



HAL
open science

Approche globale / locale non-intrusive : application aux structures avec plasticité localisée

Lionel Gendre

► **To cite this version:**

Lionel Gendre. Approche globale / locale non-intrusive : application aux structures avec plasticité localisée. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2009. Français. NNT: . tel-00449687

HAL Id: tel-00449687

<https://theses.hal.science/tel-00449687v1>

Submitted on 22 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°ENSC-2008/131



**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

Lionel Gendre

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE
CACHAN**

Domaine :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse :

**Approche globale/locale non-intrusive :
application aux structures avec plasticité locale**

Soutenue à Cachan le 18 novembre 2009 devant le jury composé de :

Olivier Allix	ENS de Cachan	Directeur de thèse
Alain Combescure	INSA de Lyon	Président
David Dureisseix	Université Montpellier 2	Rapporteur
Frédéric Feyel	ONERA	Rapporteur
Pierre Gosselet	CNRS	Co-encadrant
Jean-Pierre Lombard	Snecma	Examinateur

LMT-Cachan

ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris
61, avenue du Président Wilson
94235 CACHAN CEDEX

Je voudrais dire un grand merci...

... à l'ensemble des membres de mon jury, pour avoir bien voulu consacrer du temps à cette thèse à une période de l'année toujours difficile, pour leur considération et leur enthousiasme ; à Alain Combescure, qui a présidé ce jury avec une bonne humeur communicative ; à Frédéric Feyel et David Dureisseix, dont les questions et les suggestions toujours constructives m'ont apporté un regard nouveau sur le travail accompli ; ainsi qu'à Jean-Pierre Lombard, pour l'intérêt dont il a témoigné envers ce projet ;

... à Olivier Allix, sans qui ce sujet n'aurait jamais vu le jour, pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce thème novateur, pour m'avoir fait confiance et m'avoir laissé une grande liberté au cours de ce travail, tout en me guidant de ses conseils avisés ;

... à Pierre Gosselet, pour sa disponibilité, sa patience et sa gentillesse hors du commun, pour ses nombreuses idées et toutes les discussions enrichissantes et fort sympathiques que nous avons eues, qui m'ont apporté une aide inestimable tout au long de cette thèse ;

... à tous les membres du LMT, et tout particulièrement Michaël et Martin, présents depuis le début de cette aventure — mais également Pierre-Alain, David et Manu, qui m'ont été d'une aide précieuse lors des répétitions de la soutenance, ainsi que tous les autres, que je n'ai malheureusement pas la place de citer ici et qui ont tous fait de mes trois années de thèse un épisode vraiment agréable ;

... à François Comte, Arnaud Suffis et toute l'équipe de Snecma qui ont consacré un temps précieux à m'accueillir à plusieurs reprises à Villaroche et à suivre mes travaux, contribuant ainsi à donner une autre dimension à cette thèse ;

... et enfin, à mes parents pour avoir fait de ma soutenance un moment inoubliable, ainsi qu'à Liora, pour sa présence et son soutien sans faille au cours de ces années.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Introduction	1
1 Réanalyse locale et calcul multi-échelles : un état de l'art	5
1 Approches « ingénieur » et travaux dérivés	7
1.1 Approches descendantes	8
1.2 Approches exactes directes	12
1.3 Approches itératives	17
1.4 Techniques de collage de modèles	20
2 Approches mécaniques multi-échelles	21
2.1 Homogénéisation et méthodes multi-niveaux	22
2.2 Méthodes d'enrichissement hiérarchiques	26
2.3 Méthodes de « patchs » avec recouvrement	31
3 Stratégies de calcul à haute performance	36
3.1 Traitement de la non-linéarité	36
3.2 Méthodes multigrilles	41
3.3 Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement . .	45
4 Bilan	54
2 Présentation de la stratégie globale/locale non-intrusive	57
1 Mise en situation	58
1.1 Objectifs et contraintes	58
1.2 Points clés de la démarche	60
2 Formulation continue	62
2.1 Problème de référence	62
2.2 Décomposition globale/locale	63
2.3 Technique de résolution	67
3 Formulation par éléments finis	71
3.1 Les deux modèles	71

3.2	Principes de mise en œuvre	73
3.3	Reformulation en tant que problème d'interface	76
4	Comparaison avec quelques approches existantes	81
3	Raccord en déplacement et techniques d'accélération	85
1	Mise en évidence	87
1.1	Un exemple 2D simple	87
1.2	Étude de la convergence	88
1.3	Étude des résidus successifs	91
1.4	Principe de l'accélération de convergence	92
2	Accélération quasi-Newton	93
2.1	Principes d'utilisation	94
2.2	Solution retenue	99
3	Accélération par condensation du problème tangent	102
3.1	La méthode de Newton sur le problème d'interface	103
3.2	Illustration	106
3.3	Approximations de la rigidité tangente	108
4	Bilan	110
4	Raccord mixte	113
1	Objectifs	115
1.1	Pourquoi un raccord mixte ?	115
1.2	Ecriture du raccord	116
1.3	Cas d'optimalité	117
2	Approximations du complément de Schur	118
2.1	Approximations « courte distance »	118
2.2	Approximations par homogénéisation discrète	121
2.3	Approximations multi-échelles	127
3	Correction globale mixte	134
3.1	Ecriture de la correction globale	134
3.2	Mise en œuvre sans accélération	136
3.3	Mise en œuvre avec accélération SR1	138
4	Perspectives d'amélioration	141
5	Mise en œuvre autour d'un logiciel du commerce	145
1	Principe de la mise en œuvre	146
1.1	L'environnement de calcul d'Abaqus/Standard	146
1.2	Structure de l'implémentation	149
2	Quelques problèmes rencontrés	150
2.1	Accès aux efforts intérieurs	151
2.2	Mise en œuvre dans un schéma incrémental	153
2.3	Appel du comportement tangent local	154
2.4	Non-conservation de la factorisation globale	154

3	Un exemple de script	156
6	Illustrations	161
1	Un exemple 2D simple	162
1.1	Les solutions successives	163
1.2	Convergence et critères d'arrêt	167
1.3	Quelques sources d'erreur possibles	174
2	Un exemple 3D d'origine industrielle	181
2.1	Limites de l'analyse descendante	182
2.2	Application de la méthode	184
	Conclusion	191
	Bibliographie	195

Table des figures

1	Exemple d'analyse descendante sur un panneau de fuselage subissant un flambage local (P. Cresta).	3
1.1	Un modèle global et un modèle local raffiné.	8
1.2	Exemple de maillages compatible et incompatible avec le maillage global de la Figure 1.1.	9
1.3	Raccord en déplacement équivalent à la méthode SBSF.	12
1.4	Terme d'enrichissement de la méthode RGL, schématisé en 1D	18
1.5	Principe de l'analyse micro/macro	25
1.6	Principe de la projection de Dirichlet homogénéisée (HDPM).	27
1.7	Principe de la méthode <i>hp-d</i>	30
1.8	Principe de la <i>splitting method</i> dans le cas d'un seul site de fissuration. 33	
1.9	Exemple de décomposition avec recouvrement et zone de collage pour la méthode Arlequin	34
1.10	Principe de la méthode de Newton (N), de Newton modifiée (M) ou quasi-Newton (QN).	39
1.11	Principe d'une itération de la méthode LaTIn.	41
1.12	Principe des méthodes multigrilles	42
1.13	Exemple de décomposition de domaine sans recouvrement	46
2.1	Schéma de principe de la stratégie étudiée.	61
2.2	Problème de référence continu.	62
2.3	Problèmes global et local au niveau continu.	67
2.4	Problème global correctif continu.	69
2.5	Problèmes éléments finis global, local et de référence.	72
2.6	Schématization du problème non-linéaire d'interface.	78
2.7	Schématization d'une itération de la variante en déplacement.	79
2.8	Schématization d'une itération de la variante mixte.	79
3.1	Un cas-test 2D élasto-plastique avec changement de géométrie.	87
3.2	Convergence des déplacements d'interface, sans accélération.	89
3.3	Convergence des déformations plastiques cumulées, sans accélération. 90	
3.4	Tracés des six premiers résidus, sans accélération	92
3.5	Un opérateur sécant par rapport à l'admissibilité locale	95

3.6	Convergence des déplacements d'interface, avec ou sans accélération SR1.	101
3.7	Convergence des déformations plastiques cumulées, avec ou sans accélération SR1.	101
3.8	Tracés des six premiers résidus, avec accélération SR1	102
3.9	Convergence des déplacements d'interface, avec les trois types de correction globale.	106
3.10	Convergence des déformations plastiques cumulées avec les trois types de correction globale.	106
3.11	Tracés des six premiers résidus, avec l'accélération « tangente » . . .	107
3.12	Taux de convergence de la correction globale tangente « tronquée ». .	110
4.1	Le cas-test 2D.	119
4.2	Schématisation de la base « macro » des déplacements d'interface sur le cas-test 2D.	125
4.3	Schématisation de la base « macro » des efforts d'interface sur le cas-test 2D.	126
4.4	Evolution de l'erreur en déplacement pour les approximations « longue distance » de \mathbf{S}_C^G	127
4.5	Application du principe de Saint-Venant à la zone complémentaire. .	129
4.6	Schématisation d'une correction globale mixte et du choix de \mathbf{B} . . .	136
4.7	Evolution de l'erreur en déplacement pour quelques approximations multi-échelles, sans accélération.	137
4.8	Evolution de l'erreur en déformation plastique pour quelques approximations multi-échelles, sans accélération.	137
4.9	Schématisation d'une itération de la variante mixte avec accélération SR1.	139
4.10	Evolution de l'erreur en déplacement pour quelques approximations multi-échelles, avec accélération SR1.	142
4.11	Evolution de l'erreur en déformation plastique pour quelques approximations multi-échelles, avec accélération SR1.	142
5.1	Problèmes éléments finis global, local et auxiliaire.	152
6.1	Rappel du cas-test 2D élasto-plastique.	162
6.2	Solution élastique initiale pour l'exemple 2D.	163
6.3	Contraintes de Von Mises locales sur l'exemple 2D.	164
6.4	Déformations plastiques équivalentes sur l'exemple 2D.	165
6.5	Termes correctifs globaux sur l'exemple 2D.	166
6.6	Comparaison des deux raccords pour les contraintes.	167
6.7	Comparaison des deux raccords pour les déformations plastiques. . .	168
6.8	Evolution des résidus relatifs pour le raccord en déplacement sur l'exemple 2D.	169

6.9	Evolution des résidus mixtes pour le raccord en déplacement sur l'exemple 2D.	171
6.10	Illustration de l'indicateur en stagnation sur l'exemple 2D.	173
6.11	Exemple de débordement de la zone plastique sur l'exemple 2D.	175
6.12	Convergence et erreurs résiduelles lors d'un débordement.	176
6.13	Effet d'un <i>cutback</i> sur les déformations plastiques équivalentes.	177
6.14	Convergence et erreurs résiduelles lors d'un <i>cutback</i>	178
6.15	Convergence et erreurs résiduelles lors d'un sous-cyclage.	180
6.16	Maillages du cas-test 3D Snecma	181
6.17	Contraintes locales de Von Mises sur le cas-test 3D Snecma	183
6.18	Déformations plastiques équivalentes sur le cas-test 3D Snecma	183
6.19	Convergence de la variante en déplacement sur le cas-test 3D Snecma.	184
6.20	Approximations « locales » du complément de Schur sur le cas-test 3D Snecma	185
6.21	Convergence de la variante mixte sur le cas-test 3D Snecma.	186

Liste des tableaux

3.1	Décomposition de quelques termes correctifs quasi-Newton	99
4.1	Erreur en déplacement d'interface pour quelques approximations « courte distance » de \mathbf{S}_C^G	120
4.2	Erreur en déformation plastique pour quelques approximations « courte distance » de \mathbf{S}_C^G	121
4.3	Erreur en déplacement d'interface pour quelques approximations multi-échelles de \mathbf{S}_C^G	133
4.4	Erreur en déformation plastique pour quelques approximations multi-échelles de \mathbf{S}_C^G	133
6.1	Temps CPU des calculs élémentaires de la méthode et coût des itérations, sur le cas-test 3D Snecma	186

Introduction

De nos jours, de nombreuses techniques innovantes révolutionnent la pratique du calcul des structures, usuellement basée sur la méthode des éléments finis. Associées à l'augmentation continue de la puissance des calculateurs et souvent motivées par leurs nouvelles architectures, ces techniques permettent de traiter des problèmes inaccessibles par une approche directe, tout en conservant la souplesse et la généralité qui ont fait le succès des éléments finis. A titre d'exemple :

- des *techniques d'enrichissement* basées sur la partition de l'unité [Melenk et Babuska, 1996], telles que les méthodes X-FEM [Moës *et al.*, 1999] et G-FEM [Strouboulis *et al.*, 2000], permettent de simuler la fissuration d'une pièce mécanique sans remaillage et avec relativement peu de degrés de liberté ;
- des *modèles constitutifs* toujours plus poussés, notamment dans le domaine des matériaux composites, permettent de rendre compte du comportement de ces matériaux jusqu'à la rupture avec précision ;
- des *stratégies de calcul multi-échelles* avancées (par exemple [Ben Dhia, 1998; Farhat *et al.*, 2000; Fish et Shek, 2000; Ladevèze et Dureisseix, 2000; Zohdi *et al.*, 2001]...) permettent d'inclure des détails très fins au sein de grandes structures, présentant éventuellement des comportements non-linéaires complexes.

Cependant, le transfert de ces techniques vers l'industrie est souvent freiné par des difficultés logicielles. En effet, la complexité des structures et la grande variété des problèmes rencontrés par les industriels ont conduit ceux-ci à se tourner la plupart du temps vers des logiciels de calcul généralistes, offrant de très nombreuses fonctionnalités et une grande commodité d'usage pour la plupart des applications courantes. Ces logiciels ne sont cependant pas conçus pour être modifiables ou extensibles à volonté, et il est généralement long et coûteux de développer en leur sein des techniques ou des formulations innovantes telles que celles présentées ci-dessus. Pour cette raison, la plupart des approches novatrices en calcul des structures sont aujourd'hui développées au sein de « codes de recherche » dédiés, qui offrent rarement la même généralité qu'un logiciel du commerce ; cela limite le plus souvent leurs applications à des problèmes académiques (même si ceux-ci peuvent être de taille conséquente).

Un cadre intéressant permettant de surmonter ces difficultés est celui des *méthodes non-intrusives*, récemment développées dans le cas des éléments finis stochas-

tiques [Berveiller *et al.*, 2006] ou du calcul d'erreur [Chamoïn et Ladevèze, 2008]. Il s'agit de techniques conçues de telle sorte que tout ou partie des calculs puissent être effectués à l'aide d'un code éléments finis standard et d'un modèle existant, sans y apporter de modifications et en utilisant uniquement les entrées et sorties habituelles de ce type de code. Leur mise en œuvre ne nécessite ainsi aucune intervention *au sein* des logiciels utilisés ; tous les développements s'effectuent *autour* des outils existants, et ces derniers peuvent être réutilisés tels quels, ce qui permet d'envisager un transfert vers un environnement industriel de manière moins problématique.

Suivant ce principe, l'objectif principal de cette thèse est de proposer une technique permettant de coupler de manière non-intrusive une formulation innovante, telle que celles évoquées au début de cette introduction, avec un logiciel éléments finis du commerce. Pour ce faire, nous partons du constat que dans de nombreux problèmes industriels, les phénomènes à l'origine des difficultés rencontrées sont *non-linéaires mais localisés* au sein d'une petite zone d'intérêt, tandis que le reste de la structure conserve un comportement beaucoup plus simple, tel que l'élasticité linéaire. Nous proposons donc d'utiliser la formulation considérée au sein d'un *modèle local*, représentant cette seule zone d'intérêt, et de décrire la structure entière à l'aide d'un *modèle global* formulé par éléments finis traditionnels. Le modèle local est non-linéaire et peut être traité à l'aide d'un « code de recherche » ou d'un « code métier » spécialisé ; le modèle global est de grande taille mais élastique linéaire, et ne fait intervenir qu'un solveur généraliste du commerce.

Ces deux modèles sont alors couplés à l'aide d'une *technique d'échanges* itérative, conçue pour converger vers la solution exacte du problème non-linéaire complet (discrétisé). Il devient ainsi possible de tester des modèles ou des méthodes inhabituelles sans devoir les implémenter dans le logiciel considéré, mais également (d'autres possibilités sont évoquées dans [Allix *et al.*, 2009]) :

- d'introduire des non-linéarités locales (matérielles, géométriques ou de contact) et de *les traiter localement* au sein d'un modèle dédié, ce qui peut représenter d'importantes économies de temps de calcul par rapport aux approches traditionnelles qui traitent la non-linéarité locale par de coûteuses itérations globales [Cresta *et al.*, 2007] ;
- d'introduire des modifications locales mais importantes du maillage, de la géométrie ou du matériau, et d'évaluer leur influence exacte sur la réponse de la structure sans aucune modification du modèle global, ce qui peut apporter un gain de temps considérable pour l'utilisateur.

Dans cette thèse, nous avons choisi d'illustrer la méthode en introduisant une zone de *plasticité locale* au sein d'un modèle éléments finis élastique linéaire, et de traiter les deux modèles à l'aide d'un logiciel généraliste (en l'occurrence Abaqus/Standard), en renvoyant à des travaux ultérieurs les aspects techniques liés au couplage de deux codes différents. Ce choix a été motivé par une demande de notre partenaire industriel Snecma concernant la validation des procédures de calcul de

durée de vie utilisées sur certaines pièces de turboréacteurs, et particulièrement les aubes des turbines : pour des raisons de coût des calculs, ces pièces sont d'abord analysées en élasticité linéaire, puis les zones susceptibles d'entrer en plasticité sont identifiées par des critères en contrainte et soumises à une nouvelle analyse locale non-linéaire, généralement élasto-visco-plastique, pilotée par une condition aux limites en déplacement issue de la solution globale élastique. Cette procédure, extrêmement répandue dans l'industrie, porte le nom de « zoom descendant » ou « *submodeling* ».

Du fait de la taille réduite du modèle local, cette technique est effectivement beaucoup moins coûteuse qu'une analyse non-linéaire complète, lorsque cette dernière est possible. Cependant, un tel procédé suppose implicitement que les non-linéarités introduites localement n'ont pas d'influence globale significative. Cette hypothèse ne faisant l'objet d'aucune autre vérification que la connaissance *a priori* que l'utilisateur peut avoir du problème, le procédé peut introduire des erreurs dans la solution, qui ne sont généralement pas estimées de manière fiable ; en pratique, d'importantes marges de sécurité doivent donc être prévues. Ainsi, des études antérieures portant sur la tenue en post-flambage d'un panneau de fuselage d'avion (voir Figure 1), ont montré qu'une analyse purement descendante peut conduire à une sous-évaluation d'environ 30% des contraintes et des déformations dans la zone d'intérêt, lors d'un flambage local [Cresta, 2008].

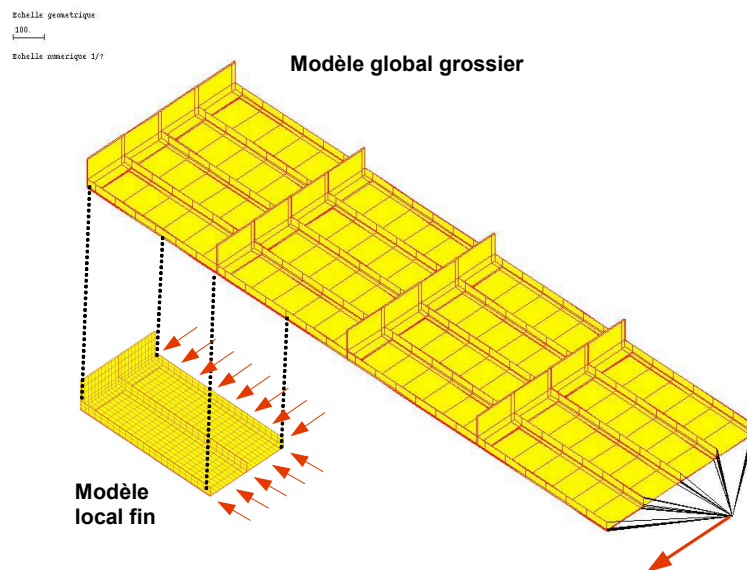


Figure 1: Exemple d'analyse descendante sur un panneau de fuselage subissant un flambage local (P. Cresta).

Un tel résultat conduit naturellement à s'interroger sur ce qu'il peut en être pour d'autres types de non-linéarités localisées, telle que la plasticité — et, si cela s'avère nécessaire, à se tourner vers une technique plus fiable qu'un simple zoom descendant, tout en étant moins coûteuse qu'un calcul non-linéaire complet. Nous allons voir que la stratégie proposée, tout en étant initialement destinée à l'introduction de

formulations locales complexes, peut répondre à ce besoin.

Afin d'atteindre ces objectifs, notre travail s'est essentiellement focalisé sur la **formulation d'une technique de couplage globale/locale non-intrusive et exacte pour traiter des non-linéarités locales le plus efficacement possible** — sachant que le niveau de performance attendu n'est naturellement pas celui d'une stratégie spécialisée développée dans un code dédié. Il s'agit alors de choisir les informations échangées entre les modèles de sorte à coupler ceux-ci en un minimum d'itérations, tout en respectant la contrainte de non-intrusion vis-à-vis du problème global ; cette problématique a été au cœur des travaux effectués au cours de ces trois années de thèse, et fait office de fil conducteur tout au long de ce mémoire.

La suite de ce document comprend six chapitres :

- Le **premier chapitre** dresse un état de l'art des techniques permettant d'envisager un tel zoom exact, et donne une première justification de l'essentiel des choix réalisés par la suite ;
- le **second chapitre** expose les principales idées, la formulation et les propriétés essentielles de la méthode proposée, et introduit deux variantes dites « en déplacement » et « mixte », qui diffèrent selon la nature de la quantité pilotant les échanges ;
- le **troisième chapitre** est consacré à l'étude de la variante « en déplacement » ; il met en évidence la nécessité d'accélérer la convergence et présente plusieurs techniques d'accélération non-intrusives ;
- le **quatrième chapitre** est dédié à la formulation de la variante « mixte », à la définition d'un raccord optimal entre les modèles et à la proposition d'approximations réalistes et efficaces d'un tel optimum ;
- le **cinquième chapitre** présente brièvement la mise en œuvre de la stratégie au sein d'un logiciel éléments finis généraliste (Abaqus/Standard) en mettant l'accent sur l'aspect non-intrusif ;
- enfin, le **sixième et dernier chapitre** illustre la méthode sur quelques exemples 2D et 3D, comprenant un modèle d'aube banalisé fourni par Snecma.

Chapitre 1

Réanalyse locale et calcul multi-échelles : un état de l'art

Ce premier chapitre dresse un état de l'art des approches permettant d'envisager un zoom exact en présence de non-linéarités locales. Compte tenu de notre objectif, les atouts et les limitations de chacune des approches étudiées sont exposés.

Sommaire

1	Approches « ingénieur » et travaux dérivés	7
1.1	Approches descendantes	8
1.2	Approches exactes directes	12
1.3	Approches itératives	17
1.4	Techniques de collage de modèles	20
2	Approches mécaniques multi-échelles	21
2.1	Homogénéisation et méthodes multi-niveaux	22
2.2	Méthodes d'enrichissement hiérarchiques	26
2.3	Méthodes de « patches » avec recouvrement	31
3	Stratégies de calcul à haute performance	36
3.1	Traitement de la non-linéarité	36
3.2	Méthodes multigrilles	41

Approche globale/locale non-intrusive pour la plasticité locale

3.3	Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement .	45
4	Bilan	54

Ce chapitre présente quelques techniques existantes, permettant d'envisager la prise en compte de phénomènes non-linéaires locaux au sein d'un calcul par éléments finis, et leur traitement par une réanalyse locale exacte. La présentation est organisée en trois parties.

La première d'entre elles correspond aux approches « ingénieur » utilisées en bureau d'études et à certaines de leurs extensions notables. La deuxième s'intéresse à quelques approches multi-échelles utilisées en mécanique, et particulièrement certaines stratégies permettant d'accéder à une description fine des phénomènes étudiés sur une petite partie bien délimitée de la structure. La troisième partie traite quant à elle de stratégies de calcul avancées, permettant de résoudre de grands problèmes non-linéaires tels que ceux que nous envisageons.

Signalons que le but de cette étude n'est nullement d'effectuer un tour d'horizon exhaustif de la littérature sur chacun des thèmes évoqués, mais plutôt d'apporter un éclairage sur quelques travaux qui nous ont semblé répondre à quelques-unes des questions soulevées tout au long de cette thèse. Ce faisant, nous nous efforçons de dégager les atouts et les limitations de chacune des approches étudiées par rapport à la problématique principale de ce travail, à savoir la réalisation d'un zoom exact et non-intrusif en présence de non-linéarités localisées.

1 Approches « ingénieur » et travaux dérivés

De nombreux problèmes industriels font intervenir des structures très complexes mais ne nécessitent une connaissance fine des contraintes et des déplacements que dans une petite *zone critique*, le reste de la solution pouvant être déterminé de façon plus grossière. Dans le cas fréquent où la localisation et l'étendue de cette zone ne sont pas connues *a priori*, ou lorsque cette zone présente des phénomènes complexes éventuellement non-linéaires, l'emploi d'une technique d'*analyse globale/locale* est courant : cela permet en effet de s'affranchir d'un remaillage ou d'une nouvelle analyse non-linéaire de toute la structure, dont le coût en termes informatiques ou humains s'avérerait trop élevé.

Pour ce faire, le principe essentiel de l'analyse globale/locale est de décrire la structure au moyen de deux modèles séparés (Figure 1.1) :

- un **modèle global**, décrivant toute la structure mais relativement grossier ;
- un **modèle local**, représentant plus finement la (ou les) zone(s) où le modèle global s'avère insuffisant.

Le modèle local peut apporter plusieurs types d'améliorations. D'une part, il est généralement employé pour raffiner localement le maillage global de manière non-intrusive : il s'agit alors d'éviter de remailler toute la structure, en créant un second maillage séparé ne décrivant qu'une partie du domaine. D'autre part, il est fréquent d'introduire dans le modèle local des détails structuraux *absents du modèle global*, tels que des accidents géométriques (trous, fissures), des hétérogénéités du matériau (cas des plaques composites) [Voleti *et al.*, 1995], voire des relations de comportement

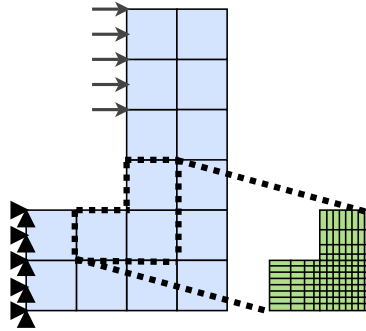


Figure 1.1: Un modèle global et un modèle local raffiné.

complètement différentes [Whitcomb, 1991]. La problématique rejoint alors celle de la *réanalyse structurale* : introduire une modification topologique ou constitutive au sein d'une structure à moindres coûts. Naturellement, toutes les approches ne se prêtent pas à ce type d'applications. Différentes méthodologies permettent de coupler les deux analyses, de façon unidirectionnelle (approches descendantes) ou bidirectionnelle (techniques de condensation statique, approches itératives) ; cette distinction est à la base de la présentation qui suit.

Dans tout ce qui suit, nous considérons un problème classique d'élasticité statique linéaire, bien posé, en petites perturbations, et sous les hypothèses habituelles de symétrie et de positivité du tenseur d'élasticité ; l'introduction de non-linéarités locales sera envisagée au cas par cas, toutes les techniques présentées ici ne le permettant pas forcément. Nous supposons que ce problème a été discrétisé par éléments finis au moyen du « modèle global », ce qui nous conduit à la résolution du système linéaire suivant :

$$\mathbf{K}^G \mathbf{u}^G = \mathbf{f}^G \quad (1.1)$$

où \mathbf{K}^G , \mathbf{u}^G et \mathbf{f}^G désignent respectivement la matrice de rigidité, le vecteur des déplacements nodaux et le second membre globaux (l'exposant G désigne toute quantité se rapportant au modèle global). Sans perte de généralité, nous supposons que les conditions aux limites en déplacement sont imposées directement.

1.1 Approches descendantes

Les approches descendantes sont certainement les techniques globales/locales les plus utilisées dans l'industrie, en raison de leur simplicité de mise en œuvre. Elles consistent à effectuer une analyse globale puis une analyse locale ; l'analyse locale est *pilotée* à l'aide d'une condition aux limites issue de l'analyse globale et le transfert d'information est donc réalisée de façon *descendante*, du global vers le local.

Une analyse descendante comporte ainsi les quatre étapes suivantes :

1. **Analyse globale** ;
2. **Identification et délimitation de la zone d'intérêt**, à l'aide d'estimateurs d'erreur ou de critères *a posteriori*, éventuellement complétés par des connais-

sances *a priori* et des règles métier ; cette étape conduit à la réalisation du maillage local ;

3. **Extraction et interpolation des quantités de pilotage** du maillage global vers le maillage local ;
4. **Analyse locale.**

En pratique, plusieurs choix sont possibles pour la quantité servant à piloter le modèle local. Nous présentons ici deux cas classiques.

1.1.1 L’approche descendante en déplacement

Le choix le plus courant, et le plus simple à mettre en œuvre, est de simuler l’influence du reste de la structure sur la zone d’intérêt en *imposant le champ de déplacement global* sur une partie du bord du modèle local. Cette méthodologie, assez ancienne, a été explorée par Kelley [Kelley, 1982] sous le nom de SBD (*Specified Boundary Displacement*) et est implémentée en standard dans de nombreux logiciels Eléments Finis du commerce sous le nom de « *submodeling* ».

Pour ce faire, une fois le problème local défini, la première étape est de spécifier quels nœuds du maillage local doivent être soumis au déplacement imposé. Ensuite, le champ de déplacement global \underline{u}^G est interpolé en chacun de ces nœuds :

$$\underline{u}^G(x) = \sum_j \underline{u}_j^G \underline{N}_j^G(x) \tag{1.2}$$

où $\underline{N}_j^G(x)$ désigne la valeur au point x de la *fonction de base* du modèle global associée au j -ème degré de liberté. Cette étape est triviale dans le cas où les approximations sont *compatibles* sur la surface de raccord, c’est-à-dire lorsque les maillages se conforment tous deux à cette surface et qu’ils y possèdent les mêmes noeuds, arêtes et degrés de liberté¹, voir FIG.1.2. On construit ainsi un vecteur \underline{u}_F^L contenant les déplacements locaux à imposer. Enfin, on résout le problème local.

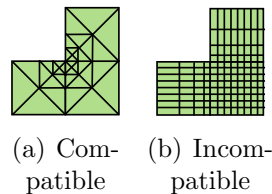


Figure 1.2: Exemple de maillages compatible et incompatible avec le maillage global de la Figure 1.1.

Cette approche a été initialement proposée dans le cadre de l’élasticité linéaire ; par la suite, elle a été testée sur de très nombreux cas, incluant notamment des non-linéarités matérielles et géométriques [Ransom *et al.*, 1992]. Elle se prête également

1. Mathématiquement parlant, cela signifie que les deux espaces d’approximation du déplacement par éléments finis ont la même trace sur cette surface.

bien à certains cas de réanalyse structurale ou au rajout de certains détails topologiques [Kapania *et al.*, 1997] ou d'hétérogénéités [Voleti *et al.*, 1995]. Enfin, elle offre naturellement d'importantes réductions des coûts de calcul par rapport à une analyse globale raffinée ; toutes ces raisons en font une technique de choix pour nombre de problèmes industriels.

Cependant, elle souffre également de limitations conséquentes. En effet, aucune correction globale n'étant réalisée, il est impossible d'introduire dans le zoom des phénomènes localisés ayant un impact global significatif sur la solution. *De tels phénomènes doivent obligatoirement être représentés dans le modèle global, sous peine d'obtenir d'importantes erreurs* ; ainsi, des travaux dans le cadre du flambage local ont mis en évidence des erreurs supérieures à 30% [Cresta, 2008] sur certaines quantités. Même dans le cas d'un simple raffinement de maillage, n'ayant normalement qu'une influence modérée sur la rigidité du domaine « vue de l'extérieur », des erreurs de 1 à 10 % sont courantes [Jara-Almonte et Knight, 1988; Mao et Sun, 1991]. De plus, la méthode est très sensible à la délimitation de la zone de pilotage : en éloignant la frontière des détails locaux, on améliore parfois nettement les résultats. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, pour des applications se limitant au raffinement du maillage, un critère objectif basé sur la régularité de la solution a été proposé [Srinivasan *et al.*, 1996] ; dans tous les autres cas, la délimitation du zoom est généralement basée sur la visualisation des contraintes [Dassault Systèmes, 2007] assortie de règles métier empiriques, ce qui ne permet pas toujours un choix optimal, et peut même s'avérer trompeur comme nous le verrons au Chapitre 6.

Enfin, les travaux de Kelley étant limités à des fonctions de forme d'ordre 1, l'évaluation « point par point » du déplacement selon (1.2) peut entraîner des *bloques cinématiques* perturbant la solution locale, dépendant fortement de la non-conformité des maillages et de la forme de la zone de pilotage. Afin d'y remédier, de nombreux auteurs ont proposé des fonctions d'interpolation plus lisses, souvent spécifiques au problème traité : fonctions vérifiant l'équation d'équilibre des plaques en flexion [Ransom *et al.*, 1992], polynômes d'interpolation de Lagrange [Voleti *et al.*, 1995], splines cubiques [Cormier *et al.*, 1999; Srinivasan *et al.*, 1997]... D'autres travaux font appel à des éléments finis d'ordre deux ou plus [Mao et Sun, 1991], ou à des techniques comme la méthode de Ritz avec des fonctions globales lorsque la géométrie le permet [Kapania *et al.*, 1997]. Toutes ces approches permettent d'atténuer les erreurs d'interpolation, sans toutefois les réduire complètement.

1.1.2 L'approche descendante en effort

Dans le cas où le raccord en déplacement introduit trop d'erreurs, une alternative possible est d'effectuer un raccord en effort, ce qui permet notamment d'éviter les problèmes de blocage cinématique. Dans le cadre des éléments finis 2D ou 3D traditionnels, pour lesquels les efforts sont accessibles sous forme de contraintes calculées aux points d'intégration, la mise en œuvre d'un tel raccord conduit à :

- identifier les faces (en 3D) ou arêtes (en 2D) du maillage local devant être

- soumises au pilotage en effort ;
- extrapoler le champ de contraintes global $\underline{\underline{\sigma}}^G$ aux points d'intégration de ces faces ;
- en déduire les efforts surfaciques $\underline{\underline{\sigma}}^G \underline{n}$ à appliquer sur ces faces, puis construire le second membre local correspondant.

Dans les faits, le champ de contraintes éléments finis tel quel ne suffit pas toujours à effectuer un raccord de bonne qualité. L'extrapolation est donc généralement réalisée à l'aide de techniques de *régularisation des contraintes* [Zienkiewicz et Zhu, 1992], permettant de construire des conditions aux limites plus réalistes [Gu *et al.*, 2004]. Pour cette raison, l'emploi de ce type de raccord dans le cadre des éléments finis 3D est plus récent et cette procédure semble moins souvent proposée en standard dans les logiciels du commerce, même si elle est très employée en bureau d'études sur des modèles plus simples [Cornuault, 1998]. Remarquons que lorsque les deux maillages sont compatibles sur la surface de pilotage, le raccord se réduit à un raccord en *efforts nodaux* : le terme λ_Γ^L traduisant la condition en effort, à assembler sur le second membre local, s'exprime directement par

$$\lambda_\Gamma^L + \lambda_\Gamma^G = 0 \quad (1.3)$$

où λ_Γ^G est le vecteur des efforts nodaux d'interface exercés par la zone d'intérêt sur le « reste » de la structure, que nous appellerons *zone complémentaire* dans la suite de ce document. Aucune extrapolation ou régularisation des contraintes n'est alors nécessaire. Naturellement, les restrictions des approches descendantes en termes de différence entre les deux modèles (les détails introduits localement ne doivent avoir qu'une influence locale sur la solution) s'appliquent également à ce type de raccord.

Une variante intéressante de cette dernière approche est proposée dans [Jara-Almonte et Knight, 1988], sous le nom de *Specified Boundary Stiffness and Force* (SBSF). Cette technique part du constat que les raccords en effort décrits ci-dessus ont souvent tendance à sous-estimer la rigidité du reste de la structure, et propose un raccord en effort corrigé par l'ajout d'un *terme supplémentaire* dans la rigidité globale.

Ecrivons le système global (2.16) sous forme partitionnée :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{CC}^G & \mathbf{K}_{CT}^G & 0 \\ \mathbf{K}_{\Gamma C}^G & \mathbf{K}_{\Gamma,C}^G + \mathbf{K}_{\Gamma,I}^G & \mathbf{K}_{\Gamma I}^G \\ 0 & \mathbf{K}_{IT}^G & \mathbf{K}_{II}^G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_C^G \\ \mathbf{u}_\Gamma^G \\ \mathbf{u}_I^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_C^G \\ \mathbf{f}_{\Gamma,C}^G + \mathbf{f}_{\Gamma,I}^G \\ \mathbf{f}_I^G \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

où les indices I , C et Γ désignent respectivement les degrés de liberté intérieurs à la zone d'intérêt, à la zone complémentaire et les degrés de liberté d'interface ; pour ces derniers, on a distingué par les notations $,C$ et $,I$ les contributions respectives des éléments situés dans la zone complémentaire et dans la zone d'intérêt. La méthode SBSF consiste à mener l'analyse globale comme précédemment, puis à résoudre le

problème local suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^L + \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma,C}^G & \mathbf{K}_{\Gamma I}^L \\ \mathbf{K}_{I\Gamma}^L & \mathbf{K}_{II}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\Gamma}^L \\ \mathbf{u}_I^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\Gamma}^L - \mathbf{K}_{\Gamma C}^G \mathbf{u}_C^G \\ \mathbf{f}_I^L \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Autrement dit, on effectue en quelque sorte un raccord en effort (terme $\mathbf{K}_{\Gamma C}^G \mathbf{u}_C^G$ au second membre) tout en complétant la rigidité locale (terme $\mathbf{K}_{\Gamma\Gamma,C}^G$ ajouté dans la matrice). Cela permet également de rendre le problème local bien posé dans le cas (fréquent) où la zone d'intérêt ne possède pas suffisamment de conditions en déplacement. Les exemples présentés se limitent à des applications de raffinement local en élasticité linéaire (pas de modifications topologiques ou du comportement) et montrent que ce raccord introduit beaucoup moins d'erreurs qu'un simple raccord en déplacement, tout en étant moins coûteux qu'une méthode exacte.

Cependant, le système (1.5) correspond exactement à ce que l'on obtiendrait si l'on assemblait dans le modèle local la couche d'éléments globaux située juste de l'autre côté de l'interface, et que l'on effectuait un raccord en déplacement sur les nœuds adjacents (voir FIG.1.3). Ainsi, bien que formulée en effort et en raideur, la méthode SBSF peut également s'interpréter comme un raccord en déplacement « à distance » ; à la lumière de cette constatation, les résultats présentés par les auteurs illustrent bien la problématique de la localisation de l'interface (le raccord s'effectue ici plus loin, ce qui offre des résultats plus précis). En outre, cela suggère que les performances de l'approche devraient se dégrader dès lors l'on introduit dans le modèle local des détails ayant une influence globale notable — tels ceux que nous souhaitons prendre en compte dans le cadre de notre travail.

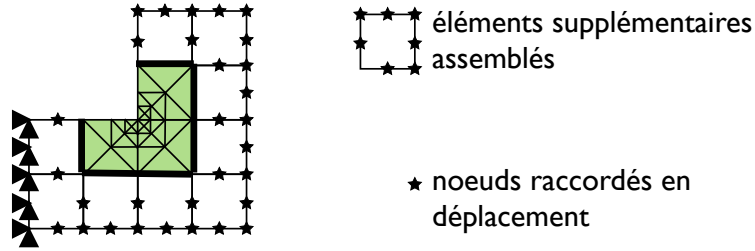


Figure 1.3: Raccord en déplacement équivalent à la méthode SBSF.

1.2 Approches exactes directes

Les méthodes du paragraphe précédent permettent d'effectuer une analyse locale fine sur une zone d'intérêt suite à un premier calcul plus grossier, mais ne permettent pas de prendre en compte les éventuelles influences globales des détails locaux, et sont donc approximatives. A l'inverse, les techniques présentées ici permettent de prendre en compte l'influence globale *exacte* des modifications apportées par un zoom, et donc de construire des techniques de zoom exact.

Deux types d'approches sont présentés : les techniques de *réanalyse structurale* qui permettent d'introduire une modification (topologique, de comportement ou autre) au sein d'une structure ayant déjà été analysée, et les techniques de *condensation statique* qui, moyennant certains calculs préalables, permettent de réduire la taille des systèmes à résoudre. Dans tout ce qui suit, nous faisons les deux hypothèses suivantes :

- le problème est élastique linéaire ;
- les maillages sont compatibles sur l'interface entre les deux zones.

Il est donc possible de définir le problème par éléments finis suivant, obtenu en *substituant* le problème local au sein du problème global et appelé *problème de référence* :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{CC}^G & \mathbf{K}_{CT}^G & 0 \\ \mathbf{K}_{TC}^G & \mathbf{K}_{TT}^G + \mathbf{K}_{TT}^L & \mathbf{K}_{TI}^L \\ 0 & \mathbf{K}_{IT}^L & \mathbf{K}_{II}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_C^R \\ \mathbf{u}_T^R \\ \mathbf{u}_I^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_C^G \\ \mathbf{f}_{T,C}^G + \mathbf{f}_{T,I}^L \\ \mathbf{f}_I^L \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Une stratégie de zoom ou de réanalyse sera dite *exacte* si elle permet d'accéder à la solution exacte de ce système à l'aide du modèle global et du modèle local.

1.2.1 Techniques de réanalyse structurale

La *réanalyse structurale* a pour objectif de calculer la réponse d'une structure ayant subi des modifications géométriques ou constitutives, connaissant la réponse de la structure non modifiée ; elle consiste à tirer parti des calculs déjà réalisés pour ne pas devoir effectuer une nouvelle analyse complète, et ainsi gagner en temps de calcul. Elle regroupe un ensemble de techniques utilisées notamment en optimisation des structures [Barthelemy et Haftka, 1993] ; parmi celles-ci, on distingue :

- les méthodes *approchées*, qui reposent généralement sur un développement des équations d'équilibre modifiées au voisinage des équations initiales, et ne sont donc valables que pour de petites modifications de la structure ;
- les méthodes *exactes*, qui reposent sur l'analyse préalable d'un certain nombre de seconds membres (*ie.* chargements) supplémentaires et qui, contrairement aux méthodes précédentes, sont valables dans tout un espace de modifications.

Nous nous intéressons ici plus particulièrement aux méthodes exactes. Plusieurs techniques ont été proposées, consistant pour l'essentiel à représenter l'effet de la modification par un chargement auto-équilibré (c'est-à-dire de résultante et de moment nuls), déterminé après avoir calculé la réponse de la structure à des sollicitations élémentaires [Holnicki-Szulc, 1991; Saka, 1991]. Dans [Akgün *et al.*, 2001], les auteurs démontrent que ce mode opératoire, sous ses diverses variantes, revient à appliquer la formule de Sherman-Morrison ou de Woodbury qui donne de manière exacte l'inverse d'une matrice \mathbf{K}^G modifiée par un terme correctif de rang r :

$$[\mathbf{K} + \mathbf{U}\mathbf{V}^T]^{-1} = \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{I} + \mathbf{V}^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{K}^{-1} \quad (1.7)$$

où \mathbf{U} et \mathbf{V} sont des matrices rectangulaires de taille $n \times r$, n étant la dimension du système considéré ; en multipliant l'équation (1.7) à droite par un second membre \mathbf{f} , on constate que la solution du système modifié s'obtient simplement en fonction de la solution $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$ du système initial, par un processus en trois étapes :

1. calculer $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{U}$;
2. résoudre le système entre parenthèses, de taille r ;
3. en déduire la solution corrigée.

La première étape est généralement la plus coûteuse ; elle demande de résoudre un système de matrice \mathbf{K} avec r seconds membres simultanés. La viabilité d'une réanalyse exacte dépend donc du *rang* des modifications : s'il est suffisamment faible et si la factorisation de la matrice \mathbf{K} est disponible, cette approche peut s'avérer très rentable. Ainsi, cette méthodologie a été très employée pour les structures en treillis ou pour simuler des modifications locales à l'aide d'éléments « barre » ou « ressort », dont les rigidités sont de rang 1. Dans le cadre des éléments finis 3D, la situation est toutefois plus problématique : à titre d'illustration, la modification d'un unique élément C3D10 d'Abaqus (tétraèdre à 10 nœuds en déplacement 3D) dans une structure entraîne une variation de sa matrice de rigidité de rang 24...

Pour appliquer ce principe à une grande structure, il semble donc judicieux de représenter les modifications structurelles avec un faible rang, c'est-à-dire à l'aide d'une *base réduite*. Une technique possible est d'effectuer une *condensation statique* des modifications sur l'interface ; on peut ainsi réduire le nombre de degrés de liberté de plusieurs ordres de grandeur sans perte d'informations. Une alternative intéressante proposée dans [Kirsch et Liu, 1995] sous le nom d'*approximations combinées* consiste à construire la base réduite à l'aide d'un développement limité des équations d'équilibre modifiées :

$$[\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}]^{-1} \mathbf{f} \approx \sum_{k=0}^m \alpha_k [\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K}]^k \mathbf{u}_0 \quad (1.8)$$

où $\mathbf{u}_0 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$ est la solution initiale. Les vecteurs $\mathbf{u}_k = [\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K}]^k \mathbf{u}_0$ sont calculés par récurrence et les coefficients α_k sont déterminés par la résolution d'un système réduit, très similaire à celui qui apparaît dans la formule de Woodbury. Il est possible de montrer que cette approche est exacte dans certaines situations, et notamment lorsque le rang de la correction est suffisamment faible : elle est alors équivalente à la formule de Sherman-Morrison [Akgün *et al.*, 2001]. Sur des structures simples, il est en outre souvent possible d'obtenir des résultats quasi-exacts en calculant peu de vecteurs [Kirsch et Papalambros, 2001]. Cependant, sur des structures complexes, des problèmes de convergence peuvent se poser, et l'adaptation de cette technique aux grands problèmes 3D fait actuellement l'objet de travaux [Weisser et Bouhaddi, 2009].

Signalons pour finir que des extensions de ces méthodes ont été proposées pour introduire des non-linéarités locales au sein d'une structure linéaire [Akgün *et al.*, 2001 ;

Kirsch et Bogomolni, 2007]. Ces approches permettent de traiter la non-linéarité de façon purement locale et d'éviter ainsi de coûteuses itérations globales, mais souffrent des mêmes limitations que précédemment : elles ne sont performantes que si la non-linéarité peut être représentée par une contribution de faible rang.

1.2.2 Techniques basées sur la condensation statique

Très employée dans l'industrie, la condensation statique offre une manière simple et exacte de représenter le comportement d'une partie d'une structure à l'aide d'un nombre réduit de degrés de liberté, sous l'hypothèse de la linéarité de son comportement. Elle se base sur une élimination algébrique des degrés de liberté *intérieurs* à la zone considérée, c'est-à-dire n'interagissant pas avec le reste de la structure. Dans le cadre de la partition introduite à l'équation (1.6), par exemple, la condensation de la zone complémentaire consiste à exprimer les déplacements intérieurs \mathbf{u}_C^R à l'aide de la première ligne du système (1.6), ce qui donne :

$$\mathbf{u}_C^R = \mathbf{K}_{CC}^G{}^{-1} (\mathbf{f}_C^G - \mathbf{K}_{CT}^G \mathbf{u}_T^R) \quad (1.9)$$

puis à les remplacer dans la deuxième ligne de (1.6) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Gamma C}^G + \mathbf{K}_{\Gamma C}^G \mathbf{K}_{CC}^G{}^{-1} \mathbf{K}_{CT}^G + \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^L & \mathbf{K}_{\Gamma I}^L \\ \mathbf{K}_{IT}^L & \mathbf{K}_{II}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\Gamma^R \\ \mathbf{u}_I^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\Gamma C}^G - \mathbf{K}_{\Gamma C}^G \mathbf{K}_{CC}^G{}^{-1} \mathbf{f}_C^G + \mathbf{f}_{\Gamma I}^L \\ \mathbf{f}_I^L \end{bmatrix}$$

ce qui se réécrit classiquement de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\Gamma C}^G + \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^L & \mathbf{K}_{\Gamma I}^L \\ \mathbf{K}_{IT}^L & \mathbf{K}_{II}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\Gamma^R \\ \mathbf{u}_I^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\Gamma C}^G + \mathbf{f}_{\Gamma I}^L \\ \mathbf{f}_I^L \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

où $\mathbf{S}_{\Gamma C}^G = \mathbf{K}_{\Gamma C}^G - \mathbf{K}_{\Gamma C}^G \mathbf{K}_{CC}^G{}^{-1} \mathbf{K}_{CT}^G$ et $\mathbf{b}_{\Gamma C}^G = \mathbf{f}_{\Gamma C}^G - \mathbf{K}_{\Gamma C}^G \mathbf{K}_{CC}^G{}^{-1} \mathbf{f}_C^G$ désignent respectivement le *complément de Schur* et le *second membre condensé* de la zone complémentaire sur l'interface. Dans le cas où la zone complémentaire contient l'essentiel des degrés de liberté de la structure, le système (1.10) est beaucoup plus petit que (1.6), tout en étant équivalent ; une fois (1.10) résolu, il est possible de retrouver la solution interne à l'aide de la relation (1.9). La condensation statique permet donc de réduire la taille des modèles de manière importante. Par exemple, une technique possible de traitement des non-linéarités locales est de condenser les zones restant linéaires sur la frontière délimitant les zones critiques ; sous réserve de pouvoir calculer le complément de Schur à un coût raisonnable (ce qui n'a rien de systématique), les itérations ont lieu sur un système de taille réduite et sont donc nettement moins coûteuses.

En outre, à condition que le chargement intérieur \mathbf{f}_C^G n'évolue pas, $\mathbf{S}_{\Gamma C}^G$ et $\mathbf{b}_{\Gamma C}^G$ représentent complètement le comportement de la zone condensée (généralement appelée *sous-structure*) ainsi que son action sur le reste de la structure ; il est donc possible de traiter la sous-structure comme un simple « élément » que l'on vient *assembler* dans le système d'équations, d'où la dénomination de « super-éléments » habituellement employée dans les logiciels Eléments Finis. Une fois la condensation

effectuée, il n'est plus nécessaire de disposer du maillage ou de la géométrie de l'intérieur de la sous-structure ; cette technique offre donc un moyen pratique de partager des modèles entre plusieurs partenaires industriels, sans en révéler les détails internes.

Dans [Hirai *et al.*, 1984; Hirai, 1985], la condensation statique est appliquée à une technique de zoom exact, toujours dans le cadre de l'élasticité linéaire. L'étude porte sur un problème de raffinement local du maillage où l'on n'envisage ni de supprimer, ni de déplacer des nœuds ou des arêtes, mais uniquement de subdiviser les éléments existants au sein d'une certaine région ; les maillages doivent de plus être compatibles. Les auteurs introduisent le partitionnement suivant des degrés de liberté du problème de référence :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^L & \mathbf{K}_{ab}^L & 0 \\ \mathbf{K}_{ba}^L & \mathbf{K}_{bb}^L + \mathbf{K}_{bb,c}^G & \mathbf{K}_{bc}^G \\ 0 & \mathbf{K}_{cb}^G & \mathbf{K}_{cc}^G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a^R \\ \mathbf{u}_b^R \\ \mathbf{u}_c^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a^L \\ \mathbf{f}_{b,a}^L + \mathbf{f}_{b,c}^G \\ \mathbf{f}_c^G \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

où l'on désigne par a les degrés de liberté *ajoutés* dans la zone d'intérêt, par b les degrés de liberté initialement présents, et par c les degrés de liberté de la *zone complémentaire*, qui ne sont pas modifiés. L'objectif est de résoudre le problème ci-dessus à l'aide du maillage global *non raffiné* et d'un maillage local raffiné ne couvrant *que la zone d'intérêt*, de manière non-intrusive — c'est-à-dire à la manière des techniques de réanalyse, sans modifier le maillage ni la rigidité globale. Pour cela, on commence par condenser les « nouveaux » degrés de liberté (indités a) sur ceux qui se trouvaient déjà là (indités b) ; en notant $\mathbf{S}_{b,a}$ et $\mathbf{b}_{b,a}$ le complément de Schur et le second membre condensé obtenus, le système à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{b,a} + \mathbf{K}_{bb,c}^G & \mathbf{K}_{bc}^G \\ \mathbf{K}_{cb}^G & \mathbf{K}_{cc}^G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_b^R \\ \mathbf{u}_c^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{b,a} + \mathbf{f}_{b,c}^G \\ \mathbf{f}_c^L \end{bmatrix}$$

et prend la forme suivante :

$$[\mathbf{K}^G + \Delta\mathbf{K}] \mathbf{u}^R = (\mathbf{f}^G + \Delta\mathbf{f}) \quad (1.12)$$

où les termes $\Delta\mathbf{K}$ et $\Delta\mathbf{f}$, déduits de $\mathbf{S}_{b,a}$ et $\mathbf{b}_{b,a}$, ne sont non nuls que sur les degrés de liberté communs aux deux maillages. Une technique de réanalyse structurale exacte est alors mise en œuvre pour résoudre (1.12) sans effectuer de remaillage, et en réutilisant la factorisation de \mathbf{K}^G ; elle fait appel aux trois étapes vues précédemment et demande notamment une résolution globale supplémentaire à m seconds membres, où m est le nombre de degrés de liberté communs.

La technique est ainsi exacte, robuste (elle permet notamment de modifier les propriétés matériau dans la zone d'intérêt sans faire aucune approximation) et assez peu coûteuse lorsque la zone d'intérêt est suffisamment petite en termes de degrés de liberté globaux ; cependant, l'exigence de non-chevauchement des maillages est une contrainte forte et des études ultérieures [Jara-Almonte et Knight, 1988] ont montré que les calculs peuvent s'avérer très lourds lorsque la zone d'intérêt n'est pas

bien localisée, le coût de la condensation augmentant fortement avec sa taille. En outre, la méthode n'est pas directement applicable aux problèmes non-linéaires. Elle illustre toutefois les possibilités qu'offrent la condensation statique et les techniques de réanalyse structurale dans la perspective d'un zoom exact.

1.3 Approches itératives

Dans le cas fréquent où une approche descendante ne saurait suffire mais où une technique exacte s'avère trop coûteuse, le choix d'une méthode itérative peut s'avérer être un bon compromis. De très nombreuses stratégies de calcul utilisent un couplage itératif entre différentes parties d'une structure, ou différents niveaux de représentation de la solution ; c'est par exemple le cas des méthodes de décomposition de domaine ou des méthodes multigrilles, évoquées dans la troisième partie de cette étude. Ici, nous nous plaçons dans le cadre d'une analyse globale/locale par éléments finis, telle que nous l'avons définie précédemment ; une itération globale/locale est alors constituée :

1. d'une **analyse locale**, effectuée à l'aide d'une condition aux limites issue du problème global, représentant l'effet du reste de la structure sur la zone faisant l'objet du zoom ;
2. d'une **correction globale**, effectuée à l'aide d'un chargement correctif issu du problème local, représentant l'influence des détails locaux sur toute la structure.

La première étape est tout à fait similaire à une analyse descendante classique, et fait intervenir le même type de raccords ; en particulier, le raccord en déplacement est le plus utilisé. En revanche, la seconde étape peut être réalisée de diverses manières. Nous présentons ici deux exemples, basés sur un raccord en déplacement et dont la mise en œuvre est peu intrusive ; bien qu'ils ne soient pas disponibles en standard dans les logiciels du commerce, leur implémentation à l'aide d'outils standard de transfert de champs est relativement aisée.

1.3.1 Enrichissement cinématique du problème global

Un premier type de méthodes itératives s'adresse exclusivement aux problèmes de raffinement de maillage, et vise à enrichir le modèle global à l'aide de la cinématique apportée par le maillage local raffiné. Ce choix est à la base de l'approche RGL (*Refined Global/Local*) introduite par Mao et Sun [Mao et Sun, 1991].

Pour ce faire, l'idée est de rechercher, lors de la correction globale, un champ de déplacement \underline{u}^{GR} (pour « global raffiné ») prenant la forme suivante :

$$\underline{u}^{GR}(x) = \underbrace{\sum_i \hat{u}_i^G \underline{N}_i^G(x)}_{\text{Terme EF classique}} + \underline{v}^L(x) \quad (1.13)$$

où les \hat{u}_i^G sont les inconnues nodales d'un problème éléments finis global classique et où $\underline{v}^L(x)$ est un terme d'enrichissement connu, obtenu en soustrayant au champ de déplacement local sa restriction sur le maillage global (\underline{v}^L s'annule donc en chaque nœud global, voir Figure 1.4). Sous l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire, les auteurs montrent alors que la solution du problème global raffiné prend la forme

$$\hat{\mathbf{u}}^G = \mathbf{u}^G + \mathbf{K}^{G-1} \mathbf{g} \quad (1.14)$$

où le second membre additionnel \mathbf{g} correspond à une *pré-déformation* induite par $\underline{v}^L(x)$, localisée dans la zone d'intérêt et calculée par intégration numérique. Soulignons que cette approche permet, à l'instar des techniques de réanalyse structurale, de réutiliser la factorisation de \mathbf{K}^G .

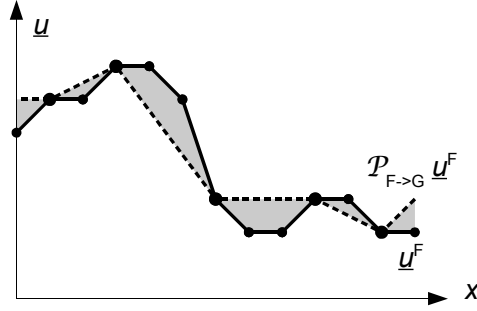


Figure 1.4: Terme d'enrichissement de la méthode RGL, schématisé en 1D

La méthode peut alors être poursuivie de manière itérative si nécessaire. Les exemples présentés par les auteurs sont académiques (raffinement 1D et 2D en élasticité linéaire) et aboutissent à une solution quasi-exacte en une ou deux itérations. Il est possible de montrer que sous des hypothèses assez restrictives (maillages compatibles et non chevauchants), la solution raffinée \underline{u}^{GR} converge vers la solution du problème éléments finis de référence, toujours défini par substitution ; la partie globale devient alors la « moyenne » (c'est-à-dire la projection sur le maillage global) de la solution locale.

Cette approche semble donc assez performante pour des applications de raffinement local non-intrusif, en élasticité linéaire ; cependant, elle ne permet pas d'introduire de modifications locales allant au-delà du simple raffinement, et semble très mal adaptée aux non-linéarités locales, la formulation couplée de (1.13) ne permettant pas de séparer les phénomènes non-linéaires locaux de l'équilibre linéaire global du reste de la structure. L'écriture même d'une relation de comportement non-linéaire peut d'ailleurs s'avérer délicate dans ce cadre. De plus, la restriction employée est susceptible d'introduire des erreurs lorsque les maillages sont mal positionnés.

1.3.2 Equilibre global des deux modèles

Lorsque le zoom est utilisé pour introduire des modifications géométriques ou constitutives et non plus seulement pour raffiner le maillage, les techniques d'enrichissement par superposition comme celle ci-dessus peuvent s'avérer inopérantes. La méthode IGL (pour *Iterative Global-Local*), introduite dans [Whitcomb, 1991], offre une alternative intéressante permettant de traiter de telles applications, dans le cas où les maillages sont compatibles. Elle se base également sur un raccord en déplacement et part du constat qu'à l'issue de l'analyse locale, le champ de déplacement est bien continu à la traversée de l'interface entre les deux modèles, mais les interefforts ne sont pas en équilibre. L'idée consiste donc à mesurer ce défaut d'équilibre et à tenter de l'annuler à l'aide d'une *itération de Newton modifiée* permettant de conserver la rigidité initiale. Pour cela :

1. On construit le *résidu d'équilibre* des deux modèles, défini comme la différence des deux membres de l'équation d'équilibre EF globale :

$$\mathbf{r}^G = \mathbf{f}^G - \int_{\Omega} \text{Tr} [\underline{\underline{\sigma}}^{GL} \underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{N}^G)] d\Omega \quad (1.15)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}^{GL}$ est le champ de contraintes « recollé » (solution locale dans la zone d'intérêt, solution globale en dehors) qui est donc discontinu à la traversée de la frontière. Ce résidu est un chargement global identique à celui d'une méthode de Newton classique et s'obtient de la même manière.

2. Si la norme du résidu dépasse une certaine tolérance, on corrige la solution globale en effectuant une itération de Newton modifiée :

$$\mathbf{u}^G \leftarrow \mathbf{u}^G + \mathbf{K}^{G-1} \mathbf{r}^G \quad (1.16)$$

Là encore, la factorisation de \mathbf{K}^G est réutilisée.

Cette procédure est directement inspirée des méthodes de Newton modifiées que l'on utilise classiquement en élastoplasticité, et l'auteur en déduit par analogie quelques propriétés de convergence de la méthode, vérifiées sur des exemples variés. Ainsi, la méthode est supposée converger lors de la plupart des applications courantes (ajout d'un trou, raffinement du maillage, prise en compte de la plasticité...) qui conduisent à *assouplir* le modèle global. En revanche, lorsque les corrections sont *raidissantes*, la méthode échoue fréquemment ; ce problème est évité grâce à l'emploi de techniques de relaxation, c'est-à-dire en n'utilisant qu'une fraction α du terme correctif :

$$\mathbf{u}^G \leftarrow \mathbf{u}^G + \alpha \mathbf{K}^{G-1} \mathbf{r}^G \quad (1.17)$$

avec $\alpha < 1$. De même, lors d'un assouplissement très marqué, la convergence peut être lente ; il est alors possible d'utiliser la relation ci-dessus avec $\alpha > 1$. Il est cependant difficile de prévoir quelle valeur du paramètre de relaxation donnera des résultats optimaux dans une configuration donnée.

L'approche est validée sur des modèles 2D et 3D linéaires [Whitcomb, 1991; Whitcomb et Woo, 1993a] et non-linéaires géométriquement [Whitcomb et Woo, 1993b], de tailles modestes mais présentant des modifications locales parfois très prononcées afin de tester la robustesse de la méthode; la convergence est toujours obtenue, même si elle s'avère relativement lente sur les cas les plus extrêmes. Hormis ceux-ci, une solution tout à fait raisonnable est généralement obtenue en quelques itérations (moins d'une dizaine). En outre, l'auteur évalue la pertinence de la norme du résidu \mathbf{r}^G comme indicateur d'erreur; il montre que cette quantité permet de mesurer la convergence des itérations de manière fiable, mais pas d'estimer une erreur locale sur une quantité d'intérêt quelconque.

1.4 Techniques de collage de modèles

Une dernière classe d'approches, utilisées lorsque l'on sait *a priori* que le détail à introduire peut avoir une influence globale significative, visent à effectuer un « collage » du modèle local au sein du modèle global au moyen de relations cinématiques et à résoudre *directement* le système couplé ainsi obtenu, traduisant l'équilibre global des deux modèles contraints. La prise en compte des redistributions d'efforts et autres effets globalisants est ainsi garantie.

Techniquement, la principale difficulté de ces approches réside dans le raccord de deux maillages généralement incompatibles sur l'interface, le cas compatible étant trivial. Pour ce faire, les techniques les plus anciennes et les plus utilisées [Schwartz, 1981] consistent à contraindre les nœuds d'interface du maillage le plus fin (dit *esclave*) à suivre la cinématique du maillage grossier (dit *maître*), selon (1.2). Cela peut mener à des blocages cinématiques lorsque le champ de déplacement grossier est susceptible d'être de qualité insuffisante; dans ce cas, il est alors possible de « lisser » le champ de déplacement transmis au maillage fin à l'aide de fonctions poids, voire de l'interpoler par des fonctions plus régulières (*splines*). Cependant, des expériences numériques (*patch tests*) ont montré que ce type de raccord peut mener à des erreurs importantes sur les contraintes, notamment au voisinage des interfaces [Fish *et al.*, 1996]; pour cette raison, le raccord doit s'effectuer suffisamment loin des zones d'intérêt, et l'utilisation industrielle de ces techniques répond à des règles métier strictes.

Afin d'éviter ces problèmes, des raccords plus complexes ont été développés, consistant à définir une discrétisation intermédiaire sur l'interface elle-même et à recoller *faiblement* les déplacements, au lieu d'imposer une relation nœud par nœud. Une des premières applications de ce principe [Ransom *et al.*, 1992] se base sur une formulation hybride à trois champs, c'est-à-dire que l'énergie potentielle totale s'écrit :

$$\Pi = \Pi_{\Omega_1} + \Pi_{\Omega_2} + \int_{\Gamma} \underline{\lambda}_1 \cdot (\underline{v} - \underline{u}_1) d\Gamma + \int_{\Gamma} \underline{\lambda}_2 \cdot (\underline{v} - \underline{u}_2) d\Gamma \quad (1.18)$$

où Π_{Ω_1} et Π_{Ω_2} désignent les énergies potentielles de chacun des sous-domaines, \underline{v} est le champ de déplacement de l'interface et $\underline{\lambda}_1$ et $\underline{\lambda}_2$ sont des champs de multiplicateurs

de Lagrange, définis de chaque côté de l'interface et permettant de recoller celle-ci sur chacun des sous-domaines. La stationnarité de Π entraîne en effet les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_j = \underline{\sigma}_j \underline{n}_j & (j = 1, 2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \underline{u}_j = \underline{v} & (j = 1, 2) \end{cases} \quad (1.19)$$

Le déplacement d'interface \underline{v} est alors discrétisé à l'aide de splines cubiques (qui ne nécessitent pas de maillage, seulement des points de contrôle) et les multiplicateurs de Lagrange sont cherchés sous la même forme que les $\underline{\sigma}_j \underline{n}_j$ (*ie.* si le sous-domaine 1 possède des éléments linéaires, λ_1 est pris constant par morceaux) ; par conséquent, le raccord des déplacements n'est pas effectué « nœud par nœud », mais de manière faible. Le système d'équations qui en résulte permet alors d'assurer l'équilibre de l'ensemble sous la forme faible des conditions (1.19) ; les exemples présentés montrent que cette méthodologie introduit beaucoup moins d'erreurs que les raccords « point par point » traditionnels [Ransom *et al.*, 1992; Fish *et al.*, 1996]. La poursuite de ces travaux a donné lieu à la formulation d'*éléments d'interface* hybrides, théoriquement utilisables dans de nombreux codes éléments finis [Ransom, 1997]. Cependant, un inconvénient de cette méthode est que le système obtenu n'est ni défini positif, ni à faible largeur de bande ; il faut donc soit utiliser un solveur adapté, soit transformer le système pour le rendre défini positif [Fish *et al.*, 1996].

Parmi les autres techniques de raccord de la littérature, beaucoup font appel à des champs de multiplicateurs de Lagrange [Park et Felippa, 2000], l'une des plus populaires étant la méthode *mortar* [Bernardi *et al.*, 1991] qui raccorde directement les deux domaines à l'aide d'un champ de multiplicateurs de Lagrange continu et linéaire par morceaux. D'autres formulations d'éléments d'interface sans multiplicateurs de Lagrange ont également été proposées, utilisant par exemple des fonctions de forme basées sur les moindres carrés mobiles [Kim, 2002] ou des paramètres de pénalisation ajustés automatiquement [Pantano et Averill, 2002] ; le système obtenu est alors défini positif.

Toutes ces techniques permettent de modéliser indépendamment les zones d'intérêt et d'éviter de fastidieuses adaptations des maillages au voisinage des interfaces, notamment lorsque les deux modèles utilisent des éléments différents. Toutefois, elles demandent soit de connaître *a priori* la position des zones nécessitant un raffinement, soit d'effectuer une nouvelle analyse globale ; elles peuvent donc s'avérer assez coûteuses.

2 Approches mécaniques multi-échelles

Dans la partie précédente, nous avons étudié quelques techniques permettant d'introduire des détails localisés au sein d'une structure, au moyen d'un modèle local. Les approches présentées ici utilisent elles aussi une double modélisation, mais s'adressent spécifiquement au cas où les détails locaux ont une dimension

caractéristique *beaucoup plus petite* que celle de la structure, ce qui interdit de représenter toute la structure à l'échelle des détails et impose l'emploi de deux représentations distinctes. Une première idée consiste donc à introduire une *distinction des échelles* entre les deux niveaux d'analyse ; historiquement, nombre de ces approches ont été introduites pour représenter des phénomènes liés à la microstructure des matériaux au sein de grandes structures, d'où la dénomination d'échelles « *micro* » et « *macro* » traditionnellement employée.

Ensuite, la plupart des applications concernent la situation où les phénomènes se produisant à l'échelle micro ont une influence significative sur la solution macro ; il est alors nécessaire de *coupler les échelles*. De manière générale, cela peut faire intervenir deux types de transferts d'informations :

- un transfert « **micro vers macro** », visant à déduire de l'analyse fine des propriétés « grossières » globales (homogénéisation) et/ou à améliorer les solutions globales ;
- un transfert « **macro vers micro** », visant à transférer aux modèles fins (qui sont forcément locaux) des conditions aux limites ou des chargements.

Toute la difficulté est alors de réaliser ces transferts de façon efficace, et de proposer une définition pertinente des deux échelles. Cela met généralement en jeu des modélisations et des outils plus complexes qu'un calcul par éléments finis traditionnel ; l'objectif n'est donc naturellement pas d'envisager une application directe de ces travaux à notre problème, mais plutôt d'en dégager les principales idées en rapport avec les objectifs de l'étude. De même que précédemment, nous considérons le cadre d'un problème de statique classique, en petites perturbations, bien posé, globalement élastique linéaire mais contenant des non-linéarités matérielles dans une certaine région.

2.1 Homogénéisation et méthodes multi-niveaux

Une première catégorie de méthodes multi-échelles se base sur la théorie de l'homogénéisation, et particulièrement de l'homogénéisation périodique [Sanchez-Palencia, 1974]. Elle vise à appliquer cette dernière au calcul multi-échelles de grandes structures, et à l'étendre aux matériaux non-linéaires, pour lesquels la définition *a priori* d'une relation de comportement homogénéisée peut s'avérer délicate. Une présentation générale de ces techniques, dans le cadre d'une écriture variationnelle adaptée, est proposée dans [Terada et Kikuchi, 2001] ; deux développements représentatifs de ce domaine sont présentés ici.

2.1.1 Méthode FE²

La méthode FE², pour « éléments finis sur deux niveaux », a été introduite dans [Feyel et Chaboche, 2000] pour simuler l'endommagement de structures en matériaux composites à fibres longues en analysant la décohésion entre les fibres et la matrice à l'échelle du matériau. Ce phénomène étant trop complexe pour être simplement

intégré au sein d'une relation de comportement homogénéisée, les auteurs définissent le comportement « macro » du composite non pas à l'aide d'une équation identifiée *a priori*, mais à l'aide d'un calcul éléments finis « micro » réalisé directement sur une cellule représentative du matériau.

Ce dernier vérifiant les hypothèses classiques de périodicité et de rapport d'échelles très élevé, les outils de l'homogénéisation des milieux périodiques sont utilisés pour le passage d'une échelle à l'autre. Ainsi, connaissant les champs de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^L(\underline{x})$ et de déformations $\underline{\underline{\epsilon}}^L(\underline{x})$ locaux sur une cellule ω , les grandeurs globales homogénéisées $\underline{\underline{\sigma}}^G$ et $\underline{\underline{\epsilon}}^G$ sont supposés *constantes sur chaque cellule* et sont obtenues en prenant la moyenne des quantités locales : de cette manière,

$$\underline{\underline{\sigma}}^G = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \underline{\underline{\sigma}}^L(\underline{x}) d\Omega \quad (1.20)$$

tandis que le passage réciproque des quantités globales aux quantités locales se fait en résolvant l'équilibre de la cellule, en l'occurrence en cherchant le déplacement sous la forme suivante :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}) + \underline{\underline{\epsilon}}^G \underline{x} \quad (1.21)$$

où le premier terme $\underline{v}(\underline{x})$ est un champ inconnu périodique sur la cellule.

