Dire qu'un K -espace vectoriel normé V est un K -espace de Banach revient donc à dire que sa boule unité \mathcal{V} est séparée et complète pour la topologie p -adique.

Un produit direct de deux K -espaces de Banach, muni de la topologie produit, est encore un K -espace de Banach; si ces espaces sont munis de normes, cette topologie est aussi donnée par la norme $\|(v, w)\| = \max \{\|v\|, \|w\|\}$. Par conséquent, tout K -espace vectoriel de dimension finie est un K -espace de Banach.

Tout sous- K -espace vectoriel fermé d'un K -espace de Banach est un K -espace de Banach. De plus, si W est un sous- K -espace vectoriel fermé d'un espace de Banach V , alors le quotient V/W , muni de la norme $\|\cdot\|_{V/W}$ définie par $\|v\|_{V/W} = \inf \{\|\widehat{v}\|_V, \widehat{v} \mapsto v\} = d(v, W)$ est un K -espace de Banach.

Soient V, W deux K -espaces de Banach dont la topologie est donnée par des réseaux respectifs \mathcal{V} et \mathcal{W} , et notons $\mathcal{V} \widehat{\otimes} \mathcal{W}$ le séparé complété pour la topologie p -adique du \mathcal{O}_C -module $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$; alors $(\mathcal{V} \widehat{\otimes} \mathcal{W}) \otimes_{\mathcal{O}_C} C$ est un K -espace de Banach, qui ne dépend pas du choix des réseaux \mathcal{V} et \mathcal{W} , et que l'on note $V \widehat{\otimes} W$. De plus, le K -espace vectoriel $\text{Hom}_K(V, W)$ des applications K -linéaires continues de V vers W est un K -espace de Banach, dont une norme est donnée par $\|f\|_{\text{Hom}_K(V, W)} = \sup \{ \|f(v)\|_W, \|v\|_V \leq 1 \}$.

La proposition suivante est un théorème classique d'analyse fonctionnelle réelle, qui s'applique tel quel en analyse fonctionnelle p -adique.

Proposition 1.1.3. — [2I, I.25, I.36, I.37] Soit V un K -espace vectoriel. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) V est la limite projective d'une famille dénombrable d'espaces de Banach ;
- (ii) la topologie de V est donnée par une famille dénombrable de semi-normes pour laquelle V est séparé et complet ;
- (iii) la topologie de V est donnée par une distance invariante par translation pour laquelle V est complet.

Démonstration. — Il est clair que les conditions (i) et (ii) sont équivalentes.

Supposons que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une famille de semi-normes définissant la topologie sur V . Soit h une fonction continue, définie sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, 1[$, bornée, strictement croissante, telle que $f(0) = 0$; par exemple $h(x) = \frac{x}{x+1}$. On pose alors, pour $x, y \in V$:

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} h(p_n(x - y)) ;$$

alors d est invariante par translation, et puisque $d(x, y) = 0$ si et seulement si $p_n(x - y) = 0$ pour tout n , c'est une distance sur V . Enfin, puisque V est complet pour la famille (p_n) , il l'est pour la distance d .

Réciproquement, supposons que V soit muni d'une distance d invariante par translation; soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de voisinages de zéro. Pour tout n et pour tout $x \in V$, puisque la fonction de K dans V qui à λ associe λx est continue, λx appartient à Ω_n pour λ assez proche de zéro. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose donc

$$p_n(x) = \inf \{ |\lambda|, \lambda \in V, \lambda^{-1} x \in \Omega_n \} ;$$

p_n est une semi-norme sur V , et puisque la famille $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de voisinages de zéro, la topologie de V est bien celle donnée par les semi-normes $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \triangleleft

Définition 1.1.4. — Un K -espace de Fréchet V (« F -space » au sens de [2I]) est un K -espace vectoriel topologique satisfaisant les trois conditions équivalentes de la proposition 1.1.3.

En particulier, tout K -espace de Banach est un K -espace de Fréchet.

Un sous-espace fermé d'un espace de Fréchet, un quotient d'un espace de Fréchet par un sous-espace fermé, ou le produit tensoriel complété de deux espaces de Fréchet sont encore des espaces de Fréchet. Cependant, l'espace des morphismes entre deux espaces de Fréchet n'est en général pas un espace de Fréchet.

Puisque les K -espaces de Fréchet sont complets, ils vérifient le théorème de Baire et ses conséquences ([3, 2.8.1]) :

Théorème de Baire. — [2I, 2.2] *L'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses d'un K -espace de Fréchet V est dense.*

Ceci revient bien sûr au même que de dire que la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide d'un K -espace de Fréchet V est d'intérieur vide. En particulier, si V est réunion dénombrable de fermés, alors l'un au moins de ces fermés est d'intérieur non vide.

Théorème de l'application ouverte. — [2I, 2.11] *Soient V, W deux K -espaces de Fréchet, et soit $f : V \rightarrow W$ une application linéaire continue. Si f est surjective, alors f est une application ouverte.*

En particulier, si f est bijective et continue, alors l'application linéaire réciproque f^{-1} est continue.

Théorème du graphe fermé. — [2I, 2.15] *Soient V, W deux K -espaces de Fréchet, et soit $f : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors f est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $V \times W$.*

Définition 1.1.5. — [2I, 2.3] *Un ensemble Λ d'applications linéaires $V \rightarrow W$ est dit collectivement borné si pour toute partie bornée A de V , $\Lambda(A)$ est bornée dans W .*

Théorème de Banach-Steinhaus. — [2I, 2.5] *Soient V, W deux K -espaces de Fréchet, et soit Λ un ensemble d'applications linéaires continues $f : V \rightarrow W$. Si pour tout $v \in V$, l'ensemble $\{f(v), f \in \Lambda\}$ est borné, alors Λ est collectivement borné.*

Proposition 1.1.6. — *Soient V un K -espace de Banach et \mathcal{V} un réseau munissant V de sa topologie. Alors un réseau \mathcal{W} de V est commensurable à \mathcal{V} si et seulement s'il est fermé dans V .*

Démonstration. — Supposons d'abord \mathcal{W} commensurable à \mathcal{V} . Alors \mathcal{W} est en particulier ouvert, et donc fermé puisque c'est un sous-groupe de V .

Réciproquement, supposons que \mathcal{W} est un réseau fermé. Puisque \mathcal{W} est un réseau, on peut alors écrire $V = \bigcup_{n \geq 0} p^{-n}\mathcal{W}$; puisque V est un K -espace de Banach et \mathcal{W} est fermé, d'après le théorème de Baire, il existe un entier n tel que $p^{-n}\mathcal{W}$ soit d'intérieur non vide ; autrement dit, \mathcal{W} est d'intérieur non vide. Comme c'est un sous-groupe de V , ceci implique qu'il est ouvert dans V .

Puisque \mathcal{W} est un réseau fermé de V , il est séparé et complet pour la topologie p -adique, et donc V , muni de la topologie donnée par \mathcal{W} , est un K -espace de Banach, que nous noterons W ; puisque \mathcal{W} est ouvert, l'application identité est continue de V vers W , et surjective. Par le théorème de l'application ouverte, elle est donc ouverte, c'est-à-dire qu'il existe un entier m tel que $p^m\mathcal{W} \subset V$; par conséquent, \mathcal{W} est borné dans V . \triangleleft

Proposition 1.1.7. — *Soient V, W deux espaces de Banach, $f : W \rightarrow V$ une application linéaire continue et surjective, et \mathcal{V} un réseau fermé de V . Il existe un réseau fermé \mathcal{W} de W tel que $f(\mathcal{W}) = \mathcal{V}$.*

Démonstration. — Soit \mathcal{W}' un réseau fermé de W . Son image $f(\mathcal{W}')$ est un sous-groupe borné de V ; puisque V et W sont des espaces de Banach et f est surjective, d'après le théorème de l'application ouverte, $f(\mathcal{W}')$ est ouvert. Par conséquent, $f(\mathcal{W}')$ est un réseau de V commensurable à \mathcal{V} , et il existe donc un entier n tel que $V \subset f(p^{-n}\mathcal{W}')$. Il suffit alors de prendre $\mathcal{W} = p^{-n}\mathcal{W}' \cap f^{-1}(\mathcal{V})$. \triangleleft

Proposition 1.1.8. — [3, 2.8.2/2]; [II, 1.2.1(3)] Soit V un espace de Banach engendré topologiquement par une famille dénombrable de vecteurs. Alors V est soit de dimension finie, soit isomorphe à l'espace de Banach $c_0(K)$ des suites d'éléments de K convergeant vers zéro.

1.2. Algèbres de Banach. —

Définition 1.2.1. — La catégorie des K -algèbres de Banach est la catégorie dont les objets sont les K -algèbres commutatives topologiques complètes dont la topologie provient d'une norme d'algèbre (c'est-à-dire vérifiant $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ et $\|1\| \leq 1$), et dont les morphismes sont les morphismes continus de K -algèbres.

Soit \mathcal{A} la boule unité pour la norme d'algèbre sur A . Alors \mathcal{A} est une sous- \mathcal{O}_K -algèbre fermée de A , séparée et complète pour la topologie p -adique, et l'application naturelle $\mathcal{A}[\frac{1}{p}] \rightarrow A$ est un homéomorphisme. Inversement, si \mathcal{B} est une \mathcal{O}_K -algèbre séparée et complète pour la topologie p -adique, alors $B = \mathcal{B}[\frac{1}{p}]$ est une K -algèbre de Banach.

Le produit direct de deux algèbres de Banach, muni de la norme $\|(a, b)\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}$, est encore une algèbre de Banach.

Soit A une K -algèbre de Banach. Alors puisque $\|1\| \leq 1$ et $\|1\| \leq \|1\|^2$, on a nécessairement $\|1\| = 1$ ou $\|1\| = 0$. Le cas où $\|1\| = 0$ correspond à l'algèbre nulle.

Soit a un élément inversible de A . Pour tout élément x tel que $\|xa^{-1}\| < 1$, la série géométrique $\sum (\frac{x}{a})^n$ est normalement convergente, donc convergente dans A ; par conséquent, A^\times est un ouvert de A .

Soit \mathfrak{m} un idéal maximal de A . Puisque \mathfrak{m} est un idéal strict de A , il est inclus dans le complémentaire de A^\times , qui est fermé d'après ce qui précède; son adhérence est donc aussi incluse dans cet ensemble, et est donc un idéal strict. Par conséquent, \mathfrak{m} est fermé.

Définition 1.2.2. — La catégorie des K -algèbres de Fréchet est la catégorie dont les objets sont les K -algèbres commutatives topologiques complètes dont la topologie provient d'une famille dénombrable de semi-normes d'algèbre (c'est-à-dire vérifiant $p_n(ab) \leq p_n(a) \cdot p_n(b)$), et dont les morphismes sont les morphismes continus de K -algèbres.

De même que pour une algèbre de Banach, pour toute algèbre de Fréchet A , A^\times est un ouvert de A , et tout idéal maximal de A est fermé.

1.3. Algèbres pro-spectrales et variétés spectrales affines. — Soient A une K -algèbre topologique et $S = \text{Hom}_{K, \text{cont}}(A, C)$ l'ensemble des homomorphismes continus de K -algèbres de A vers C .

À un élément $a \in A$, on peut associer par la transformation de Gelfand une fonction, que l'on notera encore a , définie sur S et à valeurs dans C , en notant pour tout $s \in S$: $a(s) = s(a) \in C$. L'ensemble S peut ainsi être muni de la topologie faible : c'est par définition la topologie la moins fine qui rend continues toutes les images des éléments de A par la transformation de Gelfand. L'espace topologique ainsi obtenu ne dépend pas de la clôture algébrique de K choisie. De plus, S est naturellement muni d'une action à gauche de \mathcal{G}_K , et cette action est continue pour la topologie faible.

Tout morphisme continu $f : A \rightarrow A'$ induit une application $\sigma : S' \rightarrow S$ (où $S' = \text{Hom}_{K,\text{cont}}(A', C)$) ; cette application est continue et \mathcal{G}_K -équivariante.

Définition 1.3.1. — Un ouvert Ω de S est dit *borné* s'il existe un ouvert \mathcal{A} de A tel que $\{a(\omega), a \in \mathcal{A}, \omega \in \Omega\}$ soit une partie bornée de C .

Ceci revient à dire que la restriction à Ω définit un morphisme continu de K -algèbres de A vers l'algèbre $\mathcal{C}(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω , qui est une algèbre de Banach pour la norme de la convergence uniforme.

Il est clair que, si Ω est un ouvert borné de S , alors tout ouvert $\Omega' \subset \Omega$ est borné ; il est également vrai que, si Ω et Ω' sont deux ouverts bornés de S , alors $\Omega \cup \Omega'$ est un ouvert borné de S .

Pour tout ouvert borné Ω de S et pour tout $a \in A$, $\|a\|_\Omega = \sup \{|a(\omega)|, \omega \in \Omega\} < \infty$, et l'application $\|\cdot\|_\Omega$ ainsi définie vérifie $\|a + b\|_\Omega \leq \max(\|a\|_\Omega, \|b\|_\Omega)$, $\|ab\|_\Omega \leq \|a\|_\Omega \cdot \|b\|_\Omega$, et $\|\lambda a\|_\Omega = |\lambda|_K \|a\|_\Omega$ pour tous $a, b \in A$ et $\lambda \in K$; autrement dit, c'est une semi-norme sur la K -algèbre A . Notons \widehat{A}_Ω le séparé complété de A pour la semi-norme $\|\cdot\|_\Omega$. C'est une K -algèbre de Banach.

Soient $\Omega \subset \Omega'$ deux ouverts bornés de S , alors pour tout $a \in A$, $\|a\|_\Omega \leq \|a\|_{\Omega'}$; par conséquent, le morphisme de restriction $A \rightarrow \widehat{A}_\Omega$ se prolonge en un morphisme d'algèbres continu $\widehat{A}_{\Omega'} \rightarrow \widehat{A}_\Omega$. Par conséquent, et puisque les ouverts bornés de S forment un système inductif filtrant, les \widehat{A}_Ω forment un système projectif filtrant de K -algèbres de Banach et de morphismes continus de K -algèbres.

Définition 1.3.2. — L'algèbre A est dite *pro-spectrale* si S est la réunion de ses ouverts bornés et si le morphisme canonique

$$A \longrightarrow \varprojlim \widehat{A}_\Omega,$$

la limite projective étant prise sur tous les ouverts bornés Ω de A , est un homéomorphisme.

L'algèbre A est dite *spectrale* si S est un ouvert borné de A et si l'application canonique $A \rightarrow \widehat{A}_S$ est un homéomorphisme.

Il est en particulier clair que, si A est pro-spectrale, alors la transformation de Gelfand réalise une injection de A dans les fonctions continues sur $\text{Spm } A$.

Si S est lui-même un ouvert borné de A , alors S est bien sûr la réunion de ses ouverts bornés ; en outre, on a alors $\varprojlim \widehat{A}_\Omega = \widehat{A}_S$. Par conséquent, l'algèbre A est spectrale si et seulement si elle est pro-spectrale et si S est borné.

Définition 1.3.3. — On note en particulier $\|\cdot\|_{\text{sp}} = \|\cdot\|_{\text{Hom}(A,C)}$, c'est-à-dire pour tout $a \in A$:

$$\|a\|_{\text{sp}} = \sup \{|s(a)|, s \in \text{Hom}_{K,\text{cont}}(A, C)\}.$$

L'application $\|\cdot\|_{\text{sp}} : A \rightarrow [0, +\infty]$ s'appelle la *semi-norme spectrale* sur A .

Il est clair que la semi-norme spectrale est bien une semi-norme d'algèbre sur A .

De plus, l'algèbre A est spectrale si et seulement si la semi-norme spectrale est à valeurs dans $[0, +\infty[$, est une norme sur A et définit la topologie de A . On notera dans ce cas $\|\cdot\|$ la norme spectrale sur A .

Soit A une algèbre spectrale. Alors $\|a\| \leq 1$ si et seulement si la suite (a^n) est bornée dans A . Par conséquent, l'ensemble A° des éléments $a \in A$ dont les puissances sont bornées est le sous-anneau de A qui définit la norme. De plus, le sous-ensemble $A^{\circ\circ}$ des éléments topologiquement nilpotents est un idéal de A° .

Définition 1.3.4. — Une *variété spectrale affine* sur K est un triplet $X = (S, A, i)$, où S est un \mathcal{G}_K -espace topologique (c'est-à-dire un espace topologique muni d'une action continue de \mathcal{G}_K), A est une K -algèbre pro-spectrale, et $i : \text{Hom}_{K,\text{cont}}(A, C) \rightarrow S$ est un homéomorphisme \mathcal{G}_K -équivariant. L'algèbre pro-spectrale A est l'*algèbre affine* de la variété spectrale X , et le \mathcal{G}_K -espace topologique S est le *support* de X ; on notera encore $A = \mathcal{O}(X)$, $S = |X|$.

Un *morphisme de variétés spectrales affines* sur K de (S, A, i) vers (S', A', i') est une paire (f, ρ) , où $f : S \rightarrow S'$ est une application continue et $\rho : A' \rightarrow A$ est un morphisme d'algèbres continu, tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & S' \\ \uparrow i & & \uparrow i' \\ \text{Hom}_{K,\text{cont}}(A, C) & \xrightarrow{\rho} & \text{Hom}_{K,\text{cont}}(A', C) \end{array}$$

commute.

Pour toute K -algèbre pro-spectrale A , on note $\text{Spm } A$, et on appelle *spectre de A* , la variété spectrale affine $(\text{Hom}_{K,\text{cont}}(A, C), A, \text{id})$.

Soient $X = (S, A, i)$ une variété spectrale affine sur K et B une K -algèbre topologique ; on note $X(B)$ l'espace topologique $\text{Hom}_{K,\text{cont}}(A, B)$, muni de la topologie de la convergence simple. En particulier, $X(C) = S = |X|$ est l'espace topologique sous-jacent à X . Les éléments de $X(B)$ sont appelés les *points* de X à valeurs dans B .

La catégorie des variétés spectrales affines est naturellement anti-équivalente à la catégorie des algèbres pro-spectrales et des morphismes d'algèbres continus. La catégorie des algèbres spectrales correspond par cette anti-équivalence à la catégorie des variétés spectrales affines bornées.

Soit S un espace topologique muni d'une action de \mathcal{G}_K ; une *structure spectrale* sur S est une variété spectrale affine dont l'espace topologique sous-jacent est S . Soient S, T deux variétés spectrales affines ; alors une application continue $f : T \rightarrow S$ est dite *spectrale*, ou

analytique, si elle est issue d'un morphisme de variétés spectrales affines $T \rightarrow S$. Si deux applications analytiques $f, g : T \rightarrow S$ coïncident sur les espaces topologiques, alors elles sont égales; autrement dit, le foncteur d'oubli de la catégorie des variétés spectrales affines vers celle des espaces topologiques est fidèle.

Proposition 1.3.5. — Soit $(A_n, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système projectif indexé par \mathbb{N} d'algèbres spectrales et de morphismes continus surjectifs. Alors la limite projective $A = \varprojlim A_n$ est pro-spectrale, et $\text{Spm } A$ est la réunion des $\text{Spm } A_n$.

Démonstration. — Notons π_n la projection $A \rightarrow A_n$. Soit $s : A \rightarrow C$ un morphisme continu de K -algèbres. Il suffit de montrer que s se factorise par l'une des projections (π_n) .

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que $\pi_n(a_n) = 0$ pour tout n ; montrons que $s(a_n)$ tend vers zéro dans C . Par construction, A est un espace de Fréchet, et sa topologie est donc donnée par la distance

$$d(a, b) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \left(1 - \frac{1}{1 + \|\pi_n(a - b)\|_{A_n}} \right);$$

on en déduit que $d(a_n, 0) \leq 2^{-n}$, et donc que $a_n \rightarrow 0$ dans A . Par conséquent, puisque s est continu, $s(a_n)$ tend vers zéro dans C .

Pour toute suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K , on a encore $\pi_n(\lambda_n a_n) = 0$, et donc le résultat précédent s'applique à la suite $(\lambda_n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$; par conséquent, $\lambda_n s(a_n) \rightarrow 0$ dans C . Puisque ceci est vrai pour toute suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite $(s(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est nécessairement stationnaire en zéro.

Ceci signifie que l'application $s : A \rightarrow C$ est continue pour la topologie discrète sur C et pour la topologie de la limite projective $A = \varprojlim A_n$ (où chaque quotient est muni de la topologie discrète). Par conséquent, son noyau est ouvert dans A pour cette topologie, et il contient donc l'un des $\text{Ker } \pi_n$. \triangleleft

Proposition 1.3.6. — Soit S une variété spectrale affine. Alors S admet une famille exhaustive dénombrable de bornés.

Démonstration. — Soient A l'algèbre affine de S et d une distance donnant la topologie de l'algèbre de Fréchet A ; pour tout entier $n \geq 1$, soit B_n la boule ouverte de centre 0 et de rayon $1/n$.

Alors tout élément s de S est continu et il existe donc $n \geq 1$ tel que $s(B_n) \subset \mathcal{O}_C$; par conséquent, S est la réunion des bornés $\Omega_n = \{s \in S, s(B_n) \subset \mathcal{O}_C\}$. \triangleleft

Corollaire 1.3.7. — Les algèbres pro-spectrales sont exactement les limites projectives dénombrables d'algèbres spectrales.

Remarquons également que toute algèbre topologique qui est à la fois pro-spectrale et une algèbre de Banach est une algèbre spectrale.

Corollaire 1.3.8. — La limite projective d'une famille dénombrable d'algèbres pro-spectrales est encore pro-spectrale.

Définition 1.3.9. — Soient (S, A, i) une variété spectrale affine, et T une partie de S . On dit que T est une *sous-variété spectrale affine* de S si, en notant \mathfrak{a} l'idéal fermé de A des fonctions s'annulant sur T , A/\mathfrak{a} est une algèbre pro-spectrale et le morphisme quotient $j : \text{Hom}(A/\mathfrak{a}, C) \rightarrow T$ fait de $(T, A/\mathfrak{a}, j)$ une variété spectrale affine.

Puisque $\text{Spm } A/\mathfrak{a}$ est l'intersection des lieux des zéros de f pour $f \in \mathfrak{a}$, c'est un fermé de l'espace topologique sous-jacent à $\text{Spm } A$; par conséquent, toute sous-variété spectrale affine de $\text{Spm } A$ est fermée. De même, toute sous-variété spectrale affine de $\text{Spm } A$ est stable par l'action de \mathcal{G}_K .

Proposition 1.3.10. — Soient $S = \text{Spm } A$ une variété spectrale affine et T une partie de S . Alors les deux ensembles ci-dessous coïncident :

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \{x \in \text{Spm } A, (\forall a \in A) |a(x)| \leq \|a\|_T\}, \\ \bar{T} &= \{x \in \text{Spm } A, (\forall a \in A) a|_T = 0 \Rightarrow a(x) = 0\}.\end{aligned}$$

Démonstration. — Les éléments de \bar{T} sont exactement les $x \in \text{Spm } A$ tels que $|a(x)| = 0$ dès que $\|a\|_T = 0$; par conséquent, $\tilde{T} \subset \bar{T}$. Il suffit donc de démontrer que $\bar{T} \subset \tilde{T}$.

Soit $\rho : A \rightarrow \hat{A}_T$ le morphisme canonique; alors dire que $x \in \bar{T}$ signifie que le noyau de $x : A \rightarrow C$ contient celui de ρ . Par conséquent, il existe une application K -linéaire $y : \hat{A}_T \rightarrow C$ telle que $x = y \circ \rho$. Puisque ρ est surjective, c'est une application ouverte, et donc y est continue. Soit à présent $a \in A$ tel que $\|a\|_T \leq 1$; ceci signifie que $\|\rho(a)\| \leq 1$, c'est-à-dire que $(\rho(a^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée. Puisque y est continue, il s'ensuit que $(x(a^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée, c'est-à-dire que $|x(a)| \leq 1$ et donc $x \in \tilde{T}$. \triangleleft

Proposition 1.3.11. — Soit T une partie d'une variété spectrale affine $S = \text{Spm } A$ et soit \mathfrak{a} l'idéal de A constitué des éléments a tels que $a(x) = 0$ pour tout $x \in T$. Alors A/\mathfrak{a} est une algèbre spectrale; l'espace topologique sous-jacent à son spectre est l'espace \bar{T} défini à la proposition 1.3.10.

De plus, \bar{T} , muni de cette structure de variété spectrale, est la plus petite sous-variété spectrale de S dont le support contient T .

Démonstration. — Il est évident que $\text{Hom}_{K, \text{cont}}(A/\mathfrak{a}) = \bar{T}$; de plus, d'après la proposition 1.3.10, pour tout $f \in A$, $\|f\|_T = \|f\|_{\bar{T}}$.

Soit $\Omega \subset S$ un ouvert borné et soit $f \in A$ tel que $\|f\|_{\Omega} \leq 1$; supposons que $\|f\|_{\Omega \cap T} < 1$. Alors (quitte à choisir un supplémentaire fermé V de \mathfrak{a}) on voit que $\|f\|_{(\hat{A}_{\Omega}/\mathfrak{a})} = d(f, \mathfrak{a}) < 1$; ceci entraîne que, pour tout $f \in A$, $\|f\|_T = \|f\|_{\hat{A}_{\Omega}/\mathfrak{a}}$. Par conséquent, $\hat{A}_{\Omega}/\mathfrak{a}$ est spectrale, et donc $A/\mathfrak{a} = \varprojlim \hat{A}_{\Omega}/\mathfrak{a}$ est pro-spectrale. \triangleleft

Définition 1.3.12. — L'adhérence analytique de T est la sous-variété analytique affine $\bar{\bar{T}}$ définie à la proposition 1.3.11.

Il est clair que \bar{T} est la plus petite sous-variété spectrale affine de S contenant T . De plus, la proposition 1.3.11 démontre que, pour tout $a \in A$, $\|a\|_T = \|a\|_{\bar{T}}$; en outre, \bar{T} est la plus grande partie de S contenant T qui satisfait cette propriété.

Soit A une algèbre pro-spectrale sur C . Une action par automorphismes semi-linéaires de \mathcal{G}_K sur A est une action par automorphismes continus de K -algèbre de \mathcal{G}_K sur A , telle que, pour tous $\gamma \in \mathcal{G}_K$, $a \in A$ et $c \in C$, $\gamma(ca) = \gamma(c)\gamma(a)$. Soit alors $s \in \text{Spm } A$: alors $\gamma \circ s \circ \gamma^{-1}$ est encore un élément de $\text{Spm } A$, et l'action de \mathcal{G}_K ainsi définie sur $\text{Spm } A$ est continue.

La catégorie des *variétés potentiellement spectrales sur K* est la catégorie opposée à celle des C -algèbres pro-spectrales munies d'une action de \mathcal{G}_K par automorphismes semi-linéaires et des morphismes de C -algèbres continus et \mathcal{G}_K -équivalents. Autrement dit, se donner une variété potentiellement spectrale S sur K revient à se donner une variété spectrale sur C munie d'une action de \mathcal{G}_K provenant d'une action de \mathcal{G}_K par automorphismes semi-linéaires, et une flèche de cette catégorie est une application analytique \mathcal{G}_K -équivalente.

Soit $S = \text{Spm } A$ une variété spectrale affine sur K . Alors $A \widehat{\otimes}_K C$ est naturellement munie d'une action de \mathcal{G}_K par automorphismes semi-linéaires, et $\text{Spm}(A \widehat{\otimes}_K C)$ est donc une variété potentiellement spectrale sur K . Ceci définit un foncteur de la catégorie des variétés spectrales affines sur K vers celle des variétés potentiellement spectrales. Ce foncteur n'est en général pas essentiellement surjectif : supposons par exemple que K soit de valuation discrète, soit χ le caractère cyclotomique de K , et soit $A = C\{X\}$ muni de l'action donnée par $\gamma \cdot X = \chi(\gamma) \cdot X$. Un élément de A s'écrit donc de façon unique sous la forme $a = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$, et pour tout $g \in \mathcal{G}_K$, $g(a) = \sum \chi(g)^n g(a_n) X^n$. Un tel élément est donc invariant par l'action de \mathcal{G}_K si et seulement si $a_0 \in K$ et $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ ([23, §4]), c'est-à-dire que $A^{\mathcal{G}_K} = K$. De plus, $\text{Spm } A$ est isomorphe à $C(1)$, donc $\text{Spm } A$ est une variété potentiellement spectrale sur K , mais pas spectrale.

Proposition 1.3.13. — *Le foncteur naturel de la catégorie des variétés spectrales sur K vers la catégorie des variétés potentiellement spectrales sur K est pleinement fidèle.*

Démonstration. — Soit V un K -espace de Banach ; alors l'application naturelle $V \rightarrow (V \widehat{\otimes}_K C)^{\mathcal{G}_K}$ est un isomorphisme.

Soient $S = \text{Spm } A$, $T = \text{Spm } B$ deux variétés spectrales sur K . Alors un morphisme $f : T \rightarrow S$ dans la catégorie des variétés potentiellement spectrales sur K est donné par un morphisme d'algèbres $\rho : A \widehat{\otimes}_K C \rightarrow B \widehat{\otimes}_K C$ continu et \mathcal{G}_K -équivalent. On voit alors que $\rho((A \widehat{\otimes}_K C)^{\mathcal{G}_K}) \subset (B \widehat{\otimes}_K C)^{\mathcal{G}_K}$; d'après ce qui précède, ceci signifie que $\rho(A) \subset B$, et donc que f provient bien d'un morphisme de variétés spectrales $T \rightarrow S$. \triangleleft

1.4. Variétés spectrales étales. — Un espace topologique S est dit *localement profini* s'il est réunion de ses ouverts profinis ; un \mathcal{G}_K -*espace localement profini* est un espace topologique localement profini, muni d'une action continue de \mathcal{G}_K . Soit S un \mathcal{G}_K -espace localement profini. Un \mathcal{G}_K -*ouvert* de S est un ouvert compact de S stable par l'action de \mathcal{G}_K . Puisque \mathcal{G}_K est profini, S est réunion de ses \mathcal{G}_K -ouverts. En particulier, puisque la réunion de deux \mathcal{G}_K -ouverts est un \mathcal{G}_K -ouvert, il existe une suite exhaustive de \mathcal{G}_K -ouverts de S .

Proposition 1.4.1. — *Soit S un \mathcal{G}_K -espace localement profini. Notons $A = \mathcal{C}(S, C)^{\mathcal{G}_K}$ l'algèbre des fonctions continues et \mathcal{G}_K -équivalentes sur S et à valeurs dans C , munie de la topologie de la convergence sur tout \mathcal{G}_K -ouvert.*

Alors A est une algèbre pro-spectrale, et le morphisme d'évaluation fournit un homéomorphisme entre S et $\text{Spm } A$.

Démonstration. — L'évaluation fournit une application continue $i : S \rightarrow \text{Spm } A$. Montrons que i est un homéomorphisme.

Puisque S est localement profini, les fonctions de A séparent les points de S , donc i est injectif. De plus, S étant localement compact, si i est une bijection continue, c'est un homéomorphisme. Il suffit donc de prouver que i est surjectif.

Supposons d'abord que S est compact. Alors la sous-algèbre A' des fonctions localement constantes est dense dans A . Par conséquent, un morphisme continu $s : A \rightarrow C$ est défini par sa restriction à A' , et il existe donc un point $j(s) \in S$ tel que $s(f) = f(j(s))$ pour tout $f \in A$. Ceci signifie que $i(j(s)) = s$ et donc que i est surjectif.

Dans le cas général, soit \mathfrak{a} l'idéal de A formé des fonctions à support compact. Soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de \mathcal{G}_K -ouverts de S ; alors la suite $(1_{\Omega_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 dans l'algèbre de Fréchet A . Par conséquent, pour tout $a \in A$, la suite $(a \cdot 1_{\Omega_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a , donc \mathfrak{a} est dense dans A . Il s'ensuit que tout morphisme continu $A \rightarrow C$ est déterminé par sa restriction à $\mathfrak{a} = \varinjlim \mathcal{C}^0(\Omega_n, C)^{\mathcal{G}_K}$. D'après ce qui précède, un tel morphisme provient donc d'un élément de A , donc l'application $i : S \rightarrow \text{Spm } A$ est surjective dans tous les cas. Soit Ω un \mathcal{G}_K -ouvert de A . Alors, Ω étant compact, c'est un ouvert borné de S . De plus, la norme $\|\cdot\|_{\Omega}$ est la norme uniforme sur Ω , et donc le séparé complété de A pour cette norme est $\mathcal{C}(\Omega, C)^{\mathcal{G}_K}$.

Finalement, puisque S est réunion de ses \mathcal{G}_K -ouverts, une fonction est continue sur S si et seulement si elle l'est sur tout \mathcal{G}_K -ouvert Ω , et donc l'application naturelle $j : A \rightarrow \varinjlim \mathcal{C}(\Omega, C)^{\mathcal{G}_K}$ est un homéomorphisme. Par conséquent, A est pro-spectrale. \triangleleft

Par conséquent, (A, S, i) est une variété spectrale affine sur K . En particulier, toute variété potentiellement spectrale étale sur K est spectrale.

Proposition 1.4.2. — *La correspondance qui à un \mathcal{G}_K -espace localement profini associe une variété spectrale affine sur K est fonctorielle et pleinement fidèle.*

Démonstration. — Soient S, S' deux espaces topologiques localement profinis munis d'actions continues de \mathcal{G}_K ; leur structure de variété spectrale est donnée par les algèbres $A = \mathcal{C}(S, C)^{\mathcal{G}_K}$ et $A' = \mathcal{C}(S', C)^{\mathcal{G}_K}$. Pour toute application continue \mathcal{G}_K -équivariante $f : S \rightarrow S'$ et pour tout $a' \in A'$, l'application $a = a' \circ f : S \rightarrow C$ est continue et \mathcal{G}_K -équivariante; l'application $F : A' \rightarrow A, a' \mapsto a$ ainsi définie est un morphisme d'algèbres spectrales, dont le spectre s'identifie à f . Par conséquent, toute application continue \mathcal{G}_K -équivariante $f : S \rightarrow S'$ est analytique. \triangleleft

Définition 1.4.3. — Une *variété spectrale étale* est l'image par ce foncteur d'un espace topologique localement profini et muni d'une action continue de \mathcal{G}_K . Une *variété spectrale constante* est l'image d'un tel espace muni de l'action triviale de \mathcal{G}_K . Une *variété spectrale finie étale* est une variété spectrale étale dont l'espace topologique sous-jacent est fini.

Remarquons qu'une variété spectrale étale est finie si et seulement si son algèbre affine est une algèbre finie.

Tout sous-module ouvert d'un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie est localement profini et définit donc canoniquement une variété spectrale constante. Par abus de notation, on notera en particulier $\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p$, etc. les variétés spectrales constantes associées à ces espaces topologiques.

Proposition 1.4.4. — *Le foncteur qui à un \mathcal{G}_K -espace localement profini associe une variété spectrale étale est adjoint à gauche au foncteur d'oubli qui à une variété spectrale associe le \mathcal{G}_K -espace topologique sous-jacent.*

Démonstration. — Soient T une variété spectrale étale et $S = \text{Spm } A$ une variété spectrale. Puisque tout morphisme spectral définit une application continue et \mathcal{G}_K -équivariante sur les supports, on dispose d'une flèche naturelle $\iota : \text{Hom}(S, T) \rightarrow \mathcal{C}(S, T)^{\mathcal{G}_K}$. Soit $B = \text{Spm } \mathcal{C}(T, C)^{\mathcal{G}_K}$ l'algèbre affine de T . Pour toute application continue \mathcal{G}_K -équivariante $f : T \rightarrow S$ et pour tout $a \in A$, $a \circ f$ est une application continue et \mathcal{G}_K -équivariante définie sur T et à valeurs dans C , c'est-à-dire que $a \circ f \in B$. De plus, l'application $\theta(f) : a \mapsto a \circ f$ est un morphisme d'anneaux de A vers B . Son spectre est alors l'inverse de l'application ι ci-dessus, qui est donc bijective. Enfin, la construction de ι et de θ est fonctorielle par rapport à S et T . \triangleleft

Soit $T = \text{Spm } B$ une variété spectrale étale. Alors les sous- K -algèbres de B correspondent bijectivement aux quotients du \mathcal{G}_K -espace topologique T . Soit à présent $f : T \rightarrow S$ un morphisme de variétés spectrales bornées, correspondant au morphisme $\rho : A \rightarrow B$ d'algèbres spectrales. Alors l'image de ρ correspond à l'application $f : T \rightarrow f(T)$, et donc ρ est surjective si et seulement si f est injective.

1.5. Disques de C . — Notons $K\{X\}$ la complétée de l'algèbre de polynômes $K[X]$ pour la norme définie par $\|\sum a_i X^i\| = \sup \{a_i, i \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 1.5.1. — *$K\{X\}$ est une algèbre spectrale, et l'application naturelle*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_C \longrightarrow \text{Spm } K\{X\} \\ x \longmapsto (f \mapsto f(x)) \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que, pour tout polynôme f à coefficients dans K , $\sup \{|f(x)|, x \in \mathcal{O}_C\} = \|f\|$; quitte à diviser f par son coefficient de plus grande norme, on peut en outre supposer $\|f\| = 1$. Dans ce cas, la réduction modulo \mathfrak{m}_K de f est un élément non nul de $k[X]$; puisque \bar{k} est infini, il existe donc un élément s de \bar{k} sur lequel il ne s'annule pas. Par conséquent, pour tout relèvement x de s dans \mathcal{O}_C , $\|f(x)\| = 1$. \triangleleft

Proposition 1.5.2. — *Pour tout intervalle réel de la forme $I = [0, r[$ ou $I = [0, r]$ où $r \in]0, +\infty[$, notons \mathcal{B}^I le sous- \mathcal{O}_C -module de C formé des x tels que $|x| \in I$, et*

$$K\{X\}^I = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n X^n, a_n \in K \text{ et } \rho^n |a_n| \longrightarrow 0 \text{ pour tout } \rho \in I \right\}.$$

(En particulier, pour tout $r \in |C^\times|$, $\mathcal{B}^{[0,r]}$ est la boule fermée de centre zéro et de rayon r).

- (i) Pour tout $r \in |C^\times|$, $K\{X\}^{[0,r]}$, munie de la norme $\|\sum a_n X^n\| = \sup \{\|a_n\| r^n, n \in \mathbb{N}\}$, est une algèbre spectrale dont le spectre est canoniquement homéomorphe à $\mathcal{B}^{[0,r]}$;
- (ii) pour tout $r \in [0, +\infty[$, $K\{X\}^{[0,r[}$ est une algèbre pro-spectrale dont le spectre est canoniquement homéomorphe à $\mathcal{B}^{[0,r[}$;
- (iii) si $r > 0$ n'appartient pas à $|C^\times|$, alors $K\{X\}^{[0,r]}$ n'est pas une algèbre pro-spectrale (au sens de la définition 1.3.2).

En particulier, $\mathcal{B}^{[0,1]} = \mathfrak{m}_C$, $\mathcal{B}^{[0,+\infty[} = C$ sont des variétés spectrales affines, et $\mathcal{B}^{[0,1]} = \mathcal{O}_C$ est une variété spectrale affine bornée.

Démonstration. — (i) Puisque $r \in |C^\times|$, il existe $a \in \mathcal{O}_C$ tel que $|a| = r$. Alors l'application

$$\begin{cases} K\{Y\} & \longrightarrow & K\{X\}^{[0,r]} \\ Y & \longmapsto & aX \end{cases}$$

est un isomorphisme ; son spectre est l'homéomorphisme $\mathcal{B}^{[0,r]} \rightarrow \mathcal{O}_C$, $x \mapsto x/a$.

(ii) Pour tout $\rho < r$ tel que $\rho \in |C^\times|$, $\mathcal{B}^{[0,\rho]}$ est un ouvert borné de $\mathcal{B}^{[0,r[}$, dont l'algèbre affine s'identifie à $K\{X\}^{[0,\rho]}$ d'après (i), et la réunion de ces ouverts est $\mathcal{B}^{[0,\rho]}$. Or, $K\{X\}^{[0,\rho]}$ est l'intersection dans $K[[X]]$ des algèbres $K\{X\}^{[0,\rho]}$, pour $\rho < r$. Par conséquent, c'est bien une algèbre pro-spectrale.

(iii) Dire que $K\{X\}^{[0,r]}$ est spectrale reviendrait à dire que l'application canonique $f : K\{X\}^{[0,r]} \rightarrow \bigcap K\{X\}^{[0,\rho]}$ est un isomorphisme, l'intersection étant prise sur les $\rho < r$ tels que $\rho \in |C^\times|$. Or, il existe des éléments $a_n \in C$ tels que $|a_n| \in [\frac{1}{2}r^n, r^n]$; en posant $b_n = a_n X^n$, on voit que $\|b_n\|_{[0,r]} \geq \frac{1}{2}$, et pour tout $\rho < r$, $\|b_n\|_{[0,\rho]} \leq (\frac{\rho}{r})^n$ et tend donc vers zéro. Par conséquent, l'application f n'est pas un homéomorphisme. \triangleleft

La démonstration du point (i) permet de poser, pour $a \in C^\times$, $K\{X/a\} = K\{X\}^{[0,|a|]}$. Cette notation est compatible avec la multiplication : si $b \in C^\times$, alors $K\{X/(ab)\} = K\{(X/a)/b\}$.

La proposition 1.5.2 munit C , ainsi que tous ses sous- \mathcal{O}_C -modules ouverts non nuls, d'une structure canonique de variété spectrale affine ; en outre, pour tout $a \in C$ non nul, la variété spectrale affine associée au \mathcal{O}_C -module $a\mathcal{O}_C$ est bornée, et son algèbre affine s'identifie canoniquement à $K\{X/a\}$.

1.6. Propriétés des algèbres spectrales. — Soit A une algèbre spectrale, alors on voit immédiatement que son radical de Jacobson est nul ; en particulier, A est réduite. Il existe une réciproque partielle : si A est une algèbre de Banach topologiquement de type fini sur K et réduite, alors elle est spectrale ([II, 3.4.9]).

Il n'est en général pas vrai que tout quotient (même réduit) d'une algèbre de Banach spectrale soit spectral. Soit en effet $A = C\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, et notons I l'idéal de A engendré par les $(pX_{n+1} - X_n)$. Alors : $\text{Spm } A$ est la somme directe d'une infinité dénombrable de copies de \mathcal{O}_C ; A/I est réduit, et $\text{Spm } A/I$ est l'ensemble des éléments p -divisibles de \mathcal{O}_C , et donc nul. Par conséquent, la semi-norme spectrale sur A/I est nulle.

Soit $\rho : A \rightarrow B$ un morphisme continu d'algèbres spectrales, alors pour tout $a \in A$:

$$\begin{aligned} \|\rho(a)\| &= \sup \{|\rho(a)(t)|, t \in \text{Spm } B\} \\ &= \sup \{|a((\text{Spm } \rho)(t))|, t \in \text{Spm } B\} \\ &\leq \sup \{|a(s)|, s \in \text{Spm } A\} \end{aligned}$$

autrement dit, $\|\rho(a)\| \leq \|a\|$, c'est-à-dire que ρ est 1-lipschitzienne.

Proposition 1.6.1. — Soient A et B deux algèbres spectrales, et $\rho : A \rightarrow B$ un morphisme continu. Si $f = \text{Spm } \rho : \text{Spm } A \rightarrow \text{Spm } B$ est surjective, alors ρ est une isométrie.

Démonstration. — Soit $a \in A$. Puisque A est spectrale, $\|a\|_A = \sup \{|s(a)|, s \in \text{Spm } A\}$; donc, $\text{Spm } \rho$ étant surjective, $\|a\|_A = \sup \{|t(\rho(a))|, t \in \text{Spm } B\}$. Par conséquent, on a bien $\|a\|_A = \|a\|_B$. \triangleleft

Proposition 1.6.2. — Soient A, B deux algèbres de Banach et $\rho : A \rightarrow B$ un morphisme de k -algèbres. On suppose que B est spectrale. Alors ρ est continu.

Démonstration. — Puisque A, B sont deux algèbres de Banach, il suffit de montrer que le graphe de ρ est fermé dans $A \times B$, c'est-à-dire que, si (a_n) est une suite d'éléments de A tendant vers zéro telle que la suite des $(\rho(a_n))$ a une limite $b \in B$, alors $b = 0$.

Soit $t \in \text{Spm } B$. Alors l'application composée $t \circ \rho$ est le quotient de A par un idéal maximal, et donc continue. Donc, puisque les a_n tendent vers zéro, la limite des $t(\rho(a_n))$ est nulle; par conséquent, puisque t est continue, on a $t(b) = 0$. Puisque ceci est vrai pour tout t , on en déduit que $\|b\| = 0$, et donc que $b = 0$. \triangleleft

Corollaire 1.6.3. — Soit A une algèbre spectrale. Alors toutes les normes d'algèbre de Banach sur A sont équivalentes.

Démonstration. — Notons $\|\cdot\|$ la norme spectrale sur A , et soit N une autre norme d'algèbre de Banach. Alors l'identité de A est continue pour les normes N sur la source et $\|\cdot\|$ sur le but; puisque c'est une bijection, et puisque les deux normes rendent A complète, il découle du théorème du graphe fermé que son inverse est également continu. \triangleleft

Proposition 1.6.4. — Soit $\rho : A \rightarrow B$ un morphisme d'algèbres spectrales, de noyau $\mathfrak{a} \subset A$. Alors $A' = A/\mathfrak{a}$ est une algèbre spectrale, et le morphisme induit $A' \rightarrow B$ est une isométrie.

Démonstration. — Prouvons d'abord la deuxième partie : il suffit de montrer que la norme d'algèbre $\|\cdot\|_{A'}$ sur A' est équivalente à la norme $\|\cdot\|_B$ provenant de B . Puisque ρ est continue, $\|\cdot\|_B$ est dominée par $\|\cdot\|_{A'}$; il reste à montrer l'autre inégalité, c'est-à-dire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout $a \in A$, il existe $b \in \mathfrak{a}$ avec $\|a + b\| \leq C \|\rho(a)\|$.

Pour tout entier n , notons $F_n = \{a \in A, (\exists b \in \mathfrak{a}) \|a + b\| \leq n \|\rho(a)\|\}$. Puisque ρ est continue, F_n est l'image inverse dans A d'un fermé de A' (pour la norme $\|\cdot\|_{A'}$, et donc un fermé de A). Soit $a \in A$. Si $a \in \mathfrak{a}$, alors $\rho(a) = 0$ et il suffit de poser $b = -a$ pour voir que $a \in F_n$ pour tout n ; si $a \notin \mathfrak{a}$, alors $\|\rho(a)\| > 0$ et donc pour n assez grand, $a \in F_n$.

Par conséquent, A est la réunion des fermés F_n ; puisque A est complet, d'après le théorème de Baire, il s'ensuit qu'il existe n tel que F_n soit d'intérieur non vide, et donc que

pour tout $a \in A$, il existe m tel que $p^m a \in F_n$. Par conséquent, $\|\cdot\|_{A'}$ est bien dominée par $\|\cdot\|_B$, et donc ces deux normes sont équivalentes.

Montrons à présent que A' est spectrale. Soit $a \in A'$: alors $\|a\|_{\text{sp}} \leq \|a\|_{A'}$, il reste à montrer l'autre inégalité ; or $\|a\|_{A'} = \|a\|_B$ est la norme spectrale de A sur l'image de $\text{Spm } B$ dans $\text{Spm } A'$, et donc inférieure à $\|a\|_{\text{sp}}$. \triangleleft

Par conséquent, le morphisme $T = \text{Spm } B \rightarrow S = \text{Spm } A$ de variétés spectrales bornées correspondant à $A \rightarrow B$ admet une image $S' = \text{Spm } A'$.

Proposition 1.6.5. — Soit $(A_n, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'algèbres spectrales et de morphismes d'algèbres spectrales $\rho_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$ tels que $\text{Spm } \rho_n : \text{Spm } A_{n+1} \rightarrow \text{Spm } A_n$ soit surjectif ; alors le complété de la réunion des A_n est une algèbre spectrale, et c'est la limite inductive des (A_n) dans la catégorie des algèbres de Banach.

Démonstration. — Observons d'abord que, en vertu de la proposition 1.6.1, les applications ρ_n sont des isométries, et donc en particulier injectives. Notons A' la réunion des A_n , et soit $a \in A_n \subset A'$. Alors, pour tout $m \geq n$, $\|a\|_{A_m} = \|a\|_{A_n}$; on pose alors $\|a\|_{A'} = \lim_m \|a\|_{A_m}$. Notons A le complété de A' pour cette norme ; par construction, $\text{Spm } A$ est la limite projective des $\text{Spm } A_n$, et les applications $\text{Spm } A \rightarrow \text{Spm } A_n$ sont surjectives.

Soit $a \in A$; pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n et $b \in A_n$ tels que $\|a - b\| \leq \varepsilon$. Soit alors $s \in \text{Spm } A_n$ tel que $|b(s)| \geq \|b\| - \varepsilon$; puisque $\text{Spm } A \rightarrow \text{Spm } A_n$ est surjective, s se relève en un élément t de $\text{Spm } A$. On a alors $|a(t)| \geq \|a\| - 2\varepsilon$ et donc $\|a\|_{\text{sp}} \geq \|a\| - 2\varepsilon$. Puisque ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\|a\|_{\text{sp}} = \|a\|$; par conséquent, A est bien une algèbre spectrale. \triangleleft

Proposition 1.6.6. — Soient $\rho' : A \rightarrow B'$, $\rho'' : A \rightarrow B''$ deux morphismes de K -algèbres pro-spectrales. Alors le produit tensoriel complété $B = B' \widehat{\otimes}_A B''$ est une K -algèbre pro-spectrale. De plus, si B' , B'' sont spectrales, alors B est spectrale.

Démonstration. — Notons $S = \text{Spm } A$, $T' = \text{Spm } B'$, $T'' = \text{Spm } B''$, et $T = \text{Spm } B$, et aussi $f' = \text{Spm } \rho' : T' \rightarrow S$ et $f'' = \text{Spm } \rho'' : T'' \rightarrow S$. Alors, par définition du produit tensoriel complété, $T = T' \times_S T''$.

