



Effet de blocage dans un écoulement turbulent non cisailé

Julien Bodart

► To cite this version:

Julien Bodart. Effet de blocage dans un écoulement turbulent non cisailé. Mécanique [physics.med-ph]. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 2009. Français. NNT : . tel-00449404v1

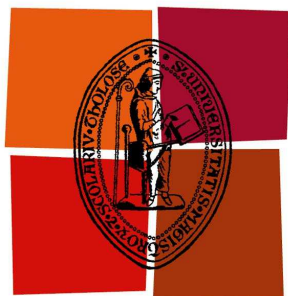
HAL Id: tel-00449404

<https://theses.hal.science/tel-00449404v1>

Submitted on 21 Jan 2010 (v1), last revised 19 Jan 2024 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par: L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

Spécialité: DYNAMIQUE DES FLUIDES

Présentée et soutenue par: Julien Bodart

Le: 21/12/2009

EFFET DE BLOCAGE DANS UN ÉCOULEMENT TURBULENT NON CISAILLÉ

Jury

J.-B.	CAZALBOU	<i>Professeur à l'ISAE, Toulouse</i>	Directeur de thèse
R.	FRIEDRICH	<i>Professeur à l'Université Technique de Munich</i>	Examineur
L.	JOLY	<i>Professeur à l'ISAE, Toulouse</i>	Directeur de thèse
E.	LAMBALLAIS	<i>Professeur à l'Université de Poitiers</i>	Rapporteur
J.	MAGNAUDET	<i>Directeur de recherche CNRS, IMFT, Toulouse</i>	Examineur
M.	STANISLAS	<i>Professeur à l'ECL, Lille</i>	Rapporteur

École doctorale: MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, PROCÉDÉS

Unité de recherche: DÉPARTEMENT AÉRODYNAMIQUE, ÉNERGÉTIQUE ET PROPULSION DE L'ISAE

REMERCIEMENTS

LES travaux exposés dans ce mémoire ont été effectués au sein du département Aérodynamique Énergétique et Propulsion de l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE) sous la direction de Jean-Bernard Cazalbou et Laurent Joly. Je voudrais exprimer mes plus profonds remerciements à tous ceux qui m'ont soutenu ou accompagné durant ces années d'études.

Tout d'abord, j'adresse mes plus sincères remerciements à Laurent et Jean-Bernard pour leur grande disponibilité et la qualité de leur encadrement durant ces trois années. Leurs conseils et leurs expériences respectives se sont révélés d'une aide précieuse pour mener à bien ce travail.

Je remercie chaleureusement les professeurs Lamballais et Stanislas, qui ont accepté de rapporter ce travail. Je suis reconnaissant des remarques et commentaires éclairés qu'ils ont pu porter à la lecture de ce manuscrit. J'exprime également toute ma gratitude envers Messieurs Magnaudet et Friedrich pour leur participation au jury de cette thèse.

J'ai pu séjourner, en 2008, au département Multi-Scale Physics de l'Université TU Delft. Je remercie l'ensemble des personnes qui m'ont accueillies et particulièrement le docteur Sasa Kenjeres.

Je tiens également à associer Raimondo et Patrick, qui m'ont encadré lors de mon année passée à l'Institut Von Karman. Le temps qu'ils ont su me consacrer, afin de transmettre leurs connaissances informatiques et scientifiques, m'a permis de démarrer dans les meilleures conditions ce travail de thèse.

Durant les années que j'ai passées dans le Nord de la France, mais aussi en Irlande, en Belgique, et à Toulouse surtout, j'ai eu la chance de rencontrer de nombreuses personnes formidables. Sans me risquer à les citer, je les salue tous ici, pour leur soutien et les moments agréables partagés. J'envoie une pensée particulière à la fanfare des Trous-Balourds, qui a rythmé ma vie à Toulouse et avec laquelle j'ai passé d'inoubliables moments. J'adresse aussi mes encouragements les plus forts à l'association Taktikollectif pour les combats qu'elle mène.

Je remercie profondément mes parents, qui ont toujours soutenu mes choix, même lorsque ces derniers m'ont éloigné de ma ville natale. Je salue mes frère et soeurs qui ont su se montrer d'un soutien précieux, et ce malgré la distance qui nous sépare. J'aimerais également associer mes grands-parents, disparus ou encore présents.

Je remercie enfin toute l'équipe du DAEP de l'ISAE, avec qui j'ai passé d'agréables moments. J'adresse une mention spéciale à mon "colocataire" de bureau, Pierre, pour les conseils qu'il m'a prodigué, ainsi que les discussions, scientifiques ou non, que l'on a pu avoir.

Toulouse, le 20 janvier 2010.

Titre Effet de blocage dans un écoulement turbulent non cisailé

Résumé Un code de résolution des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible a été développé en utilisant une approche mixte spectral/différences finies, compatible avec une mise en œuvre dans un environnement massivement parallèle. On procède, grâce à ce nouvel outil, à des simulations directes de la turbulence dans une configuration où l'agitation est synthétisée à l'aide d'un forçage aléatoire. La production de turbulence est confinée dans une couche centrale du domaine et s'auto-diffuse en direction d'une surface libre ou d'une paroi adhérente. Dans cette configuration on obtient un état statistiquement stationnaire où le cisaillement moyen, généralement à l'origine de la production de la turbulence, est nul. Ces conditions permettent de mieux comprendre l'origine du transfert intercomposantes, caractéristique de la partie lente du terme de corrélation pression-déformation dans les équations-bilan des tensions de Reynolds. L'accent est mis sur l'analyse de ce transfert lorsqu'il s'effectue sous l'influence de l'effet de blocage au voisinage d'une surface. Les résultats obtenus permettront de mieux appréhender la modélisation des termes de corrélation pression-déformation au voisinage d'une paroi dans les modèles de fermeture au second ordre.

Mots-clés Turbulence de paroi, simulation directe, calcul massivement parallèle, forçage de la turbulence, effet de blocage

Title Blocking effect in a shearless turbulent flow field

Abstract A Navier-Stokes solver for incompressible flow has been developed using a mixed spectral/finite-difference approach, while being compatible with a massively parallel environment. We use it to perform direct numerical simulations in a situation where the turbulent agitation is synthesized under the action of a random forcing. The turbulence production is confined in a central layer and self-diffuses towards a free-slip or no-slip surface. With this set-up, we obtain a statistical steady state in which the mean shear, usually associated with the turbulence production, is zero. These conditions allow a better understanding of the intercomponent energy transfer, induced by the slow part of the pressure-strain correlation in the Reynolds tensor budget. We focus on this transfer when it occurs in combination with the blocking effect, in the vicinity of the surface. The results will help to model the pressure-strain correlation in a second- order-closure context.

Keywords Wall turbulence, DNS, massively parallel, turbulence forcing, blocking effect

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES FIGURES	ix
NOTATIONS	xiii
INTRODUCTION	1
CONTEXTE APPLICATIF	2
PROBLÉMATIQUE SCIENTIFIQUE	3
SIMULATION NUMÉRIQUE DIRECTE DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS	4
ORGANISATION DU MÉMOIRE	5
1 TRANSFERT INTERCOMPOSANTES AU VOISINAGE D'UNE SURFACE DE BLOCAGE	7
1.1 CONFIGURATION ÉTUDIÉE	8
1.2 OUTILS STATISTIQUES	9
1.2.1 Moyenne temporelle et moyenne d'ensemble	9
1.2.2 Moyennes spatiales	10
1.3 ÉQUATIONS AUX MOMENTS STATISTIQUES	11
1.3.1 Cas général	11
1.3.2 Simplifications liées aux propriétés géométriques de la configuration	13
1.4 ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU CHAMP AU VOISINAGE D'UNE SURFACE DE BLOCAGE	13
1.4.1 Surface libre	13
1.4.2 Paroi adhérente	14
1.5 CORRÉLATION PRESSION-DÉFORMATION ET TRANSFERT INTERCOMPOSANTES	15
1.5.1 Distinction partie lente/partie rapide de la corrélation pression-déformation	15
1.5.2 Analyse instantanée du transfert intercomposantes	16
2 MÉTHODES NUMÉRIQUES	19
2.1 SOLVEUR NAVIER-STOKES POUR UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE	21
2.1.1 Équations de conservation	21
2.2 ALGORITHME GÉNÉRAL	21
2.2.1 Méthodes de projection et intégration temporelle	21
2.2.2 Résolution du système sur le domaine intérieur Ω	23
2.2.3 Conditions aux limites sur le domaine extérieur $\partial\Omega$	24
2.3 DISCRÉTISATION SPATIALE DANS LES DIRECTIONS PÉRIODIQUES	24
2.3.1 Incompatibilité Spectral Fourier/Paroi Adhérente	24

2.3.2	Méthode spectrale	26
2.4	DISCRÉTISATION DE LA DIRECTION NORMALE	27
2.4.1	Schémas aux différences finies	27
2.4.2	Utilisation d'un maillage décalé	29
2.4.3	Distribution des points dans la direction x_3	29
2.5	DÉRIVATION DE SCHÉMAS COMPACTS ADAPTÉS	31
2.5.1	Opérateurs mis en jeu	31
2.5.2	Obtention d'un schéma compact de type dérivation (Type <i>uu</i> et <i>pp</i>)	31
2.5.3	Obtention d'un schéma compact de type dérivation (Type <i>up</i> et <i>pu</i>)	33
2.5.4	Exemple d'obtention d'un schéma compact pour un opérateur différentiel	34
2.5.5	Dérivation de schémas d'interpolation	35
2.5.6	Traitement des zones frontières	36
2.6	RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'HELMHOLTZ	38
2.6.1	Note sur la résolution des systèmes linéaires	39
2.6.2	Résolution par diagonalisation de $\mathcal{D}_2$ (méthode <i>H2</i>)	39
2.7	VALIDATION EN CANAL PLAN TURBULENT	41
2.7.1	Méthode de résolution	42
2.7.2	Paramètres de simulation	43
2.7.3	Confrontation des résultats	43
	SYNTHÈSE	45
3	PARALLÉLISATION MASSIVE DU CODE DE CALCUL	47
3.1	SUPER-ORDINATEURS : ÉTAT DE L'ART ET FUTURES ARCHITECTURES	48
3.1.1	Vers le multi-cœurs	48
3.1.2	Architectures Hybrides	49
3.1.3	Définitions et machines de travail	49
3.2	OUTILS DE DÉVELOPPEMENT	50
3.2.1	Logiciels externes au code de calcul	51
3.2.2	Librairies appelées au sein du code	52
3.3	ALGORITHME DE FFT	52
3.3.1	Approche classique : limites	53
3.3.2	Décomposition bidirectionnelle	54
3.3.3	Avantage "collatéral" de la décomposition bidirectionnelle	56
3.4	FICHIERS D'ENTRÉE/SORTIE	58
3.4.1	Problématique	58
3.4.2	Parallel-Netcdf	58
3.5	EXÉCUTIONS DE CAS TESTS SUR BABEL	60
3.5.1	Cas tests et conditions de test	60
3.5.2	Performance obtenues	60
	SYNTHÈSE	63
4	GÉNÉRATION D'UNE SOURCE PLANE DE TURBULENCE	65
4.1	FORÇAGE À CHAMP DE FORCE ALÉATOIRE	66
4.1.1	Contrôle de la puissance injectée	66

4.1.2	Particularités liées à un domaine confiné	70
4.2	FORMULATION ALGÈBRE DU CHAMP DE FORCE	70
4.2.1	Définition d'un champ de force élémentaire	70
4.2.2	Synthèse d'une source plane de turbulence	72
4.3	MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE	73
4.3.1	Stockage en mémoire des champs élémentaires	74
4.3.2	Calcul du champ de force à chaque pas de temps	74
4.3.3	Pseudo générateurs aléatoires	75
4.3.4	Anisotropie du forçage	75
4.4	MODÈLE DE SIMULATION AUX GRANDES ÉCHELLES DANS LA ZONE DE FORÇAGE	76
4.4.1	Viscosité spectrale dynamique	76
4.4.2	Spectre de densité d'énergie	77
4.5	CARACTÉRISATION DU FORÇAGE OBTENU	78
4.5.1	Paramètres d'étude	78
4.5.2	Régime transitoire	79
4.5.3	Écoulement induit dans la zone de forçage	80
4.5.4	Caractéristiques de la turbulence synthétisée	80
4.6	MODÉLISATION DES CARACTÉRISTIQUES DE L'ÉCOULEMENT RÉSULTANT	81
	SYNTHÈSE	84
5	ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT NON-CISAILLÉ	85
5.1	CAS TESTS	86
5.1.1	Présentation générale	86
5.1.2	Caractéristiques de l'écoulement	87
5.1.3	Temps caractéristiques du régime transitoire	89
5.1.4	Critères de résolution spatiale	90
5.1.5	Fonctions d'autocorrélation du champ de vitesse	93
5.1.6	Spectres de densité d'énergie (Spectres en module)	94
5.1.7	Convergence des statistiques	96
5.2	EFFET DE BLOCAGE ET FACTEUR D'ISOTROPIE	97
5.2.1	Évolution des tensions de Reynolds	98
5.2.2	Facteur d'isotropie	99
5.3	BILANS DES ÉQUATIONS DE TRANSPORT DES TENSIONS DE REYNOLDS	102
5.3.1	Comparaison Paroi adhérente/ Surface Libre	102
5.3.2	Mise à l'échelle des bilans des tensions de Reynolds	104
5.3.3	Normalisation en échelle de Kolmogorov	106
5.3.4	Mise à l'échelle dans le cas d'une condition limite de surface libre	108
	SYNTHÈSE	111
6	CORRÉLATION PRESSION-DÉFORMATION EN PRÉSENCE D'UNE SURFACE DE BLOCAGE	113
6.1	MÉCANISMES ÉLÉMENTAIRES DE ZONE DE BLOCAGE	114
6.1.1	Historique	114
6.1.2	Termes sources de l'équation de Poisson pour la pression.	115
6.1.3	Analyse des fonctions d'autocorrélation f et g	115

6.2	LIEN ENTRE ET PRESSION ET DÉFORMATION	116
6.2.1	Remarques préalables	116
6.2.2	Observation de champs instantanés.	119
6.2.3	Prépondérance des évènements de type splat	122
6.2.4	Facteur de dissymétrie en zone de diffusion	125
6.3	QUANTIFICATION DES EFFETS LIÉS AUX SPLATS ET ANTI-SPLATS	127
6.3.1	Statistiques conditionnelles Π_{33}^- et Π_{33}^+	127
6.3.2	Analyse en quadrants : aspects théoriques et fonctions de corrélation	128
6.3.3	Analyse en quadrants : application aux cas étudiés	130
6.4	ANALYSE DÉTAILLÉE DE LA STRUCTURE DES IMPACTS	134
6.4.1	Anneau tourbillonnaire	135
6.4.2	Conséquence sur le terme de corrélation pression-déformation	136
	SYNTHÈSE	138
	CONCLUSION	141
A	ANNEXES	143
A.1	ANALYSE EN QUADRANT DES SIMULATIONS A	144
A.2	OBSERVATION SIMULTANÉE DES DENSITÉS DE PROBABILITÉS CONJOINTES ET DES CHAMPS INSTANTANÉS	146
A.3	BILAN DES TENSIONS DE REYNOLDS, AVEC REGROUPEMENT DES TERMES LIÉS À LA FLUCTUA- TION DE PRESSION.	151
	BIBLIOGRAPHIE	153

LISTE DES FIGURES

1.1	Description de la configuration étudiée	8
1.2	Illustration d'un évènement à déformation pure de type collision : lignes de courant. . .	17
2.1	Mailles décalées pour le calcul de la pression	29
2.2	Transformation du maillage dans la direction verticale.	30
2.3	Représentation de la fonction $T(\xi)$ pour différentes valeurs de r	30
2.4	Vérification de l'ordre de précision des schémas au centre du domaine- opérateur $\mathcal{D}_{1up}$. .	35
2.5	Vérification de l'ordre de précision des schémas au centre du domaine- opérateur $\mathcal{D}_{2uu}$. .	35
2.6	Adaptation du schémas global aux points extrêmes de maillage	38
2.7	Adaptation du schémas global aux points extrêmes de maillage	39
2.8	Paramètres de simulation.	43
2.9	Profil de vitesse moyen longitudinal : mise en évidence de la région "Log".	44

2.10	Profil de vitesse moyen longitudinal : mise en évidence de la sous couche visqueuse. . .	44
2.11	Corrélation doubles (comparaison avec les données de Kim et al. (1987))	44
2.12	Corrélation doubles : comportements asymptotiques	44
2.13	Profils de dissipation	45
2.14	Profils de dissipation : zoom en proche paroi	45
3.1	Présentation de la machine Blue Gene et de son architecture en tore (source IDRIS) . . .	51
3.2	Lignes de code	51
3.3	Bibliothèques incorporées dans le code de calcul	53
3.4	Décomposition bidirectionnelle comparée à une décomposition par “tranches” pour l’algorithme de FFT	54
3.5	Anti-repliement par décalage de maillage	55
3.6	Possibilités de maillages pour 1K cœurs (gauche) et 16K cœurs (droite)	57
3.7	Découpage de fichiers par “couches” dans une décomposition bidirectionnelle	59
3.8	Temps d’exécution des différentes parties du code	61
3.9	Test de scalabilité forte sur plusieurs types de maillages	62
4.1	Numérisation d’une distribution de Dirac. Fonction $\delta_{num}(t)$	69
4.2	Spline du deuxième ordre ramenée dans l’intervalle $[0 : 1]$	72
4.3	Module du champ de force : iso-contour et carte dans le plan méridien.	72
4.4	Projection du champ de force dans le plan méridien de la boîte.	72
4.5	Module des champs de forces élémentaires $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	73
4.6	Agencement des “boîtes” de forçage	74
4.7	Évolution de la pente m sur la hauteur du domaine	77
4.8	Évaluation de la pente m à partir d’un demi-spectre instantané	77
4.9	Évolution de l’énergie volumique sur tout le domaine.	79
4.10	Évolution de l’énergie volumique dans une couche proche paroi du domaine.	79
4.11	Comparaison entre le profil moyen de dissipation et le carré du module du champ de force.	81
4.12	Modélisation du profil de dissipation.	81
4.13	Diagramme $(K^*(z)/h^*(z), \epsilon^*(z)/h^*(z))$	82
4.14	Variation du coefficient A en fonction du nombre de Reynolds $\mathcal{Re}_{f_1}$	82
5.1	Évolution verticale de l’énergie cinétique moyenne.	88
5.2	Évolution verticale du nombre de Reynolds turbulent moyen.	88
5.3	Évolution de la macro-échelle de Taylor.	89
5.4	Évolution de l’échelle de longueur turbulente l_t	89
5.5	Vérification du critère $k_{max}\eta = 1.5$. (Direction tangentielle)	92
5.6	Vérification du critère $k_{max}\eta = 2.25$. (Direction normale)	92
5.7	Auto-corrélation longitudinale de la vitesse tangentielle.	94
5.8	Auto-corrélation transversale de la vitesse tangentielle.	94
5.9	Spectres d’énergie dans le plan central	96
5.10	Spectres d’énergie dans des plans d’altitude décroissants	96

5.11	Évolution du nombre d'échantillons significatifs collectés sur les différents calculs.	97
5.12	Évolution des tensions de Reynolds normale et tangentielle.	98
5.13	Évolution des tensions de Reynolds normale et tangentielle (zoom)	98
5.14	Évolution de I	100
5.15	Évolution de $I(\text{zoom})$	100
5.16	Bilan des tensions de Reynolds $\overline{u^2}$	103
5.17	Bilan des tensions de Reynolds $\overline{w^2}$	103
5.18	Bilan des tensions de Reynolds $\overline{u^2}$ en surface libre	105
5.19	Bilan des tensions de Reynolds $\overline{w^2}$ en surface libre	105
5.20	Bilan des tensions de Reynolds $\overline{u^2}$ en paroi adhérente	105
5.21	Bilan des tensions de Reynolds $\overline{w^2}$ en paroi adhérente	105
5.22	Évolution de u' en norme de Kolmogorov en zone proche paroi	106
5.23	Évolution de w' en norme de Kolmogorov en zone proche surface libre	106
5.24	Évolution de u' en norme de Kolmogorov en zone proche paroi dans un écoulement turbulent en canal plan (données Moser et al. (1999)).	107
5.25	Résultats obtenus pour la mesure de la couche de blocage $\mathcal{L}/l^*$	109
5.26	Mise en évidence de la couche de glissement	109
5.27	Mise en évidence de la couche de glissement	109
5.28	Comparaison des données sur la mesure de la couche de glissement δ_g^* (a-Handler et al. b-Shen et al. c-Walker et al. d-Calmet et Magnaudet)	111
5.29	Couches caractéristiques de la turbulence diffusant vers une surface de blocage	112
6.1	Évolution verticale moyenne des termes sources de l'équation de Poisson pour la pression. Les valeurs sont adimensionnées par la valeur de l'énergie cinétique turbulente à la frontière de la zone de forçage K_F	116
6.2	Fonction d'autocorrélation longitudinale de la vitesse tangentielle.	117
6.3	Fonction d'autocorrélation transversale de la vitesse tangentielle.	117
6.4	Signe des fonctions d'autocorrélation dans un évènement de type collision ou tourbillon	117
6.5	Cartographie du champ de pression et de déformation normale $\frac{\partial w}{\partial z}$	120
6.6	Cartographie du champ de pression et de déformation normale $\frac{\partial w}{\partial z}$	121
6.7	Aires relatives d'écoulements ascendants et descendants en surface libre.	123
6.8	Aires relatives d'écoulements ascendants et descendants en paroi adhérente.	123
6.9	Facteur de dissymétrie de la vitesse et du gradient de vitesse normal (SL).	124
6.10	Facteur de dissymétrie de la vitesse et du gradient de vitesse normal (PA).	124
6.11	Facteur de dissymétrie de la vitesse et du gradient de vitesse normal. (Zoom)	125
6.12	Comportement du terme de corrélation triple $\overline{w^3}$ en diffusion pure.	126
6.13	Moyennes conditionnelles sur Π_{33} (Π_{33}^+ - étirements, Π_{33}^- - compression)	127
6.14	Densité conjointe de probabilité pour deux variables aléatoires à distribution gaussienne	129
6.15	Fonction de corrélation des variables p et $\frac{\partial w}{\partial z}$	130
6.16	Densité de probabilité obtenu à l'altitude z_{diff} (cas SL_B).	131
6.17	Iso-contributions à Π_{33} obtenu à l'altitude z_{diff} (cas SL_B).	131
6.18	Densité de probabilité conjointe obtenue à l'altitude z_{ref} dans le cas SL_B	132
6.19	Densité de probabilité conjointe obtenue à l'altitude z_{ref} dans le cas PA_B	132

6.20	Iso-contributions à Π_{33} obtenues à l'altitude z_{ref} dans le cas SL_B	132
6.21	Iso-contributions à Π_{33} obtenues à l'altitude z_{ref} dans le cas PA_B	132
6.22	Visualisation d'un "splat" à l'aide du critère Q (SL)	135
6.23	Visualisation d'un "splat" à l'aide du critère Q (PA)	136
6.24	Coupe d'un splat dans un plan normal à la surface libre	137
6.25	Coupe d'un splat dans un plan normal à la paroi	137
6.26	Proposition de schéma pour les impacts avec une surface de blocage.	138
A.1	Densité conjointe de probabilité obtenue à l'altitude z_{ref} dans le cas SL_A	144
A.2	Iso-contributions à Π_{33} obtenues à l'altitude z_{ref} dans le cas SL_A	144
A.3	Densité conjointe de probabilité obtenue à l'altitude z_{ref} dans le cas PA_A	145
A.4	Iso-contributions à Π_{33} obtenues à l'altitude z_{ref} dans le cas PA_A	145
A.5	Report des évènements observés sur la figure A.6 dans les zones rouges et vertes sur la densité de probabilité conjointe de p et $\partial_z w$ (Paroi adhérente).	147
A.6	Séquence de champs de déformation verticale $\partial_z w$ instantanés. La couleur code le signe de la déformation, du blanc(négatif) au bleu(positif). Cas PA_A	148
A.7	Report des évènements observés sur la figure A.8 dans les zones rouges et vertes sur la densité de probabilité conjointe de p et $\partial_z w$ (Surface libre).	149
A.8	Séquence de champs de déformation verticale $\partial_z w$ instantanés. La couleur code le signe de la déformation, du blanc(négatif) au bleu(positif). Cas SL_A	150
A.9	Bilan des tensions de Reynolds $\overline{u^2}$	151
A.10	Bilan des tensions de Reynolds $\overline{w^2}$	151
A.11	Bilan des tensions de Reynolds $\overline{u^2}$ en surface libre	151
A.12	Bilan des tensions de Reynolds $\overline{w^2}$ en surface libre.	151
A.13	Bilan des tensions de Reynolds $\overline{u^2}$ en paroi adhérente	152
A.14	Bilan des tensions de Reynolds $\overline{w^2}$ en paroi adhérente	152

NOTATIONS

$\nabla \cdot$	Divergence (m^{-1})
$\nabla \times$	Rotationnel (m^{-1})
$\Delta = \nabla^2$	Laplacien (m^{-2})
$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle première
$\mathcal{D}_1(f(z)) = \frac{\partial f}{\partial z}$	Dérivée partielle première
$\hat{\square}$	Transformée de Fourier bidimensionnelle
ν	Viscosité moléculaire cinématique ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)
p	Fluctuation de pression ($\text{N}.\text{m}^{-2}$)
$\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2) = (u, v, w)$	Fluctuation de vitesse ($\text{m}.\text{s}^{-1}$)
$\boldsymbol{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2) = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$	Fluctuation de vorticité (s^{-1})
$\mathcal{L} = \nu \Delta \mathbf{u}$	Termes visqueux ($\text{m}.\text{s}^{-2}$)
$\mathcal{P} = -\frac{1}{\rho_0} P$	Terme de pression ($\text{m}.\text{s}^{-2}$)
$\mathcal{N} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$	Termes convectifs ($\text{m}.\text{s}^{-2}$)
ν_t	Viscosité spectrale ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)
$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) = (k_x, k_y, k_z)$	Vecteur d'onde - 3D (m^{-1})
$\boldsymbol{\kappa} = (k_1, k_2) = (k_x, k_y)$	Vecteur d'onde - 2D (m^{-1})
$\langle \square \rangle_T$	Moyenne temporelle
$\langle \square \rangle_e$	Moyenne d'ensemble
$\langle \square \rangle_V$	Moyenne volumique
$\bar{\square}$	Moyenne spatio-temporelle

$K = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$	Énergie cinétique turbulente ($\text{m}^2.\text{s}^{-2}$)
$\frac{1}{2} \overline{\omega_i \omega_i}$	Enstrophie (s^{-2})
$\mathcal{D}_{ij}^u$	Diffusion par fluctuation de vitesse ($\text{m}^2.\text{s}^{-3}$)
$\mathcal{D}_{ij}^v$	Diffusion moléculaire ($\text{m}^2.\text{s}^{-3}$)
$\mathcal{D}_{ij}^p$	Diffusion par fluctuation de pression ($\text{m}^2.\text{s}^{-3}$)
Π_{ij}	Corrélation pression-déformation ($\text{m}^2.\text{s}^{-3}$)
ε_{ij}	Dissipation ($\text{m}^2.\text{s}^{-3}$)
$\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_{ii}$	Taux de dissipation ($\text{m}^2.\text{s}^{-3}$)
η	Échelle de Kolmogorov (m)
$l_t = \frac{K^{3/2}}{\varepsilon}$	Échelle de longueur turbulente (m)
$\mathcal{Re}_t = \frac{K^2}{\nu \varepsilon}$	Nombre de Reynolds turbulent
Λ	Macro-échelles de Taylor (m)
λ	Micro-échelles de Taylor (m)
$\mathcal{Re}_\lambda = \frac{K^{1/2} \lambda}{\nu}$	Nombre de Reynolds associé au micro-échelles de Taylor

INTRODUCTION

SOMMAIRE

CONTEXTE APPLICATIF	2
PROBLÉMATIQUE SCIENTIFIQUE	3
SIMULATION NUMÉRIQUE DIRECTE DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS	4
ORGANISATION DU MÉMOIRE	5

CETTE thèse s'inscrit dans le cadre de l'étude et de la modélisation des écoulements turbulents de proche paroi, menées au sein du département Aérodynamique Énergétique et Propulsion de l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE).

Nous proposons en introduction une vue d'ensemble des tenants du travail exposé dans ce mémoire. Nous décrivons ainsi le contexte applicatif du thème de recherche et la problématique scientifique retenue. Nous ferons par ailleurs une brève présentation de la simulation numérique directe de la turbulence avant de donner l'organisation de ce mémoire.

CONTEXTE APPLICATIF

Un rapide examen des écoulements rencontrés dans les problèmes pratiques d'aérodynamique externe ou interne révèle le caractère très fréquent du régime turbulent. La raison en est simplement qu'à l'échelle du mètre, l'écoulement d'un gaz tel que l'air à quelques mètres par seconde correspond déjà à un nombre de Reynolds de l'ordre du million. A de telles valeurs du nombre de Reynolds, l'écoulement turbulent met en jeu des fluctuations de toutes les grandeurs sur une large gamme d'échelles et son calcul direct par résolution des équations de Navier-Stokes, est hors de portée des moyens de calcul actuels. Depuis les années 70-80 et l'introduction dans l'industrie de codes de résolution des équations de la mécanique des fluides, de nombreux modèles de turbulence ont vu le jour. Ces derniers offrent la possibilité de calculer avec succès et à moindre prix un grand nombre de situations. Parmi les modèles les plus utilisés, on trouve les modèles à deux équations de transport, de type $K - \epsilon$, $K - \omega$ (dont sa version SST) ou encore, le modèle à une équation de transport très consensuel de Spalart et Allmaras. La caractéristique commune de ces "standards" industriels est qu'ils s'appuient tous sur une hypothèse de fermeture au premier ordre à l'aide du concept de viscosité tourbillonnaire scalaire. Or, l'écart à l'isotropie est fréquent et particulièrement au voisinage de parois solides ou de surfaces libre et bon nombre de situations où la turbulence est anisotrope sont très mal représentées dans ce contexte. Dans le domaine de l'aérodynamique externe on peut citer les écoulements au voisinage de complexités de forme (forte tri-dimensionnalité et courbures) comme autant de défis hors de portée des modèles de fermeture au premier ordre. Le défaut majeur des modèles considérés réside dans la formulation même des fermetures au premier ordre, où l'on suppose que l'énergie cinétique turbulente s'équilibre sur les trois directions de l'espace (isotropie).

La manière la plus directe de résoudre ce défaut consiste à calculer l'évolution de l'ensemble des composantes du tenseur de Reynolds, en résolvant les équations de transport associées. On parle alors de fermeture au second ordre ou d'approche RSM (Reynolds stress model). Cependant l'effort nécessaire à sa mise en œuvre, en terme de modélisation et de coût de calcul, n'est pas toujours justifié du point de vue de l'amélioration de la précision. Elle reste de ce fait très peu utilisée dans un contexte applicatif. On sait par ailleurs qu'à ce niveau de modélisation, le montant d'anisotropie est fixé par la corrélation entre les fluctuations de la pression et le taux de déformation du mouvement d'agitation (corrélation pression-déformation). La difficulté à mesurer expérimentalement ce terme et plus généralement tout terme faisant intervenir la fluctuation de pression ou le gradient de vitesse fait que les mécanismes physiques sous-jacents restent mal connus et difficiles à modéliser. Le travail présenté ici vise à mieux comprendre comment se structure la corrélation pression-déformation dans une situation particulièrement importante pour les applications : celles des écoulement turbulent pariétaux. Sa finalité est de fournir des informations permettant d'améliorer la capacité prédictive des modèles de fermeture au second ordre. L'approche retenue est celle de la simulation numérique directe dans des configurations simplifiées permettant d'isoler différents effets.

PROBLÉMATIQUE SCIENTIFIQUE

Dans le contexte exposé ci-dessus, le contour de notre contribution se cantonne à une situation bien précise où une agitation turbulente est maintenue au voisinage d'une surface de blocage (surface imperméable) en l'absence de cisaillement moyen.

La condition d'imperméabilité impose la nullité de la composante de vitesse normale à la paroi. Cette condition cinématique est associée à une condition à caractère dynamique selon que la surface est adhérente (les composantes tangentielles s'annulent également) ou glissante (les contraintes visqueuses s'annulent à la surface). La faculté à représenter ces deux configurations permettra d'évaluer séparément l'effet de blocage non visqueux par nature et l'effet de l'adhérence d'autre part.

S'agissant de l'absence de cisaillement moyen, cette condition est recherchée car, dans la majorité des cas, la présence d'un gradient de vitesse moyenne masque en grande partie la physique liée à l'effet de la turbulence sur elle-même dans la corrélation pression-déformation. C'est cette physique que nous avons choisi d'étudier en détail. Elle correspond à la partie dite "lente" de la corrélation.

L'idée de faire interagir de la turbulence non cisailée avec une surface, adhérente ou glissante, a été introduite pour la première fois par Perot et Moin (1995), puis Walker et al. (1996). Elle consistait dans ces travaux à introduire une surface de blocage dans un écoulement turbulent initialement homogène et isotrope. Certaines conséquences de l'effet de blocage, ainsi que des conjectures sur les différences observées entre le cas d'une paroi adhérente ou celui d'une surface libre indéformable, ont pu être établies, bien que la turbulence soit en décroissance à partir de l'état initial. Plus récemment, Campagne et al. (2006) ont proposé d'étudier l'effet de blocage dans un écoulement statistiquement stationnaire. Dans cette configuration, la surface de blocage est alimentée en continu par de la turbulence synthétisée par forçage aléatoire à distance. La production de turbulence n'est donc pas liée à la présence d'un cisaillement moyen. Cette configuration semble plus à même de représenter les mécanismes qui interviennent lorsque les régions de production turbulente sont éloignées de la surface et alimentent celle-ci grâce au transport turbulent. L'outil de simulation développé par Campagne et al. permettait d'étudier l'effet de blocage en présence d'une surface libre indéformable. La structure de l'écoulement dans cette configuration a pu être identifiée et Campagne et al. (2009) ont proposé des lois de mise à l'échelle originales et consistantes avec des propositions antérieures. Par rapport aux résultats exposés par Perot et Moin (1995), Campagne et al. (2006) ont constaté des différences dans la nature du transfert intercomposantes qui s'établit au voisinage d'une surface libre indéformable. Ces différences suggèrent des mécanismes qui ne peuvent être présents dans un écoulement turbulent en décroissance.

On propose dans cette étude de reprendre la configuration d'écoulement stationnaire citée précédemment en y ajoutant la possibilité de traiter le cas de la paroi adhérente. Les résultats permettent de comparer l'effet de blocage induit par les deux types de surface. Dans le même temps et en vue de la modélisation, on a généré une base de donnée par simulation directe de cette configuration. Enfin, on a pu identifier les événements élémentaires qui structurent l'écoulement dans la zone de blocage et établir les paramètres qui dimensionnent le transfert intercomposantes.

SIMULATION NUMÉRIQUE DIRECTE DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS

Depuis les années 70, l'étude de la turbulence en mécanique des fluides a vu le développement de la simulation numérique directe. Si une simulation numérique permet difficilement d'incorporer les imperfections géométriques rencontrées en situation réelle comme par exemple la rugosité, elle permet tout de même une avancée dans l'étude des écoulements turbulents. En effet la turbulence ne remet pas en cause le modèle de Navier-Stokes et de nombreux mécanismes internes à la turbulence et directement liés à la non-linéarité des équations sont encore très mal compris. Au prix d'un effort de résolution des plus petites échelles de l'écoulement, la simulation numérique des équations de Navier-Stokes sans aucune modélisation permet d'apporter des réponses essentielles. En analysant le ratio Λ/η qui sépare les plus grandes des plus petites échelles de l'écoulement, on observe que le nombre de points requis pour une simulation est proportionnel à $Re^{9/4}$. Ce type de simulation n'est donc pas envisageable dans des configurations industrielles complexes. Pourtant cette approche est suffisante pour déclencher et maintenir des écoulements turbulents et en dégager des caractéristiques indépendantes du nombre de Reynolds, au moins sur un plan qualitatif. L'avantage apporté par la simulation numérique directe est l'accès non intrusif à toutes les grandeurs physiques de l'écoulement, la seule limite réelle de ce point de vue étant le stockage de la masse de données générées.

Dans une revue sur le sujet effectuée par Moin et Mahesh (1998), les premières simulations de ce type sont attribuées à Orszag et Patterson (1972). Les ordinateurs de l'époque permettaient de mettre en œuvre une simulation sur un maillage de 32^3 points (≈ 30000). Ces premières tentatives se sont donc limitées à des configurations caractérisées par un nombre de Reynolds très faible, et où la turbulence est homogène dans les trois directions de l'espace. Depuis, les progrès de l'informatique ont permis la première simulation de l'écoulement turbulent dans un canal plan Kim et al. (1987) et étendu l'utilisation de l'outil à d'autres configurations où la turbulence présente une ou plusieurs directions d'inhomogénéité. La puissance des moyens de calculs permet maintenant de réaliser des simulations directes englobant plus d'un milliard de points (typiquement 1024^3 ou 2048^3 points). Ces développements permettent de multiplier le nombre de Reynolds par un facteur 200, par rapport aux premières simulations effectuées.

L'outil est indissociable de la problématique posée ici puisqu'il permet d'accéder aux grandeurs difficiles, voire impossible à mesurer expérimentalement que sont la fluctuation de pression et le taux de déformation du fluide en un même point. La première étude réalisée dans le département sur le sujet Campagne (2006) s'est effectuée à l'aide d'un code existant et destiné aux écoulements tri-périodiques. L'utilisation d'une condition limite de surface libre indéformable ne nécessitait pas de modification fondamentale de l'algorithme. Ce travail a, en revanche permis de concevoir et de mettre en œuvre la notion de forçage localisé en espace. La nécessité de prendre en compte une condition à la limite de type paroi adhérente nous a conduit à concevoir un nouveau code de calcul pour le rendre apte au traitement d'écoulements généralement inhomogènes dans une direction de l'espace. Dans le même temps, un soin tout particulier a été apporté à sa performance en terme d'exécution afin de pouvoir utiliser pleinement les ressources offertes par les super-ordinateurs actuels.

ORGANISATION DU MÉMOIRE

Le mémoire est organisé comme suit : Le *premier chapitre* expose la problématique du transfert intercomposantes et définit la configuration étudiée. Le *deuxième chapitre* est consacré aux méthodes numériques nécessaires à la réalisation de l'outil numérique. On détaille les techniques numériques de parallélisation massive dans le *troisième chapitre*. Le *quatrième chapitre* présente une vue d'ensemble des résultats obtenus. Dans le *cinquième chapitre* une étude approfondie des structures de l'écoulement nous permet d'apporter des éléments de réponse sur les modalités du transfert intercomposantes dans notre configuration d'écoulement. Enfin, les conclusions et perspectives de ce travail sont résumées dans le *dernier chapitre*.

TRANSFERT INTERCOMPOSANTES AU VOISINAGE D'UNE SURFACE DE BLOCAGE

1

SOMMAIRE

1.1	CONFIGURATION ÉTUDIÉE	8
1.2	OUTILS STATISTIQUES	9
1.2.1	Moyenne temporelle et moyenne d'ensemble	9
1.2.2	Moyennes spatiales	10
1.3	ÉQUATIONS AUX MOMENTS STATISTIQUES	11
1.3.1	Cas général	11
1.3.2	Simplifications liées aux propriétés géométriques de la configuration	13
1.4	ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU CHAMP AU VOISINAGE D'UNE SURFACE DE BLOCAGE	13
1.4.1	Surface libre	13
1.4.2	Paroi adhérente	14
1.5	CORRÉLATION PRESSION-DÉFORMATION ET TRANSFERT INTERCOMPOSANTES	15
1.5.1	Distinction partie lente/partie rapide de la corrélation pression-déformation	15
1.5.2	Analyse instantanée du transfert intercomposantes	16

ON définit ici les mécanismes et équations qui régissent un écoulement turbulent au voisinage d'une surface de blocage. La présentation de la configuration étudiée ainsi que les développements théoriques sous-jacents à cette étude sont également exposés. On reprend les points essentiels de la problématique exposée par Campagne (2006) dans le cas des écoulements à surface libre en développant certains points nécessaires à l'étude d'une paroi adhérente.

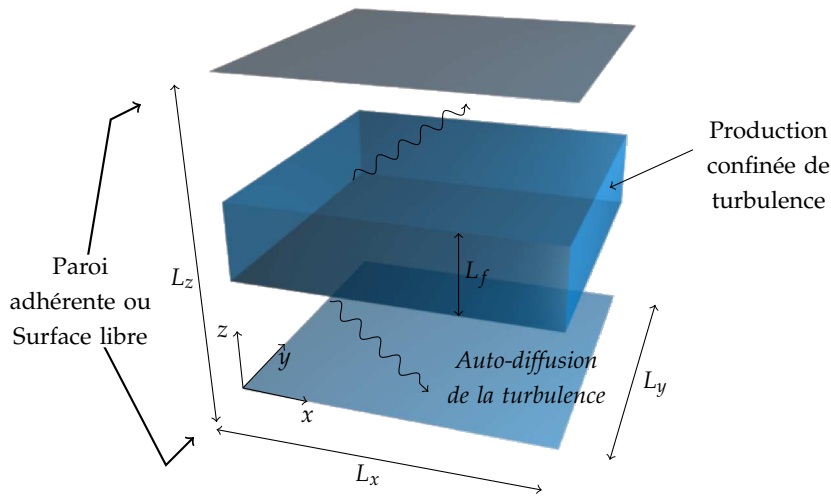


FIG. 1.1 – Description de la configuration étudiée

1.1 CONFIGURATION ÉTUDIÉE

La configuration retenue pour étudier l'interaction de la turbulence avec une surface de blocage est présentée sur la figure 1.1. On désigne dorénavant par surface de blocage une surface qui impose la nullité d'une composante de la vitesse, qui sera ici la composante verticale. L'expérience numérique proposée repose sur le concept de *source plane* de turbulence, étudiée dans le cadre de la modélisation des équations de transport des tensions de Reynolds (Voir par exemple Cazalbou et Chassaing 2001). Dans la configuration étudiée, la turbulence est produite par l'intermédiaire d'un forçage, dans une couche du domaine, et ce parallèlement à la surface. Elle diffuse ensuite par transport turbulent dans la direction normale jusqu'à interaction avec la surface de blocage. Cette dernière est située à une certaine distance de la source et impose une condition limite de surface libre indéformable (SL) ou de paroi adhérente (PA). Cette approche représente un analogue numérique des expériences de grille oscillante. Dans ces expériences, une grille de turbulence oscille perpendiculairement à son plan dans un fluide au repos à l'infini. La turbulence produite dans le plan de la grille s'auto-diffuse vers l'infini et atteint un état statistiquement stationnaire de décroissance spatiale (Voir par exemple De Silva et Fernando 1994). Ce dispositif a été utilisé pour étudier l'interaction de la turbulence avec une paroi adhérente (Brumley et Jirka 1987). D'un point de vue numérique, citons aussi les simulations de Godefert et Lollini (1999) qui modélisent l'action d'une grille dans un réservoir, afin d'étudier les propriétés de la diffusion turbulente dans un référentiel tournant.

L'interaction de la turbulence avec divers type de surfaces de blocage a également été étudié dans d'autres types de configurations. Celles habituellement retenues pour caractériser cette situation, par simulation directe ou aux grandes échelles, sont de deux natures :

1. L'insertion brutale d'une surface de blocage dans une turbulence en décroissance temporelle. C'est l'expérience utilisée par Perot et Moin (1995) et Walker et al. (1996). L'avantage de cette configuration est l'absence d'écoulement moyen.
2. Lorsque la surface de blocage est une surface libre, on peut étudier l'effet de blocage dans un canal "ouvert". Une condition limite de paroi adhérente dans la partie inférieure du canal in-

duit un cisaillement moyen qui permet de produire de la turbulence. Cette turbulence diffuse depuis la zone de production vers la surface libre imposée en condition limite dans la partie supérieure du canal. L'avantage de cette configuration est le caractère statistiquement stationnaire de l'écoulement.

La configuration que nous proposons comme alternative aux deux précédentes présente l'avantage double d'imprimer un effet de blocage en situation statistiquement stationnaire et en l'absence de cisaillement. En effet, la turbulence produite dans la zone de forçage alimente en continu la surface de blocage et le forçage, à moyenne nulle, ne génère pas d'écoulement moyen.

1.2 OUTILS STATISTIQUES

L'approche statistique habituellement utilisée pour décrire les écoulements turbulents nécessite de définir quelques notions utilisées par la suite, générales ou propres à la configuration d'étude. On définit ici les différents types de moyennes statistiques utilisées dans le cadre de cette étude pour caractériser le champ turbulent.

1.2.1 Moyenne temporelle et moyenne d'ensemble

Pour un processus statistiquement stationnaire, la moyenne temporelle de toute grandeur F de l'écoulement s'écrit :

$$\langle F(\mathbf{x}, t) \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(\mathbf{x}, t) dt \quad (1.1)$$

On peut alors décomposer toute grandeur comme somme de sa moyenne temporelle et de sa fluctuation :

$$F(\mathbf{x}, t) = \langle F(\mathbf{x}, t) \rangle_T + f(\mathbf{x}, t) \quad \text{avec} \quad \langle f(\mathbf{x}, t) \rangle_T = 0 \quad (1.2)$$

Cette moyenne est un opérateur linéaire qui commute avec l'opérateur différentiel. On peut ainsi établir les propriétés suivantes :

$$\forall (F_1, F_2), \forall (\alpha, \beta) \quad \langle \alpha F_1(\mathbf{x}, t) + \beta F_2(\mathbf{x}, t) \rangle_T = \alpha \langle F_1(\mathbf{x}, t) \rangle_T + \beta \langle F_2(\mathbf{x}, t) \rangle_T \quad (1.3)$$

$$\forall (F_1, F_2) \quad \langle F_1(\mathbf{x}, t) F_2(\mathbf{x}, t) \rangle_T = \langle F_1(\mathbf{x}, t) \rangle_T \langle F_2(\mathbf{x}, t) \rangle_T + \langle f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) \rangle_T \quad (1.4)$$

$$\forall \xi \in (x, y, z, t) \quad \left\langle \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial \xi} \right\rangle_T = \frac{\partial \langle F(\mathbf{x}, t) \rangle_T}{\partial \xi} \quad (1.5)$$

Ces propriétés, qui ne sont plus évoquées par la suite, restent valables pour les différents types de moyenne exposés.

Lorsque le processus étudié est de nature instationnaire (régime transitoire par exemple), on aura recours à des moyennes d'ensemble, prises sur l'espace des réalisations de l'expérience mise en jeu. Ainsi si on définit N réalisations du processus étudié, la moyenne d'ensemble de la grandeur F s'écrit :

$$\langle F(\mathbf{x}, t) \rangle_e = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n(\mathbf{x}, t) \quad (1.6)$$

1.2.2 Moyennes spatiales

Pour caractériser les champs instantanés, certaines propriétés nécessitent d'être exprimées de manière volumique. On utilisera donc la moyenne volumique qui se définit par :

$$\langle F(\mathbf{x}, t) \rangle_V = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \iiint_V F(\mathbf{x}, t) dv, \quad (1.7)$$

où V est un volume quelconque du domaine.

La configuration étudiée et présentée sur la figure 1.1 présente deux directions homogènes (x et y) et une direction inhomogène (z). On peut donc utiliser des moyennes par plan dans les directions homogènes :

$$\langle F(\mathbf{x}, t) \rangle_S \equiv \langle F \rangle_S(z, t) = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \iint_S F(\mathbf{x}, t) d\sigma, \quad (1.8)$$

où S est une surface quelconque du plan homogène.

Le plan central ($z = 0$) est un plan de symétrie du point de vue statistique. On peut raisonnablement admettre que les deux parties de l'écoulement de part et d'autre de ce plan sont indépendantes. On étend la moyenne par plan à la définition suivante :

$$\langle F(\mathbf{x}, t) \rangle_P = \frac{1}{2} (\langle F \rangle_S(z, t) + \epsilon \langle F \rangle_S(-z, t)) \quad \text{avec} \quad \epsilon = \pm 1 \quad (1.9)$$

où ϵ est choisi en fonction de la parité en z de la grandeur étudiée.

Moyenne spatio-temporelle et échantillonnage statistique

En combinant les propriétés d'homogénéité et de symétrie statistique de la configuration étudiée, on peut définir une moyenne spatio-temporelle $\bar{F}$ qui s'écrit

$$\bar{F} = \langle \langle F(\mathbf{x}, t) \rangle_P \rangle_T \quad (1.10)$$

Cette moyenne spatio-temporelle est donc la plus à même de décrire le problème étudié puisqu'elle exprime les mêmes caractéristiques statistiques de la turbulence que la moyenne temporelle, tout en garantissant un meilleur niveau de convergence. On fera donc essentiellement appel à ce type de moyenne pour décrire les propriétés du champ turbulent.

Dans la configuration présentée sur la figure 1.1, la turbulence est synthétisée dans une couche centrale et se diffuse de part et d'autre de cette couche. L'écoulement obtenu est statistiquement stationnaire et présente deux directions homogènes x et y . La source de turbulence étant elle-même homogène dans ces deux directions, les propriétés statistiques sont invariantes par translation dans les plans $z = \text{cste}$, et par rotation d'axe z . En référence à l'invariance par rotation des propriétés statistiques des champs étudiés, on parlera d'axisymétrie de la turbulence, bien que la configuration étudiée ne soit pas strictement axisymétrique. Cette propriété permet en particulier de considérer indifféremment les composantes du vecteur vitesse (u et v) dans le calcul des différentes grandeurs statistiques associées au champ turbulent.

En pratique, les moyennes sont effectuées à partir de champs discrets, en temps et en espace, et sur une période d'observation finie. Pour pallier à la perte d'information induite par la troncature temporelle, il faut évaluer le niveau de convergence des moyennes calculées. On définit à ce titre les fonctions d'autocorrélation spatiales et temporelles des grandeurs étudiées. Pour une grandeur $F(\mathbf{x}, t)$, on définit la fonction d'autocorrélation temporelle par :

$$G(\mathbf{x}, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} F(\mathbf{x}, t) F(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau \quad (1.11)$$

Lorsqu'un processus est stationnaire, cette fonction permet d'estimer un unique temps caractéristique de décorrélation temporelle T_d , au-delà duquel la fonction G s'annule. De la même façon on peut définir une fonction d'autocorrélation spatiale et une distance caractéristique de décorrélation du champ étudié. En pratique, et pour les écoulements turbulents, on estime la décorrélation temporelle et spatiale à partir des échelles de temps et de longueur associées aux tourbillons porteurs d'énergie (que l'on définira ultérieurement). Le niveau de convergence des moyennes statistiques s'évalue donc en fonction de ces échelles caractéristiques.

1.3 ÉQUATIONS AUX MOMENTS STATISTIQUES

1.3.1 Cas général

On considère un écoulement turbulent de fluide incompressible. On se place dans le cadre des écoulements statistiquement stationnaires. L'approche statistique classique amène à écrire chaque grandeur scalaire comme la somme de sa moyenne temporelle $\bar{\square}$ et d'une fluctuation :

$$F(\mathbf{x}, t) = \langle F(\mathbf{x}, t) \rangle_T + f(\mathbf{x}, t) \quad \text{avec} \quad \langle f(\mathbf{x}, t) \rangle_T = 0 \quad (1.12)$$

On rappelle l'écriture des équations de Navier-Stokes moyennes obtenues dans ces conditions :

$$\begin{cases} \frac{\partial \langle U_i \rangle_T}{\partial x_i} = 0 \\ \langle U_j \rangle_T \frac{\partial \langle U_i \rangle_T}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle P \rangle_T}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle_T}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle_T}{\partial x_j} \end{cases} \quad (1.13)$$

La non-linéarité des équations fait apparaître le tenseur de Reynolds $\langle u_i u_j \rangle_T$. On peut dériver les équations de transport des composantes de ce tenseur (voir par exemple Chassaing 2000) et classer les termes obtenus de la manière suivante :

$$\langle U_k \rangle_T \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle_T}{\partial x_k} = P_{ij} + \mathcal{D}_{ij}^u + \mathcal{D}_{ij}^p + \mathcal{D}_{ij}^v + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (1.14)$$

Les termes du membre de droite de l'équation (1.14) s'explicitent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_{ij} = - \left(\langle u_i u_k \rangle_T \frac{\partial \langle U_j \rangle_T}{\partial x_k} + \langle u_j u_k \rangle_T \frac{\partial \langle U_i \rangle_T}{\partial x_k} \right) & \text{Production par le mouvement moyen} \\ \mathcal{D}_{ij}^u = - \frac{\partial \langle u_i u_j u_k \rangle_T}{\partial x_k} & \text{Diffusion par fluctuation de vitesse} \\ \mathcal{D}_{ij}^p = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \langle p u_i \rangle_T}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle p u_j \rangle_T}{\partial x_i} \right) & \text{Diffusion par fluctuation de pression} \\ \mathcal{D}_{ij}^v = \nu \frac{\partial^2 \langle u_i u_j \rangle_T}{\partial x_k \partial x_k} & \text{Diffusion moléculaire} \\ \Pi_{ij} = \left\langle \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle_T & \text{Corrélation pression-déformation} \\ \varepsilon_{ij} = 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle_T & \text{Pseudo-dissipation} \end{array} \right. \quad (1.15)$$

On distingue dans ces bilans :

1. Un terme d'échange avec le mouvement moyen, c'est le terme de production dont on pourrait montrer que la trace se retrouve avec un signe opposé dans l'équation bilan de l'énergie cinétique moyenne $\frac{1}{2} \langle U_i \rangle_T \langle U_i \rangle_T$.
2. Des termes conservatifs qui peuvent se mettre sous la forme de divergence et disparaissent en turbulence homogène, il s'agit des termes d'advection ainsi que les trois types de diffusion.
3. Un terme d'échange avec l'énergie interne. C'est le terme de dissipation dont on pourrait montrer que la trace se retrouve avec un signe opposé dans l'équation de l'énergie interne moyenne $(C_v \langle T \rangle_T)$.
4. Enfin, le terme de corrélation pression-déformation, dont la trace est nulle et qui ne contribue pas au bilan d'énergie cinétique turbulente. Il exprime ainsi le transfert d'énergie local entre contraintes de Reynolds normales.

On signale à ce stade qu'on peut isoler la partie isotrope du tenseur de dissipation $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}$, on parle de "déviateur" du tenseur de dissipation. Ceci permet d'écrire

$$\Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} = \Pi_{ij} - e_{ij} - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (1.16)$$

et d'interpréter comme un terme de "redistribution" intercomposantes (à trace nulle) le terme $\phi_{ij} = \Pi_{ij} - e_{ij}$. Cette décomposition est souvent utilisée dans un contexte de modélisation mais il convient de garder à l'esprit que le terme ϕ_{ij} regroupe des phénomènes physiques de natures très différentes. Le comportement de ce terme dans les situations d'évolution temporelle d'une turbulence homogène initialement anisotrope est bien connu grâce à une abondance de résultats expérimentaux. On retiendra qu'il agit systématiquement dans le sens d'un retour à l'isotropie, avec des caractéristiques qui peuvent dépendre des propriétés de la turbulence initiale. Ces effets ont été largement étudiés et quantifiés et permettent la modélisation de ces termes dans ce type de situation. Il en va de manière radicalement différente en présence d'une surface de blocage. On observe en effet que le retour à l'isotropie est un mécanisme effectif au-delà d'une couche appelée "couche de surface" mais qu'il cesse de l'être en

deçà. Dans le voisinage de la paroi, ce terme redistributif est à l'origine de l'anisotropie qui favorise les contraintes normales associées aux vitesses tangentielles au détriment de celle associée à la vitesse normale. Dès les premières propositions complètes en matière de modélisation au second ordre (Lauder et al. 1975), la question de l'origine physique des mécanismes qui régissent la couche de surface est posée. Le manque de connaissances sur le sujet est une des limites qui freine le développement de nouveaux modèles.

1.3.2 Simplifications liées aux propriétés géométriques de la configuration

Les propriétés d'homogénéité et de symétrie de la configuration exposées dans le paragraphe 1.2, permettent de réduire à deux équations indépendantes les neuf équations décrites par l'équation tensorielle (1.14). La première est associée indifféremment aux contraintes de Reynolds normales $\overline{u^2}$ ou $\overline{v^2}$, tandis que la deuxième est associée à la contrainte de Reynolds normale $\overline{w^2}$. L'absence de cisaillement moyen permet d'écrire finalement :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial \overline{u^2 w}}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u^2}}{\partial z^2} + 2 \frac{\overline{p}}{\rho} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - 2\nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k} \\ 0 &= -\frac{\partial \overline{w^3}}{\partial z} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\overline{p w}}{\rho} \right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{w^2}}{\partial z^2} + 2 \frac{\overline{p}}{\rho} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} - 2\nu \frac{\partial \overline{w}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{w}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.17)$$

1.4 ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU CHAMP AU VOISINAGE D'UNE SURFACE DE BLOCAGE

1.4.1 Surface libre

On rappelle les résultats de l'analyse asymptotique, basée sur des développements limités des fluctuations de vitesse et de pression au voisinage d'une surface libre (voir par exemple Handler et al. 1993). Cette analyse permet d'étudier dans le voisinage de la surface libre, les variations du champ de vitesse et de pression dans la direction normale à la surface. Les conditions limites de surface libre (absence de tout frottement visqueux à la surface), ainsi que les équations de continuité et de la dynamique imposent l'évolution asymptotique suivante pour les fluctuations de pression et de vitesse (par convention z est la direction normale à la surface) :

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_2 z^2 + \mathcal{O}(z^4) \\ v &= b_0 + b_2 z^2 + \mathcal{O}(z^4) \\ w &= c_1 z + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4) \\ \frac{p}{\rho} &= p_0 + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4) \end{aligned} \quad (1.18)$$

À ce stade, on pourra remarquer que, dans ce cas, la pression admet un gradient normal nul à la surface, qui est une conséquence de l'écriture de l'équation dynamique dans le plan de la surface libre. D'après les résultats de l'équation (1.18), on peut déduire un développement limité à l'ordre 3 pour la

vorticité $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$:

$$\begin{aligned}\omega_x &= (\partial_y c_1 - 2b_2) z + O(z^3) \\ \omega_y &= (2a_2 - \partial_x c_1) z + O(z^3) \\ \omega_z &= (\partial_x b_0 - \partial_y a_0) + (\partial_x b_2 - \partial_y a_2) z^2 + O(z^3)\end{aligned}\quad (1.19)$$

On met ainsi en évidence l'orientation de la vorticité au voisinage d'une surface libre qui traduit l'absence de cisaillement à la surface ($\partial_z u = \partial_z v = 0$). Seule la composante normale est non nulle, ce qui justifie la présence de tourbillons d'axe vertical au voisinage de la surface. Ces tourbillons, "attachés" sont rencontrés dans les écoulements à surface libre. À partir de simulations directes de canal plan à surface libre, Pan et Banerjee (1995) proposent des mécanismes de formation de ces tourbillons.

Termes de l'équation bilan des tensions de Reynolds

Compte-tenu des développements limités des fluctuations de vitesse et de pression obtenus plus haut, on peut établir les développements limités des différents termes de l'équation bilan des contraintes de Reynolds (équation 1.17). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{11}^u &= -\overline{a_0^2 c_2} + O(z^2) & \mathcal{D}_{33}^u &= O(z^2) \\ \mathcal{D}_{11}^v &= \frac{4\nu \overline{a_0 a_2}}{2p_0 \partial_x a_0} + O(z^2) & \mathcal{D}_{33}^p &= -2\overline{p_0 c_1} + O(z^2) \\ \Pi_{11} &= \frac{2p_0 \overline{\partial_x a_0}}{2p_0 \partial_x a_0} + O(z^2) & \mathcal{D}_{33}^v &= 2\nu \overline{c_1^2} + O(z^2) \\ \varepsilon_{11} &= 2\nu (\overline{\partial_y a_0^2} + \overline{\partial_x a_0^2}) + O(z^2) & \Pi_{33} &= 2\overline{p_0 c_1} + O(z^2) \\ & & \varepsilon_{33} &= 2\nu \overline{c_1^2} + O(z^2)\end{aligned}\quad (1.20)$$

Dans le bilan des contraintes normales, on remarque que les termes associés à la fluctuation de pression d'une part, et à la viscosité d'autre part se compensent exactement au voisinage de la surface libre.

1.4.2 Paroi adhérente

De la même manière, on peut effectuer l'analyse asymptotique des fluctuations de vitesse et de pression au voisinage d'une paroi adhérente. En considérant les conditions limites de paroi adhérente et la dégénérescence de l'équation de continuité selon laquelle $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}u &= a_1 z + a_2 z^2 + O(z^3) \\ v &= b_1 z + b_2 z^2 + O(z^3) \\ w &= c_2 z^2 + O(z^3) \\ \frac{p}{\rho} &= p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + O(z^3)\end{aligned}\quad (1.21)$$

L'écriture de l'équation de la dynamique dans le plan de la paroi permet d'obtenir une relation entre p_1 et c_2 :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad \text{d'où l'égalité : } p_1 = \nu c_2 \quad (1.22)$$

Le développement limité obtenu sur les composantes du champ de vitesse permet d'obtenir un développement limité à l'ordre 2 pour le champ de vorticité :

$$\begin{aligned}\omega_x &= -b_1 - 2b_2 z + O(z^2) \\ \omega_y &= a_1 + 2a_2 z + O(z^2) \\ \omega_z &= (\partial_x b_1 - \partial_y a_1) z + O(z^2)\end{aligned}\quad (1.23)$$

Cette fois, il faut remarquer que la vorticité est orientée dans le plan de la surface au voisinage de celle-ci, conséquence également de la condition limite d'adhérence ($\partial_y u = \partial_x v = 0$).

Termes du bilan des tensions de Reynolds

De la même manière que précédemment, on peut exprimer le développement limité des différents termes qui constituent les équations bilan des tensions de Reynolds normales. Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{11}^u &= O(z^2) & \mathcal{D}_{33}^u &= O(z^2) \\
 \mathcal{D}_{11}^v &= 2\nu\overline{a_1^2} + 6\nu\overline{a_1 a_2}z + O(z^2) & \mathcal{D}_{33}^p &= -2\overline{p_0 c_2}z + O(z^2) \\
 \Pi_{11} &= \frac{2\nu\overline{a_1^2}}{2\overline{p_0 c_2}a_1}z + O(z^2) & \mathcal{D}_{33}^v &= O(z^2) \\
 \varepsilon_{11} &= 2\nu\overline{a_1^2} + O(z^2) & \Pi_{33} &= 2\overline{p_0 c_2}z + O(z^2) \\
 & & \varepsilon_{33} &= O(z^2)
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

Au contact de la paroi adhérente, les termes visqueux (diffusion moléculaire et dissipation) s'équilibrent au premier ordre dans le bilan de la composante tangentielle. Dans le bilan de la composante normale, seuls les deux termes impliquant la fluctuation de pression sont non-nuls au premier ordre. Les développements limités établis dans ce paragraphe seront utilisés dans cette étude afin de valider les comportements asymptotiques obtenus. Ils permettent également d'analyser *a priori* le comportement asymptotique de variables composites, tel que le facteur d'isotropie qui sera défini ultérieurement.

1.5 CORRÉLATION PRESSION-DÉFORMATION ET TRANSFERT INTERCOMPOSANTES

1.5.1 Distinction partie lente/partie rapide de la corrélation pression-déformation

En écoulement incompressible, la pression moyenne et la fluctuation de pression, sont solutions d'une équation de Poisson. Ainsi, si l'on considère un domaine fluide Ω limité par une surface $\mathcal{S}$, la fluctuation de pression p est gouvernée par l'équation :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_j} = -2 \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \tag{1.25}$$

avec, comme condition à la limite :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \phi \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$$

où n désigne la direction normale à la surface et ϕ est déterminé par la dégénérescence de l'équation de quantité de mouvement exprimée localement sur $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}$ contient la surface de blocage, on pourra considérer que

- $\phi = 0$ si c'est une surface libre ;
- ϕ est donné par l'équation (1.22) si c'est une paroi adhérente.