Enfin, la structure est discrétisée à l'aide d'un maillage éléments finis relativement grossier, et la procédure ci-dessus est substituée à l'appel de la relation de comportement — c'est-à-dire qu'elle est réalisée en chaque point d'intégration du maillage global. Le problème global étant non-linéaire, il est classiquement traité par une méthode de Newton incluse au sein d'un schéma incrémental ; chaque itération de Newton comprend alors les étapes suivantes :

- **Etape globale.** On résout le problème global linéarisé $\mathbf{K}^G \Delta \mathbf{u}^G = \mathbf{r}^G$.
- **Etape locale.** A partir de $\Delta \mathbf{u}^G$, on calcule l'incrément de déformation $\Delta \underline{\underline{\epsilon}}^G$ en chaque point d'intégration global, puis on effectue ce qui suit sur la cellule associée :
 - **Localisation de $\Delta \underline{\underline{\epsilon}}^G$:** on déduit de (1.21) les conditions aux limites à imposer sur la cellule.
 - **Résolution de l'équilibre local :** le problème local non-linéaire est résolu à l'aide d'une méthode de Newton classique (alternance de résolutions linéaires et de boucles sur chaque point d'intégration de la cellule). Puis, après convergence, le comportement tangent de la cellule est estimé par une technique de perturbations.
 - **Homogénéisation de $\Delta \underline{\underline{\sigma}}^L$ et du comportement :** on calcule la contrainte globale selon (1.20), et on construit le tenseur du comportement tangent homogénéisé $\frac{d \Delta \underline{\underline{\sigma}}^G}{d \Delta \underline{\underline{\epsilon}}^G}$ à l'aide des estimations précédentes.

Les grandeurs homogénéisées (contrainte et comportement tangent) sont alors intégrées numériquement pour former les matrices élémentaires, qui sont ensuite assemblées.

Dans ce qui précède, la liste imbriquée remplace l'appel de la relation de comportement ; on doit ainsi manipuler un modèle éléments finis local pour chaque point d'intégration global, ce qui donne lieu à des coûts de calcul et à des échanges de données conséquents. En pratique, l'approche est donc implémentée de façon parallèle, les calculs locaux étant complètement indépendants. Elle offre alors un moyen réaliste de traiter des problèmes complexes qui seraient inaccessibles par des méthodes plus directes. En outre, elle se prête à l'utilisation d'une cinématique globale enrichie, à l'aide de milieux continus généralisés de type Cosserat ou second gradient, dans le cas où la représentation macroscopique initiale s'avérerait insuffisante [Feyel, 2003]. Cependant, la méthode FE^2 possède les mêmes limitations que l'homogénéisation périodique, dont elle est dérivée : elle n'est pertinente que si les effets de la microstructure sont bien découplés d'une cellule à l'autre, c'est-à-dire si les échelles sont bien séparées.

Dans le cas où les échelles sont localement mal séparées, une amélioration possible consiste à introduire différents niveaux de modélisation, de manière *adaptive*. Ainsi, Ghosh a développé une stratégie [Ghosh *et al.*, 2001] basée sur trois types de représentations différentes :

- les zones les moins critiques sont décrites de manière *purement macroscopique*, à l'aide de quantités homogénéisées ;
- les zones intermédiaires sont décrites *aux deux échelles* par un modèle à deux niveaux tel que celui présenté ci-dessus ;
- enfin, les cellules les plus critiques sont directement *modélisées à l'échelle microscopique*.

Les modèles microscopiques sont basés sur une technique originale et efficace de représentation des microstructures hétérogènes, dénommée VCFEM (*Voronoi Cell Finite Element Method*) [Ghosh *et al.*, 1995]. Ce mode opératoire permet ainsi de représenter correctement les zones où l'hypothèse de séparation des échelles n'est pas vérifiée, au prix d'une mise en données assez fastidieuse.

2.1.2 Homogénéisation des quantités discrètes

Lorsque l'on ne peut plus du tout séparer les échelles, ou lorsque la périodicité de la microstructure est prise en défaut, il n'est plus légitime d'utiliser l'homogénéisation périodique pour coupler les deux niveaux. Une technique possible est alors d'effectuer une homogénéisation directement au niveau des quantités éléments finis — c'est-à-dire, *en se passant complètement d'une relation de comportement macroscopique, et en déduisant directement la rigidité et le second membre globaux de leurs homologues locaux*. On évite ainsi de définir un « comportement homogénéisé » moyen, qui n'aurait pas forcément de sens lorsque les échelles ne sont que faiblement séparées.

Cette méthodologie est utilisée [Ibrahimbegović et Markovič, 2003] sous le nom d'*analyse micro/macro* pour simuler la réponse de structures en béton armé jusqu'à la rupture, caractérisée par un couplage très fort et une mauvaise séparation entre les échelles. Comme pour la méthode FE^2 , deux niveaux de modélisation et d'analyse

sont considérées ; toutefois, l'étape locale est assez différente. Comme le montre la FIG.1.5, on définit cette fois une « cellule » fine par élément grossier e à raffiner ; sur chacune d'entre elles, on effectue les opérations suivantes :

- **Localisation**, ou application de la condition en déplacement macro :

$$\mathbf{u}_e^L = \mathbf{T}_e \mathbf{u}^G \quad (1.22)$$

où \mathbf{T}_e est la *matrice de transformation* associée au bord de la cellule e (en pratique, il s'agit le plus souvent d'une interpolation linéaire basée sur les fonctions de forme macro).

- **Résolution** du problème local non-linéaire et calcul, après convergence, de la rigidité tangente locale \mathbf{K}_e^L et du résidu de bord \mathbf{r}_e^L .
- **Condensation** de la rigidité tangente locale sur le bord de la cellule ; on obtient ainsi son complément de Schur \mathbf{S}_e^L .
- « **Homogénéisation** » du résidu et du complément de Schur :

$$\mathbf{r}_e^G = \mathbf{T}_e^T \mathbf{r}_e^L \quad (1.23)$$

$$\mathbf{K}_e^G = \mathbf{T}_e^T \mathbf{S}_e^L \mathbf{T}_e \quad (1.24)$$

- **Assemblage** des quantités éléments finis « homogénéisées » dans le problème global linéaire.

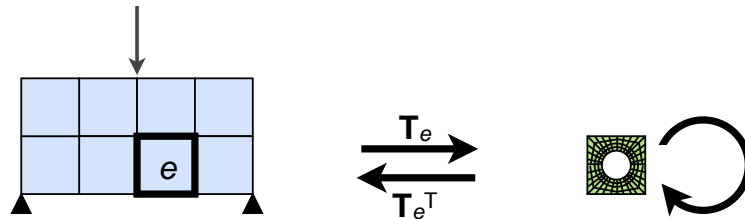


Figure 1.5: Principe de l'analyse micro/macro

En pratique, le comportement de la méthode dépend de la géométrie des cellules et des conditions micro/macro qui leurs sont appliquées. Ceci s'explique par le fait que l'« homogénéisation » mise en œuvre ici présente un caractère structural plus prononcé que les techniques classiques ; les quantités macro obtenues ne reflètent plus vraiment le comportement moyen du matériau, mais plutôt celui de la *cellule* elle-même. La technique de couplage des cellules peut d'ailleurs évoquer une méthode de décomposition de domaine primale avec relocalisation non-linéaire [Cresta *et al.*, 2007] : on impose un déplacement d'interface et on récupère un effort et un comportement tangent condensés, qui sont assemblés pour former les opérateurs globaux. Cependant, l'analogie s'arrête là car la cinématique globale de la structure reste celle du maillage grossier : le problème global conserve ainsi un caractère « éléments finis » prononcé, et l'enrichissement apporté par le calcul fin est purement localisé.

Là encore, ce problème peut être atténué en enrichissant le problème global à l'aide d'une cinématique du second ordre ; voir par exemple [Kouznetsova *et al.*, 2004].

Une amélioration de cette technique consiste à remplacer le raccord en déplacement, qui peut s'avérer trop rigide, par un *raccord en effort macro* [Markovič et Ibrahimbegović, 2004; Markovič *et al.*, 2005; Niekamp *et al.*, 2007] : pour coupler les échelles, on introduit un champ de multiplicateurs de Lagrange localisés [Park et Felippa, 2000] sous forme d'une distribution de contraintes affine et auto-équilibrée sur le bord de chaque cellule [Pian et Sumihara, 1984]. L'amplitude de ces contraintes est alors ajustée de sorte à effectuer un raccord en déplacements « moyens ». Cet ajustement s'effectue de manière itérative, et chaque itération demande la résolution d'un problème local non-linéaire : l'algorithme est donc notablement plus complexe.

Notons que l'emploi d'un tel raccord en déplacements moyens, ainsi que le mode d'obtention des quantités « homogénéisées », peuvent évoquer l'approche LaTIn micro/macro [Ladevèze et Dureisseix, 2000; Ladevèze *et al.*, 2001], qui diffère toutefois fortement de ce travail par la formulation du problème « macro » et par l'algorithme de résolution employé.

Au final, cette méthodologie représente une bonne alternative aux techniques d'homogénéisation classiques lorsque les hypothèses de celles-ci ne sont pas vérifiées ; elle semble ainsi plus adaptée à notre problème, pour lequel les détails fins à introduire ne sont pas uniquement des hétérogénéités du comportement et ne sont *a priori* ni périodiques, ni de taille caractéristique extrêmement faible. La définition d'un raccord macro/micro optimisé reste cependant un point délicat.

2.2 Méthodes d'enrichissement hiérarchiques

Les approches de la section précédente visent essentiellement à extraire de modèles locaux des quantités « moyennes » permettant de construire des problèmes globaux pertinents. Les méthodes présentées ici adoptent un point de vue différent et cherchent plutôt à *enrichir* la solution globale, par exemple un champ de déplacement \underline{u}^G , par un terme correctif \underline{v}^L , *localisé* dans une zone d'intérêt Ω_I :

$$\underline{u} = \begin{cases} \underline{u}^G + \underline{v}^L & \text{dans } \Omega_I \\ \underline{u}^G & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_I \end{cases} \quad (1.25)$$

Dans le cadre qui nous intéresse, \underline{u}^G provient d'un modèle global relativement grossier, tandis que \underline{v}^L est apporté par un modèle local plus fin, représentant l'effet des échelles inférieures. Potentiellement, une telle représentation n'est pas sans difficultés car :

- il faut assurer la continuité des déplacements et des contraintes, notamment sur la frontière Γ de la zone de superposition ;
- dans l'hypothèse d'une résolution couplée, il faut en outre veiller à l'indépendance linéaire des espaces d'approximation \mathcal{U}^G et \mathcal{V}^L utilisés, afin que les systèmes d'équations obtenus puissent bien être résolus :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^G \oplus \mathcal{V}^L \quad (1.26)$$

faute de quoi, la décomposition (1.25) n'est pas unique et un choix doit être fait *a priori*.

Un cadre se prêtant naturellement à ces deux conditions est celui des approches *hiérarchiques*, généralisant les travaux sur les éléments finis du même nom [Zienkiewicz *et al.*, 1983]. Elles consistent à construire une hiérarchie de modèles « emboîtés », chaque niveau permettant d'enrichir localement les modèles du niveau supérieur. Nous présentons ici trois approches représentatives de cette démarche.

2.2.1 La projection de Dirichlet homogénéisée

La *projection de Dirichlet homogénéisée* ou HDPM [Oden et Zohdi, 1997; Oden *et al.*, 1999; Zohdi *et al.*, 1996] a été proposée pour calculer la réponse de structures fortement hétérogènes, dans le cadre de l'élasticité linéaire. Elle fait intervenir deux niveaux de modélisation. Au niveau macroscopique, la structure est représentée par un modèle relativement grossier basé sur un comportement homogénéisé. Au niveau microscopique, des cellules indépendantes sont représentées par des modèles fins incluant les détails de la microstructure. Ces cellules sont obtenues en partitionnant la structure selon une grille régulière, comme le montre la FIG.1.6.

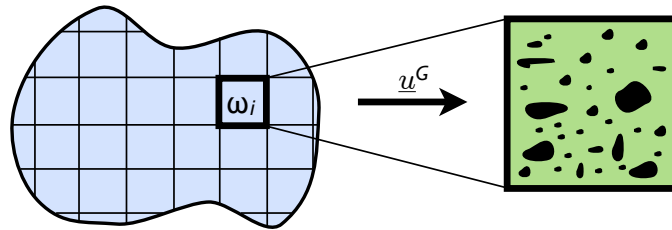


Figure 1.6: Principe de la projection de Dirichlet homogénéisée (HDPM).

Le passage d'une échelle à l'autre s'effectue de manière *descendante* et *adaptive*, c'est-à-dire que la solution globale est corrigée par des calculs locaux effectués sur certaines cellules, préalablement identifiées à l'aide d'estimateurs d'erreur *a posteriori*. L'application de la méthode conduit ainsi aux quatre étapes suivantes :

1. **Résolution du problème macro** homogénéisé : on obtient la solution globale \underline{u}^G .
2. **Détermination des cellules nécessitant une correction** à l'aide d'un indicateur *a posteriori* par cellule, basé sur la non-vérification de la relation de comportement hétérogène, et mesurant l'erreur introduite par l'homogénéisation.
3. **Correction micro** sur les cellules ω_i pour lesquelles l'indicateur précédent dépasse une tolérance fixée : on résout des problèmes locaux sous la condition de Dirichlet

$$\underline{u}_i^L = \underline{u}^G \quad \text{sur } \Gamma_i \quad (1.27)$$

4. **Construction et vérification de la solution** : on assemble la solution corrigée

$$\underline{u} = \underline{u}^G + \sum_i (v_i^L - \underline{u}^G|_{\omega_i}) \quad (1.28)$$

et on estime la nouvelle erreur à l'aide d'un autre indicateur *a posteriori*.

Les indicateurs utilisés majorent l'erreur en énergie, et on peut démontrer que l'erreur obtenue après raffinement est toujours inférieure à celle avant raffinement ; cela assure la fiabilité de la méthode. En outre, dans le cas où l'erreur finale s'avérerait encore trop élevée, deux autres procédures adaptatives sont proposées : la première consiste à ajuster localement les coefficients du matériau homogénéisé de sorte à minimiser un estimateur d'erreur, et la seconde consiste à déraffiner la grille délimitant les cellules, de sorte à prendre en compte l'influence de la microstructure sur des domaines plus grands. Ces procédures, bien que coûteuses, permettent de réduire l'erreur jusqu'au niveau voulu et de pallier l'absence de correction globale, c'est-à-dire de couplage entre les cellules ; elles font aussi l'originalité de la méthode, la démarche d'adaptativité étant directement appliquée à l'échelle de modélisation et non à la discrétisation comme d'accoutumée.

Plus récemment, Zohdi a proposé la mise en œuvre d'un raccord en effort [Zohdi et Wriggers, 1999] remplaçant la condition de Dirichlet (1.27), et d'une technique de correction globale visant à atténuer les sauts d'effort entre les cellules [Zohdi *et al.*, 2001], moins coûteuse que les deux procédures ci-dessus. Pour cette dernière technique, deux variantes existent : soit on utilise une itération de Newton modifiée similaire à celle de la Section 1.3.2, soit on découpe préalablement l'interface en « patches » disjoints, auquel cas l'opération est moins coûteuse (et parallélisable) mais ne permet pas d'assurer un équilibre global exact. D'autres estimateurs d'erreur sont en outre proposés.

Toutes ces possibilités font de la HDPM une stratégie robuste, bien que coûteuse, pour l'étude de structures élastiques hétérogènes. Cependant, une limitation majeure se pose par rapport à notre problématique : le principe même de l'approche la rend difficilement transposable à l'étude de non-linéarités locales.

2.2.2 La méthode multi-échelle variationnelle

Introduite par Hughes, la méthode multi-échelle variationnelle [Hughes, 1995] part du principe qu'une discrétisation éléments finis classique ne peut pas capturer les phénomènes se produisant aux échelles inférieures à celle du maillage employé. Elle propose ainsi de caractériser la solution exacte \underline{u} sous la forme :

$$\underline{u} = \underline{u}^G + \underline{v}^L \quad (1.29)$$

où \underline{u}^G est la solution d'un problème éléments finis « global » classique et \underline{v}^L est un terme d'enrichissement local, inaccessible par éléments finis (« insoluble ») et

qui doit donc être obtenu par d'autres moyens. Hughes montre que le choix suivant conduit à une solution exacte :

$$\underline{v}^L(\underline{x}) = \int_{\Omega} \underline{g}(\underline{x}, \underline{y}) \underline{r}^G(\underline{y}) d\Omega \quad (1.30)$$

où \underline{g} est la *fonction de Green* associée au problème considéré et où \underline{r}^G désigne le *résidu* associé à la solution globale (traduisant la non-vérification des équations d'équilibre par la solution éléments finis).

Le terme local dépend ainsi de la solution globale, tout en étant utilisé pour enrichir cette dernière : les deux niveaux d'analyse sont donc couplés. Pour pouvoir résoudre, Hughes propose de calculer \underline{v}^L pour un certain nombre de résidus globaux élémentaires, ce qui permet de l'éliminer et de tout exprimer en fonction de la solution globale — en d'autres termes, de *condenser* l'effet des échelles inférieures. On obtient ainsi un problème global « amélioré » corrigeant automatiquement l'erreur due à la discrétisation. En outre, une remarque importante est que cette erreur n'est autre que \underline{v}^L (dans (1.29), \underline{u} est la solution *exacte*) ; la relation (1.30) permet donc d'estimer l'erreur *a posteriori* et le procédé décrit ci-dessus peut être mis en œuvre de manière adaptative, à partir d'une solution éléments finis traditionnelle.

Toute la difficulté consiste naturellement à approcher la fonction de Green, qui d'une part n'est généralement pas déterminable analytiquement, et d'autre part est *non-locale*. Dans [Hughes *et al.*, 1998], les auteurs proposent de l'approcher à l'aide de fonctions à support compact, et notamment de fonctions bulles (nulles sur le bord de chaque élément) solutions de problèmes locaux associés au résidu \underline{r}^G , que l'on sait déterminer dans quelques cas. Ce choix n'est cependant pas optimal car il mène à un enrichissement trop localisé, et la détermination d'approximations moins locales² reste délicate. En outre, le choix classique de fonctions polynomiales peut s'avérer trop restrictif, par exemple lorsque la structure présente des hétérogénéités.

Pour ces raisons, la méthode variationnelle multi-échelles n'a fait l'objet que de relativement peu d'applications dans le domaine de la mécanique des structures, pour laquelle l'approximation des fonctions de Green demeure une question difficile. Cette méthode offre cependant un cadre théorique novateur concernant l'estimation d'erreur et la résolution par éléments finis de problèmes multi-échelles, notamment dans le cas linéaire.

2.2.3 La méthode *hp-d*

La méthode *hp-d* [Rank et Krause, 1997; Krause et Rank, 2003] s'adresse à des problèmes de mécanique des structures comportant des détails localisés rendant la solution irrégulière dans une certaine région, tels que des trous ou des hétérogénéités. Elle est issue de travaux sur l'adaptativité *hp* [Rank, 1992] et part du constat qu'un

2. Typiquement, des fonctions de faces ou d'arêtes ; le « résidu » représente alors la discontinuité des contraintes entre deux éléments, qui est la principale manifestation de l'erreur apportée par les éléments finis.

raffinement optimal consiste souvent à réduire la taille des éléments au voisinage des détails (adaptativité h) et à augmenter leur ordre au fur et à mesure que l'on s'en éloigne (adaptativité p). Elle emprunte également aux méthodes de décomposition de domaine avec recouvrement.

La méthode s'appuie sur deux modèles se recouvrant partiellement : un modèle local Ω_h maillé très finement, et un modèle global Ω_p muni d'éléments d'ordre élevé (voir FIG.1.7). La solution est cherchée sous la forme d'une somme des contributions des deux modèles :

$$\underline{u} = \underline{u}_h + \underline{u}_p \quad (1.31)$$

et la continuité des déplacements est imposée *a priori* sur chacune des deux frontières, ce qui se traduit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \underline{u}_h = 0 & \text{sur } \Gamma_h \\ \underline{u}_p = 0 & \text{sur } \Gamma_p \end{cases} \quad (1.32)$$

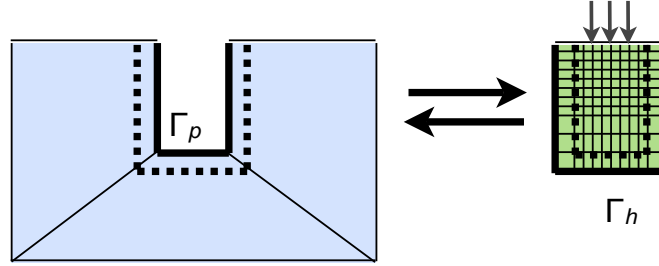


Figure 1.7: Principe de la méthode hp - d : modèles p (à gauche) et h (à droite).

Afin d'assurer l'indépendance linéaire des deux modèles (1.26), le recouvrement est construit de manière hiérarchique : les deux maillages ne se chevauchent pas, et les degrés de liberté présents deux fois sont éliminés du modèle fin. L'équilibre de la solution totale u , après discrétisation sur les deux maillages, conduit alors à résoudre un système de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ph} \\ \mathbf{K}_{hp} & \mathbf{K}_{hh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_h \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

où les termes diagonaux \mathbf{K}_{pp} et \mathbf{K}_{hh} sont des matrices de rigidité de la forme habituelle. Ce système est résolu à l'aide d'une technique de Gauss-Seidel par blocs, conduisant à résoudre à chaque itération un problème global (indice p) puis un problème local (indice h) ; les termes $\mathbf{K}_{ph}\mathbf{u}_h$ et $\mathbf{K}_{hp}\mathbf{u}_p$ rencontrés au second membre s'interprètent simplement comme des *précharges* causées par la solution précédente. Notons toutefois qu'en pratique, compte tenu de la formulation hiérarchique de la méthode, ces termes de couplage sont souvent très faibles³ et le système est quasiment diagonal par blocs ; le résultat obtenu par l'algorithme de Gauss-Seidel dépend donc fortement de la qualité de la solution initiale.

3. En effet, dans la méthode des éléments finis hiérarchiques, les termes de rigidité « croisés » sont nuls : voir [Zienkiewicz *et al.*, 1983].

L'approche peut ainsi être implémentée dans un logiciel éléments finis standard, ce qui a permis de l'appliquer à une grande variété de problèmes : élasticité 2D et 3D, plaques, mais également des problèmes physico-chimiques tels que la réaction-diffusion. La méthode a également été appliquée à des problèmes de plasticité confinée [Düster *et al.*, 1999] (tels que la zone où les modèles se recouvrent reste dans le domaine élastique) et pour coupler des modèles de dimensionnalités différentes, tels que des modèles de poutre et des modèles 2D [Düster *et al.*, 2007].

Bien que globalement performante, la méthode *hp-d* souffre toutefois de quelques limitations par rapport à notre problème. Sur le plan pratique, elle demande ainsi de connaître *a priori* la position des zones d'intérêt, ce qui n'est pas forcément faisable dans le cas de la plasticité ; de plus, la mise en œuvre de la superposition hiérarchique conduit à des contraintes fortes lors de la définition des maillages et nécessite une recherche systématique des dépendances linéaires entre les deux modèles. Enfin, l'efficacité de la méthode étant fortement liée à la validité de la solution initiale, les auteurs proposent d'utiliser la solution obtenue lors d'une étude sur un modèle plus grossier, ce qui peut rendre la mise en œuvre de la méthode assez fastidieuse. La méthode *hp-d* s'insère cependant naturellement dans le cadre d'une démarche adaptative, et peut représenter dans ce cas un gain de flexibilité et de performances important.

Signalons qu'une technique similaire a été introduite antérieurement par Fish sous le nom de *s-version* [Fish, 1992; Fish et Markolefas, 1992], avec quelques limitations supplémentaires : la variante de Fish est *a priori* limitée aux problèmes linéaires et résout le système (1.33) de façon monolithique, ce qui nécessite un développement séparé.

2.3 Méthodes de « patches » avec recouvrement

Une autre classe de méthodes utilise encore la superposition d'un modèle global relativement grossier et d'un modèle local plus fin, mais sans imposer de relation hiérarchique entre les deux : l'espace d'approximation local n'est plus choisi supplémentaire à l'espace global, et n'en constitue plus *stricto sensu* un enrichissement. Au lieu de cela, de façon similaire aux méthodes de décomposition de domaine avec recouvrement, on construit plutôt l'espace des solutions comme le produit des deux espaces d'approximation :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^G \times \mathcal{U}^L \quad (1.34)$$

ce qui signifie concrètement que l'on admet une certaine *redondance* entre les apports des deux modèles : la décomposition de la solution en une partie « grossière » et une partie « fine » n'est plus unique. En contrepartie, ces approches sont généralement beaucoup plus flexibles : elles ne nécessitent ni hypothèses sur le rapport d'échelles entre les deux modèles, ni contraintes fortes vis-à-vis de la définition des maillages, et ne posent aucun problème de dépendance linéaire des deux espaces. Nous examinons ici quelques développements représentatifs de cette démarche.

2.3.1 Les méthodes de Schwarz

Les méthodes de Schwarz sont des stratégies itératives de résolution très anciennes, basées sur une décomposition avec recouvrement du domaine d'étude, généralement en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 . Une itération de la méthode consiste à résoudre le problème considéré sur chacun des sous-domaines Ω_i , en utilisant la solution précédente obtenue sur l'autre sous-domaine comme condition aux limites sur $\Gamma_i = \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$; ceci peut s'effectuer soit en utilisant systématiquement la dernière solution, *ie.*

$$\begin{cases} \underline{u}_1^n = \underline{u}_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma_1 \\ \underline{u}_2^n = \underline{u}_1^n & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

auquel cas les deux résolutions doivent être effectuées successivement et la méthode est dite *multiplicative*, ou bien en ne mettant les conditions aux limites à jour qu'après un cycle complet, *ie.*

$$\begin{cases} \underline{u}_1^n = \underline{u}_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma_1 \\ \underline{u}_2^n = \underline{u}_1^{n-1} & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

auquel cas les deux résolutions peuvent être effectuées en parallèle et la méthode est dite *additive*. La convergence est alors plus lente, mais la possibilité de paralléliser les résolutions rend cet algorithme plus attractif que le précédent en pratique.

Une application notable de cet algorithme est celle de la *méthode Chimère*, introduite dans [Steger *et al.*, 1982] pour simuler des écoulements de fluides autour d'obstacles rigides à la géométrie complexe. Elle s'appuie sur deux maillages se recouvrant partiellement, l'un grossier et décrivant tout le domaine fluide à l'exception d'un voisinage immédiat de l'obstacle, l'autre fin et centré sur l'obstacle. Une méthode de Schwarz additive est alors utilisée pour coupler les deux modèles; moyennant l'emploi d'outils de transfert de champs et de régularisation adéquats, une convergence très rapide peut être obtenue [Brezzi *et al.*, 2001]. Cette technique évite ainsi de devoir inclure des détails géométriques fins au sein d'un grand domaine fluide; par rapport à nos objectifs, elle n'est cependant *a priori* pas destinée à introduire des formulations locales différentes, et demande une mise en données spécifique.

2.3.2 La « splitting method »

La *splitting method* a été proposée dans [Babuska et Andersson, 2005] pour traiter des problèmes de multi-fissuration et introduire, à un coût modéré, jusqu'à plusieurs centaines de fissures au sein d'une structure élastique linéaire, sans aucun remaillage.

Pour ce faire, elle consiste à représenter la structure non fissurée à l'aide d'un modèle éléments finis global, et chacun des sites potentiels à l'aide d'un petit modèle local superposé, de géométrie simple. Les problèmes locaux sont appelés « problèmes *handbook* » et sont du même type que ceux utilisés dans la G-FEM [Melenk et

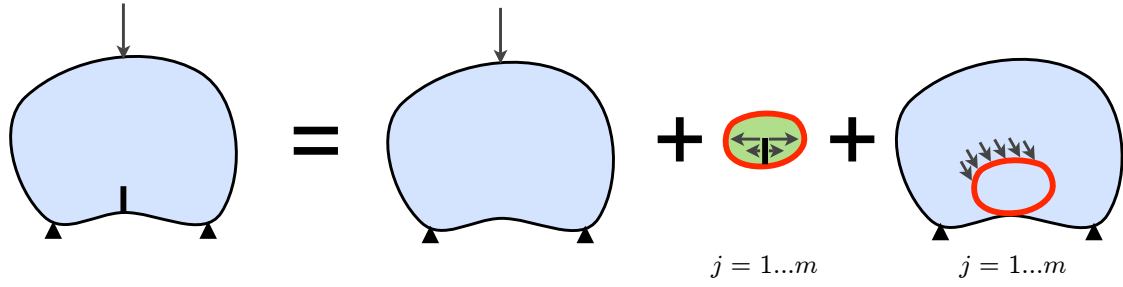


Figure 1.8: Principe de la *splitting method* dans le cas d'un seul site de fissuration.

Babuska, 1996; Strouboulis *et al.*, 2000], dont cette méthode constitue une variante non-intrusive. L'idée essentielle est de rechercher la solution sous la forme générale :

$$\underline{u} = \underline{u}^G + \sum_i (\underline{v}^{(L,i)} + \underline{w}^{(G,i)})$$

où \underline{u}^G désigne la solution globale non fissurée, $\underline{v}^{(L,i)}$ est la solution du problème *handbook* associé au site i et $\underline{w}^{(G,i)}$ est un terme correctif global, permettant d'assurer la continuité des déplacements et des contraintes sur le bord du domaine *handbook* ω_i (voir FIG.1.8). De cette définition, il résulte que $\underline{v}^{(L,i)}$ et $\underline{w}^{(G,i)}$ sont solution d'un problème couplé : la solution du problème *handbook* est naturellement fonction du chargement global, et inversement. Pour résoudre, Babuška propose donc de paramétrer les problèmes *handbook*, ce qui conduit à l'algorithme suivant :

1. **Résoudre le problème global non fissuré** : on obtient \underline{u}^G .
2. **Calculer la réponse de chaque problème *handbook* ω_i** à quelques chargements surfaciques élémentaires \underline{f}_j sur les lèvres de la fissure, sous une condition de Dirichlet homogène : on obtient ainsi une base de solutions élémentaires sur chaque site, $\underline{v}_j^{(L,i)}$.
3. **Calculer la réponse du modèle global non fissuré** à l'effort de réaction obtenu à l'étape précédente : on obtient ainsi une base de termes correctifs $\underline{w}_j^{(G,i)}$ tels que chaque $(\underline{v}_j^{(L,i)} + \underline{w}_j^{(G,i)})$ corresponde à une solution continue sur le bord de ω_i , en déplacement comme en contrainte.
4. **En déduire la solution** sous la forme suivante :

$$\underline{u} = \underline{u}^G + \sum_i \sum_j \beta_j^i (\underline{v}_j^{(L,i)} + \underline{w}_j^{(G,i)}) \quad (1.35)$$

en déterminant les coefficients β_j^i de sorte à vérifier au mieux, sur chaque site i , la condition de bord libre sur les lèvres des fissures.

L'étape la plus coûteuse est généralement la troisième, qui demande d'analyser de nombreux cas de chargement globaux ; cependant, le modèle global ne faisant l'objet d'aucune modification, ces résolutions sont simultanées et la méthode permet

ainsi des gains de temps considérables par rapport à une application directe de la G-FEM. La principale difficulté de l'approche réside naturellement dans le choix des chargements élémentaires \underline{f}_j de l'étape 2 ; dans cette étude, les auteurs utilisent un maillage global avec des éléments d'ordre élevé (p -version), et un choix de champs de contraintes polynomiaux permet en pratique d'aboutir à des résultats précis (la convergence est exponentielle en fonction du degré des polynômes) tout en conservant des tailles de bases modérées.

Sous l'hypothèse de linéarité, cette technique permet ainsi d'introduire de nombreuses modifications locales au sein d'une structure, de manière non-intrusive et quasi-exacte et à un coût modéré. Elle demande toutefois, pour être performante, une mise en données adéquate (p -version) et un solveur adapté au traitement simultané de très nombreux seconds membres.

2.3.3 La méthode Arlequin

Introduite par Ben Dhia, la méthode Arlequin [Ben Dhia, 1998; Ben Dhia et Rateau, 2001] permet de coupler des modèles de finesses différentes, tant au niveau de la discrétisation que de la formulation mise en jeu. Par rapport aux techniques précédentes, son originalité est de raccorder directement les modèles *dans le volume* où ils se superposent, et non pas sur des interfaces. De plus, dans ce volume, les modèles sont mis en concurrence, et leurs poids relatifs sont attribués par une *pondération* de leurs contributions respectives dans l'écriture des puissances virtuelles.

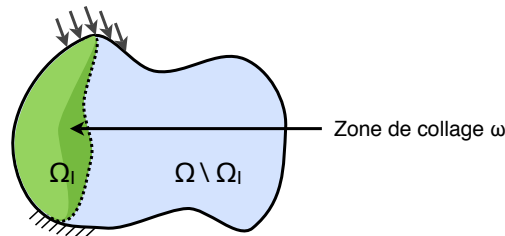


Figure 1.9: Exemple de décomposition avec recouvrement et zone de collage pour la méthode Arlequin

Considérons par exemple un problème d'élasticité linéaire pour lequel on dispose d'un modèle global de toute la structure Ω , que l'on souhaite corriger au sein d'un sous-domaine Ω_i à l'aide d'un modèle local (voir FIG.1.9). Une modélisation Arlequin de ce problème demande de définir les objets suivants :

- Un **champ scalaire de pondération** $\alpha(\underline{x})$ prenant une valeur comprise entre 0 et 1 dans Ω_i , et valant 0 au-dehors ; ce champ spécifie le « degré de confiance », c'est-à-dire la part d'énergie, attribué au modèle local en un endroit donné. Ainsi, le travail virtuel intérieur d'une solution $(\underline{u}^G, \underline{u}^L)$ est,

pour tout $(\underline{u}^{G^*}, \underline{u}^{L^*})$:

$$a_\alpha((\underline{u}^G, \underline{u}^L), (\underline{u}^{G^*}, \underline{u}^{L^*})) = \int_{\Omega} (1 - \alpha) \text{Tr} [\underline{\sigma}(\underline{u}^G) \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^{G^*})] d\Omega \\ + \int_{\Omega_i} \alpha \text{Tr} [\underline{\sigma}(\underline{u}^L) \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^{L^*})] d\Omega$$

où \underline{u}^G et \underline{u}^{G^*} sont définis sur Ω tout entier, et \underline{u}^L et \underline{u}^{L^*} sont définis uniquement sur Ω_i ; de même, si l'on suppose que Ω_i est intérieur à la structure, le travail des efforts extérieurs est :

$$l_\alpha((\underline{u}^{G^*}, \underline{u}^{L^*})) = \int_{\Omega} (1 - \alpha) \underline{f}_d \cdot \underline{u}^{G^*} d\Omega + \int_{\Omega_i} \alpha \underline{f}_d \cdot \underline{u}^{L^*} d\Omega \\ + \int_{\partial_2 \Omega \cap \Omega_i} \alpha \underline{F}_d \cdot \underline{u}^{L^*} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega \cap \bar{\Omega}_i} (1 - \alpha) \underline{F}_d \cdot \underline{u}^{G^*} d\Omega$$

où \underline{f}_d et \underline{F}_d désignent respectivement les chargements extérieurs volumique et surfacique appliqués à la structure.

- Une **zone de collage** ω , incluse dans la zone de recouvrement (qui est ici Ω_i tout entier); c'est sur cette zone que le raccord volumique sera écrit.
- Un **espace médiateur** \mathcal{M} , c'est-à-dire un espace de multiplicateurs de Lagrange utilisés pour contrôler l'écart des deux solutions \underline{u}^G et \underline{u}^L ; un choix classique est $H^1(\omega)$.

Avec ces notations, le problème Arlequin s'écrit de la manière suivante : trouver $(\underline{u}^G, \underline{u}^L, \underline{\lambda}) \in \mathcal{U}^G \times \mathcal{U}^L \times \mathcal{M}$ tel que $\forall (\underline{u}^{G^*}, \underline{u}^{L^*}, \underline{\lambda}^*) \in \mathcal{U}_0^G \times \mathcal{U}_0^L \times \mathcal{M}$,

$$\begin{cases} a_\alpha((\underline{u}^G, \underline{u}^L), (\underline{u}^{G^*}, \underline{u}^{L^*})) + \langle \underline{\lambda}, (\underline{u}^{G^*} - \underline{u}^{L^*}) \rangle & = l_\alpha((\underline{u}^{G^*}, \underline{u}^{L^*})) \\ \langle \underline{\lambda}^*, (\underline{u}^G - \underline{u}^L) \rangle & = 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

où \langle, \rangle désigne le produit scalaire classique sur $H^1(\omega)$. Il s'agit donc d'une formulation mixte. Une fois ce problème résolu, la solution est définie par exemple par :

$$\underline{u} = \begin{cases} \underline{u}^G & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_i \\ \alpha \underline{u}^L + (1 - \alpha) \underline{u}^G & \text{dans } \Omega_i \end{cases} \quad (1.37)$$

Aucune hypothèse *a priori* n'étant formulée sur la nature des modèles, la méthode se prête à une grande variété d'applications. Il est ainsi possible de coupler des modèles de natures différentes [Xiao et Belytschko, 2004], de dimensionnalités différentes, d'introduire des détails tels que des trous ou fissures, ou simplement de raffiner localement une discrétisation sans modifier le maillage, en *superposant* simplement un « patch » présentant les caractéristiques désirées. Il suffit alors de jouer sur la valeur de la fonction de pondération α pour déterminer si le modèle global doit être localement remplacé, par exemple lorsque l'on modifie la géométrie (en prenant $\alpha = 1$ sur la zone modifiée), ou simplement enrichi.

La méthode présente néanmoins quelques difficultés. La première d'entre elles concerne la discrétisation de l'espace médiateur \mathcal{M} , dans le cadre d'une méthode éléments finis ; le choix n'a rien d'évident et a fait l'objet de travaux récents [Guidault et Belytschko, 2007]. La seconde concerne la spécification des différentes zones dans l'hypothèse où l'on souhaite introduire de la plasticité locale, ou d'autres non-linéarités du matériau : il est naturellement souhaitable que la zone plastique soit entièrement incluse dans le « patch » et *exclue de la zone de collage*, ce qui demande de connaître son étendue *a priori*. Cette limitation n'est néanmoins pas spécifique à la méthode Arlequin. En outre, le système obtenu (1.36) étant monolithique, l'introduction de non-linéarités locales demande la résolution d'un problème non-linéaire global, ce qui peut s'avérer coûteux. Il est cependant possible d'associer l'approche à une résolution par décomposition de domaine, de type dual [Elkhodja *et al.*, 2007] ou mixte [Rey *et al.*, 2007], ce qui ouvre la voie à un traitement non-linéaire par sous-domaines susceptible d'être plus efficace, comme nous le verrons par la suite. Enfin, la formulation de la méthode présentant de nombreuses différences par rapport aux éléments finis standard (notamment en raison des fonctions de pondération et de l'intégration des forces de couplage), sa mise en œuvre peut demander des développements conséquents.

3 Stratégies de calcul à haute performance

Dans les deux sections précédentes, nous nous sommes intéressés à quelques techniques permettant d'introduire un détail ou un raffinement localisé au sein d'une structure, ainsi qu'à des approches reposant sur des hypothèses de séparation des échelles physiques afin de réduire la complexité de certains grands problèmes. Par contraste, les méthodes présentées ici permettent de s'attaquer directement à des analyses de grande taille, sans simplification préalable ; elles consistent essentiellement à mener une résolution *itérative* du problème, dont la convergence est accélérée à l'aide de problèmes « grossiers » auxiliaires — c'est-à-dire que l'objectif est de *résoudre un problème « fin » global de manière exacte*, les échelles supérieures n'intervenant que pour améliorer les transferts d'informations au sein de la structure étudiée.

Nous examinons deux classes importantes de méthodes faisant appel à ce principe ; par ailleurs, compte tenu des objectifs de ce travail, nous portons également une attention particulière à quelques techniques permettant de traiter la non-linéarité, notamment locale.

3.1 Traitement de la non-linéarité

Dans le cadre de cette étude, nous nous intéressons essentiellement à des problèmes de plasticité locale, qui sont la plupart du temps traités à l'aide de la méthode de Newton ou de l'une de ses variantes. Nous rappelons donc le principe de ces méthodes

et de leur mise en œuvre dans la méthode des éléments finis; nous présentons également une technique originale de traitement des problèmes non-linéaires d'évolution.

3.1.1 La méthode de Newton pour le calcul des structures

La méthode de Newton (ou méthode de Newton-Raphson) est une technique itérative de résolution d'équations non-linéaires. Si l'équation à résoudre est mise sous la forme générale $f(x) = 0$, une itération de la méthode de Newton consiste à poser :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

ce qui suppose évidemment que la fonction f est dérivable et de dérivée non nulle sur un certain intervalle autour de la solution. On peut montrer que pour des fonctions suffisamment régulières, dans un certain voisinage de la solution, la convergence est *quadratique*; c'est-à-dire qu'à partir d'un certain nombre d'itérations, il existe une constante C telle que :

$$|x_{k+1} - x_\infty| \leq C|x_k - x_\infty|^2$$

où x_∞ est la solution exacte. En pratique, la convergence peut donc sembler relativement lente au début, mais s'accélère très vite puisque le nombre de décimales exactes double à chaque itération. Il arrive toutefois que la méthode diverge lorsque la fonction f n'est pas assez régulière (ce qui est rarement le cas en élasto-plasticité) ou lorsque la solution initiale x_0 est trop éloignée de la solution exacte (ce qui est en revanche plus fréquent).

Dans le cadre d'un problème classique de mécanique non-linéaire traité par la méthode des éléments finis en déplacement, l'équation à résoudre est de la forme :

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}_{\text{ext}} = 0 \quad (1.38)$$

où les vecteurs \mathbf{u} , $\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u})$ et \mathbf{f}_{ext} représentent respectivement les déplacements, les efforts intérieurs et les efforts extérieurs nodaux. La mise en œuvre de la méthode de Newton pour cette équation consiste alors à poser :

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k - \left[\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_k) \right]^{-1} (\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_k) + \mathbf{f}_{\text{ext}})$$

où la matrice carrée $\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_k)$ est appelée *matrice tangente*; en notant \mathbf{K}_k cette matrice et $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}(\mathbf{u}_k)$ le résidu à l'itération k , une itération de la méthode de Newton consiste donc à résoudre le système linéaire suivant :

$$\mathbf{K}_k \delta \mathbf{u}_k = -\mathbf{r}_k \quad (1.39)$$

et la solution est ensuite mise à jour en posant

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \delta \mathbf{u}_k \quad (1.40)$$

ce qui, dans le cas (fréquent) d'une résolution directe, demande d'assembler \mathbf{K}_k et \mathbf{r}_k , de factoriser \mathbf{K}_k et d'effectuer deux résolutions triangulaires.

Différents critères permettent de stopper les itérations en fonction de l'issue de la méthode; ces critères portent essentiellement sur la comparaison de la norme du résidu $\|\mathbf{r}_k\|$ avec celle du chargement appliqué $\|\mathbf{f}_{\text{ext}}\|$ (ou du résidu initial lorsque \mathbf{f}_{ext} est nul), sur la variation relative de la solution $\frac{\|\delta\mathbf{u}_k\|}{\|\mathbf{u}_k\|}$ et sur le comptage des itérations. Il est ainsi possible de détecter les cas de convergence, de divergence ou de stagnation (ou convergence trop lente) relativement aisément.

Enfin, la quasi-totalité des codes de calcul mettent en œuvre la méthode de Newton au sein d'un processus *incrémental*, et ce pour deux raisons : d'abord, comme nous l'avons vu, la solution \mathbf{u}_0 initialisant les itérations doit se trouver dans un certain voisinage de la solution exacte; ensuite, la plupart des relations de comportement non-linéaires dépendant de l'*histoire* du chargement, il est nécessaire de tenir compte des variations de celui-ci lors de la mise à jour des variables internes. Ainsi, la méthodologie mise en œuvre consiste à découper le chargement en incréments, ou *pas de chargement*; partant d'un état $\{\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_{\text{ext}n}\}$ supposé à l'équilibre, on applique un incrément de chargement $\Delta\mathbf{f}_{\text{ext}}$ et on cherche le nouvel état $\{\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{f}_{\text{ext}n+1}\}$ vérifiant (1.38), par une procédure analogue à celle décrite ci-dessus. Toutes les quantités manipulées sont ainsi des *incréments* d'effort ou de déplacement; en particulier, la « matrice tangente » est définie par :

$$\mathbf{K}_k = \frac{\partial\Delta\mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial\Delta\mathbf{u}}(\Delta\mathbf{u}_k)$$

ce qui signifie qu'elle doit être prise en *fin d'incrément*; elle s'appelle pour cette raison *matrice tangente consistante* (ou *cohérente*). La détermination de la séquence optimale de pas de chargements est généralement un problème délicat : si les pas sont trop grands, la méthode de Newton ne converge pas; s'ils sont trop petits, un très grand nombre d'incréments devient nécessaire et la procédure n'est plus du tout efficace. Pour cette raison, un *schéma adaptatif* est souvent employé dans les logiciels de calcul, et le pas de chargement courant est augmenté ou réduit selon que la méthode de Newton a convergé ou non aux incréments précédents.

3.1.2 Variantes de la méthode de Newton

Un inconvénient possible de la méthode de Newton est qu'à chaque itération, la matrice tangente consistante \mathbf{K}_k est réassemblée et refactorisée, ce qui représente un coût de calcul par itération relativement important. Un certain nombre de méthodes dérivées permettent d'éviter ces refactorisations; nous en décrivons ici deux catégories, schématisées sur la FIG.1.10.

■ Méthode de Newton modifiée (ou pseudo-Newton)

Cette technique consiste à ne mettre à jour la matrice tangente consistante qu'une seule fois au début de chaque incrément, voire encore moins souvent; toutes les

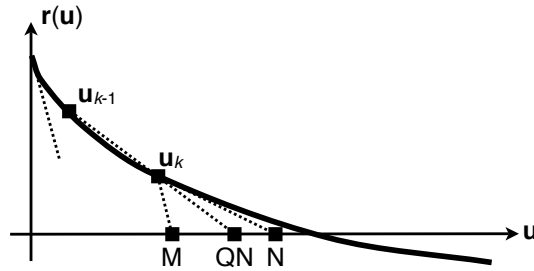


Figure 1.10: Principe de la méthode de Newton (N), de Newton modifiée (M) ou quasi-Newton (QN).

itérations de Newton d'un même incrément s'effectuent donc avec le même opérateur linéarisé \mathbf{K} . Le coût d'une itération est donc fortement réduit, mais le taux de convergence est bien sûr détérioré : on peut montrer que la convergence n'est que *linéaire*, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain nombre d'itérations, il existe une constante C telle que

$$|x_{k+1} - x_\infty| \leq C|x_k - x_\infty|$$

ce qui est nettement moins avantageux que la convergence quadratique de la méthode de Newton. En pratique, cette méthode n'est à conseiller que pour des problèmes très faiblement non-linéaires ou de petits incréments de chargement, sous réserve que le code employé permette de réutiliser la factorisation de la matrice tangente aussi longtemps que celle-ci est conservée.

■ Méthodes quasi-Newton

Les méthodes quasi-Newton sont des généralisations de la *méthode de la sécante* dans le cas multidimensionnel. Cette dernière consiste, connaissant deux points x_k et x_{k-1} relativement proches, à faire l'approximation suivante :

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Dans notre cas, cela consiste à définir une matrice $\hat{\mathbf{K}}_k$ telle que :

$$\hat{\mathbf{K}}_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}) = -(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}) \quad (1.41)$$

Une telle matrice n'est naturellement pas unique : dans un espace vectoriel de dimension N , l'ensemble des matrices carrées vérifiant cette propriété est de dimension $N(N-1)$. Les méthodes quasi-Newton sont des techniques permettant de construire de telles matrices sous la forme :

$$\hat{\mathbf{K}}_k = \hat{\mathbf{K}}_{k-1} + \delta \hat{\mathbf{K}}_k \quad (1.42)$$

c'est-à-dire en *corrigeant* successivement la matrice à chaque itération par un terme $\delta \hat{\mathbf{K}}_k$, en partant d'une estimation initiale $\hat{\mathbf{K}}_0$ de la matrice tangente. Celle-ci n'est

donc jamais recalculée. Les termes $\hat{\mathbf{K}}_k$ sont donnés par des formules, en fonction des variations de la solution $\delta\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}$ et du résidu $\delta\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}$; en pratique, ils sont toujours de *faible rang*. Parmi les formules quasi-Newton les plus populaires, on peut citer :

- **BFGS** (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno), qui donne un $\delta\hat{\mathbf{K}}_k$ symétrique de rang 2 et une matrice $\hat{\mathbf{K}}_k$ définie positive si la matrice initiale l'est également; cette technique est utilisée dans de nombreux logiciels éléments finis du commerce, le plus souvent à l'aide de l'implémentation proposée dans [Matthies et Strang, 1979];
- **DFP** (Davidon-Fletcher-Powell), elle aussi symétrique et de rang 2, plus ancienne et moins employée que BFGS;
- **SR1** (*Symmetric Rank 1*), symétrique et de rang 1 comme son nom l'indique, plus simple que BFGS et DFP mais pouvant mener à des systèmes non définis positifs dans certains cas;
- les deux **formules de Broyden**, non symétriques et de rang 1.

Un aspect important de ces techniques est qu'elles ne demandent ni d'assembler, ni de factoriser, ni même de manipuler les matrices ainsi définies (hormis la première); en pratique, des techniques d'algèbre linéaire (la formule de Sherman-Morrison (1.7)) sont employées pour atteindre directement la solution du système $\hat{\mathbf{K}}_k \delta\mathbf{u}_k = -\mathbf{r}_k$ à partir de la factorisation de la matrice initiale $\hat{\mathbf{K}}_0$, moyennant une succession de produits scalaires et le stockage de quelques vecteurs. Le coût d'une itération est ainsi bien inférieur à celui d'une itération de Newton; quant à l'ordre de convergence, il est théoriquement égal au « nombre d'or » ($\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$) dans un certain voisinage de la solution, et les performances sont donc intermédiaires entre celles de la méthode de Newton (ordre 2) et celles de la méthode de Newton modifiée (ordre 1). De plus, la méthode BFGS bénéficie d'une grande robustesse, et converge même dans certains cas qui peuvent tenir la méthode de Newton en échec (comportements « raidissants »). Elle peut cependant devenir relativement coûteuse pour des problèmes fortement non-linéaires ou lorsque les incréments de chargement sont trop grands.

3.1.3 La méthode LaTIn

La méthode LaTIn (pour « **L**arge **T**ime **I**ncrément ») est une stratégie de calcul originale pour la résolution de problèmes non-linéaires d'évolution, introduite dans [Ladevèze, 1985]. Son originalité réside dans le fait qu'il ne s'agit pas d'une méthode incrémentale : à chaque itération, on calcule une solution approchée *définie sur tout l'intervalle de temps et sur toute la structure*. Elle repose sur trois principes de mise en œuvre :

1. la « *séparation des difficultés* », c'est-à-dire une répartition des équations du problème en deux groupes : les équations éventuellement globales mais *forcément linéaires* (équations de liaisons et d'équilibre, lois d'état...) et les

équations éventuellement non-linéaires mais *forcément locales* (relations de comportement non-linéaires, conditions de contacts...)

2. une *résolution itérative à deux étapes* : on cherche les solutions successives des deux groupes d'équations précédents, en passant de l'un à l'autre au moyen de deux *directions de recherche* notées \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- et assimilables à des opérateurs de rigidité linéaires, comme le montre la FIG.1.11. Chacune de ces résolutions est effectuée sur tout le temps (*ie.* on résout un problème d'évolution) et sur tout l'espace.
3. une *représentation adaptée des inconnues*, typiquement sous forme d'une somme de chargements *radiaux* (*ie.* de produits d'une fonction du temps par une fonction de l'espace).

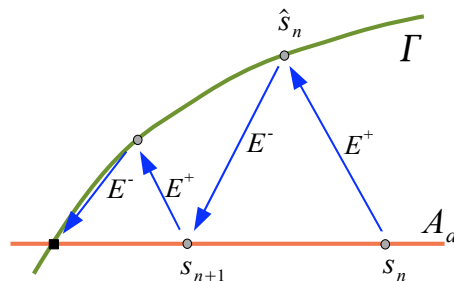


Figure 1.11: Principe d'une itération de la méthode LaTin.

Cette méthode est particulièrement bien adaptée à la résolution de problèmes contenant des non-linéarités locales du matériau. Elle a ainsi été appliquée aux problèmes d'élasto-plasticité [Boisse *et al.*, 1989] et de visco-plasticité [Cognard, 1989], de dynamique [Royer, 1990; Ladevèze, 1996] ou pour l'analyse du délaminage [Allix, 1987]. Elle a également été mise en œuvre pour les grandes transformations [Bussy *et al.*, 1990] et le flambage [Boucard et Ladevèze, 1997] grâce à une formulation corotationnelle permettant une séparation pertinente des équations linéaires et non-linéaires. En outre, elle apporte une réponse intéressante (et complémentaire aux techniques de réanalyse structurelle) à la problématique des études paramétriques, la méthode pouvant être initialisée par la solution d'un calcul précédent, et les fonctions de l'espace pouvant être réutilisées [Boucard et Ladevèze, 1999; Boucard, 2001]. Enfin, elle a également été mise en œuvre dans le cadre d'une méthode de décomposition de domaine, comme nous le verrons dans la suite du chapitre.

3.2 Méthodes multigrilles

Les méthodes multigrilles [Fedorenko, 1964] sont des algorithmes de résolution de problèmes de grande taille utilisant toute une hiérarchie de discrétisations. Elles s'appuient sur les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires (telles que le

gradient conjugué, Jacobi, Gauss-Seidel, SSOR... [Saad, 2000]) et partent du principe que ces méthodes sont surtout efficaces pour réduire les composantes *fortement oscillantes* de l'erreur, les composantes plus lisses ne décroissant que lentement.

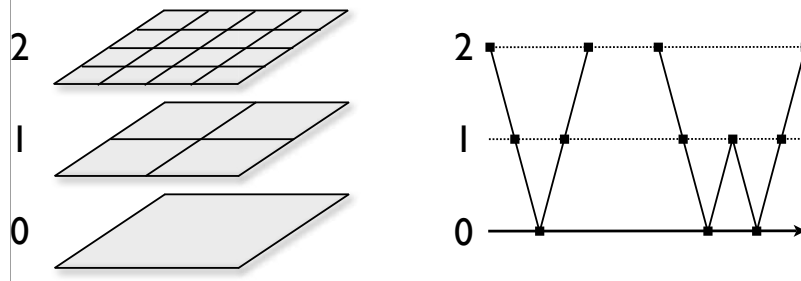


Figure 1.12: Principe des méthodes multigrilles : hiérarchie de grilles (à gauche) et cycles en V et en W (à droite).

Or, le caractère oscillant d'une solution est naturellement relatif à la taille de la grille considérée. Le principe de base d'une résolution multigrille est donc d'utiliser quelques itérations d'une technique de base afin de *lisser* le résidu sur la grille la plus fine, puis de le *transférer* sur des grilles plus grossières afin de réduire ses composantes moins oscillantes par la même technique ; le résultat est alors de nouveau transféré sur la grille fine. Les opérateurs de transfert employés correspondent souvent à des interpolations linéaires et la démarche est mise en œuvre de manière récursive au sein de *cycles* dits « en V » ou « en W » (voir FIG.1.12). En appelant $\mathbf{K}^{n_{max}}, \mathbf{K}^{n_{max}-1}, \dots, \mathbf{K}^0$ les matrices de rigidité obtenues sur chacune des grilles (la grille la plus fine étant numérotée n_{max} et la plus grossière 0), un cycle en V pour la résolution du problème $\mathbf{K}^n \mathbf{u}^n = \mathbf{f}^n$, avec $1 \leq n \leq n_{max}$, comprend les cinq étapes suivantes :

1. **Effectuer p itérations de lissage** sur la solution courante \mathbf{u}^n :

$$\mathbf{u}^n \leftarrow (\mathbf{L}^n)^p \mathbf{u}^n$$

en notant formellement \mathbf{L}^n l'opérateur de lissage associé à la technique choisie (qui dépend évidemment de \mathbf{K}^n et \mathbf{f}^n).

2. **Restreindre le résidu « lissé »** sur la grille grossière la plus proche :

$$\mathbf{r}^{n-1} \leftarrow \mathbf{R}_{n \rightarrow n-1} (\mathbf{f}^n - \mathbf{K}^n \mathbf{u}^n)$$

où $\mathbf{R}_{n \rightarrow n-1}$ désigne l'opérateur de restriction de la grille n à la grille $n - 1$.

3. **Si $n > 1$, appliquer récursivement les étapes 1 à 5** pour obtenir une solution approchée \mathbf{e}^{n-1} du problème résiduel :

$$\mathbf{K}^{n-1} \mathbf{e}^{n-1} = \mathbf{r}^{n-1} \quad (1.43)$$

Si $n = 1$, résoudre exactement le problème résiduel, qui est posé sur la grille la plus grossière, par une technique directe ou itérative (c'est en principe très peu coûteux!).

4. **Prolonger** la correction obtenue sur la grille de départ et **corriger** la solution \mathbf{u}^n :

$$\mathbf{u}^n \leftarrow \mathbf{u}^n + \mathbf{P}_{n-1 \rightarrow n} \mathbf{e}^{n-1}$$

où $\mathbf{P}_{n-1 \rightarrow n}$ désigne l'opérateur de prolongation de la grille $n - 1$ à la grille n ; souvent, $\mathbf{P}_{n-1 \rightarrow n} = \mathbf{R}_{n \rightarrow n-1}^T$.

5. **Effectuer q itérations de lissage** supplémentaires afin de corriger les perturbations induites par l'opération de prolongement.

Une propriété essentielle de ces méthodes est que pour des systèmes symétriques définis positifs de taille N , le coût global de la résolution est *quasiment en* $O(N)$, ce qui en fait des méthodes *optimales* [Yserentant, 1986]. Les méthodes multigrilles sont ainsi des techniques de choix pour les très grands problèmes. Elles nécessitent cependant de construire une hiérarchie complète de grilles, c'est-à-dire de pouvoir déraffiner le maillage initial jusqu'à un niveau auquel le coût d'une résolution exacte est négligeable — ce qui n'est pas toujours possible sur certaines géométries complexes. En pratique, deux approches sont possibles pour répondre à cette problématique :

- Les méthodes *multigrilles algébriques* remplacent la construction de grilles grossières par une restriction des *espaces vectoriels* de recherche de la solution, basée sur l'examen de la matrice de rigidité ; elles traitent ainsi des maillages non structurés sans difficulté, du moins dans le cas de structures massives. Malheureusement, cette démarche donne rarement satisfaction dans le cadre de structures minces ou munies de détails complexes, car elle n'aboutit alors pas à des espaces grossiers satisfaisants.
- L'autre possibilité est de mettre en œuvre les outils des méthodes multigrilles, mais *sans construire une hiérarchie de grilles complète* : seuls deux ou trois niveaux d'analyse sont considérés. Il est ainsi possible de traiter des géométries beaucoup plus complexes, ce qui se paye naturellement par la perte de l'optimalité de la méthode.

Dans ce qui suit, nous présentons brièvement deux champs d'application des méthodes multigrilles en rapport avec notre problématique.

3.2.1 Applications à des problèmes non-linéaires

Les méthodes multigrilles peuvent être appliquées à des problèmes non-linéaires, selon deux approches très différentes.

La première, dénommée *Newton-Multigrid*, consiste à résoudre sur plusieurs grilles les équations *linéarisées* issues de la méthode de Newton ; il s'agit donc d'un traitement global de la non-linéarité. Cette approche est notamment utilisée par Fish dans le cadre de structures élasto-plastiques analysées sur deux, voire trois échelles [Fish et Shek, 2000]. Chaque résolution linéaire est menée selon l'algorithme ci-dessus, mais avec quelques adaptations des différents opérateurs ; ainsi, la restriction $\mathbf{R}_{n \rightarrow n-1}$ et la prolongation $\mathbf{P}_{n-1 \rightarrow n}$ ne font pas intervenir des interpolations linéaires

classiques, mais correspondent à des techniques d'*homogénéisation asymptotique*. De même, les matrices de rigidité des échelles supérieures sont construites à l'aide d'un comportement homogénéisé. Cette approche s'avère fructueuse : le traitement des résidus « peu oscillants » effectuée par le problème global permet précisément de raccorder les différentes échelles que les techniques d'homogénéisation supposent séparées, et la méthode permet donc une résolution beaucoup plus rapide qu'en utilisant un solveur direct. Cependant, lorsque la non-linéarité est fortement localisée, la convergence de l'ensemble du processus est pénalisée par des phénomènes purement locaux.

Une seconde approche consiste à traiter *directement* le problème non-linéaire à l'aide d'un algorithme multigrilles ; ainsi, chaque opération de lissage ou de résolution globale est en fait une procédure non-linéaire. Quasiment toutes les déclinaisons de ce principe font appel à une variante de l'algorithme multigrilles classique dénommée FAS, pour *Full Approximation Scheme* [Brandt, 1977], qui consiste essentiellement à remplacer le problème résiduel grossier (1.43) par :

$$\mathbf{K}^{n-1} (\mathbf{u}^{n-1} + \mathbf{e}^{n-1}) - \mathbf{K}^{n-1} (\mathbf{u}^{n-1}) = \mathbf{r}^{n-1} \quad (1.44)$$

où \mathbf{K}^{n-1} est maintenant un opérateur *non-linéaire* et $\mathbf{u}^{n-1} = \mathbf{R}_{n \rightarrow n-1} \mathbf{u}^n$ est obtenu en restreignant la solution courante sur la grille supérieure. Cette technique consiste donc à transférer la solution complète d'une grille à l'autre, d'où son nom ; cela peut s'avérer assez coûteux en termes de stockage, mais permet cependant de traiter la non-linéarité à *tous* les niveaux, et s'avère en particulier très efficace en présence de fortes non-linéarités. Dans [Fish *et al.*, 1995], l'approche FAS est combinée à la méthode quasi-Newton BFGS pour analyser de grandes structures 3D élasto-plastiques, et comparée à de nombreuses autres techniques ; l'ensemble s'avère d'une efficacité remarquable, bien que l'étude se limite à des géométries relativement simples.

3.2.2 Applications à des problèmes de zoom

Une autre famille de travaux a cherché à adapter les techniques multigrilles à des problèmes de zoom, pour lesquels la connaissance d'une solution fine n'est nécessaire que dans une petite zone d'intérêt. La grille la plus fine n'est ainsi définie que sur une partie du domaine, et le problème est résolu sur la *grille composite* formée de l'assemblage des deux grilles.

Cette méthodologie a initialement été proposée par Brandt [Brandt, 1977] et a donné lieu à plusieurs variantes [Hackbusch, 1984; McCormick et Thomas, 1986]. Elle a été déclinée à différents problèmes de mécanique des structures par Fish *et al.* : dans [Fish et Belsky, 1994], elle est appliquée à des modèles de composites périodiques, où seule une partie de la structure est modélisée à l'échelle du matériau. Comme précédemment, des techniques d'homogénéisation sont employées pour passer d'un niveau à l'autre. Dans [Fish *et al.*, 1996], la méthode est combinée à une technique de collage de modèles par interface hybride (voir Section 1.4), et les auteurs présentent

plusieurs adaptations permettant de résoudre le système non défini positif résultant de la formulation employée. Dans [Fish *et al.*, 1997], l'approche est appliquée à un modèle de coque localement raffiné par un modèle 3D ; cependant, dans ce dernier cas, l'écart important entre les opérateurs de rigidité des deux modèles dégrade fortement les temps de calcul. Enfin, dans un cadre plus général (plus de deux grilles sont utilisées) et en association avec la méthode X-FEM, les techniques multigrilles ont également été utilisées avec succès pour traiter des problèmes de fissuration [Gravouil et Combescure, 2003; Rannou *et al.*, 2007].

3.3 Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement

Les méthodes de décomposition de domaine sont une autre classe de techniques de résolution de problèmes de grande taille consistant, comme leur nom l'indique, à découper le domaine d'étude Ω en plusieurs sous-domaines de taille inférieure. Ces sous-domaines sont alors traités séparément, puis « raccordés » afin d'obtenir la solution exacte. Plusieurs catégories de méthodes existent, différentes en premier lieu par la nature de la décomposition elle-même. On distingue ainsi :

- les méthodes *sans recouvrement*, telles que l'intersection de deux sous-domaines se limite au maximum à une surface (en 3D) ou une ligne (en 2D), alors appelée *interface* ;
- les méthodes *avec recouvrement*, telles que deux sous-domaines voisins se chevauchent.

Les techniques de « patches » vues dans la Section 2 peuvent être vues comme des cas particuliers de méthodes de décomposition de domaine avec recouvrement. Dans ce qui suit, nous nous limitons aux approches sans recouvrement.

3.3.1 Principes généraux

Le principe général d'une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement est de poser le problème sous forme *sous-structurée*, c'est-à-dire en écrivant d'une part les équations à l'intérieur de chaque sous-domaine, et d'autre part les conditions de raccord sur chaque interface. Dans un souci de simplicité, et compte tenu des objectifs de l'étude, nous nous limitons ici au cas de deux sous-domaines ; la généralisation à un grand nombre de sous-domaines pose d'importantes difficultés supplémentaires, liées notamment à l'extensibilité et au traitement des coins, qui ne seront que brièvement évoquées ici. Une revue quasi-exhaustive de ces techniques, présentant ces aspects de manière détaillée, peut être trouvée dans [Gosselet et Rey, 2006].

Nous considérons donc un problème d'élasticité linéaire statique, posé sur deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 séparés par une interface Γ (FIG.1.13). En supposant que chacun des deux sous-domaines a été discrétisé par éléments finis et que les deux maillages sont conformes et compatibles sur Γ , la formulation faible de ce problème

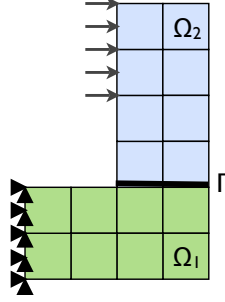


Figure 1.13: Exemple de décomposition de domaine sans recouvrement

conduit aux équations matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^i & \mathbf{K}_{i\Gamma}^i \\ \mathbf{K}_{\Gamma i}^i & \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^i \\ \mathbf{u}_\Gamma^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^i \\ \mathbf{f}_\Gamma^i + \lambda_\Gamma^i \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2) \quad (1.45)$$

$$\mathbf{u}_\Gamma^1 = \mathbf{u}_\Gamma^2 \quad (1.46)$$

$$\lambda_\Gamma^1 + \lambda_\Gamma^2 = 0 \quad (1.47)$$

où les λ_Γ^i désignent les efforts nodaux exercés sur chacun des deux sous-domaines à travers l'interface. Différentes stratégies sont alors possibles pour résoudre ce système. Nous présentons ici les plus courantes.

■ Approches primales

Elles consistent à se donner un déplacement d'interface $\mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{u}_\Gamma^1 = \mathbf{u}_\Gamma^2$ vérifiant *a priori* (1.46) et à écrire l'équilibre des efforts (1.47), éliminés à l'aide de (1.45). Pour ce faire, une technique commode est d'écrire (1.45) sous forme condensée :

$$\mathbf{S}_\Gamma^i \mathbf{u}_\Gamma^i = \mathbf{b}_\Gamma^i + \lambda_\Gamma^i \quad (i = 1, 2) \quad (1.48)$$

où \mathbf{S}_Γ^i et \mathbf{b}_Γ^i désignent respectivement le complément de Schur et le second membre condensé du sous-domaine i sur l'interface ; ces quantités sont définies dans la Section 1.3. On utilise ensuite (1.48) pour exprimer directement la condition (1.47) en fonction de l'inconnue \mathbf{u}_Γ . On obtient ainsi la *méthode du complément de Schur primal* :

$$[\mathbf{S}_\Gamma^1 + \mathbf{S}_\Gamma^2] \mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{b}_\Gamma^1 + \mathbf{b}_\Gamma^2 \quad (1.49)$$

Plusieurs techniques de résolution sont alors possibles. Pour des problèmes suffisamment petits, on peut envisager une résolution directe : il faut alors calculer explicitement les compléments de Schur, puis les assembler, et factoriser la matrice ainsi obtenue, qui est généralement pleine. Pour de grands problèmes, cela s'avère très coûteux, et une résolution itérative est indispensable. Pour ce faire, on utilise habituellement des solveurs de Krylov, tels que la méthode du gradient conjugué ou GMRES ; ces solveurs ne demandent d'effectuer que des produits matrice-vecteur. Or, multiplier un vecteur \mathbf{v} par $\mathbf{S}_\Gamma^1 + \mathbf{S}_\Gamma^2$ consiste à imposer ce vecteur comme

déplacement à l'interface de chacun des sous-domaines, récupérer les efforts de réaction résultants et les ajouter ; lors d'une résolution itérative, il n'est ainsi *jamais nécessaire de calculer explicitement les compléments de Schur ni d'assembler le problème global*, et les calculs peuvent être effectués en parallèle sur chaque sous-domaine.

En pratique, l'efficacité d'une telle méthode dépend énormément du conditionnement du système à résoudre ; pour cette raison, on emploie systématiquement un *préconditionneur*, c'est-à-dire une matrice \mathbf{M}^{-1} telle que $\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{S}_\Gamma^1 + \mathbf{S}_\Gamma^2]$ soit la mieux conditionnée possible — en d'autres termes, la plus proche possible de l'identité. Il s'agit donc d'approcher simplement l'inverse de la matrice du système ; pour cela, un choix courant est d'approcher $[\mathbf{S}_\Gamma^1 + \mathbf{S}_\Gamma^2]^{-1}$ par une combinaison linéaire des inverses de chacun des compléments de Schur :

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{W}^1 \mathbf{S}_\Gamma^1{}^{-1} \mathbf{W}^1 + \mathbf{W}^2 \mathbf{S}_\Gamma^2{}^{-1} \mathbf{W}^2$$

où les \mathbf{W}^i sont des matrices diagonales de pondération telles que $\mathbf{W}^1 + \mathbf{W}^2 = \mathbf{I}$. De même que précédemment, appliquer ce preconditionneur à un résidu \mathbf{r} revient à résoudre un problème de Neumann sur chaque sous-domaine, d'où le nom de *préconditionneur Neumann-Neumann* donné à cette technique. Dans le cas où des résolutions locales exactes s'avèreraient encore trop coûteuses, il est en outre possible d'approximer les compléments de Schur locaux, comme nous le verrons plus loin.

Toutefois, tous les sous-domaines ne possèdent généralement pas (ou pas suffisamment) de conditions en déplacement ; leurs compléments de Schur ne sont alors pas inversibles. L'approche BDD, pour *Balancing Domain Decomposition* [Mandel, 1993], répond à ce problème en introduisant une phase d'*équilibrage* des résidus, qui consiste à pré-équilibrer les efforts exercés sur chaque sous-domaine afin d'annuler leur résultante et leur moment, à l'aide d'un problème grossier auxiliaire. On obtient ainsi des problèmes locaux bien posés tout en assurant l'extensibilité de la méthode.