Soit $t = (t', t'')$ un point de T . Puisque B' et B'' sont pro-spectrales, il existe des ouverts bornés Ω', Ω'' de T' et T'' tels que $t' \in \Omega'$ et $t'' \in \Omega''$. Posons $\Omega = \Omega' \times_S \Omega''$; alors $\Omega = (\Omega' \times_S T'') \cap (T' \times_S \Omega'')$, et donc Ω est un ouvert de T . Pour tous $b' \in B'$, $b'' \in B''$, $\omega' \in \Omega'$, $\omega'' \in \Omega''$, on a $|(b' \otimes b'')(\omega', \omega'')| = |b'(\omega')| \cdot |b''(\omega'')|$, et donc $b' \otimes b''$ est bornée sur Ω . Il en est donc de même d'une somme de termes $b'_i \otimes b''_i$, et donc, par complétion, de tout élément de B ; par conséquent, Ω est un ouvert borné de T .

On voit donc que T est la réunion de ses ouverts bornés, et que la famille des $\Omega' \times_S \Omega''$ est cofinale dans les ouverts bornés de T .

De plus, pour tout $b' \in B'$, $\|b' \widehat{\otimes} 1\|_{\Omega} \leq \|b'\|_{\Omega'}$; par conséquent, le morphisme $B' \rightarrow B$ est continue pour les normes $\|\cdot\|_{\Omega'}$ et $\|\cdot\|_{\Omega}$, et se prolonge donc en un morphisme continu $\widehat{B}'_{\Omega'} \rightarrow \widehat{B}_{\Omega}$. On a de même une morphisme continu de A -algèbres $\widehat{B}''_{\Omega''} \rightarrow \widehat{B}_{\Omega}$, et donc une flèche $\widehat{B}'_{\Omega'} \widehat{\otimes}_A \widehat{B}''_{\Omega''} \rightarrow \widehat{B}_{\Omega}$. Puisque par ailleurs $B' \otimes_A B''$ est dense dans B ,

et que la topologie de B est plus fine que celle de $\|\cdot\|_{\Omega}$, $B' \otimes_A B''$ est dense dans \widehat{B}_{Ω} ; par conséquent, $\widehat{B'}_{\Omega'} \widehat{\otimes}_A \widehat{B''}_{\Omega''} \rightarrow \widehat{B}_{\Omega' \times_S \Omega''}$ est un isomorphisme.

Soit j la flèche naturelle $B = \varprojlim(\widehat{B'}_{\Omega'}) \widehat{\otimes} \varprojlim(\widehat{B''}_{\Omega''}) \rightarrow B_s = \varprojlim(\widehat{B'}_{\Omega'} \widehat{\otimes} \widehat{B''}_{\Omega''})$. Soient $f_n \in B' \otimes_A B''$ tels que $j(f_n) \rightarrow 0$ dans B_s ; alors pour tous ouverts bornés Ω' , Ω'' , $\|f_n\|_{\Omega' \times_S \Omega''} \rightarrow 0$. Pour tout $\omega'' \in \Omega''$, on a donc $\|\omega''(f_n)\|_{\Omega'} \rightarrow 0$ dans $\widehat{B'}_{\Omega'}$, et donc dans B' ; puisque les Ω'' sont exhaustifs dans T'' , il s'ensuit que, pour tout $t'' \in T''$, $t''(f_n) \rightarrow 0$ dans B' . De même, pour tout $t' \in T'$, $t'(f_n) \rightarrow 0$ dans B'' . Par conséquent, on a bien $f_n \rightarrow 0$ dans B , et donc j est injective.

De plus, j se restreint en une flèche $B' \otimes_A B''$, qui est la composée

$$B' \otimes_A B'' \longrightarrow B' \otimes_A \varprojlim(\widehat{B''}_{\Omega''}) \longrightarrow \varprojlim(\widehat{B'}_{\Omega'} \otimes \widehat{B''}_{\Omega''}) \subset B_s;$$

les deux premières de ces flèches sont continues et dominantes par hypothèse sur B' et B'' , et la troisième l'est par construction de B_s . Par conséquent, j est continue et surjective; c'est donc bien un homéomorphisme entre B et B_s , et B est bien une algèbre pro-spectrale.

Enfin, si B' , B'' sont spectrales, alors T' , T'' sont des ouverts bornés, et donc $T = T' \times_S T''$ est un ouvert borné; par conséquent, B est spectrale. \triangleleft

Corollaire 1.6.7. — *La catégorie des variétés spectrales affines admet des produits fibrés finis. De plus, le support d'un produit fibré fini est le produit fibré des supports.*

Proposition 1.6.8. — *Soit L une extension algébrique (éventuellement infinie) de K ; on note \widehat{L} son adhérence dans C .*

- (i) \widehat{L} est une K -algèbre spectrale.
- (ii) Pour toute \widehat{L} -algèbre de Banach B , B est une \widehat{L} -algèbre pro-spectrale si et seulement si elle est une K -algèbre pro-spectrale, et une \widehat{L} -algèbre spectrale si et seulement si elle est une K -algèbre spectrale.
- (iii) Pour toute K -algèbre pro-spectrale A , $A \widehat{\otimes}_K \widehat{L}$ est une \widehat{L} -algèbre pro-spectrale; si A est une K -algèbre spectrale, alors $A \widehat{\otimes}_K \widehat{L}$ est une \widehat{L} -algèbre spectrale.

Démonstration. — (i) Puisque K est complet et L/K algébrique, la valeur absolue de K se prolonge de manière unique en une valeur absolue sur \widehat{L} ; celle-ci fait de \widehat{L} une K -algèbre spectrale.

(ii) Soit Σ l'ensemble des K -plongements continus de L dans C . Tout $\sigma \in \Sigma$ s'étend par continuité en un plongement de \widehat{L} dans C . Le choix d'un élément $\sigma_0 \in \Sigma$ définit une bijection $\text{Hom}_K(B, C) \rightarrow \Sigma \times \text{Hom}_L(B, C)$, et un ouvert Ω de $\text{Hom}_K(B, C)$ est borné si et seulement si $\Omega_L = \Omega \cap \text{Hom}_L(B, C)$ l'est.

(iii) D'après la proposition 1.6.6, $A \widehat{\otimes}_K \widehat{L}$ est une K -algèbre spectrale; d'après (ii), c'est donc une \widehat{L} -algèbre spectrale. \triangleleft

On parlera donc parfois d'algèbre spectrale ou pro-spectrale en omettant le corps de base considéré.

Définition 1.6.9. — Soit $S = \text{Spm}_K A$ une variété spectrale affine sur K .

- (i) S est dite *connexe* si $A \widehat{\otimes}_K C$ n'a pas d'idempotents autres que 0 et 1.

(ii) S est dite *irréductible* si A est intègre.

De même, une variété potentiellement spectrale sur K est dite *connexe* si la variété spectrale sur C obtenue par oubli de l'action de \mathcal{G}_K est connexe.

Proposition 1.6.10. — Soient S une variété spectrale affine connexe et T une variété spectrale étale. Alors tout morphisme analytique $S \rightarrow T$ est constant.

Démonstration. — Notons $S = \text{Spm } A$, $T = \text{Spm } B$, et $\rho : B \rightarrow A$ le morphisme continu d'où est issue l'application $f : S \rightarrow T$.

Pour tout ouvert fermé Ω de T stable par \mathcal{G}_K , notons χ_Ω la fonction caractéristique de S . Puisque Ω est ouvert et fermé, χ_Ω est un élément idempotent de B ; donc $\rho(\chi_\Omega)$ est un idempotent de A et vaut donc 0 ou 1. Notons F l'intersection de tous les Ω tels que $\rho(\chi_\Omega) = 1$. Par construction, \mathcal{F} est un compact de T , stable par \mathcal{G}_K , et pour tout Ω , $\rho(\chi_\Omega)$ vaut 1 si $F \subset \Omega$ et 0 sinon.

Si F contient strictement plus d'un point de T , alors il existe un ouvert fermé Ω stable par \mathcal{G}_K et contenant F , tel que l'on puisse écrire $\Omega = \Omega' \amalg \Omega''$ et tel que F ne soit inclus ni dans Ω' ni dans Ω'' ; par conséquent, $1 = \rho(\chi_\Omega) = \rho(\chi_{\Omega'}) + \rho(\chi_{\Omega''}) = 0 + 0$. C'est absurde, donc F est réduit à un point $t \in T$, et f est l'application constante égale à t . \triangleleft

2. Algèbres affinoïdes

Soit d un entier naturel. Rappelons que l'algèbre de Tate en d variables X_1, \dots, X_d sur K est l'algèbre $K\{X_1, \dots, X_d\}$ des séries formelles à coefficients dans K en X_1, \dots, X_d dont les coefficients tendent vers zéro selon le complémentaire des parties finies de \mathbb{N}^d . Cette algèbre est complète et séparée pour la norme de Gauss $\|\cdot\|$ définie par

$$\left\| \sum_{n=(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d} a_n X_1^{n_1} \dots X_d^{n_d} \right\| = \sup \{ |a_n|, n \in \mathbb{N}^d \}.$$

C'est aussi une algèbre spectrale et la norme de Gauss est la norme spectrale ([II, 3.3.2]). De plus, tout idéal \mathfrak{a} de $K\{X_1, \dots, X_d\}$ est fermé et la norme de Gauss induit sur $A = K\{X_1, \dots, X_d\}/\mathfrak{a}$ une norme qui en fait une K -algèbre de Banach.

2.1. Propriétés. —

Définition 2.1.1. — Une K -algèbre de Banach est dite *affinoïde* si elle est topologiquement de type fini sur K .

Il revient bien sûr au même de dire que A est affinoïde et qu'elle est un quotient d'une algèbre $K\{X_1, \dots, X_n\}$ par un idéal fermé.

Proposition 2.1.2. — Une algèbre affinoïde A vérifie les propriétés suivantes ([II, 3.2.1]) :

- (i) Toutes les normes de Banach sur A sont équivalentes.
- (ii) A est un anneau noethérien.
- (iii) Tout idéal de A est fermé.
- (iv) Soit d la dimension de Krull de A , alors il existe un morphisme injectif et fini $K\{X_1, \dots, X_d\} \rightarrow A$.
- (v) Pour tout idéal maximal \mathfrak{m} de A , A/\mathfrak{m} est une extension finie de K .
- (vi) Si A est réduite, alors c'est une algèbre spectrale ([II, 3.4.9] ; [3, 6.2.1/4]).

En particulier, tout idéal maximal \mathfrak{m} de A donne un morphisme $A \rightarrow A/\mathfrak{m} \rightarrow C$. Par conséquent, si $a \in A$ est un élément dont la transformée de Gelfand ne s'annule pas sur $X = \text{Spm } A$, alors a n'appartient à aucun idéal maximal de A , et est donc inversible sur A .

De plus, il revient au même de dire que A est une K -algèbre affinoïde et que c'est une algèbre finie sur une algèbre de Tate $K\{X_1, \dots, X_d\}$.

Définition 2.1.3. — Une variété spectrale bornée S est dite *rigide* si son algèbre spectrale est une algèbre affinoïde sur K .

On dispose donc d'une antiéquivalence de catégories entre la catégorie des K -algèbres affinoïdes réduites et celle des variétés spectrales affinoïdes sur K .

Un quotient d'une algèbre affinoïde par un idéal (nécessairement fermé) ou le produit tensoriel complété sur K de deux algèbres affinoïdes sont encore des algèbres affinoïdes. Par conséquent, une sous-variété analytique d'une variété analytique rigide, ou l'image d'un

morphisme de variétés spectrales dont le but est une variété spectrale rigide, sont des variétés analytiques rigides.

On rappelle que A° est la sous- \mathcal{O}_K -algèbre $\{a \in A, \|a\| \leq 1\}$, $A^{\circ\circ}$ est l'idéal $\{a \in A, \|a\| < 1\}$, et \bar{A} est la k -algèbre quotient $A^\circ/A^{\circ\circ}$.

Proposition 2.1.4. — [II, 3.5.3]; [3, 6.3.5] Soit $\rho : A \rightarrow B$ un morphisme d'algèbres affinoïdes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) ρ est fini ;
- (ii) ρ est entier ;
- (iii) $\rho^\circ : A^\circ \rightarrow B^\circ$ est entier ;
- (iv) $\bar{\rho} : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ est entier ;
- (v) $\bar{\rho} : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ est fini.

Soit A une algèbre affinoïde. Alors A est un anneau noethérien ; par conséquent, la dimension (comme K -espace vectoriel) de toute sous- K -algèbre finie de A est majorée par le nombre (fini) d'idéaux premiers minimaux de A . La réunion des sous-algèbres finies de A est donc une sous-algèbre finie, qui est maximale dans A ; on note $\pi_0(A)$ cette sous-algèbre, et $\pi_0(\text{Spm } A) = \text{Spm}(\pi_0(A))$ la variété spectrale étale associée. La variété spectrale $\pi_0(\text{Spm } A)$ est équipée d'un morphisme $\text{Spm } A \rightarrow \pi_0(\text{Spm } A)$ qui est universel pour les morphismes analytiques de A vers une variété spectrale étale.

Définition 2.1.5. — Une variété spectrale est dite *prorigide* si c'est une limite projective de variétés spectrales rigides et de morphismes spectraux surjectifs.

En particulier, une variété spectrale prorigide est bornée.

2.2. Formes différentielles. — Soit A une K -algèbre pro-spectrale. Un A -module de Banach est un K -espace de Banach M , muni d'une structure de A -module telle que la multiplication $A \times M \rightarrow M$ soit une application continue.

Définition 2.2.1. — Soit M un A -module de Banach. Une K -dérivation continue de A dans M est une application K -linéaire continue $d : A \rightarrow M$ telle que $d(ab) = a \cdot d(b) + b \cdot d(a)$ pour tous $a, b \in A$.

Supposons que A soit le quotient de $K\{X_1, \dots, X_n\}$ par l'idéal (automatiquement fermé) engendré par $F_1(X_1, \dots, X_n), \dots, F_m(X_1, \dots, X_n)$. Alors le A -module Ω_A , quotient de $A dX_1 \oplus \dots \oplus A dX_n$ par le sous-module (automatiquement fermé) engendré par les différentielles des F_i , est muni d'une K -dérivation continue $d : A \rightarrow \Omega_A$.

Proposition 2.2.2. — [II, 3.6.2] Pour toute K -dérivation continue $D : A \rightarrow M$, il existe une unique application A -linéaire (automatiquement continue) $f : \Omega_A \rightarrow M$ telle que $D = f \circ d$.

En particulier, le module Ω_A ainsi construit ne dépend pas du choix des générateurs affinoïdes X_i ni des relations F_j . Il est également isomorphe au quotient $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$, où \mathfrak{a} est le noyau du morphisme de multiplication de $A \hat{\otimes} A$ vers A .

Proposition 2.2.3. — [II, 3.6.3] Soit A une algèbre affinoïde intègre, de dimension d .

- (i) $\Omega_A \otimes_A (\text{Frac } A)$ est un $(\text{Frac } A)$ -espace vectoriel de dimension d .
- (ii) Pour tout idéal maximal \mathfrak{m} de A , sont équivalentes :
 - (a) $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau local régulier ;
 - (b) $(\Omega_A)_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$ -module libre (de rang d) ;
 - (c) $\Omega_A \otimes_A (A/\mathfrak{m})$ est un (A/\mathfrak{m}) -espace vectoriel de dimension d ;
 - (d) la matrice des $(\partial F_i / \partial X_j) \pmod{\mathfrak{m}}$ est de rang au moins d .

Si les conditions sont vérifiées, on dit que l'idéal \mathfrak{m} de A est *régulier*. Un point $x : A \rightarrow K$ est dit *régulier* si son noyau l'est ; il est dit *singulier* s'il n'est pas régulier. Il résulte de la proposition que l'ensemble des points singuliers est un fermé de $\text{Spm } A$ pour la topologie de Zariski. La variété analytique affine $\text{Spm } A$ est dite *lisse* si tous ses points sont réguliers.

2.3. Théorèmes d'inversion locale et globale. — Soient A une algèbre affinoïde, et soient $f \in A$ et $c \in K$ non nul. On note $A\{f/c\}$ l'algèbre affinoïde $A\{Y\}/(cY - f)$. Cette notation est compatible avec la notation $K\{X/a\}$ introduite en 1.5.2. Pour tous $a_1, \dots, a_r \in A$ et $c_1, \dots, c_r \in K$ non nuls, on note encore $A\{a_1/c_1, \dots, a_r/c_r\} = A\{a_1/c_1\} \dots \{a_r/c_r\}$. Soit $X = \text{Spm } A$, alors $\text{Spm } A\{a_1/c_1, \dots, a_r/c_r\}$ s'identifie au sous-ensemble de X formé des x tels que $|a_i(x)| \leq |c_i|$ pour tout i .

Définition 2.3.1. — Soit \mathfrak{a} un idéal d'une algèbre affinoïde A (de type fini puisque A est noethérienne). Un *voisinage (analytique) tubulaire* de $Y = \text{Spm}(A/\mathfrak{a})$ dans $X = \text{Spm } A$ est une variété spectrale affine Y' de la forme

$$\text{Spm } A\left\{\frac{a_1}{c}, \dots, \frac{a_n}{c}\right\},$$

où (a_1, \dots, a_n) est une famille de générateurs de \mathfrak{a} et où $c \in K$ est non nul.

Autrement dit, si Y est défini par les équations $a_i(x) = 0$ dans X , alors Y' est défini par les inéquations $|a_i(x)| \leq |c|$. En particulier, Y' est naturellement équipée de morphismes $Y \rightarrow Y'$ et $Y' \rightarrow X$, dont la composition est le morphisme naturel $Y \rightarrow X$. Il est clair qu'un voisinage tubulaire Y'' de Y dans Y' est encore un voisinage tubulaire de Y dans X .

Proposition 2.3.2. — [I5, 1.8, 1.9] Soient $\rho : A \rightarrow B$ un morphisme d'algèbres affinoïdes et $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_r)$ un idéal de A .

- (i) Supposons que ρ fasse de $B/\mathfrak{a}B$ une algèbre finie sur A/\mathfrak{a} . Alors il existe un élément c de K tel que $A' = A\{a_1/c, \dots, a_r/c\} \rightarrow B' = B\{a_1/c, \dots, a_r/c\}$ soit finie.
- (ii) Supposons que $A/\mathfrak{a} \rightarrow B/\mathfrak{a}B$ soit surjective. Alors il existe un élément c de K tel que $A' \rightarrow B'$ soit surjective.

Démonstration. — (i) Il suffit de le démontrer si \mathfrak{a} est l'idéal principal (a) . Soient f_1, \dots, f_n des générateurs topologiques de B . Choisissons une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ sur A et B telle que $\rho(A^\circ) \subset B^\circ$; alors, puisque $A/a \rightarrow B/a$ est fini, $A^\circ/(aA^\circ) \rightarrow B^\circ/(aB^\circ)$ est fini. Il existe par conséquent des polynômes unitaires P_1, \dots, P_s à coefficients dans A° tels que $P(f_i)$ s'annule dans B°/a , c'est-à-dire qu'il existe $u_i \in B^\circ$ tel que $P(f_i) = au_i$.

Soit à présent $c \in K$ tel que $|cu_i| < 1$ pour tout i ; notons $B' = B\{a/c\}$ et $A' = A\{a/c\}$. Alors les images des f_i dans $\overline{B'}$ sont entières sur $\overline{A'}$. Puisque $\overline{B'}$ est engendré sur $\overline{A'}$ par les f_i et par l'image de a/c , et puisque cette dernière appartient à $\overline{A'}$, il s'ensuit que $\overline{B'}$ est entier sur $\overline{A'}$. Par conséquent, B' est fini sur A' .

(ii) Quitte à se restreindre à un voisinage tubulaire de $\text{Spm}(A/\mathfrak{a})$, on peut supposer d'après (i) que B est fini sur A . Alors, puisque $\mathfrak{a}(B/A) = B/A$, d'après le lemme de Nakayama, il existe un élément u de $1 + \mathfrak{a}$ tel que $u(B/A) = 0$, c'est-à-dire $uB = uA$. Par conséquent, l'application $A[1/u] \rightarrow B[1/u]$ est surjective. Puisque $u \in 1 + \mathfrak{a}$, si a_1, \dots, a_r sont des générateurs de A , on peut écrire $u = 1 + g_1a_1 + \dots + g_r a_r$ pour $g_1, \dots, g_r \in A$. Soit alors $c \in K$ tel que $|cg_i| < 1$ pour tout $i = 1, \dots, r$. Alors u est inversible dans $A' = A\{a_1/c, \dots, a_r/c\}$, et donc $A[1/u] \subset A'$; de même, $B[1/u] \subset B'$. Puisque B' est engendré par $B[1/u]$ et par les a_i/c , il est engendré par A' ; donc $A' \rightarrow B'$ est surjective. \triangleleft

Proposition 2.3.3. — Soient A une algèbre affinoïde de dimension d , $S = \text{Spm } A$, et $s \in S$ un point régulier. Il existe alors un voisinage tubulaire $T = \text{Spm } B$ de s dans S tel que, si $t : B \rightarrow C$ est le prolongement de s , alors l'idéal maximal $\text{Ker } t$ de B est engendré par d éléments de B .

Démonstration. — Soient (f_1, \dots, f_n) des générateurs de $\mathfrak{m} = \text{Ker } s$. Puisque \mathfrak{m} est un idéal maximal régulier, on peut supposer, quitte à étendre la famille (f_1, \dots, f_n) , que (f_1, \dots, f_d) est une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Notons A_s le localisé en \mathfrak{m} de A , et $\mu : A \rightarrow A_s$ l'application de localisation. Puisque A_s est régulier, (f_1, \dots, f_d) est une famille de générateurs de son idéal maximal $\mathfrak{m}A_s$. Il existe donc des éléments g et $a_{i,j}$ de A , pour $i = d+1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, d$, tels que $g(s) \neq 0$ et, pour tout $i = d+1, \dots, n$,

$$\mu(f_i) = \frac{a_{i,1}f_1 + \dots + a_{i,d}f_d}{\mu(g)}.$$

Ceci signifie encore que $gf_i - (a_{i,1}f_1 + \dots + a_{i,d}f_d) \in \text{Ker } \mu$.

Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ les idéaux premiers minimaux de A . Puisque A_s est régulier, il est intègre et a donc un unique idéal premier minimal; par conséquent, $\text{Ker } s$ contient un unique idéal premier minimal de A , par exemple \mathfrak{p}_1 . Pour tout $a \in \text{Ker } \mu$, il existe $b \in A \setminus \text{Ker } s$ tel que $ab = 0$; on a alors $ab \in \mathfrak{p}_1$ et $b \notin \mathfrak{p}_1$, donc $a \in \mathfrak{p}_1$. On a donc $\text{Ker } \mu = \mathfrak{p}_1$. En outre, puisque aucun des idéaux $\mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_r$ n'est inclus dans $\text{Ker } s$, leur intersection ne l'est pas non plus, et il existe donc un élément h de $(\mathfrak{p}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r)$ tel que $h(s) \neq 0$.

On munit l'algèbre A de la norme image de la norme canonique sur $K\{X_1, \dots, X_n\}$ par la surjection $K\{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow A$ qui à X_i associe f_i . Soit $c \in K$ un élément non nul et tel que $|c| < \min \left\{ \frac{|g(s)|}{\|g\|}, \frac{|h(s)|}{\|h\|} \right\}$. Notons T le voisinage tubulaire de s dans S défini par l'algèbre affine

$$B = A \left\{ \frac{f_1}{c}, \dots, \frac{f_n}{c} \right\},$$

et $\rho : A \rightarrow B$ l'application canonique. Par construction de la norme sur A , il existe une écriture $h = \sum h_{i_1, \dots, i_n} f_1^{i_1} \dots f_n^{i_n}$ telle que $h_{0, \dots, 0} = h(s)$ et $|a_{i_1, \dots, i_n}| < |c^{-1}h(s)|$; on en déduit que, pour tout $t \in T$, $h(t) \neq 0$. Par conséquent, $\rho(h)$ est inversible dans B ; de même, $\rho(g)$ est inversible dans B .

Soit $a \in \mathfrak{p}_1$. Puisque $h \in \mathfrak{p}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r$, ha appartient à $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r = 0$, et donc $\rho(ha) = 0$. Par conséquent, $\rho(a) = 0$, c'est-à-dire que $\text{Ker } \mu = \mathfrak{p}_1 \subset \text{Ker } \rho$. Puisque, pour $i \geq d + 1$, $gf_i \in (f_1, \dots, f_d) + \text{Ker } \mu$, on a donc $\rho(g)\rho(f_i) \in (\rho(f_1), \dots, \rho(f_d))$; puisque $\rho(g) \in B^\times$, ceci implique que $\rho(\text{Ker } s) = \text{Ker } t$ est engendré par $\rho(f_1), \dots, \rho(f_d)$. \triangleleft

Proposition 2.3.4. — [2, 2.6] Soient A une algèbre affinoïde de dimension d , $S = \text{Spm } A$, et $s \in S$ un point régulier. Il existe alors un voisinage tubulaire de s dans S qui est isomorphe comme variété analytique à \mathcal{O}_C^d .

Démonstration. — D'après la proposition 2.3.3, on peut supposer, quitte à se restreindre à un voisinage tubulaire de s , que le noyau de s est engendré par d fonctions f_1, \dots, f_d . Alors l'application de $K\{X_1, \dots, X_d\}$ vers A qui à X_i associe f_i induit un isomorphisme entre $K\{X_1, \dots, X_d\}/(X_1, \dots, X_d)$ et $A/(\text{Ker } s)$. Par conséquent, d'après la proposition 2.3.2, il existe un élément non nul c de K tel que

$$K\left\{\frac{X_1}{c}, \dots, \frac{X_d}{c}\right\} \longrightarrow A' = A\left\{\frac{f_1}{c}, \dots, \frac{f_d}{c}\right\}$$

soit encore surjective. Puisque ces deux algèbres sont par construction de même dimension d , cette application est un isomorphisme; autrement dit, A' est isomorphe à une algèbre affinoïde libre en d indéterminées. \triangleleft

Proposition 2.3.5. — Soit $\rho : A \rightarrow B$ un morphisme d'algèbres affinoïdes réduites. On suppose que $S = \text{Spm } A$ et $T = \text{Spm } B$ sont lisses, et que $f = \text{Spm } \rho : T \rightarrow S$ est une bijection. Alors $\rho : A \rightarrow B$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Remarquons d'abord que, puisque $f : T \rightarrow S$ est surjective, $\rho : A \rightarrow B$ est une isométrie. Soient $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r$ les idéaux premiers minimaux de B . Alors $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$ est encore un idéal premier de A ; de plus, l'application $\rho : A \rightarrow B \rightarrow (B/\mathfrak{q}_1) \times \dots \times (B/\mathfrak{q}_r)$ se factorise par $(A/\mathfrak{p}_1) \times \dots \times (A/\mathfrak{p}_r)$. Puisque $\text{Spm } B$ est lisse, $\text{Spm}(B/\mathfrak{q}_i)$ est lisse. En outre, f étant bijective, sa restriction en une application $\text{Spm}(B/\mathfrak{q}_i) \rightarrow \text{Spm}(A/\mathfrak{p}_i)$ est encore bijective. Par conséquent, on peut supposer que B est un anneau intègre. Dans ce cas, A est également intègre.

Notons d, d' les dimensions respectives de A et B . Puisque S et T sont lisses, tout point $s \in S$ a un voisinage tubulaire isomorphe à \mathcal{O}_C^d ; de même, tout point $t \in T$ a un voisinage tubulaire isomorphe à $\mathcal{O}_C^{d'}$. En composant ces isomorphismes et l'application $T \rightarrow S$, et quitte à se restreindre à un produit de boules dans \mathcal{O}_C^d , on obtient une application analytique entre $\mathcal{O}_C^{d'}$ et \mathcal{O}_C^d , qui induit une bijection sur les points. Par conséquent, cette application est un isomorphisme analytique, ce qui implique que $d = d'$.

Puisque ρ est une isométrie, $\bar{\rho}$ est injectif; puisque A et B sont de même dimension, \bar{A} et \bar{B} le sont aussi. Par conséquent, d'après [2, 3.8], il existe des éléments non nuls $a \in \bar{A}$, $b \in \bar{B}$ tels que $\bar{A}[a^{-1}] \rightarrow \bar{B}[b^{-1}]$ soit un morphisme fini. Soient $a' \in A$, $b' \in B$ des relèvements respectifs de a, b ; alors $A[(a')^{-1}] \rightarrow B[(b')^{-1}]$ est fini.

Notons L et M les corps de fractions respectifs de A et B . Alors M est une extension séparable de L , et donc engendrée par un élément $b \in M$; quitte à multiplier b par un élément

de L , on peut supposer que b est entier sur A . Soit $P(X) = X^n + c_1X^{n-1} + \dots + c_n$ le polynôme minimal de b sur A ; alors $M = L[X]/(P(X))$. Un élément T de $T = \text{Hom}(B, C) = \text{Hom}(M, C)$ est donc déterminé par $s = f(t) \in X$ et par la donnée d'une racine ξ de $s(P)$ dans C . Puisque C est algébriquement clos, ceci signifie que chaque élément s a n antécédents; f étant bijective, ceci implique que $n = 1$, c'est-à-dire que $M = L$.

Par conséquent, $B \subset L$. Puisque B est topologiquement de type fini, il existe un élément $a \in A$ tel que $B = A[1/a]$. Alors $\text{Spm } B = \text{Spm } A$ entraîne que $s(a) \neq 0$ pour tout $s \in \text{Spm } A$, c'est-à-dire que a est inversible dans A ; par conséquent, $B = A$. \triangleleft

2.4. Complétude. —

Lemme 2.4.1. — *Soit S une variété spectrale bornée rigide. Alors tout élément de l'algèbre affine A de S est une fonction uniformément continue sur S .*

Démonstration. — Puisque S est rigide, A est topologiquement engendrée par des éléments X_1, \dots, X_n , et (puisque la norme est ultramétrique) il suffit de montrer que ces éléments induisent des fonctions uniformément continues sur S . Puisque A est un quotient de $K\{X_1, \dots, X_n\}$, alors S est un sous-espace de l'espace affine \mathcal{O}_C^n , et on peut donc supposer que $A = K\{X_1, \dots, X_n\}$. Enfin, il est clair que les fonctions X_1, \dots, X_n sont uniformément continues sur l'espace affine. \triangleleft

Puisque le passage à la limite projective de variétés spectrales bornées correspond à la réunion complétée des algèbres affines, le résultat du lemme reste vrai sur une variété spectrale prorigide.

Proposition 2.4.2. — *Soient T et S deux variétés spectrales bornées; on suppose que S est prorigide. Alors l'espace des fonctions analytiques définies sur T et à valeurs dans S est complet pour la topologie de la convergence uniforme sur tout ouvert borné.*

Démonstration. — Soit $(f_n : X \rightarrow Y)$ une suite de Cauchy. Soient A et B les algèbres spectrales respectives de T et S , et $\rho_n : A \rightarrow B$ le morphisme correspondant à f_n ; notons encore \mathcal{A} et \mathcal{B} les boules unité de A et B . Soit $a \in A$. Alors, si $m, n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\rho_m - \rho_n\| &\leq \sup \{ \|\rho_m(a) - \rho_n(a)\|, a \in \mathcal{A} \} \\ &\leq \sup \{ |\rho_m(a)(t) - \rho_n(a)(t)|, a \in \mathcal{A}, y \in Y \} \\ &\leq \sup \{ |a(f_m(t)) - a(f_n(t))|, a \in \mathcal{A}, y \in Y \}. \end{aligned}$$

Or, puisque S est prorigide, d'après le lemme 2.4.1, a est une fonction uniformément continue sur S ; puisque la suite (f_n) est de Cauchy, ceci entraîne que la suite (ρ_n) est de Cauchy. Par conséquent, puisque B est une algèbre de Banach, elle converge, et sa limite ρ munit la limite des f_n d'une structure spectrale. \triangleleft

3. Groupes spectraux affines

3.1. Groupes spectraux. —

Définition 3.1.1. — La catégorie \mathbf{GS}_K des *groupes spectraux affines* (sous-entendu : commutatifs) est la catégorie dont les objets sont les objets en groupes (commutatifs) de la catégorie des variétés spectrales affines et dont les morphismes sont les morphismes de variétés spectrales affines qui sont des morphismes de groupes.

Tous les groupes spectraux affines considérés seront commutatifs.

Un groupe spectral affine est donc isomorphe à $\mathrm{Spm} A$, où A est une algèbre pro-spectrale munie d'un morphisme continu $\Delta : A \rightarrow A \widehat{\otimes}_K A$, satisfaisant les axiomes habituels d'une comultiplication cocommutative. Un tel objet est appelé *bigèbre pro-spectrale*.

Une *structure K -spectrale* sur un groupe topologique G muni d'une action continue de \mathcal{G}_K est un groupe spectral affine dont le groupe topologique sous-jacent s'identifie à G .

Soit $G = \mathrm{Spm} A$ un groupe spectral. Alors, pour tout élément g de G , l'application $(g \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta : A \rightarrow A$ est un morphisme d'algèbres spectrales, appelé *translation par g* . Le morphisme de variétés spectrales associé est la translation $G \rightarrow G, x \mapsto x + g$.

Soient $G' \rightarrow H, G'' \rightarrow H$ des morphismes de groupes spectraux affines, alors d'après la proposition 1.6.6, $G = G' \times_H G''$ est une variété spectrale affine ; puisque $G \times G = (G' \times_H G'') \times (G' \times_H G'') = (G' \times G') \times_{(H \times H)} (G'' \times G'')$, les morphismes de multiplication $G' \times G' \rightarrow G'$ et $G'' \times G'' \rightarrow G''$ donnent bien un morphisme spectral $G \times G \rightarrow G$, qui coïncide avec la loi de groupe de G . Par conséquent, G est un groupe spectral affine, et c'est le produit fibré de $G' \rightarrow H$ et $G'' \rightarrow H$ dans la catégorie des groupes spectraux affines.

En particulier, la catégorie des groupes spectraux affines admet des noyaux et des produits finis.

On dit qu'un groupe spectral est *borné* si la variété spectrale sous-jacente l'est. Le caractère borné est conservé par les opérations de produit fibré, limite projective et de noyau.

Enfin, d'après la proposition 1.6.4, tout morphisme de groupes spectraux $f : G \rightarrow G'$ admet une image dans la catégorie des variétés spectrales ; on voit alors que cette image est naturellement munie d'une structure de groupe spectral par la multiplication de G' , et que c'est encore l'image de f dans la catégorie des groupes spectraux.

3.2. Groupes spectraux étales. — Soit G un groupe topologique (abélien) localement profini, muni d'une action continue de \mathcal{G}_K par automorphismes de groupe. Alors la variété spectrale étale G est un groupe spectral affine ; en notant $A = \mathcal{C}(G, C)^{\mathcal{G}_K}$, la comultiplication sur A est donnée par $(\Delta f)(s, s') = f(s + s')$ pour $s, s' \in S$.

On déduit immédiatement de la proposition 1.4.2 le résultat suivant.

Proposition 3.2.1. — *La correspondance entre groupes topologiques localement profinis munis d'une action de \mathcal{G}_K et groupes spectraux affines est fonctorielle et pleinement fidèle.*

Définition 3.2.2. — Les groupes spectraux étales sont les objets de son image essentielle. Les groupes spectraux constants sont les groupes spectraux étales dont l'action de \mathcal{G}_K associée est triviale.

Par exemple, tout \mathbb{Z}_p -module de type fini a une structure naturelle de groupe spectral constant borné, et tout \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie définit un groupe spectral constant; toute \mathbb{Q}_p -représentation de \mathcal{G}_K de dimension finie a une structure naturelle de groupe spectral étale, et tout réseau stable d'une telle représentation définit un groupe spectral étale borné.

Pour tout groupe topologique localement profini G muni d'une action continue de \mathcal{G}_K , on notera encore G le groupe spectral étale associé à G .

La proposition 1.6.10 entraîne que tout morphisme entre un groupe spectral connexe et un groupe spectral étale est nul; la proposition 1.4.4 entraîne que les morphismes d'un groupe spectral étale vers un groupe spectral quelconque sont les morphismes de groupes topologiques.

3.3. Groupes spectraux vectoriels. — On appelle C -représentation de \mathcal{G}_K ([10, 1.3]) un C -espace vectoriel W de dimension finie muni d'une action continue et semi-linéaire de \mathcal{G}_K . Un morphisme de C -représentations de \mathcal{G}_K est une application C -linéaire et \mathcal{G}_K -équivariante.

Un \mathcal{G}_K -sous-module d'une C -représentation W est un sous- \mathcal{O}_C -module stable par \mathcal{G}_K . Un \mathcal{G}_K -réseau de W est un \mathcal{G}_K -sous-module qui est un \mathcal{O}_C -module libre de rang égal à la dimension de W . Tout \mathcal{G}_K -sous-module ouvert de W est la réunion des \mathcal{G}_K -réseaux qu'il contient.

Soit W une C -représentation de \mathcal{G}_K . On note A_0 l'algèbre symétrique sur C du dual W^* de W ; A_0 est munie d'une action de \mathcal{G}_K définie par $g(c \cdot \eta) = g(c) \cdot (\eta \circ g)$ pour tous $g \in \mathcal{G}_K$, $c \in C$ et $\eta \in W^*$. Cette action est semi-linéaire.

Soit A_∞ la complétion de A_0 pour la topologie I -adique, où I est l'idéal engendré par le dual de W . Le choix d'une base de W sur C identifie A_0 à $C[X_1, \dots, X_d]$, et A_∞ à $C[[X_1, \dots, X_d]]$.

Pour tout \mathcal{G}_K -sous-module ouvert Ω de W , notons A_Ω la sous- K -algèbre de A_∞ formée des séries convergentes sur Ω .

Proposition 3.3.1. — Soit Ω un \mathcal{G}_K -sous-module ouvert de W . Alors l'algèbre A_Ω est une K -algèbre pro-spectrale et munit Ω d'une structure naturelle de groupe spectral affine sur K . Si de plus Ω est un \mathcal{G}_K -réseau de W , alors A_Ω est spectrale.

Démonstration. — Soit d'abord Λ un \mathcal{G}_K -réseau de W . Alors toute série $a \in A_\Lambda$ est bornée sur Λ ; soit

$$\|a\|_\Lambda = \sup \{|a(x)|, x \in \Lambda\}.$$

Il est clair par construction de A_Λ que les flèches d'évaluation fournissent une application continue $\Lambda \rightarrow \text{Spm } A_\Lambda$; puisque A_0 est dense dans A_Λ , tout morphisme continu $A_\Lambda \rightarrow C$ est déterminé par sa restriction à A_0 et provient donc d'un élément de Λ . Par conséquent,

A_Λ est une algèbre spectrale et $\text{Spm } A_\Lambda$ est homéomorphe à Λ . De plus, la loi de groupe sur Λ munit A_Λ d'une structure de bigèbre spectrale, qui fait de Λ un groupe potentiellement spectral.

Soit à présent Ω un \mathcal{G}_K -sous-module ouvert quelconque de W . Alors Ω est la réunion des \mathcal{G}_K -réseaux Λ de W tels que $\Lambda \subset \Omega$; par conséquent, A_Ω est l'intersection des A_Λ , et donc une algèbre pro-spectrale. \triangleleft

On voit en particulier que pour tout \mathcal{G}_K -réseau Λ de W , le choix d'une base du \mathcal{O}_C -module libre Λ identifie A_Λ à l'algèbre affinoïde $C\{X_1, \dots, X_d\}$, et donc que Λ est un groupe spectral rigide.

Définition 3.3.2. — La catégorie des *groupes potentiellement spectraux vectoriels* est la sous-catégorie pleine de celle des groupes potentiellement spectraux dont les objets sont les C -représentations de \mathcal{G}_K .

Proposition 3.3.3. — *Le foncteur naturel de la catégorie des C -représentations de dimension finie de \mathcal{G}_K vers celle des groupes potentiellement spectraux vectoriels est pleinement fidèle.*

Démonstration. — Quitte à choisir des bases, il suffit de montrer que tout endomorphisme du groupe potentiellement spectral vectoriel C est K -linéaire. Or, un tel morphisme provient d'un endomorphisme de $C\{X\}$, et donc d'un élément $f \in K\{X\}$ vérifiant $\Delta(f) = f \widehat{\otimes} 1 + 1 \widehat{\otimes} f$. Un tel élément est bien de la forme $f = aX$ pour un $a \in C$; comme de plus a est \mathcal{G}_K -invariant, on a bien $a \in K$. \triangleleft

On dit que la C -représentation W est *triviale* si la flèche naturelle $W^{\mathcal{G}_K} \widehat{\otimes}_K C \rightarrow W$ est un isomorphisme. Ceci revient à dire qu'il existe un entier $d \geq 0$ tel que W soit isomorphe à la C -représentation C^d . Si W est triviale, alors le groupe potentiellement spectral vectoriel associé est en fait un groupe spectral. Les représentations triviales forment la sous-catégorie pleine des *groupes spectraux vectoriels sur K* de celle des groupes potentiellement spectraux vectoriels; cette catégorie est équivalente à celle des K -espaces vectoriels de dimension finie, l'équivalence de catégorie associant à une représentation W le sous- K -espace vectoriel des vecteurs invariants par \mathcal{G}_K .

En particulier, si $K = C$, alors les groupes potentiellement spectraux vectoriels sont spectraux.

3.4. Groupes spectraux rigides et prorigides. — Un groupe spectral borné G est dit *rigide* si la variété spectrale sous-jacente est rigide (c'est-à-dire est le spectre d'une algèbre affinoïde).

Soient $(G_n, f_n : G_{n+1} \rightarrow G_n)$ une famille indexée par \mathbb{N} de groupes spectraux rigides et de morphismes surjectifs de groupes spectraux. Alors, d'après la proposition 1.6.5, leur limite projective G existe dans la catégorie des variétés spectrales affines; de plus, puisque $G \times G = \varprojlim (G_n \times G_n)$, G est naturellement muni d'une structure de groupe spectral.

Définition 3.4.1. — Un groupe spectral est dit *prorigide* s'il est isomorphe à une limite projective de groupes spectraux rigides et de morphismes surjectifs de groupes spectraux.

Définition 3.4.2. — Une suite $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$ de groupes spectraux affines et de morphismes de groupes spectraux affines est dite *exacte* si la suite de groupes topologiques sous-jacente est exacte.

Proposition 3.4.3. — [2, 5.1, 5.3] Soit $G = \text{Spm } A$ un groupe spectral rigide. Alors G est lisse.

On déduit de la proposition 3.4.3 et de la proposition 2.3.5 le théorème suivant.

Proposition 3.4.4. — Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes spectraux rigides. Si f est bijectif sur les groupes topologiques sous-jacents, alors f est un isomorphisme.

Démonstration. — Soit H' un quotient rigide de H ; alors $f^{-1}(H')$ est un quotient de G , et il est rigide en tant qu'image réciproque d'un groupe rigide. De même, si G' est un quotient rigide de G , alors $f(G')$ est rigide. En outre, puisque f est bijectif et puisque les groupes rigides sont lisses, il résulte de la proposition 2.3.5 que chaque quotient rigide de H est isomorphe à un quotient rigide de G . Par conséquent, G et H sont isomorphes. \triangleleft

La proposition suivante se démontre exactement de la même façon que dans le cas des groupes algébriques.

Proposition 3.4.5. — Soit G un groupe spectral rigide. Alors $\pi_0(G)$ est un groupe fini étale, et tout morphisme de groupes $G \rightarrow H$ où H est un groupe étale se factorise de façon unique en $G \rightarrow \pi_0(G) \rightarrow H$.

Proposition 3.4.6. — Soit G un groupe spectral prorigide connexe. Alors G est une limite projective de groupes spectraux rigides connexes et de morphismes de groupes spectraux.

Démonstration. — Soient $G_n = \text{Spm } A_n$ des groupes spectraux rigides tels que $G = \varprojlim G_n$, et soit A l'algèbre affine de G . Alors A est le complété de la réunion des A_n . Puisque G est connexe, $A \widehat{\otimes}_K C$ n'a pas d'idempotent, et puisque $A_n \subset A$, $A_n \widehat{\otimes}_K C$ n'a pas d'idempotent. Par conséquent, G_n est bien un groupe connexe. \triangleleft

Proposition 3.4.7. — Soit G un groupe spectral prorigide connexe, d'algèbre affine A . Alors A est un anneau intègre.

Démonstration. — Prouvons d'abord le résultat dans le cas où G est rigide. Soit A l'algèbre affine de G . Puisque A est un anneau noethérien, il a un nombre fini d'idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$; en outre, l'intersection des \mathfrak{p}_i est le nilradical de A , c'est-à-dire l'idéal nul puisque A est spectral. Par conséquent, il suffit de montrer que A admet un unique idéal premier minimal.

Puisque les \mathfrak{p}_i sont minimaux, on a, pour tout $i = 2, \dots, r$, $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_1$; puisque \mathfrak{p}_1 est premier, $\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_r \not\subset \mathfrak{p}_1$. Par conséquent, il existe un point $g \in \text{Spm } A$ tel que $\mathfrak{p}_1 \subset \text{Ker } g$ et $\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_r \not\subset \text{Ker } g$; on a donc pour tout $i = 2, \dots, r$, $\mathfrak{p}_i \not\subset \text{Ker } g$. Par conséquent, \mathfrak{p}_1 est l'unique idéal premier minimal inclus dans $\text{Ker } g$. Puisque $G = \text{Spm } A$ est un groupe, on en déduit par translation que tout idéal maximal de A contient un unique idéal premier minimal. Puisque G est connexe, on en déduit que A contient un unique idéal premier minimal, et donc que A est intègre.

Prouvons enfin le cas général. Si $G = \text{Spm } A = \varprojlim G_n$ est connexe, nous savons que G_n est un groupe connexe, et donc son algèbre affine A_n est un anneau intègre. Soit L_n le corps des fractions de A_n , et soit L le complété de la réunion des A_n . Alors toute suite d'éléments a_n de A_n convergente dans A converge dans L , ce qui définit un morphisme injectif $A \rightarrow L$; par conséquent, A est un anneau intègre. \triangleleft

Proposition 3.4.8. — Soient G un groupe spectral prorigide, et $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des groupes spectraux rigides tels que $G = \varprojlim G_n$. Alors $\varprojlim \pi_0(G_n)$ ne dépend pas du choix des $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. — Montrons qu'il existe une unique sous-algèbre de l'algèbre affine de G , engendrée topologiquement par des éléments idempotents, et maximale pour cette propriété. Notons A_n l'algèbre affine de G_n ; alors l'algèbre affine de G est la limite inductive complétée A des A_n . Soit B la sous-algèbre de A qui est la limite inductive complétée des $\pi_0(A_n)$; alors, puisque $\pi_0(A_n)$ est engendrée par des éléments idempotents, B est topologiquement engendrée par des éléments idempotents.

Soit à présent e un élément idempotent de A ; alors e définit une partition de $\text{Spm } A$ en deux ouverts fermés Ω et Ω' pour la topologie de Zariski. Puisque $\text{Spm } A$ est affine, il est quasi-compact pour cette topologie; par conséquent, Ω et Ω' sont quasi-compacts. Notons $f_n : \text{Spm } A \rightarrow \text{Spm } A_n$; alors, puisque $\text{Spm } A$ est la limite projective des f_n , les ouverts de sa topologie de Zariski sont engendrés par les $f_n^{-1}(\Omega_n)$, où Ω_n est un ouvert de $\text{Spm } A_n$. Puisque Ω est quasi-compact, c'est une réunion finie de tels ouverts. Par conséquent, il existe des entiers n et r et des ouverts $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ de $\text{Spm } A_n$ tels que $\Omega = f_n^{-1}(\Omega_1) \cup \dots \cup f_n^{-1}(\Omega_r)$; autrement dit, en posant $\Omega_0 = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_r$, on a $\Omega = f_n^{-1}(\Omega_0)$. De même, quitte à augmenter n , il existe un ouvert Ω'_0 tel que $\Omega' = f_n^{-1}(\Omega'_0)$. Puisque f_n est surjective, on a $\Omega_0 \cup \Omega'_0 = \text{Spm } A_n$; puisque Ω et Ω' sont disjoints, Ω_0 et Ω'_0 le sont aussi. Par conséquent, il existe un idempotent e_0 de A_n dont l'image dans A est e ; puisque $A_n \rightarrow A$ est injective, ceci signifie que $e \in A_n$. \triangleleft

Par conséquent, $\pi_0(A)$ est la sous-algèbre de A engendrée topologiquement par les éléments idempotents. En particulier, $\pi_0(A) = K$ si et seulement si $\text{Spm } A$ est connexe, et $G = \varprojlim G_n$ est connexe si et seulement si tous les G_n le sont.

Proposition 3.4.9. — Soit G un groupe spectral prorigide borné sur K . On note $\pi_0(G)$ la limite projective des $\pi_0(G_n)$, et G^0 le noyau du morphisme de groupes spectraux $G \rightarrow \pi_0(G)$.

- (i) $\pi_0(G)$ est un groupe spectral étale.
- (ii) G^0 est un groupe spectral connexe.
- (iii) Le morphisme $G \rightarrow \pi_0(G)$ est surjectif, et il représente les morphismes de G vers un groupe spectral étale.
- (iv) La suite

$$(3.4.10) \quad 0 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \longrightarrow \pi_0(G) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de groupes spectraux bornés.

Autrement dit, il existe une unique (à isomorphisme près) suite exacte courte $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$, où G'' est étale et G' est connexe.

Démonstration. — (i) Par construction, $\pi_0(G)$ est une limite projective de groupes spectraux finis étale et de morphismes surjectifs, et est donc étale.

(ii) On sait d'après la proposition 3.4.8 que $\pi_0(A)$ est topologiquement engendrée par les idempotents de A , et donc l'algèbre affine de G^0 , qui est le quotient de A par l'idéal engendré par l'idéal d'augmentation de $\pi_0(A)$, n'a pas d'idempotents.

(iii) Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme vers un groupe étale. Quitte à remplacer H par l'image de f , on peut supposer que f est surjectif, et provient donc d'une isométrie $\rho : B \rightarrow A$. Alors $\rho(B)$ est topologiquement engendrée par des éléments idempotents, et donc inclus dans $\pi_0(A)$; par conséquent, f se factorise par $\pi_0(A)$.