L'analyse de cette équation permet d'identifier les mécanismes qui interviennent dans le phénomène de redistribution à travers la corrélation pression-déformation. La fluctuation de pression étant solution d'une équation linéaire, on peut la voir comme la somme de trois contributions :

1. Une contribution dite "rapide" $p^{(r)}$, directement liée au mouvement moyen et telle que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p^{(r)}}{\partial x_j \partial x_j} &= -2 \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (1.26)$$

2. Une contribution dite "lente" $p^{(l)}$, associée aux mouvements fluctuants vérifiant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p^{(l)}}{\partial x_j \partial x_j} &= - \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (1.27)$$

3. Une contribution de surface $p^{(\sigma)}$, encore appelée pression de Stokes, solution de l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p^{(\sigma)}}{\partial x_j \partial x_j} &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} &= \phi \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (1.28)$$

L'absence d'écoulement moyen dans la configuration que l'on se propose d'étudier permet d'éliminer la partie *rapide* et de se focaliser sur la partie *lente* de la corrélation pression-déformation.

1.5.2 Analyse instantanée du transfert intercomposantes

On propose d'analyser la corrélation pression-déformation en répertoriant les événements élémentaires qui contribuent à générer du transfert intercomposantes. Dans cette optique, on utilise le résultat de Bradshaw et Koh (1981) qui proposent d'écrire les termes sources de l'équation de Poisson obtenue pour l'évolution de la pression en écoulement incompressible :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_j} = - \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (1.29)$$

En faisant intervenir la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ et sa partie antisymétrique $R_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$, on montre facilement que l'équation (1.29) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_j} = R_{ij} R_{ij} - S_{ij} S_{ij} = S^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 \quad (1.30)$$

où S^2 est le second invariant du tenseur de déformation et Ω^2 exprime la norme au carré du rotationnel du vecteur vitesse. Cette décomposition invite à pratiquer une analyse événementielle. Bradshaw et Koh (1981) distinguent les effets liés aux événements de rotation ("spin"), où $S^2 = 0$ et $\Omega^2 = cste$, qui créent des minima de pression, de ceux liés aux événements de collision ("splat"), où $S^2 = cste$ et

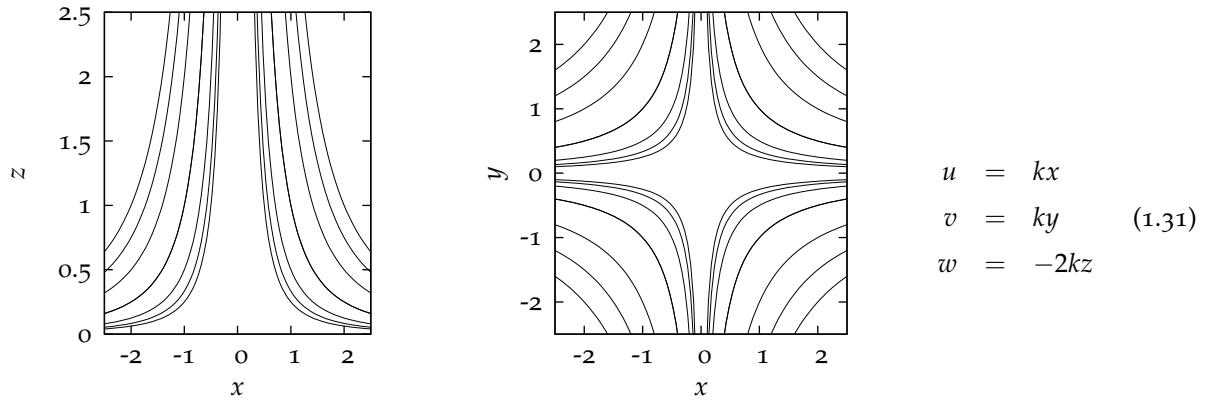


FIG. 1.2 – Illustration d'un évènement à déformation pure de type collision : lignes de courant.

$\Omega^2 = 0$, associés à des maxima de pression. Campagne (2006) en déduit quatre types d'évènements, observables localement au voisinage d'une surface libre, qui font le contenu de la corrélation pression-déformation Π_{33} dans le bilan des tensions de Reynolds normales (Cf. équation 1.17) :

1. Les évènements de collision (Cf. figure 1.2) qui se manifestent sous forme d'éjections à partir de la surface ou d'impacts sur la surface. Ces évènements élémentaires se traduisent essentiellement par de la déformation des particules fluides, comme l'illustre la solution à déformation pure présentée figure 1.2. Un maximum de pression s'établit au point d'arrêt dans ce cas. C'est alors le signe de la déformation qui fixe le signe de la contribution à la corrélation pression-déformation Π_{33} . Ainsi un impact ($\frac{\partial w}{\partial z} < 0, p > 0$) contribue négativement à la corrélation pression-déformation Π_{33} tandis qu'une éjection ($\frac{\partial w}{\partial z} > 0, p > 0$) contribue positivement à Π_{33} .
2. Les évènements de rotation sont nécessairement des tourbillons (à noyau solide) d'axe z en raison de l'absence de cisaillement à la surface libre. La dépression créée au cœur du tourbillon combinée à une compression verticale ($\frac{\partial w}{\partial z} > 0$) contribue au signe positif de Π_{33} , et inversement si elle est combinée à un étirement vertical ($\frac{\partial w}{\partial z} < 0$).

Du fait de l'action de la viscosité au voisinage immédiat de la paroi, il est difficile d'établir une classification précise des évènements dans ce cas. Du point de vue des collisions, elles auront nécessairement lieu à une certaine distance de la paroi si elles existent. Quant aux évènements de rotation, la vorticité étant cette fois orientée dans le plan de la surface, il n'est pas évident de définir un mécanisme élémentaire alliant déformation verticale et rotation dans un plan parallèle à la surface.

MÉTHODES NUMÉRIQUES

2

SOMMAIRE

2.1	SOLVEUR NAVIER-STOKES POUR UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE	21
2.1.1	Équations de conservation	21
2.2	ALGORITHME GÉNÉRAL	21
2.2.1	Méthodes de projection et intégration temporelle	21
2.2.2	Résolution du système sur le domaine intérieur Ω	23
2.2.3	Conditions aux limites sur le domaine extérieur $\partial\Omega$	24
2.3	DISCRÉTISATION SPATIALE DANS LES DIRECTIONS PÉRIODIQUES	24
2.3.1	Incompatibilité Spectral Fourier/Paroi Adhérente	24
2.3.2	Méthode spectrale	26
2.4	DISCRÉTISATION DE LA DIRECTION NORMALE	27
2.4.1	Schémas aux différences finies	27
2.4.2	Utilisation d'un maillage décalé	29
2.4.3	Distribution des points dans la direction x_3	29
2.5	DÉRIVATION DE SCHÉMAS COMPACTS ADAPTÉS	31
2.5.1	Opérateurs mis en jeu	31
2.5.2	Obtention d'un schéma compact de type dérivation (Type uu et pp)	31
2.5.3	Obtention d'un schéma compact de type dérivation (Type up et pu)	33
2.5.4	Exemple d'obtention d'un schéma compact pour un opérateur différentiel	34
2.5.5	Dérivation de schémas d'interpolation	35
2.5.6	Traitement des zones frontières	36
2.6	RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'HELMHOLTZ	38
2.6.1	Note sur la résolution des systèmes linéaires	39
2.6.2	Résolution par diagonalisation de $\mathcal{D}_2$ (méthode $H2$)	39
2.7	VALIDATION EN CANAL PLAN TURBULENT	41
2.7.1	Méthode de résolution	42
2.7.2	Paramètres de simulation	43
2.7.3	Confrontation des résultats	43
	SYNTHÈSE	45

POUR répondre aux besoins de cette étude, un nouveau solveur de type Navier-Stokes est développé. Un code mixte pseudo-spectral/différences finies permet de traiter la condition limite de paroi adhérente, ce que le précédent code de calcul tout spectral ne pouvait pas faire. L'accent est porté sur la précision des schémas de discrétisation, au détriment de la flexibilité de construction du maillage. Cette spécificité est en accord avec l'objectif à plus long terme de cet outil, à savoir l'étude de la

turbulence par simulation directe dans des configurations à caractère académique. On présente ici les points clés assurant la validité du solveur, ainsi que les éléments essentiels répondant à la spécificité du problème.

2.1 SOLVEUR NAVIER-STOKES POUR UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE

L'extension de la configuration d'étude de l'effet de blocage, à des conditions limites de parois adhérentes nécessite le développement d'un nouveau solveur Navier-Stokes. Deux des trois directions étant considérées comme homogènes, elles peuvent être traitées par une méthode spectrale qui repose sur l'utilisation de transformées de Fourier. La condition limite de paroi adhérente imposée dans la dernière direction, n'est pas incompatible avec un code spectral, la base de l'espace transformé pouvant être construite à l'aide de polynômes de type Chebyshev. Cependant, pour un minimum de flexibilité, notre choix s'est porté vers des schémas aux différences finies d'ordre élevé. A terme, cela permet en effet de traiter d'autres types de configurations, et de simuler des écoulements à développement spatial comme les jets, les sillages ou encore la couche de mélange.

2.1.1 Équations de conservation

Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible sont données par :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (2.2)$$

Par la suite, les termes (vectoriels) non-linéaire et visqueux seront notés respectivement $\mathcal{N}$ et $\mathcal{L}$ dans l'équation de la dynamique, correspondant à la forme canonique suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{N} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \mathcal{L} \quad (2.3)$$

En notation indicielle, ces équations s'écrivent aussi :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \end{cases} \quad (2.4)$$

2.2 ALGORITHME GÉNÉRAL

2.2.1 Méthodes de projection et intégration temporelle

La méthode de projection s'appuie sur la décomposition de Hodge de tout champ vectoriel de manière unique en un champ à divergence nulle et le gradient d'un potentiel.

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_d + \nabla \chi \quad \text{avec } \nabla \cdot \mathbf{v}_d = 0 \quad (2.5)$$

On définit $\mathbf{P}$ comme le projecteur vers l'espace des champs à divergence nulle de $\mathbb{R}^3$, soit ici $\mathbf{P}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_d$. On note alors que l'équation (2.3) peut s'écrire :

$$\mathcal{L} - \mathcal{N} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P \quad \text{avec} \quad \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \quad (2.6)$$

et traduit de fait une décomposition de Hodge pour le vecteur $\mathcal{L} - \mathcal{N}$ avec $\mathbf{P}(\mathcal{L} - \mathcal{N}) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$.

p	0	1	2
α_p	8/15	5/12	3/4
β_p	0	-17/60	-5/12
$\gamma_p = \alpha_p + \beta_p$	8/15	2/15	1/3

TAB. 2.1 – Coefficients du schéma d'intégration temporelle de Runge-Kutta 3

Par ailleurs, on retrouve la pression P comme solution d'une équation de Poisson :

$$\frac{1}{\rho_0} \Delta P = \nabla \cdot (\mathcal{L} - \mathcal{N}) \quad (2.7)$$

En introduisant une discrétisation temporelle et en notant n et $n + 1$ deux pas de temps successifs, la méthode de projection consiste à :

- estimer un champ de vitesse intermédiaire $\mathbf{u}_*$ (étape de prédiction) à l'aide de (2.3) et du champ $\mathbf{u}^n$;
- calculer le champ de pression à partir de l'équation de Poisson 2.7 dont le terme source est estimé à l'aide du champ $\mathbf{u}_*$;
- corriger le champ de vitesse $\mathbf{u}^{n+1}$ à l'aide du champ de pression calculé et tenant compte de la condition de divergence nulle.

La dernière étape revient à projeter le champ prédit dans l'espace des champs à divergence nulle. L'équation de la continuité est donc découplée des équations de la dynamique et la pression apparaît comme un terme correctif permettant d'assurer la condition d'incompressibilité.

Pour construire une méthode de projection à ordre élevé, il faut lui intégrer le schéma de discrétisation temporelle. La méthode de projection utilisée ici repose sur la discrétisation temporelle semi-implicite exposée dans l'équation (2.8) qui est globalement d'ordre 2 (Brown et al. 2001). Les termes visqueux sont exprimés par un schéma implicite de Cranck-Nicholson d'ordre 2, tandis que les termes non-linéaires sont discrétisés par un schéma de type Runge Kutta 3. L'assemblage des deux schémas implique une incrémentation par chaque sous-pas du schéma de Runge Kutta à l'aide des coefficients indiqués dans le tableau 2.1. L'équation (2.10) traduit les conditions limites sur les frontières du domaine Ω . On indique par $\partial\Omega$ la frontière de ce domaine et $\mathbf{u}_b$ la valeur du champ de vitesse imposée par la condition limite sur les frontières.

$$\text{Schéma global :} \quad \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P^{n+\frac{1}{2}} = -\mathcal{N}^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{L}^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

$$\text{Sous-pas (} p \in [0, 1, 2] \text{) :} \quad \frac{\mathbf{u}^{p+1} - \mathbf{u}^p}{\Delta t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P^{p+\frac{1}{2}} = -\alpha_p \mathcal{N}^p - \beta_p \mathcal{N}^{p-1} + \frac{1}{2} (\mathcal{L}^p + \mathcal{L}^{p+1}) \quad (2.9)$$

$$\text{Condition limite} \quad \mathbf{u}^{n+1} \Big|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b^{n+1} \quad (2.10)$$

Si l'on analyse le schéma temporel, on observe que l'algorithme exposé précédemment, avec la résolution d'une équation de Poisson sur le champ de pression constitue une bonne approximation, mais ne conserve pas un ordre de précision élevé lorsque les effets de la viscosité sont non négligeables. Pour expliquer cela il faut considérer dans l'équation (2.9) le terme visqueux que l'on veut calculer de manière implicite. En passant par une étape de prédiction ce terme sera calculé par rapport au champ de vitesse prédit et non au champ de vitesse au pas de temps suivant (calculé à l'étape de correction). Le traitement implicite des termes visqueux est cependant nécessaire pour conserver des pas de temps raisonnablement grands malgré le surcoût engendré par la résolution d'un système linéaire. On va donc résoudre l'équation de Poisson sur un champ de *pression modifiée* pour prendre en compte cet effet induit par le schéma de discrétisation temporelle.

Notons que les termes du membre de droite de l'équation (2.8) sont évalués au demi-pas de temps par leurs schéma d'intégration respectifs. Par cohérence, le champ P calculé correspond également à une évaluation au demi-pas de temps.

2.2.2 Résolution du système sur le domaine intérieur Ω

L'intégration temporelle manipule des champs intermédiaires indicés par $p = 0, 1, 2$. L'étape de prédiction est réalisée de la manière suivante :

$$\frac{\mathbf{u}_* - \mathbf{u}^p}{\Delta t} = -\alpha_p \mathcal{N}^p - \beta_p \mathcal{N}^{p-1} - \frac{1}{\rho_0} \gamma_p \nabla P^{p-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \gamma_p (\mathcal{L}^p + \mathcal{L}_*) \quad (2.11)$$

L'étape de correction est réalisée par l'intermédiaire d'un champ potentiel ϕ (pression modifiée) :

$$\mathbf{u}^{p+1} = \mathbf{u}_* - \frac{1}{\rho_0} \gamma_p \Delta t \nabla \phi^{p+1} \quad (2.12)$$

En imposant $\nabla \cdot \mathbf{u}^{p+1} = 0$ dans l'équation précédente on obtient une équation de Poisson qui permet de déterminer la valeur du champ potentiel ϕ^{p+1} :

$$\Delta \phi^{p+1} = \frac{\rho_0}{\gamma_p \Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}_* \quad (2.13)$$

On peut alors réaliser l'étape (2.12). La discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement (2.11) établit le lien entre ϕ et le champ de pression :

$$P^{p+\frac{1}{2}} = P^{p-\frac{1}{2}} + \phi^{p+1} - \frac{1}{2} \gamma_p \Delta t \nu \Delta \phi^{p+1} = P^{p-\frac{1}{2}} + \phi^{p+1} - \frac{1}{2} \nu \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_* \quad (2.14)$$

En additionnant (2.11) et (2.12) d'une part, et en introduisant la pression calculée $P^{p+\frac{1}{2}}$ d'autre part, on obtient :

$$\frac{\mathbf{u}^{p+1} - \mathbf{u}^p}{\Delta t} = \alpha_p \mathcal{N}^p + \beta_p \mathcal{N}^{p-1} - \frac{1}{\rho_0} \gamma_p \nabla P^{p+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \gamma_p (\mathcal{L}^p + \mathcal{L}_*) - \frac{1}{2} \nu \gamma_p \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_*) \quad (2.15)$$

On peut déduire de (2.12) les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u}^{p+1} &= \nabla \times \mathbf{u}_* \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^{p+1}) &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_*) \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{p+1}) - \nabla^2 \mathbf{u}^{p+1} &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_*) - \nabla^2 \mathbf{u}_* \end{aligned}$$

De $\nabla \cdot \mathbf{u}^{p+1} = 0$, on déduit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_p}{2} \mathcal{L}_* - \frac{\nu \gamma_p}{2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_*) &= \frac{\nu \gamma_p}{2} (\nabla^2 \mathbf{u}_* - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_*)) \\ &= \frac{\gamma_p}{2} \mathcal{L}^{p+1} \end{aligned}$$

En remplaçant cette expression dans (2.15), on retrouve la discrétisation temporelle énoncée en (2.9). On met ainsi en évidence l'importance du terme correctif dans la mise à jour de la pression. Celui-ci permet d'utiliser $\mathcal{L}^{p+1}$ dans l'intégration au lieu de $\mathcal{L}_*$ qui n'a pas de réalité physique *a priori*. Le terme correctif $\frac{1}{2} \nu \nabla \cdot \mathbf{u}_*$ dans le calcul de la pression (Cf. équation (2.14)) permet de conserver une précision au second ordre (Brown et al. 2001).

2.2.3 Conditions aux limites sur le domaine extérieur $\partial\Omega$

L'utilisation de conditions limites consistantes avec la formulation de la méthode de projection, conditionne la précision globale du schéma, notamment près des frontières, régions capitales dans notre étude.

Comme préconisé par Brown et al. (2001), nous choisissons dans la direction non périodique des conditions limites pour les champs intermédiaires ϕ et $\mathbf{u}_*$, consistantes avec (2.10). La principale difficulté consiste à imposer des conditions limites sur le champ $\mathbf{u}_*$, qui n'a *a priori* aucune réalité physique.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_*|_{\partial\Omega} &= \mathbf{u}_b^{p+1} \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_*|_{\partial\Omega} &= \mathbf{t} \cdot (\nabla \phi^p - \mathbf{u}_b^{p+1})|_{\partial\Omega} \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \phi^{p+1}|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ces conditions limites sont donc de type Dirichlet pour le champ $\mathbf{u}_*$ (imposées à l'étape de prédiction) et de type Neumann pour le champ potentiel ϕ (imposées au moment de la résolution de l'équation de Poisson). On remarque d'autre part que la condition appliquée à ϕ n'impose pas un gradient de pression constant sur la frontière grâce au terme correctif de mise à jour de la pression.

2.3 DISCRÉTISATION SPATIALE DANS LES DIRECTIONS PÉRIODIQUES

2.3.1 Incompatibilité Spectral Fourier/Paroi Adhérente

Dans le travail de Campagne et al. (2005), la condition limite de surface libre était traitée dans un espace de Fourier tronqué, la séparation sinus/cosinus permettant d'imposer l'antisymétrie/symétrie des champs par rapport à une surface plane. On démontre ici qu'une telle méthode de résolution, associée à une condition limite de surface adhérente, n'est plus compatible avec l'équation de continuité.

Opérateur de continuité et propriétés

On définit l'opérateur de continuité $\mathcal{C}$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

On peut montrer que :

$$\mathcal{C}(x_1, x_2, -x_3) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, -x_3) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, -x_3) - \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, -x_3) \quad (2.17)$$

Cas de la surface libre

La condition de surface libre pour le plan frontière $\mathcal{P}_f$ d'équation $x_3 = 0$ impose

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, 0) &= u_{1_0}(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, 0) &= u_{2_0}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, 0) &= 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, on peut construire un écoulement symétrique par rapport à $\mathcal{P}_f$ en posant :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, x_2, -x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1, x_2, -x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= -u_3(x_1, x_2, -x_3) \end{cases}$$

Par construction, on impose u_1 et u_2 paires et u_3 impaire en x_3 . Cette condition de symétrie est bien compatible avec l'absence de cisaillement sur les composantes tangentielles de la vitesse, imposée par la condition limite de surface libre. Le problème possède donc une solution dans un espace de Fourier réduit constitué de transformées de Fourier paires et impaires.

Dans ce cas, $\mathcal{C}(x_1, x_2, -x_3) = \mathcal{C}(x_1, x_2, x_3)$. La fonction $\mathcal{C}$ est donc symétrique par rapport au plan $x_3 = 0$. L'équation de continuité $\mathcal{C} = 0$ est automatiquement vérifiée sur le domaine symétrique si elle est vérifiée sur le domaine initial.

Cas de la paroi adhérente

Une condition de paroi adhérente impose cette fois :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, 0) &= 0 \\ u_2(x_1, x_2, 0) &= 0 \\ u_3(x_1, x_2, 0) &= 0 \end{cases}$$

Il faudrait donc imposer des fonctions impaires pour les trois composantes de la vitesse afin de satisfaire la condition limite :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) &= -u_1(x_1, x_2, -x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= -u_2(x_1, x_2, -x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= -u_3(x_1, x_2, -x_3) \end{cases}$$

Cependant dans ce cas, on obtient :

$$\mathcal{C}(x_1, x_2, -x_3) = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \quad (2.18)$$

L'équation de continuité est vérifiée sur tout le domaine si $\mathcal{C}(x_1, x_2, -x_3) = \mathcal{C}(x_1, x_2, x_3) = 0$, i.e. si :

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \quad (2.19)$$

La condition de paroi adhérente conduit directement à $u_3 = 0$ sur le domaine entier. Cette condition n'est donc pas acceptable dans un code spectral. Par contre, on peut concevoir cette contrainte de manière locale lors d'un calcul par différences finies. Localement à la paroi, entre deux points de maillages, cette condition est cohérente avec le développement asymptotique de la composante normale du champ de vitesse (Cf. équation (1.21)). C'est la technique classique de "points fantômes" couramment utilisée lors d'une résolution par différence finies.

2.3.2 Méthode spectrale

Les directions x_1 et x_2 étant périodiques, il est avantageux d'y appliquer une méthode pseudo-spectrale. L'utilisation de modes de Fourier apporte précision et rapidité de résolution. Le passage d'un espace à l'autre engendre une erreur de l'ordre de l'erreur machine et le calcul des transformées bénéficie des algorithmes de transformée de Fourier rapide. La résolution d'équations différentielles dans l'espace spectral associé se fait de manière directe grâce à la simplification des opérateurs de différentiation. Dans ces méthodes, l'évaluation des termes non-linéaires est moins coûteuse dans l'espace physique. Un aller-retour dans l'espace physique est donc nécessaire, ce qui justifie l'appellation "pseudo-spectrales" de ces méthodes. Le temps de calcul est donc déterminé par le nombre d'opérations nécessaires pour changer d'espace. Ce dernier évolue en $n \log(n)$, et surclasse les schémas de discrétisation classiques (différences finies, volumes finis) qui impliquent des inversions de matrices.

Désormais, on utilise les notations suivantes

- La transformée de Fourier de f sera notée $\hat{f}$.
- Les nombres d'onde selon x_1 et x_2 seront notés respectivement k_1 et k_2 , avec $\kappa = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$

Par convention, la direction x_3 est choisie perpendiculaire à la paroi et on y applique un schéma aux différences finies. La discrétisation est explicitée dans le paragraphe 2.4.1. A ce stade, on note pour tout champ scalaire f , l'expression des dérivées premières et seconde à l'aide des opérateurs $\mathcal{D}_1(f)$ et $\mathcal{D}_2(f)$.

Les opérateurs de dérivées par rapport aux trois directions de l'espace s'expriment donc comme suit :

$$\begin{array}{ll} \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = ik_1 \hat{f} & \widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}} = -k_1^2 \hat{f} \\ \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = ik_2 \hat{f} & \widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}} = -k_2^2 \hat{f} \\ \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_3}} = \mathcal{D}_1(\hat{f}) & \widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}} = \mathcal{D}_2(\hat{f}) \end{array}$$

L'étape de prédiction explicitée en (2.11) devient :

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{u}_1^* - \widehat{u}_1^p}{\Delta t} &= -\alpha_p \widehat{\mathcal{N}}_1^p - \beta_p \widehat{\mathcal{N}}_1^{p-1} - \frac{i\gamma_p k_1}{\rho_0} \widehat{p}^{p-\frac{1}{2}} - \frac{\nu\gamma_p}{2} (\kappa^2 (\widehat{u}_1^* + \widehat{u}_1^p) - \mathcal{D}_2(\widehat{u}_1^* + \widehat{u}_1^p)) \\
\frac{\widehat{u}_2^* - \widehat{u}_2^p}{\Delta t} &= -\alpha_p \widehat{\mathcal{N}}_2^p - \beta_p \widehat{\mathcal{N}}_2^{p-1} - \frac{i\gamma_p k_2}{\rho_0} \widehat{p}^{p-\frac{1}{2}} - \frac{\nu\gamma_p}{2} (\kappa^2 (\widehat{u}_2^* + \widehat{u}_2^p) - \mathcal{D}_2(\widehat{u}_2^* + \widehat{u}_2^p)) \\
\frac{\widehat{u}_3^* - \widehat{u}_3^p}{\Delta t} &= -\alpha_p \widehat{\mathcal{N}}_3^p - \beta_p \widehat{\mathcal{N}}_3^{p-1} - \frac{\gamma_p}{\rho_0} \mathcal{D}_1(\widehat{p}^{p-\frac{1}{2}}) - \frac{\nu\gamma_p}{2} (\kappa^2 (\widehat{u}_3^* + \widehat{u}_3^p) - \mathcal{D}_2(\widehat{u}_3^* + \widehat{u}_3^p))
\end{aligned}$$

L'étape de correction s'effectue grâce aux relations :

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_1^{p+1} &= \widehat{u}_1^* - \frac{i\gamma_p \Delta t}{\rho_0} k_x \phi^{p+1} \\
\widehat{u}_2^{p+1} &= \widehat{u}_2^* - \frac{i\gamma_p \Delta t}{\rho_0} k_y \phi^{p+1} \\
\widehat{u}_3^{p+1} &= \widehat{u}_3^* - \frac{\gamma_p \Delta t}{\rho_0} \mathcal{D}_1(\phi^{p+1})
\end{aligned} \tag{2.20}$$

où ϕ est résolu à partir de l'équation :

$$\kappa^2 \cdot \widehat{\phi}^{p+1} - \mathcal{D}_2(\widehat{\phi}^{p+1}) = -\frac{\rho_0}{\gamma_p \Delta t} (ik_1 \widehat{u}_1^* + ik_2 \widehat{u}_2^* + \mathcal{D}_1(\widehat{u}_3^*)) \tag{2.21}$$

La pression est mise à jour par la relation :

$$\widehat{p}^{p+\frac{1}{2}} = \widehat{p}^{p-\frac{1}{2}} + \widehat{\phi}^{p+1} - \frac{\nu\rho_0}{2} (ik_x \widehat{u}_1^* + ik_y \widehat{u}_2^* + \mathcal{D}_1(\widehat{u}_3^*)) \tag{2.22}$$

L'évaluation de $\widehat{\mathcal{N}}^{p+1}$ au sous-pas suivant est effectuée en calculant les termes $u_i u_j$ dans l'espace physique, conformément au principe des méthodes pseudo-spectrales, soit :

$$\widehat{\mathcal{N}}_j^{p+1} = ik_1 \widehat{u}_1 \widehat{u}_j^{p+1} + ik_2 \widehat{u}_2 \widehat{u}_j^{p+1} + \mathcal{D}_1(\widehat{u}_3 \widehat{u}_j^{p+1}) \quad \text{pour } j = 1, 2, 3 \tag{2.23}$$

On aboutit finalement à la résolution de quatre équations de Helmholtz pour chaque sous-pas :

$$\mathcal{D}_2(\psi) - \Gamma\psi = \lambda \tag{2.24}$$

2.4 DISCRÉTISATION DE LA DIRECTION NORMALE

2.4.1 Schémas aux différences finies

L'expression des opérateurs de dérivée dans la direction normale à la surface de blocage se fait par l'intermédiaire de schémas aux différences finies. Ce type de discrétisation permet d'obtenir un ordre de précision élevé sur les maillages structurés. Les schémas de types compacts, introduits par Hirsh

Variable(ψ)	C.L.	Γ	λ
$\hat{u}_1^*$	Dir.	$\frac{2}{v\Delta t\gamma_p} + \kappa^2$	$\frac{2}{v\gamma_p} \left(-\frac{\hat{u}_1^p}{\Delta t} + \alpha_p \widehat{\mathcal{N}}_1^p + \beta_p \widehat{\mathcal{N}}_1^{p-1} + \frac{i\gamma_p}{\rho_0} k_1 \widehat{P}^{p-\frac{1}{2}} \right) + \kappa^2 \hat{u}_1^p - \mathcal{D}_2(\hat{u}_1^p)$
$\hat{u}_2^*$	Dir.	$\frac{2}{v\Delta t\gamma_p} + \kappa^2$	$\frac{2}{v\gamma_p} \left(-\frac{\hat{u}_2^p}{\Delta t} + \alpha_p \widehat{\mathcal{N}}_2^p + \beta_p \widehat{\mathcal{N}}_2^{p-1} + \frac{i\gamma_p}{\rho_0} k_2 \widehat{P}^{p-\frac{1}{2}} \right) + \kappa^2 \hat{u}_2^p - \mathcal{D}_2(\hat{u}_2^p)$
$\hat{u}_3^*$	Dir.	$\frac{2}{v\Delta t\gamma_p} + \kappa^2$	$\frac{2}{v\gamma_p} \left(-\frac{\hat{u}_3^p}{\Delta t} + \alpha_p \widehat{\mathcal{N}}_3^p + \beta_p \widehat{\mathcal{N}}_3^{p-1} + \frac{\gamma_p}{\rho_0} \mathcal{D}_1(\widehat{P}^{p-\frac{1}{2}}) \right) + \kappa^2 \hat{u}_3^p - \mathcal{D}_2(\hat{u}_3^p)$
$\hat{\phi}^{p+1}$	Neu.	κ^2	$\frac{\rho_0}{\gamma_p \Delta t} (ik_1 \hat{u}_1^* + ik_2 \hat{u}_2^* + \mathcal{D}_1(\hat{u}_3^*))$

TAB. 2.2 – Récapitulatif des équations de Helmholtz à résoudre.

(1975), dont la formulation a été généralisée par Lele (1992), permettent notamment d’obtenir des ordres de précision élevés à moindre coût.

Ce type de schéma est basé sur des relations implicites entre l’expression de la dérivée k -ième d’une fonction et celle de la fonction elle-même. On peut généraliser l’expression de la dérivée k -ième de la façon suivante :

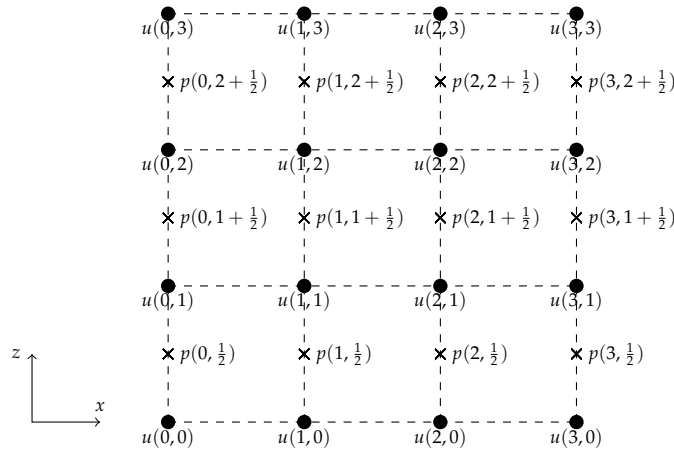
$$A_{ij}^{(k)} f_j^{(k)} = B_{ij}^{(k)} f_j, \quad A^{(k)}, B^{(k)} \in [1, N_z]^2 \quad (2.25)$$

$A^{(k)}$ et $B^{(k)}$ sont les opérateurs respectivement implicites et explicites. Une estimation de la dérivée k -ième de f passe donc par l’évaluation de :

$$f_j^{(k)} = \left(A_{ij}^{(k)} \right)^{-1} B_{ij}^{(k)} f_j \quad (2.26)$$

Le terme “compact” s’applique à ce type de schéma car il réduit le domaine de dépendance et permet de conserver en partie ces schémas en zone de proche paroi. Les schémas compacts s’appuient sur une formulation centrée, qui n’introduit pas de dissipation numérique. La formulation implicite permet une meilleure résolution des petites échelles comme le démontre Lele (1992) par l’étude du nombre d’onde modifié, qui permet d’évaluer la dispersion introduite par les schémas centrés.

La formulation implicite engendre l’inversion d’une matrice pour l’évaluation des dérivées de la fonction (Cf. équation (2.26)). Cependant, la taille du stencil, qui désigne les termes non-nuls d’une ligne dans une matrice à diagonale dominante, est plus petite dans un schéma compact. Quelle que soit la formulation de la discrétisation globale adoptée (hybride ou aux différences finies dans toutes les directions), l’évaluation du vecteur $f_j^{(k)}$ se fait dans une dimension. Contrairement au cas d’un problème 2 ou 3D, l’utilisation d’une méthode directe de résolution de système linéaire est avantageuse pour un problème 1D, car son coût évolue en N (voir par exemple Quarteroni et al. 2007). En comparaison avec un produit matrice-vecteur, dont le coût évolue également en N , l’inversion de matrices engendre donc un surcoût *indépendant de N* . Ce surcoût fixe n’est donc pas pénalisant pour la résolution.

FIG. 2.1 – Mailles décalées pour le calcul de la pression dans un plan $y = y_0$ d'un maillage uniforme.

2.4.2 Utilisation d'un maillage décalé

L'utilisation de schémas centrés aux différences finies provoque l'apparition d'oscillations parasites dans le champ de pression (Armfield 1991). Pour éviter ce phénomène, on choisit d'utiliser un maillage décalé dans la direction z *uniquement*. Il n'y a en effet pas d'intérêt à décaler le maillage dans les directions x et y où l'on utilise une approche spectrale. L'utilisation d'un tel maillage réduit encore le domaine de dépendance. On verra qu'elle nous permet, à moindre erreur, de conserver des schémas centrés en zone de proche paroi. Une représentation de ce maillage décalé est présentée sur la figure 2.1, dans un plan d'équation $y = y_0$. On distingue donc les mailles vitesses $m_{i,j,k}^u$ et les mailles pressions $m_{i,j,k}^p$.

2.4.3 Distribution des points dans la direction x_3

Afin de prendre en compte les changements d'échelles dus à l'inhomogénéité dans la direction z , on introduit une transformation du maillage dans cette direction, qui permet de raffiner le maillage en zone de proche paroi notamment. On distingue donc l'espace de calcul, où la distribution est uniforme, du maillage physique qui présente des zones raffinées. Ces deux maillages sont liés par une fonction bijective $x_3 = T(\xi)$ (voir figure 2.2).

Les points de calculs sont définis uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$:

$$\xi_k = \frac{k}{N_z - 1} \quad k \in [0, N_z - 1] \quad (2.27)$$

Dans le cadre de cette étude, la fonction utilisée est une fonction cosinus où un paramètre de relaxation r permet de contrôler la taille des premières mailles.

$$T(\xi) = \frac{\alpha}{\cos r} \cos(\Pi(\xi - 1) - r(2\xi - 1)) + \beta \quad \text{où } \alpha = \frac{x_{3\max} - x_{3\min}}{2}, \quad \beta = \frac{x_{3\max} + x_{3\min}}{2} \quad (2.28)$$

La figure 2.3 représente la fonction $T(\xi)$ dans le cas où le maillage physique s'étend sur $[0, 1]$ ($\alpha = \beta = 0.5$). La transformation pour $r = 0$ génère des tailles très petites aux extrémités lorsque le nombre

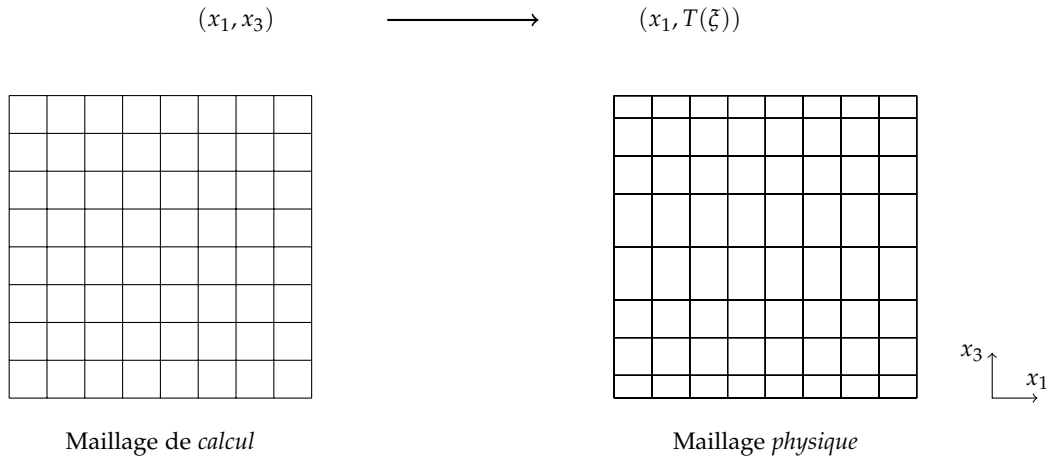
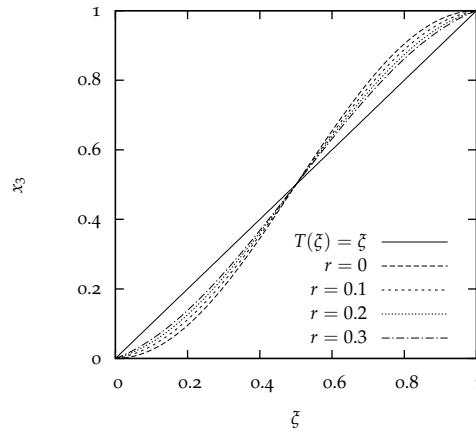


FIG. 2.2 – Transformation du maillage dans la direction verticale.

FIG. 2.3 – Représentation de la fonction $T(\xi)$ pour différentes valeurs de r ($\alpha = \beta = 0.5$)

de points est élevé, générant des ratios $\Delta_{x_1}/\Delta_{x_3} \ll 1$. C'est pourquoi un paramètre de relaxation est introduit ici.

En pratique, les équations sont résolues dans l'espace de calcul. Il faut donc modifier les opérateurs de dérivées en conséquence (Cf. équation 2.3.2) :

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_3} = (T^{-1})'(x_3) \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_3} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_3^2} = \left((T^{-1})'(x_3) \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (T^{-1})''(x_3) \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.30)$$

Les développements qui suivent sont effectués dans le maillage de calcul. On confondra donc x_3 et ξ pour simplifier les notations.

Étape	Maillage	Terme à calculer	Opérateur(s) correspondant(s)
Prédiction	Vitesse	$\hat{P}$	$\mathcal{I}_{pu}$
Prédiction	Vitesse	$\mathcal{D}_1(\hat{P})$	$\mathcal{D}_{1pu}$
Prédiction	Vitesse	$\hat{N}$	$\mathcal{D}_{1uu}$
Prédiction	Vitesse	$\mathcal{D}_2(\hat{u})$	$\mathcal{D}_{1up}, \mathcal{D}_{1pu}$ ou $\mathcal{D}_{2uu}$
Correction	Pression	$\mathcal{D}_2(\hat{P})$	$\mathcal{D}_{1pu}, \mathcal{D}_{1up}$ ou $\mathcal{D}_{2pp}$
Correction	Pression	$\hat{u}$	$\mathcal{I}_{up}$
Correction	Pression	$\mathcal{D}_1(\hat{u})$	$\mathcal{D}_{1pu}$
Correction	Vitesse	$\mathcal{D}_1(\hat{\phi})$	$\mathcal{D}_{1pu}$
Correction	Vitesse	$\hat{\phi}$	$\mathcal{I}_{pu}$

TAB. 2.3 – Opérateurs utilisant des schémas compacts nécessaires à la résolution.

2.5 DÉRIVATION DE SCHÉMAS COMPACTS ADAPTÉS

Le type de maillage choisi ne permet pas d'utiliser de manière directe les schémas exposés par Lele (1992). L'étape de prédiction a pour inconnue le champ de vitesse et se résout donc sur les mailles de vitesse, mais utilise des variables, telle la pression, définies sur les mailles de pression. Le raisonnement inverse s'applique pour l'étape de correction. Il faut donc dériver une nouvelle série de schémas adaptés à l'ensemble des opérateurs nécessaires.

2.5.1 Opérateurs mis en jeu

Pour la méthode de projection développée en combinaison avec un maillage décalé, de nombreux opérateurs interviennent. On désigne ici par opérateur l'ensemble partie implicite/partie explicite de chaque schéma. En plus des opérateurs de dérivation d'ordre k notés $\mathcal{D}_k$, il faut se doter d'opérateurs d'interpolation $\mathcal{I}$, qui permettent le passage des mailles pression aux mailles vitesse. Le formalisme adopté est le suivant : $\mathcal{O}_{up}$ désigne un opérateur agissant sur un champ défini sur les mailles de vitesse et dont le résultat est obtenu sur les mailles de pression. Le tableau 2.3 récapitule les différents opérateurs nécessaires à la résolution des étapes de prédiction et correction.

2.5.2 Obtention d'un schéma compact de type dérivation (Type *uu* et *pp*)

La dérivation des schémas est effectuée dans l'espace de calcul sur un maillage uniforme. On note h le pas d'espace constant. Un schéma est caractérisé par son stencil implicite de taille k_1 et son stencil explicite de taille k_2 .

Dérivée d'ordre 1

L'obtention de schémas compacts repose sur le développement des fonctions au voisinage d'un point a qui s'écrit :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n(a) \frac{(x-a)^n}{n!} \quad (2.31)$$

De manière générale, on cherche à obtenir une relation du type :

$$\sum_{k=0}^{k=k_1} \alpha_k \left(\frac{f'_{i+k} + f'_{i-k}}{2} \right) = \sum_{k=1}^{k=k_2} \beta_k \left(\frac{f_{i+k} - f_{i-k}}{2kh} \right) \quad \forall i \in [1 + \max(k_1, k_2), N - \max(k_1, k_2)] \quad (2.32)$$

On remarque que ces relations sont définies à une constante multiplicative près, ce qui permet d'imposer $\alpha_0 = 1$.

En posant $x_{i+k} = x_i + kh$ dans le développement de Taylor (équation (2.31)), on obtient :

$$\frac{f_{i+k} - f_{i-k}}{2kh} = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_i) \frac{(kh)^{n-1}}{n!} \left(\frac{1 - (-1)^n}{2} \right) \quad (2.33)$$

$$\frac{f'_{i+k} + f'_{i-k}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_i) \frac{n(kh)^{n-1}}{n!} \left(\frac{1 + (-1)^{n-1}}{2} \right) \quad (2.34)$$

En remarquant que les termes pairs s'éliminent, on obtient finalement :

$$\frac{f_{i+k} - f_{i-k}}{2kh} = \sum_{p=0}^{\infty} f^{(2p+1)}(x_i) \frac{(kh)^{2p}}{(2p+1)!} \quad (2.35)$$

$$\frac{f'_{i+k} + f'_{i-k}}{2} = \sum_{p=0}^{\infty} f^{(2p+1)}(x_i) \frac{(kh)^{2p}}{2p!} \quad (2.36)$$

On peut alors égaliser à l'ordre $2p$ l'équation (2.32) en respectant des relations entre les coefficients α_k et β_k et obtenir une relation générale, condition nécessaire pour supprimer les termes d'ordre égal à $2p$.

$$\sum_{k=0}^{k=k_1} (2p+1)k^{2p} \alpha_k = \sum_{k=1}^{k=k_2} k^{2p} \beta_k \quad (2.37)$$

Si l'on veut écrire un schéma d'ordre $2m$, il faut satisfaire m équations, à $k_1 + k_2$ inconnues, écrites pour $p \in [0, m-1]$. On obtient bien une erreur d'ordre $2m+2$:

$$|f'(x_i) - f'_i| = O(h^{2m+2}) = o(h^{2m+1})$$

Remarques :

- L'ordre maximal ($2m_{max}$) pour le schéma est obtenu pour $m_{max} = k_1 + k_2$ si l'on fixe (k_1, k_2) .
- On retrouve bien le schéma centré explicite d'ordre 2, pour $(k_1, k_2) = (0, 1)$, le système se réduit à $\beta_1 = \alpha_0 = 1$ si on écrit une seule équation pour $p = 0$.
- On choisira en général $k_2 \geq k_1$ afin de limiter les coûts de calcul puisque k_1 mesure la taille du stencil d'une matrice à inverser.

Dérivée d'ordre 2

De la même manière que précédemment, le schéma s'écrit de manière générale :

$$\sum_{k=0}^{k=k_1} \alpha_k \left(\frac{f''_{i+k} + f''_{i-k}}{2} \right) = \sum_{k=1}^{k=k_2} \beta_k \left(\frac{f_{i+k} + f_{i-k} - 2f_i}{2(kh)^2} \right) \quad \forall i \in [1 + \max(k_1, k_2), N - \max(k_1, k_2)] \quad (2.38)$$

En posant $x_{i+k} = x_i + kh$ dans le développement de Taylor, on obtient :

$$\frac{f_{i+k} + f_{i-k} - 2f_i}{2(kh)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_i) \frac{(kh)^{n-2}}{n!} \left(\frac{1 + (-1)^n}{2} \right) \quad (2.39)$$

$$\frac{f''_{i+k} + f''_{i-k}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_i) \frac{n(n-1)(kh)^{n-2}}{n!} \left(\frac{1 + (-1)^n}{2} \right) \quad (2.40)$$

En remarquant que les termes impairs s'éliminent, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \frac{f_{i+k} + f_{i-k} - 2f_i}{2(kh)^2} &= \sum_{p=1}^{\infty} f^{(2p)}(x_i) \frac{(kh)^{2p-2}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{\infty} f^{(2p+2)}(x_i) \frac{(kh)^{2p}}{(2p+2)!} \\ \frac{f''_{i+k} + f''_{i-k}}{2} &= \sum_{p=1}^{\infty} f^{(2p)}(x_i) \frac{(2p)(2p-1)(kh)^{2p-2}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{\infty} f^{(2p+2)}(x_i) \frac{(2p+2)(2p+1)(kh)^{2p}}{(2p+2)!} \end{aligned}$$

La relation nécessaire pour satisfaire l'ordre $2p$ devient avec $p > 1$:

$$\sum_{k=0}^{k=k_1} (2p+2)(2p+1)k^{2p} \alpha_k = \sum_{k=1}^{k=k_2} k^{2p} \beta_k \quad (2.41)$$

Pour écrire un schéma d'ordre $2m$, il faut satisfaire m équations à $k_1 + k_2$ inconnues écrites pour $p \in [1, m]$. On obtient de nouveau une erreur d'ordre $2m+2$

$$|f''(x_i) - f''_i| = O(h^{2m+2}) = o(h^{2m+1})$$

2.5.3 Obtention d'un schéma compact de type dérivation (Type *up* et *pu*)

Pour ce type d'opérateurs, le maillage sur lequel est exprimée la dérivée est différent de celui sur lequel est définie la fonction. La partie explicite de l'opérateur manipule donc des demi-indices, le maillage de référence étant celui sur lequel on calcule la dérivée.

Dérivée d'ordre 1

Les nouvelles relations sont obtenues en posant $\check{k} = k - \frac{1}{2}$ dans le membre de droite de (2.32).

$$\sum_{k=0}^{k=k_1} \alpha_k \left(\frac{f'_{i+k} + f'_{i-k}}{2} \right) = \sum_{k=1}^{k=k_2} \beta_k \left(\frac{f_{i+\check{k}} + f_{i-\check{k}}}{2\check{k}h} \right) \quad (2.42)$$

La relation générale 2.37 devient :

$$\sum_{k=0}^{k=k_1} (2p+1)k^{2p} \alpha_k = \sum_{k=1}^{k=k_2} \check{k}^{2p} \beta_k = \sum_{k=1}^{k=k_2} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{2p} \beta_k \quad (2.43)$$

Les remarques faites précédemment sont toujours valables. On constate cependant qu'à précision équivalente, le stencil de la partie explicite est moins large. En effet, les points extrêmes sont situés à $i \pm k - \frac{1}{2}$ au lieu de $i \pm k$ dans un maillage non-décalé. On vérifie bien que les maillages décalés réduisent encore le domaine de dépendance.

Dérivée d'ordre 2

Les nouvelles relations sont obtenues en posant $\check{k} = k - \frac{1}{2}$ dans le membre de droite de (2.38).

$$\sum_{k=0}^{k=k_1} \alpha_k \left(\frac{f''_{i+k} + f''_{i-k}}{2} \right) = \sum_{k=1}^{k=k_2} \beta_k \left(\frac{f_{i+\check{k}} + f_{i-\check{k}} - 2f_i}{2(\check{k}h)^2} \right) \quad (2.44)$$

La relation générale (2.43) devient :

$$\sum_{k=0}^{k=k_1} (2p+2)(2p+1)k^{2p} \alpha_k = \sum_{k=1}^{k=k_2} \check{k}^{2p} \beta_k = \sum_{k=1}^{k=k_2} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{2p} \beta_k \quad (2.45)$$

Remarque : Pour obtenir les deux opérateurs de dérivée seconde, on peut aussi composer les opérateurs :

$$\mathcal{D}_{2pp} = \mathcal{D}_{1pu} \circ \mathcal{D}_{1up} \quad (2.46)$$

$$\mathcal{D}_{2uu} = \mathcal{D}_{1up} \circ \mathcal{D}_{1pu} \quad (2.47)$$

$$(2.48)$$

2.5.4 Exemple d'obtention d'un schéma compact pour un opérateur différentiel

On présente ici l'algorithme mis en place dans le code à l'étape d'initialisation du calcul. On décrit la procédure à suivre pour obtenir un schéma compact d'ordre 6 dans un maillage décalé pour une dérivée première. L'obtention des autres schémas se fait de manière identique.

Pour obtenir un schéma d'ordre $2p+2$, il faut résoudre le système obtenu grâce à la relation (2.43) :

$$C(p) X = D \quad (2.49)$$

où

$$C(p) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -1 & \cdots & -1 \end{matrix}}^{k_1 \text{ éléments}} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \end{matrix}}^{k_2 \text{ éléments}} \\ -3 & \cdots & -3k_1^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \cdots & \left(k_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(2p+1) & \cdots & -(2p+1)k_1^{2p} & \left(\frac{1}{2}\right)^{2p} & \cdots & \left(k_2 - \frac{1}{2}\right)^{2p} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k_1} \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{k_2} \end{pmatrix}$$

Pour écrire un algorithme général et complètement déterminé, il suffit de fixer $k_2 \geq k_1$, condition justifiée précédemment par la minimisation de la taille de la matrice à inverser. Pour obtenir un schéma d'ordre 6 dans un maillage décalé, il faut choisir $k_1 + k_2 = 3$ et résoudre l'égalité pour $p = 0, 1, 2$. En choisissant $(k_1, k_2) = (1, 2)$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} (p=0) & 1 + \alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 \\ (p=1) & 3\alpha_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \beta_1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \beta_2 \\ (p=2) & 5\alpha_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \beta_1 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 \beta_2 \end{cases} \quad (2.50)$$

Les coefficients α_k et β_k , obtenus pour différents ordres sont résumés dans le tableau 2.4 :

	α_0	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3
Ordre 2	1.0	—	—	1.0	—	—
Ordre 4	1.0	0.091	—	1.091	—	—
Ordre 6	1.0	0.290	—	1.016	0.274	—
Ordre 8	1.0	0.476	0.007	0.912	0.572	—
Ordre 10	1.0	0.671	0.033	0.790	0.875	0.040

TAB. 2.4 – Coefficients obtenus pour l'opérateur $\mathcal{D}_{1_{up}}$ jusqu'à l'ordre 10

Vérification du comportement des schémas

Pour vérifier l'ordre de précision des schémas, on dérive une fonction analytique, ici $f(x_1, x_2, x_3) = \cos(ax_3)$ à l'aide des opérateurs compacts dans l'espace discrétisé. On peut alors directement mesurer l'erreur commise et tracer son évolution en fonction du nombre de points de discrétisation. Les figures 2.4 et 2.5 prouvent ainsi l'ordre de précision des schémas obtenus, respectivement pour l'opérateur $\mathcal{D}_{1_{up}}$ et pour l'opérateur $\mathcal{D}_{2_{uu}}$.

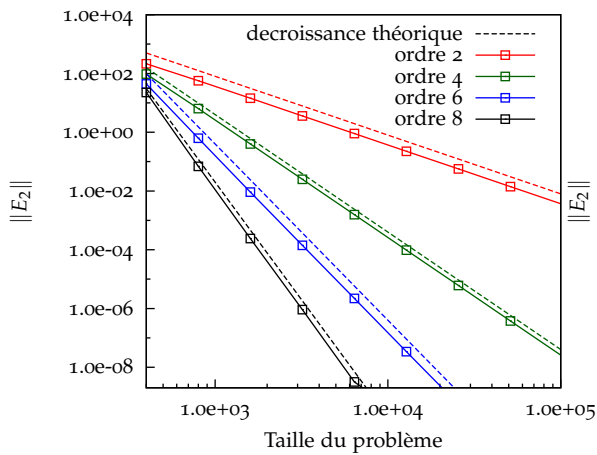


FIG. 2.4 – Vérification de l'ordre de précision des schémas au centre du domaine- opérateur $\mathcal{D}_{1_{up}}$.

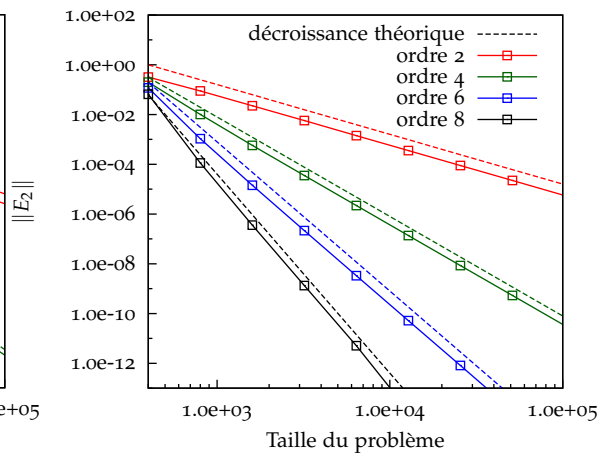


FIG. 2.5 – Vérification de l'ordre de précision des schémas au centre du domaine- opérateur $\mathcal{D}_{2_{uu}}$.

2.5.5 Dérivation de schémas d'interpolation

De la même manière que précédemment, on peut dériver des schémas d'interpolation compacts, nécessaires lors de l'utilisation de maillage décalés. Cette fois, les schémas prennent la forme :

$$\sum_{k=0}^{k=k_1} \alpha_k \left(\frac{f_{i+k} + f_{i-k}}{2} \right) = \sum_{k=1}^{k=k_2} \beta_k \left(\frac{f_{i+\check{k}} - f_{i-\check{k}}}{2} \right) \quad \forall i \in [1 + \max(k_1, k_2), N - \max(k_1, k_2)] \quad (2.51)$$

Les développements de Taylor deviennent :

$$\frac{f_{i+\check{k}} - f_{i-\check{k}}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(\check{k}h)^n}{n!} \left(\frac{1 + (-1)^n}{2} \right) \quad (2.52)$$

$$\frac{f_{i+k} + f_{i-k}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(kh)^n}{n!} \left(\frac{1 + (-1)^n}{2} \right) \quad (2.53)$$

Cette fois-ci, ce sont les termes impairs qui s'éliminent :

$$\frac{f_{i+\check{k}} - f_{i-\check{k}}}{2} = \sum_{p=0}^{\infty} f^{(2p)}(a) \frac{(\check{k}h)^{2p}}{2p!} \quad (2.54)$$

$$\frac{f_{i+k} + f_{i-k}}{2} = \sum_{p=0}^{\infty} f^{(2p)}(a) \frac{(kh)^{2p}}{2p!} \quad (2.55)$$

La relation pour satisfaire l'ordre $2p$ devient :

$$\sum_{k=0}^{k=k_1} k^{2p} \alpha_k = \sum_{k=1}^{k=k_2} \check{k}^{2p} \beta_k = \sum_{k=1}^{k=k_2} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{2p} \beta_k \quad (2.56)$$

Obtention d'un schéma d'ordre $2p + 2$

De la même manière que précédemment, on résout le système :

$$C(p) \cdot X = D \quad (2.57)$$

avec

$$C(p) = \begin{pmatrix} \overbrace{-1 \quad \cdots \quad -1}^{k_1 \text{ éléments}} & \overbrace{1 \quad \cdots \quad 1}^{k_2 \text{ éléments}} \\ -1 \quad \cdots \quad -k_1^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \cdots \quad \left(k_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ -1 \quad \cdots \quad -k_1^{2p} & \left(\frac{1}{2}\right)^{2p} \quad \cdots \quad \left(k_2 - \frac{1}{2}\right)^{2p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les coefficients obtenus sont donnés dans le tableau 2.5.

2.5.6 Traitement des zones frontières

Lorsque l'on se rapproche des frontières du maillage, un traitement particulier doit être appliqué puisque les points du stencil sont hors du domaine. Généralement, on introduit des schémas décentrés

	α_0	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3
Ordre 2	1.0	—	—	1.000	—	—
Ordre 4	1.0	0.333	—	1.333	—	—
Ordre 6	1.0	0.600	—	1.500	0.100	—
Ordre 8	1.0	0.800	0.0286	1.600	0.229	—
Ordre 10	1.0	0.952	0.0793	1.667	0.357	0.0079

TAB. 2.5 – Coefficients obtenus pour l'opérateur $\mathcal{I}_{up}$ jusqu'à l'ordre 10

pour traiter ces points particuliers. Le principal inconvénient est l'apparition de coefficients non-nuls sur des diagonales, nuls dans le reste du domaine. Ceci affecte la rapidité et la simplicité de résolution des systèmes linéaires. On fait ici le choix de conserver des schémas centrés, ce qui induit une réduction de l'ordre aux frontières. Cette réduction est compensée par la mise en place d'un raffinement de maillage aux frontières (voir paragraphe 2.4.3). De plus, le décalage des mailles pression-vitesse renforce la localité des stencils. On verra qu'un seul point de calcul est affecté par cette réduction d'ordre dans chaque direction.

Cas de la surface libre indéformable

La condition à la limite de surface libre indéformable peut-être présentée comme une condition de symétrie sans affecter les équations de Navier-Stokes. On peut donc utiliser cette propriété et "symétriser" tous les coefficients par rapport aux plans frontières. Il faut bien sûr tenir compte du type de symétrie de chaque variable. Ainsi on utilisera un opérateur d'interpolation symétrique si il doit être appliqué à u_1 ou u_2 , mais antisymétrique pour le champ scalaire u_3 . On conserve ainsi un ordre de précision maximal sur les frontières.

Cas de la paroi adhérente

Le cas de la paroi adhérente est plus délicat à traiter puisqu'aucune condition de symétrie n'est applicable (Cf. paragraphe 2.3.1). L'ordre de précision des schémas est fixé par la taille maximale du stencil que l'on peut former en zone frontalière. Ce choix n'est donc pas commun à tous les opérateurs. La méthode adoptée pour modifier un schéma compact d'ordre 6 est présentée sur les figures 2.6 et 2.7. Les figures montrent qu'un tel choix ne permet pas de définir un schéma sur les points frontières. Il faut donc veiller à *ne pas les inclure* dans les stencils de la partie implicite aux points voisins. (ceci amène à préférer un ordre 2 plutôt qu'un ordre 4 au point de calcul B_p sur la figure 2.7). On va démontrer que les conditions limites implémentées ne nécessitent pas de définir tous les opérateurs sur les points frontières.

Il faut pour cela reprendre le tableau 2.3 et les opérateurs mis en jeu à chaque étape de la résolution.

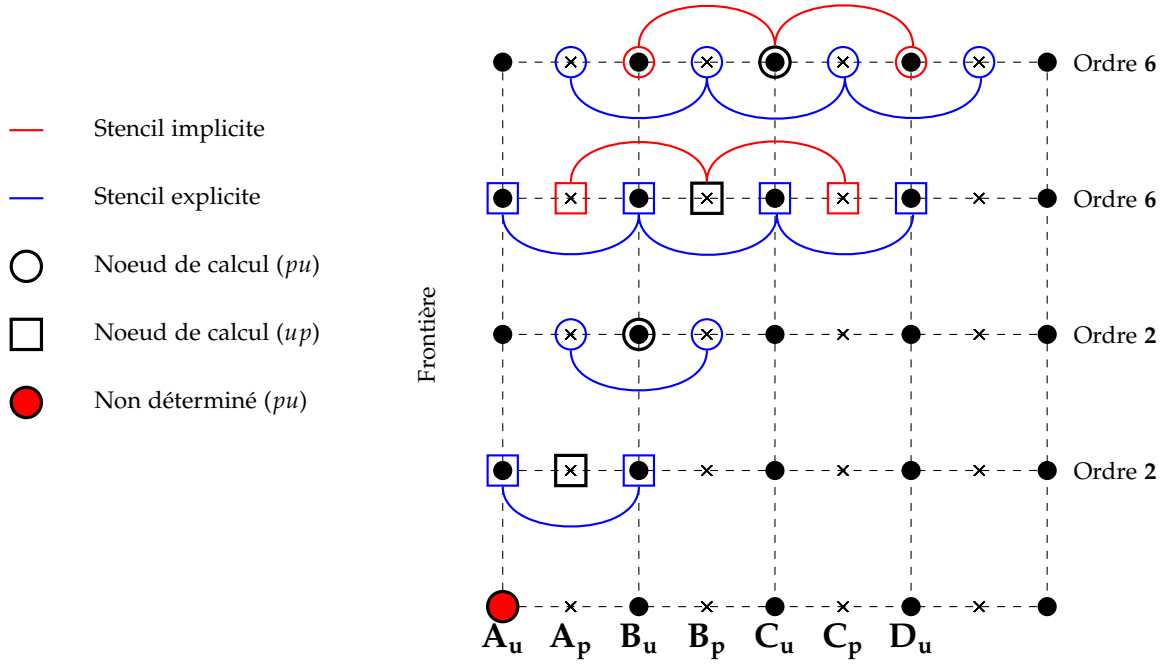


FIG. 2.6 – Adaptation du schémas global aux points extrêmes de maillage pour les opérateurs de types up et pu .

Lors de l'étape de prédiction du champ de vitesse, la condition limite est de type Dirichlet. Il n'est donc pas nécessaire d'exprimer $\hat{P}$ et $\mathcal{D}_1(\hat{P})$ sur la première maille puisque la vitesse y est imposée. Ces points coïncident avec les stencils non définis de $\mathcal{I}_{up}$ et $\mathcal{D}_{1_{pu}}$ à la frontière. Cette remarque s'applique également pour l'estimation de $\hat{N}$ et de $\mathcal{D}_2(\hat{u})$. A l'étape de correction, le point délicat est la résolution de l'équation de Poisson pour la pression. On l'effectue à l'aide de l'opérateur $\mathcal{D}_{1_{up}} \circ \mathcal{D}_{1_{pu}}$ (voir paragraphe 2.6.2). Le stencil du point de calcul A_u de $\mathcal{D}_{1_{pu}}$ n'étant pas défini, on peut penser que la résolution est impossible. En fait, on peut définir l'opérateur en ce point grâce à la condition limite de flux nul imposée à la pression.

2.6 RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'HELMHOLTZ

Les équations d'Helmholtz récapitulées dans le tableau 2.2 nécessitent un solveur approprié. Deux solutions sont retenues. La plus naturelle, utilisée par Lamballais (1996) résout directement l'équation (2.24) en inversant l'opérateur $\mathcal{D}_2 - \Gamma I$, où I désigne l'opérateur identité. Afin de simplifier la lecture on référence cette méthode par (H1). La méthode présentée ici, adoptée par Abide et Viazzo (2005) utilise la diagonalisation de l'opérateur $\mathcal{D}_2$. Cette méthode (H2), plus performante, n'est pas toujours utilisable puisqu'elle repose sur l'indépendance de Γ par rapport à la direction z . Dans le modèle de simulation aux grandes échelles présenté dans le paragraphe 4.4, on introduit une viscosité locale qui rend Γ dépendant de z dans les équations de la dynamique (étape de prédiction). Dans ce cas, on revient à la méthode classique d'inversion de $\mathcal{D}_2 - \Gamma I$.