■ Approches duales

Inversement, les approches duales consistent à se donner des efforts d'interface *a priori* équilibrés. On peut par exemple choisir $\lambda_\Gamma = \lambda_\Gamma^1 = -\lambda_\Gamma^2$, ce qui s'écrit encore :

$$\lambda_\Gamma^i = \epsilon^i \lambda_\Gamma \quad (i = 1, 2) \quad (1.50)$$

où l'on note $\epsilon^1 = 1$ et $\epsilon^2 = -1$. On exprime alors les déplacements d'interface en fonction de λ_Γ à l'aide des équations d'admissibilité des sous-domaines, par exemple sous forme condensée (1.48) ; la difficulté est que comme nous l'avons vu, les matrices de rigidité des sous-domaines (et leurs compléments de Schur) ne sont généralement pas inversibles. Il est cependant possible d'écrire, pour chaque sous-domaine :

$$\mathbf{u}_\Gamma^i = \mathbf{S}_\Gamma^{i+} (\mathbf{b}_\Gamma^i + \epsilon^i \lambda_\Gamma) + \alpha^i \mathbf{R}^i \quad (i = 1, 2)$$

où \mathbf{S}_Γ^{i+} est une *pseudo-inverse* de \mathbf{S}_Γ^i , \mathbf{R}^i désigne la matrice des *modes rigides d'interface* du sous-domaine i (*ie.* une base du noyau de \mathbf{S}_Γ^i) et α^i est un vecteur d'amplitudes inconnues, associées à ces modes, qui seront déterminées au cours de la

résolution. La continuité des déplacements (1.46) donne alors :

$$\mathbf{S}_\Gamma^{1+} (\mathbf{b}_\Gamma^1 + \lambda_\Gamma) + \alpha^1 \mathbf{R}^1 = \mathbf{S}_\Gamma^{2+} (\mathbf{b}_\Gamma^2 - \lambda_\Gamma) + \alpha^2 \mathbf{R}^2 \quad (1.51)$$

En outre, tout ceci n'est valable qu'à condition que le chargement total appliqué sur chacun des deux sous-domaines ne fasse pas travailler leurs modes rigides, ce qui s'écrit :

$$\mathbf{R}^{iT} (\mathbf{b}_\Gamma^i + \epsilon^i \lambda_\Gamma) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.52)$$

En rassemblant les équations (1.51) et (1.52), on obtient finalement le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_\Gamma^{1+} + \mathbf{S}_\Gamma^{2+} & \mathbf{R}^1 & -\mathbf{R}^2 \\ \mathbf{R}^{1T} & 0 & 0 \\ -\mathbf{R}^{2T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_\Gamma \\ \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\Gamma^{1+} \mathbf{b}_\Gamma^1 - \mathbf{S}_\Gamma^{2+} \mathbf{b}_\Gamma^2 \\ \mathbf{R}^{1T} \mathbf{b}_\Gamma^1 \\ \mathbf{R}^{2T} \mathbf{b}_\Gamma^2 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

La méthode FETI [Farhat et Roux, 1991] consiste à résoudre ce système à l'aide d'une technique de type gradient conjugué projeté, où l'étape de projection est associée à la contrainte d'équilibre des sous-domaines ; c'est cette étape de projection qui définit le problème grossier permettant d'assurer l'extensibilité. En outre, comme pour les approches primales, un préconditionneur adapté est utilisé (par exemple de type Dirichlet). Plusieurs évolutions ont été proposées par la suite ; ainsi, dans la méthode FETI2 [Farhat *et al.*, 1996], le problème grossier est enrichi par l'introduction de nouvelles contraintes portant sur le déplacement ; la méthode FETI-DP [Farhat *et al.*, 2001] se base quant à elle sur une formulation hybride, les déplacements des coins étant utilisés comme variables primales. Un cadre unifié pour de telles approches hybrides est proposée dans [Gosselet, 2003].

■ Approches mixtes

Les approches mixtes, quant à elles, n'imposent *a priori* ni continuité ni équilibre et forment le problème d'interface *à la fois* en termes d'efforts et de déplacements. Il en existe différents types, basés sur des formalismes différents, par exemple de type Lagrangien augmenté [Fortin et Glowinski, 1983; Glowinski et Le Tallec, 1990] ou de type LaTIn comme l'approche micro/macro [Ladevèze et Dureisseix, 2000; Ladevèze *et al.*, 2001] qui sera décrite dans la suite de cette partie. Ici, nous adoptons le point de vue des techniques dites « FETI 2-champs » [Series *et al.*, 2003].

L'idée essentielle de ces techniques est de réécrire les conditions d'interface en termes de nouvelles inconnues μ_Γ^i :

$$\mu_\Gamma^i = \lambda_\Gamma^i + \mathbf{A}^i \mathbf{u}_\Gamma^i \quad (i = 1, 2) \quad (1.54)$$

où les \mathbf{A}^i sont des matrices pouvant être interprétées comme des raideurs d'interfaces associées à chacun des sous-domaines (voir par exemple [Maday et Magoulès, 2006] pour une présentation plus générale). Or, on montre aisément que les conditions d'interface (1.46) et (1.47) sont équivalentes au système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_\Gamma^1 + \lambda_\Gamma^2 + \mathbf{A}^1 (\mathbf{u}_\Gamma^1 - \mathbf{u}_\Gamma^2) = 0 \\ \lambda_\Gamma^1 + \lambda_\Gamma^2 + \mathbf{A}^2 (\mathbf{u}_\Gamma^2 - \mathbf{u}_\Gamma^1) = 0 \end{cases}$$

sous réserve que $\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2$ soit inversible. En introduisant les μ_Γ^i , il vient alors :

$$\begin{cases} \mu_\Gamma^1 + \mu_\Gamma^2 - (\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2) \mathbf{u}_\Gamma^2 = 0 \\ \mu_\Gamma^1 + \mu_\Gamma^2 - (\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2) \mathbf{u}_\Gamma^1 = 0 \end{cases} \quad (1.55)$$

pour les conditions d'interface, et :

$$(\mathbf{S}_\Gamma^i + \mathbf{A}^i) \mathbf{u}_\Gamma^i = \mu_\Gamma^i + \mathbf{b}_\Gamma^i \quad (i = 1, 2) \quad (1.56)$$

pour l'équilibre des sous-structures. L'idée est alors de choisir des \mathbf{A}^i de sorte que les *matrices corrigées* $(\mathbf{S}_\Gamma^i + \mathbf{A}^i)$ soient inversibles, puis d'éliminer les déplacements dans (1.55), ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} - (\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2)(\mathbf{S}_\Gamma^2 + \mathbf{A}^2)^{-1} \\ \mathbf{I} - (\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2)(\mathbf{S}_\Gamma^1 + \mathbf{A}^1)^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_\Gamma^1 \\ \mu_\Gamma^2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2)(\mathbf{S}_\Gamma^2 + \mathbf{A}^2)^{-1} \mathbf{b}_\Gamma^1 \\ (\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2)(\mathbf{S}_\Gamma^1 + \mathbf{A}^1)^{-1} \mathbf{b}_\Gamma^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.57)$$

Ce système permet de clarifier l'interprétation de la matrice \mathbf{A}^i ; on observe en effet qu'en choisissant $\mathbf{A}^1 = \mathbf{S}_\Gamma^2$ et $\mathbf{A}^2 = \mathbf{S}_\Gamma^1$, la matrice du système devient l'identité et la solution est obtenue directement. La matrice utilisée dans la définition de la quantité mixte doit donc approcher le complément de Schur du sous-domaine voisin afin d'obtenir le meilleur conditionnement possible. Par ailleurs, contrairement aux approches duales, on peut toujours choisir les \mathbf{A}^i de sorte que les $(\mathbf{S}_\Gamma^i + \mathbf{A}^i)$ soient inversibles, et il n'y a donc plus besoin de définir un problème global associé aux modes rigides. Cependant, dans le cas général d'un grand nombre de sous-structures, la résolution itérative de (1.57) pose les mêmes problèmes d'extensibilité que dans les approches primales, et la définition d'un problème grossier devient alors nécessaire ; de plus, le choix optimal des \mathbf{A}^i correspond au complément de Schur de l'ensemble des autres sous-domaines, ce qui s'avérerait très coûteux à calculer.

3.3.2 Approximation des compléments de Schur

En pratique, la mise en œuvre des approches évoquées ci-dessus demande souvent d'approcher des compléments de Schur ; cela est particulièrement vrai pour les approches mixtes telles que FETI 2-champs, qui demandent de calculer explicitement une telle approximation pour formuler les conditions d'interface.

Pour obtenir ces approximations, deux méthodologies existent. La première [Gander *et al.*, 2003; Achdou et Nataf, 1994; Magoulès *et al.*, 2004] se base sur une analyse au niveau continu de l'opérateur de *Steklov-Poincaré*, ie. l'opérateur continu dont le complément de Schur est le pendant discrétisé. Cette analyse est alors utilisée pour approximer cet opérateur, qui est non-local, par un opérateur différentiel (donc local) qui est ensuite discrétisé. On obtient ainsi des approximations peu coûteuses qui, la plupart du temps, offrent un bon conditionnement même lorsque

le nombre de degrés de liberté ou de sous-domaines devient relativement important ; l'inconvénient de cette technique est que son écriture n'est généralement possible que pour des problèmes très simples.

Une seconde méthodologie consiste à approcher directement la *matrice du complément de Schur* au niveau discret. Afin de limiter au maximum les échanges de données, ces approximations sont habituellement basées sur le voisinage immédiat des interfaces considérées [Magoulès *et al.*, 2002; Magoulès *et al.*, 2006] et consistent le plus souvent à ne considérer qu'une « couche » d'éléments adjacente à l'interface. D'autres approximations encore moins coûteuses, et purement algébriques, consistent à extraire de la matrice de rigidité du sous-domaine :

- soit le bloc d'interface $\mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^i$ (approximation « *lumped* »)
- soit la diagonale du bloc en question (approximation « *super-lumped* »)

Outre le fait que leur obtention ne demande aucun calcul, ces approximations sont locales et possèdent des largeurs de bande plus faibles que le complément de Schur, qui est une matrice pleine ; utilisées comme préconditionneurs, elles permettent donc d'accélérer les calculs à peu de frais. Notons qu'une justification théorique partielle de ces techniques peut se trouver, par exemple, dans [Storti *et al.*, 2006] : l'analyse spectrale de l'opérateur de Steklov-Poincaré montre que les valeurs propres les plus élevées correspondent à des modes qui s'amortissent très rapidement lorsque l'on s'éloigne de l'interface. Construire une approximation basée sur une couche d'éléments revient donc peu ou prou à approcher le complément de Schur par le haut de son spectre, ce qui est une technique d'approximation matricielle relativement courante.

3.3.3 Traitement de la non-linéarité

Pour traiter des problèmes non-linéaires à l'aide d'une méthode de décomposition de domaine, deux grandes familles d'approches existent, similaires à celles des méthodes multigrilles. La première consiste à utiliser la décomposition pour résoudre des problèmes linéarisés issus, par exemple, de la méthode de Newton ; cette méthodologie est notamment utilisée au sein des solveurs NKS (Newton-Krylov-Schur) [de Roeck *et al.*, 1992]. Une itération d'une méthode NKS primale comprend les trois étapes suivantes :

1. **Calcul** de la rigidité tangente et du résidu dans chaque sous-structure, et **factorisation partielle** de la rigidité tangente, afin de pouvoir accéder aux compléments de Schur tangents \mathbf{S}_{Γ}^i et aux résidus condensés \mathbf{b}_{Γ}^i .
2. **Résolution itérative** du problème global condensé :

$$\mathbf{S}_{\Gamma}\delta\mathbf{u}_{\Gamma} = \mathbf{b}_{\Gamma} \quad (1.58)$$

3. **Localisation** des déplacements dans les sous-structures :

$$\delta\mathbf{u}_i^i = \mathbf{K}_{ii}^{i-1} (\mathbf{r}_i^i - \mathbf{K}_{i\Gamma}^i \delta\mathbf{u}_{\Gamma}^i) \quad (1.59)$$

où \mathbf{K}^i désigne la rigidité tangente de la sous-structure i et \mathbf{r}^i le résidu d'équilibre.

Moyennant l'emploi de techniques d'accélération adaptées, consistant à réutiliser les résolutions précédentes, ces méthodes offrent de très bonnes performances et une grande stabilité [Gosselet et Rey, 2002]. Elles peuvent cependant demander un grand nombre d'itérations en présence de non-linéarités locales ; pour cette raison, quelques travaux plus récents cherchent au contraire à traiter la non-linéarité au sein de chaque sous-domaine. Nous en présentons ici deux exemples.

■ Techniques de localisation non-linéaire

Les techniques de localisation non-linéaire ont initialement été proposées comme une adaptation des stratégies NKS aux problèmes de flambage local, pour lesquels le passage du point critique demande un nombre très élevé d'itérations globales et d'incrément de chargement [Cresta *et al.*, 2007; Cresta, 2008]. Elles partent du constat que dans ces problèmes, les phénomènes ralentissant la convergence globale sont purement locaux et se produisent uniquement au sein de quelques sous-domaines ; cependant, le traitement de la non-linéarité étant global, la prise en compte de ces phénomènes demande de nombreux calculs effectués sur toute la structure, alors que la majeure partie de celle-ci conserve un comportement presque linéaire.

L'idée est donc de traiter la non-linéarité *localement*, au sein de chaque sous-domaine. Pour cela, l'étape de localisation linéaire (1.59) est remplacée par un *calcul non-linéaire sur chaque sous-domaine*, utilisant le véritable comportement non-linéaire au lieu d'un comportement tangent. Dans un premier temps, conformément à l'algorithme précédent, ce calcul s'effectue à déplacement d'interface imposé ; une fois la convergence atteinte, la rigidité tangente et le résidu de chaque sous-structure sont mis à jour comme précédemment. Par rapport à une approche NKS classique, cette simple modification permet de réduire nettement le nombre de résolutions globales, mais également de résolutions locales linéaires, le traitement de la non-linéarité étant plus efficace ; elle permet en outre de réduire le nombre d'incrément de chargement nécessaires et améliore donc grandement les performances.

Afin d'accélérer encore davantage la résolution, les auteurs proposent ensuite de remplacer l'étape de localisation non-linéaire à déplacement imposé par une localisation « mixte ». Pour ce faire, à l'issue de l'étape 2, ils calculent par post-traitement les efforts d'interface équilibrés λ_Γ , associés aux déplacements \mathbf{u}_Γ solutions de (1.58). L'étape de localisation est alors menée avec une condition aux limites de Robin :

$$\lambda_\Gamma^i + \mathbf{A}\mathbf{u}_\Gamma^i = \lambda_\Gamma + \mathbf{A}\mathbf{u}_\Gamma \quad (1.60)$$

où l'opérateur linéaire \mathbf{A} est un paramètre de la méthode, homogène à une rigidité supplémentaire de l'interface. De même que pour la méthode FETI 2-champs, la valeur optimale de \mathbf{A} correspond au complément de Schur du reste de la structure ; en pratique, les approximations algébriques décrites au paragraphe précédent offrent de très bons résultats et permettent à la méthode de converger avec très peu d'itérations globales et en un seul incrément de chargement, moyennant un nombre supérieur de résolutions locales.

Une technique similaire est utilisée dans [Pebrel *et al.*, 2008] au sein d'une méthode de décomposition de domaine duale, mais avec un point de vue différent : plutôt que d'adapter les méthodes NKS au cas des non-linéarités locales, la décomposition est directement formulée sur le problème non-linéaire de départ. Il en résulte un problème d'interface non-linéaire qui est résolu par une méthode de Newton ; l'algorithme correspondant possède une structure semblable à ceux présentés ci-dessus, avec une formulation duale (alternance de résolutions globales linéaires de type FETI et de localisations non-linéaires par sous-domaine à effort imposé). Là encore, un gain important par rapport aux approches NKS est constaté, cette fois dans le cadre de l'élasticité endommageable.

■ L'approche LaTIn micro/macro

L'approche LaTIn micro/macro est une méthode de décomposition de domaine mixte, reposant sur le solveur non-linéaire LaTIn et initialement conçue pour résoudre des problèmes d'assemblages de structures, faisant intervenir des interfaces aux comportements complexes [Blanzé *et al.*, 1993; Champaney *et al.*, 1997; Champaney *et al.*, 1999; Ladevèze *et al.*, 2000]. Par rapport aux autres stratégies décrites dans cette partie, sa particularité repose sur les points suivants :

- Elle considère les interfaces entre deux sous-domaines comme des *sous-structures à part entière*. Chaque interface possède ainsi une discrétisation indépendante et porte deux champs de déplacements et deux champ d'efforts surfaciques, ainsi qu'une relation de comportement liant ces quantités ; dans le cas d'une interface parfaite, celle-ci traduit simplement la continuité des déplacements et l'équilibre des efforts, mais des comportements plus complexes tels que des contacts peuvent aisément être introduits.
- Elle introduit un *aspect multi-échelles* au niveau des interfaces, *via* la définition d'un espace macroscopique (correspondant le plus souvent à des champs affines sur chaque interface). La partie « macro » ($\underline{u}^M, \underline{F}^M$) des déplacements \underline{u} ou des efforts \underline{F} d'interface correspond alors à leur projection orthogonale sur cet espace au sens de la forme bilinéaire « travail » :

$$\langle \underline{u}, \underline{F} \rangle = \int_{\Gamma} \underline{u} \cdot \underline{F} d\Gamma \quad (1.61)$$

et la partie « micro » est simplement la différence (*ie.* $\underline{u}^m = \underline{u} - \underline{u}^M$ et $\underline{F}^m = \underline{F} - \underline{F}^M$), ce qui conduit à un découplage des travaux micro et macro.

- Les efforts macro sont astreints à être *toujours équilibrés sur chaque interface*. La vérification de cette propriété permet de définir un problème global, portant uniquement sur les parties macro des efforts, qui assure l'extensibilité de la méthode. Dans certaines variantes, les déplacements macro sont également astreints à être continus.
- La *méthode LaTIn* présentée à la Section 3.1.3 est utilisée pour résoudre le problème. Lors de la mise en œuvre de la méthode, l'admissibilité des efforts macro est incluse dans le groupe des équations linéaires, tandis que les

autres relations de comportement des interfaces sont incluses dans le groupe des équations locales.

Ainsi, si l'on considère par exemple un problème d'élasticité linéaire avec plasticité dans quelques sous-domaines, en petites perturbations, et sans contact, une itération de la méthode LaTIn micro/macro se déroule de la façon suivante :

- **Etape locale** : à partir des données précédentes, on construit des champs d'efforts équilibrés et de déplacements continus sur chaque interface, et des solutions vérifiant la relation de comportement plastique en chaque point d'intégration des sous-domaines concernés.
- **Etape linéaire** : il faut assurer l'admissibilité des solutions dans chaque sous-domaine ainsi que l'équilibre des efforts macro. Pour cela, on procède en trois temps :
 1. *Résolution de l'équilibre de chaque sous-domaine* à l'aide d'une condition de Robin (1.60) sur chaque interface, paramétrée par la direction de recherche \mathbf{K}^- ; la solution de l'étape précédente est ajoutée au second membre et le comportement des sous-structures non-linéaires est approché par un comportement linéaire (voir par exemple [Cresta, 2008]).
 2. *Résolution de l'équilibre des efforts macro* ; la « matrice de rigidité » et le « second membre » macro sont obtenus par homogénéisation discrète, c'est-à-dire que la contribution de chaque sous-domaine est définie par la projection de sa rigidité tangente condensée et de son second membre sur l'espace macro, de façon similaire à (1.24).
 3. « Localisation » des résultats dans chaque sous-domaine : on résout un nouveau problème linéarisé par sous-structure avec des conditions de Robin, cette fois chargé par la solution macro admissible précédemment obtenue.

La solution sur chaque sous-domaine est alors la somme des solutions obtenues aux étapes 1 et 3.

En pratique, cette stratégie est particulièrement bien adaptée aux problèmes de contact, qu'elle permet de gérer de manière relativement simple [Blanzé *et al.*, 1996; Ladevèze *et al.*, 2002]. Elle a également été utilisée pour des structures fortement hétérogènes [Loiseau *et al.*, 2002; Ladevèze *et al.*, 2001], des problèmes multiphysiques [Néron *et al.*, 2003], des problèmes de fissuration en association avec la méthode X-FEM [Guidault, 2005; Guidault *et al.*, 2007; Guidault *et al.*, 2008], des modèles de composites stratifiés [Violeau, 2007; Kerfriden *et al.*, 2009] ou encore des systèmes de tenségrité [Nineb *et al.*, 2005; Alart et Dureisseix, 2008] ; d'autres applications sont envisagées dans [Allix, 2006].

Numériquement parlant, l'efficacité de la méthode dépend fortement du choix des directions de recherche intervenant dans le solveur LaTIn. Un choix très simple est d'utiliser des directions de recherche scalaires ; une optimisation de ce cas est présentée dans [Violeau, 2003]. Un choix plus complexe est de prendre pour \mathbf{K}^- une approximation du complément de Schur du voisinage de la sous-structure étudiée,

selon les techniques que nous avons citées précédemment [Cresta, 2008]. On obtient alors une convergence très rapide, même en présence de non-linéarités prononcées. Le réassemblage et la refactorisation des matrices, et particulièrement de la rigidité globale, représentent toutefois des coûts de calcul non négligeables.

4 Bilan

Les travaux présentés dans cette partie offrent de nombreux enseignements quant à notre problématique, à savoir la réalisation de réanalyses locales exactes en présence de phénomènes non-linéaires.

De tels phénomènes étant susceptibles d'avoir une zone d'influence bien plus étendue que la région où ils se produisent, les approches descendantes classiques peuvent introduire d'importantes erreurs ; les approches exactes directes, utilisant par exemple la condensation statique, mènent quant à elles à des coûts de calcul trop élevés. L'emploi d'une technique de couplage itérative, dans l'esprit des stratégies multi-échelles et des méthodes de décomposition de domaine, semble donc être un choix naturel ; ce choix n'est cependant pas sans difficultés.

Premièrement, une attention particulière doit être portée au *traitement de la non-linéarité*. De nombreuses approches, telles que les méthodes NKS ou Newton-Multigrid, résolvent sur plusieurs niveaux des problèmes linéarisés issus d'une méthode de Newton ; nous avons vu que ces approches n'offrent pas des performances optimales lorsque les phénomènes non-linéaires sont localisés. L'emploi d'une technique de décomposition directe du problème non-linéaire, telle que FAS ou les dérivés de la méthode LaTin, semble offrir un cadre mieux adapté à notre problème. En outre, un tel choix permet non seulement de réduire les coûts de calcul, mais peut également simplifier la mise en œuvre grâce à la diminution du volume des échanges entre les deux modèles, ce qui est un point important dans l'optique d'une réalisation non-intrusive.

Deuxièmement, lors de l'étape locale, il est nécessaire de simuler correctement *l'influence du reste de la structure* sur la zone d'intérêt. Pour ce faire, de très nombreuses approches utilisent des conditions aux limites en déplacement ; dans le cadre d'approches « ingénieur » non-intrusives, ce choix est le plus simple à mettre en œuvre, mais n'est pas le plus performant. A l'inverse, des raccords de type « mixte », basés *à la fois* sur les efforts et les déplacements, s'avèrent très performants mais plus délicats à utiliser : leur formulation optimale fait intervenir les compléments de Schur des différentes sous-domaines, ce qui revient strictement à utiliser la condensation statique et s'avérerait trop coûteux en pratique. Il est donc nécessaire d'approcher cet optimum ; certains préconditionneurs des méthodes de décomposition de domaine, ainsi que la méthode SBSF, proposent des pistes allant dans ce sens.

Troisièmement, lors de l'étape globale, il est essentiel de rendre compte de *l'impact global des phénomènes locaux* précédemment introduits. Dans le cas linéaire, une technique courante consiste à enrichir la cinématique globale à l'aide de la

solution locale; ce choix peut s'avérer trop restrictif dans le cas où l'on souhaite introduire des modifications topologiques ou constitutives locales, et se prêter mal à un traitement purement local de la non-linéarité. A l'inverse, l'emploi de techniques itératives visant à raccorder la solution entre deux régions, dans l'esprit des méthodes de décomposition de domaine, offre une grande flexibilité et semble mieux se prêter à nos objectifs.

Enfin, une question centrale est d'*accélérer la convergence* à un niveau de performances suffisant. Nous avons vu que cela demande l'emploi d'un opérateur de rigidité globale « tangent » adapté; parmi les différentes possibilités, les techniques d'homogénéisation, et particulièrement d'homogénéisation « discrète », nous semblent être un moyen efficace de construire un tel opérateur. Cependant, la réalisation devant être non-intrusive, il est *a priori* exclu de modifier directement la matrice de rigidité globale; les méthodes quasi-Newton, ainsi que les techniques de réanalyse structurale exacte, montrent que cette contrainte n'est nullement insurmontable.

Dans la suite de ce document, nous proposons une stratégie globale/locale non-intrusive basée sur les constats résumés ci-dessus.

Chapitre 2

Présentation de la stratégie globale/locale non-intrusive

Ce chapitre expose les principes généraux de la stratégie de calcul dite « globale/locale non-intrusive » étudiée dans le cadre de cette thèse. La formulation et les principales propriétés de la méthode sont détaillées au niveau continu et au niveau discret, et deux variantes sont introduites.

Sommaire

1	Mise en situation	58
1.1	Objectifs et contraintes	58
1.2	Points clés de la démarche	60
2	Formulation continue	62
2.1	Problème de référence	62
2.2	Décomposition globale/locale	63
2.3	Technique de résolution	67
3	Formulation par éléments finis	71
3.1	Les deux modèles	71
3.2	Principes de mise en œuvre	73
3.3	Reformulation en tant que problème d'interface	76
4	Comparaison avec quelques approches existantes	81

Dans le chapitre précédent, un état de l'art des méthodes de réanalyse locale et de calcul multi-échelles existantes a permis d'identifier un certain nombre d'idées présentant un intérêt par rapport à notre problématique, à savoir la mise au point d'une technique de réanalyse locale exacte et non-intrusive en présence de non-linéarités locales. Ici, nous présentons une approche originale poursuivant cet objectif, mise au point dans le cadre de cette thèse. Nous précisons d'abord les objectifs et les points clés de notre démarche ; nous exposons ensuite deux formulations de l'approche, au niveau continu et au niveau des éléments finis, et nous en donnons quelques propriétés, démontrant notamment le caractère exact de la méthode.

1 Mise en situation

1.1 Objectifs et contraintes

Comme nous l'avons vu précédemment, l'objectif principal de ce travail est l'introduction d'un phénomène non-linéaire au sein d'une petite région d'un modèle éléments finis élastique linéaire et sa prise en compte de manière non-intrusive et exacte ; nous nous intéressons tout particulièrement au cas de la plasticité locale, bien que ce cadre ne soit pas limitatif.

Plus précisément, nous considérons la situation suivante : nous disposons d'un modèle éléments finis d'une structure complexe, réalisé au moyen d'un logiciel de calcul généraliste du commerce, et faisant intervenir un jeu de données (maillage, chargements, relation de comportement...) très lourd. Une première analyse grossière a montré que la quasi-totalité de la structure conserve un comportement élastique linéaire et que les non-linéarités géométriques ont un effet négligeable, mais qu'une petite partie de la structure est susceptible d'entrer en plasticité ; toutefois, le modèle étant de taille conséquente, une analyse non-linéaire de toute la structure s'avérerait trop coûteuse. En outre, la zone plastique peut se situer au voisinage de détails structuraux non représentés dans le maillage pour des raisons pratiques, mais susceptibles d'influer notablement sur la solution locale. Le choix est donc fait d'*analyser la structure en élasticité linéaire*, puis de *traiter séparément les non-linéarités locales*.

Afin de pouvoir traiter une telle situation, il est nécessaire de rendre compte de l'effet des trois modifications suivantes sur la réponse de la structure :

- modification de la **relation de comportement** (remplacement d'une loi élastique linéaire par une loi élasto-plastique non-linéaire) ;
- modification du **maillage** (le plus souvent un raffinement) ;
- modification de la **géométrie** (ajout de trous, de fissures, de congés, de détails d'une liaison...).

en supposant que ces modifications sont **localisées**, c'est-à-dire qu'elles se produisent toutes au sein d'une petite partie de la structure, dite *zone d'intérêt*.

Une classe d'approches permettant de traiter ce problème avec les outils du monde industriel est celle des *approches descendantes* évoquées en introduction et décrites au chapitre précédent ; cependant, nous avons vu que ces techniques peuvent

introduire d'importantes erreurs dans le cas de non-linéarités locales, et nous montrerons une illustration détaillée de ce point au Chapitre 6. Nous nous proposons donc de mettre au point une technique d'analyse utilisable lorsque les approches descendantes échouent — ou permettant tout simplement d'en tester la validité.

Pour ce faire, la technique doit satisfaire à un certain nombre d'exigences, que nous détaillons maintenant.

■ Approche exacte

La première exigence que nous nous imposons est que l'approche doit être *exacte*, c'est-à-dire que le traitement local séparé de la non-linéarité (et des éventuels détails structuraux) ne doit pas introduire d'erreur. Autrement dit, l'approche doit **donner la solution exacte du problème global incluant les non-linéarités** — ou, plus exactement, elle doit permettre de *s'en approcher aussi près que voulu*, puisque la résolution se fait en pratique de manière itérative.

■ Approche non-intrusive

La seconde exigence essentielle est que l'approche doit être *non-intrusive*, ce qui regroupe en pratique deux aspects différents mais complémentaires :

- Non-intrusive par rapport au **solveur** : les calculs doivent pouvoir être effectués à l'aide d'un logiciel éléments finis généraliste du commerce. Cela implique notamment que tous les problèmes discrets à résoudre soient des problèmes éléments finis traditionnels, que leurs données soient des entrées et sorties standard, et que leur résolution puisse être menée par les techniques habituelles. Les développements externes sont ainsi réduits au minimum.
- Non-intrusive par rapport aux **modèles** : la méthode ne doit nécessiter aucune modification des maillages, relations de comportement, conditions aux limites ou chargements définissant le modèle global. Les calculs globaux doivent ainsi se limiter à la prescription de chargements supplémentaires, permettant si possible de conserver la matrice de rigidité globale et d'en réutiliser la factorisation. On évite ainsi de lourdes modifications des jeux de données existants.

Concernant ce dernier point, nous pouvons même aller plus loin : nous verrons aux Chapitres 5 et 6 que, partant d'un jeu de données conçu pour une analyse descendante (*submodeling*), notre stratégie peut être mise en œuvre avec très peu de modifications.

■ Optimisation des performances

Enfin, une dernière exigence est que l'approche atteigne un niveau de performance raisonnable, de sorte à pouvoir traiter des problèmes pour lesquels une analyse non-linéaire complète serait trop coûteuse. Naturellement, le niveau de performance attendu n'est pas celui d'une stratégie dédiée, qui ne serait pas soumise aux exigences ci-dessus ; la prise en compte des non-linéarités locales et de leur effet sur toute la structure doit néanmoins être réalisée de la façon la plus efficace possible. Ce point passe notamment par la minimisation du nombre d'appels au solveur global et, pour

ce faire, par un traitement pertinent de la non-linéarité locale et de ses éventuels effets globaux.

1.2 Points clés de la démarche

Pour répondre à ces objectifs, la stratégie étudiée repose sur trois points clés, résumés sur la Figure 2.1. Premièrement, **les calculs sont réalisés sur deux modèles** éléments finis : un modèle global élastique linéaire représentant la structure entière, et un modèle local élastoplastique (donc non-linéaire) représentant la zone d'intérêt seule. Le modèle local est défini à l'issue d'un premier calcul global élastique, à l'aide d'un indicateur d'erreur en modèle *a posteriori* qui dépend de la relation de comportement non-linéaire à introduire ; sa définition peut également faire intervenir des connaissances *a priori* sur la localisation de la zone plastique. En outre, il peut être utilisé pour introduire des détails ou des modifications géométriques (trous, fissures, hétérogénéités...) absents du modèle global. Il peut enfin être traité à l'aide d'un « code métier » différent du logiciel utilisé pour l'analyse globale, et être agrandi de manière adaptative en cas de croissance de la zone plastique, bien que ce ne soit pas le cas des exemples étudiés dans cette thèse.

Deuxièmement, le modèle local a pour vocation de **remplacer** — et non d'« enrichir » ou de « raffiner » — **une partie du modèle global**. En d'autres termes, le recouvrement des deux modèles n'est pas utilisé, sauf sur la frontière délimitant la zone d'intérêt ; la représentation globale de cette dernière n'est pas considérée comme une représentation grossière que l'on cherche à enrichir, mais comme une représentation *inexacte* que l'on cherche à *remplacer*. Ce point de vue, qui diffère de la plupart des stratégies multi-échelles actuelles, conduit à définir la *solution globale/locale* s^{GL} par *substitution* :

$$s^{GL} = \begin{cases} s^L & \text{dans la zone d'intérêt} \\ s^G & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où s^L et s^G désignent respectivement les solutions locale et globale. Nous verrons par la suite que ce choix joue un rôle essentiel dans la flexibilité et les performances de la méthode.

Enfin, les deux modèles sont couplés à l'aide d'une **technique d'échange itérative**, raccordant le modèle local avec la zone « valide » du modèle global. Les échanges sont initialisés à l'aide de la solution globale élastique servant à définir le modèle local ; par la suite, chaque itération comprend trois étapes :

1. **Analyse locale.** Un calcul non-linéaire est mené sur le modèle local, piloté par une condition aux limites faisant intervenir la solution globale courante ;
2. **Calcul du résidu.** Un résidu mesurant le déséquilibre des efforts et/ou la discontinuité des déplacements entre les deux modèles est calculé. Ce résidu prend la forme d'un second membre éléments finis traditionnel ; si sa norme est suffisamment faible, les itérations sont stoppées ;

3. **Correction globale.** Autrement, le résidu est injecté dans le modèle global en tant que chargement supplémentaire, afin de tenir compte de l'influence des détails locaux sur la solution globale. La relation de comportement et les conditions aux limites du problème global ne sont pas modifiés. Des techniques d'accélération de la convergence peuvent être mises en œuvre à cette étape ; la solution globale est ensuite mise à jour et le procédé est répété.

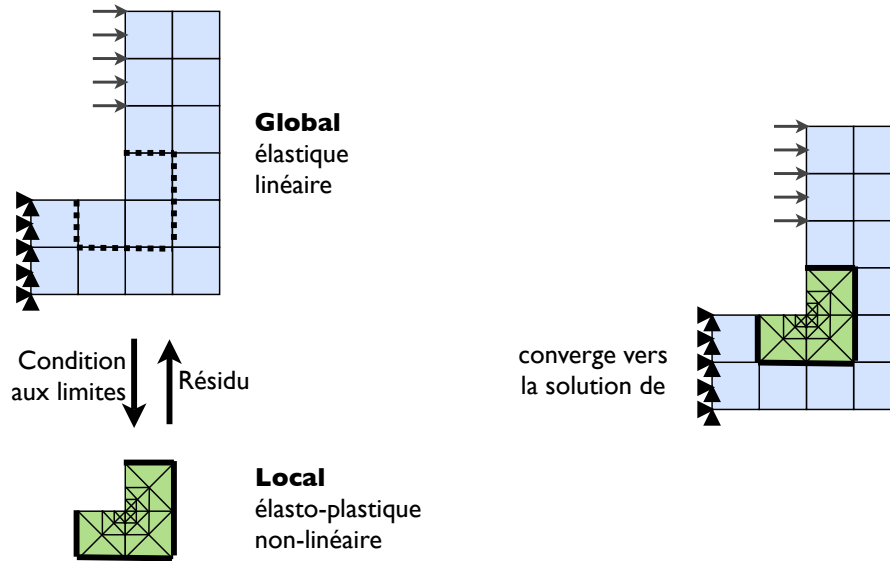


Figure 2.1: Schéma de principe de la stratégie étudiée.

Une propriété essentielle de ce mode opératoire est que si la solution globale/locale s^{GL} converge, alors elle converge forcément vers la *solution de référence*, ie. la solution que l'on obtiendrait en substituant « réellement » le modèle local au sein du modèle global et en résolvant le problème non-linéaire ainsi obtenu. Ceci assure le caractère *exact* de la méthode, puisque l'erreur introduite par la décomposition globale/locale peut être amenée à un niveau aussi faible que voulu ; le caractère *non-intrusif* est quant à lui garanti par le fait que toutes les analyses sont des calculs par éléments finis standard, que les modèles ne sont jamais modifiés et que les échanges ne font intervenir que des quantités accessibles dans la plupart des logiciels éléments finis généralistes (déplacements et efforts nodaux).

En pratique, deux variantes importantes de la méthode peuvent être distinguées, selon le type de la condition aux limites utilisée pour piloter l'analyse locale (étape 1). Le choix le plus simple est d'imposer la *continuité des déplacements* entre les deux modèles ; cette variante est nommée **approche en déplacement** ou, par analogie avec le vocabulaire des méthodes de décomposition de domaine, *approche primale*. Un autre choix, plus complexe à mettre en œuvre mais menant à des performances supérieures, est de n'imposer ni la continuité des déplacements ni l'équilibre des efforts, mais une combinaison linéaire des deux (condition de Robin) : cette variante est nommée **approche mixte**.

Le reste du chapitre est organisé comme suit. Dans la Section 2, nous présentons une formulation générale, au niveau continu, de la méthode. Dans la Section 3, nous transposons cette formulation au niveau discret dans le cas des éléments finis traditionnels, et mettons en évidence quelques propriétés de la méthode. Enfin, la Section 4 donne quelques éléments de comparaison avec d'autres approches existantes.

2 Formulation continue

Comme nous l'avons indiqué en introduction, nous présentons la méthode dans le cadre d'un problème de mécanique des milieux continus, avec une relation de comportement localement élasto-plastique et sous l'hypothèse des petites perturbations. Nous ne considérons ainsi ni non-linéarités géométriques, ni contacts, ni d'autres types de non-linéarités matérielles (viscoplasticité, endommagement...). Ce cadre n'est cependant pas limitatif, et la méthode est formulée de sorte à être applicable à toutes sortes de non-linéarités, tant que celles-ci se limitent à la zone d'intérêt, moyennant quelques adaptations de la technique de résolution.

2.1 Problème de référence

Considérons l'équilibre d'une structure Ω (Figure 2.2) soumise à un déplacement imposé \underline{u}_d sur une partie $\partial_1\Omega$ de son bord, à un effort surfacique imposé \underline{F}_d sur la partie complémentaire $\partial_2\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_1\Omega$, et à un effort volumique imposé \underline{f}_d . Nous supposons que le matériau a un comportement élasto-plastique, et que le chargement est tel que *la zone plastique est entièrement contenue au sein d'une petite partie Ω_I de la structure*, appelée *zone d'intérêt*; dans la partie restante $\Omega_C = \Omega \setminus \Omega_I$, appelée *zone complémentaire*, nous supposons que la limite élastique n'est jamais atteinte et le comportement du matériau est donc purement élastique linéaire. En outre, le problème est écrit *sous forme incrémentale*, et nous considérons ici un incrément donné; les histoires de chargement complexes seront traitées en répétant le processus pour chaque incrément.

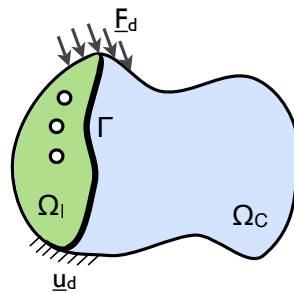


Figure 2.2: Problème de référence continu.

Ce problème est bien posé et s'écrit classiquement de la manière suivante : trouver

un champ de déplacements $\underline{u} \in \mathcal{U}$ et un champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}$ tels que :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_d = 0 \text{ dans } \Omega \quad (2.1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{cases} \mathcal{F}(\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}), X) & \text{dans } \Omega_I \\ \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}) & \text{dans } \Omega_C \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial_1 \Omega \quad (2.3)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{F}_d \text{ sur } \partial_2 \Omega \quad (2.4)$$

où \mathcal{U} et \mathcal{S} désignent les espaces respectifs des champs de déplacement et de contrainte réguliers ; \mathcal{F} désigne formellement la relation de comportement élasto-plastique sous forme incrémentale avec les variables internes X ; $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u})$ désigne la partie symétrique du gradient de \underline{u} ; $\underline{\underline{K}}$ désigne le tenseur de Hooke, et \underline{n} désigne le vecteur normal unitaire sortant.

2.2 Décomposition globale/locale

2.2.1 Substitution des solutions

Afin de résoudre le problème ci-dessus, nous nous proposons d'utiliser deux modèles : un *modèle global* représentant toute la structure mais susceptible d'être inexact dans Ω_I , et un *modèle local* représentant Ω_I de manière exacte. Comme nous l'avons indiqué précédemment, la solution $s = (\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}})$ du problème est cherchée sous la forme d'une *substitution* de la solution locale au sein de la solution globale, c'est-à-dire que l'on pose :

$$s(\underline{x}) = \begin{cases} s^L(\underline{x}) & \text{si } \underline{x} \in \Omega_I \\ s^G(\underline{x}) & \text{si } \underline{x} \in \Omega_C \end{cases} \quad (2.5)$$

où les exposants L et G désignent respectivement des quantités appartenant au modèle local, et au modèle global. Nous ne faisons pour l'instant aucune hypothèse sur la discrétisation ou sur la nature des modèles.

2.2.2 Réécriture du problème de référence

La *formulation globale/locale* consiste simplement à introduire la décomposition par substitution (2.5) dans les équations du problème de référence (2.1–2.4). On obtient ainsi les trois groupes d'équations suivants :

- **La solution locale** doit être régulière et vérifier toutes les équations s'appliquant à l'intérieur de Ω_I et sur $\partial\Omega \cap \Omega_I$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^L + \underline{f}_d &= 0 \text{ dans } \Omega_I \\ \underline{\underline{\sigma}}^L &= \mathcal{F}(\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^L), X) \text{ dans } \Omega_I \\ \underline{u}^L &= \underline{u}_d \text{ sur } \partial_1 \Omega_I \\ \underline{\underline{\sigma}}^L \cdot \underline{n} &= \underline{F}_d \text{ sur } \partial_2 \Omega_I \end{aligned}$$

où $\partial_1\Omega_I = \partial_1\Omega \cap \Omega_I$ et $\partial_2\Omega_I = \partial_2\Omega \cap \Omega_I$. En notant $\mathcal{U}_I^{\text{Ad}}$ l'espace des champs de déplacement *cinématiquement admissibles* sur Ω_I (ie. réguliers et égaux à \underline{u}_d sur $\partial_1\Omega_I$) et $\mathcal{U}_I^{\text{Ad},0}$ l'espace vectoriel associé, ce groupe d'équations se réécrit sous la forme faible suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}^L \in \mathcal{U}_I^{\text{Ad}} \\ \forall \underline{v}^* \in \mathcal{U}_I^{\text{Ad},0}, \int_{\Omega_I} \text{Tr} \left[\underline{\underline{\sigma}}^L \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{v}^*) \right] d\Omega = \int_{\Omega_I} \underline{f}_d \cdot \underline{v}^* d\Omega \\ \quad + \int_{\partial_2\Omega_I} \underline{F}_d \cdot \underline{v}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \underline{\underline{\sigma}}^L \underline{n}_I \cdot \underline{v}^* d\Gamma \\ \underline{\underline{\sigma}}^L = \mathcal{F} \left(\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^L), X \right) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

où l'indice I de \underline{n}_I indique que la normale est sortante par rapport à Ω_I . Γ désigne la frontière délimitant Ω_I et Ω_C et sera appelée *interface* dans la suite de ce document, là encore par analogie avec les méthodes de décomposition de domaine.

- De même, **la solution globale** doit être régulière et vérifier toutes les équations s'appliquant à l'intérieur de Ω_C et sur $\partial\Omega \cap \Omega_C$:

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^G + \underline{f}_d &= 0 \text{ dans } \Omega_C \\ \underline{\underline{\sigma}}^G &= \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^G) \text{ dans } \Omega_C \\ \underline{u}^G &= \underline{u}_d \text{ sur } \partial_1\Omega_C \\ \underline{\underline{\sigma}}^G \cdot \underline{n} &= \underline{F}_d \text{ sur } \partial_2\Omega_C \end{aligned}$$

où $\partial_1\Omega_C = \partial_1\Omega \cap \Omega_C$ et $\partial_2\Omega_C = \partial_2\Omega \cap \Omega_C$. De même que précédemment, en notant $\mathcal{U}_C^{\text{Ad}}$ l'espace des champs de déplacement dont *la restriction à Ω_C est cinématiquement admissible* et $\mathcal{U}_C^{\text{Ad},0}$ l'espace vectoriel associé, ce groupe d'équations se réécrit sous la forme faible suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}^G \in \mathcal{U}_C^{\text{Ad}} \\ \forall \underline{v}^* \in \mathcal{U}_C^{\text{Ad},0}, \int_{\Omega_C} \text{Tr} \left[\underline{\underline{\sigma}}^G \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{v}^*) \right] d\Omega = \int_{\Omega_C} \underline{f}_d \cdot \underline{v}^* d\Omega \\ \quad + \int_{\partial_2\Omega_C} \underline{F}_d \cdot \underline{v}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \underline{\underline{\sigma}}^G \underline{n}_C \cdot \underline{v}^* d\Gamma \\ \underline{\underline{\sigma}}^G = \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^G) \end{array} \right. \quad (2.7)$$

où l'indice C de \underline{n}_C indique que la normale est sortante par rapport à Ω_C . La notation $\underline{\underline{\sigma}}^G$ est quant à elle employée pour préciser que la contrainte globale doit être considérée du côté de l'interface correspondant à Ω_C ; cette précision est nécessaire car nous verrons par la suite que l'algorithme de résolution employé rend la contrainte globale *discontinue* à la traversée de l'interface.

- Enfin, la régularité de la solution définie par (2.5) entraîne des **conditions de raccord sur l'interface**, à savoir la continuité des déplacements :

$$\boxed{\underline{u}^L = \underline{u}^G \text{ sur } \Gamma} \quad (2.8)$$

et l'absence de chargement surfacique concentré sur l'interface¹ entraîne l'équilibre des efforts d'interface, *ie.* des contraintes normales :

$$\underline{\underline{\sigma}}^L \underline{n}_I + \underline{\underline{\sigma}}^G \underline{n}_C = 0 \text{ sur } \Gamma$$

En introduisant $\mathcal{U}_\Gamma^{\text{Ad},0}$, l'espace des champs de déplacement réguliers sur Γ s'annulant sur $\Gamma \cap \partial_1 \Omega$ (si une telle région existe), cette dernière équation se réécrit de la manière suivante :

$$\boxed{\forall \underline{v}^* \in \mathcal{U}_\Gamma^{\text{Ad},0}, \int_\Gamma [\underline{\underline{\sigma}}^L \underline{n}_I + \underline{\underline{\sigma}}^G \underline{n}_C] \cdot \underline{v}^* d\Gamma = 0} \quad (2.9)$$

La *formulation globale/locale* du problème est définie par les équations (2.6) à (2.9). On a la propriété suivante :

Propriété 1. *Compte tenu de la décomposition par substitution (2.5), la formulation globale/locale (2.6)–(2.9) est équivalente au problème de départ (2.1)–(2.4).*

Démonstration. Nous venons de montrer que compte tenu de (2.5), le problème de départ entraîne la formulation globale/locale. Pour montrer la réciproque, on commence par constater que $\mathcal{U}_I^{\text{Ad},0}$ et $\mathcal{U}_C^{\text{Ad},0}$ ont tous deux une trace sur Γ égale à $\mathcal{U}_\Gamma^{\text{Ad},0}$. Compte tenu de ce fait, en additionnant les deux équations d'équilibre dans (2.6) et (2.7) et en choisissant un champ test \underline{v}^* « admissible à zéro » sur toute la structure et continu sur Γ , les intégrales sur Γ s'annulent grâce à (2.9) ; en utilisant la définition (2.5) de la solution et en remarquant que le champ de déplacement ainsi reconstruit est régulier grâce à (2.8), on obtient donc la forme faible habituelle du problème de départ, ce qui termine la preuve. \square

Dans tout ce qui suit, l'espace des solutions locales $s^L = (\underline{u}^L, \underline{\underline{\sigma}}^L)$ vérifiant (2.6) sera noté \mathcal{Ad}_I , et une telle solution sera dite *admissible dans la zone d'intérêt* ; de même, l'espace des solutions globales $s^G = (\underline{u}^G, \underline{\underline{\sigma}}^G)$ vérifiant (2.7) sera noté \mathcal{Ad}_C , et une telle solution sera dite *admissible dans la zone complémentaire*.

On peut donc résumer la formulation globale/locale de la manière suivante : **trouver $(\underline{u}^L, \underline{\underline{\sigma}}^L) \in \mathcal{Ad}_I$ et $(\underline{u}^G, \underline{\underline{\sigma}}^G) \in \mathcal{Ad}_C$ vérifiant les conditions de raccord sur l'interface (2.8) et (2.9).**

1. Ce cadre n'est pas limitatif ; si le problème de départ contenait un tel chargement, on pourrait déduire des propriétés analogues, avec une écriture plus complexe.

2.2.3 Remarque sur la définition des deux modèles

Dans les faits, pour que le raisonnement précédent soit valide, il est nécessaire que la continuité des déplacements (2.8) puisse être appliquée *exactement*, ce qui signifie en pratique que les deux discrétisations doivent être compatibles sur l'interface. Il s'agit cependant de la seule contrainte de compatibilité portant sur les modèles. En particulier, **le modèle global n'est soumis à aucune condition à l'intérieur de la zone d'intérêt** ; aucune des équations portant sur cette zone ne concerne d'ailleurs la solution globale. Cela signifie que la définition du modèle global en dehors de la zone complémentaire est *complètement libre* — ou, ce qui revient au même, que le modèle local peut servir à introduire n'importe quels types de modifications dans la zone qu'il recouvre. Ainsi :

- les deux *relations de comportement* peuvent être différentes (la plupart des exemples présentés ici comportent un modèle global élastique linéaire homogène et un modèle local élasto-plastique, mais on pourrait également envisager d'ajouter d'autres types de non-linéarités matérielles et/ou de modifier localement les propriétés élastiques du matériau) ;
- les deux *géométries* peuvent être différentes (le modèle local peut contenir des détails topologiques absents du modèle global) ; cela se traduit par le fait que le problème global n'est pas forcément posé sur le même domaine Ω que le problème de référence, mais sur un domaine $\Omega^G = \Omega_C \cup \Omega_I^G$ où Ω_I^G peut, en pratique, être quelconque ;
- enfin, le *chargement* et les *conditions aux limites* des deux représentations de la zone d'intérêt peuvent, là encore, être différents (il convient toutefois de s'assurer que le problème global est bien posé).

La Figure 2.3 illustre une définition possible du problème de référence et des deux modèles. Cette flexibilité est due en grande partie à la formulation par substitution employée (2.5) : en stipulant que le rôle du modèle local est de *remplacer*, et non d'enrichir ou de raffiner, une partie du modèle global, une telle formulation ne crée intrinsèquement aucune dépendance entre les deux modèles au sein de la zone d'intérêt, et permet donc d'introduire de nombreuses modifications locales [Whitcomb, 1991]. Inversement, les approches basées sur un *enrichissement additif* du modèle global ne permettent pas une telle indépendance — sauf lorsque des précautions sont prises pour que seul le modèle local puisse s'exprimer dans la zone à modifier, que ce soit par l'utilisation de fonctions de pondération comme dans la méthode Arlequin [Ben Dhia, 1998] ou par l'élimination directe des degrés de liberté globaux comme dans la méthode *hp-d* [Düster *et al.*, 1999]. Remarquons que ces précautions reviennent généralement à s'assurer que l'énergie mécanique est correctement partitionnée entre les deux modèles, ce que la relation (2.5) garantit.

En outre, un autre avantage de la formulation par substitution est de permettre un découplage du problème en un sous-problème non-linéaire mais portant sur une région relativement petite (2.6), et un sous-problème portant sur une grande partie de la structure mais linéaire (2.7). Ce découplage, qui n'est pas sans évoquer

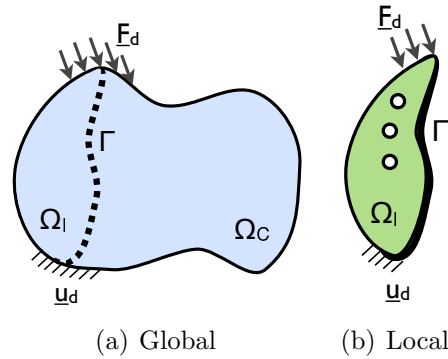


Figure 2.3: Problèmes global et local au niveau continu.

la « séparation des difficultés » de la méthode LaTIn [Ladevèze, 1985], ouvre la voie à un traitement local de la non-linéarité susceptible d'être plus efficace en termes de coûts de calcul [Cresta *et al.*, 2007; Pebrel *et al.*, 2008]; nous reviendrons ultérieurement sur ce dernier point.

Pour clore cette partie, remarquons que (2.6) et (2.7) définissent des sous-problèmes indépendants sur chacun des deux sous-domaines, mais mal posés car ils ne possèdent pas de condition sur Γ ; les conditions de raccord (2.8) et (2.9) couplent les deux sous-problèmes et, ce faisant, les rendent bien posés. Cette dernière remarque est à la base de la technique de résolution proposée dans la partie suivante.

2.3 Technique de résolution

Le problème ainsi reformulé est résolu par une technique d'échange itérative. Celle-ci consiste à résoudre, à chaque itération, un problème local non-linéaire en cherchant $s^L \in \mathcal{Ad}_l$, et un problème global linéaire en cherchant $s^G \in \mathcal{Ad}_c$. Le passage du global au local s'effectue en imposant une partie de la solution globale comme *condition aux limites* locale sur l'interface; le passage du local au global s'effectue quant à lui en calculant un *résidu* mesurant la discontinuité de la solution entre les deux modèles, et en injectant ce résidu dans le problème global comme chargement correctif supplémentaire. Cet algorithme permet de raccorder les deux sous-problèmes tout en vérifiant systématiquement (2.6) et (2.7).

La condition aux limites utilisée pour piloter l'analyse locale joue un rôle primordial; elle permet de simuler l'influence du reste de la structure tout en rendant le problème local bien posé. Au cours de cette thèse, deux types de conditions ont été étudiés, conduisant à deux variantes de l'algorithme de couplage :

- une **condition en déplacement**, consistant à imposer le champ de déplacement global sur Γ pour résoudre le problème local;
- une **condition mixte**, consistant à imposer une combinaison linéaire des déplacements et des efforts (condition de Robin).

2.3.1 Variante en déplacement

Dans la variante « en déplacement », l'analyse locale est pilotée par les déplacements globaux. En partant d'une solution globale courante $s^G \in \mathcal{Ad}_C$ (ce qui est le cas de la solution élastique initiale), une itération se déroule de la manière suivante :

1. **Analyse locale.** On cherche $s^L \in \mathcal{Ad}_I$ vérifiant la condition de raccord en déplacement (2.8).
2. **Calcul du résidu.** A ce stade, la solution reconstruite (définie par (2.5)) vérifie toutes les équations de la formulation globale/locale, sauf l'équilibre des efforts sur l'interface (2.9). On définit donc un *résidu d'équilibre*, ou plus simplement *résidu*, portant sur cette équation, *via* la forme linéaire suivante :

$$r(\underline{v}^*) = - \int_{\Gamma} [\underline{\underline{\sigma}}^L \underline{n}_I + \underline{\underline{\sigma}}^G \underline{n}_C] \cdot \underline{v}^* d\Gamma \quad (2.10)$$

définie pour tout $\underline{v}^* \in \mathcal{U}_{\Gamma}^{\text{Ad},0}$; nous verrons dans la partie suivante que dans le cadre d'une formulation par éléments finis, l'analogue discret de cette quantité s'obtient aisément et possède une interprétation physique simple. On mesure alors une certaine norme de ce résidu, que l'on utilise pour tester la convergence.

3. **Correction globale.** Si nécessaire, on corrige alors la solution globale en venant injecter ce résidu dans le problème global en tant que chargement supplémentaire ; il s'agit alors d'un chargement surfacique concentré sur Γ , qui est une surface *intérieure* au modèle global, voir Figure 2.4. En notant $\mathcal{U}^{\text{Ad},0}$ l'espace des champs de déplacement « cinématiquement admissibles à zéro » sur Ω tout entier, cela conduit à la résolution du problème *global correctif* suivant : trouver $\Delta s^G = (\Delta \underline{u}^G, \Delta \underline{\underline{\sigma}}^G)$ tels que

$$\boxed{\begin{cases} \Delta \underline{u}^G \in \mathcal{U}^{\text{Ad},0} \\ \forall \underline{v}^* \in \mathcal{U}^{\text{Ad},0}, \int_{\Omega} \text{Tr} [\Delta \underline{\underline{\sigma}}^G \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{v}^*)] d\Omega = r(\underline{v}^*) \\ \Delta \underline{\underline{\sigma}}^G = \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\Delta \underline{u}^G) \end{cases}} \quad (2.11)$$

où l'on a pris implicitement la trace de \underline{v}^* sur Γ dans le terme $r(\underline{v}^*)$.

Autrement dit, le terme correctif est solution d'un problème global chargé par le résidu, et *uniquement par le résidu* — *ie.* avec des conditions aux limites et un chargement nuls partout sauf sur Γ . Les conditions aux limites et la relation de comportement élastique linéaire étant conservés², **le modèle global n'est pas modifié, et sa matrice de rigidité non plus.** Ceci assure le caractère non-intrusif de l'opération. La solution globale est ensuite mise à jour en posant

$$s^G \leftarrow s^G + \Delta s^G \quad (2.12)$$

2. A l'exception des éventuels déplacements imposés non nuls, qui sont mis à zéro — ce qui ne modifie pas la matrice de rigidité en pratique.

et le processus est répété depuis l'étape 1.

Une remarque importante est que ce terme correctif est « *admissible à zéro* » dans la zone complémentaire, c'est-à-dire que l'on a :

$$\begin{cases} \Delta \underline{u}^G \in \mathcal{U}_C^{\text{Ad},0} \\ \forall \underline{v}^* \in \mathcal{U}_C^{\text{Ad},0}, \int_{\Omega_C} \text{Tr} [\Delta \underline{\sigma}^G \underline{\epsilon}(\underline{v}^*)] d\Omega = \int_{\Gamma} \Delta \underline{\sigma}_C^G \underline{n}_C \cdot \underline{v}^* d\Gamma \\ \Delta \underline{\sigma}^G = \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\Delta \underline{u}^G) \end{cases}$$

Par conséquent, après ajout du terme correctif, la nouvelle solution globale est encore *admissible dans la zone complémentaire*.

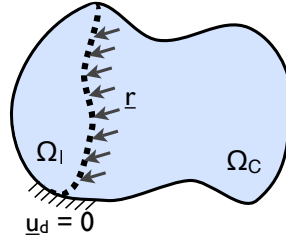


Figure 2.4: Problème global correctif continu.

De par la définition du résidu $r(\underline{v}^*)$, il est immédiat qu'à l'issue de l'analyse locale (*ie.* lors de l'étape 2), $r(\underline{v}^*) = 0$ si et seulement si la solution (s^G, s^L) vérifie toutes les équations de la formulation globale/locale. Ceci offre une première justification de l'emploi du résidu pour tester la convergence; plus de précisions sur cet aspect seront données au Chapitre 6. On en déduit également la propriété suivante de la méthode :

Propriété 2. *Si la suite des solutions globales s^G converge, alors la solution définie par (2.5) converge forcément vers la solution du problème de référence.*

Démonstration. Si la solution globale est convergente, alors forcément la solution correctrice Δs^G tend vers la solution nulle. L'équation (2.11) montre alors que le résidu $r(\underline{v}^*)$ tend lui aussi vers zéro. De plus, la solution locale étant déterminée de manière unique en fonction de la solution globale à l'étape 1, elle est elle aussi convergente; en vertu de la remarque ci-dessus, les valeurs limites de s^G et s^L vérifient toutes les équations de la formulation globale/locale. D'après la Propriété 1, la solution définie par (2.5) converge donc vers la solution du problème de référence. \square

En outre, on peut formuler deux remarques importantes sur la correction globale :

1. A l'issue de celle-ci, **l'équilibre des efforts (2.9) n'est toujours pas vérifié exactement**. En effet, une vérification exacte de (2.9) reviendrait à effectuer

un raccord en effort qui s'écrirait, en introduisant la contrainte du problème correctif $\Delta \underline{\underline{\sigma}}^G$:

$$\int_{\Gamma} \Delta \underline{\underline{\sigma}}_C^G \cdot \underline{v}^* d\Gamma = r(\underline{v}^*)$$

Or, l'interface Γ est une surface *intérieure* au problème global. Il n'est donc pas possible d'y imposer directement un chargement surfacique, car cela reviendrait à supprimer l'interaction entre les deux sous-domaines, c'est-à-dire à couper le problème global en deux ; cela serait une manipulation très intrusive. A l'inverse, le fait d'imposer le résidu comme chargement supplémentaire sur Γ conduit à une condition du type

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} [|\Delta \underline{\underline{\sigma}}^G \underline{n}|] \cdot \underline{v}^* d\Gamma &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma} \left(\Delta \underline{\underline{\sigma}}_C^G \underline{n}_C + \Delta \underline{\underline{\sigma}}_I^G \underline{n}_I \right) \cdot \underline{v}^* d\Gamma \\ &= -r(\underline{v}^*) \end{aligned}$$

La condition imposée ne porte donc pas sur l'effort global d'interface, mais sur son *saut* ; ce n'est pas un raccord en effort, et les efforts d'interface ne sont à l'équilibre qu'*une fois la convergence atteinte*.

2. Une conséquence de ce qui précède est que la correction globale introduit une **discontinuité de la contrainte globale** sur Γ . Ainsi, au fil des itérations, le vecteur contrainte global « côté Ω_C », $\underline{\underline{\sigma}}_C^G$, s'équilibre avec la contrainte locale, tandis que la contrainte globale « côté Ω_I » prend une valeur quelconque n'ayant aucun sens physique ; ceci n'a aucune importance car en vertu de (2.5), la solution globale n'est conservée *que dans la zone complémentaire*.

2.3.2 Variante mixte

La variante mixte consiste à n'imposer ni la continuité des déplacements (2.8), ni l'équilibre des efforts (2.9) lors de l'analyse locale ; au lieu de cela, on applique une condition aux limites faisant intervenir les deux quantités. Plus précisément, le système (2.8)–(2.9), traduisant le raccord des deux solutions sur l'interface, est reformulé de la façon suivante :

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}_I^L \underline{n}_I + \underline{\underline{\sigma}}_C^G \underline{n}_C \right) + \mathcal{A}(\underline{u}^L - \underline{u}^G) = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (2.13)$$

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}_I^L \underline{n}_I + \underline{\underline{\sigma}}_C^G \underline{n}_C \right) - \mathcal{B}(\underline{u}^L - \underline{u}^G) = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (2.14)$$

où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux opérateurs linéaires prenant un champ de déplacements et retournant un champ d'efforts surfaciques, tous deux définis sur Γ . Il est clair que le système (2.13)–(2.14) est équivalent au système (2.8)–(2.9) si et seulement si $\mathcal{A}(\underline{v}) + \mathcal{B}(\underline{v}) = 0$ implique $\underline{v} = 0$, c'est-à-dire lorsque l'opérateur $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est *inversible*.

Les opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des paramètres importants de la méthode ; dans les faits, ils ne sont jamais manipulés au niveau continu et seule leur discrétisation par éléments finis est considérée. Nous verrons au chapitre 4 comment ces opérateurs

sont construits et utilisés en pratique. Notons que dans le cas général, ces opérateurs prennent pour argument le *champ tout entier*, c'est-à-dire que $\mathcal{A}(\underline{v})(\underline{x})$ (la valeur du champ $\mathcal{A}(\underline{v})$ au point \underline{x}) ne dépend pas que de $\underline{v}(\underline{x})$, mais de \underline{v} tout entier.

La technique d'échange proprement dite est quant à elle assez similaire à celle de la variante primale ; seules la condition aux limites locale et la définition du résidu changent. Ainsi, lors de l'analyse locale (étape 1), au lieu d'imposer la continuité des déplacements (2.8), on impose la relation (2.13), ce qui revient à imposer la continuité de la *variable mixte* suivante :

$$\underline{q}_A = \underline{\sigma} \underline{n}_I + \mathcal{A}(\underline{u})$$

De même, le résidu (étape 2) n'est pas défini par rapport à l'équilibre des efforts (2.9), mais par rapport à l'équation (2.14) ; il s'écrit donc :

$$r(\underline{v}^*) = - \int_{\Gamma} \left(\underline{\sigma}^L \underline{n}_I + \underline{\sigma}^G \underline{n}_C \right) \cdot \underline{v}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathcal{B}(\underline{u}^L - \underline{u}^G) \cdot \underline{v}^* d\Gamma \quad (2.15)$$

et mesure la discontinuité de la variable suivante :

$$\underline{q}_B = \underline{\sigma} \underline{n}_C + \mathcal{B}(\underline{u})$$

Remarquons que le « résidu mixte » ainsi obtenu est égal au résidu d'équilibre précédemment défini, plus un terme mesurant le saut de déplacement $\underline{u}^L - \underline{u}^G$ via l'opérateur \mathcal{B} . Hormis la définition du résidu, la correction globale (étape 3) est quant à elle inchangée.

Naturellement, toutes les remarques formulées à propos de la variante en déplacement, concernant le résidu et l'étape de correction globale, s'appliquent ici à condition de remplacer les déplacements et les efforts par les variables mixtes — sous réserve, comme nous l'avons vu précédemment, que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ soit inversible.

3 Formulation par éléments finis

3.1 Les deux modèles

Nous nous intéressons maintenant à l'écriture du procédé décrit dans la section précédente dans le cas où les deux modèles sont formulés par éléments finis traditionnels. Comme indiqué précédemment, nous considérons un modèle global élastique linéaire et un modèle local élasto-plastique.

3.1.1 Configuration

Nous supposons que les deux maillages se conforment respectivement à la géométrie de Ω_C et Ω_I ; ainsi, Γ est un ensemble de faces (en 3D) ou d'arêtes (en 2D) de chacun des deux maillages.

En outre, nous avons vu que la continuité des déplacements (2.8) doit pouvoir être vérifiée de manière exacte ; pour cette raison, nous supposons également que les deux discrétisations sont *compatibles* sur Γ , c'est-à-dire que les deux maillages y présentent les mêmes faces (en 3D), arêtes, nœuds et degrés de liberté, et que les traces respectives de leurs fonctions de forme sur Γ sont identiques. Il ne s'agit cependant pas d'une limitation fondamentale de la méthode : la prise en compte de discrétisations incompatibles *via* une technique adaptée, telle que la méthode *mortar* [Bernardi *et al.*, 1991], fait partie des travaux futurs envisagés.

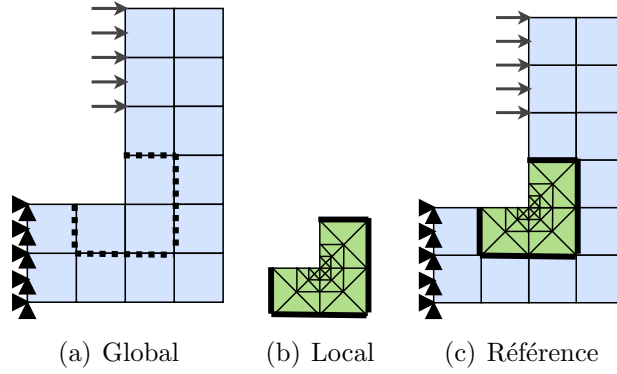


Figure 2.5: Problèmes éléments finis global, local et de référence.

En revanche, comme nous l'avons signalé dans la partie précédente, les deux modèles peuvent être très différents au sein de la zone d'intérêt : les relations de comportement, la géométrie et le maillage peuvent y être définis de manière indépendante, sous réserve que les deux maillages soient compatibles sur Γ . Une schématisation des deux modèles est proposée sur la Figure 2.5.

3.1.2 Equations des problèmes

Sous ces hypothèses, le système linéaire correspondant au **problème global** prend classiquement la forme :

$$\mathbf{K}^G \mathbf{u}^G = \mathbf{f}^G$$

où \mathbf{K}^G , \mathbf{u}^G et \mathbf{f}^G désignent respectivement la matrice de rigidité, le vecteur des déplacements nodaux et le second membre globaux, après prise en compte des déplacements imposés. Nous décomposons ce système sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{CC}^G & \mathbf{K}_{C\Gamma}^G & 0 \\ \mathbf{K}_{\Gamma C}^G & \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma,C}^G + \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma,I}^G & \mathbf{K}_{\Gamma I}^G \\ 0 & \mathbf{K}_{\Gamma}^G & \mathbf{K}_{II}^G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_C^G \\ \mathbf{u}_\Gamma^G \\ \mathbf{u}_I^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_C^G \\ \mathbf{f}_{\Gamma,C}^G + \mathbf{f}_{\Gamma,I}^G \\ \mathbf{f}_I^G \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

où les blocs indicés I , C et Γ correspondent respectivement aux degrés de liberté situés à l'intérieur de Ω_I , de Ω_C et sur Γ ; pour ces derniers, on a distingué les

contributions des éléments situés du côté de Ω_I et de Ω_C à la matrice de rigidité et au second membre par les indices I et C .

Le système non-linéaire correspondant au **problème local sans condition aux limites** sur Γ (donc incomplet) prend quant à lui la forme :

$$\mathbf{g}^L(\mathbf{u}^L) = \mathbf{f}^L + \lambda^L$$

où \mathbf{g}^L désigne le vecteur des efforts intérieurs nodaux, qui est une fonction non-linéaire de \mathbf{u}^L , et λ^L désigne le vecteur des efforts nodaux correspondant à la condition aux limites non spécifiée sur Γ . On a :

$$\mathbf{g}^L(\mathbf{u}^L) = \int_{\Omega_I} \text{Tr} \left[\underline{\underline{\sigma}}^L \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\mathbf{N}}^L) \right] d\Omega \quad (2.17)$$

où $\underline{\mathbf{N}}^L$ désigne le vecteur des fonctions de base éléments finis locales ; la dépendance non-linéaire en \mathbf{u}^L provient de la relation de comportement élasto-plastique. L'effort de réaction vaut quant à lui :

$$\lambda^L = \int_{\Gamma} \underline{\underline{\sigma}}^L \underline{\mathbf{n}}_I \cdot \underline{\mathbf{N}}^L d\Gamma \quad (2.18)$$

De même que pour le modèle global, on décompose ce système en degrés de liberté d'interface (indiqués Γ) et intérieurs à Ω_I (indiqués I). On obtient :

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\Gamma}^L(\mathbf{u}_{\Gamma}^L, \mathbf{u}_I^L) \\ \mathbf{g}_I^L(\mathbf{u}_{\Gamma}^L, \mathbf{u}_I^L) \end{bmatrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\Gamma}^L \\ \mathbf{f}_I^L \end{bmatrix}} + \boxed{\begin{bmatrix} \lambda_{\Gamma}^L \\ 0 \end{bmatrix}} \quad (2.19)$$

Notons qu'il n'y a *a priori* aucun lien entre les degrés de liberté locaux et globaux indiqués I , les deux discrétisations étant indépendantes ; en revanche, les degrés de liberté indiqués Γ sont les mêmes pour les deux modèles.

Enfin, le **problème éléments finis de référence** est défini par la substitution du problème local au sein du problème global, c'est-à-dire que toutes les contributions de Ω_I dans la rigidité et le second membre de (2.16) sont supprimées et remplacées par les valeurs du modèle local. Ce problème prend donc la forme suivante :

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{CC}^G & \mathbf{K}_{C\Gamma}^G & 0 \\ \mathbf{K}_{\Gamma C}^G & \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^G & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_C^R \\ \mathbf{u}_{\Gamma}^R \\ \mathbf{u}_I^R \end{bmatrix}} + \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_{\Gamma}^L(\mathbf{u}_I^R, \mathbf{u}_{\Gamma}^R) \\ \mathbf{g}_I^L(\mathbf{u}_I^R, \mathbf{u}_{\Gamma}^R) \end{bmatrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_C^G \\ \mathbf{f}_{\Gamma,C}^G + \mathbf{f}_{\Gamma,I}^L \\ \mathbf{f}_I^L \end{bmatrix}} \quad (2.20)$$

Le maillage correspondant est représenté sur la Figure 2.5.