(iv) D'après (iii), $G \rightarrow \pi_0(G)$ est surjectif, ce qui montre l'exactitude de la suite 3.4.10. \triangleleft

3.5. Espaces de Banach spectraux effectifs. —

Définition 3.5.1. — La catégorie \mathbf{BS}_K^+ des *espaces de Banach spectraux effectifs sur K* est la sous-catégorie pleine des groupes spectraux affines sur K dont le groupe topologique sous-jacent E est un \mathbb{Q}_p -espace de Banach et tels que l'application de multiplication par $\frac{1}{p}$ dans E soit analytique.

En particulier, si E est un groupe spectral prorigide dont le groupe topologique sous-jacent est un espace de Banach, d'après la proposition 2.3.5, la condition d'analyticité de la multiplication par $\frac{1}{p}$ est automatiquement satisfaite; par conséquent, E est un espace de Banach spectral effectif. Un tel objet est un *espace de Banach spectral effectif prorigide*.

De même, la catégorie $\mathbf{BS}_{K,C}^+$ des *espaces de Banach potentiellement spectraux effectifs sur K* est la sous-catégorie pleine des groupes potentiellement spectraux sur K dont le groupe spectral sur C associé est un espace de Banach spectral effectif sur C .

Par exemple, le groupe spectral étale associé à toute \mathbb{Q}_p -représentation de dimension finie de \mathcal{G}_K est un espace de Banach spectral effectif et le foncteur ainsi défini de la catégorie des \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels de dimension finie vers celle des espaces de Banach spectraux effectifs est pleinement fidèle. Réciproquement, tout espace de Banach spectral effectif étale est localement profini et donc topologiquement engendré par un nombre dénombrable d'éléments. En vertu de la proposition 1.1.8, il est donc soit de dimension finie sur \mathbb{Q}_p , soit isomorphe à $c_0(\mathbb{Q}_p)$.

De même, tout groupe potentiellement spectral vectoriel est encore un espace de Banach potentiellement spectral effectif, et tout groupe spectral vectoriel est un espace de Banach spectral effectif.

De même que pour les variétés prorigides (proposition 1.3.13), le foncteur naturel de la catégorie des espaces de Banach spectraux effectifs prorigides sur K vers celle des espaces de Banach potentiellement spectraux effectifs est pleinement fidèle.

Soient $E' \rightarrow F, E'' \rightarrow F$ des morphismes d'espaces de Banach spectraux effectifs, alors le produit fibré dans la catégorie des groupes spectraux $E = E' \times_F E''$ est encore un espace de Banach spectral effectif. En particulier, la catégorie des espaces de Banach spectraux effectifs admet des noyaux et des produits finis, et ces opérations sont compatibles avec les

opérations correspondantes dans la catégorie des \mathbb{Q}_p -représentations de \mathcal{G}_K . De plus, tout morphisme d'espaces de Banach spectraux effectifs admet une image.

Proposition 3.5.2. — Soit $E = \text{Spm } A$ un espace de Banach spectral effectif. Alors tout réseau fermé \mathcal{E} de E est un ouvert borné de E .

Démonstration. — Puisque la topologie spectrale sur E coïncide avec la topologie d'espace de Banach, \mathcal{E} est ouvert pour la topologie spectrale.

Montrons que \mathcal{E} est borné. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il suffit de montrer que tout élément de A est borné sur \mathcal{E} ; puisque pour tout $f \in A$ et pour tout $c \in K$, $f + c$ est borné sur \mathcal{E} si et seulement si f l'est, on peut en outre se limiter aux éléments f de l'idéal d'augmentation A^+ de A .

Pour tout entier n , notons F_n l'ensemble des $a \in A^+$ telles que $p^n \mathcal{E} \subset a^{-1}(\mathcal{O}_C)$. Pour tout $a \in A^+$, puisque a est continue et $a(0) = 0$, il existe n tel que $a \in F_n$; par ailleurs, F_n est un fermé de A^+ .

Par conséquent, puisque A^+ est complet, d'après le théorème de Baire, il existe un entier n tel que F_n soit d'intérieur non vide; ceci revient à dire que, pour toute $a \in A^+$, il existe un entier r tel que $p^r a \in F_n$, c'est-à-dire $a(p^n \mathcal{E}) \subset p^{-r} \mathcal{O}_C$. Par conséquent, tout élément de A^+ , et donc tout élément de A , est borné sur $p^n \mathcal{E}$.

Notons $\pi : A \rightarrow A$ l'endomorphisme associé à la multiplication par $\frac{1}{p}$ dans E . Soit $f \in A$. Pour tout $x \in E$, on a alors $f(x) = (\pi^n f)(p^n x)$; or, d'après ce qui précède, $\pi^n f$ est bornée sur $p^n \mathcal{E}$. Par conséquent, f est bornée sur \mathcal{E} , et \mathcal{E} est bien un ouvert borné de E . \triangleleft

Par conséquent, les ouverts bornés de E au sens spectral sont exactement ses ouverts bornés au sens de l'espace de Banach, c'est-à-dire ceux qui sont inclus dans un réseau.

On appellera *réseaux spectraux* les réseaux fermés des espaces de Banach spectraux effectifs. Tout réseau spectral \mathcal{E} de E , est naturellement muni d'une structure de groupe spectral affine borné, et la catégorie des espaces de Banach spectraux effectifs est équivalente à celle des réseaux spectraux à isogénie près.

Définition 3.5.3. — Une suite courte d'espaces de Banach spectraux effectifs est dite *exacte* si la suite de groupes spectraux sous-jacente est exacte (définition 3.4.2).

D'après les propositions 1.1.7 et 1.6.5, si (E_n, ρ_n) est une suite d'espaces de Banach spectraux et de morphismes surjectifs $\rho_n : E_{n+1} \rightarrow E_n$, alors la limite projective des E_n existe dans la catégorie des espaces de Banach spectraux effectifs.

Définition 3.5.4. — Un espace de Banach spectral effectif E est dit *prorigide* s'il existe un réseau spectral \mathcal{E} qui est un groupe spectral prorigide.

Cette notion est indépendante du choix du réseau \mathcal{E} : en effet, si \mathcal{E}' est un autre réseau spectral de E , qu'on peut supposer inclus dans \mathcal{E} , et si $\mathcal{E} = \varprojlim \mathcal{E}_n$, alors $\mathcal{E}'_n = \mathcal{E}_n \cap \mathcal{E}'$ est un groupe spectral borné rigide, et $\mathcal{E}' = \varprojlim \mathcal{E}'_n$; par conséquent, \mathcal{E}' est bien un groupe spectral prorigide.

Remarquons que pour tout réseau spectral \mathcal{E} d'un espace de Banach spectral effectif, E est connexe si et seulement si \mathcal{E} l'est ; de même, E est étale si et seulement si \mathcal{E} l'est.

Proposition 3.5.5. — Soit E un espace de Banach spectral effectif prorigide. Alors il existe une unique suite exacte

$$0 \longrightarrow E^0 \longrightarrow E \longrightarrow \pi_0(E) \longrightarrow 0,$$

où E^0 est un espace de Banach spectral connexe et $\pi_0(E)$ est un espace de Banach spectral étale.

De plus, cette suite exacte est scindée (de façon non canonique).

Démonstration. — Soit \mathcal{E} un réseau de E . Montrons d'abord que $\pi_0(\mathcal{E})$ est un réseau d'un espace de Banach spectral effectif. Puisque c'est un groupe étale, il suffit pour cela d'établir qu'il n'a pas de p -torsion. Or, puisque E est un espace de Banach spectral effectif, la multiplication par p est un isomorphisme spectral entre \mathcal{E} et $p\mathcal{E}$; par conséquent la multiplication par p réalise un isomorphisme spectral de $\pi_0(p\mathcal{E})$ sur $\pi_0(\mathcal{E})$. Ceci signifie que $\pi_0(\mathcal{E})$ n'a pas de p -torsion. Notons $\pi_0(E) = \pi_0(\mathcal{E})[1/p]$; alors $\pi_0(E)$ est un espace de Banach spectral effectif étale, et la flèche $\mathcal{E} \rightarrow \pi_0(\mathcal{E})$ donne un morphisme analytique surjectif $E \rightarrow \pi_0(E)$ dont le noyau E^0 s'identifie à $\mathcal{E}^0[1/p]$ et est par conséquent connexe. Puisque tout morphisme spectral d'un espace de Banach spectral effectif connexe vers un espace de Banach spectral effectif étale est nul, la suite $0 \rightarrow E^0 \rightarrow E \rightarrow \pi_0(E) \rightarrow 0$ ne dépend pas du choix du réseau \mathcal{E} et est fonctorielle.

Il reste à établir que la suite exacte $0 \rightarrow E^0 \rightarrow E \rightarrow \pi_0(E) \rightarrow 0$ est scindée. Puisque $\pi_0(E)$ est étale, toute section continue de cette suite est analytique. Or nous savons que $\pi_0(E)$ est étale et donc soit de dimension finie sur \mathbb{Q}_p , soit isomorphe à l'espace $c_0(\mathbb{Q}_p)$ des suites convergeant vers zéro. Dans le premier cas, toute section de $E \rightarrow \pi_0(E)$ est continue. Dans le second cas, soit $u_m = (u_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$ l'élément de $c_0(\mathbb{Q}_p)$ défini par $u_{m,n} = 1$ si $m = n$ et $u_{m,n} = 0$ sinon. Alors se donner une section continue s de $E \rightarrow \pi_0(E)$ revient à se donner la famille bornée des $s(u_m) \in E$, ce qui est toujours possible.

Enfin, toute application linéaire continue de $\pi_0(E)$ vers E^0 est analytique, ce qui montre que le scindage de la suite n'est pas canonique. \triangleleft

Proposition 3.5.6. — Soit $f : F \rightarrow E$ un morphisme d'espaces de Banach spectraux effectifs prorigides. Si f est bijective, alors c'est un isomorphisme.

Démonstration. — Il suffit de choisir un scindage de la suite exacte de la proposition 3.5.5, ce qui permet d'écrire $E = E^0 \oplus \pi_0(E)$, et d'appliquer la proposition 3.4.4 à E_0 . \triangleleft

Corollaire 3.5.7. — Soit V un espace de Banach p -adique, et soient E, E' deux structures d'espaces de Banach spectral p -adique effectif prorigide sur V . Si l'identité de V est un morphisme analytique de E vers E' , alors c'est un isomorphisme entre les deux structures analytiques.

Partie II. Espaces de Banach-Colmez effectifs

4. Structures analytiques dans B_{cris}^+

4.1. Un lemme de calcul de valuation. — Le lemme 4.1.2 ci-dessous est utilisé dans la preuve de plusieurs propositions ultérieures.

Lemme 4.1.1. — Pour tous entiers j, i avec $1 \leq i \leq j$, $v_p\left(\binom{p^j}{i}\right) = v_p\left(\frac{p^j}{i}\right) = j - v_p(i)$.

Démonstration. — Pour tout $r \geq 1$, $v_p(p^j - r) = v_p(r)$, donc dans le produit définissant $\binom{p^j}{i}$, toutes les valuations se compensent, sauf celle des facteurs p^j et $\frac{1}{i}$. \triangleleft

Lemme 4.1.2. — Soient L un corps muni d'une valuation v telle que $v(p) = 1$, x, y deux éléments de A tels que $v(x) = v(y) = \lambda$ et $v(y - x) = \lambda + \mu$ avec $\mu \geq 0$. Alors, pour tout entier j , $v(y^{p^j} - x^{p^j}) \geq p^j \lambda + j + \min\{p^r \mu - r, r = 0, \dots, j\}$.

Démonstration. — Soit $z = y/x - 1$. Alors $v(z) = \mu$ et $y^{p^j} - x^{p^j} = x^{p^j}(z^{p^j} - 1)$, donc il suffit de démontrer le résultat lorsque $x = 1$ (et donc $\lambda = 0$).

On peut alors écrire

$$(1 + z)^{p^j} - 1 = \sum_{i=1}^{p^j} \binom{p^j}{i} z^i ;$$

puisque $v\left(\binom{p^j}{i}\right) = v\left(\frac{p^j}{i}\right) = j - v(i)$, le terme de plus petite valuation de la somme est atteint lorsque i est une puissance de p , soit $i = p^r$ pour un entier $r = 0, \dots, j$. On a donc $v((1 + y)^{p^j} - 1) = \min\{j - r + p^r \mu, r = 0, \dots, j\}$. \triangleleft

Lemme 4.1.3. — Soit A une \mathbb{Q}_p -algèbre de Banach et $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que $\|x_i\| \leq 1$ et $\|x_{i+1}^p - x_i\| \leq |p|$. Alors pour tout entier i , la suite $x_{i+j}^{p^j}$ converge dans A .

Démonstration. — Il suffit de le prouver pour $i = 0$. Notons $y_j = x_j^{p^j}$ et $z_j = x_{j+1}^p - x_j$; on peut alors écrire

$$y_{j+1} - y_j = (x_j + z_j)^{p^j} - x_j^{p^j}$$

et donc $\|y_{j+1} - y_j\| \leq |p^n|$ d'après le lemme 4.1.2. Par conséquent, la suite $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans A , et donc convergente. \triangleleft

4.2. Structures analytiques dans R . — On reprend ici la construction de [9, 1.2.2].

Notons R et \bar{R} les limites projectives respectives

$$\begin{aligned} R &= \varprojlim (\dots \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C), \\ \bar{R} &= \varprojlim (\dots \rightarrow \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C), \end{aligned}$$

l'application de transition étant l'élevation à la puissance p -ième. Puisque $\mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C$ est un anneau de caractéristique p , l'application de transition $\mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C$ est un morphisme d'anneaux et donc \bar{R} est naturellement muni d'une structure d'anneau.

La réduction modulo p dans \mathcal{O}_C définit une application $R \rightarrow \overline{R}$. Puisque le morphisme de Frobenius est surjectif sur $\mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C$, cette application est une bijection ; la bijection réciproque associe à un élément $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de \overline{R} la suite $(y^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ de R définie par $y^{(i)} = \lim_{j \in \mathbb{N}} (\widehat{x_{i+j}})^{p^j}$, où $\widehat{x_{i+j}}$ est un relèvement quelconque dans \mathcal{O}_C de x_{i+j} (cette limite existe en vertu du lemme 4.1.3). Cette bijection transporte donc la structure d'anneau sur \overline{R} en une structure d'anneau sur R . Pour tous $x, y \in R$, on a alors $(xy)^{(i)} = x^{(i)}y^{(i)}$ et $(x + y)^{(i)} = \lim_{j \in \mathbb{N}} (x^{(i+j)} + y^{(i+j)})^{p^j}$.

L'anneau R est par construction un anneau parfait de caractéristique p ; de plus, il est séparé et complet pour la valuation $v_R(x) = v_C(x^{(0)})$. Notons $|\cdot|_R$ la norme correspondante, définie par $|x|_R = p^{-v_R(x)}$. On note \mathfrak{m}_R l'idéal maximal de R pour la valuation v_R , et, pour tout intervalle réel I , \mathcal{B}_R^I l'idéal fractionnaire des éléments $x \in \text{Frac } R$ tels que $|x|_R \in I$; on a ainsi $R^{[0,1]} = R$, $\mathcal{B}_R^{[0,1[} = \mathfrak{m}_R$, et $R^{[0,+\infty[} = \text{Frac } R$.

La proposition suivante est l'analogue pour R de la proposition 1.5.2.

Proposition 4.2.1. — *Posons $K[X]_R = K[X^{(i)}]_{i \in \mathbb{N}} / ((X^{(i+1)})^p - X^{(i)}, \dots)$. Pour tout réel strictement positif r , il existe une unique norme $\|\cdot\|_r$ sur $K[X]_R$ telle que $\|X^{(i)}\| = r^{p^{-i}}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Pour tout intervalle réel I , notons $K\{X\}_R^I$ la limite projective des complétées de $K[X]_R$ pour la norme $\|\cdot\|_r$ pour $r \in I$. Alors :*

- (i) *Pour tout $r \in]C^\times|$, $K\{X\}_R^{[0,r]}$ est spectrale, la norme $\|\cdot\|_r$ est la norme spectrale, et son spectre s'identifie à $R^{[0,r]}$; en particulier, $K\{X\}_R^{[0,1]}$ est spectrale, et son spectre s'identifie à $R = R^{[0,1]}$.*
- (ii) *Pour tout $r \in [0, +\infty]$, $K\{X\}_R^{[0,r[}$ est pro-spectrale et son spectre s'identifie à $R^{[0,r[}$.*
- (iii) *La structure d'anneau sur R est spectrale.*
- (iv) *Le morphisme $\varphi^{-1} : R \rightarrow R$ est spectral.*

Démonstration. — (i) Il est clair que le morphisme canonique de $K\{X\}_R^{[0,r]}$ dans la complétée de $K[X]_R$ pour la norme $\|\cdot\|_r$ est un isomorphisme. Par construction, $K[X]_R$ est la limite inductive des algèbres $K[X^{(i)}]$ pour $i \in \mathbb{N}$, et est une sous-algèbre dense de $K\{X\}_R^{[0,r]}$; par conséquent, tout morphisme continu $s : K\{X\}_R^{[0,r]} \rightarrow C$ est déterminé par sa restriction à $K[X]_R$, et donc par la suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} = (s(X^{(i)}))_{i \in \mathbb{N}}$. Cette suite vérifie $u_{i+1}^p = u_i$ et $|u_0| \leq r$ et définit donc un élément u de $R^{[0,r]}$.

Réciproquement, soit $u = (u_i)$ un élément de $R^{[0,r]}$. Il existe alors un unique morphisme de K -algèbres $s : K[X]_R \rightarrow C$ tel que $s(X^{(i)}) = u_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par construction, s est continu pour $\|\cdot\|_r$; par conséquent, $\text{Spm } K\{X\}_R^{[0,r]}$ s'identifie à $R^{[0,r]}$.

Enfin, soit $f \in K\{X\}_R^{[0,r]}$ telle que $\|f\|_r = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $i \in \mathbb{N}$ et $g \in K[X^{(i)}]$ tels que $\|g\|_r \geq 1 - \varepsilon$; puisque $C\{X\}$ est une algèbre spectrale, il existe donc $v_i \in C$ tel que $|v_i| \leq r^{p^{-i}}$ et $|g(v_i)| \geq 1 - 2\varepsilon$. Il existe un élément $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $R^{[0,r]}$ tel que $u_i = v_i$; alors par construction, $|f(u)| \geq 1 - 3\varepsilon$. On voit donc que $\|f\|_{\text{sp}} = 1$, ce qui signifie que $K\{X\}_R^{[0,r]}$ est une K -algèbre spectrale.

(ii) Puisque $|C^\times|$ est dense dans $[0, +\infty]$, $K\{X\}_R^{[0,r[}$ est la limite projective des $K\{X\}_R^{[0,s]}$ pour $s \in |C^\times|$, $s < r$. Puisque $R^{[0,r[}$ est la réunion des $R^{[0,\rho]}$ pour $\rho < r$, $K\{X\}_R^{[0,r[}$ est pro-spectrale.

(iii) D'après le lemme 4.1.3, pour tout i , la suite des $\left((X^{(i+j)} \otimes 1 + 1 \otimes X^{(i+j)})^{p^j}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ converge.

La structure d'anneau spectral sur $K\{X\}_R^{[0,1]}$ est donnée par les morphismes de co-addition α et de comultiplication $\mu : K\{X\}_R^{[0,1]} \rightarrow K\{X\}_R^{[0,1]} \widehat{\otimes} K\{X\}_R^{[0,1]}$ définis par $\alpha(X^{(i)}) = \lim(X^{(i+j)} \otimes 1 + 1 \otimes X^{(i+j)})^{p^j}$ et $\mu(X^{(i)}) = X^{(i)} \otimes X^{(i)}$.

(iv) L'inverse du morphisme de Frobenius sur R provient de l'endomorphisme de $K[X^{(i)}]_{i \in \mathbb{N}} / ((X^{(i+1)})^p - X^{(i)})$ défini par $X_r \mapsto X_{r+1}$. \triangleleft

De plus, la variété spectrale sous-jacente à R est connexe et prorigide. Enfin, remarquons que (ii) entraîne que $\text{Frac } R$ et \mathfrak{m}_R sont deux variétés spectrales.

Pour simplifier, et puisque $R = R^{[0,1]}$, l'intervalle I sera omis des notations lorsqu'il est égal à $[0, 1]$. Pour tout entier n , on notera $K\{X_1, \dots, X_n\}_R^I$ le produit tensoriel complété sur K de n copies de $K\{X\}_R^I$. Enfin, si $a \in R \setminus \{0\}$, on note $K\{X/a\}_R^I = K\{X\}_R^I \big|_{aR}^I$. Cette notation est compatible avec le produit au sens où $K\{X/(ab)\}_R^I = K\{(X/a)/b\}_R^I$.

Les éléments de $K\{X\}_R$ sont les séries de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}[p^{-1}]} a_n X^n$, où $\mathbb{N}[p^{-1}]$ désigne l'ensemble des éléments positifs de $\mathbb{Z}[p^{-1}]$, et où a_n tend vers zéro selon le complémentaire des parties finies de $\mathbb{N}[p^{-1}]$.

4.3. Vecteurs et covecteurs de Witt. — On note $W_n(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n à coefficients dans R , et $W(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans R , limite projective des $W_n(R)$.

Définition. — Le groupe $CW^u(R)$ des *covecteurs de Witt unipotents* à coefficients dans R est la limite inductive $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} W_n(R)$, l'application de transition étant le Verschiebung $V : (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \mapsto (0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$.

Le groupe $BW^u(R)$ des *bivecteurs de Witt unipotents* à coefficients dans R est la limite inductive des morphismes $V : W(R) \rightarrow W(R)$.

Autrement dit, un covecteur unipotent à coefficients dans R peut s'écrire $(x_n)_{n \leq 0}$, où les x_n sont une suite d'éléments de R qui sont presque tous nuls; on notera $(\dots, 0, x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}, x_0)$ un tel covecteur. De même, un bivecteur unipotent peut s'écrire $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, où les x_n sont nuls pour n assez petit; on notera $(\dots, 0, x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}; x_0, x_1, \dots)$ un tel bivecteur.

Pour tout n , $W_n(R)$, ainsi que $W(R)$, sont de façon naturelle des $W(R)$ -modules. Pour tout $\lambda \in W(R)$ et pour tout $w \in W(R)$ ou $W_n(R)$, on a $V(\varphi(\lambda)w) = \lambda V(w)$. Puisque R est parfait, on peut munir $W_n(R)$ ou $W(R)$ de la structure de $W(R)$ -module donnée par $(\lambda, w) \mapsto \varphi^{-n}(\lambda)w$; les applications de transition V sont alors $W(R)$ -linéaires, et $CW^u(R)$ et $BW^u(R)$ sont donc naturellement munis de structures de $W(R)$ -modules.

Proposition 4.3.1. — Pour tout réel $r < 1$ et pour tout $m \in \mathbb{Z}$, soit

$$BW_{r,m}(R) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (\forall n \leq m) |x_n|_R \leq r\}.$$

- (i) Pour tout $r < 1$ tel que $r \in |C^\times|$, $BW_{r,m}$ est une variété spectrale affine sur \mathbb{Q}_p .
- (ii) Il existe une \mathbb{F}_p -algèbre topologique complète $\widehat{B}_{r,m}$ telle que $BW_{r,m} = \text{Hom}_{\mathbb{F}_p, \text{cont}}(\widehat{B}_{r,m}, R)$.
- (iii) Pour tout entier s , toute application $f : BW_{r,m}(R)^s \rightarrow BW_{r,m}(R)$ provenant d'un morphisme continu d'anneaux $\widehat{B}_{r,m} \rightarrow \widehat{B}_{r,m}^{\otimes s}$ est analytique.

Démonstration. — (i) Soit A l'algèbre

$$A = \mathbb{Q}_p \left[X_n^{(i)} \right]_{n \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}} / \left((X_n^{(i+1)})^p - X_n^{(i)} \right);$$

pour $r < 1$ et $m \in \mathbb{Z}$, soit $\|\cdot\|_{r,m}$ l'unique norme sur A prolongeant celle de \mathbb{Q}_p et telle que

$$\|X_n^{(0)}\| = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq m + 1, \\ r & \text{si } n \leq m. \end{cases}$$

Soit $\widehat{A}_{r,m}$ le complété de A pour la norme $\|\cdot\|_{r,m}$. Alors $A_{r,m}$ est une \mathbb{Q}_p -algèbre spectrale, et son spectre s'identifie à $BW_{r,m}(R)$.

(ii) Notons B l'algèbre $\mathbb{F}_p[X_n]_{n \in \mathbb{Z}}$. Pour tout $r \in [0, 1[$ et pour tout $m \in \mathbb{Z}$, B peut être munie d'une norme, que l'on note $\|\cdot\|_{r,m}$, définie par

$$\|X_n\|_{r,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq m + 1, \\ r & \text{si } n \leq m. \end{cases}$$

Se donner un morphisme $\rho : B \rightarrow R$ revient à se donner les $x_n = \rho(X_n) \in R$; dire que ρ est continu pour $\|\cdot\|_{r,m}$ revient à dire que $|x_n|_R \leq r$ pour $n \leq m$, c'est-à-dire que $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in BW_{r,m}(R)$.

(iii) Il suffit de traiter le cas où $s = 1$. Soit $f : BW_{r,m}(R) \rightarrow BW_{r,m}(R)$ une application provenant du morphisme continu $\rho : \widehat{B}_{r,m} \rightarrow \widehat{B}_{r,m}$. Soit

$$B' = \mathbb{F}_p[X_n^{(i)}]_{n \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}};$$

puisque \mathbb{F}_p est parfait, le morphisme $\rho : B \rightarrow B$ se prolonge en un unique morphisme $\rho' : B' \rightarrow B'$. Pour tous $n \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{N}$, soit $\widehat{a}_{n,i}$ un relèvement dans A de $\rho'(X_n^{(i)})$. Alors $\|\widehat{a}_{n,i+1}^p - \widehat{a}_{n,i}\|_{r,m} \leq |p|$ et donc d'après le lemme 4.1.3, pour tous n, i , la suite $(\widehat{a}_{n,i+j}^p)_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément $a_{n,i}$ de $\widehat{A}_{r,m}$. De plus, on a par construction $a_{n,i+1}^p = a_{n,i}$, et il existe donc un unique morphisme d'algèbres $\pi : A \rightarrow \widehat{A}_{r,m}$ tel que $\pi(X_n^{(i)}) = a_{n,i}$.

Puisque ρ est continu pour $\|\cdot\|_{r,m}$, on a $\|\rho(X_n)\| \leq r$ pour $n \leq m$, et donc $\|a_{n,0}\|_{r,m} \leq r$ pour $n \leq m$. Par conséquent, π se prolonge en un morphisme continu $\widehat{\pi} : \widehat{A}_{r,m} \rightarrow \widehat{A}_{r,m}$. Enfin, la réduction de $\pi : A \rightarrow A$ modulo l'idéal engendré par p et les $X_n^{(i)}$ pour $(n, i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ coïncide avec ρ' , et donc l'application analytique $BW_{r,m}(R) \rightarrow BW_{r,m}(R)$ associée à π est f . \triangleleft

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux éléments de $BW^u(R)$; notons $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ leur somme dans le groupe $BW^u(R)$. Alors les coordonnées $s_n \in R$ s'expriment de façon polynomiale à partir des x_n et des y_n . De façon précise, soit τ l'endomorphisme de B tel que $\tau(X_n) = X_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors il existe une suite d'éléments $(S_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $B \otimes_{\mathbb{Z}} B$ telle que

$$s_{-n} = S_{-m}(x_{-n-m}, \dots, x_{-n}; y_{-n-m}, \dots, y_{-n}) = (\tau \otimes \tau)^n S_{-m}(x; y)$$

pour tout entier m assez grand.

Notons abusivement $X = X \otimes 1$ et $Y = 1 \otimes X$. Les polynômes $S_{-n}(X, Y)$ sont définis par la relation de récurrence :

$$(4.3.2) \quad \sum_{j=0}^n p^{-j} (\tau \otimes \tau)^j (S_{-(n-j)}^{p^j}) = \sum_{j=0}^n p^{-j} X^{p^j} + \sum_{j=0}^n p^{-j} Y^{p^j}.$$

c'est-à-dire

$$S_0(X_0, Y_0) = X_0 + Y_0,$$

$$S_0(X_{-1}; Y_{-1}) + \frac{1}{p} S_{-1}(X_{-1}, X_0; Y_{-1}, Y_0)^p = X_0 + Y_0 + \frac{1}{p} X_{-1}^p + \frac{1}{p} Y_{-1}^p, \dots$$

Proposition 4.3.3. — *Pour tout $r < 1$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite $(S_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{r,m}$ dans $B \otimes_{\mathbb{F}_p} B$.*

Démonstration. — Ceci revient à démontrer que, pour tout $m \geq 0$, la suite $(\tau \otimes \tau)^{-m} (S_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{r,0}$.

Prouvons d'abord le cas où $m = 0$, c'est-à-dire que la suite $(S_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Puisque $\|a\|_{r,t,0} \leq \|a\|_{r,m}^t$ pour tout $a \in A$ et pour tout $t > 0$, il suffit de démontrer le résultat lorsque r est assez petit; on peut donc supposer que $r = p^{-\lambda}$ avec $\lambda \geq \frac{1}{p-1}$. Soit v la valuation associée à la norme $\|a\|_{r,0}$.

La différence de l'équation (4.3.2) appliquée respectivement à S_{-n} et $S_{-(n-1)}$ s'écrit

$$\sum_{j=0}^{n-1} p^{-j} (\tau \otimes \tau)^j (S_{-(n-j)}^{p^j} - S_{-(n-1-j)}^{p^j}) + p^{-n} (\tau \otimes \tau)^n (S_0^{p^n}) = p^{-n} X_{-n}^{p^n} + p^{-n} Y_{-n}^{p^n},$$

soit, puisque $S_0 = X_0 + Y_0$,

$$\begin{aligned} S_{-n} - S_{-(n-1)} &= - \sum_{j=1}^{n-1} p^{-j} (\tau \otimes \tau)^j (S_{-(n-j)}^{p^j} - S_{-(n-j-1)}^{p^j}) \\ &\quad - p^{-n} ((X_{-n} + Y_{-n})^{p^n} - X_{-n}^{p^n} - Y_{-n}^{p^n}). \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que τ est 1-lipschitzienne pour la norme $\|\cdot\|_{r,0}$; de plus, $v(S_{-n}) = \lambda$. Soit $\mu_n = v(S_{-n} - S_{-(n-1)}) - \lambda$; alors le lemme 4.1.2 entraîne que

$$v(S_{-(n-j)}^{p^j} - S_{-(n-j-1)}^{p^j}) \geq p^j \lambda + \min \{j - i + p^i \mu_{n-j}, i = 0, \dots, j\}.$$

De même, la valuation de $(X_{-n} + Y_{-n})^{p^n} - X_{-n}^{p^n} - Y_{-n}^{p^n}$ est $p^n \lambda + 1$. On en déduit que

$$\mu_n + \lambda \geq \min \{p^n \lambda - (n-1), p^j \lambda + p^i \mu_{n-j} - i, j = 1, \dots, n-1, i = 0, \dots, j\}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $\mu_n \geq n(p-1)\lambda$. La formule ci-dessus démontre le cas où $n = 1$. Supposons à présent $n \geq 2$. Alors, pour tout $j \leq n-1$, puisque $\mu_{n-j} \geq (n-j)(p-1)\lambda \geq \lambda \geq \frac{1}{p-1}$, le minimum des $p^i \mu_{n-j} - i$ est atteint pour $i = 0$ et vaut donc μ_{n-j} ; il s'ensuit que

$$\mu_n \geq \min \left\{ (p^n - 1)\lambda - (n-1), ((p^j - 1) + (n-j)(p-1))\lambda, j = 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Puisque la suite des $p^j - j(p-1)$ est croissante, la valeur minimale ne peut être atteinte que pour $j = 1$, ce qui signifie que $\mu_n \geq \min \left\{ (p^n - 1)\lambda - (n-1), n(p-1)\lambda \right\} = n(p-1)\lambda$. Par conséquent, on a $v(S_{-n} - S_{-(n-1)}) \geq (n(p-1) + 1)\lambda$, et donc la suite $(S_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Montrons à présent par récurrence sur m que, pour tout m , la suite $(S_{-n,m})_{n \in \mathbb{N}} = (\tau \otimes \tau)^{-m}(S_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{r,0}$. Nous venons d'établir le résultat pour $m = 0$; supposons-le connu pour m et démontrons-le pour $m+1$. Par construction des S_{-n} , $S_{-(n+1),m+1}$ est défini par la relation

$$S_{-(n+1),m+1} = - \sum_{j=0}^n \frac{1}{p^{j+1}} S_{-(n-j),m-j}^{p^{j+1}} + \sum_{j=-1}^n \frac{1}{p^{j+1}} (X_{m-j}^{p^{j+1}} + Y_{m-j}^{p^{j+1}}).$$

Par conséquent, puisque toutes les suites $S_{-(n-j),-j}$ sont de Cauchy pour $\|\cdot\|_{r,0}$, il en est de même de $S_{-(n+1),m+1}$, et donc $(S_{-n,m+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. \triangleleft

Proposition 4.3.4. — Soient

$$BW(R) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \limsup_{n \rightarrow -\infty} |x_n|_R < 1 \right\},$$

$$CW(R) = \left\{ (x_n)_{n \in -\mathbb{N}}, \limsup_{n \rightarrow -\infty} |x_n|_R < 1 \right\}.$$

- (i) $BW(R)$ et $CW(R)$ sont des variétés spectrales affines.
- (ii) $BW(R)$ est un espace de Banach spectral effectif et $CW(R)$ est un groupe spectral affine; les inclusions naturelles $BW^u(R) \rightarrow BW(R)$, $CW^u(R) \rightarrow CW(R)$ sont des morphismes de groupes.
- (iii) Le morphisme de Frobenius $\varphi : BW(R) \rightarrow BW(R)$ est analytique ainsi que son inverse.
- (iv) On dispose d'une suite exacte de groupes spectraux effectifs

$$0 \longrightarrow W(R) \longrightarrow BW(R) \longrightarrow CW(R) \longrightarrow 0.$$

- (v) $BW(R)$ et $CW(R)$ sont munis de structures naturelles de $W(R)$ -modules spectraux.

Démonstration. — On conserve les notations des propositions 4.3.1 et 4.3.3.

- (i) Par construction, $BW(R)$ est la réunion pour $r < 1$ et $m \in \mathbb{Z}$ des $BW_{r,m}(R)$.

Soient $r \leq r' < 1$ et $m' \leq m$. Alors, pour tout $a \in A$, $\|a\|_{r,m} \leq \|a\|_{r',m'}$, et donc l'application identique de A définit un morphisme continu et injectif $\widehat{A}_{r',m'} \rightarrow \widehat{A}_{r,m}$. Soit \widehat{A} la limite projective (c'est-à-dire l'intersection) du système projectif des $\widehat{A}_{r,m}$. C'est une algèbre pro-spectrale, et puisque A est dense dans chacun des $\widehat{A}_{r,m}$, elle est dense dans \widehat{A} . De plus, en vertu de la proposition 1.3.5, $\text{Spm } \widehat{A}$ s'identifie à la réunion des $\text{Spm } \widehat{A}_{r,m}$, c'est-à-dire à $BW(R)$. Enfin, la multiplication par $1/p$ dans $BW(R)$ s'écrit $V^{-1}\varphi^{-1}$ et est donc analytique.

Une construction analogue fournit l'algèbre affine de $CW(R)$; on peut également la définir comme le quotient de \widehat{A} par l'idéal fermé engendré par les $X_n^{(i)}$ pour $n \geq 0$.

(ii) Soient $S_{-n} \in B \otimes_{\mathbb{F}_p} B$ les polynômes donnant l'addition sur $BW^u(R)$. Pour tous $r < 1$, $m \in \mathbb{Z}$, (S_{-n}) est une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{r,m}$ et converge donc vers un élément $S_{-\infty}$ de $\widehat{B}_{r,m}$; la famille des $\tau^i S_{-\infty}$ définit donc un morphisme $\alpha : \widehat{B}_{r,m} \rightarrow \widehat{B}_{r,m} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} \widehat{B}_{r,m}$, qui prolonge par construction l'addition de $BW^u(R)$. Puisque $BW_{r,m}$, muni de cette loi, est un groupe abélien, c'est encore le cas de $BW(R)$; et d'après 4.3.1(iii), l'addition ainsi définie sur $BW(R)$ est analytique.

(iii), (iv) sont évidents.

(v) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{-n} : R \rightarrow R$ est analytique, donc la flèche de multiplication $W(R) \times BW_{r,m}(R) \rightarrow BW_{r,m}(R)$ est analytique. Puisque $BW(R) = \varinjlim BW_{r,m}(R)$ dans la catégorie des groupes spectraux, la flèche de multiplication $W(R) \times BW(R) \rightarrow BW(R)$ est encore analytique. \triangleleft

Définition 4.3.5. — Les éléments de $CW(R)$, $BW(R)$ sont appelés respectivement *covecteurs de Witt* et *bivecteurs de Witt* à coefficients dans R .

En particulier, pour tout entier naturel $e \geq 1$, on a les égalités $W(\mathbb{F}_{p^e}) = \mathbb{Z}_{p^e}$, $BW(\mathbb{F}_{p^e}) = \mathbb{Q}_{p^e}$, et $CW(\mathbb{F}_{p^e}) = \mathbb{Q}_{p^e}/\mathbb{Z}_{p^e}$.

Il existe un unique morphisme d'anneaux $\theta : W(R) \rightarrow \mathcal{O}_C$ dont la réduction modulo p est l'application identique de \mathcal{O}_C ; ce morphisme est surjectif et se prolonge en $\theta : W(R)[1/p] \rightarrow \mathcal{O}_C$. On note [9] B_{dR}^+ le complété séparé de $W(R)[1/p]$ pour la topologie $(\text{Ker } \theta)$ -adique; c'est un anneau de valuation discrète complet dont le corps résiduel est C . Soit également $W(R)^{\text{dp}}$ l'enveloppe à puissances divisées de $W(R)$ relativement aux puissances divisées canoniques sur $\text{Ker } \theta$; on note A_{cris} le complété séparé p -adique de $W(R)^{\text{dp}}$ et $B_{\text{cris}}^+ = A_{\text{cris}}[1/p]$. Il existe un plongement canonique de B_{cris}^+ dans B_{dR}^+ , ce qui permet de définir $\theta : B_{\text{cris}}^+ \rightarrow C$.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un élément de $BW(R)$. alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} p^{-n} [a_n]^{p^n}$ converge vers un élément $\eta(a)$ de B_{cris}^+ ; l'application η ainsi définie est une injection $W(R)$ -linéaire de $BW(R)$ dans B_{cris}^+ . On considèrera donc toujours $BW(R)$ comme un sous- $W(R)$ -module de B_{cris}^+ . Par composition, l'application $\theta : B_{\text{cris}}^+ \rightarrow C$ donne donc un morphisme de groupes analytiques $\theta : BW(R) \rightarrow C$, qui est défini par

$$\theta((a_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = \sum_{n \geq 0} p^{-n} (a_n^{(0)})^{p^n} + \sum_{n \leq -1} p^{-n} a_n^{(n)}.$$

Proposition 4.3.6. — Soient \tilde{p} un élément de R tel que $\tilde{p}^{(0)} = p$, et $\xi = [\tilde{p}] - p \in W(R)$. Alors θ définit une suite exacte courte d'espaces de Banach spectraux

$$0 \longrightarrow BW(R) \xrightarrow{\times \xi} BW(R) \xrightarrow{\theta} C \longrightarrow 0,$$

Démonstration. — L'algèbre affine de C est $K\{T\}^{[0,+\infty[}$, et θ provient du morphisme

$$\left\{ \begin{array}{l} K\{T\}^{[0,+\infty[} \longrightarrow \widehat{A} \\ T \longmapsto \sum_{n \geq 0} p^{-n} X_{0,n}^{p^n} + \sum_{n \leq -1} p^{-n} X_{n,n} \end{array} \right. .$$

Ceci démontre que θ est analytique. Il est évident qu'elle est surjective. La flèche $BW(R) \xrightarrow{\times \xi} BW(R)$ est analytique d'après la proposition 4.3.4 et clairement injective ; il reste à montrer que la suite est exacte au centre.

Soit $x \in W(R)[1/p]$. Alors $\|\tilde{p}x\| = \|\tilde{p}\| \cdot \|x\| = \|x\|$, et $\|px\| = |p| \cdot \|x\| < \|x\|$, donc $\|\xi x\| = \|x\|$, ce qui signifie que la multiplication par ξ est une isométrie de $W(R)[1/p]$.

On sait ([9, 2.3.3]) que ξ est un générateur du noyau de $\theta : W(R) \rightarrow \mathcal{O}_C$, et donc du noyau de $\theta : W(R)[1/p] \rightarrow C$. Soit y un élément du noyau de $\theta : BW(R) \rightarrow C$. Alors y est limite d'une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $W(R)[1/p]$; en outre, puisque $\theta(y) = 0$, $\theta(y_n)$ tend vers zéro, et il existe donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $W(R)[1/p]$ et une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $W(R)[1/p]$ tendant vers zéro telles que $y_n = \xi x_n + z_n$. Par conséquent, puisque la suite des ξx_n est de Cauchy et puisque la multiplication par ξ est une isométrie, la suite des x_n est de Cauchy et a donc une limite x dans $BW(R)$. Puisque z_n tend vers zéro, on peut alors écrire $y = \xi x$ comme voulu. \triangleleft

4.4. Sous-espaces de pentes de B_{cris}^+ . — Soient $d \geq 1$, $h \geq 1$ deux entiers. On note $E_{d,h}$ le sous-ensemble de B_{cris}^+ défini par :

$$E_{d,h} = \left\{ b \in B_{\text{cris}}^+, \varphi^h(b) = p^d b \right\} ;$$

c'est par construction un sous- \mathbb{Q}_{p^h} -espace vectoriel de B_{cris}^+ .

Soit $\alpha \in]0, 1] \cap \mathbb{Q}$; notons alors d/h la forme irréductible de α . Alors on pose $E_\alpha = E_{d,h}$, et on note L_α l'algèbre à division sur \mathbb{Q}_p d'invariant α , c'est-à-dire l'algèbre non-commutative $\mathbb{Q}_{p^h}[F]/[F^h - p^d]$; F est semi-linéaire, c'est-à-dire que pour $a \in \mathbb{Q}_{p^h}$, $Fa = \varphi(a)F$.

Proposition 4.4.1. — Soit $n \geq 1$ un entier. Alors la multiplication dans B_{cris}^+ induit un isomorphisme de $\mathbb{Q}_{p^{nh}}$ -espaces vectoriels de $\mathbb{Q}_{p^{nh}} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^h}} E_{d,h}$ sur $E_{nd,nh}$.

Démonstration. — Notons $q = p^d$, et soit $\Phi = \varphi^h$ le Frobenius relatif de l'extension de corps $\mathbb{Q}_{p^{nh}}/\mathbb{Q}_{p^h}$. D'après le théorème de la base normale, il existe un élément x de $\mathbb{Q}_{p^{nh}}$ tel que $(x, \Phi x, \dots, \Phi^{n-1}x)$ soit une \mathbb{Q}_{p^h} -base de $\mathbb{Q}_{p^{nh}}$; en outre, $\Phi^n x = x$. Soit $a \in \mathbb{Q}_{p^{nh}} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^h}} E_{d,h}$; alors il existe $a_0, \dots, a_{n-1} \in E_{d,h}$ tels que

$$a = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi^i(x) \otimes a_i.$$

Si l'image de a dans $E_{nd,nh}$ est nulle, alors ses images successives par l'application de $q^{-1}\Phi$ le sont aussi, et par conséquent

$$\begin{pmatrix} x & \Phi x & \dots & \Phi^{n-1}x \\ \Phi x & \Phi^2 x & & x \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Phi^{n-1}x & x & \dots & \Phi^{n-2}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = 0.$$

Or le déterminant de la première matrice est

$$\pm \prod_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{ij} \Phi^j x \right),$$

où ζ est une racine primitive n -ième de l'unité ; le choix de x assure que ce déterminant ne s'annule pas. Ceci démontre donc l'injectivité.

Réciproquement, si $b \in E_{nd,nh}$, alors soit

$$a = \sum_{i=0}^{n-1} (q^{-1}\Phi)^i (xb).$$

On vérifie que $a \in E_{d,h}$; l'inversibilité de la matrice ci-dessus permet alors d'écrire b comme combinaison $\mathbb{Q}_{p^{nh}}$ -linéaire des $\Phi^i(a)$. Ceci démontre la surjectivité de l'application. \triangleleft

Proposition 4.4.2. — Pour tous entiers d, h tels que $d \leq h$, $E_{d,h}$ est l'image par l'injection canonique $BW(R) \rightarrow B_{\text{cris}}^+$ de l'ensemble des bivecteurs de la forme $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $x_{n-d} = x_n^{p^{h-d}}$.

Démonstration. — Soit $E'_{d,h}$ l'ensemble des bivecteurs $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tels que $x_{n-d} = x_n^{p^{h-d}}$. Par construction, tout élément b de $E'_{d,h}$ vérifie $V^d(b) = \varphi^{h-d}(b)$, où V est le décalage ; par conséquent, puisque $V\varphi = \varphi V = p$, on en déduit que $p^d b = \varphi^h(b)$. Il suffit donc de montrer que tout élément de $E'_{d,h}$ peut s'écrire comme un bivecteur.

Soit b un élément de $E_{d,h}$. Quitte à multiplier b par une puissance de p , on peut supposer que $b \in A_{\text{cris}}$. Par définition de B_{cris}^+ , b est la limite d'une suite convergente d'éléments (b_m) de $W(R)[1/p]$ de la forme

$$b_m = \sum_{i \geq -md} p^i [x_{m,i}^{p^{-i}}].$$

De plus, puisque $\varphi^h(b) = p^d b$, la suite $(\varphi^h(b_m) - p^d b_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro. Pour tous entiers m, n tels que $m \geq 0$ et $n \geq -m$, notons

$$b_{m,n} = \sum_{i=-md}^{-md+(d-1)} [x_{m,i}^{p^{-i}}];$$

on peut alors écrire

$$b_m = \sum_{n \geq -m} p^{nd} b_{m,n}.$$

Notons enfin $\overline{b_{m,n}}$ l'image de $b_{m,n}$ dans $W_d(R) = W(R)/p^d W(R)$. Puisque la suite $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, $b_m - b_{m-1}$ tend vers zéro, ce qui signifie que $\overline{b_{m,-m}}$ tend vers zéro, ainsi de proche en proche que toutes les suites $\overline{b_{m,n}} - \overline{b_{m-1,n}}$ pour $n \geq -m + 1$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(\overline{b_{m,n}})_{m \in \mathbb{N}}$ a une limite a_n dans $W_d(R)$.

Puisque $\varphi^h(b_n) - p^d b_n$ tend vers zéro, on voit que pour tout n , $a_n = \varphi^{h-d}(a_{n+1})$. Soit $a_n = (a_{n,0}, \dots, a_{n,d-1})$ l'écriture de a_n comme vecteur de Witt. Tout $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit de façon unique $n = jd + i$ avec $j \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq i \leq d-1$; posons alors $c_n = a_{j,i} = \varphi^{-j(h-d)}(a_{0,i})$. On voit alors que $\liminf_{n \rightarrow -\infty} v_R(c_n) > 0$, et donc $c = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien un élément de $BW(R)$; de plus, l'image de c dans B_{cris}^+ est b par construction. \triangleleft

Proposition 4.4.3. — Soient d, h deux entiers tels que $d \leq h$.

- (i) $E_{d,h}$ est un sous-espace de Banach spectral effectif de $BW(R)$.
- (ii) Le morphisme de Frobenius $\varphi : E_{d,h} \rightarrow E_{d,h}$ est analytique.
- (iii) L'application $\theta : E_{d,h} \rightarrow C$ est analytique.
- (iv) Pour tout élément c de \mathbb{Q}_p^h , l'endomorphisme de multiplication par c dans $E_{d,h}$ est analytique.
- (v) Pour tout entier d' tel que $d + d' \leq h$ et pour tout élément c de $E_{d',h}$, l'application de multiplication par c $m_c : E_{d,h} \rightarrow E_{d+d',h}$ est analytique.

Démonstration. — (i) D'après la proposition 4.4.2, on sait que $E_{d,h} = \{b \in BW(R), \varphi^h(b) = p^d b\}$; or, d'après la proposition 4.3.4, $BW(R)$ est un groupe spectral et φ est un endomorphisme spectral de $BW(R)$. Par conséquent, il en est de même de $\varphi^h - p^d$, et donc son noyau est un sous-groupe spectral de $BW(R)$.

(ii), (iii), (iv) sont alors évidents.

(v) Remarquons d'abord que, pour tout $x \in E_{d,h}$, $\varphi^h(cx) = p^{d+d'}(cx)$, et on a donc bien $cx \in E_{d+d',h}$. Par conséquent, d'après la proposition 4.4.2, $cx \in BW(R)$.

Puisque $x \in BW(R)$, on peut écrire x comme la limite des $p^{-n}\varphi^n x_n$, où $x_n \in W(R)$; de même, on peut écrire $c = \lim p^{-n}\varphi^n c_n$. Alors cx est la limite des $p^{-2n}\varphi^{-2n}(c_n x_n)$; puisque la multiplication par c_n est analytique dans W_n , il s'ensuit que la multiplication par c est analytique. \triangleleft

4.5. L'espace de Banach spectral d'un isocrystal de Dieudonné. — Soient k un corps parfait de caractéristique p et $K_0 = W(k)[1/p]$. On note $\sigma : k \rightarrow k$ le Frobenius absolu de k ainsi, par functorialité, que ceux de $W(k)$ et K_0 .

Un φ -isocrystal sur k est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie D muni d'une bijection $\varphi : D \rightarrow D$ semi-linéaire relativement au morphisme de Frobenius absolu sur K_0 . Les φ -isocristaux forment de manière évidente une catégorie abélienne et tout φ -isocrystal est muni [5] d'une graduation canonique indexée par \mathbb{Q} , la *graduation par les pentes*.