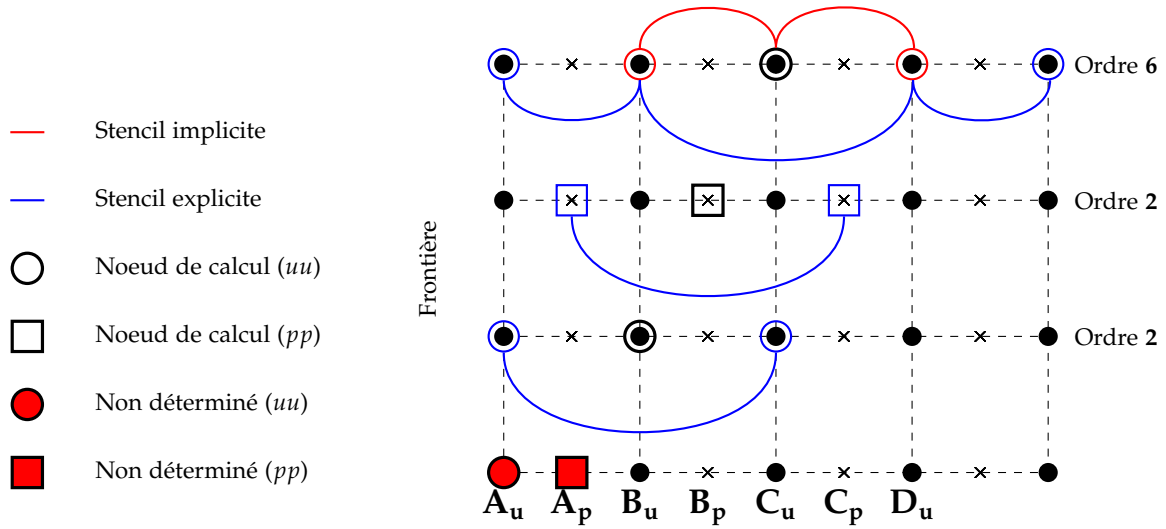


FIG. 2.7 – Adaptation du schémas global aux points extrêmes de maillage pour les opérateurs de types uu et pp.

2.6.1 Note sur la résolution des systèmes linéaires

Dans ce code de calcul, tous les systèmes linéaires à résoudre concernent la troisième direction dans laquelle on utilise des schémas aux différences finies. Le choix se porte donc vers la méthode directe de type LU. Comme évoqué au paragraphe 2.4.1, ce choix ne peut se généraliser lorsque les systèmes linéaires concernent deux ou trois directions du maillage :

- La discrétisation des opérateurs fait intervenir des termes non diagonaux dans la matrice à inverser, ce qui rend le problème plus complexe. Une estimation du coût de calcul est de $O(N^{3/2})$ pour le cas 2D et de $O(N^2)$ pour le cas 3D (Estivalezes 2004).
- Les méthodes itératives deviennent plus compétitives.
- Malgré une résolution directe, l'erreur numérique peut devenir importante si le nombre de points est élevé et la matrice mal conditionnée (cette remarque est valable également pour les méthodes itératives). On peut estimer l'erreur numérique relative induite lors de la résolution d'un système $AX = B$ par l'inégalité :

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|} \quad \text{où } \text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \quad (2.58)$$

Si l'on identifie $\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}$ à l'erreur machine, on obtient directement l'erreur relative commise $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}$.

Avec des schémas compacts, on a généralement $\text{cond}(A) \propto N$. De plus la taille des matrices est relativement petite, puisque l'on a au maximum $N = 1024$ voire $N = 2048$. Les méthodes directes sont donc parfaitement appropriées, tant en terme de rapidité de résolution que de précision qui restera de l'ordre de l'erreur machine.

2.6.2 Résolution par diagonalisation de $\mathcal{D}_2$ (méthode H2)

Cette méthode présente l'avantage de rejeter la partie coûteuse de la résolution à l'initialisation du solveur. Elle est donc plus rapide que la méthode directe, qui nécessite l'inversion d'une matrice à

chaque pas de temps, mais repose sur une condition essentielle : l'indépendance de Γ vis à vis de la direction de résolution z dans l'équation (2.24). On considère ici une matrice D_2 associée à un opérateur de dérivée seconde, dont la nature sera discutée dans le paragraphe suivant. On admet que D_2 est diagonalisable, à valeurs propres strictement négatives. Il existe une base où l'opérateur est diagonal. En notant δ_2 la matrice diagonale associée, P et P^{-1} les matrices de changement de base on peut écrire :

$$D_2 = P \cdot \delta_2 \cdot P^{-1} \quad (2.59)$$

Si Γ est une constante du système linéaire (donc indépendant de z dans notre cas), l'égalité $P^{-1} \cdot \Gamma \psi \cdot P = \Gamma I$ est vérifiée. En posant $\Psi = P^{-1} \cdot \psi$ et $\Lambda = P^{-1} \lambda$, on obtient :

$$(\delta_2 - \Gamma I) \cdot \Psi = \Lambda \quad (2.60)$$

La résolution comprend alors trois étapes :

1. Évaluation de Λ par $\Lambda = P^{-1} \lambda$.
2. Évaluation de Ψ par $\Psi_j = \Lambda_j / (\delta_{2j} - \Gamma)$
3. Obtention de ψ par $\psi = P \cdot \Psi$

Comparaison avec la méthode (H1)

En comparaison avec l'inversion de l'opérateur $\mathcal{D}_2 - \Gamma I$, la méthode présentée ici ne nécessite pas d'inversion de matrice supplémentaire à celles effectuées à l'étape d'initialisation. Toutefois, elle nécessite de conserver en mémoire les deux matrices "pleines" de changement de base, P et P^{-1} . Ces matrices de tailles N_z^2 sont cependant largement compatibles avec les capacités mémoire actuelles. Les produits matrice-vecteur qui utilisent les matrices pleines ont un coût qui évolue en $O(N^2)$ contre $O(N)$ pour la résolution d'un système linéaire par une méthode directe. Cependant, les matrices de passage étant *indépendantes* de x et y , on peut utiliser des algorithmes de produit en chaîne disponibles dans les bibliothèques d'algèbre linéaire. On ne peut procéder à des résolutions en chaîne dans la méthode classique puisque la matrice à inverser est cette fois dépendante de x et y . On conjecture que la méthode présentée ici devient moins efficace que la méthode classique à partir d'une certaine taille de maillage. Cependant, sans que cela ait fait l'objet de mesures précises, on a constaté une réduction d'un facteur 2 du temps de calcul pour cette étape en utilisant la méthode présentée, avec des maillages où $N_z = 512$.

Choix de l'opérateur $\mathcal{D}_2$

Comme souligné par Lamballais (1996), le choix de l'opérateur $\mathcal{D}_2$ n'est pas évident lorsque l'on utilise des schémas compacts. Si l'on explicite un opérateur de dérivée seconde lié à des schémas compacts, l'équation (2.24) devient :

$$\left(A^{(2)}\right)^{-1} B^{(2)} \psi - \Gamma \psi = \lambda \quad (2.61)$$

Lors de la résolution des équations de la dynamique (mailles vitesse), on choisit l'opérateur $\mathcal{D}_2$ comme la composée de deux opérateurs de dérivée première :

$$\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{1_{pu}} \circ \mathcal{D}_{1_{up}} \quad (2.62)$$

En utilisant la méthode (H2), cela revient à diagonaliser la matrice pleine $\left(A_{pu}^{(1)}\right)^{-1} B_{pu}^{(1)} \left(A_{up}^{(1)}\right)^{-1} B_{up}^{(1)}$. Cela ne pose pas de problème ici puisque cette diagonalisation n'est effectuée qu'une seule fois et qu'elle n'affecte pas le remplissage des matrices P et P^{-1} qui sont pleines *a priori*. Pour utiliser la méthode (H1), il faut obligatoirement utiliser l'opérateur $\mathcal{D}_{2uu}$. On résout cette fois le système multi-diagonal :

$$\left(B^{(2)} - \Gamma A^{(2)}\right) \psi = A^{(2)} \lambda \quad (2.63)$$

S'agissant de la résolution de l'équation d'Helmholtz pour la pression, le choix des opérateurs est plus restreint puisqu'il est directement lié à la vérification de la contrainte d'incompressibilité. Ainsi l'équation (2.20) obtenue pour ϕ est dérivée de l'équation (2.21) en y appliquant l'opérateur $\mathcal{D}_{1up}$. Pour satisfaire l'équation de continuité, il faut donc résoudre précisément :

$$\left(\left(A_{up}^{(1)}\right)^{-1} B_{up}^{(1)} \left(A_{pu}^{(1)}\right)^{-1} B_{pu}^{(1)}\right) \psi - \Gamma \psi = \lambda \quad (2.64)$$

Résoudre cette équation est très difficile par la méthode (H1) puisque cela nécessite l'inversion d'une matrice pleine à tous les pas de temps. Plusieurs techniques existent pour contourner ce problème. Dans notre cas, la méthode (H2) permet de résoudre directement cette équation sans modifier les schémas utilisés. On utilisera donc *toujours* la méthode (H2) pour résoudre cette équation, afin de satisfaire le plus précisément possible l'équation de continuité.

Régularité de l'opérateur $\mathcal{D}_2$

La régularité de l'opérateur $\mathcal{D}_2$ se manifeste dans la méthode (H2) par le type de valeurs propres trouvées. Elle est liée au type de problème que résout l'équation d'Helmholtz. On distingue deux cas :

- Un problème de Poisson-Dirichlet à l'étape de prédiction. Les valeurs propres trouvées sont toujours strictement négatives.
- Un problème de Poisson-Neumann lors de la résolution de la pression. Abide et Viazzo (2005) soulignent alors que la matrice devient non-inversible. Ceci pose un problème dans la résolution de l'équation pour $(k_1, k_2) = 0$, pour laquelle $\Gamma = 0$ et une valeur propre est nulle. L'indétermination est levée en ne résolvant que le gradient de pression $\frac{\partial \hat{P}(0, 0, z)}{\partial z}$ et en imposant la valeur de la pression moyenne P_0 .

2.7 VALIDATION EN CANAL PLAN TURBULENT

La validation globale de l'implémentation effectuée s'appuie sur le cas bien documenté du canal plan turbulent, à $Re_\tau = 180$. Re_τ est le nombre de Reynolds de "frottement". Cette simulation directe, initialement effectuée par Kim et al. (1987) permet de valider :

- le comportement global en écoulement turbulent ;
- les comportements asymptotiques moyens aux parois.

2.7.1 Méthode de résolution

Dans l'écoulement de canal plan turbulent (Figure 2.8), la direction y est considérée comme homogène et périodique. Dans la direction x , toutes les variables à l'exception de la pression peuvent être considérées comme périodiques et statistiquement homogènes. Le champ de pression admet en effet un gradient moyen longitudinal non nul, "moteur" de l'écoulement. La résolution de la pression se basant sur une équation de Poisson, la pression est définie à une constante et un gradient moyen près. Le code de calcul est donc insensible aux gradients moyens de pression, qui doivent être imposés par des considérations physiques. Dans le cas du canal plan turbulent, seule la direction x peut et doit admettre un gradient de pression moyen. Avec $\tilde{P}$ la pression calculée, P vérifie donc :

$$P(x, y, z, t) = \tilde{P}(x, y, z, t) + \alpha x P'_{0x} + P_0 \quad (2.65)$$

Pour calculer l'écoulement de canal plan turbulent, on peut donc considérer la direction x comme périodique si on impose le gradient moyen de pression longitudinal. La pression sera alors résolue à une constante P_0 près, ce qui est normal en écoulement incompressible. Deux techniques sont possibles :

- imposer P'_{0x} comme un terme source de l'équation de la dynamique ;
- imposer une conservation du débit, par exemple dans la section d'entrée, en corrigeant linéairement le champ de vitesse à chaque itération.

La deuxième technique permet d'obtenir un régime établi plus rapidement (Lamballais 1996).

Nombre de Reynolds de frottement Re_τ et nombre de Reynolds débitant Re_d

Les deux techniques évoquées précédemment fixent de manière différente les paramètres de l'écoulement. La première impose le nombre de Reynolds de frottement Re_τ . Celui-ci est construit à partir de la vitesse de frottement u_τ , définie par $\tau_0 = \rho u_\tau^2$ où τ_0 est le frottement moyen à la paroi, et la demi hauteur de canal h . L'équation de la dynamique moyenne peut être intégrée pour montrer que le frottement *total* évolue linéairement avec z dans une section du canal. L'intégrale entre $-d$ et $+d$ permet de plus d'établir que :

$$\tau_0 = -dP'_{0x} \quad (2.66)$$

Compte tenu de la définition de la vitesse de frottement, on montre par suite que le nombre de Reynolds de frottement peut aussi s'écrire sous la forme :

$$Re_\tau = \frac{d \sqrt{-dP'_{0x}}}{\nu} \quad (2.67)$$

On en déduit qu'imposer la valeur de P'_{0x} revient donc à imposer celle de Re_τ .

Dans le deuxième cas on impose la valeur de $u_0 = \frac{1}{2d} \int_{-d}^{+d} \bar{U} dz$ et donc le nombre de Reynolds débitant Re_d :

$$Re_d = \frac{d u_0}{\nu} \quad (2.68)$$

Les deux nombres de Reynolds n'ont pas de lien analytique connu, et donc fixer l'un ne permet pas de connaître l'autre *a priori*. La simulation de Kim et al. (1987) utilise la deuxième technique, qui a l'avantage de réduire le transitoire et donc le coût de calcul. La valeur du nombre de Reynolds de frottement est donc un résultat du calcul et ne peut être fixée rigoureusement à 180. Le coût peu élevé

d'une telle simulation sur les ordinateurs actuels nous incite à choisir la première méthode, très simple et fixant directement la valeur du nombre de Reynolds de frottement.

2.7.2 Paramètres de simulation

Les paramètres de simulation sont présentés sur la figure 2.8. Les dimensions utilisées sont les mêmes que dans la simulation originale, et suffisent à assurer la décorrélation du champ de vitesse turbulent dans les deux directions périodiques. Le raffinement adopté dans la direction z est de type cosinus, comme dans le travail de Kim et al. (1987).

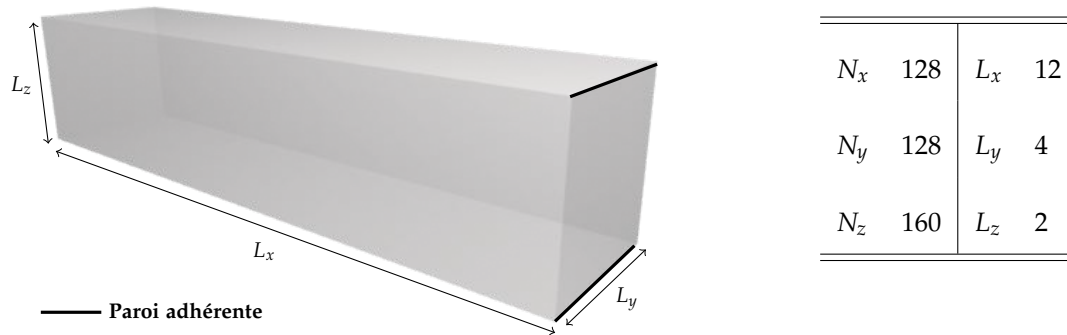


FIG. 2.8 – Paramètres de simulation.

Collecte des statistiques

Les données sont moyennées spatialement dans les directions x et y de telle sorte que toutes les statistiques sont uniquement dépendantes de z . La moyenne temporelle est effectuée sur 2200 échantillons recueillis durant une période T_{stat} . On note T_x le temps de parcours moyen de la longueur du domaine au centre du canal. On a choisi de cumuler les statistiques pendant $5.5 T_x$ soit :

$$T_{stat} = 5.5 T_x \quad (2.69)$$

2.7.3 Confrontation des résultats

Les résultats obtenus sont comparés avec les données de Kim et al. (1987), disponibles sur internet.

Profil de vitesse moyen

Les résultats présentés sur les figures 2.9 et 2.10 montrent un excellent accord avec la simulation de référence et mettent clairement en évidence l'évolution linéaire du champ de vitesse moyen avec l'altitude dans la sous-couche visqueuse (ici $z^+ < 4$) ainsi que l'existence d'une loi logarithmique pour $z^+ > 50$.

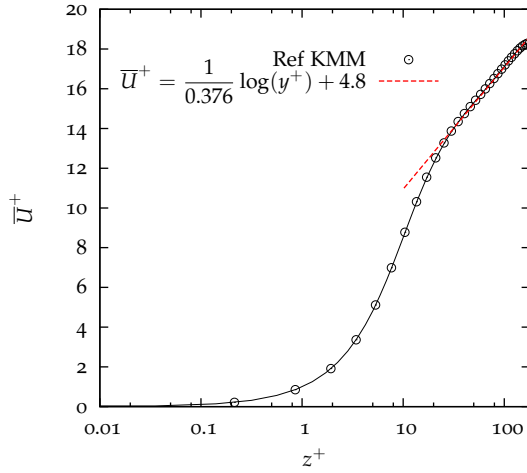


FIG. 2.9 – Profil de vitesse moyen longitudinal : mise en évidence de la région “Log”.

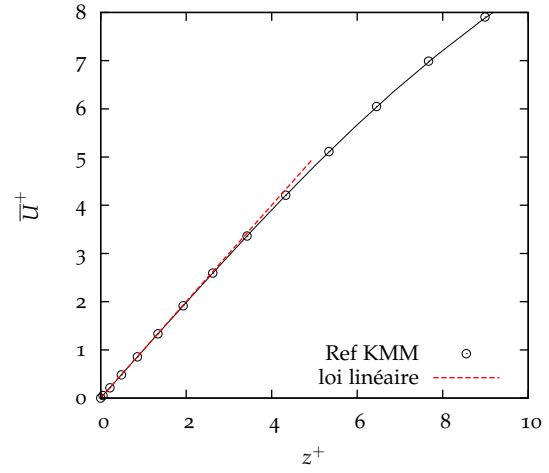


FIG. 2.10 – Profil de vitesse moyen longitudinal : mise en évidence de la sous couche visqueuse.

Corrélations doubles en un point et dissipation.

Ici également, les résultats présentés sur les figures 2.11 et 2.12 sont en accord avec les données de référence, ceci malgré la réduction de l'ordre de précision à la paroi. On retrouve les comportements asymptotiques, ainsi que l'évolution linéaire du frottement turbulent au centre de canal (caractérisée par le profil de $\overline{u\overline{w}}$). Seul le profil de dissipation ϵ_{33} , terme de l'équation de transport de $\overline{w\overline{w}}$ présente une légère différence en proche paroi, qui ne dépasse pas 1% en valeur relative. Pour cette statistique d'ordre relativement élevé, rien ne permet de conclure sur une meilleure validité de l'un des deux résultats qui conduisent à une différence anecdotique, et sans doute largement comparable avec le biais induit par l'échantillonnage statistique.

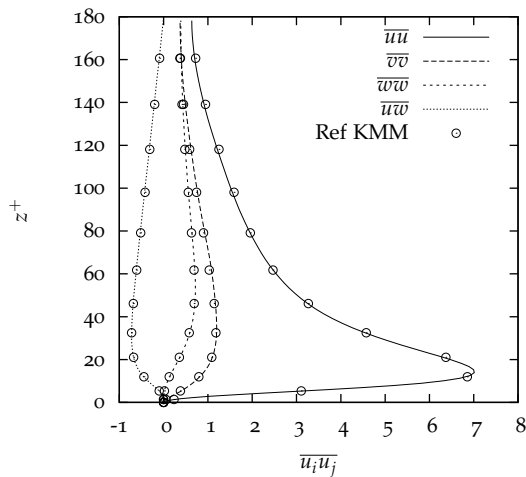


FIG. 2.11 – Corrélations doubles (comparaison avec les données de Kim et al. (1987))

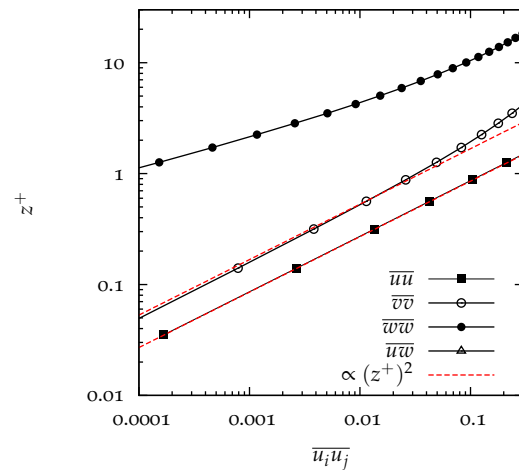


FIG. 2.12 – Corrélations doubles : comportements asymptotiques

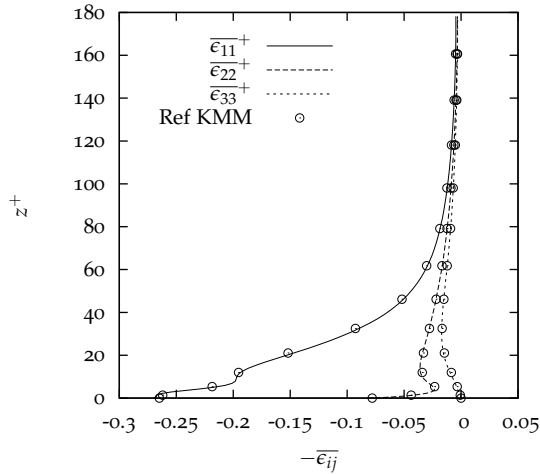


FIG. 2.13 – Profils de dissipation (comparaison avec les données de Kim et al. (1987))

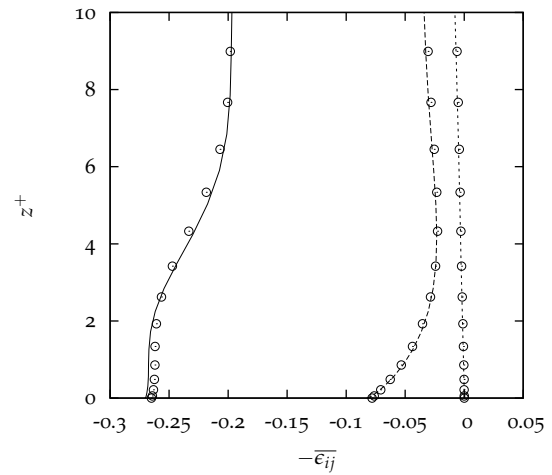


FIG. 2.14 – Profils de dissipation : zoom en proche paroi (légende identique)

SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Le code tout-spectral utilisé au département pour les travaux de Campagne et al. (2006) a permis de traiter l'écoulement étudié, avec une condition limite de surface libre indéformable. Pour pouvoir étudier la même configuration avec une condition limite de paroi adhérente, il était nécessaire de reconstruire un outil qui permettait plus de flexibilité dans l'implémentation de nouvelles conditions limites.

Avec l'objectif de calculer des écoulements turbulents dans des configurations académiques par simulation directe, les choix de discrétisation spatiales se sont portés vers :

- Une discrétisation spectrale qui utilise des transformées de Fourier dans deux directions périodiques x et y . Ce type de discrétisation permet d'allier précision et performance dans la résolution.
- Une résolution par une méthode de différences finies dans la direction z . Afin de conserver un haut degré de précision, des schémas compacts ont été dérivés sur un maillage décalé pression-vitesse à la manière des schémas compacts établis par Lele (1992). Ces schémas assurent une meilleure représentation des plus petites échelles. On a fait le choix de dégrader l'ordre dans les zones frontières, ce qui a l'avantage de conserver des schémas centrés et n'introduit aucune diffusion numérique. Ceci permet également de faciliter la résolution en conservant des matrices de taille réduite. Pour améliorer la précision à la frontière, on a ajouté la possibilité de raffiner le maillage à sa proximité.

Les équations générées, qui sont toutes des équations de Helmholtz, sont résolues grâce à une méthode développée par Abide et Viazzo (2005). Cette méthode se révèle plus efficace sur les tailles de maillage visées. Elle permet en outre d'assurer la satisfaction de la condition d'incompressibilité au zéro machine.

Le code développé a permis de reproduire avec succès la simulation d'écoulement turbulent en canal de Kim et al. (1987). Les statistiques d'ordre élevé sont retrouvées, ainsi que les comportements asymptotiques, ce qui permet de valider les capacités de l'outil à traiter les écoulements turbulents.

PARALLÉLISATION MASSIVE DU CODE DE CALCUL

3

SOMMAIRE

3.1	SUPER-ORDINATEURS : ÉTAT DE L'ART ET FUTURES ARCHITECTURES	48
3.1.1	Vers le multi-cœurs	48
3.1.2	Architectures Hybrides	49
3.1.3	Définitions et machines de travail	49
3.2	OUTILS DE DÉVELOPPEMENT	50
3.2.1	Logiciels externes au code de calcul	51
3.2.2	Librairies appelées au sein du code	52
3.3	ALGORITHME DE FFT	52
3.3.1	Approche classique : limites	53
3.3.2	Décomposition bidirectionnelle	54
3.3.3	Avantage "collatéral" de la décomposition bidirectionnelle	56
3.4	FICHIERS D'ENTRÉE/SORTIE	58
3.4.1	Problématique	58
3.4.2	Parallel-Netcdf	58
3.5	EXÉCUTIONS DE CAS TESTS SUR BABEL	60
3.5.1	Cas tests et conditions de test	60
3.5.2	Performance obtenues	60
	SYNTHÈSE	63

L e développement de ce code a coïncidé avec l'arrivée en France, de nouvelles machines de calcul, du niveau des standards internationaux les plus récents¹. De nouveaux challenges en découlent : si la manière de programmer n'a pas (encore) radicalement changé, travailler sur des milliers de processeurs engendre de nouveaux problèmes, qui n'apparaissaient pas lors du développement de codes utilisant quelques processeurs. Ce chapitre est consacré à la présentation des principes retenus pour construire une application destinée à faire travailler conjointement des milliers de processeurs.

¹La dernière acquisition de l'IDRIS, un ordinateur IBM de type Blue Gene/P pointait en juin 2008 au neuvième rang du "Top500" (Meuer et al.), la référence dans le domaine des super-ordinateurs

3.1 SUPER-ORDINATEURS : ÉTAT DE L'ART ET FUTURES ARCHITECTURES

3.1.1 Vers le multi-cœurs

Pour comprendre le futur des architectures en matière de super-ordinateurs, il est important d'observer les évolutions du marché qui focalise les efforts des constructeurs : celui des ordinateurs des particuliers. L'histoire montre en effet que ce marché gouverne l'évolution des technologies adoptées pour assembler les super-ordinateurs. De ce point de vue, les architectures vectorielles, dont l'intérêt principal est l'application au calcul scientifique, ont souffert du faible marché qu'elles concernent. Peu de constructeurs s'y sont intéressés, et on peut le constater en consultant le "Top-500". La dernière machine de ce type y ayant pris la première place fut l'*Earth Simulator* équipée de processeurs NEC au Japon. On peut penser que les super-ordinateurs du futur s'inspireront directement des besoins "dictés" par le marché des particuliers.

La loi de Moore, qui prévoyait une évolution linéaire des fréquences des processeurs en fonction des années a atteint ses limites : la taille de gravure des processeurs toujours plus petite obtenue par les constructeurs est aujourd'hui proche de son minimum. De plus, la guerre marketing consistant à proposer des fréquences toujours plus élevées n'est plus d'actualité. La consommation électrique élevée de ces processeurs devient problématique. On peut montrer que la puissance requise est proportionnelle au carré de la fréquence des processeurs. En dehors du problème économique, les technologies de refroidissement nécessaires se compliquent. Faire travailler beaucoup de cœurs à moindre fréquence est tout l'objectif des processeurs multi-cœurs. (16 cœurs de fréquence 1GHz consommeront autant qu'un seul cœur à 4GHz. C'est dans cet esprit qu'ont été bâties les machines de type Blue Gene. Les processeurs, de type *powerPC*, construits initialement pour une utilisation embarquée ont des fréquences relativement faibles de l'ordre de 850Mhz). Leur faible consommation permet d'assembler des milliers de processeurs en conservant des systèmes de refroidissement raisonnables.

Si l'on excepte le monde des jeux vidéos, des fréquences élevées intéressent peu les particuliers, car elles ne sont pas dimensionnantes pour les applications bureautiques ou multimédia classiques. Même avec les meilleurs codes de calcul, il est difficile d'obtenir une bonne adéquation entre la fréquence très élevée du processeur et le calcul effectif. La fréquence maximale des accès à la mémoire sur ses différents niveaux (cache L1, cache L2, RAM) est le facteur limitant pour la vitesse d'exécution. Sauf sur des applications très ciblées (benchmark Linpack notamment), il est difficile d'obtenir plus de 10% d'utilisation effective du processeur. Une architecture multi-cœurs, est de plus très adaptée aux environnements multi-tâches (un navigateur, un lecteur multimédia fonctionnant simultanément par exemple). Elle permet également de partager le travail à effectuer au sein d'une même application. Les développeurs logiciels ayant un retard relatif dans ce domaine (Windows et toute sa suite logicielle, gèrent encore très mal les architectures multi-cœurs au sein d'un même programme), on peut se demander si les constructeurs ne vont pas essayer d'adapter le *hardware* au *software*. Les marchés actuels concernent essentiellement les appareils mobiles et la pression environnementale devrait s'intensifier. On devrait donc privilégier les architectures à faible consommation, les systèmes multi-cœurs, à fréquence horloge diminuées. La programmation sur des machines de type *Blue Gene* est donc une étape essentielle pour repousser les limites en matière de calcul scientifique.

3.1.2 Architectures Hybrides

Les processeurs multi-cœurs sont composés physiquement de plusieurs cœurs partageant la même mémoire vive (RAM), ce qui marque une nette différence avec les premières architecture parallèles, composées de “clusters” de processeurs mono-cœurs et donc à mémoire *complètement* distribuée. Cette ancienne génération de machines a permis le développement d'un standard qui s'est imposé chez les développeurs, le *MPI* (*Message Passing Interface*). Grâce à ce concept de programmation, un même code s'exécute indépendamment sur différents processeurs. Des instructions d'échange, de réduction, mais également des activités conditionnées par le numéro attribué au processus, permettent au tout de s'exécuter en parallèle.

Les nouvelles architectures sont composées de grappes de processeurs multi-cœurs, actuellement bi, quadri ou octo-cœurs. Une programmation basée sur *MPI* uniquement n'est donc pas toujours suffisante pour exploiter pleinement ces architectures. En effet *MPI* n'incorpore pas le concept de mémoire “partagée” et peut occasionner des échanges mémoires inutiles ou inappropriés. C'est pour répondre à cette demande que s'est bâti le standard *Open-MP*. Il permet cette fois à un même processus, de déléguer des tâches à plusieurs processus (*i.e.* le nombre de cœurs du processeur). Une parallélisation à haut niveau, voire automatique, est ainsi possible, en agissant seulement sur certaines parties du programme (typiquement les boucles).

Signalons également l'arrivée d'un nouveau type d'architecture hybride, symbolisé par le leader actuel du “Top-500”, le *Roadrunner* aux États-Unis qui fut le premier ordinateur à franchir la barre du PetaFlops. Le marché des jeux vidéo a permis le développement de cartes graphiques extrêmement performantes. Dans ces architectures hybrides, les processeurs sont cette fois accompagnés d'un accélérateur de carte graphique (GPU). Très peu de codes ont été portés actuellement vers ces architectures complètement nouvelles, avec lesquelles les bibliothèques classiques haute-performance de bas niveau ne sont plus compatibles.

3.1.3 Définitions et machines de travail

Définitions

Dans ce chapitre, plusieurs notations propres au calcul massivement parallèle seront utilisées. On parlera ainsi du facteur de speed-up afin d'exprimer les capacités de travail parallèle d'un code de calcul. Le facteur de speed-up se définit ainsi :

$$S(n) = \frac{\text{Temps de calcul sur un processeur}}{\text{Temps de calcul sur } n \text{ processeurs}} \quad (3.1)$$

L'efficacité se déduira de :

$$E(n) = \frac{S(n)}{n} \quad (3.2)$$

Ces deux quantités mesurables lors de l'évaluation d'un code parallèle définissent plus généralement la *scalabilité* d'une application, notion qui exprime sa capacité à répartir efficacement les tâches sur le nombre de processeurs disponibles. Le terme de scalabilité “forte” est utilisé pour définir des tests qui s'effectuent à charge de travail constante. L'objectif est d'obtenir une efficacité proche de l'unité. Pour certains algorithmes, un tel niveau d'efficacité n'est pas atteignable. On essaie alors de maintenir une efficacité constante et un speed-up *linéaire*. À l'inverse, des tests de scalabilité “faible” utilisent

une charge de travail proportionnelle au nombre de cœurs utilisés et visent à maintenir un facteur de speed-up constant.

On parlera également de K-processeurs, unité pratique dérivée du Ko où $1K = 2^{10} = 1024$ processeurs. En effet, comme les composants mémoires, les cœurs sont généralement assemblés par puissance de 2. Le couple processeurs/réseau-mémoire permet de définir une *topologie physique* de la machine, *i.e.* un cube, rectangle ou tore, liée à la vitesse de transmission des données. Dans un tore 2D, la vitesse de transmission est privilégiée selon deux axes de la machine. Si le réseau est cyclique, *i.e.* que le premier processeur d'une ligne communique aussi vite avec le deuxième qu'avec le dernier, on donnera le nom de tore à la topologie décrite. La programmation *MPI* permet de définir une *topologie virtuelle* à l'aide de sous-communicateurs qui privilégient les communications entre certains processus. La topologie *virtuelle* permet alors de faire le lien, avec plus ou moins de succès, entre les exigences de l'algorithme et la topologie *physique* de la machine.

Machines de travail

Le code de calcul développé pour cette étude a subi des évolutions en réponse à un portage vers plusieurs types de plateformes. Les premiers pas ont été effectués au laboratoire sur des octo-cœurs de la gamme *Opteron*. Ces architectures étant complètement multi-cœurs, une programmation *Open-MP* suffisait à les exploiter. Cependant, on a déjà pu constater les limites (à cette époque en tout cas) de l'*Open-MP* en atteignant une efficacité maximale de 77% sur 8 processeurs, dans des cas simples.

En juin 2008, la participation au programme *HPC-Europa* a permis le portage du code vers des architectures plus puissantes. Ainsi la plateforme de calcul "Huygens" du centre de calcul scientifique néerlandais SARA, a permis des premiers calculs sur 512 processeurs, de type *POWER6* et de marque *IBM*. Ce développement a pu être immédiatement exploité à l'IDRIS puisque le centre français venait de se doter de la même machine ("Vargas" équipé de 3584 processeurs *POWER6*). Enfin, l'opportunité apportée par l'arrivée de "Babel" à l'IDRIS a été récemment exploitée. Cet ordinateur de type Blue Gene, composés de 10K quadri-cœurs, a nécessité quelques développements supplémentaires qui sont exposés dans ce chapitre. Il permet d'effectuer des simulations directes de taille considérable avec des maillages de taille supérieure à 1000^3 . Une des principales différences avec les autres super-ordinateurs est le caractère complètement distribué de l'architecture : "Babel" est ainsi composé de quadri-cœurs qui partagent 512MB de mémoire vive, tandis que "Vargas" ou "Huygens" sont composés de grappes de 16 bi-cœurs qui partagent 32GB de mémoire vive. En conséquence, les cas susceptibles d'être calculés sur une machine de type "Vargas" n'ont pas ou très peu de contraintes mémoires, puisque même sur un cœur ils peuvent bénéficier de la totalité de la mémoire de la grappe. A l'opposé, la plupart des calculs effectués sur "Babel" requiert un minimum de processeurs pour disposer d'un accès mémoire suffisant. Dans les caractéristiques de cette dernière machine, il faut également prendre en compte le réseau de transmission de données particulièrement efficace qui forme un tore 4D (figure 3.1).

3.2 OUTILS DE DÉVELOPPEMENT

Cette section s'attache à présenter l'environnement de développement utilisé ainsi que les bibliothèques et ne concerne donc pas exclusivement le caractère massivement parallèle du code. On aborde ici des points tels que la portabilité, essentiels pour utiliser ce type d'architecture.

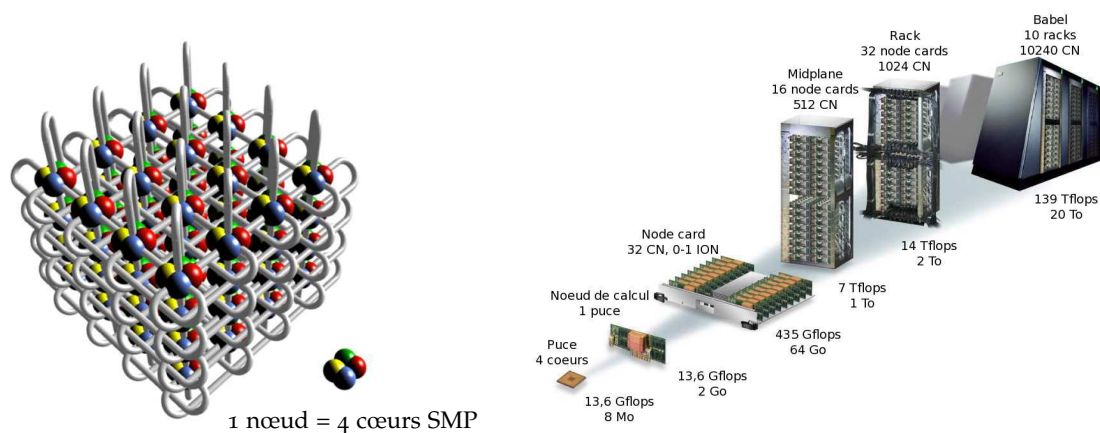


FIG. 3.1 – Présentation de la machine Blue Gene et de son architecture en tore (source IDRIS)

3.2.1 Logiciels externes au code de calcul

Développement

Le développement du code de calcul utilise le langage C (norme C99). Les compilateurs utilisés sont ceux des plateformes utilisées, *i.e.* principalement la suite XL d'IBM. Afin de conserver l'historique du développement, la journalisation et le suivi de version est effectué grâce à *Cvs* et bientôt par *Svn* (qui assure la succession de *Cvs*). On peut ainsi définir plusieurs versions de développement, et contrôler les évolutions du code au jour le jour. La figure 3.2 montre l'évolution du nombre de lignes de code pendant la phase active de développement.

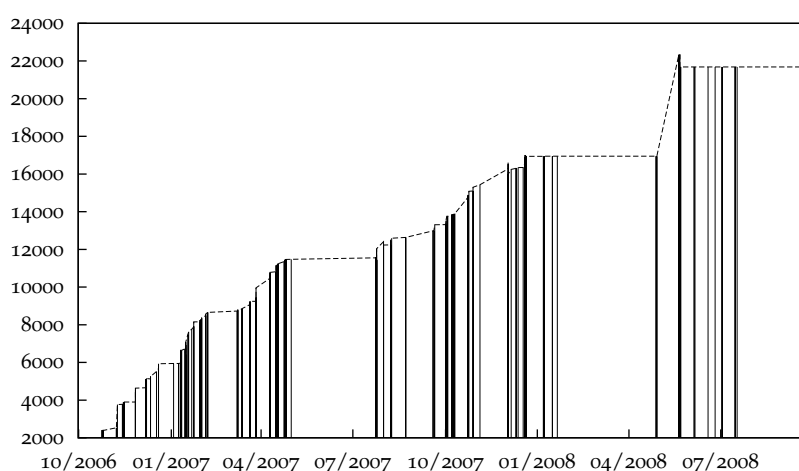


FIG. 3.2 – Lignes de code

Pré/post traitement

Pour gérer les quantités importantes de données, un langage interprété tel Python se révèle très efficace. Les modules déjà développés (*Numpy*, *Scientific*) permettent la gestion des formats de données présentés ci-après. Les résultats finaux sont exploités via *OpenDX* et *Gnuplot*, complétant ainsi un ensemble d'outils entièrement *open source*. Les chaînes de pré/post-traitement peuvent ainsi être installées sur n'importe quel ordinateur.

3.2.2 Librairies appelées au sein du code

La majeure partie de l'algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes renvoie à des problèmes d'analyse numérique classique. Il est impératif d'appeler des bibliothèques optimisées pour les résoudre. Deux voies sont ensuite possibles :

1. Faire appel prioritairement à des bibliothèques *open source*, qui sont livrées avec le code source et donc facilement recompileable sur la majorité des architectures. On assure ainsi une meilleure *portabilité*.
2. Faire appel à des bibliothèques propriétaires optimisées pour un type d'architecture (*MKL* pour *Intel*, *ESSL* pour *IBM*...). On favorise ici la *performance*.

On a eu la possibilité ici de conserver les deux choix, assurant ainsi performance ou portabilité, selon l'ordinateur à disposition.

L'articulation globale des bibliothèques dans le code est présentée sur la figure 3.3. On fait appel à trois types de bibliothèques, qui correspondent à trois domaines différents : algèbre linéaire, gestion des entrées/sorties, et gestion des fonctions de bas niveau. Pour le premier domaine, *Blas* et *Lapack* sont les références et possèdent des versions dérivées propriétaires sur la majorité des architectures. Ces bibliothèques sont ainsi incluses dans *ESSL* et *MKL*, en version optimisées. Pour le calcul des FFT, on a constaté que les fonctions *DFT* de *ESSL* sont plus performantes sur les architectures IBM (d'un facteur ≈ 2) que *FFTW*, référence en la matière. La bibliothèque *P3dfft* utilise des fonctions de *FFTW* ou *ESSL*, en lien avec l'algorithme explicité dans le paragraphe suivant. Dans le deuxième domaine, le choix s'est porté vers le format *NetCDF*, très connu de la communauté des climatologues. Le choix d'une telle bibliothèque permet de travailler avec un format "standard" accepté par de nombreux logiciels de visualisation et de post-traitement. Enfin la bibliothèque *Glib-2.0* fournit un grand nombre de fonction de bas niveau très utiles pour la gestion des chaînes de caractères, des allocations mémoire, etc. De plus, elle assure une définition commune des types de variables (entiers ou flottants) quelle que soit la plateforme utilisée et renforce ainsi la portabilité du code.

3.3 ALGORITHME DE FFT

L'algorithme de FFT est une des étapes essentielles dans la construction des codes pseudo-spectraux parallèles. La nature même de la transformation rend l'algorithme difficile à paralléliser. Ce qui est local dans l'espace physique est non-local dans l'espace spectral et *vice versa*. Il est *a priori* impossible de transformer un sous-domaine de l'espace physique stocké dans la mémoire d'un processeur indépendamment du reste du domaine. L'appel à des transpositions complètes ou partielles du domaine est souvent nécessaire.

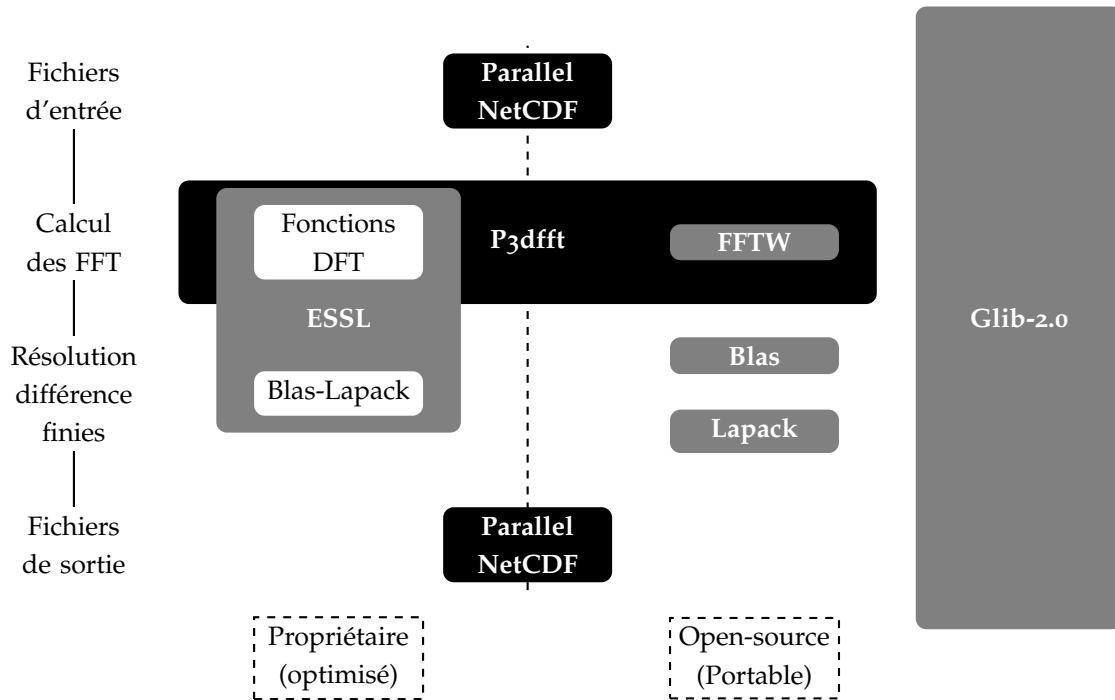


FIG. 3.3 – Bibliothèques incorporées dans le code de calcul

Notre cas est un peu particulier, puisque la transformée de Fourier requise n'est "que" bidimensionnelle. On peut tirer parti de la localité par plan du calcul d'une FFT 2D. On a donc d'abord procédé à une distribution mémoire par "tronçonnage" de la troisième direction. Cette approche initiale (Bodart 2008) limite évidemment le nombre de processeurs mobilisables au nombre de noeuds de maillage dans la troisième direction. Nous avons donc fait évoluer la méthode comme détaillé ci-après.

3.3.1 Approche classique : limites

Dans le cas d'un traitement mixte spectral/différences-finies, deux étapes essentielles constituent l'algorithme :

- le calcul de FFT 2D directes ou indirectes de l'espace physique vers l'espace semi-spectral ;
- la résolution de systèmes linéaires liés à la discrétisation par différences finies dans l'espace semi-spectral.

Pour des raisons de surcoût de calcul, on évite d'effectuer la résolution d'un même système linéaire de manière distribuée. L'espace semi-spectral doit donc être découpé selon k_x et/ou k_y de façon à résoudre les $k_x k_y$ systèmes linéaires localement par rapport à chaque processeur. De la même manière, un code tout-spectral doit effectuer chacune des trois "passes" localement aux processeurs. Les deux cas sont donc très similaires, si l'on remplace la résolution de systèmes linéaires dans le cas spectral/différences finies par la troisième passe FFT dans les codes tout-spectraux.

Afin de généraliser l'approche, on considère le plus courant des deux cas, celui du calcul d'une FFT tri-dimensionnelle. L'algorithme le plus classique que l'on peut qualifier de décomposition par tranches est présenté sur la figure 3.4. Les échanges de données sont réduits à une transposition complète du

domaine. C'est la manière la plus efficace connue à ce jour pour effectuer des FFT tridimensionnelles, et l'algorithme fait partie (sous le nom de *FT*) des 8 problèmes codés dans les cas-tests NAS (Bailey et al.) destinés à tester les machines parallèles. Cette méthode admet cependant une limite qui ne devient plus acceptable sur les ordinateurs actuels. Un problème de taille N^3 se décompose au maximum sur N tranches et le nombre de processeurs utilisables se limite donc à N . En simulation directe, la taille des maillages acceptables en terme de stockage et de temps de calcul se situe actuellement entre $N = 1024$ et $N = 2048$. la méthode ne permet donc pas de résoudre ces problèmes en utilisant 8 ou 16K processeurs. On conserve tout de même cette méthode pour les calculs à maillages plus réduits où elle offre des temps de calcul intéressants pour $N \leq 512$.

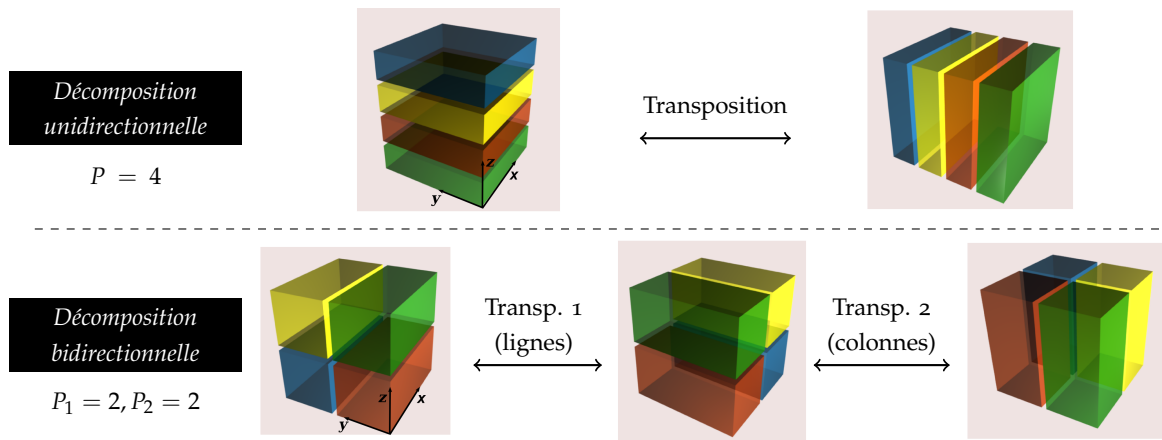


FIG. 3.4 – Décomposition bidirectionnelle comparée à une décomposition par “tranches” pour l’algorithme de FFT

3.3.2 Décomposition bidirectionnelle

La décomposition *bidirectionnelle* permet de pallier au problème décrit précédemment. Dans les travaux de Eleftheriou et al. (2003), qui furent les premiers à utiliser cette technique, on parle de *volumetric decomposition*. On propose ici de rebaptiser le terme en “décomposition *bidirectionnelle*” afin d’en clarifier le sens. Contrairement à la décomposition “en tranche” qui est *unidirectionnelle* on découpe cette fois le domaine en utilisant deux directions. On crée ainsi un maillage 2D virtuel de $P_1 \times P_2$ cœurs. Le nombre de cœurs utilisables est donc étendu à N^2 pour un problème de taille N^3 . Ceci est amplement suffisant pour les configurations visées. La procédure est exposée sur la figure 3.4. Elle permet d’effectuer *toutes les FFT* de manière non-distribuée. Dans un premier temps, les FFT sont effectuées dans la direction x , localement sur chaque processeur. Une première transposition permet de pouvoir travailler localement dans la direction y , et une deuxième d’effectuer les dernières passes dans la direction z . Cette méthode implique donc deux transpositions au lieu d’une seule. Cependant, la figure 3.4, avec un exemple sur 4 cœurs ($P_1 = P_2 = 2$), montre que la première transposition implique des échanges entre le domaine jaune et le domaine vert d’une part, entre le rouge et le bleu d’autre part. De la même manière, la deuxième transposition implique des échanges deux à deux entre les sous-domaines. Si l’on généralise à la vision d’un maillage 2D de $P_1 \times P_2$ cœurs, les premières transpositions sont internes à chaque ligne du maillage, tandis que les deuxièmes transpositions se font dans les colonnes. Ceci présente un avantage majeur sur des architectures toriques comme Blue Gene. En effet, si l’on fait coïncider la topologie

physique de la machine et la topologie virtuelle des processus, on peut effectuer les transpositions dans des “sous-réseaux” d’interconnexion plus rapides.

L’algorithme présenté ci-dessus a été récemment développé par Pekurovsky (San Diego Supercomputer Center) dans une bibliothèque *open-source* qui se place en sur-couche des bibliothèques ESSL ou FFTW. Elle gère en effet principalement les transpositions et fait appel aux fonctions classiques de FFT disponibles dans ESSL/FFTW. Les performances de cette bibliothèque, *P3dfft* ont été qualifiées jusqu’à 32K cœurs (Donzis et al. 2008).

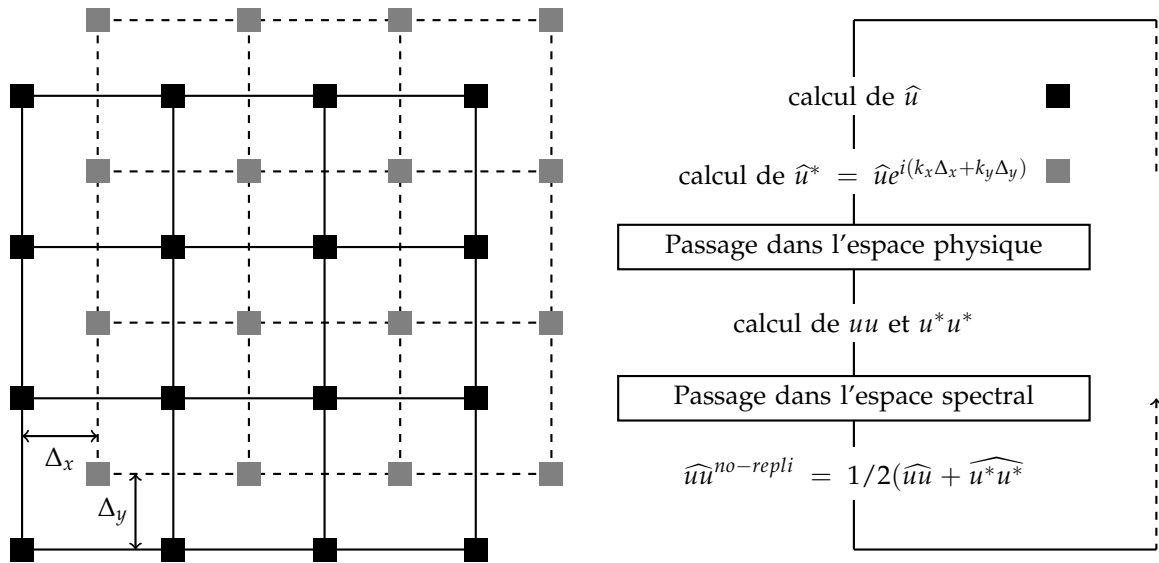


FIG. 3.5 – Anti-repliement par décalage de maillage : exemple avec deux directions périodiques

Méthode d’anti-repliement

On aborde maintenant le problème de repliement lié aux méthodes spectrales. Plusieurs méthodes existent pour contourner ce problème, et le choix se porte naturellement vers la méthode la plus performante. C’est donc généralement un choix algorithmique. Le choix de la bibliothèque utilisée conditionne la méthode retenue ici. De manière plus générale, celle-ci est sans doute la plus adaptée aux simulations massivement parallèles utilisant des codes spectraux.

Ce problème de repliement, lié au calcul des termes non-linéaires dans l’espace physique, est présenté de manière exhaustive par Canuto et al. (1988). Les méthodes exposées ci-après y sont détaillées. La troncature aux “2/3” ou règle des “3/2” est la manière la plus classique de supprimer tout repliement. C’était le choix effectué avant l’utilisation de *P3dfft*. D’un point de vue algorithmique, la principale difficulté est de transposer dans l’espace spectral les modes actifs uniquement afin d’économiser des transferts de données. Pour une FFT tridimensionnelle, cela revient à ne transposer que $(2/3)^3 \approx 1/3$ du nombre total de points pour travailler dans l’espace spectral. La mise en place d’une telle transposition est laborieuse et difficile à équilibrer, puisque la troncature n’affecte pas de la même manière tous les sous-domaines. *P3dfft* étant une bibliothèque générique, elle effectue des transpositions complètes de domaines. Il faut donc choisir d’autres méthodes pour éviter les problèmes de repliement, comme le “décalage du maillage”. On adopte donc la méthode présentée figure sur la 3.5, associée à une

troncature sphérique de nombre d'onde maximal égal à $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3L}$ (formule en 1D). Le tout assure l'anti-repliement en conservant 44% des modes en trois dimensions. En comparaison, la règle des "3/2" associée à une troncature sphérique ne retient que 15,5% des modes. Au prix d'un léger surcoût de calcul en comparaison à la règle des "3/2", cette méthode de repliement affecte de manière *uniforme* tout le domaine et n'engendre pas plus d'échanges de données. En effet, dans les deux cas on n'échange que des modes actifs (hors troncature). C'est pourquoi elle est particulièrement adaptée au calcul parallèle massif où l' "uniformité" des tâches est essentielle pour la performance.

Équilibrage de la charge

Le calcul de FFT par l'intermédiaire de *p3dfft* présente un problème d'équilibrage de charge inhérent aux fonctions de transformations utilisées. La méthode la plus rapide d'effectuer une FFT transforme N points de l'espace physique en $(N + 2)/2$ modes complexes dans l'espace spectral, les premier et dernier modes étant réels. Si $N = 128$, il y aura donc 65 modes complexes, et donc une allocation mémoire nécessaire de 130 variables réelles, pour contenir la transformée de Fourier. Il est donc impossible par cette méthode d'obtenir une décomposition équilibrée à la fois dans l'espace spectral et dans l'espace physique. Pour pallier à ce problème, il suffit de tenir compte de la troncature évoquée précédemment, qui rend le dernier mode de la transformation inactif. Lors de la résolution aux différences finies, partie la plus coûteuse, ce mode n'est pas pris en compte. On bénéficie ainsi d'un équilibrage de la charge parfait pour cette étape. Ce gain en performance, qui semble dérisoire, peut s'avérer très important avec une parallélisation massive. Si l'on considère la direction décomposée dans l'espace spectral, avec $P_1 = 64$ cœurs et $N = 128$ par exemple, il y aura deux modes par cœur. Lors de l'étape de résolution des différences finies, chaque mode est associé à une résolution complète du système linéaire dans la direction z . Le troisième mode parasite, hérité par l'un des cœurs, lui coûte 50% de travail en plus.

3.3.3 Avantage "collatéral" de la décomposition bidirectionnelle

La décomposition par tranche a longtemps été utilisée pour des solveurs pseudo-spectraux et restreint les choix de maillage. La décomposition bidirectionnelle apporte plus de flexibilité. Pour le constater il suffit d'observer le couplage qui s'établit entre la taille du domaine déterminée par (N_x, N_y, N_z) et le nombre de cœurs (P_1, P_2) . On considère un champ dans l'espace spectral, composé de $N_x/2 \cdot N_y N_z$ nombres complexes. C'est dans cet espace que le découpage est le plus restrictif. En référence à l'espace physique, une des dimensions (N_x) est divisée par deux et réduit d'autant le nombre maximal de sous-domaines que l'on peut créer.

Les contraintes qui s'imposent sont résumées dans le tableau 3.1. La contiguïté en mémoire exprime, dans un formalisme dérivé du langage C, la place des éléments en mémoire. Ainsi, un tableau T contigu zyx doit être vu comme un simple vecteur V , dont les éléments sont liés de la sorte : $T(i, j, k) = V(N_x N_y k + N_x j + i)$. Pour une taille de maillage donnée, on aboutit donc aux conditions suivantes, $\mathcal{D}_{\{a,b\}}$ représentant l'ensemble des diviseurs communs à a et b :

$$P_1 \in \mathcal{D}_{\{N_z, N_y\}} \quad P_2 \in \mathcal{D}_{\{N_y, N_x/2\}} \quad \Rightarrow \quad (P_{1_{max}}, P_{2_{max}}) = (PGCD_{(N_z, N_y)}, PGCD_{(N_y, N_x/2)}) \quad (3.3)$$

A chaque taille de maillage, on peut donc associer un nombre maximal de cœurs et à l'inverse, pour un nombre de cœurs donné, il existe un nombre fini de tailles de maillage pour lesquelles la charge sera

	Directions		Contiguïté	Contraintes sur
	décomposées		en mémoire	la taille du domaine
1ère étape	z	y	zyx	$N_z = e_1 P_1$ et $N_y = e_2 P_2$
2ème étape	z	y	zxy	$N_z = e_1 P_1$ et $N_x/2 = e_3 P_2$
3ème étape	y	x	yxz	$N_y = e_4 P_1$ et $N_x/2 = e_3 P_2$

TAB. 3.1 – Décomposition du domaine : couplage entre (N_x, N_y, N_z) et (P_1, P_2)

parfaitement équilibrée. Dans notre cas, les contraintes physiques exposées ultérieurement suggèrent d'utiliser $N_x = N_y$. La figure 3.6 présente ces différentes possibilités pour un nombre de cœurs égal à 1K et 16K. En comparaison, les points rouges présentent les seules possibilités données par une décomposition en tranches (*i.e.* $P_2 = 1$).

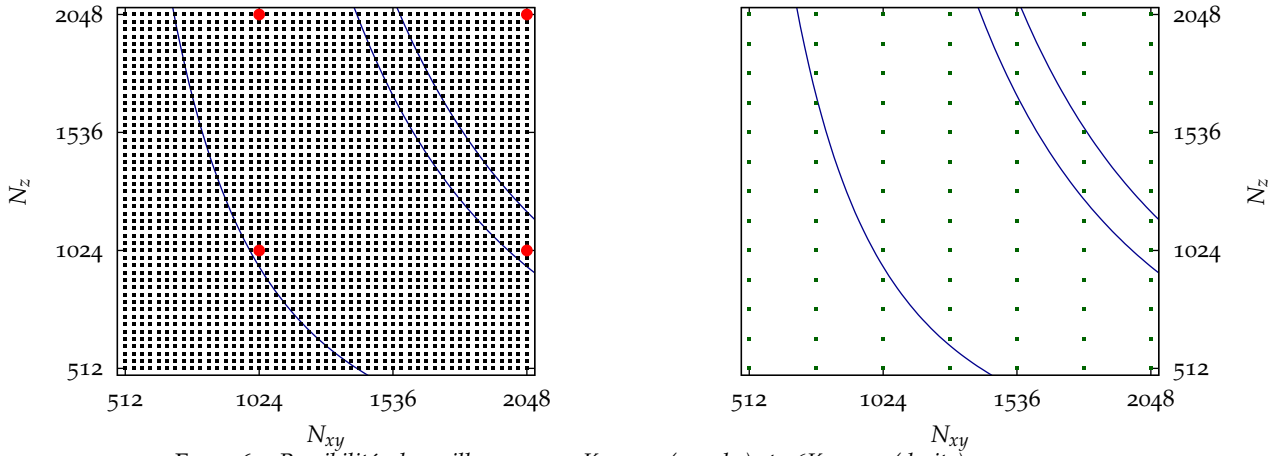


FIG. 3.6 – Possibilités de maillages pour 1K cœurs (gauche) et 16K cœurs (droite).

Les courbes bleues indiquent des taille globale constante : $N_z N_{xy}^2 = \text{cste}$

La décomposition bidirectionnelle apporte donc plus de flexibilité. Pour le cas $N_x = N_y$, on peut découpler N_x et N_z , ce qui est impossible avec une décomposition en "tranches". Ceci est intéressant lorsque les contraintes de résolution ne sont pas identiques dans toutes les directions. Lors de l'étude de jets turbulents par exemple, la taille du domaine impose un découplage entre la taille de la section du jet et la distance d'expansion du jet. Dans l'analyse de telles configurations par simulation directe, les contraintes de résolution liées aux échelles de la turbulence fixent donc le nombre de points nécessaires dans chaque direction comme une fonction du nombre de Reynolds global.

$$N_x = N_y = f(Re) \quad N_z = g(Re) \quad (3.4)$$

En première approximation, on peut considérer que le coût d'une simulation est proportionnel au nombre de points utilisés. Aussi, un découplage du nombre de points permet d'optimiser une simula-

tion dimensionnée par le nombre de points utilisables en offrant plusieurs possibilités de maillage. La taille globale constante du maillage, que l'on associe à un coût constant, est symbolisée par les courbes bleues sur la figure 3.6.

3.4 FICHIERS D'ENTRÉE/SORTIE

3.4.1 Problématique

L'utilisation de milliers de processeurs nécessite de porter une attention particulière à l'écriture des fichiers de données. Le principal problème concerne la sauvegarde des champs finaux et la lecture des champs initiaux. La première approche consiste à utiliser le découpage du domaine par processus en écrivant ou en lisant un fichier par processus. Ceci devient très pénalisant lorsque le nombre de processus devient important pour trois raisons majeures :

1. Lors du post-traitement et notamment de la visualisation des données, il n'est pas immédiat de recomposer un domaine décomposé sur plusieurs centaines de fichiers.
2. Les systèmes de stockage des centres de calcul (ici à l'IDRIS) imposent un quota maximal pour le nombre de fichiers créés, en accord avec les systèmes d'exploitation gérant les baies de stockage. Un calcul effectué sur 16K processeurs, et sauvegardant une cinquantaine de pas de temps peut ainsi générer plusieurs millions de fichiers, là où les quotas en autorisent quelques centaines de milliers au maximum.
3. La disponibilité des centres de calcul varie constamment. Ainsi l'utilisateur peut-être amené à vouloir modifier la configuration de son calcul et passer par exemple d'une décomposition sur 4K cœurs à une décomposition sur 16K cœurs si la charge globale de la machine le lui permet. Il est donc souhaitable d'obtenir un système de sauvegarde de fichiers *indépendant de la décomposition du domaine par processus* effectuée pendant le calcul.