3.2 Principes de mise en œuvre

Sous ces notations, nous présentons maintenant l'écriture des deux variantes de l'algorithme décrit dans la section précédente. Dans les deux cas, les échanges sont initialisés par la solution du problème (2.16).

3.2.1 Variante en déplacement

Dans sa variante en déplacement, l'algorithme de résolution prend la forme suivante :

1. **Analyse locale.** On résout le problème local (2.19), que l'on complète en imposant la condition aux limites en déplacement (2.8); les maillages étant compatibles, cette condition s'écrit ici simplement :

$$\mathbf{u}_\Gamma^L = \mathbf{u}_\Gamma^G$$

2. **Calcul du résidu.** On évalue le résidu d'équilibre $r(\underline{v}^*)$ en choisissant comme champs virtuels les fonctions de base éléments finis correspondant aux degrés de liberté de l'interface. Le vecteur regroupant ces fonctions sera noté $\underline{\mathbf{N}}_\Gamma$ (les maillages étant compatibles, ces fonctions sont les mêmes pour les deux modèles). On obtient la quantité suivante :

$$\mathbf{r}_\Gamma \stackrel{def}{=} r(\underline{\mathbf{N}}_\Gamma) = - \int_\Gamma [\underline{\underline{\sigma}}^L \underline{n}_I + \underline{\underline{\sigma}}^G \underline{n}_C] \cdot \underline{\mathbf{N}}_\Gamma d\Gamma$$

Ce résidu mesure la discontinuité de la contrainte globale/locale entre les deux sous-domaines, au sens des éléments finis. Une conséquence immédiate de la définition ci-dessus est que :

$$\boxed{\mathbf{r}_\Gamma = - (\lambda_\Gamma^L + \lambda_{\Gamma,C}^G)} \quad (2.21)$$

où λ_Γ^L est l'*effort nodal de réaction* du modèle local aux déplacements imposés, défini par (2.18); $\lambda_{\Gamma,C}^G$ désigne quant à lui l'*effort nodal intérieur* au modèle global, exercé par la zone d'intérêt sur la zone complémentaire, et est défini de façon similaire :

$$\lambda_{\Gamma,C}^G = \int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}_C^G \cdot \underline{\mathbf{N}}_\Gamma d\Gamma \quad (2.22)$$

3. **Correction globale.** Elle consiste à injecter le résidu ci-dessus dans le problème global en tant que chargement supplémentaire. Pour cela, on résout un *problème global correctif* chargé uniquement par le résidu et possédant, comme nous l'avons vu dans la section précédente, la même matrice de rigidité que le problème global initial :

$$\boxed{\mathbf{K}^G \Delta \mathbf{u}^G = \mathbf{r}^G = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{r}_\Gamma \\ 0 \end{bmatrix}} \quad (2.23)$$

A ce stade, des techniques d'accélération de convergence peuvent être mises en œuvre; ce point sera détaillé dans le chapitre suivant. Une fois $\Delta \mathbf{u}^G$ calculé, on met à jour la solution globale en posant :

$$\mathbf{u}^G \leftarrow \mathbf{u}^G + \Delta \mathbf{u}^G$$

3.2.2 Variante mixte

La variante mixte fait intervenir l'analogie discret des conditions de raccord mixtes (2.13) et (2.14), qui prend la forme suivante :

$$(\lambda_{\Gamma}^L + \lambda_{\Gamma,C}^G) + \mathbf{A} (\mathbf{u}_{\Gamma}^L - \mathbf{u}_{\Gamma}^G) = 0 \quad (2.24)$$

$$(\lambda_{\Gamma}^L + \lambda_{\Gamma,C}^G) - \mathbf{B} (\mathbf{u}_{\Gamma}^L - \mathbf{u}_{\Gamma}^G) = 0 \quad (2.25)$$

où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des matrices carrées assimilables à des rigidités d'interface, représentant la discrétisation des opérateurs linéaires continus \mathcal{A} et \mathcal{B} ; ce sont des paramètres de la méthode. De même qu'au niveau continu, ce système équivaut au raccord des déplacements et des efforts nodaux si et seulement si la matrice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est inversible ; la construction de ces matrices sera explicitée au Chapitre 4. Comme nous l'avons vu précédemment, les opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B} prennent les champs de déplacement tout entiers comme argument ; cela se traduit par le fait que \mathbf{A} et \mathbf{B} ne sont généralement pas des matrices creuses.

L'algorithme de résolution présente quelques différences par rapport à la variante en déplacement :

1. **Analyse locale.** Elle consiste maintenant à résoudre (2.19) sous la condition (2.24) ; en remplaçant λ_{Γ}^L dans (2.19), on obtient le problème suivant :

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_{\Gamma}^L(\mathbf{u}_{\Gamma}^L, \mathbf{u}_{\Gamma}^L) \\ \mathbf{g}_{\Gamma}^L(\mathbf{u}_{\Gamma}^L, \mathbf{u}_{\Gamma}^L) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_{\Gamma}^L \\ \mathbf{u}_{\Gamma}^L \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f}_{\Gamma}^L \\ \mathbf{f}_{\Gamma}^L \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} -\lambda_{\Gamma,C}^G + \mathbf{A} \mathbf{u}_{\Gamma}^G \\ 0 \end{array} \right] \quad (2.26)$$

Il s'agit d'un calcul non-linéaire dans lequel \mathbf{A} est assemblée en tant que rigidité d'interface supplémentaire, et dans lequel la « quantité mixte » $-\lambda_{\Gamma,C}^G + \mathbf{A} \mathbf{u}_{\Gamma}^G$ est assemblée en tant que chargement d'interface supplémentaire. La matrice \mathbf{A} permet ainsi de simuler la *rigidité* du reste de la structure, de façon plus réaliste qu'un simple déplacement ou effort imposé ; ce point, mis en évidence dans la méthode SBSF [Jara-Almonte et Knight, 1988] et les méthodes de décomposition de domaine mixtes [Series *et al.*, 2003; Ladevèze *et al.*, 2001], sera développé au Chapitre 4.

2. **Calcul du résidu.** Le résidu est maintenant défini par rapport à la condition de raccord (2.25) et vaut :

$$\mathbf{r}_{\Gamma} = -(\lambda_{\Gamma}^L + \lambda_{\Gamma,C}^G) + \mathbf{B} (\mathbf{u}_{\Gamma}^L - \mathbf{u}_{\Gamma}^G)$$

soit, compte tenu de la condition aux limites mixte (2.24) :

$$\mathbf{r}_{\Gamma} = [\mathbf{A} + \mathbf{B}] (\mathbf{u}_{\Gamma}^L - \mathbf{u}_{\Gamma}^G) \quad (2.27)$$

Ce résidu ne mesure donc plus uniquement le déséquilibre des efforts, mais également la discontinuité des déplacements, *via* la matrice \mathbf{B} . Le sens physique de cette dernière est moins évident que celui de \mathbf{A} ; nous proposerons une manière simple de choisir \mathbf{B} au chapitre 4.

3. **Correction globale.** Elle n'est pas modifiée, à ceci près que le résidu employé est le *résidu mixte* défini ci-dessus ; là encore, des techniques d'accélération peuvent être mises en œuvre, et nous verrons au chapitre 4 qu'il s'agit des mêmes techniques que pour la variante en déplacement.

3.3 Reformulation en tant que problème d'interface

Une caractéristique importante de la stratégie, tant au niveau continu qu'au niveau discret, est que **les échanges entre les modèles ne concernent que des quantités définies sur l'interface** : déplacements imposés et saut d'efforts nodaux pour la variante en déplacement, et combinaisons linéaires des déplacements et efforts pour la variante mixte. Cela découle directement de la formulation par substitution (2.5) : le recouvrement des deux modèles n'est utilisé que sur l'interface.

Par conséquent, au lieu d'utiliser les écritures « par blocs » introduites précédemment, il est commode d'écrire les différents calculs sous forme *condensée*, uniquement à l'aide des quantités d'interface ; cela permet de représenter de manière simple et concise les différents échanges d'informations effectués entre les modèles, et d'établir sans calculs les principales propriétés de la méthode. En outre, ce formalisme simplifie grandement l'écriture des techniques d'accélération et des « directions de recherche » mixtes, qui feront l'objet des deux chapitres suivants.

3.3.1 Notations

Nous commençons pour cela par réécrire les trois problèmes éléments finis sous forme condensée, afin d'introduire les différentes notations. Ainsi, le **problème global** se condense de la manière suivante :

$$[\mathbf{S}_{\Gamma,I}^G + \mathbf{S}_{\Gamma,C}^G] \mathbf{u}_{\Gamma}^G - (\mathbf{b}_{\Gamma,I}^G + \mathbf{b}_{\Gamma,C}^G) = 0 \quad (2.28)$$

où $\mathbf{S}_{\Gamma,I}^G$ et $\mathbf{S}_{\Gamma,C}^G$ désignent les compléments de Schur (sur Γ) respectifs des contributions de Ω_I et Ω_C à la matrice de rigidité globale ; de même, $\mathbf{b}_{\Gamma,I}^G$ et $\mathbf{b}_{\Gamma,C}^G$ désignent les seconds membres condensés provenant des contributions des deux sous-domaines. Ces quantités sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\Gamma,I}^G &= \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma,I}^G - \mathbf{K}_{\Gamma I}^G [\mathbf{K}_{II}^G]^{-1} \mathbf{K}_{I\Gamma}^G \\ \mathbf{S}_{\Gamma,C}^G &= \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma,C}^G - \mathbf{K}_{\Gamma C}^G [\mathbf{K}_{CC}^G]^{-1} \mathbf{K}_{C\Gamma}^G \\ \mathbf{b}_{\Gamma,I}^G &= \mathbf{f}_{\Gamma,I}^G - \mathbf{K}_{\Gamma I}^G [\mathbf{K}_{II}^G]^{-1} \mathbf{f}_I^G \\ \mathbf{b}_{\Gamma,C}^G &= \mathbf{f}_{\Gamma,C}^G - \mathbf{K}_{\Gamma C}^G [\mathbf{K}_{CC}^G]^{-1} \mathbf{f}_C^G \end{aligned}$$

On écrira également $\mathbf{S}_{\Gamma}^G \mathbf{u}_{\Gamma}^G - \mathbf{b}_{\Gamma}^G = 0$, où :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\Gamma}^G &= \mathbf{S}_{\Gamma,I}^G + \mathbf{S}_{\Gamma,C}^G \\ \mathbf{b}_{\Gamma}^G &= \mathbf{b}_{\Gamma,I}^G + \mathbf{b}_{\Gamma,C}^G \end{aligned}$$

De même, le **problème local** (sans condition aux limites sur Γ) peut — du moins formellement — être condensé sur l'interface, ce qui conduit à la forme suivante :

$$\mathbf{h}_\Gamma^L(\mathbf{u}_\Gamma^L) = \lambda_\Gamma^L \quad (2.29)$$

où \mathbf{h}_Γ^L désigne l'opérateur non-linéaire exprimant les efforts de réaction d'interface en fonction des déplacements d'interface \mathbf{u}_Γ^L ; cet opérateur dépend naturellement du chargement extérieur appliqué sur le modèle local (*ie.* dans Ω_I et sur $\partial\Omega_I \setminus \Gamma$) mais, celui-ci étant considéré comme une donnée, nous n'explicitons pas cette dépendance.

Enfin, le **problème de référence** condensé s'écrit comme suit :

$$\mathbf{h}_\Gamma^L(\mathbf{u}_\Gamma^R) + \mathbf{S}_{\Gamma,C}^G \mathbf{u}_\Gamma^R - \mathbf{b}_{\Gamma,C}^G = 0 \quad (2.30)$$

et on écrira comme précédemment $\mathbf{h}_\Gamma^R(\mathbf{u}_\Gamma^R) = \mathbf{h}_\Gamma^L(\mathbf{u}_\Gamma^R) + \mathbf{S}_{\Gamma,C}^G \mathbf{u}_\Gamma^R$.

Il n'est naturellement pas question de calculer explicitement ces divers opérateurs en pratique : calculer un produit $\mathbf{S}_\Gamma \mathbf{u}_\Gamma$ revient à imposer \mathbf{u}_Γ comme déplacement sur l'interface, à chargement nul, et à récupérer les efforts de réaction correspondants. De même, résoudre un système de la forme $\mathbf{S}_\Gamma \mathbf{u}_\Gamma = \lambda_\Gamma$ revient à imposer l'effort λ_Γ sur l'interface et à récupérer les déplacements d'interface correspondants.

3.3.2 Ecriture du problème d'interface

Dans tout ce qui suit, nous adoptons un formalisme de type « mixte », c'est-à-dire que nous décrivons la solution par les deux déplacements d'interface $\mathbf{u}_\Gamma^G, \mathbf{u}_\Gamma^L$ et les deux efforts d'interface $\lambda_{\Gamma,C}^G, \lambda_\Gamma^L$.

Avec cette notation, le problème de référence condensé se réécrit sous une forme décomposée simple, analogue à la formulation globale/locale au niveau continu. Ainsi, on dira qu'une solution locale d'interface $(\mathbf{u}_\Gamma^L, \lambda_\Gamma^L)$ est *admissible dans la zone d'intérêt* lorsque :

$$\boxed{\mathbf{h}_\Gamma^L(\mathbf{u}_\Gamma^L) = \lambda_\Gamma^L} \quad (2.31)$$

et on notera $(\mathbf{u}_\Gamma^L, \lambda_\Gamma^L) \in \mathcal{Ad}_I$, comme pour l'admissibilité des solutions continues. De même, on dira que $(\mathbf{u}_\Gamma^G, \lambda_{\Gamma,C}^G)$ est *admissible dans la zone complémentaire* et on notera $(\mathbf{u}_\Gamma^G, \lambda_{\Gamma,C}^G) \in \mathcal{Ad}_C$ lorsque :

$$\boxed{\mathbf{S}_{\Gamma,C}^G \mathbf{u}_\Gamma^G - \mathbf{b}_{\Gamma,C}^G = \lambda_{\Gamma,C}^G} \quad (2.32)$$

Enfin, les solutions globale et locale *condensées* doivent être *identiques* sur l'interface, ce qui s'écrit ici :

$$\boxed{\mathbf{u}_\Gamma^G = \mathbf{u}_\Gamma^L} \quad (2.33)$$

$$\boxed{\lambda_{\Gamma,C}^G + \lambda_\Gamma^L = 0} \quad (2.34)$$

On vérifie facilement que les équations (2.31)–(2.34) sont équivalentes au problème de référence condensé (2.30). On notera au passage que ces équations sont une

version discrétisée (sur le maillage de référence) et condensée de la formulation globale/locale continue (2.6)–(2.9), tout comme (2.30) est une version discrétisée et condensée du problème de référence continu (2.1)–(2.4) ; cela justifie l’emploi de notations identiques pour l’admissibilité des deux sous-domaines.

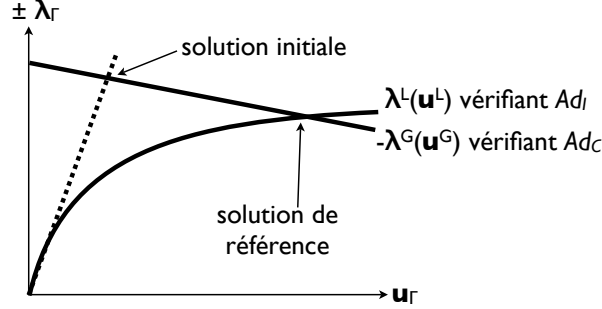


Figure 2.6: Schématisation du problème non-linéaire d’interface.

Par analogie avec la méthode LaTin [Ladevèze, 1985], cette décomposition peut être illustrée simplement par le schéma de la Figure 2.6 : il s’agit de trouver un champ de déplacements et d’efforts d’interface correspondant à une solution admissible à la fois dans la zone d’intérêt et dans la zone complémentaire.

3.3.3 Algorithmes de résolution

Tout comme au niveau continu, la technique de résolution vue précédemment s’interprète simplement comme une résolution itérative du problème décomposé (2.31)–(2.34), consistant à rechercher alternativement une solution locale vérifiant (2.31) et une condition aux limites, et une solution globale vérifiant (2.32) et issue d’un problème résiduel, en partant d’une solution globale élastique $(\mathbf{u}_\Gamma^G, \lambda_{\Gamma,C}^G) \in \mathcal{Ad}_C$.

■ Variante en déplacement

Partant d’une solution globale admissible $(\mathbf{u}_\Gamma^G, \lambda_{\Gamma,C}^G) \in \mathcal{Ad}_C$, chaque itération se déroule comme suit :

1. **Analyse locale.** On résout (2.31) sous la condition (2.33), ce qui revient à calculer $\lambda_\Gamma^L = \mathbf{h}_\Gamma^L(\mathbf{u}_\Gamma^G)$.
2. **Calcul du résidu.** On forme $\mathbf{r}_\Gamma = -(\lambda_\Gamma^L + \lambda_{\Gamma,C}^G)$ et on teste la convergence.
3. **Correction globale.** Si nécessaire, on résout le problème global correctif $\mathbf{S}_\Gamma^G \Delta \mathbf{u}_\Gamma^G = \mathbf{r}_\Gamma$. On met éventuellement en œuvre une technique d’accélération de convergence. Puis on met le déplacement global à jour : $\mathbf{u}_\Gamma^G \leftarrow \mathbf{u}_\Gamma^G + \Delta \mathbf{u}_\Gamma^G$. Enfin, on met à jour $\lambda_{\Gamma,C}^G$ de sorte que la solution globale corrigée soit toujours admissible, c’est-à-dire qu’elle vérifie (2.32).

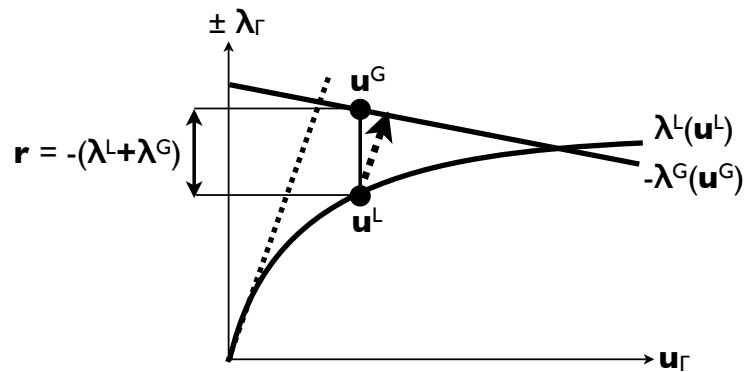


Figure 2.7: Schématisation d'une itération de la variante en déplacement.

■ Variante mixte

Partant d'une solution globale admissible $(\mathbf{u}_\Gamma^G, \lambda_{\Gamma,C}^G) \in \mathcal{Ad}_C$, chaque itération se déroule comme suit :

1. **Analyse locale.** On résout (2.31) sous la condition (2.24), ce qui revient à trouver \mathbf{u}_Γ^L tel que $\mathbf{h}_\Gamma^L(\mathbf{u}_\Gamma^L) + \mathbf{A}\mathbf{u}_\Gamma^L = -\lambda_{\Gamma,C}^G + \mathbf{A}\mathbf{u}_\Gamma^G$.
2. **Calcul du résidu.** On forme $\mathbf{r}_\Gamma = [\mathbf{A} + \mathbf{B}](\mathbf{u}_\Gamma^L - \mathbf{u}_\Gamma^G)$ et on teste la convergence.
3. **Correction globale.** Elle est identique à celle de l'approche en déplacement, avec une définition différente du résidu.

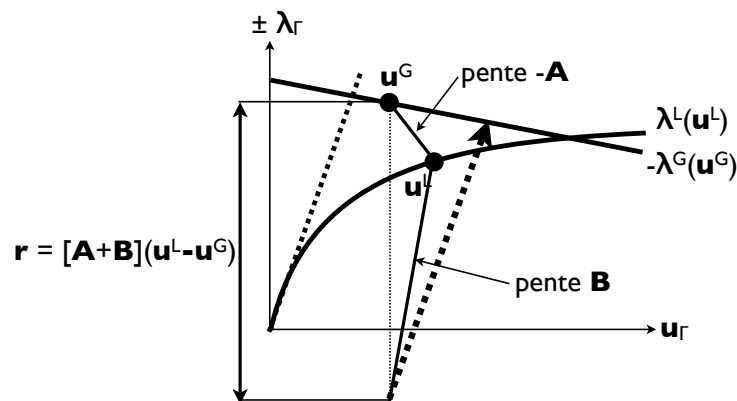


Figure 2.8: Schématisation d'une itération de la variante mixte.

Poursuivant l'analogie avec la méthode LaTIn, nous donnons une schématisation simple de ces deux itérations sur les Figures 2.7 et 2.8. Une différence fondamentale, visible essentiellement dans le cas de la méthode mixte, est que le passage du local au global ne s'effectue pas en suivant une direction de recherche, mais en *corrigeant*

la solution globale précédente au moyen d'un problème résiduel. En effet, imposer une solution sur Γ (qui est, rappelons-le, une surface *intérieure* au modèle global) selon une direction de recherche reviendrait à modifier directement la rigidité et/ou les conditions aux limites du modèle global, ce que nous considérons comme intrusif.

3.3.4 Propriétés

Les deux formulations ci-dessus possèdent des propriétés tout à fait similaires à celles que nous avons vues dans le cas continu. Nous les rappelons ici ; la démonstration se réduit à une vérification directe.

Propriété 3. *Si l'on définit λ_{Γ}^L comme l'effort de réaction du modèle local au déplacement d'interface \mathbf{u}_{Γ}^L et $\lambda_{\Gamma,C}^G$ comme l'effort de réaction de la zone complémentaire au déplacement d'interface \mathbf{u}_{Γ}^G (c'est-à-dire si l'on suppose (2.31) et (2.32) vraies), alors les conditions de raccord (2.33)–(2.34) sont équivalentes au problème de référence condensé (2.30).*

Propriété 4. *Le système « mixte » (2.24)–(2.25) est équivalent aux conditions de raccord (2.33)–(2.34) si et seulement si la matrice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est inversible.*

Dans toute la suite, nous supposons cette dernière condition vérifiée. Les deux propriétés ci-dessus permettent alors d'en déduire une troisième, valable pour les deux algorithmes précédents et essentielle pour garantir la fiabilité de la stratégie :

Propriété 5. *Si la solution globale d'interface \mathbf{u}_{Γ}^G converge au fil des itérations, alors sa limite est forcément la solution \mathbf{u}_{Γ}^R du problème de référence condensé (2.30).*

Démonstration. Traitons d'abord la variante en déplacement. Supposons que \mathbf{u}_{Γ}^G converge ; alors le terme correctif $\Delta\mathbf{u}_{\Gamma}^G$ tend vers zéro et, comme \mathbf{S}_{Γ}^G est défini positif, le résidu d'équilibre \mathbf{r}_{Γ} tend lui aussi vers zéro. La solution globale/locale obtenue par passage à la limite vérifie donc (2.34) ; or, il est immédiat qu'après l'analyse locale, la solution globale/locale vérifie toujours (2.31), (2.32) et (2.33). La solution limite vérifie donc toutes les équations de la formulation globale/locale condensée, ce qui nous permet de conclure grâce à la Propriété 3.

Pour la variante mixte, un raisonnement similaire montre que la solution obtenue par passage à la limite vérifie (2.31), (2.32) et le système « mixte » (2.24)–(2.25) ; les Propriétés 3 et 4 permettent alors de conclure. \square

Ceci suffit à assurer que n'importe quelle quantité, globale ou localisée en un endroit quelconque de Ω , converge vers la valeur donnée par le problème éléments finis de référence (2.20), à condition de respecter (2.5) — c'est-à-dire de conserver la solution locale dans Ω_I et la solution globale dans Ω_C . En effet, les quantités d'interface servent de conditions aux limites pour l'analyse locale ; la solution locale est donc égale à la partie « d'intérêt » de la solution de référence lorsque les quantités d'interface ont convergé. La partie « complémentaire » peut quant à elle

être obtenue soit à l'aide d'une relocalisation linéaire classique sur le modèle global (à déplacements imposés par exemple), soit en *sommant* tous les termes correctifs successifs obtenus au fil des itérations, sur toutes les quantités voulues. Ainsi :

L'erreur introduite par le découplage global/local, portant sur *n'importe quelle quantité d'intérêt*, peut être amenée à un niveau aussi faible que voulu : cette propriété assure le caractère exact de la stratégie et sera illustrée sur plusieurs exemples au Chapitre 6.

4 Comparaison avec quelques approches existantes

Nous terminons ce chapitre en évoquant brièvement les similitudes et différences entre l'approche étudiée ici et quelques-unes des techniques évoquées au Chapitre 1, afin de lever toute ambiguïté.

■ Comparaison avec les approches « ingénieur » et les travaux dérivés

La stratégie étudiée ici constitue une extension naturelle des approches descendantes (*submodeling*) utilisées en bureau d'études. L'étape locale de la stratégie est tout à fait similaire à ces approches, tant au niveau de son rôle (remplacer localement le modèle global par un modèle amélioré) que de la technique employée (une réanalyse locale avec condition aux limites issue de la solution globale, en déplacement [Kelley, 1982] ou en effort avec raideur ajoutée [Jara-Almonte et Knight, 1988]).

Le principal apport provient de l'étape de correction globale, qui permet de rendre compte des éventuels effets globaux des modifications introduites dans le modèle local. En ce sens, la méthode est à rapprocher des techniques globales/locales itératives de la littérature, et tout particulièrement des travaux de Whitcomb ; la technique présentée dans [Whitcomb, 1991] est très proche du plus simple des algorithmes présentés ici (approche en déplacement, sans accélération), avec une définition légèrement différente du résidu. Comme nous le verrons dans les chapitres suivants, il s'agit néanmoins d'une technique assez lente, et l'emploi de techniques d'accélération et/ou d'une condition aux limites mixte permet d'améliorer grandement les performances. De plus, le cadre théorique de la technique de Whitcomb n'était pas précisé, et les aspects non-intrusifs de son implémentation n'étaient pas mis en évidence ; c'est maintenant chose faite.

■ Comparaison avec les méthodes multi-niveaux

La stratégie présente quelques points communs avec les méthodes multi-niveaux, et particulièrement celles basées sur une homogénéisation discrète des quantités éléments finis locales [Ibrahimbegović et Marković, 2003; Marković et Ibrahimbegović, 2004; Kouznetsova *et al.*, 2004]. Le plus important d'entre eux est le *traitement local de la non-linéarité* : un calcul non-linéaire local est effectué à partir d'une

solution globale, et permet de mettre à jour celle-ci — ainsi que la rigidité globale, comme nous le verrons dans le chapitre consacré aux techniques d'accélération. Le modèle local constitue ainsi un « super-élément » non-linéaire qui est inclus dans le modèle global. De plus, comme pour les techniques d'homogénéisation discrète, aucune hypothèse de séparation des échelles n'est requise.

Il faut cependant noter deux différences essentielles. La première concerne la technique de mise en œuvre, qui est ici très différente compte tenu du caractère non-intrusif de la méthode : l'insertion du « super-élément » dans le modèle global s'effectue ainsi au moyen d'une technique de couplage itérative. La seconde concerne le rapport d'échelles entre les modèles. Dans les méthodes multi-niveaux, un modèle local est associé à *chaque élément ou point d'intégration global* ; les deux maillages sont donc de finesses très différentes, d'où l'emploi d'une procédure d'homogénéisation. Inversement, la stratégie présentée ici remplace *toute une partie du modèle global* et requiert deux discrétisations compatibles sur l'interface — et donc, *a fortiori*, de finesses identiques. Ainsi, il ne s'agit pas à proprement parler d'une stratégie multi-échelles, bien que le modèle local puisse être fortement raffiné à l'intérieur.

■ Comparaison avec les méthodes de « patch »

L'approche peut également être comparée aux techniques basées sur l'utilisation de « patches » recouvrant une partie du modèle global, telles que la méthode *hp-d* utilisée en élasto-plasticité [Düster *et al.*, 1999] ou la méthode Arlequin utilisée pour réaliser une substitution [Ben Dhia, 1998]. Les deux techniques permettent en effet de remplacer une partie d'un modèle global par un « patch » local de manière exacte, y compris en présence de non-linéarités locales. Elles utilisent pour cela une technique de couplage opérant automatiquement la substitution des deux modèles ; dans notre cas, cette technique fonctionne de manière itérative (comme dans l'approche *hp-d*) et ne demande aucun remaillage (comme dans la méthode Arlequin). Dans cette dernière comme dans notre approche, la substitution repose en outre sur une partition de l'énergie mécanique entre les deux modèles (assurée dans un cas par les fonctions de pondération, dans l'autre cas par l'expression « par morceaux » de la solution).

La formulation de ces principes est toutefois différente. Les deux approches ci-dessus sont basées sur une superposition des solutions dans un certain *volume* excluant la non-linéarité, et apportent toutes deux des modifications à la matrice de rigidité du modèle global (à cause des fonctions de pondération pour la méthode Arlequin, et de la nécessité de bloquer les mouvements globaux dans la zone de recouvrement pour la méthode *hp-d*). À l'inverse, la technique présentée dans ce mémoire est basée sur un raccord *surfactive*, et préserve complètement la matrice de rigidité globale.

D'autres différences plus spécifiques existent. Par rapport à la méthode *hp-d*, l'approche présentée ici ne nécessite pas une définition hiérarchique des deux modèles, et s'avère donc plus simple à mettre en œuvre ; en particulier, elle ne demande pas de connaître *a priori* la position des zones plastiques. Par rapport à

la méthode Arlequin, elle ne conduit pas à un problème couplé « monolithique », et permet intrinsèquement une résolution non-intrusive — même si certains travaux récents, associant la méthode Arlequin (ou une variante proche) avec une résolution itérative par décomposition de domaine, semblent aller dans ce sens [Elkhodja *et al.*, 2007; Rey *et al.*, 2007]. La méthode Arlequin présente toutefois l'avantage de fonctionner avec deux discrétisations complètement différentes y compris sur le bord, ce qui n'est pas (encore) le cas de la méthode présentée ici ; celle-ci requiert deux maillages compatibles sur l'interface et ne permet donc pas une définition complètement indépendante des deux modèles.

■ Comparaison avec la méthode LaTIn

La méthode présentée ici comporte des similitudes, tant au niveau des idées que du formalisme, avec la méthode LaTIn dans sa version « mono-échelle », c'est-à-dire le solveur non-linéaire présenté dans [Ladevèze, 1985]. Elle reprend en effet deux des trois points-clés de la méthode :

- la « séparation des difficultés », c'est-à-dire la séparation des équations du problème en deux groupes d'admissibilité, l'un « linéaire » et l'autre « local » ;
- la recherche itérative de la solution en passant d'un groupe d'équations à l'autre au moyen de « directions de recherche ».

La mise en œuvre de ces idées est cependant très différente dans les deux cas. Ici, la « séparation des difficultés » s'effectue entre les équations portant sur la zone d'intérêt et celles portant sur la zone complémentaire ; il s'agit donc d'une séparation *par sous-domaines*, et les « directions de recherche » permettant de passer d'un groupe à l'autre sont en pratique des *opérateurs de rigidité éléments finis* classiques. Inversement, la méthode LaTIn effectue la séparation selon la *nature* des équations (on distingue typiquement les relations de comportement, qui sont souvent locales, des autres équations) et passe d'un groupe à l'autre au moyen d'opérateurs qui sont souvent *scalaires*. Cela conduit à une mise en œuvre extrêmement différente. De plus, comme nous l'avons montré dans la Section 3.3.3, l'étape de correction globale de notre méthode ne s'effectue pas en suivant une direction de recherche. Enfin, la technique d'échanges est pour l'instant incluse au sein d'un schéma *incrémental* : aucun traitement global en temps comparable à l'approximation radiale ou à la PGD (*Proper Generalized Decomposition*) n'est actuellement mis en œuvre. Ce point fait cependant partie des extensions envisagées.

■ Comparaison avec les méthodes de décomposition de domaine

Enfin, la stratégie emprunte de nombreux principes aux méthodes de décomposition de domaine — et plus particulièrement aux méthodes *sans recouvrement* (puisque le raccord des deux solutions s'effectue uniquement sur une interface) munies d'une formulation *non-linéaire* [Cresta *et al.*, 2007; Pebrel *et al.*, 2008]. Comme nous l'avons vu dans la Section 3.3, elle peut en effet être écrite sous forme d'un problème d'interface non-linéaire, et les deux algorithmes de résolution évoquent respectivement les méthodes primales (pour la variante en déplacement) et certaines approches mixtes. Enfin, nous verrons que la mise en œuvre des techniques

d'accélération et du raccord mixte emprunte, là encore, largement aux méthodologies de ces approches.

La différence majeure provient, encore une fois, de l'aspect non-intrusif de la stratégie présentée ici. Cet aspect conduit à ne représenter qu'un seul sous-domaine de manière explicite (la zone d'intérêt), en traitant tout le reste de la structure au sein du modèle global ; le problème global perd ainsi son caractère « grossier » et ne sert plus à assurer l'extensibilité de la méthode — qui ici, avec seulement deux sous-domaines, n'a plus lieu d'être — mais représente en réalité le comportement de la quasi-totalité de la structure. Ce faisant, les deux sous-domaines jouent des rôles très dissymétriques, pouvant évoquer certaines techniques de type Dirichlet-Neumann [Hauret et Le Tallec, 2007; Krause et Wohlmuth, 2002], à ceci près que les calculs globaux correctifs ne font jamais intervenir de condition aux limites sur Γ puisque celle-ci est une surface intérieure ; sur ce point précis, la technique est plutôt comparable aux approches avec recouvrement.

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principales idées et plusieurs formulations de l'approche, et nous avons notamment justifié son caractère exact. Nous nous intéressons maintenant à ses performances ; pour ce faire, nous commençons par étudier la variante « en déplacement ».

Chapitre 3

Raccord en déplacement et techniques d'accélération

Ce chapitre s'intéresse tout particulièrement à la variante en déplacement de la stratégie, introduite au Chapitre 2. La nécessité d'accélérer la convergence est mise en évidence sur un exemple, puis deux techniques d'accélération non-intrusives sont proposées et leurs possibilités respectives sont étudiées.

Sommaire

1	Mise en évidence	87
1.1	Un exemple 2D simple	87
1.2	Étude de la convergence	88
1.3	Étude des résidus successifs	91
1.4	Principe de l'accélération de convergence	92
2	Accélération quasi-Newton	93
2.1	Principes d'utilisation	94
2.2	Solution retenue	99
3	Accélération par condensation du problème tangent	102
3.1	La méthode de Newton sur le problème d'interface	103
3.2	Illustration	106

3.3	Approximations de la rigidité tangente	108
4	Bilan	110

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le principe de la stratégie globale/locale non-intrusive, détaillé sa formulation au niveau continu et au niveau discret, et montré qu'il s'agit d'une *méthode exacte* dans le sens suivant : si la solution obtenue converge, alors elle tend forcément vers la solution du *problème de référence* que l'on obtiendrait en substituant le modèle local au sein du modèle global.

Ici, nous nous intéressons plus spécifiquement aux *performances* de l'approche, et en particulier de sa variante dite « en déplacement »— le cas de la variante « mixte » sera traité au chapitre suivant. Nous montrons qu'en l'absence d'accélération de convergence, l'algorithme présenté au chapitre précédent conduit à des performances moyennes ; nous proposons ensuite deux techniques non-intrusives permettant d'accroître notablement l'efficacité des échanges entre les modèles.

1 Mise en évidence

1.1 Un exemple 2D simple

Afin d'illustrer les performances de la méthode, considérons l'exemple académique 2D dont les maillages, chargements et conditions aux limites sont représentés sur la Figure 3.1 ; il s'agit d'une structure simple en appui sur les trois surfaces inférieures, sur laquelle on applique une pression et un chargement centrifuge en un incrément.

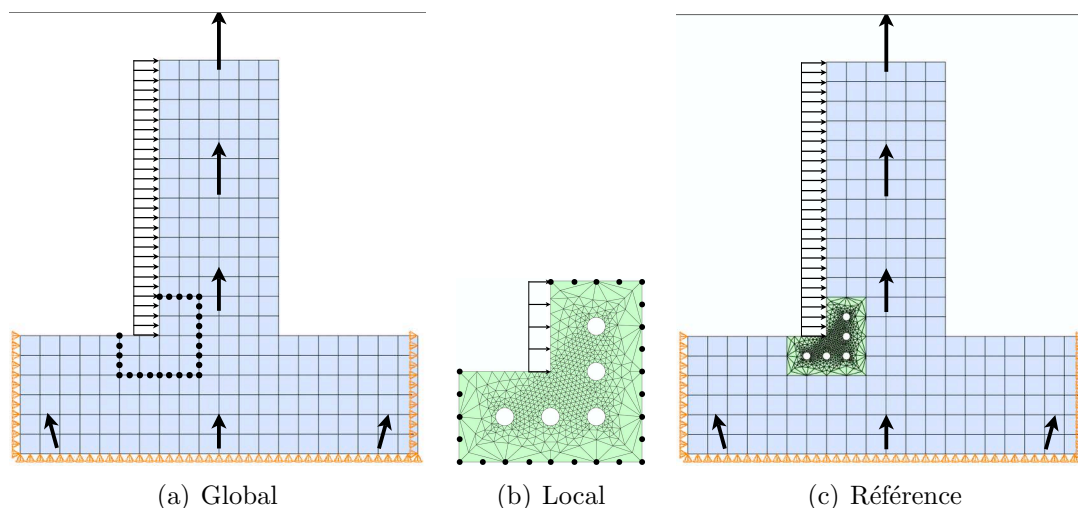


Figure 3.1: Un cas-test 2D élasto-plastique avec changement de géométrie.

On analyse cette structure au moyen d'un *modèle global*, élastique linéaire et maillé régulièrement. On observe alors un léger dépassement de la limite élastique au voisinage de l'angle rentrant sur la gauche ; on définit donc un *modèle local* élasto-plastique où l'on choisit en outre d'inclure des trous non représentés dans le maillage global, afin d'illustrer complètement les possibilités de l'approche. Cela conduit à

un remaillage local complet ; les deux maillages sont cependant compatibles sur la surface de raccord, comme nous l'avons vu précédemment. Enfin, on a également représenté sur la Figure 3.1 le *problème de référence* défini par substitution ; les différentes erreurs seront calculées par rapport à sa solution.

La relation de comportement est choisie élasto-plastique à écrouissage isotrope linéaire ; pour les besoins de l'exemple, un certain nombre de précautions sont prises afin de comparer la convergence des différentes approches de façon la moins biaisée possible. Tout d'abord, le chargement est ajusté de sorte que la solution de référence comporte une zone plastique significative au sein de la zone d'intérêt, mais demeure *purement élastique linéaire au sein de la zone complémentaire* (la zone plastique est représentée au Chapitre 6, sur les Figures 6.3(d) et 6.4(d)). En effet, la prise en compte du couplage global/local entraîne généralement une *expansion* de la zone plastique ; lorsque l'on ne prend pas de précautions, il se peut donc qu'une zone plastique initialement contenue au sein du modèle local se retrouve à « déborder » au fil des itérations. En outre, on s'est assuré que le chargement peut bien être *appliqué en un seul incrément* sans que cela crée de difficultés de convergence, pour le modèle de référence comme pour le modèle local ; enfin, on a spécifié des seuils de convergence stricts pour les méthodes de Newton correspondant à l'analyse locale (environ 10^{-5}) et à la relation de comportement élasto-plastique (environ 10^{-8}), afin de ne pas introduire d'erreurs résiduelles trop importantes. Quelques illustrations des problèmes potentiels pouvant survenir lorsque ces précautions ne sont pas prises seront présentées au Chapitre 6.

1.2 Étude de la convergence

Nous appliquons maintenant l'algorithme « en déplacement » à ce cas-test, en initialisant les échanges avec la solution du problème global élastique linéaire. Les calculs sur les deux modèles sont réalisés à l'aide du solveur généraliste Abaqus/Standard, et la stratégie est implémentée à l'aide des outils présentés au Chapitre 5.

Afin d'estimer la convergence de la méthode, nous observons l'évolution de deux quantités particulières.

1.2.1 Erreur (globale) en déplacement d'interface

La première quantité étudiée est l'*erreur globale en déplacement d'interface* par rapport à la solution de référence, définie par :

$$\eta_{\mathbf{u}} = \frac{\|\mathbf{u}_{\Gamma}^G - \mathbf{u}_{\Gamma}^R\|}{\|\mathbf{u}_{\Gamma}^R\|}$$

où \mathbf{u}_{Γ}^G est le champ de déplacement global d'interface défini au chapitre précédent (section 3.1), et \mathbf{u}_{Γ}^R est sa valeur de référence ; \mathbf{u}_{Γ}^G étant utilisé pour piloter les échanges, cette quantité donne une mesure globale simple et pertinente de la convergence.

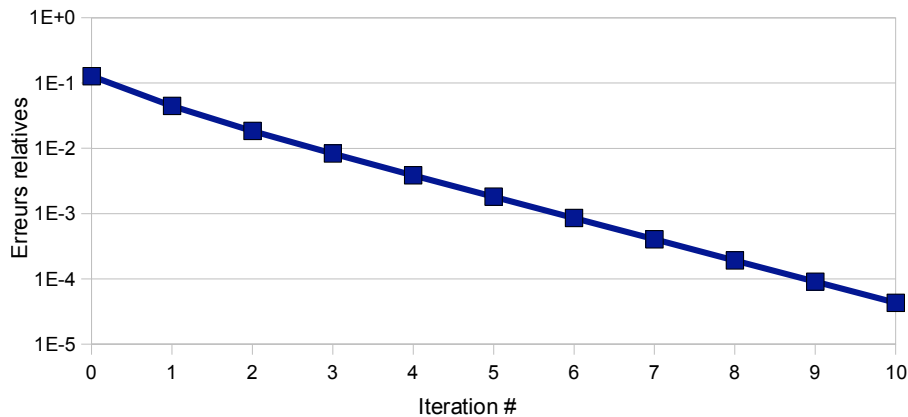


Figure 3.2: Convergence des déplacements d'interface, sans accélération.

Son évolution au fil des itérations est représentée sur la Figure 3.2 ; par convention, la toute première analyse locale, correspondant à une approche purement descendante, est comptée comme « itération zéro ». L'erreur (axe des ordonnées) est représentée à l'aide d'une échelle logarithmique. On remarque que :

- la convergence est assez lente : une valeur de 0,1%, ce qui peut sembler être un seuil de convergence raisonnable, n'est atteinte qu'au bout de 6 itérations ;
- la convergence est à peu près *linéaire*, c'est-à-dire qu'à chaque itération, l'erreur est divisée par une constante.

Or, sur des cas-tests suffisamment gros, le coût de la méthode est essentiellement dominé par celui des calculs globaux. De plus, une correction globale est effectuée à chaque itération, et nous verrons au Chapitre 5 que sous Abaqus, il n'est pas possible de conserver la factorisation de la matrice de rigidité globale, ce qui signifie que les corrections globales sont aussi coûteuses que la première analyse globale. Tout ceci fait que *le coût de la méthode est à peu près proportionnel au nombre d'itérations* ; l'optimisation des performances passe donc par la réduction de celui-ci.

Notons que le *taux de convergence*, c'est-à-dire ici le rapport entre deux erreurs successives, est voisin de 0,5.

1.2.2 Erreur (locale) en déformation plastique cumulée maximale

L'erreur en déplacement d'interface offre une bonne mesure globale de la convergence, mais ne présente que peu d'intérêt du point de vue du dimensionnement. Nous considérons donc également l'*erreur en déformation plastique cumulée maximale* définie par :

$$\eta_p = \frac{p_{\max}^L - p_{\max}^R}{p_{\max}^R}$$

où p_{\max} désigne le maximum sur tous les points d'intégration de la déformation plastique cumulée. Comme nous le verrons au Chapitre 6, cette quantité présente deux avantages : elle est pertinente par rapport au dimensionnement (sur les problèmes

d'aubes rencontrés par Snecma, dont ce cas-test est librement inspiré, elle est utilisée pour estimer la durée de vie) et elle est extrêmement sensible à la condition aux limites pilotant le modèle local. Celle-ci étant naturellement imprécise tant que la stratégie n'a pas convergé, l'indicateur ci-dessus offre une autre mesure fiable, beaucoup plus locale, de la convergence.

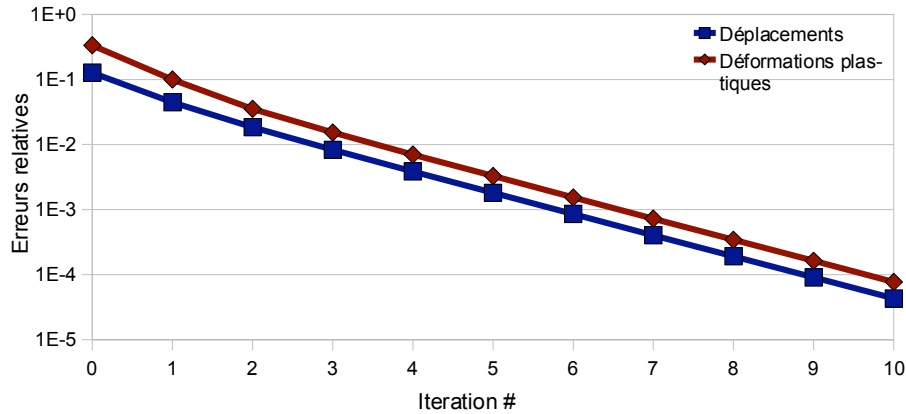


Figure 3.3: Convergence des déformations plastiques cumulées, sans accélération.

Dans les faits, cet indicateur est négatif : la déformation plastique est *sous-estimée* lors d'une approche descendante. L'évolution de sa valeur absolue au fil des itérations est représentée sur la Figure 3.3, avec les mêmes conventions que précédemment. On constate que la valeur initiale est plus du double de celle de l'erreur en déplacement (33% contre 13%), que la convergence reste à peu près linéaire et que les niveaux d'erreurs sont similaires : là encore, un seuil de 0,1% est atteint en six itérations.

1.2.3 Interprétation en termes de Newton modifié

La convergence linéaire obtenue s'explique simplement par le fait que l'algorithme « en déplacement », tel qu'il a été présenté au chapitre précédent, correspond à une *méthode de Newton modifiée*, formulée sur *l'équilibre de l'interface*.

Pour le montrer, rappelons l'écriture de cet algorithme, sous sa forme condensée et en l'absence d'accélération ; on utilise pour cela la formulation d'interface introduite au chapitre précédent (Section 3.3). Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, **toutes les quantités éléments finis sont des quantités d'interface, mais l'indice Γ est omis afin d'alléger les écritures.**

1. **Analyse locale.** On calcule $\lambda^L = \mathbf{h}^L(\mathbf{u}^G)$.
2. **Calcul du résidu.** On forme $\mathbf{r} = -(\lambda^L + \lambda_C^G)$ (où $\lambda_C^G = \mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^G - \mathbf{b}_C^G$ en pratique) et on teste la convergence.
3. **Correction globale.** Si nécessaire, on résout le problème global correctif $\mathbf{S}^G \Delta \mathbf{u}^G = \mathbf{r}$ et on met le déplacement global à jour : $\mathbf{u}^G \leftarrow \mathbf{u}^G + \Delta \mathbf{u}^G$.

En examinant cet algorithme, on constate qu'il s'agit d'une méthode de Newton modifiée portant sur l'équilibre de l'interface (*ie.* l'équation $\lambda^L + \lambda_C^G = 0$), vu comme une fonction non-linéaire des déplacements d'interface (*ie.* $\mathbf{f}(\mathbf{u}^G) = 0$). Les deux premières étapes correspondent à l'évaluation de la fonction au point \mathbf{u}^G courant, la dernière correspond à la résolution du système linéaire correctif et à l'incrémentation. La matrice de ce système correctif est \mathbf{S}^G , c'est-à-dire le complément de Schur de la matrice de rigidité globale élastique linéaire ; elle n'est jamais mise à jour.

Or, il est bien connu que la méthode de Newton modifiée présente généralement une convergence linéaire, et s'avère souvent lente en présence de non-linéarités moyennes ou fortes, même lorsque celles-ci sont très localisées. Ici, la non-linéarité provient de la plasticité locale ; elle est globalement faible, mais entraîne un assouplissement très prononcé au niveau des points d'intégration affectés. De plus, l'ajout des trous et le raffinement du maillages contribuent à assouplir encore davantage le modèle local. Il est donc logique qu'un algorithme de type « Newton modifié » converge lentement.

1.3 Étude des résidus successifs

L'explication précédente peut être affinée par l'observation des résidus successifs obtenus par la méthode. Rappelons que ces résidus sont définis, au signe près, comme le déséquilibre des efforts de réaction exercés de part et d'autre de l'interface :

$$\mathbf{r} = - (\lambda^L + \lambda_C^G) \tag{3.1}$$

où λ^L désigne, en pratique, l'effort de réaction exercé sur le modèle local, conjugué aux déplacements imposés, et λ_C^G désigne l'effort intérieur au modèle global, exercé sur la zone complémentaire. Plus précisément, il s'agit d'efforts nodaux d'interface.

Sur la Figure 3.4, nous avons représenté ces résidus en traçant, en chaque nœud de l'interface, le vecteur force correspondant, et ce pour les six premières itérations. L'échelle est la même pour tous les nœuds de l'interface, mais diffère d'une itération à l'autre pour des raisons de lisibilité (la norme des résidus est *grosso modo* divisée par deux à chaque itération, tout comme celle des déplacements). On constate que d'une itération à l'autre, les résidus sont quasiment colinéaires ; cela signifie que les problèmes correctifs successifs que l'on résout sont en réalité très proches, et donc que la méthode dans son état actuel ne réduit pas les résidus de manière efficace.

Pour surmonter ce problème, deux possibilités existent.

- Soit on améliore l'analyse locale, en employant un raccord plus réaliste que le raccord en déplacement ; c'est l'objet de la variante mixte présentée au chapitre suivant ;
- Soit on améliore la correction globale par le biais d'une technique d'accélération ; c'est l'objet de la suite de ce chapitre.

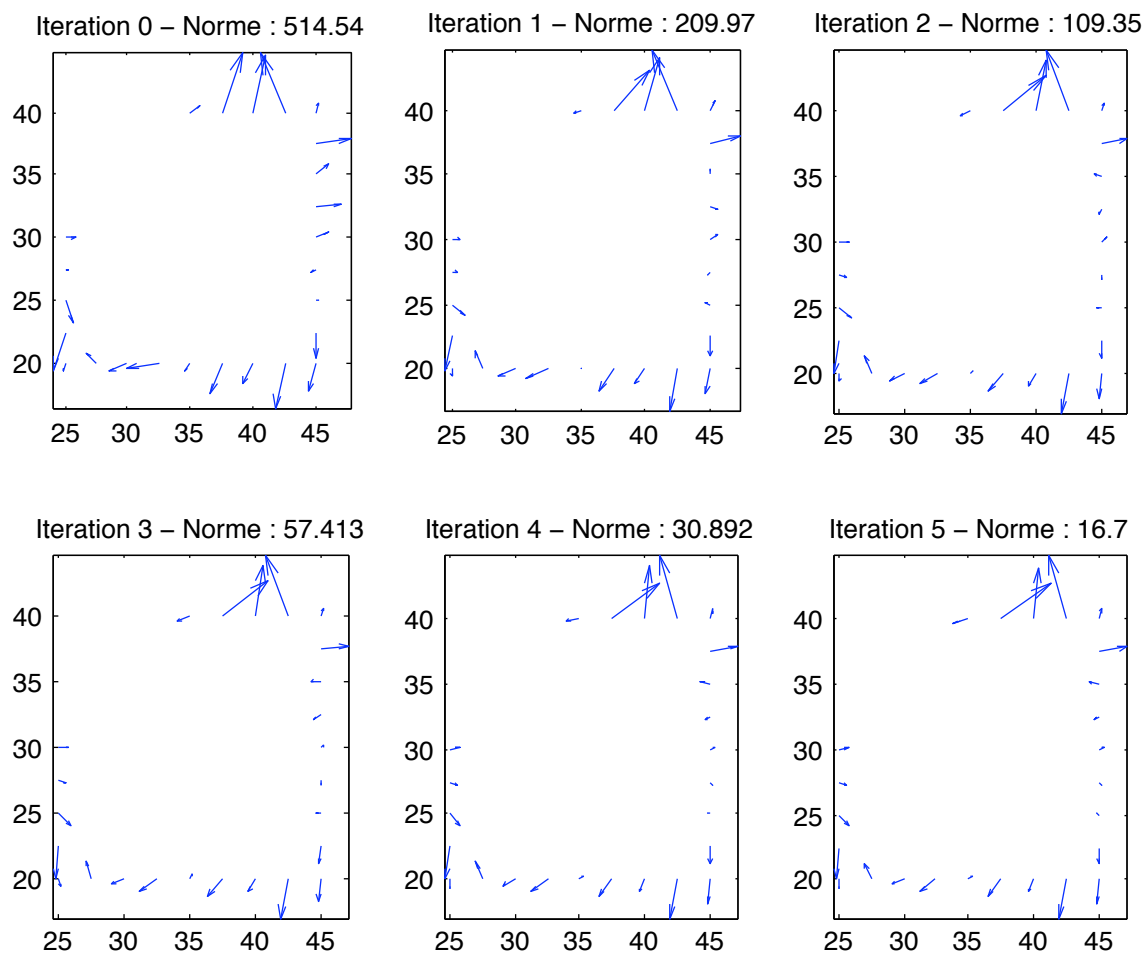


Figure 3.4: Tracés des six premiers résidus, sans accélération

1.4 Principe de l'accélération de convergence

Pour expliquer la lenteur de la stratégie actuelle, un constat fondamental est que l'opérateur de rigidité global contient généralement une représentation trop raide de la zone d'intérêt. L'idée essentielle des techniques d'accélération de convergence consiste donc à *corriger la rigidité globale*, de sorte à rendre compte de l'assouplissement engendré par la plasticité et les défauts géométriques. Les travaux sur l'homogénéisation discrète [Ibrahimbegović et Marković, 2003; Kouznetsova *et al.*, 2004] et la décomposition de domaine non-linéaire [Cresta, 2008] suggèrent en effet que pour résoudre un problème non-linéaire à l'aide d'une méthode globale/locale, il est judicieux de construire la rigidité globale à partir de la *rigidité locale tangente*.

Cependant, l'exigence de « non-intrusion » constitue ici une contrainte majeure : il est en effet exclu de modifier directement les termes de la matrice de rigidité globale, ou tout autre constituant du modèle global. La correction doit donc être mise en œuvre de manière indirecte, par des techniques algébriques permettant de

résoudre un système corrigé :

$$[\mathbf{S}^G + \Delta\mathbf{S}] \Delta\mathbf{u}^G = \mathbf{r} \quad (3.2)$$

à partir de la solution du système initial :

$$\mathbf{S}^G \Delta\mathbf{u}^G = \mathbf{r} \quad (3.3)$$

Il est de plus souhaitable que cette résolution s'effectue de manière *exacte*, afin de ne pas introduire des erreurs incontrôlées dans la solution. Cette problématique est celle de la *réanalyse structurale exacte*, que nous avons étudiée au premier chapitre ; comme nous l'avons vu, la plupart des techniques répondant à ce besoin sont basées sur les formules de Sherman-Morrison et de Woodbury, qui donnent respectivement la réponse exacte d'un système corrigé par un terme de rang 1, et par un terme de rang $r \geq 1$ [Akgün *et al.*, 2001] :

$$[\mathbf{S} + \mathbf{p}\mathbf{q}^T]^{-1} = \mathbf{S}^{-1} - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{p} \frac{\mathbf{q}^T\mathbf{S}^{-1}}{1 + \mathbf{q}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{p}} \quad (3.4)$$

où \mathbf{p} et \mathbf{q} sont des vecteurs [Sherman et Morrison, 1949], et :

$$[\mathbf{S} + \mathbf{P}\mathbf{Q}^T]^{-1} = \mathbf{S}^{-1} - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{P} [\mathbf{I}_r + \mathbf{Q}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}]^{-1} \mathbf{Q}^T\mathbf{S}^{-1} \quad (3.5)$$

où \mathbf{P} et \mathbf{Q} sont des matrices $n \times r$, n étant la dimension du problème de départ (c'est-à-dire la taille de \mathbf{S}) et r le rang de la modification ; \mathbf{I}_r désigne la matrice identité de taille r [Woodbury, 1950].

Dans la suite de ce chapitre, nous proposons deux techniques d'accélération utilisant ce principe. La première est basée sur les méthodes quasi-Newton et offre un gain de performance considérable pour un surcoût négligeable ; la seconde est basée sur une condensation du problème local tangent et s'avère plus coûteuse, mais nous verrons qu'elle est, en un certain sens, optimale.

2 Accélération quasi-Newton

La première classe de techniques d'accélération étudiée fait appel aux méthodes quasi-Newton, qui offrent une réponse simple à notre problématique. En effet, comme nous l'avons vu au Chapitre 1, ces méthodes se basent sur des mises à jour successives de la matrice du système, en partant d'une matrice initiale \mathbf{S}_0 . Autrement dit, à l'itération n , on construit :

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{S}_{n-1} + \Delta\mathbf{S}_n \quad (3.6)$$

où chaque terme $\Delta\mathbf{S}_n$ est de faible rang. Ces techniques se prêtent donc naturellement à une mise en œuvre non-intrusive grâce à la formule de Sherman-Morrison ou de Woodbury, selon que le rang du terme correctif vaut 1 ou plus. Leur application à notre problème soulève néanmoins un certain nombre de questions.

2.1 Principes d'utilisation

2.1.1 Définition des opérateurs sécants

Un premier point à éclaircir est la définition précise du problème auquel il convient d'appliquer une méthode quasi-Newton. Ces méthodes permettent en effet de construire des opérateurs *sécants* par rapport aux deux dernières solutions, c'est-à-dire que l'opérateur \mathbf{S}_n construit à l'itération n , servant à prédire la $(n + 1)$ -ième solution, vérifie :

$$\mathbf{S}_n (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}) = \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1}$$

où formellement, \mathbf{u}_n désigne la valeur de la solution à l'itération n , et \mathbf{y}_n la valeur correspondante de la fonction non-linéaire de \mathbf{u} par rapport à laquelle on souhaite construire un opérateur sécant ; voir par exemple Figure 3.5. Or, le choix de \mathbf{u} et \mathbf{y} n'a ici rien d'évident, puisque le problème non-linéaire d'interface que l'on cherche à résoudre s'écrit de la façon suivante : trouver $(\mathbf{u}^G, \lambda_C^G, \mathbf{u}^L, \lambda^L)$ vérifiant

- l'admissibilité (non-linéaire) de la solution locale dans la zone d'intérêt :

$$\mathbf{h}^L(\mathbf{u}^L) = \lambda^L \quad (3.7)$$

- l'admissibilité (linéaire) de la solution globale dans la zone complémentaire :

$$\mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^G = \mathbf{b}_C^G + \lambda_C^G \quad (3.8)$$

- la continuité des déplacements d'interface :

$$\mathbf{u}^G = \mathbf{u}^L \quad (3.9)$$

- l'équilibre des efforts d'interface :

$$\lambda_C^G + \lambda^L = 0 \quad (3.10)$$

où l'on rappelle que *toutes ces quantités sont des quantités d'interface*. La « solution », à un instant donné, est donc la donnée de deux champs de déplacements et deux champs d'efforts, tous les deux définis sur l'interface. Une approche possible, conservant complètement l'aspect mixte de cette formulation, serait de conserver *toutes* ces quantités comme inconnues, de manière analogue aux approches « FETI-2 champs » [Series *et al.*, 2003] ; nous adoptons ici une approche plus simple, adaptée au caractère global/local de la stratégie, dont nous présentons les points essentiels.

■ Définition d'opérateurs locaux sécants

Dans la formulation d'interface, la non-linéarité provient de l'admissibilité locale (3.7), liant les quantités locales \mathbf{u}^L et λ^L . Une idée naturelle est donc de construire, au moyen d'une formule quasi-Newton, un *opérateur de rigidité local sécant* \mathbf{S}_n^L vérifiant :

$$\mathbf{S}_n^L (\mathbf{u}_n^L - \mathbf{u}_{n-1}^L) = \lambda_n^L - \lambda_{n-1}^L \quad (3.11)$$

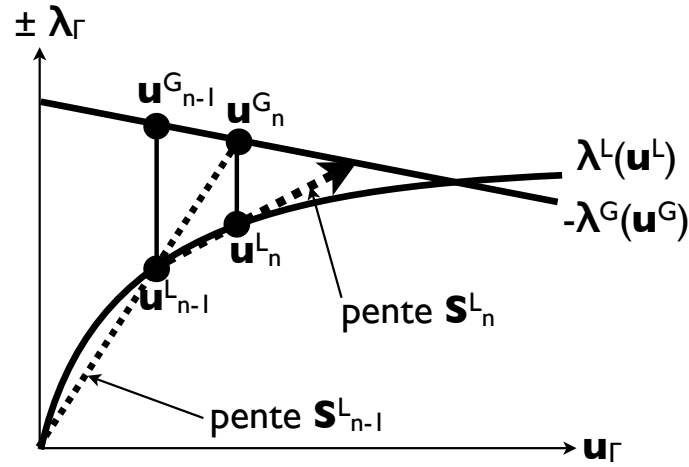


Figure 3.5: Un opérateur sécant par rapport à l'admissibilité locale

comme schématisé sur la Figure 3.5. Ces opérateurs seront définis par mises à jour successives à l'aide d'une technique quasi-Newton.

■ Construction d'opérateurs globaux par assemblage

Afin d'effectuer la correction globale, il est nécessaire de construire des opérateurs *globaux* à partir de ces opérateurs locaux sécants. Pour cela, suivant la même construction que celle du problème de référence condensé (2.30) ou du problème global condensé (2.28), nous *assemblons* les opérateurs locaux sécants \mathbf{S}_n^L avec le complément de Schur \mathbf{S}_C^G représentant la rigidité de la zone complémentaire. Nous définissons donc, à toute itération n :

$$\mathbf{S}_n^G = \mathbf{S}_n^L + \mathbf{S}_C^G \quad (3.12)$$

où les \mathbf{S}_n^L vérifient la propriété (3.11) : la correction globale « accélérée » sera menée en remplaçant l'opérateur de rigidité global initial, \mathbf{S}^G , par l'opérateur \mathbf{S}_n^G . Notons que les matrices correspondantes ne sont, là encore, jamais construites explicitement ; l'utilisation de ces opérateurs est décrite au paragraphe suivant.

Les rigidités initiales \mathbf{S}_0^L et \mathbf{S}_0^G sont choisies de sorte que les mises à jour successives soient appliquées à partir de la rigidité initiale \mathbf{S}^G , c'est-à-dire que l'on ait à l'« itération zéro » (*ie.* avant la première correction globale) :

$$\mathbf{S}_0^G = \mathbf{S}^G$$

et donc :

$$\mathbf{S}_0^L = \mathbf{S}^G - \mathbf{S}_C^G \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{S}_I^G$$

c'est-à-dire que la rigidité locale initiale sera prise égale à *la représentation globale de la zone d'intérêt* (*ie.* élastique linéaire et sans raffinements ni modifications).

■ Ecriture pour le raccord en déplacement

Il reste maintenant à expliciter l'écriture de ces idées, en montrant comment utiliser les différentes formules quasi-Newton afin d'accélérer la correction globale en respectant ce cadre. Dans le cas de l'approche en déplacement, cette écriture est relativement simple ; l'équation que nous cherchons à résoudre est en effet l'équilibre des efforts d'interface (3.10). Or, la solution globale vérifie à tout instant l'admissibilité de la zone complémentaire : on a donc

$$\mathbf{S}_C^G (\mathbf{u}_n^G - \mathbf{u}_{n-1}^G) = \lambda_{C,n}^G - \lambda_{C,n-1}^G \quad (3.13)$$

En utilisant le fait que dans l'approche en déplacement, on a toujours $\mathbf{u}^G = \mathbf{u}^L$, et en additionnant (3.11) et (3.13), on obtient à chaque itération n :

$$[\mathbf{S}_n^L + \mathbf{S}_C^G] (\mathbf{u}_n^G - \mathbf{u}_{n-1}^G) = \lambda_n^L + \lambda_{C,n}^G - \lambda_{n-1}^L - \lambda_{C,n-1}^G$$

soit, en utilisant (3.12) et (3.1) :

$$\mathbf{S}_n^G (\mathbf{u}_n^G - \mathbf{u}_{n-1}^G) = -\mathbf{r}_n + \mathbf{r}_{n-1}$$

En notant $\Delta \mathbf{u}_n^G \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{u}_n^G - \mathbf{u}_{n-1}^G$ et $\Delta \mathbf{r}_n \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}$, on obtient finalement l'écriture suivante :

$$\boxed{\mathbf{S}_n^G \Delta \mathbf{u}_n^G = -\Delta \mathbf{r}_n} \quad (3.14)$$

Autrement dit, pour l'approche en déplacement, assembler une rigidité locale « sécante » avec la rigidité de la zone complémentaire revient à utiliser une rigidité global « sécante » en termes de déplacements et de résidus. Par conséquent, **la mise en œuvre des idées que nous venons de présenter conduira à appliquer directement une méthode quasi-Newton au problème correctif global.** (Nous verrons au chapitre suivant que dans le cas du raccord mixte, cela n'est vrai que sous certaines conditions.)

2.1.2 Mise en œuvre non-intrusive

Une deuxième question importante concerne l'aspect *non-intrusif* de la mise à jour des opérateurs — c'est-à-dire qu'en pratique, on ne souhaite pas modifier la *matrice* du système en appliquant directement (3.6). Pour ce faire, on travaille directement sur le *vecteur* solution du système corrigé ; la technique consiste à exprimer l'inverse de la matrice corrigée à l'aide de la formule de Sherman-Morrison ou de Woodbury, puis à multiplier à droite l'équation obtenue par le second membre \mathbf{r} considéré [Akgün *et al.*, 2001].

Si on considère par exemple une mise à jour de rang 1, le terme $\Delta \mathbf{S}_n$ peut toujours se mettre sous la forme $\mathbf{p}_n \mathbf{q}_n^T$; la formule de Sherman-Morrison donne alors :

$$\mathbf{S}_n^{-1} \mathbf{r} = \mathbf{S}_{n-1}^{-1} \mathbf{r} - \mathbf{S}_{n-1}^{-1} \mathbf{p}_n \frac{\mathbf{q}_n^T \mathbf{S}_{n-1}^{-1} \mathbf{r}}{1 + \mathbf{q}_n^T \mathbf{S}_{n-1}^{-1} \mathbf{p}_n}$$

Autrement dit, la solution après correction $\mathbf{S}_n^{-1}\mathbf{r}$ s'exprime en fonction de la solution avant correction $\mathbf{S}_{n-1}^{-1}\mathbf{r}$ et du vecteur $\mathbf{S}_{n-1}^{-1}\mathbf{p}_n$. (Compte tenu de la remarque précédente, cette formule est appliquée à la rigidité globale ; nous omettons l'exposant G pour alléger l'écriture).

Cependant, dans le cadre d'une méthode non-intrusive, la matrice initiale n'est pas mise à jour directement, et on souhaite ne résoudre que des systèmes de matrice \mathbf{S}_0 . Or, dans une méthode quasi-Newton, les mises à jour sont appliquées *successivement* ; il s'agit là de la différence essentielle avec les techniques de réanalyse structurale, qui envisagent diverses modifications par rapport à une *même* matrice initiale. Pour ce faire, on applique la formule ci-dessus n fois d'affilée, de manière récursive ; soit, **pour k allant de 1 à n** ,

$$\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{S}_{k-1}^{-1}\mathbf{r} - \mathbf{S}_{k-1}^{-1}\mathbf{p}_k \frac{\mathbf{q}_k^T \mathbf{S}_{k-1}^{-1}\mathbf{r}}{1 + \mathbf{q}_k^T \mathbf{S}_{k-1}^{-1}\mathbf{p}_k} \quad (3.15)$$

Partant de la solution du système initial $\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{r}$, on effectue ainsi n corrections successives pour obtenir la solution « quasi-Newton », ce qui nécessite d'avoir calculé et stocké les vecteurs $\mathbf{S}_{k-1}^{-1}\mathbf{p}_k$. Pour ne pas engendrer de résolutions globales supplémentaires, il faut donc s'assurer que ces vecteurs peuvent être déduits des calculs déjà effectués — autrement dit, que \mathbf{p}_k peut s'exprimer comme combinaison linéaire des k premiers résidus.

On peut donc formuler le constat suivant : *une méthode quasi-Newton de rang 1 n'engendrera aucune résolution globale supplémentaire si les \mathbf{p}_k sont des combinaisons linéaires des résidus déjà analysés.*

Enfin, dans le cas d'une mise à jour de rang $r > 1$, le principe que nous venons d'exposer peut également être mis en œuvre, en exprimant le terme correctif $\Delta\mathbf{S}_k$ sous la forme $\mathbf{P}_k\mathbf{Q}_k^T$ et en appliquant la formule de Woodbury. A l'itération n , il faut alors effectuer, **pour k allant de 1 à n** :

$$\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{S}_{k-1}^{-1}\mathbf{r} - \mathbf{S}_{k-1}^{-1}\mathbf{P}_k [\mathbf{I}_r + \mathbf{Q}_k^T \mathbf{S}_{k-1}^{-1}\mathbf{P}_k]^{-1} \mathbf{Q}_k^T \mathbf{S}_{k-1}^{-1}\mathbf{r} \quad (3.16)$$

ce qui demande, pour n'engendrer aucun calcul global supplémentaire, que chacune des *colonnes* des matrices \mathbf{P}_k soit une combinaison linéaire des résidus précédents. Notons que la plupart des méthodes quasi-Newton étant de rang 1 ou 2, il n'y a en pratique aucun surcoût par rapport à la situation précédente.

2.1.3 Application à différentes formules quasi-Newton

Nous examinons maintenant l'application des principes exposés ci-dessus à trois formules quasi-Newton courantes. Ces formules sont données en fonction de $\Delta\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n^G - \mathbf{u}_{n-1}^G$ et $\Delta\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1}$, \mathbf{y} désignant la valeur de la fonction que l'on cherche à annuler et dont \mathbf{S} doit approcher le gradient ; ici, $\mathbf{y} = \lambda^L + \lambda_C^G = -\mathbf{r}$, et on a donc :

$$\Delta\mathbf{y}_n = \mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n$$

De plus, dans le cadre de cette étude, la correction globale s'effectue de la manière suivante :

$$\mathbf{S}_{n-1}\Delta\mathbf{u}_n = \mathbf{r}_{n-1} \quad (3.17)$$

c'est-à-dire que le terme correctif retourné par la méthode quasi-Newton est utilisé tel quel : on n'utilise aucune technique de recherche linéaire (qui entraînerait des coûts de calcul supplémentaires) ni de relaxation (car il est souvent difficile d'ajuster *a priori* la valeur du paramètre).

■ Formule de Broyden

La formule de Broyden consiste à mettre à jour la matrice à l'aide du terme correctif suivant, qui est de rang 1 et non symétrique :

$$\Delta\mathbf{S}_n = \frac{(\Delta\mathbf{y}_n - \mathbf{S}_{n-1}\Delta\mathbf{u}_n) \Delta\mathbf{u}_n^T}{\Delta\mathbf{u}_n^T \Delta\mathbf{u}_n}$$

On montre que cette définition est celle du *terme minimal* permettant de rendre l'opérateur \mathbf{S}_n sécant (minimal au sens de la norme de Frobenius). Compte tenu des remarques ci-dessus, le numérateur se simplifie comme suit :

$$\Delta\mathbf{y}_n - \mathbf{S}_{n-1}\Delta\mathbf{u}_n = -\mathbf{r}_n$$

et la formule de Broyden se réécrit donc ici :

$$\Delta\mathbf{S}_n = -\frac{\mathbf{r}_n \Delta\mathbf{u}_n^T}{\Delta\mathbf{u}_n^T \Delta\mathbf{u}_n} \quad (3.18)$$

Notons qu'il s'agit plus précisément de la formule connue sous le nom de « bonne » méthode (*good Broyden's method*) ; il en existe une deuxième, connue sous le nom de *bad Broyden's method* et beaucoup moins employée.