On dit que D est *effectif* si toutes ses pentes sont positives, ce qui revient à dire qu'il existe un réseau \mathcal{D} de D tel que $\varphi(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Un *isocrystal de Dieudonné* est un φ -isocrystal D dont toutes les pentes appartiennent à $[0, 1]$, ce qui signifie qu'il existe un réseau \mathcal{D} de D tel que $p\mathcal{D} \subset \varphi(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.

Pour tout φ -isocrystal D , on note $E(D)$ le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel des applications \mathbb{Q}_p -linéaires de D dans B_{cris}^+ qui commutent à l'action de φ .

Par exemple, pour $d, h \geq 0$, soit $D_{d,h}$ un K_0 -espace vectoriel de dimension h , muni d'une base (e_0, \dots, e_{h-1}) et d'une application semi-linéaire φ définie par $\varphi(e_i) = e_{i+1}$ si $i \leq h-2$

et $\varphi(e_{h-1}) = p^d e_0$. Alors M est un φ -isocristal effectif dont l'unique pente est d/h , et $E(M)$ s'identifie au sous-espace $E_{d,h}$ de B_{cris}^+ . En particulier, si $d \leq h$, alors $E(D_{d,h}) \subset BW(R)$.

Proposition 4.5.1. — *Soit M un isocristal de Dieudonné. Alors pour tout $x \in E(M)$, l'image de x est incluse dans $BW(R)$.*

Démonstration. — Soit \bar{k} la clôture algébrique de k ; alors il existe une unique extension semi-linéaire de φ à $M' = M \otimes_{W(k)} W(\bar{k})$, qui devient ainsi un φ -isocristal sur \bar{k} . Les pentes de M' sont les mêmes que celles de M et $E(M') = E(M) \otimes_{W(k)} W(\bar{k})$, on peut donc supposer que k est algébriquement clos.

Dans ce cas, d'après la classification des φ -isocristaux, M est isomorphe à une somme directe d'isocristaux de la forme $D_{d,h}$, où d/h est une pente de M ; puisque M est un isocristal de Dieudonné, on a toujours $0 \leq d \leq h$ et le résultat découle alors de la proposition 4.4.2. \triangleleft

Soit M un isocristal de Dieudonné sur k ; alors $V = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(M, BW(R))$ est naturellement muni d'une structure d'espace de Banach spectral vectoriel. De plus, l'endomorphisme f de V défini par $f(x) = x \circ \varphi - \varphi \circ x$ est analytique, et donc son noyau, qui s'identifie à $E(M)$, est un espace de Banach spectral prorigide.

On peut donc considérer E comme un foncteur contravariant additif de la catégorie des isocristaux de Dieudonné vers celle des espaces de Banach spectraux prorigides.

5. Espaces de Banach-Colmez effectifs

5.1. Construction de groupes spectraux à partir de groupes p -divisibles. —

Soit $(\Gamma(p^n))_{n \in \mathbb{N}}$ un groupe p -divisible connexe sur k , de hauteur h et de dimension d , et soit $\Gamma = \varinjlim \Gamma(p^n)$ le groupe formel correspondant. Par construction, l'algèbre affine B de Γ , limite projective des algèbres affines des $\Gamma(p^n)$, est une algèbre de séries formelles en d variables à coefficients dans k . Pour toute k -algèbre topologique S , $\Gamma(S)$ est le groupe des morphismes continus de k -algèbres de B vers S .

On note encore $F : \Gamma \rightarrow \Gamma$ et $V : \Gamma \rightarrow \Gamma$ les morphismes de Frobenius et de décalage de Γ , et φ l'endomorphisme de Frobenius de l'algèbre affine de Γ .

Pour toute k -algèbre topologique S , notons respectivement

$$\begin{aligned} U(\Gamma)(S) &= \text{Hom}(\mathbb{Q}_p, \Gamma(S)), \\ T(\Gamma)(S) &= \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \Gamma(S)), \\ U_0(\Gamma)(S) &= \text{Hom}(\mathbb{Q}_p, \Gamma(S)^{\text{tor}}). \end{aligned}$$

Puisque \mathbb{Q}_p est la limite inductive des groupes topologiques $p^{-n}\mathbb{Z}_p$, un élément du \mathbb{Q}_p -espace vectoriel $U(\Gamma)(S)$ peut être vu comme une suite (f_n) d'éléments de $\Gamma(S)$ tels que $pf_{n+1} = f_n$. Alors $T(\Gamma)(S)$ est le sous- \mathbb{Z}_p -module des suites f telles que $f_0 = 0$ tandis que $U_0(\Gamma)(S)$ est le sous-espace vectoriel des suites f telles que $f_n = 0$ pour n assez grand.

Par conséquent, le foncteur $U(\Gamma)$ ne dépend que de la classe d'isogénie de Γ et est représenté par l'algèbre $\varprojlim(\dots \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow B)$, l'application de transition étant la multiplication par p du groupe p -divisible Γ .

Proposition 5.1.1. — Soit Γ un groupe p -divisible connexe sur k , d'algèbre affine B . On note encore B^{rad} la clôture radicielle de B , \mathfrak{b} l'idéal de B^{rad} engendré par l'idéal maximal de B , et B' le complété séparé de B^{rad} pour la topologie \mathfrak{b} -adique.

Alors B' représente le foncteur $U(\Gamma)$.

Le coproduit $B \rightarrow B \widehat{\otimes}_k B$ s'étend en un morphisme $B^{\text{rad}} \rightarrow (B \widehat{\otimes}_k B)^{\text{rad}} = B^{\text{rad}} \widehat{\otimes}_k B^{\text{rad}}$, et donc en un morphisme $B' \rightarrow B' \widehat{\otimes}_k B'$, d'où provient l'addition sur $U(\Gamma)$.

Démonstration. — Puisque Γ est connexe, le morphisme de Frobenius φ est topologiquement nilpotent sur Γ , c'est-à-dire qu'il existe r tel que $F^r(\Gamma) \subset p\Gamma$. Ceci entraîne que les familles des $p^n\Gamma$ et des $F^n\Gamma$ sont cofinales, c'est-à-dire qu'un élément f de $U(\Gamma)(S)$ peut encore s'écrire comme limite de morphismes $g_n \in \Gamma(S)$ tels que $F \circ g_{n+1} = g_n$. Se donner un élément f de $U(\Gamma)(S)$ revient donc à se donner des morphismes continus $g_n : B \rightarrow S$ tels que $g_{n+1} \circ \varphi = g_n$, et donc un morphisme $g : B^{\text{rad}} \rightarrow S$, continu pour la topologie \mathfrak{b} -adique. \triangleleft

Proposition 5.1.2. — Soient Γ un groupe p -divisible connexe sur k , B son algèbre affine, et B' l'algèbre topologique représentant le foncteur $U(\Gamma)$.

Soit G un groupe formel lisse sur $W(k)$ relevant Γ , et soit A l'algèbre affine de G ; on note $A' = \varprojlim(\dots \rightarrow A \rightarrow \dots \rightarrow A)$, l'application de transition étant la multiplication par p . Alors $A' = W(B')$.

Démonstration. — Par définition, B est la réduction modulo p de A . Puisque $[p]_\Gamma : B \rightarrow B$ est la réduction modulo p de $[p]_G : A \rightarrow A$, l'application de réduction modulo p de A vers B donne par passage à la limite projective une application $\pi : A' \rightarrow B'$; cette application est la réduction modulo p . Puisque A' est séparé et complet pour la topologie p -adique et sans p -torsion et puisque B' est parfait, $A' = W(B')$. \triangleleft

En particulier, A' ne dépend pas du choix du relèvement G de Γ ; ceci signifie que pour toute k -algèbre topologique S , l'ensemble sous-jacent au \mathbb{Q}_p -espace vectoriel $U(G)(S)$ ne dépend pas de G . De plus, le coproduit $B' \rightarrow B' \widehat{\otimes}_k B'$ donne par functorialité un morphisme $A' \rightarrow A' \widehat{\otimes}_k A'$, et donc l'addition sur $U(G)(S)$ ne dépend pas non plus de S ; on en déduit que les homothéties de rapport $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ sur $U(G)(S)$ ne dépendent pas non plus de S .

Par conséquent, le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel $U(G)(S)$ ne dépend que de Γ , et même seulement de sa classe d'isogénie.

Le choix d'une base de l'espace cotangent de Γ identifie B à une algèbre de séries formelles $k[[X_1, \dots, X_d]]$, et donc A à l'algèbre $W(k)[[X_1, \dots, X_d]]$; par conséquent, ce choix identifie $G(\mathcal{O}_C)$ à \mathcal{O}_C^d . De plus, puisque les changements de coordonnées sont des applications linéaires, la topologie ainsi définie sur $G(\mathcal{O}_C)$ ne dépend pas du choix des coordonnées sur Γ .

Un *réseau* de $G(\mathcal{O}_C)$ est un sous-groupe fermé Λ tel que la famille des $[p]_G^n \Lambda$ forme une base de voisinages de zéro dans $G(\mathcal{O}_C)$.

Pour tout tel réseau Λ , on note $\|\cdot\|_\Lambda$ la semi-norme sur $A[1/p]$ qui à $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe $\|f\|_\Lambda = \sup\{|f_0(x)|, x \in \Lambda\}$. D'après ce qui précède, la complétion \widehat{A} de A pour la famille des $\|\cdot\|_\Lambda$ ne dépend pas du choix des coordonnées. C'est une algèbre pro-spectrale dont le spectre s'identifie à $G(\mathcal{O}_C)$. De plus, l'addition $G(\mathcal{O}_C) \times G(\mathcal{O}_C) \rightarrow G(\mathcal{O}_C)$ est un morphisme analytique. Le choix d'un système de coordonnées sur $G(\mathcal{O}_C)$ identifie A_Λ à une algèbre affinoïde.

Puisque $U(G)(\mathcal{O}_C) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} G(\mathcal{O}_C)$, l'application de transition étant la multiplication par p (et donc un morphisme de groupes spectraux), $U(G)(\mathcal{O}_C)$ est naturellement muni d'une structure de groupe spectral; de plus, la multiplication par p^{-1} est analytique et donc $U(G)(\mathcal{O}_C)$ est un espace de Banach spectral effectif. En outre, puisque tout réseau Λ de $G(\mathcal{O}_C)$ est rigide, $U(G)(\mathcal{O}_C)$ est espace de Banach spectral effectif prorigide.

Cette construction permet donc de munir $U(G)(\mathcal{O}_C)$ d'une structure d'espace de Banach spectral effectif; elle ne dépend que de Γ et définit un foncteur de la catégorie des groupes p -divisibles sur k vers celle des espaces de Banach spectraux effectifs prorigides sur $W(k)[1/p]$.

Proposition 5.1.3. — *Sous les hypothèses et notations de la proposition 5.1.2, les groupes $U(G)(\mathcal{O}_C)$ et $U(\Gamma)(R)$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. — Rappelons que $R = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{O}_C)$, les applications de transition étant l'élévation à la puissance p -ième. Par conséquent, un morphisme $f : B' \rightarrow R$ correspond à des applications $f_n : B' \rightarrow \mathcal{O}_C$ telles que, pour tout $x \in B'$, $f_{n+1}(x)^p = f_n(x)$.

Soit $x = (x_0, \dots, x_n, \dots)$ un élément de $W(B')$; alors la série de terme général $p^n f_n(x_n)$ est convergente dans \mathcal{O}_C . Notons $g(x)$ sa somme. Il est en particulier clair que $g(1) = 1$.

Soient $x = (x_n)_{n \geq 0}$, $y = (y_n)_{n \geq 0}$ des éléments de $W(B')$; notons $z = (z_n)_{n \geq 0}$ leur somme. Pour tout entier m :

$$\begin{aligned} g(x+y) &\equiv f_0(z_0) + pf_1(z_1) + \dots + p^m f_m(z_m) && \pmod{p^{m+1}} \\ &\equiv f_m(z_0)^{p^m} + pf_m(z_1)^{p^{m-1}} + \dots + p^m f_m(z_m) && \pmod{p^{m+1}} \\ &\equiv f_m(z_0^{p^m} + pz_1^{p^{m-1}} + \dots + p^m z_m) && \pmod{p^{m+1}}. \end{aligned}$$

Par construction de $(z_n)_{n \geq 0}$, on en déduit donc que, pour tout m , $g(x+y) \equiv g(x) + g(y) \pmod{p^{m+1}}$, donc que g est un morphisme de groupes. Par un raisonnement analogue, $g(xy) = g(x)g(y)$, et donc g est un morphisme d'anneaux, donc $g \in \text{Hom}(W(B'), \mathcal{O}_C)$. Notons $g = F(f)$.

Réciproquement, si $g \in \text{Hom}(W(B'), \mathcal{O}_C)$, alors il existe des fonctions $f_n : B' \rightarrow \mathcal{O}_C$, uniques modulo p , telles que $g(x) \equiv f_0(x_0) + pf_1(x_1) + \dots + p^m f_m(x_m) \pmod{p^{m+1}}$ pour tout entier m . Par construction, on a alors, pour tout $x \in B'$, $g(p^m[x]^{p^{-m}}) \equiv p^m f_m(x) \pmod{p^{m+1}}$, soit $g([x]^{p^{-m}}) \equiv f_m(x) \pmod{p}$, d'où $f_m(x)^{p^m} \equiv f_0(x) \pmod{p}$. La suite des $(f_n(x))$ définit donc un élément de R . Par le raisonnement ci-dessus, $f = (f_n)$ est un morphisme d'anneaux; et l'application qui à g associe f est l'inverse de F , qui est donc bijective. \triangleleft

Puisque de plus R est un anneau parfait de caractéristique p , $\Gamma(R)$ est p -divisible et sans torsion, et donc $\Gamma(R) = \text{Hom}(\mathbb{Q}_p, \Gamma(R)) = U(\Gamma)(R) = U(G)(\mathcal{O}_C)$.

De plus, le choix de coordonnées sur Γ identifie $\Gamma(R)$ à \mathfrak{m}_R^d , qui est muni d'une structure analytique par la proposition 4.2.1. La construction de la proposition 5.1.3 montre que la bijection $U(G)(\mathcal{O}_C) \rightarrow \Gamma(R)$ ainsi que son inverse sont des isomorphismes analytiques.

Soit M un isocristal de Dieudonné. Pour toute k -algèbre finie A , on pose $\mathbf{G}(M)(A) = \text{Hom}_{W(k), \varphi}(M, CW(A))$. Alors $\mathbf{G}(M)$ est un groupe p -divisible sur k . Le foncteur \mathbf{G} est une antiéquivalence entre la catégorie des isocristaux de Dieudonné et celle des groupes p -divisibles sur k .

Proposition 5.1.4. — *Soit Γ un groupe p -divisible sur k et notons M l'isocristal de Dieudonné associé. Alors les groupes spectraux $E(M)$ et $\Gamma(R)$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. — Par définition de \mathbf{G} , on sait que $\Gamma(R) = \text{Hom}_{W(k), \varphi}(M, CW(R))$, et donc $U(\Gamma)(R) = \text{Hom}_{W(k), \varphi}(M, BW(R))$. D'après la proposition 4.5.1, ceci entraîne qu'il existe un isomorphisme naturel de groupes $F : E(M) \rightarrow \Gamma(R)$. Il reste à démontrer que F est analytique.

Soit (e_1, \dots, e_h) une base de M telle que (e_1, \dots, e_d) soit une base de $M/\varphi(M)$; à un élément (x_1, \dots, x_d) de $E(M) \subset BW(R)^h$ où $x_i = (x_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $x_{i,n} \in R$, l'application F associe alors $(x_{1,0}, \dots, x_{d,0}) \in \mathfrak{m}_R^d$. Par conséquent, puisque chaque composante $BW(R) \rightarrow R$ est analytique, l'application F est analytique.

Enfin, puisque $\Gamma(R)$ est un espace de Banach spectral prorigide, la proposition 3.4.4 entraîne que la bijection inverse de F est elle aussi analytique. \triangleleft

5.2. Structure analytique explicite des espaces de Banach-Colmez élémentaires.

— Dans toute cette partie, on fixe deux entiers d, h tels que $0 < d \leq h$.

Définition 5.2.1. — Un réseau Λ de C^d est dit *droit* s'il existe des rationnels (v_1, \dots, v_d) tels que

$$\Lambda = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in C^d, \text{ pour tout } i = 1, \dots, d, v(x_i) \geq v_i \right\}.$$

Le d -uplet (v_1, \dots, v_d) est appelé le *type* de Λ .

Un réseau Λ de \mathcal{O}_C^d est dit *régulier* s'il vérifie les conditions suivantes :

- (RR1) c'est un réseau droit, de type (v_1, \dots, v_d) , où les v_i sont des rationnels positifs ;
- (RR2) en notant $\pi = \frac{d}{p^h - 1}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout i , $p^{mh}v_i \in [\pi, p^h\pi[$;
- (RR3) pour tout $i = 1, \dots, d-1$, $p^{-1}v_i \leq v_{i+1} \leq p^{-\alpha}v_i$ avec $\alpha = 1 - \frac{h}{d}$.

L'entier m est appelé la *hauteur* du réseau régulier Λ .

Remarquons que, puisque $d < h$ sauf si $d = h = 1$, il existe toujours des réseaux réguliers de \mathcal{O}_C^d .

Pour tout réseau régulier Λ , la condition (RR3) implique en outre :

- (RR4) pour tout $i = 1, \dots, d$ et tout $j = 1, \dots, d-i$, $v_i \leq p^j v_{i+j} \leq p^h v_i$.

Le seul résultat pour lequel la condition plus forte (RR3) est nécessaire est le suivant :

Lemme 5.2.2. — Soient Λ' et Λ'' deux réseaux réguliers de \mathcal{O}_C^d , de même hauteur m . Il existe alors un réseau régulier Λ de hauteur m , inclus dans $\Lambda' \cap \Lambda''$.

Démonstration. — Posons

$$x'_i = \log \left(p^{mh} \frac{v'_i}{\pi} p^{i \frac{\alpha+1}{2}} \right),$$

et définissons de même x''_i . Alors, Λ étant régulier, la condition (RR3) implique que la suite des x'_i et celle des x''_i sont $(\frac{\alpha-1}{2} \log p)$ -lipschitziennes ; donc la suite $x_i = \max(x'_i, x''_i)$ l'est aussi. Il suffit alors de définir, comme ci-dessus,

$$v_i = p^{-mh} p^{-i \frac{\alpha+1}{2}} \pi \exp(x_i) ;$$

les (v_i) vérifient alors la condition (RR3), donc le réseau Λ de type (v_1, \dots, v_d) est régulier. \triangleleft

Soit à présent Γ le groupe p -divisible sur k de module de Dieudonné $W(k)[\varphi]/(\varphi^h - p^d)$; c'est un groupe p -divisible irréductible, lisse, de dimension d et de hauteur h . Si k est algébriquement clos, alors tout groupe p -divisible s'écrit de façon unique, à isogénie près, comme somme directe de tels groupes Γ .

Le groupe $\Gamma(R)$ s'identifie alors à $\{x = (x_n)_{n \geq 0} \in CW(R), \varphi^{h-d}(x) = V^d(x)\}$, et est donc homéomorphe de cette façon à \mathfrak{m}_R^d ; de même, $G(\mathcal{O}_C)$ est homéomorphe à \mathfrak{m}_C^d .

Soit Λ un réseau régulier de \mathcal{O}_C^d , de type (v_1, \dots, v_d) . D'après (RR2), les v_i sont tous strictement positifs ; par conséquent, Λ est inclus dans \mathfrak{m}_C^d , que l'on identifie à $G(\mathcal{O}_C)$.

Lemme 5.2.3. — *Il existe un entier $m_0 \geq 0$ tel que, si Λ est un réseau régulier de \mathcal{O}_C^d de hauteur $m \geq m_0$, alors Λ est un sous-groupe fermé de $G(\mathcal{O}_C)$ pour la loi induite par la loi de groupe formel de G .*

Démonstration. — Définissons les séries entières $\ell \in \mathbb{Q}[[X]]$ et $L_0 \in \mathbb{Q}[[X_0, \dots, X_{d-1}]]$ par

$$\ell(X) = \sum_{n \geq 0} p^{-nd} X^{p^{nh}}$$

et

$$L_0(X_0, \dots, X_{d-1}) = \ell(X_0) + p^{-1}\ell(X_1^p) + \dots + p^{-(d-1)}\ell(X_{d-1}^{p^{d-1}}).$$

De même, pour tout anneau A et pour tout $x = (x_0, \dots, x_{d-1}) \in A^d$, notons $x_{i+nd} = x_i^{p^{n(h-d)}}$ et $V(x) = (x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_{d-1}, x_0^{p^{h-d}})$; notons enfin $L_i = L_0 \circ V^i$.

Soit Λ un réseau régulier de hauteur m , et de type (v_0, \dots, v_{d-1}) .

Le groupe Γ est donné par son algèbre affine $k[[X_0, \dots, X_{d-1}]]$, muni d'une loi de groupe formelle $F \in k[[X_0, \dots, X_{d-1}, Y_0, \dots, Y_{d-1}]]^d$ qui est déterminée par les conditions $F_i \equiv X_i + Y_i \pmod{\deg 2}$ et $L_i(F) = L_i(X) + L_i(Y)$. Alors l'algèbre affine de G s'identifie à $\mathcal{O}_C[[X_0, \dots, X_{d-1}]]$; elle est munie d'une comultiplication $\hat{F} \in \mathcal{O}_C[[X_0, \dots, X_{d-1}, Y_0, \dots, Y_{d-1}]]^d$ dont la réduction modulo p est F . Supposons que m est assez grand pour que $p^{h-m}d \leq p^h - 1$; alors pour tout $i = 0, \dots, d-1$, on a $v_i \leq 1$ d'après (RR2), et le relèvement de F choisi est donc indifférent.

Pour $i = 0, \dots, d-1$, notons $u_i = p^{mh}v_i - md$. Posons encore $S_\Lambda = p^{u_0}\mathcal{O}_C \oplus \dots \oplus p^{u_{d-1}}\mathcal{O}_C$ et $L = (L_0, L_1, \dots, L_{d-1}) \in \mathbb{Z}[[X_0, \dots, X_{d-1}]]^d$, et montrons que $L(\Lambda) \subset S_\Lambda$.

Fixons un entier i tel que $0 \leq i < d$, et soit $x = (x_0, \dots, x_{d-1}) \in \Lambda$.

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \ell(x_i) + \dots + \frac{1}{p^{d-i-1}}\ell(x_{d-1}^{p^{d-1-i}}) + \frac{1}{p^{d-i}}\ell(x_0^{p^{h-i}}) + \dots + \frac{1}{p^{d-1}}\ell(x_{i-1}^{p^{h-1}}) \\ &= \sum_{j < i} \frac{1}{p^{d+j-i}}\ell(x_j^{p^{h+j-i}}) + \ell(x_i) + \sum_{j > i} \frac{1}{p^{j-i}}\ell(x_j^{p^{j-i}}). \end{aligned}$$

Pour tout $r = 0, \dots, h-1$, par la théorie du polygone de Newton, la série entière $\ell(x_j^{p^r})$ induit une surjection de $p^{v_i}\mathcal{O}_C$ sur $p^{\nu_{j,r}}\mathcal{O}_C$, où $\nu_{j,r} = \min \{p^{r+nh}v_j - nd, n \geq 0\}$. Ce minimum est atteint pour le plus petit entier n tel que $p^{r+nh}v_i \geq \pi$. Or, d'après la condition (RR2), on peut écrire $p^{mh}v_i = \pi w_i$, où $w_i \in [1, p^h[$; le minimum $\nu_{j,r}$ est donc atteint pour le plus petit entier n tel que $p^{r+(n-m)h}w_j \geq 1$. Il s'ensuit que $n = m$ si $r = 0$, et $n = m$ ou $m-1$ dans tous les cas, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \nu_{j,0} &= \pi w_j - md = u_j ; \\ \nu_{j,r} &= \min(\pi p^r w_j, \pi p^{r-h} w_j + d) - md \quad \text{si } j \geq 1. \end{cases}$$

Par conséquent, la condition (RR4) entraîne que

$$\nu_{i,0} \leq \begin{cases} \nu_{j,j-i} - (j-i) & \text{si } j > i, \\ \nu_{j,h+j-i} - (d+j-i) & \text{si } j < i. \end{cases}$$

Par conséquent, on a bien $L_i(x) \in S$, et donc $L(\Lambda) \subset S_\Lambda$.

Soit Λ' le réseau régulier de hauteur $m - 1$ et de type $(p^h v_0, \dots, p^h v_{d-1})$; alors $S_{\Lambda'} = p^d S_{\Lambda}$, et puisque $\Lambda' \subset \Lambda$, l'application G induit par passage au quotient une application $\Lambda/\Lambda' \rightarrow S_{\Lambda}/p^d S_{\Lambda}$. Soit x un élément de Λ dont l'image dans $S_{\Lambda}/p^d S_{\Lambda}$ est nulle; alors il existe $y_i \in p^{d+u_i} \mathcal{O}_C$ tel que $\ell(x_i) = y_i$. Par la théorie du polygone de Newton de ℓ , ceci implique que $x_i \in p^{p^h v_i} \mathcal{O}_C$, et on a donc bien $x \in \Lambda'$.

Montrons à présent que $L^{-1}(S_{\Lambda}) \subset \Lambda$. Soit $x \in G(\mathcal{O}_C)$ tel que $y = L(x) \in S_{\Lambda}$. Notons (Λ_n) le réseau régulier de hauteur $m + n$ et de type $(p^{-nh} v_0, \dots, p^{-nh} v_{d-1})$; alors $G(\mathcal{O}_C)$ étant la réunion des Λ_n , il existe un plus petit entier n tel que $x \in \Lambda_n$. Supposons que $n \geq 1$. Le réseau $(\Lambda_n)'$ construit ci-dessus n'est autre que Λ_{n-1} ; et, puisque l'image de x dans $S_{\Lambda_n}/S_{\Lambda_{n-1}}$ est nulle, on voit d'après ce qui précède que $x \in \Lambda_{n-1}$, ce qui est absurde. Par conséquent, on a bien $n = 0$, et donc $x \in \Lambda$, c'est-à-dire que $L^{-1}(S_{\Lambda}) \subset \Lambda$.

Enfin, soient $x, y \in \Lambda$. Alors leur somme z dans le groupe $G(\mathcal{O}_C)$ vérifie $L(z) = L(x) + L(y)$ dans \mathcal{O}_C^d ; or, on a $L(x) \in S_{\Lambda}$, de même $L(y) \in S_{\Lambda}$, et donc $L(z) \in S_{\Lambda}$, ce qui implique que $z \in \Lambda$. \triangleleft

Lemme 5.2.4. — Soit Λ un réseau régulier de hauteur $m \geq 0$ de $G(\mathcal{O}_C)$. Alors sa préimage par multiplication par p^d dans le groupe formel est un réseau régulier Λ' de hauteur $m + 1$.

Démonstration. — Soit (v_1, \dots, v_d) le type de Λ , et soit Λ' le réseau de type $(v'_1, \dots, v'_d) = (p^{-h} v_1, \dots, p^{-h} v_d)$; on voit que Λ' est encore un réseau régulier, de hauteur $m + 1$. Montrons que Λ' est la préimage de Λ par la multiplication par p^d .

Par construction de Γ , la multiplication par p^d s'écrit $(x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1^{p^h}, \dots, x_d^{p^h}) \pmod{p}$. Puisque les v'_i vérifient $p^h v'_i \leq v'_j + 1$ pour tous i, j , on a bien $p^d \Lambda' \subset \Lambda$.

Réciproquement, soit $x \in \Lambda$, et cherchons les $y \in G(\mathcal{O}_C)$ tels que $p^d \cdot y = x$. La multiplication par p^d est un morphisme de variétés analytiques affines de $G(\mathcal{O}_C)$ vers $G(\mathcal{O}_C)$; si y est un point de $G(\mathcal{O}_C)$, c'est-à-dire un morphisme $\text{Spm } C \rightarrow G$, alors les préimages de y correspondent aux points du produit fibré de $G(\mathcal{O}_C)$ et $\text{Spm } C$ au-dessus de $G(\mathcal{O}_C)$ pour les applications y et p^d . Notons B l'algèbre affine de produit fibré. Alors l'algèbre résiduelle de B est finie sur \bar{k} ; donc B est finie sur C . Par conséquent, il existe un nombre fini de solutions $x \in G(\mathcal{O}_C)$ de l'équation $p^d \cdot x = y$.

Soit x une telle solution, alors les $v(y_i)$ sont égaux à $v(x_i^{p^h} + p(\dots))$; si $v(x_i) < v'_i = p^{-h} v_i$, c'est impossible car $v(x_i^{p^h}) < v(p x_j)$. Par conséquent, x est un élément de Λ' . \triangleleft

Pour tout réseau régulier Λ de \mathcal{O}_C^d , de type (v_1, \dots, v_d) , on note Λ_R le réseau de R^d défini par

$$\Lambda_R = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in R^d, v_R(x_i) \geq v_i \right\}.$$

Un tel réseau est appelé *réseau régulier* de R^d .

Soit Λ un réseau régulier de hauteur m_0 assez élevée, alors on peut construire une famille $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réseaux réguliers, telle que $\Lambda_0 = \Lambda$ et en notant Λ_{n+1} la préimage de Λ_n par la multiplication par p^d . D'après les lemmes 5.2.3 et 5.2.4, pour tout n , Λ_n est un réseau régulier de hauteur $m_0 + n$, et un sous-groupe de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_C)$. De plus, la limite inductive du diagramme $\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \dots \subset \Lambda_n \subset \dots$ est $\mathcal{G}(\mathcal{O}_C)$, et la limite projective

du diagramme $\dots \xrightarrow{\times p^d} \Lambda_{n+1} \xrightarrow{\times p^d} \Lambda_n \xrightarrow{\times p^d} \dots \xrightarrow{\times p^d} \Lambda_1 \xrightarrow{\times p^d} \Lambda_0$ s'identifie à Λ_R . Puisque Λ_n est un sous-groupe de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_C)$ pour tout n , Λ_R est un sous-groupe de $U(G)(\mathcal{O}_C)$, donc de $\Gamma(R)$.

Proposition 5.2.5. — Soit Γ le groupe p -divisible irréductible sur k , de hauteur h et de dimension d , et de module de Dieudonné $W(k)[\varphi]/(\varphi^h - p^d)$; notons B l'algèbre affine de Γ .

- (i) Soit Λ un réseau spectral de \mathcal{O}_C^d . Alors la complétion de $W(B)$ pour la norme Λ_R -spectrale est une $W(k)$ -algèbre spectrale, et son spectre est un groupe spectral borné et prorigide, dont le groupe topologique sous-jacent s'identifie à Λ_R , muni de la loi de groupe venant de $\Gamma(R)$; la donnée de cette structure spectrale sur Λ_R fait de $\Gamma(R)$ un espace de Banach spectral effectif prorigide.
- (ii) Pour tout autre réseau régulier Λ' de \mathcal{O}_C^d , les structures analytiques données par Λ_R et par Λ'_R sur $\Gamma(R)$ sont équivalentes.
- (iii) La structure analytique ainsi définie sur $\Gamma(R)$ est équivalente à celle définie par le choix d'un système de coordonnées sur $\Gamma(R)$.

Démonstration. — (i) Soit G un groupe formel affine lisse sur $W(k)$ relevant Γ . Alors d'après la proposition 5.1.3, nous savons que $\Gamma(R)$ s'identifie à $U(G)(\mathcal{O}_C)$, c'est-à-dire à la limite projective de $G(\mathcal{O}_C)$ pour la multiplication par p . Notons Λ_m les réseaux réguliers de $G(\mathcal{O}_C)$ tels que $\Lambda_0 = \Lambda$ et Λ_{m+1} soit (d'après le lemme 5.2.4) l'image inverse de Λ_m pour la multiplication par p^d dans $G(\mathcal{O}_C)$; alors Λ_R correspond, sous l'isomorphisme entre $\Gamma(R)$ et la limite projective de $G(\mathcal{O}_C)$, à la limite projective des Λ_m .

Soit A l'algèbre affine de G , et notons \widehat{A}_m la complétion pour la norme spectrale sur Λ_m de $A[1/p]$. Alors, puisque A est isomorphe à $W(k)[[X_1, \dots, X_m]]$, \widehat{A}_m est une algèbre affinoïde en d variables; de plus, son spectre Λ_m est un groupe spectral rigide d'après le lemme 5.2.3, et la multiplication par $p : \Lambda_{m+1} \rightarrow \Lambda_m$ est un morphisme surjectif de groupes spectraux. Par conséquent, la complétion de la réunion des \widehat{A}_m est une algèbre spectrale A' , dont le spectre est un groupe spectral prorigide qui a pour groupe topologique sous-jacent Λ_R .

Enfin, la multiplication par $\frac{1}{p}$ fait correspondre Λ_m et Λ_{m-1} , et est donc bien un endomorphisme analytique de $\Gamma(R)$; par conséquent, $\Gamma(R)$ est un espace de Banach spectral effectif prorigide. Remarquons en particulier que la structure analytique ainsi construite sur $\Gamma(R)$ ne dépend pas du choix du groupe G .

(ii) Soient Λ, Λ' deux réseaux réguliers de $\Gamma(R)$. Quitte à remplacer l'un des deux par l'une de ses préimages par p^{nd} , on peut supposer que les deux réseaux sont de même hauteur; d'après le lemme 5.2.2, on peut alors supposer que $\Lambda \subset \Lambda'$; alors l'identité de A fournit un morphisme continu de \widehat{A}_Λ vers $\widehat{A}_{\Lambda'}$, et donc l'identité de $\Gamma(R)$ est un morphisme analytique entre les deux structures données par Λ' et Λ . D'après le corollaire 3.5.7, ces deux structures sont donc équivalentes.

(iii) La forme du module de Dieudonné de Γ munit l'espace tangent à Γ d'une base canonique, qui permet d'identifier $\Gamma(R)$ à \mathfrak{m}_R^d en tant que variété spectrale. Sous cette identification, \mathfrak{m}_R^d est la limite projective des réseaux Λ_m , et donc son algèbre affine est la réunion complétée des algèbres affines de ces réseaux. \triangleleft

Soit (a_0, \dots, a_{d-1}) une base du R -module libre Λ_R . Alors Λ_R est isomorphe comme variété spectrale au produit $(a_0R) \times \dots \times (a_{d-1}R)$; par conséquent, son algèbre affine est de la forme $K\{X_0/a_0, \dots, X_{d-1}/a_{d-1}\}_R$.

Puisque le module de Dieudonné de Γ est $W(k)[\varphi]/(\varphi^h - p^d)$, nous savons d'après la proposition 5.1.4 que $\Gamma(R)$ s'identifie au \mathbb{Q}_p -espace vectoriel $\{b \in B_{\text{cris}}^+, \varphi^h(b) = p^d \cdot b\}$, c'est-à-dire à $E_{d,h}$.

Soit M le module de Dieudonné du groupe p -divisible Γ . Alors un élément f de M est un morphisme de schémas en groupe de Γ vers CW_k et donne donc un morphisme de groupes $f(R) : \Gamma(R) \rightarrow CW(R)$. On obtient ainsi un morphisme de groupes $M \rightarrow \text{Hom}(\Gamma(R), CW(R))$, qui s'étend en un morphisme $M \otimes_{W(k)} K \rightarrow \text{Hom}(\Gamma(R), BW(R))$. Par composition avec $\theta : BW(R) \rightarrow C$, on dispose donc d'un morphisme canonique $M \otimes K \rightarrow \text{Hom}(\Gamma(R), C)$.

Proposition 5.2.6. — Soit M le module de Dieudonné de Γ . Alors le morphisme canonique

$$M \otimes K \longrightarrow \text{Hom}(\Gamma(R), C)$$

est une bijection.

En particulier, le groupe des homomorphismes d'espaces de Banach spectraux sur K entre $\Gamma(R)$ et C est un K -espace vectoriel de dimension h .

Démonstration. — Notons i le morphisme canonique $M \otimes K \rightarrow \text{Hom}(\Gamma(R), C)$. Il est clair que i est injectif.

Soit $A_R = K\{X_1/a_1, \dots, X_d/a_d\}_R$ l'algèbre affine de $\Gamma(R)$; d'après la proposition 5.2.5, A_R est la complétion de la réunion des algèbres affines A_m des groupes spectraux Λ_m , et puisque Λ_m est isomorphe comme variété spectrale à un produit de d copies de la boule unité, A_m est une algèbre spectrale de la forme $K\{X_1/a_{n,1}, \dots, X_d/a_{n,d}\}$. Notons encore \mathcal{O}_{A_m} la boule unité de A_m .

Puisque Λ_m est un sous-groupe de $G(\mathcal{O}_C)$, A_m est munie d'une coaddition $A_m \rightarrow A_m \widehat{\otimes}_K A_m$, c'est-à-dire d'un élément F_m de $(A_m \widehat{\otimes}_K A_m)^d$; compte tenu de la forme de A_m , on peut écrire F_m comme un vecteur de d séries $(F_{m,i})_{i=1, \dots, d}$ à coefficients en $X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_d$. Puisque Λ_m est un quotient de Λ_R , F_m est compatible avec la comultiplication sur A_R , c'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_m & \hookrightarrow & A_R \\ \downarrow F_m & & \downarrow F \\ A_m \widehat{\otimes}_K A_m & \hookrightarrow & A_R \widehat{\otimes}_K A_R \end{array}$$

est commutatif. Soit L l'élément de A défini dans la preuve du lemme 5.2.3; alors, pour tout m , il existe $L_m \in A_m$ tel que $L_m \equiv L \pmod{p^{md}}$. Puisque $L(F(X, Y)) = L(X) + L(Y)$, on en déduit donc que $L_m(F_m(X, Y)) \equiv L_m(X) + L_m(Y) \pmod{p^{md}}$.

Un morphisme analytique entre $\Gamma(R)$ et C correspond à un élément f de la boule unité de A tel que $F(f) = f \otimes 1 + 1 \otimes f$ dans $A \widehat{\otimes}_K A$. Quitte à multiplier f par un élément de K , on peut supposer que $f \in \mathcal{O}_A$.

Soit n un entier naturel. Puisque A est la limite inductive complétée des A_m , il existe un entier m et un élément f_m de \mathcal{O}_{A_m} tels que $f_m \equiv f \pmod{p^n}$; par conséquent, $f_m(F_m(X, Y)) \equiv f_m(X) + f_m(Y) \pmod{p^n}$. Puisque A_m est un anneau de séries entières convergentes, on peut dériver cette relation par rapport à X ; on obtient alors $f'_m(F_m(X, Y)) \cdot \partial_X F_m(X, Y) \equiv f'_m(X) \pmod{p^n}$, soit pour $X = 0$, puisque $F_m(0, Y) = Y$: $f'_m(Y) \cdot \partial_X F_m(0, Y) \equiv f'_m(0) \pmod{p^n}$.

Quitte à augmenter m , on peut supposer que $md \geq n$; on aura alors $L_m(F_m(X, Y)) \equiv L_m(X) + L_m(Y) \pmod{p^n}$, et donc pour $X = 0$: $\partial_X F_m(X, Y) \equiv L'_m(Y)^{-1} \cdot L'_m(0) \pmod{p^n}$. En combinant les deux égalités, on voit que $f'_m(Y) \equiv L_m(Y)^{-1} \cdot L'_m(0) \cdot f'_m(0) \pmod{p^n}$.

Puisque ce résultat est vrai pour tout m , on en déduit que f appartient au K -espace vectoriel engendré par L_0, \dots, L_{d-1} ; par conséquent, $\text{Hom}(\Gamma(R), C)$ est un K -espace vectoriel de dimension au plus h . Finalement, on voit que l'application $M \otimes K \rightarrow \text{Hom}(\Gamma(R), C)$ est surjective. \triangleleft

Proposition 5.2.7. — *Pour tout groupe p -divisible Γ (sans hypothèse sur la forme du module de Dieudonné de Γ), le morphisme canonique*

$$M \otimes K \longrightarrow \text{Hom}(\Gamma(R), C)$$

est bijectif.

Démonstration. — Notons E_k l'espace de Banach analytique $\Gamma(R) = \text{Hom}_{\mathcal{D}_k}(\mathbf{M}(\Gamma), BW(R))$. Pour toute extension k' de k , $\mathbf{M}(\Gamma \times_k k') = \mathbf{M}(\Gamma) \otimes_{\mathcal{D}_k} \mathcal{D}_{k'}$, de sorte que $E_{k'} = E_k$. Par conséquent, si $i_{k'} : M \otimes_{W(k')} C \rightarrow \text{Hom}(\Gamma_{k'}(R), C)$ est un isomorphisme, alors il en est de même de $i : M \otimes_{W(k)} C \rightarrow \text{Hom}(\Gamma(R), C)$. On peut donc supposer que k est algébriquement clos. De plus, $\mathbf{M}(\Gamma)$ et $\Gamma(R)$ sont invariants par toute isogénie sur M . Finalement, on peut donc supposer que $M(\Gamma)$ est une somme directe de modules de Dieudonné élémentaires de la forme $W(k)[\varphi]/(\varphi^{h_i} - p^{d_i})$, et appliquer le résultat 5.2.6 à chacun des termes. \triangleleft

5.3. Espaces de Banach-Colmez effectifs. — La catégorie \mathbf{BC}_K^+ des *espaces de Banach-Colmez effectifs sur K* est la sous-catégorie pleine des espaces de Banach potentiellement spectraux effectifs E tels qu'il existe une suite exacte

$$(5.3.1) \quad 0 \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow W \longrightarrow 0,$$

où V est un espace de Banach spectral effectif étale de dimension finie et W un espace de Banach potentiellement spectral effectif vectoriel.

Une suite exacte de la forme 5.3.1 est appelée *présentation* de E . Les *présentations d'espaces de Banach-Colmez effectifs*, munies des morphismes de suites exactes, forment une catégorie. Le foncteur évident de la catégorie des présentations d'espaces de Banach-Colmez effectifs vers celle des espaces de Banach-Colmez effectifs est essentiellement surjectif par construction.

En particulier, tout espace de Banach spectral étale de dimension finie ou tout C -espace vectoriel de dimension finie est bien sûr un espace de Banach-Colmez effectif.

Soit E un espace de Banach-Colmez effectif, dont une présentation est $0 \rightarrow V \rightarrow E \rightarrow W \rightarrow 0$. D'après la proposition 1.1.7, il existe alors des réseaux \mathcal{G}_K -invariants respectifs \mathcal{V} , \mathcal{E} , \mathcal{W} de V , E , W tels que la suite $0 \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow 0$ soit encore exacte ; de plus, d'après la proposition 3.5.2, \mathcal{E} , \mathcal{W} et \mathcal{V} sont des sous-groupes spectraux de E , W , V . Puisque \mathcal{V} est un groupe étale, le quotient $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}/p^n\mathcal{V}$ existe dans la catégorie des espaces de Banach spectraux, et c'est encore un groupe spectral effectif, extension de \mathcal{W} par le groupe étale $\mathcal{V}/p^n\mathcal{V}$, et donc rigide ; donc E est un espace de Banach potentiellement spectral prorigide.

Par conséquent, toutes les propriétés des espaces de Banach potentiellement spectraux prorigides s'appliquent encore aux espaces de Banach-Colmez ; en particulier, ils s'écrivent comme extension d'un groupe étale par un groupe connexe (proposition 3.5.5), cette extension étant scindée de manière non canonique.

Proposition 5.3.2. — Notons t_G l'espace tangent à l'origine du groupe formel lisse G . Alors :

- (i) $T(\Gamma)(\bar{k}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est une \mathbb{Q}_p -représentation continue de dimension h de \mathcal{G}_K ;
- (ii) $t_G(\mathcal{O}_C)$ est un C -espace vectoriel de dimension d ;
- (iii) il existe une suite exacte, fonctorielle en G :

$$0 \longrightarrow T(\Gamma)(\bar{k}) \longrightarrow U(G)(\mathcal{O}_C) \longrightarrow t_G(\mathcal{O}_C) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — (i) Puisque Γ est un groupe p -divisible de hauteur h , $T(\Gamma)(\bar{k})$ est un \mathbb{Z}_p -module libre de rang h .

(ii) Puisque Γ est lisse de dimension d , G est un groupe lisse de dimension d , et donc $t_G(\mathcal{O}_C)$ est un C -espace vectoriel de dimension d .

(iii) On dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & G(\mathcal{O}_C)^{\text{tor}} & \longrightarrow & G(\mathcal{O}_C) & \longrightarrow & t_G(\mathcal{O}_C) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & U_0(G)(\mathcal{O}_C) & \longrightarrow & U(G)(\mathcal{O}_C) & \longrightarrow & t_G(\mathcal{O}_C) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & T(G)(\mathcal{O}_C) & \longleftarrow & T(G)(\mathcal{O}_C) & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Les deux premières colonnes sont exactes car, \mathcal{O}_C étant l'anneau des entiers d'un corps algébriquement clos, $G(\mathcal{O}_C)$ est p -divisible ; les deux premières lignes sont exactes d'après [23, §4]. Donc la diagonale $0 \rightarrow T(G)(\mathcal{O}_C) \rightarrow U(G)(\mathcal{O}_C) \rightarrow t_G(\mathcal{O}_C) \rightarrow 0$ est exacte. \triangleleft

Proposition 5.3.3. — *L'espace de Banach spectral $\Gamma(R)$ est un espace de Banach-Colmez effectif, et tout relèvement G de Γ sur $W(k)$ définit une présentation*

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \Gamma(R) \longrightarrow W \longrightarrow 0,$$

où V est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension h et W un C -espace vectoriel de dimension d .

Démonstration. — Il suffit de montrer que la suite exacte de la proposition 5.3.2 est formée de morphismes analytiques. Notons $E = \Gamma(R)$, $V = T(\Gamma)(\bar{k}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ et $W = t_G(\mathcal{O}_C)$. Alors l'application $V \rightarrow E$ est continue et \mathcal{G}_K -équivariante ; puisque V est un espace de Banach étale, elle est donc analytique.

Pour montrer que $\lambda : E \rightarrow W$ est analytique, on fixe une base de l'espace cotangent de Γ , ce qui permet d'identifier E à \mathfrak{m}_R^d en tant que variété spectrale et $t_G(\mathcal{O}_C)$ à C^d . L'application $\lambda : \mathfrak{m}_R^d \rightarrow t_G(\mathcal{O}_C)$ s'écrit alors $\lambda(x_1, \dots, x_d) = (\theta([x_1]), \dots, \theta([x_d]))$ et est donc analytique. \triangleleft

Tout nombre rationnel $\alpha \in]0, 1]$ peut s'écrire de façon unique $\alpha = d/h$, où d, h sont deux entiers positifs premiers entre eux. On notera alors E_α l'espace de Banach-Colmez effectif $E_{d,h}$. On pose encore $E_0 = \mathbb{Q}_p$; on a alors $E_0 = \{x \in B_{\text{cris}}^+, \varphi(x) = x\}$.

Définition 5.3.4. — *Un espace de Banach-Colmez effectif élémentaire est un espace de Banach-Colmez effectif isomorphe à un espace E_α , où α est un élément de $]0, 1] \cap \mathbb{Q}$.*

Proposition 5.3.5. — *Pour tout $\alpha \in]0, 1] \cap \mathbb{Q}$, E_α est connexe.*

Démonstration. — La variété spectrale sous-jacente à E_α est isomorphe à R^d , et R est une variété spectrale connexe. \triangleleft

En particulier, le groupe des morphismes analytiques de E_α vers \mathbb{Q}_p est réduit à zéro en vertu de la proposition 1.6.10.

5.4. Enveloppe vectorielle. —

Définition 5.4.1. — Soit E un espace de Banach-Colmez effectif. On note E_C^* , et on appelle *co-enveloppe vectorielle* de E , le C -espace vectoriel des morphismes analytiques sur C de E vers C ; on note E_C , et on appelle *enveloppe vectorielle* de E , le dual du C -espace vectoriel E^* .

Lorsque E_C est de dimension finie sur C (on verra que c'est toujours le cas), l'enveloppe vectorielle E_C est munie d'un morphisme de « bidualité » $\iota : E \rightarrow E_C$; c'est un morphisme analytique entre E et E_C , muni de sa structure analytique de C -espace vectoriel. Ce morphisme est solution d'un problème universel : tout morphisme d'espaces de Banach spectraux effectifs de E vers un C -espace vectoriel se factorise de façon unique par ι .

La proposition suivante est une conséquence de la proposition 5.2.7.

Proposition 5.4.2. — *Pour tous entiers $0 \leq d \leq h$, la co-enveloppe vectorielle $(E_{d,h})_C^*$ de $E_{d,h}$ est un C -espace vectoriel de dimension h ayant les $\theta \circ \varphi^i$ pour $i = 0, \dots, h-1$ comme base.*

Proposition 5.4.3. — Si $d < h$ alors l'application $\iota : E_{d,h} \rightarrow (E_{d,h})_C$ est injective.

Démonstration. — Dans la base $(\theta, \theta \circ \varphi, \dots, \theta \circ \varphi^{h-1})$, l'application ι est définie par $\iota(x) = (\theta(x), \theta \circ \varphi(x), \dots, \theta \circ \varphi^{h-1}(x))$.

Soit $x \in E_{d,h}$ tel que $\iota(x) = 0$. ceci signifie donc que, pour tout $r = 0, \dots, h-1$, $\theta \circ \varphi^r(x) = 0$. Puisque $\varphi^h(x) = p^d x$, on a donc encore $\theta \circ \varphi^r(x) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Soit $t \in B_{\text{cris}}^+$ un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$; alors ([9, 5.3.7]) il existe $y \in B_{\text{cris}}^+$ tel que $x = ty$. Puisque $\varphi(t) = t$, on en déduit que $\varphi^h(y) = p^{d-h}y$. Comme $d-h < 0$, un tel élément y est nul, ce qui implique que $x = 0$. \triangleleft

La proposition 5.4.3 est fautive dans le cas où $d = h$; en effet, dans le cas où $d = h = 1$, on a alors $\iota = \theta : E_{1,1} \rightarrow C$, et donc $\text{Ker } \iota = \mathbb{Q}_p(1)$. D'après la proposition 4.4.1, on en déduit que le noyau de $\iota : E_{h,h} \rightarrow C^h$ est $\mathbb{Q}_{p^h}(1)$.