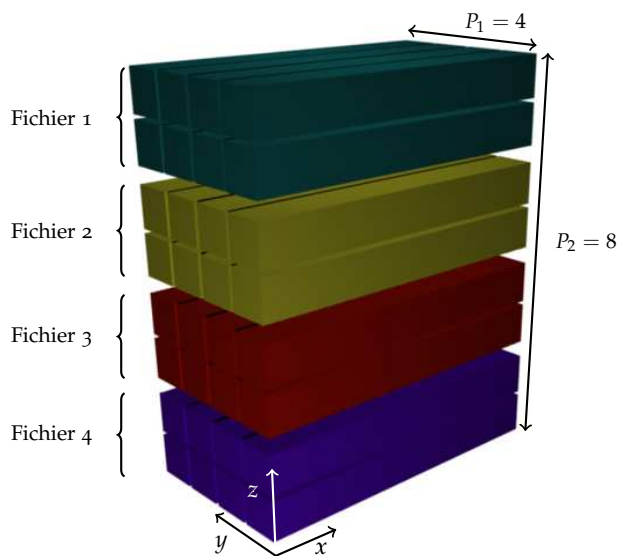
3.4.2 Parallel-Netcdf

Les contraintes évoquées précédemment ont été incorporées dans la deuxième version du standard MPI. Ainsi des directives MPI-IO (Input/Output) permettent à plusieurs processus d'écrire simultanément dans le même fichier avec une vitesse d'écriture élevée. Le choix du format NetCDF, comme tout autre format de fichier d'entrée/sortie ne permet pas d'utiliser de manière efficace les commandes MPI-IO, celles-ci étant de très bas niveau. La division MCS du Laboratoire National d'Argonne a récemment mis au point *parallel-NetCDF* (Li et al. 2003). Cette bibliothèque permet d'écrire en parallèle des fichiers au format NetCDF, grâce à l'utilisation en sous-couche de directives MPI-IO. Cette bibliothèque *open-source*, pour l'instant peu documentée, permet donc de répondre à la problématique exposée ci-dessus.

L'écriture d'un unique fichier en sortie de calcul est cependant risquée. On est peu habitué à ouvrir, ni même à manipuler des fichiers de cette taille. Un maillage de taille 1000^3 génère 80Go de données par itération sauvegardée. Le choix d'implémentation est donc intermédiaire et suit le schéma présenté sur la figure 3.7. Les fichiers de données sont associés à une couche d'une certaine épaisseur, décidée par l'utilisateur au départ du calcul. Il spécifie de manière indépendante le nombre de couches c_i en lecture et le nombre de couches en écriture c_o permettant de :

- réduire/augmenter le nombre de fichiers d'un calcul à l'autre ;
- choisir de lire/écrire un seul fichier en spécifiant $c_o = c_i = 1$.

Ces choix ne sont pas totalement indépendants du nombre de processus, mais présentent suffisamment de degrés de liberté. Ainsi, c est nécessairement un diviseur de p_2 .



Exemple de maillage

Global		Local	
N_x	128	n_x	128
N_y	128	n_y	32
N_z	128	n_z	16

FIG. 3.7 – Découpage de fichiers par “couches” dans une décomposition bidirectionnelle sur 32 cœurs (la décomposition est présentée ici dans l'espace physique).

3.5 EXÉCUTIONS DE CAS TESTS SUR BABEL

Cette section est consacrée à décrire les résultats obtenus sur “Babel”. Afin de simplifier cette présentation, l’influence du choix du couple (P_1, P_2) est omise. On retiendra que maximiser P_1 donne de meilleurs résultats, confirmant les préconisations des développeurs de *P3dfft* (Donzis et al. 2008), le gain en performance restant modéré (5 à 10% au mieux). De plus, le choix d’un maillage en adéquation avec un problème physique peut conditionner le choix du couple (P_1, P_2) comme indiqué au paragraphe 3.3.3.

3.5.1 Cas tests et conditions de test

Le code faisant appel à de nombreuses bibliothèques pré-compilées sur la machine, les paramètres de compilation (optimisation *-On*) n’ont que très peu d’influence. Les tests sont donc effectués avec un niveau d’optimisation classique *-O3*. La performance du code est mesurée à partir de tests de scalabilité “forte” (voir 3.1.3). On effectue diverses mesures du temps d’exécution d’un même problème en faisant varier le nombre de processeurs utilisés. Les étapes “rares” telle que l’écriture d’informations relatives au calcul ou la prise de statistiques, sont exclues de ces tests. Ces étapes ont une influence négligeable sur les performances du code puisqu’elles ne dépassent pas 1% du temps d’exécution total. Le calcul relatif à l’adaptation du pas de temps selon le critère CFL est également exclu des tests. Cette étape est désactivée dès que l’on peut établir un pas de temps uniforme. Au regard des échelles de temps caractéristiques du problème, on peut définir une période T_c durant laquelle l’écoulement évolue significativement. Au-delà de cette période, le pas de temps est imposé de manière uniforme :

$$\Delta_{t_{uni}} = \min\{\Delta_{t_i}\} \quad t_i \in [0, T_c] \quad (3.5)$$

La fonction *gettimeofday* est utilisée pour chronométrer les différentes sections du code. Associée à des barrières MPI, pour synchroniser tous les cœurs, cette fonction possède une précision de l’ordre de la microseconde. Cette précision n’est pas affectée par la “latence” des appels de type MPI_Barrier. La latence d’un appel système est définie par la durée maximale de réalisation effective de cette fonction. Pour les fonctions MPI_Barrier la latence est de l’ordre de la micro-seconde sur “Babel” (données constructeur). Un test de quelques minutes est donc suffisant pour juger des capacités du code de calcul. La dernière partie, sur les tests d’écriture, vise à estimer le temps nécessaire à la sauvegarde des fichiers. Ce test est extrêmement dépendant de l’utilisation du disque par les autres utilisateurs et n’est donc donné qu’à titre d’indication.

3.5.2 Performance obtenues

Les temps d’exécution des différentes parties de l’algorithme global sont soumis à l’influence de deux paramètres essentiels :

1. La taille du maillage dans la direction normale, qui conditionne la taille des matrices dans la résolution des systèmes linéaires.
2. La taille du maillage dans les deux premières directions, qui conditionne la taille des FFT, mais surtout la taille des échanges de données lors des transpositions.

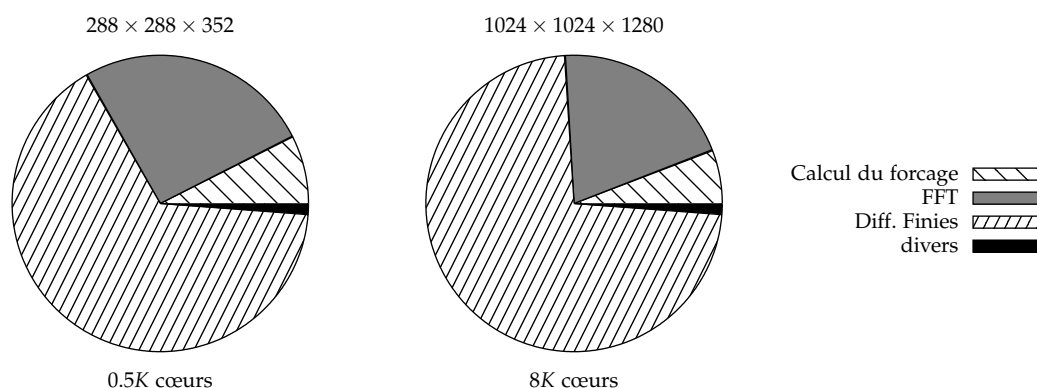


FIG. 3.8 – Temps d'exécution des différentes parties du code pour deux types de maillages sur "babel"

A titre d'illustration, la figure 3.8 présente les temps d'exécution obtenus dans les étapes principales de l'algorithme. Les deux cas ne sont pas comparables et ne permettent pas de tirer des conclusions générales puisque la taille du maillage ainsi que le nombre de cœurs sont différents. Ils permettent néanmoins d'observer la proportion importante occupée par deux sections du code : le calcul des FFT et la résolution des systèmes linéaires monopolisent ainsi plus de 90% du temps de calcul. La dernière partie coûteuse (6 à 8%) concerne le calcul des termes de forçage dont l'algorithme est exposé dans le chapitre suivant.

Tests de scalabilité forte.

On effectue plusieurs tests, où le choix des maillages est conditionné par les contraintes suivantes :

- certains cas nécessitent un nombre minimal de cœurs pour disposer d'une capacité mémoire totale suffisante ;
- il n'existe pas toujours de compatibilité entre le maillage choisi et le nombre de processeurs (Cf. paragraphe 3.3.3).

Cas test	A	B1	B2	B3
N_{xy}	512	1024	896	1024
N_z	512	1024	1280	1280

TAB. 3.2 – Cas tests utilisés pour évaluer la scalabilité du code

On fait donc le choix des quatre maillages présentés dans le tableau 3.5.2. Le cas A, de taille modeste, est compatible avec une utilisation allant de 256 à 16K processeurs. Les maillages relatifs aux cas B présentent un nombre de total de points comparable. Il permettent ainsi d'évaluer l'influence du découplage entre N_x et N_z .

Les étapes pénalisantes pour le calcul parallèle sont les transpositions du domaine, qui impliquent essentiellement des échanges inter-processeurs. Ces transpositions ne peuvent bénéficier d'un *speed-up*

parfait. En effet, si la multiplication du nombre de processeurs diminue la taille des échanges et donne accès à un plus gros réseau d'interconnexions, le volume total de données échangées reste constant. En cas d'encombrement sur le réseau, dû à un très grand nombre de messages ou à une saturation de la bande passante, on peut s'attendre à une baisse des performances. Le reste du calcul induit peu de communications parallèles et son efficacité propre doit être proche de l'unité.

On isole donc le calcul des FFT (qui inclut les transpositions de domaines) afin de pouvoir mesurer l'impact de ces transpositions sur le "scaling" global de l'application. Les résultats, présentés sur la figure 3.9, démontrent les bonnes performances du code :

1. Les résultats concernant le calcul des FFT illustrent la difficulté de paralléliser des transpositions. On observe cependant une diminution du temps d'exécution jusqu'à 16K cœurs. Au-delà, la multiplication du nombre de processeurs semble contre-productive. Il faut cependant modérer les conclusions que l'on pourrait tirer de ce résultat : il est en effet difficile d'effectuer ce test sur un nombre aussi élevé de processeurs du fait des disponibilités de la machine. Un unique test a donc été réalisé pour le cas B1 sur 32K cœurs.
2. Les temps d'exécution globaux décroissent de manière quasi-linéaire pour une efficacité globale de l'ordre de l'unité. On démontre ici que la section du code consacrée à la résolution de systèmes linéaires se parallélise de manière idéale. Le temps de calcul consacré à cette section restant prépondérant devant le temps nécessaire aux transpositions (Cf. figure 3.8), l'efficacité parallèle globale du code est très peu affectée par la chute d'efficacité relevée pour la section consacrée au calcul des FFT.

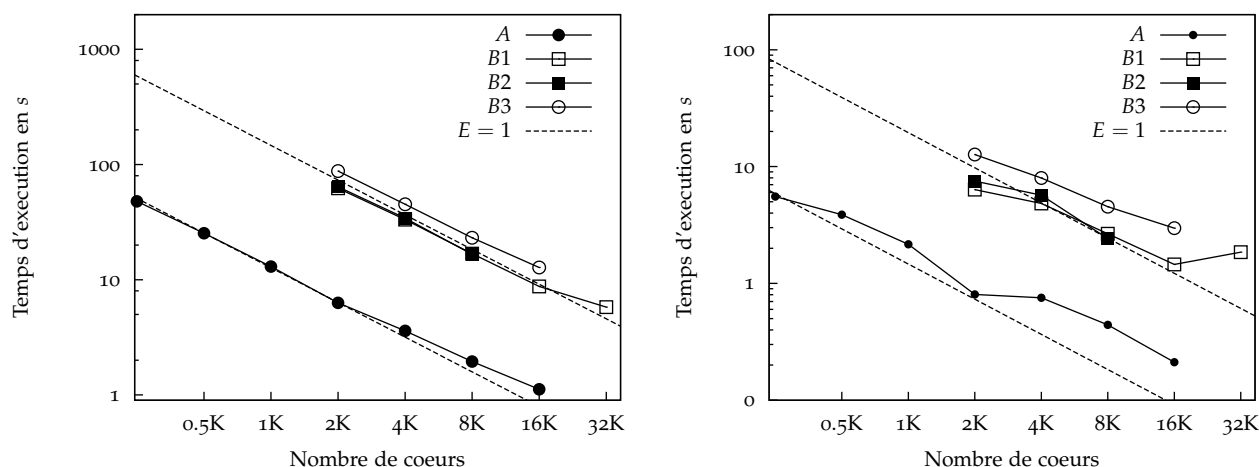


FIG. 3.9 – Test de scalabilité forte sur plusieurs types de maillages : temps d'exécution global (gauche), calcul des FFT (droite)

Tests d'écriture

L'écriture de fichiers est une étape cruciale pour la performance d'une application. Quelques minutes passées à écrire des fichiers, sont autant de temps de calcul perdu. Ainsi 3 minutes sur 16k processeurs seront facturées 50h par le centre de calcul. Il faut donc exploiter au mieux la bande passante totale

du système, ici de 12.7 Go/s. Plusieurs tests ont été effectués afin d’obtenir une indépendance vis-à-vis de l’utilisation de la bande passante par d’autres utilisateurs. Le tableau 3.3 résume les résultats obtenus. On observe que l’utilisation de *Parallel-NetCDF* est très performante et permet de profiter de près du quart de la bande passante totale lorsque l’écriture concerne des fichiers dont la taille totale est de l’ordre de la centaine de Go. Dans ce cas, des temps inférieurs à la minute sont nécessaires pour sauvegarder les champs calculés. Pour limiter les pertes de données en cas de problèmes, une sauvegarde horaire des données est imposée. Celle-ci est donc peu pénalisante puisqu’elle augmente le temps d’exécution total d’environ 1%.

	P_1	P_2	Fichiers	Taille totale	Taux de Transfert(Max)
$288 \times 288 \times 352$	16	32	32	1.8 Go	390 Mo/s
$1024 \times 1024 \times 1280$	64	128	64	82 Go	3.6 Go/s

TAB. 3.3 – Taux de transfert obtenu sur “babel” pour deux cas test.

SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Les machines mises à disposition par l’IDRIS, le centre de calcul du CNRS, donnent la possibilité de programmer des applications massivement parallèles, du niveau des standards internationaux dans ce domaine. La construction de ce type d’applications nécessite de prendre en compte les contraintes imposées par l’utilisation de milliers de processeurs qui s’ajoutent à celles rencontrées lors du développement d’applications parallèles classiques. Dans notre cas, deux difficultés majeures ont été identifiées :

- La parallélisation du calcul d’une FFT bidimensionnelle sur un domaine de taille N^3 qui se distribue de manière classique sur un nombre de processeurs inférieur à N . Cette limite, non acceptable, compte tenu des tailles de problème envisagées et du nombre de processeurs mobilisables est levée grâce à une décomposition bidirectionnelle du domaine et l’utilisation d’une bibliothèque appropriée *P3dfft*.
- La gestion des fichiers d’entrée/sortie ne peut plus se gérer de manière indépendante par chaque processeur comme ça peut-être le cas sur une application utilisant une dizaine de processeurs. L’utilisation des directives *MPI – IO* par l’intermédiaire de la bibliothèque *Parallel-Netcdf* permet de découpler le nombre de processeurs utilisés du nombre de fichiers écrits en sortie. Elle permet également la réduction considérable du nombre de fichiers écrits en sortie, ce qui facilite le post-traitement et permet de satisfaire aux contraintes imposées par les systèmes de calculs.

En incorporant ces modifications, l’application originellement développée sur des machines de taille modeste (≤ 32 processeurs) démontre d’excellentes performances de scalabilité sur le super-calculateur Babel. Elle permet d’utiliser efficacement jusqu’à 32K processeurs et offre la possibilité de résoudre des problèmes de taille considérable. On peut ainsi envisager des simulations directes dont le maillage comprend plus d’un milliard de points (1024^3 , 2048^3 notamment) avec ce code de calcul. De plus la décomposition bidirectionnelle adoptée permet de découpler le nombre de points de maillage utilisé

dans les différentes directions, ce que n'autorisait pas la décomposition classique unidirectionnelle. On peut ainsi optimiser les calculs la géométrie impose de différencier la taille du maillage dans les différentes directions du domaine physique, comme c'est le cas par exemple dans l'étude de jets turbulents.

GÉNÉRATION D'UNE SOURCE PLANE DE TURBULENCE

4

SOMMAIRE

4.1	FORÇAGE À CHAMP DE FORCE ALÉATOIRE	66
4.1.1	Contrôle de la puissance injectée	66
4.1.2	Particularités liées à un domaine confiné	70
4.2	FORMULATION ALGÈBRE DU CHAMP DE FORCE	70
4.2.1	Définition d'un champ de force élémentaire	70
4.2.2	Synthèse d'une source plane de turbulence	72
4.3	MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE	73
4.3.1	Stockage en mémoire des champs élémentaires	74
4.3.2	Calcul du champ de force à chaque pas de temps	74
4.3.3	Pseudo générateurs aléatoires	75
4.3.4	Anisotropie du forçage	75
4.4	MODÈLE DE SIMULATION AUX GRANDES ÉCHELLES DANS LA ZONE DE FORÇAGE	76
4.4.1	Viscosité spectrale dynamique	76
4.4.2	Spectre de densité d'énergie	77
4.5	CARACTÉRISATION DU FORÇAGE OBTENU	78
4.5.1	Paramètres d'étude	78
4.5.2	Régime transitoire	79
4.5.3	Écoulement induit dans la zone de forçage	80
4.5.4	Caractéristiques de la turbulence synthétisée	80
4.6	MODÉLISATION DES CARACTÉRISTIQUES DE L'ÉCOULEMENT RÉSULTANT	81
	SYNTHÈSE	84

Pour maintenir un état statistiquement stationnaire de turbulence, il faut pouvoir compenser les pertes qui résultent de la dissipation dans le domaine. L'injection de puissance dans l'écoulement par l'intermédiaire d'un terme source dans les équations de Navier-Stokes, ou le réajustement artificiel du niveau d'énergie cinétique de l'écoulement, sont autant de techniques traditionnelles qui permettent de créer un mécanisme de production et compenser les pertes d'énergie cinétique turbulente par dissipation. On décrit ici la technique de forçage développée au cours de cette étude, dont la particularité est de confiner spatialement la production de turbulence. Dans la configuration étudiée, l'application de cette technique permet d'approcher le concept de *source plane de turbulence*.

4.1 FORÇAGE À CHAMP DE FORCE ALÉATOIRE

Orszag et Patterson (1972) furent les premiers à réaliser une simulation directe de turbulence homogène isotrope statistiquement stationnaire. Dans cette simulation, la puissance perdue par dissipation était compensée par un terme de forçage dans les équations de Navier-Stokes. Cette technique de forçage est maintenant couramment utilisée pour étudier les propriétés de la turbulence homogène isotrope. Il existe cependant plusieurs manières de définir le terme de forçage :

- de manière explicite, en synthétisant un champ de force adéquat ;
- de manière implicite, en agissant sur le champ de vitesse à chaque instant (par compensation linéaire par exemple), de manière à ce qu'il conserve un niveau d'énergie cinétique constant.

On s'intéresse ici à un forçage défini de manière explicite, qui présente l'avantage de pouvoir être défini de manière aléatoire.

Godeferd et Lollini (1999) ont étudié numériquement une configuration similaire à l'expérience de grille oscillante, afin de mettre en évidence les propriétés de la diffusion de la turbulence dans un référentiel tournant. Les battements de la grille sont modélisés par un champ de force localisé dans un plan du domaine. Ils appliquent ainsi dans un plan d'équation $z_g = cste$ un champ de force de la forme :

$$f_i(x, y, z_g, t) = \frac{n^2 S}{2} \left(\delta_{i1} \cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{l}y\right) \sin(nt) \right) + \beta_i, \quad (4.1)$$

où n, S, l, β expriment respectivement la fréquence temporelle de battement, l'amplitude spatiale des battements, la taille des mailles de la grille et un terme aléatoire. Ce type de forçage, introduit par Yang (1992), génère donc des structures bidimensionnelles. La turbulence retrouve alors sa structure tridimensionnelle à partir d'une certaine distance de la source. On opte dans cette étude pour un forçage dont la définition est tridimensionnelle, afin de réduire cette période d'adaptation spatiale. La construction de ce forçage reprend certains principes de la méthode développée par Alvelius (1999) en situation de turbulence homogène. L'application de ce forçage sera dans notre cas confinée dans une couche de production d'épaisseur L_f (figure 1.1, page 8).

4.1.1 Contrôle de la puissance injectée

Le principal inconvénient lié à la définition explicite d'un champ de force $\mathbf{f}$ est la difficulté à estimer *a priori* la puissance injectée dans le domaine. Si on considère un volume de fluide $\mathcal{V}$, l'équation de l'énergie cinétique moyennée sur ce volume, s'écrit à chaque instant :

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{du_i u_i}{dt} \right\rangle_{\mathcal{V}} = \langle f_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) \rangle_{\mathcal{V}} - \langle \epsilon \rangle_{\mathcal{V}}, \quad (4.2)$$

en admettant qu'il n'y a aucun flux d'énergie cinétique aux frontières du domaine. En régime statistiquement stationnaire, c'est donc la puissance volumique moyenne injectée, $\langle f_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) \rangle_{\mathcal{V}}$ qui fixe le montant de dissipation dans l'écoulement. À viscosité fixée, la puissance injectée, inconnue *a priori*, fixe donc la taille des plus petites échelles de l'écoulement $\eta = \nu^{3/4} / \epsilon^{1/4}$, et conditionne implicitement le respect de la contrainte de résolution spatiale pour une discrétisation donnée. Dans le cadre d'un forçage de turbulence tridimensionnelle homogène, Alvelius (1999) propose l'utilisation d'un forçage décorrélié en temps, qui permet un meilleur contrôle de la puissance injectée. On propose de préciser ce résultat en étudiant la réponse de l'écoulement lorsqu'il est soumis à un champ de force $f_{i_0}(\mathbf{x})$,

constant au cours du temps, et modulé par un bruit blanc $s(t)$, décorrélé dans le temps. On se place ici dans le cadre des processus ergodiques, afin de simplifier les démonstrations, bien que celles-ci restent valables dans le cadre strict des processus statistiquement stationnaires. Cette hypothèse amène donc à confondre moyenne temporelle et moyenne d'ensemble (Cf. Goodman 1985, chap. 3, p. 60-67). On rappelle au préalable les propriétés d'un bruit blanc, à savoir :

1. Il est à moyenne nulle :

$$\langle s(t) \rangle_e = 0 \quad (4.3)$$

2. Sa puissance moyenne est finie et égale à la variance σ du signal :

$$\langle s^2(t) \rangle_e = \sigma \quad (4.4)$$

3. Il est décorrélé en temps :

$$\langle s(t)s(\tau) \rangle_e = \sigma \delta(t - \tau) \quad \forall (t, \tau) \quad (4.5)$$

Le signal $s(t)$ étant décorrélé en temps, son échelle de temps caractéristique est infiniment petite (typiquement de l'ordre du pas de temps pour un signal numérique). On suppose donc que cette échelle de temps τ_f est plus petite que toutes les échelles de temps de l'écoulement, et en particulier l'échelle de temps associée aux structures dissipatives :

$$\tau_f < \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} \quad (4.6)$$

À partir de cette hypothèse qui sera vérifiée ultérieurement on peut estimer la puissance de la force qui apparaît dans l'équation de l'énergie cinétique (4.2). En effet, la variation rapide du terme de forçage conduit à évaluer le champ de vitesse comme solution de l'équation de la dynamique simplifiée :

$$\frac{du_i}{dt}(\mathbf{x}, t) = f_{i0}(\mathbf{x}, t)s(t) \quad (4.7)$$

En intégrant $u_i(\mathbf{x}, t)$ dans l'équation (4.7), et en multipliant la valeur obtenue par $f_i(\mathbf{x}, t)$, on obtient une estimation de la puissance P_f de la force :

$$P_f(\mathbf{x}, t) = f_{i0}(\mathbf{x}, t)u_i(\mathbf{x}, t)s(t) \approx f_{i0}f_{i0}(\mathbf{x}) \int_{t_0}^t s(t)s(\tau)d\tau \quad (4.8)$$

On peut en déduire une estimation de la puissance moyenne injectée :

$$\begin{aligned} \langle P_f \rangle_T(\mathbf{x}) &= \langle P_f \rangle_e(\mathbf{x}) \approx \left\langle f_{i0}f_{i0}(\mathbf{x}) \int_0^t s(t)s(\tau)d\tau \right\rangle_e \\ &\approx f_{i0}f_{i0}(\mathbf{x}) \int_0^t \langle s(t)s(\tau) \rangle_e d\tau \\ &\approx f_{i0}f_{i0}(\mathbf{x}) \int_0^t \sigma \delta(t - \tau) d\tau \quad (\text{d'après (4.5)}) \\ \langle P_f \rangle_T(\mathbf{x}) &\approx \sigma f_{i0}f_{i0}(\mathbf{x}) \frac{\mathbb{1}_t}{2}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

où $\mathbb{1}_t/2$ résulte de l'intégration d'un demi-Dirac et exprime la demi-unité de temps.

On peut donc réécrire l'équation (4.2), en régime statistiquement stationnaire, compte tenu du résultat (4.9) :

$$0 \approx \langle f_{i_0} f_{i_0}(\mathbf{x}) \rangle_V \frac{\mathbb{1}_t}{2} - \langle \langle \epsilon \rangle_V \rangle_T \quad (4.10)$$

Dans ces conditions et aux dimensions près, le montant de dissipation est égal au carré scalaire de la force appliquée. Avec un forçage de cette nature, on peut donc estimer *a priori* la puissance injectée dans le domaine.

Génération d'un bruit blanc dans un espace temporel discret

Pour obtenir un signal aléatoire vérifiant les propriétés de décorrélation temporelle exposées ci-dessus, on synthétise numériquement un bruit blanc. On considère donc un signal échantillonné au pas de temps Δt . On choisit le pas de temps constant pour simplifier les notations, bien que la nature de l'échantillonnage n'affecte pas les résultats établis par la suite. On considère un signal $s(t)$ formé d'une suite aléatoire de coefficients α_i , générée à partir d'une distribution aléatoire de forme quelconque, à moyenne nulle et de variance σ . On peut écrire $s(t)$ comme une fonction en escalier sur les divers intervalles d'échantillonnage :

$$s(t)|_{[nt, (n+1)\Delta t]} = \alpha_n \quad (4.11)$$

On vérifie immédiatement que $s(t)$ vérifie (4.4). Ce signal est également décorrélé en temps. En effet on observe que :

$$\forall t' \quad s(t)s(t') = \begin{cases} \alpha_n^2 & \text{si } t' \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t[\\ \alpha_n \alpha_{n'} & \text{si } t' \in [n'\Delta t, (n'+1)\Delta t[\quad n' \neq n, \end{cases} \quad (4.12)$$

ce qui permet d'obtenir, par passage à la moyenne d'ensemble :

$$\forall t' \quad \langle s(t)s(t') \rangle_e = \begin{cases} \langle \alpha_n^2 \rangle_e = \sigma & \text{si } t' \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t[\\ \langle \alpha_n \rangle_e \langle \alpha_{n'} \rangle_e = 0 & \text{si } t' \in [n'\Delta t, (n'+1)\Delta t[\quad n' \neq n \end{cases} \quad (4.13)$$

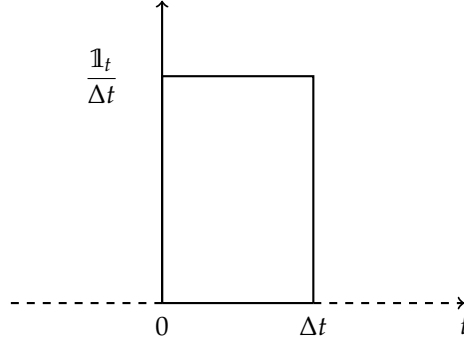
On définit une distribution de Dirac "numérique" $\delta_{num}(t)$, qui est fonction nulle partout, sauf sur l'intervalle $[0, \Delta t[$. Sur cet intervalle, on fixe la valeur de la fonction à $\mathbb{1}_t / \Delta t$ (Cf. figure 4.1), de telle manière que les valeurs de la fonction restent sans dimension, et que son intégration temporelle soit unitaire. En utilisant δ_{num} pour exprimer (4.5), on retrouve alors les propriétés de la décorrélation temporelle :

$$\forall (t, t') \quad \langle s(t)s(t') \rangle_e = \sigma \delta_{num}(t) \quad (4.14)$$

Les égalités établies précédemment sont donc compatibles au passage dans un espace discret.

Compatibilité avec le schéma numérique utilisé

Pour une résolution par différence finie, la représentation de la distribution doit être cohérente avec le schéma numérique et exprimer les mêmes propriétés. En effet, on va résoudre l'équation de la dynamique, et non l'équation de l'énergie. Il faut donc en particulier vérifier que la puissance moyenne de la force est finie afin que le calcul ne diverge pas du fait de la discrétisation. De la même manière que précédemment, on estime la puissance de la force, lorsque les équations sont résolues numériquement.

FIG. 4.1 – Numérisation d’une distribution de Dirac. Fonction $\delta_{num}(t)$

Par cohérence avec le schéma défini dans l’équation (2.8), $\mathbf{f}$ sera définie au demi-temps intermédiaire, comme le champ de pression. La discrétisation de l’équation (4.7) donne :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \mathbf{f}_0 s^{n+1/2} \quad (4.15)$$

En multipliant la force au second membre par $u^{n+1/2} = (u^{n+1} + u^n)/2$ et en réutilisant l’équation (4.15) pour exprimer u^{n+1} en fonction de u^n et $s^{n+1/2}$, on obtient l’expression discrétisée de la puissance injectée sous la forme :

$$P_f = \frac{\Delta t}{2} (f_{i_0}^2) \left(s^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 + u_i^n f_i^{n+1/2} \quad (4.16)$$

Par passage à la moyenne temporelle et en notant que $\langle u_i f_i \rangle_T$ s’annule du fait de la décorrélation temporelle, on obtient finalement :

$$\langle P_f \rangle_T = \frac{\Delta t}{2} (f_{i_0}^2) \left\langle \left(s^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_T \quad (4.17)$$

Par comparaison avec l’équation (4.9), on constate qu’il sera nécessaire de spécifier la valeur de la grandeur $f_{i_0}/\sqrt{\Delta t}$ plutôt que celle de f_{i_0} pour obtenir les caractéristiques voulues du forçage. L’étude du deuxième terme du second membre de (4.16) montre que l’annulation en moyenne qui repose sur la décorrélation temporelle de $\mathbf{f}$ par rapport à $\mathbf{u}$, sera d’autant mieux assurée si :

$$\Delta t \ll \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} \quad (4.18)$$

En simulation directe, on peut estimer la durée du pas de temps à partir de la contrainte de stabilité liée à l’intégration temporelle explicite des termes advectifs de l’équation de la dynamique. En assimilant la taille de maille à la plus petite échelle de longueur de l’écoulement $\eta = \nu^{3/4}/\epsilon^{1/4}$, et en estimant la vitesse maximale atteinte sur le domaine par rapport à l’énergie cinétique turbulente moyenne K , le critère CFL $\frac{u\Delta t}{\Delta x} \sim 1$ permet d’écrire :

$$\Delta t \sim \frac{\eta}{K^{1/2}} \quad (4.19)$$

Après quelques développements, on peut montrer que :

$$\Delta t \approx \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} \mathcal{Re}_t^{-1/4}, \quad (4.20)$$

où $Re_t = K^2/\nu\varepsilon$ exprime le nombre de Reynolds de turbulence. Ce résultat permet de montrer que la validité de l'équation (4.18) est assurée dès que le nombre de Reynolds de turbulence est suffisamment élevé ($Re_t > 100$ typiquement).

4.1.2 Particularités liées à un domaine confiné

Dans la littérature, ce type de simulation avec forçage de la turbulence vise généralement le maintien du niveau d'énergie cinétique turbulente dans un champ de fluctuation homogène et isotrope. Par conséquent il s'applique le plus souvent au sein des codes pseudo-spectraux et le forçage est généralement défini dans l'espace spectral. L'énergie est injectée aux grandes échelles de l'écoulement, qui se traduit dans l'espace spectral par une localisation du champ de force aux petits nombres d'onde spatiaux.

Le passage à un espace de forçage confiné, entraîne la nécessité de redéfinir les modalités du forçage dans l'espace physique. La direction de confinement n'est pas homogène et généralement non-périodique. Un forçage dans l'espace spectral génère par nature une force à extension spatiale infinie. La présence de deux directions homogènes appelle à une définition du forçage dans l'espace mixte $\mathcal{E}(k_1, k_2, z)$.

Dans le travail de Campagne (2006), la condition limite de surface libre utilisée permet de définir la configuration dans un espace tri-périodique et de résoudre les équations à l'aide d'un code pseudo-spectral. La condition limite de surface libre se matérialise en effet par une condition de symétrie, ce qui, en doublant virtuellement la taille du domaine dans la direction non-homogène, permet de "périodiser" la configuration. Dans ce cas, l'inhomogénéité de la direction normale à la surface libre demande seulement d'étendre la méthode d'Alvelius (1999), en opérant un confinement spatial *a posteriori*, i.e. après synthèse de la force dans l'espace spectral.

Rosales et Meneveau (2005) ainsi que Nagata et al. (2007) ont récemment proposé des méthodes permettant de définir un forçage dans l'espace physique. Dans la première méthode, le forçage est implicite (proportionnel au champ de vitesse), tandis que dans la deuxième, des champs de force élémentaires distribués aléatoirement alimentent le champ turbulent. Ces dernières études sont limitées au cas de la turbulence tridimensionnelle homogène.

Dans ce chapitre, on définit une méthode inspirée de celle de Nagata et al. (2007). On utilise ainsi des champs de forces élémentaires originaux qui permettent de satisfaire les contraintes supplémentaires imposées par notre configuration. Ces champs de force sont définis sur un support compact. On impose en outre qu'ils soient à divergence nulle pour supprimer toute influence sur le champ de pression. Ainsi, à l'étape de prédiction de la méthode de prédicteur-correcteur utilisée, le champ de pression s'établit uniquement à partir du champ de vitesse.

4.2 FORMULATION ALGÈBRIQUE DU CHAMP DE FORCE

4.2.1 Définition d'un champ de force élémentaire

On va chercher à établir la forme du champs de force $\mathbf{f}_{i_0}(\mathbf{x})$ défini plus haut, à partir de champs de force élémentaires. En pratique, on ajoute à $\mathbf{f}_{i_0}$ une dépendance temporelle, tout en conservant le

module de la force $\mathcal{F}$ indépendant du temps :

$$\forall t, \quad \langle \mathbf{f}_{i_0} \mathbf{f}_{i_0} \rangle_V(t) = \mathcal{F}^2 \quad (4.21)$$

La dépendance temporelle ajoutée permet de renforcer le caractère aléatoire du forçage, sans pour autant être contradictoire avec le résultat 4.10. Le champ de force $\mathbf{f}_{i_0}$ à l'instant t , se définit donc comme la somme de n champs de force élémentaires ayant les propriétés adéquates, et destinés à simuler dans leur ensemble une source plane de turbulence. On l'écrit sous la forme :

$$\mathbf{f}_{i_0}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n-1} \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (4.22)$$

La définition d'un champ de force $\mathbf{f}_{i_0}$ visant à maintenir un écoulement turbulent doit être cohérente avec le principe de cascade énergétique des grandes vers les petites échelles. Les structures élémentaires doivent donc injecter l'énergie aux grandes échelles. Le contexte d'écoulement incompressible suggère d'imposer $\text{div}(\mathbf{f}_{i_0}) = 0$, et le confinement en espace de limiter la taille des champs de force élémentaires. On cherche donc, dans un premier temps, une fonction $\mathbf{e}$ qui vérifie sur un intervalle spatial $\mathcal{I}$ de taille finie :

$$\begin{aligned} \mathbf{e} : \mathcal{I}^3 &\rightarrow \mathcal{I}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto f_i(x_1, x_2, x_3) \\ \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{I}^3, \quad \frac{\partial e_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

On peut synthétiser une telle fonction à l'aide de deux fonctions ψ et ϕ toutes deux définies sur $\mathcal{I}$, respectivement de classe $\mathbf{C}_0$ et $\mathbf{C}_1$ et telles que :

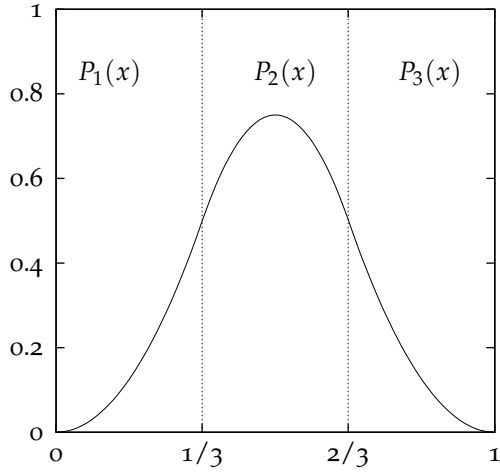
$$\mathbf{e} \begin{cases} e_1 &= \phi(x_1) \cdot \phi'(x_2) \cdot \psi(x_3) \\ e_2 &= -\phi'(x_1) \cdot \phi(x_2) \cdot \psi(x_3) \\ e_3 &= 0 \end{cases}$$

Fonctions de type spline

Les fonctions de type spline présentent toutes les caractéristiques attendues pour la fonction ϕ , étant dérivables et à support compact. Si on limite le degré des polynômes utilisé, on assure une échelle caractéristique proche de la taille de l'intervalle de définition, ce qui permet d'estimer la taille des structures générées. On choisit ϕ comme une fonction spline d'ordre 2, qui est donc définie par morceaux à l'aide de polynômes de degré p , avec $p \leq 2$. Par simplicité, on choisit également $\psi = \phi$, bénéficiant ainsi des mêmes propriétés de support compact et de régularité.

Représentation du champ de force

Le champ de force décrit précédemment, est défini sur une boîte cubique de taille unité. Sur les figures 4.3 et 4.4, deux représentations du champ de force élémentaire obtenu sont présentées. L'une montre



$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{9}{2}x^2 \\ P_2(x) &= \frac{3}{2}(-6x^2 + 6x - 1) \\ P_3(x) &= \frac{9}{2}(1-x)^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

FIG. 4.2 – Spline du deuxième ordre ramenée dans l'intervalle $[0 : 1]$.

les iso-modules de la force, tandis que l'autre décrit le champ de vecteur correspondant dans le plan médian de la boîte. On remarque que ce champ de force admet une direction privilégiée, non acceptable en vue d'un forçage isotrope. La mise en œuvre complète ne pourra donc se faire par l'intermédiaire de cet unique champ élémentaire.

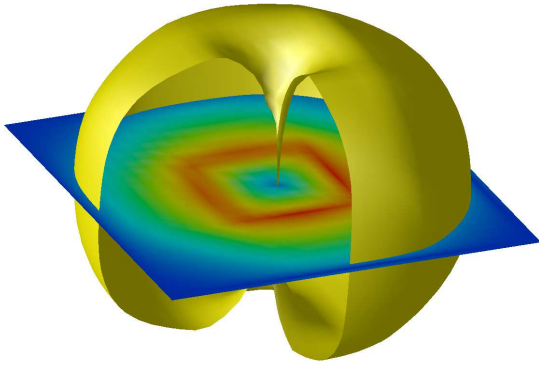


FIG. 4.3 – Module du champ de force : iso-contour et carte dans le plan méridien.

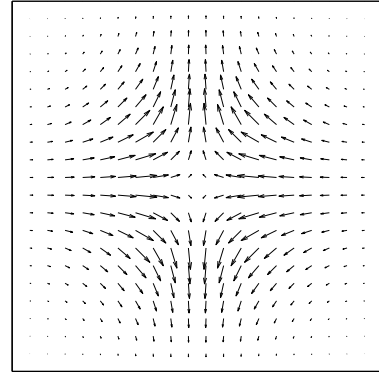


FIG. 4.4 – Projection du champ de force dans le plan méridien de la boîte.

La définition de trois champs élémentaires $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$, $\mathbf{e}^{(3)}$ obtenus par rotation du premier, suffit à supprimer ce défaut (Cf. Figure 4.2.1). L'utilisation aléatoire de ces trois types de champ permet d'approcher une situation isotrope.

4.2.2 Synthèse d'une source plane de turbulence

A ce stade, on a créé un champ de force analytique, répondant aux contraintes de compacité, divergence nulle. Le point d'injection d'énergie dans le spectre peut être fixé à partir de la taille de la boîte. La juxtaposition des champs de force élémentaires permet de générer une couche de forçage. L'agence-

$$\mathbf{e}^{(1)} \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{vmatrix} \quad \mathbf{e}^{(2)} \begin{vmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{e}^{(3)} \begin{vmatrix} e_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{vmatrix}$$

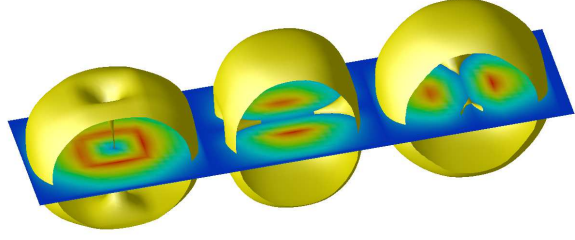


FIG. 4.5 – Module des champs de forces élémentaires $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

ment retenu est celui d'une grille de $n_1 \times n_2$ "boîtes" de forçage, dans les directions x_1 et x_2 de tailles respectives L_{x_1} et L_{x_2} . Afin de ne privilégier aucune de ces directions, on impose $n_1 = n_2 = n_f$ ainsi que $L_{x_1} = L_{x_2} = L$. En fixant la longueur de la boîte l_f comme le quart de la longueur L , on fixe implicitement la fréquence spatiale v_f du forçage. Ainsi, dans ce cas, $Lv_f = 4$. La longueur associée fixe un compromis entre deux contraintes antagonistes :

1. Maximiser l_f pour forcer aux plus grandes échelles de l'écoulement et améliorer l'efficacité du forçage.
2. Minimiser l_f afin d'obtenir des structures énergétiques suffisamment petites. En effet, on verra plus tard que les échelles de longueur augmentent dans la zone de diffusion. L'extension transversale des structures énergétiques doit donc être cohérente avec la période spatiale choisie dans les directions x et y afin d'assurer leur décorrélation spatiale. Ce point sera abordé au paragraphe 5.1.5.

L'agencement en grille se met alors sous la forme suivante :

$$\mathbf{f}_{i_0}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{n_f-1} \sum_{j=0}^{n_f-1} \mathbf{e}^{(m(i,j,t))}(x_1 - il_f, x_2 - jl_f, x_3) \quad (4.25)$$

Dans cette expression, l'indice d'un des trois champs définis précédemment $m(i, j, t)$ est un paramètre aléatoire. Les indices i et j indiquent les coordonnées du champ de force élémentaire considéré dans la grille de n_f^2 "boîtes". Afin d'éviter une symétrie parfaite du problème un déplacement vertical aléatoire $\delta(i, j, t)$ est appliqué à chaque "boîte". Le tout est translaté en bloc de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, respectivement selon x_1 et x_2 , évitant ainsi toute cohérence spatiale dans ces directions. On obtient finalement :

$$\mathbf{f}_{i_0}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{n_f-1} \sum_{j=0}^{n_f-1} \mathbf{e}^{(m(i,j,t))}(x_1 - il_f - \alpha(t), x_2 - jl_f - \beta(t), x_3 - \delta(i, j, t)) \quad (4.26)$$

4.3 MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE

La méthode décrite précédemment ne présente pas de découpage évident par rapport à la décomposition bidimensionnelle exposée en 3.3.2. La raison en est que le champ de force sur une partie fixe du

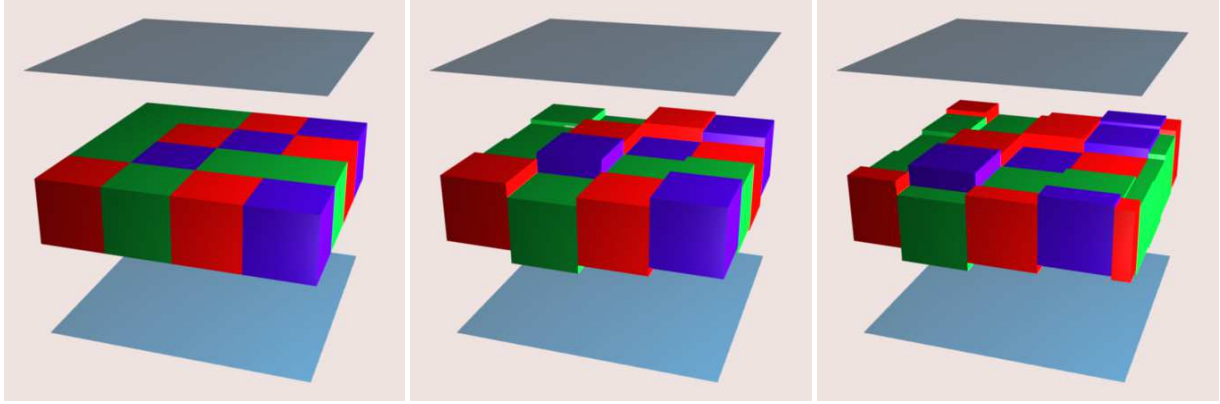


FIG. 4.6 – Agencement des “boîtes” de forçage (1 : $\alpha(t) = \beta(t) = \delta(i, j, t) = 0$ 2 : $\alpha(t) = \beta(t) = 0$ 3 : $\mathbf{f}_{i_0}(\mathbf{x}, t)$).

domaine varie à chaque pas de temps. Chaque processeur doit donc connaître *a priori* l'intégralité des champs de force élémentaires. On présente ici une façon d'équilibrer la charge de travail par processeur de façon à ce que l'étape de calcul (à chaque pas de temps) s'effectue à moindre coût mémoire, et minimise les échanges de données inter-processus.

4.3.1 Stockage en mémoire des champs élémentaires

La manière la plus naturelle de résoudre le problème consiste à stocker dans la mémoire allouée à chaque processus, et donc locale à chaque processeur, les trois champs complets $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$ et $\mathbf{e}^{(3)}$. Leur taille est conséquente, puisque par sa dimension géométrique, chaque composante d'un champ occupe une taille fixe d'environ $1/4 \times 1/4 \times 1/3 \approx 1/50$ d'un champ total. Comparativement, le champ de vitesse occupe $1/N$ la taille du champ total pour un processeur (N indique ici le nombre de processeurs utilisés). La différence peut devenir conséquente sur des milliers de processeurs.

On va voir qu'il est possible, à la manière du champ de vitesse, d'obtenir une évolution $1/N$ de la taille mémoire nécessaire. En reprenant la formule (4.26), on s'intéresse au champ $\mathbf{e}^{(i)}(x_1, x_2, x_3)$ que l'on peut calculer dans l'espace physique en lui donnant comme centre de référence $(\frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2}, 0)$ par exemple. Les trois champs ainsi construits peuvent être découpés de la même manière qu'un champ classique en suivant la décomposition bidirectionnelle. Leur taille est donc variable $\mathcal{O}(1/N)$. On note ces champs $\mathbf{e}^{(i_0)}$.

4.3.2 Calcul du champ de force à chaque pas de temps

On se place dans l'espace semi-spectral utilisé pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Les champs élémentaires sont alors stockés dans cet espace et la formule (4.26) devient :

$$\widehat{\mathbf{f}}_{i_0}(k_1, k_2, x_3, t_n) = \sum_{i=0}^{n_f-1} \sum_{j=0}^{n_f-1} \underbrace{\widehat{\mathbf{e}}^{(m(i,j,t)_0)}(k_1, k_2, x_3 - \delta(i, j, t))}_{\lambda_1} \cdot \underbrace{e^{-k_1(il_f + \alpha(t)) - k_2(jl_f + \beta(t))}}_{\lambda_2} \quad (4.27)$$

On peut alors distinguer les informations nécessaires à tous les processeurs (*globales*) de celles qui peuvent être stockées ou calculées localement (*locales*).

1. Les variables aléatoires $\delta(i, j, t)$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ doivent être considérées comme globales. Pour δ la contrainte vient du fait qu'une même boîte de forçage peut être répartie sur plusieurs cœurs. Quant à α et β , ils sont nécessairement communs à tous les cœurs.
2. Le calcul de λ_1 est possible localement, grâce aux champs $\hat{e}^{(i_0)}$ disponibles en mémoire. Dans l'espace semi-spectral, la distribution se fait selon les directions k_1 et k_2 . Le processus dispose donc de $\hat{\mathbf{e}}^{(m(i,j,t_n)_0)}(k_1, k_2, x_3)$. La direction x_3 étant *complète* pour un processus, on peut appliquer la translation $\delta(i, j, t_n)$.
3. Pour calculer λ_2 , il suffit donc de connaître les indices position de chaque boîte (i, j) . Ces dernières sont des variables globales, mais de taille négligeable. Un seul transfert de donnée à l'étape d'initialisation permet de les rendre locales

Seules les variables aléatoires doivent être globales et la méthode décrite dans le paragraphe suivant permet de les calculer localement. Il n'y a donc aucun partage d'information nécessaire durant le calcul avec cette méthode, et la taille mémoire nécessaire évolue bien comme les champs de variables classiques en $1/N$.

4.3.3 Pseudo générateurs aléatoires

Beaucoup de bibliothèques de bas-niveau (*stdlib* en C notamment) incluent des générateurs de nombres aléatoires. Ces générateurs sont en fait des pseudo-générateurs puisqu'ils construisent une suite déterministe d'éléments à partir d'une condition initiale. L'ensemble des éléments de la suite forment une distribution dont les caractéristiques statistiques (moments) sont proches de la distribution recherchée. La qualité du pseudo-générateur est estimée par le nombre d'éléments nécessaire avant la répétition du premier. Dans notre cas la distribution uniforme générée par la fonction *rand* de la bibliothèque *stdlib* est suffisante.

Lorsque les calculs sont effectués en parallèles, il est fréquent que plusieurs sous-domaines répartis sur plusieurs processus doivent travailler en utilisant le même nombre aléatoire. On a la possibilité de dédier un processus au calcul de ces nombres aléatoires et d'en transmettre les résultats aux autres processus. Pour minimiser les échanges inter-processus, il est plus judicieux de faire calculer *tous* les nombres aléatoires nécessaires par *tous* les processus. En leur imposant un pseudo-générateur identique, il suffit de leur transmettre la même condition initiale décidée par un seul des processus (par exemple la date du jour pour le processus maître). Dans notre cas la quantité de nombre aléatoires nécessaire à chaque itération n'excède pas 50 unités et n'occasionne pas de surcoût CPU. Ainsi, chaque processus va calculer indépendamment tous les nombres aléatoires destinés à la résolution du problème.

4.3.4 Anisotropie du forçage

La présence du champ de force dans une couche du domaine d'épaisseur finie rend le forçage anisotrope par nature. Cependant, on essaye d'obtenir un écoulement possédant des propriétés aussi proches que possible de celles d'une turbulence homogène isotrope dans la zone centrale. Les trois champs de force élémentaires possèdent chacun des directions privilégiées. On peut donc agir sur l'amplitude moyenne de ces champs élémentaires et "favoriser" une ou deux directions par rapport aux autres. On définit donc deux ratios r_{13} et r_{23} mesurant l'importance relative d'un champ de force élémentaire par

rapport à l'autre. Ces ratios sont définis dans les paramètres d'entrée par l'intermédiaire de trois coefficients c_i attachés à chacun des trois champs élémentaires. On peut ainsi forcer ou réduire l'anisotropie inhérente au forçage d'une couche de fluide. Les ratios r_{13} et r_{23} sont reliés aux coefficients c_1 , c_2 et c_3 par les relations suivantes :

$$r_{13} = \frac{c_1}{c_3} \qquad r_{23} = \frac{c_2}{c_3} \qquad (4.28)$$

4.4 MODÈLE DE SIMULATION AUX GRANDES ÉCHELLES DANS LA ZONE DE FORÇAGE

Dans la configuration étudiée, le nombre de Reynolds est maximal dans la zone de forçage. Il décroît ensuite dans la zone de diffusion et atteint un minimum à la surface de blocage. Afin de maximiser le nombre de Reynolds dans la zone d'étude, il est intéressant de ne pas résoudre toutes les échelles de la turbulence dans la zone de forçage. On évite ainsi de fixer la résolution dans les directions périodiques par rapport aux échelles de turbulence de la zone de forçage. Il convient donc de modéliser la dissipation aux petites échelles, en s'assurant que ce modèle soit actif uniquement dans la zone de forçage, afin de résoudre *toutes* les échelles de l'écoulement dans la zone d'étude. Ce modèle n'ayant pas fait l'objet de validation complète de notre part (en canal turbulent par exemple), il est considéré ici comme *partie intégrante* du forçage puisqu'il n'affecte pas la zone d'étude.

4.4.1 Viscosité spectrale dynamique

Lamballais et al. (1998) ont mis au point un modèle à viscosité spectrale dynamique particulièrement adapté à notre configuration. Cette extension du modèle à viscosité spectrale proposé par Kraichnan (1976) apporte une correction destinée à prendre en compte les régions de l'écoulement où la pente du spectre d'énergie s'écarte du spectre standard dérivé des lois de Kolmogorov :

- lorsque le nombre de Reynolds est faible et insuffisant au développement d'une plage inertielle ;
- dans les zones de proche paroi lorsque les pentes des spectres sont plus accentuées, indépendamment du nombre de Reynolds global.

Le spectre d'énergie recueilli peut présenter une pente aux petites échelles différente de $-5/3$. La correction proposée s'appuie sur une modélisation dans l'espace spectral de type EDQNM (Eddy Damped Quasi Normal Markovian) et spécifie la valeur de la viscosité spectrale en fonction de la pente du spectre d'énergie aux petites échelles.

Étant donnés la pente m du spectre d'énergie aux petites échelles et le nombre d'onde spatial de coupure k_c déterminé par la taille des mailles dans les directions périodiques, la viscosité spectrale ν_t se met sous la forme :

$$\nu_t(k/k_c, t) = \nu_t^\infty \nu_t^* \left(\frac{k}{k_c} \right) \left(\frac{E(k_c, t)}{k_c} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.29)$$

ν_t^∞ détermine le niveau moyen de viscosité en fonction de la pente du spectre :

$$\nu_t^\infty = 0.31 \frac{5-m}{m+1} \sqrt{3-m} C_k^{-\frac{3}{2}} \qquad (4.30)$$

ν_t^* adapte la viscosité aux nombres d'onde spatiaux. Le comportement en “*cusp*” mis en évidence par Kraichnan implique une forte augmentation de la viscosité aux petites échelles.

$$\nu_t^* \left(\frac{k}{k_c} \right) = 1 + 34.5e^{-3.03k_c/k} \quad (4.31)$$

La mise en place d'un tel modèle dans le code nécessite d'autoriser la possibilité d'une viscosité variable et justifie aussi le développement d'un second solveur pour l'équation d'Helmholtz (voir paragraphe 2.6).

4.4.2 Spectre de densité d'énergie

Le calcul du spectre d'énergie s'effectue dans les directions homogènes qui sont au nombre de deux, c'est donc un spectre bidimensionnel. L'hypothèse d'isotropie aux petites échelles permet de relier le spectre bidimensionnel à un spectre tridimensionnel (voir paragraphe 5.1.6). Dans notre cas, le modèle sera appliqué loin des parois et permet de valider cette hypothèse. D'après Lamballais et al. (1998), le coefficient correctif induit par le passage du spectre 2D au spectre 3D et nécessaire à l'évaluation de $E(k_c, t)$ dans l'équation (4.29) ne semble pas modifier les effets du modèle. Il est donc négligé dans notre cas. La pente du spectre aux petites échelles est donc déterminée par une méthode de moindres carrés, sur le demi-spectre de densité d'énergie, comme décrit par Lamballais et al. Un exemple de la méthode est présenté sur la figure 4.8. A titre d'illustration, la figure 4.7 présente les pentes calculées, dans un cas où l'activité du modèle se limite à la zone forcée. Ce cas, référencé *PA_B* sera plus longuement discuté dans le chapitre 5.

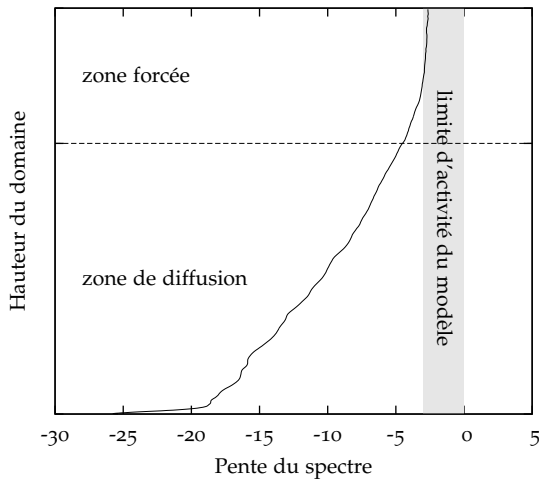


FIG. 4.7 – Évolution de la pente m sur la hauteur du domaine et l'activité induite du modèle.

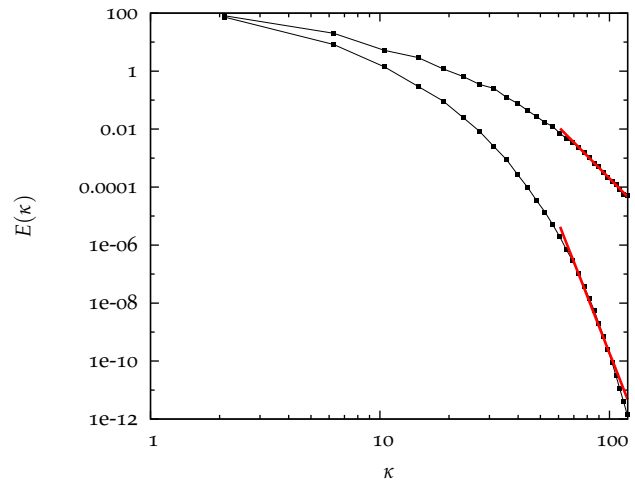


FIG. 4.8 – Évaluation de la pente m à partir d'un demi-spectre instantané, à deux altitudes différentes

4.5 CARACTÉRISATION DU FORÇAGE OBTENU

4.5.1 Paramètres d'étude

On va établir ici les caractéristiques du forçage dans la configuration étudiée. Les propriétés de la turbulence synthétisée ainsi, mais surtout l'impact des paramètres de forçage sont également discutés. L'échelle de longueur l_f étant fixée, il existe une infinité de couples (P, ν) qui peuvent produire une agitation équivalente du point de vue du nombre de Reynolds. Une étude paramétrique partielle est proposée dans le but d'établir un lien entre les propriétés du forçage imposé et celles de l'écoulement résultant. On considère quatre maillages identiques, dont la finesse ne nécessite pas l'utilisation de modèle de sous-maille. Les coefficients d'anisotropie sont fixés à $(c_1, c_2, c_3) = (0.75, 0.75, 1)$. Le niveau d'anisotropie résultant est très faible au centre du domaine et ces paramètres sont utilisés tout au long de l'étude. Les cinq configurations étudiées $(F_1, \dots, F_5)$ diffèrent uniquement par la puissance moyenne injectée par le forçage (Cf. paragraphe 4.2), ce qui suffit à faire varier le nombre de Reynolds de l'écoulement. Le maillage comporte $288 \times 288 \times 352$ mailles, pour un domaine où $L_x/l_f = L_y/l_f = L_z/l_f = 4$. Le degré de liberté utilisé dans la direction z pour éviter de symétriser la configuration (Cf. paragraphe 4.2.2) étend la taille de la couche de forçage L_f au tiers du domaine : $L/L_f=3$.

Cas	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
$\mathcal{F}^2$	0.16	0.32	0.48	0.64	0.80
ν	1/700	1/700	1/700	1/700	1/700
Re_{f_1}	56	112	168	224	280
Re_{f_2}	370	440	490	530	560

TAB. 4.1 – Étude paramétrique du forçage.

Pour adimensionner le problème, deux options sont possibles :

1. Pendant le régime transitoire, l'équation de l'énergie cinétique en régime instationnaire (4.2) peut s'écrire sans terme de dissipation, si celle-ci n'a pas eu le temps de s'établir :

$$\frac{1}{2} \left\langle \left\langle \frac{du_i u_i}{dt} \right\rangle_e \right\rangle_\nu \approx \langle \langle f_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) \rangle_e \rangle_\nu \approx \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \mathbb{1}_t \quad (4.32)$$

On peut donc utiliser le couple $(\mathcal{F}[LT^{-2}], \mathbb{1}_t[T])$ qui induit un nombre de Reynolds défini de la manière suivante :

$$Re_{f_1} = \frac{\frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \mathbb{1}_t^3}{\nu}. \quad (4.33)$$

2. On peut également utiliser le couple $(\mathcal{F}[LT^{-2}], l_f[L])$ lié à l'échelle de longueur spatiale introduite par le forçage. Le nombre de Reynolds prend cette fois la forme :

$$Re_{f_2} = \frac{\mathcal{F}^{1/2} l_f^{3/2}}{\nu} \quad (4.34)$$

La première solution est choisie ici. Les valeurs des deux nombres de Reynolds sont cependant indiquées dans le tableau 4.2 à titre de comparaison. Les grandeurs adimensionnées par le couple $(\mathcal{F}, \mathbb{1}_t)$ sont dorénavant suivies d'un astérisque. Cette normalisation conduit à $\langle \varepsilon^* \rangle_V = 1$, lorsque l'égalité (4.10) est vérifiée, *i.e.* le montant de dissipation est entièrement déterminé par $\mathcal{F}$.

4.5.2 Régime transitoire

Le forçage du mouvement, introduit dans la couche centrale, met le fluide en mouvement dans l'ensemble du domaine. Les niveaux d'énergies recueillis en fonction du temps sont présentés dans la figure 4.9. On peut distinguer trois phases successives de durées très variables qui constituent le régime transitoire.

1. 1ère phase ($t^* \in [0 : 1]$) : le forçage agissant aux grandes échelles, les mécanismes de dissipation ne sont pas établis, et le champ de vitesse réagit directement au champ de force. L'équation simplifiée (4.32) est alors vérifiée. Cette phase est repérée sur la figure 4.9 par la pente unité.
2. 2ème phase ($t^* \in [1 : 5]$) : le transfert de l'énergie vers les petites échelles s'organise sur une durée de l'ordre du temps de retournement des structures énergétiques $T_c^* = K^*/\varepsilon^*$. On vérifie sur la figure 4.9, la mise en place des mécanismes de dissipation à cette échelle de temps. On obtient un état statistique quasi-stationnaire dans la zone de forçage (la zone de forçage concentre la quasi-totalité de l'énergie contenue dans $\langle K^* \rangle_V$).
3. 3ème phase ($t^* \in [5 : 15]$) : les divers mécanismes de diffusion entrent en jeu et les niveaux d'énergie augmentent progressivement dans tout le domaine. On porte sur la figure 4.10 le niveau d'énergie $\langle K_{pp}^* \rangle_V$ repéré en zone de proche paroi, afin de visualiser le temps caractéristique de diffusion.

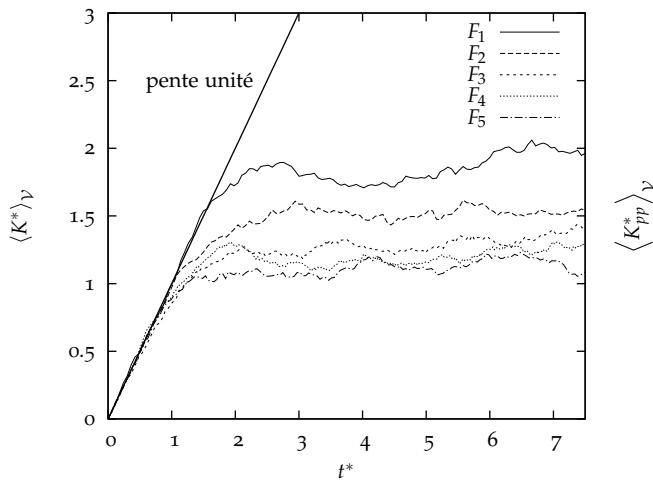


FIG. 4.9 – Évolution de l'énergie volumique sur tout le domaine.