■ Formule SR1

La formule SR1 (*Symmetric Rank One*) fait intervenir un terme symétrique et de rang 1 comme son nom l'indique :

$$\Delta\mathbf{S}_n = \frac{(\Delta\mathbf{y}_n - \mathbf{S}_{n-1}\Delta\mathbf{u}_n) (\Delta\mathbf{y}_n - \mathbf{S}_{n-1}\Delta\mathbf{u}_n)^T}{(\Delta\mathbf{y}_n - \mathbf{S}_{n-1}\Delta\mathbf{u}_n)^T \Delta\mathbf{u}_n}$$

Il s'agit en réalité de l'*unique* terme symétrique et de rang 1 permettant d'obtenir un opérateur sécant. Là encore, la formule peut se simplifier compte tenu de la remarque ci-dessus :

$$\Delta\mathbf{S}_n = -\frac{\mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^T}{\mathbf{r}_n^T \Delta\mathbf{u}_n} \quad (3.19)$$

■ Formule BFGS

La formule BFGS est probablement la formule quasi-Newton la plus employée dans le domaine du calcul par éléments finis non-linéaire ; elle est symétrique et de

Méthode	\mathbf{p}_n ou \mathbf{P}_n	\mathbf{q}_n ou \mathbf{Q}_n
Broyden	\mathbf{r}_n	$-\frac{\Delta \mathbf{u}_n}{\Delta \mathbf{u}_n^T \Delta \mathbf{u}_n}$
SR1	\mathbf{r}_n	$-\frac{\mathbf{r}_n}{\mathbf{r}_n^T \Delta \mathbf{u}_n}$
BFGS	$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{n-1} & -\mathbf{r}_n & \mathbf{r}_{n-1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n}{(\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n)^T \Delta \mathbf{u}_n} & \frac{\mathbf{r}_{n-1}}{\mathbf{r}_{n-1}^T \Delta \mathbf{u}_n} \end{bmatrix}$

Table 3.1: Décomposition de quelques termes correctifs quasi-Newton

rang 2 et s'écrit :

$$\Delta \mathbf{S}_n = \frac{\Delta \mathbf{y}_n \Delta \mathbf{y}_n^T}{\Delta \mathbf{y}_n^T \Delta \mathbf{u}_n} - \frac{\mathbf{S}_{n-1} \Delta \mathbf{u}_n (\mathbf{S}_{n-1} \Delta \mathbf{u}_n)^T}{(\mathbf{S}_{n-1} \Delta \mathbf{u}_n)^T \Delta \mathbf{u}_n}$$

soit, après simplification :

$$\Delta \mathbf{S}_n = \frac{(\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n) (\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n)^T}{(\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n)^T \Delta \mathbf{u}_n} - \frac{\mathbf{r}_{n-1} \mathbf{r}_{n-1}^T}{\mathbf{r}_{n-1}^T \Delta \mathbf{u}_n} \quad (3.20)$$

Les vecteurs \mathbf{p}_n et \mathbf{q}_n (ou les matrices \mathbf{P}_n et \mathbf{Q}_n pour la formule BFGS) correspondant à ces formules sont récapitulés dans le Tableau 3.1. On constate que pour ces trois techniques, les \mathbf{p}_n (ou les colonnes de \mathbf{P}_n) sont bien engendrés par les n premiers résidus (plus particulièrement, par le n -ième résidu pour les formules SR1 et de Broyden, et par le n -ième et le $(n-1)$ -ième pour BFGS); en vertu de la remarque du paragraphe précédent, aucune de ces techniques ne demandera donc de résolution globale supplémentaire.

Nous décrivons maintenant la technique d'accélération retenue, basée sur la formule SR1 et réalisée selon les principes détaillés ci-dessus.

2.2 Solution retenue

2.2.1 Pourquoi SR1 ?

La technique d'accélération retenue est basée sur la formule SR1. Cette formule a en effet mené, lors de tests préliminaires, à une convergence plus rapide que la formule de Broyden; ceci peut s'expliquer par le fait que la relation de comportement élasto-plastique employée conduit à un opérateur de rigidité *symétrique*, et que cette symétrie est préservée par les formules SR1 et BFGS, mais pas par la formule de Broyden.

Le choix entre SR1 et BFGS s'avère plus délicat. Dans les faits, la méthode BFGS est beaucoup plus utilisée que la méthode SR1 dans le cadre du calcul par éléments finis — notamment à l'aide de l'implémentation proposée dans [Matthies et Strang, 1979]. Cependant, elle n'est pas systématiquement plus efficace malgré son

rang supérieur ; il est même fréquent que la formule SR1 mène à une convergence plus rapide que la formule BFGS, et notamment lorsqu'aucune recherche linéaire n'est effectuée, ce qui est le cas ici [Nocedal et Wright, 1999]. En outre, la méthode SR1 s'avère plus simple à mettre en œuvre puisque le terme correctif dépend *uniquement du résidu courant*, et non des résidus précédents ; on évite ainsi notamment des problèmes à l'initialisation, puisque le terme \mathbf{r}_0 utilisé par BFGS lors de la première correction globale (itération 1) correspondrait en pratique au *second membre condensé* global, dont l'obtention non-intrusive pourrait être délicate.

Signalons que la mise à jour SR1 présente un inconvénient potentiel : il peut arriver qu'elle conduise à une matrice *non inversible*. Toutefois, avec l'implémentation proposée, cette éventualité est facile à repérer : la formule de Sherman-Morrison garantit en effet que, si \mathbf{S}_{n-1} est inversible et si $1 + \mathbf{q}_{n-1}^T \mathbf{S}_{n-1}^{-1} \mathbf{p}_{n-1} \neq 0$, alors $\mathbf{S}_n = \mathbf{S}_{n-1} + \mathbf{p}_{n-1} \mathbf{q}_{n-1}^T$ est inversible. Il suffit donc de vérifier que $1 + \mathbf{q}_{n-1}^T \mathbf{S}_{n-1}^{-1} \mathbf{p}_{n-1}$ ne s'annule pas ; si cela devait se produire, une technique couramment employée est simplement de « sauter » la mise à jour, c'est-à-dire de poser $\mathbf{S}_n = \mathbf{S}_{n-1}$ pour cette itération (voir par exemple [Nocedal et Wright, 1999]). A ce jour, cette situation n'est toutefois jamais survenue dans le cadre des études présentées ici.

2.2.2 Implémentation

Nous décrivons maintenant la correction globale SR1 tel qu'elle est implémentée dans le cadre de la stratégie ; en accord avec les résultats précédents, la mise à jour est directement appliquée au problème global correctif, et s'effectue en travaillant directement sur la solution $\Delta \mathbf{u}$ de ce problème à l'aide d'applications successives de la formule de Sherman-Morrison (3.14).

– **Initialisation** : stocker $\Delta \mathbf{u}_0^G = \mathbf{u}^G$, la solution élastique initiale

– **A chaque itération n** :

1. Effectuer la correction globale « normale » : calculer $\mathbf{w}_0 = [\mathbf{S}^G]^{-1} \mathbf{r}$.
2. Stocker le résidu courant : $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}$.
3. Faire les mises à jour successives : pour k allant de 1 à n , calculer :

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \mathbf{v}_k \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{w}_{k-1}}{\mathbf{r}_k^T (\mathbf{v}_k - \Delta \mathbf{u}_k^G)}$$

4. Stocker $\mathbf{v}_n = \mathbf{w}_{n-1}$ (ie. le terme $[\mathbf{S}_{n-1}^G]^{-1} \mathbf{r}_n$ et $\Delta \mathbf{u}_n^G = \mathbf{w}_n$).
5. Retourner \mathbf{w}_n , le déplacement corrigé final.

La mise à jour SR1 prend donc la forme d'un simple *post-traitement* numérique de l'étape de correction globale, nécessitant le stockage de trois vecteurs par itération : les résidus successifs \mathbf{r}_n , les termes correctifs successifs $\Delta \mathbf{u}_n^G$ et les $\mathbf{v}_n = [\mathbf{S}_{n-1}^G]^{-1} \mathbf{r}_n$. Concrètement, son application demande de calculer une combinaison linéaire de vecteurs d'interface dont les coefficients sont des rapports de produits scalaires, et représente donc un coût complètement négligeable devant celui d'une itération.

2.2.3 Illustration

Afin d'illustrer le gain d'efficacité apporté par cette technique, nous reprenons l'exemple 2D présenté au début de ce chapitre. La Figure 3.6 représente l'évolution de l'erreur en déplacements d'interface au fil des itérations, avec et sans l'accélération SR1; on constate que la convergence n'est plus linéaire (elle accélère au fil des itérations; le taux de convergence atteint ainsi des valeurs inférieures à 0,1, contre 0,5 sans accélération) et que le seuil de 0,1% précédemment considéré est largement atteint au bout de 3 itérations (soit 3 résolutions globales supplémentaires), contre 6 sans l'accélération. Cette observation se retrouve sur les déformations plastiques cumulées maximales, voir Figure 3.7.

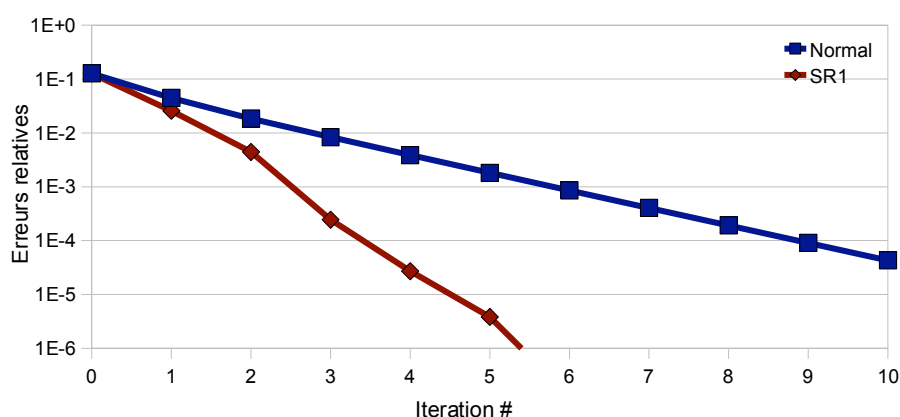


Figure 3.6: Convergence des déplacements d'interface, avec ou sans accélération SR1.

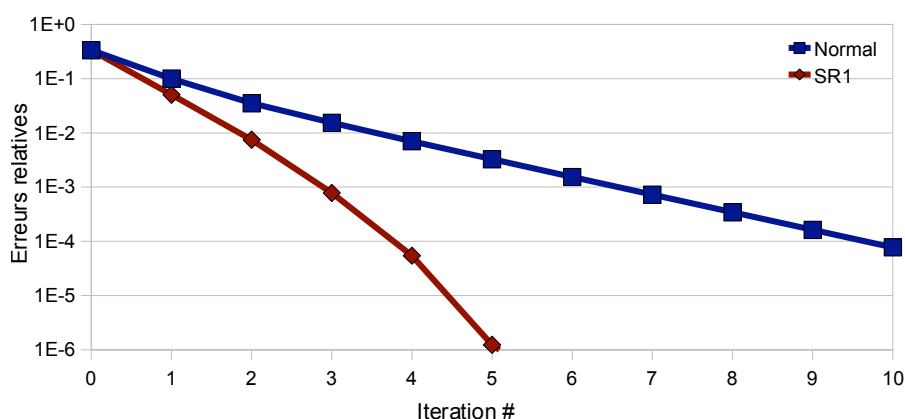


Figure 3.7: Convergence des déformations plastiques cumulées, avec ou sans accélération SR1.

En outre, la Figure 3.8 représente, comme précédemment, les tracés des six premiers résidus d'équilibre normés. On constate que, contrairement à la Figure 3.4, les résidus ne semblent plus colinéaires d'une itération à l'autre; cela signifie que

les problèmes globaux successifs résolus sont moins semblables que précédemment, et donc que la correction globale ainsi améliorée permet de traiter les résidus plus efficacement.

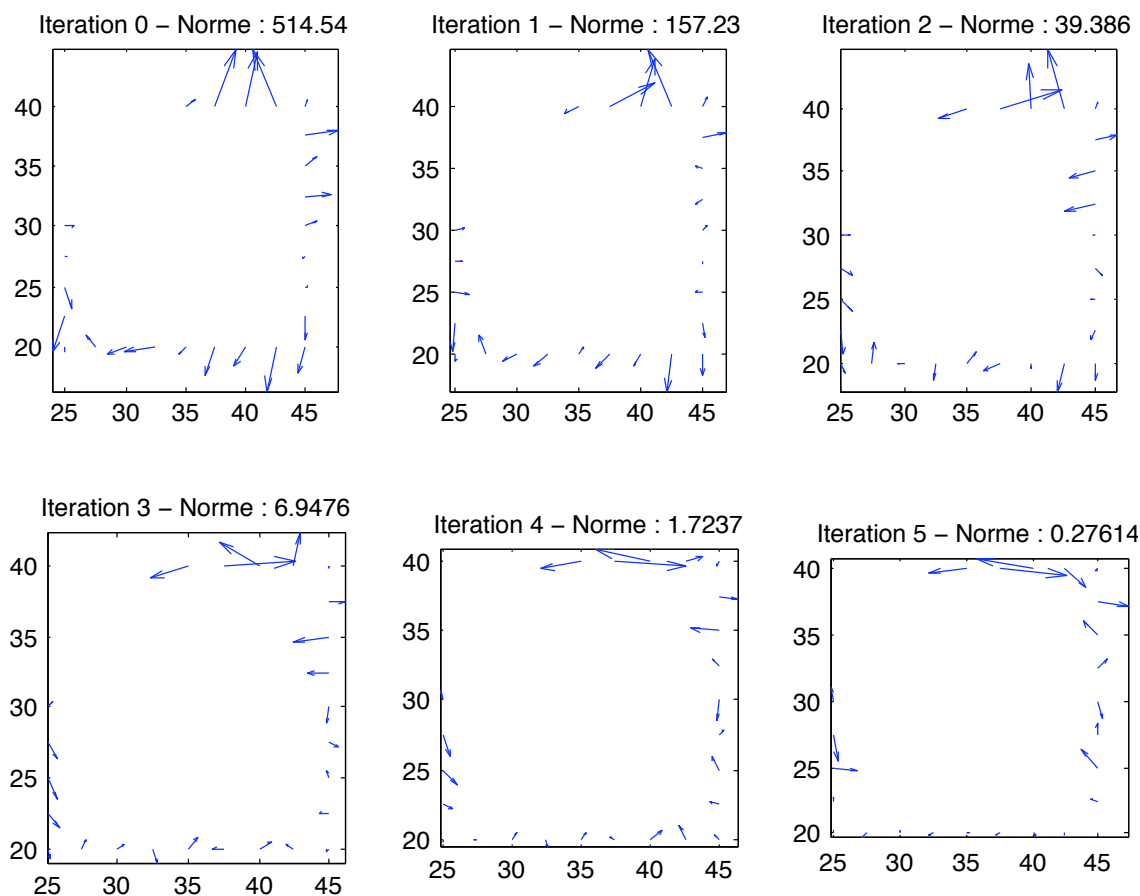


Figure 3.8: Tracés des six premiers résidus, avec accélération SR1

3 Accélération par condensation du problème tangent

Une autre approche envisageable pour accélérer la convergence, visant à atteindre des performances encore supérieures à celles qu'offre l'accélération quasi-Newton, est de construire une rigidité globale « tangente », de sorte que la correction globale soit l'étape linéaire d'une *méthode de Newton* (et non de Newton modifiée comme c'est le cas sans accélération, ou de quasi-Newton comme précédemment). Nous allons voir que ceci revient à *condenser le problème local tangent sur l'interface* ; nous verrons ensuite comment ceci peut être réalisé de façon non-intrusive, quels en sont les coûts et quels enseignements on peut en tirer.

3.1 La méthode de Newton sur le problème d'interface

3.1.1 Principe

Rappelons tout d'abord le principe de l'algorithme « en déplacement », en faisant apparaître les deux étapes de la méthode de Newton modifiée :

1. **Etape locale** : on calcule $\lambda^L = \mathbf{h}^L(\mathbf{u}^L)$ sous la condition $\mathbf{u}^L = \mathbf{u}^G$ (analyse locale), puis le résidu $\mathbf{r} = -(\lambda^L + \lambda_C^G)$ où $\lambda_C^G = \mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^G - \mathbf{b}_C^G$.
2. **Etape linéaire** : on résout $\mathbf{S}^G \Delta \mathbf{u}^G = \mathbf{r}$ et on pose $\mathbf{u}^G \leftarrow \mathbf{u}^G + \Delta \mathbf{u}^G$.

où l'on rappelle qu'il s'agit de quantités *d'interface*. L'opérateur \mathbf{S}^G (*ie.* la matrice du complément de Schur global) n'étant jamais mis à jour, il s'agit d'une méthode de Newton modifiée.

Pour obtenir une méthode de Newton, il faudrait effectuer la correction globale à l'aide de l'*opérateur tangent* (ou la matrice tangente) d'interface $\hat{\mathbf{S}}$, défini comme la dérivée totale de la fonction que l'on cherche à annuler (ici $\lambda^L + \lambda_C^G$) par rapport à l'inconnue principale, à savoir \mathbf{u}^G :

$$\hat{\mathbf{S}} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{d(\lambda^L + \lambda_C^G)}{d\mathbf{u}^G} \quad (3.21)$$

sous la contrainte d'admissibilité des solutions locale et globale, et sous la condition $\mathbf{u}^L = \mathbf{u}^G$; la notation « chapeau » ^ désigne une quantité *tangente*.

3.1.2 Calcul de l'opérateur tangent d'interface

Compte tenu des trois contraintes évoquées ci-dessus, il vient :

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{d\lambda^L}{d\mathbf{u}^L} \frac{d\mathbf{u}^L}{d\mathbf{u}^G} + \frac{d\lambda_C^G}{d\mathbf{u}^G} \quad (3.22)$$

La condition $\mathbf{u}^L = \mathbf{u}^G$ donne de manière triviale :

$$\frac{d\mathbf{u}^L}{d\mathbf{u}^G} = \mathbf{I} \quad (3.23)$$

ie. la matrice identité sur les champs nodaux d'interface. L'admissibilité globale $\lambda_C^G = \mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^G - \mathbf{b}_C^G$ donne quant à elle :

$$\frac{d\lambda_C^G}{d\mathbf{u}^G} = \mathbf{S}_C^G \quad (3.24)$$

Reste à calculer la troisième dérivée, correspondant au problème local d'interface tangent. Pour ce faire, rappelons la forme « par blocs » des équations d'équilibre

locales, introduite au chapitre précédent ; **dans ce qui suit, nous ne considérons plus seulement des quantités d'interface, et ces dernières sont donc indicées Γ .**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_\Gamma^L(\mathbf{u}_\Gamma^L, \mathbf{u}_I^L) \\ \mathbf{g}_I^L(\mathbf{u}_\Gamma^L, \mathbf{u}_I^L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\Gamma^L \\ \mathbf{f}_I^L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_\Gamma^L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

La première ligne de ce système, traduisant l'équilibre des degrés de liberté d'interface, donne :

$$\frac{d\lambda_\Gamma^L}{d\mathbf{u}_\Gamma^L} = \frac{\partial \mathbf{g}_\Gamma^L}{\partial \mathbf{u}_\Gamma^L} + \frac{\partial \mathbf{g}_\Gamma^L}{\partial \mathbf{u}_I^L} \frac{\partial \mathbf{u}_I^L}{\partial \mathbf{u}_\Gamma^L} \quad (3.26)$$

Notons $\hat{\mathbf{K}}^L$ la *matrice de rigidité tangente*, prise en fin d'incrément, du problème local et introduisons sa décomposition par blocs selon le formalisme usuel :

$$\hat{\mathbf{K}}^L = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma}^L & \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma I}^L \\ \hat{\mathbf{K}}_{I\Gamma}^L & \hat{\mathbf{K}}_{II}^L \end{bmatrix}$$

La relation (3.26) se réécrit alors :

$$\frac{d\lambda_\Gamma^L}{d\mathbf{u}_\Gamma^L} = \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma}^L + \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma I}^L \frac{\partial \mathbf{u}_I^L}{\partial \mathbf{u}_\Gamma^L} \quad (3.27)$$

Pour calculer la dérivée restante, on utilise la deuxième ligne de (3.25), traduisant l'équilibre des degrés de liberté intérieurs. Il vient de même :

$$\frac{\partial \mathbf{g}_I^L}{\partial \mathbf{u}_\Gamma^L} + \frac{\partial \mathbf{g}_I^L}{\partial \mathbf{u}_I^L} \frac{\partial \mathbf{u}_I^L}{\partial \mathbf{u}_\Gamma^L} = 0$$

ce qui se réécrit encore :

$$\hat{\mathbf{K}}_{I\Gamma}^L + \hat{\mathbf{K}}_{II}^L \frac{\partial \mathbf{u}_I^L}{\partial \mathbf{u}_\Gamma^L} = 0$$

Sous réserve que le module tangent consistant de la relation de comportement élasto-plastique ne s'annule pas (nous admettons ici que c'est le cas), $\hat{\mathbf{K}}_{II}^L$ est inversible et on a alors :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_I^L}{\partial \mathbf{u}_\Gamma^L} = - \left[\hat{\mathbf{K}}_{II}^L \right]^{-1} \hat{\mathbf{K}}_{I\Gamma}^L$$

d'où finalement, en remplaçant dans (3.27) :

$$\frac{d\lambda_\Gamma^L}{d\mathbf{u}_\Gamma^L} = \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma}^L - \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma I}^L \left[\hat{\mathbf{K}}_{II}^L \right]^{-1} \hat{\mathbf{K}}_{I\Gamma}^L \quad (3.28)$$

On a donc montré que la dérivée des efforts d'interface par rapport aux déplacements d'interface, pour une solution locale admissible, est le *complément de Schur tangent* $\hat{\mathbf{S}}^L = \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma}^L - \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma I}^L \left[\hat{\mathbf{K}}_{II}^L \right]^{-1} \hat{\mathbf{K}}_{I\Gamma}^L$ du problème local.

Nous revenons maintenant à la notation « allégée » utilisée dans ce chapitre : toutes les quantités sont de nouveau des quantités d'interface

et l'indice Γ est de nouveau omis. Finalement, en introduisant (3.23), (3.24) et (3.28) dans (3.22), on obtient l'expression de l'opérateur tangent d'interface :

$$\boxed{\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}_C^G + \hat{\mathbf{S}}^L} \quad (3.29)$$

ce qui n'est rien d'autre que *l'opérateur tangent du problème de référence condensé*.

3.1.3 Mise en œuvre non-intrusive

En pratique, on ne souhaite pas modifier directement les termes de la matrice de rigidité. L'idée est donc d'écrire $\hat{\mathbf{S}}$ sous la forme :

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^G + \Delta\hat{\mathbf{S}} \quad (3.30)$$

où l'on a posé

$$\Delta\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}^L - \mathbf{S}_I^G \quad (3.31)$$

ie. $\Delta\hat{\mathbf{S}}$ est la différence entre les deux représentations de la rigidité tangente de la zone d'intérêt (celle du modèle local moins celle du modèle global). On écrit alors, pour un résidu \mathbf{r} donné :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{r} &= \left[\mathbf{S}^G + \Delta\hat{\mathbf{S}} \right]^{-1} \mathbf{r} \\ &= \left[\mathbf{S}^G \left(\mathbf{I} + \mathbf{S}^{G^{-1}} \Delta\hat{\mathbf{S}} \right) \right]^{-1} \mathbf{r} \\ &= \left[\mathbf{I} + \mathbf{S}^{G^{-1}} \Delta\hat{\mathbf{S}} \right]^{-1} \mathbf{S}^{G^{-1}} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Autrement dit, la solution du problème correctif « accéléré », $\hat{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{r}$, s'obtient encore une fois en post-traitant numériquement la solution obtenue sans accélération, $\mathbf{S}^{G^{-1}}\mathbf{r}$. Cependant, ce post-traitement nécessite de calculer explicitement la matrice $\mathbf{S}^{G^{-1}}\Delta\hat{\mathbf{S}}$; la matrice $\Delta\hat{\mathbf{S}}$ étant généralement de rang plein ou presque, l'étape la plus coûteuse de cette opération est le calcul de $\mathbf{S}^{G^{-1}}$ — qui n'est rien d'autre que le complément de Schur dual du modèle global.

Concrètement, cela demande de résoudre un système global ayant *autant de seconds membres qu'il y a de degrés de liberté d'interface*, ce qui peut s'avérer très coûteux, notamment en mémoire. Cependant, ces seconds membres peuvent être analysés *simultanément*; de plus, une fois ce calcul effectué, le calcul des termes non corrigés $\mathbf{S}^{G^{-1}}\mathbf{r}$ ne demande plus aucun appel au modèle global, puisque la réponse de celui-ci (en termes de quantités d'interface) est entièrement connue. En pratique, le coût de calcul du complément de Schur peut néanmoins s'avérer rédhibitoire sur de gros problèmes.

3.2 Illustration

Afin d'estimer le rapport coût/efficacité d'une telle approche, reprenons le problème 2D introduit au début du chapitre. La Figure 3.9 représente l'évolution de l'erreur en déplacement d'interface au fil des itérations ; la Figure 3.10 montre de même l'évolution de l'erreur en déformation plastique cumulée. On constate que la convergence est légèrement plus rapide qu'avec l'accélération SR1 : le seuil de 0,1% précédemment envisagé est maintenant atteint après 2 itérations. On gagne donc *grosso modo* une itération supplémentaire par rapport à SR1.

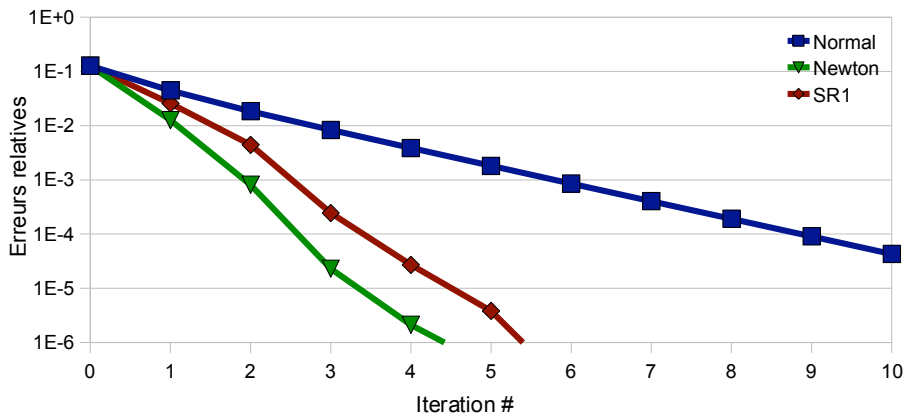


Figure 3.9: Convergence des déplacements d'interface, avec les trois types de correction globale.

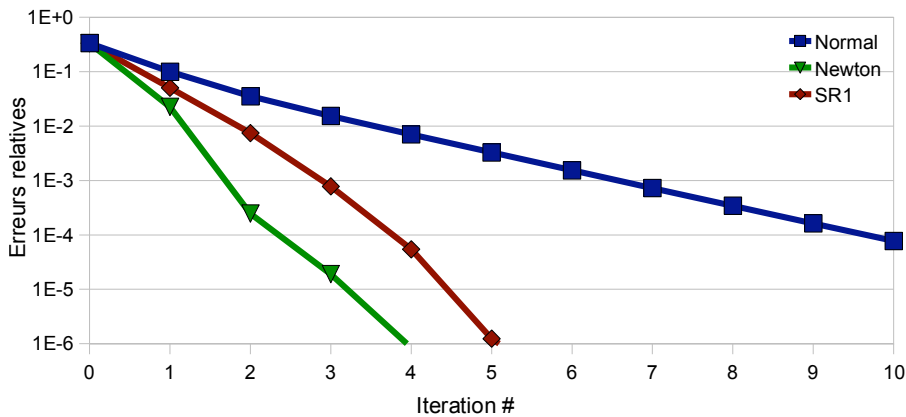


Figure 3.10: Convergence des déformations plastiques cumulées avec les trois types de correction globale.

Cependant, le prix à payer est conséquent puisqu'il faut calculer explicitement le complément de Schur primal tangent du problème local (à chaque itération), et le complément de Schur dual du problème global (une fois pour toutes) ; le coût de ces calculs est à peu près proportionnel à la dimension de l'interface et si celle-ci est

trop étendue, l'opération peut s'avérer beaucoup trop coûteuse. En pratique, sur de grands problèmes 3D, cette approche est souvent inutilisable comme nous le verrons au Chapitre 6.

Notons en outre que la convergence de l'approche, bien que plus rapide que celle de SR1, ne semble pas être quadratique, comme elle devrait l'être pour une méthode de Newton. En effet, le nombre de décimales exactes serait alors doublé à chaque itération à partir d'un certain stade, ce qui n'est manifestement pas le cas ici. Une explication plausible est le fait qu'Abaqus stocke les résultats des calculs en *simple précision*, ce qui correspond à une erreur relative d'arrondi d'environ 10^{-7} ; cette valeur n'est pas du tout négligeable par rapport à l'erreur en solution obtenue au bou de trois ou quatre itérations, ce qui pénalise probablement le taux de convergence apparent.

Enfin, la Figure 3.11 représente comme précédemment les six premiers résidus normés obtenus avec cette approche. On constate que ces résidus ne sont plus du tout colinéaires, ce qui confirme l'efficacité de cette technique de correction globale : les problèmes successifs résolus sont très différents.

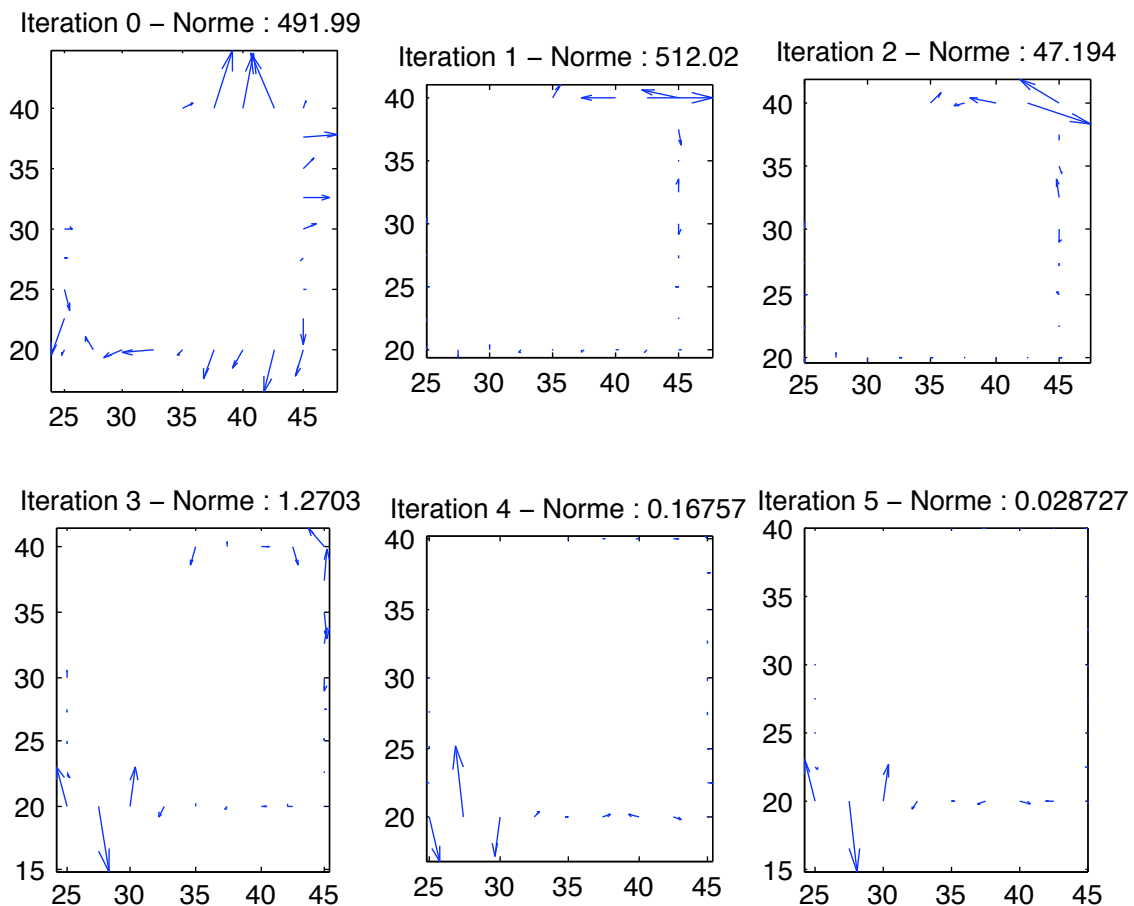


Figure 3.11: Tracés des six premiers résidus, avec l'accélération « tangente »

3.3 Approximations de la rigidité tangente

Afin de tenter de conserver l'efficacité de l'accélération « tangente » sans devoir supporter les coûts du calcul complet des deux compléments de Schur, des approximations de la rigidité tangente ont été testées. Plus précisément, il s'agit de corriger la rigidité globale non pas avec le $\Delta\hat{\mathbf{S}}$ exact que nous venons de considérer, mais avec une *approximation de faible rang* de ce terme :

$$\Delta\hat{\mathbf{S}} \approx \mathbf{P}\mathbf{Q}^T \quad (3.33)$$

La mise à jour de la rigidité s'effectue alors à l'aide de la formule de Woodbury (3.5), multipliée à droite par le résidu \mathbf{r} :

$$[\mathbf{S}^G + \mathbf{P}\mathbf{Q}^T]^{-1} \mathbf{r} = \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{r} - \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{P} \left[\mathbf{I}_r + \mathbf{Q}^T \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{P} \right]^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{r} \quad (3.34)$$

Toute la difficulté consiste à construire une approximation de faible rang de $\Delta\hat{\mathbf{S}}$, contenant suffisamment d'informations pour conserver l'efficacité de l'accélération « tangente ». Plusieurs pistes ont été explorées ; nous les détaillons dans ce qui suit.

3.3.1 Approches utilisant une base réduite

Une première familles d'approches consiste à approcher le terme correctif par sa projection $\mathbf{\Pi}\Delta\hat{\mathbf{S}}\mathbf{\Pi}^T$ sur un espace de dimension réduite, où $\mathbf{\Pi}$ est un projecteur associé à l'espace « réduit » considéré ; le rang de la projection est alors au plus égal à la dimension de l'espace. Selon ce formalisme, $\mathbf{\Pi}$ projette des efforts d'interface dans un espace réduit, tandis que $\mathbf{\Pi}^T$ projette quant à lui des déplacements d'interface ; un choix simple consiste à prendre le même espace réduit pour les deux quantités, mais ce n'est nullement obligatoire. Deux définitions possibles ont été considérées.

■ Déplacements et efforts « macro » d'interface

Une première définition s'inspire de l'approche LaTIn micro/macro [Ladevèze et Dureisseix, 2000] et consiste à définir des champs « macroscopiques » réguliers, tels que des champs affines en espace. La construction d'une base orthonormale de cet espace est relativement aisée et le projecteur orthogonal associé s'en déduit immédiatement : si \mathbf{E} est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base, alors $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^T = \mathbf{E}\mathbf{E}^T$.

Le calcul du complément de Schur global est ainsi remplacé par le calcul du terme $\mathbf{E}^T \mathbf{S}^{G-1} \mathbf{E}$; il s'agit d'analyser quelques seconds membres simultanés ce qui, en pratique, ne pose aucun problème, même sur des exemple 3D complexes. Cependant, nous avons constaté que *ce choix ne permet pas d'accélérer la convergence de manière significative* ; l'information contenue dans la base « macro » est insuffisante, et les performances sont très proches de celles de l'approche non accélérée.

Signalons que cette idée sera reprise au chapitre suivant, afin de construire des approximations « longue distance » des compléments de Schur ; nous verrons toutefois que ces approximations ne donnent de résultats satisfaisants que lorsqu'elles

sont associées à des approximations « courte distance », et cette approche n'est pas utilisable dans le cas présent car elle ne conduit pas à des matrices de faible rang.

■ Espace engendré par les résidus et termes correctifs successifs

Une deuxième approche consiste à projeter respectivement les efforts et les déplacements sur les espaces engendrés par les résidus successifs \mathbf{r}_k , et par les déplacements correctifs successifs $\Delta\mathbf{u}_k$. La taille de la base réduite est ainsi égale au nombre d'itérations effectuées, et aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire pour appliquer la formule de Woodbury ; une fois la correction globale « normale » effectuée (*ie.* le calcul de $\mathbf{S}^{G^{-1}}\mathbf{r}$), la matrice $\mathbf{S}^{G^{-1}}\mathbf{P}$ est automatiquement actualisée.

En pratique, ce choix n'offre pas non plus de performances intéressantes : la convergence est au mieux aussi rapide que celle de SR1, alors que cette approche demande davantage de calculs au niveau local. Une explication vraisemblable est que, tant pour la méthode SR1 que pour cette approche, la mise à jour de la rigidité ne s'effectue que dans la *direction des résidus déjà analysés*, et ne peut donc réduire que les composantes de l'erreur engendrées par les termes correctifs correspondants. Au contraire, l'accélération tangente agit dans *toutes les directions* et affecte donc toutes les composantes de l'erreur.

3.3.2 Approches spectrales

Afin de mieux interpréter ces résultats et de soulever des idées d'approximations pertinentes, nous avons également envisagé des *approches spectrales*, consistant à approximer $\Delta\hat{\mathbf{S}}$ en ne gardant qu'une partie de son spectre.

Pour ce faire, dans un premier temps, nous avons formé explicitement la matrice $\Delta\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}^L - \mathbf{S}_f^G$ sur le cas-test 2D, à la première itération, et calculé son spectre ; nous avons ensuite construit des *matrices tronquées* en retenant les contributions :

- soit des n plus grandes valeurs propres (approche « par le haut du spectre ») ;
- soit des n plus petites valeurs propres (approche « par le bas du spectre ») ;

en faisant varier n de 0 au nombre de degrés de liberté de l'interface (ici 50). Nous avons ensuite testé chacune de ces matrices tronquées en effectuant une correction globale « tangente » (3.32) à partir de la première itération ; pour chacune d'entre elles, nous avons mesuré l'erreur sur le déplacement d'interface obtenue après correction globale $\|\mathbf{u}^G + \Delta\mathbf{u}^G - \mathbf{u}^R\|$ et, connaissant l'erreur initiale $\|\mathbf{u}^G - \mathbf{u}^R\|$, nous avons calculé le *taux de convergence* correspondant :

$$\phi = \frac{\|\mathbf{u}^G + \Delta\mathbf{u}^G - \mathbf{u}^R\|}{\|\mathbf{u}^G - \mathbf{u}^R\|}$$

qui donne une mesure de l'efficacité du terme correctif tronqué. La Figure 3.12 représente l'évolution de ce rapport en fonction du nombre de valeurs propres retenues, par le « haut » et par le « bas » du spectre.

La valeur d'environ 0,43 obtenue pour $n = 0$ est celle de la correction globale sans accélération ; celle d'environ 0,2 obtenue pour $n = 50$ est celle de la correction globale

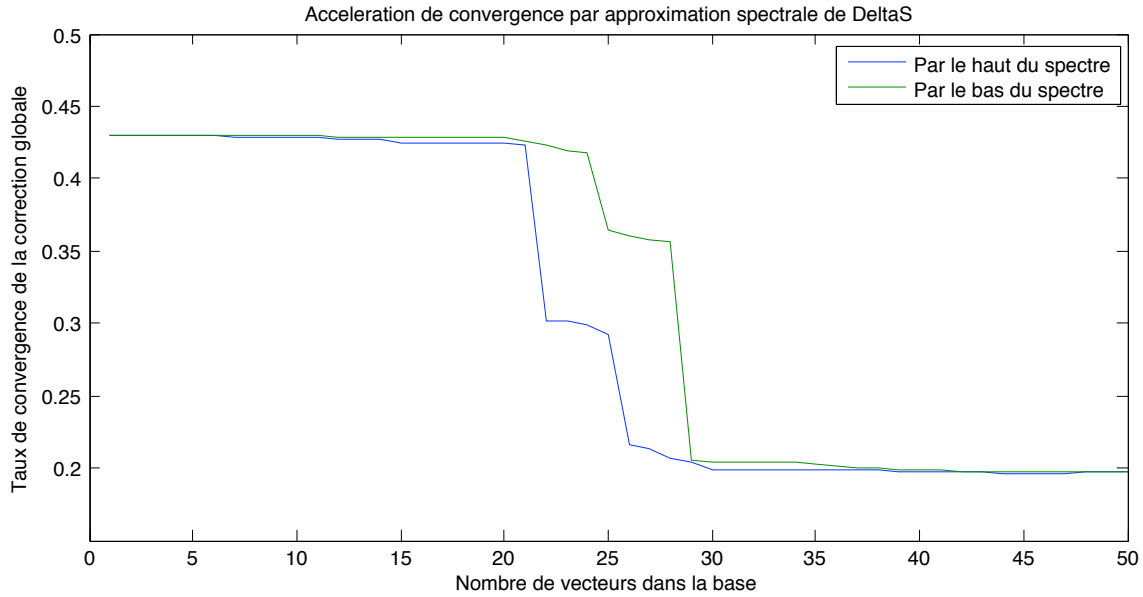


Figure 3.12: Taux de convergence de la correction globale tangente « tronquée ».

« tangente » complète. On constate qu'en conservant moins de 20 valeurs propres, l'accélération est quasi nulle, que l'on retienne le « haut » ou le « bas » du spectre ; de même, en conservant plus de 30 valeurs, l'accélération est presque maximale dans les deux cas. Autrement dit, ces approximations ne peuvent suffire à accélérer efficacement la convergence en pratique, puisqu'il faut conserver près de la moitié du spectre avant d'obtenir un gain significatif. Ceci explique pourquoi l'approche « macro » envisagée précédemment n'est pas efficace : elle revient à ne conserver que le « bas » du spectre et ne contient donc pas une suffisamment d'informations pour accélérer la convergence.

Ce résultat suggère ainsi que pour approcher algébriquement un complément de Schur de manière pertinente, il ne suffit pas de se limiter à la partie supérieure ou inférieure de son spectre, mais il est nécessaire de tenir compte des deux parties. Nous verrons au chapitre suivant une application de cette idée dans le cas du raccord mixte.

4 Bilan

Au cours de ce chapitre, nous avons vu que l'approche en déplacement peut présenter des performances intéressantes, moyennant le choix d'une technique d'accélération adaptée pour l'étape de correction globale. Pour ce faire, deux approches ont été étudiées.

D'une part, les *méthodes quasi-Newton* offrent un moyen simple et très peu coûteux d'accélérer la convergence ; elles peuvent aisément être écrites dans le cadre de notre problème et offrent une accélération remarquable. Pour des raisons de sim-

plicité et de performance de l'approche, notre choix s'est porté sur la formule SR1 ; signalons toutefois que d'autres formules, comme la très populaire BFGS, auraient été parfaitement applicables ici.

D'autre part, nous avons cherché à améliorer ces résultats en construisant un opérateur de *rigidité global « tangent »*, afin de nous rapprocher de l'efficacité d'une méthode de Newton. Le calcul exact et l'utilisation non-intrusive de cet opérateur étant beaucoup trop coûteux en pratique, des *approximations de faible rang* du problème tangent ont été testées ; celles-ci ne se sont toutefois pas révélées meilleures que l'approche SR1. Il semble en effet difficile de représenter la rigidité d'un sous-domaine par une information de faible rang — à moins de se baser sur les *chargements* étudiés, ce qui est précisément le principe des méthodes quasi-Newton.

Afin d'améliorer encore les performances de l'approche, l'autre piste possible consiste à abandonner le raccord en déplacement et à se tourner vers des raccords mixtes, permettant de simuler l'influence de la zone complémentaire sur la zone d'intérêt de manière physiquement plus réaliste. La formulation et l'étude de ces raccords font l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Raccord mixte

Ce chapitre est consacré à la variante de la stratégie avec condition aux limites mixte, introduite au Chapitre 2. On montre qu'il existe une condition aux limites optimale ; des approximations réalistes et performantes de cet optimum sont alors formulées. Enfin, une correction globale mixte, et son association avec une technique d'accélération, sont présentées.

Sommaire

1	Objectifs	115
1.1	Pourquoi un raccord mixte ?	115
1.2	Ecriture du raccord	116
1.3	Cas d'optimalité	117
2	Approximations du complément de Schur	118
2.1	Approximations « courte distance »	118
2.2	Approximations par homogénéisation discrète	121
2.3	Approximations multi-échelles	127
3	Correction globale mixte	134
3.1	Ecriture de la correction globale	134
3.2	Mise en œuvre sans accélération	136
3.3	Mise en œuvre avec accélération SR1	138
4	Perspectives d'amélioration	141



Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la variante « en déplacement » de l'approche, employant une condition aux limites en déplacement lors de l'étape locale. Nous avons montré que cette approche peut s'avérer performante lorsqu'elle est associée à une technique d'accélération ; cependant, il est difficile d'accélérer la convergence au-delà d'un certain stade, car les coûts de l'accélération deviennent alors prohibitifs tandis que la vitesse de convergence n'augmente que peu.

Nous allons voir, dans ce chapitre, que l'emploi d'une condition aux limites mixte offre une réponse satisfaisante à cette problématique, et permet d'obtenir une convergence plus rapide moyennant un surcoût modéré. Nous exposons tout d'abord l'intérêt d'un tel raccord et montrons qu'il existe une condition aux limites optimale, menant à la convergence en une seule itération ; nous proposons ensuite des techniques permettant d'approcher cet optimum de manière réaliste, et nous étudions enfin l'association du raccord mixte avec une technique d'accélération.

1 Objectifs

1.1 Pourquoi un raccord mixte ?

Le raccord en déplacement est très utilisé dans le cadre des éléments finis en raison de la continuité du champ de déplacements obtenu et de sa simplicité de mise en œuvre, mais possède toutefois plusieurs inconvénients. Tout d'abord, il ne simule pas l'influence du reste de la structure sur la zone d'intérêt de manière physiquement réaliste ; imposer le déplacement global revient en effet à supposer que le reste de la structure a une rigidité infinie, et il est vraisemblablement possible de construire des conditions aux limites plus appropriées en exploitant également l'information contenue dans les efforts. Ensuite, les déplacements d'interface (tout comme, d'ailleurs, les efforts) sont naturellement sensibles aux erreurs de modèle et aux phénomènes de redistribution, comme le montrent les valeurs initiales élevées de l'erreur en déplacement obtenues au chapitre précédent ; l'analyse locale est donc pilotée par une condition aux limites dont la valeur est imprécise, ce qui pénalise naturellement la convergence de la méthode. Enfin, des études menées dans le cadre du flambage local [Cresta, 2008] ont montré que ce type de raccord peut entraîner des difficultés de convergence du calcul local, et nous verrons au Chapitre 6 que même dans le cas de la plasticité, ce problème peut se manifester.

Cette problématique a été largement étudiée dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine ; il en ressort que l'emploi d'un raccord *mixte*, et plus particulièrement d'un raccord basé sur une condition de Robin (c'est-à-dire n'imposant ni la continuité des déplacements, ni l'équilibre des efforts, mais une combinaison linéaire des deux) permet d'éviter les inconvénients évoqués ci-dessus. Une condition de Robin permet en effet de simuler la rigidité du reste de la structure, et on peut montrer que moyennant un choix judicieux de ses paramètres, elle donne de bons résultats même lorsque les deux représentations de la zone d'intérêt sont très différentes ; elle mène ainsi à des performances supérieures à celles que donnerait un

raccord en déplacement ou en effort seul. Nous nous proposons d'étudier de telles conditions aux limites dans ce chapitre.

1.2 Ecriture du raccord

1.2.1 Rappels et notations

Rappelons l'écriture de la formulation globale/locale, sous sa forme discrétisée et condensée sur l'interface : trouver $(\mathbf{u}^G, \lambda_C^G, \mathbf{u}^L, \lambda^L)$ vérifiant

- l'admissibilité (non-linéaire) de la solution locale dans la zone d'intérêt :

$$\mathbf{h}^L(\mathbf{u}^L) = \lambda^L \quad (4.1)$$

- l'admissibilité (linéaire) de la solution globale dans la zone complémentaire :

$$\mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^G = \mathbf{b}_C^G + \lambda_C^G \quad (4.2)$$

- la continuité des déplacements d'interface :

$$\mathbf{u}^G = \mathbf{u}^L \quad (4.3)$$

- l'équilibre des efforts d'interface :

$$\lambda_C^G + \lambda^L = 0 \quad (4.4)$$

Rappelons également que cette formulation est équivalente au *problème de référence condensé*, qui s'écrit de la façon suivante : trouver \mathbf{u}^R tel que

$$\mathbf{h}^L(\mathbf{u}^R) + \mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^R = \mathbf{b}_C^G \quad (4.5)$$

Pour lever toute ambiguïté, précisons que comme dans le chapitre précédent, **toutes les quantités de ce chapitre sont des quantités d'interface, mais que l'indice Γ est omis afin d'alléger les notations.**

1.2.2 Le raccord mixte

Le raccord mixte consiste à résoudre le problème local (c'est-à-dire à trouver $(\mathbf{u}^L, \lambda^L)$ vérifiant (4.1)), non pas sous l'une des deux conditions aux limites (4.3) ou (4.4) — mais, comme nous l'avons expliqué précédemment, sous une *combinaison linéaire des deux* (condition de Robin) prenant la forme suivante :

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^G) + (\lambda_C^G + \lambda^L) = 0} \quad (4.6)$$

où la matrice carrée \mathbf{A} , dont les termes ont la dimension d'une raideur, est un paramètre de la méthode.

Physiquement, cette condition revient à n'imposer ni la continuité des déplacements, ni l'équilibre des efforts (il s'agit donc bien d'une condition mixte), mais à

imposer que le déséquilibre des efforts soit une certaine fonction linéaire du saut de déplacement. \mathbf{A} représente donc une *rigidité d'interface*, qui va permettre de simuler l'influence de la zone complémentaire de manière plus réaliste que les conditions (4.3) ou (4.4) seules. En pratique, \mathbf{A} est généralement symétrique et positive (mais pas forcément inversible).

En exprimant λ^L à l'aide de (4.6) et en le remplaçant dans (4.1), on reformule alors le problème local de la manière suivante : trouver \mathbf{u}^L tels que

$$\boxed{\mathbf{h}^L(\mathbf{u}^L) + \mathbf{A}\mathbf{u}^L = \mathbf{A}\mathbf{u}^G - \lambda_C^G} \quad (4.7)$$

Le raccord mixte se traduit donc, comme nous l'avons vu au Chapitre 2, par une rigidité d'interface ajoutée \mathbf{A} et un second membre d'interface ajouté $\mathbf{A}\mathbf{u}^G - \lambda_C^G$.

1.3 Cas d'optimalité

L'équation ci-dessus montre qu'il existe un choix optimal évident pour \mathbf{A} : il s'agit de \mathbf{S}_C^G , le **complément de Schur de la zone complémentaire**. En effet, (4.7) se réécrit alors :

$$\mathbf{h}^L(\mathbf{u}^L) + \mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^L = \mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^G - \lambda_C^G$$

De plus, au début de l'analyse locale, la solution globale vérifie toujours l'admissibilité dans la zone complémentaire (4.2). Cela permet de remplacer $\mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^G - \lambda_C^G$ dans la relation ci-dessus, et il vient donc :

$$\mathbf{h}^L(\mathbf{u}^L) + \mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^L = \mathbf{b}_C^G$$

ce qui n'est rien d'autre que l'équation du problème de référence condensé (4.5). On a donc montré qu'**en choisissant $\mathbf{A} = \mathbf{S}_C^G$, la solution du problème local mixte est toujours égale à la solution de référence**, quelle que soit la valeur de la solution globale $(\mathbf{u}^G, \lambda_C^G)$ pilotant l'analyse locale — du moment que cette solution globale vérifie (4.2), ce qui est toujours vrai dans le cadre de notre méthode.

Ce résultat, bien connu dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine, est d'une importance fondamentale pour notre problème. Il signifie en effet que, si l'on savait calculer \mathbf{S}_C^G exactement, on disposerait d'une technique de réanalyse locale :

- *exacte* (la solution locale vérifie l'équation exacte du problème de référence),
- *directe* (ceci est vrai au bout d'une seule analyse locale, et aucune correction globale n'est nécessaire¹),
- et *insensible à la position de la frontière*, contrairement au raccord en déplacement.

Malheureusement, dans les faits, le calcul de \mathbf{S}_C^G est généralement inabordable sur de grands problèmes 3D. Pour cette raison, nous n'utiliserons en pratique que

1. Sauf si l'on souhaite connaître également la solution exacte dans la zone complémentaire, auquel cas une relocalisation linéaire classique doit être effectuée.

des *approximations* du complément de Schur ; ces approximations ne possèdent pas les propriétés ci-dessus (en particulier, elles ne donnent pas une solution exacte dès la première itération), mais nous verrons qu'il est possible de construire des approximations peu coûteuses à calculer, tout en étant suffisamment riches pour permettre une convergence rapide. Ceci fait l'objet de la section suivante.

2 Approximations du complément de Schur

L'approximation du complément de Schur (ou, de manière générale, de la rigidité) d'un sous-domaine est un problème classique, pour lequel de nombreuses méthodes existent. Citons par exemple :

- des approximations à « *courte distance* », approchant le complément de Schur d'un sous-domaine par celui du voisinage immédiat de l'interface [Magoulès *et al.*, 2002; Maday et Magoulès, 2006] ;
- des techniques d'*homogénéisation discrète*, approchant un complément de Schur en calculant la réponse du sous-domaine à un petit nombre de sollicitations élémentaires d'interface (« base macro ») ; cette technique est employée dans la stratégie LaTIn micro/macro [Ladevèze et Dureisseix, 2000] et dans certaines méthodes multi-niveaux [Ibrahimbegović et Markovič, 2003; Kouznetsova *et al.*, 2004].
- des approximations *analytiques*, formulées sur l'opérateur continu analogue au complément de Schur, c'est-à-dire l'opérateur de Steklov-Poincaré [Achdou et Nataf, 1994; Gander *et al.*, 2003] ; cela n'est généralement possible que sur des géométries simples.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons tout particulièrement aux deux premières méthodes. Nous allons voir que prises individuellement, ces deux familles d'approximations ne permettent pas de construire un raccord mixte performant ; en revanche, en les combinant de manière pertinente à l'aide du *principe de Saint-Venant*, on obtient un raccord mixte à la fois performant et peu coûteux à mettre en place.

2.1 Approximations « courte distance »

2.1.1 Quelques approximations classiques

Approximer un complément de Schur d'un sous-domaine en se basant sur le voisinage de l'interface est une méthodologie relativement répandue dans les méthodes de décomposition de domaine, notamment dans le but de construire des préconditionneurs. Une des approches les plus courantes [Magoulès *et al.*, 2002; Magoulès *et al.*, 2006] consiste à approcher le complément de Schur par celui d'une *bande d'éléments* d'épaisseur donnée, adjacente à l'interface ; à l'endroit où la bande a été « découpée », les nœuds sont encastrés.

D'autres approximations classiques constituent une forme simplifiée de celle-ci. Ainsi, l'approximation *lumped* consiste à ne conserver que le *bloc de la matrice de*

rigidité relatif aux termes d'interface ; le complément de Schur étant défini par une expression du type $\mathbf{S}_\Gamma = \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma} - \mathbf{K}_{\Gamma i} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{i\Gamma}$, cette approximation consiste à négliger le second terme. Physiquement, cela revient à encastrier tous les nœuds ne se trouvant pas sur l'interface ; dans le cas d'éléments linéaires, cette approximation est donc équivalente à la précédente lorsque l'on considère une couche dont l'épaisseur est d'un seul élément². Cette approximation est cependant plus simple à mettre en œuvre car le bloc peut être directement extrait de la matrice de rigidité : aucun remaillage ou réassemblage n'est nécessaire.

Enfin, un cas extrême est celui de l'approximation *super-lumped*, obtenue en prenant la diagonale du bloc précédent ; il s'agit d'une approximation physiquement peu réaliste du complément de Schur (l'effort de réaction en un nœud ne dépend que du déplacement de ce nœud), mais d'usage très peu coûteux.

2.1.2 Illustration

Ces trois techniques sont illustrées sur le cas-test 2D introduit au chapitre précédent. Les maillages sont reproduits sur la Figure 4.1. Pour l'approximation par bandes, on considère des couches respectives de 1, 2 et 4 éléments d'épaisseur, adjacentes à l'interface et situées dans la zone complémentaire. La bande de 4 éléments est également délimitée sur la Figure 4.1. Le chargement et les conditions aux limites sont les mêmes que précédemment.

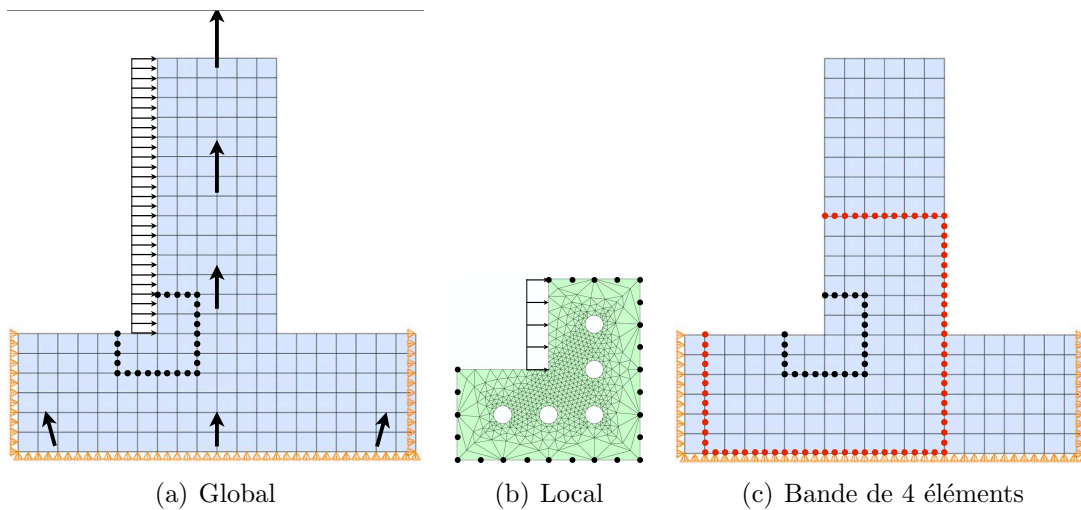


Figure 4.1: Le cas-test 2D.

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, un raccord employant la valeur exacte du complément de Schur \mathbf{S}_C^G permet théoriquement d'obtenir une solution locale exacte, quelle que soit l'erreur sur la solution globale. Afin d'évaluer les

2. Dans le cas d'éléments quadratiques, l'approximation *lumped* est équivalente à une couche d'un élément d'épaisseur sur laquelle on aurait, de plus, encastéré les *nœuds milieu* ne se trouvant ni sur l'interface, ni sur la surface de « découpage »

<i>Approximation</i>	$\eta_{\mathbf{u}}$
Exact	0
Bande 4 éléments	0,122
Bande 2 éléments	0,133
Bande 1 élément	0,140
Lumped	0,147
Super-lumped	0,148
Raccord en déplacement	0,153

Table 4.1: Erreur en déplacement d'interface pour quelques approximations « courte distance » de \mathbf{S}_C^G

différentes approximations, nous calculons donc l'erreur relative sur le déplacement local d'interface, définie par :

$$\eta_{\mathbf{u}} = \frac{\|\mathbf{u}_{\Gamma}^L - \mathbf{u}_{\Gamma}^R\|}{\|\mathbf{u}_{\Gamma}^R\|}$$

Les résultats sont regroupés dans le Tableau 4.1. On constate que ces approximations ne suffisent globalement pas à donner une bonne représentation de l'influence de la zone complémentaire, puisque la meilleure d'entre elles (basée sur la bande de 4 éléments) diminue l'erreur en déplacement d'environ 20% seulement par rapport au raccord en déplacement, alors que le maillage correspondant recouvre la majeure partie de la structure comme le montre la Figure 4.1. Quant aux approximations purement algébriques (*lumped* et *super-lumped*), elles ne permettent de réduire l'erreur que de 3 à 4%. L'amélioration de la solution, en termes de déplacements d'interface, semble donc assez limitée.

Cependant, ces approximations à « courte distance » sont connues pour être *plus raides* que le véritable complément de Schur, et ce d'autant plus que la couche d'éléments employée est de faible épaisseur. Il est donc normal que le déplacement local soit relativement proche du déplacement global. Afin de comparer ces techniques selon un autre point de vue et de ne pas introduire de biais, nous considérons, comme au chapitre précédent, un second indicateur portant sur la déformation plastique équivalente maximale :

$$\eta_p = \frac{p_{\max}^L - p_{\max}^R}{p_{\max}^R}$$

Les résultats obtenus à la première analyse locale, à l'aide des différentes approximations ci-dessus, sont présentés dans le Tableau 4.2 ; la valeur obtenue avec le raccord en déplacement est également mentionnée pour comparaison. Là encore, on constate que l'approximation « courte distance » est loin d'offrir une précision acceptable dès la première itération, puisque les déformations plastiques sont sous-estimées de 20 à 30 % ; elle semble certes plus réaliste que le raccord en déplacement, mais le gain reste limité, et devient très faible dans le cas des approches purement algébriques.

<i>Approximation</i>	η_p
Exact	0
Bande 4 éléments	-0,177
Bande 2 éléments	-0,211
Bande 1 élément	-0,247
Lumped	-0,274
Super-lumped	-0,282
Raccord en déplacement	-0,313

Table 4.2: Erreur en déformation plastique pour quelques approximations « courte distance » de \mathbf{S}_C^G

Au final, ce type de raccord s'avère légèrement plus performant que le raccord en déplacement, mais ne suffit clairement pas à obtenir des résultats exploitables dès la première itération.

■ Remarque

Dans toute cette section, nous évaluons les différentes approximations du complément de Schur sur *une itération seulement*, c'est-à-dire à l'aide d'un mode opératoire purement descendant — alors que notre technique est itérative. Il y a deux raisons à ce choix.

Tout d'abord, alors que l'idée essentielle de l'approche en déplacement était de recoupler un « zoom descendant » classique à l'aide d'une correction globale, la philosophie de l'approche mixte est de construire une condition aux limites simulant au mieux l'effet d'une *condensation de la zone complémentaire*, tout en étant beaucoup moins coûteuse. En d'autres termes, il s'agit d'obtenir la meilleure solution locale possible « du premier coup », *dès la première analyse locale* ; la correction globale permet ensuite de réduire les erreurs induites par l'approximation du complément de Schur, mais ces dernières doivent être faibles, faute de quoi l'approche n'est pas plus intéressante qu'un raccord en déplacement classique (le calcul de l'approximation du complément de Schur a en effet un coût non négligeable!).

Ensuite, nous montrerons dans la section suivante que la correction globale peut être formulée de sorte à combiner les bénéfices du raccord mixte avec ceux qu'apporte une technique d'accélération de convergence. Par conséquent, pour optimiser les performances de l'approche, une démarche judicieuse consiste à choisir d'une part une condition aux limites pertinente (c'est l'objet de cette section) et d'autre part une technique d'accélération efficace (c'est l'objet du chapitre précédent).

2.2 Approximations par homogénéisation discrète

Une autre classe d'approximations du complément de Schur se base sur l'*homogénéisation discrète*, c'est-à-dire le calcul de la réponse du sous-domaine à un petit nombre de sollicitations d'interface « macro » élémentaires, permettant d'en

capturer le comportement « à grande échelle ». Ces techniques sont complémentaires aux techniques précédentes : elles permettent d’approcher la contribution globale du sous-domaine en travaillant sur un espace de dimension réduite, alors que les méthodes « courte distance » prennent en compte toutes les sollicitations possibles mais se limitent au voisinage de l’interface.

Ces techniques sont employées dans de nombreuses méthodes de décomposition de domaine, et notamment dans l’approche LaTIn micro/macro [Ladevèze et Dureisseix, 2000] ; la formulation présentée ici est librement inspirée de cette dernière, et adaptée au cas de quantités éléments finis d’interface portées par des maillages compatibles, dans un cadre non-intrusif.

2.2.1 Formulation primale ou duale ?

Une première question essentielle est la définition même du complément de Schur « macro » ; en effet, dans un cadre mixte, celui-ci peut être construit de deux façons. La première consiste à imposer un petit nombre de *déplacements d’interface* élémentaires sur la zone complémentaire ; cela conduit, afin de préserver la symétrie des opérateurs de rigidité, à la forme suivante :

$$\mathbf{S}^M = \mathbf{\Pi} \mathbf{S}_C^G \mathbf{\Pi}^T \quad (4.8)$$

où $\mathbf{\Pi}$ est un opérateur *projetant* les efforts nodaux d’interface sur un certain espace d’« efforts macro » ; afin d’obtenir un opérateur « macro » symétrique, son transposé $\mathbf{\Pi}^T$ doit donc projeter les déplacements d’interface sur un espace de « déplacements macro ». Ces projecteurs seront définis dans la section suivante ; en pratique, les deux espaces « macro » peuvent être identiques, mais ce n’est nullement une obligation. La seconde consiste à imposer des *efforts d’interface* sur la zone complémentaire et porte donc sur le complément de Schur *dual*, c’est-à-dire l’inverse du complément de Schur (primal) habituel : avec les notations ci-dessus, cela s’écrit :

$$[\mathbf{S}^M]^{-1} = \mathbf{\Pi}^T [\mathbf{S}_C^G]^{-1} \mathbf{\Pi} \quad (4.9)$$

Cette dernière façon de faire peut, a priori, sembler plus adaptée : dans le cadre de l’approche LaTIn micro/macro (voir par exemple [Guidault, 2005]), imposer un effort « macro » conduit généralement à des résultats de meilleure qualité que ceux obtenus en imposant un déplacement « macro ». Cependant, comme nous l’avons vu au Chapitre 2, **il est impossible d’imposer des efforts sur la zone complémentaire seule de manière non-intrusive** ; cela reviendrait en effet à la déconnecter de la zone d’intérêt de manière à supprimer l’interaction entre les deux zones, ce qui demande soit un découpage du maillage, soit des calculs extrêmement lourds. De plus, avec l’approche duale, des problèmes d’inversibilité et de traitement des mouvements rigides peuvent se poser si la zone complémentaire n’a pas assez de conditions aux limites ; enfin, le raccord mixte demande une approximation du complément de Schur *primal*, dont rien ne garantit qu’elle peut être déduite d’une approximation duale avec une bonne précision.

Pour ces raisons, nous nous limitons exclusivement dans ce chapitre à des approximations primales de la forme (4.8). Nous verrons en effet au Chapitre 5 qu'il est possible d'obtenir les efforts de réaction de la zone complémentaire à des déplacements imposés de manière non-intrusive.

2.2.2 Construction des projecteurs

Une deuxième question est la construction des espaces « macro » et des projecteurs associés. Dans le cadre de cette thèse, deux définitions ont été étudiées. La plus simple consiste à choisir, comme dans l'approche LaTIn micro/macro, un projecteur orthogonal prenant la forme suivante :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^T = \mathbf{E}\mathbf{E}^T \quad (4.10)$$

où les colonnes de la matrice rectangulaire \mathbf{E} forment une base de l'espace « macro » considéré, qui est alors le même pour les efforts et les déplacements. Pour que $\mathbf{\Pi}$ définisse bien une projection (c'est-à-dire pour que l'on ait $\mathbf{\Pi}^2 = \mathbf{\Pi}$), cette base doit être *orthonormale*, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$\mathbf{E}^T\mathbf{E} = \mathbf{I} \quad (4.11)$$

Cependant, ce cadre peut sembler trop restrictif. En effet, il consiste à donner des définitions identiques aux efforts et aux déplacements « macro » ; or, en pratique, les champs d'efforts et de déplacements admissibles sont de natures bien différentes (par exemple, un champ de déplacements est toujours continu, ce qui n'est pas le cas d'un champ d'efforts), et une base appropriée pour l'une des deux quantités ne l'est pas forcément pour l'autre. De plus, la transposition au niveau discret des idées développées au niveau continu dans l'approche LaTIn micro/macro n'est pas immédiate. En effet, si un mouvement de translation se traduit bien par un vecteur déplacement identique en chaque nœud, il n'en va pas de même pour les efforts : un effort surfacique constant au niveau continu ne se traduit généralement pas par un champ d'efforts nodaux identiques au niveau discret.

Pour toutes ces raisons, nous avons également considéré le cas où les espaces « macro » associés aux efforts et aux déplacements nodaux sont *différents*. En notant \mathbf{E} la matrice rectangulaire associée à la base « macro » des déplacements et \mathbf{F} celle des efforts, le projecteur s'exprime alors par :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{F}\mathbf{E}^T \quad (4.12)$$

et, de même, $\mathbf{\Pi}^T = \mathbf{F}^T\mathbf{E}$; pour que ces quantités définissent bien des projecteurs, il faut alors que :

$$\mathbf{E}^T\mathbf{F} = \mathbf{F}^T\mathbf{E} = \mathbf{I} \quad (4.13)$$

c'est-à-dire que les deux bases \mathbf{E} et \mathbf{F} doivent être *biorthonormales*. Physiquement, cette dernière condition signifie que chacun des « efforts macro » élémentaires doit faire

travailler un, et un seul, des « déplacements macro » élémentaires, et que ce travail doit être unitaire ; si la base « macro » des déplacements comprend des translations ou rotations unitaires (ce qui sera le cas), cette dernière condition permet alors de construire des efforts « macro » de résultantes et de moments unitaires, comme dans l'approche LaTIn micro/macro, mais sans formuler d'hypothèse *a priori* sur la forme des efforts nodaux. En effet, on montre facilement que le produit scalaire « canonique » discret entre deux vecteurs nodaux d'interface :

$$\mathbf{u}^T \lambda = \sum_i \mathbf{u}_i \lambda_i \quad (4.14)$$

est la traduction directe, au niveau discret, du produit scalaire « travail » défini au niveau continu par :

$$\langle \underline{u}, \underline{\lambda} \rangle = \int_{\Gamma} \underline{u} \cdot \underline{\lambda} d\Gamma \quad (4.15)$$

Cela découle directement de l'expression d'un champ de déplacement continu \underline{u} en fonction de sa représentation discrète \mathbf{u} :

$$\underline{u} = \sum_i \mathbf{u}_i \underline{\mathbf{N}}_i$$

et de l'expression du champ d'efforts nodaux discrets λ associé à un champ surfacique continu $\underline{\lambda}$:

$$\lambda_i = \int_{\Gamma} \underline{\mathbf{N}}_i \cdot \underline{\lambda} d\Gamma$$

où $\underline{\mathbf{N}}$ désigne le vecteur des fonctions de base d'interface.

2.2.3 Choix des espaces « macro »

Le choix des espaces « macro » est naturellement d'une grande importance pour la qualité des approximations obtenues, et donc pour les performances du raccord mixte. Il s'agit d'une question complexe pour laquelle de nombreuses pistes ont été envisagées, et beaucoup d'entre elles sont encore en suspens ; nous nous limitons dans ce chapitre aux idées les plus simples, ayant mené à des résultats relativement bien compris.

■ Pour les déplacements

Les déplacements « macro » devant être directement imposés sur l'interface d'après (4.8), ils doivent être physiquement réalistes, c'est-à-dire suffisamment réguliers. Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi des champs de déplacements *af-fines sur l'interface*, c'est-à-dire des translations, rotations linéarisées, allongements et distortions élémentaires de l'interface toute entière (soit 6 vecteurs en 2D, et 12 en 3D).