5.5. L'extension universelle de C par \mathbb{Q}_p . — Soit W un C -espace vectoriel de dimension finie. On notera W^* le dual de W en tant que C -espace vectoriel. De même, pour tout \mathcal{O}_C -module libre de rang fini \mathcal{W} , on pose $\mathcal{W}^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{W}, \mathcal{O}_C)$.

On notera V^\vee le dual d'un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie V ; de même, pour tout sous- \mathbb{Z}_p -module libre de type fini \mathcal{V} , on notera \mathcal{V}^\vee le dual de \mathcal{V} .

Proposition 5.5.1. — Soient G, G' deux groupes potentiellement spectraux sur K . Alors il existe un isomorphisme canonique

$$\text{Ext}_{\mathbf{GS}_{K,C}}^1(G, G') \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbf{GS}_C}^1(G, G')^{\mathcal{G}_K}.$$

Démonstration. — Soit $0 \rightarrow G' \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} G \rightarrow 0$ une extension de G par G' dans la catégorie \mathbf{GS}_C . Pour tout élément γ de \mathcal{G}_K , $0 \rightarrow G' \xrightarrow{u \circ \gamma} X \xrightarrow{\gamma^{-1} \circ v} G \rightarrow 0$ définit un élément de $\text{Ext}_{\mathbf{GS}_C}^1(G, G')$, que l'on note X^γ ; de plus, on voit que pour tous γ, γ' , $(X^\gamma)^{\gamma'} = X^{\gamma\gamma'}$, ce qui définit donc une action de \mathcal{G}_K sur $\text{Ext}_{\mathbf{GS}_C}^1(G, G')$.

Le morphisme canonique $\text{Ext}_{\mathbf{GS}_{K,C}}^1(G, G') \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{GS}_C}^1(G, G')$ est injectif et son image est incluse dans le sous-ensemble invariant par \mathcal{G}_K . Réciproquement, soit X un élément invariant par \mathcal{G}_K de $\text{Ext}_{\mathbf{GS}_C}^1(G, G')$: alors pour tout $\gamma \in \mathcal{G}_K$, il existe un isomorphisme analytique $w_\gamma : X^\gamma \rightarrow X$. Puisque le support de X^γ s'identifie à X par construction, on peut voir w_γ comme un automorphisme de X , qui le munit d'une structure potentiellement spectrale sur K . \triangleleft

Soient G un groupe et M un groupe abélien muni d'une action de G . On note alors $H^n(G, M)$ les groupes de cohomologie de G à coefficients dans M .

Soit G un groupe spectral. Un G -module spectral est un groupe abélien spectral M muni d'une action analytique de G , c'est-à-dire que $G \times M \rightarrow M$ est analytique.

Pour tout G -module spectral M , on peut définir les groupes de cohomologie analytique de G à coefficients dans M de la façon suivante. Pour tout entier $n \geq 0$, le groupe des chaînes analytiques $C_{\text{an}}^n(G, M)$ est le groupe des fonctions analytiques sur G^{n+1} à valeurs dans M ; alors les applications de dérivation d^n de la cohomologie des groupes sont évidemment

analytiques, et on a donc $d^n(C_{\text{an}}^n(G, M)) \subset C_{\text{an}}^{n+1}(G, M)$. Par conséquent, les $C_{\text{an}}^n(G, M)$ forment un complexe cohomologique. On note donc $Z_{\text{an}}^n(G, M)$ les groupes de cocycles, $B_{\text{an}}^n(G, M)$ les groupes de cobords, et $H_{\text{an}}^n(G, M)$ les groupes de cohomologie analytique de G à coefficients dans M .

En particulier, si G est un groupe fini étale, alors les groupes $H_{\text{an}}^n(G, M)$ sont canoniquement isomorphes aux groupes de cohomologie continue $H^n(G, M)$.

Proposition 5.5.2. — Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte de G -modules analytiques. On a alors une suite exacte à six termes

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_{\text{an}}^0(G, M') \longrightarrow H_{\text{an}}^0(G, M) \longrightarrow H_{\text{an}}^0(G, M'') \\ &\longrightarrow H_{\text{an}}^1(G, M') \longrightarrow H_{\text{an}}^1(G, M) \longrightarrow H_{\text{an}}^1(G, M''). \end{aligned}$$

Soit \mathbb{G}_m le groupe spectral multiplicatif sur K ; son algèbre affine est $K\{X, X^{-1}\}$. Soit $G = \text{Spm } A$ un groupe spectral; on munit G de la structure de \mathbb{G}_m -module spectral triviale. Alors un élément de $C^n(G, \mathbb{G}_m)$ est donné par un élément a de $(A \widehat{\otimes}_K \dots \widehat{\otimes}_K A)^\times$ ($n+1$ facteurs) tel que $\|a\| = \|a^{-1}\| = 1$. Dans le cas particulier où G est un sous- \mathcal{O}_C -module ouvert d'un C -espace vectoriel de dimension d , on peut identifier a à une série en $(n+1)d$ variables convergente sur G^{n+1} . Ceci permet d'écrire $Z^1(G, \mathbb{G}_m)$ comme l'ensemble des éléments a de $(A \widehat{\otimes}_K A)^\times$ tels que $\|a\| = \|a^{-1}\| = 1$ et que $a(X+Y, Z)a(X, Y) = a(X, Y+Z)a(Y, Z)$, où X, Y, Z représentent des familles de d variables; un élément de $B^1(G, \mathbb{G}_m)$ est de la forme $\frac{a(X+Y)}{a(X)a(Y)}$ pour $a \in A^\times$.

Lemme 5.5.3. — Soit $f \in Z^1(\mathcal{O}_C, \mathbb{G}_m)$; on suppose que $f \equiv 1 \pmod{\deg n}$. Il existe alors un élément a de C tel que $f(x, y) \equiv 1 + aC_n(x, y) \pmod{\deg n + 1}$, où $C_n(x, y) = (x+y)^n - x^n - y^n$.

Démonstration. — Soit g la série formelle $g = \log(f)$; alors $g = 0 \pmod{\deg n}$ et g est un cocycle symétrique en deux variables, c'est-à-dire que $g(x, y) = g(y, x)$ et $g(x+y, z) + g(x, y) = g(x, y+z) + g(y, z)$. D'après [18, 6.1], il existe donc $a \in C$ tel que $g(x, y) \equiv aC_n(x, y) \pmod{\deg(n+1)}$. Il suffit alors d'appliquer l'exponentielle à g pour en déduire le résultat. \triangleleft

Proposition 5.5.4. — $H_{\text{an}}^1(\mathcal{O}_C, \mathbb{G}_m) = 0$.

Démonstration. — Soit $f \in Z^1(\mathcal{O}_C, \mathbb{G}_m)$. En appliquant par récurrence le lemme 5.5.3, on voit qu'il existe une série formelle $g \in XK[[X]]$ telle que $f(X, Y) = (1 + g(X+Y))(1 + g(X))^{-1}(1 + g(Y))^{-1}$. Quitte à remplacer g par $\exp(-g'(0) \cdot X)g$, on voit alors d'après [4, 9.11] que g converge sur \mathcal{O}_C , ce qui montre que l'on a bien $f = \partial g \in B^1(\mathcal{O}_C, \mathbb{G}_m)$, et donc $H^1(\mathcal{O}_C, \mathbb{G}_m) = 0$. \triangleleft

Soit G un groupe spectral affine. Le groupe des caractères $X(G)$ de G est le groupe des morphismes spectraux de G vers le groupe multiplicatif \mathbb{G}_m . Soit B l'algèbre affine de G ; alors $X(G)$ s'identifie au groupe des $b \in B^\times$ tels que $\|b\| = \|b^{-1}\| = 1$ et $\Delta(b) = b \otimes b$.

La construction du groupe des caractères en fait un foncteur contravariant de la catégorie des groupes spectraux affines vers celle des groupes. En particulier, si Γ est un groupe

spectral étale de p -torsion, alors le groupe $X(\Gamma)$ s'identifie canoniquement au groupe des morphismes \mathcal{G}_K -équivariants de Γ vers $(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1)$.

Proposition 5.5.5. — Soit Γ un groupe spectral étale. Il existe un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{GS}_C}^1(\mathcal{O}_C, \Gamma) = H_{\mathrm{an}}^1(X(\Gamma), X(\mathcal{O}_C)).$$

Démonstration. — Soit G un élément de $\mathrm{Ext}_{\mathbf{GS}_{K,C}}^1(\mathcal{O}_C, \Gamma)$. Puisque $H_{\mathrm{an}}^1(\mathcal{O}_C, \mathbb{G}_m) = 0$ d'après la proposition 5.5.4, la suite longue de la proposition 5.5.2 est réduite à la suite exacte courte $0 \rightarrow X(\mathcal{O}_C) \rightarrow X(G) \rightarrow X(\Gamma) \rightarrow 0$; autrement dit, on a un morphisme naturel $\eta : \mathrm{Ext}_{\mathbf{GS}_C}^1(\mathcal{O}_C, \Gamma) \rightarrow \mathrm{Ext}^1(X(\Gamma), X(\mathcal{O}_C))$.

Soient A et B les algèbres affines respectives de \mathcal{O}_C et G . Alors, puisque les caractères de Γ forment une base de l'algèbre des fonctions continues sur Γ , tout relèvement des caractères forme une base de B comme A -module; par conséquent, l'extension de \mathcal{O}_C par Γ est déterminée par l'extension de $X(\Gamma)$ par $X(\mathcal{O}_C)$. Ceci prouve que η est injectif.

De plus, puisque $X(\Gamma)$ est un groupe abélien agissant trivialement sur $X(\mathcal{O}_C)$, on peut identifier canoniquement $\mathrm{Ext}^1(X(\Gamma), X(\mathcal{O}_C))$ à $H^1(X(\Gamma), X(\mathcal{O}_C))$. Soit c un cocycle représentant un élément de $H_{\mathrm{an}}^1(X(\Gamma), X(\mathcal{O}_C))$; soit B_c le A -module libre engendré par des éléments e_χ pour $\chi \in X(\Gamma)$, muni de la multiplication définie par $e_\chi e_{\chi'} = c_{\chi, \chi'} e_{\chi \chi'}$ et de la comultiplication $\Delta(e_\chi) = e_\chi \otimes e_\chi$. Alors $G_c = \mathrm{Spm} B_c$ est un groupe spectral, extension de \mathcal{O}_C par Γ ; de plus, modifier le cocycle c par un cobord ne change pas la classe d'isomorphisme de cette extension. Enfin, on vérifie que $\eta(G_c) = c$, et donc η est surjectif. \triangleleft

Proposition 5.5.6. — Soient W une C -représentation de \mathcal{G}_K et V une \mathbb{Q}_p -représentation de dimension finie de \mathcal{G}_K . Alors on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{BS}_{K,C}^+}^1(W, V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[\mathcal{G}_K]}(V^\vee(1), W^*).$$

Démonstration. — D'après la proposition 5.5.1, il suffit de traiter le cas où $K = C$ et on peut donc supposer que l'action de \mathcal{G}_K est triviale. Il suffit alors de traiter le cas où $W = C$.

Soit \mathcal{V} un réseau de V . On peut alors identifier $\mathrm{Ext}_{\mathbf{GS}_C}^1(C, V)$ à $\mathrm{Ext}_{\mathbf{GS}_C}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{V})[1/p]$. De plus, l'égalité $\mathcal{V} = \varprojlim \mathcal{V}/p^n \mathcal{V}$ identifie $\mathrm{Ext}_{\mathbf{GS}_C}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{V})$ à $\varprojlim \mathrm{Ext}_{\mathbf{GS}_C}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{V}/p^n \mathcal{V})$.

Puisque $\Gamma = \mathcal{V}/p^n \mathcal{V}$ est un groupe abélien de torsion, on peut écrire $\mathrm{Hom}(X(\Gamma), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \Gamma(-1)$. Par conséquent, on peut naturellement identifier $\mathrm{Ext}_{\mathbf{GS}_C}^1(\mathcal{O}_C, \Gamma) = H_{\mathrm{an}}^1(X(\Gamma), X(G))$ à $\Gamma(-1) \otimes_{\mathbb{Z}} X(\mathcal{O}_C)$. De plus, les éléments de $X(\mathcal{O}_C)$ sont les fonctions exponentielles, et donc $X(\mathcal{O}_C)$ s'identifie au domaine de convergence de l'exponentielle. \triangleleft

En passant au dual, on voit que l'on peut encore identifier $\mathrm{Ext}_{\mathbf{BS}_{K,C}^+}^1(W, V)$ au \mathbb{Q}_p -espace vectoriel des morphismes \mathcal{G}_K -invariants de W vers $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(-1)$. En particulier, $\mathrm{Ext}_{\mathbf{BS}_C^+}^1(C, \mathbb{Q}_p(1)) = C$.

Définition 5.5.7. — Soit \mathbf{L}_K^+ la catégorie dont les objets sont les triplets (W, V, f) , où V est une \mathbb{Q}_p -représentation de dimension finie de \mathcal{G}_K , W une C -représentation de \mathcal{G}_K , et $f : W \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(-1)$ est une application \mathbb{Q}_p -linéaire et \mathcal{G}_K -équivariante, et dont les

morphismes entre deux objets (W, V, f) et (W', V', f') sont les paires (v, w) , où $v : V \rightarrow V'$ est un morphisme de représentations et $w : W \rightarrow W'$ est une application C -linéaire, telles que $f' \circ w = (v \otimes \text{id}_{C(-1)}) \circ f$.

Par abus de notation, on omettra parfois V et W , et on notera simplement $f : W \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(-1)$ un objet de \mathbf{L}_K^+ .

Proposition 5.5.8. — La correspondance qui à un objet f de \mathbf{L}_K^+ associe

$$E(f) = W \times_{(V \otimes C(-1))} (V \otimes E_1(-1))$$

est un foncteur covariant de la catégorie \mathbf{L}_K^+ vers la catégorie $\mathbf{BC}_{K,C}^+$.

Démonstration. — Pour tout objet f de L , $E(f)$ est construit par le diagramme commutatif suivant :

$$(5.5.9) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & E(f) & \longrightarrow & W & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_1(-1) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \theta} & V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(-1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

C'est un produit fibré d'espaces de Banach spectraux effectifs sur K , et donc un espace de Banach spectral effectif sur K . De plus, les deux lignes du diagramme sont des suites exactes courtes, et la première ligne fait de $E(f)$ un espace de Banach-Colmez effectif.

Soit $u : f \rightarrow f'$ un morphisme de \mathbf{L}_K^+ , alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & W' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ V \otimes C(-1) & \longrightarrow & V' \otimes C(-1) \end{array}$$

est commutatif, et donne donc naissance à un morphisme $E(u) : E(f) \rightarrow E(f')$. \triangleleft

On remarque que, puisque $E(f)$ est naturellement muni d'une présentation, ceci définit également un foncteur de la catégorie \mathbf{L}_K^+ vers la catégorie des présentations d'espaces de Banach-Colmez effectifs.

Comme corollaire de la proposition 5.5.6, on obtient le résultat suivant.

Proposition 5.5.10. — Le foncteur E réalise une équivalence de catégorie entre \mathbf{L}_K^+ et la catégorie des présentations d'espaces de Banach-Colmez effectifs sur K .

En particulier, le foncteur E est essentiellement surjectif sur la catégorie \mathbf{BC}_K^+ .

Définition 5.5.11. — Un objet (W, V, f) de \mathbf{L}_K^+ est dit :

- à pentes finies si f est injective (ce qui revient à dire que ${}^t f(V^\vee(1))$ engendre W^* comme C -espace vectoriel) ;
- connexe si $f(W) \cap V = V$ (ce qui revient à dire que ${}^t f$ est injective) ;
- étale si $W = 0$.

On note \mathbf{Lf}_K^+ la sous-catégorie pleine des objets à pentes finies de \mathbf{L}_K^+ .

Proposition 5.5.12. — Soit $f = (W, V, f)$ un objet de \mathbf{L}_K^+ . Il existe une unique suite exacte $0 \rightarrow f_0 \rightarrow f \rightarrow f' \rightarrow 0$ de \mathbf{L}_K^+ , où f_0 est connexe, et f' est étale. De plus, cette suite exacte est (non canoniquement) scindée.

Démonstration. — Les objets f_0 et f' sont bien sûr donnés par $f_0 = (W, f(W) \cap V, f)$ et $f' = (0, V/(f(W) \cap V), 0)$. De plus, puisque V est une \mathbb{Q}_p -représentation de dimension finie de \mathcal{G}_K , la suite $0 \rightarrow f(W) \cap V \rightarrow V \rightarrow V/(f(W) \cap V) \rightarrow 0$ se scinde, et toute section de cette suite fournit une section de $0 \rightarrow f_0 \rightarrow f \rightarrow f' \rightarrow 0$. \triangleleft

Proposition 5.5.13. — Pour tout objet $f = (W, V, f)$ de \mathbf{L}_K^+ , $E(f)$ est connexe si et seulement si f est connexe ; $E(f)$ est étale si et seulement si f est étale.

Démonstration. — Compte tenu des propositions 5.5.12 et 3.5.5, il suffit de remarquer que f est étale si et seulement si $E(f)$ est étale. Or, si $f : V \rightarrow 0$ est étale, on trouve directement $E(f) = V$; inversement, tout espace de Banach-Colmez étale V' est une \mathbb{Q}_p -représentation de dimension finie, et est donc isomorphe à $E(0 \rightarrow V' \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B})$. \triangleleft

Corollaire 5.5.14. — Soit E un espace de Banach-Colmez effectif. Alors E est connexe si et seulement si, pour tout espace de Banach spectral étale V , $\mathrm{Hom}_{\mathbf{BC}_K^+}(E, V) = 0$.

Proposition 5.5.15. — Soient V un espace de Banach spectral étale et W un espace de Banach-Colmez effectif connexe. Alors

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{BC}_K^+}^1(V, W) = 0.$$

Démonstration. — Il s'agit de montrer que toute extension $0 \rightarrow W \rightarrow F \rightarrow V \rightarrow 0$ est scindée. Or toute section \mathbb{Q}_p -linéaire continue de $F \rightarrow V$ est analytique et fournit donc un scindage de l'extension. \triangleleft

6. Lemme fondamental sur les espaces de Banach-Colmez effectifs de dimension un

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 6.0.1 (Lemme fondamental). — Soit E un espace de Banach-Colmez effectif « de dimension un » (c'est-à-dire extension de C par un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel V de dimension finie h). Alors tout morphisme analytique u de E vers C vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- (i) l'image de u est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie ;
- (ii) u est surjectif, et son noyau est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension h .

La démonstration s'effectue en deux étapes. On commence par établir le résultat lorsque E est l'espace de Banach-Colmez élémentaire $E_{1,h}$ (proposition 6.1.1). La deuxième partie consiste en un résultat de structure des espaces de Banach-Colmez effectifs (proposition 6.2.7) : ils sont tous isomorphes à la somme directe de $E_{1,h}$ et d'un groupe spectral étale.

6.1. Lemme fondamental pour $E_{1/h}$. —

Proposition 6.1.1. — Soit $u : E_{1/h} \rightarrow C$ un morphisme analytique non nul. Alors le support de u est un morphisme surjectif $E_{1/h} \rightarrow C$ et son noyau est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension h .

Démonstration. — Tout au long de cette preuve, on pose $q = p^h$.

Remarquons que le résultat est vrai pour u si et seulement s'il est vrai pour $u \circ \varphi^i$, $i \in \mathbb{Z}$. D'après la proposition 5.4.2, il existe des $u_i \in C$ tels que $u = u_0 \theta + u_1 \theta \circ \varphi \cdots + u_{h-1} \theta \circ \varphi^{h-1}$; puisque $u \neq 0$, les u_i ne sont pas tous nuls.

Soit i un entier entre 0 et $h-1$ minimisant $v(u_i) + i/h$. Alors $u \circ \varphi^{h-i}$ s'écrit $\sum u'_j \theta \varphi^j$, où $u'_j = p u_{i+j}$ si $j \leq h-i-1$ et $u'_j = u_{j-h+i}$ si $j \geq h-i$. On en déduit donc que, pour tout j , $v(u'_j) \geq v(u'_0) - j/h$. Quitte à composer u par une puissance de φ et à multiplier par une constante, on peut donc toujours supposer :

$$v(u_0) = 0, \quad v(u_i) \geq -\frac{i}{h} \quad \text{pour } i = 0, \dots, h-1.$$

La famille des $(u_i)_{i=0, \dots, h-1}$ peut se prolonger en une unique suite $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telle que $u_{i+h} = p^{-1} u_i$ pour tout i ; il est encore vrai que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $v(u_i) \geq -\frac{i}{h}$. D'après la proposition 5.2.5, l'application

$$\eta : \begin{cases} \mathfrak{m}_R & \longrightarrow E_{1/h} \\ x & \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} p^{-n} [x^{p^n (h-1)}] \end{cases}$$

est un isomorphisme de variétés spectrales. De plus, pour tout $x \in \mathfrak{m}_R$,

$$u \circ \eta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq h-1} p^{-n} u_i \theta([x^{q^n p^i}]) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i \theta([x^{p^i}]).$$

Pour montrer la surjectivité de u , il suffit de montrer que son image contient une boule de C . Notons encore

$$u^+(x) = \sum_{i \geq 0} u_i \theta([x^{p^i}]);$$

on peut encore écrire $u^+(x) = f^+(\theta([x]))$, où f^+ est la série entière à coefficients dans C définie par $f^+(x) = \sum u_n x^{p^n}$.

Puisque $v(u_n) \geq -\frac{n}{h}$ et $v(u_{nh}) = -n$ pour tout n , le polygone de Newton de f^+ est formé des points $(p^n, -n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Posons $\rho = \frac{1}{h(p-1)}$. Par la théorie des polygones de Newton, nous voyons alors que pour tout élément b de \mathcal{O}_C tel que $v(b) \geq \rho$, l'équation $f^+(x) = b$ a exactement une solution $x \in \mathcal{O}_C$ de valuation égale à $v(b)$; de même, pour tout entier n , si $v(b) \geq \rho - n$, alors $f^+(x) = b$ a exactement q^n solutions de valuation supérieure à $p^{-n}\rho$.

On remarque enfin que f^+ vérifie l'équation fonctionnelle

$$f^+(x) = g(x) + \frac{1}{p} f^+(x^q), \quad \text{où } g(x) = x + u_1 x^p + \dots + u_{h-1} x^{p^{h-1}}.$$

Choisissons donc un élément b de \mathcal{O}_C , de valuation supérieure à ρ , et construisons par récurrence une suite x_i de racines des équations $f^+(x_i) = p^{-i}b$, telle que $x_i^{q^i}$ ait une limite dans \mathcal{O}_C . Il suffit pour cela de montrer que $x_i^{q^i} - x_{i+1}^{q^{i+1}}$ tend vers zéro; ou encore, d'après le lemme 4.1.2, de montrer qu'il existe un réel $\xi > 0$ tel que, pour tout i , $v(x_{i+1}^q - x_i) - v(x_i) \geq \xi$.

Supposons x_i construit; choisissons une racine y de l'équation $y^q = x_i$. On remarque que $p^{-1}f^+(x_i) = f^+(x_i) - g(x_i)$, de sorte que, si l'on cherche x_{i+1} sous la forme $y + t$, on est amené à résoudre l'équation

$$f^+(y+t) - f^+(y) = -g(y) = -\sum_{j=0}^{h-1} u_j y^{p^j}.$$

Commençons par calculer la valuation de $-g(y)$: le calcul montre que le terme de plus petite valuation correspond à $j = i+1$ (ou $j = h-1$ si $i \geq h-1$), et on a donc

$$v(g(y)) = \begin{cases} \frac{i+1}{h} + \frac{1}{h(p-1)} & \text{si } i \leq h-1, \\ -1 + \frac{1}{h} + \frac{1}{h p^{i+2-h}(p-1)} & \text{si } i \geq h-1. \end{cases}$$

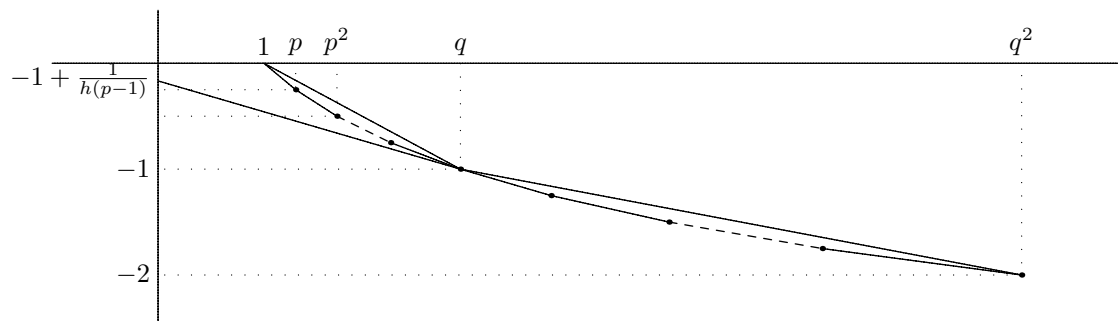
Dans tous les cas, on a bien $v(g(y)) > -1 + 1/h(p-1)$.

Le développement en série entière en t de $f^+(y+t) - f^+(y)$ est :

$$\begin{aligned} f^+(y+t) - f^+(y) &= \sum_{i \geq 1} u'_i \sum_{j=1}^{p^i} \binom{p^i}{j} t^j y^{p^j-i} \\ &= \sum_{j \geq 1} t^j \sum_{p^i \geq j} u'_i \binom{p^i}{j} y^{p^j-i} \end{aligned}$$

Notons μ_j le coefficient de t^j dans cette somme. On vérifie que $v(\mu_{p^e m}) \geq -e/h$, et que cette valeur est atteinte lorsque $m = 1$ et e est multiple de h . On peut donc en déduire le polygone de Newton de $\sum \mu_j t^j - g(y)$; il est compris (à droite de la droite

d'équation $x = q$) entre le polygone dont les points sont les $(p^i, -i/h)$ et celui dont les points sont les $(q^i, -i)$, et puisque $v(g(y)) > -1 + 1/h(p-1)$, son premier segment rejoint les points $(0, v(g(y)))$ à $(q, -1)$.



On vérifie donc que $f^+(y+t) = p^{-i-1}b$ a p^h solutions t de valuation strictement supérieure à la valuation de x_i , et qu'on a même

$$v(t) \geq \frac{1}{q}\rho, \quad \text{et donc} \quad v(x_{i+1}^q - x_i) \geq \frac{q-1}{q}\rho.$$

On peut donc construire une suite (x_i) vérifiant les conditions énoncées. Ceci garantit que, pour tout i , l'élément de \mathcal{O}_C défini par $x'_i = \lim(x_{i+j}^q)$ existe. Par construction de x'_i , il est immédiat que $(x'_{i+1})^q = x'_i$; cette suite définit donc un élément de R , et l'élément de $E_{1/h}(C)$ correspondant vérifie bien $u(x') = b$. Ceci achève la preuve de la surjectivité de u .

Pour prouver que $\text{Ker } u$ est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension h , commençons par fixer un réseau Λ de $\text{Ker } u$: il suffit alors de prouver que $\Lambda/p\Lambda$ est de cardinal p^h . Ceci revient à refaire le raisonnement précédent lorsque $b = 0$; en choisissant Λ assez petit, on peut supposer $x_0 = 0$, et le cardinal de $\Lambda/p\Lambda$ est égal au nombre de valeurs possibles pour x_1 . Puisque 0 n'a qu'une seule racine q -ième, il y a exactement p^h valeurs possibles, ce qui prouve que $\text{Ker } u$ est de dimension h sur \mathbb{Q}_p . \triangleleft

6.2. Structure des espaces de Banach-Colmez de dimension un. —

Lemme 6.2.1. — Soient $k = R/\mathfrak{m}_R$ et $E = \text{Frac } R$.

Soient P_1, \dots, P_h des polynômes à h variables à coefficients dans R , de la forme $P_r = \sum a_{r,i,n} X_i^{p^n}$ où $n \in \mathbb{Z}$, et I_1, \dots, I_s une partition de l'ensemble $1, \dots, h$ en s parties. Soit h_j le cardinal de I_j . On suppose en outre :

- (i) il existe des entiers d_j tels que $v_R(a_{r,i,n}) = 0$ si et seulement s'il existe $j = 1, \dots, s$ tel que $(r, i) \in I_j \times I_j$ et $r = d_j$;
- (ii) pour tout $j = 1, \dots, s$, $\delta_j = \det(a_{r,i,n_j})_{(r,i) \in I_j \times I_j}$ est une unité de R ;
- (iii) pour tout $i = 1, \dots, s$, soit e_i le plus petit entier n tel que l'un des coefficients $a_{r,i,n}$ soit non nuls; alors $\det(a_{r,i,e_i})_{r,i}$ est non nul.

Soit $A = R[X_1, \dots, X_h]/(P_1, \dots, P_h)$. Alors $\text{Hom}(A, R)$ a exactement $p^{\sum h_j d_j - \sum e_i}$ points.

Démonstration. — Quitte à réordonner les X_i , on peut supposer que les parties I_1, \dots, I_s de $1, \dots, h$ sont des intervalles rangés par ordre croissant; de plus, quitte à remplacer X_i par $X_i^{p^{e_i}}$ pour tout i , on peut supposer d'après (iii) que $e_i = 0$ pour tout i , c'est-à-dire que le déterminant jacobien des P_r est non nul. Puisque R est parfait, ceci ne change pas le nombre de solutions.

Soient \overline{P}_r les images des P_r dans $k[X_1, \dots, X_h]$. Alors d'après (i), pour $r \in I_j$, on peut écrire $\overline{P}_r = \sum_{i \in I_j} a_{i,j,n_j} X_i^{p^{d_j}}$; d'après (ii), on en conclut que les \overline{P}_r forment une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_h]$. De plus, $A_k = A \otimes_R k$ est une k -algèbre finie et plate de rang $p^{\sum h_j d_j}$.

Par conséquent, les P_r forment une suite transversalement régulière de $R[X_1, \dots, X_h]$ relativement à R ([12, IV.19.2.1]), et donc A est une R -algèbre finie et plate de rang $p^{\sum h_j d_j}$.

D'après (iv), $\Omega_{A \otimes E/E}^1 = 0$; par conséquent, $A \otimes E$ est une algèbre finie étale de rang $p^{\sum h_j d_j}$, donc $\text{Hom}_E(A \otimes E, E)$ est de cardinal R . Enfin, puisque R est intégralement clos, tout point de E^h définissant un morphisme $A \rightarrow E$ est en fait à coordonnées dans R , et donc $\text{Hom}_R(A, R)$ est de cardinal $p^{\sum h_j d_j}$. \triangleleft

Dans ce qui suit, (V, C, λ) est un objet connexe et à pentes finies de la catégorie \mathbf{L}_C^+ définie en 5.5.7, c'est-à-dire que $\lambda : C \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(-1)$ est injective et $V \cap \lambda(C) = V$.

Quitte à fixer une base de V , on peut écrire $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$, où les λ_i appartiennent à C , et on peut même choisir cette base de façon que les λ_i appartiennent à \mathcal{O}_C . Dire que λ est connexe et à pentes finies revient alors à dire que les λ_i sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q}_p .

Soit également $\iota : E_{1/h} \rightarrow (E_{1/h})_C$ l'application d'enveloppe de la proposition 5.4.3. Puisque $E_{1/h}^*$ est le C -espace vectoriel de base $(\theta\varphi^r, r = 0, \dots, h-1)$, on peut l'écrire $\iota(x) = (\theta x, \theta\varphi x, \dots, \theta\varphi^{h-1}x)$. On rappelle également qu'en vertu de la proposition 5.2.5, $E_{1/h}$ s'identifie comme variété spectrale affine à \mathfrak{m}_R , l'isomorphisme étant donné par

$$\eta : \begin{cases} R & \longrightarrow BW(R) \\ x & \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} p^{-n} [x^{p^{n(h-1)}}] \end{cases} .$$

Enfin, $(E_{1,h})_C$ est naturellement muni d'une structure de \mathbb{Q}_p^h -espace vectoriel, la multiplication par un élément c de \mathbb{Q}_p^h étant définie par $c \cdot (x_r)_{r=0, \dots, h-1} = (\varphi^r(c)x_r)_{r=0, \dots, h-1}$; l'application $\iota : E_{1,h} \rightarrow (E_{1,h})_C$ est \mathbb{Q}_p^h -linéaire pour cette structure.

La proposition qui suit traite un cas particulier, celui où les coefficients (f_1, \dots, f_h) sont \mathbb{F}_p -linéairement indépendants dans $\mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_C$. Ce cas ne sert pas à la démonstration du cas général (proposition 6.2.3), mais il en rend l'exposé plus compréhensible.

Proposition 6.2.2. — Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ des éléments de \mathcal{O}_C dont les images modulo \mathfrak{m}_C sont linéairement indépendantes sur \mathbb{F}_p ; alors

$$\iota \otimes {}^t\lambda : \begin{cases} \text{Hom}(V, E_{1/h}) = E_{1/h}^h & \longrightarrow (E_{1/h})_C = C^h \\ (x_1, \dots, x_h) & \longmapsto \left(\sum_{i=1}^h \lambda_i \theta\varphi^r(x_i) \right)_{i=0, \dots, h-1} \end{cases}$$

est surjective, et son noyau est un \mathbb{Q}_{p^h} -espace vectoriel de dimension h .

Démonstration. — Soit $q = p^h$. Puisque $\eta : \mathfrak{m}_R \rightarrow E_{1/h}$ est une bijection analytique, il suffit de montrer le résultat pour $f = (\iota \circ \eta) \otimes {}^t\lambda : \mathfrak{m}_R^h \rightarrow C^h$. Notons \mathcal{E} le réseau de R constitué des éléments de valuation supérieure ou égale à $1/q-1$, et \mathcal{S} le réseau droit de C^h (5.2.1) de type

$$\left(\frac{1}{q-1}, \frac{p}{q-1}, \dots, \frac{p^{h-1}}{q-1} \right).$$

On vérifie que l'image de \mathcal{E}^h est bien incluse dans \mathcal{S} ; il suffit donc de montrer que $f : \mathcal{E}^h \rightarrow \mathcal{S}$ est surjective, et que son noyau est un \mathbb{Z}_{p^h} -module libre de rang h .

Soit $L_{1/h}$ la \mathbb{Q}_p -algèbre à division d'invariant $\frac{1}{h}$; \mathbb{Q}_{p^h} est un sous-corps commutatif de $L_{1/h}$, et $L_{1/h}$ est engendrée sur \mathbb{Q}_{p^h} par un élément π vérifiant les relations $\pi^h = p$, $\pi x = \varphi(x)\pi$ pour $x \in \mathbb{Q}_{p^h}$.

Alors $L_{1/h}$ agit par automorphismes sur $E_{1/h}$ (l'action de π étant donnée par φ), et donc sur $E_{1/h} \otimes V$; de même, $L_{1/h}$ agit sur C^h , l'action de π étant donnée par l'automorphisme Π de C^h défini par

$$\Pi(x_0, \dots, x_{h-1}) = (x_1, \dots, x_{h-1}, px_0).$$

Par construction de ι , on vérifie en outre que $\iota \circ \varphi = \Pi \circ \iota$, c'est-à-dire que $\iota : E_{1/h} \rightarrow (E_{1/h})_C = C^h$ commute à l'action de $L_{1/h}$. Il en est donc de même de f , qui est par conséquent une application $L_{1/h}$ -linéaire à gauche entre R^h et C^h . Par conséquent, le noyau de f est un $L_{1/h}$ -espace vectoriel à gauche.

Soit \mathcal{D} l'ordre maximal de $L_{1/h}$; \mathcal{D} est séparé et complet pour la topologie p -adique, π est une uniformisante de \mathcal{D} et $\mathcal{D}/\pi\mathcal{D} = \mathbb{F}_{p^h}$. De plus, \mathcal{E}^h et \mathcal{S} sont des sous- \mathcal{D} -modules à gauche respectivement de R^h et C^h , et on voit que $\pi \cdot (\mathcal{E}^h) = \varphi(\mathcal{E})^h$ et $\pi \cdot (\mathcal{S}) = \Pi\mathcal{S}$.

Il suffit donc, pour prouver la proposition, de montrer que l'application quotient

$$\bar{f} : \mathcal{E}^h / \varphi(\mathcal{E})^h \longrightarrow \mathcal{S} / \Pi\mathcal{S}$$

est surjective, et que son noyau (qui est un \mathbb{F}_q -espace vectoriel) est une droite sur \mathbb{F}_q .

Par construction du réseau \mathcal{S} et puisque $1 + \frac{1}{q-1} = \frac{p^h}{q-1}$, son image $\Pi\mathcal{S}$ est le réseau droit de type

$$\left(\frac{p}{q-1}, \frac{p^2}{q-1}, \dots, \frac{p^h}{q-1} \right).$$

Pour tout $r = 0, \dots, h-1$, l'application $\theta \circ \varphi^r \circ \eta : R \rightarrow C$ s'écrit sous forme de série :

$$\theta \circ \varphi^r \circ \eta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p^{-n} \theta([x^{p^{n+r}}]);$$

sous la condition $v_R(x) \geq \frac{1}{q-1}$, les seuls termes de cette série dont la valuation est inférieure à $\frac{p^{r+1}}{q-1}$ sont :

- pour $r = 0$, les termes $n = 0$ et $n = 1$;
- pour $1 \leq r \leq h-2$, le terme $n = 0$;
- pour $r = h-1$, les termes $n = 0$ et $n = -1$.

Autrement dit, l'application \bar{f} s'écrit encore

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_d) = \left(\sum_{i=1}^h \lambda_i([x_i] + \frac{1}{p}[x_i^{p^h}]), \sum_{i=1}^h \lambda_i[x_i^p], \sum_{i=1}^h \lambda_i[x_i^{p^2}], \dots, \sum_{i=1}^h \lambda_i[x_i^{p^{h-2}}], \sum_{i=1}^h \lambda_i p[x_i^{1/p}] + [x_i]^{p^{h-1}} \right).$$

Pour tout $i = 1, \dots, h$, soit $\hat{\lambda}_i$ un élément de R tel que $\hat{\lambda}_i^{(0)} = \lambda_i$; soit également \tilde{p} un élément de R tel que $\tilde{p}^{(0)} = p$. Il suffit alors pour montrer la surjectivité de \bar{f} de montrer que, pour tous $b_0, \dots, b_{h-1} \in R$ tels que $v(b_r) \geq \frac{p^r}{q-1}$, le système

$$\begin{cases} \sum \hat{\lambda}_i(x_i + \frac{1}{\tilde{p}}x_i^{p^h}) & = b_0, \\ \sum \hat{\lambda}_i(x_i^{p^r}) & = b_r \quad \text{pour } r = 1, \dots, h-2, \\ \sum \hat{\lambda}_i(\tilde{p}x_i^{\frac{1}{p}} + x_i^{p^{h-1}}) & = b_{h-1}, \end{cases}$$

a une solution (x_1, \dots, x_h) dans \mathcal{E}^h . Soit ξ un élément de R tel que $\xi^{p(q-1)} = \tilde{p}$; alors ξ^p est un générateur de l'idéal \mathcal{E} . Alors, en effectuant le changement de variables $x_i = (\xi y_i)^p$, il suffit de résoudre dans R^h le système

$$\begin{cases} \sum \hat{\lambda}_i(y_i^p + y_i^{p^{h+1}}) & = \xi^{-p} b_0 \\ \sum \hat{\lambda}_i y_i^{p^{r+1}} & = \xi^{-p^{r+1}} b_r \\ \text{pour } r = 1, \dots, h-2, \\ \sum \hat{\lambda}_i(\xi^{(p-1)(q-1)} y_i + y_i^{p^h}) & = \xi^{-p^h} b_{h-1}. \end{cases}$$

Posons enfin $\mu_i = \lambda_i^{p^{-h}}$. Puisque R est un anneau parfait de caractéristique p , les équations peuvent de « linéariser » en :

$$\begin{cases} \sum \mu_i^{p^{h-r-1}} y_i & = c_r \quad \text{pour } r = 1, \dots, h-2, \\ \sum \mu_i^{p^{h-1}} (y_i + y_i^{p^h}) & = c_{h-1} \\ \sum \mu_i^{p^h} (\xi^{(p-1)(q-1)} y_i + y_i^{p^h}) & = c_h, \end{cases}$$

où $c = (c_1, \dots, c_h)$ est un élément de R^h ; autrement dit, il s'agit de montrer que, pour tout c appartenant à R^h , le R -schéma Z_c défini par ces équations a au moins un point à coefficients dans R . Le déterminant jacobien de Z_c vaut $\xi^{(p-1)(q-1)} \delta$ où

$$\delta = \det(\mu_i^{p^r})_{i,r=1,\dots,h} = \prod_{a \in \mathbb{P}^{h-1} \mathbb{F}_p} \left(\sum_{i=0}^{h-1} [a_i] \mu_i^p \right).$$

Puisqu'on a supposé les images des λ_i linéairement indépendantes sur \mathbb{F}_p , il en est de même pour les μ_i^p , et il s'ensuit que δ est une unité de R ; par conséquent, Z_c n'est pas étale sur R , mais $Z_c \otimes_R (\text{Frac } R)$ est étale sur $\text{Frac } R$. Remarquons enfin que les $(h-2)$ premières équations sont linéaires, ce qui implique que ce système peut se réduire sur $\text{Frac } R$ à deux équations à deux inconnues, de la forme

$$\begin{cases} z^q + \alpha z + \beta z' & = c \\ z'^q + \xi^{(p-1)(q-1)} \alpha' z' + \xi^{(p-1)(q-1)} \beta' z & = c' \end{cases}$$

On constate donc que Z_c est de rang q^2 , entier sur R , et étale sur $\text{Frac } R$. Par conséquent, $Z_c(R)$ et $Z_c(\text{Frac } R)$ sont de même cardinal q^2 . Ceci montre que \bar{f} est surjective ; il en est donc de même de f .

Il reste à prouver que le noyau de \bar{f} est de dimension 1 sur \mathbb{F}_{p^h} , c'est-à-dire que $Z_0(R)/\varphi(\mathcal{E})$ a q points.

On voit immédiatement que $Z_0(R)/\mathfrak{m}_R$ a exactement q points ; par conséquent, $Z_0(R)/\varphi(\mathcal{E})$ a au moins q points distincts. De plus, on dispose de la suite exacte courte (d'ensembles pointés)

$$0 \longrightarrow Z_0(R) \cap \varphi(\mathcal{E}) \longrightarrow Z_0(R) \longrightarrow Z_0(R)/\varphi(\mathcal{E}) \longrightarrow 0 ;$$

par conséquent, il suffit de montrer que $Z_0(R) \cap \varphi(\mathcal{E})$ a au moins q points distincts.

Puisque l'idéal $\varphi(\mathcal{E})$ de R est engendré par ξ^p , on voit que déterminer les points de $Z_0(R) \cap \varphi(\mathcal{E})$ revient à résoudre les équations suivantes (en posant $y_i = \xi^{p-1} z_i$) :

$$\begin{cases} \sum \mu_i^{p^r} z_i & = 0 \text{ pour } r = 1, \dots, h-2, \\ \sum \mu_i^{p^{h-1}} (z_i + \tilde{p} z_i^q) & = 0, \\ \sum \mu_i^{p^h} (z_i + z_i^q) & = 0. \end{cases}$$

On constate que le déterminant jacobien est cette fois égal à δ , et que le système est donc étale sur R ; par conséquent, ce système admet q solutions sur R , ce qui montre que le cardinal de $Z_0(R) \cap \varphi(\mathcal{E})$ est q .

Finalement, on conclut que $\text{Ker}(\bar{f})$ est bien une droite sur \mathbb{F}_{p^h} , et donc $\text{Ker}(f)$ est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension h . \triangleleft

Proposition 6.2.3. — Soit V un sous- \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension h de C , et notons $\lambda : V \rightarrow C$ l'injection canonique. Alors $\iota \otimes \lambda : E_{1/h} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \rightarrow C^h$ est surjective, et son noyau est un \mathbb{Q}_{p^h} -espace vectoriel de dimension h .

Démonstration. — La preuve de cette proposition est bien sûr semblable à celle du cas particulier précédent.

Soit \mathcal{V} un réseau de V . Alors $\mathcal{V}/(V \cap \mathfrak{m}_C \mathcal{V})$ est par hypothèse un $\overline{\mathbb{F}_p}$ -espace vectoriel de dimension h ; par conséquent, on peut choisir une base $(\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ de V telle qu'il existe des réels $0 \leq v_1 < \dots < v_s < 1$ et des entiers $n_0 = 1 < \dots < n_s = h + 1$ tels que $v(\lambda_i) = v_j$ pour tout $i = n_{j-1}, \dots, n_j - 1$; en outre, les images de $\lambda_{n_{j-1}}, \dots, \lambda_{n_j-1}$ sont linéairement indépendantes modulo l'idéal de \mathcal{O}_C de valuation v_j . Pour tout entier $i = 1, \dots, h$, on note encore $m(i)$ l'unique entier tel que $v(\lambda_i) = v_{m(i)}$.

On pose encore $v_0 = v_s - 1$ et, pour $j = 1, \dots, s$, $w_j = p^{-n_{j-1}}(v_j - v_{j-1})$, ainsi que

$$\rho_j = \frac{1}{q-1}(w_1 + \dots + w_j + qw_{j+1} + \dots + qw_h).$$

Par construction des ρ_j , on a les relations

$$\rho_j - \rho_{j+1} = p^{-n_j}(v_{j+1} - v_j) \quad \text{et} \quad q\rho_s - \rho_1 = v_1 - v_s + 1 = v_1 - v_0.$$

Notons également $h_j = n_j - n_{j-1}$; on a alors $h_1 + \dots + h_s = h$. Puisque la somme des $p^{n_{j-1}}w_j$ est égale à 1 et puisque $0 < p^{n_{j-1}}w_j < 1$, on obtient pour ρ_j l'encadrement :

$$(6.2.4) \quad \frac{p^{-n_{j-1}}}{q-1} < \rho_j < \frac{p^{h-n_j}}{q-1}.$$

Soit \mathcal{E} le réseau droit de R^h de type $(\rho_{m(i)})_{i=1,\dots,h}$; chaque ρ_j est répété h_j fois. Par construction des ρ_j , l'image de \mathcal{E} est incluse dans le réseau droit \mathcal{S} de C^h de type $(v_{m(r)} + p^r \rho_{m(r)})_{r=1,\dots,h}$.

De même que dans la preuve de la proposition 6.2.2, $E_{1/h}^h$ et C^h sont des $L_{1/h}$ -modules à gauche, et l'application $\iota \otimes \lambda$ est $L_{1/h}$ -linéaire; de plus, puisque $v_{j+1} + \rho_{j+1}^{p^{n_{j+1}}} = v_j + \rho_j^{p^{n_j}}$ pour $j = 0, \dots, s-1$, on vérifie que $\Pi\mathcal{S}$ est le réseau droit de C^h de type $(v_{m(r)} + p^{r+1} \rho_{m(r)})_{r=1,\dots,h-1}$.

Par conséquent, il suffit encore de démontrer que l'application

$$\bar{f} : \mathcal{E}/\varphi\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{S}/\Pi\mathcal{S}$$

est surjective, et que son noyau est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel de dimension h .

Soient ξ_1, \dots, ξ_s des éléments de R tels que

$$\left(\frac{\xi_j^{(0)}}{\xi_{j+1}^{(0)}} \right)^{p^{n_j}} = \frac{\lambda_{n_j}}{\lambda_{n_{j-1}}} \quad \text{et} \quad \frac{(\xi_s^{(0)})^{p^h}}{\xi_1^{(0)}} = p \frac{\lambda_1}{\lambda_{n_{s-1}}}.$$

Alors, pour tout j , $v(\xi_j) = \rho_j$, et par conséquent les ξ_j , répété chacun h_j fois, forment une base du R -module libre \mathcal{E} . Par conséquent, l'application $\xi : (y_i)_{i=1,\dots,h} \mapsto (x_i = \xi_{m(i)}y_i)$ est une bijection entre $\bigoplus (R/\xi_j^{p-1}R)^{h_j}$ et $\mathcal{E}/\varphi(\mathcal{E})$.

Notons, pour $n_{j-1} \leq i \leq n_j - 1$, $\tilde{\lambda}_i$ un élément de R tel que $\theta(\tilde{\lambda}_i) = \lambda_i$, et $\mu_i = \tilde{\lambda}_i/\tilde{\lambda}_{n_{j-1}}$; alors les μ_i sont des unités de R , et les images modulo \mathfrak{m}_R de $\mu_{n_{j-1}}, \dots, \mu_{n_j-1}$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{F}_p . Posons

$$P_r(X_1, \dots, X_h) = \sum_{i=1}^h \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{p}^{-n} \tilde{\lambda}_i X_i^{p^{n_{h+r}}};$$

on peut alors écrire $\bar{f} \circ \xi = (P_0, \dots, P_{h-1})$. De plus, dans $\mathcal{S}/\Pi\mathcal{S}$, seul un nombre fini des termes de P_r ne s'annule pas. D'après le lemme 6.2.1, le nombre de solutions du système d'équations $(P_0(X) = b_0, \dots, P_{h-1}(X) = b_{h-1})$ pour $(b_0, \dots, b_{h-1}) \in \mathcal{S}$ est donc $p^{\sum h_j d_j - \sum e_i}$, où d_j et e_i sont définis comme dans le lemme. En particulier, ce nombre est non nul, ce qui prouve que \bar{f} , et donc $\iota \otimes \lambda$, sont surjectives.