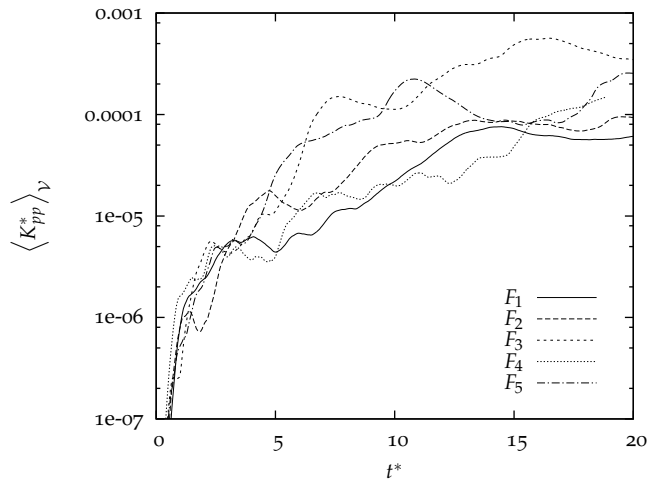


FIG. 4.10 – Évolution de l'énergie volumique dans une couche proche paroi du domaine.

On considère qu'on atteint un état statistiquement stationnaire dans *tout* le domaine au delà de $t^* = 15$. La première phase est particulièrement intéressante car elle permet de vérifier la puissance moyenne injectée par le forçage. L'équation (4.32) laisse supposer un comportement quasi-linéaire, que l'on vérifie sur la figure 4.9.

4.5.3 Écoulement induit dans la zone de forçage

On compare ici les caractéristiques effectives du forçage dans son régime statistiquement stationnaire. Les diverses grandeurs de l'écoulement sont moyennées en temps et en volume. Le tableau 4.2 présente les quantités moyennes $\langle \varepsilon^* \rangle_V$ et $\langle K^* \rangle_V$, ainsi que la valeur du nombre de Reynolds turbulent obtenu avec ces valeurs moyennes. Comme remarqué plus haut, si l'égalité issue de l'équation (4.10) est vérifiée, alors $\langle \varepsilon^* \rangle_V = 1$. On observe que c'est effectivement le cas, ce qui permet d'assurer que la puissance injectée dans l'écoulement est entièrement contrôlée par les paramètres d'entrée. Lorsque la puissance du forçage devient élevée ($Re_{f_1} > 170$), ce résultat est moins bien vérifié mais permet néanmoins de prévoir *a priori* le montant de puissance injectée à 20% près.

Les résultats établissent un premier lien entre Re_{f_1} et $\langle Re_t \rangle_V$. Une régression du type $\langle Re_t \rangle_V = a Re_{f_1}^b$ permet d'établir :

$$\langle Re_t \rangle_V \approx 60 Re_{f_1}^{0.3} \quad (4.35)$$

Cas	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
$\langle \varepsilon^* \rangle_V$	0.99	1.04	1.06	1.11	1.17
$\langle K^* \rangle_V$	1.93	1.56	1.38	1.27	1.20
$\langle Re_t \rangle_V$	210	262	293	325	344
Re_{f_1}	56	112	168	224	280

TAB. 4.2 – Valeurs caractéristiques du forçage

4.5.4 Caractéristiques de la turbulence synthétisée

La validité mathématique du forçage de la turbulence ne lui garantit pas une représentativité physique. On étudie ici quelques caractéristiques du signal turbulent enregistré. Bien que l'écoulement considéré ne soit pas strictement homogène, on peut s'attendre à ce que ces caractéristiques restent proches de cette situation de référence dans la zone de forçage. Une des caractéristiques essentielle d'un écoulement turbulent homogène est la forme du spectre de densité d'énergie. Ce point, qui sera discuté dans le paragraphe 5.1.6, est très bien vérifié avec un spectre tout à fait représentatif de celui extrait d'un écoulement où la turbulence est générée par des mécanismes de production classiques. Dans, les directions non confinées (x et y), on peut calculer les facteurs de dissymétrie et d'aplatissement de la distribution des gradients de vitesse. La définition de ces moments statistiques dans la direction tangentielle s'écrit :

$$S' = \frac{\overline{\partial_x u^3}}{\overline{\partial_x u}^{3/2}} \quad F' = \frac{\overline{\partial_x u^4}}{\overline{\partial_x u}^2} \quad (4.36)$$

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
S'	-0.6	-0.63	-0.65	-0.68	-0.7
F'	5.3	5.6	6.0	6.5	7.2

TAB. 4.3 – Facteurs de dissymétrie et d'aplatissement du gradient transverse des composantes tangentielles du vecteur vitesse

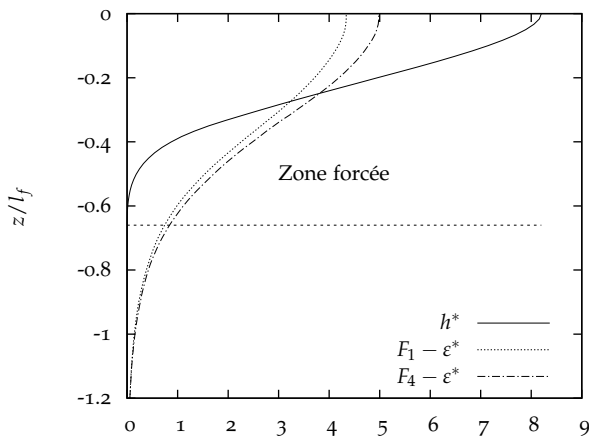


FIG. 4.11 – Comparaison entre le profil moyen de dissipation et le carré du module du champ de force.

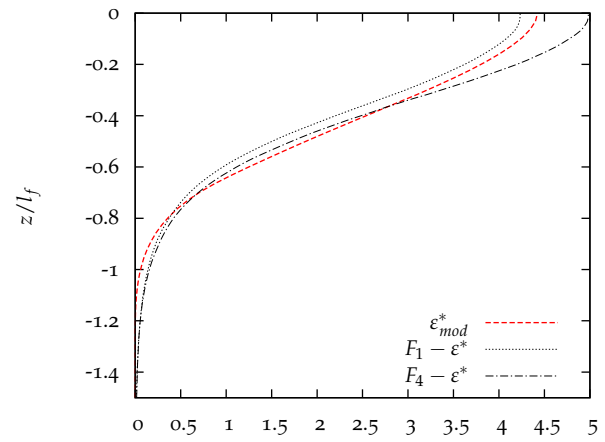


FIG. 4.12 – Modélisation du profil de dissipation.

On sait en effet que le gradient de vitesse, à la différence de la vitesse elle-même a une distribution légèrement dissymétrique. Les valeurs généralement retenues en turbulence homogène (Chassaing 2000) sont de l'ordre de :

$$S' \approx 0.6 \quad F' \approx 3.5 \quad (4.37)$$

Les valeurs obtenues dans les calculs et présentées dans le tableau 4.3 sont donc du même ordre de grandeur que celles obtenues dans les expériences de turbulence homogène.

4.6 MODÉLISATION DES CARACTÉRISTIQUES DE L'ÉCOULEMENT RÉSULTANT

L'équation (4.35) a permis d'établir un premier lien entre le module de la force $\mathcal{F}$ et l'agitation résultante (matérialisée par $\mathcal{R}e_t$). Néanmoins, ce résultat s'applique en moyenne volumique et ne permet pas de dimensionner une simulation directe, puisqu'il ne renseigne pas sur les variations de l'écoulement observées dans la direction non-homogène.

Lien entre la puissance de la force et le profil de dissipation

Afin de pouvoir dimensionner les calculs, il est intéressant de connaître *a priori* :

- le profil de dissipation, afin de pouvoir connaître les plus petites échelles de la turbulence et fixer la taille du maillage ;
- le profil d'énergie cinétique turbulente, qui permet, avec la dissipation, de connaître le nombre de Reynolds turbulent de l'écoulement $\mathcal{Re}_t = K^2/\nu\epsilon$.

Afin d'établir le lien entre la puissance de la force et le profil de la dissipation dans la direction inhomogène, on désigne par $h(z)$ le profil moyen du carré scalaire de la force $f_{i_0}(\mathbf{x}, t)$:

$$h(z) = \overline{f_{i_0} f_{i_0}}(z) \quad (4.38)$$

Avec l'adimensionalisation adoptée, $h^*(z)$ est identique dans tous les cas étudiés. Lorsque l'écoulement présente une direction non-homogène, tous les termes diffusifs de l'équation de transport de l'énergie cinétique ont une contribution non nulle *a priori*. Il n'y a donc plus de raison d'avoir l'égalité entre dissipation et production localement. La figure 4.11 compare le profil de dissipation moyen ϵ^* avec celui de $h^*(z)$. La forme des courbes suggère une évolution autosimilaire du type :

$$\epsilon_{mod}^* \left(\frac{z}{l_f} \right) = \theta h^* \left(\xi \frac{z}{l_f} \right) \quad (4.39)$$

La figure 4.12 montre le modèle obtenu pour $\theta = 0.55$ et $\xi = 1.9$. Malgré les différences observées, ce résultat semble suffisamment représentatif en ordre de grandeur.

Obtention des profils de $K^*(z)$ et $\mathcal{Re}_t(z)$

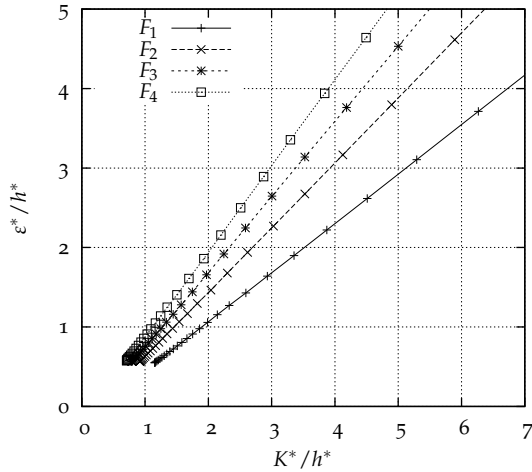


FIG. 4.13 – Diagramme $(K^*(z)/h^*(z), \epsilon^*(z)/h^*(z))$.

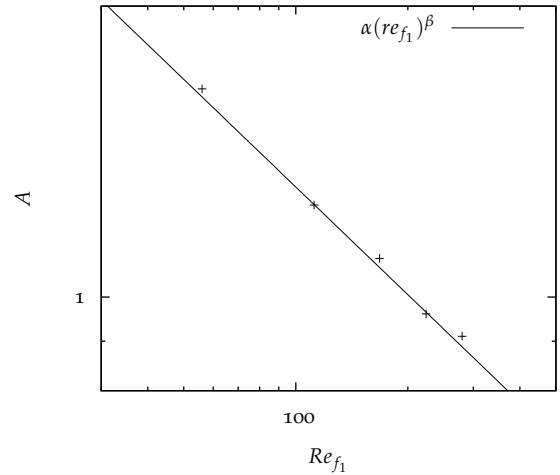


FIG. 4.14 – Variation du coefficient A en fonction du nombre de Reynolds Re_{f_1} .

Afin d'obtenir le même type de relation que (4.39) pour $K^*(z)$, on étudie l'existence d'une relation simple entre $K^*(z)/h^*(z)$ d'une part et $\epsilon^*(z)/h^*(z)$ d'autre part. Le tracé des valeurs des deux grandeurs sur le diagramme 4.13 montre l'existence d'une relation de linéarité, qui permet d'écrire :

$$\frac{K^*(z)}{h^*(z)} = A(\mathcal{Re}_{f_1}) \frac{\epsilon^*(z)}{h^*(z)} + B \quad (4.40)$$

Des régressions linéaires permettent d'extraire les couples (A, B) en fonction de $\mathcal{Re}_{f_1}$ et établissent une valeur unique de $B = -0.15$, indépendante du nombre de Reynolds. On recherche la dépendance de A au nombre de Reynolds $\mathcal{Re}_{f_1}$ sous la forme :

$$A = \alpha(\mathcal{Re}_{f_1})^\beta \quad (4.41)$$

Sur la figure 4.14, on note que la régression logarithmique appliquée avec $\alpha = 7.1$ $\beta = -0.37$ permet d'obtenir un résultat satisfaisant. On en déduit alors une relation entre K^* et $\varepsilon^*(z)$:

$$K^*(z) = (7.1\varepsilon^*(z) + h^*(z))\mathcal{Re}_{f_1}^{-0.37} \quad (4.42)$$

On obtient finalement les relations suivantes pour $K^*(z/l_f)$ et $\mathcal{Re}_t^*(z/l_f) = \mathcal{Re}_t(z/l_f)$:

$$\varepsilon_{mod}^* \left(\frac{z}{l_f} \right) = 0.55 h^* \left(1.9 \frac{z}{l_f} \right) \quad (4.43)$$

$$K_{mod}^* \left(\frac{z}{l_f} \right) = 4.9 h^* \left(1.9 \frac{z}{l_f} \right) \mathcal{Re}_{f_1}^{-0.37} \quad (4.44)$$

$$\mathcal{Re}_{t_{mod}} \left(\frac{z}{l_f} \right) = 44 h^* \left(1.9 \frac{z}{l_f} \right) \mathcal{Re}_{f_1}^{0.26} \quad (4.45)$$

Le tableau 4.6 compare les valeurs obtenues par le calcul et celles estimées par le modèle décrit précédemment. Les résultats montrent que ce modèle permet d'obtenir les bons ordres de grandeur, suffisants pour dimensionner une simulation directe.

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
$\bar{\varepsilon}^*(0)$	4.3	4.7	4.7	5.0	5.5
$\bar{\varepsilon}_{mod}^*(0)$	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5
$\bar{K}^*(0)$	9.1	7.6	6.6	6.1	5.8
$\bar{K}_{mod}^*(0)$	9.0	7.0	6	5.4	5
$\mathcal{Re}_t(0)$	1070	1370	1570	1690	1690
$\mathcal{Re}_{t_{mod}}(0)$	1030	1230	1370	1470	1560

TAB. 4.4 – Comparaison des valeurs obtenues dans le plan central par le calcul et par le modèle.

SYNTHÈSE DU CHAPITRE

On a exposé ici une méthode permettant de synthétiser de la turbulence dans un espace confiné. Une force aléatoire ajoutée dans les équations de Navier-Stokes permet de générer de l'agitation turbulente à l'aide de champs de force élémentaires à divergence nulle. Avec cette dernière propriété, on s'assure que la pression est calculée uniquement en fonction du champ de vitesse, à l'étape de prédiction de l'algorithme prédicteur-correcteur utilisé pour la résolution des équations de Navier-Stokes.

Le champ de force est modulé par un signal décorrélé en temps. On montre que dans ce cas, la puissance induite par le forçage est directement dépendante du module du champ de force, qui est connu *a priori*. Dans ces conditions il est possible d'estimer *a priori* le montant de puissance moyenne injectée par le forçage. Ce point est essentiel pour dimensionner une simulation directe, où les contraintes de résolution spatiale sont fixées par l'échelle de longueur de Kolmogorov $\eta = \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}$, et dépendent donc du montant de dissipation ε qui s'établit au même niveau que la puissance injectée.

Afin d'adapter la résolution du maillage lorsque c'est possible, il faut prendre en compte la variation du montant de dissipation dans la direction non-homogène. Dans cette optique, des modèles du profil de dissipation obtenu par cette méthode de forçage sont proposés. Ils permettent d'estimer *a priori* le profil de dissipation, ainsi que le nombre de Reynolds turbulent Re_t obtenu dans la zone forcée.

Cette méthode est extensible à d'autres configurations où l'on veut synthétiser de la turbulence en l'absence des mécanismes de production classiques, comme par exemple le cisaillement moyen de l'écoulement. De plus, la possibilité de modifier le niveau d'anisotropie résultant dans la région forcée étend les possibilités d'utilisation de cette méthode.

La turbulence obtenue dans la zone de forçage présente des caractéristiques très comparables à celles de la turbulence homogène et isotrope, malgré l'anisotropie inhérente à la configuration étudiée.

ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT NON-CISAILLÉ

5

SOMMAIRE

5.1	CAS TESTS	86
5.1.1	Présentation générale	86
5.1.2	Caractéristiques de l'écoulement	87
5.1.3	Temps caractéristiques du régime transitoire	89
5.1.4	Critères de résolution spatiale	90
5.1.5	Fonctions d'autocorrélation du champ de vitesse	93
5.1.6	Spectres de densité d'énergie (Spectres en module)	94
5.1.7	Convergence des statistiques	96
5.2	EFFET DE BLOCAGE ET FACTEUR D'ISOTROPIE	97
5.2.1	Évolution des tensions de Reynolds	98
5.2.2	Facteur d'isotropie	99
5.3	BILANS DES ÉQUATIONS DE TRANSPORT DES TENSIONS DE REYNOLDS	102
5.3.1	Comparaison Paroi adhérente/ Surface Libre	102
5.3.2	Mise à l'échelle des bilans des tensions de Reynolds	104
5.3.3	Normalisation en échelle de Kolmogorov	106
5.3.4	Mise à l'échelle dans le cas d'une condition limite de surface libre	108
	SYNTHÈSE	111

DANS le cadre de cette étude, une base de données a été constituée à partir de plusieurs simulations directes de la configuration d'écoulement décrite dans le paragraphe 1.1. Afin de caractériser l'effet de blocage dans cette situation, une étude paramétrique a été conduite en faisant varier le nombre de Reynolds de l'écoulement et la nature de la condition à la limite dynamique à la surface de blocage. On s'attache dans ce chapitre à faire une description générale de l'écoulement, en présentant les grandeurs qui dimensionnent les calculs et en justifiant l'analyse statistique qui suit. On étudie enfin l'effet du blocage à travers les bilans des équations de transport des tensions de Reynolds afin de mettre en évidence la structure de l'écoulement dans cette configuration.

5.1 CAS TESTS

5.1.1 Présentation générale

La configuration présentée sur la figure 1.1 (page 8) est étudiée à l'aide de simulations directes. Un fluide incompressible, initialement au repos, est soumis à un forçage aléatoire dans la partie centrale du domaine. Progressivement, le niveau d'énergie cinétique turbulente augmente dans la région forcée. Au bout d'un certain temps T_{dis} , les mécanismes de la dissipation se mettent en place, permettant d'évacuer l'énergie injectée par l'intermédiaire du forçage. Rapidement, la zone forcée atteint un état statistiquement stationnaire où la dissipation compense exactement la puissance introduite en moyenne. Au niveau des frontières de la région forcée, l'agitation se transmet vers le reste du domaine par diffusion turbulente. Le temps caractéristique T_{diff} de ce processus est nettement supérieur à T_{dis} et conditionne l'obtention d'un état statistiquement stationnaire sur le domaine complet.

Le niveau d'agitation est déterminé par le nombre de Reynolds Re_{f_1} défini par l'équation (4.33), et dépend des paramètres imposés au forçage. Quels que soient les cas étudiés, on choisit de garder les mêmes paramètres (P, k_f) pour le forçage. La variation du nombre de Reynolds de l'écoulement est donc uniquement liée à une variation de la viscosité du fluide. On garde également constante la distance qui sépare la surface de blocage de la zone forcée. Le domaine est cubique de côté $L_x = L_y = L_z = L$. Le forçage est appliqué dans une région qui s'étale sur le tiers du domaine ($L_f = L/3$) (voir figure 1.1). On rappelle également que $l_f = L/4$. Le choix du ratio $l_f = 3/4 L_z$ semble un bon compromis au vu des résultats de Campagne (2006). Ce ratio définit une épaisseur de diffusion :

- suffisamment faible pour transporter par diffusion turbulente un niveau d'énergie significatif dans la zone d'étude ;
- suffisamment faible pour assurer la décorrélation des structures dans la zone de diffusion (Cf. paragraphe 5.1.5) ;
- suffisamment élevée pour s'affranchir en partie des effets de confinement inhérents à cette configuration.

Conditions limites

Afin de pouvoir comparer aux mieux l'impact des conditions limites de paroi adhérente et de surface libre, deux simulations sont effectuées pour chaque valeur de viscosité. Ces deux simulations sont donc en tous points *identiques* mis à part le type de condition à la limite imposée. On les distingue à l'aide des notations suivantes :

1. Le préfixe "SL_" désigne celles se référant au cas *surface libre*.
2. Le préfixe "PA_" désigne celles se référant au cas *paroi adhérente*.

Coûts de calculs

Le tableau 5.1 référence les différents calculs effectués et le nombre de Reynolds correspondant Re_{f_1} , caractéristique des paramètres imposés au forçage. Les heures CPU donnent une estimation des coûts de calculs sur les deux machines utilisées pour mener à bien ces simulations.

Cas	A	B	C [•]
N_{xy}	224	512	896
N_z	288	512	1024
Mailles (Millions)	14	134	820
Heures CPU (Milliers)	3 [‡]	50 [‡]	3000 [†]
Re_{f_1}	125	300	675

TAB. 5.1 – Paramètres des différentes simulations effectuées.

(• : une seule condition limite, † Processeurs 850Mhz, ‡ Processeurs 4700Mhz)

5.1.2 Caractéristiques de l'écoulement

Avant de pouvoir justifier les choix qui ont orienté cette étude, on présente quelques résultats, nécessaires à la compréhension globale de l'écoulement. On peut ainsi mieux évaluer quelles sont les contraintes dimensionnantes du problème.

Description générale

On écarte à ce stade l'influence de la surface de blocage sur l'écoulement en s'intéressant uniquement à l'évolution de l'écoulement depuis la zone de forçage jusqu'à une zone *suffisamment éloignée* de la zone de blocage. Nous utilisons les différentes moyennes introduites dans le paragraphe 1.2 pour présenter l'évolution des grandeurs statistiques. Chaque variable est donc préalablement :

- moyennée spatialement dans les plans $z = cste$;
- moyennée temporellement à partir des divers échantillons collectés ;
- "symétrisée" en utilisant les propriétés de symétrie du plan central d'un point de vue statistique.

Dans un premier temps, on place l'altitude de référence $z = 0$ au niveau du plan central du domaine et on utilise la longueur caractéristique du forçage l_f pour adimensionner l'altitude z . Plus généralement, on aura recours à cette normalisation pour décrire des phénomènes que l'on veut caractériser loin de la surface de blocage. Les figures 5.1 et 5.2 présentent respectivement l'évolution verticale de l'énergie cinétique moyenne et du nombre de Reynolds turbulent Re_t dont on rappelle la définition :

$$Re_t = \frac{K^2}{\nu \varepsilon} \quad (5.1)$$

On peut remarquer que le niveau d'énergie est maximal au centre du domaine, tout comme le nombre de Reynolds turbulent. La diffusion turbulente transporte ensuite l'énergie de part et d'autre de la zone centrale vers les surfaces de blocage. Cette diffusion de la turbulence par elle-même permet d'établir un niveau d'énergie significatif dans les régions non-forcées. Les mécanismes de la dissipation qui agissent en tous points du domaine réduisent ce niveau d'énergie à mesure que l'on s'éloigne de la zone forcée. On définit trois altitudes sur la figure 5.2, correspondant respectivement :

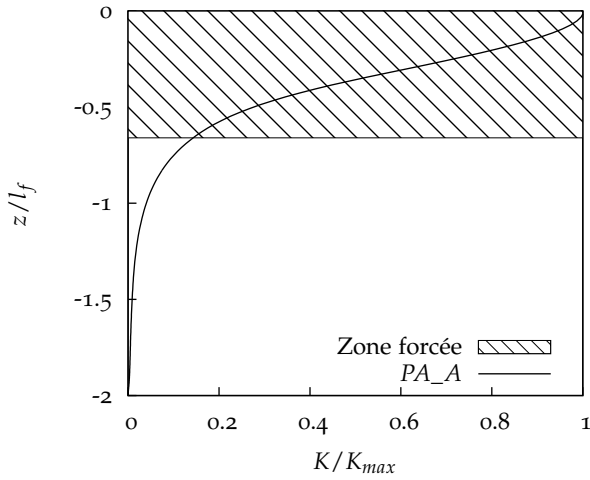


FIG. 5.1 – Évolution verticale de l'énergie cinétique moyenne.

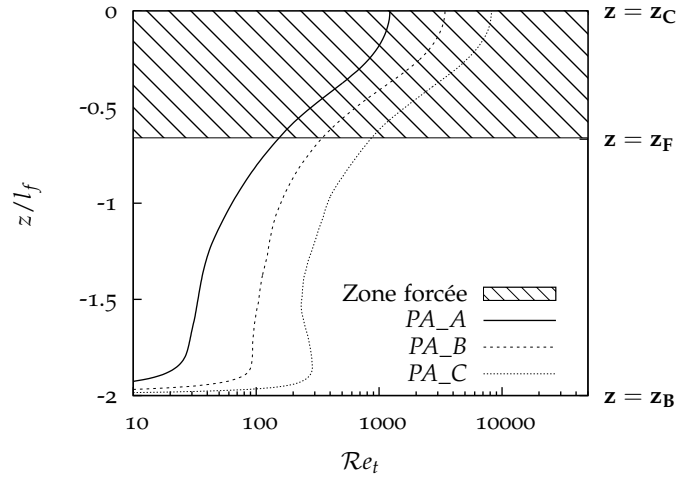


FIG. 5.2 – Évolution verticale du nombre de Reynolds turbulent moyen.

Cas	SL_A	PA_A	SL_B	PA_B	PA_C
$Re_t(z = z_C)$	1230	1216	3453	3435	8206
$Re_t(z = z_F)$	153	147	367	337	851
$Re_t(z = z_B)$	93	0	360	0	0

TAB. 5.2 – Nombres de Reynolds turbulents caractéristiques des différentes simulations effectuées.

- au centre du domaine ($z = z_C$);
- à la sortie de la zone forcée ($z = z_F$);
- à la surface de blocage ($z = z_B$).

La valeur du nombre de Reynolds turbulent à ces altitudes est reportée dans le tableau 5.2. Les différentes résolutions choisies offrent donc une gamme d'étude où le nombre de Reynolds turbulent dans la zone forcée est multiplié par un facteur 10, variant de 10^3 à 10^4 .

Taille des structures énergétiques

La taille des structures énergétiques est également une grandeur dimensionnante du problème. En effet, la validité de la périodisation des directions x et y repose sur la décorrélation spatiale de ces structures. Une fois cet aspect validé, la taille des structures conditionne également la rapidité de convergence des moyennes spatiales (par plan), puisqu'elles déterminent le nombre d'échantillons spatialement décorrélés de chaque plan.

On reporte sur les figures 5.3 et 5.4 l'évolution verticale de la macro-échelle de Taylor Λ_f et de l'échelle de longueur turbulente $l_t = K^{3/2}/\varepsilon$. Le procédé utilisé pour évaluer la macro-échelle de Taylor est discuté dans le paragraphe 5.1.5. Ces deux échelles de longueur sont proportionnelles en situation

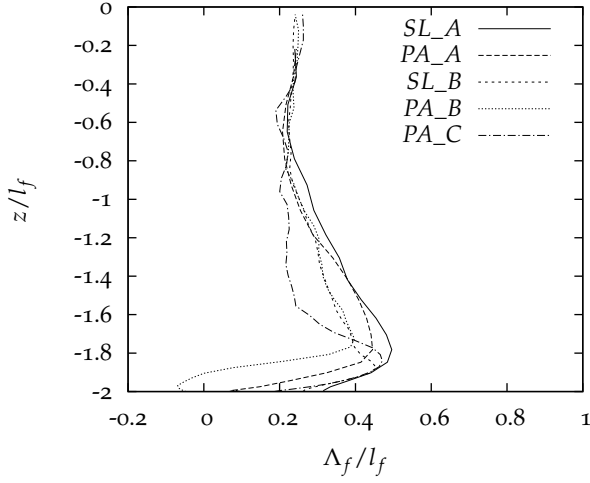
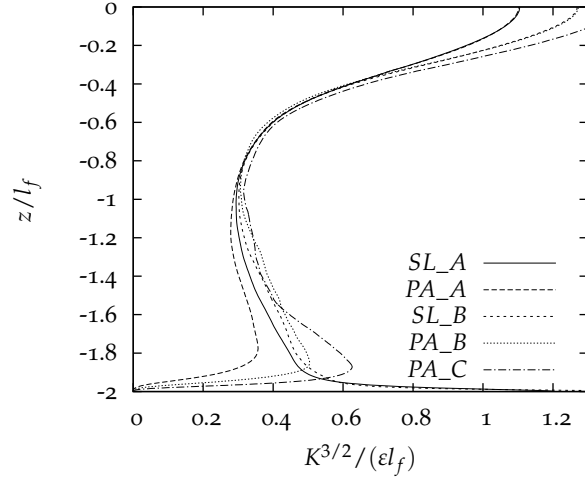


FIG. 5.3 – Évolution de la macro-échelle de Taylor.

FIG. 5.4 – Évolution de l'échelle de longueur turbulente l_t .

de turbulence homogène isotrope, et sont généralement associées à la taille des tourbillons porteurs d'énergie. Dans notre cas ces deux échelles ont des évolutions très différentes dans la zone de forçage, ce que l'on attribue au caractère artificiel du forçage. En deçà de la frontière de la zone de forçage ($z < z_F$), les équations de Navier-Stokes sont résolues sans terme source additionnel. Les deux échelles ont alors un comportement similaire, montrant d'une certaine manière la perte de mémoire du forçage de la turbulence. Lorsque les effets du blocage deviennent important ($z/l_f \approx -1.8$), il devient difficile de donner un sens physique à ces échelles de longueur qui sont alors du même ordre de grandeur que la distance à la surface de blocage. On observe que la zone de diffusion impose une croissance des échelles de longueur mais également des échelles de temps, ce qui incite à prendre les précautions suivantes :

1. Les critères de convergence statistiques doivent être fonctions de la valeur des grandeurs dans les régions éloignées de la zone forcée, puisque ces grandeurs y sont associées à des échelles de temps et de longueur plus grandes que dans le reste du domaine.
2. L'extension de l'épaisseur de la zone de diffusion conduirait à des tailles de structures de plus en plus grandes. Il faut donc la limiter afin d'assurer la décorrélation spatiale des structures énergétiques dans les deux directions périodiques (à périodes spatiales fixées L_x et L_y), et ce dans tous les plans $z = cste$ du domaine.

5.1.3 Temps caractéristiques du régime transitoire

Les temps caractéristiques permettant d'atteindre un état statistiquement stationnaire peuvent être évalués *a posteriori*. Ainsi T_{dis} peut être évalué en fonction de l'énergie cinétique moyenne K et du montant de dissipation moyen ε . Comme mentionné dans le paragraphe 4.5.2, T_{dis} est de l'ordre de l'échelle de temps associée aux tourbillons porteurs d'énergie τ_t . Ainsi, on peut écrire :

$$T_{dis} \approx \tau_t(z = z_C) \approx \frac{K}{\varepsilon}(z = z_C) \quad (5.2)$$

Pour estimer le temps nécessaire à la diffusion de l'énergie cinétique turbulente jusqu'à la surface, il faut évaluer les termes de diffusion turbulente $\mathcal{D}_{11}^u$ et $\mathcal{D}_{33}^u$ qui interviennent dans les équations bilan des tensions de Reynolds normales. La sommation des équations (1.17) permet d'obtenir l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente moyenne $1/2\overline{u_i u_i}$. Le terme de diffusion turbulente dans cette équation s'écrit :

$$\mathcal{D}^u = \frac{1}{2}\mathcal{D}_{ii}^u = -\frac{1}{2}\frac{d\overline{u_i u_i w}}{dz} \quad (5.3)$$

On peut extraire des temps caractéristiques de variation des différents termes de l'équation de transport de l'énergie cinétique en divisant les termes par la quantité transportée, et en particulier :

$$\frac{1}{\tau_{diff}(z)} \approx \left| \frac{1}{\overline{u_i u_i}} \frac{d\overline{u_i u_i w}}{dz} \right| \quad (5.4)$$

Pour obtenir un temps caractéristique de diffusion complet T_{diff} , de la zone forcée à la surface de blocage, il faut tenir compte de la variation de τ_{diff} dans la direction z . Un tel temps caractéristique peut ainsi s'écrire :

$$T_{diff} = \frac{1}{z_B - z_C} \int_{z_C}^{z_B} \tau_{diff}(z) dz \quad (5.5)$$

Dans les simulations effectuées, on peut estimer les deux temps caractéristiques T_{dis} et T_{diff} *a posteriori*. Pour la hauteur de diffusion choisie ici ($L_z/2 = 2l_f$), l'intégration numérique de (5.5) et l'évaluation de (5.2) permettent d'établir :

$$T_{diff} \approx 10T_{dis} \quad (5.6)$$

Vis-à-vis des temps caractéristiques ainsi évalués et compte tenu des observations faites dans le paragraphe 4.5.2, on pourra considérer que l'évolution du fluide est statistiquement stationnaire après un temps $T_{stat} = 2T_{diff}$.

5.1.4 Critères de résolution spatiale

En champ libre

En simulation directe, on fixe la taille des plus petites cellules de calcul en fonction des plus petites échelles de longueur de l'écoulement. On rappelle à ce titre la valeur de l'échelle de Kolmogorov qui fixe *en moyenne* la taille des plus petites structures dissipatives :

$$\eta = \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \quad (5.7)$$

En champ libre, *i.e.* lorsque l'on peut raisonnablement supposer l'isotropie aux petites échelles, on adopte conventionnellement le critère de résolution spectral

$$k_{max}\eta = 1.5, \quad (5.8)$$

avec $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$ et k_{max} désignant le nombre d'onde maximal qui résulte de la discrétisation spatiale. Dans le cas d'une résolution par méthode pseudo-spectrale, il faut bien sûr tenir compte de la technique d'anti-repliement utilisée (Cf. paragraphe 3.3.2), et des modes effectivement résolus (non

tronqués). Si l'on admet que l'inhomogénéité dans la direction z n'affecte pas l'isotropie des petites échelles, on peut utiliser un critère similaire pour les directions périodiques x et y de l'écoulement en y ajoutant une dépendance à la coordonnée z :

$$\kappa_{max}\eta(z) = 1.5, \quad (5.9)$$

avec $\kappa = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. En ce qui concerne la dernière direction, où la résolution s'effectue par différences finies, on peut établir un critère similaire à partir des caractéristiques de dispersion du schéma compact utilisé. On peut en effet mesurer leur qualité de résolution en établissant analytiquement une expression du nombre d'onde modifié (Lele 1992). Ce nombre d'onde modifié $k' = f(k)$ exprime le nombre d'onde effectivement résolu compte tenu de la dispersion induite par le schéma. Le nombre d'onde maximal résolu correspond donc à l'extrémité de la zone dans laquelle $k' \approx k$. Pour le schéma compact d'ordre 6 utilisé ici on considère que 2/3 des modes ne sont pas contaminés par la dispersion et sont effectivement résolus. Le critère (5.8) doit être modifié en conséquence dans la direction normale. En exprimant k_{max} à partir de Δz , on obtient :

$$k_{max}\eta(z) = \frac{\pi\eta(z)}{\Delta z} = 1.5 \frac{3}{2} = 2.25 \quad (5.10)$$

On notera que d'après la revue de Moin et Mahesh (1998), le critère (5.8) peut être relâché à jusqu'à $k_{max}\eta = 0.7$ en turbulence homogène isotrope. En comparaison le critère retenu ici est deux fois plus restrictif.

Prise en compte du confinement en z

Dans les directions homogènes x et y , on fixe la taille des mailles dans la zone de forçage. En effet, l'augmentation de toutes les échelles de longueur à mesure que l'on s'éloigne de la région forcée (Cf. figure 5.4) assure automatiquement la résolution de toutes les échelles de longueur de l'écoulement en zone de diffusion. On vérifiera *a posteriori* que c'est également le cas au voisinage de la surface de blocage. En ce qui concerne la direction non-homogène, il est difficile de formaliser un critère. Pour les écoulements de couche limite (voir par exemple Spalart 1988), on établit un critère en utilisant les grandeurs de paroi (u_τ, ν) déterminées par le frottement moyen de l'écoulement. Dans notre cas, l'absence d'écoulement moyen ne permet pas de fixer un tel critère. Il faut donc prendre en compte la structure de l'écoulement dans la direction z . On connaît cependant très mal les épaisseurs des différentes couches qui caractérisent l'influence :

- de l'effet de blocage ;
- du type de condition limite appliquée à la surface.

En conséquence, on décide de conserver dans la direction z le critère (5.10) établi en champ libre que l'on adapte de la manière suivante :

1. On tolère une certaine sous-résolution dans la zone forcée afin de maximiser le nombre de Reynolds turbulent dans cette zone.
2. On utilise les critères établis en champ libre dans la zone de diffusion.
3. On adopte une sur-résolution vis-à-vis des critères établis en champ libre dans la zone proche paroi. Il s'agit en quelque sorte d'un coefficient de sécurité pour la résolution spatiale de la zone de blocage d'intérêt physique.

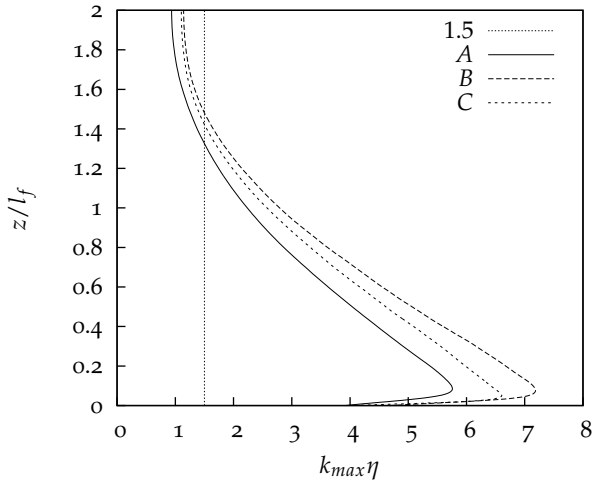


FIG. 5.5 – Vérification du critère $k_{max}\eta = 1.5$.
(Direction tangentielle)

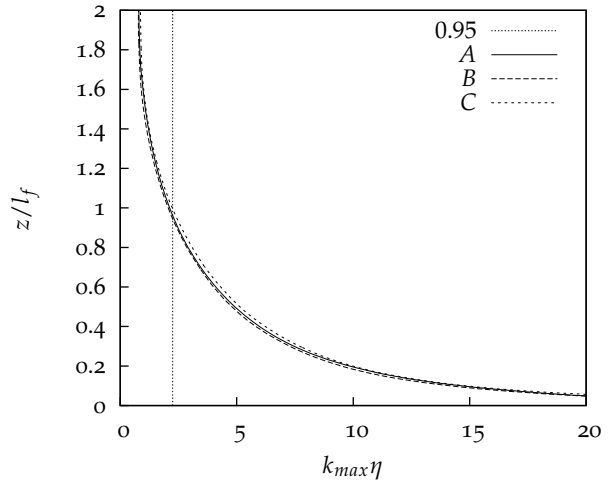


FIG. 5.6 – Vérification du critère $k_{max}\eta = 2.25$.
(Direction normale)

Le dernier point se traduit par une densité élevée de points près des frontières. Le surcoût engendré est cependant relatif. En effet, si la partition du domaine permet une certaine flexibilité dans le choix du nombre de mailles (Cf. paragraphe 3.3.3), il ne permet pas tous les choix possibles pour N_z . Ainsi, pour un calcul utilisant 16K processeurs, la décomposition du domaine adoptée autorise de fixer 512, 756, 1024, *etc.* mailles dans la direction verticale. En pratique, on s'assure que la résolution dans les zones de diffusion et de blocage est assurée par rapport au critère (5.10). On affecte le nombre de mailles supplémentaires, disponibles du fait des contraintes de décomposition du domaine, à la zone de proche paroi qui nous intéresse plus particulièrement. En outre, la densité élevée de points dans cette zone permet de réduire l'erreur de troncature engendrée par la réduction de l'ordre des schémas sur les premières mailles.

Vérification des critères *a posteriori*

Sur les figures 5.5 et 5.6, on a extrait l'évolution de η dans les différents cas de calculs. Dans les plans $z = cste$, la taille des mailles est uniforme, en raison de la discrétisation spectrale adoptée. On vérifie sur la figure 5.5 qu'en fixant une taille de maille légèrement supérieure à celle autorisée par le critère (5.9) dans la zone de forçage, la résolution est assurée sur le reste du domaine et en particulier dans la région d'étude. Dans la direction normale (figure 5.6) également, la taille de maille prescrite ne permet pas de respecter le critère (5.10) dans la zone de forçage. Le raffinement utilisé permet d'évoluer vers des mailles très fines au voisinage de la zone de blocage. Il pourrait être judicieux d'utiliser une fonction de raffinement qui permet d'approcher plus finement le critère (5.10) dans la zone de diffusion, et de réaliser ainsi une économie substantielle. Toutefois, le raffinement choisi a l'avantage de conserver des mailles cubiques au centre du domaine et n'introduit donc pas d'anisotropie artificielle. Pour donner une mesure de la résolution verticale adoptée dans la zone blocage, on mesure le nombre de mailles N_{kolm} sur une distance $\eta(z = z_B)$ depuis la surface de blocage. Les valeurs de N_{kolm} sont reportées dans le tableau 5.3.

Cas	SL_A	PA_A	SL_B	PA_B	PA_C
N_{kolm}	16	13	21	16	13

TAB. 5.3 – Résolution dans le voisinage de la surface de blocage : valeurs de N_{kolm} .

5.1.5 Fonctions d'autocorrélation du champ de vitesse

Décorrélation spatiale du champ de vitesse

L'étude des fonctions d'autocorrélation du champ de vitesse est essentielle pour valider la valeur de période adoptée dans les directions homogènes x et y . Il faut ainsi s'assurer que le niveau de corrélation est faible entre deux points séparés d'une demi-longueur de domaine L . On rappelle la définition des fonctions d'autocorrélation longitudinale et transversale, écrites pour la composante de vitesse u :

$$f(x) = \frac{\overline{u(0)u(x)}}{\overline{u^2}} \quad (5.11)$$

$$g(y) = \frac{\overline{u(0)u(y)}}{\overline{u^2}} \quad (5.12)$$

Pour calculer ces fonctions, on tient compte de la symétrie statistique de la turbulence par rotation autour de l'axe z . On peut ainsi utiliser les égalités,

$$\overline{u(0)u(x)} = \overline{v(0)v(y)} \quad (5.13)$$

$$\overline{u(0)u(y)} = \overline{v(0)v(x)} \quad (5.14)$$

pour améliorer la convergence des statistiques. A la différence de situations où la turbulence est homogène, la fonction d'autocorrélation transversale de la composante normale de la vitesse w ne peut pas être associée à g . Pour ne pas alourdir l'exposé, on ne fera plus référence à cette fonction puisqu'on a vérifié qu'elle faisait intervenir des échelles de longueur moins contraignantes du point de vue de la décorrélation. Les résultats obtenus pour le cas B sont présentés sur les figures 5.7 et 5.8. Différentes altitudes y sont représentées depuis le plan central $z = 0$ jusqu'à la surface (surface libre dans ce cas). Le niveau de corrélation qui s'établit entre deux points d'un plan $z = cste$ est de plus en plus élevé à mesure que l'on s'éloigne du plan central, du fait de la croissance des échelles de longueur dans la zone de diffusion. Néanmoins, la taille du domaine dans les directions x et y est suffisante pour que la fonction f puisse s'annuler dans tous les plans du domaine. La fonction g met en évidence (figure 5.8) un niveau de corrélation maximal de l'ordre de 0.1 pour deux points séparés par une demi-longueur de boîte. On admet que ce niveau de corrélation reste suffisamment faible pour ne pas remettre en cause les conditions périodiques utilisées dans les directions x et y , ni contaminer les moyennes effectuées dans ces plans. On met cependant en évidence un point important dans l'étude de cette configuration : l'échelle de longueur caractéristique du forçage (ici $l_f = L_x/4$) fixe la taille des structures générées, mais également la longueur maximale de diffusion ($L_z/2$). En effet, à partir d'une certaine distance de la zone forcée, la croissance de la taille des structures énergétiques dans la zone de diffusion devient incompatible avec la décorrélation spatiale nécessaire, pour valider l'utilisation de conditions périodiques en x et y (à période L_x, L_y données).

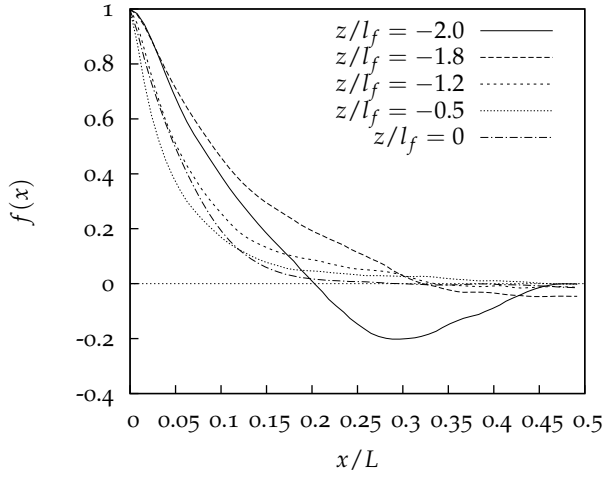


FIG. 5.7 – Auto-corrélation longitudinale de la vitesse tangentielle.

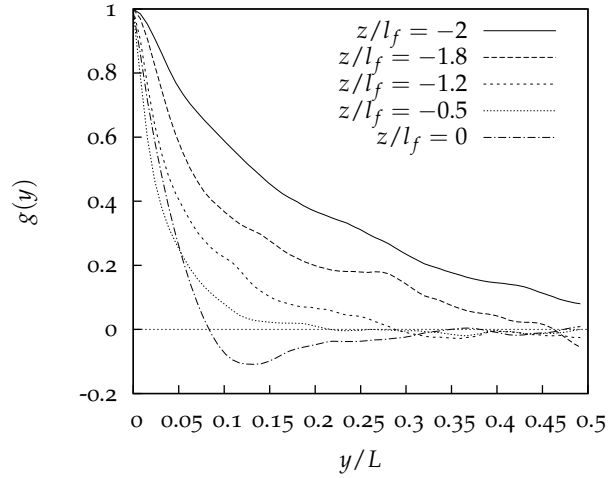


FIG. 5.8 – Auto-corrélation transversale de la vitesse tangentielle.

Macro-échelle de Taylor

Les fonctions d'autocorrélation atteignent des niveaux faibles ou nuls en $x/L_x = 0.5$. On peut donc évaluer la macro-échelle de Taylor Λ_f qui résulte de l'intégration de ces fonctions. En adaptant les bornes d'intégration dans la définition classique, on peut donc calculer la macro-échelle dans tous les plans d'équation $z = cste$ du domaine :

$$\Lambda_f(z) = \int_0^{L/2} f_z(x) dx \quad (5.15)$$

On peut ainsi obtenir le profil de Λ_f dans la direction z , présenté précédemment (figure 5.3).

5.1.6 Spectres de densité d'énergie (Spectres en module)

Afin de valider pleinement le forçage utilisé dans cette étude, il est nécessaire de vérifier que le mouvement d'agitation généré est bien représentatif d'un mouvement d'agitation tel qu'on pourrait l'observer dans un écoulement turbulent. On observe donc les caractéristiques de cette agitation dans l'espace spectral, où les propriétés de la turbulence sont bien connues. Comme la configuration étudiée ne présente que deux directions homogènes, on essaie tout d'abord d'établir un lien entre les spectres que l'on peut extraire de ces simulations et ceux couramment observés dans le cadre de l'étude de la turbulence homogène isotrope.

Spectre en module bidimensionnel

Dans cet écoulement qui présente deux directions homogènes, on peut définir un spectre d'énergie en module bidimensionnel :

$$\frac{1}{2} \overline{u_i u_i}(z) = \int_0^\infty E_{2d}(\kappa, z) d\kappa \quad \text{avec} \quad \kappa = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (5.16)$$

Ce spectre est obtenu en effectuant une transformée de Fourier bidimensionnelle du champs de vitesse et en intégrant sur une couronne de rayon κ le module des coefficients :

$$E_{2d}(\kappa, z) = 2\pi\kappa\hat{u}_i(\kappa, z)\hat{u}_i^*(\kappa, z) \quad (5.17)$$

On distingue le spectre $E_{2d}(\kappa, z)$ du spectre en module tridimensionnel $E(k)$. Si les grandes échelles du spectre sont suffisamment séparées des petites échelles dissipatives, *i.e.* si le nombre de Reynolds de l'écoulement est suffisant, on observe une zone "inertielle" du spectre où la densité d'énergie est indépendante de la viscosité. Des arguments purement dimensionnels permettent d'écrire dans cette zone

$$E(k) = C_k \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (5.18)$$

avec $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$ et C_k est la constante de Kolmogorov dont la valeur s'établit à $C_k \approx 1.6$ (voir par exemple Chassaing 2000, p. 300). Dans cette zone inertielle, les arguments dimensionnels restent valables pour le spectre E_{2d} . On peut donc écrire,

$$E_{2d}(\kappa) = \beta C_k \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \quad (5.19)$$

où β est un coefficient constant. Liu et al. (1994) montrent que l'on peut calculer ce coefficient en situation de turbulence homogène isotrope. Il aboutissent à une valeur de $\beta = 0.80$.

Observation des spectres.

Les spectres $E_{2d}(\kappa)$ obtenus dans le plan d'équation $z = z_C$ sont présentés sur la figure 5.9 pour les cas A, B et C. La première remarque concerne les plus grandes échelles de l'écoulement où l'on observe une "bosse" qui est la conséquence immédiate du forçage de la turbulence à ces échelles. Aux plus petites échelles, on observe une légère accumulation d'énergie sans réalité physique. Ce phénomène, observé couramment en simulation directe met en évidence une légère sous-résolution des plus petites échelles. Cette observation traduit donc nos choix de résolution dans la zone forcée. L'adimensionnement par les échelles de Kolmogorov (*i.e.* en utilisant ν et $\varepsilon(z)$) permet de superposer parfaitement les trois situations dans la gamme dissipative du spectre. Le forçage aléatoire influence donc uniquement les grandes échelles de l'écoulement et ne perturbe pas la cascade énergétique qui s'opère vers les petites échelles.

Dans le plan central, l'agitation turbulente est maximale. On y obtient donc une meilleure séparation des échelles. Le nombre de Reynolds atteint avec la simulation A ne permet pas le développement d'une zone inertielle nette. A l'inverse, on distingue bien cette zone avec les nombres de Reynolds turbulents obtenus dans les simulations B et C qui atteignent les valeurs 3400 et 8200, respectivement. On peut estimer, avec les résultats de la figure 5.9, une valeur de la constante β , si l'on suppose qu'on est proche d'une situation de turbulence homogène. La valeur de cette constante, qui semble indépendante du nombre de Reynolds dans la gamme étudiée, est évaluée à $\beta \approx 1.35$. On note un écart significatif avec la valeur théorique ($\beta = 0.8$) qui caractérise la turbulence homogène isotrope. Outre le fait que la turbulence étudiée ici est par nature anisotrope, la manière même d'estimer cette constante peut expliquer cet écart. Ishihara et al. (2009) reportent en effet, dans le cadre de simulation directe de la turbulence homogène par simulation directe, qu'on surévalue la constante de Kolmogorov si on

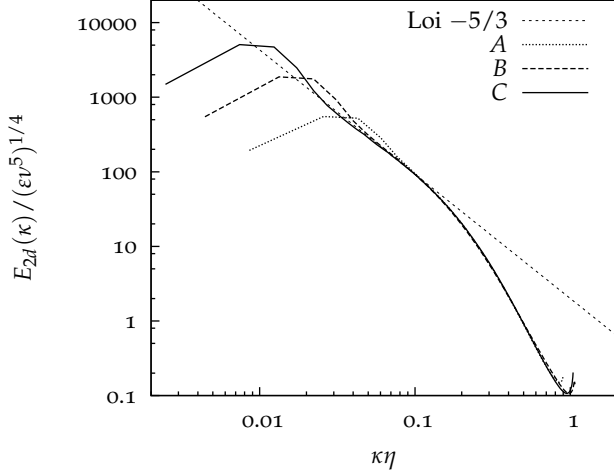


FIG. 5.9 – Spectres d'énergie dans le plan central pour les trois nombres de Reynolds de simulation.

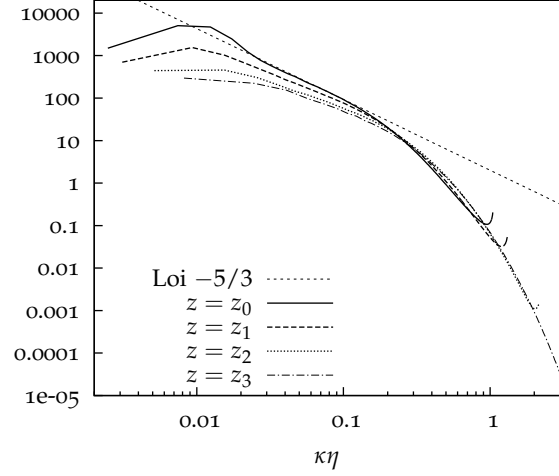


FIG. 5.10 – Spectres d'énergie dans des plans d'altitude décroissants depuis le plan central pour la simulation C.

considère que le spectre en module est dans sa plage inertielle pour $\kappa \eta > 0.01$, la véritable plage inertielle se situant en-deçà. Cependant, la densité d'énergie à ces nombres d'ondes n'est pas indépendante du forçage dans notre configuration. Cette situation ne permet donc pas d'estimer précisément, ni la constante de Kolmogorov, ni β malgré la valeur élevée du nombre de Reynolds ($Re_\lambda \approx 510$ pour la simulation C).

Sur la figure 5.10, on présente les spectres $E_{2d}(\kappa)$ obtenus à différentes altitudes $z_0, \dots, z_4$, où z_0 fait ici référence au plan central, et z_4 au plus éloigné des plans considérés. Le niveau d'énergie cinétique turbulente diminue à mesure que l'on s'éloigne du plan central, ce qui conduit à une baisse du niveau global de l'intensité des composantes du spectre. Le nombre de Reynolds diminue également; en conséquence la zone inertielle disparaît rapidement. Cependant les spectres se superposent toujours parfaitement aux plus petites échelles.

5.1.7 Convergence des statistiques

L'analyse statistique qui va suivre repose sur la collecte de statistiques en cours de calcul. Étant données les fortes variations d'échelles de temps et de longueur dans cette configuration, on définit une mesure de la qualité des moyennes statistiques établies. On propose de définir cette mesure en s'appuyant sur les échelles turbulentes de l'écoulement facilement mesurables, afin de pouvoir évaluer la convergence relative des statistiques d'un cas à l'autre, ou dans le même cas en considérant des altitudes différentes. On a vu dans le paragraphe 5.1.2 que la macro-échelle de Taylor et l'échelle de longueur turbulente $l_t = K^2/\nu\epsilon$ ont un comportement similaire hors de la région forcée. On utilise donc l_t , plus facile à mesurer pour évaluer la décorrélation spatiale des champs dans les directions homogènes, ainsi que l'échelle de temps basée sur les mêmes quantités $\tau_t = K/\epsilon$, associée au temps de retournement des tourbillons porteurs d'énergie. Dans une approche simplifiée, on peut considérer qu'un signal spatio-temporel suffisamment échantillonné dans le temps (respectant au moins le critère de Shannon)

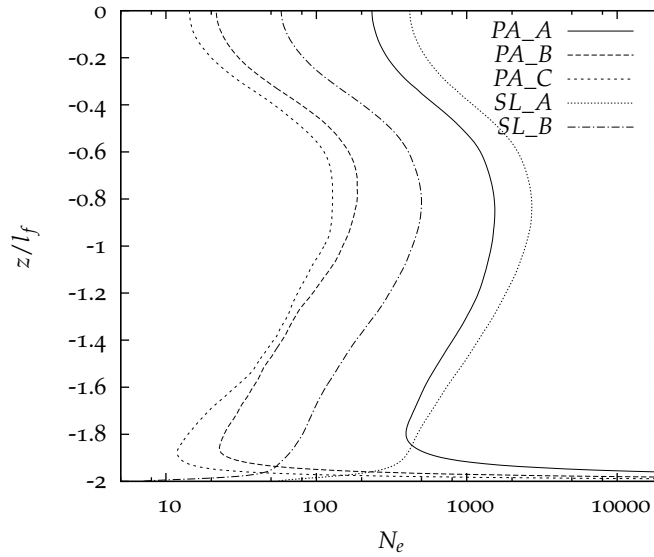


FIG. 5.11 – Évolution du nombre d'échantillons significatifs collectés sur les différents calculs.

durant un temps T et sur un plan d'homogénéité de dimension $L \times L$, permet de recueillir un nombre d'échantillons "significatifs" N_e défini par :

$$N_e = \frac{T}{\tau_t} \left(\frac{L}{l_t} \right)^2, \quad (5.20)$$

On entend ici par échantillons "significatifs" des échantillons décorrélés spatialement et temporellement. Cette mesure N_e permet d'évaluer la convergence des moyennes dans tous les plans du domaine. La figure 5.11 présente l'évolution de ce nombre d'échantillons significatifs N_e estimé à partir des différents calculs effectués. Ici encore la croissance de toutes les échelles dans la zone de diffusion est un obstacle à l'obtention d'un niveau de convergence élevé dans tous les plans du domaine. Ainsi N_e diminue d'un facteur 50 à 100 dans la zone de blocage par rapport à sa valeur maximale dans la zone de diffusion. Les simulations les moins "coûteuses" (cas A) permettent d'obtenir un nombre d'échantillons très conséquent qui permet d'assurer un niveau de convergence très élevé des statistiques. Pour les simulations les plus coûteuses, N_e reste cependant toujours strictement supérieur à 10 quelle que soit l'altitude et nous assure un niveau de convergence des moyennes très satisfaisant.

5.2 EFFET DE BLOCAGE ET FACTEUR D'ISOTROPIE

On restreint désormais la zone d'étude à la région de l'écoulement où le terme de forçage est rigoureusement nul. L'altitude de référence devient donc la surface. On présentera désormais toutes les variations verticales des grandeurs étudiées avec cette référence, *i.e.* $z = 0$ à la surface de blocage. On s'intéresse ici au cas B, qui sera régulièrement utilisé comme cas de référence, car il permet de disposer des deux types de condition limite et pour lequel le nombre de Reynolds obtenu dans la zone de forçage est significativement élevé.

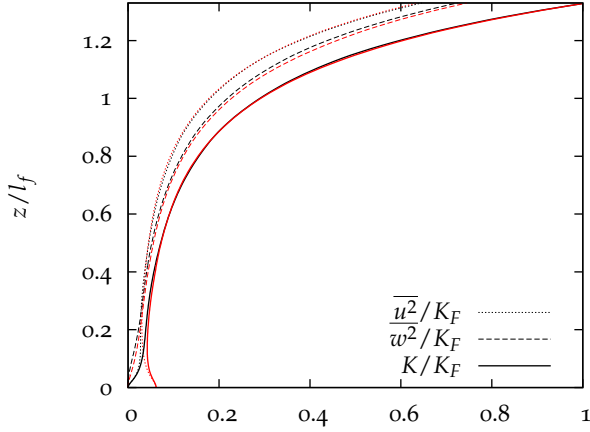


FIG. 5.12 – Évolution des tensions de Reynolds normale et tangentielle dans la région non forcée (noir-PA_B rouge-SL_B)

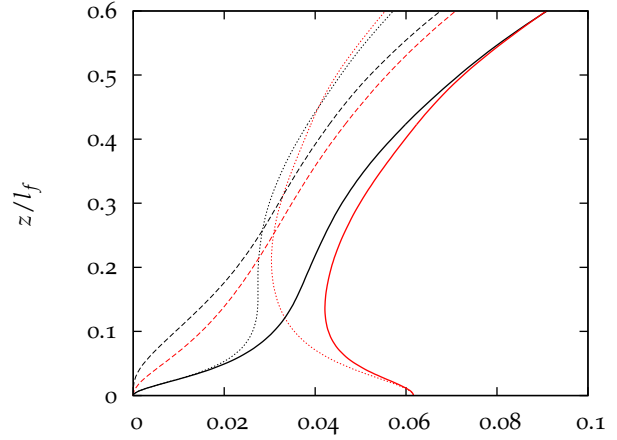


FIG. 5.13 – Zoom dans la zone de blocage (légende identique à la figure 5.12)

5.2.1 Évolution des tensions de Reynolds

Les figures 5.12 et 5.13 présentent l'évolution des tensions de Reynolds dans le domaine. On rappelle que dans cette configuration, seules les tensions associées aux composantes tangentielles de la vitesse ($\overline{u^2} \equiv \overline{v^2}$) et normales ($\overline{w^2}$) sont non nulles. Leurs comportements asymptotiques sont rappelés dans le paragraphe 1.4. Les données sont ici normées par l'échelle de longueur du forçage tout comme le niveau d'énergie K_F obtenu à la frontière de la zone de forçage.

Loin de la surface, on observe sur la figure 5.12 un comportement similaire des contraintes $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$, indépendamment de la condition limite utilisée. La valeur maximale de ces quantités se situe dans la zone de production. La diffusion turbulente transporte l'énergie cinétique turbulente en dehors de la zone de forçage. Cette grandeur diminue à mesure que l'on s'éloigne de la zone de forçage sous l'effet de la dissipation. On distingue le niveau d'anisotropie en observant séparément les contributions $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$ de l'énergie cinétique turbulente. Cette anisotropie, en faveur de la contrainte $\overline{w^2}$ dans la zone de diffusion s'inverse au voisinage de la surface libre (figure 5.13), où elle se caractérise par un excès de $\overline{u^2}$, quelle que soit la condition à la limite considérée.

En configuration de surface libre (courbes rouges sur les figures 5.12 et 5.13), les résultats sont en accord avec ceux de Campagne (2006). On retrouve bien les comportements asymptotiques escomptés. Il est intéressant de noter l'apparition d'un maximum de $\overline{u^2}$ à la surface libre, déjà observé dans de nombreuses simulations avec cette condition limite de surface libre (chez Campagne (2006), Perot et Moin (1995) ou encore Calmet et Magnaudet (2003)). L'explication avancée par Perot et Moin repose sur la modification profonde dans cette zone des mécanismes habituels de dissipation. On rappelle que la vorticité est d'axe normal à la surface dans cette zone, ce qui a pour effet de bidimensionnaliser la turbulence, et perturbe les mécanismes tridimensionnels de cascade énergétique. Le transfert inter-composantes ne peut être à l'origine de ce phénomène puisque l'énergie cinétique et la composante tangentielle $\overline{u^2}$ atteignent simultanément un maximum. Le rapport du minimum d'énergie K_{min} à sa valeur à la surface libre K_0 est discuté par Calmet et Magnaudet (2003). La valeur trouvée dans leurs

Simulation	RDT	Campagne (2006)	SL_A	SL_B	Calmet et Magnaudet (2003)
Re_{SL_0}	-	77	93	360	≈ 1910
K_{min}/K_0	0.865	0.80	0.73	0.71	0.84

TAB. 5.4 – Comparaison des différentes valeur du rapport K_{min}/K_0 dans diverses simulations avec une condition limite de surface libre (Re_{SL_0} exprime le nombre de Reynolds turbulent à la surface libre)

simulations est très comparable à celle prédite par la théorie de distorsion rapide de Hunt et Graham (1978). Cette valeur est légèrement inférieure dans nos simulations, mais reste très comparable. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.4, en fonction du nombre de Reynolds turbulent Re_{SL_0} que l'on peut définir dans le plan de la surface libre :

$$Re_{SL_0} = \frac{K_0^2}{\nu \varepsilon_0} \quad (5.21)$$

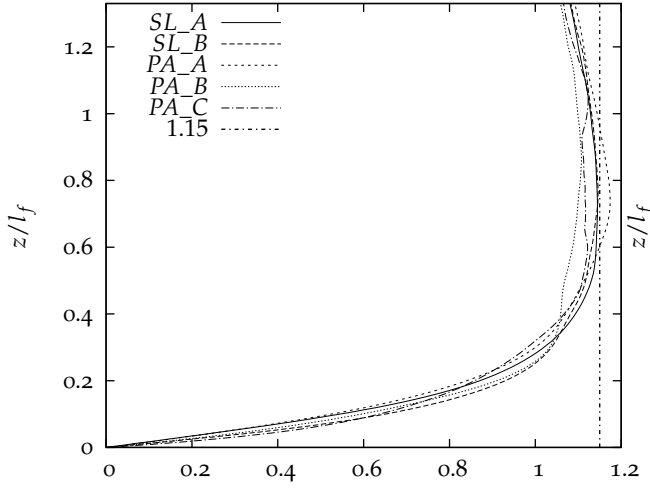
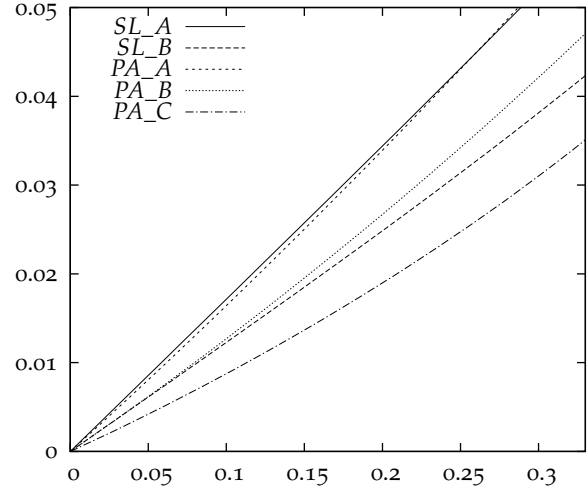
Lorsque la condition limite appliquée correspond à une paroi adhérente (courbes noires sur les figures 5.12 et 5.13), les grandeurs étudiées suivent le même comportement loin de la surface de blocage. Au voisinage de celle-ci, les tensions $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$ décroissent jusqu'au contact de la paroi où elles s'annulent pour satisfaire la condition limite. Il est difficile d'estimer à partir de ces courbes la région d'influence de la condition de limite et/ou du blocage, au motif qu'il n'existe pas de rupture de pente évidente sur ces courbes. On peut toutefois discuter du "plateau" observé sur la courbe de $\overline{u^2}$ (figure 5.13) pour $0.1 < z/l_f < 0.2$ qui traduit un regain d'énergie dans cette zone.