Afin de former une base orthonormale au sens du produit scalaire (4.14), ces champs sont définis dans le repère principal d'inertie de l'interface *discrétisée* —

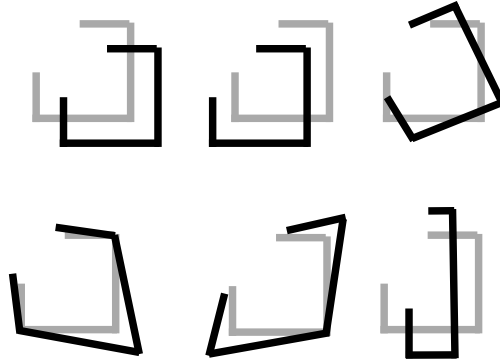


Figure 4.2: Schématisation de la base « macro » des déplacements d'interface sur le cas-test 2D.

c'est-à-dire que le centre et la matrice d'inertie sont déterminés à partir de la position des nœuds de l'interface, en affectant un poids unitaire à chacun d'entre eux. En pratique, cette base est donc simple à construire ; elle est représentée sur la Figure 4.2 pour le cas-test 2D.

Notons que ces déplacements « macro » sont identiques aux conditions aux limites utilisées dans le cadre des techniques d'homogénéisation classiques (voir Chapitre 1, Section 2.1) correspondant à des déformations nulles (translations, rotations) ou constantes (allongements, distorsions).

■ Pour les efforts

Pour les efforts « macro », les deux approches ci-dessus ont été étudiées. Dans le premier cas, on choisit le même espace que pour les déplacements « macro » — et donc la même base, celle-ci étant orthonormale. Dans le deuxième cas, on choisit un espace *a priori* différent, dont la base \mathbf{F} doit être biorthonormale à la base \mathbf{E} des déplacements.

Dans ce dernier cas, il existe un moyen simple de construire une telle base à partir des efforts de réaction de la zone complémentaire aux déplacements « macro » imposés, c'est-à-dire du produit $\mathbf{S}_C^G \mathbf{E}$. Il s'agit de chercher la base \mathbf{F} sous la forme de *combinaisons linéaires des efforts ainsi obtenus* :

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}_C^G \mathbf{E} \mathbf{P} \quad (4.16)$$

où \mathbf{P} est une matrice de passage que l'on détermine à l'aide de la condition de biorthogonalité : la substitution de (4.16) dans (4.13) donne

$$\mathbf{E}^T \mathbf{S}_C^G \mathbf{E} \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (4.17)$$

ce qui signifie que \mathbf{P} doit être l'inverse (ou la pseudo-inverse) de $\mathbf{E}^T \mathbf{S}_C^G \mathbf{E}$. Une fois cette inverse calculée, (4.16) donne directement la base d'efforts « macro » \mathbf{F} .

Cette base est ainsi biorthogonale à la précédente, spécifique au sous-domaine considéré, et contient toute l'information relative à la réponse « macro » de ce sous-domaine. Elle est représentée sur la Figure 4.3 ; à titre d'exemple, le premier vecteur

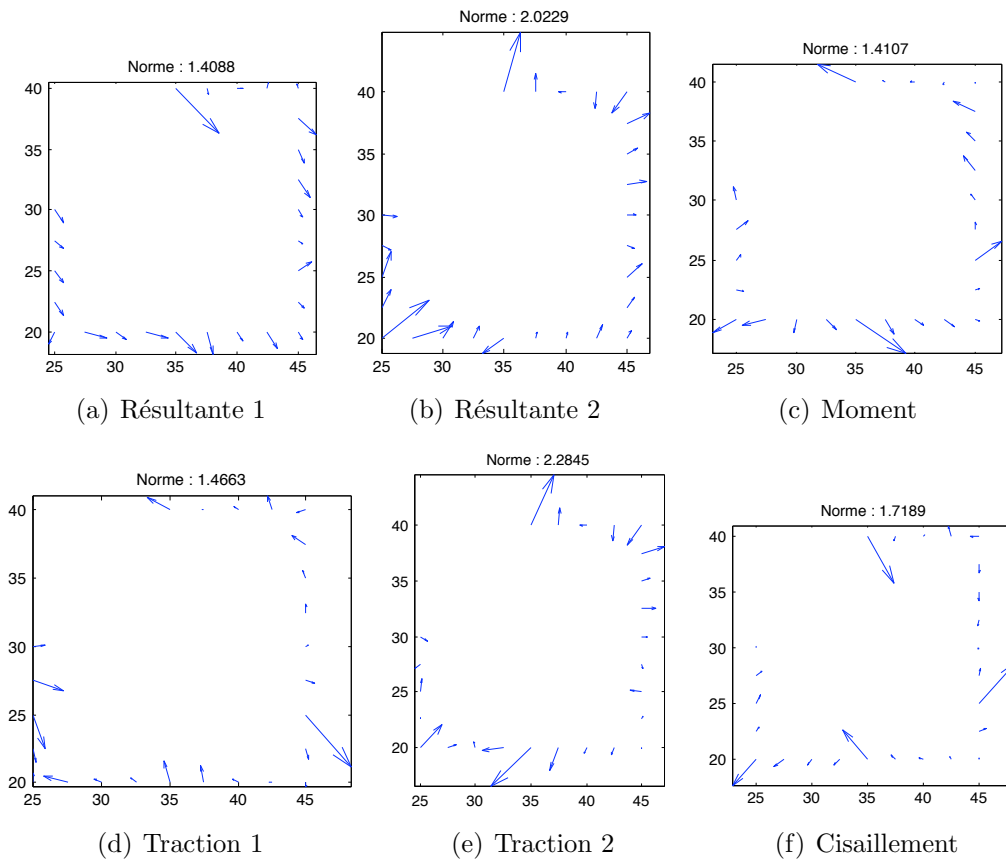


Figure 4.3: Schématisation de la base « macro » des efforts d’interface sur le cas-test 2D.

possède une résultante unitaire orientée selon la première direction principale, un moment nul, et ne fait pas travailler les modes d’allongement et de distortion de la Figure 4.2.

2.2.4 En pratique

Afin d’illustrer les capacités offertes par cette démarche, ces approximations ont été testées sur l’exemple 2D décrit précédemment. La Figure 4.4 représente l’évolution de l’erreur en déplacement d’interface au fil des itérations, pour des bases « macro » identiques ou biorthogonales; s’agissant d’un raccord mixte, le déplacement n’est plus continu entre les deux modèles, et on distingue donc à chaque itération l’étape globale (repérée par un G) de l’étape locale (L). La correction globale est menée de la manière décrite dans la section suivante, sans aucune technique d’accélération.

On constate que là encore, ces approximations sont manifestement insuffisantes; elles ne permettent pas de former des conditions aux limites efficaces, ce qui se traduit par le fait que l’erreur en déplacement semble « remonter » lors de l’analyse

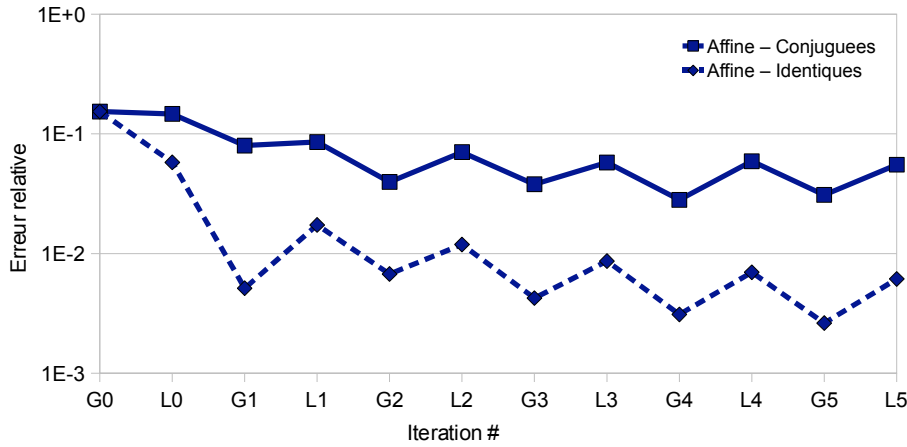


Figure 4.4: Evolution de l'erreur en déplacement pour les approximations « longue distance » de \mathbf{S}_C^G .

locale et ne converge pas vers zéro. Un examen plus fin des différentes solutions montre que celles-ci semblent *osciller* d'une itération à l'autre, autour de la solution exacte ; ceci s'explique par le fait que les approximations « macro » du complément de Schur tendent à être *beaucoup plus souples* que \mathbf{S}_C^G . Le raccord mixte se comporte ainsi quasiment comme un raccord en effort, tandis que la correction globale tend à annuler le saut de déplacement ; la méthode fonctionne ainsi de manière similaire à un algorithme de type « Dirichlet-Neumann » et il est connu que ces algorithmes peuvent osciller et diverger en l'absence de techniques de relaxation (voir par exemple [Krause et Wohlmuth, 2002]).

Ainsi, bien que complémentaires aux approches « courte distance » vues précédemment, ces approches « macro » sont elles aussi inopérantes. En revanche, nous allons voir qu'en combinant les deux, des raccords très efficaces peuvent être obtenus.

2.3 Approximations multi-échelles

2.3.1 Interprétation des résultats précédents

Nous avons vu que prises séparément, les approximations « courte distance » et « macro » ne permettent pas de construire une condition aux limites mixte efficace. En effet, les approches « courte distance » conduisent à surestimer la rigidité de la zone complémentaire, et n'apportent donc qu'un gain de performances très limité par rapport au raccord en déplacement. A l'inverse, les approches « macro » sous-estiment la rigidité, et conduisent ainsi à un comportement oscillant de l'algorithme.

Ce constat peut être relié aux techniques d'approximation du problème tangent évoquées à la fin du chapitre précédent, et particulièrement aux approches spectrales (Section 3.3.2) : nous avons vu que lorsque l'on approche le terme correctif (qui est lui aussi basé sur un complément de Schur, cette fois-ci celui de la zone d'intérêt)

par le haut ou le bas de son spectre, il est nécessaire de conserver un grand nombre de valeurs propres afin d’obtenir une approximation correcte. En d’autres termes, les approximations « plus raides » (*ie.* par le haut du spectre) ou « plus souples » (*ie.* par le bas) sont là encore insuffisantes.

Un lien entre ces deux observations peut être trouvé dans l’étude des modes propres du complément de Schur, ou de l’opérateur de Steklov-Poincaré (voir par exemple [Storti *et al.*, 2006]) : on constate que les modes associés aux valeurs propres les plus élevées, correspondant aux comportements les plus rigides de la structure, sont fortement oscillants et *évanescents* — c’est-à-dire que leur amplitude décroît très rapidement lorsque l’on s’éloigne de l’interface. Ces modes sont donc capturés correctement par une approximation de type « bande » ou « courte distance », mais sont trop oscillants pour être représentés par une approche « macro ». À l’inverse, les modes les plus souples sont peu oscillants et « traversent » tout le sous-domaine ; ils ne peuvent être reproduits par une approximation « courte distance », mais sont en revanche très bien représentés par les approches « macro ».

Afin d’approcher correctement le complément de Schur, il semble donc nécessaire de capturer *à la fois* le haut et le bas de son spectre. Pour ce faire, nous proposons ici une approche originale, combinant les deux approximations ci-dessus en s’inspirant d’un principe mécanique : le principe de Saint-Venant.

2.3.2 Rappel du principe de Saint-Venant

Le principe de Saint-Venant, utilisé notamment dans la théorie des poutres, stipule que **dans un solide déformable, en tout point situé suffisamment loin des zones d’application des efforts et des liaisons, les contraintes et les déformations ne dépendent que de la résultante et du moment des efforts appliqués.** Une conséquence immédiate de ce principe est que lorsqu’un solide est soumis à une distribution d’efforts :

- de résultante et moment nuls
- **et** localisée sur une « petite » surface γ (ou dans un petit volume ω),

alors cette distribution d’efforts n’a *aucun effet* sur les contraintes et les déformations en tout point situé « suffisamment loin³ » de γ ou ω . Autrement dit, **une distribution d’efforts à résultante et moment nuls a un effet uniquement local sur les contraintes et les déformations.** Ceci n’est pas entièrement vrai pour les déplacements ; une distribution d’efforts à résultante et moment nuls peut en effet créer un *mouvement rigide* loin de sa zone d’application.

2.3.3 Application à l’approximation du complément de Schur

L’application du principe de Saint-Venant à notre problème conduit au postulat suivant : si la zone complémentaire est soumise à un effort nodal d’interface λ

3. C’est-à-dire, en pratique, à une distance supérieure à une certaine « taille caractéristique » de la distribution.

de résultante et moment nuls, alors sa réponse peut être représentée correctement par la réponse du voisinage de l'effort, à un mouvement rigide près. Nous pouvons donc calculer cette réponse à l'aide des approximations « courte distance » vues précédemment ; ces approximations étant encastrées sur leur frontière, le mouvement rigide manquant — *a priori* inconnu — est ensuite ajouté par superposition. Cette idée est schématisée sur la Figure 4.5.

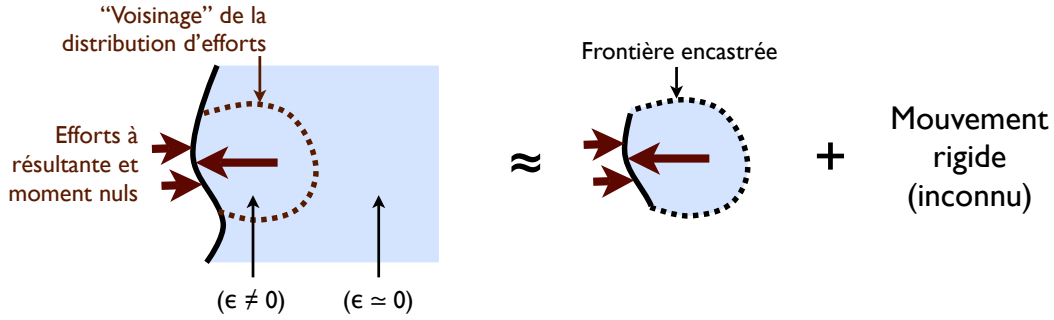


Figure 4.5: Application du principe de Saint-Venant à la zone complémentaire.

Traduisons ce postulat avec une notation « de type FETI » : soit \mathbf{R} la matrice dont les colonnes sont les mouvements rigides de l'interface. Alors, pour tout effort nodal d'interface λ tel que $\mathbf{R}^T \lambda = 0^4$, la « réponse » — c'est-à-dire, ici, le déplacement d'interface — peut être approchée par :

$$\mathbf{S}_C^{G^{-1}} \lambda \approx \mathbf{D}^{-1} \lambda + \mathbf{R} \mathbf{x}$$

où \mathbf{D} est une approximation « courte distance » de \mathbf{S}_C^G et \mathbf{x} est un vecteur d'amplitudes, *a priori* inconnu⁵. De plus, toutes les équations de la zone complémentaire étant purement linéaires, le mouvement de corps rigide résiduel est forcément une fonction linéaire du chargement considéré, et \mathbf{x} dépend donc linéairement de λ : il existe ainsi une matrice rectangulaire \mathbf{C} telle que

$$\mathbf{x} = \mathbf{C} \lambda$$

Cette matrice dépend du problème étudié, ainsi que de l'approximation \mathbf{D} étudiée (mais naturellement pas de λ) ; nous verrons plus loin que sa connaissance n'est pas indispensable à la mise en œuvre du procédé. En combinant les deux relations ci-dessus, on obtient la propriété suivante : pour tout effort d'interface λ ,

$$\boxed{\text{si } \mathbf{R}^T \lambda = 0, \text{ alors } \mathbf{S}_C^{G^{-1}} \lambda \approx [\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{R} \mathbf{C}] \lambda} \quad (4.18)$$

4. En effet, un effort à résultante et moment nuls est par définition un effort qui ne fait pas travailler les mouvements rigides, et nous avons vu que le produit scalaire « canonique » discret entre un effort nodal et un déplacement nodal équivaut au produit scalaire « travail » continu.

5. Notons que si la zone complémentaire possède suffisamment de conditions de Dirichlet pour bloquer ses mouvements rigides, \mathbf{x} sera nul ; c'est par exemple le cas sur l'exemple 2D de ce chapitre. Cependant, nous envisageons l'éventualité d'un mouvement rigide non nul dans un souci d'exhaustivité de l'étude.

En pratique, nous calculons \mathbf{D} à l'aide des approximations « courte distance » vues dans la Section 2.1 ; notons cependant qu'en toute rigueur, ce choix ne respecte pas forcément le principe de Saint-Venant. En effet, la notion de « courte distance » est en rapport avec la (ou les) taille caractéristique des distributions d'effort considérées. Ici, en l'absence d'autres informations, il s'agit *au plus* de celle de l'interface, ce qui peut conduire à inclure une grande partie de la structure ; or, les approximations « courte distance » étudiées portent sur une zone plus petite, à l'exception de la bande de 4 éléments représentée sur la Figure 4.1. Toutefois, les efforts « micro » pouvant être *oscillants*, la taille de l'interface ne constitue qu'une borne supérieure ; ainsi, nous allons voir que malgré ce problème potentiel, le raccord mixte ainsi formulé conduit à de bonnes performances.

2.3.4 Formulation de l'approximation

Pour mettre en œuvre le principe ci-dessus, l'idée est de séparer l'espace des efforts d'interface en contributions « micro » et « macro » à l'aide des projecteurs introduits précédemment ; les contributions « macro », décrites par un espace de faible dimension, sont analysées sur la structure complète, alors que les contributions « micro » (forcément à résultante et moment nuls) sont analysées sur une représentation « courte distance », en vertu du principe ci-dessus. Pour ce faire, nous commençons par formuler deux remarques.

La première est que l'espace des déplacements « macro » défini dans la Section 2.2.3 étant constitué des déplacements affines, il inclut les mouvements de corps rigide. Un effort λ vérifiant $\mathbf{E}^T \lambda = 0$ est donc forcément à résultante et moment nuls. De même, un déplacement rigide peut toujours se mettre sous la forme $\mathbf{E}\mathbf{y}$. On peut donc *déduire* de (4.18) la relation suivante : pour tout effort λ ,

$$\text{si } \mathbf{E}^T \lambda = 0, \text{ alors } \mathbf{S}_C^{G^{-1}} \lambda \approx \left[\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{E}\tilde{\mathbf{C}} \right] \lambda \quad (4.19)$$

où $\tilde{\mathbf{C}}$ est, là encore, une matrice rectangulaire *a priori* inconnue, dépendant du problème et de \mathbf{D} .

La seconde est que le projecteur « macro » en effort $\mathbf{\Pi}$ défini par (4.10) ou (4.12), vérifie la relation suivante : pour tout effort λ ,

$$\mathbf{E}^T (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}) \lambda = 0 \quad (4.20)$$

Compte tenu de la première remarque, cela signifie que *pour toute distribution d'efforts* λ , $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}) \lambda$ est à résultante et moment nuls. Autrement dit, dans la terminologie LaTIn, $(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})$ est un « projecteur micro ».

Ceci permet de formuler une approximation « multi-échelles » du complément de Schur. Pour cela, considérons un effort λ quelconque, que nous décomposons en parties « macro » et « micro » :

$$\lambda = \mathbf{\Pi}\lambda + (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}) \lambda$$

En multipliant cette relation à gauche par $\mathbf{S}_C^{G^{-1}}$, en remarquant que le terme « micro » est à résultante et moment nul et en utilisant la propriété (4.19), il vient alors :

$$\mathbf{S}_C^{G^{-1}} \lambda \approx \mathbf{S}_C^{G^{-1}} \mathbf{\Pi} \lambda + \left[\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{E} \tilde{\mathbf{C}} \right] (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}) \lambda$$

Ceci étant vrai pour toute distribution d'efforts λ , on en déduit l'approximation suivante :

$$\mathbf{S}_C^{G^{-1}} \approx \mathbf{S}_C^{G^{-1}} \mathbf{\Pi} + \left[\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{E} \tilde{\mathbf{C}} \right] (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}) \quad (4.21)$$

A ce stade, plusieurs constats s'imposent. Le premier est que l'utilisation de cette expression demande de calculer $\mathbf{S}_C^{G^{-1}} \mathbf{\Pi}$, c'est-à-dire d'obtenir la réponse de la zone complémentaire à des efforts « macro ». Comme nous l'avons vu dans la Section 2.2.3, cette opération est potentiellement intrusive, mais ce problème peut être contourné en choisissant une base d'efforts « macro » \mathbf{F} issue de la réponse aux déplacements « macro » \mathbf{E} et biorthonormale à ces derniers, définie par les relations (4.16) et (4.17).

Le second constat est que l'approximation (4.21) n'est manifestement pas symétrique ; or, la symétrie des opérateurs de rigidité est une propriété essentielle de l'élasticité linéaire. Toutefois, on peut montrer que dans le cadre évoqué ci-dessus (bases biorthonormales et projecteur associé), le terme « macro » $\mathbf{S}_C^{G^{-1}} \mathbf{\Pi}$ est symétrique. En effet, les relations (4.12), (4.16) et (4.17) donnent alors :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{S}_C^G \mathbf{E} \left[\mathbf{E}^T \mathbf{S}_C^G \mathbf{E} \right]^{-1} \mathbf{E}^T$$

et on en déduit facilement que :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_C^{G^{-1}} \mathbf{\Pi} &= \mathbf{\Pi}^T \mathbf{S}_C^{G^{-1}} \\ &= \mathbf{\Pi}^T \mathbf{S}_C^{G^{-1}} \mathbf{\Pi} \\ &= \mathbf{E} \left[\mathbf{E}^T \mathbf{S}_C^G \mathbf{E} \right]^{-1} \mathbf{E}^T \end{aligned} \quad (4.22)$$

c'est-à-dire que la réponse à des efforts « macro » appartient toujours à l'espace des déplacements « macro ». Le terme « macro » de (4.21) est donc symétrique ; cette propriété, déjà connue dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine, représente là encore un argument en faveur des bases biorthonormales.

Pour ces deux raisons, nous choisissons d'utiliser ces dernières. Ainsi, l'asymétrie de (4.21) provient du terme « micro » seul ; pour obtenir une approximation symétrique du complément de Schur, il faut donc corriger ce dernier terme. Plusieurs techniques sont possibles ; l'idée retenue consiste à n'utiliser l'approximation « courte distance » que pour calculer la réponse « micro » aux efforts « micro », et à calculer tout le reste de manière exacte à l'aide du terme « macro ». Compte tenu de (4.22), cela s'écrit :

$$\mathbf{S}_C^{G^{-1}} \approx \mathbf{\Pi}^T \mathbf{S}_C^{G^{-1}} \mathbf{\Pi} + (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^T \left[\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{E} \tilde{\mathbf{C}} \right] (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}) \quad (4.23)$$

Enfin, la relation (4.19) montre que le terme rigide (en $\mathbf{E}\tilde{\mathbf{C}}$) s'annule. Au final, l'approximation « multi-échelles » symétrique du complément de Schur s'écrit donc :

$$\boxed{\mathbf{S}_C^{G^{-1}} \approx \mathbf{\Pi}^T \mathbf{S}_C^{G^{-1}} \mathbf{\Pi} + (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^T \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})} \quad (4.24)$$

L'avantage de cette formulation est qu'elle préserve les propriétés physiques de symétrie du complément de Schur, tout en corrigeant *automatiquement* l'erreur en mouvement de corps rigide éventuellement introduite par les conditions aux limites de l'approximation « courte distance » utilisée.

2.3.5 Mise en œuvre

Enfin, la mise en œuvre du raccord mixte demande de calculer *explicitement* une approximation de \mathbf{S}_C^G afin de l'assembler au sein du problème local. Autrement dit, il faut inverser la relation (4.24) pour obtenir une approximation de \mathbf{S}_C^G , et non de $\mathbf{S}_C^{G^{-1}}$. Pour ce faire, on remarque qu'à l'aide de la relation (4.22), on peut réécrire (4.24) sous la forme suivante :

$$\mathbf{S}_C^{G^{-1}} \approx \mathbf{D}^{-1} + \Delta \mathbf{G} \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}^T \Delta \mathbf{G} - \mathbf{\Pi}^T \Delta \mathbf{G} \mathbf{\Pi} \quad (4.25)$$

où l'on a noté $\Delta \mathbf{G}$ la différence des deux souplesses, *ie.* :

$$\Delta \mathbf{G} = \mathbf{S}_C^{G^{-1}} - \mathbf{D}^{-1} \quad (4.26)$$

Autrement dit, l'inverse du complément de Schur est à peu près égal à son approximation « courte distance », flanquée d'un terme correctif portant sur tous les couplages autres que « micro/micro ». Notons que d'après la relation (4.16), on a $\mathbf{S}_C^{G^{-1}} \mathbf{F} = \mathbf{E} \mathbf{P}$, et on en déduit $\Delta \mathbf{G} \mathbf{F} = \mathbf{E} \mathbf{P} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}$. Une fois cette quantité calculée, on peut ensuite inverser (4.25) à l'aide de la formule de Woodbury, en mettant l'approximation sous la forme suivante :

$$\mathbf{S}_C^{G^{-1}} \approx \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{U} \mathbf{C} \mathbf{V}$$

où l'on a noté :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{G} \mathbf{F} & \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{F}^T \Delta \mathbf{G} \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T \\ (\Delta \mathbf{G} \mathbf{F})^T \\ \mathbf{E}^T \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

La formule de Woodbury donne alors directement :

$$\boxed{\mathbf{S}_C^G \approx \mathbf{D} - \mathbf{D} \mathbf{U} \mathbf{C} [\mathbf{I} + \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{U} \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{V} \mathbf{D}} \quad (4.30)$$

et le rang du terme correctif étant égal à 3 fois la taille de la base macro, cette opération est en pratique peu coûteuse.

2.3.6 Illustration

Nous illustrons enfin les performances de ce raccord « multi-échelles » sur le cas-test 2D. Comme indiqué précédemment, nous choisissons une approximation « macro » basée sur des champs de déplacement affines et sur une base d'efforts biorthogonale, que nous combinons avec les différentes approximations « courte distance » vues dans la Section 2.1.

<i>Approx. « courte distance »</i>	$\eta_{\mathbf{u}}$
Exact	0
Bande 4 éléments	0,028
Bande 2 éléments	0,032
Bande 1 élément	0,039
Lumped	0,047
Super-lumped	0,051
Raccord en déplacement	0,153

Table 4.3: Erreur en déplacement d'interface pour quelques approximations multi-échelles de \mathbf{S}_C^G

Nous étudions ici le comportement de la méthode à la première itération. Le Tableau 4.3 donne l'erreur en déplacement obtenue après la première analyse locale. On constate que les résultats sont bien meilleurs qu'avec les deux raccords précédents, puisqu'une seule analyse locale suffit à faire chuter l'erreur en déplacement d'un facteur 3 à 6 par rapport à sa valeur globale (qui est celle obtenue par le raccord en déplacement). Le Tableau 4.4 donne quant à lui la valeur relative de l'erreur en déformation plastique à l'issue de cette même analyse locale ; on observe là encore des gains importants par rapport à l'approche en déplacement, avec une erreur réduite d'un facteur 4 à 6.

<i>Approx. « courte distance »</i>	η_p
Exact	0
Bande 4 éléments	-0,050
Bande 2 éléments	-0,054
Bande 1 élément	-0,064
Lumped	-0,076
Super-lumped	-0,085
Raccord en déplacement	-0,313

Table 4.4: Erreur en déformation plastique pour quelques approximations multi-échelles de \mathbf{S}_C^G

Ainsi, l'approximation « multi-échelles » du complément de Schur permet d'obtenir un raccord mixte présentant des performances nettement supérieures au raccord

en déplacement, pour un surcoût raisonnable (l'essentiel des coûts de l'opération se situe dans le calcul de la réponse « macro », qui s'effectue au tout début du procédé, lors de la construction des bases biorthogonales).

3 Correction globale mixte

Dans la section précédente, nous avons vu comment construire la rigidité mixte \mathbf{A} de sorte à obtenir un raccord à la fois performant et peu coûteux à mettre en œuvre. Nous nous intéressons maintenant aux deux autres étapes de la stratégie, à savoir le calcul du résidu et la correction globale.

3.1 Ecriture de la correction globale

Comme nous l'avons vu précédemment, le déroulement de la correction globale est inchangé par rapport à l'approche en déplacement. La seule différence provient de la définition du résidu, qui ne mesure plus seulement le déséquilibre des efforts, mais également le saut de déplacement, *via* une seconde rigidité d'interface \mathbf{B} :

$$\mathbf{r} = -(\lambda^L + \lambda_C^G) + \mathbf{B}(\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^G) = [\mathbf{A} + \mathbf{B}](\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^G) \quad (4.31)$$

On effectue alors la correction globale comme d'accoutumée, en posant :

$$\mathbf{u}^G \leftarrow \mathbf{u}^G + \tilde{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{r} \quad (4.32)$$

où $\tilde{\mathbf{S}}$ est l'opérateur utilisé pour la correction globale ; il s'agit soit du complément de Schur global \mathbf{S}^G (en l'absence d'accélération), soit d'un opérateur mis à jour (typiquement, par la méthode SR1 vue au chapitre précédente).

Un inconvénient potentiel est que comme le montre l'expression ci-dessus, cette correction s'effectue à partir de la dernière solution *globale* \mathbf{u}^G ; or, comme nous venons de le voir dans la section précédente, la dernière solution *locale* \mathbf{u}^L est généralement de bien meilleure qualité que \mathbf{u}^G lorsque le raccord mixte est correctement formulé. Autrement dit, effectuer la mise à jour à partir de \mathbf{u}^G risque de conduire à une stratégie qui *ne converge pas plus rapidement que l'approche en déplacement*, comme l'illustre la Figure 2.8 du Chapitre 2 ; les avantages apportés par le raccord mixte seraient ainsi en partie perdus. L'idéal serait donc que la correction globale prenne la forme suivante :

$$\mathbf{u}^G \leftarrow \mathbf{u}^L + \tilde{\mathbf{S}}^{-1}\tilde{\mathbf{r}}$$

où $\tilde{\mathbf{r}}$ désigne un certain terme résiduel portant sur la solution locale. Nous allons voir que, moyennant un choix judicieux de la seconde rigidité mixte \mathbf{B} , il est possible de mettre la correction globale sous cette forme : on peut ainsi *combiner* les avantages offerts par le raccord mixte avec ceux qu'apporte une technique d'accélération efficace telle que SR1.

3.1.1 Choix de la seconde rigidité mixte

Rappelons tout d'abord que la valeur optimale de \mathbf{A} , la première rigidité mixte, est le complément de Schur de la zone complémentaire \mathbf{S}_C^G . Nous écrivons donc \mathbf{A} sous la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_C^G + \Delta\mathbf{S} \quad (4.33)$$

où $\Delta\mathbf{S}$ désigne l'erreur par rapport à la valeur optimale, introduite par la technique d'approximation utilisée. Sous cette notation, (4.31) se réécrit :

$$\mathbf{r} = [\mathbf{S}_C^G + \Delta\mathbf{S} + \mathbf{B}] (\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^G)$$

et la correction globale (4.32) peut alors s'écrire :

$$\mathbf{u}^G \leftarrow \tilde{\mathbf{S}}^{-1} (\mathbf{S}_C^G + \mathbf{B}) \mathbf{u}^L + \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \Delta\mathbf{S} (\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^G) + [\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}^{-1} (\mathbf{S}_C^G + \mathbf{B})] \mathbf{u}^G$$

On constate donc qu'un choix particulièrement judicieux est de poser :

$$\boxed{\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{S}_C^G} \quad (4.34)$$

En effet, l'équation ci-dessus se simplifie alors sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}^G \leftarrow \mathbf{u}^L + \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \Delta\mathbf{S} (\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^G) \quad (4.35)$$

Autrement dit, ce choix de \mathbf{B} permet de combiner les avantages du raccord mixte (puisqu'on « repart » de la dernière solution locale \mathbf{u}^L) avec ceux d'une technique d'accélération performante (puisque l'opérateur $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ permet alors de réduire efficacement les résidus). Le terme résiduel portant sur la solution locale, apparaissant dans l'expression ci-dessus, vaut quant à lui :

$$\tilde{\mathbf{r}} = \Delta\mathbf{S} (\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^G)$$

Or, en reprenant l'équation du problème local avec condition mixte (4.7) et en y introduisant la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{S}_C^G + \Delta\mathbf{S}$, on obtient :

$$\mathbf{h}^L(\mathbf{u}^L) + \mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^L + \Delta\mathbf{S} \mathbf{u}^L = \mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^G - \lambda_C^G + \Delta\mathbf{S} \mathbf{u}^G$$

soit, en utilisant l'admissibilité de la solution globale (4.2) :

$$\Delta\mathbf{S} (\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^G) = \mathbf{b}_C^G - \mathbf{h}^L(\mathbf{u}^L) - \mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^L \quad (4.36)$$

On reconnaît alors la différence des deux membres du problème condensé de référence (4.5), formulé sur \mathbf{u}^L , ce qui montre que le terme résiduel $\tilde{\mathbf{r}}$ mesure la non-vérification par \mathbf{u}^L des équations du problème de référence. Il s'agit donc bien d'un résidu, au sens habituel du terme, portant sur ce problème; ainsi, *la correction globale s'écrit toujours comme une itération d'une méthode de Newton modifiée ou de quasi-Newton, mais cette fois à partir de la solution locale.*

La situation correspondante est schématisée sur la Figure 4.6; tout ceci est vrai dès lors que **la seconde rigidité mixte est prise égale à la contribution de la zone d'intérêt à l'opérateur de correction globale utilisé.** Ainsi :

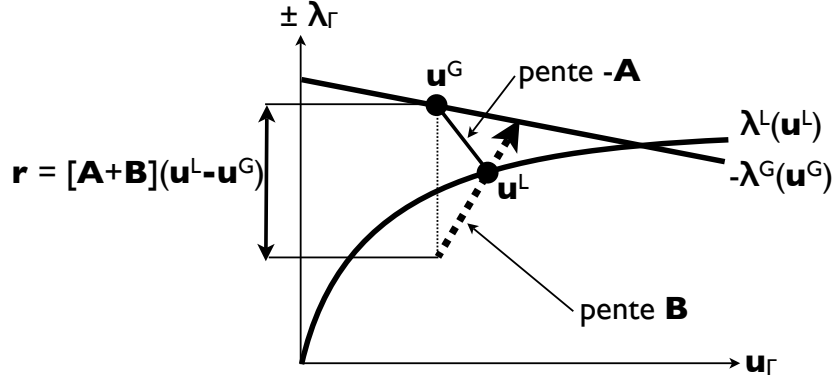


Figure 4.6: Schématisation d'une correction globale mixte et du choix de \mathbf{B} .

- en l'absence de technique d'accélération, $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^G$; on prendra alors $\mathbf{B} = \mathbf{S}_I^G$, le complément de Schur de la représentation globale de la zone d'intérêt ;
- avec une *accélération SR1*, en reprenant le formalisme du chapitre précédent, $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}_n^G$; on prendra alors $\mathbf{B} = \mathbf{S}_n^L$, *ie.* la contribution locale à l'opérateur de rigidité mis à jour.
- enfin, dans l'hypothèse où l'on utilise une *accélération « tangente »*, $\tilde{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}^R$ (*ie.* la rigidité de référence tangente) ; on prendra alors $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{S}}^L$, c'est-à-dire la rigidité locale tangente.

3.2 Mise en œuvre sans accélération

En l'absence d'accélération, comme nous venons de le voir, le résidu prend l'expression suivante :

$$\mathbf{r} = [\mathbf{A} + \mathbf{S}_I^G] (\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^G) \quad (4.37)$$

et la correction globale s'effectue comme suit :

$$\mathbf{u}^G \leftarrow \mathbf{u}^G + \mathbf{S}^{G^{-1}} \mathbf{r} \quad (4.38)$$

La Figure 4.7 représente l'évolution de l'erreur en déplacement au fil des itérations, sur le cas-test 2D, avec cette correction globale. De même que précédemment, la condition aux limites mixte est basée sur une approximation multi-échelles du complément de Schur, avec une base « macro » affine pour les déplacements, et une base « macro » biorthogonale à cette dernière pour les efforts. Là encore, plusieurs approximations « courte distance » sont testées ; l'erreur obtenue avec l'approche en déplacement, munie de l'accélération SR1, est également représentée à titre de comparaison.

On constate que jusqu'à la deuxième itération, toutes les approches mixtes donnent de meilleurs résultats que l'approche en déplacement accélérée ; cependant, à partir de la troisième itération, la tendance se renverse, et finalement seul le raccord mixte le plus riche (celui dont la partie « locale » utilise une bande de 4

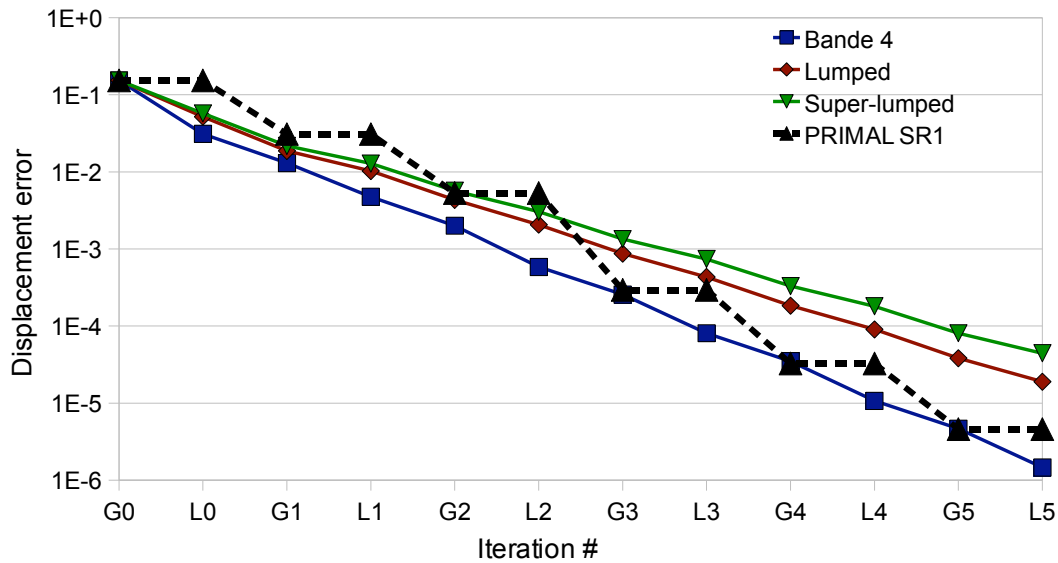


Figure 4.7: Evolution de l'erreur en déplacement pour quelques approximations multi-échelles, sans accélération.

éléments) s'avère plus efficace. Ces observations se confirment en examinant l'erreur en déformation plastique maximale, voir Figure 4.8.

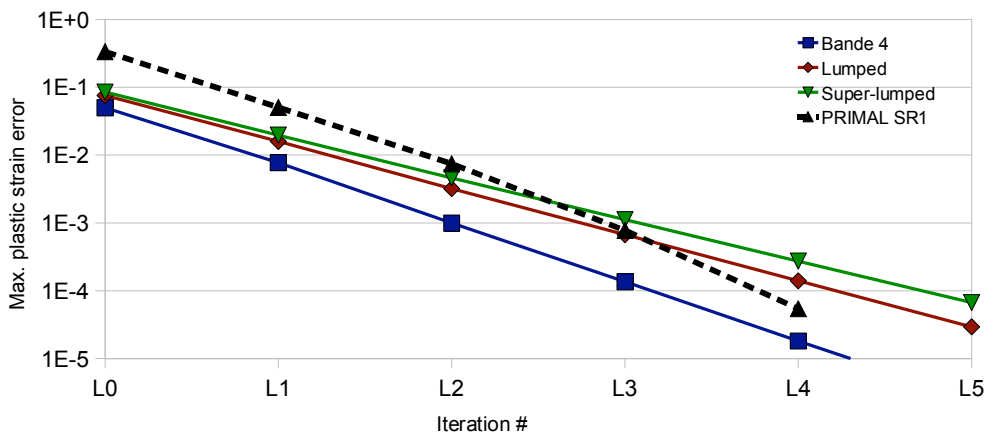


Figure 4.8: Evolution de l'erreur en déformation plastique pour quelques approximations multi-échelles, sans accélération.

Au final, pour atteindre un niveau d'erreur raisonnable (de l'ordre de 1% ou 0,1%), les approches mixtes non accélérées présentent un niveau de performance comparable à celui de l'approche en déplacement accélérée, ou légèrement meilleur. Elles sont cependant plus coûteuses à mettre en œuvre, car le surcoût de l'accélération SR1 est quasi-nul comme nous l'avons vu au Chapitre 3, tandis que le calcul de l'approximation du complément de Schur demande une analyse globale supplémentaire avec plusieurs cas de charges simultanés.

Il est toutefois possible d'améliorer ces résultats. Pour ce faire, une première idée serait de perfectionner le raccord mixte lui-même, comme nous l'évoquerons à la fin de ce chapitre. Une autre possibilité, testée dans le cadre de cette thèse, est de combiner l'approche mixte avec une technique d'accélération, en s'appuyant sur le travail présenté au Chapitre 3 ; ceci fait l'objet de la section suivante.

3.3 Mise en œuvre avec accélération SR1

Afin d'obtenir plus rapidement des solutions de bonne qualité dans la zone complémentaire et d'améliorer ainsi les performances de l'approche, il est possible de combiner le raccord mixte avec une technique d'accélération. Nous nous limitons ici à la méthode SR1 introduite au chapitre précédent, la méthode « tangente » menant la plupart du temps à des coûts prohibitifs.

L'utilisation de cette technique s'effectue selon les mêmes principes qu'avec le raccord en déplacement. La mise en œuvre est cependant différente puisque, comme nous l'avons vu au début de la section, la seconde rigidité mixte \mathbf{B} intervenant dans la définition du résidu doit être égale à la contribution de la zone d'intérêt à l'opérateur de rigidité corrigée ; pour l'itération n , en reprenant le formalisme du Chapitre 3, cela s'écrit $\mathbf{B} = \mathbf{S}_n^L$ et l'on a donc :

$$\mathbf{r}_n = [\mathbf{A} + \mathbf{S}_n^L] (\mathbf{u}_n^L - \mathbf{u}_n^G) \quad (4.39)$$

Il est donc nécessaire de construire \mathbf{S}_n^L *avant* de calculer le résidu, contrairement à ce qui était fait pour l'approche en déplacement. L'expression des termes correctifs est quant à elle légèrement différente ; nous l'établissons en reprenant la même démarche que pour la variante en déplacement.

3.3.1 Construction formelle

■ Principe

Formellement, le principe est inchangé : il s'agit toujours de construire, à l'aide de la formule SR1, des opérateurs de rigidité d'interface sécants par rapport aux deux dernières solutions *locales*, c'est-à-dire tels que :

$$\mathbf{S}_n^L (\mathbf{u}_n^L - \mathbf{u}_{n-1}^L) = \lambda_n^L - \lambda_{n-1}^L \quad (4.40)$$

et d'en déduire par *assemblage* des opérateurs globaux, utilisables pour la correction globale :

$$\mathbf{S}_n^G = \mathbf{S}_n^L + \mathbf{S}_C^G \quad (4.41)$$

Ce mode opératoire est schématisé sur la Figure 4.9.

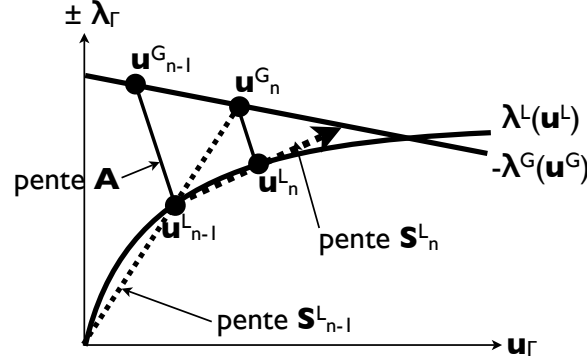


Figure 4.9: Schématisation d'une itération de la variante mixte avec accélération SR1.

■ Ecriture

L'écriture est cependant différente. Appliquée au problème local, la formule SR1 classique donne :

$$\mathbf{S}_n^L = \mathbf{S}_{n-1}^L + \frac{(\Delta\lambda_n^L - \mathbf{S}_{n-1}^L \Delta\mathbf{u}_n^L) (\Delta\lambda_n^L - \mathbf{S}_{n-1}^L \Delta\mathbf{u}_n^L)^T}{(\Delta\lambda_n^L - \mathbf{S}_{n-1}^L \Delta\mathbf{u}_n^L)^T \Delta\mathbf{u}_n^L} \quad (4.42)$$

où l'on note comme précédemment $\Delta\mathbf{u}_n^L = \mathbf{u}_n^L - \mathbf{u}_{n-1}^L$ et $\Delta\lambda_n^L = \lambda_n^L - \lambda_{n-1}^L$. Il est possible de reformuler le terme entre parenthèses : pour cela, on écrit tout d'abord que :

$$\Delta\mathbf{u}_n^L = \mathbf{u}_n^L - \mathbf{u}_n^G + \mathbf{u}_n^G - \mathbf{u}_{n-1}^L = [|\mathbf{u}|]_n + \mathbf{u}_n^G - \mathbf{u}_{n-1}^L$$

où l'on note $[|\mathbf{u}|]_n = \mathbf{u}_n^L - \mathbf{u}_n^G$. On a donc :

$$(\Delta\lambda_n^L - \mathbf{S}_{n-1}^L \Delta\mathbf{u}_n^L) = \lambda_n^L - \lambda_{n-1}^L - \mathbf{S}_{n-1}^L [|\mathbf{u}|]_n - \mathbf{S}_{n-1}^L (\mathbf{u}_n^G - \mathbf{u}_{n-1}^L)$$

De plus, en examinant la Figure 4.9, on peut constater — et nous l'admettons pour l'instant — que :

$$\mathbf{S}_{n-1}^L (\mathbf{u}_n^G - \mathbf{u}_{n-1}^L) = -\lambda_{C,n}^G - \lambda_{n-1}^L \quad (4.43)$$

Nous établirons cette dernière égalité de manière rigoureuse à la fin du paragraphe. En combinant les deux relations ci-dessus, on obtient alors :

$$\begin{aligned} (\Delta\lambda_n^L - \mathbf{S}_{n-1}^L \Delta\mathbf{u}_n^L) &= \lambda_n^L - \lambda_{n-1}^L - \mathbf{S}_{n-1}^L [|\mathbf{u}|]_n + \lambda_{C,n}^G + \lambda_{n-1}^L \\ &= \lambda_n^L + \lambda_{C,n}^G - \mathbf{S}_{n-1}^L [|\mathbf{u}|]_n \end{aligned}$$

et d'après la définition du raccord mixte (4.6), il reste donc :

$$(\Delta\lambda_n^L - \mathbf{S}_{n-1}^L \Delta\mathbf{u}_n^L) = -[\mathbf{A} + \mathbf{S}_{n-1}^L] (\mathbf{u}_n^L - \mathbf{u}_n^G)$$

On a donc montré que la mise à jour SR1, appliquée au problème local, s'écrit de la manière suivante :

$$\boxed{\mathbf{S}_n^L = \mathbf{S}_{n-1}^L - \frac{\hat{\mathbf{r}}_n \hat{\mathbf{r}}_n^T}{\hat{\mathbf{r}}_n^T \Delta\mathbf{u}_n^L}} \quad (4.44)$$

où l'on a posé :

$$\hat{\mathbf{r}}_n = [\mathbf{A} + \mathbf{S}_{n-1}^L] (\mathbf{u}_n^L - \mathbf{u}_n^G) \quad (4.45)$$

D'après (4.41), les opérateurs globaux utilisés pour la correction globale sont obtenus par la même mise à jour :

$$\mathbf{S}_n^G = \mathbf{S}_{n-1}^G - \frac{\hat{\mathbf{r}}_n \hat{\mathbf{r}}_n^T}{\hat{\mathbf{r}}_n^T \Delta \mathbf{u}_n^L} \quad (4.46)$$

En appliquant l'identité de Sherman-Morrison, on en déduit la formule permettant de mettre en œuvre la correction globale accélérée : pour tout second membre \mathbf{r} ,

$$\boxed{[\mathbf{S}_n^G]^{-1} \mathbf{r} = [\mathbf{S}_{n-1}^G]^{-1} \mathbf{r} + [\mathbf{S}_{n-1}^G]^{-1} \hat{\mathbf{r}}_n \frac{\hat{\mathbf{r}}_n^T [\mathbf{S}_{n-1}^G]^{-1} \mathbf{r}}{\hat{\mathbf{r}}_n^T (\Delta \mathbf{u}_n^L - [\mathbf{S}_{n-1}^G]^{-1} \hat{\mathbf{r}}_n)}} \quad (4.47)$$

■ Preuve de la relation (4.43)

Il reste à établir (4.43) de manière rigoureuse. Pour cela, nous utilisons tout d'abord (4.41) pour écrire que :

$$\mathbf{S}_{n-1}^L (\mathbf{u}_n^G - \mathbf{u}_{n-1}^L) = [\mathbf{S}_{n-1}^G - \mathbf{S}_C^G] (\mathbf{u}_n^G - \mathbf{u}_{n-1}^L)$$

Or, \mathbf{S}_{n-1}^G est l'opérateur utilisé lors de la $n+1$ -ième correction globale. D'après (4.35) et (4.36), on a donc :

$$\mathbf{S}_{n-1}^G (\mathbf{u}_n^G - \mathbf{u}_{n-1}^L) = \mathbf{b}_C^G - \mathbf{h}^L(\mathbf{u}_{n-1}^L) - \mathbf{S}_C^G \mathbf{u}_{n-1}^L$$

et les deux relations ci-dessus donnent, après simplification des $\mathbf{S}_C^G \mathbf{u}_{n-1}^L$:

$$\mathbf{S}_{n-1}^L (\mathbf{u}_n^G - \mathbf{u}_{n-1}^L) = \mathbf{b}_C^G - \mathbf{h}^L(\mathbf{u}_{n-1}^L) - \mathbf{S}_C^G \mathbf{u}_n^G$$

Finalement, nous utilisons le fait que la dernière solution globale (*ie.* \mathbf{u}_n^G) et la dernière solution locale (*ie.* \mathbf{u}_{n-1}^L) sont admissibles, ce qui signifie qu'elles vérifient respectivement (4.2) et (4.1). Il reste donc :

$$\mathbf{S}_{n-1}^L (\mathbf{u}_n^G - \mathbf{u}_{n-1}^L) = -\lambda_{n-1}^L - \lambda_{n,C}^G$$

qui n'est autre que la relation cherchée (4.43).

3.3.2 Mise en œuvre

La mise en œuvre suit les mêmes principes que pour le raccord en déplacement : dans un souci d'efficacité, aucune matrice n'est explicitement calculée ou stockée. Au lieu de cela, on travaille directement sur des vecteurs, en multipliant à droite les différentes équations matricielles par les seconds membres requis.

L'algorithme est cependant beaucoup plus complexe, en raison du grand nombre de quantités mises en jeu. Ainsi, la correction globale doit s'effectuer à l'aide du

« résidu mixte » $\mathbf{r}_n = [\mathbf{A} + \mathbf{S}_n^L] (\mathbf{u}_n^L - \mathbf{u}_n^G)$, tandis que les opérateurs sont mis à jour à l'aide du terme « chapeau » $\hat{\mathbf{r}}_n = [\mathbf{A} + \mathbf{S}_{n-1}^L] (\mathbf{u}_n^L - \mathbf{u}_n^G)$. De même, les différents résidus sont calculés à l'aide des opérateurs sécants locaux \mathbf{S}_n^L et \mathbf{S}_{n-1}^L , tandis que la correction globale proprement dite fait intervenir l'opérateur global \mathbf{S}_n^G ; aucune de ces quantités n'étant explicitement construite, chaque appel à l'un de ces opérateurs se traduit par une succession d'appels récursifs des formules de mise à jour. Schématiquement, la correction globale accélérée s'effectue, à chaque itération, selon cinq grandes étapes :

1. On calcule $\mathbf{r}^0 = [\mathbf{A} + \mathbf{S}_1^G] (\mathbf{u}_n^L - \mathbf{u}_n^G)$.
2. On effectue une première correction globale non accélérée, c'est-à-dire que l'on calcule $\mathbf{S}^{G-1} \mathbf{r}^0$.
3. Par des applications successives de (4.44), on calcule $\hat{\mathbf{r}}_n$ (défini par (4.45)) puis \mathbf{r}_n (défini par (4.39)).
4. Par des applications successives de (4.47), on calcule $\mathbf{S}_{n-1}^{G-1} \mathbf{r}^0$ puis $\mathbf{S}_n^{G-1} \mathbf{r}^0$.
5. A l'aide des termes correctifs précédemment stockés, on en déduit le terme $\mathbf{S}_{n-1}^{G-1} \hat{\mathbf{r}}_n$ utilisé dans (4.47), et $\mathbf{S}_n^{G-1} \mathbf{r}_n$.

Là encore, l'avantage de ce mode opératoire est qu'aucune matrice n'étant construite, les coûts d'application de la mise à jour SR1 demeurent très faibles.

3.3.3 Illustration

Nous terminons par une illustration des performances de cette approche sur l'exemple 2D habituel. La Figure 4.10 représente l'évolution de l'erreur en déplacement d'interface au fil des itérations, pour les mêmes raccords mixtes multi-échelles que précédemment, cette fois-ci avec l'accélération SR1. On observe une convergence très rapide, puisque des niveaux d'erreur inférieurs à 0,1% sont obtenus dès la deuxième itération.

Encore une fois, l'effet de l'accélération est encore plus prononcé sur l'erreur en déformation plastique cumulée, voir Figure 4.11 : l'erreur devient voisine de 10^{-4} au bout de deux itérations.

4 Perspectives d'amélioration

Au final, le raccord mixte offre un cadre prometteur pour obtenir une convergence très rapide et des solutions locales de bonne qualité en peu d'itérations. Sa mise au point est cependant relativement récente et à ce titre, des améliorations sont envisagées, concernant essentiellement l'approximation « à deux échelles » du complément de Schur de la zone complémentaire.

En effet, pour que cette approximation soit efficace, il faut que les efforts « micro » aient une longueur de variation la plus faible possible; d'après le principe de Saint-Venant, leur influence est alors très localisée, et peut donc être capturée

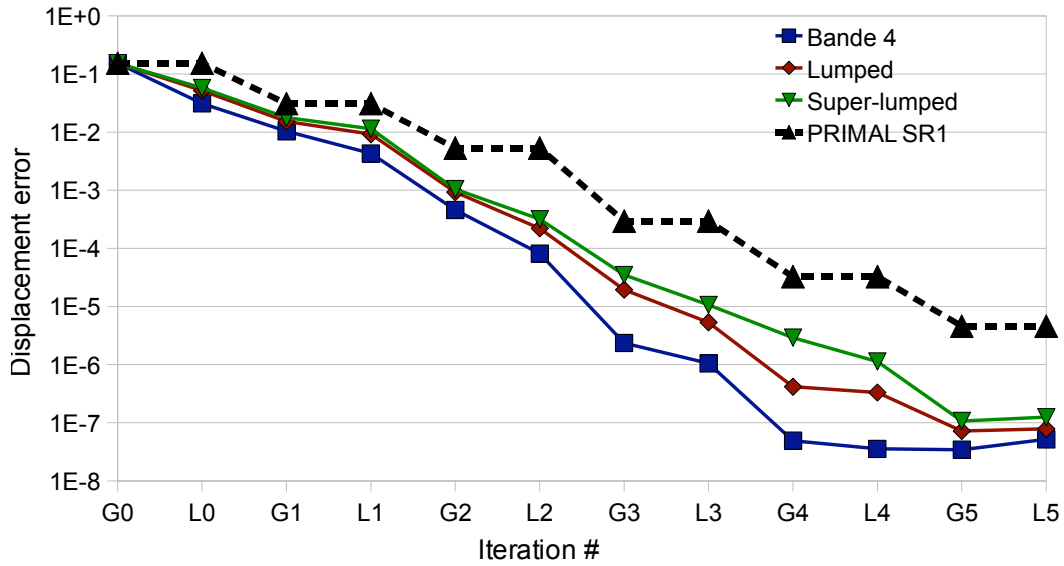


Figure 4.10: Evolution de l'erreur en déplacement pour quelques approximations multi-échelles, avec accélération SR1.

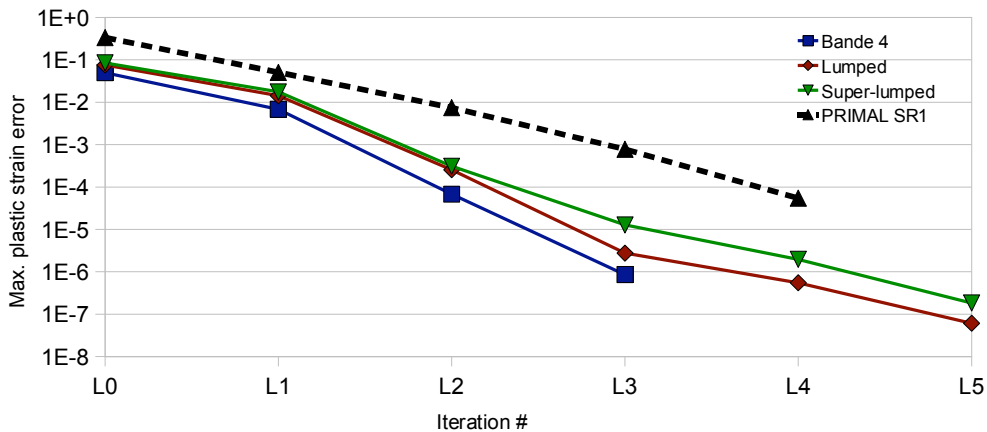


Figure 4.11: Evolution de l'erreur en déformation plastique pour quelques approximations multi-échelles, avec accélération SR1.

efficacement par les approximations « courte distance » employées. Pour tenter de rendre les efforts « micro » plus oscillants qu'ils ne le sont actuellement, une idée possible serait de découper l'interface en « patches » regroupant les faces des éléments concernés, et de définir la projection « micro » de sorte à *annuler la résultante et le moment des efforts sur chacun de ces groupes* de faces. Ainsi, la longueur de variation des efforts serait, au plus, la taille de ces groupes.

La définition des bases « macro » correspondantes n'est cependant pas triviale. Pour les efforts, une approche simple serait de choisir des champs d'efforts surfaciques constants et linéaires sur chaque « patch », à l'image de ce qui est fait dans

l'approche LaTIn micro/macro ; mais alors, deux problèmes se posent. Le premier est de trouver une base « macro » en déplacement biorthogonale afin de pouvoir construire les projecteurs — sachant que dans le cadre des éléments finis traditionnels, il est naturellement impossible d'utiliser la même base que pour les efforts. Le second est que comme nous l'avons vu à plusieurs reprises dans cette thèse, il est impossible d'imposer des efforts sur la zone complémentaire de manière non-intrusive, et le calcul de la partie « macro » du complément de Schur pourrait donc être délicat. Une solution possible serait d'appliquer cette technique pour estimer le complément de Schur global *complet* puis de lui soustraire les contributions de la zone d'intérêt (par exemple à l'aide des outils présentés au Chapitre 5) ; l'avantage de cette méthode est que les conditions aux limites globales seraient entièrement conservées (alors qu'avec l'approche actuelle, l'interface se voit affecter une condition en déplacement), mais les modalités de sa mise en œuvre sont encore à préciser.

Ainsi, le raccord mixte, bien que déjà performant, offre de nombreuses perspectives d'amélioration, qui feront l'objet de travaux futurs.

Chapitre 5

Mise en œuvre autour d'un logiciel du commerce

Ce chapitre apporte des précisions sur la mise en œuvre non-intrusive de la stratégie autour du logiciel de calcul généraliste Abaqus/Standard. Quelques limitations et problèmes liés à l'aspect non-intrusif sont mis en évidence, et un exemple de script est détaillé.

Sommaire

1	Principe de la mise en œuvre	146
1.1	L'environnement de calcul d'Abaqus/Standard	146
1.2	Structure de l'implémentation	149
2	Quelques problèmes rencontrés	150
2.1	Accès aux efforts intérieurs	151
2.2	Mise en œuvre dans un schéma incrémental	153
2.3	Appel du comportement tangent local	154
2.4	Non-conservation de la factorisation globale	154
3	Un exemple de script	156

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié la méthode d'un point de vue essentiellement théorique, en détaillant sa formulation et en montrant comment en accroître les performances numériques. Nous nous intéressons maintenant aux aspects pratiques, à savoir la mise en œuvre de la stratégie à l'aide d'un logiciel de calcul du commerce.

Au cours de cette thèse, nous avons utilisé le logiciel de calcul Abaqus/Standard comme solveur pour *les deux modèles*. Le choix d'un solveur unique est surtout dicté par un souci de simplicité, et de conformité avec le cas-test fourni par Snecma qui sera présenté au chapitre suivant. la stratégie est cependant conçue de sorte que le modèle local puisse être analysé à l'aide d'un solveur séparé, et les développements théoriques des trois chapitres précédents s'inscrivent dans cette démarche; le couplage d'Abaqus avec un « code recherche » au moyen de la stratégie fera l'objet de travaux ultérieurs.

Comme nous allons le voir, le caractère non-intrusif de la méthode rend sa mise en œuvre relativement aisée, mais l'utilisation d'un logiciel commercial implique forcément un certain nombre de limitations, dont nous donnerons quelques exemples.

1 Principe de la mise en œuvre

Conformément au caractère non-intrusif de la méthode, l'idée essentielle de sa mise en œuvre est d'*utiliser Abaqus pour réaliser l'intégralité des calculs*, c'est-à-dire le pré-traitement et les résolutions numériques; les deux modèles sont définis de manière habituelle, et le processus d'analyse est mené normalement, sans aucune intervention extérieure dans le fonctionnement d'Abaqus.

Les tâches devant être réalisées à l'extérieur du logiciel, qui nécessitent un développement externe, sont donc des *tâches de haut niveau*, utilisant Abaqus comme « boîte noire » sans interférer dans le déroulement des calculs. Afin de préciser le contexte de l'implémentation, nous apportons d'abord quelques précisions sur l'environnement de calcul offert par Abaqus/Standard; nous décrivons ensuite les grandes lignes des développements réalisés.

1.1 L'environnement de calcul d'Abaqus/Standard

Abaqus/Standard est un solveur généraliste basé sur un schéma traditionnel d'intégration implicite (c'est-à-dire qu'à chaque pas de temps, un système d'équations est résolu) et pouvant traiter une grande variété de problèmes : linéaires ou non-linéaires, statiques ou dynamiques, dans de nombreux domaines.

Nous décrivons ici quelques fonctionnalités de ce solveur, en rapport avec la stratégie; ceci permet de justifier quelques-uns des choix d'implémentation et de définir, pour les lecteurs peu familiers d'Abaqus, les principaux termes employés par la suite.

1.1.1 Définition des modèles

Un modèle Abaqus est défini à l'aide d'un fichier texte nommé *fichier d'entrée*, portant l'extension `.inp`.

Dans les cas les plus simples, ce fichier contient toutes les composantes usuelles d'un modèle par éléments finis : maillage, relations de comportement, conditions aux limites et chargement. Ce dernier inclut généralement plusieurs étapes (`*STEP`) ; dans le cas d'un problème linéaire, il est également possible d'analyser *simultanément* plusieurs cas de charges, ce qui est notamment utilisé dans l'approche mixte pour construire la partie « macro » de la rigidité **A** (voir Chapitre 4, Section 2). Le fichier d'entrée précise également quelles quantités Abaqus doit écrire dans les fichiers de sortie, et à quel endroit.

Pour les modèles plus volumineux, toutes ces informations peuvent être contenues dans des fichiers séparés, et le fichier d'entrée contient alors des liens (`*INCLUDE`) vers ces fichiers. En outre, certaines distributions d'Abaqus intègrent un pré-processeur (Abaqus/CAE) capable de générer automatiquement le fichier d'entrée à partir d'une interface graphique ou d'instructions Python ; compte tenu de la simplicité des échanges entre les modèles, l'implémentation retenue ne fait pas appel à ce module.

1.1.2 Résultats des calculs

Les résultats des calculs peuvent être écrits dans plusieurs types de fichiers : fichiers texte (`.dat`), binaires séquentiels (`.fil`) ou bases de données (`.odb`). C'est ce dernier format qui est utilisé dans l'implémentation de la stratégie ; Abaqus est en effet fourni avec de nombreuses fonctions permettant de lire ces fichiers et d'en extraire une quantité donnée.

L'utilisateur est complètement libre de choisir quelles quantités seront écrites dans quels fichiers de sortie, en quels nœuds ou éléments (selon la quantité considérée) et à quelle fréquence, ce qui permet de ne pas écrire d'informations inutiles et de limiter le volume d'un jeu de données au minimum nécessaire. Naturellement, la liste des sorties doit être spécifiée *avant* de lancer le calcul.

1.1.3 Le zoom descendant (*submodeling*) avec Abaqus

A l'instar de nombreux solveurs généralistes, Abaqus gère le zoom descendant de façon native. Le principe de cette technique est détaillé au Chapitre 1 ; le modèle local peut être piloté soit en déplacement, soit en contraintes.

Pour utiliser cette technique, il suffit de déclarer, dans la définition du modèle local, quels nœuds ou faces doivent être soumis au pilotage, et de donner le nom du fichier `.odb` dans lequel se trouvent les résultats globaux correspondants ; Abaqus se charge alors d'interpoler ou d'extrapoler les résultats globaux sur le maillage local (dans le cas de maillages incompatibles) et d'appliquer les valeurs obtenues au bon endroit, en effectuant également une interpolation en temps si nécessaire.

Bien que son utilisation soit simple, *l'implémentation de la stratégie ne fait pas appel à cette fonctionnalité d'Abaqus*, et ce pour deux raisons. La première est que cela demanderait de mettre à jour le fichier `.odb` global à chaque itération, ce qui est inutilement coûteux et assez peu commode ; en effet, cette opération exige notamment de manipuler des solutions définies sur toute la structure, alors que *seule la condition d'interface* a besoin d'être mise à jour d'une itération à l'autre. La seconde est que cette fonctionnalité se prête mal à l'emploi d'une condition aux limites mixte, qui n'utilise ni un champ de déplacements ni un champ de contraintes, mais directement un second membre calculé hors d'Abaqus (de la forme $-\lambda_{\Gamma,C}^G + \mathbf{A}u_{\Gamma}^G$, voir Chapitre 2, Section 3).

Toutefois, nous allons voir que l'implémentation retenue se base sur des jeux de données très proches de ceux qu'utilise cette fonctionnalité d'Abaqus.

1.1.4 Interfaces avec des langages de programmation

Abaqus dispose d'interfaces avec plusieurs langages de programmation : Fortran pour étendre les fonctionnalités du solveur à l'aide de routines appelées lors de l'analyse, et Python ou C++ pour automatiser certaines manipulations de données. Ici, nous trouvons dans le deuxième cas de figure puisque les tâches à accomplir consistent à :

- lire des résultats de calculs fournis par Abaqus,
- mettre en œuvre les techniques d'accélération,
- calculer les résidus et les conditions aux limites,
- écrire ceux-ci dans des fichiers et les lier aux modèles,
- lancer les calculs et attendre qu'ils se terminent.

Comme nous l'avons vu précédemment, le coût de ces opérations est généralement négligeable devant celui des calculs par éléments finis. La vitesse d'exécution n'est donc pas un facteur essentiel et nous avons choisi Python plutôt que C++ pour implémenter la stratégie : la facilité de mise en œuvre et la portabilité de Python, ainsi que la possibilité de faire des tests en direct dans l'interpréteur fourni avec Abaqus, nous ont semblé être des critères plus déterminants que la vitesse d'exécution du C++. Les possibilités d'interfaçage d'Abaqus avec les deux langages sont en effet très similaires.

1.1.5 Reprise d'un calcul

Enfin, Abaqus dispose de fonctionnalités permettant de reprendre (`*RESTART`) un calcul s'étant achevé. Cette opération se base sur des fichiers spécifiques, dits *fichiers de reprise* ; pour qu'un calcul puisse être repris, son fichier `.inp` doit spécifier que les fichiers de reprise doivent être écrits, et à quelle étape. Il est alors possible de recommencer certaines étapes ayant échoué et/ou d'ajouter de nouvelles étapes au calcul, sans devoir redéfinir le modèle ou recalculer les étapes précédentes ; au lieu de cela, Abaqus lit directement les fichiers de reprise.

Dans l'implémentation de la stratégie, cette fonctionnalité est utilisée lors de l'étape de correction globale : on ajoute ainsi, à l'issue de l'analyse globale, une étape supplémentaire au cours de laquelle le résidu est appliqué en tant que chargement additionnel, et dont les fichiers de sortie sont réduits, par défaut, au strict minimum — c'est-à-dire au déplacement d'interface, utilisé lors de l'analyse locale suivante.

1.2 Structure de l'implémentation

Nous présentons maintenant les grandes lignes de l'implémentation de la stratégie en Python, réalisée au cours de cette thèse. Elle se présente sous la forme d'un script principal contenant l'algorithme d'échange décrit dans les chapitres précédents, et de modules auxiliaires implémentant les différentes tâches à réaliser.

1.2.1 Stockage des quantités échangées

L'interface Abaqus/Python est accompagnée de fonctions permettant de manipuler directement les résultats des calculs stockés dans les fichiers `.odb`. Cependant, ces fonctions ne permettent d'effectuer que des opérations simples (addition, soustraction, produit par un scalaire) et souffrent de nombreuses limitations (impossibilité de modifier les valeurs, de combiner des résultats stockés en simple et double précision, nécessité de maintenir les fichiers ouverts...).

Pour cette raison, le script utilise son propre mode de stockage des quantités nodales d'interface. L'approche en déplacement, accélérée ou non, n'utilise que des vecteurs ; l'approche mixte utilise également des matrices pleines (il s'agit en effet d'approximations de compléments de Schur et de matrices rectangulaires contenant des vecteurs de base). Toutes ces quantités étant définies sur l'interface, une table de correspondance unique permet de faire le lien entre position dans le vecteur et numéro de nœud/ddl ; ce mode de repérage implique que les numéros des nœuds d'interface des deux modèles correspondent, mais facilite la communication avec Abaqus.

1.2.2 Entrées et sorties

Afin d'échanger des données avec Abaqus, le script contient également des fonctions d'entrées/sorties : une fonction de lecture permet d'extraire les déplacements ou les efforts d'interface d'un fichier `.odb` et de les placer dans un vecteur (ou une matrice s'il y a plusieurs cas de charges simultanés), et deux fonctions d'écriture permettent de créer un fichier texte contenant des déplacements ou des efforts imposés à partir d'un vecteur (ou d'une matrice ; chaque colonne correspond alors à un cas de charge). Le lien de ce fichier texte avec les modèles existants peut être effectué :

- soit en l'incluant au sein d'un fichier `.inp`, avec un `*INCLUDE` (cas de l'analyse locale, pour laquelle il faut spécifier une condition aux limites)

- soit en reprenant une analyse existante, avec un `*RESTART` (cas de la correction globale, pour laquelle il faut spécifier un chargement additionnel).

La fonction de lecture fait appel aux méthodes d'accès aux fichiers `.odb` fournies avec Abaqus; les fonctions d'écriture, quant à elles, n'utilisent que les méthodes standard d'écriture de fichiers ASCII sous Python. Toutes ces fonctions se basent sur la table de correspondance évoquée précédemment.

Enfin, pour la variante mixte, une fonction supplémentaire permet d'écrire la « rigidité mixte » **A** dans un fichier texte; il faut alors ajouter une ligne dans le fichier `.inp` local pour que cette matrice soit assemblée au sein du problème.

1.2.3 Accélération et raccord mixte

L'accélération SR1 fait elle aussi l'objet d'un module séparé, afin d'alléger le script principal; ceci est rendu possible par sa formulation non-intrusive, qui permet d'appliquer la mise à jour de façon externe au solveur en se basant uniquement sur les déplacements nodaux et les résidus. Une classe spécifique a été développée pour stocker les différentes variables internes de la méthode (résidus et termes correctifs successifs) et mettre automatiquement les solutions à jour sans encombrer le script principal.