Il reste à prouver que le noyau de $\iota \otimes \lambda$ est un D -module à gauche de rang 1; il suffit pour cela de montrer que le noyau de \bar{f} est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel de dimension 1, c'est-à-dire de démontrer qu'il est de cardinal p . Or ce noyau est le quotient $N/(N \cap \varphi\mathcal{E})$, où $N = \{X \in E, P_0(X) = \dots = P_{h-1}(X) = 0\}$. Puisque φ est une bijection entre \mathcal{E} et $\varphi\mathcal{E}$, c'est aussi une bijection entre N et $\{X \in E, P_0(\varphi X) = \dots = P_{h-1}(\varphi X) = 0\}$; or, pour tout r , $P_r \circ \varphi = P_{r+1}$. Par conséquent, $N \cap \varphi\mathcal{E}$ est en bijection avec $N' = \{X \in E, P_1(X) = \dots = P_h(X) = 0\}$. De plus, par construction, $P_h = \tilde{p}P_0$. Soient d'_j, e'_i les entiers donnés par le lemme 6.2.1 pour les polynômes $(P_h, P_1, \dots, P_{h-1})$; alors

$d'_j = d_j$ pour tout j , et $e'_i = e_i$ si $i \geq 1$, $e'_0 = e_0 - 1$. Par conséquent, le cardinal de N' est $p^{\sum h_j d_j - \sum e_i - 1}$, et donc le cardinal de N/N' est p . Ceci prouve que le noyau de $\iota \otimes \lambda$ est un \mathbb{Q}_{p^h} -espace vectoriel de dimension h . \triangleleft

Corollaire 6.2.5. — *Sous les hypothèses de la proposition 6.2.3, il existe un élément $x = (x_1, \dots, x_h)$ de $\text{Ker } \iota \otimes \lambda$ tel que $\delta(x) = \det(\varphi^r x_j)_{r,j}$ soit égal au produit de t et d'une unité de \mathbb{Z}_p .*

Démonstration. — Pour tout élément $x = (x_1, \dots, x_h)$ de $E_{\frac{1}{h}}^h$, notons $u_x : \mathbb{Q}_{p^h}^h \rightarrow E_{\frac{1}{h}}^h$ l'application \mathbb{Q}_{p^h} -linéaire définie par

$$u_x(t_0, \dots, t_{h-1}) = t_0 x + t_1 \varphi(x) + \dots + t_{h-1} \varphi^{h-1}(x).$$

Alors $\delta(x)$ est égal au déterminant de l'application u_x . Soit $x \in \text{Ker}(\iota \otimes \lambda)$: alors u_x est à valeurs dans le \mathbb{Q}_{p^h} -espace vectoriel $\text{Ker}(\iota \otimes \lambda)$; en outre, $u_{\varphi(x)} = u_x \circ \Pi$. Par conséquent, $\theta(\delta(x)) = 0$ et $\varphi(\delta(x)) = (-1)^{h-1} p \delta(x)$; quitte à multiplier $\delta(x)$ par $[v]$, où $v \in R$ vérifie $v^{(p-1)} = -1$, on peut donc supposer que $\varphi(\delta(x)) = p \delta(x)$. Par conséquent, $\delta(x) \in \mathbb{Q}_p(1)$.

Soit $L_{1/h}$ le corps gauche sur \mathbb{Q}_p d'invariant $1/h$; alors, pour tout $a \in L_{1/h}$, on a $\delta(ax) = N_{L_{1/h}/\mathbb{Q}_p}(a) \cdot \delta(x)$, et l'image de δ est donc un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel. Par conséquent, il suffit de montrer que cette image est non nulle.

Or on voit que $\delta(x)$ est non nul si et seulement si u_x est injective, c'est-à-dire si $(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{h-1}(x))$ est une \mathbb{Q}_{p^h} -base de $\text{Ker}(\iota \otimes \lambda)$; ceci revient encore à dire que x engendre $\text{Ker}(\iota \otimes \lambda)$ comme $L_{1/h}$ -module. Mais $\text{Ker}(\iota \otimes \lambda)$ est un $L_{1/h}$ -module qui est de dimension h en tant que \mathbb{Q}_{p^h} -espace vectoriel ; il est donc de dimension 1 comme $L_{1/h}$ -module. \triangleleft

Proposition 6.2.6. — *Soit $f : W \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(-1)$ un objet de \mathbf{L}_C^+ , où W est de dimension $d = 1$ et V de dimension h . On suppose qu'il existe $a \in \text{Ker}(\iota \otimes {}^t f)$ tel que $\delta(a)$ soit une unité de $\mathbb{Q}_p(d)$. Alors $E(f)$ est isomorphe dans \mathbf{BC}_C^+ à $E_{d,h}$.*

Démonstration. — Le diagramme 5.5.9 permet de voir $E(f)$ comme un sous-espace de Banach-Colmez de E_1^h .

Soient $a = (a_1, \dots, a_h) \in \text{Ker}(\iota \otimes {}^t f)$ tel que $\delta(a)$ soit une unité de $\mathbb{Q}_p(d)$, et $g : E_1^h \rightarrow t^{-1} B_{\text{cris}}^+$ l'application définie par

$$g(u_1, \dots, u_h) = \sum_{i=1}^h a_i \frac{u_i}{t}.$$

Il est clair que $\varphi^h \circ g = p \cdot g$. Il reste à montrer que $g(E) \subset B_{\text{cris}}^+$, et que $E \xrightarrow{g} E_{d,h}$ est un isomorphisme.

Soit $x \in E$, et notons $y = g(x)$. Alors, pour tout entier $r \geq 0$, $\theta(t\varphi^r(y)) = p^{-r} \theta(\varphi^r(ty))$; or $ty = \sum a_j u_j$, et par construction des a_j , on a donc bien $\theta(\varphi^r(ty)) = 0$ pour tout r . Par conséquent, $t\varphi^r(y)$ appartient à $\text{Fil}^1 B_{\text{cris}}$, et donc $\varphi^r(y)$ appartient à $\text{Fil}^0 B_{\text{cris}}$, et ce pour tout r . On en déduit ([9, 5.3.7(i)]) que y appartient à B_{cris}^+ et donc à $E_{d,h}$.

Puisque $\varphi^r(\frac{u_i}{t}) = \frac{u_i}{t}$, on voit que l'on a une égalité matricielle $(\varphi^r(y))_r = (\varphi^r(a_i))_{r,i}(\frac{u_i}{t})_i$. Or, les a_i ont été choisis de sorte que $\delta(a)$ soit une unité ; par conséquent, $g : E \rightarrow E_{d,h}$ est injective.

L'image de V par g est le sous- \mathbb{Q}_p -espace vectoriel V' de $E_{d,h}$ engendré par a_1, \dots, a_h ; d'après la proposition 6.2.3, on a une présentation $0 \rightarrow V' \rightarrow E_{d,h} \rightarrow W' \rightarrow 0$, où W' est un C -espace vectoriel de dimension d . L'application g induit alors un morphisme de présentations entre E et $E_{d,h}$, et donc une application $W \rightarrow W'$. Cette application est analytique, et donc C -linéaire ; de plus, elle est injective, et donc surjective. Finalement, g est un isomorphisme de présentations, et donc un isomorphisme analytique $E \rightarrow E_{d,h}$. \triangleleft

Proposition 6.2.7. — Soit E un espace de Banach-Colmez de dimension un et de hauteur h . Il existe alors un entier naturel h' et un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel V'' de dimension finie $h'' = h - h'$ tels que E soit isomorphe comme espace de Banach-Colmez effectif à $E_{1,h'} \oplus V''$.

Démonstration. — Soit $f : C \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(-1)$ un objet de \mathbf{L}_C^+ tel que $E = E(f)$. D'après la proposition 5.5.12, on peut écrire $E = E(f_0) \oplus E(f')$, où f_0 est étale et f' est connexe. Puisque $f' : V \rightarrow C$ est injective, d'après la proposition 6.2.6, $E(f')$ est isomorphe à $E_{1,h}$. \triangleleft

Partie III. Propriétés des espaces de Banach-Colmez

7. Espaces de Banach spectraux

7.1. Localisation des espaces de Banach spectraux effectifs. —

Définition 7.1.1. — La catégorie $\mathbf{C}^{\{-1,0\}}\mathbf{BS}_K^+$ des $\{-1,0\}$ -complexes d'espaces de Banach spectraux est la catégorie dont les objets sont les complexes concentrés en degrés -1 et 0 .

$$X = \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{d_X} X^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

d'espaces de Banach spectraux tels que X^{-1} est un espace étale et d_X est un morphisme injectif, et dont les morphismes $X \rightarrow Y$ sont les paires (f^{-1}, f^0) où $f^{-1} : X^{-1} \rightarrow Y^{-1}$ et $f^0 : X^0 \rightarrow Y^0$ telles que $d_Y \circ f^{-1} = f^0 \circ d_X$.

Le produit fibré sur la catégorie \mathbf{BS}_K^+ se prolonge en un produit fibré sur la catégorie $\mathbf{C}^{\{-1,0\}}\mathbf{BS}_K^+$. Le produit fibré de deux morphismes $X' \rightarrow Y, X'' \rightarrow Y$ de $\mathbf{C}^{\{-1,0\}}\mathbf{BS}_K^+$, est le complexe X défini par $X^i = (X')^i \times_{Y^i} (X'')^i$ pour tout $i \in \{-1, 0\}$.

Définition 7.1.2. — La famille \mathbf{Qis} des *quasi-isomorphismes* de $\mathbf{C}^{\{-1,0\}}\mathbf{BS}_K^+$ est la famille des morphismes $s : X \rightarrow X'$ de $\mathbf{C}^{\{-1,0\}}\mathbf{BS}_K^+$ tels que la suite déduite

$$0 \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{d_X \oplus s^{-1}} X^0 \oplus (X')^{-1} \xrightarrow{s^0 \oplus d_{X'}} (X')^0 \longrightarrow 0$$

soit une suite exacte d'espaces de Banach spectraux effectifs.

Ceci revient à dire que l'application s induit un isomorphisme entre les espaces de Banach quotients $H^0(X)$ et $H^0(X')$, les autres espaces de cohomologie de X et X' étant nuls.

Rappelons [I4, 7.1.6] qu'un système de morphismes \mathcal{S} d'une catégorie additive \mathcal{C} est dit *multiplicatif à gauche* s'il vérifie les propriétés :

- (S1) tout isomorphisme de \mathcal{C} appartient à \mathcal{S} ;
- (S2) \mathcal{S} est stable par composition dans \mathcal{C} ;
- (S'3) tout diagramme $X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{t} Y'$ de \mathcal{C} où t est un morphisme de \mathcal{S} peut se compléter par un diagramme $X \xrightarrow{s} X' \xleftarrow{g} Y'$ où s est un morphisme de \mathcal{S} ;
- (S'4) pour tout diagramme $X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{t} Y'$ de \mathcal{C} où t appartient à \mathcal{S} , si $t \circ f = 0$, alors il existe un morphisme $X' \xrightarrow{s} X$ de \mathcal{S} tel que $f \circ s = 0$.

Proposition 7.1.3. — La famille des *quasi-isomorphismes* de $\mathbf{C}^{\{-1,0\}}\mathbf{BS}_K^+$ forme un système multiplicatif à gauche.

Démonstration. — Les propriétés (S1) et (S2) sont évidentes.

Vérifions (S'3) : soit $X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{t} Y'$ un diagramme de $\mathbf{C}^{\{-1,0\}}\mathbf{BS}_K^+$ tel que t soit un quasi-isomorphisme. Soit X' le produit fibré $X \times_Y Y'$ dans $\mathbf{C}^{\{-1,0\}}\mathbf{BS}_K^+$; X' est naturellement muni d'applications $f' : X' \rightarrow Y'$ et $s : X' \rightarrow X$, et il suffit de démontrer

que s est un quasi-isomorphisme. Or, on voit que la suite $0 \rightarrow (X')^{-1} \rightarrow (X')^0 \oplus X^{-1} \rightarrow X^0 \rightarrow 0$ est le produit fibré des suites exactes $0 \rightarrow (Y')^{-1} \rightarrow (Y')^0 \oplus Y^{-1} \rightarrow Y^0 \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow X^{-1} \rightarrow X^{-1} \oplus X^0 \rightarrow X^0 \rightarrow 0$ au-dessus de la suite exacte $0 \rightarrow Y^{-1} \rightarrow Y^{-1} \oplus Y^0 \rightarrow Y^0 \rightarrow 0$; par conséquent, elle est exacte, ce qui signifie que s est un quasi-isomorphisme.

Vérifions enfin (S'4) : soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{t} Y'$ un diagramme de $\mathbf{C}^{\{-1,0\}}\mathbf{BS}_K^+$ tel que t soit un quasi-isomorphisme et $t \circ f = 0$. Puisque t est un quasi-isomorphisme, le noyau de $t^0 \oplus d_{Y'}$ est un espace de Banach spectral étale ; il contient le noyau de t^0 , qui est donc lui aussi étale. Par conséquent, l'image de f^0 est étale, et il existe donc une section $\sigma : \text{Im } f^0 \rightarrow X^0$ de f^0 . Posons $(X')^0 = (\text{Ker } f^0) \oplus (\text{Im } f^0)$, $s^0 = (\text{Ker } f^0 \hookrightarrow X^0) \oplus (-\sigma)$, et $(X')^{-1} = (X')^0 \times_{X^0} X^{-1}$; alors X' est naturellement un objet de $\mathbf{C}^{\{-1,0\}}\mathbf{BS}_K^+$, et il est muni d'un morphisme $s : X' \rightarrow X$ tel que $f \circ s = 0$. Il reste donc à vérifier que s est un quasi-isomorphisme. Or, la suite $0 \rightarrow (X')^{-1} \rightarrow (X')^0 \oplus X^{-1} \rightarrow X^0 \rightarrow 0$ est exacte à gauche et au centre par construction de $(X')^{-1}$; de plus, puisque $X^0 = \text{Ker } f^0 + \sigma(\text{Im } f^0)$, elle est exacte à droite. \triangleleft

7.2. Structures analytiques non effectives. —

Définition 7.2.1. — La catégorie des espaces de Banach spectraux sur K est la catégorie \mathbf{BS}_K localisée de $\mathbf{C}^{\{-1,0\}}\mathbf{BS}_K^+$ par le système multiplicatif à gauche \mathbf{Qis} .

Autrement dit, les objets de \mathbf{BS}_K sont ceux de $\mathbf{C}^{\{-1,0\}}\mathbf{BS}_K^+$, et un morphisme $X \rightarrow Y$ dans \mathbf{BS}_K est une classe d'équivalence de diagrammes $X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{f} Y$, où s est un quasi-isomorphisme.

Pour tout objet $X^{-1} \rightarrow X^0$ de \mathbf{BS}_K , l'espace quotient $H^0(X) = X^0/d_X(X^{-1})$ est un espace de Banach p -adique, et cette construction définit un foncteur, que l'on note H^0 , de la catégorie \mathbf{BS}_K vers la catégorie des espaces de Banach p -adiques.

Proposition 7.2.2. — (i) Le foncteur H^0 de la catégorie \mathbf{BS}_K vers celle des espaces de Banach p -adiques est fidèle.

(ii) Soient X, X' deux objets de \mathbf{BS}_K . Alors une application linéaire continue $f : H^0(X) \rightarrow H^0(X')$ provient d'un morphisme de \mathbf{BS}_K si et seulement si le produit fibré $X^0 \times_{H^0(X')} (X')^0$ est un fermé analytique de $X^0 \times (X')^0$.

Le foncteur H^0 est aussi appelé *foncteur d'oubli* sur les espaces de Banach p -adiques.

Démonstration. — (i) Soit $f : X \rightarrow X'$ un morphisme de \mathbf{BS}_K tel que $H^0(f) = 0$. Ceci signifie que $f^0(X^0) \subset (X')^{-1}$. Soient $Y^0 = \text{Ker}(f^0)$ et $Y^{-1} = Y^0 \cap X^{-1}$. Alors $Y = (Y^{-1} \rightarrow Y^0)$ est un sous-objet de X dans $\mathbf{C}^{\{-1,0\}}\mathbf{BS}_K^+$, et la flèche $Y \rightarrow X'$ est nulle. De plus, puisque $f^0(X^0) = f^0(X^{-1})$, on peut écrire $X^0 = Y^0 + X^{-1}$ et donc la suite $0 \rightarrow Y^{-1} \rightarrow X^{-1} \oplus Y^0 \rightarrow X^0 \rightarrow 0$ est exacte, ce qui signifie que $Y \rightarrow X$ est un quasi-isomorphisme. Par conséquent, la flèche nulle $Y \rightarrow X'$ représente f dans la catégorie \mathbf{BS}_K .

(ii) Soit $E = X^0 \times_{H^0(X')} (X')^0$.

Supposons que E soit un fermé analytique de $X^0 \times (X')^0$. Alors $X^{-1} \times (X')^{-1} \rightarrow E$ est quasi-isomorphe à X ; la flèche naturelle $E \rightarrow (X')^0$ définit donc un morphisme $X \rightarrow X'$ dans la catégorie \mathbf{BS}_K .

Réciproquement, supposons que f soit un morphisme de \mathbf{BS}_K . Ceci signifie qu'il existe un objet Y de \mathbf{BS}_K quasi-isomorphe à X , et un morphisme $g : Y \rightarrow X'$ induisant f . Quitte à étendre Y^{-1} , on peut de plus supposer que la flèche $g^{-1} : Y^{-1} \rightarrow (X')^{-1}$ est surjective.

Par construction de E , la flèche naturelle $Y^0 \rightarrow X^0 \times (X')^0$ se factorise par E , et on dispose donc du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y^{-1} & \longrightarrow & Y^0 \oplus X^{-1} & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & (X')^{-1} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La première ligne est exacte puisque $W \rightarrow F$ est quasi-isomorphe à $X^{-1} \rightarrow X^0$; la seconde l'est par construction de E . Puisque la flèche $W \rightarrow (X')^{-1}$ est surjective, la flèche $Y^0 \oplus X^{-1} \rightarrow X^0$ l'est aussi; par conséquent, E est identique à son adhérence analytique dans $X^0 \times (X')^0$, et donc un fermé analytique. \triangleleft

La proposition qui précède permet de voir un espace de Banach spectral sur K comme un espace de Banach p -adique X muni d'une action linéaire continue de \mathcal{G}_K et d'une structure analytique, c'est-à-dire tel que $X = H^0(X^{-1} \rightarrow X^0)$. Soient X et Y deux espaces de Banach spectraux; alors l'ensemble des morphismes d'espaces de Banach spectraux de X vers Y est inclus dans l'ensemble des applications $\mathbb{Q}_p[\mathcal{G}_K]$ -linéaires continues. Une telle application est dite *analytique* si elle provient d'un morphisme d'espaces de Banach spectraux.

Soit E un espace de Banach spectral effectif. Alors le complexe $0 \rightarrow E$ est un objet de \mathbf{BS}_K , et ceci définit un foncteur de la catégorie \mathbf{BS}_K^+ vers la catégorie \mathbf{BS}_K .

Proposition 7.2.3. — *Le foncteur naturel de \mathbf{BS}_K^+ vers \mathbf{BS}_K est pleinement fidèle.*

Démonstration. — Soient E, E' deux objets de \mathbf{BS}_K^+ . Alors un morphisme $f : E \rightarrow E'$ dans la catégorie \mathbf{BS}_K correspond à un objet X de cette catégorie, quasi-isomorphe à $0 \rightarrow E$, et à une flèche $g : X \rightarrow (0 \rightarrow E')$; autrement dit, la suite $0 \rightarrow X^{-1} \rightarrow X^0 \rightarrow E \rightarrow 0$ est exacte, et la flèche $g : X^0 \rightarrow E'$ s'annule sur X^{-1} . Par conséquent, cette flèche se factorise par E , et donc les morphismes entre E et E' sont les mêmes dans les catégories \mathbf{BS}_K^+ et \mathbf{BS}_K . \triangleleft

Proposition 7.2.4. — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de \mathbf{BS}_K , et soit X' l'objet de \mathbf{BS}_K défini par $(X')^0 = \text{Im } f^0$ et $(X')^{-1} = (X')^0 \times_{Y^0} Y^{-1}$. Alors X' est l'image de f dans la catégorie \mathbf{BS}_K .*

Démonstration. — Le complexe X' est naturellement muni d'une factorisation dans \mathbf{BS}_K de f en un diagramme $X \xrightarrow{f'} X' \xrightarrow{i'} Y$.

Soit $X \xrightarrow{f''} X'' \xrightarrow{i''} Y$ une autre factorisation de f , où i'' est un monomorphisme. Alors, par définition de $(X')^0$, il existe un morphisme $u^0 : (X')^0 \rightarrow (X'')^0$ tel que $(i')^0 = (i'')^0 \circ u^0$; de plus, l'application naturelle $(X')^{-1} \rightarrow (X'')^{-1}$ se factorise par $(X'')^{-1}$, ce qui fournit donc un morphisme $u : X' \rightarrow X''$. Par construction, le morphisme u vérifie $i' = i'' \circ u$, et donc X' est bien l'image de f dans \mathbf{BS}_K . \triangleleft

7.3. Espaces de Banach spectraux connexes et étales. — Un espace de Banach spectral X est dit *prorigide* s'il admet un représentant $X^{-1} \rightarrow X^0$, où X^0 est prorigide. Puisque tout espace de Banach spectral étale est prorigide, cette propriété est alors vraie de tout représentant de X .

Définition 7.3.1. — Soit X un espace de Banach spectral. On dit que X est *connexe* s'il admet un représentant $X^{-1} \rightarrow X^0$, où X^0 est connexe. On dit que X est *étale* s'il admet un représentant $X^{-1} \rightarrow X^0$, où X^0 est étale. (Cette propriété est alors vraie de tout représentant de X).

Si X admet un représentant $X^{-1} \rightarrow X^0$ où X^0 est étale, puisque la sous-catégorie des espaces de Banach spectraux étales est abélienne, alors X admet le représentant $0 \rightarrow X^0/X^{-1}$, et est en fait un espace de Banach spectral étale. De plus, il est clair que si X est un espace de Banach spectral étale et Y un espace de Banach spectral quelconque, alors toute application \mathbb{Q}_p -linéaire continue $X \rightarrow Y$ est analytique.

Proposition 7.3.2. — Soit X un espace de Banach spectral. Alors X est connexe si et seulement si, pour tout espace de Banach spectral étale V , $\text{Hom}_{\mathbf{BS}_K}(X, V) = 0$.

Démonstration. — Supposons que X soit connexe; il admet donc un représentant $X^{-1} \rightarrow X^0$ où X^0 est un espace de Banach spectral effectif connexe. Soit $f : X \rightarrow V$ une flèche de \mathbf{BS}_K ; ceci signifie qu'il existe un objet X' de \mathbf{BS}_K , un quasi-isomorphisme $s : X' \rightarrow X$ et un morphisme de complexes $f' : X' \rightarrow V$. Puisque s est un quasi-isomorphisme, on dispose de la suite exacte $0 \rightarrow \text{Hom}(X^0, V) \rightarrow \text{Hom}((X')^0 \oplus X^{-1}, V) \rightarrow \text{Hom}((X')^{-1}, V)$. Puisque $f((X')^{-1}) = 0$, on voit ainsi que $f = 0$.

Réciproquement, supposons que pour tout V étale, $\text{Hom}_{\mathbf{BS}_K}(X, V) = 0$, et soit $X^{-1} \rightarrow X^0$ un représentant de X . Alors l'espace de Banach spectral étale $\pi_0(X^0)$ est muni d'un morphisme naturel $X^0 \rightarrow \pi_0(X^0)$. Par hypothèse, pour tout V étale, tout morphisme $f : X^0 \rightarrow V$ dont la restriction à X^{-1} est nulle est nul; par conséquent, $X^{-1} \rightarrow \pi_0(X^0)$ est surjective, et admet donc une section s . Soit Y la partie connexe de X^0 . Alors $X^{-1}/s(\pi_0(X^0)) \rightarrow Y$ est un représentant de X , et donc X est connexe. \triangleleft

Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme d'espaces de Banach spectraux. Si Y est rigide, alors le noyau de f a pour algèbre affine un quotient de celle de Y ; cette algèbre est de type fini et donc $\text{Ker } f$ est encore un espace de Banach spectral rigide. Supposons que Y est prorigide; soient A, B les algèbres affines respectives de A et B . Quitte à remplacer A par son image dans B , on peut supposer que A est incluse dans B . Puisque Y est prorigide, on peut écrire B comme la limite inductive complétée d'algèbres affinoïdes B_n . Alors A est la complétion de la réunion des algèbres $A_n = A \cap B_n$, et l'algèbre affine du noyau de f

est $B/A^+ = \widehat{\varinjlim} B_n/A_n^+$. Par conséquent, c'est une algèbre prorigide, et donc le noyau de f est un espace de Banach spectral prorigide.

Proposition 7.3.3. — *Soit X un espace de Banach spectral prorigide. Alors il existe une suite exacte d'espaces de Banach spectraux*

$$0 \longrightarrow X^0 \longrightarrow X \longrightarrow \pi_0(X) \longrightarrow 0,$$

où X^0 est connexe et $\pi_0(X)$ est étale. De plus, cette suite exacte est unique (à isomorphisme près) et scindée.

Démonstration. — Soit $X^{-1} \rightarrow X^0$ un représentant de X . D'après la proposition 3.5.5, il existe une suite exacte courte, unique à isomorphisme près, $0 \rightarrow E' \rightarrow X^0 \rightarrow E'' \rightarrow 0$, où E' est un espace de Banach spectral étale connexe, et E'' est un espace de Banach spectral étale. Posons $V' = X^{-1} \times_{X^0} E'$ et $V'' = X^{-1}/V'$. Alors $X' = (V' \rightarrow E')$ et $X'' = (V'' \rightarrow E'')$ sont des espaces de Banach spectraux, respectivement étale et connexe; de plus, la suite $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ est exacte. Enfin, toute section \mathbb{Q}_p -linéaire continue $X'' \rightarrow X$ est une section analytique de cette suite. \triangleleft

8. Espaces de Banach-Colmez

8.1. Construction. — La catégorie \mathbf{BC}_K des *espaces de Banach-Colmez* est la sous-catégorie pleine de \mathbf{BS}_K dont les objets sont de la forme $X^{-1} \rightarrow X^0$, où X^{-1} est étale et X^0 est un espace de Banach-Colmez effectif sur K .

En particulier, tout espace de Banach-Colmez est un espace de Banach spectral prorigide ; il est donc extension (scindée de manière non canonique) d'un espace de Banach-Colmez connexe par un espace de Banach spectral étale.

On dit que deux objets X, X' de \mathbf{BS}_K sont *presque isomorphes* s'il existe des sous-objets étales V, V' de X, X' tels que X/V et X'/V' soient isomorphes.

Proposition 8.1.1. — *Soit W un C -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire de \mathcal{G}_K . Un objet X de \mathbf{BS}_K est presque isomorphe à l'espace de Banach spectral effectif W si et seulement s'il existe un espace de Banach-Colmez effectif E qui est à la fois extension de W et de X par des espaces de Banach spectraux étales.*

Démonstration. — Dire que X et W sont presque isomorphes dans \mathbf{BS}_K signifie qu'il existe un objet $(V \rightarrow E)$ de \mathbf{BS}_K et des quasi-isomorphismes de $\mathbf{C}^{\{-1,0\}}\mathbf{BS}_K^+(V \rightarrow E) \rightarrow (X^{-1} \rightarrow X^0), (V \rightarrow E) \rightarrow (0 \rightarrow W)$, c'est-à-dire que les suites

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow E \oplus X^{-1} \longrightarrow X^0 \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

soient exactes. Posons $E' = E \oplus X^{-1}$; c'est alors un espace de Banach spectral effectif, extension de W par l'espace de Banach spectral étale $V \oplus X^{-1}$. \triangleleft

Autrement dit, il revient au même de dire qu'un espace de Banach spectral X est presque isomorphe à W et qu'il s'insère dans un diagramme (où les deux suites sont exactes)

$$(8.1.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & X^{-1} & & & \\ & & & \downarrow d_X & & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & W \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & H^0(X) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Ceci signifie que les espaces de Banach-Colmez sont exactement les espaces de Banach spectraux qui sont presque isomorphes à une C -représentation de dimension finie W de \mathcal{G}_K . Un diagramme de la forme 8.1.2 s'appelle une *présentation* de l'espace de Banach-Colmez X . On la notera également sous la forme abrégée

$$X^{-1} \longrightarrow (V \longrightarrow X^0 \longrightarrow W) \longrightarrow H^0(X).$$

Se donner une structure d'espace de Banach-Colmez sur un espace de Banach X revient donc à se donner une présentation de la forme

$$V_- \longrightarrow (V_+ \longrightarrow E \longrightarrow W) \longrightarrow X,$$

où V_- , V_+ sont des espaces de Banach spectraux effectifs étales, E est un espace de Banach spectral effectif (donc nécessairement un espace de Banach-Colmez), et où tous les morphismes sont analytiques.

Le foncteur naturel de la catégorie \mathbf{BC}_K^+ vers la catégorie \mathbf{BS}_K a son image essentielle dans \mathbf{BC}_K , ce qui autorise à voir \mathbf{BC}_K^+ comme une sous-catégorie pleine de \mathbf{BC}_K .

8.2. Espaces de Banach spectraux et Espaces de Banach. — Dans toute la suite, on ne s'intéressera qu'aux espaces de Banach-Colmez sur C . Nous allons commencer par démontrer (mais on ne s'en servira pas dans la suite) que cette catégorie est équivalente à la catégorie introduite par Colmez [4] sous le nom d'Espaces de Banach.

Une C -algèbre spectrale A est dite *p-close* si tout élément $x \in R$ tel que $\|x - 1\| < 1$ a une racine p -ième dans A . Une C -algèbre de Banach A est dite *sympathique* ([4, 4.1]) si elle est spectrale, connexe et p -close.

Proposition 8.2.1. — [4, 4.20] Soit A une C -algèbre spectrale connexe. Il existe une algèbre sympathique \tilde{A} et un morphisme injectif de C -algèbres de Banach $i : A \rightarrow \tilde{A}$, tels que :

- (i) pour toute algèbre sympathique B , tout morphisme continu $\rho : A \rightarrow B$ se prolonge (de façon non nécessairement unique) en un morphisme $\tilde{A} \rightarrow B$;
- (ii) pour toutes algèbres sympathiques B, B', B'' telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho'} & B' \\ \downarrow \rho'' & & \downarrow \sigma' \\ B'' & \xrightarrow{\sigma''} & B \end{array}$$

soit commutatif et pour tout prolongement $\tilde{\rho}' : \tilde{A} \rightarrow B'$, il existe un unique prolongement $\tilde{\rho}'' : \tilde{A} \rightarrow B''$ tel que $\sigma' \circ \tilde{\rho}' = \sigma'' \circ \tilde{\rho}''$;

- (iii) tout morphisme continu de C -algèbres $\sigma : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ dont la restriction à A est une isométrie de A est une isométrie de \tilde{A} .

Ces conditions impliquent en outre que l'algèbre \tilde{A} et le morphisme i sont uniques à isomorphisme non unique près. Soient en effet $i' : A \rightarrow A'$, $i'' : A \rightarrow A''$ deux morphismes vérifiant les conditions ci-dessus ; alors l'algèbre $A' \hat{\otimes}_A A''$ est encore une algèbre sympathique, et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i'} & A' \\ \downarrow i'' & & \downarrow \sigma' \\ A'' & \xrightarrow{\sigma''} & A' \hat{\otimes}_A A'' \end{array}$$

est commutatif. D'après (ii), il existe un unique morphisme $\rho' : A' \rightarrow A''$ tel que $\sigma' = \sigma'' \circ \rho'$; de même, il existe un unique morphisme $\rho'' : A'' \rightarrow A'$ tel que $\sigma'' = \sigma' \circ \rho''$. Le morphisme

composé $\rho'' \circ \rho'$ est alors un endomorphisme continu de A' , induisant l'identité sur A ; par le point (iii), c'est une isométrie de A' . De même, $\rho' \circ \rho''$ est une isométrie de A'' . Par conséquent, A' et A'' sont isomorphes.

L'algèbre \tilde{A} définie à la proposition 8.2.1 s'appelle une *clôture sympathique* de A .

Définition 8.2.2. — [4, 6.1] La catégorie **EB** des *Espaces de Banach* est la sous-catégorie pleine de la catégorie des foncteurs covariants \mathcal{E} de la catégorie des C -algèbres sympathiques vers celle des \mathbb{Q}_p -espaces de Banach, tels que :

- (EB1) pour toute algèbre sympathique R , l'application $(\mathrm{Spm} R) \times \mathcal{E}(R) \rightarrow \mathcal{E}(C)$, $(s, x) \mapsto x(s)$ est continue;
- (EB2) pour toute algèbre sympathique R , $\mathcal{E}(R) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathrm{Spm} R, \mathcal{E}(C))$ est injective.

Proposition 8.2.3. — Soit $E = \mathrm{Spm} A$ un C -espace de Banach spectral effectif. Alors le foncteur \mathcal{E} défini par $\mathcal{E}(E)(R) = \mathrm{Hom}(A, R)$ est un Espace de Banach.

De plus, on définit ainsi un foncteur (covariant) de la catégorie \mathbf{BS}_C^+ vers la catégorie des Espaces de Banach.

Démonstration. — Soit R une algèbre sympathique. Alors l'application $(\mathrm{Spm} R) \times \mathcal{E}(R) \rightarrow \mathcal{E}(C)$ est la composition $\mathrm{Hom}(A, R) \times \mathrm{Hom}(R, C) \rightarrow \mathrm{Hom}(A, C)$. Elle est continue par définition de la topologie spectrale, donc \mathcal{E} vérifie la condition (EB1).

Montrons que \mathcal{E} vérifie la condition (EB2). Notons $\varepsilon : A \rightarrow C$ le morphisme d'augmentation de A . Soit $f : A \rightarrow R$ tel que, pour tout $s \in \mathrm{Spm} R$, $s \circ f = \varepsilon$; alors pour tout élément a de l'idéal d'augmentation de A et pour tout $s \in \mathrm{Spm} R$, $s(f(a)) = \varepsilon(a) = 0$, et donc l'élément $f(a)$ de R vérifie $\|f(a)\|_{\mathrm{sp}} = 0$. Puisque R est une algèbre spectrale, ceci entraîne que $f(a) = 0$ dans R , et donc f se factorise par C .

Enfin, il est clair que cette construction est fonctorielle par rapport à l'algèbre spectrale A . \triangleleft

On peut naturellement étendre le foncteur \mathcal{E} en un foncteur de la catégorie \mathbf{BS}_C vers la catégorie **EB** : pour tout objet $X = (X^{-1} \rightarrow X^0)$ de \mathbf{BS}_C et pour toute algèbre sympathique R , on définit $\mathcal{E}(X)(R)$ comme le conoyau de la flèche $\mathcal{E}(X^{-1})(R) \rightarrow \mathcal{E}(X^0)(R)$.

Proposition 8.2.4. — Le foncteur de la catégorie des espaces de Banach spectraux effectifs prorigides sur C vers la catégorie **EB** défini par la proposition 8.2.3 est pleinement fidèle.

Démonstration. — Tout espace de Banach prorigide peut d'après la proposition 3.5.5 se décomposer en produit d'un espace de Banach prorigide étale (c'est-à-dire un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie) et d'un espace de Banach prorigide connexe. D'après [4, 6.1(i)], le foncteur des \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels de dimension finie dans les Espaces de Banach est pleinement fidèle; on peut donc se limiter aux espaces de Banach spectraux prorigides connexes.

Soient $E = \mathrm{Spm} A$, $F = \mathrm{Spm} B$ deux espaces de Banach spectraux prorigides connexes, et \mathcal{E} , \mathcal{F} les Espaces de Banach correspondants.

Soit $f : F \rightarrow E$ un morphisme d'espaces de Banach spectraux, issu du morphisme de C -algèbres spectrales $\rho : A \rightarrow B$, et induisant le morphisme nul $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$. Ceci signifie que, pour toute algèbre sympathique R , $\text{Hom}(B, R) \rightarrow \text{Hom}(A, R)$ est le morphisme nul. Puisque B est spectrale et connexe, elle possède une clôture sympathique \tilde{B} et un morphisme canonique $i : B \rightarrow \tilde{B}$; en particulier, $\text{Hom}(B, \tilde{B}) \rightarrow \text{Hom}(A, \tilde{B})$ est le morphisme nul, c'est-à-dire que $i \circ \rho$ se factorise par C . Puisque i est injectif, on en déduit que ρ est le morphisme nul.

Soit à présent $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ un morphisme d'Espaces de Banach, autrement dit une famille compatible de morphismes $\varphi(R)$ pour toute algèbre sympathique R . En particulier, puisque $i : B \rightarrow \tilde{B}$ est un élément de $\mathcal{F}(\tilde{B})$, $\rho = \varphi(\tilde{B})(i) \in \mathcal{E}(\tilde{B})$, c'est-à-dire que ρ est un morphisme continu de C -algèbres de A vers \tilde{B} . Soit en outre σ un endomorphisme de \tilde{B} fixant B ; alors, puisque $\varphi(R)$ commute à σ , de même ρ commute à σ . Par conséquent, l'image de ρ est incluse dans le sous-anneau de \tilde{B} invariant par σ , c'est-à-dire B . Le morphisme $f = \text{Spm } \rho$ est alors un morphisme d'espaces de Banach spectraux $f : F \rightarrow E$. \triangleleft

Définition 8.2.5. — [4, 6.1] La catégorie **EBDF** des *Espaces de Banach de dimension finie* est la sous-catégorie pleine de la catégorie des Espaces de Banach dont les objets X sont tels qu'il existe des suites exactes d'Espaces de Banach

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow V_- \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow V_+ \longrightarrow E \longrightarrow C^d \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où V_- , V_+ sont des \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème 8.2.6. — *Le foncteur naturel de la catégorie \mathbf{BS}_C^+ vers la catégorie **EB** réalise une équivalence entre les catégories **BC** _{C} et **EBDF**.*

Démonstration. — Nous savons d'après la proposition 8.2.4 que ce foncteur est pleinement fidèle. De plus, les objets des deux catégories admettent des présentations de la forme $V_- \rightarrow (V_+ \rightarrow E \rightarrow W) \rightarrow X$, où V_- et V_+ sont des \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels de dimension finie et W est un C -espace vectoriel de dimension finie. Or le groupe $\text{Ext}_{\mathbf{EBDF}}^1(C, \mathbb{Q}_p)$ s'identifie à C ([4, 9.16]), et le groupe $\text{Ext}_{\mathbf{BC}_C^+}^1(C, \mathbb{Q}_p)$ est canoniquement isomorphe à C en vertu de la proposition 5.5.6; en outre, pour tout \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie V et pour tout objet X de **EBDF**, $\text{Hom}_{\mathbf{EBDF}}(V, X) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, X)$. \triangleleft

8.3. Lemme fondamental pour les espaces de Banach-Colmez. —

Définition 8.3.1. — Soit $V_- \rightarrow (V_+ \rightarrow E \rightarrow W) \rightarrow X$ une présentation (8.1.2) d'un espace de Banach-Colmez X . La *hauteur* de la présentation est $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_+ - \dim_{\mathbb{Q}_p} V_-$. La *dimension* de la présentation est $\dim_C W$.

La proposition suivante est une version du lemme fondamental 6.0.1 sur les espaces de Banach-Colmez.

Proposition 8.3.2. — Soient X un espace de Banach spectral sur C presque isomorphe à C et $f : X \rightarrow C$ un morphisme d'espaces de Banach spectraux. Supposons en outre que l'image de f ne soit pas un espace de Banach spectral étale. Alors f est surjective.

De plus, le noyau de f est un espace de Banach spectral étale, dont la dimension sur \mathbb{Q}_p est égale à la hauteur de toute présentation de X .

En particulier, si X admet une présentation $V_- \rightarrow (V_+ \rightarrow E \rightarrow W) \rightarrow X$, avec $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_+ < \dim_{\mathbb{Q}_p} V_-$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathbf{BC}_C}(X, C) = 0$.

Démonstration. — Soit $V_- \rightarrow (V_+ \rightarrow E \rightarrow W) \rightarrow X$ une présentation de X . D'après la proposition 6.2.7, on sait qu'il existe un entier $h \geq 1$ et un espace de Banach spectral étale V'_+ tels que E soit isomorphe à $V'_+ \times E_{1/h}$; on a alors $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_+ = \dim_{\mathbb{Q}_p} V'_+ + h$.

Le morphisme $f : X \rightarrow C$ donne, par composition, un morphisme $g : E_{1/h} \rightarrow C$; puisque $f(X)$ n'est pas de dimension finie sur \mathbb{Q}_p , $g(E_{1/h})$ n'est pas nul. Par la proposition 6.1.1, g est donc surjectif, et par conséquent f est surjectif; en outre, $\mathrm{Ker} g$ est un espace de Banach spectral étale de dimension h . On dispose donc du diagramme suivant, où les lignes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & V'_- & \longrightarrow & V_- & \longrightarrow & \mathrm{Ker} g \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & V'_+ & \longrightarrow & E_{1/h} \times V'_+ & \longrightarrow & E_{1/h} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker} f & \longrightarrow & X & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

On a alors $\dim \mathrm{Ker} f = \dim V'_+ - \dim V'_- = \dim V'_+ - \dim V_- + h$, soit encore $\dim \mathrm{Ker} f = \dim V_+ - \dim V_-$. \triangleleft

8.4. Structure abélienne. —

Proposition 8.4.1. — Soient X, X' deux espaces de Banach-Colmez admettant les présentations respectives

$$V_- \longrightarrow (V_+ \longrightarrow E \longrightarrow W) \longrightarrow X \quad \text{et} \quad V'_- \longrightarrow (V'_+ \longrightarrow E' \longrightarrow W') \longrightarrow X'$$

et $f : X \rightarrow X'$ un morphisme surjectif d'espaces de Banach-Colmez. Alors le noyau X'' de f admet une présentation

$$V''_- \longrightarrow (V''_+ \longrightarrow E'' \longrightarrow W'') \longrightarrow X'',$$

dont la hauteur et la dimension sont données par

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Q}_p} V_+'' - \dim_{\mathbb{Q}_p} V_-'' &= (\dim_{\mathbb{Q}_p} V_+ - \dim_{\mathbb{Q}_p} V_-) - (\dim_{\mathbb{Q}_p} V_+' - \dim_{\mathbb{Q}_p} V_-'), \\ \dim_C W'' &= \dim_C W - \dim_C W'. \end{aligned}$$

En particulier, s'il existe un morphisme surjectif $X \rightarrow X'$, alors $\dim_C W \geq \dim_C W'$.

Démonstration. — Soit $Y = E \times_{X'} E'$. Alors la suite $0 \rightarrow V_- \times V_-' \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow 0$ est exacte ; de plus, le morphisme canonique $g : Y \rightarrow E'$ a pour noyau une extension de $\text{Ker } f$ par V_- , et pour image l'image inverse dans E' de $\text{Im } f$. En particulier, g est surjective si et seulement si f l'est. Par conséquent, quitte à remplacer $f : X \rightarrow X'$ par $g : Y \rightarrow E'$, on peut supposer que X' est effectif et donc que $V_-' = 0$.

Soit alors $0 \rightarrow V' \rightarrow X' \rightarrow W' \rightarrow 0$ une présentation de X' . Pour tout sous- C -espace vectoriel Z de W' , posons $X'_Z = X' \times_{W'} Z$; c'est un espace de Banach-Colmez effectif dont une présentation est $0 \rightarrow V' \rightarrow X'_Z \rightarrow Z \rightarrow 0$. Soit encore $X_Z = X \times_{X'} X'_Z = X \times_{W'} Z$; il est muni d'un morphisme naturel $f_Z : X_Z \rightarrow X'_Z$ dont le noyau s'identifie à celui de f . Enfin, si $W' = Z \oplus Z'$ est une décomposition telle que f_Z et $f_{Z'}$ vérifient le résultat de la proposition, on en déduit que f vérifie aussi ce résultat ; par conséquent, quitte à choisir une base de W' , on peut se ramener au cas où $W' = C$.

Soit donc $X \rightarrow E'$ un morphisme surjectif, où E' est effectif et admet la présentation $0 \rightarrow V' \rightarrow E' \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$. Pour tout sous- C -espace vectoriel Z de W , le produit fibré par Z donne une suite exacte naturelle $0 \rightarrow (V_-)_Z \rightarrow E_Z \rightarrow X_Z \rightarrow 0$; en outre, pour toute décomposition $W = Z \oplus Z'$, la suite $0 \rightarrow V_+/(V_- \cap V_+) \rightarrow X_Z \oplus X_{Z'} \rightarrow X \rightarrow 0$ est exacte. Par conséquent, si $f_Z : X_Z \rightarrow E'$, $f_{Z'} : X_{Z'} \rightarrow E'$ vérifient le résultat de la proposition, alors c'est encore le cas de $f : X \rightarrow E$; on peut donc supposer que $W = C$.

Enfin, si $d = 1$, alors puisque f est surjective, $\pi \circ f$ est encore surjective, et donc son noyau est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension $\dim V_+ - \dim V_-$. Par conséquent, le noyau de f , qui est une extension de celui de $\pi \circ f$ par V' , est de dimension $\dim V_+ - \dim V_- - (\dim V')$. D'après ce qui précède, ceci permet de prouver le cas général. \triangleleft

Corollaire 8.4.2. — Deux présentations d'un espace de Banach-Colmez X ont même dimension et même hauteur.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition 8.4.1 à l'application identité de X entre les deux présentations. \triangleleft

Définition 8.4.3. — On appelle *dimension* et *hauteur* d'un espace de Banach-Colmez X la dimension et la hauteur commune de toute présentation de X , et on les note

$$\dim X = \dim_C W, \quad \text{ht } X = \dim_{\mathbb{Q}_p} V_+ - \dim_{\mathbb{Q}_p} V_-.$$

En particulier, tout espace de Banach-Colmez effectif est de hauteur positive.

Proposition 8.4.4. — Soient X un espace de Banach-Colmez et X' un sous-espace de Banach-Colmez de X . Il existe alors un espace de Banach-Colmez quotient X/X' , qui est de dimension $\dim X - \dim X'$, et de hauteur $\text{ht } X - \text{ht } X'$.

Démonstration. — Notons d, d', h, h' les dimensions et hauteurs de X et X' . Soient $V_- \rightarrow (V_+ \rightarrow E \rightarrow W) \rightarrow X$ et $V'_- \rightarrow (V'_+ \rightarrow E' \rightarrow W') \rightarrow X'$ des présentations respectives de X et X' . De même qu'à la proposition 8.4.1, quitte à remplacer $X' \rightarrow X$ par $E \times_X E' \rightarrow E$, on peut supposer que X est effectif.

Soit donc $X' \hookrightarrow E$ un morphisme d'espaces de Banach-Colmez, où E est effectif et a la présentation $0 \rightarrow V \rightarrow E \rightarrow W \rightarrow 0$. Alors, quitte à remplacer X' par $X'/(V \cap X')$, on peut supposer que $E = W$ et donc $V = 0$.

Soit (e_1, \dots, e_d) une base de W ; notons X'_i l'image de X' dans Ce_i . Alors d'après le corollaire 8.3.2, $X'_i \rightarrow Ce_i$ admet un quotient X''_i , qui vérifie le résultat voulu. Il suffit alors de prendre comme objet X'' la somme directe des X''_i pour obtenir le résultat. \triangleleft

De plus, puisque la suite $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X/X' \rightarrow 0$ est une suite exacte d'espaces de Banach-Colmez, c'est aussi une suite exacte d'espaces de Banach p -adiques, et donc le support de l'espace de Banach-Colmez X/X' est le quotient des supports de X et X' .

Théorème 8.4.5. — *La catégorie des espaces de Banach-Colmez est abélienne, et la dimension et la hauteur sont additives dans les suites exactes courtes.*

Démonstration. — Nous savons déjà que la catégorie des espaces de Banach-Colmez est additive.

Soit $f : X \rightarrow X'$ un morphisme d'espaces de Banach-Colmez. Alors f admet un noyau d'après la proposition 8.4.1, une coimage d'après la proposition 8.4.4, et une image d'après la proposition 7.2.4; de plus, comme les espaces de Banach p -adiques sous-jacents à $\text{Coim } f$ et $\text{Im } f$ sont la coimage et l'image de l'application \mathbb{Q}_p -linéaire sous-jacente à f , ils sont isométriques, et donc $f : \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ est un isomorphisme d'après la proposition 3.4.4. Enfin, la proposition 8.4.4 prouve que f a un conoyau. \triangleleft

9. Homomorphismes et extensions

9.1. Structure analytique sur les B_{dR}^+ -modules de longueur finie. — Soit K un sous-corps fermé de C tel que la valuation sur K soit discrète et dont le corps résiduel k est parfait. On note $K_0 = \text{Frac } W(k)$ et σ le Frobenius absolu agissant sur K_0 . On reprend ici les notations de [5]. On rappelle qu'un φ -isocrystal sur K est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie D muni d'une application σ -linéaire $\varphi : D \rightarrow D$. Le rang d'un φ -module est la dimension du K_0 -espace vectoriel sous-jacent.

Un φ -module filtré sur K est un φ -module D , muni d'une filtration décroissante $(\text{Fil}^n D_K)_{n \in \mathbb{Z}}$ du K -espace vectoriel $D_K = D \otimes_{K_0} K$ par des sous- K_0 -espaces vectoriels; on exige en outre que D_K soit séparé et complet pour cette filtration. Puisque D est de dimension finie, cette dernière condition est équivalente à : $\text{Fil}^n D_K = D_K$ pour n assez petit, et $\text{Fil}^n D_K = 0$ pour n assez grand.

Soit D un φ -module filtré. Son nombre de Newton $t_N(D)$ est la somme $\sum \alpha \dim D_\alpha$, où D_α est la partie isocline de pente α de D ; ceci revient à dire que $t_N(D)$ est la valuation p -adique du déterminant de la matrice de φ dans une base quelconque de D (ce déterminant dépend de la base mais pas sa valuation p -adique). Son nombre de Hodge $t_H(D)$ est la somme $\sum i \cdot \dim \text{Fil}^i D_K / \text{Fil}^{i+1} D_K$. Les deux nombres t_N et t_H sont additifs sur les suites exactes courtes.