Thomas et Hancock (1977) ont réalisé une expérience dans laquelle ils observent l'interaction d'une turbulence de grille avec une paroi mobile allant à la vitesse de l'écoulement moyen. Cette configuration est directement comparable aux simulations de Perot et Moin (1995) puisque la turbulence, qui est en décroissance spatiale peut se comparer à de la turbulence en décroissance temporelle par l'intermédiaire de l'hypothèse de Taylor. Les résultats de Thomas et Hancock (1977) montrent l'existence d'un maximum dans la composante $\overline{u^2}$. Ce pic est également observé au début des simulations de Perot et Moin (1995). Cependant il disparaît aux temps longs. Perot et Moin attribuent alors l'existence de ce pic dans leur simulations aux effets de l'insertion brutale de la condition à la limite. Ils pronostiquent également une contamination par l'écoulement moyen dans l'expérience de Thomas et Hancock. Dans notre configuration, on peut s'interroger sur l'évolution de ce "plateau" avec l'augmentation du nombre de Reynolds. À ce stade, on ne peut pas conclure sur la possibilité d'apparition d'un pic à plus grand nombre de Reynolds.

5.2.2 Facteur d'isotropie

Comportement général

L'anisotropie des tensions de Reynolds dans les directions tangentielle et normale peut se quantifier à l'aide du facteur d'isotropie $I = \frac{w'}{u'}$. Cette grandeur est tracée pour les cinq calculs sur la figure 5.14. De manière générale, le comportement de ce coefficient peut se décrire ainsi :

FIG. 5.14 – Évolution de I dans la zone non forcée.FIG. 5.15 – Évolution de I dans la zone non forcée (pente à l'origine).

1. Dans la zone de diffusion, un faible niveau d'anisotropie s'installe ($I \approx 1.15$), caractéristique des zones de diffusion pure. La valeur RMS de la fluctuation de vitesse dans la direction normale w' domine celle de la fluctuation tangentielle u' . Ce résultat est conforme aux expériences de grille oscillante où l'on relève une valeur de $I \approx 1.1 - 1.2$ (voir par exemple De Silva et Fernando 1994).
2. Sous l'effet du blocage, w' est progressivement amené à zéro. En conséquence le facteur d'isotropie décroît vers une valeur également nulle à la surface. Dans le cas de la paroi adhérente, u' prend aussi une valeur nulle à la paroi mais décroît moins vite, comme le démontrent les développements asymptotiques. C'est pourquoi la limite de I à la paroi est finie et nulle.

L'aspect le plus frappant est la similitude de comportement observé, indépendamment du nombre de Reynolds global de la configuration ou de la condition de blocage utilisée. Les échelles utilisées par la normalisation sont celles du forçage. Le facteur d'isotropie répond donc dans un premier temps à la condition de blocage à travers les plus grandes structures de l'écoulement. La variation du nombre de Reynolds dans cette configuration affecte la taille des structures dissipatives sans modifier les grandes échelles. En conséquence l'évolution du facteur d'isotropie est globalement indépendante du nombre de Reynolds dans la partie supérieure du domaine ($z/l_f > 0.2$).

Si on observe, dans un deuxième temps, l'évolution de I au voisinage de la surface de blocage (figure 5.15), on observe un effet manifeste du nombre de Reynolds avec la normalisation de z par l_f . L'anisotropie dans cette zone est donc gouvernée par des mécanismes qui évoluent avec le nombre de Reynolds. Néanmoins il est clair que cette dépendance ne traduit pas l'action de la viscosité en proche paroi puisque les pentes observées sont remarquablement comparables, d'un type de condition limite à l'autre. Une explication de ce comportement sera proposée dans le paragraphe 6.3.3 (page 133).

Échelle de longueur caractéristique des effets de blocage

De façon théorique, on peut définir l'effet de blocage comme l'effet qui affecte le comportement de la variance de la composante normale de la vitesse $\overline{w^2}$ pour l'amener d'une valeur de référence en

Cas	SL_A	PA_A	SL_B	PA_B	PA_C
$\mathcal{L}$	0.257	0.241	0.183	0.182	0.124

TAB. 5.5 – Valeur de $\mathcal{L}$ recueillies dans les différentes simulations (données brutes).

champ libre à une valeur nulle à la surface. Comme il paraît difficile de définir le comportement en champ libre de $\overline{w^2}$, on peut transposer cette définition au facteur d'isotropie. En considérant que le blocage n'affecte pas la composante tangentielle de vitesse, il a pour conséquence de modifier I en l'amenant à zéro. Pour définir, à partir du facteur d'isotropie I , l'épaisseur sur laquelle s'exerce cet effet, les remarques du paragraphe précédent suggèrent une problématique à deux échelles. Loin de la paroi, les plus grandes structures de l'écoulement sont les premières à ressentir l'influence de la surface de blocage. Un premier mécanisme affecte donc les structures sur une distance de l'ordre de la taille de ces structures. C'est cette distance qui définit l'épaisseur de la couche de blocage. Au voisinage de la surface, on a vu dans le paragraphe précédent que la pente du facteur d'isotropie évoluait avec le nombre de Reynolds quand z est normé par la taille des plus grandes structures. On peut en conclure que les échelles qui gouvernent le niveau d'anisotropie dans cette zone sont différentes. Dans une perspective de modélisation, ce sont ces échelles qu'il importe de caractériser, l'évolution du facteur d'isotropie dans la partie supérieure de la couche de blocage ne répondant vraisemblablement qu'à la nécessité de raccorder les niveaux fixés à proximité de la surface et en champ libre.

On se propose donc de reprendre la suggestion de Campagne et al. (2009) d'extraire une échelle de longueur caractéristique à partir du comportement à l'origine de I . D'après les développements asymptotiques présentés dans le paragraphe 1.4, le facteur d'isotropie a un comportement linéaire en z dans le voisinage de la surface de blocage, indépendamment de sa nature (*i.e.* surface libre ou paroi adhérente). On peut donc extraire une longueur $\mathcal{L}$ à partir de la pente à l'origine du facteur d'isotropie. Cette longueur $\mathcal{L}$ s'écrit comme suit :

$$\mathcal{L} = \left. \frac{\partial I}{\partial z} \right|_{z=0}^{-1} \quad (5.22)$$

Cette longueur $\mathcal{L}$ semble à même de représenter l'épaisseur sur laquelle s'opèrent les mécanismes qui fixent le montant d'anisotropie près de la surface de blocage. On reprend donc la conjecture de Campagne et al. (2009) qui consiste à poser $\mathcal{L}$ comme une fraction de la couche de blocage δ_B .

Les valeurs brutes de $\mathcal{L}$ sont répertoriées dans le tableau 5.5. Il est frappant une nouvelle fois de constater l'indépendance de cette longueur, et plus généralement du niveau d'anisotropie qui s'établit en proche surface, vis-à-vis de la condition limite appliquée. On rappelle que dans cette zone, les développements asymptotiques montrent qu'un ordre (en z) distingue les évolutions des composantes de la vitesse au passage d'une condition limite à l'autre (Cf. paragraphe 1.4) et que rien ne permet d'établir *a priori* une telle similitude dans les évolutions de I . Ceci conforte cependant l'idée selon laquelle l'effet de blocage est indépendant du type de condition limite appliqué, au motif que c'est un effet purement cinématique.

5.3 BILANS DES ÉQUATIONS DE TRANSPORT DES TENSIONS DE REYNOLDS

Afin de mettre en évidence les mécanismes qui structurent la couche de blocage, on présente les bilans des tensions de Reynolds obtenus dans cette configuration. On propose une visualisation croisée de ces bilans. Dans un premier temps, on compare les deux types de condition limite étudiés. Ces comparaisons sont présentées dans le paragraphe suivant, elles permettent d'isoler les mécanismes qui sont indépendants de la condition limite et résultent du seul effet de blocage. Dans un deuxième temps, on compare les cas qui partagent la même condition limite mais à des nombre de Reynolds différents. Cette observation permet d'évaluer la dépendance au nombre de Reynolds en vue d'une "mise à l'échelle" utile à la modélisation des différents termes qui participent aux équations bilans. La normalisation en épaisseur utilise l'échelle de longueur $\mathcal{L}$ qui semble être caractéristique des mécanismes de blocage. Pour normer les termes du bilan, on utilise des valeurs caractéristiques du taux de dissipation

5.3.1 Comparaison Paroi adhérente/ Surface Libre

Les simulations effectuées dans les cas SL_B et PA_B sont en tous points identiques à l'exception de la condition à la limite. L'écoulement obtenu présente donc des caractéristiques comparables dans la couche de forçage et dans la zone de diffusion pure. Dans la recherche d'un jeu d'échelles qui permet de bien comparer les deux situations, l'échelle de longueur $\mathcal{L}$ est appropriée puisqu'on a vu qu'elle était indépendante de la condition limite appliquée. Pour normer les termes du bilan, on ne peut pas utiliser de valeurs caractéristiques à la surface de blocage car la condition limite modifie radicalement le comportement de tous les termes. En particulier le terme de dissipation est très sensible aux effets de viscosité en paroi adhérente. Il semble donc judicieux de choisir une valeur caractéristique de la dissipation relativement loin de la surface de blocage et donc insensible aux conditions limites. On choisit donc arbitrairement la valeur de la dissipation notée ε_c à l'altitude $z = 3\mathcal{L}$ pour compléter le jeu d'échelles. On constate, sur les figures 5.16 et 5.17, que ces échelles sont effectivement appropriées et permettent d'obtenir des bilans très comparables loin de la surface de blocage pour les deux cas de condition limite.

Loin de la surface de blocage, dans la zone de diffusion turbulente pure, le bilan se caractérise par un équilibre entre diffusion turbulente et dissipation. Dans le bilan de $\overline{w^2}$, le terme de diffusion par fluctuation de pression est non nul et s'oppose à l'action de la diffusion par la fluctuation de vitesse. Les termes de corrélation pression-déformation agissent dans le sens d'un retour à l'isotropie, leurs valeurs restant faibles par rapport aux autres termes du bilan. Les caractéristiques de l'écoulement hors zone de surface sont donc très différentes des configurations évoquées de canal plan à surface libre, ou d'insertion d'une surface de blocage dans un écoulement turbulent homogène. Dans le premier cas, un terme de production par l'écoulement moyen y intervient. Dans le deuxième cas l'équilibre s'établit majoritairement entre la dissipation et le terme d'évolution temporelle (nul ici).

Dans le voisinage de la surface de blocage, les comportements des différents termes évoluent significativement d'une condition limite à l'autre. Pour alléger la discussion, on désigne par (SL) et (PA) les deux types de conditions limites. Les bilans présentent les caractéristiques suivantes :

1. Les termes de diffusion turbulente $\mathcal{D}_{11}''$ et $\mathcal{D}_{33}''$ ont un comportement très similaire avec (SL) ou (PA). Ce sont des termes sources (positifs) dans l'équation bilan, qui caractérisent la situation de diffusion turbulente étudiée. Néanmoins on observe que le terme $\mathcal{D}_{11}''$ est un terme source

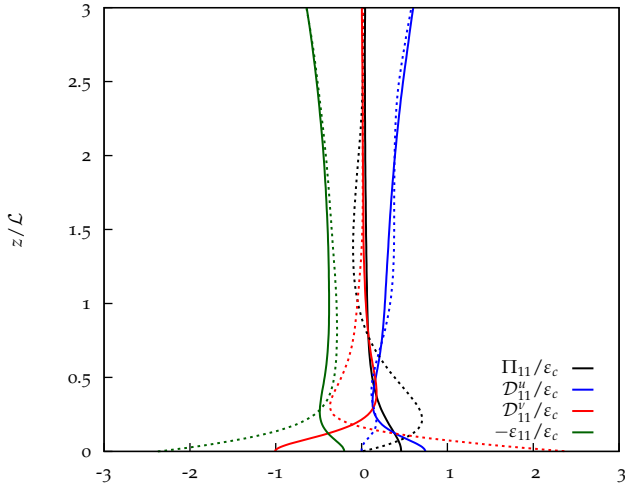


FIG. 5.16 – Bilan des tensions de Reynolds $\overline{u^2}$.
 Traits pleins - SL_B, pointillés - PA_B .
 $\epsilon_c = \epsilon(z = 3\mathcal{L})$.

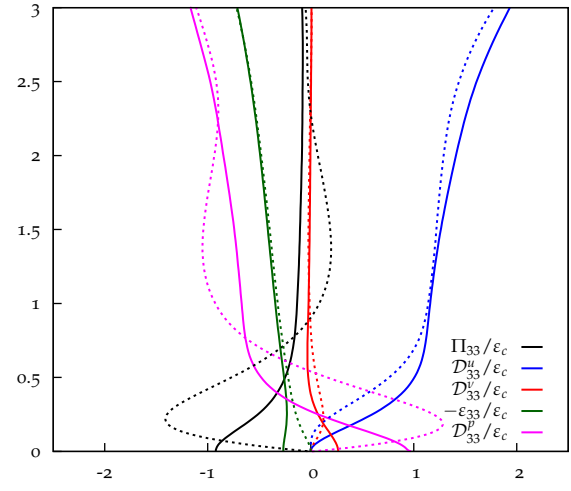


FIG. 5.17 – Bilan des tensions de Reynolds $\overline{w^2}$.
 Légende identique à la figure 5.16.

dans l'équation au voisinage de la surface de blocage (SL). Étant donné l'évolution de l'énergie cinétique dans cette zone (on rappelle que $\overline{u^2}$ atteint un maximum à la surface libre) le flux correspondant est orienté dans le sens du gradient de $\overline{u^2}$. Ce comportement, inhabituel pour la diffusion par la fluctuation de vitesse et déjà observé par Campagne (2006) dans la même configuration, est également observé par Shen et al. (1999) dans les simulations d'une turbulence cisailée à proximité d'une surface libre ainsi que celles d'un canal plan à surface libre de Handler et al. (1993). En revanche, ce comportement n'est mis en évidence dans aucune des simulations de turbulence en décroissance, que ce soit celles de Perot et Moin (1995) ou de Walker et al. (1996). Ce comportement semble caractéristique des situations où le transfert intercomposantes est significatif.

2. Les termes de corrélation pression-déformation Π_{11} et Π_{33} mettent en évidence un net transfert intercomposantes qu'il s'agisse de (SL) ou (PA). Ainsi on peut voir sur la figure 5.16 que Π_{11} est un terme source pour la contrainte de Reynolds déficitaire $\overline{u^2}$ tandis que Π_{33} est un terme puits pour la composante en excès $\overline{w^2}$. La comparaison de (SL) et (PA) met en évidence deux différences essentielles : d'une part le transfert intercomposantes est plus important pour PA (environ une fois et demi supérieur) que pour SL, et d'autre part le transfert maximal est localisé au niveau de la surface de blocage pour (SL) tandis qu'il est décalé légèrement au dessus de la paroi dans le cas (PA). Ce résultat est différents des résultats de Perot et Moin (1995). Dans leurs simulations de turbulence en décroissance, il étudient également les deux types de conditions limites (PA) et (SL) et mettent en évidence un transfert intercomposantes significatif uniquement dans le cas (PA). On démontre ici que le transfert intercomposantes n'est pas uniquement lié au type de conditions limites appliqué. En conséquence le niveau de ce transfert ne peut pas être imputé exclusivement aux effets de viscosité comme le suggèrent Perot et Moin
3. Les termes de dissipation ϵ_{11} et ϵ_{33} ont une évolution très différente d'une condition limite à l'autre. Dans le cas (SL), ϵ_{11} (figure 5.16) chute à la surface tandis que le terme ϵ_{33} augmente

très légèrement en valeur absolue (figure 5.17). Dans le cas (PA), toute la dissipation est portée par le terme ε_{11} . Les mécanismes sous-jacents sont très différents. Dans le cas (SL), c'est la bidimensionnalisation de la turbulence (orientation de la vorticité selon l'axe z) qui limite le transfert énergétique par cascade vers les petites échelles et par suite le niveau de dissipation. Dans le cas (PA), les effets de frottement visqueux produisent un maximum de dissipation au contact de la paroi.

4. Le terme de diffusion par la fluctuation de pression $\mathcal{D}_{33}^p$ qui intervient uniquement dans le bilan de la contrainte $\overline{w^2}$ a un comportement connu. Le flux associé à ce terme se fait dans le sens du gradient de $\overline{w^2}$, ce qui correspond à un comportement habituel pour ce terme et est repris dans certains modèles de fermeture au second ordre. Au voisinage de la surface de blocage, il compense exactement le terme de corrélation pression-déformation, conformément aux développements asymptotiques présentés dans le paragraphe 1.4. Notons que les contributions $\mathcal{D}_{33}^p$ et Π_{33} peuvent se regrouper dans le seul terme $\phi_{33} = \mathcal{D}_{33}^p + \Pi_{33}$ qui exprime les contributions liées à la fluctuations de pression. Si on reporte ce terme dans le bilan de la contrainte $\overline{w^2}$,    la place $\mathcal{D}_{33}^p$ et Π_{33} on obtient un nouveau bilan présenté en annexe (figure A.10). Si ce bilan ne permet pas de mettre en évidence le transfert intercomposantes, il permet de supprimer les différences observées sur la figure 5.17 entre (SL) et (PA) pour $\mathcal{L} < z < 2\mathcal{L}$. On attribue donc ces différences au caractère artificiel de la séparation du terme ϕ_{33} .

5.3.2 Mise à l'échelle des bilans des tensions de Reynolds

On étudie ici séparément les deux types de conditions limites. Ainsi les bilans des tensions de Reynolds associés à la condition limite de surface libre sont présentés sur les figures 5.18 et 5.20. Ceux associés à la condition limite de paroi adhérente sont présentés sur les figures 5.19 et 5.21. Dans une optique de modélisation, il faut adimensionner ces bilans par des quantités facilement mesurables. Le jeu d'échelles proposé ici reprend la longueur $\mathcal{L}$ pour normer l'évolution verticale, ce qui permet de tester la conjecture avancée au paragraphe 5.2.2. Pour normer les termes des bilans, la valeur de la dissipation à la surface de blocage ε_0 semble appropriée puisqu'elle caractérise le montant d'énergie dissipé au voisinage de la surface de blocage et par conséquent dimensionne les différents transferts qui s'effectuent dans cette région. On rappelle (voir figure 5.16) qu'à nombre de Reynolds équivalent dans la zone de diffusion, la valeur de ε_0 est très différente d'une condition limite à l'autre.

On constate, indépendamment de la condition limite utilisée, que les bilans adimensionnés par ce jeu d'échelles sont très similaires sur toute la gamme de nombre de Reynolds   tudi  e. Ce résultat est assez remarquable si on considère les ordres de grandeur mis en jeu. Ainsi la longueur $\mathcal{L}$ varie d'un facteur de 2 lorsqu'on passe du cas A au cas C. Dans le même temps, la valeur de ε_0 varie d'un facteur 1.5. Plus précisément, on observe que les courbes représentatives de la corrélation pression-déformation sont très nettement superposables dans la zone où le transfert intercomposantes est maximal : les maxima et leurs localisations verticales sont concordants, la variation du nombre de Reynolds n'est pas corrélé avec le léger étagement des courbes observable au dessus de ces maxima.

S'agissant des effets observables de l'augmentation du nombre de Reynolds, on peut les classer de la façon suivante :

1. Loin de la surface de blocage, on note une diminution de l'intensité des termes prépondérants du bilan quand ils sont rapportés à ε_0 . C'est une conséquence du choix de ε_0 pour normer

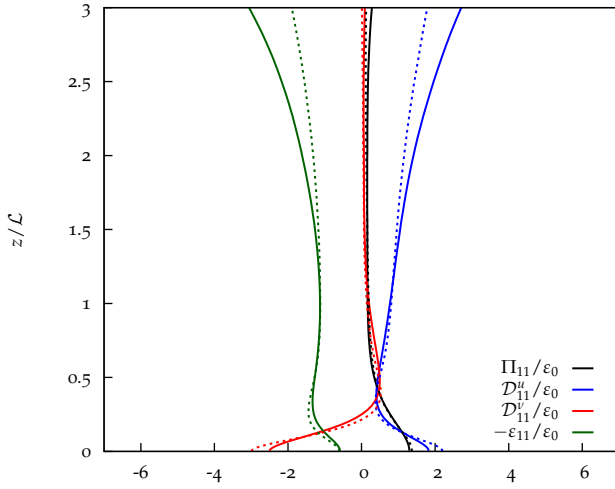


FIG. 5.18 – Bilan des tensions de Reynolds $\overline{u^2}$ en surface libre. Traits pleins - SL_A, pointillés - SL_B. $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$.

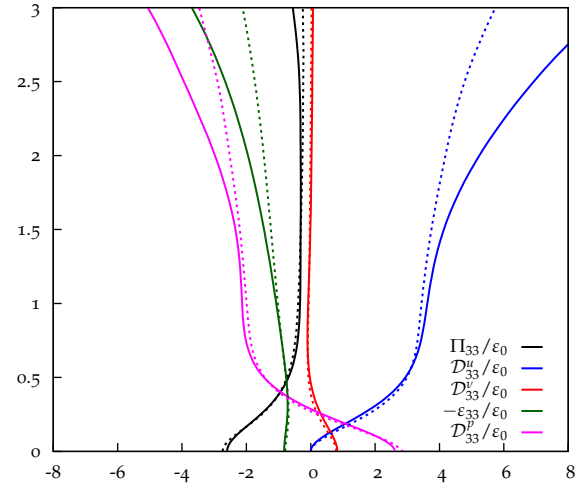


FIG. 5.19 – Bilan des tensions de Reynolds $\overline{w^2}$ en surface libre. Légende identique à la figure 5.18.

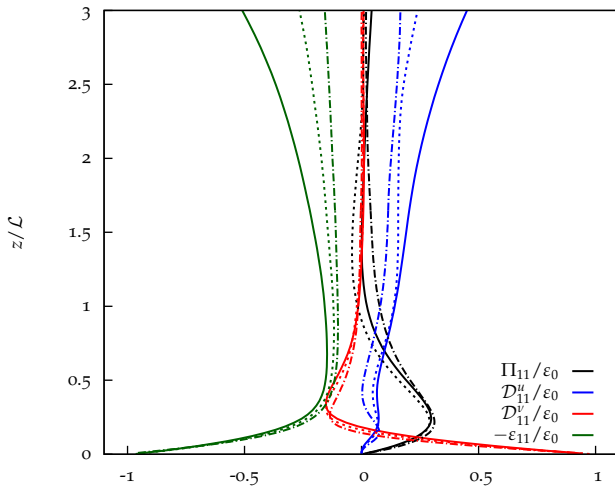


FIG. 5.20 – Bilan des tensions de Reynolds $\overline{u^2}$ en paroi adhérente. Traits pleins - PA_A, pointillés - PA_B, traits discontinus - PA_C. $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$.

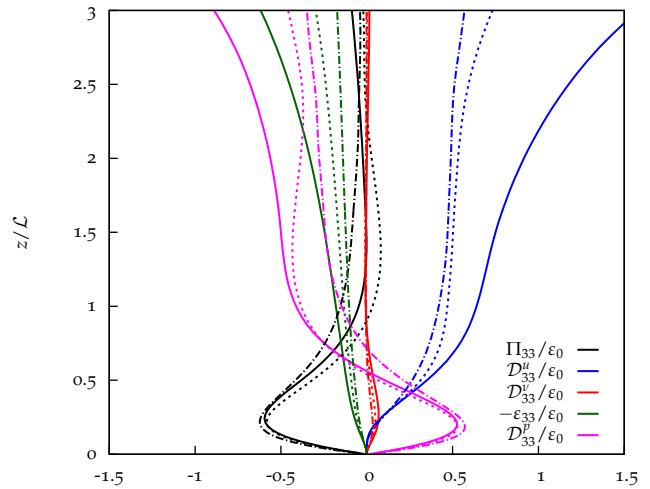


FIG. 5.21 – Bilan des tensions de Reynolds $\overline{w^2}$ en paroi adhérente. Légende identique à la figure 5.20.

l'intensité de ces termes. Ce montant de dissipation perd son caractère normatif loin de la surface de blocage.

2. Dans le cas de la surface libre on distingue une chute du terme ε_{11} (à $z \approx 0.25\mathcal{L}$ sur la figure 5.18) qui s'étend au terme de dissipation global ε (dans le même temps, ε_{33} atteint un pallier). Cette chute de la dissipation provient de mécanismes distincts de ceux qui affectent le transfert intercomposantes. On l'attribue à l'orientation de la vorticité dans cette zone, qui est d'axe normal à la surface de blocage et affecte considérablement les mécanismes tridimensionnels de la

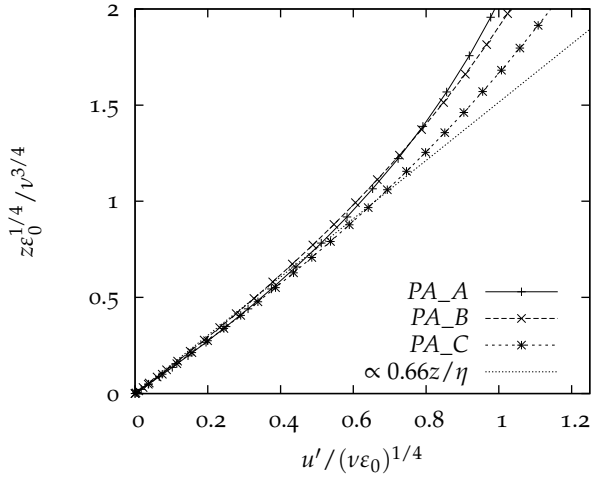


FIG. 5.22 – Évolution de u' en norme de Kolmogorov en zone proche paroi

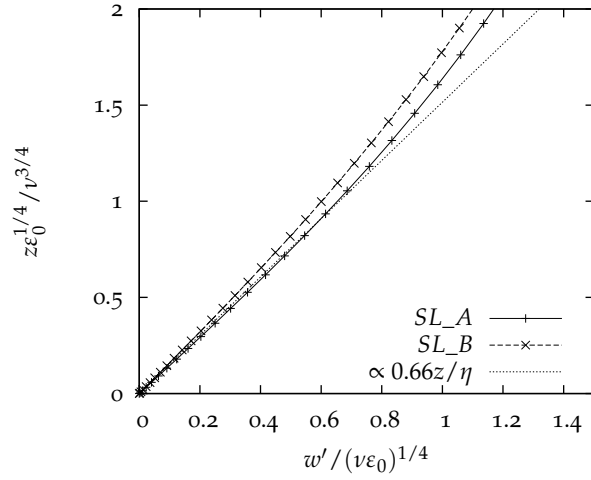


FIG. 5.23 – Évolution de w' en norme de Kolmogorov en zone proche surface libre

dissipation. L'épaisseur sur laquelle s'opère la chute de la dissipation de cette couche permet de définir la couche de glissement (on reprend ici la terminologie adoptée par Campagne et al. 2009), caractérisée par un montant de dissipation faible. On remarque que l'épaisseur de cette couche diminue avec le nombre de Reynolds, quand z est rapporté à $\mathcal{L}$. Une mise à l'échelle de la couche de glissement est proposée dans le paragraphe 5.3.4.

3. Dans le cas de la paroi adhérente, on peut définir une couche visqueuse caractérisée par l'augmentation rapide des termes de dissipation et de diffusion moléculaire au voisinage de la paroi. Elle s'étend de la paroi à l'altitude $z \approx 0.25\mathcal{L}$ (figure 5.20). Cette augmentation rapide est attribuée à l'action de la viscosité dans cette région. On remarque une évolution monotone de l'épaisseur de cette couche avec l'augmentation du nombre de Reynolds qui met en évidence que cette couche ne constitue pas une fraction fixe de la couche de blocage.

Les résultats obtenus mettent donc en évidence la validité de l'échelle de longueur $\mathcal{L}$ pour caractériser l'épaisseur sur laquelle s'opère le transfert intercomposantes. Il est difficile ici d'affirmer ou d'infirmer que cette épaisseur est réellement proportionnelle à la couche de blocage entière définie par l'épaisseur entière d'influence de la surface de blocage sur l'écoulement. Néanmoins elle est sans aucun doute à prendre en compte en vue de la modélisation des termes de corrélation pression-déformation dans un modèle de fermeture au second ordre. En outre, l'adimensionnalisation choisie nous permet de définir l'altitude où le transfert intercomposantes est maximal. Cette altitude de référence z_{ref} sera utilisée dans le chapitre suivant afin de caractériser les mécanismes qui participent au transfert intercomposantes. Ainsi z_{ref} prendra la valeur de :

- $z_{ref} = 0$ pour l'étude des cas où la condition limite utilisée est de type surface libre ;
- $z_{ref} = 0.21\mathcal{L}$ pour l'étude des cas où la condition limite est de type paroi adhérente.

5.3.3 Normalisation en échelle de Kolmogorov

Dans une perspective de mise à l'échelle des différentes couches de l'écoulement, on a étudié la possibilité d'utiliser le jeu d'échelle de Kolmogorov (ν, ε_0). Ce type de normalisation se trouve très adapté

pour normer la valeur *RMS* de la fluctuation de vitesse verticale lorsque la condition limite est de type surface libre. On présente sur la figure 5.23, le résultat obtenu pour les deux simulations effectuées dans ce cas de condition limite. Les profils obtenus se superposent sur une région dont l'épaisseur est de l'ordre de η , et où w' retrouve son comportement (linéaire) asymptotique. On retrouve ainsi le résultat observé par Campagne et al. (2009). Brumley et Jirka (1987) baptisent cette région "couche de Kolmogorov" en faisant remarquer que les variations de w' dans cette fine couche résultent uniquement de la déformation du fluide. En effet, la vorticité est alors orientée perpendiculairement à la surface, et les mouvements de rotation s'effectuent dans le plan de la surface sans affecter la fluctuation de vitesse normale w' , ce qui explique le comportement linéaire de cette dernière. La normalisation en échelle de Kolmogorov de cette couche est utilisée par Campagne et al. (2009) pour établir les lois de mise à l'échelle de la longueur caractéristique $\mathcal{L}$ présentée dans le paragraphe suivant.

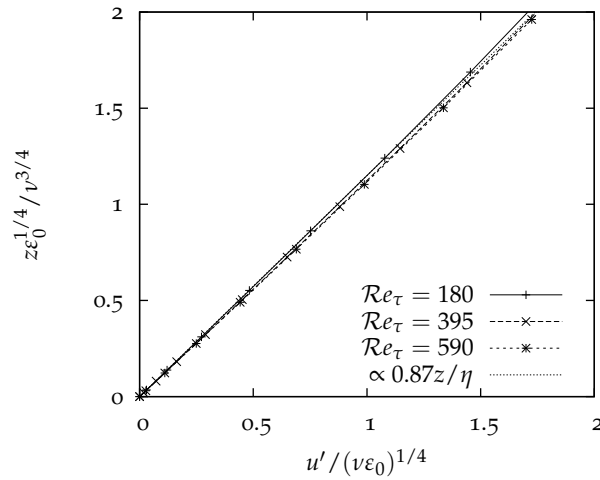


FIG. 5.24 – Évolution de u' en norme de Kolmogorov en zone proche paroi dans un écoulement turbulent en canal plan (données Moser et al. (1999)).

Dans le cas de la paroi adhérente, il est intéressant de noter que cette fois, on peut normer la fluctuation de vitesse u' en référence de Kolmogorov, comme le démontre la figure 5.22. La valeur de la pente dans cette représentation est identique à celle trouvée dans le cas surface libre, ce qui semble être accidentel. Il semble plus difficile d'utiliser ce résultat à des fins de mise à l'échelle, puisqu'il met en jeu des grandeurs de paroi, et qu'il n'existe pas de nombre de Reynolds évident à définir près de la paroi. Afin de juger de l'extension de ce résultat à d'autres configurations, on a étudié les données d'écoulement en canal turbulent de Moser et al. (1999) disponibles pour trois nombres de Reynolds. On peut, également dans ce cas, mettre en évidence une normalisation avec les échelles de Kolmogorov de la fluctuation longitudinale u' , qui est présentée sur la figure 5.24, mais qui ne s'applique pas à la fluctuation transversale v' . La pente vaut 0.87 dans ce cas, ce qui semble confirmer le caractère accidentel des valeurs identiques trouvées plus haut.

Dans tous les cas, ces résultats sont liés par le développement asymptotique des grandeurs étudiées, de l'ordre 1 en z . Ces grandeurs étant des fluctuations de vitesse, la pente en données brutes a la

dimension d'un temps, ce qui permet d'écrire les développements asymptotiques sous la forme :

$$u' = \frac{z}{\tau'_{PA}} + O(z^2) \quad \text{Paroi adhérente} \quad (5.23)$$

$$w' = \frac{z}{\tau'_{SL}} + O(z^2) \quad \text{Surface libre} \quad (5.24)$$

Sans pour autant expliquer les résultats obtenus, on met donc en évidence que dans les configurations exposées, le temps caractéristique τ' est constant en normalisation de Kolmogorov.

5.3.4 Mise à l'échelle dans le cas d'une condition limite de surface libre

On se propose ici de vérifier les lois de mise à l'échelle ¹ établies par Campagne et al. (2009) pour la couche de blocage et la couche de glissement, cette dernière étant caractéristique des aspects dynamiques de la condition limite de surface libre. On rappelle que dans le cas d'une condition limite de surface libre, l'énergie cinétique turbulente atteint un maximum à la surface de blocage, qui permet de définir un nombre de Reynolds turbulent $\mathcal{Re}_{SL_0}$ (Cf. équation (5.21)) caractéristique de l'agitation turbulente dans cette région. C'est par rapport à ce nombre de Reynolds, facilement mesurable dans diverses configurations que sont proposées les lois de mises à l'échelle.

Échelle de longueur $\mathcal{L}$

Campagne et al. (2009) montrent que sous l'hypothèse d'existence d'une couche de Kolmogorov, on peut écrire :

$$\frac{\mathcal{L}}{l^*} = \gamma_1 (\mathcal{Re}_{SL_0})^{-1/2}, \quad (5.25)$$

où $l^* = K_0^{3/2}/\varepsilon_0$ désigne l'échelle de longueur extraite de la normalisation par le jeu d'échelles (K_0, ε_0) . L'équation (5.25) permet une mise à l'échelle de toute la couche de blocage si on admet que $\mathcal{L}$ représente une portion fixe de la couche de blocage δ_B . Sans faire cette hypothèse, on pourra toutefois considérer qu'elle s'applique directement aux termes du bilan des tensions de Reynolds au voisinage de la surface de blocage. On a en effet montré que l'échelle de longueur $\mathcal{L}$ permettrait d'adimensionner l'épaisseur sur laquelle s'opère l'essentiel du transfert intercomposantes dans cette région. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 5.3.4 et reportés sur la figure 5.25. On observe que cette loi de mise à l'échelle se vérifie très bien pour les cas observés ce qui, on le rappelle, est une conséquence directe de l'existence d'une couche de Kolmogorov où la valeur de γ_1 ne dépend pas de celle du nombre de Reynolds. La constante γ_1 est obtenue par régression logarithmique. La valeur trouvée ici, $\gamma_1 = 1.564$ est légèrement inférieure à celle trouvée par Campagne et al. (2009), qui trouvent $\gamma_1 = 1.613$.

Couche de glissement δ_g

Le même type de mise à l'échelle est proposée pour l'épaisseur de la couche de glissement. En reprenant les lois de mise à l'échelle proposées par Hunt et Graham (1978), Campagne et al. (2009) montrent que la dépendance au nombre de Reynolds de l'épaisseur de la couche de glissement δ_g s'écrit :

¹On utilise à cette occasion les résultats d'un calcul non présenté durant cet exposé, que l'on référence *SL_D*. Ce résultat est obtenu par l'intermédiaire du modèle à viscosité spectrale présenté dans le paragraphe 4.4, et utilisé dans ce cas sur une grande majorité du domaine (excepté dans la zone $z/\mathcal{L} < 1$), et n'est donc pas considéré comme une simulation directe. Néanmoins il permet de confirmer les tendances observées par les cas de simulation directe.

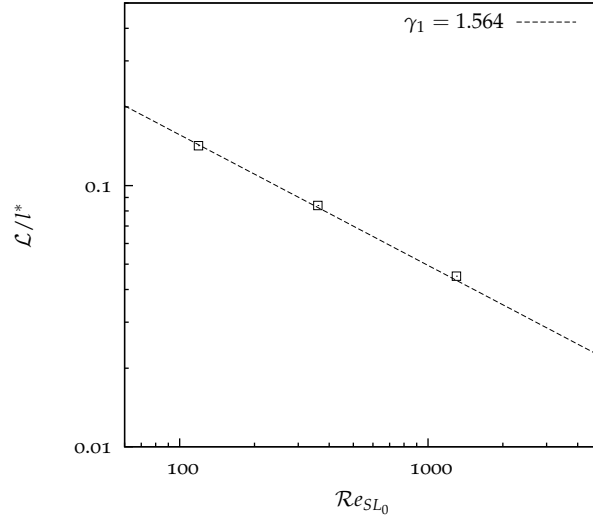


FIG. 5.25 – Résultats obtenus pour la mesure de la couche de blocage $\mathcal{L}/l^*$ et comparaison avec la loi d'échelle 5.25.

$$\frac{\delta_g}{l^*} = \gamma_2 (\mathcal{R}e_{SL_0})^{-2/3} \quad (5.26)$$

On se propose de confronter les résultats obtenus dans cette étude à la loi définie par l'équation (5.26). Les simulations effectuées dans cette étude bénéficient en effet :

- d'une résolution plus élevée au voisinage de la surface de blocage, permettant de considérer plusieurs sortes de mesures de l'épaisseur ;
- d'une gamme de nombre de Reynolds plus large.

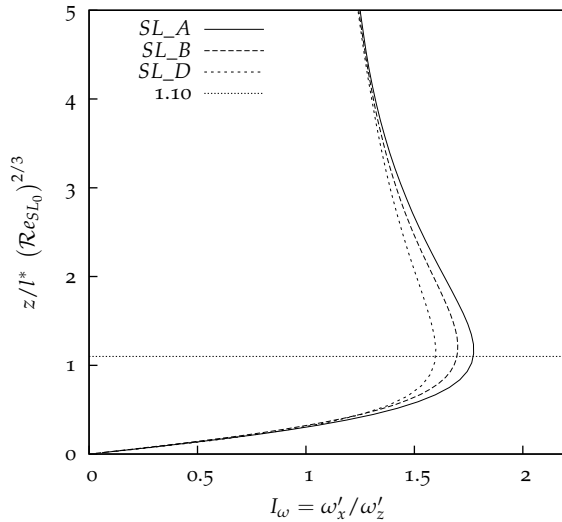


FIG. 5.26 – Mise en évidence de la couche de glissement par étude du profil du facteur d'isotropie de la vorticité I_ω

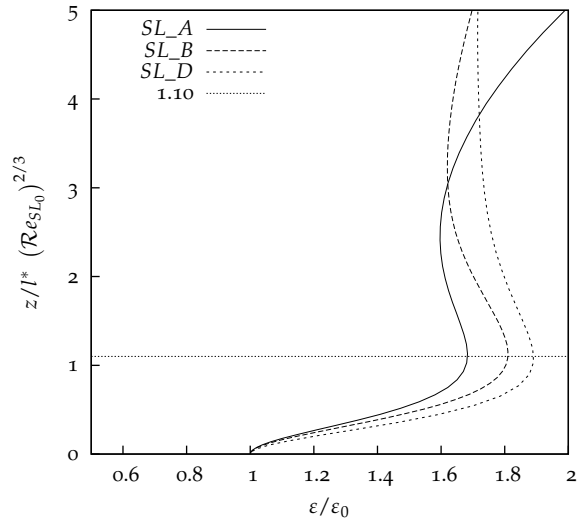


FIG. 5.27 – Mise en évidence de la couche de glissement par étude du profil de dissipation $\varepsilon = 1/2\varepsilon_{ii}$.

Cas	SL_A	SL_B	SL_D
Re_{SL_0}	93	360	1301
δ_{g1}/l^*	0.0480	0.0241	0.00938
δ_{g2}/l^*	0.0480	0.0258	0.0102
δ_{g3}/l^*	0.0115	0.0059	0.00245
$\mathcal{L}/l^*$	0.142	0.0839	0.0450

TAB. 5.6 – Mesure de la couche de blocage $\mathcal{L}$ et de l'épaisseur de la couche de glissement δ_g par trois types de méthodes.

Étant donné l'origine physique de la couche de glissement qui tient à la bidimensionnalisation de la turbulence imposée par la contrainte d'imperméabilité et se traduit par une réorientation de la vorticité perpendiculairement à la surface, on peut imaginer plusieurs manières de mesurer l'épaisseur de cette couche. La première possibilité repose sur l'étude du facteur d'isotropie de la vorticité $I_\omega = \omega'_x/\omega'_z$. L'influence de la condition limite se manifeste par une diminution de la variance de la composante tangentielle de la vorticité ω'_x , et induit un maximum sur le facteur d'isotropie I_ω . L'altitude de ce maximum se mesure facilement et définit la méthode 1 de mesure de l'épaisseur δ_g . Cette mesure est celle proposée par Campagne et al. (2009). De la même façon que l'on peut calculer $\mathcal{L}$ à partir de I , il est possible d'extraire une échelle de longueur à partir de la pente à l'origine (les développements asymptotiques montrent que I_ω a un comportement linéaire en z   la surface libre). La mesure de cette longueur, proportionnelle à l'épaisseur de la couche de glissement, définit la méthode 2. Enfin on peut mesurer directement l'épaisseur de cette couche en mesurant les effets induits sur le terme de dissipation dans l'équation bilan des tensions de Reynolds. Si on observe l'évolution verticale de ce terme, on note qu'il présente un maximum repérable sans ambiguïté et très certainement représentatif de l'épaisseur de la couche (méthode 3). Le profil vertical de I_ω est présenté sur la figure 5.26, ainsi que celui de dissipation sur la figure 5.27. Sur ces deux figures, on choisit de normer l'altitude de façon cohérente avec la loi d'échelle (5.26). L'utilisation de cette norme permet de comparer les trois méthodes exposées. Avec cette représentation, on repère une position identique des maxima de la dissipation et de I_ω . De plus, on montre que les pentes à l'origine du facteur I_ω sont identiques. Les mesures de δ_g , issus de ces trois méthodes sont donc vraisemblablement équivalentes. Les différentes mesures de δ_g sont recueillies dans le tableau 5.3.4 et reportées sur la figure 5.28 où sont reprises les données collectées par Campagne et al. (2009). Quelque soit la méthode utilisée, les résultats obtenus sont donc très concordants avec les données de Campagne et al. (2009) et renforcent la validité de la loi d'échelle (5.26).

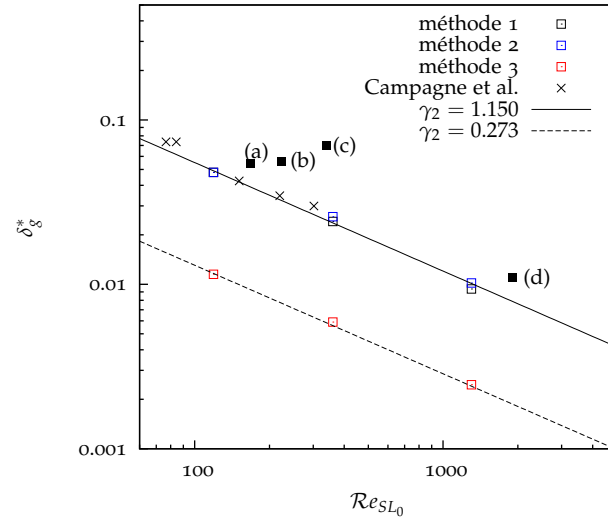


FIG. 5.28 – Comparaison des données sur la mesure de la couche de glissement δ_g^*
(a-Handler et al. b-Shen et al. c-Walker et al. d-Calmet et Magnaudet)

SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Les résultats présentés ici permettent de dégager la structure de l'écoulement qui peut s'établir sous l'influence des deux types de condition limite utilisés. Le schéma porté sur la figure 5.29 résume les différentes couches mises en évidence par l'observation des équations bilans des tensions de Reynolds. Loin de la surface de blocage, la turbulence est en situation d'auto-diffusion. On relève un faible niveau d'anisotropie ($I = w'/u' \approx 1.15$) caractéristique de la turbulence en diffusion pure. L'influence de la condition d'imperméabilité ($w = 0$) permet de définir une couche de blocage δ_B qui se caractérise par une réduction simultanée de la variance de la composante normale de la vitesse ainsi que du facteur d'isotropie. Il est difficile d'évaluer l'épaisseur de cette couche à partir de cette définition. On peut, par contre, définir sans ambiguïté une longueur $\mathcal{L}$ qui repose sur la valeur de la pente à la surface de blocage et qui est représentative des effets d'anisotropie à la surface de blocage. Rien ne permet de préciser si $\mathcal{L}$ exprime une portion fixe de la couche de blocage telle qu'on la définit, dans la mesure où il semble difficile d'extraire une mesure précise de δ_B . En revanche on démontre que cette longueur $\mathcal{L}$ possède toutes les qualités requises pour une utilisation dans un contexte de modélisation :

1. Elle est *indépendante* de la condition limite appliquée. Elle est donc caractéristique d'effets qu'il faut attribuer à la seule condition d'imperméabilité ($w = 0$ à la surface de blocage) qui est une condition limite *cinématique*.
2. Accompagnée de la valeur de la dissipation à la surface de blocage ε_0 , elle permet d'adimensionner de façon remarquable le terme de transfert intercomposantes dans les bilans des tensions de Reynolds dans le voisinage de la surface de blocage (corrélacion pression-déformation).

A proximité de la surface, on identifie la présence d'une sous-couche de glissement, respectivement visqueuse, dans le cas d'une surface libre, respectivement adhérente. Dans le premier cas, cette couche traduit la réorientation de la vorticité (d'axe normal à la surface) et entraîne une chute de la dissipation dans cette zone, qui se traduit par un maximum de l'énergie cinétique turbulente à la surface. Les

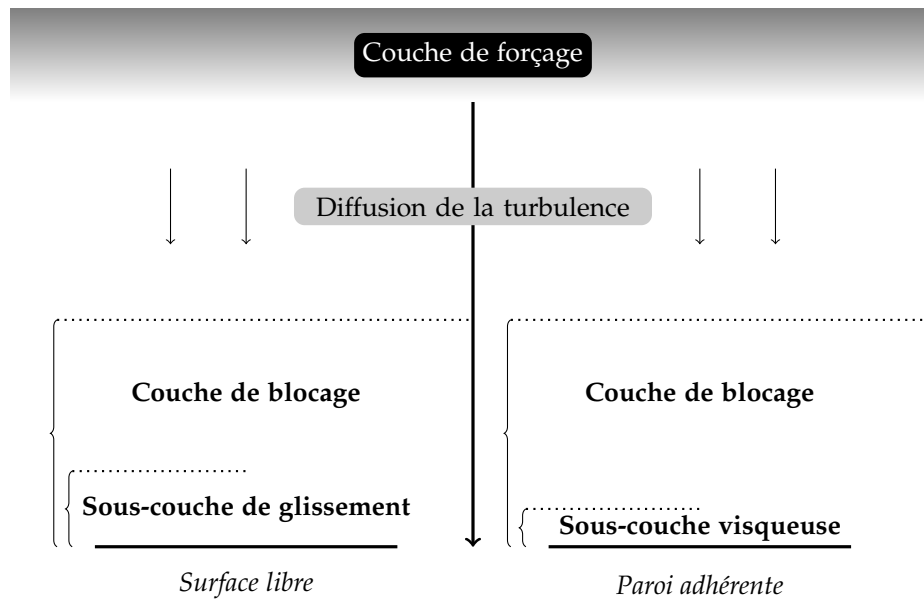


FIG. 5.29 – Couches caractéristiques de la turbulence diffusant vers une surface de blocage

résultats sont en accord avec la loi de mise à l'échelle de l'épaisseur de cette couche, proposée par Campagne et al. (2009). Dans le deuxième cas, la sous-couche visqueuse traduit les effets du frottement visqueux qui s'exerce à la paroi et résulte en une augmentation rapide de la dissipation dans cette zone.

CORRÉLATION

PRESSIION-DÉFORMATION EN PRÉSENCE D'UNE SURFACE DE BLOCAGE

6

SOMMAIRE

6.1	MÉCANISMES ÉLÉMENTAIRES DE ZONE DE BLOCAGE	114
6.1.1	Historique	114
6.1.2	Termes sources de l'équation de Poisson pour la pression.	115
6.1.3	Analyse des fonctions d'autocorrélation f et g	115
6.2	LIEN ENTRE ET PRESSIION ET DÉFORMATION	116
6.2.1	Remarques préalables	116
6.2.2	Observation de champs instantanés.	119
6.2.3	Prépondérance des évènements de type splat	122
6.2.4	Facteur de dissymétrie en zone de diffusion	125
6.3	QUANTIFICATION DES EFFETS LIÉS AUX SPLATS ET ANTI-SPLATS	127
6.3.1	Statistiques conditionnelles Π_{33}^- et Π_{33}^+	127
6.3.2	Analyse en quadrants : aspects théoriques et fonctions de corrélation	128
6.3.3	Analyse en quadrants : application aux cas étudiés	130
6.4	ANALYSE DÉTAILLÉE DE LA STRUCTURE DES IMPACTS	134
6.4.1	Anneau tourbillonnaire	135
6.4.2	Conséquence sur le terme de corrélation pression-déformation	136
	SYNTHÈSE	138

Les bilans des équations de transports des contraintes de Reynolds étudiées dans le chapitre précédent mettent en évidence le transfert intercomposantes dans la zone de blocage. Ce transfert y est matérialisé par des termes de corrélation pression-déformation de signes opposés dans les équations de $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$. Ce phénomène qui, compte tenu du signe des termes considérés, renforce l'anisotropie au voisinage d'une surface de blocage semble être indépendant des effets de viscosité, qui interviennent au passage de la condition limite de surface libre à celle de paroi adhérente. On se propose ici de définir et de caractériser les événements élémentaires qui déterminent le contenu du terme de corrélation pression-déformation.

6.1 MÉCANISMES ÉLÉMENTAIRES DE ZONE DE BLOCAGE

6.1.1 Historique

Dans le paragraphe 1.5.2, on a exposé les différents mécanismes élémentaires qui participent potentiellement au transfert intercomposantes. Dans les études effectuées précédemment sur le sujet, on retient généralement les événements de collision comme les acteurs principaux de ce transfert.

Dans le cas d'un écoulement turbulent, anisotrope, en champ libre, les collisions entre paquets fluides en mouvement dans la direction de la composante en excès redistribuent l'énergie vers les autres directions. En comparaison, les collisions intervenant dans les autres directions de l'espace sont en moyenne moins énergétiques puisque associées à des fluctuations de moindre importance. Ainsi, les collisions favorisent globalement le retour à l'isotropie. Ces collisions, qui occasionnent une conversion de pression dynamique en pression statique au point d'arrêt, affectent directement la valeur des différentes composantes de la corrélation pression-déformation. Ce comportement, mis en évidence par Hinze (1959, chap. 4, p. 253), justifie la modélisation des termes de corrélation pression-déformation comme un mécanisme de retour à l'isotropie.

Perot et Moin (1995) analysent l'effet de blocage en insérant brusquement une surface de blocage, adhérente ou non dans un écoulement turbulent homogène en décroissance. D'après ces auteurs, le transfert intercomposantes qui renforce l'anisotropie dans le voisinage de la surface de blocage est dû à des événements de type collision. Ils observent que ceux-ci concernent majoritairement des paquets fluides se déplaçant dans la direction normale à la surface, donc la direction de la composante de vitesse déficitaire. Par rapport à la simulation de turbulence en champ libre, le mécanisme s'inverse et la redistribution qui s'opère tend à renforcer l'anisotropie du champ de vitesse.

Même si la définition initiale de ces événements (attribuée à Bradshaw et Koh (1981)) ne détermine pas de sens de parcours particulier sur les lignes de courant, Perot et Moin (1995) associent les événements de *splat* aux impacts à la surface de blocage. Ces événements sont définis de la manière suivante : des paquets de fluide viennent s'écraser à la surface, créant une surpression et un écoulement radial autour d'un point d'arrêt. L'énergie est transférée de la composante normale vers la composante tangentielle de la vitesse. Le signe positif de la fluctuation de pression et le mouvement vers la surface, associé à une déformation négative, permettent de justifier le signe négatif de la corrélation pression-déformation. Perot et Moin introduisent le mécanisme d'*anti-splat* pour compléter la description. Le mécanisme d'*anti-splat* correspond également à des événements de type collision puisqu'on peut les considérer comme le résultat de la rencontre de plusieurs paquets fluides en mouvement le long de la surface. Dans ce cas, la conjonction d'une surpression à la collision et d'une éjection depuis la surface confère à la corrélation pression-déformation un signe opposé à celui qu'elle produit dans un *splat*. Or la conservation de la masse impose une égalité stricte entre les débits ascendants et descendants. Ainsi, tout impact est nécessairement accompagné d'une éjection dans le plan considéré. Le transfert intercomposantes semble alors réglé par le bilan qui s'opère entre les *splat* et les *anti-splat*. Dans leur analyse, Perot et Moin arrivent à deux conclusions :

1. Dans le cas de la surface libre, les deux mécanismes s'équilibrent approximativement. En conséquence, le transfert intercomposantes observé est faible.
2. Dans le cas de la paroi adhérente, les mouvements dans le plan de la paroi sont ralentis par les effets visqueux. Il s'ensuit une faible intensité dans les *anti-splats*. Le déséquilibre et, par suite le transfert intercomposantes est significatif.

À notre connaissance, hormis les travaux antérieurs de l'équipe lors de la thèse de Campagne et al., ces deux conclusions n'ont pas été testées plus avant. Les bilans obtenus pour les cas de surface libre amènent cependant à prendre de la distance avec les conclusions de Perot et Moin : le transfert intercomposantes est franc, au regard des résultats obtenus par Campagne (2006). C'est également la conclusion de Calmet et Magnaudet (2003) (et d'autres auteurs) en écoulement turbulent de canal plan à surface libre.

Nous proposons ici une nouvelle analyse, qui redéfinit les mécanismes opérant au voisinage de la paroi, et quantifie leur action au voisinage de la surface avec et sans adhérence. On reprend la terminologie de Perot et Moin (1995) de *splat* et *anti-splat* pour désigner les impacts et les éjections. Néanmoins, comme il s'agit de quantifier les contributions au contenu de la corrélation pression déformation, *on ne s'intéressera qu'aux évènements qui modifient significativement la valeur du champ local de pression. Ainsi une remontée de fluide qui ne s'accompagne pas d'une surpression significative ne sera pas qualifiée d'anti-splat.*

6.1.2 Termes sources de l'équation de Poisson pour la pression.

En se référant à l'équation de Poisson avec décomposition du terme source (équation (1.30)), on trace sur la figure 6.1 l'évolution verticale moyenne des deux termes sources. Il est très difficile de mesurer l'influence directe de ces valeurs sur le champ de pression. La contribution d'un terme source au champ de pression, ou sa capacité à produire seul une fluctuation de pression, n'est repérable que si l'autre terme source est négligeable. Si on pratique ce raisonnement sur les valeurs moyennes des termes sources de l'équation (1.30), les conclusions se limitent au cas où la valeur d'un des termes est prépondérante devant l'autre.

Ainsi, dans le cas de la surface libre, l'enstrophie $\frac{1}{2}\overline{\omega^2}$ diminue considérablement dans la couche de glissement, tandis que le second invariant du tenseur des taux de déformation, $\overline{s^2}$, augmente jusqu'à la surface. On peut en déduire que les tourbillons (attachés), présents au voisinage immédiat de la surface, génèrent des minima de pression qui, en moyenne, sont de faible intensité par rapport aux maxima de pression générés par les événements de déformation pure (collisions). Dans ce cas, il semble donc que le contenu de la corrélation pression-déformation est nourri par la contribution des splats/anti-splats, porteurs de déformation, plutôt que par celle des tourbillons associés à la rotation.

Il n'est pas possible de conclure de manière similaire dans le cas où la paroi est adhérente. Dans ce cas en effet, la majorité du transfert intercomposantes intervient à l'altitude $z_{ref} \approx 0.2\mathcal{L}$, région où les deux termes sources de l'équation de Poisson sont du même ordre de grandeur.

6.1.3 Analyse des fonctions d'autocorrélation f et g .

L'évolution des fonctions f et g , introduites dans le paragraphe 5.1.5, permettent également d'identifier les mécanismes qui prédominent dans la zone de blocage. L'allure de ces fonctions est présentée sur les figures 6.2 et 6.3. On a choisi d'y représenter les courbes dans la zone de forçage ($z/\mathcal{L} \gg 1$) où la turbulence est quasiment isotrope, ainsi qu'à l'altitude z_{ref} où le transfert intercomposantes est maximal. L'allure de ces deux courbes dans la zone quasi-isotrope est bien comparable à celle observée en turbulence homogène. Par contre, ce comportement s'inverse à proximité de la surface. Ainsi, la fonction f prend des valeurs négatives tandis que la fonction g reste strictement positive, indépendamment de la condition limite étudiée. Nous en proposons une analyse qui s'appuie sur le

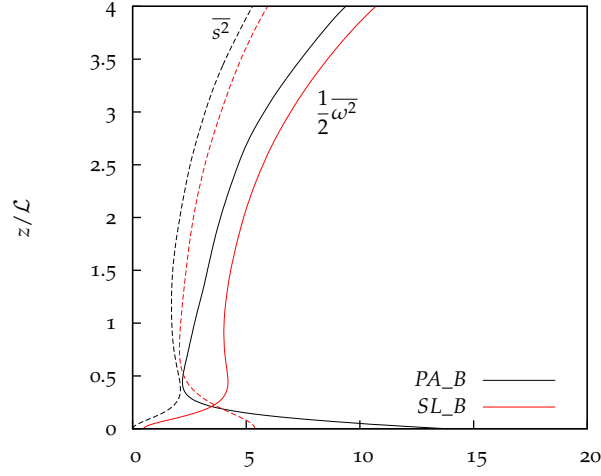


FIG. 6.1 – Évolution verticale moyenne des termes sources de l'équation de Poisson pour la pression. Les valeurs sont adimensionnées par la valeur de l'énergie cinétique turbulente à la frontière de la zone de forçage K_F .

schéma de la figure 6.4. En turbulence homogène, on peut expliquer le comportement des fonctions d'autocorrélation en assimilant les structures énergétiques de la turbulence à des tourbillons (figure 6.4(b)). Les résultats donnés par ce modèle simple sont cohérents avec l'étude du signe des fonctions f et g . Si on suppose que les structures énergétiques observées à l'altitude z_{ref} sont essentiellement des collisions, on peut justifier la forme des fonctions f et g . La figure 6.4(a) permet de pronostiquer le signe des fonctions f et g . Sur ce schéma, on peut estimer le signe de f ou g dans un impact lorsque les fonctions d'autocorrélation sont calculées entre les points P_1 et P_2 ou entre P_1 et P_3 . Le produit scalaire des vecteurs associés à la composante longitudinale de la vitesse dans la direction observée (en vert) est négatif, ce qui induit un signe négatif pour f . De la même manière, le produit scalaire des vecteurs associés aux composantes transverses (en bleu) explique le signe positif de la fonction g à la distance P_1P_2 où P_1P_3 . Notons que le raisonnement s'étend également au cas d'une éjection, et donc englobe plus généralement les événements de collision. Les événements de rotation se traduisant par un comportement opposé des fonctions d'autocorrélation, il est raisonnable d'en déduire que l'écoulement, à l'altitude caractéristique z_{ref} , est essentiellement constitué d'événements élémentaires de collision quelle que soit la condition limite. La grille d'analyse, qui consiste à baser l'interprétation physique du transfert intercomposantes en fonction d'une phénoménologie de type splat/anti-splat semble donc bien adaptée.

6.2 LIEN ENTRE ET PRESSION ET DÉFORMATION

6.2.1 Remarques préalables

Pour analyser la corrélation entre pression et taux de déformation, on va procéder à diverses observations des champs p et $\frac{\partial w}{\partial z}$ afin d'extraire le contenu de cette corrélation dans le bilan de la composante normale. Nous proposons d'identifier des événements types à travers le signe des deux variables qui

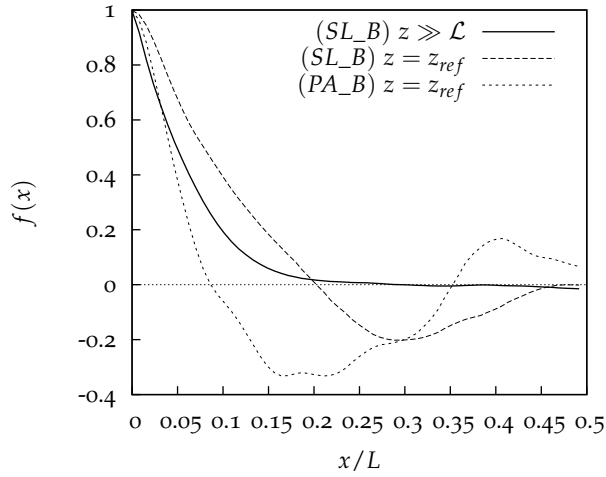


FIG. 6.2 – Fonction d'autocorrélation longitudinale de la vitesse tangentielle.

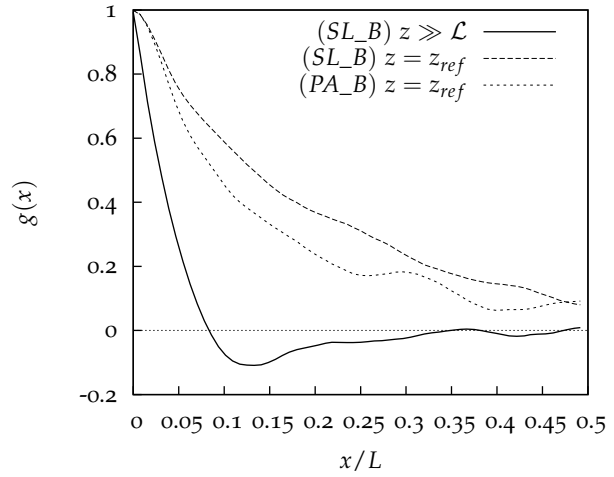


FIG. 6.3 – Fonction d'autocorrélation transversale de la vitesse tangentielle.