Le cas du raccord mixte est un peu plus complexe. En effet, contrairement à la variante en déplacement qui ne demande que peu d'adaptations par rapport au zoom descendant d'Abaqus et est donc entièrement automatisable, la variante mixte demande un travail de préparation plus conséquent pour construire l'approximation du complément de Schur. Des scripts d'assistance ont donc été développés : par exemple, les « couches d'éléments » sont construites par des scripts analysant la table de connectivité globale et générant des fichiers `.inp`, qui calculent alors leurs compléments de Schur au moyen des fonctions de sous-structuration d'Abaqus (`*SUBSTRUCTURE`). De même, la construction des déplacements « macro » est elle aussi réalisée par un script à partir des coordonnées des nœuds, et la réponse des différents modèles à ces déplacements « macro » est aisément obtenue grâce aux outils d'entrée/sortie évoqués ci-dessus.

La principale difficulté provient alors du fait que l'obtention de la rigidité mixte, selon (4.30), demande d'effectuer des calculs sur des matrices *pleines* dont la taille est celle de l'interface; ces opérations, potentiellement coûteuses si on les effectue dans un script, sont actuellement réalisées en externe (sous Matlab ou Scilab) en exportant les matrices sous forme de fichiers texte.

2 Quelques problèmes rencontrés

Nous avons vu que le caractère non-intrusif de l'approche permet une implémentation relativement simple, puisqu'aucun développement *au sein* d'Abaqus, visant à en altérer le fonctionnement, n'est *a priori* nécessaire.

Cette démarche limite cependant la marge de manœuvre dont nous disposons pour concevoir et mettre en œuvre la méthode : elle oblige en effet à se restreindre exclusivement aux opérations permises par le logiciel cible. Or, même en respectant le cadre présenté aux chapitres précédents (à savoir des calculs par éléments finis standard sur des modèles qui ne sont jamais modifiés, en n'échangeant que des déplacements et efforts nodaux), quelques problèmes peuvent se poser, liés à certaines fonctionnalités absentes ou non paramétrables dans le logiciel, et plus ou moins difficiles à surmonter. Nous donnons ici quatre exemples représentatifs.

2.1 Accès aux efforts intérieurs

Un premier exemple de difficulté rencontrée lors de l'implémentation de la méthode est l'accès aux efforts intérieurs — et plus particulièrement à $\lambda_{\Gamma,C}^G$, le vecteur des *efforts nodaux d'interface exercés sur la zone complémentaire*, qui sont intérieurs au modèle global. Cette quantité est utilisée :

- dans la variante en déplacement, lors du calcul du résidu d'équilibre $\mathbf{r}_\Gamma = -(\lambda_\Gamma^L + \lambda_{\Gamma,C}^G)$;
- dans la variante mixte, lors du calcul de la partie « macro » du complément de Schur de la zone complémentaire, qui demande d'obtenir les efforts de réaction de celle-ci à des déplacements « macro » imposés ;
- enfin, toujours dans la variante mixte, lors du calcul de la « quantité mixte » à imposer au second membre de l'analyse locale : $-\lambda_\Gamma^L + \mathbf{A}\mathbf{u}_\Gamma^G$.

Or, les seuls efforts nodaux qu'Abaqus/Standard peut fournir sont des *efforts extérieurs* : seconds membres et efforts de réaction conjugués aux déplacements imposés, ces derniers n'étant naturellement disponibles que sur les degrés de liberté soumis à une condition en déplacement (c'est par exemple le cas de λ_Γ^L dans l'approche en déplacement). Les efforts intérieurs ne sont donc pas directement accessibles sous Abaqus¹. Par ailleurs, leur calcul direct « en externe » n'est pas non plus envisageable, puisque l'on a formellement :

$$\lambda_{\Gamma,C}^G = \mathbf{S}_{\Gamma,C}^G \mathbf{u}_\Gamma^G - \mathbf{b}_{\Gamma,C}^G \quad (5.1)$$

et ce calcul demande donc d'assembler la matrice de rigidité et le second membre de la *zone complémentaire seule*, ce qui n'est clairement pas souhaitable.

Pour obtenir ces efforts de la manière la moins intrusive et la moins coûteuse possible, la solution retenue consiste à définir un **modèle auxiliaire** de la partie « remplacée » du modèle global, c'est-à-dire de la *zone d'intérêt telle qu'elle est décrite dans le modèle global* : élastique linéaire, sans raffinement de maillage et sans détails géométriques supplémentaires. Ce modèle est schématisé sur la Figure 5.1 ; sa construction demande certes quelques manipulations du jeu de données, mais est très rapide dans un certain nombre de cas :

1. En fait, il est possible de récupérer des efforts nodaux intérieurs, mais uniquement sous forme de *contributions par élément*, ce qui demanderait un réassemblage ; ce choix n'est pas celui qui a été retenu.

- lorsque le modèle local ne sert qu'à introduire de la plasticité (c'est le cas de l'exemple 3D Snecma présenté au chapitre suivant), il suffit de remplacer la relation de comportement ;
- lorsque le modèle local est défini suite à l'application d'un estimateur d'erreur ou d'un critère en contraintes, la liste des éléments globaux concernés est normalement disponible, et la zone d'intérêt peut alors être facilement « découpée » à l'aide d'un script.

De plus, le modèle auxiliaire est élastique linéaire, et généralement de petite taille : un calcul mené sur ce modèle a généralement un coût négligeable devant celui d'une itération.

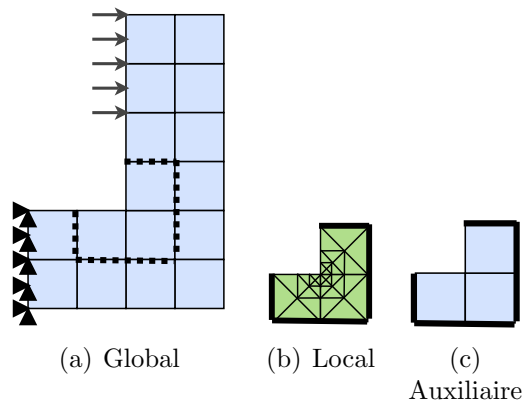


Figure 5.1: Problèmes éléments finis global, local et auxiliaire.

En utilisant ce modèle, $\lambda_{\Gamma,C}^G$ peut alors être obtenu de manière non-intrusive et peu coûteuse. En effet, si l'on impose \mathbf{u}_{Γ}^G sur la frontière du modèle auxiliaire, l'effort de réaction obtenu vaut $\lambda_{\Gamma,I}^G$. Or, la somme $\lambda_{\Gamma,C}^G + \lambda_{\Gamma,I}^G$ — qui représente le *déséquilibre de l'interface* intérieur au modèle global, artificiellement introduit par la méthode comme expliqué au Chapitre 2, Section 1 — est connue : à chaque correction globale, on lui ajoute le résidu. Elle est donc égale, à une itération donnée, à la *somme de tous les résidus précédents*. Il suffit ainsi de garder cette somme en mémoire, et d'y soustraire l'effort de réaction du modèle auxiliaire pour obtenir $\lambda_{\Gamma,C}^G$. Une classe spécifique a été développée pour effectuer cette opération de manière transparente, afin d'alléger le script principal.

Ce mode opératoire appelle néanmoins des précautions particulières en présence de l'accélération SR1. Cette dernière modifie en effet la rigidité du modèle global ; lors de la correction globale, la quantité ajoutée au « déséquilibre global » $\lambda_{\Gamma,C}^G + \lambda_{\Gamma,I}^G$ n'est donc plus égale au résidu, mais à :

$$\mathbf{S}_{\Gamma}^G [\mathbf{S}_{\Gamma}^G + \Delta \mathbf{S}_{\Gamma}]^{-1} \mathbf{r}_{\Gamma} = \mathbf{S}_{\Gamma}^G \Delta \mathbf{u}_{\Gamma}^G$$

Il est donc nécessaire de mettre correctement à jour le « déséquilibre global » afin de ne pas introduire d'erreurs dans l'évaluation des efforts intérieurs, qui fausseraient les résultats des itérations suivantes (car la solution globale ne vérifierait plus

l'admissibilité dans Ω_C). Dans le cas de la variante en déplacement, l'expression ci-dessus s'écrit (les indices Γ sont omis pour alléger l'expression) :

$$\mathbf{S}^G \Delta \mathbf{u}^G = \mathbf{r} + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{r}_j \frac{\mathbf{r}_j^T \Delta \mathbf{u}^G}{\mathbf{r}_j^T \Delta \mathbf{u}_j^G} \quad (5.2)$$

où n est le numéro de l'itération courante ; la mise à jour du « déséquilibre global » ne demande donc aucun calcul matriciel supplémentaire une fois $\Delta \mathbf{u}^G$ calculé. Pour la variante mixte, le principe est exactement le même.

2.2 Mise en œuvre dans un schéma incrémental

Un deuxième exemple de difficulté concerne le traitement des histoires de chargement complexes, avec de multiples étapes et incréments. En effet, la technique d'échange vue au Chapitre 2 est conçue pour être utilisée de manière *incrémentale* ; cela signifie que le chargement des deux problèmes doit être divisé en incréments identiques et que pour chacun d'eux, les échanges sont menés jusqu'à la convergence avant de passer à l'incrément suivant.

Or, ce mode opératoire est très mal adapté au fonctionnement d'Abaqus, puisque ce dernier est conçu pour traiter des problèmes d'évolution complets, munis de *toute l'histoire du chargement* ; la mise en œuvre d'un schéma incrémental impliquerait donc de suspendre l'exécution d'Abaqus à chaque incrément et de reprendre le calcul ensuite. Un calcul Abaqus ne pouvant être « mis en pause », cela demanderait un découpage fastidieux des fichiers d'entrée et du chargement, et pèserait lourdement sur les performances ; pour un problème industriel comportant quelques centaines d'incrément, les coûts supplémentaires (de réécriture des données et de pré-traitement) engendrés par ces opérations risquent de s'avérer rédhibitoires. De plus, une telle approche exigerait de prévoir, dès l'analyse globale, la taille des pas de temps requis pour l'analyse locale, et donc les difficultés de convergence de cette dernière ; cela n'est pas toujours possible et, dans le cas contraire, risquerait encore une fois d'alourdir fortement le coût de la méthode.

Pour ces raisons, un tel schéma n'a pas été implémenté, et la mise en œuvre de la méthode est pour l'instant limitée au cas où *le chargement est monotone et appliqué en un seul incrément global* (nous verrons au Chapitre 6, Section 1.3.3 qu'il est possible d'appliquer le chargement local correspondant en plusieurs incréments, c'est-à-dire de « sous-cycler », au prix d'une erreur résiduelle très faible). Cette limitation très pénalisante empêche actuellement la résolution de nombreux problèmes industriels. Afin de la surmonter, nous envisageons de munir la méthode d'un schéma *global en temps*, permettant de traiter à chaque itération des problèmes d'évolution complets tout en utilisant des discrétisations temporelles différentes pour les deux problèmes ; un premier résultat allant dans cette direction est présenté au Chapitre 6, Section 1.3.3.

2.3 Appel du comportement tangent local

Une autre difficulté, rencontrée lors des tests de l'accélération « tangente », est la récupération de la matrice tangente locale — ou, plus généralement, la réalisation d'un calcul local avec un *comportement tangent* lorsque l'on utilise une relation de comportement élasto-plastique tirée de la bibliothèque d'Abaqus. En effet, lorsque l'on résout un problème élasto-plastique linéarisé, Abaqus fait toujours appel au module d'Young et non au module tangent consistant ; en d'autres termes, *la plasticité est purement et simplement ignorée* lors de la linéarisation du problème, et ce choix n'est pas modifiable.

Afin d'utiliser le comportement tangent correct, il est donc nécessaire de faire appel à une relation de comportement externe, soit sous la forme d'une routine Fortran (UMAT), soit en utilisant un logiciel externe couplé avec Abaqus (par exemple, certaines applications Snecma utilisent le module Z-mat de ZeBuLoN, qui possède une interface de couplage avec Abaqus). Il faut alors s'assurer que cette relation de comportement retourne bien la matrice jacobienne $\frac{d\Delta\sigma}{d\Delta\epsilon}$ correspondant au module tangent consistant.

2.4 Non-conservation de la factorisation globale

Enfin, un dernier obstacle, pesant fortement sur les performances actuelles de la méthode, est l'impossibilité de conserver la factorisation de la matrice de rigidité globale : dans l'état actuel de l'implémentation, Abaqus réassemble et refactorise systématiquement la matrice à chaque itération. Or, le modèle global n'est jamais modifié au cours des itérations : ni le maillage, ni les conditions aux limites, ni la relation de comportement ne subissent de modifications, et aucune non-linéarité géométrique ou de contact n'est considérée. Par conséquent, la matrice de rigidité n'est jamais modifiée, et il serait vraisemblablement moins coûteux de ne la factoriser qu'une seule fois et de conserver sa factorisation.

Ce problème est dû au fait qu'actuellement, la correction globale est effectuée au moyen d'une étape de chargement supplémentaire (*STEP). Or, le passage sur un nouveau *STEP entraîne toujours un réassemblage et une refactorisation de la matrice de rigidité, même lorsque le problème est purement linéaire : il s'agit là encore d'un comportement d'Abaqus/Standard qui ne peut être modifié. Afin de contourner cette limitation, deux possibilités ont été envisagées.

■ Appel à un solveur externe

La première idée consiste à effectuer la factorisation et la résolution en externe, en demandant simplement à Abaqus d'écrire la matrice de rigidité globale dans un fichier. La résolution est alors menée dans un code externe, basé sur une bibliothèque de calcul performante adaptée aux grandes matrices creuses et symétriques (plusieurs ont été testées, telles que PySparse en Python, CHOLMOD en C++...).

Cependant, la résolution à l'aide de ces bibliothèques s'est avérée bien plus lente que l'appel au solveur d'Abaqus, même avec les refactorisations. Une cause possible

de ce problème est que le solveur d'Abaqus dispose d'informations (par exemple, la table de connectivité) lui donnant directement la structure de la matrice à analyser, et met en œuvre des techniques bien adaptées aux systèmes à résoudre (le fonctionnement interne du solveur n'est pas connu, mais la documentation d'Abaqus évoque une résolution multifrontale, permettant de ne jamais assembler la matrice complète). À l'inverse, une résolution externe demande d'assembler complètement la matrice, de l'écrire dans un fichier (Abaqus utilise des fichiers texte, qui deviennent vite très volumineux), puis de la relire en externe, de l'analyser pour trouver sa structure (la table de connectivité n'étant plus disponible) avant de la factoriser : au vu du faible nombre d'itérations requis par la méthode, l'opération peut ainsi s'avérer désavantageuse.

De plus, cette approche ne permet pas forcément une bonne portabilité de la méthode : afin de garantir de bonnes performances, le solveur externe employé doit être adapté à l'architecture de la machine utilisée, qui peut varier énormément d'une application à l'autre. Une utilisation industrielle de cette approche risque donc de demander des développements externes nettement plus coûteux que la simple mise en œuvre de scripts Python, que l'on cherche justement à éviter autant que possible dans le cadre d'une méthode non-intrusive.

■ Altération du fonctionnement d'Abaqus

La seconde idée consiste à forcer Abaqus à conserver la factorisation de la matrice de rigidité, en empêchant le logiciel de passer à l'étape suivante et en maintenant le processus actif d'une itération à l'autre — Abaqus génère en effet des fichiers exécutables effectuant les calculs, lancés à la volée et détruits après utilisation. Signalons que cette idée, en l'état actuel, n'a pu être testée avec succès ; nous la mentionnons néanmoins dans la perspective de travaux futurs.

L'approche consiste à utiliser les possibilités d'extension d'Abaqus à l'aide de routines en Fortran — et plus particulièrement, d'une routine nommée `UEXTERNALDB`, appelée à divers instants de l'exécution d'Abaqus afin de permettre des échanges de données (potentiellement intrusifs) avec un code externe. On peut ainsi imaginer une procédure au cours de laquelle l'exécutable Abaqus correspondant au modèle global serait « mis en pause » entre chaque itérations, et les résidus seraient directement passés au solveur à l'aide de la routine : on éviterait ainsi d'utiliser des `*RESTART` et de changer de `*STEP`, ce qui permettrait théoriquement de conserver la factorisation.

Cependant, il existe peu de moyens de passer un second membre au solveur à l'aide d'une routine ; sur la version d'Abaqus utilisé pour ces tests (6.7-1), seuls les chargements surfaciques (`DLOAD`) peuvent ainsi être manipulés de façon satisfaisante. Pour imposer des efforts nodaux, en l'état actuel de nos connaissances, la seule possibilité est la définition d'un élément utilisateur (`UEL`) englobant toute l'interface, de rigidité nulle, qui irait directement chercher ses seconds membres dans les fichiers écrits par le script et qui serait assemblé sur le problème global ; cependant, cette technique est lourde à mettre en œuvre et entraîne *a priori* des refactorisations dans un certain nombre de cas. L'application pratique de cette idée, qui reste à explorer,

risque donc de s'avérer délicate.

Ces quelques exemples illustrent les difficultés que peut représenter la mise en œuvre d'une méthode, même non-intrusive, au sein d'un logiciel du commerce. Ils montrent qu'il ne suffit pas de s'en tenir à des principes généraux (calculs standard sur modèles non modifiés) pour permettre une mise en œuvre simple, mais qu'il est nécessaire de tenir compte des limitations précises du logiciel cible, et d'avoir une bonne connaissance de ses possibilités d'extension et d'entrées/sorties.

3 Un exemple de script

Nous terminons ce chapitre en donnant un exemple de script implémentant la méthode, allégé pour des raisons de lisibilité (l'écriture de messages à l'écran et dans un fichier log, les validations par rapport à une référence et certaines étapes d'initialisation ont été enlevées) mais néanmoins opérationnel. Ce script correspond à l'approche en déplacement munie de l'accélération SR1 ; il est composé d'une initialisation suivie d'une boucle correspondant aux itérations de la méthode.

```

"""
GlobalLocal.py

Script executable contenant la strategie globale/locale.
"""

execfile('GlobalLocal.cfg')
from GLTools import *

#####
# INITIALISATION #
#####

# CREATION DE LA TABLE DE CORRESPONDANCE NOEUDS/DDL <=> INCONNUES
tableGamma = genereTableDDL(inp=fichierFrontiere, dim=dim)

# INITIALISATION DES ECHANGES
iteration=0
step = 'Step-1'
deplGamma = getFromOdb(nom=nomGlobal, step=step, var='U',
    table=tableGamma)
deplGammaRelatif = 1

# INITIALISATION DES GRANDEURS D'INTERFACE ET DE L'ACCELERATION

```

```

gamma = Gamma(tableGamma)
sr1 = SR1method(init = deplGamma)

# ESTIMATION DE LA NORME DU SECOND MEMBRE
fG = forceEstimate(nom=nomGlobal, step=step)

#####
# DEBUT DES ITERATIONS #
#####

while True:

    #####
    # ANALYSE LOCALE #
    #####

    writeDep(nom=step, data=deplGamma)
    clearJobFiles(nomLocal)
    os.system(abaqus + ' job=' + nomLocal + user)

    clearJobFiles(nomAux)
    os.system(abaqus + ' job=' + nomAux)

    waitForAbaqus(nomLocal)
    waitForAbaqus(nomAux)

    #####
    # CALCUL DU RESIDU et TEST DE CONTINUATION #
    #####

    rfLocal = getFromOdb(nom=nomLocal, step=step, var='RF',
        table=tableGamma)
    rfAux = getFromOdb(nom=nomAux, step=step, var='RF', table=tableGamma)
    r = gamma.residu(rfAux=rfAux, rfLocal=rfLocal)

    # TEST DE CONTINUATION :
    # CRITERES EN RESIDU ET EN STAGNATION + COMPTAGE PAR SECURITE
    etaRes = r.norm()/fG
    if ((etaRes <= etaResMax and etaStagn <= etaStagnMax) or
        iteration >= iterMax):
        break

    #####

```

```

# CORRECTION GLOBALE #
#####

clearJobFiles(nomRemontee, inp=True)
iteration += 1

# 1. CORRECTION NON ACCELEREE
writeInp(nom=nomRemontee, step='CorrectionGlobale', var='F', data=r)
os.system(abaqus + ' job=' + nomRemontee + ' oldjob=' + nomGlobal)
waitForAbaqus(nomRemontee)
duGamma = getFromOdb(nom=nomRemontee, step='CorrectionGlobale',
                    var='U', table=tableGamma)

# 2. ACCELERATION SR1
duGammaNew, rNew = sr1.update(duGamma, r)
gamma.update(rNew)

# 3. MAJ DU DEPLACEMENT D'INTERFACE
deplGamma += duGammaNew

# 4. CALCUL DE L'INDICATEUR DE STAGNATION
etaStagn = norm(duGammaNew)/norm(deplGamma)

# FIN BOUCLE - EOF

```

Ce script est destiné à être exécuté à l'issue d'une première analyse globale (le fichier `.odb` global existe donc), ayant par exemple servi à préciser la localisation du zoom comme indiqué au Chapitre 2.

Il commence par la lecture d'un fichier de configuration dans lequel l'utilisateur précise tous les paramètres utiles, comme les noms des différents fichiers, les seuils de convergence... Il importe ensuite le module `GLTools`, qui regroupe tous les outils utiles : classes de stockage des quantités d'interface (vecteurs et matrices), fonctions d'entrées/sorties (`getFromOdb()` pour lire des résultats, `writeInp()` pour écrire le problème correctif global et `writeDep()` pour écrire le déplacement imposé local), et classes implémentant le calcul non-intrusif du résidu présenté à la section précédente (classe `Gamma`) ainsi que l'algorithme SR1 (classe `SR1method`). L'étape d'initialisation se poursuit par la construction de la table repérant les degrés de liberté d'interface, la lecture du déplacement global d'interface servant à démarrer les échanges, et l'initialisation des classes `Gamma` et `SR1method`. Enfin, les itérations proprement dites suivent le schéma présenté au Chapitre 2.

Ainsi, la mise en œuvre de la stratégie prend uniquement la forme d'un *script de haut niveau* pilotant le logiciel cible, effectuant très peu de calculs lui-même ; ceci est rendu possible par la formulation non-intrusive de la méthode. Cependant,

dans certaines variantes, il arrive que le logiciel cible ne soit pas suffisamment paramétrable pour réaliser certains calculs demandés par la méthode, même lorsque ceux-ci entrent dans le cadre d'une analyse par éléments finis traditionnelle ; le recours à des *développements internes* au logiciel, potentiellement coûteux, est alors inévitable. Ces développements ne sont néanmoins pas nécessaires pour la majorité des variantes : les approches en déplacement et mixte, avec ou sans accélération SR1, peuvent ainsi être mises en œuvre uniquement à l'aide de scripts, avec une bonne portabilité et une grande simplicité.

Chapitre 6

Illustrations

Ce chapitre illustre de manière détaillée le fonctionnement de la méthode, sur un exemple 2D simple et sur un exemple 3D fourni par Snecma. L'évolution de la solution au cours des itérations est présentée, des indicateurs de convergence sont proposés, et quelques sources d'erreurs possibles sont mises en évidence.

Sommaire

1	Un exemple 2D simple	162
1.1	Les solutions successives	163
1.2	Convergence et critères d'arrêt	167
1.3	Quelques sources d'erreur possibles	174
2	Un exemple 3D d'origine industrielle	181
2.1	Limites de l'analyse descendante	182
2.2	Application de la méthode	184

Nous terminons ce document par un exposé détaillé des résultats obtenus et des difficultés rencontrées lors de l'application de la méthode sur deux exemples. Le premier est le problème 2D académique évoqué dans les Chapitres 3 et 4 ; il se base sur une géométrie très simple et permet d'analyser précisément le fonctionnement de la stratégie de manière aisée. Le second est un problème 3D fourni par Snecma, schématisant une aube de turbine avec une géométrie et une relation de comportement banalisées, mais de taille et de complexité comparables avec celles de nombreux problèmes industriels actuels.

1 Un exemple 2D simple

Nous reprenons tout d'abord l'exemple académique 2D évoqué aux Chapitres 3 et 4. Rappelons qu'il s'agit d'une structure simple soumise à une pression et un chargement centrifuge appliqués en un incrément ; les maillages, chargements et conditions aux limites sont représentés sur la Figure 6.1.

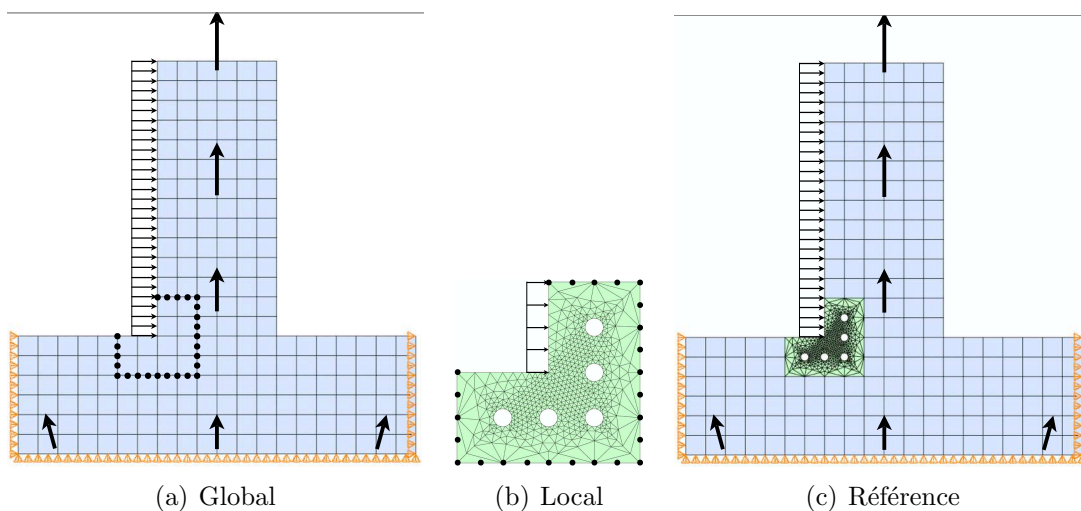


Figure 6.1: Rappel du cas-test 2D élasto-plastique.

L'analyse de cette structure au moyen d'un *modèle global* élastique linéaire met en évidence un léger dépassement de la limite élastique au voisinage de l'angle rentrant sur la gauche ; on définit donc un *modèle local* élasto-plastique où l'on choisit en outre d'inclure des trous non représentés dans le maillage global, afin d'illustrer complètement les possibilités de l'approche. Cela conduit à un remaillage local complet ; les deux maillages sont cependant compatibles sur la surface de raccord, comme nous l'avons vu précédemment. La relation de comportement est quant à elle choisie élasto-plastique à écrouissage isotrope linéaire.

Enfin, on a également représenté sur la Figure 3.1 le *problème de référence* défini par substitution ; il s'agit d'un problème élasto-plastique dans la zone d'intérêt, et élastique linéaire dans la zone complémentaire. Naturellement, le choix de ce

problème comme référence n'a de sens que si la limite élastique n'est jamais atteinte dans la zone complémentaire ; nous reviendrons sur cette hypothèse ultérieurement.

1.1 Les solutions successives

Afin d'illustrer le comportement de la méthode, nous présentons l'allure des solutions successives obtenues avec chacune des deux variantes. La solution globale initiale, servant à initialiser les échanges, est représentée sur la Figure 6.2 ; la carte représente la valeur de la contrainte de Von Mises divisée par la limite élastique.

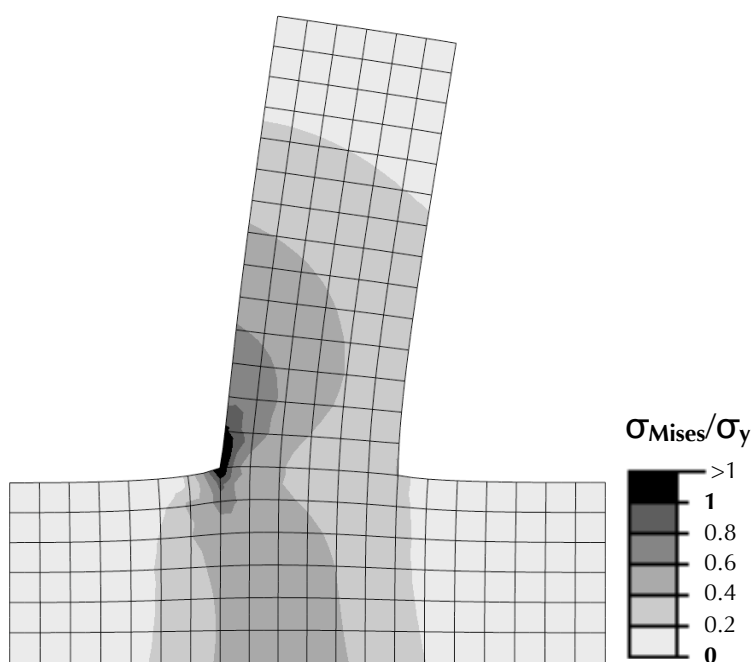


Figure 6.2: Solution élastique initiale pour l'exemple 2D.

1.1.1 Avec le raccord en déplacement

Nous considérons ici la variante en déplacement non accélérée. La Figure 6.3 représente l'évolution de la contrainte de Von Mises locale au cours des trois premières itérations (l'« itération zéro » correspond à la première analyse locale, équivalente à un zoom descendant classique) ainsi qu'à la dixième itération, pour laquelle la convergence est largement atteinte (rappelons que si la solution converge, alors elle converge *forcément* vers la solution de référence, comme expliqué au Chapitre 2). La contrainte de Von Mises étant divisée par la limite élastique, une valeur supérieure à 1 (en noir sur les cartes) indique la présence de plasticité.

On constate sur la Figure 6.3 que le zoom descendant ne fausse que légèrement la valeur des contraintes ; entre la solution initiale et la solution convergée, l'erreur sur la contrainte de Von Mises maximale n'est que d'environ 4 %. En revanche,

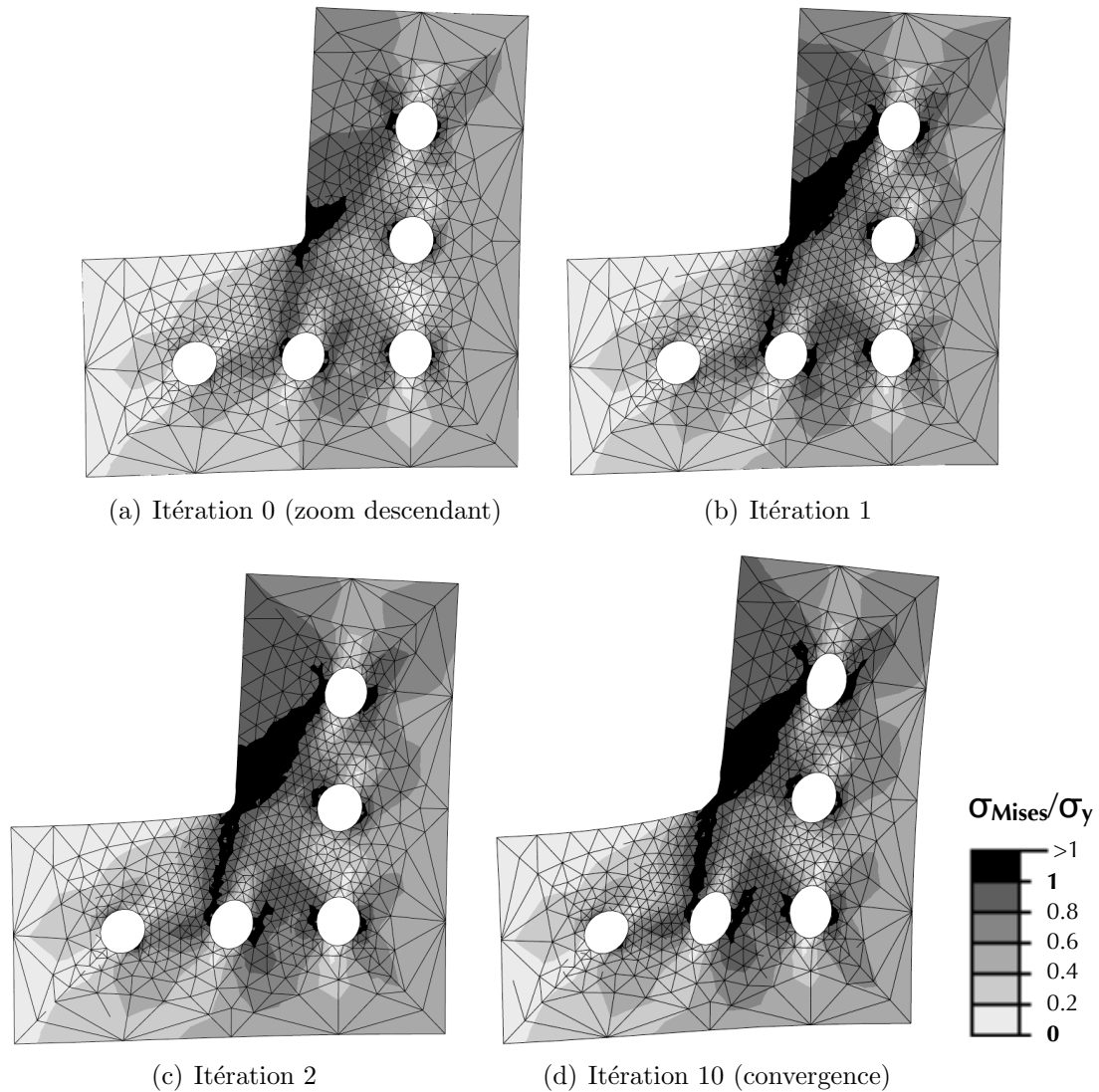


Figure 6.3: Contraintes de Von Mises locales sur l'exemple 2D.

on observe une expansion assez nette de la zone plastique au fil des itérations, et l'étendue de cette dernière semble largement sous-estimée. Ceci s'explique par le fait qu'une fois la limite élastique franchie, les contraintes évoluent relativement peu au cours de l'écroutissage, tandis que les déformations plastiques peuvent devenir relativement importantes : ainsi, le zoom descendant introduit davantage d'erreurs sur les déformations plastiques (et la localisation des zones plastiques) que sur la valeur des contraintes.

L'examen des déformations plastiques équivalentes confirme cette observation. La Figure 6.4 représente leur évolution aux mêmes instants que pour les contraintes ; une valeur non nulle, représentée sur les cartes par toutes les autres couleurs que le blanc, indique la présence de plasticité. On constate bien que le zoom descendant

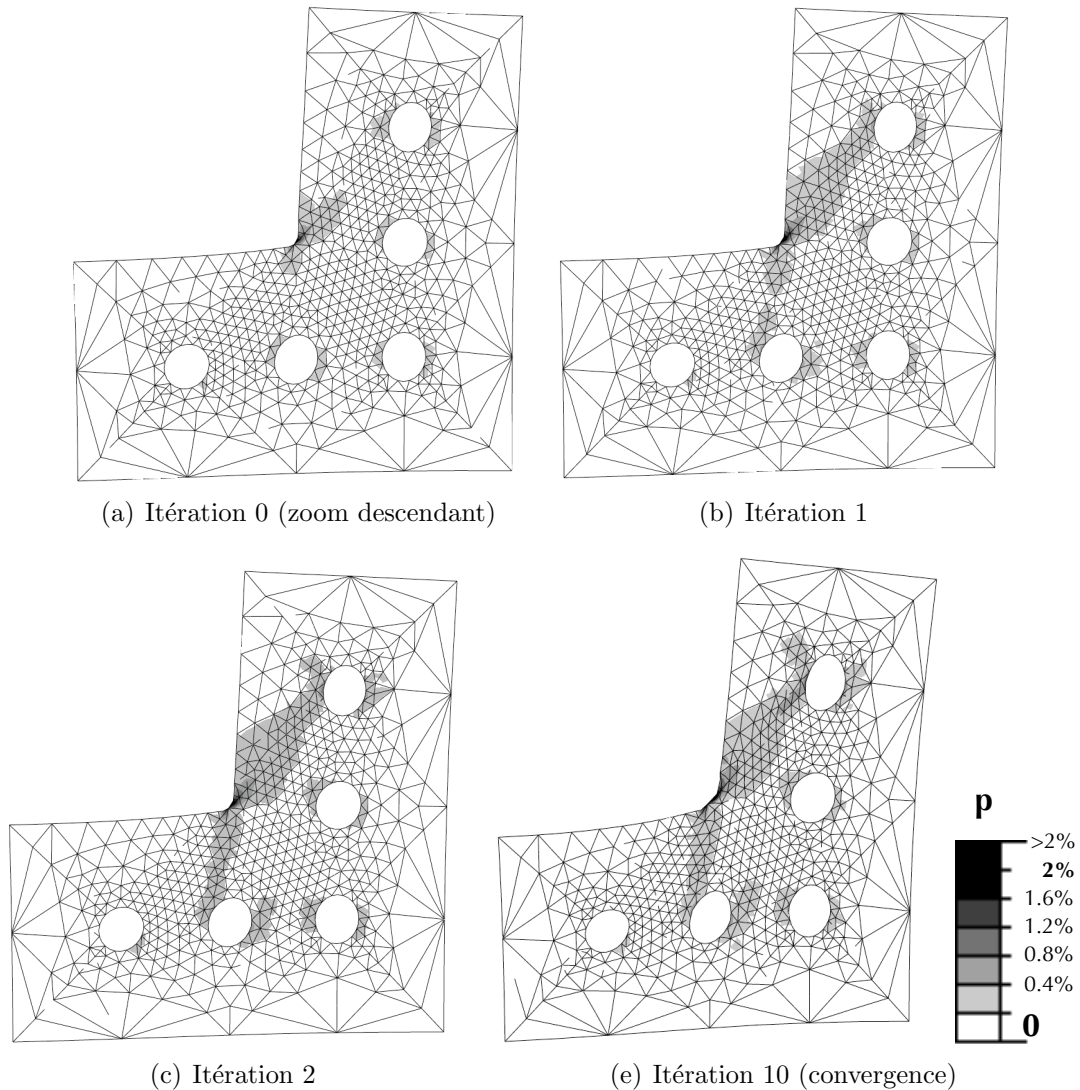


Figure 6.4: Déformations plastiques équivalentes sur l'exemple 2D.

sous-estime largement la taille de la zone plastique ; par ailleurs, la valeur maximale des déformations plastiques est sous-évaluée de plus de 30 %, ce qui montre la sensibilité de cette grandeur par rapport aux conditions aux limites locales (et justifie son emploi comme indicateur d'erreur dans les Chapitres 3 et 4). On voit en outre que le comportement de la méthode non accélérée est relativement monotone : la zone plastique s'étend au fil des itérations, jusqu'à la convergence des échanges.

Enfin, la Figure 6.5 montre de même l'évolution des termes correctifs globaux, c'est-à-dire les solutions des problèmes globaux chargés par les résidus successifs. La carte représente là encore la contrainte de Von Mises et l'échelle est 10 fois plus petite que celle des Figures 6.2 et 6.3, aussi bien pour les contraintes que pour le facteur d'amplification de la déformée. On observe que ces solutions correc-

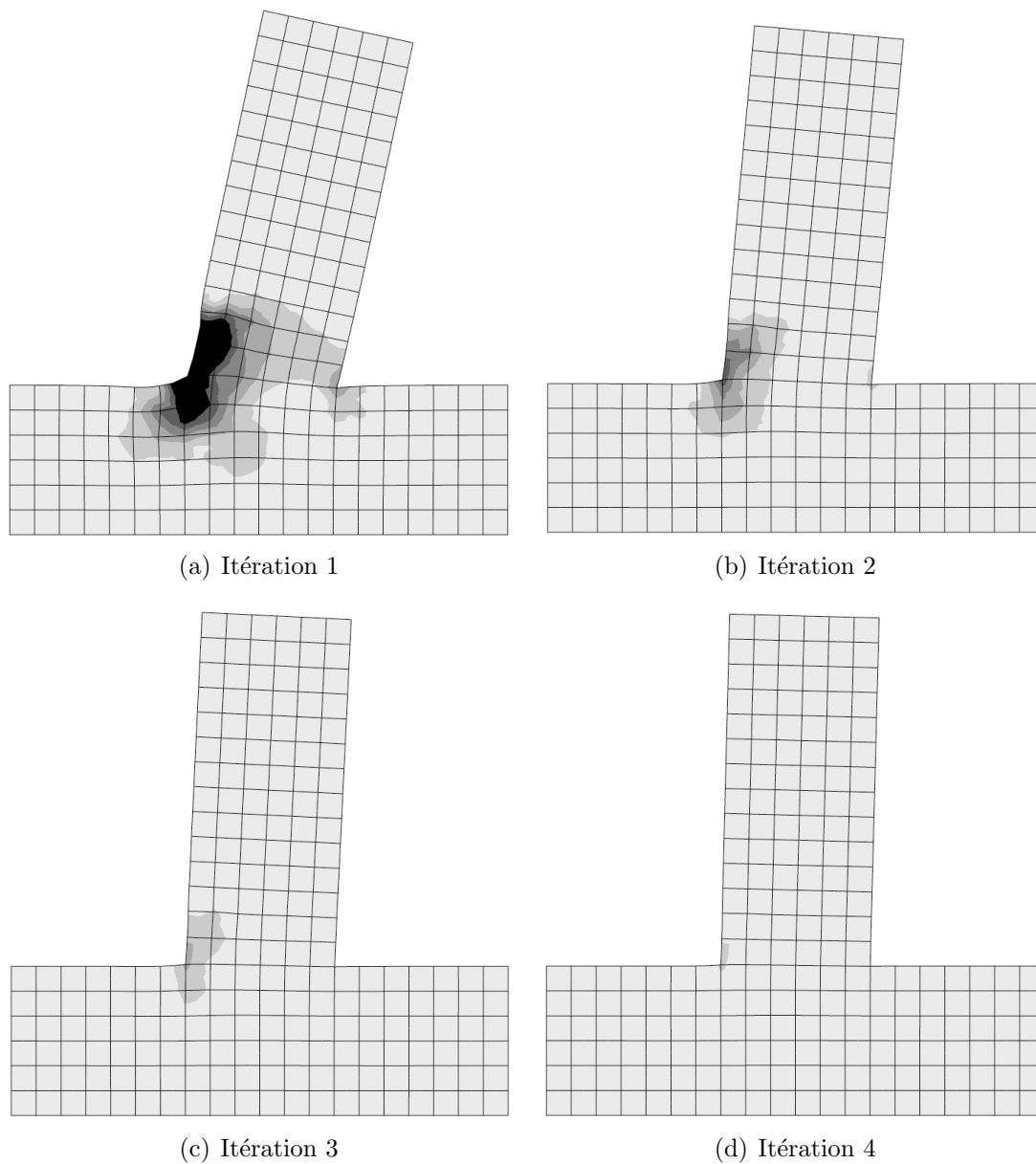


Figure 6.5: Termes correctifs globaux sur l'exemple 2D.

tives, bien que maximales au voisinage de l'interface (en termes de contraintes et de déformations), n'y sont pas exclusivement localisées, et ont une influence sur une portion non négligeable de la zone complémentaire¹; cela illustre le phénomène des redistributions de contraintes et de déformations, non pris en compte par le zoom descendant.

1. Rappelons que la solution globale dans la zone d'intérêt n'est pas conservée, et n'a aucun sens physique en raison de la discontinuité des contraintes globales qu'introduit la méthode sur l'interface.

1.1.2 Avec le raccord mixte

Nous examinons maintenant la variante mixte de la méthode. La rigidité mixte est prise égale à l'approximation « multi-échelles » du complément de Schur décrite au Chapitre 4; la contribution « courte distance » est le complément de Schur exact d'une bande de 4 éléments d'épaisseur, tandis que la contribution « longue distance » provient de la réponse de la zone complémentaire à des déplacements imposés affines.

Comme nous l'avons vu au Chapitre 4, cette approximation a pour fonction de simuler la rigidité de la zone complémentaire de la façon la plus réaliste possible, à faible coût. Les résultats de la première itération doivent donc se rapprocher le plus possible de la solution de référence. Afin d'illustrer cette idée, nous avons tracé sur les Figures 6.6 et 6.7 les solutions locales obtenues à la première itération avec le raccord en déplacement et le raccord mixte, ainsi que la solution de référence; comme précédemment, la Figure 6.6 représente la contrainte de Von Mises et la Figure 6.7 représente la déformation plastique équivalente.

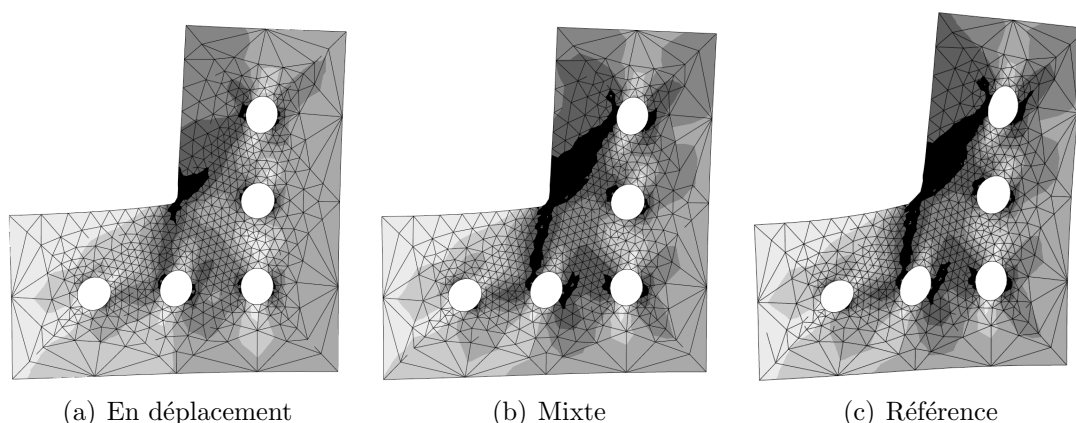


Figure 6.6: Comparaison des deux raccords pour les contraintes.

On vérifie que le raccord mixte est plus performant que le raccord en déplacement : l'étendue de la zone plastique, bien qu'encore sous-estimée, est nettement plus proche de la solution de référence, et l'erreur en déformation plastique maximale passe de 30 % à 5 %. Naturellement, comme nous l'avons souligné au Chapitre 4, ce résultat est encore trop élevé pour qu'une approche purement descendante soit suffisante; toutefois, le caractère plus réaliste de ce type de raccord permet une convergence rapide.

1.2 Convergence et critères d'arrêt

Dans les Chapitres 3 et 4, nous avons étudié la convergence des différentes variantes de l'approche en mesurant des erreurs relatives par rapport à la solution de référence, portant sur le déplacement d'interface et la déformation plastique

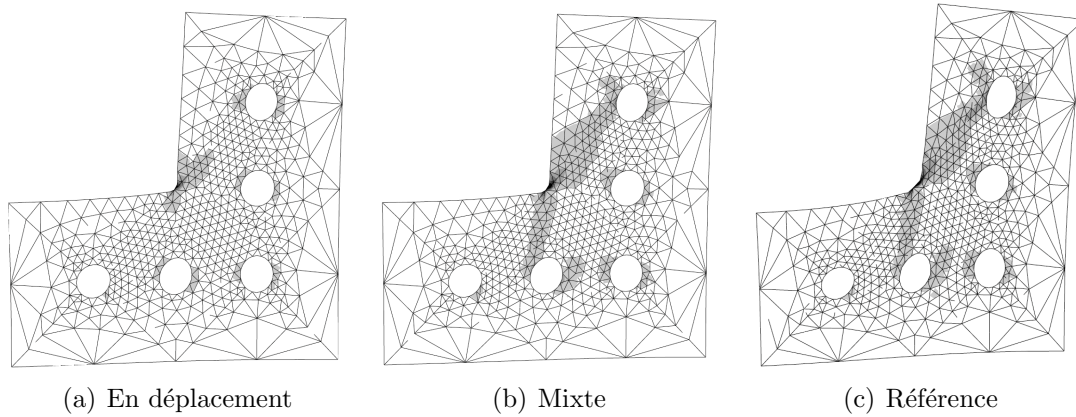


Figure 6.7: Comparaison des deux raccords pour les déformations plastiques.

équivalente. Cependant, en général, la solution de référence n'est naturellement pas connue. Afin de définir un critère d'arrêt permettant de stopper les itérations lorsque la précision voulue est atteinte, il faut donc disposer d'*indicateurs de convergence* donnant un ordre de grandeur de l'erreur.

Ces indicateurs doivent être accessibles à l'issue de l'analyse locale (puisque le test de convergence s'effectue à ce stade, voir Chapitre 2) et, pour des raisons de simplicité, ne demander aucun calcul coûteux supplémentaire. Nous proposons ici deux indicateurs simples permettant de remplir cet objectif; **une fois de plus, toutes les quantités considérées dans cette section sont des quantités d'interface, mais l'indice Γ est omis afin d'alléger les notations.**

1.2.1 Norme du résidu

Un test de convergence très classique consiste à comparer la norme du résidu courant avec celle du second membre du problème — le mot « résidu » étant ici pris au sens mathématique usuel du terme, c'est-à-dire la *différence des deux membres* de l'équation à résoudre. Ici, cette équation est le problème de référence condensé sur l'interface (2.30); l'application de cette démarche conduit donc à l'indicateur suivant, nommé *résidu relatif* :

$$\eta_{\mathbf{r}} = \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}^R\|} \quad (6.1)$$

où \mathbf{r} est le résidu et \mathbf{b}^R est le second membre condensé du problème de référence. Cette dernière quantité n'étant en toute rigueur pas forcément définie, et l'objectif de l'indicateur étant de fournir un *ordre de grandeur* de l'erreur plutôt qu'une valeur précise, le dénominateur est en pratique remplacé par d'autres quantités bien définies et faciles d'accès :

- la norme du second membre global, si ce dernier est connu²;

2. En effet, sous Abaqus, il n'est accessible que s'il est explicitement spécifié dans les sorties du

- sinon, la norme du vecteur des efforts de réaction globaux, voire leur résultante ou toute autre estimation grossière.

L'expression du résidu, quant à elle, diffère entre les deux variantes de la méthode.

■ Variante en déplacement

Dans le cas du raccord en déplacement, l'utilisation de ce critère est très simple. En effet, nous avons vu au Chapitre 3 que le *résidu d'équilibre* défini par :

$$\mathbf{r} = -(\lambda_C^G + \lambda^L)$$

est le résidu, au sens usuel du terme, associé au déplacement d'interface courant $\mathbf{u} = \mathbf{u}^G = \mathbf{u}^L$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{b}_C^G - \mathbf{S}_C^G \mathbf{u} - \mathbf{h}^L(\mathbf{u}) \quad (6.2)$$

La Figure 6.8 illustre les performances de ce critère, avec et sans accélération de SR1 ; dans les deux cas, le résidu relatif (en trait plein) est comparé aux deux « erreurs vraies » considérées au Chapitre 3, à savoir l'erreur en déplacement d'interface (en tirets longs) et l'erreur en déformation plastique (en pointillés fins). On constate que cet indicateur donne une bonne estimation de l'ordre de grandeur de ces deux erreurs, et ce particulièrement pour l'approche non accélérée ; dans le cas de l'approche accélérée, le résidu décroît moins vite que les erreurs « vraies », et finit par surestimer ces dernières d'un facteur supérieur à 10. Dans ce dernier cas, il semble donc judicieux de corriger l'estimation fournie par le résidu ; c'est l'objet du second indicateur présenté dans la section suivante.

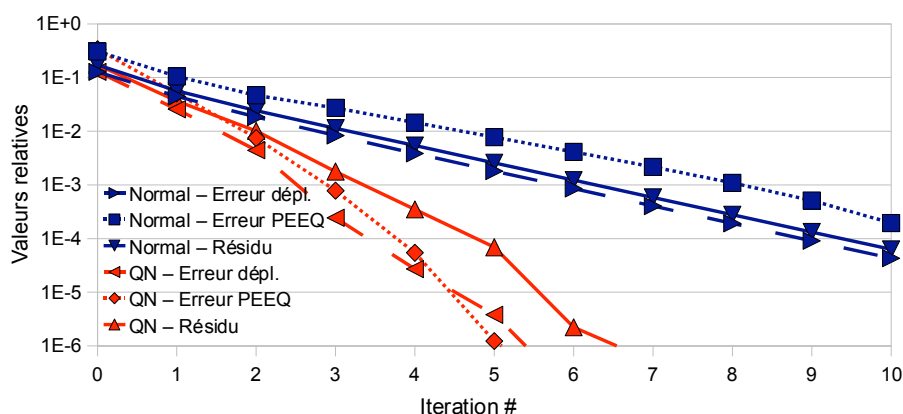


Figure 6.8: Evolution des résidus relatifs pour le raccord en déplacement sur l'exemple 2D.

■ Variante mixte

Le cas du raccord mixte est encore une fois plus complexe, aussi bien au niveau du formalisme que de la mise en œuvre. En effet, avec ce raccord, le déplacement global ; voir Chapitre 5, Section 1.1.

d'interface local est *différent* du déplacement global (et généralement de meilleure qualité). Selon les objectifs du calcul, il conviendrait donc de distinguer les deux situations suivantes afin d'obtenir un indicateur pertinent :

1. Soit on s'intéresse *uniquement* à la solution dans la *zone d'intérêt* ; le résidu doit donc porter sur la solution locale, *ie.*

$$\mathbf{r}^L = \mathbf{b}_C^G - \mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^L - \mathbf{h}^L(\mathbf{u}^L) \quad (6.3)$$

et nous avons vu au Chapitre 4, Section 3.1.1, que ce résidu prend l'expression simple suivante :

$$\mathbf{r}^L = [\mathbf{A} - \mathbf{S}_C^G] (\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^G) \quad (6.4)$$

c'est-à-dire l'erreur sur la rigidité mixte multipliée par le saut de déplacement.

2. Soit on s'intéresse également à la solution dans la *zone complémentaire*, auquel cas il faudrait de plus calculer un résidu sur la solution globale :

$$\mathbf{r}^G = \mathbf{b}_C^G - \mathbf{S}_C^G \mathbf{u}^G - \mathbf{h}^L(\mathbf{u}^G) \quad (6.5)$$

Le problème est qu'aucun de ces résidus n'est immédiatement accessible au cours du calcul : l'obtention du résidu local demande d'effectuer un calcul global à déplacements imposés (le produit par \mathbf{S}_C^G dans (6.4)), tandis que l'obtention du résidu global demande d'effectuer un calcul local non-linéaire, également à déplacements imposés (le terme $\mathbf{h}^L(\mathbf{u}^G)$ dans (6.5)). Autrement dit, l'obtention de l'un de ces résidus demanderait d'effectuer un calcul supplémentaire à chaque itération ; pour cette raison, nous ne les utilisons pas en pratique.

En revanche, la mise en œuvre des deux types de correction globale étudiés (avec et sans accélération) commence toujours par faire intervenir la quantité suivante :

$$\mathbf{r}^0 = [\mathbf{A} + \mathbf{S}_I^G] (\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^G) \quad (6.6)$$

Dans les deux cas, ce résidu est directement utilisé pour effectuer la correction globale ; dans le cas de l'accélération SR1, il est ensuite mis à jour en même temps que la solution pour former le « résidu mixte SR1 » défini par (4.39) (voir Chapitre 4, Section 3.3).

Le produit par \mathbf{S}_I^G apparaissant dans (6.6) s'effectue en pratique à l'aide d'un appel au *modèle auxiliaire* défini au Chapitre 5, Section 2.1 ; ce modèle étant local et linéaire, il s'agit d'un calcul bien moins coûteux que les deux options précédentes. Naturellement, il ne s'agit plus d'un résidu au sens mathématique du terme portant sur l'une ou l'autre des solutions ; toutefois, cette quantité mesure toujours la non-vérification des équations du problème de référence, et est nulle si et seulement si la solution de référence est atteinte³. Elle possède donc les propriétés requises pour être utilisée comme indicateur d'erreur.

3. En effet, le complément de Schur global complet $\mathbf{S}^G = \mathbf{S}_I^G + \mathbf{S}_C^G$ est supposé inversible. Alors $\mathbf{A} + \mathbf{S}_I^G$ l'est aussi car, avec la construction présentée au Chapitre 4, \mathbf{A} et \mathbf{S}_C^G ont le même noyau (celui-ci ne peut contenir que des mouvements rigides, et la réponse à ces derniers est calculée de manière exacte). Par suite, si \mathbf{r}^0 est nul, alors $\mathbf{u}^L = \mathbf{u}^G$, d'où $\lambda_C^G + \lambda^L = -\mathbf{A} (\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^G) = 0$.

La Figure 6.9 représente l'évolution de cette quantité au fil des itérations, avec et sans accélération ; les erreurs en déplacement local et en déformation plastique maximale sont également représentées à titre de comparaison, avec la même convention graphique que précédemment. On constate que le résidu relatif fournit une bonne estimation de l'ordre de grandeur des erreurs ; celles-ci sont toutefois surestimées d'un facteur 10 environ, ce qui peut s'expliquer par le fait que la rigidité apparaissant dans (6.6) est nettement plus grande que celle qui intervient dans la définition du résidu local (6.4). Là encore, il est possible de corriger l'estimation effectuée par le résidu à l'aide d'un second indicateur.

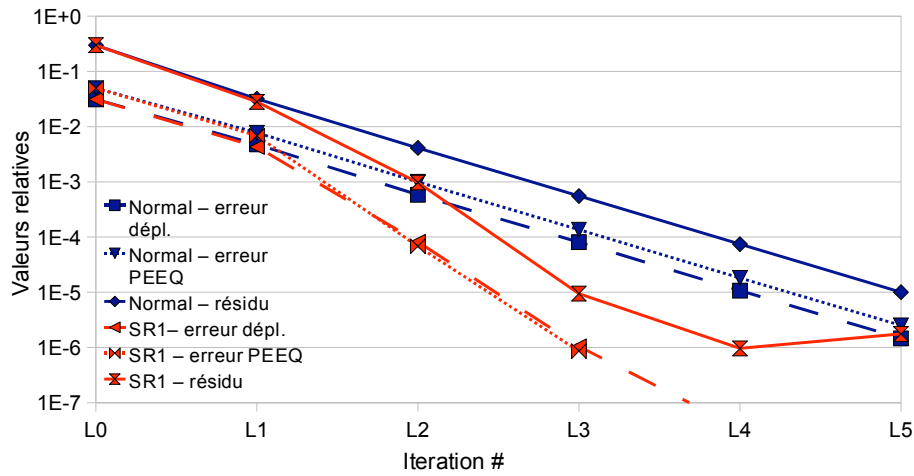


Figure 6.9: Evolution des résidus mixtes pour le raccord en déplacement sur l'exemple 2D.

■ Remarque

Les exemples ci-dessus montrent que les résidus relatifs, ou du moins les approximations qui en sont faites, fournissent une bonne estimation de l'ordre de grandeur des différentes erreurs en solution, et *surestiment* ces dernières, ce qui est une qualité souhaitable. En pratique, cela a toujours été le cas au cours des différents tests réalisés tout au long de cette thèse. Cependant, il faut garder à l'esprit qu'il s'agit d'un constat purement empirique : aucun résultat théorique ne garantit cette propriété.

En effet, dans l'hypothèse où l'on travaille avec un « véritable » résidu relatif η_r tel que la relation (6.1) le définit, la seule certitude que l'on peut avoir est que l'erreur relative en déplacement d'interface η_u est encadrée de la façon suivante :

$$\frac{1}{\kappa} \eta_r \leq \eta_u \leq \kappa \eta_r \quad (6.7)$$

où κ désigne le *conditionnement* du problème non-linéaire d'interface. Or, même si les problèmes condensés sont généralement mieux conditionnés que les problèmes complets, cet encadrement est souvent très large. En effet, le conditionnement d'un

complément de Schur augmente de façon inversement proportionnelle à la finesse du maillage de l'interface ; à titre d'illustration, sur le *problème d'interface global* de cet exemple 2D, sa valeur est d'environ 380...

De plus, nous travaillons ici avec des *approximations* du résidu relatif ; l'encadrement ci-dessus est donc entaché d'une incertitude supplémentaire. Ainsi, les indicateurs basés sur les résidus peuvent fournir des informations pertinentes sur la décroissance de l'erreur, mais il faut garder à l'esprit qu'en pratique, ils ne donnent aucune borne garantie raisonnable sur l'erreur en solution.

1.2.2 Indicateur de stagnation

Afin d'obtenir une information supplémentaire sur l'avancement de la convergence, une autre technique classique est de mesurer la *stagnation* de la solution, c'est-à-dire la variation relative d'une quantité d'intérêt quelconque entre deux itérations successives. Par exemple, pour le déplacement d'interface, on définit :

$$\phi_{\mathbf{u}} = \frac{\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}\|}{\|\mathbf{u}_n\|}$$

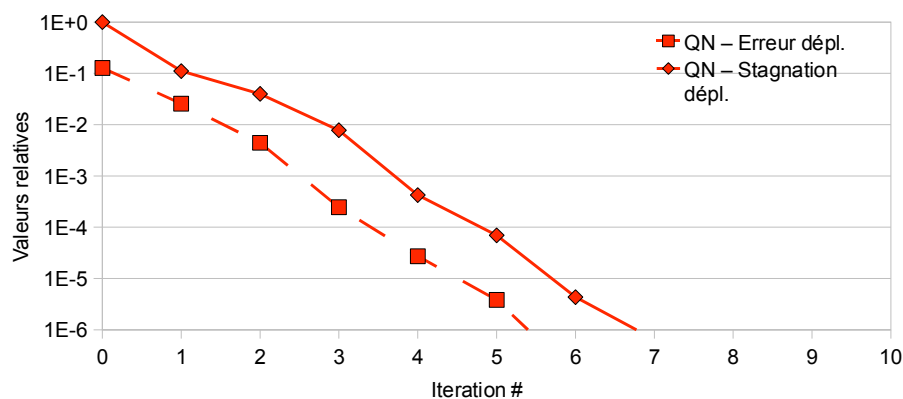
où n désigne le numéro de l'itération courante.

En pratique, ce critère est principalement utile pour les approches munies de l'accélération SR1. En effet, l'efficacité de cette dernière fait qu'une fois passée la première itération, le terme correctif calculé à la n -ième correction globale (c'est-à-dire $\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}$) est relativement proche de l'erreur relative sur \mathbf{u}_{n-1} . L'indicateur de stagnation donne donc une mesure assez précise, bien qu'obtenue « après coup », de l'erreur en solution — et la précision de cette mesure est directement liée à l'efficacité de l'algorithme SR1.

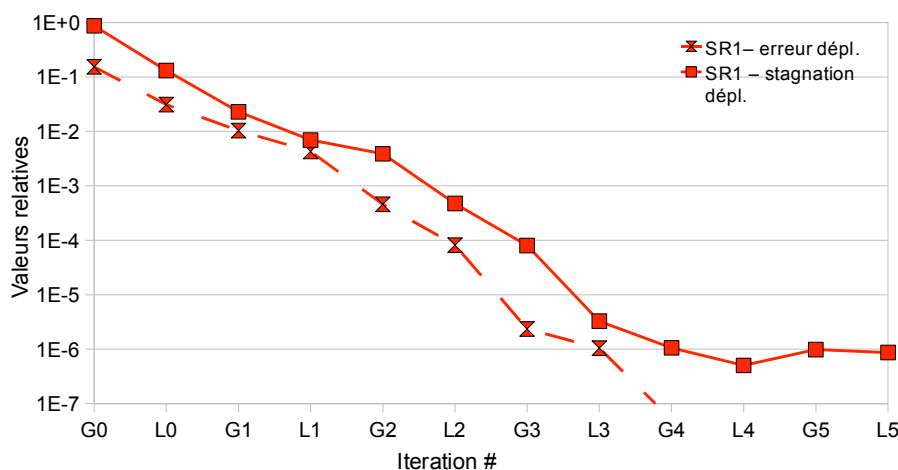
Cet indicateur est représenté sur la Figure 6.10 en trait continu, l'erreur en déplacement étant représentée en trait discontinu ; pour les deux variantes, on constate que l'estimation obtenue à une itération est très proche de l'erreur en déplacement obtenue à l'itération précédente. Notons que pour la variante mixte, la stagnation est également mesurée entre les deux étapes d'une même itération ; là encore, une bonne estimation est obtenue, cette fois grâce à la précision du raccord mixte (*ie.* lors de l'analyse locale, le saut de déplacement $\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^G$ obtenu est relativement proche de l'erreur sur \mathbf{u}^G).

Naturellement, un tel indicateur ne doit pas être employé sans précautions ; il suffit en effet que la convergence devienne lente pour que l'indication obtenue n'ait plus aucun rapport avec l'erreur. Pour cette raison, l'emploi de ce critère n'est envisagé qu'en conjonction avec le résidu relatif décrit précédemment. Plus précisément, on peut envisager les deux voies suivantes, toujours dans le cadre de l'accélération SR1 :

- Soit on impose un seuil de convergence sur *chacun des deux critères* (résidu et stagnation) ; cela offre une sécurité supplémentaire pour les cas où le résidu *sous-estimerait* l'erreur, mais risque de conduire à effectuer trop d'itérations, puisque le résidu semble souvent *surestimer* l'erreur ;



(a) Raccord en déplacement



(b) Raccord mixte

Figure 6.10: Illustration de l'indicateur en stagnation sur l'exemple 2D.

- Soit on suppose que l'indicateur de stagnation donne une mesure fiable de l'erreur précédente, et on tente de *prédire l'erreur courante* à l'aide de la décroissance du résidu en posant, à l'itération n :

$$(\eta_{\mathbf{u}})_n \approx (\eta_{\mathbf{u}})_{n-1} \frac{(\eta_{\mathbf{r}})_n}{(\eta_{\mathbf{r}})_{n-1}}$$

Empiriquement, cette « prédiction » permet d'estimer assez précisément l'erreur courante; cependant, elle ne constitue absolument pas une indication garantie, et est susceptible de mener à des résultats faux en l'absence de précautions supplémentaires.

Une combinaison des deux approches, tout comme l'emploi d'autres critères d'arrêt, est bien entendu possible. Enfin, signalons qu'il est tout à fait envisageable d'appliquer un indicateur de stagnation sur d'autres quantités d'intérêt que le déplacement, comme par exemple la déformation plastique maximale.

1.3 Quelques sources d'erreur possibles

Dans la section précédente, nous avons illustré le fonctionnement « normal » de la méthode, et proposé quelques indicateurs permettant, en pratique, d'estimer la convergence avec une bonne précision. De plus, nous savons (voir Chapitre 2, Section 2.1) que si la solution converge, alors elle converge forcément vers la solution du *problème de référence* non-linéaire, obtenu en substituant le modèle local au sein du modèle global ; ceci vaut pour toute quantité d'intérêt, globale ou locale, appartenant à l'une et/ou l'autre des deux zones. Ainsi, ces indicateurs de convergence suffisent à garantir la fiabilité de la méthode.

Cependant, cette propriété n'implique absolument pas que les solutions ainsi obtenues soient toujours pertinentes pour l'ingénieur ; il peut en effet arriver que le problème obtenu par substitution comporte, dans ses données ou sa méthode de résolution, un certain nombre d'anomalies pouvant induire des erreurs dans la solution. Pour cette raison, il convient de s'assurer que le modèle local et le modèle global sont correctement définis, et notamment d'effectuer toutes les vérifications classiques associées à une procédure de zoom descendant (localisation de la zone plastique, définition de l'interface, finesse du maillage, cohérence des données d'un modèle à l'autre...).

En outre, il existe d'autres sources d'erreur spécifiques à cette méthode, moins évidentes que les précédentes, pouvant faire que le problème « substitué » obtenu n'est pas celui que l'on souhaiterait résoudre. Nous présentons ici deux exemples ; pour chacun d'entre eux, nous montrons quelques résultats caractéristiques, donnons des moyens de détecter le problème et des techniques pour le corriger. Sauf mention contraire, tous ces résultats sont obtenus avec la variante en déplacement munie de l'accélération SR1.

1.3.1 Expansion de la zone plastique

Un premier problème potentiel, relativement simple à détecter, est dû à l'expansion de la zone plastique au fil des itérations. En effet, la plupart du temps, lors de la définition du modèle local, la localisation et l'étendue de la zone plastique sont estimées à l'aide d'un critère en contrainte portant sur la solution élastique initiale ; cette estimation pouvant naturellement être imprécise, il est important de vérifier que la zone plastique obtenue ne traverse pas l'interface, c'est-à-dire qu'elle est bien localisée au sein de la zone d'intérêt. Dans le cadre du zoom descendant, cette vérification est faite à la première analyse locale ; cependant, *cela n'est absolument pas suffisant* pour garantir l'absence d'erreur.

En effet, nous avons vu au début du chapitre (Section 1.1.1) que la zone plastique s'étend au fil des itérations ; par conséquent, il peut très bien arriver que la plasticité, initialement contenue au sein du modèle local, finisse par « déborder ». Dans ce cas, la solution « par substitution » vers laquelle convergent les échanges n'est physiquement pas réaliste, puisque le comportement de la zone complémentaire reste purement élastique linéaire alors que la limite élastique y est franchie. Notons

que ce problème concerne essentiellement le raccord en déplacement ; comme nous l'avons vu, le raccord mixte conduit généralement à une meilleure estimation initiale de l'étendue de la zone plastique.

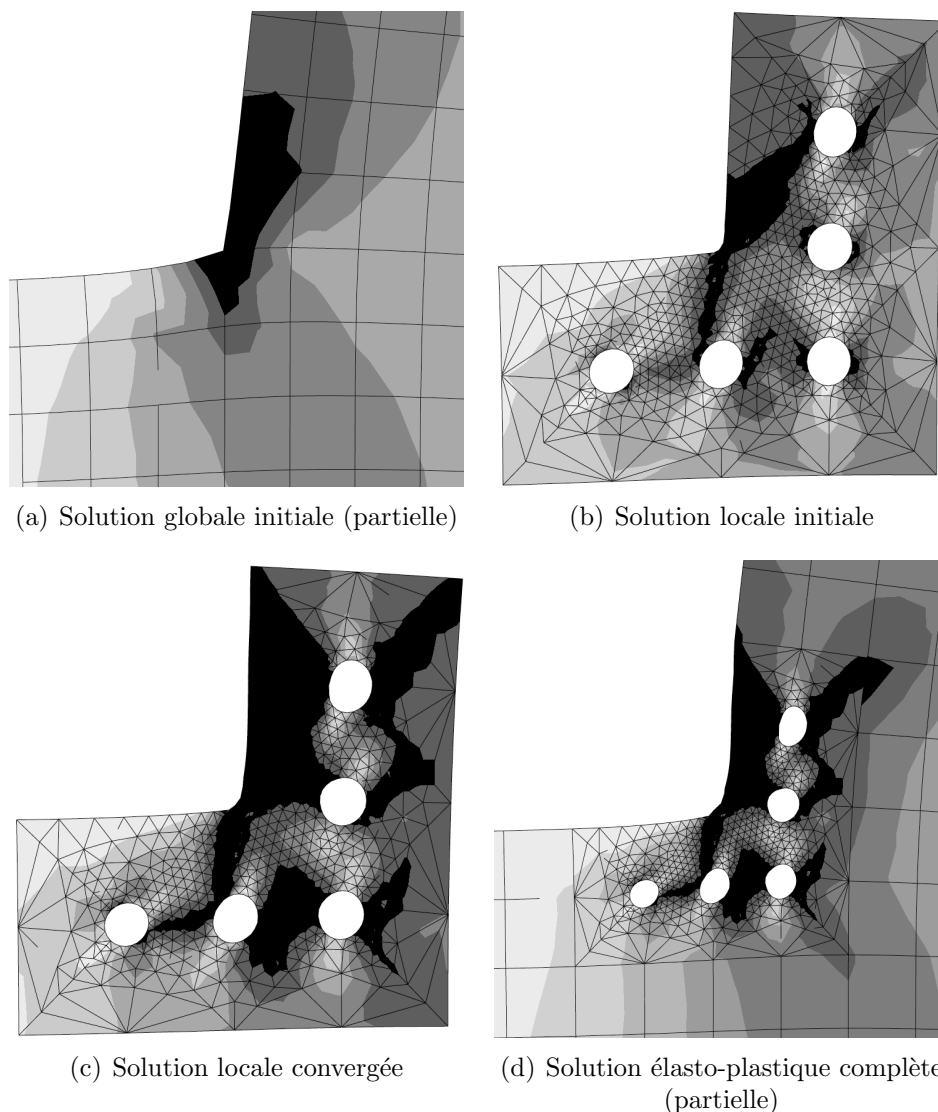


Figure 6.11: Exemple de débordement de la zone plastique sur l'exemple 2D.