On dit qu'un φ -module filtré D est *effectif* si toutes ses pentes sont ≥ 0 et si $\text{Fil}^0 D_K = D_K$. Pour tout φ -module filtré effectif D , on pose :

$$\begin{aligned} V(D) &= \text{Hom}_{\varphi, \text{Fil}}(D, B_{\text{cris}}), \\ E(D) &= \text{Hom}_{\varphi}(D, B_{\text{cris}}^+), \\ M(D) &= \text{Hom}_K(D_K, B_{\text{dR}}^+) / \text{Hom}_{K, \text{Fil}}(D_K, B_{\text{dR}}^+), \end{aligned}$$

de sorte que $M(D)$ est un B_{dR}^+ -module de longueur finie. De plus, le groupe \mathcal{G}_K agit sur $V(D)$, $E(D)$ et $M(D)$. On dispose alors d'une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow V(D) \longrightarrow E(D) \longrightarrow M(D).$$

On dit qu'un φ -module filtré D est *faiblement admissible* si $t_H(D) = t_N(D)$ et si, pour tout sous- φ -module filtré D' de D , $t_H(D') \leq t_N(D')$. On dit que D est *admissible* si $V(D)$ est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie égale au rang de D . D'après [5], nous savons qu'un φ -module filtré est admissible si et seulement s'il est faiblement admissible et qu'alors la suite $0 \rightarrow V(D) \rightarrow E(D) \rightarrow M(D) \rightarrow 0$ est exacte. Nous n'utiliserons ici que les propriétés plus faibles suivantes :

- (i) si D est admissible, alors il est faiblement admissible [5, 4.2];
- (ii) si D est faiblement admissible, alors il est admissible si et seulement si $E(D) \rightarrow M(D)$ est surjective [5, 5.7];
- (iii) si $t_H(D') \leq t_N(D')$ pour tout sous-objet D' de D , alors $V(D)$ est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie, inférieure ou égale au rang de D [5, 4.3(i)].

On dira qu'une filtration Fil sur un φ -module D est *admissible effective* si le φ -module filtré (D, Fil) est admissible et effectif. Dans ce cas, nous écrivons la suite exacte courte ci-dessus $0 \rightarrow V(D, \text{Fil}) \rightarrow E(D) \rightarrow M(D, \text{Fil}) \rightarrow 0$.

Une filtration Fil sur D est dite *de niveau* $\leq m$ si $\text{Fil}^0 D_K = D_K$ et $\text{Fil}^{m+1} D_K = 0$. En particulier, une filtration de niveau ≤ 1 est donnée par le sous- K -espace vectoriel $\text{Fil}^1 D_K$ de D_K ; dans ce cas, on voit immédiatement que $t_H(D) = \dim \text{Fil}^1 D_K$.

Dire que Fil est de niveau $\leq m$ revient à dire que le B_{dR}^+ -module $M(D)$ est annulé par $\text{Fil}^m B_{\text{dR}}^+$. En outre, soit (e_1, \dots, e_h) une base de D_K adaptée à la filtration, et soit r_i le plus grand entier r tel que $e_i \in \text{Fil}^r D_K$; alors $M(D)$ s'identifie à la somme directe des B_{r_i} , et est donc un B_{dR}^+ -module de longueur $\sum r_i$, c'est-à-dire $t_H(D)$. Par conséquent, si D est de niveau ≤ 1 , alors $M(D)$ est un C -espace vectoriel de dimension $t_H(D)$.

Soit D un φ -isocristal sur k à pentes dans $[0, 1]$. Le choix d'une filtration admissible effective Fil de niveau ≤ 1 sur D donne une suite exacte courte $0 \rightarrow V(D, \text{Fil}) \rightarrow E(D) \rightarrow M(D, \text{Fil}) \rightarrow 0$ qui est une présentation de $E(D)$ dans la catégorie des espaces de Banach-Colmez effectifs. Si à présent Fil' est une autre filtration admissible effective de D (qui n'est pas nécessairement de niveau ≤ 1) alors la suite exacte courte $0 \rightarrow V(D, \text{Fil}') \rightarrow E(D) \rightarrow M(D, \text{Fil}') \rightarrow 0$ définit une structure d'espace de Banach-Colmez sur le B_{dR}^+ -module de longueur finie $M(D, \text{Fil})$.

Proposition 9.1.1. — *Soit K un sous-corps fermé de C dont la valuation est discrète et dont le corps résiduel k est parfait.*

- (i) *Pour tout B_{dR}^+ -module de longueur finie M , il existe un φ -module filtré effectif admissible D à pentes dans $[0, 1]$ tel que le B_{dR}^+ -module $M(D)$ soit isomorphe à M .*
- (ii) *La structure analytique définie comme en (i) par un isomorphisme $M(D) \simeq M$ de B_{dR}^+ -modules est indépendante du choix du φ -module filtré D .*
- (iii) *Soient M, M' deux B_{dR}^+ -modules de longueur finie. Alors toute application B_{dR}^+ -linéaire de M vers M' est analytique pour la structure définie en (i).*
- (iv) *Le foncteur ainsi défini de la catégorie des B_{dR}^+ -modules de longueur finie vers celle des espaces de Banach-Colmez est pleinement fidèle.*

Démonstration. — (i) Il suffit de le prouver dans le cas où $M = B_m$ pour un entier $m \geq 1$. Soit $D = \mathbb{Q}_p[\varphi]/(\varphi^m - p)$; alors D est le module de Dieudonné d'un groupe p -divisible Γ sur \mathbb{F}_p de hauteur m et de dimension 1. Soit G un relèvement sur \mathbb{Z}_p de Γ . Alors G correspond à une filtration admissible Fil sur le φ -module D , telle que $\text{Fil}^0 D = D$, $\text{Fil}^2 D = 0$, et $\text{Fil}^1 D = \mathbb{Q}_p e$ où e est un élément non nul de D . Comme la catégorie des φ -modules filtrés admissibles est stable par produit tensoriel [5], le φ -module filtré $D^{\otimes m}$ est encore admissible; c'est encore le cas de tout sous-module filtré D' de $D^{\otimes m}$ tel que $t_H(D') = t_N(D')$. C'est le cas du sous- $\mathbb{Q}_p[\varphi]$ -module D' engendré par $e' = e \otimes \dots \otimes e$; il est de rang m et de pente 1, et en outre $\text{Fil}^0 D' = D'$, $\text{Fil}^1 D' = \dots = \text{Fil}^m D' = \mathbb{Q}_p e'$ et $\text{Fil}^{m+1} D' = 0$. Par conséquent, $M(D') = B_m$.

(ii) résulte immédiatement d'une application de (iii) à l'application identique de M .

(iii) Soient D, D' deux φ -modules filtrés effectifs admissibles à pentes dans $[0, 1]$ tels que $M(D) \simeq M$ et $M(D') \simeq M'$. Notons $(e_i)_{i=1, \dots, h}$, $(e'_i)_{i=1, \dots, h'}$ des bases de D et D' .

Soient $(u_i)_{i=1,\dots,h}$ et $(u'_i)_{i=1,\dots,h'}$ des bases de D_K et D'_K adaptées aux filtrations respectives ; il existe alors des coefficients $c_{i,j}, c'_{i,j} \in K$ tels que l'on puisse écrire $u_i = \sum c_{i,j} e_j$, $u'_i = \sum c'_{i,j} e'_j$. Soit encore m_i le plus petit entier m tel que $u_i \in \text{Fil}^m D_K$, et définissons de même m'_i .

On peut alors écrire $M(D) = \bigoplus B_{m_i} v_i$ et $M(D') = \bigoplus B_{m'_i} v'_i$. Puisque l'application $f : M(D) \rightarrow M(D')$ est B_{dR}^+ -linéaire, il existe des éléments $b_{i,i'}$ de $B_{m'_i}$ pour tous i, i' , tels que $f(v'_i) = \sum b_{i,i'} v_i$. Enfin, l'application $\pi : E(D) \rightarrow M(D)$ est donnée par $\pi(x) = \sum x(u_i) v_i = \sum c_{i,j} x(e_j) v_i$.

Soit $E'' = E(D) \times_{M(D')} E(D')$ (E'' est le « graphe de f ») ; on peut alors écrire

$$E'' = \left\{ (x, x') \in E(D) \times E(D'), \sum_{j'=1}^{h'} \left(c'_{i,j'} x'(e'_{j'}) - \sum_{i'=1}^h a_{i',i} \sum_{j=1}^h c_{i',j} x(e_j) \right) \in \text{Fil}^{m_i} B_{\text{dR}}^+ \right\} ;$$

autrement dit, E'' est le produit fibré du diagramme

$$\begin{array}{ccc} E(D) \times E(D') & \xrightarrow{c} & BW(R)^h \otimes_{K_0} K \\ & & \uparrow \\ & & \prod_{i=1}^h \text{Fil}^{m_i} BW(R) \end{array}$$

Puisque D et D' sont effectifs, $E(D)$ et $E(D')$ sont naturellement munis de structures d'espaces de Banach-Colmez effectifs ; en outre, puisque K/K_0 est finie, on peut également munir $BW(R) \otimes_{K_0} K$ d'une structure d'espace de Banach spectral, et le morphisme c défini ci-dessus est analytique. Par conséquent, d'après la proposition 4.3.6, E'' est un fermé analytique de $E(D) \times E(D')$. On déduit alors de la proposition 7.2.2 que $f : M(D) \rightarrow M(D')$ est analytique.

(iv) Il suffit de démontrer que, pour tout m , $\text{Hom}(B_m, C) = C$, c'est-à-dire que tout morphisme analytique $f : B_m \rightarrow C$ s'annule sur $\text{Fil}^1 B_m = B_{m-1}(1)$; en outre, puisque $0 \rightarrow B_{m-1}(1) \rightarrow B_m \rightarrow C \rightarrow 0$ est une suite exacte d'espaces de Banach-Colmez, il suffit d'établir ce résultat pour $m = 2$.

D'après (i), une structure analytique sur B_2 est donnée par la présentation $0 \rightarrow V \rightarrow E \rightarrow B_2 \rightarrow 0$, où $E = \{x \in B_{\text{cris}}^+, \varphi^2(x) = p^2 \cdot x\}$ et $V = E \cap \text{Fil}^2 B_{\text{cris}}^+$ est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension 2. Puisque la catégorie \mathbf{BC}_C est abélienne, on dispose d'une suite exacte $0 \rightarrow \text{Hom}(B_2, C) \rightarrow \text{Hom}(E, C) \rightarrow \text{Hom}(V, C)$.

Soit e un élément de \mathbb{Q}_{p^2} tel que $\{e, \varphi(e)\}$ soit une \mathbb{Q}_p -base de \mathbb{Q}_{p^2} ; alors l'application $E_1 \oplus E_1 \rightarrow E, (x, x') \mapsto xe + x'\varphi(e)$ est un isomorphisme. Par conséquent, $\text{Hom}(E, C)$ est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension 2. Puisque $\theta : B_2 \rightarrow C$ est analytique en vertu de (iii), l'espace $\text{Hom}(B_2, C)$ est non nul ; il suffit donc de montrer que la flèche $F : \text{Hom}(E, C) \rightarrow \text{Hom}(V, C)$ est non nulle. Soient $f, f' : E \rightarrow C$ définies par $f(x \cdot e + x' \cdot \varphi(e)) = \theta(x)$ et $f'(x \cdot e + x' \cdot \varphi(e)) = \theta(x')$ pour tous $x, x' \in E_1$; alors $F(f) = F(f') = 0$ entraîne que $\varphi^n(e) \in \text{Fil}^1 B_{\text{dR}}^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $e \in tB_{\text{cris}}^+$, ce qui est absurde. \triangleleft

Remarquons également que, par construction, l'espace de Banach-Colmez associé à tout B_{dR}^+ -module de longueur finie est connexe. Par conséquent, d'après la proposition 7.3.2, pour tout B_{dR}^+ -module de longueur finie M et tout espace de Banach spectral étale V , $\text{Hom}_{\mathbf{BC}_C}(M, V) = 0$.

Proposition 9.1.2. — *Soit D un φ -module effectif. Alors $E(D)$ est naturellement muni d'une structure d'espace de Banach-Colmez de dimension $t_{\mathbb{N}}(D)$ et de hauteur égale au rang de D .*

De plus, l'application naturelle $E(D) \rightarrow M(D)$ est analytique.

Démonstration. — D'après la proposition 5.3.3, le résultat est connu lorsque toutes les pentes de D sont ≤ 1 . Supposons le résultat connu lorsque toutes les pentes de D sont $\leq m-1$ pour un entier m , et montrons-le lorsque D est de pentes $\leq m$. En écrivant la décomposition isocline de D , on peut supposer que celui-ci n'a qu'une seule pente et qu'elle appartient à l'intervalle $]m-1, m]$.

Soient D_1 un φ -isocristal effectif et $\alpha : D \rightarrow B_{\text{cris}}^+ \otimes_{K_0} D_1$ une application $K_0[\varphi]$ -linéaire. On dispose alors d'une application linéaire $E(\alpha) : E(D_1) \rightarrow E(D)$ définie par $E(\alpha)(f) = (\text{id} \otimes f) \circ \alpha$. La paire (D_1, α) est dite *admissible* si $E(\alpha)$ est surjective et si son noyau est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie ; la donnée d'une paire admissible (D_1, α) telle que toutes les pentes de D_1 soient $\leq m-1$ munit D d'une structure d'espace de Banach-Colmez.

Soient à présent $f : D \rightarrow D'$ un morphisme de φ -isocristaux effectifs et $(D_1, \alpha), (D'_1, \alpha')$ des paires admissibles respectives pour D et D' , de pentes $\leq m-1$. Alors f induit un morphisme $E(f) : E(D') \rightarrow E(D)$; on peut ainsi construire $E = E(D_1) \times_{E(D)} E(D'_1)$. En choisissant des bases de D, D', D_1 et D'_1 et en écrivant les matrices de α, α' et f dans ces bases, on montre de même qu'à la proposition 9.1.1(iii) que E est un fermé analytique de $E(D_1) \times E(D'_1)$; par conséquent, f est analytique. En particulier, en appliquant ce résultat à $f = \text{id} : D \rightarrow D$, on voit que la structure analytique sur D ne dépend pas du choix de la paire admissible (D_1, α) .

Montrons qu'il existe au moins une paire admissible (D_1, α) avec D_1 de pentes $\leq m-1$. Soient h le rang de D , $\varphi : D \rightarrow D$ le Frobenius de D et notons $D' = (D, p^{-1}\varphi)$. La composition par $\theta : B_{\text{cris}}^+ \rightarrow C$ donne un morphisme naturel $E(D) \rightarrow \text{Hom}_{K_0}(D, C)$; d'après [9, 5.3.7(i)], un élément du noyau de cette flèche est un morphisme $D \rightarrow B_{\text{cris}}^+$ à valeurs dans tB_{cris}^+ . On dispose donc d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow E(D') \longrightarrow E(D) \longrightarrow \text{Hom}_{K_0}(D, C),$$

où $E(D') \rightarrow E(D)$ est la multiplication par t .

Soit $u \in E_1$ tel que $\theta(u) = 1$. Alors la multiplication par u^{m-2} induit une injection $E(D, p^{-m+1}\varphi) \rightarrow E(D')$ et un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E(D, p^{-m+1}\varphi) & \longrightarrow & \text{Hom}_{K_0}(D, C) \\ \downarrow & & \parallel \\ E(D') & \longrightarrow & \text{Hom}_{K_0}(D, C). \end{array}$$

Le φ -isocrystal effectif $(D, p^{-m+1}\varphi)$ est à pentes dans $[0, 1]$, et par conséquent $F = E(D, p^{-m+1}\varphi)$ est un espace de Banach-Colmez effectif. Par conséquent, la flèche $F \rightarrow \text{Hom}_{K_0}(D, C)$ s'identifie à l'injection $F \rightarrow F_C$ (où F_C est l'enveloppe vectorielle de F , 5.4.1); on en déduit que l'image de cette flèche engendre $\text{Hom}_{K_0}(D, C)$. Puisque l'image de la flèche du haut engendre $\text{Hom}_{K_0}(D, C)$, il en est de même de celle de la flèche du bas.

Soient donc $(v_1, \dots, v_h) \in E(D')$ dont les images forment une base de $\text{Hom}_{K_0}(D, C)$; soit $D_1 = D' \oplus K_0 e_1 \oplus \dots \oplus K_0 e_h$, muni de φ défini par $\varphi(e_i) = p e_i$, et soit $\alpha : D \rightarrow B_{\text{cris}}^+ \otimes D_1$ définie par $\alpha(x) = t \otimes x \oplus v_1(x) e_1 \oplus \dots \oplus v_h(x) e_h$. Alors α est $K_0[\varphi]$ -linéaire et D_1 est de pentes $\leq m - 1$; de plus, $E(D_1) = E(D') \oplus E_1^h$. Par construction, l'image de $E(\alpha) : E(D_1) \rightarrow E(D)$ contient $tE(D')$, et la flèche composée $E(D_1) \rightarrow E(D) \rightarrow \text{Hom}_{K_0}(D, C)$ est surjective; par conséquent, $E(\alpha)$ est surjective et la suite

$$(9.1.3) \quad 0 \longrightarrow E(D') \longrightarrow E(D) \longrightarrow \text{Hom}_{K_0}(D, C) \longrightarrow 0$$

est exacte. De plus, le noyau de $E(\alpha)$ est $E_1^h \cap tE(D')$, c'est donc un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension h . Par conséquent, (D_1, α) est une paire admissible.

Enfin, puisque la suite 9.1.3 est exacte, on a $\dim E(D) = \dim E(D') + h = t_N(D)$ et $\text{ht } E(D) = \text{ht } E(D') = h$.

Il reste à montrer que $E(D) \rightarrow M(D)$ est analytique. Il existe des entiers m, n et une injection naturelle analytique $E(D) \rightarrow B_m^n$; puisque $B_m^n \rightarrow M(D)$ est analytique d'après la proposition 9.1.1, on voit que $E(D) \rightarrow M(D)$ est analytique. \triangleleft

Proposition 9.1.4. — [5, Théorème A] *Soit D un φ -module effectif. Alors toute filtration faiblement admissible sur D est admissible.*

Démonstration. — Pour toute filtration Fil sur D , la suite exacte $0 \rightarrow V(D) \rightarrow E(D) \rightarrow M(D)$ est analytique; si Fil est faiblement admissible, alors $t_H(D) = t_N(D)$ entraîne $\dim E(D) = \dim M(D)$, et $t_H(D') \leq t_N(D')$ pour tout sous-objet D' de D entraîne que $V(D)$ est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie [5, 4.3(i)] et donc un espace de Banach-Colmez de dimension nulle. On en déduit que le conoyau X de $E(D) \rightarrow M(D)$ est de dimension 0 et donc un espace de Banach-Colmez étale. Puisque $M(D)$ est connexe, on a donc $X = 0$, ce qui signifie que $E(D) \rightarrow M(D)$ est surjective et donc [5, 5.7] que Fil est admissible. \triangleleft

9.2. L'extension universelle de \tilde{B} par \mathbb{Q}_p . — Soient $\tilde{B} = B_{\text{dR}}/B_{\text{dR}}^+$ et $B_e = \{x \in B_{\text{cris}}, \varphi(x) = x\}$. On note encore, pour tout entier m , $B_m = B_{\text{dR}}^+/\text{Fil}^m B_{\text{dR}}^+$; alors $B_1 = C$ et B_{m+1} est une extension de B_m par $C(m)$. On dispose alors de la suite exacte suivante ([9, 5.3.7(iii)]):

$$(9.2.1) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow B_e \longrightarrow \tilde{B} \longrightarrow 0.$$

On rappelle que pour tous entiers positifs premiers entre eux d, h , on note $E_{d/h} = E_{d,h} = \{x \in B_{\text{cris}}^+, \varphi^h(x) = p^d x\}$; on a donc en particulier, pour tout entier m , $E_m = \{x \in B_{\text{cris}}^+, \varphi(x) = p^m x\}$. On dispose alors d'une suite exacte courte d'espaces de Banach p -adiques, qui est analytique et donc une suite exacte courte dans \mathbf{BC}_C :

$$(9.2.2) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(m) \longrightarrow E_m \longrightarrow B_m \longrightarrow 0,$$

et on a encore $B_e = \varinjlim E_m(-m)$, $\tilde{B} = \varinjlim B_m(-m)$, ce qui permet de considérer B_e et \tilde{B} comme des limites inductives d'espaces de Banach-Colmez et la suite 9.2.1 comme une suite exacte de limites inductives d'espaces de Banach-Colmez.

Pour tout espace de-Banach-Colmez X , on pose donc

$$X_{\text{dR}}^* = \text{Hom}(X, \tilde{B}) = \varinjlim_{m \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathbf{BC}_C}(X, B_m(-m)).$$

Un B_{dR}^+ -module M est dit *de cotype fini* si $\text{Hom}_{B_{\text{dR}}^+}(M, \tilde{B})$ est de type fini ; ceci revient à dire que M est extension d'un module de longueur finie par un module divisible de cotype fini (donc de la forme $(\tilde{B})^n$). De plus, cette extension est (non canoniquement) scindée. En particulier, si M est de cotype fini et de type fini, alors il est de longueur finie.

Proposition 9.2.3. — (i) Pour tout espace de Banach spectral étale V ,

$$V_{\text{dR}}^* = \varinjlim \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, B_m(-m)) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, \tilde{B}) = V^\vee \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B};$$

(ii) Pour tout m , $(B_m)_{\text{dR}}^* = B_m(-m)$;

(iii) Pour tout C -espace vectoriel W , $W_{\text{dR}}^* = \text{Hom}_C(W, C(-1)) = W^*(-1)$;

(iv) Pour tout espace de Banach-Colmez X , X_{dR}^* est un B_{dR}^+ -module de cotype fini.

Démonstration. — (i) est une conséquence de la proposition 1.4.4.

(ii) découle de la pleine fidélité du foncteur de la catégorie des B_{dR}^+ -modules de longueur finie vers celle des espaces de Banach spectraux (proposition 9.1.1).

(iii) est un cas particulier de (ii).

(iv) Le résultat est vrai dans les cas particuliers où X est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel ou un C -espace vectoriel de dimension finie d'après ce qui précède. Dans le cas général, X est le quotient d'une extension de tels objets, et donc le résultat est encore vrai. \triangleleft

Définition 9.2.4. — Notons \mathbf{L}_C la catégorie dont les objets sont les triplets (M, V, f) , où V est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie, M un B_{dR}^+ -module de longueur finie, et $f : M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ une application B_{dR}^+ -linéaire, et dont les morphismes entre deux objets (M, V, f) et (M', V', f') sont les couples de morphismes $(v \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, V'), w \in \text{Hom}_{B_{\text{dR}}^+}(M, M'))$ tels que $w \circ f = f' \circ v$.

Se donner un objet $f : M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ de \mathbf{L}_C revient à se donner une application \mathbb{Q}_p -linéaire $f^* : V^\vee \rightarrow M^*$, où V^\vee est le dual de V comme \mathbb{Q}_p -espace vectoriel, et M^* est le dual de M comme B_{dR}^+ -module.

La promotion d'un C -espace vectoriel de dimension finie en un B_{dR}^+ -module de longueur finie fournit un foncteur naturel, que l'on note $f \mapsto f_{\text{dR}}$, de la catégorie \mathbf{L}_C^+ vers la catégorie \mathbf{L}_C .

Proposition 9.2.5. — La correspondance qui à un objet (M, V, f) de \mathbf{L}_C associe

$$E(f) = M \times_{(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B})} (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_e)$$

est un foncteur (covariant) de la catégorie \mathbf{L}_C vers la catégorie \mathbf{BC}_C .

De plus, pour tout objet f de \mathbf{L}_C^+ , $E(f_{\text{dR}})$ est un espace de Banach-Colmez effectif naturellement isomorphe à l'objet $E(f)$ construit à la proposition 5.5.8.

Démonstration. — Pour tout objet (M, V, f) de \mathbf{L}_C , $E(f)$ est construit par le diagramme suivant :

$$(9.2.6) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & E(f) & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_e & \longrightarrow & V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Puisque M est un B_{dR}^+ -module de longueur finie, il est annulé par un idéal $t^m B_{\text{dR}}^+$, ce qui signifie que l'image de $f : M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ est incluse dans l'un des $V \otimes B_m(-m)$; la deuxième ligne du diagramme peut donc être remplacée par $V \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_m(-m) \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_m(-m)$, et tous ces objets sont naturellement des espaces de Banach-Colmez. Par conséquent, $E(f)$ est naturellement un espace de Banach-Colmez.

Enfin, dire que f est un objet de \mathbf{L}_C^+ revient à dire que M est un C -espace vectoriel, et donc annulé par tB_{dR}^+ ; dans ce cas, le diagramme 9.2.6 se confond avec le diagramme 5.5.9. \triangleleft

Proposition 9.2.7. — Pour tout B_{dR}^+ -module de longueur finie M et pour tout espace de Banach spectral étale V , la flèche de la proposition 9.2.5 fournit un isomorphisme canonique

$$\text{Ext}_{\mathbf{BC}_C}^1(M, V) = \text{Hom}_{B_{\text{dR}}^+}(M, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}).$$

Démonstration. — Il suffit de le prouver lorsque $M = B_m$. Si $m = 1$, alors $M = C$, et le résultat est celui de la proposition 5.5.6. Montrons par récurrence le cas quelconque; supposons que $\beta_m : \text{Hom}_{B_{\text{dR}}^+}(B_m, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{BC}_C}^1(B_m, V)$ soit un isomorphisme.

On déduit de la suite exacte

$$0 \longrightarrow B_m(1) \longrightarrow B_{m+1} \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

une suite

$$0 \longrightarrow \text{Ext}^1(C, V) \longrightarrow \text{Ext}^1(B_{m+1}, V) \longrightarrow \text{Ext}^1(B_m(1), V);$$

cette suite est exacte à gauche et au centre. De plus, les espaces de Banach-Colmez $B_m(1)$ et B_{m+1} admettent les représentants

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}_p(2) \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_p(m+1) & \longrightarrow & E_1(1) \oplus \dots \oplus E_1(m) & \longrightarrow & B_m(1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{Q}_p(1) \oplus \mathbb{Q}_p(2) \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_p(m+1) & \longrightarrow & E_1 \oplus E_1(1) \dots \oplus E_1(m) & \longrightarrow & B_{m+1} \end{array}$$

Par conséquent, pour toute extension X de $B_m(1)$ par V dont un représentant est le complexe $V' \rightarrow E'$, l'espace de Banach-Colmez défini par $V' \oplus \mathbb{Q}_p(1) \rightarrow E' \oplus E_1$ est une extension de B_{m+1} par V , et donc la flèche $\text{Ext}^1(B_{m+1}, V) \rightarrow \text{Ext}^1(B_m(1), V)$ est

surjective. On peut alors écrire le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(C, V) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(B_{m+1}, V) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(B_m(1), V) \longrightarrow 0 \\
& & \alpha \uparrow & & \beta_{m+1} \uparrow & & \beta_m(1) \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{B_{\mathrm{dR}}^+}(C, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(B_{m+1}, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(B_m(1), V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Les deux lignes sont exactes, la flèche α est un isomorphisme d'après la proposition 5.5.6, et la flèche $\beta_m(1)$ est un isomorphisme par hypothèse de récurrence; donc β_m est un isomorphisme. \triangleleft

Proposition 9.2.8. — Soit $h \geq 1$. Alors $\mathrm{Hom}_{B_{\mathbb{C}}^+}(C, E_{1,h}) = 0$.

Démonstration. — Soit $f : C \rightarrow E_{1,h}$ un morphisme analytique. Alors $\theta \circ f$ est un endomorphisme analytique de C , donc soit un isomorphisme, soit nul.

Supposons que f soit un isomorphisme. Alors $E_{1,h}$ est engendré par $f(C)$ et par le noyau V de θ ; puisque C est de dimension 1 et de hauteur nulle, et V de dimension nulle et de hauteur h , cette somme est directe, autrement dit on peut écrire $E_{1,h} = C \oplus \mathbb{Q}_p^h$. Par conséquent, $\mathrm{Hom}(E_{1,h}, C)$ est un C -espace vectoriel de dimension $h + 1$, ce qui contredit la proposition 5.4.2.

Par conséquent, $\theta \circ f = 0$, ce qui signifie que $f(C) \subset V$; puisque C est connexe, ceci entraîne que $f(C) = 0$, et donc que $f = 0$. \triangleleft

Proposition 9.2.9. — Soit E un espace de Banach-Colmez effectif. Alors

- (i) $\mathrm{Hom}(C, E)$ est un C -espace vectoriel de dimension finie;
- (ii) soit n la dimension de cet espace, alors C^n est un facteur direct de E ;
- (iii) $\mathrm{ht}(E) = \dim_C \mathrm{Hom}(E, C) - \dim_C \mathrm{Hom}(C, E)$.

Démonstration. — Soit h la hauteur de E .

Si E est de dimension nulle, alors c'est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel; en particulier, puisque E est un groupe spectral étale, $\mathrm{Hom}(C, E) = 0$, et $\mathrm{Hom}(E, C)$ est un C -espace vectoriel de dimension h .

Si E est de dimension un, la proposition 6.2.7 prouve qu'il existe un entier $h' \geq 1$ et un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel V'' , de dimension $h'' = h - h'$, tels que $E = E_{1,h'} \oplus V''$. Si $h' = 0$, alors E est isomorphe à la somme directe $C \oplus \mathbb{Q}_p^h$; on a alors $\mathrm{Hom}(C, E) = C$ et $\mathrm{Hom}(E, C) = C \oplus C^h$. Si $h' > 0$, alors $\mathrm{Hom}(C, E) = \mathrm{Hom}(C, E_{1,h'}) = 0$ d'après la proposition 9.2.8, et $\mathrm{Hom}(E, C) = C^{h'} \oplus C^{h''}$. Dans les deux cas, on a bien $h = \dim_C \mathrm{Hom}(E, C) - \dim_C \mathrm{Hom}(C, E)$.

Montrons par induction sur d le cas où $d \geq 2$. Soit E un espace de Banach-Colmez effectif de dimension d et de hauteur h , dont une présentation est $0 \rightarrow V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} W \rightarrow 0$. Soit $W = W' \oplus W''$ une décomposition non triviale de W et posons $E' = E \times_W W'$ et $E'' = E \times_W W''$; alors E' et E'' sont des extensions respectivement de W' et W'' par V , et $E' +_V E''$ s'identifie à E . En particulier, E' et E'' sont des espaces de Banach-Colmez de

hauteur h et de dimension strictement inférieure à d ; par hypothèse d'induction, ils vérifient donc les conclusions de la proposition.

Par construction de E' , $\mathrm{Hom}(C, E')$ s'identifie au sous-ensemble des morphismes analytiques $f : C \rightarrow E$ tels que $\pi(f(1)) \in W'$; on a donc bien $\mathrm{Hom}(C, E) = \mathrm{Hom}(C, E') \oplus \mathrm{Hom}(C, E'')$. Par conséquent, $\mathrm{Hom}(C, E)$ est un C -espace vectoriel de dimension finie.

De plus, puisque $E = E' +_V E''$, $\mathrm{Hom}(E, C) = \mathrm{Hom}(E', C) \times_{\mathrm{Hom}(V, C)} \mathrm{Hom}(E'', C)$; par conséquent,

$$\begin{aligned} \dim_C \mathrm{Hom}(E, C) - \dim_C \mathrm{Hom}(C, E) &= (\dim_C \mathrm{Hom}(E', C) + \dim_C \mathrm{Hom}(E'', C) - h) \\ &\quad + (\dim_C \mathrm{Hom}(C, E') + \dim_C \mathrm{Hom}(C, E'')) \\ &= h \end{aligned}$$

donc E vérifie la condition (iii).

Enfin, remarquons que, puisque $\mathrm{Hom}(C, \mathbb{Q}_p) = 0$, l'image de l'application $V \rightarrow E' = C^{n'} \oplus F'$ est incluse dans F' ; de même, l'image de l'application $V \rightarrow E'' = C^{n''} \oplus F''$ est incluse dans F'' . Par conséquent, on peut écrire $E = E' +_V E'' = C^{n'+n''} \oplus (F' +_V F'')$, donc la condition (ii) est vérifiée. \triangleleft

Soit $f : W \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(-1)$ un objet de \mathbf{L}_C^\perp de hauteur h et soient $W' = \mathrm{Ker}(f)$, $W'' = W/W'$ et $f'' : W'' \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(-1)$ l'application quotient. On dispose alors d'une suite exacte d'espaces de Banach-Colmez effectifs

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow E(f) \longrightarrow E(f'') \longrightarrow 0.$$

En outre, d'après ce qui précède, $E(f'')^*_C$ s'identifie à V_C^* et $E(f)^*_C$ est de dimension $h + \dim_C W'$; par conséquent, la suite

$$0 \longrightarrow V_C^* \longrightarrow E(f)^*_C \longrightarrow (\mathrm{Ker} f)^* \longrightarrow 0$$

est exacte.

Proposition 9.2.10. — Soit $0 \rightarrow E' \rightarrow E \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$ une suite exacte courte d'espaces de Banach-Colmez effectifs. On suppose que E est connexe et de dimension 2. Alors le morphisme $E_C^* \rightarrow (E')^*_C$ est surjectif.

Démonstration. — Nous savons d'après la proposition 5.4.3 que le noyau de l'application d'enveloppe $\iota : E \rightarrow E_C$ est un sous-espace étale de E , qui ne contient par conséquent pas E' . Soit $u : E \rightarrow C$ un morphisme analytique tel que $u(E') \neq 0$; puisque E' est de

dimension 1, $u(E') = C$ et on peut donc former le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & V & \xlongequal{\quad} & V & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\pi} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{i} & C^2 & \longrightarrow & C \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Comme E est de dimension 2, le noyau V de $E \rightarrow C^2$ est étale. Par conséquent, il existe un morphisme $f : C^2 \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(-1)$ tel que $E = E(f)$ et $E' = E(f \circ i)$.

D'après ce qui précède, on dispose alors du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & V_C^* & \longrightarrow & E_C^* & \longrightarrow & \text{Ker}(f)^* \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & V_C^* & \longrightarrow & (E')_C^* & \longrightarrow & \text{Ker}(f \circ i)^* \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Puisque $\text{Ker}(f \circ i) \rightarrow \text{Ker}(f)$ est injective, on voit que $E_C^* \rightarrow (E')_C^*$ est surjective. \triangleleft

Proposition 9.2.11. — Soient M, N deux B_{dR}^+ -modules de longueur finie et X une extension de M par N dans la catégorie des espaces de Banach-Colmez. Alors X est un B_{dR}^+ -module de longueur finie.

Démonstration. — Il suffit de le démontrer lorsque $M = N = C$; par commodité, on notera $N = C(1)$. Soit $0 \rightarrow C(1) \rightarrow X \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte d'espaces de Banach-Colmez. La structure analytique sur B_2 est donnée par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p(1) & \longrightarrow & C(1) \oplus \mathbb{Q}_p(1) & \longrightarrow & C(1) \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p(1) & \longrightarrow & C(1) \oplus E_1 & \longrightarrow & B_2 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & C & \xlongequal{\quad} & C.
 \end{array}$$

Soient $0 \rightarrow V \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0$ une présentation de X et $E' = E \times_X V(1)$; quitte à étendre E , on peut en outre supposer que E' est un espace de Banach-Colmez effectif. Puisque X est de dimension 2, E est de dimension 2 et E' de dimension 1; de plus, on dispose de suites exactes $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow V \rightarrow E' \xrightarrow{\pi} C(1) \rightarrow 0$. Enfin, si l'image de la composante neutre E_0 de E dans C n'est pas C , alors c'est un sous-espace étale de C et elle est donc nulle, donc l'image de E est l'image de sa partie étale, ce qui est absurde. Par conséquent, l'image de E_0 est C et on peut donc supposer que E est connexe.

D'après la proposition 9.2.10, il existe un prolongement analytique $u : E \rightarrow C(1)$ de $\pi : E' \rightarrow C(1)$. Alors l'application $u \oplus 0 : E \rightarrow C(1) \oplus E_1$ définit un morphisme analytique $v : X \rightarrow B_2$ prolongeant l'identité de $C(1)$. On dispose par conséquent d'un

diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C(1) & \longrightarrow & X & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & C(1) & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

et l'extension X est donc donnée par la flèche analytique $w : C \rightarrow C$, c'est-à-dire par un élément de C . Par conséquent, on a bien $\mathrm{Ext}_{\mathbf{B}C_C}^1(C, C) = C = \mathrm{Ext}_{B_{\mathrm{dR}}^+}^1(C, C)$. \triangleleft

9.3. Constructibilité. — Pour tout espace de Banach-Colmez X , on note X_{dR}^+ le dual du B_{dR}^+ -module X_{dR}^* et X_{dR} le B_{dR} -espace vectoriel $X_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{B_{\mathrm{dR}}^+} B_{\mathrm{dR}}$. On déduit immédiatement de la proposition 9.2.3 le résultat suivant :

Proposition 9.3.1. — (i) pour tout espace de Banach spectral étale V , $V_{\mathrm{dR}}^+ = V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}}^+$;
(ii) pour tout B_{dR}^+ -module de longueur finie M , $M_{\mathrm{dR}}^+ = M$;
(iii) pour tout espace de Banach-Colmez X , X_{dR}^+ est un B_{dR}^+ -module de type fini, et X_{dR} est un B_{dR} -espace vectoriel de dimension finie.

Soit X un espace de Banach-Colmez. Une application \mathbb{Q}_p -linéaire $X \rightarrow B_{\mathrm{dR}}^+$ est dite *analytique* si toutes les applications déduites $X \rightarrow B_m$ sont analytiques. De même, pour tout B_{dR}^+ -module de type fini M , une application $X \rightarrow M$ est dite *analytique* si toutes les applications $X \rightarrow M \otimes_{B_{\mathrm{dR}}^+} B_m$ sont analytiques.

On voit alors que $X \rightarrow X_{\mathrm{dR}}^+$ vérifie une propriété universelle : tout morphisme analytique de X vers un B_{dR}^+ -module M se factorise de façon unique par X_{dR}^+ .

Proposition 9.3.2. — Soit X un espace de Banach-Colmez. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe une suite exacte de la forme $0 \rightarrow V \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0$, où V est un espace de Banach spectral étale et M est un B_{dR}^+ -module de longueur finie ;
- (ii) l'application d'enveloppe $\iota : X \rightarrow X_{\mathrm{dR}}^+$ est injective ;
- (iii) il existe un B_{dR}^+ -module de type fini N et une injection analytique $X \subset N$.

Démonstration. — (i) \Rightarrow (ii). D'après la proposition 9.2.7, il existe un objet $f : M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ de \mathbf{L}_C tel que $X = E(f)$. On dispose d'une suite exacte à gauche $0 \rightarrow M_{\mathrm{dR}}^* \rightarrow X_{\mathrm{dR}}^* \rightarrow V_{\mathrm{dR}}^*$. Se donner $f \in V_{\mathrm{dR}}^*$ revient à se donner une application \mathbb{Q}_p -linéaire $f : V \rightarrow \tilde{B}$, qui s'étend donc en une application B_{dR}^+ -linéaire de $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}}^+$ dans \tilde{B} . Soit \bar{X} le sous- B_{dR}^+ -module de $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}}^+$ engendré par X ; alors f se prolonge en une application B_{dR}^+ -linéaire $\bar{X} \rightarrow \tilde{B}$, et la flèche composée $X \rightarrow \bar{X} \rightarrow \tilde{B}$ est analytique. Par conséquent, la suite $0 \rightarrow M_{\mathrm{dR}}^* \rightarrow X_{\mathrm{dR}}^* \rightarrow V_{\mathrm{dR}}^* \rightarrow 0$ est exacte et il en est donc de même de la suite duale $0 \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}}^+ \rightarrow X_{\mathrm{dR}}^+ \rightarrow M \rightarrow 0$. On dispose alors du morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & X & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}}^+ & \longrightarrow & X_{\mathrm{dR}}^+ & \longrightarrow & M \longrightarrow 0. \end{array}$$

Puisque les deux flèches verticales extrêmes sont injectives, on en déduit que $X \rightarrow X_{\text{dR}}^+$ est injective.

(ii) \Rightarrow (iii). Il suffit de remarquer que X_{dR}^+ est un B_{dR}^+ -module de type fini d'après la proposition 9.3.1.

(iii) \Rightarrow (i). Montrons le résultat plus fort suivant : soit X un espace de Banach-Colmez muni d'une injection analytique dans un B_{dR}^+ -module de type fini N . Alors il existe un quotient M de N tel que $X \rightarrow M$ soit surjective et que son noyau V soit un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie.

Il suffit de savoir prouver ce résultat lorsque $N = B_m$ pour un entier $m \geq 1$. Si $m = 1$, alors $X \subset C$; d'après le lemme fondamental 8.3.2, ceci entraîne que $X = C$ ou X est étale. Dans le premier cas, il suffit de prendre $M = C$. Dans le second cas, $M = 0$ convient.

Supposons le résultat connu lorsque $N = B_{m-1}$ et soit $X \subset B_m$. On peut alors former le diagramme commutatif (dont les lignes sont exactes et dont les colonnes sont injectives) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B_{m-1}(1) & \longrightarrow & B_m & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Toujours d'après le lemme fondamental, X'' est étale ou égal à C . Si X'' est étale, alors toute section continue de $X \rightarrow X''$ est analytique ; on peut donc écrire $X = X' \oplus X''$, et l'hypothèse de récurrence s'applique à X' . Supposons donc que $X'' = C$. Par hypothèse de récurrence, il existe un entier $r \leq m - 1$ tel que $X' \rightarrow B_{m-1}(1) \rightarrow B_r(1)$ soit surjective et que son noyau V soit un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie. On dispose alors du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow f & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & B_r(1) & \longrightarrow & B_{r+1} & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où la flèche $X \rightarrow B_{r+1}$ est la composée $X \rightarrow B_m \rightarrow B_{r+1}$. Puisque les deux flèches extrêmes sont surjectives, il en est de même de $X \rightarrow B_{r+1}$; en outre, son noyau coïncide avec celui de $X' \rightarrow B_r(1)$, et est donc un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie. \triangleleft

Définition 9.3.3. — On dit qu'un espace de Banach-Colmez X est *constructible* s'il satisfait les conditions de la proposition 9.3.2.

On dit que X est à *pentés finies* s'il est constructible et si X_{dR}^+ est un B_{dR}^+ -module libre.

Il revient donc au même de dire que X est à pentés finies et que $X \rightarrow X_{\text{dR}}$ est injective.

Par exemple, tout espace de Banach spectral étale est un espace de Banach-Colmez à pentés finies. De même, pour tous d, h , puisque $(E_{d,h})_{\text{dR}}^+ = (B_{\text{dR}}^+)^h$, $E_{d,h}$ est à pentés finies. L'espace de Banach-Colmez associé à un B_{dR}^+ -module de longueur finie est constructible mais n'est pas à pentés finies.

Proposition 9.3.4. — Soit X un espace de Banach-Colmez constructible. Il existe alors une filtration canonique et fonctorielle, scindée de façon non canonique,

$$X = F^0 X \supset F^+ X \supset F^\infty X,$$

où $F^0 X/F^+ X$ est étale, $F^+ X/F^\infty X$ est connexe et à pentes finies, et $F^\infty X$ est un B_{dR}^+ -module de longueur finie.

En outre, $F^+ X$ est le plus grand sous-espace de Banach-Colmez connexe de X , et $F^\infty X$ est le plus petit sous-espace de Banach-Colmez de $F^+ X$ tel que $F^+ X/F^\infty X$ soit à pentes finies.

Démonstration. — L'existence de $F^+ X$ est une conséquence de la proposition 7.3.3 ; on peut donc supposer X connexe.

Soit M la partie de torsion du B_{dR}^+ -module X_{dR}^+ ; alors $N = X_{\text{dR}}^+/M$ est un B_{dR}^+ -module libre, et l'extension $0 \rightarrow M \rightarrow X_{\text{dR}}^+ \rightarrow N \rightarrow 0$ est scindée de façon non canonique. Alors l'image de M dans X_{dR}^+ est incluse dans X et, d'après la proposition 9.3.7, la flèche $M \rightarrow X$ est analytique. On pose alors $F^\infty X = M$ et $Y = X/F^\infty X$. Puisque $Y_{\text{dR}}^+ = N$, on voit alors que Y est à pentes finies ; de plus, c'est par construction le plus grand quotient à pentes finies de X . Enfin, toute rétraction de $M \rightarrow X_{\text{dR}}^+$ fournit une rétraction de $F^\infty X \rightarrow F^+ X$. \triangleleft

Proposition 9.3.5. — Soit X un espace de Banach-Colmez constructible. Alors

$$\text{Ext}^1(X, \tilde{B}) = \varinjlim \text{Ext}^1(X, B_m(-m)) = 0.$$

Démonstration. — Soit $0 \rightarrow V \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0$ une présentation de X . On dispose alors de la suite exacte longue

$$0 \rightarrow (M)_{\text{dR}}^* \rightarrow X_{\text{dR}}^* \rightarrow (V)_{\text{dR}}^* \rightarrow \text{Ext}^1(M, \tilde{B}) \rightarrow \text{Ext}^1(X, \tilde{B}) \rightarrow \text{Ext}^1(V, \tilde{B}) ;$$

il suffit par conséquent de vérifier le résultat lorsque X est étale ou lorsque c'est un B_{dR}^+ -module de longueur finie.

Si X est étale, alors toute section \mathbb{Q}_p -linéaire continue d'une extension $0 \rightarrow B_m \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow 0$ est analytique, donc $\text{Ext}^1(X, B_m) = 0$ pour tout m . Enfin, le cas où X est un B_{dR}^+ -module de longueur finie est une conséquence de la proposition 9.2.11. \triangleleft

Proposition 9.3.6. — Le foncteur qui à un espace de Banach-Colmez constructible X associe le B_{dR}^+ -module X_{dR}^+ est exact et fidèle.

Démonstration. — C'est une conséquence directe de la proposition 9.3.5. \triangleleft

Proposition 9.3.7. — Soient X, Y deux espaces de Banach-Colmez constructibles. Alors $\text{Hom}(X, Y)$ s'identifie à l'ensemble des applications B_{dR}^+ -linéaires $f : X_{\text{dR}}^+ \rightarrow Y_{\text{dR}}^+$ telles que $f(X) \subset Y$.

Démonstration. — Soient f vérifiant les conditions de l'énoncé et $g : X \rightarrow X \times Y$ le graphe de f . Alors g s'étend en une application B_{dR}^+ -linéaire $g : X_{\text{dR}}^+ \rightarrow X_{\text{dR}}^+ \times Y_{\text{dR}}^+$; on peut

donc former le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathrm{dR}}^+ & \longrightarrow & X_{\mathrm{dR}}^+ \times Y_{\mathrm{dR}}^+ \\ \uparrow & & \uparrow \\ X & \longrightarrow & X \times Y \end{array}$$

Par construction, le produit fibré $X_{\mathrm{dR}}^+ \times_{(X_{\mathrm{dR}}^+ \times Y_{\mathrm{dR}}^+)} (X \times Y)$ est X . Pour tout m , notons $X_m = X_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{B_{\mathrm{dR}}^+} B_m$ et $Y_m = Y_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{B_{\mathrm{dR}}^+} Y_m$; ce sont des espaces de Banach-Colmez, et pour m assez grand, le produit fibré $X_m \times_{X_m \times Y_m} (X \times Y)$ s'identifie encore à X . Par conséquent, $g : X \rightarrow X \times Y$ est analytique. Il suffit de composer avec la première projection pour en déduire que f est analytique. \triangleleft

9.4. Morphismes entre espaces de Banach-Colmez élémentaires. — On rappelle que, pour tous entiers d, h premiers entre eux, on note $E_{d/h} = E_{d,h}$. En particulier, on notera $E_d = E_{d,1}$. D'après ce qui précède, $(E_{d,h})_{\mathrm{dR}}^+$ est un B_{dR}^+ -module libre de rang h , et si $i : E_{d,h} \rightarrow B_{\mathrm{dR}}^+$ désigne l'injection canonique, alors l'application d'enveloppe est donnée par $(i, i \circ \varphi, \dots, i \circ \varphi^{h-1})$.

Proposition 9.4.1. — Soient d, d', d'' quatre entiers positifs tels que $d = d' + d''$ et $h \geq 1$. Notons $E = E_{d,h}$, $E' = E_{d',h}$ et $E'' = E_{d'',h}$.

L'application

$$\psi : \begin{cases} E'' \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p[\varphi]/(\varphi^h - p^d) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{BC}_C}(E', E) \\ a \otimes \varphi^r & \longmapsto & [x \mapsto \varphi^r(a \cdot x)] \end{cases}.$$

est un isomorphisme de \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels.

Démonstration. — Posons $M = \mathbb{Q}_p[\varphi]/(\varphi^h - p^d)$. Remarquons qu'on n'a pas imposé que d', d'' soient strictement positifs. Le cas où $d' = 0$ est évident (car $E_{0,h} = \mathbb{Q}_{p^h}$ est étale), le cas où $d'' = 0$ ne l'est pas (on détermine alors l'algèbre des endomorphismes de $E_{d,h}$).

D'après la proposition 9.3.7, $\psi(a \otimes \varphi^r)$ est bien un morphisme d'espaces de Banach-Colmez entre E' et E pour tout $a \in E''$ et pour tout $r = 0, \dots, h-1$. De plus, puisque B_{dR}^+ est un anneau intègre, l'application ψ est injective.

Rappelons que $(E_{d,h})_{\mathrm{dR}}^+ = (B_{\mathrm{dR}}^+)^h$ et que le morphisme d'enveloppe est défini par $\iota(x) = (x, \varphi(x), \dots, \varphi^{h-1}(x))$. Alors pour tous $a \in E''$ et $r = 0, \dots, h-1$, $\psi(a \otimes \varphi^r)_{\mathrm{dR}}^+$ est l'endomorphisme de $(B_{\mathrm{dR}}^+)^h$ qui à (x_0, \dots, x_{h-1}) associe $(\varphi^r(a)x_r, \dots, \varphi^{h-1}(a)x_{h-1}, p^d a x_0, \dots, p^d \varphi^{r-1}(a)x_{r-1})$. On voit ainsi que ψ est injective.

Notons $F = \mathrm{Hom}_{\mathbf{BC}_C}(E', E)$. Alors F est un sous- \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de $\mathrm{End}((B_{\mathrm{dR}}^+)^h)$. Soit $\mathrm{Fil}^{d''} F$ l'ensemble des éléments $f \in F$ tels que $f_{\mathrm{dR}}^+((B_{\mathrm{dR}}^+)^h) \subset (\mathrm{Fil}^{d''} B_{\mathrm{dR}}^+)^h$. Alors pour tout élément f de $\mathrm{Fil}^{d''} F$ et pour tout $x \in \mathrm{Fil}^{d'} E'$, $f(x)$ appartient à $\mathrm{Fil}^d E$; or, $\mathrm{Fil}^{d'} E'$ et $\mathrm{Fil}^d E$ sont des \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels de dimension h , ce qui entraîne que $\mathrm{Fil}^{d''} F$ est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension au plus h^2 .