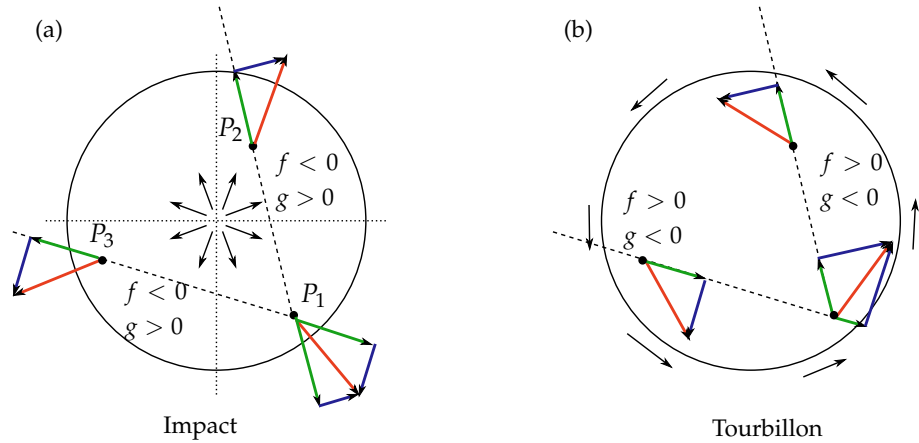


FIG. 6.4 – Signe des fonctions d'autocorrélation dans un évènement de type collision ou tourbillon. Les flèches rouges représentent le vecteur vitesse dans le plan observé. Les flèches vertes et bleues représentent respectivement les projections longitudinales et transversales par rapport à la direction de calcul de la fonction d'autocorrélation.

construisent la corrélation. Il est important de remarquer que l'on ne peut pas interpréter de la même manière les fluctuations p et $\frac{\partial w}{\partial z}$. Le gradient de vitesse est associé sans ambiguïté à des événements de compression ou d'étirement. Par contre, le signe de la fluctuation de pression est plus difficile à interpréter. Identifier une surpression comme un événement à fluctuation positive de pression, n'a du sens que localement en temps et en espace. Ainsi, lors de l'étude d'un champ instantané, un événement créant une surpression locale peut-être associé à une fluctuation négative de pression, du fait d'une référence locale de pression également négative. D'un point de vue statistique cette situation (surpression et $p < 0$) sera rencontrée plus rarement que la plus probable (supression et $p > 0$) si bien qu'en moyenne ce même événement sera associé à une fluctuation positive de pression. Pour pallier à ce problème lié à la référence de pression qui peut perturber l'interprétation des champs instantanés, on a donc intérêt à améliorer la localité en temps et en espace de la référence de pression, sans toutefois modifier la contribution élémentaire à la corrélation pression-déformation. Dans cette optique, on propose de définir la fluctuation de pression relativement à sa moyenne par plan (fluctuante dans le temps) :

$$p(x, y, z, t) = P(x, y, z, t) - \langle P \rangle_S(z, t) \quad (6.1)$$

On va maintenant établir que cette définition de la fluctuation de pression ne perturbe pas l'interprétation de la corrélation pression-déformation. On calcule pour cela la valeur particulière de la moyenne du gradient normal de vitesse $\left\langle \frac{\partial w}{\partial z} \right\rangle_S$ dans les plans d'équation $z = cste$. La condition de périodicité permet d'écrire :

$$\int_0^{L_x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = u(L_x) - u(0) = 0, \quad \text{soit} \quad \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = 0. \quad (6.2)$$

La dernière égalité indique que la moyenne par plan du taux d'étirement $\partial_x u$ est nulle quelle que soit la valeur de z . En pratiquant le même raisonnement avec le terme $\frac{\partial v}{\partial y}$, on obtient :

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle_S = 0 \quad (6.3)$$

L'équation de la continuité moyennée dans le plan s'écrit :

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_S + \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle_S + \left\langle \frac{\partial w}{\partial z} \right\rangle_S = 0 \quad (6.4)$$

En tenant compte des résultats (6.2) et (6.3) on obtient finalement :

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial z} \right\rangle_S = 0 \quad (6.5)$$

En utilisant, les équations (6.5) et (6.1) on peut établir :

$$\left\langle p(x, y, z, t) \frac{\partial w}{\partial z} \right\rangle_S = \left\langle P(x, y, z, t) \frac{\partial w}{\partial z} \right\rangle_S \quad (6.6)$$

Ce dernier résultat permet de légitimer le choix de la référence de pression définie par l'équation (6.1). Ainsi, à une altitude z et un instant t , la contribution à la corrélation pression-déformation moyenne

est rigoureusement identiques, que la référence de pression soit la moyenne spatio-temporelle ou la moyenne instantanée par plan.

Par ailleurs, on peut intégrer l'équation (6.5) entre 0 et z . Compte-tenu des conditions limites (*i.e.* $w = 0$ aux surfaces de blocage), on peut établir la nullité de la moyenne par plan de la composante normale du champ de vitesse w :

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^z \left\langle \frac{\partial w}{\partial z} \right\rangle_S dz \\
 &= \left\langle \int_0^z \frac{\partial w}{\partial z} dz \right\rangle_S \\
 &= \langle w(z) - 0 \rangle_S \\
 &= \langle w(z) \rangle_S
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

6.2.2 Observation de champs instantanés.

Afin de mettre en évidence la corrélation entre pression et déformation, on examine conjointement le champ de pression p et le champ d'étirement vertical $\partial_z w$. Pour comparer les deux conditions limites, on choisit de se placer dans des plans situés aux altitudes $z_{ref}/\mathcal{L}$ définies précédemment. Dans les figures 6.5 et 6.6, le champ de la déformation $\partial_z w$, codé en couleur est plaqué sur une représentation topographique de la pression. On peut ainsi observer de manière simultanée les extremums locaux de pression et les zones d'étirement ou de compression verticale. Ces figures, correspondants aux cas SL_B et PA_B , sont extraites d'animations complètes regroupant une soixantaine de champs instantanés sur l'intervalle d'échantillonnage statistique indiqué dans le paragraphe 5.1.7. Ces films, générés pour chaque cas de simulation directe, permettent un suivi temporel des événements les plus énergétiques qui lient pression et déformation. Nous discutons ci-dessous les observations issues de cette analyse instationnaire, et ce pour les deux conditions de blocage.

Surface libre

L'occurrence de splats est continue. Des paquets de fluides viennent impacter la paroi. Suite aux impacts, un écoulement radial centré au point d'arrêt, s'installe dans le plan parallèle à la surface de blocage. Il met en évidence le transfert intercomposantes depuis la composante normale de la vitesse vers les composantes tangentielles. La condition de glissement autorise le déplacement du point d'arrêt ainsi qu'une expansion de la zone d'impact. A la périphérie d'un splat, des zones de remontées de fluide sont associées à de légères surpressions. Ce sont des collisions horizontales suivies d'une éjection verticale, conformes aux mécanismes d'anti-splat dans la terminologie de Perot et Moin. Les surpressions créées par ces anti-splats sont de faible intensité. La condition de glissement permet aux splats de se déplacer horizontalement et autorise le rapprochement de paires de splats. Dans ce cas, la convergence de deux anti-splats occasionne une surpression plus importante par cumul des deux événements. On remarque également la présence de creux de pression de forme circulaire. La vorticit  tant orientée dans la direction normale au voisinage d'une surface libre, on peut conjecturer que ces dépressions sont le résultat de tourbillons d'axe vertical, "attachés"    la surface libre.

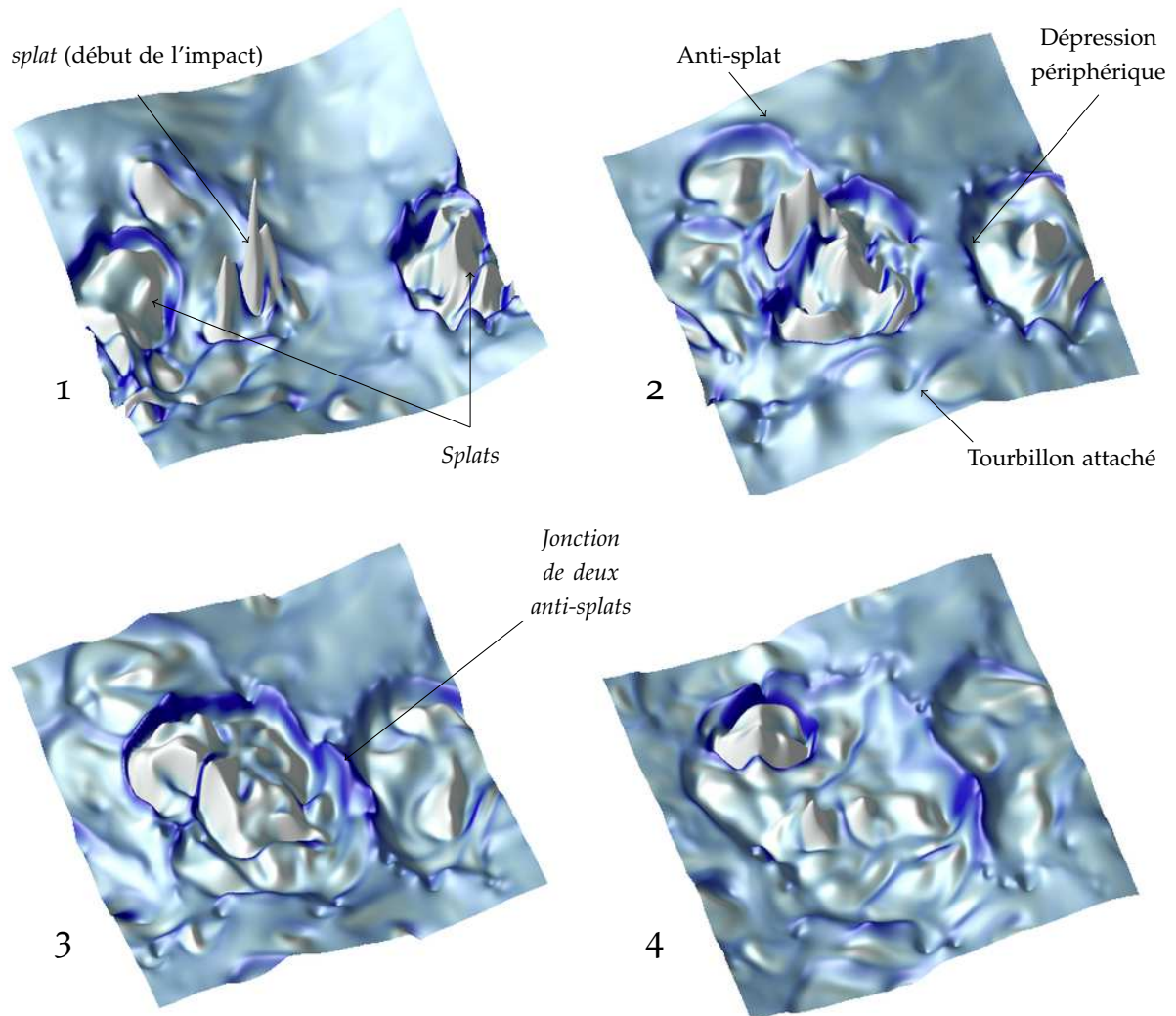


FIG. 6.5 – Cartographie du champ de pression et de déformation normale $\frac{\partial w}{\partial z}$ à plusieurs instants dans le plan $z = z_{ref}$ avec une condition limite de surface libre (cas SL_B). La surface est déformée par la valeur de la pression tandis que la couleur code l'étirement vertical du blanc pour $\frac{\partial w}{\partial z} < 0$, au bleu pour $\frac{\partial w}{\partial z} > 0$.

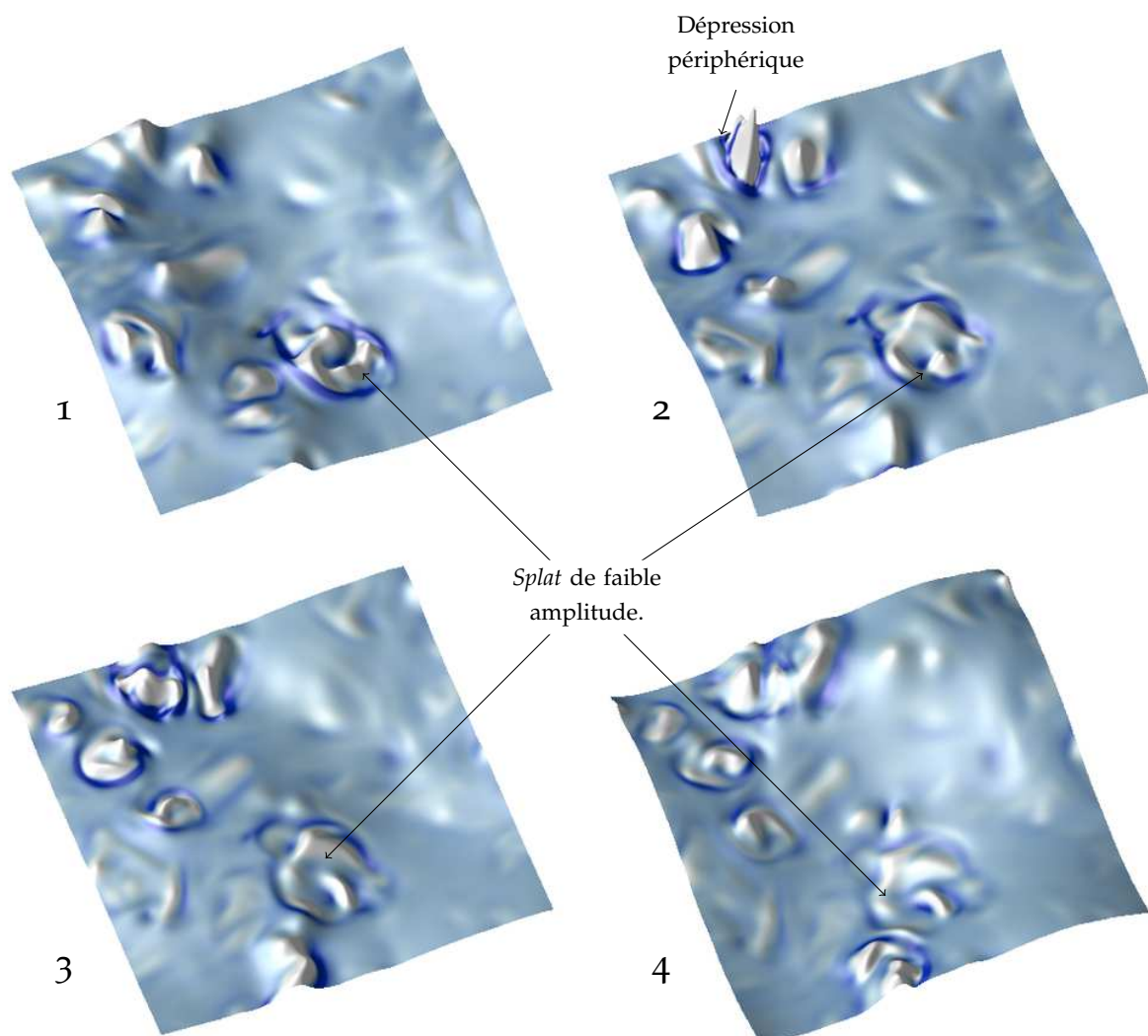


FIG. 6.6 – Même dispositif de visualisation que la figure 6.5 mais dans le cas de la paroi adhérente (cas PA_B).

Paroi adhérente

Dans ce cas également, l'occurrence de splats est très fréquente. Conformément à la faible valeur du nombre de Reynolds turbulent dans cette région, le niveau d'agitation est moindre par rapport au cas de la surface libre. De ce fait, la conversion de la pression dynamique en pression statique est comparativement plus faible. La condition de non-glissement freine cette fois l'expansion radiale. L'énergie cinétique turbulente portée par la direction normale qui est transférée dans la direction horizontale est majoritairement dissipée, ce qui est cohérent avec l'observation des bilans des tensions de Reynolds horizontales dans cette zone (Cf. figure 5.20). Les splats sont donc "consommés" au voisinage de l'impact par les effets de viscosité. En conséquence, les anti-splats sont très rares voire inexistants, ce qui confirme l'analyse de Perot et Moin (1995). Les remontées de fluide se localisent près du point d'arrêt, contrairement à l'observation faite en configuration de surface libre, où elles s'établissent loin de la zone d'impact. Enfin, en contraste avec la surface libre, le point d'arrêt reste fixe dans les plans observés, ce qui rend peu probable la jonction de deux zones de splats.

On peut noter par ailleurs la présence, dans les deux cas, de légers minima de pression qui apparaissent au moment de l'impact et entourent la surpression. Ces "dépressions périphériques" sont bien des dépressions au sens où la valeur de la pression y est localement inférieure à une valeur de référence située à l'extérieur de la zone de splot. Ce point sera discuté dans le paragraphe 6.4.

Par rapport aux diverses études citées, ces observations apportent deux éléments nouveaux :

1. Le splot est l'évènement dominant dans l'interaction avec la surface, quel qu'en soit la nature.
2. L'anti-splot, qui associe surpression et remontée de fluide, se situe essentiellement à la périphérie des splats en surface libre. Il est alors de faible intensité, mais la condition de glissement permet son intensification lors de la jonction de plusieurs zones de splats. Les effets de la viscosité en diminuent considérablement l'occurrence dans le cas d'une paroi adhérente.

On ajoute que les observations effectuées suggèrent un lien de causalité entre splot et anti-splot lorsqu'on peut observer les deux. Ainsi dans le cas d'une condition limite de surface libre, les anti-splats semblent naître consécutivement à l'apparition des splats.

6.2.3 Prépondérance des évènements de type splot

Les observations précédentes identifient le splot comme l'évènement majeur dans le cas où la turbulence s'auto-diffuse en direction d'une surface de blocage. La conservation de la masse qui impose l'égalité des débits ascendants et descendants, justifie évidemment l'existence des anti-splats. Cependant, rien n'impose une égalité moyenne entre les vitesses ascendantes et descendantes. Dans un plan tangent à la surface de blocage, une faible proportion de fluide à vitesse descendante élevée peut être compensée par une large proportion de fluide à vitesse ascendante faible et réciproquement. Le raisonnement s'applique également pour les étirements et les compressions. Si tel est le cas, l'influence sur le terme de corrélation Π_{33} n'est pas le même. Pour s'en convaincre, on présente sur les figures 6.7 et 6.8 l'évolution verticale de la proportion d'aire $\mathcal{A}$ associée aux étirements verticaux ($\partial_z w > 0$) et de son complément $1 - \mathcal{A}$ associé aux compressions verticales ($\partial_z w < 0$). Indépendamment de la condition limite utilisée, la section occupée par les compressions est plus petite dans tout l'écoulement. Dans la zone de diffusion, ce comportement s'accroît traduisant des évènements de compression ($\partial_z w < 0$) d'intensité plus élevée que les étirements ($\partial_z w > 0$) dans tout le domaine. À l'approche de la surface de blocage, le phénomène s'intensifie particulièrement dans le cas de paroi adhérente.

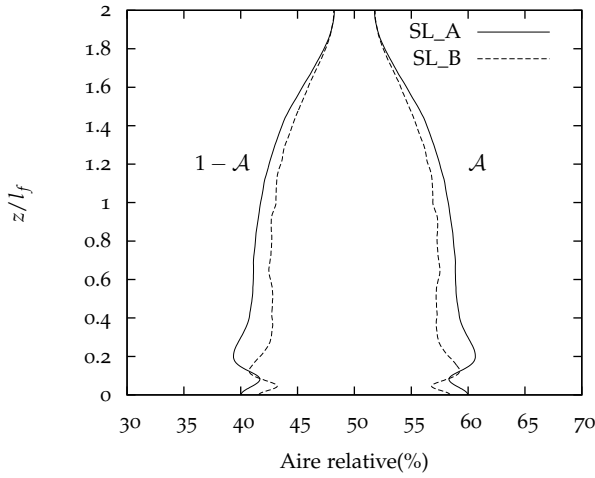


FIG. 6.7 – Aires relatives d'écoulements ascendants et descendants en surface libre.

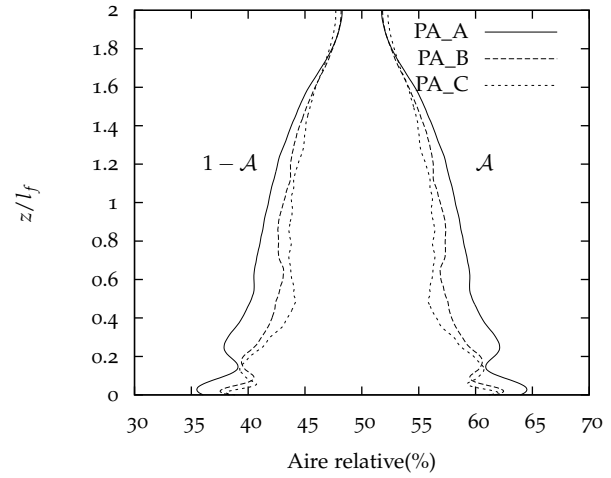


FIG. 6.8 – Aires relatives d'écoulements ascendants et descendants en paroi adhérente.

Les résultats obtenus avec cette représentation sont bien sûr à mettre en relation avec le facteur de dissymétrie, dont la définition est rappelée pour la vitesse normale et son gradient :

$$S(z) = \frac{\overline{w^3}}{\overline{w^2}^{3/2}} \quad S'(z) = \frac{\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^3}}{\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2}^{3/2}} \quad (6.8)$$

Dans une distribution statistique, le moment S (d'ordre 3) s'interprète comme un décalage entre valeur moyenne et valeur médiane. Dans un cas où la moyenne de la distribution est nulle, on peut distinguer les deux cas suivants :

1. Si $S > 0$, la médiane est inférieure à la valeur moyenne, la probabilité est donc plus forte de trouver un échantillon à valeur négative. En contrepartie, les échantillons à valeur négatives présenteront des valeurs globalement plus faibles que les échantillons à valeur positive pour aboutir à une moyenne nulle.
2. Si $S < 0$, la médiane est supérieure à la valeur moyenne, la probabilité est donc plus forte de trouver un échantillon à valeur positive. De manière symétrique, les échantillons à valeurs positives présenteront des valeurs globalement moins élevées.

On étudie l'évolution verticale des deux facteurs S et S' . En effet, même si on s'intéresse ici principalement au gradient $\partial_z w$, il faut remarquer que la condition de blocage $w = 0$ crée une relation de proportionnalité entre w et $\partial_z w$ au voisinage de la surface de blocage ($w \propto z \partial_z w$). En conséquence, la distribution statistique des deux variables coïncide dans cette zone. Cependant, il convient de noter que contrairement au facteur de dissymétrie de w , celui de $\partial_z w$ conserve son signe indépendamment de la convention d'orientation de l'axe z . Le signe de S' traduit une dissymétrie entre étirements et compressions : s'il est négatif, les étirements sont plus rares et plus intenses, s'il est positif ces mêmes caractéristiques s'appliquent aux compressions. Avec la convention d'orientation choisie ici (z vertical ascendant), le signe du facteur de dissymétrie de w sera négatif si les mouvement vers la paroi sont

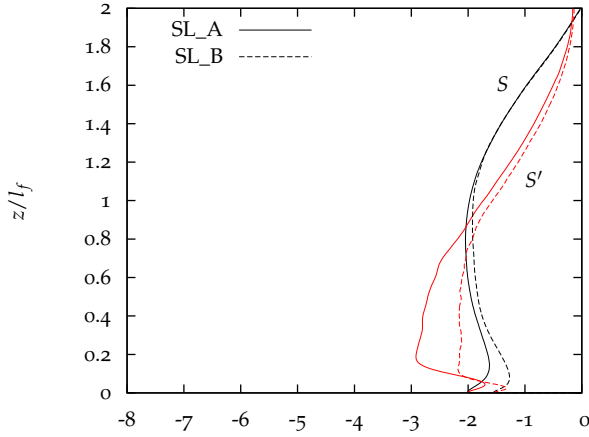


FIG. 6.9 – Facteur de dissymétrie de la vitesse et du gradient de vitesse normal (SL).

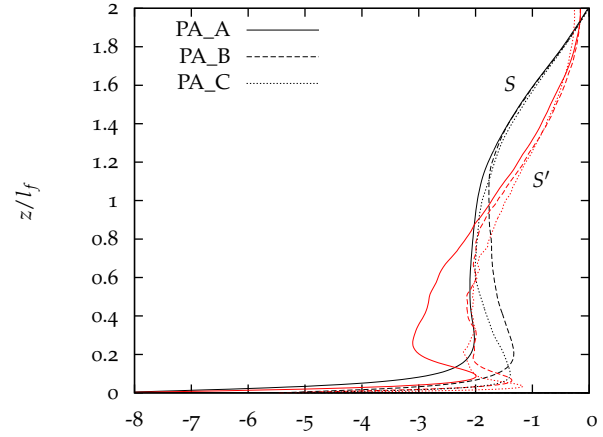


FIG. 6.10 – Facteur de dissymétrie de la vitesse et du gradient de vitesse normal (PA).

plus rares et plus intenses, et inversement s'il est positif. En turbulence isotrope, S est nul puisqu'aucune direction du vecteur vitesse n'est privilégiée. Quant à S' , il admet une valeur nettement négative, de l'ordre de -0.5 , ce qui traduit une propriété générale de la turbulence selon laquelle la longueur des lignes fluides matérielles augmente en moyenne. Les figures 6.9 et 6.10 confirment les résultats obtenus sur les aires. S et S' sont négatifs et leur niveau augmente en valeur absolue dans la zone de diffusion. La croissance du nombre de Reynolds semble en limiter le niveau général sans pour autant en modifier le comportement général. Les résultats obtenus dans le cas PA_C ne suivent pas la tendance liée à l'évolution du nombre de Reynolds dans la zone de la diffusion, ce qui semble être la conséquence d'un défaut de convergence pour ces statistiques d'ordre élevé.

Les premiers effets du blocage sont ressentis à $z/l_f \approx 0.7$, où l'on observe sur la figure 6.9 une nette rupture de la pente de S' et une baisse de la dissymétrie de $\partial_z w$, révélatrice de l'effet de blocage. En effet, la distribution des étirements-compressions est nécessairement affectée dans cette zone. Du point de vue du champ de vitesse, on comprend qu'une fluctuation normale élevée en direction de la paroi ($w < 0$) voit son intensité diminuer sous l'effet du blocage. En conséquence, l'intensité des événements les plus intenses est réduite et la distribution de w se symétrise. Dans le voisinage immédiat de la surface, le comportement est très différent pour les deux conditions limites. Sur la figure 6.11, les tracés sont agrandis au niveau de la surface de blocage et normés cette fois par $\mathcal{L}$, qui a plus de sens dans cette zone. Dans les deux cas S et S' tendent vers une valeur commune, conformément à la relation de proportionnalité qui s'installe entre la composante normale de la vitesse et son gradient. L'évolution vers cette valeur se fait de manière différente dans les deux cas :

1. Dans le cas de la surface libre, une légère augmentation de S' en valeur absolue est observée sur une épaisseur qui diminue avec le nombre de Reynolds.
2. Dans le cas de la paroi adhérente, on note une franche augmentation de S' en valeur absolue, sur une épaisseur qui diminue également avec le nombre de Reynolds. C'est très vraisemblablement un effet de viscosité : les masses fluides descendantes sont sensibles essentiellement à l'effet de blocage mais peu à la viscosité. À l'inverse, le fluide ascendant provient nécessairement d'impacts dans le plan de la surface et a donc subi les effets du frottement visqueux dans la zone de paroi.

Ceci accentue la dissymétrie entre fluide ascendant/fluide descendant, confirmant l'explication donnée par Perot et Moin (1995) sur le rôle joué par la viscosité dans le déséquilibre splat/anti-splat.

En conclusion, l'analyse du facteur de dissymétrie amène des réponses cohérentes sur la question du déséquilibre splat/anti-splat observé dans la zone de blocage et du transfert intercomposante qui en résulte. La distribution de la composante normale du champ de vitesse (ou de son gradient) est dissymétrique loin de la surface de blocage. En conséquence, on observe au voisinage de la surface des impacts d'intensité plus élevée que les éjections. Les surpressions résultantes présentent donc des valeurs également plus élevées que celles créées par les éjections. Le déséquilibre splat/anti-splat résulte donc de la dissymétrie du champ de déformation observée au voisinage de la surface de blocage, induite par les propriétés de l'écoulement dans une zone "externe" pour reprendre la terminologie de couche limite. Les effets de la viscosité qui viennent s'ajouter renforcent la prédominance des événements de type splat.

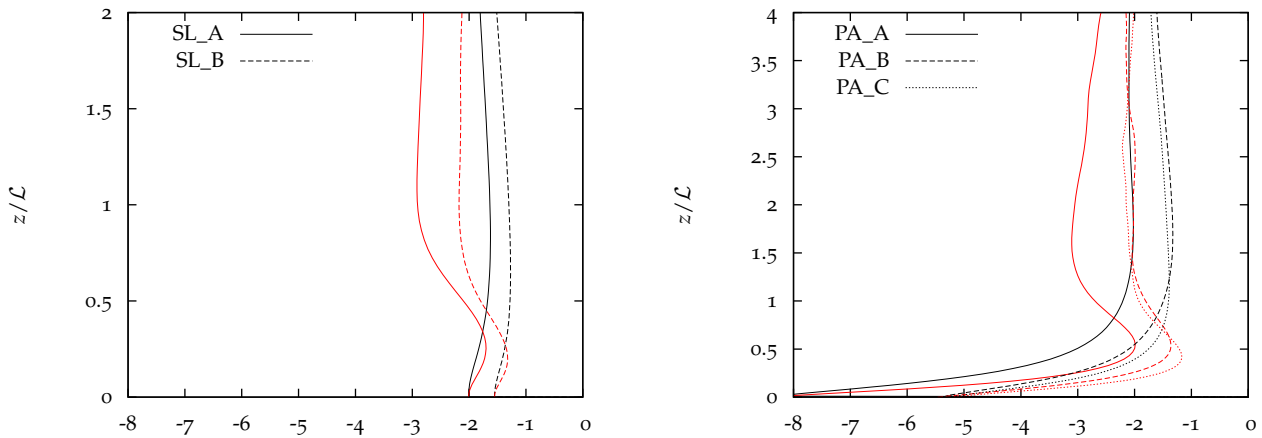
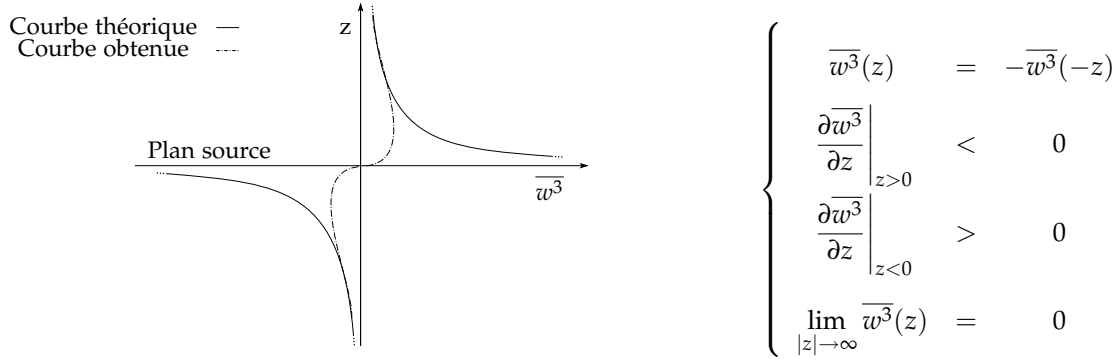


FIG. 6.11 – Facteur de dissymétrie de la vitesse et du gradient de vitesse normal. Zoom surface libre à gauche, paroi adhérente à droite. Courbes rouges : S , Courbes noires S' .

6.2.4 Facteur de dissymétrie en zone de diffusion

Les observations précédentes montrent que la prépondérance des événements de type splat provient des caractéristiques intrinsèques de l'écoulement loin de la surface. La question se pose maintenant de savoir si les valeurs obtenues pour le facteur de dissymétrie constituent une caractéristique propre à la configuration étudiée, ou si ce résultat se retrouve plus généralement dans une zone de diffusion turbulente "pure". On étudie pour cela la situation idéale où une source plane de turbulence située dans le plan $z = 0$ alimente l'espace environnant par diffusion pure. L'évolution spatiale du facteur de dissymétrie S et notamment son signe est associée au terme de diffusion turbulente $\mathcal{D}_{33}^u = -\partial_z \overline{w^3}$. Ce terme apparaît dans le bilan de la contrainte $\overline{w^2}$ du tenseur de Reynolds. Compte tenu du fait que le plan source est également un plan de symétrie pour l'écoulement, $\mathcal{D}_{33}^u$ est lui-même symétrique par rapport au plan source. Il s'ensuit que $-\overline{w^3}$ est croissant de $z = -\infty$ à $z = 0$ et de $z = 0$ à $z = +\infty$. Comme par ailleurs $\overline{w^3}$ doit s'annuler en $z = \pm\infty$, on en déduit que $-\overline{w^3}$ est positif entre $-\infty$ et 0

FIG. 6.12 – Comportement du terme de corrélation triple $\overline{w^3}$ en diffusion pure.

et négatif entre 0 et $+\infty$. Ces conclusions et l'allure schématique des évolutions correspondantes sont portés sur la figure 6.12. On peut constater que, dans la partie inférieure de l'espace, le signe négatif de $\overline{w^3}$, et donc du facteur de dissymétrie, apparaît comme une caractéristique intrinsèque à la situation de diffusion pure.

Ce résultat est confirmé par l'expérience de Risso et Fabre (1997) qui étudient un jet confiné. Dans cette expérience, l'annulation locale du mouvement moyen permet d'obtenir une région où l'écoulement est gouverné principalement par des mécanismes de diffusion turbulente. Ils relèvent une valeur de S qui est proche -1 . La valeur observée ici, de l'ordre de -2 , semble donc un peu élevée mais son signe reste caractéristique d'une zone de diffusion. L'écart peut s'expliquer par la différence dans la valeur du nombre de Reynolds, beaucoup plus faible en simulation directe. Les résultats obtenus dans notre cas montrent en effet que l'augmentation du nombre de Reynolds a tendance à faire diminuer la valeur du facteur de dissymétrie.

Le comportement obtenu ici est donc bien caractéristique d'une zone de diffusion turbulente, ce qui rend cette configuration particulièrement adaptée pour étudier l'effet de blocage qui affecte généralement la turbulence à une certaine distance de la zone où elle est produite.

Au contact de la surface, le facteur de dissymétrie de la fluctuation de vitesse est confondu avec celui de gradient normal de vitesse ($S = S'$). La question se pose de savoir lequel de S ou S' fixe la valeur de l'autre à la surface, afin d'analyser dans quelle mesure le transfert intercomposantes obtenu peut se généraliser à d'autres configurations. On considère pour cela un modèle simple dans lequel des masses fluides rigides impactent la surface. Si ces paquets fluides sont animés d'une vitesse descendante élevée, ils voient l'intensité de leur vitesse se convertir en gradient de vitesse élevé du fait de la contrainte de blocage. Dans ce cas, c'est la dissymétrie du champ de vitesse normal qui s'imprime sur la distribution du gradient de vitesse et crée le déséquilibre splat/anti-splat.

Les simulations de Perot et Moin (1995), comme celles de Walker et al. (1996), présentent des caractéristiques différentes. L'écoulement initial, qui est une turbulence homogène, possède une symétrie parfaite dans la distribution du champ de vitesse. L'insertion de la surface conduit à une modification locale à la surface de blocage, et les valeurs de S et S' ne sont pas "forcées" par la diffusion turbulente. Dans ces simulations, les profils d'évolution verticale de D_{33}'' montrent que ce terme est nul loin de la surface de blocage. En conséquence, cette faible modification locale de S et S'

- affecte très peu l'équilibre splat/anti-splat imposé par la turbulence homogène initiale ;
- n'est pas représentative de situations où la turbulence est produite loin de la paroi ;

– permet néanmoins d’observer les effets de la viscosité qui se traduisent localement, à la surface. Ces considérations permettent d’expliquer pourquoi ces configurations donnent lieu à un quasi-équilibre splat/anti-splat dans le cas de la surface libre, et à un faible niveau de transfert intercomposantes. L’absence des effets de la viscosité dans le cas surface libre rend l’équilibre splat/anti-splat beaucoup plus sensible aux caractéristiques de l’écoulement “incident”. La situation de turbulence en diffusion étudiée ici met en évidence la dépendance de cet équilibre à la nature de cet écoulement.

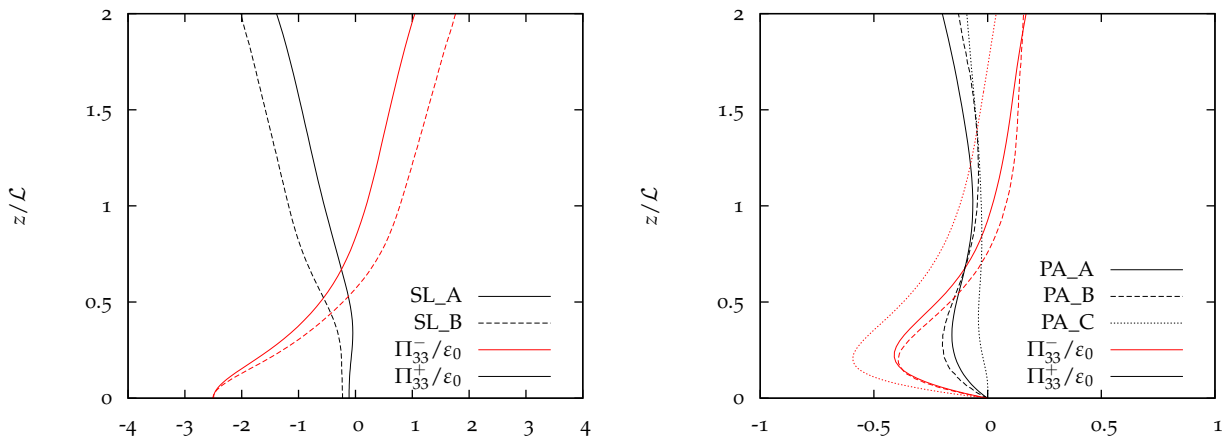


FIG. 6.13 – Moyennes conditionnelles sur Π_{33} (Π_{33}^+ étirements, Π_{33}^- compression).
Surface libre à gauche, Paroi adhérente à droite.

6.3 QUANTIFICATION DES EFFETS LIÉS AUX SPLATS ET ANTI-SPLATS

On complète les observations précédentes par une analyse statistique qui va permettre de quantifier la contribution des événements de splat et d’anti-splats à la corrélation pression-déformation.

6.3.1 Statistiques conditionnelles Π_{33}^- et Π_{33}^+

On reprend d’abord une partie de l’analyse développée par Campagne (2006). Les événements de compression et d’étirement sont isolés afin de distinguer deux contributions à la corrélation pression-déformation :

- la corrélation Π_{33}^- construite à partir d’événements où $\frac{\partial w}{\partial z} < 0$;
- la corrélation Π_{33}^+ construite à partir d’événements où $\frac{\partial w}{\partial z} > 0$.

A la différence de moyennes conditionnelles, ces corrélations sont construites en normalisant la somme des produits par le nombre d’échantillons total (compression + étirement). De cette façon on conserve un lien explicite entre Π_{33}^- , Π_{33}^+ et Π_{33} , avec

$$\Pi_{33}^+(z) + \Pi_{33}^-(z) = \Pi_{33}(z) \quad (6.9)$$

Surface libre

Les résultats obtenus dans les différentes simulations sont présentés sur la figure 6.13 (graphe de gauche). En surface libre, le comportement de Π_{33}^- confirme l'action des splats dans cette zone. Ce terme change de signe et devient un puits dans l'équation de transport de $\overline{w^2}$, la composante déficitaire. La contribution Π_{33}^+ tend vers une valeur quasi nulle à la surface, ce qui démontre que la corrélation globale Π_{33} n'est pas affectée par les anti-splats. Ce résultat n'est pas en accord avec les analyses de Perot et Moin (1995) qui conjecturent un équilibre global splat/anti-splat dans le cas de la surface libre.

Paroi adhérente

Dans ce cas, le comportement de Π_{33}^- est similaire à celui observé dans le cas précédent. Le pic de la corrélation est "déplacé" par les effets de la viscosité. Ce terme contribue donc aux échanges d'énergie intercomposantes en transférant de l'énergie depuis la direction normale vers les directions tangentielles. Le comportement de Π_{33}^+ est beaucoup plus surprenant. Une logique splat/anti-splat laisse penser que ce terme doit, sinon s'opposer à Π_{33}^- sous l'action des anti-splats, avoir un comportement neutre comme on l'observe en surface libre. C'est tout l'inverse que l'on observe ici, puisqu'à nombre de Reynolds modéré (cas *PA_A*), ce terme renforce l'anisotropie en participant, comme Π_{33}^- , à un transfert intercomposantes depuis la composante normale vers la composante tangentielle. Ce phénomène s'atténue lorsque le nombre de Reynolds croît comme le démontrent les résultats obtenus dans le cas *PA_C*. Néanmoins, il suggère l'existence d'un mécanisme supplémentaire, qui participe de manière significative au transfert intercomposantes depuis $\overline{w^2}$ vers $\overline{u^2}$ en zone de proche paroi. Une explication possible en est donnée dans le paragraphe 6.4, après une analyse détaillée des mécanismes d'impacts.

6.3.2 Analyse en quadrants : aspects théoriques et fonctions de corrélation

Dans ce paragraphe, on propose une analyse statistique conjointe de p et $\frac{\partial w}{\partial z}$. La collecte d'échantillons statistiques au cours du calcul s'est accompagnée d'une évaluation de la fonction de densité de probabilité conjointe. L'étude de cette fonction a pour but de mettre en évidence la nature de la corrélation entre les deux variables.

Mode opératoire et analyse théorique

Pour obtenir cette fonction de deux variables aléatoires A et B , une discrétisation du plan des réalisations (a, b) est nécessaire. C'est la principale difficulté de mise en œuvre, puisque la discrétisation doit être identique durant tout le calcul. Il faut donc estimer l'étendue des distributions de a et b et, en particulier, en déterminer les valeurs extrêmes *a priori*. Dans les résultats présentés, un échantillonnage spatial uniforme de 400×400 est utilisé pour construire la fonction de densité de probabilité conjointe. A chaque intervalle de temps où sont récoltés les échantillons, on répartit toutes les valeurs du champ dans cette grille.

Pour fixer les idées, on présente le résultat théorique obtenu pour deux variables à distribution gaussienne, ce type de distribution étant classique en turbulence. La densité de probabilité conjointe peut s'écrire en fonction du coefficient de corrélation $\rho = \overline{ab} / \sqrt{\overline{a^2} \overline{b^2}}$. Si la variance des distributions est identique ($\overline{a^2} = \overline{b^2} = \sigma^2$), la fonction de densité conjointe (Goodman (1985) par exemple) s'écrit :

$$P_{AB}(a, b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2 - 2\rho ab}{2\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (6.10)$$

On trace P_{AB} pour différentes valeurs de ρ . Les fonctions obtenues sont reportées sur la figure 6.14. Ici, seul le cas ρ positif est traité mais les résultats s'extrapolent par symétrie pour les cas où $\rho < 0$. On observe que, lorsque les deux variables sont indépendantes, la fonction obtenue présente une forme circulaire, ne privilégiant aucun des axes du plan. Lorsque le coefficient de corrélation approche l'unité, on tend vers l'application diagonale $y = x$.

L'intérêt de cette fonction réside dans la possibilité de visualiser directement les différentes contributions à la corrélation $\overline{ab}$, en notant que :

- les quadrants supérieur droit (SD) et inférieur gauche (IG) contribuent positivement à $\overline{ab}$;
- les quadrants supérieur gauche (SG) et inférieur droit (ID) contribuent négativement à $\overline{ab}$.

De plus, par définition de l'espérance d'une variable aléatoire, on peut écrire :

$$\overline{ab} = \iint_{\mathbb{R}^2} ab P_{AB}(a, b) da db \quad (6.11)$$

Les contributions à la corrélation totale sont donc exprimées par la fonction $abP_{AB}(a, b)$. Ainsi, $P_{AB}(a, b)$ permet d'étudier la répartition dans les quadrants du nombre d'évènements, tandis que $abP_{AB}(a, b)$ permet d'étudier celles de leurs contributions à la corrélation. L'interprétation des résultats obtenus devra tenir compte des deux points suivants :

1. Le niveau de corrélation qui s'établit entre deux variables est le résultat d'un ou plusieurs phénomènes physiques qui n'affectent pas forcément de la même manière l'ensemble de la distribution des variables aléatoires. A l'inverse, dans le cas théorique présenté sur la figure 6.14, le niveau de corrélation obtenu correspond à un phénomène physique qui affecterait uniformément l'ensemble des distributions et modifierait "en bloc" la fonction de densité conjointe.
2. Les distributions des variables observées ne peuvent pas être assimilées à des distributions gaussiennes, en particulier celle du taux de déformation $\partial_z w$ qui présente une dissymétrie significative (S').

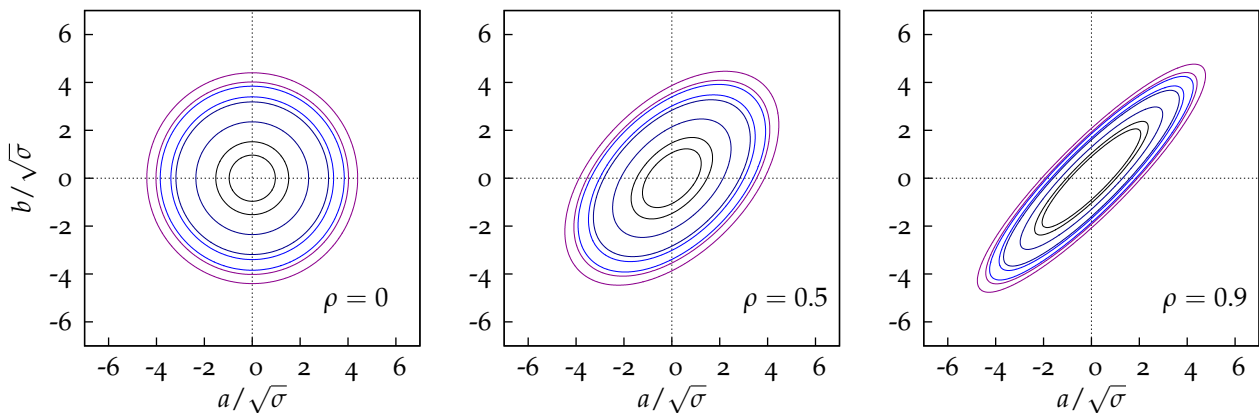


FIG. 6.14 – Densité conjointe de probabilité pour deux variables aléatoires à distribution gaussienne

Fonctions de corrélation

On désigne par $\rho_{p,\partial_z w}(z)$, le coefficient de corrélation des champs de pression p et de déformation verticale $\partial_z w$ à l'altitude z . Ce coefficient de corrélation, dont l'évolution verticale est présentée sur la figure 6.15, démontre que le niveau de corrélation est faible dans toute la zone de diffusion. Il atteint un niveau non-négligeable à l'approche de la surface de blocage, traduisant l'apparition d'évènements qui modifient le contenu de Π_{33} . La valeur absolue de $\rho_{p,\partial_z w}$ atteint un niveau élevé au contact immédiat de la paroi adhérente. Ce niveau de corrélation diminue légèrement avec le nombre de Reynolds. Il est intéressant de noter que les altitudes de référence choisies pour le transfert intercomposantes sont localisées dans des régions où le niveau de corrélation est significatif :

- $\rho_{p,\partial_z w}(z_{ref}) \approx 0.1$ (Surface libre);
- $\rho_{p,\partial_z w}(z_{ref}) \approx 0.2$ (Paroi adhérente).

Comme on pouvait s'y attendre, le transfert intercomposantes maximal s'effectue donc dans des régions où la pression et la déformation sont bien corrélées.

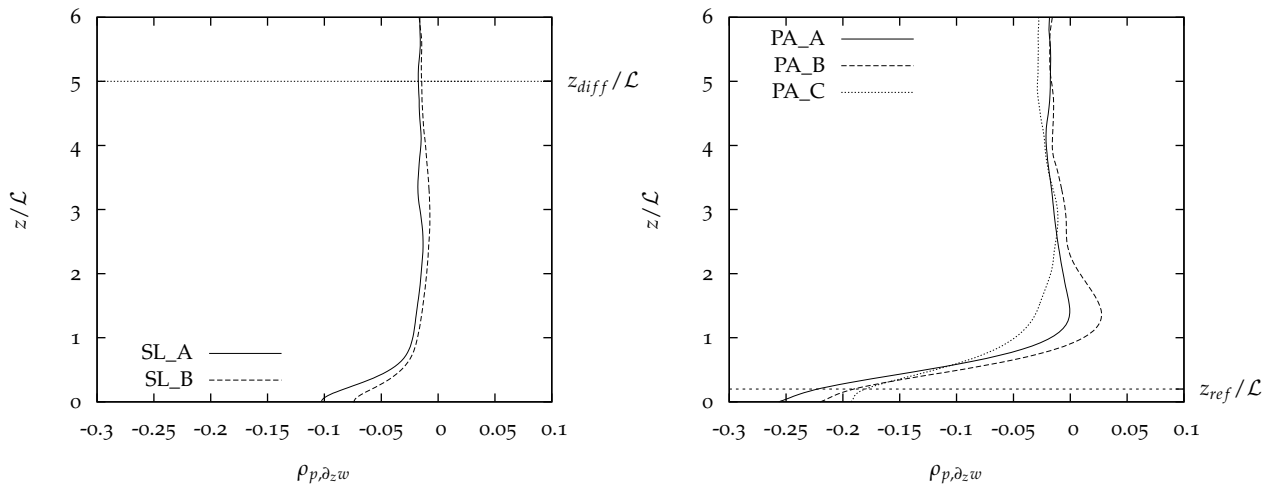


FIG. 6.15 – Fonction de corrélation des variables p et $\frac{\partial w}{\partial z}$ (Surface libre à gauche, paroi adhérente à gauche)

6.3.3 Analyse en quadrants : application aux cas étudiés

Analyse dans la zone de diffusion.

On présente ici une analyse détaillée des résultats obtenus avec la résolution B. Ceux obtenus avec la résolution A sont reportés dans l'annexe A.1. Afin de mieux comprendre comment la corrélation affecte la fonction de densité de probabilité conjointe, on observe d'abord l'allure de la fonction dans un plan éloigné de la surface, à une altitude z_{diff} . Cette altitude est située dans la zone où la valeur du coefficient de corrélation est faible en comparaison avec sa valeur à la surface (voir figure 6.15). La figure 6.16 présente avec une échelle logarithmique les lignes de niveaux qui correspondent à un nombre constant d'occurrences des évènements. Le résultat est comparable à celui présenté figure 6.14, à l'exception d'une forte dissymétrie dans la fluctuation de pression. La valeur négative du facteur de dissymétrie qui en résulte pour la pression pourrait s'expliquer, dans cette zone "lointaine", par la prédominance de dépressions, liées à des mécanismes tourbillonnaires. Ceci n'étant vraisemblablement

pas en rapport avec l'influence de la paroi, nous n'avons pas cherché à valider davantage cette hypothèse. La figure 6.17 représente les iso-contributions à la corrélation totale Π_{33} . Les premiers niveaux des iso-contributions sont représentatifs du comportement global de la corrélation et montrent que Π_{33} est de signe négatif dans cette zone, agissant dans le sens d'un retour à l'isotropie ($w' > u'$ dans cette zone).

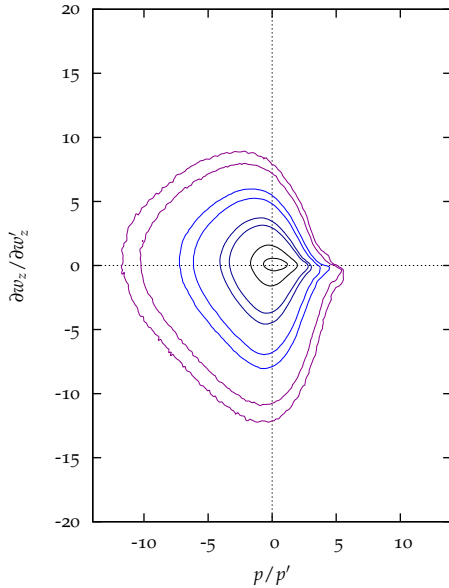


FIG. 6.16 – Densité de probabilité obtenu à l'altitude z_{diff} (cas SL_B).

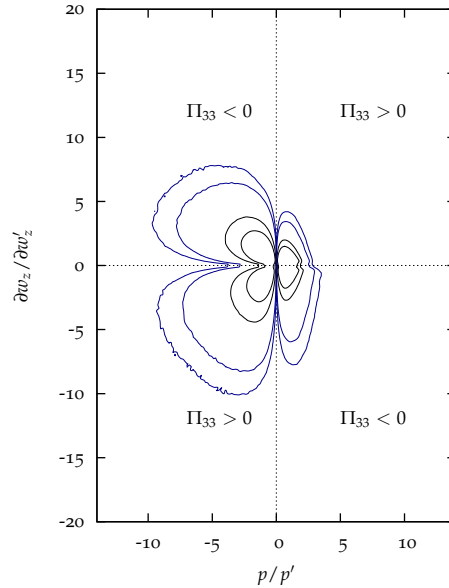


FIG. 6.17 – Iso-contributions à Π_{33} obtenu à l'altitude z_{diff} (cas SL_B).

Analyse à l'altitude z_{ref}

L'analyse menée sur la base des figures 6.18 et 6.19 nécessite de prendre en compte les remarques faites dans le paragraphe 6.2.1 sur la référence de pression. La fluctuation du champ de pression est ici définie par rapport aux moyennes par plan $\langle P \rangle_S(z, t)$ pour renforcer la localité de la référence de pression. De cette façon on assimile des fluctuations de pression positives à des surpressions *locales*, même si ce n'est pas le cas par rapport à une référence absolue.

Avec les deux types de surface, on retrouve bien les caractéristiques attendues des données statistiques. La dissymétrie du gradient de vitesse apparaît à travers les pourcentages du nombre total d'événements indiqué dans chaque quadrant. Ainsi, on retrouve un fort déséquilibre entre les étirements et les compressions indépendamment de la condition limite (respectivement 53.2-46.8% et 73.9-26.1% pour les cas de surface libre et de paroi adhérente). Les iso-contributions calculées (figures 6.20 et 6.21) sont cohérentes avec les moyennes conditionnelles effectuées sur la corrélation Π_{33} . On retrouve les déséquilibres observés sur Π_{33}^+ et Π_{33}^- .

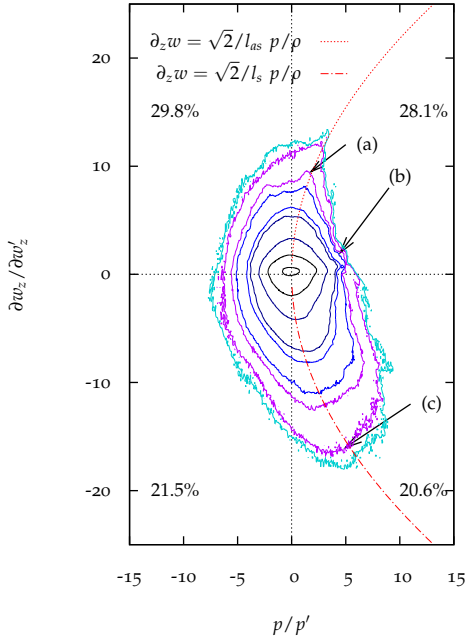


FIG. 6.18 – Densité de probabilité conjointe obtenue à l'altitude z_{ref} dans le cas SL_B

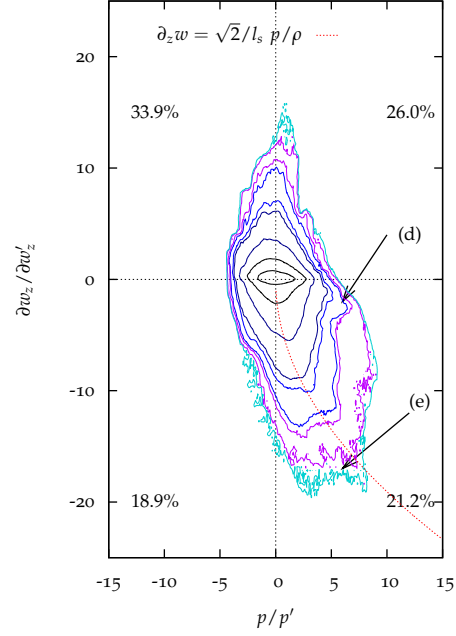


FIG. 6.19 – Densité de probabilité conjointe obtenue à l'altitude z_{ref} dans le cas PA_B

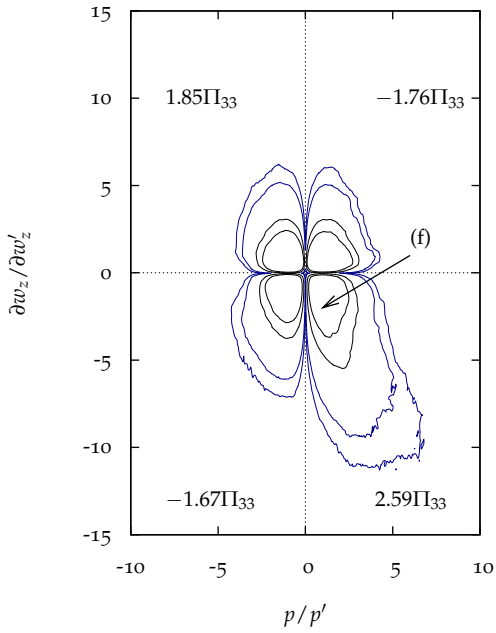


FIG. 6.20 – Iso-contributions à Π_{33} obtenues à l'altitude z_{ref} dans le cas SL_B

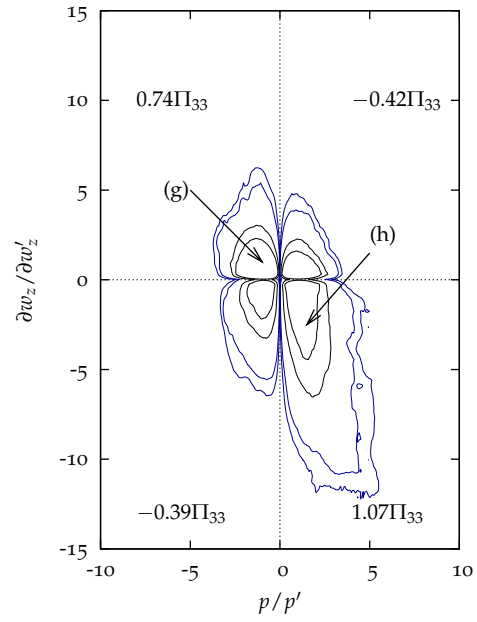


FIG. 6.21 – Iso-contributions à Π_{33} obtenues à l'altitude z_{ref} dans le cas PA_B

Construction de la corrélation pression déformation

Sur les figures 6.18 et 6.19, les splats apparaissent clairement dans les quadrants inférieurs droits. Les gradients de vitesse négatifs de forte intensité sont associés à des surpressions. Les régions (c) et (e) contiennent les splats d'intensités les plus élevées. Plus généralement, les splats affectent tout le quadrant inférieur droit. Lorsqu'on regarde les niveaux d'iso-contributions à Π_{33} correspondants sur les figures 6.20 et 6.21, il se dégage une importante contribution dans le quadrant inférieur droit, repérable dès la première ligne de niveau (régions (f) et (h)). On remarque que la contribution dans la région (h) est plus intense que celle localisée dans la région (f), signe d'un transfert intercomposantes plus fort induit par les splats sur une paroi adhérente.

Sur la figure 6.21, la région (g) met en évidence un déséquilibre entre les quadrants (SG) et (SD) qui révèle une contribution significative à Π_{33} liée à des événements de remontée de fluide. Ce déséquilibre, s'observe également sur la figure 6.19, à travers l'orientation générale des lignes de niveau. Il est surtout mis en évidence par le déséquilibre qui s'établit entre le nombre d'événements localisés dans (SG) soit (41%), et ceux localisés dans (SD), soit (32.9%). En comparaison avec la surface libre où le nombre d'événements s'équilibre approximativement entre les deux quadrants, on peut en déduire que dans le cas de la paroi adhérente, les événements de remontée sont majoritairement accompagnés d'une dépression. Ce type d'événements, déjà mis en évidence par le signe négatif de la contribution Π_{33}^+ , induit un transfert intercomposantes qui renforce l'anisotropie en prélevant de l'énergie à la contrainte $\overline{w^2}$. On ne peut pas à ce stade expliquer de quels mécanismes relèvent la contribution de ces événements. Les anti-splats, que l'on localise dans la région (a) sur la figure 6.18 ont très peu d'influence en terme de contribution à Π_{33} (figure 6.20). On retrouve ici le comportement neutre de la contribution Π_{33}^+ dans le cas d'une surface libre.

À partir de plusieurs champs instantanés, on peut tracer l'évolution temporelle d'un événement sur la densité de probabilité conjointe. On peut ainsi localiser un événement de type splat dans une séquence de champs instantanés. Les valeurs prises par la fluctuation de pression p et la déformation $\partial_z w$ dans une zone fixe, approximativement représentative de l'évolution temporelle d'un splat, sont reportées sur la densité de fonction conjointe. Des séquences temporelles de ce type sont reportées dans l'annexe A.3. Elles permettent d'établir les points suivants, qui ont peu de répercussions dans la construction de la corrélation Π_{33} :

1. La région (b), sur la figure 6.18 met en évidence les événements rares de jonction d'anti-splats qui sont observés avec une condition limite de glissement.
2. La région (d), sur la figure 6.19 contient les événements qui sont relevés immédiatement à l'impact des paquets fluides avec une condition limite de paroi adhérente.

Échelle de longueur caractéristique des splats

Si on examine le détail de l'écoulement associé à un splat, on peut définir une épaisseur l_s à travers laquelle la surpression est créée par une conversion de la pression dynamique en pression statique. Au voisinage du point d'arrêt, on peut donc écrire :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{w^2}{2} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \approx \frac{w}{l_s} \quad (6.12)$$

En éliminant w dans la deuxième équation, il vient :

Cas	SL_A	SL_B	PA_A	PA_B
$l_s/\mathcal{L}$	0.5	0.3	0.5	0.5
$l_{as}/\mathcal{L}$	-	0.3	-	-

TAB. 6.1 – Échelles de longueur caractéristiques des splats et anti-splats

$$\frac{\partial w}{\partial z} \approx \frac{\sqrt{2}}{l_s} \left(\frac{p}{\rho} \right)^{1/2} \quad (6.13)$$

Cette équation de parabole définit la forme de corrélation qui s'établit au sein d'un splot entre les variables p et $\partial_z w$. De la même manière, on peut définir une longueur l_{as} sur laquelle s'opère le mécanisme d'anti-splot. Sur les fonctions de densité, les "pointes" expriment, à iso-probabilité, les événements qui sont le mieux corrélés. Dans l'hypothèse ou une corrélation de la forme (6.13) s'établit au sein des splats, on peut donc tracer des paraboles qui relient les "pointes" de la fonction de densité. La parabole obtenue fixe alors les longueurs caractéristiques l_s ou l_{as} . L'ordre de grandeur des échelles de longueur est reporté dans le tableau 6.1. Une nouvelle fois, on constate que l'échelle de longueur $\mathcal{L}$, déduite du facteur d'isotropie norme très bien le phénomène puisque les valeurs adimensionnées sont constantes. Cette échelle est comparable à la distance sur laquelle on observe un transfert intercomposantes significatif dans les bilans des tensions de Reynolds. On rappelle que cette longueur est de l'ordre de $0.5\mathcal{L}$ pour la surface libre et pour la paroi adhérente (Cf. figures 5.18 à 5.21). Ce résultat permet de proposer une explication quant à la variation significative de $\mathcal{L}$ (relativement à l_f) avec le nombre de Reynolds (voir tableau 5.5 page 101). On rappelle que ce n'est pas un effet direct de la viscosité, puisque la valeur de $\mathcal{L}$ reste très comparable au passage d'une condition limite à l'autre. En revanche l'augmentation du nombre de Reynolds résulte en une meilleure séparation des échelles de longueur, et en particulier une gamme plus large d'échelles associées aux structures énergétiques. On peut donc associer $\mathcal{L}$ à une échelle moyenne de taille de structures énergétiques, qui n'a donc pas de raison d'être indépendante du nombre de Reynolds, même si la variation de cette échelle ne traduit pas directement des effets visqueux.

6.4 ANALYSE DÉTAILLÉE DE LA STRUCTURE DES IMPACTS

La dissymétrie dans la distribution des vitesses normales qui existe en zone de diffusion, règle le déséquilibre entre splot et anti-splot. Le montant du transfert énergétique intercomposantes en zone proche paroi/surface se déduit essentiellement de ce déséquilibre, comme le montre le comportement de Π_{33}^- . Cependant la corrélation pression-déformation Π_{33}^+ est nettement négative quand la condition limite est de type paroi adhérente (Cf. paragraphe 6.3). Les événements de remontées de fluide associés à des dépressions, mis en évidence dans l'analyse en quadrants suggèrent que d'autres mécanismes que le simple déséquilibre splot/anti-splot contribuent au transfert intercomposantes. Une analyse détaillée des impacts permet d'avancer une première explication.