Par conséquent, on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & (\mathrm{Fil}^{d''} E'') \otimes M & \longrightarrow & (E'') \otimes M & \longrightarrow & (B_{d''}) \otimes M \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^{d''} F & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F / \mathrm{Fil}^{d''} F \longrightarrow 0
\end{array}$$

La première ligne est exacte par construction de E'' et ψ est injective ; de plus, $F / \mathrm{Fil}^{d''} F$ est par construction un sous- \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de $(B_{\mathrm{dR}}^+)^h / (\mathrm{Fil}^{d''} B_{\mathrm{dR}}^+)^h = (B_d)^h$. Par conséquent, ψ est bijective, et on peut donc écrire $F = (E'')^h = E'' \otimes_{\mathbb{Q}_p} M$. \triangleleft

Proposition 9.4.2. — *Pour tous entiers d, h premiers entre eux, l'algèbre d'endomorphismes de l'espace de Banach-Colmez $E_{d,h}$ est le corps gauche $L_{d,h}$ d'invariant d/h sur \mathbb{Q}_p .*

Démonstration. — Par construction, il existe un morphisme d'algèbres $L_{d,h} \rightarrow \mathrm{End}(E_{d,h})$. Il suffit d'appliquer la proposition 9.4.1 avec $d'' = 0$ pour voir que ce morphisme est surjectif. \triangleleft

On en déduit immédiatement que pour d, h premiers entre eux et $n \geq 1$, l'algèbre d'endomorphismes de $E_{nd,nh}$ est une algèbre de matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $L_{d,h}$.

Proposition 9.4.3. — *Si $d' < d$ alors $\mathrm{Hom}_{\mathbf{BC}_C}(E, E') = 0$.*

Démonstration. — En effet, un tel morphisme est de la forme $x \mapsto \sum c_i \varphi^i(x)$ pour des éléments c_i de B_{dR}^+ ; puisque l'image de E dans $(B_{\mathrm{dR}}^+)^h$ engendre $(B_{\mathrm{dR}}^+)^h$ comme B_{dR}^+ -module, les c_i doivent vérifier $c_i E \subset E'$. En particulier, puisque $\mathrm{Fil}^d E \neq 0$ et $\mathrm{Fil}^d E' = 0$, la multiplication par c_i n'est pas injective. Puisque B_{dR}^+ est intègre, ceci implique que $c_i = 0$. \triangleleft

Proposition 9.4.4. — *Avec les notations de la proposition 9.4.1 (et sous l'hypothèse $d' \leq d$), $\mathrm{Ext}_{\mathbf{BC}_C}^1(E', E) = 0$.*

Démonstration. — Notons $M = B_d$, $M' = B_{d'}$; il existe alors un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel V de dimension h et des présentations

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow V \longrightarrow E' \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Puisque la catégorie \mathbf{BC}_C est abélienne, on dispose des suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M', E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(E', E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V, E) \longrightarrow \\
& & \mathrm{Ext}^1(M', E) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(E', E) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(V, E), \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M', V) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M', E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M', M) \longrightarrow \\
& & \mathrm{Ext}^1(M', V) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(M', E) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(M', M).
\end{array}$$

Or puisque $d \leq d'$, nous savons que $\mathrm{Hom}(M', E) = 0$, $\mathrm{Hom}(M', M) = M'$, $\mathrm{Ext}^1(M', V) = \mathrm{Hom}(M', V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}) = V \otimes_{\mathbb{Q}_p} (M')^*$ et $\mathrm{Ext}^1(M', M) = M'$, donc $\mathrm{Ext}^1(M', E)$ est un B_{dR}^+ -module de longueur au plus $d'h$.

De plus, $\mathrm{Hom}(M', E) = 0$, $\mathrm{Hom}(E', E)$ est un espace de Banach-Colmez de dimension $(d - d')h$ et de hauteur h^2 d'après la proposition 9.4.1 et $\mathrm{Hom}(V, E) = V^\vee \otimes E$ est un espace de Banach-Colmez de dimension dh et de hauteur h^2 , donc $\mathrm{Ext}^1(E', E) = 0$. \triangleleft

10. Filtration de Harder-Narasimhan

10.1. Catégories de Harder-Narasimhan. — Rappelons d'abord la définition d'une catégorie exacte au sens de Quillen ([17, 1.0.2]).

Définition 10.1.1. — Une catégorie additive \mathcal{C} est dite *exacte* si elle est munie d'une classe \mathcal{E} de suites de morphismes $0 \rightarrow E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E'' \rightarrow 0$ (dites *suites exactes* de \mathcal{C}); les morphismes u et v apparaissant dans ces suites sont dits respectivement *monomorphismes stricts* et *épimorphismes stricts* telle que :

- (CE1) Toute suite isomorphe à une suite de \mathcal{E} appartient à \mathcal{E} .
- (CE2) Soient E', E'' deux objets de \mathcal{E} , alors la suite $0 \rightarrow E' \rightarrow E' \oplus E'' \rightarrow E'' \rightarrow 0$ est une suite de \mathcal{E} .
- (CE3) Pour toute suite $0 \rightarrow E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E'' \rightarrow 0$ de \mathcal{E} , v est un conoyau de u et u est un conoyau de v .
- (CE4) La classe des monomorphismes stricts et celle des épimorphismes stricts sont stables par composition.
- (CE5) Soient $u : E' \rightarrow E$ un monomorphisme strict et $f : E' \rightarrow F$ une flèche de \mathcal{C} , alors la somme amalgamée $E +_{E'} F$ existe dans \mathcal{C} , et la flèche canonique $u +_{E'} f : F \rightarrow E +_{E'} F$ est un monomorphisme strict. De même, soient $v : E \rightarrow E''$ un épimorphisme strict et $f : F \rightarrow E''$ une flèche de \mathcal{C} , alors le produit fibré $E \times_{E''} F$ existe dans \mathcal{C} , et la flèche canonique $v \times_{E''} f : E \times_{E''} F \rightarrow F$ est un épimorphisme strict.
- (CE6) Soit $v : E \rightarrow E''$ une flèche de \mathcal{C} ayant un noyau; s'il existe une flèche $f : F \rightarrow E$ telle que $v \circ f$ soit un épimorphisme strict, alors v est un épimorphisme strict. De même, soit $u : E' \rightarrow E$ une flèche de \mathcal{C} ayant un conoyau; s'il existe une flèche $f : E \rightarrow F$ telle que $f \circ u$ soit un monomorphisme strict, alors u est un monomorphisme strict.

Un *foncteur exact* entre deux catégories exactes est un foncteur qui préserve les suites exactes.

En particulier, une catégorie abélienne, ou encore la catégorie des modules libres de type fini sur un anneau fixé, sont de façon évidente des catégories exactes. Il est également clair que la catégorie opposée à une catégorie exacte est encore exacte.

Dans toute cette partie, \mathcal{C} est une catégorie exacte. Par extension de la définition des monomorphismes et épimorphismes stricts, on appellera *sous-objet strict* un sous-objet dont le monomorphisme associé est strict; on note $E \preceq F$ pour dire que E est un sous-objet strict de F , et $E \prec F$ pour dire que E est un sous-objet strict de F distinct de F .

Définition 10.1.2. — On dit que \mathcal{C} est une *catégorie de Harder-Narasimhan* si elle est munie d'un foncteur exact η vers une catégorie abélienne \mathcal{C}_η et de la donnée de deux fonctions d et r , définies sur \mathcal{C} et \mathcal{C}_η respectivement et à valeurs dans \mathbb{N} , additives pour les suites exactes courtes, telles que :

- (HN1) pour tout objet E de \mathcal{C} , $r(\eta(E)) = 0$ si et seulement si $E = 0$;
- (HN2) si $f : E \rightarrow F$ est un morphisme de \mathcal{C} tel que $\eta(f)$ soit un isomorphisme, alors $d(F) \geq d(E)$, avec égalité si et seulement si f est un isomorphisme;

- (HN3) pour tout objet E de \mathcal{C} , le foncteur η réalise une injection entre les sous-objets stricts de E et les sous-objets de $\eta(E)$;
- (HN4) si $f : F \rightarrow G$ est la composée d'un monomorphisme strict $F \rightarrow E$ et d'un épimorphisme strict $E \rightarrow G$, alors il existe une décomposition $f = v \circ g \circ u$ où u est un épimorphisme strict, v un monomorphisme strict et $\eta(g)$ un isomorphisme.

On appelle d et r respectivement le *degré* et le *rang*.

Un *foncteur de Harder-Narasimhan* entre deux catégories de Harder-Narasimhan \mathcal{C} et \mathcal{C}' est la donnée de deux foncteurs $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, $F_\eta : \mathcal{C}_\eta \rightarrow \mathcal{C}'_\eta$ tels que F conserve le degré, F_η conserve le rang, et $F_\eta \circ \eta = \eta' \circ F$.

Proposition 10.1.3. — *Pour que l'axiome (HN4) soit vérifié, il suffit que \mathcal{C} admette des produits fibrés de monomorphismes stricts, compatibles à ceux de \mathcal{C}_η , c'est-à-dire que si F', F'' sont deux sous-objets stricts de E , alors le produit fibré $F = F' \times_E F''$ existe dans E , $F \rightarrow E$ est un monomorphisme strict et $\eta(F) = \eta(F') \times_{\eta(E)} \eta(F'')$.*

Démonstration. — Soit $f : F \rightarrow G$ la composée d'un monomorphisme strict $F \rightarrow E$ et d'un épimorphisme strict $E \rightarrow G$, et notons H le noyau de $E \rightarrow G$. Alors le produit fibré $F \times_E H$ existe dans \mathcal{C} , et $F \times_E H \rightarrow F$ est un monomorphisme strict, donc $F' = F/(F \times_E H)$ existe dans \mathcal{C} . Puisque $F \rightarrow E$ est un monomorphisme strict, on peut former la somme amalgamée $G' = F' +_F E$. Le morphisme $f : F \rightarrow G$ se décompose alors en $F \rightarrow F' \rightarrow G' \rightarrow G$. Par construction, $\eta(F')$ et $\eta(G')$ sont respectivement la coimage et l'image de $\eta(f)$ dans la catégorie abélienne \mathcal{C}_η , et sont donc isomorphes dans cette catégorie. \triangleleft

Pour tout objet E de \mathcal{C} , on note encore $r(E) = r(\eta(E))$. Notons que l'axiome (HN3) implique que si $E \preceq F$, alors $r(E) \leq r(F)$, avec égalité si et seulement si $E = F$. En particulier, si $r(E) = 0$, alors $E = 0$. On définit donc, pour tout objet non nul E de \mathcal{C} , $\mu(E) = d(E)/r(E)$. Remarquons que, pour tout objet E , l'ensemble des $\mu(F)$ pour tous les sous-objets stricts F de E est un ensemble fini de rationnels.

Lemme 10.1.4. — *Soit $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte d'objets non nuls de \mathcal{C} . Alors les trois nombres rationnels $\mu(E')$, $\mu(E)$, $\mu(E'')$ forment une suite constante ou strictement monotone.*

Démonstration. — Notons d', d, d'' et r', r, r'' les degrés et rangs respectifs. Alors, puisque $d = d' + d''$ et $r = r' + r''$, $\mu(E) = \frac{r'}{r} \mu(E') + \frac{r''}{r} \mu(E'')$, donc $\mu(E)$ est barycentre à coefficients strictement positifs de $\mu(E')$ et $\mu(E'')$. \triangleleft

Définition 10.1.5. — Un objet E de la catégorie \mathcal{C} est dit *stable* si, pour tout $F \prec E$ non nul, $\mu(F) < \mu(E)$; il est dit *semi-stable* si, sous les mêmes conditions sur F , $\mu(F) \leq \mu(E)$.

D'après le lemme 10.1.4, la stabilité de E équivaut encore à : pour tout $F \prec E$ non nul, $\mu(F) < \mu(E/F)$.

Lemme 10.1.6. — *Soit E un objet de \mathcal{C} . Il existe un $F \preceq E$ stable et tel que $\mu(F) \geq \mu(E)$.*

Démonstration. — Notons S la famille des $A \preceq E$ non nuls et tels que $\mu(A) \geq \mu(E)$; en particulier, S contient E , donc n'est pas vide. Le rang des objets de S est un entier compris entre 1 et $r(E)$; il existe donc un objet F de S de rang minimal. Supposons que F ne soit pas stable : il existe alors un $G \preceq F$ tel que $\mu(G) \geq \mu(F)$, et donc $\mu(G) \geq \mu(E)$; par conséquent, G appartient à S , et $r(G) < r(F)$, ce qui est absurde. \triangleleft

Lemme 10.1.7. — Soient E un objet de \mathcal{C} et $F \preceq E$ semi-stable; alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout $F' \prec F \preceq E$, $\mu(F') > \mu(F)$;
- (ii) pour tout $0 \neq G \preceq E/F$, $\mu(G) < \mu(F)$;
- (iii) pour tout $0 \neq G \preceq E/F$ stable, $\mu(G) < \mu(F)$.

Si ces trois conditions sont vérifiées, on dit que F est costable dans E .

Démonstration. — Il est clair d'après le lemme 10.1.4 que (i) et (ii) sont équivalentes, et que (ii) implique (iii). Enfin, le lemme 10.1.6 montre que (iii) implique (ii). \triangleleft

Lemme 10.1.8. — Soient F_1, F_2 deux sous-objets stricts de E tels que F_1 soit semi-stable et F_2 soit costable dans E . Si F_1 n'est pas un sous-objet strict de F_2 , alors $\mu(F_2) > \mu(F_1)$.

Démonstration. — Supposons que F_1 ne soit pas un sous-objet strict de F_2 . Alors le morphisme canonique $f : F_1 \rightarrow E/F_2$ est non nul. Par l'axiome (HN4), il existe une factorisation $f = v \circ g \circ u$ où $u : F_1 \rightarrow F'_1$ est un épimorphisme strict, $v : F'_2 \rightarrow (E/F_2)$ un monomorphisme strict et $\eta(g)$ est un isomorphisme.

Par conséquent, d'après l'axiome (HN2), $d(F'_1) \leq d(F'_2)$, et donc puisque $r(F'_1) = r(F'_2)$, $\mu(F'_1) \leq \mu(F'_2)$. En outre, F_1 étant semi-stable, $\mu(F_1) \leq \mu(F'_1)$; de plus, F_2 étant costable dans E avec $F'_2 \preceq E/F_2$, $\mu(F'_2) < \mu(F_2)$. Par conséquent, $\mu(F_1) \leq \mu(F'_1) \leq \mu(F'_2) < \mu(F_2)$. \triangleleft

Lemme 10.1.9. — Si $F_1, F_2 \prec E$ sont tous deux semi-stables et costables dans E , alors $F_1 = F_2$.

Démonstration. — Supposons que $\mu(F_1)$ et $\mu(F_2)$ sont différents, par exemple $\mu(F_1) > \mu(F_2)$. Par le lemme 10.1.8, on a alors $F_1 \preceq F_2$. Puisque F_2 est semi-stable, ceci entraîne que $\mu(F_1) \leq \mu(F_2)$, ce qui est absurde. Par conséquent, on a bien $\mu(F_1) = \mu(F_2)$. Il suffit alors d'appliquer deux fois le lemme 10.1.8 pour voir que $F_1 = F_2$. \triangleleft

Proposition 10.1.10. — Tout objet E de \mathcal{C} contient un unique sous-objet strict F qui est à la fois semi-stable et costable.

Démonstration. — L'unicité étant assurée par le lemme 10.1.9, il suffit de montrer qu'un tel sous-objet strict existe. Soit F un sous-objet strict de E , maximal pour l'ordre lexicographique sur $(\mu(F), r(F))$; un tel objet existe car d et r ne prennent qu'un nombre fini de valeurs sur les sous-objets stricts de E . Montrons que F est semi-stable et costable.

Si $G \preceq F$, alors $\mu(G) \leq \mu(F)$; donc F est semi-stable.

Si $F \prec G$, alors $r(G) > r(F)$; donc par construction de F , nécessairement $\mu(G) < \mu(F)$. Donc F est costable. \triangleleft

Lemme 10.1.11. — Soit $0 = F_0 \prec F_1 \prec \dots \prec F_n = E$ une filtration croissante de E par des sous-objets stricts, telle que les quotients F_i/F_{i-1} soient semi-stables. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout i , F_i/F_{i-1} est costable dans E/F_{i-1} ;
- (ii) la suite des $\mu(F_i/F_{i-1})$ est strictement décroissante.

Une filtration satisfaisant les deux conditions est dite *filtration de Harder-Narasimhan*.

Démonstration. — Supposons (i) vérifiée. Alors, F_i/F_{i-1} étant costable dans E/F_{i-1} , pour tout $G \preccurlyeq (E/F_{i-1})/(F_i/F_{i-1}) = E/F_i$, $\mu(G) < \mu(F_i/F_{i-1})$; en particulier, $\mu(F_{i+1}/F_i) < \mu(F_i/F_{i-1})$. Par conséquent, la filtration (F_i) vérifie (ii).

Réciproquement, supposons que (F_i) vérifie (ii). Soit $G \preccurlyeq (E/F_{n-2})/(F_{n-1}/F_{n-2}) = F_{n-1}/F_{n-2}$; alors, F_{n-1}/F_{n-2} étant semi-stable, $\mu(G) \leq \mu(E/F_{n-1})$, et d'après (ii), $\mu(E/F_{n-1}) < \mu(F_{n-1}/F_{n-2})$. Par conséquent, $\mu(G) < \mu(F_{n-1}/F_{n-2})$, et donc F_{n-1}/F_{n-2} est semi-stable.

Montrons par récurrence descendante sur i que, pour tout i , F_i/F_{i-1} est stable dans E/F_{i-1} . Il suffit pour cela de montrer que, pour tout $G \preccurlyeq (E/F_{i-1})/(F_i/F_{i-1}) = E/F_i$ stable, $\mu(G) < \mu(E/F_{i-1})$.

Si $G \preccurlyeq F_{i+1}/F_i$, alors, ce dernier étant semi-stable, $\mu(G) \leq \mu(F_{i+1}/F_i) < \mu(F_i/F_{i-1})$. Sinon, par hypothèse de récurrence, F_{i+1}/F_i est costable dans E/F_i ; puisque G n'est pas inclus dans F_{i+1}/F_i , d'après le lemme 10.1.8, $\mu(G) < \mu(F_{i+1}/F_i)$, et donc $\mu(G) < \mu(F_i/F_{i-1})$. \triangleleft

Proposition 10.1.12. — [13, Prop. 1.3.9] *Tout objet E de \mathcal{C} admet une unique filtration de Harder-Narasimhan.*

Démonstration. — L'existence est une simple application par récurrence de la proposition 10.1.10. Par ailleurs, si (F_i) est une filtration de E satisfaisant les hypothèses, alors $(F_i/F_1)_{i \geq 2}$ est une filtration de E/F_1 satisfaisant les hypothèses ; on peut donc raisonner par induction sur le rang de E pour montrer l'unicité. \triangleleft

10.2. Catégories d'applications linéaires. — On rappelle (9.2.4) que \mathbf{L}_C est la catégorie des triplets (M, V, f) où M est un B_{dR}^+ -module de longueur finie, V est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie et f est une application B_{dR}^+ -linéaire $M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$.

En se restreignant aux objets $M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ tels que $tM = 0$, on obtient une sous-catégorie pleine \mathbf{L}_C^+ de \mathbf{L}_C , dont les objets sont les applications \mathbb{Q}_p -linéaires $W \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(-1)$, où W est à présent un C -espace vectoriel de dimension finie. Tout ce qui est dit ci-dessous de la catégorie \mathbf{L}_C s'applique également, de manière évidente, à la sous-catégorie pleine \mathbf{L}_C^+ .

Proposition 10.2.1. — *La catégorie \mathbf{L}_C est une catégorie abélienne (et donc exacte).*

De plus, la sous-catégorie pleine \mathbf{Lf}_C des objets (M, V, f) de \mathbf{L}_C tels que f soit injective, munie des suites qui sont exactes dans \mathbf{L}_C , est encore une catégorie exacte.

Démonstration. — Puisque la catégorie des B_{dR}^+ -modules de longueur finie et celle des \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels de dimension finie sont abéliennes, tout monomorphisme et tout épimorphisme de \mathbf{L}_C sont stricts. Par conséquent, la catégorie \mathbf{L}_C est exacte.

Un monomorphisme $(m, v) : (f' : M' \rightarrow V' \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}) \rightarrow (f : M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B})$ de \mathbf{L}_C est strict dans \mathbf{L}_C si et seulement si son conoyau est un objet de \mathbf{L}_C , c'est-à-dire si $\text{Coker } m \rightarrow \text{Coker}(v \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B})$ est injective. De plus, tout noyau dans \mathbf{L}_C d'un épimorphisme de \mathbf{L}_C est encore un objet de \mathbf{L}_C ; par conséquent, tout épimorphisme de \mathbf{L}_C est strict.

Puisque \mathbf{L}_C est une sous-catégorie pleine de la catégorie abélienne \mathbf{L}_C , elle vérifie automatiquement les axiomes (CE1) à (CE3) et (CE6).

Soient $f \xrightarrow{u} f' \xrightarrow{v} f''$ deux monomorphismes stricts composables de \mathbf{L}_C . Alors $v \circ u$ a un conoyau dans \mathbf{L}_C , qui est une extension de $\text{Coker } u$ par $\text{Coker } v$; par conséquent, \mathbf{L}_C vérifie la condition (CE4).

Soit $f' \xleftarrow{u} f \xrightarrow{w} g$ un diagramme de \mathbf{L}_C , où u est un monomorphisme strict. Alors la somme amalgamée $g' = g +_f f'$ existe dans \mathbf{L}_C , et est naturellement munie d'une flèche $g \xrightarrow{v} g'$. De plus, cette flèche est un monomorphisme, et elle a un conoyau, qui est isomorphe à $\text{Coker } u$; par conséquent, c'est encore un monomorphisme strict de \mathbf{L}_C . On voit ainsi que \mathbf{L}_C vérifie (CE5). \triangleleft

Proposition 10.2.2. — *Avec les notations de la proposition 10.2.1, la catégorie \mathbf{L}_C , munie du foncteur fibre η défini par $\eta(M, V, f) = V$, du rang $r(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ et du degré $d(M, V, f) = \text{lg}_{B_{\text{dR}}^+} M$, est une catégorie de Harder–Narasimhan.*

Démonstration. — Pour tout objet (M, V, f) de \mathbf{L}_C , si $r(V) = 0$ alors $V = 0$. Puisque $f : M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ est injectif, ceci entraîne que $M = 0$. Par conséquent, \mathbf{L}_C vérifie l'axiome (HN1).

Soit $u = (m, v) : (M, V, f) \rightarrow (M', V, f)$ tel que $\eta(u)$ soit un isomorphisme. Se donner un tel u revient à se donner un diagramme commutatif d'applications B_{dR}^+ -linéaires

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{m} & M' \\ \downarrow f & \swarrow f' & \\ V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B} & & \end{array}$$

Puisque f est injective, M est un sous- B_{dR}^+ -module de M' , et donc $d(f) \leq d(f')$; de surcroît, s'il y a égalité, alors m est un isomorphisme, et donc $u : f \rightarrow f'$ est un isomorphisme. Par conséquent, l'axiome (HN2) est vérifié.

Soit (M, V, f) un objet de \mathbf{L}_C . Alors un sous-objets (M', V', f') est strict si et seulement si le quotient (M'', V'', f'') est un objet de \mathbf{L}_C , c'est-à-dire si $M'' \rightarrow V'' \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ est injective. Ceci implique que M'' est l'image de M dans $V'' \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$. Par conséquent, (M', V', f) est uniquement déterminé par le sous-objet V' de V , et donc l'axiome (HN3) est vérifié.

Enfin, soient (N', W', g') et (N'', W'', g'') deux sous-objets d'un objet (M, V, f) de \mathbf{L}_C , et soient $W = W' \cap W''$ et $N = M \cap (W \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B})$. Alors $g : N \rightarrow W \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ est un objet

de \mathbf{Lf}_C et c'est le produit fibré $g' \times_f g''$; de plus, $\eta(g) = W = \eta(g') \times_{\eta(f)} \eta(g'')$. Par conséquent, (HN4) est vérifié. \triangleleft

Lemme 10.2.3. — Soit $M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ un objet de \mathbf{Lf}_C ; on suppose que M n'est pas un B_{dR}^+ -module monogène. Soit également N un quotient non trivial de M . Il existe alors une application B_{dR}^+ -linéaire $\alpha : M \rightarrow \tilde{B}$ telle que pour tout quotient strict V'' de V , $M = \text{Ker}(\alpha) + \text{Ker}(M \rightarrow V'' \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B})$.

Démonstration. — Soit t un générateur du noyau de $\theta : B_{\text{dR}}^+ \rightarrow C$ et soit n le plus petit entier tel que $t^n M = 0$. Alors l'application $M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ donne un plongement de M dans $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_n$. Le choix de t permet d'identifier les B_n -modules de longueur finie M et B_n à des C -espaces vectoriels de dimension finie munis d'un endomorphisme nilpotent t . De plus, le choix d'une base de V permet d'identifier $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_n$ à $(C[t]/t^n)^h$. Soit (e_1, \dots, e_r) une famille de $C[t]$ -générateurs de M et soit A la matrice de $M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_n$ dans ces bases. Notons enfin L l'extension de \mathbb{Q}_p engendrée par les coefficients des matrices $A, tA, \dots, t^{n-1}A$. C'est une extension finie de \mathbb{Q}_p et il existe donc une application $C[t]$ -linéaire $\alpha : N \rightarrow B_n$ de coordonnées $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ dans la base (e_1, \dots, e_r) dont les images dans C/L sont \mathbb{Q}_p -linéairement indépendantes.

Alors pour $x \in M$ et pour toute application \mathbb{Q}_p -linéaire surjective $v : V \rightarrow V''$, le système $\{\alpha(x) = 0, (v \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_n)(x) = 0\}$ est non dégénéré par construction. Il s'ensuit que l'on peut toujours écrire $M = \text{Ker} \alpha + \text{Ker}(M \rightarrow V'' \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_n)$. \triangleleft

Proposition 10.2.4. — Soit $M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ un objet stable de \mathbf{Lf}_C . Il existe alors une application B_{dR}^+ -linéaire $\alpha : M \rightarrow \tilde{B}$ telle que $(\text{Ker} \alpha) \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ soit nul, soit un objet stable de \mathbf{Lf}_C .

Démonstration. — Si M est monogène, il suffit de choisir α injective. Par conséquent, on peut se limiter au cas où M n'est pas monogène. D'après le lemme 10.2.3, il existe alors $\alpha : M \rightarrow \tilde{B}$ tel que, pour tout quotient $V \rightarrow V''$ distinct de V , $M = \text{Ker}(\alpha) + \text{Ker}(M \rightarrow V'' \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B})$.

Soient $M'' = \alpha(M)$ et $M' = \text{Ker}(\alpha)$; notons enore $h = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ et d, d', d'' les longueurs respectives de M, M' et M'' . Enfin, pour tout quotient V'' de V , on notera h'' la dimension de V'' et N, N' les images respectives de M, M' dans $V'' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$.

Puisque $M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ est stable, pour tout V'' ,

$$\frac{\text{lg}_{B_{\text{dR}}^+} N}{h''} > \frac{d}{h}.$$

De plus, puisque $0 \rightarrow N' \rightarrow N + M'' \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est exacte, on voit que $\text{lg}_{B_{\text{dR}}^+} N' = \text{lg}_{B_{\text{dR}}^+} N - \text{lg}_{B_{\text{dR}}^+} (N +_M M'')$. Or, par construction de α , on sait que $N +_M M'' = 0$, donc $\text{lg}_{B_{\text{dR}}^+} N' = \text{lg}_{B_{\text{dR}}^+} N$. Finalement, on en déduit que, pour tout quotient strict $V \rightarrow V''$,

$$\frac{\text{lg}_{B_{\text{dR}}^+} N'}{h''} > \frac{d}{h},$$

ce qui signifie que $M' \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ est stable. \triangleleft

10.3. Espaces de Banach-Colmez à pentes finies. — Rappelons qu'un espace de Banach-Colmez X est dit à pentes finies (9.3.3) s'il est constructible et si X_{dR}^+ est un B_{dR}^+ -module libre de type fini. Dans ce cas, l'application $X \rightarrow X_{\mathrm{dR}}$ est injective.

Proposition 10.3.1. — Soient X un espace de Banach-Colmez à pentes finies et Y un sous-espace de Banach-Colmez de X . Alors :

- Y est à pentes finies ;
- soit $\bar{Y} = Y_{\mathrm{dR}} \cap X$, alors \bar{Y} est un sous-espace de Banach-Colmez à pentes finies de X , et le quotient X/\bar{Y} est à pentes finies ;
- si X/Y est à pentes finies, alors $\bar{Y} = Y$.

Démonstration. — (i) Puisque X est à pentes finies, $X \subset X_{\mathrm{dR}}$, et donc $Y \subset X_{\mathrm{dR}}$, donc Y est à pentes finies.

(ii) Puisque X et \bar{Y} sont à pentes finies, la flèche naturelle $X/\bar{Y} \rightarrow X_{\mathrm{dR}}/\bar{Y}_{\mathrm{dR}}$ est injective, donc X/\bar{Y} est à pentes finies.

(iii) Supposons que X/Y soit à pentes finies ; alors $X/Y \subset X_{\mathrm{dR}}/Y_{\mathrm{dR}}$, or cette flèche se factorise par X/\bar{Y} , donc $X/Y \rightarrow X/\bar{Y}$ est injective. Par conséquent, $Y = \bar{Y}$. \triangleleft

Théorème 10.3.2. — La catégorie des espaces de Banach-Colmez à pentes finies, munie du foncteur η défini par $\eta(X) = X_{\mathrm{dR}}$, de la fonction rang égale à la dimension du B_{dR} -espace vectoriel X_{dR} (et donc à la hauteur de X), et de la fonction degré égale à la dimension de X , est une catégorie de Harder-Narasimhan.

Démonstration. — Soit \mathcal{C} la catégorie des espaces de Banach-Colmez à pentes finies. Puisque \mathcal{C} est la sous-catégorie pleine de la catégorie abélienne des espaces de Banach-Colmez dont les objets X sont tels que X_{dR}^+ soit un B_{dR}^+ -module libre de type fini, un épimorphisme (ou un monomorphisme) f de \mathcal{C} est strict si et seulement s'il est strict dans la catégorie des espaces de Banach-Colmez et si f_{dR} est strict dans la catégorie des B_{dR} -espaces vectoriels de dimension finie. Puisque ces deux catégories sont exactes, on en déduit que \mathcal{C} est exacte.

Puisque, pour tout objet X de \mathcal{C} , X_{dR}^+ est un B_{dR}^+ -module libre, la catégorie \mathcal{C} vérifie l'axiome (HN1).

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de \mathcal{C} tel que f_{dR} soit un isomorphisme ; ceci signifie que l'on a l'inclusion $X \subset Y \subset X_{\mathrm{dR}} = Y_{\mathrm{dR}}$, autrement dit X est un sous-objet de Y . Par conséquent, puisque $\dim(Y) = \dim(X) + \dim(Y/X)$, l'axiome (HN2) est vérifié. De même, si $X, X' \subset Y$ et si $X_{\mathrm{dR}} = X'_{\mathrm{dR}}$, alors il est clair que $X = X'$, et donc (HN3) est vérifié.

Enfin, soient Y', Y'' deux sous-objets stricts de X dans \mathcal{C} . Alors l'espace de Banach-Colmez $Y = Y' \times_X Y''$ existe, et de plus $Y_{\mathrm{dR}}^+ = (Y')_{\mathrm{dR}}^+ \times_{X_{\mathrm{dR}}^+} (Y'')_{\mathrm{dR}}^+$; par conséquent, Y_{dR}^+ est un B_{dR}^+ -module libre, donc Y est un objet de \mathcal{C} . De plus, $\bar{Y} = Y_{\mathrm{dR}} \cap X = \bar{Y}' \cap \bar{Y}''$; puisque Y' et Y'' sont stricts, on a $\bar{Y}' = Y'$ et $\bar{Y}'' = Y''$, donc $\bar{Y} = Y$. Par conséquent, Y est un sous-objet strict de X . On déduit alors de la proposition 10.1.3 que la catégorie \mathcal{C} vérifie (HN4). \triangleleft

10.4. Objets stables. — Dans tout ce qui suit, d, h sont deux entiers strictement positifs. On note $E = E_{d,h}$, E_{dR}^+ la B_{dR}^+ -enveloppe de E , et $i : E \rightarrow B_{\text{dR}}^+$, $\iota : E \rightarrow E_{\text{dR}}^+$ les morphismes canoniques.

Soit $f : V \rightarrow M$ un objet de \mathbf{L}_C , de rang h et de degré d .

Proposition 10.4.1. — Soient V un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension h , M un B_{dR}^+ -module de longueur $d \leq h$, et $f : V \rightarrow M$ une application \mathbb{Q}_p -linéaire injective et dont l'image engendre M comme B_{dR}^+ -module.

Alors il existe un sous- B_{dR}^+ -module non trivial X de M tel que $E_{\text{dR}}^+ \otimes X \subset (\iota \otimes f)(E \otimes V)$.

Démonstration. — Il suffit de le démontrer pour $M = B_m$ avec $m \leq d$; quitte à plonger B_m dans B_d , on peut donc supposer que $M = B_d$. Pour $r = 0, \dots, h$, notons alors $F_r = \text{Ker}(E \otimes V \xrightarrow{\iota \otimes f} E_{\text{dR}}^+ \otimes B_d \rightarrow E_{\text{dR}}^+ \otimes B_r)$; il suffit de montrer que $\iota \otimes f : F_{d-1} \rightarrow C(d-1)^h$ est surjective.

Montrons par récurrence sur r qu'il existe un morphisme analytique injectif $u_r : E_{d-r,h} \otimes V \rightarrow E_{d,h} \otimes V$ et une application \mathbb{Q}_p -linéaire injective $f_r : V \rightarrow B_{d-r}$, dont l'image engendre B_{d-r} comme B_{dR}^+ -module, tels que le carré

$$\begin{array}{ccc} E_{d-r,h} \otimes V & \xrightarrow{\iota \otimes f_r} & B_{d-1}^h \\ \downarrow u_r & & \downarrow \\ E_{d,h} \otimes V & \xrightarrow{\iota \otimes f} & B_d^h \end{array}$$

soit commutatif.

Soit (e_1, \dots, e_d) une base de V ; alors f est donnée par les $\lambda_i = f(e_i) \in B_d$. Une application linéaire $u : B_{d-1}^h \rightarrow B_d^h$ est de la forme $u(x_1, \dots, x_h) = (y_1, \dots, y_h)$ avec $y_i = \sum u_{i,j,s} \varphi^s(x_j)$ pour des coefficients $u_{i,j,s} \in E_{1,h}$. Dire qu'il existe $f : V \rightarrow B_{d-1}$ faisant commuter le diagramme signifie que la flèche composée $E_{d-1,h}^h \xrightarrow{u} E_{d,h}^h \xrightarrow{\iota \otimes f} B_d^h \xrightarrow{\theta} C^h$ est nulle. Il suffit pour cela que, pour tous j, s, r ,

$$\sum_{i=1}^h \theta(\lambda_i) \theta \varphi^s(u_{i,j,r}) = 0 ;$$

d'après la proposition 6.2.3, ceci est possible avec des $(u_{i,j,r})_{j=1,\dots,h}$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q}_p et donc une application $u : E_{d-1,h}^h \rightarrow E_d^h$ injective.

On voit ainsi par récurrence qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_{1,h} \otimes V & \xrightarrow{\iota \otimes f_{h-1}} & C(d-1)^h \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{d,h} \otimes V & \xrightarrow{\iota \otimes f} & B_d^h \end{array}$$

où $f_{h-1} : V \rightarrow C$ est injective. D'après la proposition 6.2.3, on en déduit que $\iota \otimes f_{h-1}$ est surjective et donc que l'image de f contient $C(d-1)^h$. \triangleleft

Proposition 10.4.2. — Soit $f : M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ un objet de \mathbf{L}_C de rang h et degré d . Notons $\iota : E_{d,h} \rightarrow (E_{d,h})_{\mathrm{dR}}^+$ l'application d'enveloppe.

Si f est stable, alors l'application

$${}^t f \otimes \iota : \begin{cases} \mathrm{Hom}(V, E_{d,h}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M, (E_{d,h})_{\mathrm{dR}}^+) \\ u & \longmapsto & ((\iota \circ u) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}}^+) \circ f \end{cases}$$

est surjective.

Démonstration. — Remarquons que le cas où $d = 1$ entraîne que $M = C$ et a donc été démontré dans la proposition 6.2.3.

Prouvons par récurrence le cas où $d \geq 2$. Soient $d \geq 2$, $h \geq d$ deux entiers, V un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension h , M un B_{dR}^+ -module de longueur d , et $f : M \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ un objet stable de \mathbf{L}_C .

D'après les propositions 10.4.1 et 10.2.4, il existe une suite exacte courte de B_{dR}^+ -modules

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

telle que $f' : M' \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{B}$ soit encore stable et que $\mathrm{Hom}(M'', (E_{d,h})_{\mathrm{dR}}^+)$ soit inclus dans l'image de ${}^t f \otimes \iota$.

Notons d' , d'' les longueurs respectives de M' et M'' ; alors $d' + d'' = d$. On notera $E = E_{d,h}$, $E' = E_{d',h}$ et $E'' = E_{d'',h}$. Chacun des B_{dR}^+ -modules E_{dR}^+ , $(E')_{\mathrm{dR}}^+$ et $(E'')_{\mathrm{dR}}^+$ est canoniquement isomorphe à $(B_{\mathrm{dR}}^+)^h$; on les identifiera donc tous à E_{dR}^+ .

Puisque $d' < d$, l'hypothèse de récurrence s'applique à f' et donc ${}^t f' \otimes \iota' : \mathrm{Hom}(V, E') \rightarrow \mathrm{Hom}(M', E_{\mathrm{dR}}^+)$ est surjective; par conséquent son noyau N est un \mathbb{Q}_{p^h} -espace vectoriel de dimension h . De plus, la multiplication dans B_{cris}^+ définit une application bilinéaire $E'' \times N \rightarrow \mathrm{Hom}(V, E)$ et donc un morphisme analytique et injectif $\alpha : E'' \otimes_{\mathbb{Q}_{p^h}} N \rightarrow \mathrm{Hom}(V, E)$. De plus, par construction, $({}^t f' \otimes \iota') \circ \alpha = 0$. Puisque les couples (dimension, hauteur) respectifs de $E'' \otimes_{\mathbb{Q}_{p^h}} N$, $\mathrm{Hom}(V, E)$ et $\mathrm{Hom}(M', E_{\mathrm{dR}}^+)$ sont $(d''h, h^2)$, (dh, h^2) et $(d''h, 0)$, on en déduit que la suite

$$0 \longrightarrow E'' \otimes_{\mathbb{Q}_{p^h}} N \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M', E_{\mathrm{dR}}^+) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Finalement, les deux lignes du diagramme suivant sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E'' \otimes_{\mathbb{Q}_{p^h}} N & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V, E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M', E_{\mathrm{dR}}^+) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow {}^t f \otimes \iota & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M'', E_{\mathrm{dR}}^+) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M, E_{\mathrm{dR}}^+) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M', E_{\mathrm{dR}}^+) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Puisque $\mathrm{Hom}(M'', E_{\mathrm{dR}}^+)$ est inclus dans l'image de ${}^t f \otimes \iota$, g est surjective. On déduit alors du diagramme que ${}^t f \otimes \iota$ est surjective. \triangleleft

Théorème 10.4.3. — Soit X un espace de Banach–Colmez à pentes finies stable, de hauteur h et de dimension d . Alors X est isomorphe à $E_{d,h}$.

Démonstration. — Identique à celle de la proposition 6.2.7, moins l'hypothèse $d = 1$. \triangleleft

Proposition 10.4.4. — *Les espaces de Banach-Colmez à pentes finies stables sont exactement les $E_{d,h}$, où d, h sont premiers entre eux, et $\mathbb{Q}_p = E_{0,1}$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que, pour tous d, h premiers entre eux, $E_{d,h}$ est stable. Par la proposition 10.1.12, nous savons que $E_{d,h}$ admet un quotient stable X ; d'après la proposition 10.4.3, il existe d', h' tels que X soit isomorphe à $E_{d',h'}$. Supposons que $E \rightarrow X$ ne soit pas un isomorphisme. Alors la pente d'/h' est strictement inférieure à d/h . Donc, d'après la proposition 9.4.3, $E \rightarrow X$ est le morphisme nul, ce qui est absurde. \triangleleft

Proposition 10.4.5. — *Tout espace de Banach-Colmez à pentes finies semi-stable est isomorphe à un produit direct d'un nombre fini de copies de $E_{d,h}$.*

Démonstration. — D'après le théorème 10.4.3, un tel espace de Banach-Colmez est extension successive d'espaces isomorphes à $E = E_{d,h}$; or, d'après la proposition 9.4.4, une telle extension est triviale. \triangleleft

Théorème 10.4.6. — *Soit X un espace de Banach-Colmez à pentes finies.*

- (i) X est muni d'une unique filtration décroissante $(\text{Fil}^\alpha X)_{\alpha \in [0, +\infty[}$ dont les gradués $\text{Gr}^\alpha X$ sont semi-stables de pente α ;
- (ii) pour tout $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0, +\infty[$, il existe un entier $n_\alpha(X)$ (presque toujours nul) tel que $\text{Gr}^\alpha X = E_\alpha^{n_\alpha(X)}$, et $\text{Gr}^\alpha X = 0$ pour tout $\alpha \notin \mathbb{Q}$;
- (iii) la filtration Fil est fonctorielle par rapport à X : pour tout morphisme $f : X \rightarrow X'$ d'espaces de Banach-Colmez constructibles et pour tout α , $f(\text{Fil}^\alpha X) \subset \text{Fil}^\alpha X'$;
- (iv) la filtration Fil est scindée (de façon non canonique), c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme (non canonique)

$$X \simeq \bigoplus_{\alpha \in [0, +\infty[\cap \mathbb{Q}} E_\alpha^{n_X(\alpha)}.$$

Démonstration. — (i) D'après la proposition 10.1.12, X admet une unique filtration de Harder-Narasimhan $0 = X_0 \subset X_1 \dots \subset X_n = X$, c'est-à-dire que les quotients X_i/X_{i-1} sont semi-stables et de pentes μ_i strictement décroissantes.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, notons $\text{Fil}^\alpha X = X_i$ où i est le plus petit entier tel que $\mu(X_i/X_{i-1}) \leq \alpha$. Alors Fil est une filtration décroissante sur X ; les gradués de cette filtration sont les

$$\text{Gr}^\alpha X = \text{Fil}^\alpha X / \varinjlim_{\beta > \alpha} \text{Fil}^\beta X.$$

Pour tout α , $\text{Gr}^\alpha X$ est un espace de Banach-Colmez à pentes finies, semi-stable de pente α .

(ii) Avec les notations précédentes, s'il existe $i = 1, \dots, d$ tel que $\mu(X_i/X_{i-1}) = \alpha$ alors $\text{Gr}^\alpha X$ est isomorphe à X_i/X_{i-1} , et $\text{Gr}^\alpha X$ est nul sinon. De plus, la proposition 10.4.5 entraîne que $\text{Gr}^\alpha X$ est une somme directe d'un nombre fini de copies de E_α .

(iii) et (iv) résultent respectivement des propositions 9.4.3 et 9.4.4. \triangleleft

Références

- [1] J. Ax, *Zeros of polynomials over local fields — the Galois action*, J. Algebra **15** (1970) 417–428.
- [2] S. Bosch, *k-affinoïde Gruppen*, Inventiones Mathematicae **10** (1970) 128–176.
- [3] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis*, Springer-Verlag, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **261** (1984).
- [4] P. Colmez, *Espaces de Banach de dimension finie*, Journal de l’institut de Mathématiques de Jussieu **1**, (2002) 331–439.
- [5] P. Colmez, J.-M. Fontaine, *Construction des représentations p-adiques semi-stables*, Inv. Math **140** (2000) 1–43.
- [6] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, North-Holland (1970).
- [7] L. Fargues, *Notes sur la théorie des espaces de Banach analytiques*, en préparation.
- [8] J.-M. Fontaine, *Groupes p-divisibles sur un anneau de valuation discrète*, Astérisque **47** (1977).
- [9] J.-M. Fontaine, *Le corps des périodes p-adiques*, in *Périodes p-adiques*, Astérisque **223** (1994).
- [10] J.-M. Fontaine, *Presque \mathbb{C}_p -représentations*, Doc. Math. **2003**, Extra vol., 285–385.
- [11] J. Fresnel, M. Van der Put, *Rigid analytic geometry and its applications*, Progress in Mathematics **128**, Birkhäuser (2003).
- [12] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Pub. Math. IHES **32** (1967).
- [13] G. Harder, M. S. Narasimhan, *On the Cohomology Groups of Moduli Spaces of Vector Bundles on Curves*, Math. Ann. **212** (1975) 215–248.
- [14] M. Kashiwara, P. Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **332**, Springer (2006).
- [15] R. Kiehl, *Die De Rham Kohomologie algebraischer Mannigfaltigkeiten über einem bewerteten Körper*, Pub. Math. IHES **33** (1967).
- [16] G. Laffaille, *Groupes p-divisibles et corps gauches*, Compositio Mathematica **56** n°2 (1985) 221–232.
- [17] G. Laumon, *Sur la catégorie dérivée des D-modules filtrés*, in *Algebraic Geometry*, Lecture notes in Math. **1016** (1983), 151–237.
- [18] M. Lazard, *Commutative formal groups*, Lecture notes in Mathematics **443** (1975).
- [19] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton University Press (1980).
- [20] M. S. Narasimhan, C. S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math **82** (1965) 540–567.
- [21] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill (1991).
- [22] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann (1968).
- [23] J. Tate, *p-divisible groups*, Proc. conf on Local fields (Driebergen 1966), Springer (1967) 158–183.
- [24] J.-L. Verdier, *Catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque **239** (1996).

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude d'une classe d'espaces de Banach p -adiques munis d'une structure analytique qui interviennent naturellement dans la théorie de Hodge p -adique.

Un espace de Banach spectral p -adique est un espace de Banach p -adique muni d'une algèbre de fonctions analytiques à valeurs dans un corps complet et algébriquement clos C . Par exemple, \mathbb{Q}_p , muni de l'algèbre des fonctions continues à valeurs dans C , ou C lui-même, muni de l'algèbre des séries formelles de rayon de convergence infini, sont des espaces de Banach spectraux p -adiques.

Un *espace de Banach-Colmez* est un espace de Banach spectral qui s'obtient par extensions et quotients à partir de C et \mathbb{Q}_p . La première partie de cette thèse est consacrée à la démonstration que la catégorie des espaces de Banach-Colmez est abélienne, et munie de fonctions « dimension » et « hauteur » qui sont additives et telles que $\dim C = 1$, $\text{ht } C = 0$, $\dim \mathbb{Q}_p = 0$ et $\text{ht } \mathbb{Q}_p = 1$. Par exemple, pour tous entiers $d, h \geq 0$, $E_{d,h} = \{x \in B_{\text{cris}}^+, \varphi^h(x) = p^d x\}$ est un espace de Banach-Colmez à pentes finies, dimension d et de hauteur h .

Soit K_0 un corps p -adique non ramifié. Il existe alors un foncteur naturel de la catégorie des φ -modules sur K_0 vers celle des espaces de Banach-Colmez, et l'image par ce foncteur d'un φ -module D est de dimension égale au nombre de Newton de D et de hauteur égale au rang de D . Comme conséquence de ce résultat, on retrouve le théorème « faiblement admissible implique admissible ».

Un espace de Banach-Colmez est dit à *pentés finies* s'il se plonge de façon analytique dans un B_{dR} -espace vectoriel de dimension finie. On montre que la catégorie des espaces de Banach-Colmez à pentés finies possède des propriétés analogues à celle des fibrés vectoriels sur une courbe projective lisse, la hauteur jouant le rôle du rang, et la dimension celle du degré.

Plus précisément, tout espace de Banach-Colmez à pentés finies X est canoniquement muni d'une filtration décroissante indexée par $[0, +\infty[\cap \mathbb{Q}$. De plus, les gradués de cette filtration sont presque tous nuls et isomorphes à des sommes directes d'espaces $E_{d,h}$ où d, h sont premiers entre eux.

Abstract

This thesis studies a class of p -adic Banach spaces with analytic structure that naturally occur when studying p -adic Hodge theory.

A spectral p -adic Banach space is a Banach space endowed with an algebra of analytic functions that take values in an algebraically closed complete field C . For example, \mathbb{Q}_p with the algebra of all continuous functions with values in C , or C itself, with the algebra of all formal series with infinite radius of convergence, are spectral p -adic Banach spaces.

A *Banach-Colmez space* is a spectral Banach space obtained by way of successive extensions and quotients from C and \mathbb{Q}_p . The first part of this thesis establishes that the Banach-Colmez spaces form an abelian category, and that there exist dimension and height functions, which are additive, and such that $\dim C = 1$, $\text{ht } C = 0$, $\dim \mathbb{Q}_p = 0$ and $\text{ht } \mathbb{Q}_p = 1$. For example, for every integers $d, h \geq 0$, $E_{d,h} = \{x \in B_{\text{cris}}^+, \varphi^h x = p^d x\}$ is a Banach-Colmez space and has dimension d and height h .

Let K_0 be an unramified p -adic field. Then there exists a functor from the category of φ -modules over K_0 to that of Banach-Colmez spaces, and this functor maps a φ -module D to a space of dimension equal to the Newton number of D and of height equal to the rank of D . As a consequence of this, one finds a new proof of the « weakly admissible implies admissible » theorem.

A Banach-Colmez space has *finite slopes* if it is analytically embeddable in a B_{dR} -vector space of finite dimension. The category of Banach-Colmez spaces with finite slopes has properties analogous to those of vector bundles on a projective smooth curve : height is analogous to rank and dimension to degree.

More precisely, each Banach-Colmez space with finite slopes is canonically endowed with a decreasing filtration indexed by \mathbb{Q}^+ . Moreover, the graded spaces of this filtration are almost all zero and isomorphic to a direct sum of spaces $E_{d,h}$ where d, h are coprime.