Dans le paragraphe 6.2, on a présenté une vision instantanée des impacts dans les plans parallèles à

la surface. Cette analyse est complétée par une observation tridimensionnelle de l'impact. On isole un évènement d'impact dans les simulations SL_A et PA_A, afin d'en proposer un modèle et de mettre en évidence les modifications apportées par les effets visqueux en paroi adhérente.

6.4.1 Anneau tourbillonnaire

Le critère Q introduit par Hunt et al. (1988), permet de visualiser les structures "cohérentes" présentes dans l'écoulement, au sens où il permet de séparer les régions de l'écoulement où les effets de rotation sont prépondérants devant les effets de cisaillements, ce que ne permet pas une simple analyse du champ de vorticité par exemple. La grandeur Q , définie comme le second invariant du tenseur du gradient de vitesse, s'écrit :

$$Q = -\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (\Omega^2 - S^2) \quad (6.14)$$

On présente sur les figures 6.22 et 6.23 une analyse basée sur ce critère dans une zone d'impact, repérée par un maximum local significatif de pression à la surface. Une analyse de divers champs instantanés a permis d'en extraire une vision représentative. Dans les deux cas de condition limite, on observe un anneau tourbillonnaire (tore) qui se forme à la périphérie de l'impact. Cet anneau est bien mis en évidence avec le critère Q . Les champs de vitesses tracés sur les iso-contours montrent bien que l'axe de rotation dans l'anneau est contenu dans un plan parallèle à la surface. Si on observe plusieurs instants, on remarque que l'anneau se forme avant l'impact du paquet fluide avec la surface. Sa formation est donc indépendante de la condition limite, ce qui est confirmé par les figures 6.22 et 6.23, où la taille des anneaux observés est comparable dans les deux cas.

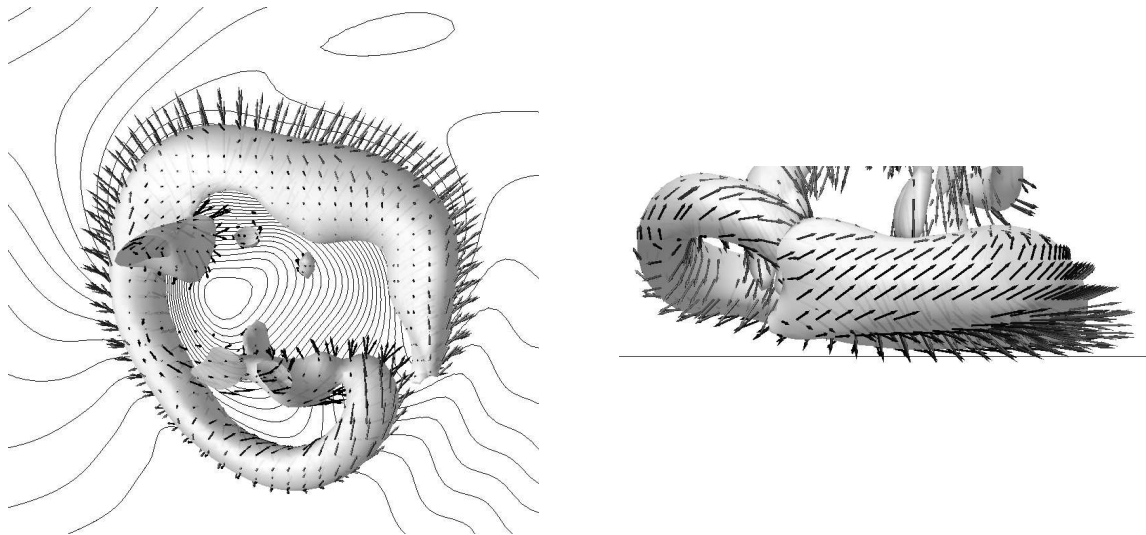


FIG. 6.22 – Cas SL_A : Gauche : Visualisation d'un "splat"    l'aide du critère Q (vue de la zone forcée en direction de la surface libre). Vecteurs vitesse sur l'iso-surface $Q = 5$ et contours de pression dans le plan de la surface libre
Droite : Vue de coté, le trait horizontal indique le plan de la surface libre.

On peut expliquer la formation de cet anneau, en reprenant le modèle d'une sphère rigide impactant la surface évoqué dans le paragraphe 6.2.4. Dans l'étude de l'écoulement autour d'une sphère, le nombre de Reynolds calculé avec le diamètre de la sphère détermine plusieurs régimes de sillage. Lorsqu'il est

faible et de l'ordre de 100, le sillage est stable et un anneau tourbillonnaire se forme dans le voisinage immédiat de la sphère. C'est ce qu'on semble observer ici. Cet anneau tourbillonnaire est donc plus généralement représentatif du sillage d'une masse fluide en mouvement. Il présente les caractéristiques suivantes :

1. Il est généré par la zone de cisaillement périphérique au paquet fluide en mouvement, avant son impact avec la zone de blocage.
2. Sa formation est indépendante du type de surface de blocage.
3. Sa nature est dépendante d'un nombre de Reynolds local, qui pourrait être construit à partir de la longueur caractéristique des splat l_s , de la viscosité et de la vitesse caractéristique des structures énergétiques de l'écoulement dans cette région.

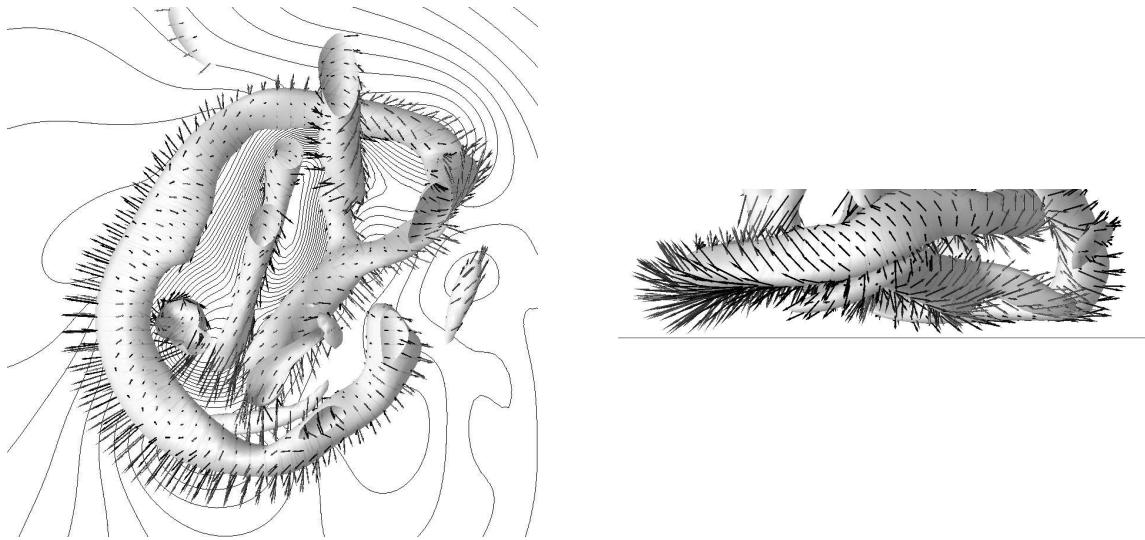


FIG. 6.23 – Cas PA_A : Gauche : Visualisation d'un "splat" à l'aide du critère Q (vue de la zone forcée en direction de la paroi). Vecteurs vitesse sur l'iso-surface $Q = 5$ et contours de pression dans le plan de la paroi
Droite : Vue de côté, le trait horizontal indique le plan de la paroi.

6.4.2 Conséquence sur le terme de corrélation pression-déformation

Pour identifier les mécanismes qui contribuent à donner un signe négatif à la corrélation pression-déformation conditionnée par les événements d'étirement (Π_{33}^+), on visualise des coupes des mêmes impacts isolés précédemment. Dans le cas de la surface libre (figure 6.24), on distingue l'écoulement descendant autour duquel l'anneau tourbillonnaire s'est formé. Les isobares mettent en évidence un maximum local de pression au niveau du point d'arrêt, ainsi que des minimums locaux, dont le plus intense peut être associé à l'anneau tourbillonnaire. L'éjection de fluide se fait de manière essentiellement tangentielle et radiale à la surface libre en accord avec la condition de glissement. Cet événement contribue donc au signe négatif de Π_{33}^- dans la zone du point d'arrêt. A l'opposé, les remontées de fluide s'effectuent loin de l'impact, et ne sont pas corrélées à des variations de pression significatives. On peut donc concevoir que Π_{33}^+ est statistiquement nul dans cette région.

Le phénomène est similaire en présence d'une paroi adhérente (figure 6.25). À l'impact, une couche de cisaillement se crée à la périphérie du point d'arrêt, par adhérence à la paroi. On remarque cependant

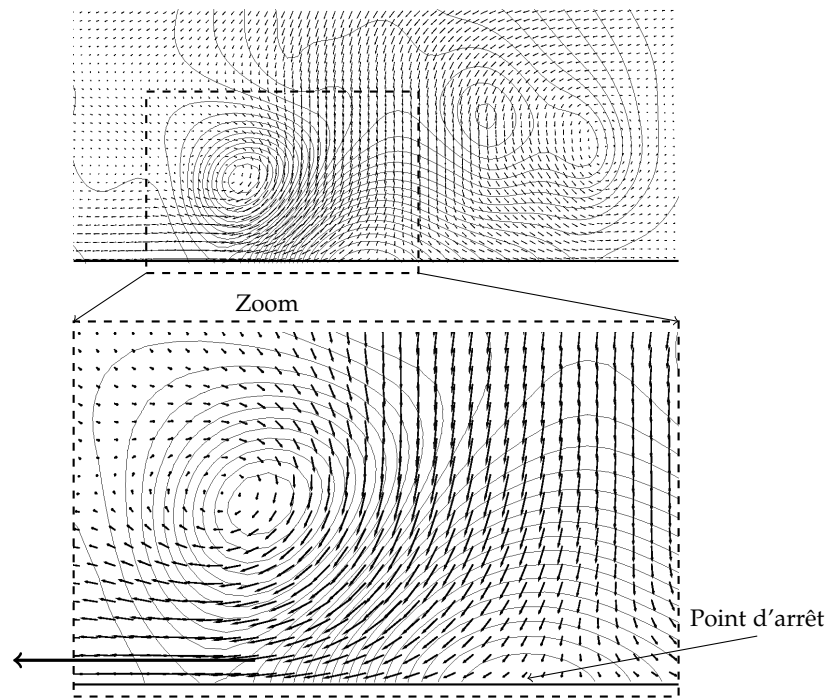


FIG. 6.24 – Coupe d'un splat dans un plan normal à la surface libre : projection des vecteurs vitesse dans le plan et isobares.

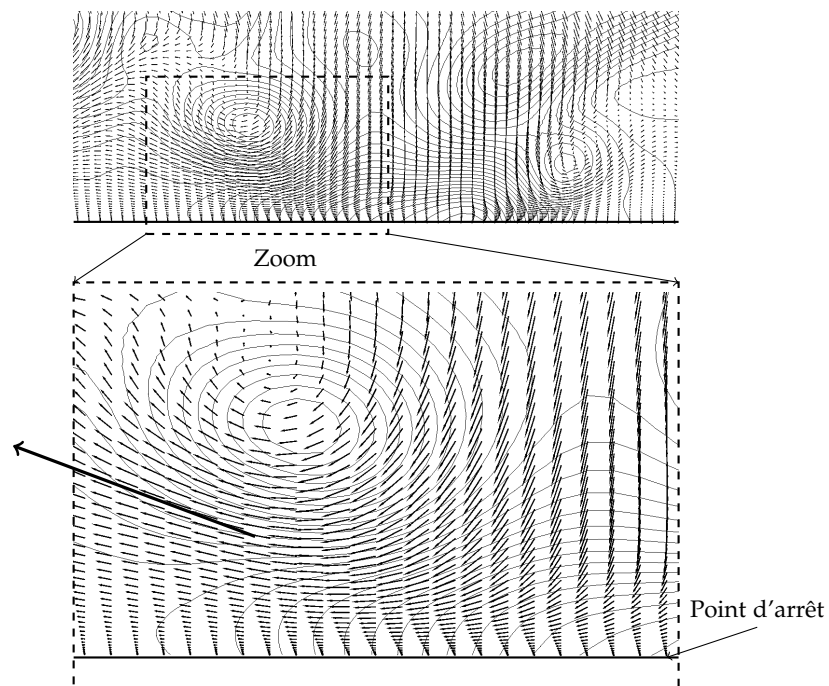


FIG. 6.25 – Coupe d'un splat dans un plan normal à la paroi : projection des vecteurs vitesse dans le plan et isobares.

que l'éjection s'accompagne d'une remontée de fluide à proximité immédiate de la zone d'impact. On peut expliquer cela en invoquant la conservation de la masse et le développement d'une couche de "cisaillement". Cette couche possède en fait les propriétés d'une couche limite si bien qu'elle induit un déficit de débit caractérisé par une épaisseur de déplacement qui augmente à mesure que l'on s'éloigne du point d'arrêt. Le fluide est donc éjecté avec une composante de vitesse verticale, pour compenser la perte de débit et respecter la conservation de la masse.

L'interaction qui s'établit entre l'impact et la viscosité engendre donc des effets inattendus dans le cas où la paroi est adhérente. Les structures générées dans le sillage des paquets fluides en mouvements associés au frottement pariétal contraignent fortement les remontées de fluide à faible nombre de Reynolds. Le mécanisme identifié ici est à l'origine de remontées de fluide ($\partial_z w < 0$) qui s'accompagnent de dépressions. Ce type d'événements contribue donc au signe négatif de Π_{33} qui traduit un transfert intercomposantes depuis la contrainte $\bar{w}^2$ vers la contrainte $\bar{u}^2$. La figure 6.26 résume cette interprétation de l'impact et de ses effets en fonction de la condition limite imposée.

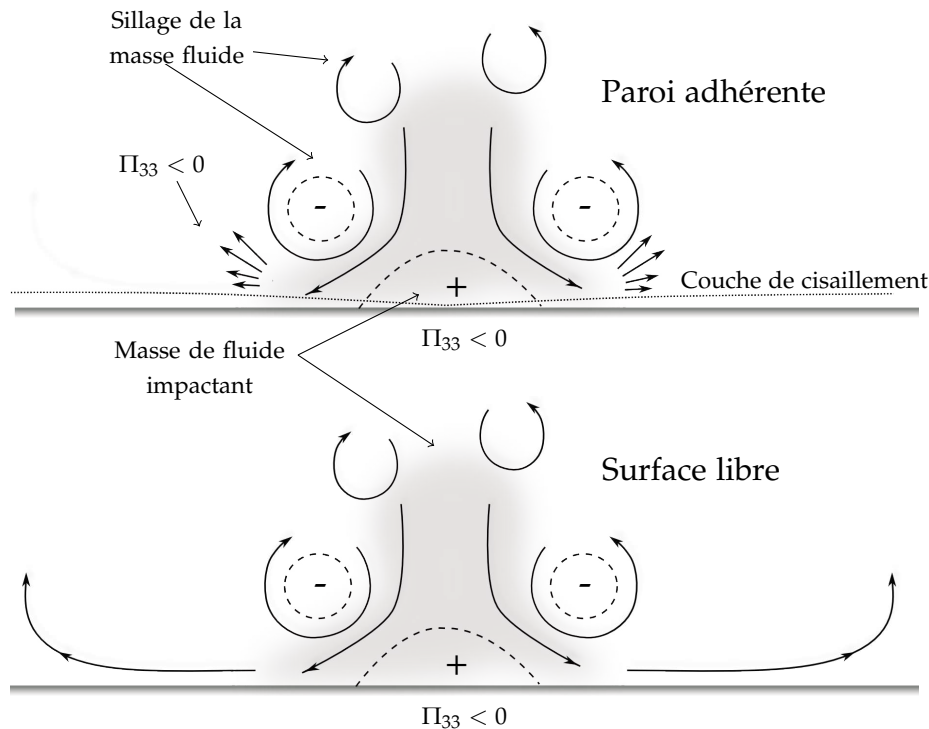


FIG. 6.26 – Proposition de schéma pour les impacts avec une surface de blocage.

SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Une observation des champs instantanés ainsi qu'une approche statistique conjuguée des variables p et $\frac{\partial w}{\partial z}$ a permis de proposer une nouvelle interprétation du transfert intercomposantes qui se manifeste au voisinage d'une surface de blocage. On confirme que, conformément aux résultats de Perot et Moin (1995) et Walker et al. (1996), le montant de ce transfert se déduit essentiellement du déséquilibre qui s'établit entre les événements de type splat et anti-splat.

Ce déséquilibre, quand il existe, possède deux origines bien distinctes :

1. La dissymétrie intrinsèque de la distribution de vitesse de l'écoulement dans la zone externe au blocage. Cette caractéristique est indépendante du type de condition limite appliquée. L'origine du déséquilibre est ici liée aux propriétés de la turbulence "incidente".
2. La viscosité, dont les effets se manifestent lorsque la paroi est adhérente. Le frottement exercé par la paroi empêche la formation d'anti-splats. Les remontées de fluides se font alors à la périphérie des impacts par un mécanisme que l'on ne peut pas associer à des anti-splats, puisqu'elles ne résultent pas de collisions entre paquets fluides en mouvement le long de la surface avec création d'une surpression.

Une étude des facteurs de dissymétrie permet de comprendre comment naît ce déséquilibre. La proportionnalité qui s'établit entre la distribution du champ de vitesse et celle de son gradient à la surface de blocage amène une ambiguïté pour déterminer quelle distribution est à l'origine du déséquilibre. Cependant, si on considère un paquet fluide qui arrive à la surface avec une vitesse normale élevée, celle-ci se transforme en un gradient de vitesse élevé par effet de blocage. On peut donc penser que la dissymétrie du gradient normal de vitesse observée dans un voisinage immédiat de la surface de blocage est une conséquence de la dissymétrie de la composante normale du champ de vitesse.

Dans la configuration étudiée, la dissymétrie observée dans les champs de vitesse est à la faveur du fluide impactant la surface. Les vitesses descendantes sont généralement plus élevées que les vitesses ascendantes, et s'établissent sur une section (parallèle à la surface) plus faible, afin de satisfaire la conservation de la masse. On montre que cette caractéristique n'est pas propre à la configuration étudiée, mais concerne plus généralement toutes les parties d'un écoulement situées loin de la zone où s'opèrent les mécanismes de production de la turbulence, ce qui est le cas des zones de blocage en général.

Contrairement aux simulations effectuées par Perot et Moin (1995) ou Walker et al. (1996), on obtient un déséquilibre net entre splats et anti-splats dans le cas de la surface libre. Les résultats ne sont pas contradictoires. Ils s'expliquent par la nature de l'écoulement lors de l'insertion brutale d'une surface de blocage dans un écoulement turbulent homogène. Les propriétés d'une turbulence en décroissance temporelle ne sont pas identiques à celles d'une turbulence en décroissance spatiale : dans le premier cas, le facteur de dissymétrie du champ de vitesse est nul à l'instant initial et évolue sans doute très peu par la suite, comme le montre le niveau des termes de diffusion turbulente obtenus dans ces simulations. La configuration étudiée par ces auteurs ne permet donc pas de représenter des effets non-locaux, intrinsèques à la nature de l'écoulement au-delà de la couche de blocage. Ceci explique le faible déséquilibre splats/anti-splats qui s'établit dans ce cas.

L'analyse en quadrants permet de mettre en évidence les événements qui contribuent significativement à la corrélation pression-déformation. Elle permet également de révéler une échelle caractéristique des splats et anti-splats. Pour les différents nombres de Reynolds étudiés, cette échelle caractéristique est constante lorsqu'elle est normée par la longueur $\mathcal{L}$, définie à partir du facteur d'isotropie. Ce résultat montre que l'anisotropie dans le voisinage de la surface de blocage est une conséquence directe du mécanisme splat/anti-splat dans cette région. La longueur $\mathcal{L}$ est donc caractéristique (i) de la taille des splats/anti-splats (ii) de l'anisotropie qui en résulte. Lors du contact avec une paroi adhérente, on observe que les remontées de fluides se font à proximité immédiate de la zone d'impact, sous l'effet du frottement pariétal. On ne peut plus les associer aux événements d'anti-splats. La nature de ces remontées est conditionnée par le type de sillage engendré par la masse fluide en mouvement. Elle

est donc dépendante de la taille des structures énergétiques qui impactent la paroi, de leur vitesse et de la viscosité. Cependant, le cas le plus résolu (*PA_C*) montre que l'effet de ces remontées sur la corrélation pression-déformation diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente. En effet la statistique conditionnelle Π_{33}^+ construite à partir des événements d'étirement semble tendre vers une valeur nulle en zone de proche-paroi.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

CETTE thèse s'inscrit dans le cadre des travaux conduits dans le département sur la turbulence de paroi, et plus particulièrement en prolongement de l'étude de Campagne (2006). Cette étude avait pour objet l'interaction d'une turbulence non cisailée avec une surface libre. Une configuration numérique, analogue à l'expérience de grille oscillante a été imaginée, qui permet de synthétiser de la turbulence en l'absence d'écoulement moyen, et met ainsi en évidence le transfert énergétique intercomposantes qui s'exerce sous l'effet d'une contrainte de blocage cinématique.

Afin de mesurer l'influence de la viscosité, on a repris dans cette étude la configuration imaginée par Campagne (2006), en y appliquant cette fois une condition limite de paroi adhérente. Les limites de l'approche tout-spectral adoptée dans le code de calcul utilisé précédemment nous ont conduit à développer un nouveau code de calcul, qui repose sur une discrétisation par différences finies dans la direction normale à la surface de blocage, et une discrétisation spectrale dans les deux autres directions. Des schémas compacts ont été dérivés sur un maillage décalé pression-vitesse, afin d'assurer un haut niveau de précision. La méthode numérique globale a été validée dans la configuration d'écoulement turbulent en canal plan, en comparant les résultats obtenus à ceux de Kim et al. (1987). Une attention particulière a été portée à la parallélisation du code de calcul, afin de pouvoir utiliser de manière optimale les moyens de calculs actuels. L'outil numérique ainsi développé permet maintenant de calculer différentes situations d'écoulement incompressible sur plusieurs milliers de processeurs, avec des tailles de maillage conséquentes, de l'ordre du milliard de points. Cet outil est donc particulièrement adapté à l'étude de la turbulence par simulation directe, où la multiplication du nombre de points de maillage, permet d'augmenter la valeur du nombre de Reynolds de l'écoulement étudié et ainsi améliorer l'intérêt physique des phénomènes observés.

Pour reproduire une configuration similaire à celle étudiée par Campagne (2006), il a fallu reconstruire une nouvelle méthode de production de la turbulence, définie dans l'espace physique plutôt que dans l'espace spectral. À ce titre, une nouvelle approche a été développée, qui repose sur une juxtaposition de champs de force élémentaires à divergence nulle. Dans cette technique, le champ de force est modulé par un signal décorrélé en temps, ce qui se traduit par un meilleur contrôle du montant de dissipation qui s'établit dans le domaine. On peut ainsi spécifier un maillage *a priori*, cohérent avec les contraintes spatiales imposées par la résolution des plus petites échelles de longueur de l'écoulement. La turbulence synthétisée par cette méthode présente, dans la couche de forçage, des caractéristiques proches de celles observées dans une situation de turbulence strictement homogène.

Les résultats obtenus dans cette étude permettent de dégager la structure de l'écoulement qui s'établit sous l'influence des deux types de conditions limites. L'étude du facteur d'isotropie conduit à une problématique à deux échelles dans l'établissement du niveau d'anisotropie au sein de la zone de blocage, selon qu'on se situe au voisinage de la surface ou dans la région lointaine. La majorité du transfert énergétique intercomposantes s'opère au voisinage de la surface et incite à reprendre la suggestion de Campagne (2006) consistant à utiliser la pente à l'origine du facteur d'isotropie pour définir une échelle de longueur $\mathcal{L}$ caractéristique du phénomène. L'indépendance de $\mathcal{L}$ vis-à-vis du type de condition limite appliqué, montre que ce sont les effets liés à la condition cinématique d'imperméabilité, commune

aux deux types de conditions limites (*i.e.* $w = 0$), qui construisent cette échelle de longueur. En associant à cette dernière le montant de dissipation à la surface ε_0 , on réussit à normer remarquablement l'évolution des termes de transfert intercomposantes de l'équation bilan des contraintes de Reynolds. L'évolution au voisinage de la surface du terme de corrélation pression-déformation, est ainsi particulièrement insensible à la valeur du nombre de Reynolds avec cette normalisation. Ceci permet d'établir sans ambiguïté la localisation et la valeur du maximum observé au voisinage de la surface. On met par ailleurs en évidence l'existence de sous-couches liées aux différentes conditions limites de nature dynamique utilisées. Dans le cas de la surface libre, l'orientation verticale de la vorticité imposée par l'absence de frottement à la surface bidimensionnalise la turbulence. Ceci provoque une chute de la dissipation dans une sous-couche de "glissement". Dans le cas de la paroi adhérente, une sous-couche "visqueuse" s'établit sous l'action du frottement pariétal et entraîne une augmentation des termes de dissipation et diffusion moléculaire dans les bilans des tensions de Reynolds en proche paroi.

L'origine du transfert intercomposantes est étudiée par l'intermédiaire d'une analyse simultanée des champs de pression et de déformation. L'observation de champs instantanés, ainsi que des analyses statistiques en quadrant, permettent de relever les mécanismes élémentaires qui participent à ce transfert. On retrouve dans cette configuration une phénoménologie de type *splat/anti-splat*, pour reprendre la terminologie introduite par Perot et Moin (1995). Le déséquilibre entre les splats et les anti-splats fixe le montant du transfert intercomposantes, qui est lui même responsable du niveau d'anisotropie qui s'établit dans la région. On trouve cependant, contrairement à Perot et Moin, deux origines bien distinctes dans l'existence de ce déséquilibre. La première, concerne la dissymétrie intrinsèque du champ de vitesse en dehors de la zone de blocage. On montre dans notre cas que cette dissymétrie est caractéristique de la turbulence en diffusion. La configuration d'étude est donc particulièrement représentative de situations où la turbulence est produite loin de la paroi, comme c'est généralement le cas. La deuxième raison qui conduit au déséquilibre entre splats et anti-splats réside dans les effets de viscosité qui se manifestent au voisinage d'une paroi adhérente et suppriment l'action des anti-splats. On rejoint ici l'explication avancée par Perot et Moin.   ces deux sources principales de transfert intercomposantes, s'ajoute un effet secondaire : la combinaison des  v nements de splats et d'une condition limite de paroi adhérente conduit à des mécanismes qui renforcent encore l'anisotropie au voisinage de la paroi. Ainsi, les remontées de fluide deviennent dans ce cas étroitement liées à la dépression tourbillonnaire qui entoure la zone d'impact. Ce phénomène entraîne dans cette zone un transfert intercomposantes depuis la contrainte déficitaire $\overline{w^2}$ vers la contrainte excédentaire $\overline{u^2}$.

Les perspectives qui s'ouvrent à l'issue de ce travail concernent plusieurs aspects. Tout d'abord, les résultats établis ici semblent mûrs pour l'élaboration de modèles de fermeture au second ordre. Leur construction nécessitera sans doute d'étudier l'influence du cisaillement moyen sur les mécanismes observés. Une telle étude permettrait aussi de discuter la légitimité de la décomposition partie lente/partie rapide du terme de cor relation pression-déformation d'un point de vue de la modélisation. S'agissant de l'analyse physique des mécanismes qui participent au transfert intercomposantes, on peut envisager la construction d'une configuration axisymétrique permettant de représenter le phénomène élémentaire de *splat/anti-splat*. Un cas simple permettrait une étude paramétrique dont les axes seraient la variation de la dissymétrie de l'écoulement, d'une part, et le changement de la condition à la limite appliquée, d'autre part.

ANNEXES

A

SOMMAIRE

A.1	ANALYSE EN QUADRANT DES SIMULATIONS A	144
A.2	OBSERVATION SIMULTANÉE DES DENSITÉS DE PROBABILITÉS CONJOINTES ET DES CHAMPS INSTANTANÉS	146
A.3	BILAN DES TENSIONS DE REYNOLDS, AVEC REGROUPEMENT DES TERMES LIÉS À LA FLUCTUATION DE PRESSION.	151

A.1 ANALYSE EN QUADRANT DES SIMULATIONS A

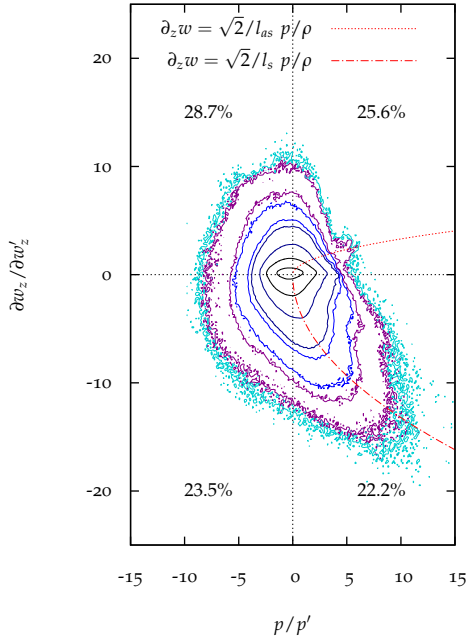


FIG. A.1 – Densité conjointe de probabilité obtenue à l'altitude z_{ref} dans le cas SL_A

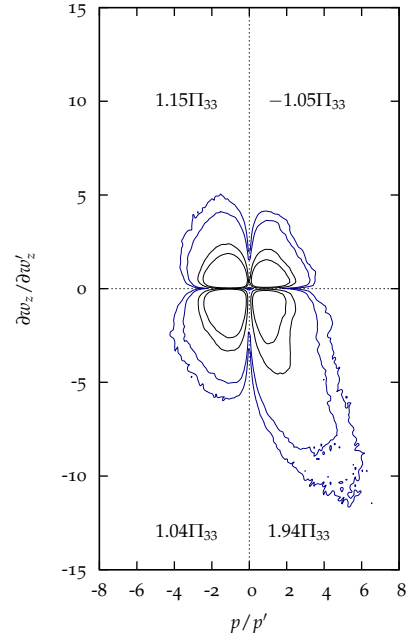


FIG. A.2 – Iso-contributions à Π_{33} obtenues à l'altitude z_{ref} dans le cas SL_A

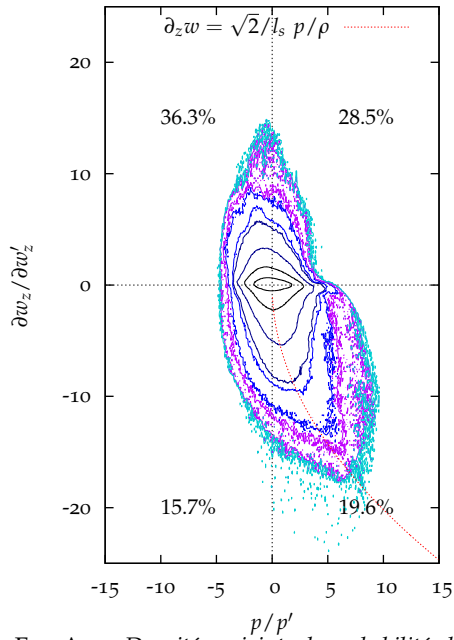


FIG. A.3 – Densité conjointe de probabilité obtenue à l'altitude z_{ref} dans le cas PA_A

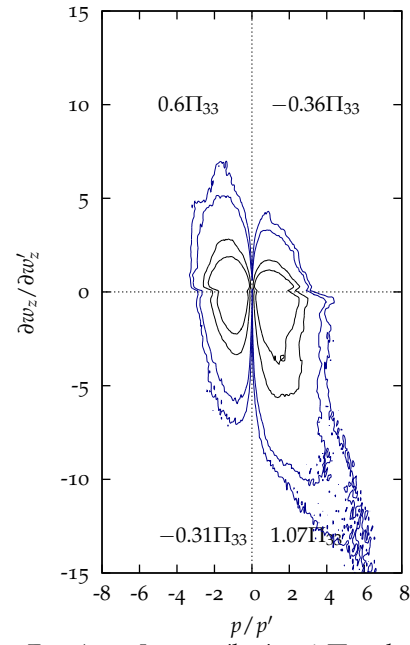


FIG. A.4 – Iso-contributions à Π_{33} obtenues à l'altitude z_{ref} dans le cas PA_A

A.2 OBSERVATION SIMULTANÉE DES DENSITÉS DE PROBABILITÉS CONJOINTES ET DES CHAMPS INSTANTANÉS

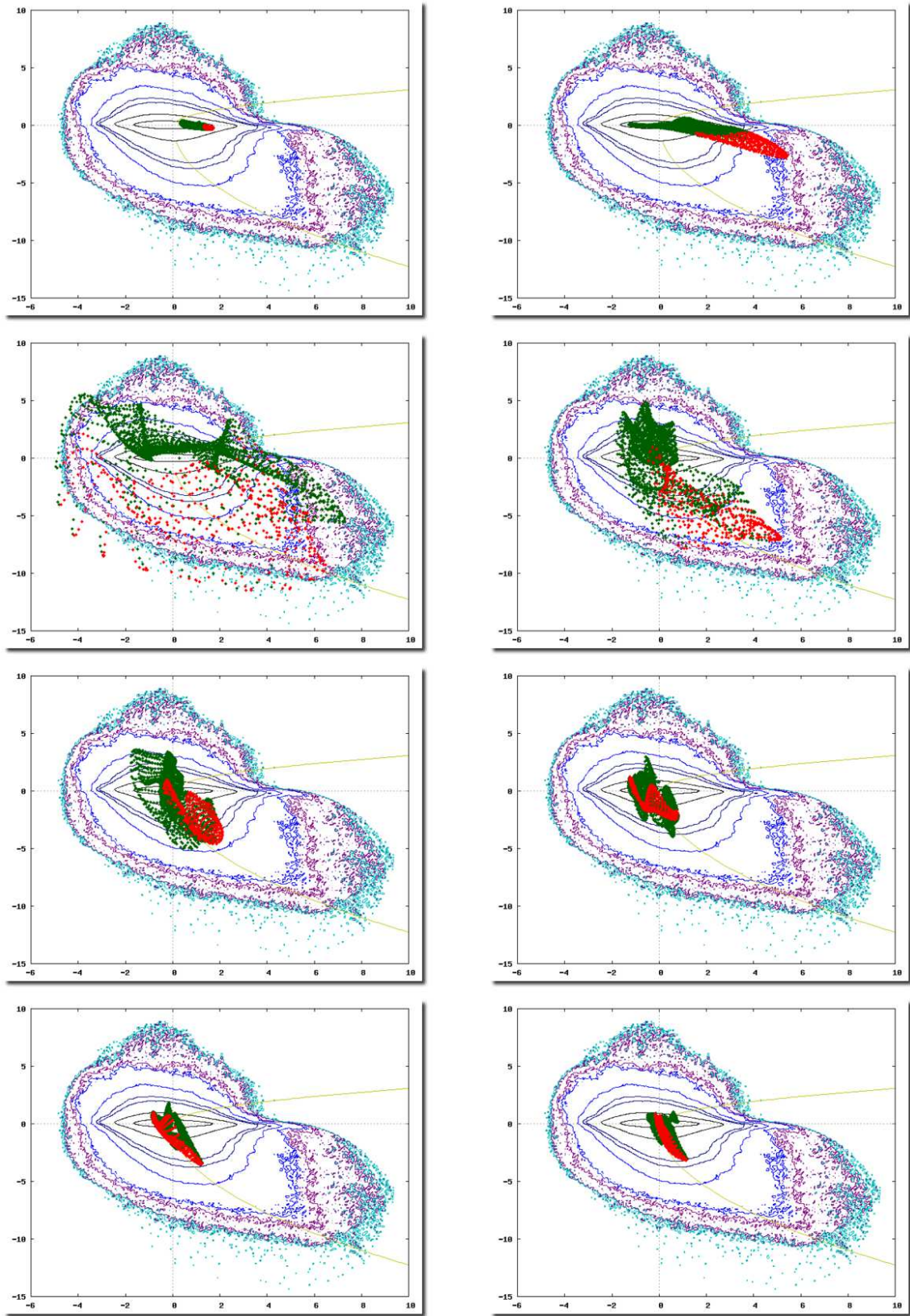


FIG. A.5 – Report des évènements observés sur la figure A.6 dans les zones rouges et vertes sur la densité de probabilité conjointe de p et $\partial_z w$ (Paroi adhérente).

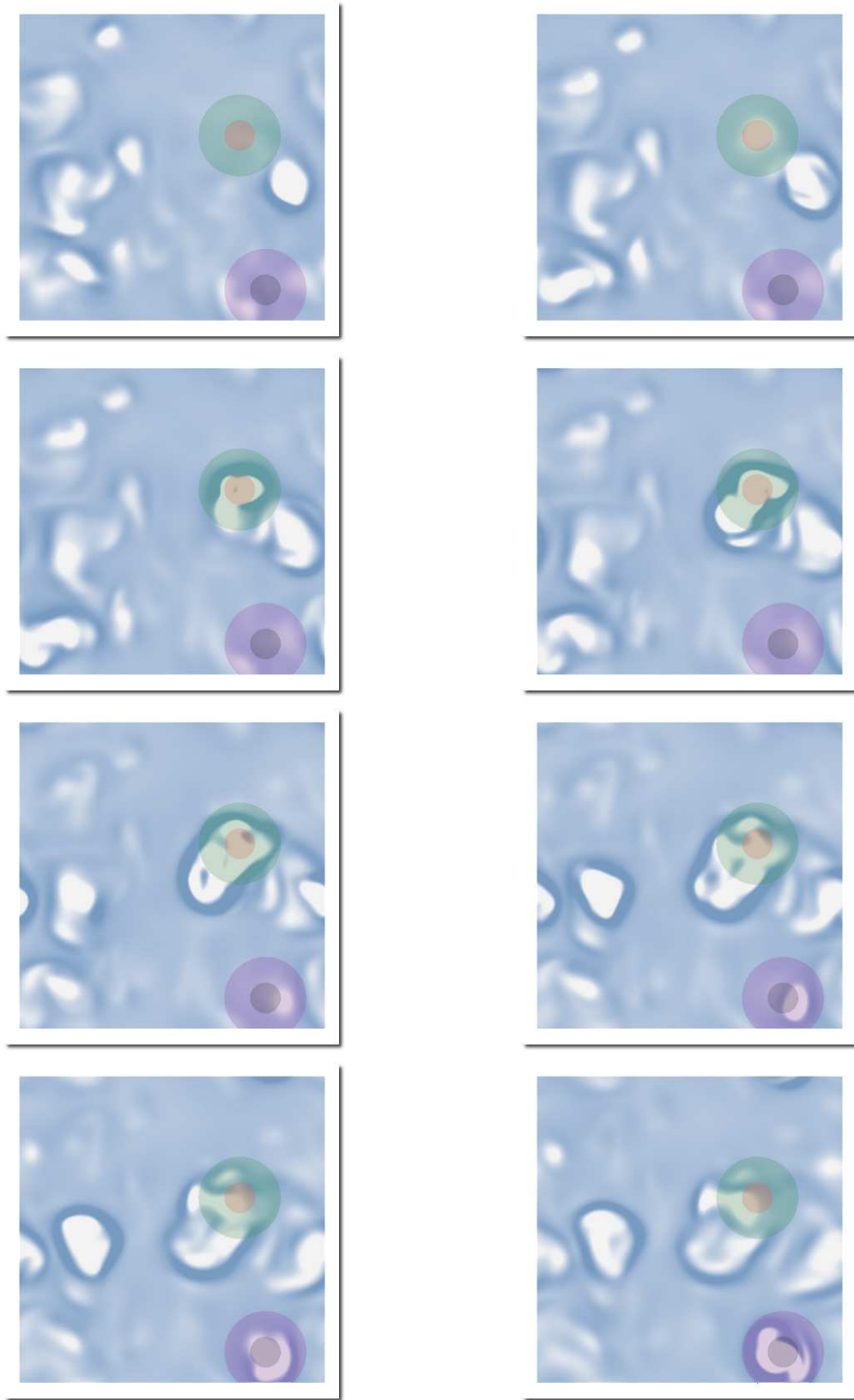


FIG. A.6 – Séquence de champs de déformation verticale $\partial_z w$ instantanés. La couleur code le signe de la déformation, du blanc(négatif) au bleu(positif). Cas PA_A.

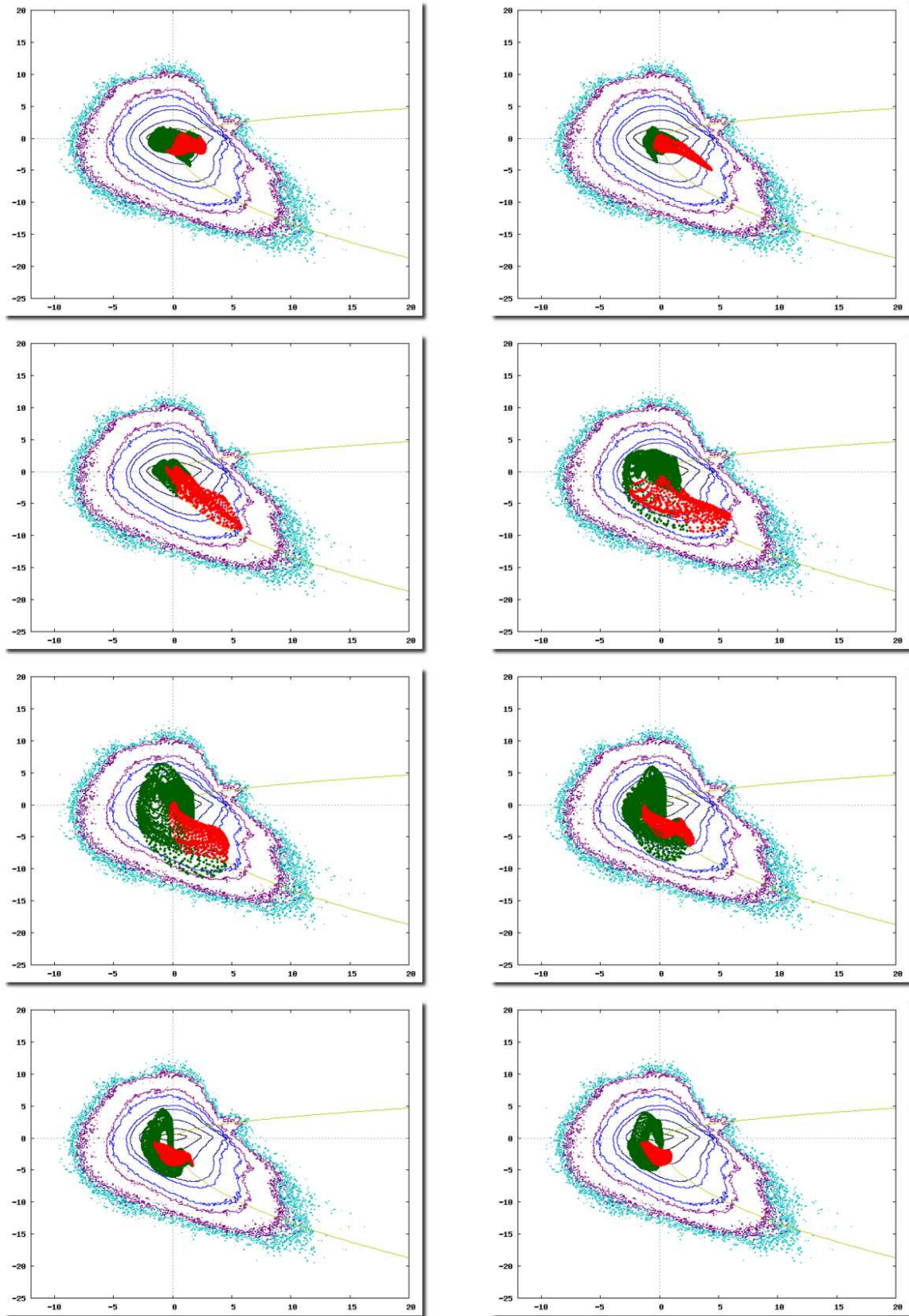


FIG. A.7 – Report des évènements observés sur la figure A.8 dans les zones rouges et vertes sur la densité de probabilité conjointe de p et $\partial_z w$ (Surface libre).

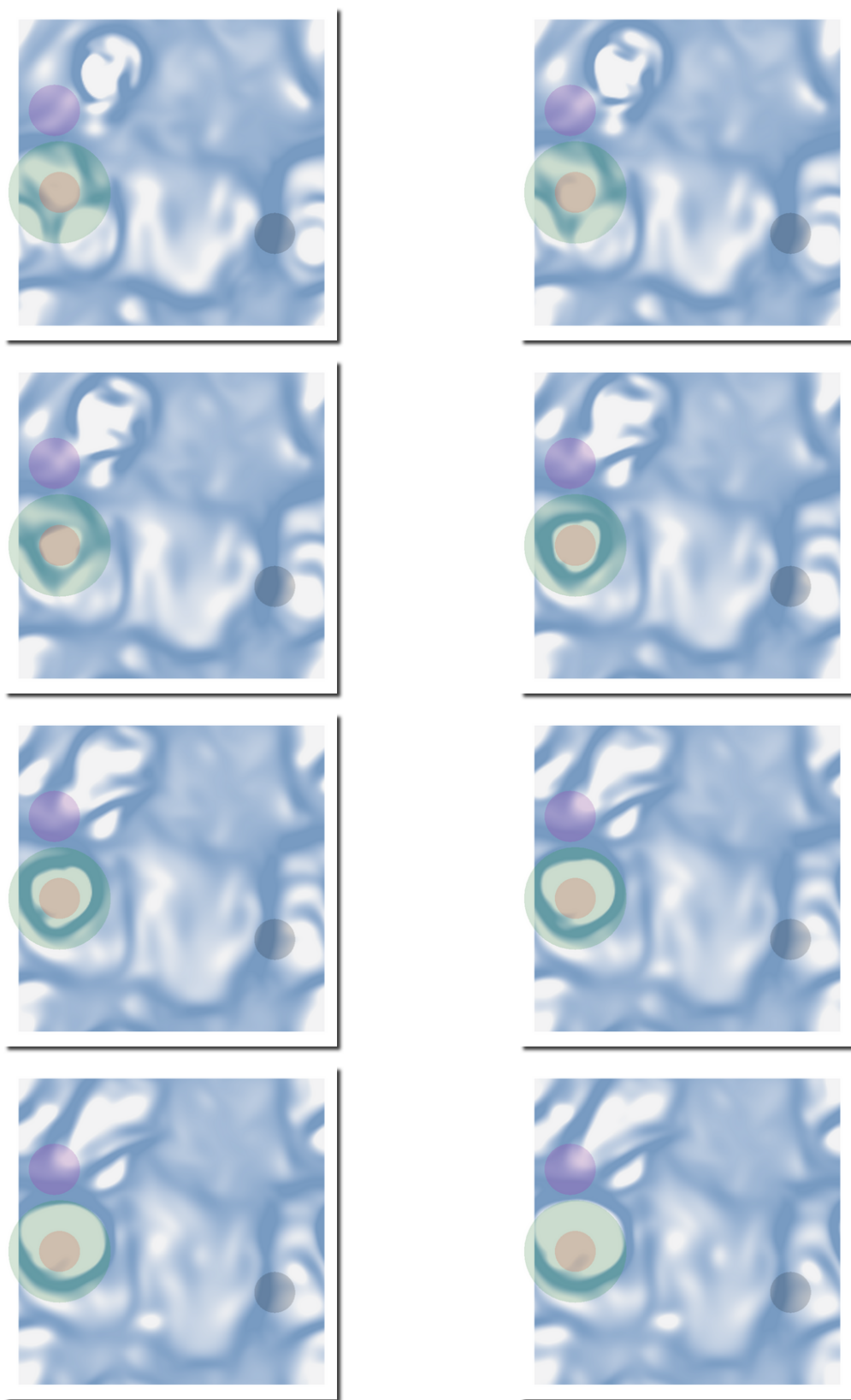


FIG. A.8 – Séquence de champs de déformation verticale $\partial_z w$ instantanés. La couleur code le signe de la déformation, du blanc(négatif) au bleu(positif). Cas SL_A.

A.3 BILAN DES TENSIONS DE REYNOLDS, AVEC REGROUPEMENT DES TERMES LIÉS À LA FLUCTUATION DE PRESSION.

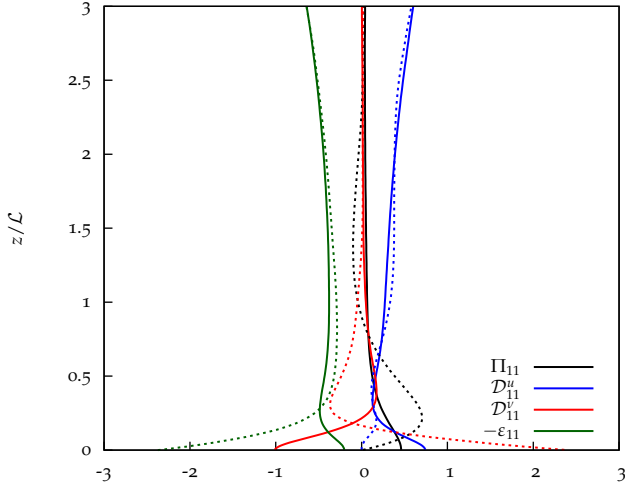


FIG. A.9 – Bilan des tensions de Reynolds $\overline{u^2}$.
 Traits pleins - SL_B, pointillés - PA_B .
 $\varepsilon_c = \varepsilon(z = 3\mathcal{L})$.

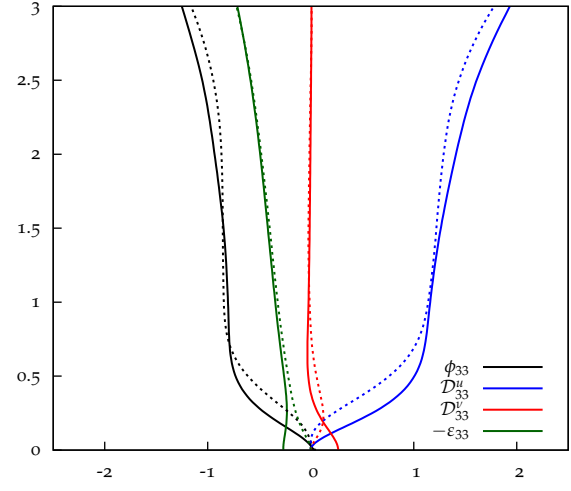


FIG. A.10 – Bilan des tensions de Reynolds $\overline{w^2}$.
 Traits pleins - SL_B, pointillés - PA_B .
 $\varepsilon_c = \varepsilon(z = 3\mathcal{L})$.

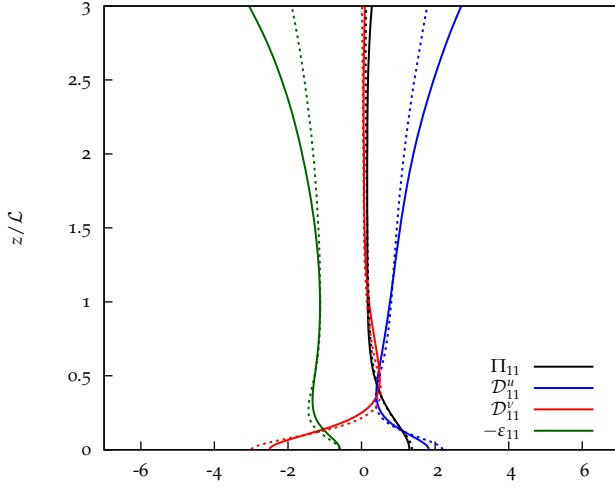


FIG. A.11 – Bilan des tensions de Reynolds $\overline{u^2}$ en surface libre. Traits pleins - SL_A, pointillés - SL_B.
 $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$.

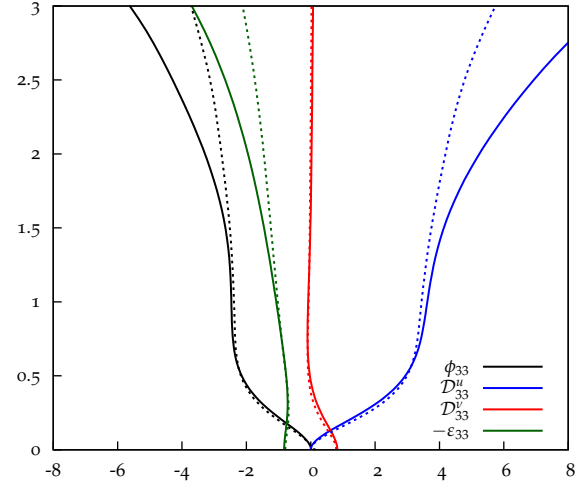


FIG. A.12 – Bilan des tensions de Reynolds $\overline{w^2}$ en surface libre. Traits pleins - SL_A, pointillés - SL_B.
 $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$.

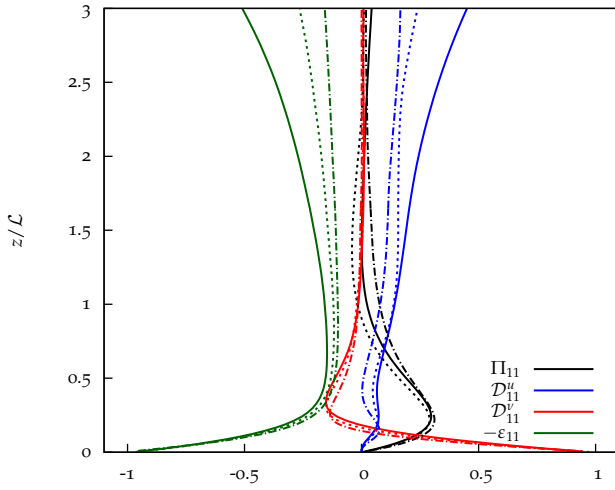


FIG. A.13 – Bilan des tensions de Reynolds $\overline{u^2}$ en paroi adhérente. Traits pleins - PA_A, pointillés - PA_B, traits discontinus -PA_C. $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$.

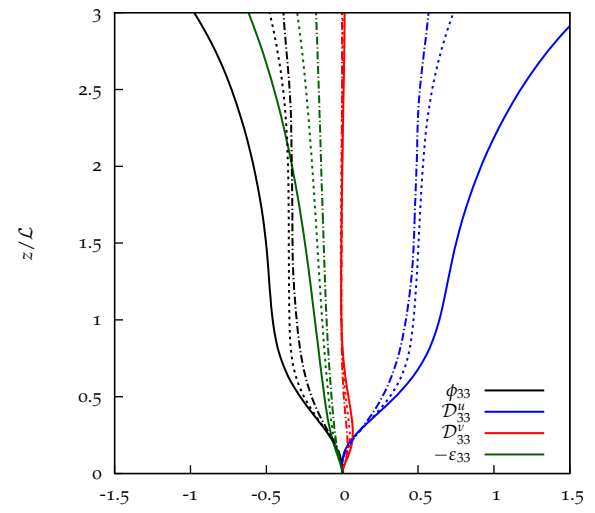


FIG. A.14 – Bilan des tensions de Reynolds $\overline{w^2}$ en paroi adhérente. Traits pleins - PA_A, pointillés - PA_B, traits discontinus -PA_C. $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$.

BIBLIOGRAPHIE

Large scale simulation of turbulence using a hybrid spectral/finite difference solver, 2009.

- S. Abide et S. Viazzo. A 2d compact fourth-order projection decomposition method. *Journal of Computational Physics*, 206(1) :252–276, June 2005. (Cité pages 38, 41 et 45.)
- K. Alvelius. Random forcing of three-dimensional homogeneous turbulence. *Physics of Fluids*, 11 : 1880–1889, July 1999. (Cité pages 66 et 70.)
- S. Armfield. Finite difference solutions of the navier-stokes equations on staggered and non-staggered grids. *Computers & Fluids*, 20(1) :1–17, 1991. ISSN 00457930. (Cité page 29.)
- D. Bailey, T. Harris, W. Saphir, R. Van Der Wijngaart, A. Woo, et M. Yarrow. The nas parallel benchmarks 2.0. Rapport technique. (Cité page 54.)
- J. Bodart. Massively parallel extension of an existing DNS code using a mpi approach. Dans *Science and Supercomputing in Europe*. 2008. (Cité page 53.)
- J. Bodart, J.-B. Cazalbou, et L. Joly. Direct numerical simulation of unsheared turbulence diffusing towards a free-slip or no-slip surface. Dans *Turbulence and Shear Flow Phenomena 6*, June 2009.
- P. Bradshaw et Y. M. Koh. A note on poisson’s equation for pressure in a turbulent flow. *Physics of Fluids*, 24(4) :777, 1981. (Cité pages 16 et 114.)
- D. L. Brown, R. Cortez, et M. L. Minion. Accurate projection methods for the incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 168 :464–499, April 2001. (Cité pages 22 et 24.)
- B. H. Brumley et G. H. Jirka. Near-surface turbulence in a grid-stirred tank. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 183(-1) :235–263, 1987. (Cité pages 8 et 107.)
- I. Calmet et J. Magnaudet. Statistical structure of high-reynolds-number turbulence close to the free surface of an open-channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 474(-1) :355–378, 2003. (Cité pages xi, 98, 99, 111 et 115.)
- G. Campagne. *Simulation numérique directe de l’interaction turbulence/surface libre pour l’analyse du transfert intercomposantes*. PhD thesis, INP Toulouse, 2006. (Cité pages 4, 7, 17, 70, 86, 98, 99, 103, 115, 127 et 141.)
- G. Campagne, J.-B. Cazalbou, L. Joly, et P. Chassaing. Étude par simulation directe de l’interaction turbulence surface plane sans cisaillement en vue de l’analyse des transferts intercomposantes. Dans *Congrès français de Mécanique*. Association Française de Mécanique, 2005. (Cité page 24.)
- G. Campagne, J.-B. Cazalbou, L. Joly, et P. Chassaing. Direct numerical simulation of the interaction between unsheared turbulence and a free-slip surface. Dans *ECCOMAS CFD*, 2006. (Cité pages 3, 45 et 115.)
- G. Campagne, J.-B. Cazalbou, L. Joly, et P. Chassaing. The structure of a statistically steady turbulent boundary layer near a free-slip surface. *Physics of Fluids*, 21(6), June 2009. (Cité pages 3, 101, 106, 107, 108, 110, 111 et 112.)

- C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, et T. A. Zang. *Spectral methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1988. (Cité page 55.)
- J.-B. Cazalbou et P. Chassaing. New results on the model problem of the diffusion of turbulence from a plane source. *Physics of Fluids*, 13(2) :464–475, 2001. (Cité page 8.)
- P. Chassaing. Turbulence en mécanique des fluides. 2000. (Cité pages 11, 81 et 95.)
- I. P. D. De Silva et H. J. S. Fernando. Oscillating grids as a source of nearly isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, 6(7) :2455–2464, 1994. (Cité pages 8 et 100.)
- D. A. Donzis, P. K. Yeung, et D. Pekurovsky. Turbulence simulations on $o(10^4)$ processors. June 2008. (Cité pages 55 et 60.)
- M. Eleftheriou, J. E. Moreira, B. G. Fitch, et R. S. Germain. A Volumetric FFT for BlueGene/L. pages 194–203. 2003. (Cité page 54.)
- J. L. Estivalezes. Résolution numériques des grands systèmes linéaires.(notes de cours). 2004. (Cité page 39.)
- F. S. Godeferd et L. Lollini. Direct numerical simulations of turbulence with confinement and rotation. *Journal of Fluid Mechanics*, 393(-1) :257–308, 1999. (Cité pages 8 et 66.)
- J. W. Goodman. *Statistical Optics*. 1985. (Cité pages 67 et 128.)
- R. A. Handler, T. F. Swear, R. I. Leighton, et J. D. Swearingen. Length scales and the energy balance for turbulence near a free surface. *AIAA Journal*, 31 :1998–2007, November 1993. (Cité pages xi, 13, 103 et 111.)
- J. O. Hinze. *Turbulence*. 1959. (Cité page 114.)
- R. S. Hirsh. Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique. *Journal of Computational Physics*, 19(1) :90–109, September 1975. (Cité page 27.)
- J. C. R. Hunt et J. M. R. Graham. Free-stream turbulence near plane boundaries. *Journal of Fluid Mechanics*, 84 :209–235, January 1978. (Cité pages 99 et 108.)
- J. C. R. Hunt, A. A. Wray, et P. Moin. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. Dans *Proceedings of the 1988 Summer Program*, pages 193–208, December 1988. (Cité page 135.)
- T. Ishihara, T. Gotoh, et Y. Kaneda. Study of high-reynolds number isotropic turbulence by direct numerical simulation. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 41(1) :165–180, 2009. (Cité page 95.)
- J. Kim, P. Moin, et R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 177 :133–166, April 1987. (Cité pages x, 4, 41, 42, 43, 44, 45 et 141.)
- R. H. Kraichnan. Eddy viscosity in two and three dimensions. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 33(8) : 1521–1536, August 1976. (Cité page 76.)
- E. Lamballais. *Simulation numérique de la turbulence dans un canal tournant*. PhD thesis, 1996. (Cité pages 38, 40 et 42.)

- E. Lamballais, O. Métais, et M. Lesieur. Spectral-dynamic model for large-eddy simulations of turbulent rotating channel flow. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 12(3) :149–177, November 1998. (Cité pages 76 et 77.)
- B. E. Launder, G. J. Reece, et W. Rodi. Progress in the development of a reynolds-stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 68(03) :537–566, 1975. (Cité page 13.)
- S. K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103(1) :16–42, November 1992. (Cité pages 28, 31, 45 et 91.)
- J. Li, W. Liao, A. Choudhary, R. Ross, R. Thakur, W. Gropp, et R. Latham. Parallel netcdf : A scientific high-performance i/o interface. Jun 2003. (Cité page 58.)
- S. Liu, C. Meneveau, et J. Katz. On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 275(-1) :83–119, 1994. (Cité page 95.)
- H. Meuer, E. Strohmaier, J. Dongarra, et H. Simon. Top500(www.top500.org). (Cité page 47.)
- P. Moin et K. Mahesh. Direct numerical simulation : A tool in turbulence research. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30(1) :539–578, 1998. (Cité pages 4 et 91.)
- R. D. Moser, J. Kim, et N. N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Physics of Fluids*, 11(4) :943–945, 1999. (Cité pages xi et 107.)
- K. Nagata, P. A. Davidson, J. C. R. Hunt, Y. Sakai, et S. Komori. Direct numerical simulation of surface blocking effects on isotropic and axisymmetric turbulence. Dans *5th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP-5 Conference)*, August 2007. (Cité page 70.)
- S. A. Orszag et G. S. Patterson. Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence. *Physical Review Letters*, 28(2) :76–79, Jan 1972. (Cité pages 4 et 66.)
- Y. Pan et S. Banerjee. A numerical study of free-surface turbulence in channel flow. *Physics of Fluids*, 7(7) :1649–1664, 1995. (Cité page 14.)
- B. Perot et P. Moin. Shear-free turbulent boundary layers. part 1 : Physical insights into near wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 295 :199–227, February 1995. (Cité pages 3, 8, 98, 99, 103, 114, 115, 119, 122, 125, 126, 128, 138, 139 et 142.)
- A. Quarteroni, R. Sacco, et F. Saleri. *Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications (French Edition)*. Springer, 1 édition, September 2007. ISBN 8847004950. (Cité page 28.)
- F. Risso et J. Fabre. Diffusive turbulence in a confined jet experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 337(-1) :233–261, 1997. (Cité page 126.)
- C. Rosales et C. Meneveau. Linear forcing in numerical simulations of isotropic turbulence : Physical space implementations and convergence properties. *Physics of Fluids*, 17(9), 2005. (Cité page 70.)
- L. Shen, X. Zhang, D. K. P. Yue, et G. S. Triantafyllou. The surface layer for free-surface turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 386 :167–212, May 1999. (Cité pages xi, 103 et 111.)

- P. R. Spalart. Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 1410$. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 187(-1) :61–98, 1988. (Cité page 91.)
- N. H. Thomas et P. E. Hancock. Grid turbulence near a moving wall. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 82(03) :481–496, 1977. (Cité page 99.)
- D. T. Walker, R. I. Leighton, et Garza L. O. Rios. Shear-free turbulence near a flat free surface. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 320(-1) :19–51, 1996. (Cité pages xi, 3, 8, 103, 111, 126, 138 et 139.)
- G. Yang. *DNS of boundary forced turbulent flow in a non-rotating and a rotating system*. PhD thesis, 1992. (Cité page 66.)