Une telle situation est représentée sur la Figure 6.11, obtenue en augmentant légèrement l'amplitude du chargement sur le cas-test 2D précédent. Les cartes représentent la contrainte de Von Mises, le noir indiquant le dépassement de la limite élastique comme précédemment. En haut à gauche (Figure 6.11(a)) se trouve la solution élastique initiale ; l'application d'un critère en contrainte conduit à définir le modèle local de la Figure 6.11(b). Celle-ci représente la contrainte locale obtenue à l'itération zéro (zoom descendant), et on constate que la plasticité est bien contenue dans la zone d'intérêt, avec une marge importante. En revanche, à la convergence

(Figure 6.11(c)), ce n'est plus le cas : la zone plastique traverse manifestement la frontière, ce qui signifie que le problème « substitué » que l'on résout est potentiellement irréaliste. L'examen de la solution élasto-plastique complète, prenant en compte la plasticité *dans les deux sous-domaines* (Figure 6.11(d)), montre que la limite élastique est bien franchie dans la zone complémentaire ; cependant, ce franchissement étant très léger, l'erreur introduite est faible et les deux solutions sont très proches.

■ Interprétation

La Figure 6.12 représente quant à elle l'erreur en déformation plastique cumulée *par rapport à la solution élasto-plastique complète*, ainsi que les deux indicateurs de convergence vus à la section précédente (résidu et stagnation). On constate que ces deux indicateurs tendent bien vers zéro, ce qui indique la convergence de la méthode ; simplement, le problème « substitué » étant ici différent du problème complet, une erreur résiduelle d'environ 0,5% sur la déformation plastique maximale est obtenue.

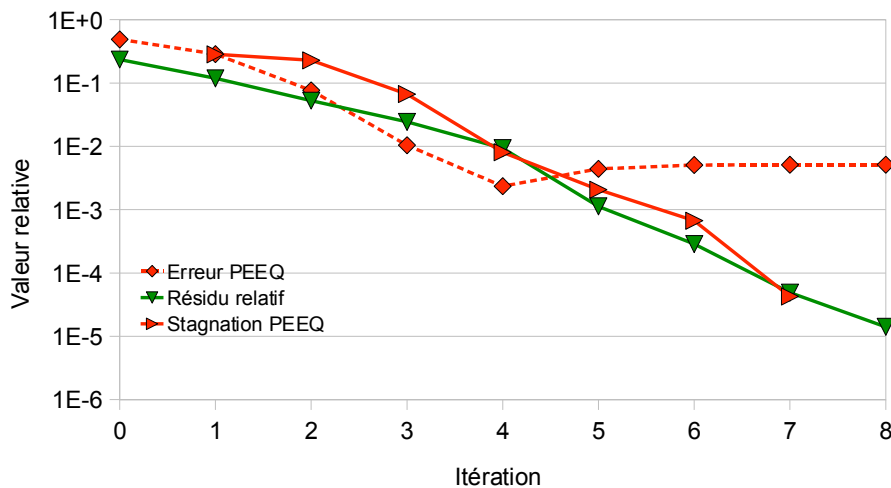


Figure 6.12: Convergence et erreurs résiduelles lors d'un débordement.

Signalons qu'en toute rigueur, l'erreur observée n'est pas due qu'à ce phénomène. En effet, le chargement étant plus élevé que dans les cas précédents, l'analyse locale comme l'analyse de référence n'ont pas pu être menées en un seul incrément : quatre incréments ont été utilisés. Or, contrairement aux hypothèses de la Section 2 (la technique d'échange doit être mise en œuvre à chaque incrément du chargement), la correction globale n'est menée qu'au dernier incrément. Ainsi, une technique de « sous-cyclage » est mise en œuvre, comme expliqué dans la Section 1.3.3. Cela introduit également une erreur résiduelle, que nous avons estimée à environ 0,4% sur la déformation plastique⁴. De plus, dans les deux cas, il s'agit d'une *sous-estimation* du maximum ; ainsi, sur la Figure 6.12, les deux erreurs se cumulent, et la part due

4. Pour cela, nous avons mesuré l'écart entre la solution obtenue à la convergence et la solution du problème substitué — c'est-à-dire du problème muni d'un comportement élasto-plastique dans

à la présence de plasticité dans la zone complémentaire est donc d'environ 0,1%. Compte tenu de la faible étendue de la zone plastique « oubliée », il s'agit d'un chiffre non négligeable.

■ Détection et solutions

Ce problème est relativement simple à détecter puisqu'il suffit d'observer les solutions locales successives pour vérifier que la zone plastique n'atteint pas l'interface (ou, dans les cas les plus complexes, d'examiner la solution globale corrigée, préalablement obtenue par un calcul de relocalisation). Il peut en revanche être fastidieux à corriger puisqu'il faut alors agrandir le modèle local de sorte à inclure la zone plastique complète, et donc mettre à jour la définition du maillage local et de l'interface.

1.3.2 Difficultés de convergence de l'analyse locale

Un second problème, plus difficile à détecter que le précédent, est dû à des difficultés de convergence de l'analyse locale lorsque la zone plastique se rapproche trop de l'interface. Ces difficultés surviennent uniquement avec le raccord en déplacement ; elles n'ont à ce jour jamais été constatées avec le raccord mixte.

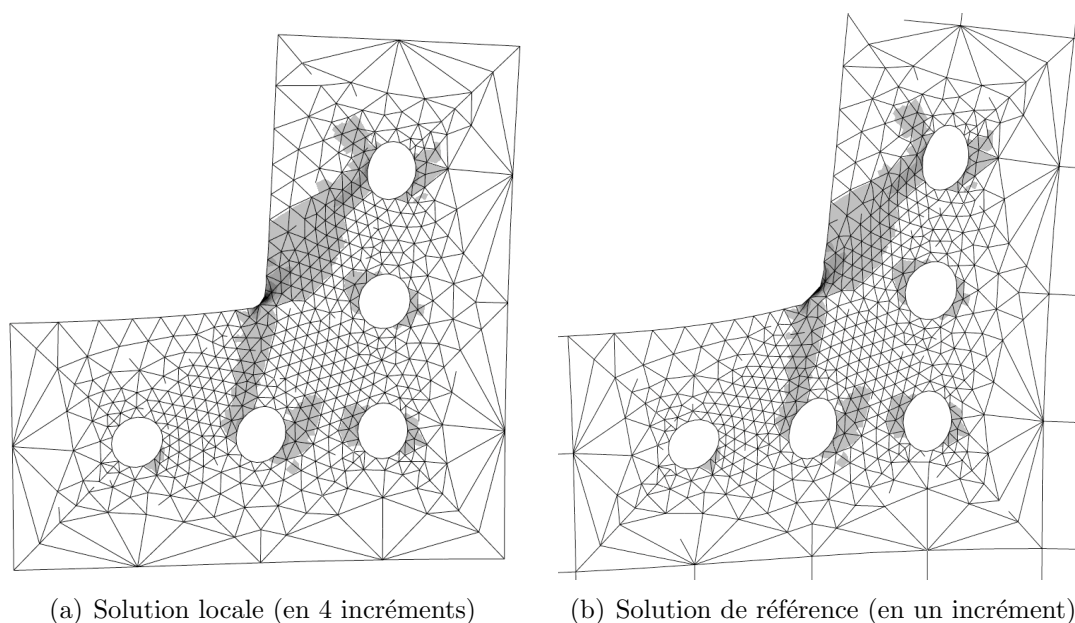


Figure 6.13: Effet d'un *cutback* sur les déformations plastiques équivalentes.

Un exemple d'une telle situation est présenté sur la Figure 6.13, obtenue en abaissant légèrement le chargement par rapport au cas précédent. La Figure 6.13(a)

la zone d'intérêt et élastique dans la zone complémentaire, malgré le fait que la limite élastique y soit franchie.

représente la solution locale à la convergence des échanges, tandis que la Figure 6.13(b) représente la solution de référence ; dans les deux cas, le fichier d'entrée spécifie que le chargement doit être appliqué en un incrément. Les deux solutions semblent identiques, et aucune des anomalies évoquées ci-dessus n'est à signaler ; cependant, la Figure 6.14 montre que l'on obtient une erreur résiduelle d'environ 1% sur la déformation plastique équivalente maximale, alors que le résidu tend encore une fois vers zéro, attestant que la méthode converge bien vers la solution du problème « substitué ».

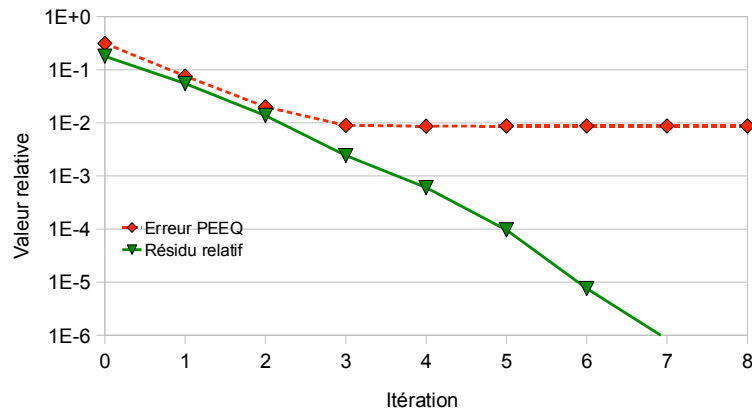


Figure 6.14: Convergence et erreurs résiduelles lors d'un *cutback*.

Pour trouver l'origine du problème, il faut examiner les fichiers `.msg` d'Abaqus, listant toutes les données de convergence des différents calculs. On constate alors que lors du calcul de référence, Abaqus réussit aisément à imposer le chargement en un seul incrément ; cependant, lors de l'analyse locale à déplacement imposé, *l'application du même incrément fait diverger* la méthode de Newton ou, au mieux, la fait stagner. Abaqus effectue donc un *cutback*, c'est-à-dire un découpage du chargement total (y compris le déplacement imposé) en quatre incréments ; pour chacun d'entre eux, la convergence est obtenue sans difficulté. Un examen plus approfondi des messages d'Abaqus révèle que la divergence est due à des résidus excessifs sur les nœuds proches de l'interface ; la condition en déplacement entraîne vraisemblablement des problèmes dans cette zone.

Signalons que ce phénomène a déjà été mise en évidence dans le cadre des stratégies de relocalisation non-linéaire, sur des calculs locaux de flambage ou post-flambage [Cresta, 2008]. Des difficultés similaires ont également été rencontrées par Snecma lors d'analyses descendantes (*submodeling*) à déplacement imposé, avec des modèles locaux élasto-visco-plastiques. Nous voyons ici que le problème peut également survenir dans le cadre de la plasticité locale.

■ Interprétation

L'erreur résiduelle obtenue s'explique par le fait qu'à la convergence, la solution obtenue est celle d'un problème « substitué » dans lequel le chargement local est

appliqué en quatre incréments, tandis que dans le problème de référence, l'ensemble du chargement est appliqué en un seul incrément. Par conséquent, l'histoire du chargement vue par le matériau diffère entre les deux problèmes. Le chargement étant monotone, cela n'a qu'une influence minimale sur les contraintes et les déplacements ; en revanche, la différence est plus sensible au niveau des variables internes comme la déformation plastique cumulée, sur laquelle l'erreur avoisine 1%.

Pour vérifier cette interprétation, nous avons récupéré le déplacement d'interface de la solution de référence (obtenue en un incrément), et l'avons imposé sur la frontière du modèle local ; là encore, le calcul n'a pas pu converger en un seul incrément, et une erreur semblable a été obtenue. En revanche, rien de tout cela n'est à noter lorsque l'on emploie le raccord mixte ; cela prouve que *l'erreur est bien due aux difficultés de convergence survenant avec le déplacement imposé* — et non à la formulation de la technique d'échanges proprement dite.

■ Détection et solutions

Nous avons vu que ce problème ne peut pas être détecté par l'examen des solutions ou des résidus ; seul le fichier `.msg` local peut révéler son existence. En revanche, il existe plusieurs façons de le contourner.

Une solution simple est d'utiliser le raccord mixte ; un simple raccord « courte distance » comme une approximation *lumped* ou *super-lumped*, relâchant la condition aux limites en déplacement, permet d'éviter le problème.

Une seconde solution, similaire sur le principe, est d'inclure une couche d'éléments *élastiques linéaires* dans le modèle local, adjacents à l'interface ; cette technique est utilisée par Snecma pour éviter des problèmes de convergence semblables.

Une troisième solution serait de réduire les pas de chargement des deux problèmes, de sorte que l'analyse locale puisse converger sans difficulté. Toutefois, comme nous l'avons vu au Chapitre 5, l'implémentation actuelle est limitée à un unique incrément de chargement global ; de plus, cette approche risquerait de conduire à des coûts de calcul et de réécriture des jeux de données extrêmement élevés. Elle n'est donc ni techniquement réalisable pour le moment, ni envisagée par la suite.

Enfin, la dernière possibilité est d'accepter que les pas de temps des deux modèles soient différents et, pour ce faire, de se tourner vers un schéma de type « sous-cyclage » ; ceci fait l'objet de la section suivante.

1.3.3 Vers un schéma de type « sous-cyclage »

Les difficultés de convergence vues à la section précédente, ainsi que la nécessité de réduire le nombre des analyses globales (et le volume des fichiers de résultats associés) tout en représentant finement l'histoire locale du chargement, plaident pour la mise en œuvre d'un schéma permettant d'utiliser *des pas de temps locaux plus fins* que les pas de temps globaux, ce qui n'est actuellement pas le cas.

En effet, rappelons que la formulation actuelle de la technique d'échanges est incrémentale : il faut obtenir la convergence à un incrément donné avant de pouvoir passer à l'incrément suivant, ce qui implique notamment que les pas de temps

des deux modèles soient identiques. Si l'on souhaite utiliser une discrétisation temporelle locale plus fine, il est donc nécessaire de relâcher le couplage; en effet, la solution globale ne pourra alors être qu'*interpolée* (ou prédite) aux pas de temps « intermédiaires » pour former la condition aux limites locale, tandis que la correction globale ne sera effectuée qu'aux pas de temps globaux. De telles approches sont couramment utilisées dans le domaine du couplage fluide/structures sous le nom de *sous-cyclage* (*subcycling*) [Piperno *et al.*, 1995; Farhat *et al.*, 1998], ou en dynamique transitoire [Combescure et Gravouil, 2002; Gravouil et Combescure, 2003]. Elles sont d'une grande utilité en pratique, mais le respect de la conservation de l'énergie au niveau de l'interface demande des précautions particulières.

Les résultats présentés dans la section précédente entrent dans ce cadre : en effet, l'analyse globale y est menée en un seul incrément, tandis que l'analyse locale en utilise quatre. Le couplage des deux solutions n'est donc assuré qu'à la fin de l'intervalle de temps ; sur les pas de temps intermédiaire, l'analyse locale est pilotée de façon purement descendante à l'aide du déplacement global interpolé, et l'équilibre n'est pas vérifié. Par conséquent, une *erreur en dissipation* apparaît au cours du calcul, et le procédé ne converge donc plus vers la solution du problème « substitué ».

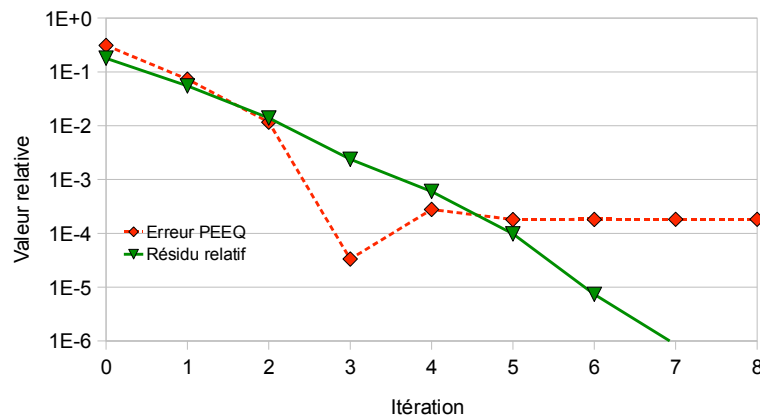


Figure 6.15: Convergence et erreurs résiduelles lors d'un sous-cyclage.

Afin de chiffrer l'erreur due à ce couplage incomplet, nous avons calculé l'erreur en déformation plastique cumulée par rapport à la solution de référence, calculée en utilisant *les quatre mêmes incréments que l'analyse locale*; les résultats sont présentés sur la Figure 6.15. On observe une erreur résiduelle d'environ 0,02% sur la déformation plastique; une valeur très proche est obtenue sur les déplacements. Ici, l'erreur introduite par le « sous-cyclage » semble donc relativement faible; d'autres études sont néanmoins nécessaires pour s'assurer que ce procédé est viable. Si tel était le cas, cela ouvrirait alors la voie à une résolution globale en temps, ce qui permettrait de traiter des histoires de chargement complexes de manière simple et efficace comme expliqué au Chapitre 5, Section 2.2.

2 Un exemple 3D d'origine industrielle

Afin de valider la faisabilité de la méthode et d'estimer ses performances dans un environnement industriel, des tests ont également été réalisés sur un exemple 3D fourni par Snecma. Il s'agit d'un modèle d'aube de turbine banalisé, avec une géométrie et une relation de comportement modifiées pour des raisons de confidentialité, mais dont la sophistication est comparable à celle de véritables applications industrielles, tant au niveau de la taille des problèmes à résoudre que de la complexité du jeu de données.

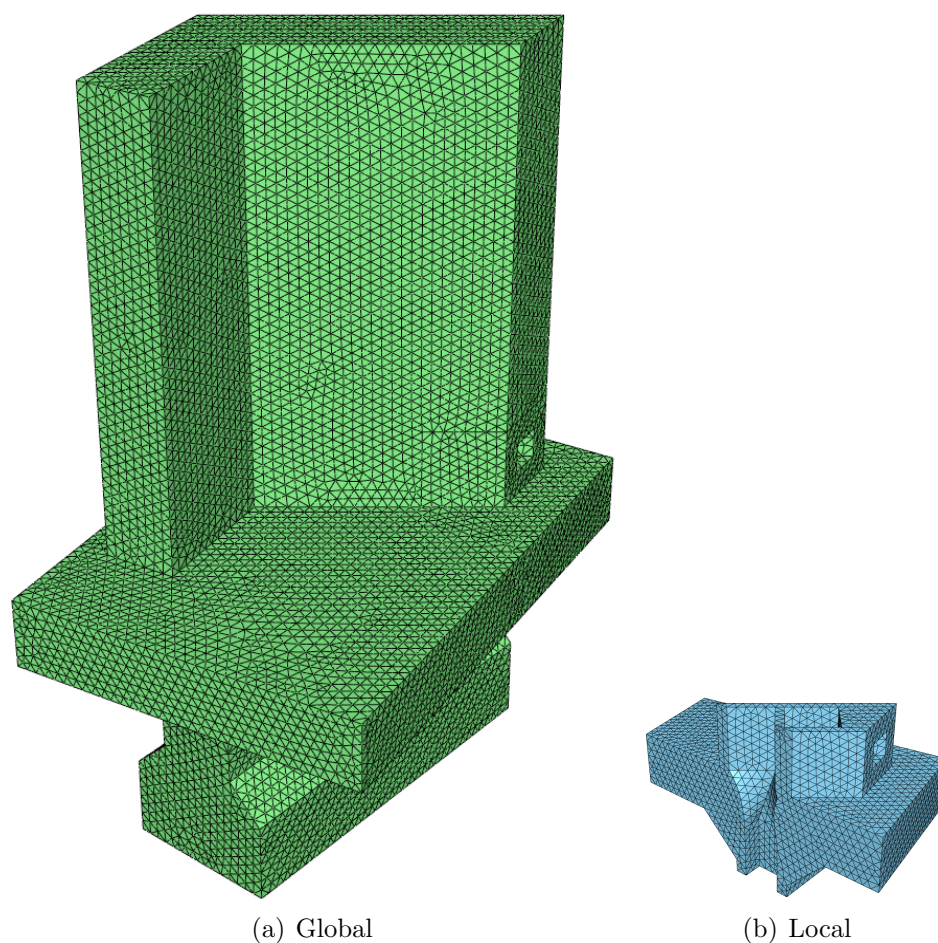


Figure 6.16: Maillages du cas-test 3D Snecma

Le cas-test comprend deux modèles, représentés sur la Figure 6.16. Le modèle global (Figure 6.16(a)) est élastique linéaire et totalise 500.000 degrés de liberté (ddl) ; il est soumis à un chargement complexe simulant un cycle de vol en 15 étapes et près de 200 incréments, composé d'un champ de pression à la surface de l'aube, de forces volumiques centrifuges et de déformations thermiques transitoires précalculées, et les déplacements normaux sont bloqués sur les deux surfaces inclinées visibles au bas de la figure 6.16(a). Le modèle local (Figure 6.16(b)), totalisant 80.000 ddl,

utilise une partie du maillage global (aucun raffinement ou détail géométrique n'est donc introduit) et, dans la version initialement fournie par Snecma, le même comportement élastique linéaire que le modèle global⁵ ; les relations de comportement non-linéaires utilisées dans les calculs étant confidentielles, nous avons défini une relation élasto-plastique simple (à écrouissage linéaire isotrope) à partir d'un ordre de grandeur des valeurs réelles, avec le même module élastique que pour le modèle global. Enfin, l'interface comporte 6.400 ddl.

Ce cas-test a été fourni sous la forme d'un jeu de données prévu pour une analyse descendante (*submodeling*) classique sous Abaqus. En vertu des principes de mise en œuvre exposés dans la Section 5, aucune modification majeure n'a été nécessaire afin de l'adapter à la stratégie hormis, naturellement, la simplification du chargement : seul le premier *STEP a été conservé, et le schéma d'incrémentaion a été adapté de sorte qu'un seul pas de chargement soit utilisé.

2.1 Limites de l'analyse descendante

Une première étude réalisée sur ce cas-test est la quantification des erreurs introduites par l'analyse descendante avec raccord en déplacement. Pour ce faire, nous avons résolu le problème non-linéaire complet (obtenu par substitution). Nous avons alors calculé l'erreur relative portant sur deux quantités d'intérêt, utilisées par Snecma pour post-traiter l'analyse locale afin d'estimer la durée de vie.

2.1.1 Erreurs sur les contraintes

Estimer l'erreur sur les contraintes constitue une façon naturelle pour évaluer la validité de l'approche. En effet, en plus d'intervenir dans le calcul de la durée de vie, les contraintes sont naturellement *discontinues* à la traversée de l'interface à l'issue d'une analyse descendante en déplacement ; les méthodologies habituelles de validation du zoom en déplacement reposent donc sur l'examen de cette quantité.

La Figure 6.17 montre la répartition des contraintes de Von Mises locales pour la solution « descendante » et pour la solution « substituée » ; afin de bien montrer les zones critiques, le maillage a été retourné verticalement par rapport à la Figure 6.16(b), et l'image est cadrée sur la région la plus sollicitée (située en bas de la Figure 6.16(b)). On constate que les deux champs de contraintes semblent quasiment identiques ; l'erreur entre les deux maxima n'excède pas 0,7%, ce que l'on peut *a priori* considérer comme raisonnable. Dans l'hypothèse où seul le champ de contraintes doit être déterminé avec précision, l'emploi du zoom descendant pour traiter ce problème semble donc possible.

5. Ainsi, dans la version fournie par Snecma, aucune modification n'est introduite localement ; cette version est conçue pour vérifier le bon fonctionnement de la procédure de zoom descendant d'Abaqus.

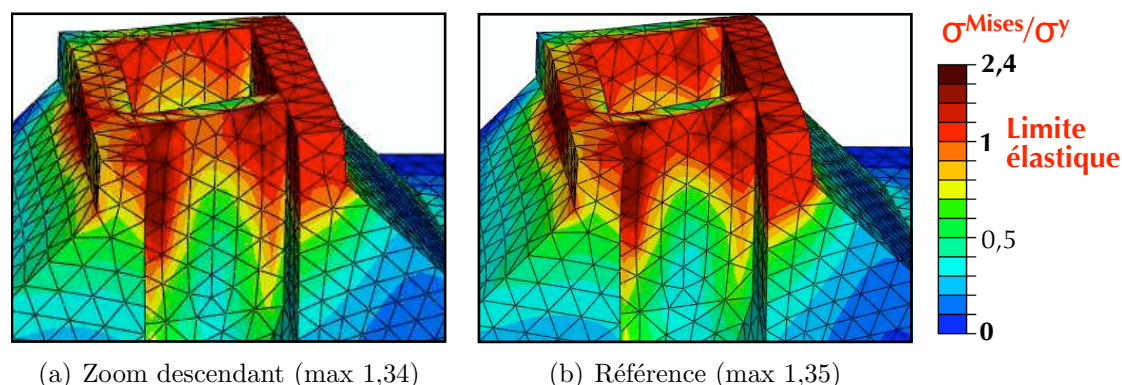


Figure 6.17: Contraintes locales de Von Mises sur le cas-test 3D Snecma

2.1.2 Erreurs sur la déformation plastique équivalente

Outre les contraintes, le calcul de la durée de vie fait aussi appel aux déformations plastiques. Or, une fois la limite élastique franchie, les contraintes évoluent relativement peu lors de l'écroutissage du matériau, tandis que la déformation plastique peut subir d'importantes variations. Elle risque donc d'être sujette à des erreurs plus élevées que les contraintes, comme nous l'avons vu précédemment.

Nous avons donc également comparé les déformations plastiques équivalentes obtenues par les deux méthodes : voir Figure 6.18. Par rapport aux contraintes, la situation est très différente : l'examen de la figure montre que l'étendue de la zone plastique est largement sous-estimée par le zoom descendant, et que la déformation plastique équivalente maximale est *sous-évaluée* de près de 60%. Ainsi, le zoom descendant ne conduit pas à une évaluation correcte des déformations plastiques, que ce soit en moyenne ou en valeur maximale.

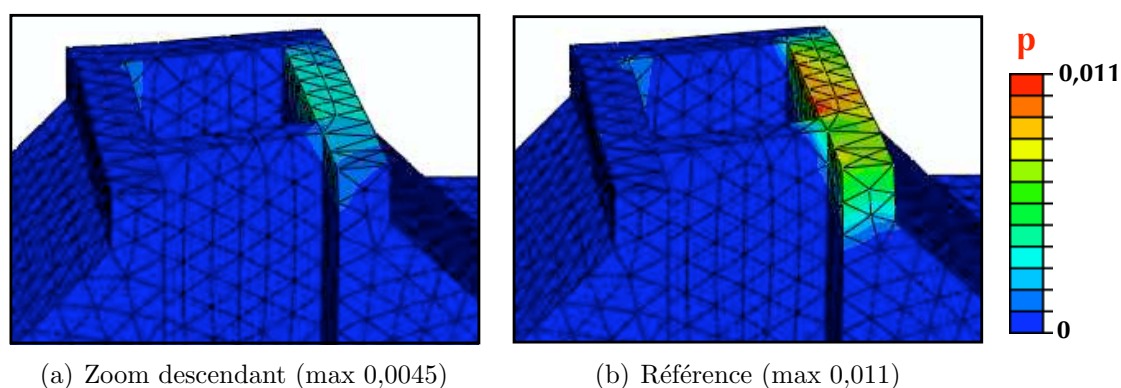


Figure 6.18: Déformations plastiques équivalentes sur le cas-test 3D Snecma

Ce constat ne doit naturellement pas être généralisé aux cas réels, puisque le calcul utilise une relation de comportement différente (sans viscosité et avec des valeurs numériques extrêmement approchées), et un chargement monotone simplifié. Le

résultat n'est donc pas représentatif des phénomènes se produisant sur de véritables aubes soumises à plusieurs cycles de vol. Cependant, il illustre bien le fait qu'en présence de plasticité même très localisée, n'entraînant que de faibles redistributions des contraintes et des déformations dans la structure, l'absence de prise en compte de ces dernières peut conduire à d'importantes erreurs sur certaines quantités.

2.2 Application de la méthode

2.2.1 Convergence de la variante en déplacement

Nous présentons maintenant les résultats de l'application de la méthode sur ce cas-test 3D, en commençant par la variante en déplacement. Comme nous l'avons vu précédemment, en partant d'un jeu de données Abaqus faisant appel au *submodeling*, la mise en œuvre de cette variante ne nécessite pratiquement aucune modification des fichiers d'entrée, et s'effectue de manière complètement automatisée à l'aide du script présenté au Chapitre 5, Section 3.

La Figure 6.19 présente l'évolution de l'erreur en déformation plastique équivalente maximale et du résidu relatif, avec et sans accélération quasi-Newton ; le choix de la déformation plastique comme quantité d'intérêt découle naturellement de son extrême sensibilité aux erreurs sur la condition aux limites. Les erreurs « vraies » sont représentées en pointillés et les résidus en traits pleins.

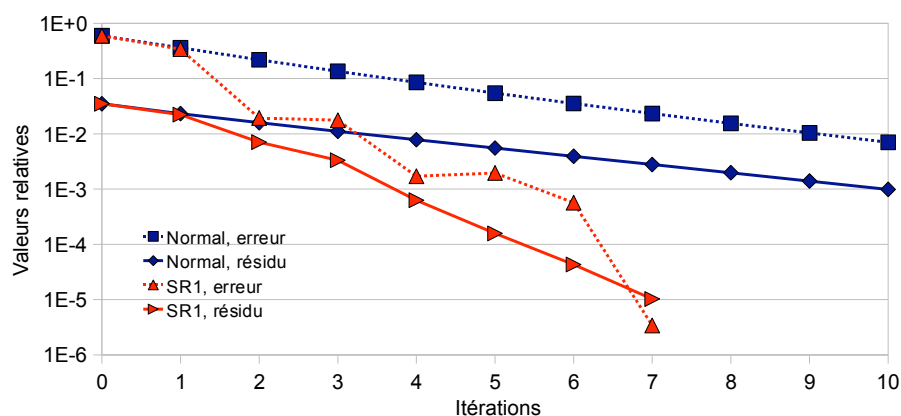


Figure 6.19: Convergence de la variante en déplacement sur le cas-test 3D Snecma.

On constate que des valeurs très faibles de l'erreur (environ 0,1%) sont obtenues dès la quatrième itération avec l'accélération quasi-Newton, soit au prix de 4 analyses globales supplémentaires, contre plus de 10 sans accélération. Cela illustre encore une fois l'efficacité de cette technique — et ce d'autant plus que la durée d'application de la mise à jour SR1 est complètement négligeable devant celle d'un calcul sur l'un ou l'autre des modèles. On vérifie également que les résidus décroissent *grosso modo* à la même vitesse que l'erreur en déformation plastique et en donnent un ordre de grandeur correct, bien que leur valeur soit globalement plus faible.

2.2.2 Convergence de la variante mixte

Nous examinons maintenant les résultats obtenus à l'aide du raccord mixte. La rigidité de ce raccord a été prise égale à l'approximation « multi-échelles » du chapitre 4, avec :

- pour la partie « globale », la réponse de la zone complémentaire à des déplacements imposés affines sur l'interface (soit, en 3D, 12 vecteurs : 3 translations, 3 rotations, 3 allongements et 3 distortions)
- pour la partie « locale », le complément de Schur exact d'une couche d'éléments adjacente à l'interface ; deux épaisseurs ont été testées.

Les deux approximations locales utilisées ont été générées automatiquement par analyse de la table de connectivité globale ; elles sont représentées sur la Figure 6.20.

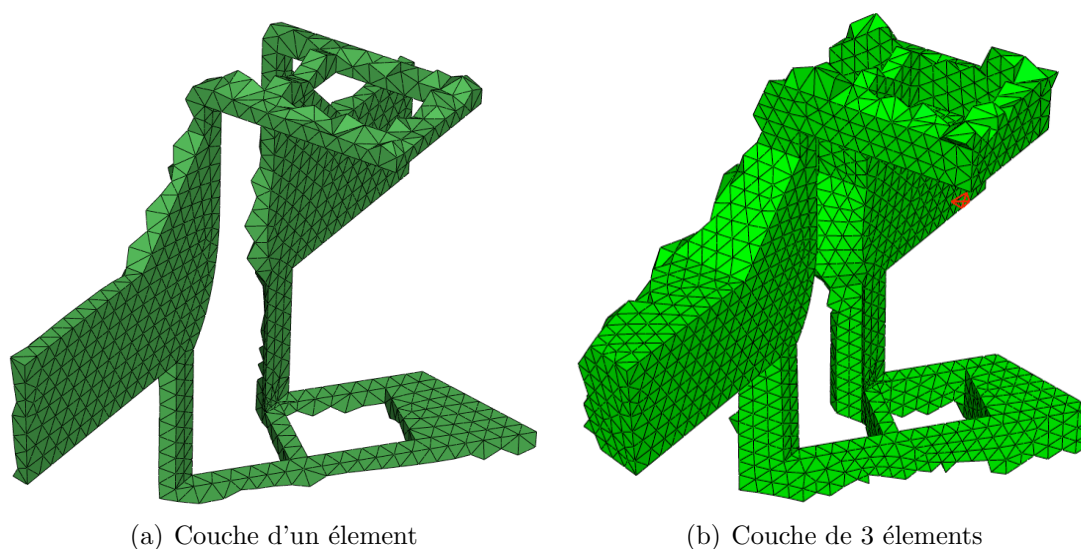


Figure 6.20: Approximations « locales » du complément de Schur sur le cas-test 3D Snecma

Les résultats, obtenus avec l'accélération SR1, sont représentés sur la Figure 6.21. On constate qu'une convergence très rapide est obtenue, puisque l'erreur en déformation plastique cumulée maximale est inférieure à 0,1% après seulement deux itérations de la méthode ; les performances sont légèrement meilleures pour la couche de 3 éléments que pour la couche d'un seul élément, et nettement plus élevées qu'avec le raccord en déplacement (2 itérations contre 4, pour atteindre un même niveau d'erreur).

Comme précédemment, le résidu donne une bonne estimation de l'ordre de grandeur de l'erreur. Enfin, remarquons que comme sur l'exemple 2D, l'erreur obtenue à l'« itération zéro » est trop élevée pour que la méthode puisse être utilisée de façon purement descendante : on obtient respectivement 30% et 15% avec les deux approximations testées (contre 60% avec le raccord en déplacement).

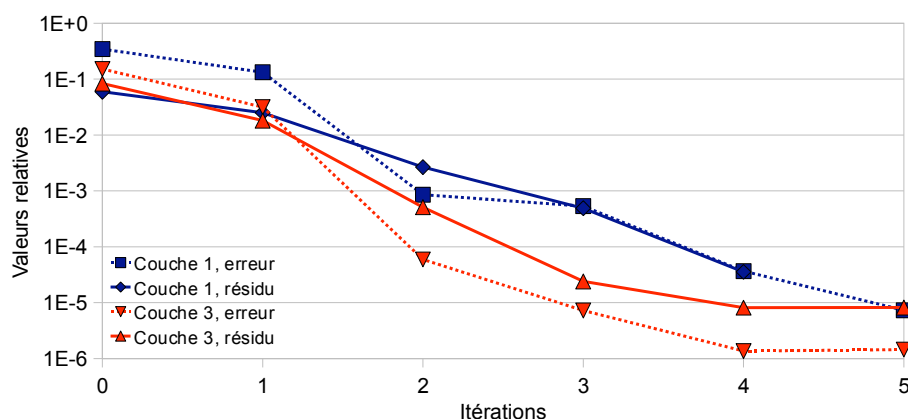


Figure 6.21: Convergence de la variante mixte sur le cas-test 3D Snecma.

2.2.3 Estimation des temps d'exécution

Le Tableau 6.1 donne un ordre de grandeur des temps CPU utilisés par chacune des étapes importantes de la méthode, obtenus sur une station de calcul assez récente (3,4 GHz, 4 Go de RAM) ; une estimation du coût d'une itération de chacune des variantes est alors donnée.

Étape	CPU (s)	Remarques
Global initial	250	
Global correctif	250	
Local (<i>raccord en déplacement</i>)	100	6 itérations
Local (<i>raccord mixte</i>)	570	6 itérations
Auxiliaire (<i>calcul d'un effort intérieur</i>)	20	
Couche d'un élément (<i>condensation</i>)	150	
Global « macro » (<i>12 seconds membres</i>)	280	
Auxiliaire « macro » (<i>12 seconds membres</i>)	25	
Référence	1030	5 itérations
Variante en déplacement (<i>une itération</i>)	370	
Variante mixte (<i>une itération</i>)	740	

Table 6.1: Temps CPU des calculs élémentaires de la méthode et coût des itérations, sur le cas-test 3D Snecma

■ Variante en déplacement

Sans surprise, les coûts de la variante en déplacement sont dominés par les calculs globaux ; les réassemblages et refactorisations de la matrice de rigidité par Abaqus font que les corrections globales sont toutes aussi coûteuses que l'analyse globale initiale. Le coût d'un appel au modèle auxiliaire est très faible devant celui d'une itération, comme prévu ; quant aux transferts de données et aux mises à jour SR1,

leur coût est négligeable (moins d'une seconde CPU en moyenne) vu que cette variante de la méthode ne manipule que des *vecteurs* d'efforts ou de déplacements nodaux.

■ Variante mixte

Concernant le raccord mixte, il faut distinguer les coûts liés à la construction de la rigidité mixte, qui est effectuée une fois pour toutes, de ceux d'une itération proprement dite.

Ici, la construction de la rigidité mixte est relativement peu coûteuse. En effet, les calculs globaux et auxiliaires permettant l'obtention de la partie « macro », nécessitant l'analyse simultanée de 12 seconds membres correspondants aux déplacements « macro » imposés, ne sont guère plus coûteux que des calculs à un seul second membre ; quant à l'approximation « micro », elle repose sur un modèle très local (15000 ddl) dont la condensation est largement abordable. Il faut ajouter à cette estimation les coûts liés aux transferts des différentes matrices ; ces dernières étant pleines, de taille moyenne (6400 ici) et écrites dans des fichiers texte, les temps de lecture/écriture sont de l'ordre de 2 à 3 minutes, donc non négligeables. La construction du complément de Schur approché reste cependant peu coûteuse — en tout cas beaucoup moins qu'une condensation complète, qui n'a d'ailleurs pas pu être testée ici pour des raisons d'encombrement mémoire — et ces faibles temps de calcul suggèrent qu'il est sans doute possible d'utiliser des approximations plus riches, menant à une convergence plus rapide, tout en conservant des coûts raisonnables au niveau de cette étape.

En revanche, le coût d'une itération mixte est nettement supérieur à celui d'une itération en déplacement : l'analyse locale est en effet 5 à 6 fois plus longue, pour un nombre d'itérations identique. Ceci est encore une fois dû à la présence d'une matrice pleine, entraînant un surcoût :

- d'une part lors de la lecture du fichier texte, comme nous l'avons mentionné ci-dessus ;
- d'autre part lors de la résolution : en effet, l'assemblage de \mathbf{A} augmente fortement la largeur de bande des matrices de rigidité locales. Or, le solveur direct utilisé par Abaqus est un solveur multifrontal dédié aux matrices creuses, et ses performances se dégradent fortement lorsque la largeur de bande (ou, plus précisément, la largeur du front) du système augmente trop.

Une solution classique pour remédier à ces deux problèmes serait de « creuser » l'approximation du complément de Schur, en annulant les termes trop éloignés de la diagonale si leur valeur est suffisamment faible ; cela dégrade néanmoins la qualité de l'approximation obtenue, et un bon compromis entre taux de convergence et coût d'une itération doit donc être identifié. D'autres questions restent également à examiner ; par exemple, si l'approximation finale doit être dégradée pour réduire la taille des fichiers, jusqu'à quel point les efforts consentis lors du calcul des parties « macro » et « micro » sont-ils rentables ?

Nous ne présentons pas d'estimation du coût total de la méthode sur cet exemple,

car le cas-test traité comporte un seul incrément de chargement et n'est donc absolument pas représentatif d'un véritable problème de plasticité localisée. On constate d'ailleurs qu'avec les deux variantes, malgré le faible nombre d'itérations requis pour avoir une précision acceptable (2 en déplacement et 4 en mixte pour une erreur en déformation plastique inférieure à 0,5%), le coût de la méthode est supérieur au coût du calcul de référence. Une estimation pertinente des performances de la méthode ne peut être effectuée que dans le contexte d'un problème complet, avec de nombreux incréments de chargement ; il est donc nécessaire de se poser la question de leur traitement.

2.2.4 Vers le traitement d'incrément multiples

Afin de traiter des histoires de chargement complètes, deux approches sont envisageables. La première est d'utiliser un *schéma incrémental* classique, c'est-à-dire de découper les chargements des deux problèmes en incréments identiques et, pour chacun d'eux, de mener des échanges jusqu'à convergence ; nous avons vu au Chapitre 5 que la mise en œuvre de cette approche sous Abaqus se heurte à d'importantes difficultés techniques. En outre, nous venons de voir que sur un problème à un seul incrément, la méthode n'est pas moins coûteuse qu'une résolution directe du problème de référence. Or, l'impossibilité de conserver la factorisation des matrices de rigidité sous Abaqus (voir Chapitre 5, Section 2.4) fait que tous les calculs devraient être repris de zéro à chaque incrément : une solution purement incrémentale risque donc de s'avérer relativement coûteuse.

L'autre possibilité envisagée est de mettre en œuvre un schéma *global en temps*, dans l'esprit de la méthode LaTIn [Ladevèze, 1985] ; il s'agirait alors de mener la technique d'échanges en résolvant, à chaque itération, des problèmes portant sur *toute l'histoire du chargement*. Cette méthodologie semble beaucoup mieux convenir à notre problème que la précédente, pour plusieurs raisons :

- elle est bien adaptée au fonctionnement d'Abaqus (chaque fichier d'entrée définit en effet un problème d'évolution complet) et ne demande aucune réécriture des jeux de données, assurant une mise en œuvre non-intrusive aisée ;
- elle limite la fréquence des échanges de données entre les modèles, et donc les coûts de pré-traitement ;
- lors de la correction globale, elle permet de traiter les résidus correspondant aux divers incréments de façon *simultanée* et non pas successive, ce qui est beaucoup moins coûteux (voir section précédente) sous réserve de capacités mémoire suffisantes ;
- enfin, elle se prête naturellement à l'emploi d'une technique de réduction de modèles, telle que la POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) [Liang *et al.*, 2002], qui permettrait de représenter les résidus par un nombre réduit de seconds membres, pour les problèmes ayant un très grand nombre de pas de chargement.

Ainsi, en agissant sur les étapes les plus coûteuses, un schéma global en temps pourrait rendre la méthode très compétitive sur de tels problèmes — c'est-à-dire moins coûteuse qu'un calcul complet, tout en présentant la fiabilité faisant défaut aux approches descendantes.

Conclusion

Au cours de ce travail, une stratégie de calcul permettant d'insérer des non-linéarités localisées au sein d'un problème éléments finis élastique linéaire, et de prendre en compte leur effet *exact* de manière *non-intrusive* — c'est-à-dire sans modifier le modèle initial, ni le solveur utilisé pour l'analyser — a été développée.

L'idée essentielle de cette stratégie est de représenter le sous-domaine contenant les non-linéarités par un *modèle local* distinct du modèle global initial, et de *coupler* ces deux modèles au niveau de la frontière du sous-domaine, également appelée *interface*, au moyen d'une technique d'échanges itérative ne manipulant que des quantités éléments finis standard (efforts et déplacements nodaux définis sur l'interface). Cette technique est conçue pour converger vers la solution du problème que l'on obtiendrait en *substituant* le modèle local au sein du modèle global. Ainsi, la méthode est à la fois exacte (puisque l'erreur introduite par le découpage global/local peut être réduite autant que nécessaire) et non-intrusive (puisque le modèle global n'est jamais modifié, et que la méthode n'utilise que des fonctionnalités courantes d'un solveur généraliste du commerce).

Selon la nature de la condition aux limites imposée sur l'interface lors de l'analyse locale, nous avons distingué deux variantes de la méthode. La plus simple d'entre elles consiste à imposer le *champ de déplacement global* ; les efforts de réaction des deux sous-domaines sur l'interface ne sont alors pas à l'équilibre, et ce déséquilibre est injecté dans le problème global en tant que chargement correctif. La matrice de rigidité globale n'étant jamais modifiée, ce procédé est simple à mettre en œuvre, mais conduit à une convergence assez lente. Pour y remédier, nous avons développé une *technique d'accélération* basée sur une méthode quasi-Newton (la formule SR1) associée à une mise en œuvre non-intrusive permettant de ne jamais modifier explicitement la matrice de rigidité ; nous avons vu que ce procédé permet d'accélérer fortement la convergence pour un surcoût par itération quasiment nul.

L'autre variante, dite *mixte*, fait appel à une condition de Robin sur la frontière du modèle local. Cette condition est basée sur une matrice de rigidité d'interface, permettant de simuler la raideur du reste de la structure, et dont la valeur optimale correspond au *complément de Schur* de ce reste ; cette grandeur étant extrêmement coûteuse à calculer, plusieurs approximations ont été étudiées. Nous avons ainsi pu constater que les approches classiques utilisant soit la réponse du voisinage immédiat de l'interface, soit des techniques d'homogénéisation discrète, sont inopérantes ici.

En revanche, en combinant ces deux méthodologies à l'aide d'une décomposition « multi-échelles » des efforts d'interface basée sur le principe de Saint-Venant, on obtient des *approximations hybrides* d'une efficacité remarquable et relativement peu coûteuses à calculer. Associée aux techniques d'accélération évoquées précédemment, cette approche permet une convergence très rapide, au prix d'une mise en données plus lourde que celle du raccord en déplacement.

Grâce à la formulation non-intrusive de l'approche, sa mise en œuvre à l'aide d'un logiciel de calcul du commerce est relativement aisée, et n'utilise que des *scripts* de haut niveau pilotant le logiciel de manière extérieure. Aucune modification du solveur ou des jeux de données existants n'est nécessaire. Ceci a permis d'appliquer la méthode à un démonstrateur fourni par notre partenaire industriel Snecma : l'étude de ce cas-test a mis en évidence que les analyses descendantes habituellement utilisées en présence de plasticité localisée peuvent conduire à des erreurs importantes sur certaines quantités d'intérêt. *A contrario*, la méthode présentée ici permet d'éviter ces erreurs pour un coût raisonnable, des résultats tout à fait satisfaisants pouvant être obtenus en deux ou trois itérations seulement. Elle représente donc un moyen réaliste d'améliorer la fiabilité des calculs actuellement réalisés de manière purement descendante.

A l'issue de ce travail, les perspectives de recherche sont nombreuses. Plusieurs voies complémentaires peuvent être envisagées.

Une première voie consiste à poursuivre le développement de la méthode, toujours en vue de traiter des problèmes de plasticité ou viscoplasticité localisée, de sorte à en accroître les performances et à en surmonter les principales limitations. Pour ce faire, on peut notamment distinguer deux axes d'amélioration. Le premier concerne le *raccord mixte*, dont la mise au point est relativement récente ; la construction d'autres projecteurs « macro » et « micro » respectant mieux le principe de Saint-Venant, l'automatisation de la procédure et l'optimisation de la largeur de bande des approximations du complément de Schur sont autant de pistes pour rendre ce raccord plus performant et moins lourd à utiliser. Le second axe concerne la mise au point d'un *schéma global en temps*, permettant d'étendre la méthode aux problèmes dépendant explicitement du temps et de traiter efficacement les histoires de chargement complexes. Un tel schéma autorisant le traitement *simultané* des résidus lors de la correction globale, il pourrait réduire fortement les coûts de la méthode, tout en limitant les conséquences des refactorisations de la rigidité globale — qui semblent actuellement impossibles à empêcher dans un cadre purement non-intrusif.

Une autre voie consiste au contraire à accroître la flexibilité de la méthode, par exemple en vue de la décliner pour d'autres types de non-linéarités localisées. Ainsi, un cas d'application envisagé est celui de l'*endommagement localisé* de structures en matériaux composites ; les modèles actuels permettant de traiter ce type de problèmes de façon réaliste et à un coût raisonnable utilisent des relations de comportement non locales, difficiles à développer au sein d'un logiciel commercial. Le couplage d'un « code de recherche » analysant localement le phénomène avec un

solveur généraliste, à l'aide de l'approche présentée ici, représente une voie prometteuse pour la prédiction de tels phénomènes. D'autres potentialités existent, tel que le traitement des problèmes de *contact localisé* rencontrés par Snecma sur des modèles de distributeurs de turbines; elles pourraient nécessiter quelques développements supplémentaires tels que la prise en compte de *maillages incompatibles*, qui permettrait en outre d'offrir encore plus de flexibilité dans la définition du modèle local.

Enfin, une dernière voie de recherche consisterait à adapter la méthode à d'autres configurations qu'une unique zone d'intérêt au sein d'un modèle global. On peut ainsi envisager une application à des problèmes présentant plusieurs zones d'intérêt disjointes; selon le type de non-linéarité étudié, un contrôle différencié de la convergence au niveau des différentes interfaces serait peut-être à prévoir. Une autre évolution serait de décliner cette démarche non pas sur deux niveaux d'analyse (global et local), mais sur toute une hiérarchie de niveaux, allant par exemple d'une grande structure industrielle complète aux détails d'un composant critique. Une telle technique permettrait de prendre en compte, à chaque niveau d'analyse, les effets exacts des niveaux inférieurs comme ceux des niveaux supérieurs; les incertitudes introduites par les approches descendantes traditionnelles seraient ainsi évitées, mais cette fois au niveau du dimensionnement d'une structure complète, ce qui ouvrirait la voie vers de nouvelles méthodologies de conception robuste.

Bibliographie

- [Achdou et Nataf, 1994] ACHDOU, Y. et NATAF, F. (1994). Local approximations of the Steklov-Poincaré operator for a class of elliptic operators, and domain decomposition methods. Rapport interne, Ecole Polytechnique.
- [Akgün *et al.*, 2001] AKGÜN, M., GARCELON, J. et HAFTKA, R. (2001). Fast exact linear and nonlinear structural reanalysis and the Sherman-Morrison-Woodbury formulas. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:1587–1606.
- [Alart et Dureisseix, 2008] ALART, P. et DUREISSEIX, D. (2008). A scalable multiscale LATIN method adapted to nonsmooth discrete media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5):319–331.
- [Allix, 1987] ALLIX, O. (1987). Délaminage : approche par la mécanique de l’endommagement. *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, pages 39–53.
- [Allix, 2006] ALLIX, O. (2006). Multiscale strategy for solving industrial problems. *Computational Mechanics : Solids, Structures and Coupled Problems*, pages 107–126.
- [Allix *et al.*, 2009] ALLIX, O., GENDRE, L. et GOSSELET, P. (2009). Non-intrusive global/local strategies for solving large problems with localized nonlinearities. *In Proceedings of the 2nd South-East European Conference on Computational Mechanics (SEECCM 2009)*, Athens, Greece. Institute of Structural Analysis and Seismic Research, National Technical University of Athens.
- [Babuska et Andersson, 2005] BABUSKA, I. et ANDERSSON, B. (2005). The splitting method as a tool for multiple damage analysis. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(4):1114–1145.
- [Barthelemy et Haftka, 1993] BARTHELEMY, J. F. M. et HAFTKA, R. T. (1993). Approximation concepts for optimum structural design — a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 5(3):129–144.
- [Ben Dhia, 1998] BEN DHIA, H. (1998). Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. *Comptes-Rendus de l’Académie des Sciences*, IIb(326):899–904.
- [Ben Dhia et Rateau, 2001] BEN DHIA, H. et RATEAU, G. (2001). Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte. *Comptes-Rendus de l’Académie des Sciences*, 332:649–654.

- [Bernardi *et al.*, 1991] BERNARDI, C., MADAY, Y. et PATERA, A. T. (1991). A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method. In BRÉZIS, H. et LIONS, J.-L., éditeurs : *Nonlinear partial differential equations and their applications*, Collège de France Seminar, pages 13–51, London. Pitman.
- [Berveiller *et al.*, 2006] BERVEILLER, M., SUDRET, B. et LEMAIRE, M. (2006). Stochastic finite element : a non intrusive approach by regression. *Revue européenne de mécanique numérique*, 15(1–3):81–92.
- [Blanzé *et al.*, 1996] BLANZÉ, C., CHAMPANEY, L., COGNARD, J. Y. et LADEVÈZE, P. (1996). A modular approach to structure assembly computations : application to contact problems. *Engineering Computations*, 13(1):15–32.
- [Blanzé *et al.*, 1993] BLANZÉ, C., DANWÉ, R., LADEVÈZE, P. et MOREAU, J. P. (1993). Une méthode pour l'étude d'assemblage de structures massives. In *Actes du premier Colloque National en Calcul de Structures, Giens*, pages 1104–1113. Hermès.
- [Boisse *et al.*, 1989] BOISSE, P., LADEVÈZE, P. et ROUGÉE, P. (1989). A large time increment method for elastoplastic problems. *European Journal of Mechanics*, 8:257–275.
- [Boucard, 2001] BOUCARD, P. (2001). Application of the LaTIn method to the calculation of response surfaces. In BATH, K., éditeur : *Proceedings of the First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, volume 1, pages 78–81, USA.
- [Boucard et Ladevèze, 1999] BOUCARD, P. et LADEVÈZE, P. (1999). Une application de la méthode LaTIn au calcul multirésolution de structures non-linéaires. *Revue européenne des éléments finis*, 8:903–920.
- [Boucard et Ladevèze, 1997] BOUCARD, P.-A. et LADEVÈZE, P. (1997). Post-buckling analysis using a non-incremental method. In *15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics*, volume 3, pages 449–454.
- [Brandt, 1977] BRANDT, A. (1977). Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, 31(138):333–390.
- [Brezzi *et al.*, 2001] BREZZI, F., LIONS, J. L. et PIRONNEAU, O. (2001). Analysis of a Chimera method.
- [Bussy *et al.*, 1990] BUSSY, P., ROUGÉE, P. et VAUCHEZ, P. (1990). *The Large Time Increment method for numerical simulation of metal forming processes*, pages 102–109. Swansea.
- [Chamoin et Ladevèze, 2008] CHAMOIN, L. et LADEVÈZE, P. (2008). A non-intrusive method for the calculation of strict and efficient bounds of calculated outputs of interest in linear viscoelasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(9–12):994–1014.

- [Champaney *et al.*, 1999] CHAMPANEY, L., COGNARD, J. et LADEVÈZE, P. (1999). Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions. *Computers and Structures*, 73:249–266.
- [Champaney *et al.*, 1997] CHAMPANEY, L., COGNARD, J.-Y., DUREISSEIX, D. et LADEVÈZE, P. (1997). Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method. *Computational Mechanics*, 19:253–263.
- [Cognard, 1989] COGNARD, J. (1989). *Une nouvelle approche des problèmes de plasticité et de viscoplasticité : la Méthode à Grand Incrément de Temps*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- [Combescure et Gravouil, 2002] COMBESCURE, A. et GRAVOUIL, A. (2002). A numerical scheme to couple subdomains with different time steps for predominantly linear transient analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:1129–1157.
- [Cormier *et al.*, 1999] CORMIER, N. G., SMALLWOOD, B. S., SINCLAIR, G. B. et MEDA, G. (1999). Aggressive submodelling of stress concentrations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:889–909.
- [Cornuault, 1998] CORNUAULT, C. (1998). Modélisation mécanique et optimisation des structures d’avions. *Nouvelle revue d’aéronautique et d’astronautique*, 1:35–53.
- [Cresta, 2008] CRESTA, P. (2008). *Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan.
- [Cresta *et al.*, 2007] CRESTA, P., ALLIX, O., REY, C. et GUINARD, S. (2007). Non-linear localization strategies for domain decomposition methods : application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8):1436–1446.
- [Dassault Systèmes, 2007] DASSAULT SYSTÈMES, I. (2007). *Abaqus Analysis User Manual (v6.7)*.
- [de Roeck *et al.*, 1992] de ROECK, Y.-H., TALLEC, P. L. et VIDRASCU, M. (1992). A domain-decomposed solver for nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99:187–207.
- [Düster *et al.*, 2007] DÜSTER, A., NIGGL, A. et RANK, E. (2007). Applying the $hp - d$ version of the FEM to locally enhance dimensionally reduced models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:3524–3533.
- [Düster *et al.*, 1999] DÜSTER, A., RANK, E., STEINL, G. et WUNDERLICH, W. (1999). A combination of an h - and a p -version of the finite element method for elastic-plastic problems. In WUNDERLICH, W., éditeur : *ECCM '99*.
- [Elkhodja *et al.*, 2007] ELKHODJA, N., DHIA, H. B. et ROUX., F.-X. (2007). Modélisation de structures multi-défauts dans le cadre Arlequin et approches par sous-domaines. In *Colloque National en Calcul de Structures*.

- [Farhat *et al.*, 1998] FARHAT, C., LESOINNE, M. et LE TALLEC, P. (1998). Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces : Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157:95–114.
- [Farhat *et al.*, 2001] FARHAT, C., LESOINNE, M., LE TALLEC, P., PIERSON, K. et RIXEN, D. (2001). FETI-DP : A dual/primal unified FETI method - Part I : A faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:1523–1544.
- [Farhat *et al.*, 1996] FARHAT, C., PIERSON, K. et LESOINNE, M. (1996). A simple and unified framework for accelerating the convergence of iterative substructuring methods with Lagrange multipliers : applications to the design of new FETI coarse problems. Rapport technique CU-CAS-96-26, Center for Aerospace Structures.
- [Farhat *et al.*, 2000] FARHAT, C., PIERSON, K. et LESOINNE, M. (2000). The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically nonlinear structural analysis problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184:333–374.
- [Farhat et Roux, 1991] FARHAT, C. et ROUX, F. X. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:1205–1227.
- [Fedorenko, 1964] FEDORENKO, R. (1964). The speed of convergence of one iterative process. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4:227–235.
- [Feyel, 2003] FEYEL, F. (2003). A multilevel finite element method (FE²) to describe the response of highly nonlinear structures using generalized continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3233–3244.
- [Feyel et Chaboche, 2000] FEYEL, F. et CHABOCHE, J. (2000). FE² multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fiber sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183:309–330.
- [Fish, 1992] FISH, J. (1992). The *s*-version of the finite element method. *Computers and Structures*, 43(3):539–547.
- [Fish et Belsky, 1994] FISH, J. et BELSKY, V. (1994). Multigrid method for periodic heterogeneous media. Part 2 : Multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126:17–38.
- [Fish et Markolefas, 1992] FISH, J. et MARKOLEFAS, S. (1992). The *s*-version of the finite element method for multilayer laminates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1081–1105.
- [Fish *et al.*, 1995] FISH, J., PANDHEERADI, M. et BELSKY, V. (1995). An efficient multilevel solution scheme for large scale nonlinear systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:1597–1610.

- [Fish *et al.*, 1996] FISH, J., PANDHEERADI, M. et BELSKY, V. (1996). Efficient solution schemes for interface problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 22:267–280.
- [Fish et Shek, 2000] FISH, J. et SHEK, K. (2000). Multiscale analysis of large scale nonlinear structures and materials. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1(1):79–90.
- [Fish *et al.*, 1997] FISH, J., SUVOROV, A. et BELSKY, V. (1997). Hierarchical composite grid method for global-local analysis of laminated composite shells. *Applied Numerical Mathematics*, 23(2):241–258.
- [Fortin et Glowinski, 1983] FORTIN, M. et GLOWINSKI, R. (1983). Augmented Lagrangian methods : applications to the numerical solution of boundary value problems. In *Studies in Mathematics and its Applications*, chapitre 15. Elsevier.
- [Gander *et al.*, 2003] GANDER, M. J., MAGOULÈS, F. et NATAF, F. (2003). Optimized Schwarz methods without overlap for the Helmholtz equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(1):38–60.
- [Ghosh *et al.*, 1995] GHOSH, S., LEE, K. et MOORTHY, S. (1995). Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and Voronoi cell finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 32(1):27–62.
- [Ghosh *et al.*, 2001] GHOSH, S., LEE, K. et RAGHAVAN, P. (2001). A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 38:2335–2385.
- [Glowinski et Le Tallec, 1990] GLOWINSKI, R. et LE TALLEC, P. (1990). Augmented Lagrangian interpretation of the nonoverlapping Schwarz alternating method. In SIAM, éditeur : *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 224–231.
- [Gosselet, 2003] GOSSELET, P. (2003). *Méthodes de décomposition de domaine et méthodes d'accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non-linéaire*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- [Gosselet et Rey, 2002] GOSSELET, P. et REY, C. (2002). On a selective reuse of Krylov subspaces in Newton-Krylov approaches for nonlinear elasticity. In *Proceedings of the 14th conference on Domain Decomposition methods*, pages 419–426.
- [Gosselet et Rey, 2006] GOSSELET, P. et REY, C. (2006). Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Arch. Comput. Meth. Engng.*, 13:515–572.
- [Gravouil et Combescure, 2003] GRAVOUIL, A. et COMBESCURE, A. (2003). Multi-time-step and two-scale domain decomposition method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:1545–1569.

- [Gu *et al.*, 2004] GU, H., ZONG, Z. et HUNG, K. C. (2004). A modified superconvergent patch recovery method and its application to large deformation problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:665–687.
- [Guidault, 2005] GUIDAULT, P. (2005). *Une stratégie de calcul pour les structures fissurées : analyse locale-globale et approche multiéchelle pour la fissuration*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan.
- [Guidault *et al.*, 2008] GUIDAULT, P., ALLIX, O., CHAMPANEY, L. et CORNUAULT, C. (2008). A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:381–399.
- [Guidault *et al.*, 2007] GUIDAULT, P., ALLIX, O., CHAMPANEY, L. et NAVARRO, J. (2007). A two-scale approach with homogenization for the computation of cracked structures. *Computers and Structures*, 85:1360–1371.
- [Guidault et Belytschko, 2007] GUIDAULT, P. et BELYTSCHKO, T. (2007). On the L^2 and the H^1 couplings for an overlapping domain decomposition method using Lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 70:322–350.
- [Hackbusch, 1984] HACKBUSCH, W. (1984). Local defect correction and domain decomposition techniques. In OHMER, K. B. et STETTER, H. J., éditeurs : *Defect Correction Methods. Theory and Applications, Computing*, volume Suppl. 5, pages 89–113. Springer.
- [Hauret et Le Tallec, 2007] HAURET, P. et LE TALLEC, P. (2007). Two-scale Dirichlet-Neumann preconditioners for elastic problems with boundary refinements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196:1574–1588.
- [Hirai, 1985] HIRAI, I. (1985). An exact zooming method. *Finite Element Analysis and Design*, 1:61–69.
- [Hirai *et al.*, 1984] HIRAI, I., WANG, B. P. et PILKEY, D. (1984). An efficient zooming method for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:1671–1683.
- [Holnicki-Szulc, 1991] HOLNICKI-SZULC, J. (1991). Virtual distortion method. In *Lecture Notes in Engineering*, volume 65. Springer, New York.
- [Hughes, 1995] HUGHES, T. (1995). Multiscale phenomena : Green’s functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127:387–401.
- [Hughes *et al.*, 1998] HUGHES, T., FEIJOO, G. R., MAZZEI, L. et QUINCY, J.-B. (1998). The variational multiscale method — a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166:3–24.
- [Ibrahimbegović et Marković, 2003] IBRAHIMBEGOVIĆ, A. et MARKOVIĆ, D. (2003). Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3089–3107.

- [Jara-Almonte et Knight, 1988] JARA-ALMONTE, C. C. et KNIGHT, C. E. (1988). The specified boundary stiffness and force (SBSF) method for finite element subregion analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:1567–1578.
- [Kapania *et al.*, 1997] KAPANIA, R. K., HARYADI, S. G. et HAFTKA, R. T. (1997). Global/local analysis of composite plates with cutouts. *Computational Mechanics*, 19:386–396.
- [Kelley, 1982] KELLEY, F. S. (1982). Mesh requirements for the analysis of a stress concentration by the specified boundary displacement method. In ASME, éditeur : *Proceedings of the Second Computers In Engineering International Conference*.
- [Kerfriden *et al.*, 2009] KERFRIDEN, P., ALLIX, O. et GOSSELET, P. (2009). A three-scale domain decomposition method for the 3D analysis of debonding in laminates. *Computational Mechanics*, 33(3):343–362.
- [Kim, 2002] KIM, H.-G. (2002). Interface element method (IEM) for a partitioned system with non-matching interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:3165–3194.
- [Kirsch et Bogomolni, 2007] KIRSCH, U. et BOGOMOLNI, M. (2007). Nonlinear and dynamic structural analysis using combined approximations. *Computers and Structures*, 85(10):566–578.
- [Kirsch et Liu, 1995] KIRSCH, U. et LIU, S. (1995). Exact structural reanalysis by a first-order reduced basis approach. *Structural Optimization*, 10:153–158.
- [Kirsch et Papalambros, 2001] KIRSCH, U. et PAPALAMBROS, P. Y. (2001). Exact and accurate solutions in the approximate reanalysis of structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 39(11):2198–2205.
- [Kouznetsova *et al.*, 2004] KOUZNETSOVA, V. G., GEERS, M. G. D. et BELMANS, W. A. M. (2004). Multi-scale second order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:5525–5550.
- [Krause et Rank, 2003] KRAUSE, R. et RANK, E. (2003). Multiscale computations with a combination of the h - and p - versions of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3959–3983.
- [Krause et Wohlmuth, 2002] KRAUSE, R. H. et WOHLMUTH, B. I. (2002). A Dirichlet-Neumann type algorithm for contact problems with friction. *Computing and visualization in science*, 5(3):139–148.
- [Ladevèze, 1985] LADEVÈZE, P. (1985). Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Comptes-rendus des séances de l’Académie des Sciences, Série 2*, 300:41–44.
- [Ladevèze, 1996] LADEVÈZE, P. (1996). *Mécanique non-linéaire des structures — Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*. Hermès, Paris.

- [Ladevèze et Dureisseix, 2000] LADEVÈZE, P. et DUREISSEIX, D. (2000). A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1:18–28.
- [Ladevèze et al., 2000] LADEVÈZE, P., LEMOUSSU, H. et BOUCARD, P. (2000). A modular approach to 3-D impact computation with frictional contact. *Computers and Structures*, 78:45–51.
- [Ladevèze et al., 2001] LADEVÈZE, P., LOISEAU, O. et DUREISSEIX, D. (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52:121–138.
- [Ladevèze et al., 2002] LADEVÈZE, P., NOUY, A. et LOISEAU, O. (2002). A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:4869–4891.
- [Liang et al., 2002] LIANG, Y., LEE, H., LIM, S., LIN, W., LEE, K. et WU, C. (2002). Proper Orthogonal Decomposition and its applications — Part i : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252(3):527–544.
- [Loiseau et al., 2002] LOISEAU, O., LADEVÈZE, P. et DUREISSEIX, D. (2002). Sur une stratégie de calcul multiéchelle pour l’analyse des structures composites : discrétisation et performances. *Revue européenne des éléments finis*, 11:349–362.
- [Maday et Magoulès, 2006] MADAY, Y. et MAGOULÈS, F. (2006). Absorbing interface conditions for domain decomposition methods : A general presentation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195:3880–3900.
- [Magoulès et al., 2004] MAGOULÈS, F., IVÁNYI, P. et TOPPING, B. H. V. (2004). Convergence analysis of Schwarz methods without overlap for the Helmholtz equation. *Computers and Structures*, 82:1835–1847.
- [Magoulès et al., 2002] MAGOULÈS, F., ROUX, F.-X., SALMON, S. et SERIES, L. (2002). Approximation algébrique de la matrice du complément de schur — Application aux problèmes de calcul de structures. In de Pau et SMAI, L. U., éditeur : *Actes du CANUM 2002*, pages 156–158.
- [Magoulès et al., 2006] MAGOULÈS, F., ROUX, F. X. et SERIES, L. (2006). Algebraic approximation of Dirichlet-to-Neumann maps for the equations of linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:3742–3759.
- [Mandel, 1993] MANDEL, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in Applied Numerical Methods*, 9:233–241.
- [Mao et Sun, 1991] MAO, K. M. et SUN, C. T. (1991). A refined global-local finite element analysis method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:29–43.
- [Markovič et Ibrahimbegović, 2004] MARKOVIČ, D. et IBRAHIMBEGOVIĆ, A. (2004). On micro-macro interface conditions for microscale-based FEM for inelastic behavior of heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(48–51):5503–5523.

- [Markovič *et al.*, 2005] MARKOVIČ, D., NIEKAMP, R., IBRAHIMBEGOVIĆ, A., MATTHIES, H. G. et TAYLOR, R. L. (2005). Multi-scale modeling of heterogeneous structures with inelastic constitutive behavior : Part I - physical and mathematical aspects. *Engineering Computations*, 22(5–6):664–683.
- [Matthies et Strang, 1979] MATTHIES, H. et STRANG, G. (1979). The solution of nonlinear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14:1613–1626.
- [McCormick et Thomas, 1986] MCCORMICK, S. et THOMAS, J. (1986). The Fast Adaptive Composite grid (FAC) method for elliptic equations. *Mathematics of Computation*, 46(174):439–456.
- [Melenk et Babuska, 1996] MELENK, J. M. et BABUSKA, I. (1996). The Partition of Unity Finite Element Method : basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:289–314.
- [Moës *et al.*, 1999] MOËS, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:131–150.
- [Néron *et al.*, 2003] NÉRON, D., LADEVÈZE, P., DUREISSEIX, D. et SCHREFLER, B. A. (2003). A computational strategy for multiphysics problems involving multiscale aspects. In D. R. J. OWEN, E. O. n. et AREZ, B. S., éditeurs : *Proceedings of the Seventh International Conference on Computational Plasticity*, page 128, Barcelona. CIMNE.
- [Niekamp *et al.*, 2007] NIEKAMP, R., MARKOVIČ, D., IBRAHIMBEGOVIĆ, A., MATTHIES, H. G. et TAYLOR, R. L. (2007). Multi-scale modeling of heterogeneous structures with inelastic constitutive behavior : Part II - software coupling implementation aspects. *Engineering Computations*, submitted.
- [Nineb *et al.*, 2005] NINEB, S., ALART, P. et DUREISSEIX, D. (2005). Approche multiéchelle des systèmes de tenségrité. In LAVOISIER, éditeur : *Actes du 7e Colloque National en Calcul des Structures*, volume 1, pages 81–86. Hermès Science.
- [Nocedal et Wright, 1999] NOCEDAL, J. et WRIGHT, S. J. (1999). *Numerical optimization*. Springer.
- [Oden *et al.*, 1999] ODEN, J. T., VEMAGANTI, K. et MOËS, N. (1999). Hierarchical modeling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172:345–367.
- [Oden et Zohdi, 1997] ODEN, J. T. et ZOHDI, T. I. (1997). Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148:367–392.
- [Pantano et Averill, 2002] PANTANO, A. et AVERILL, R. C. (2002). A penalty-based finite element interface technology. *Computers and Structures*, 80:1725–1748.
- [Park et Felippa, 2000] PARK, K. C. et FELIPPA, C. A. (2000). A variational principle for the formulation of partitioned structural systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:395–418.

- [Pebrel *et al.*, 2008] PEBREL, J., REY, C. et GOSSELET, P. (2008). A nonlinear dual domain decomposition method : application to structural problems with damage. *International Journal of Multiscale Computational Engineering*, 6:251–262.
- [Pian et Sumihara, 1984] PIAN, T. H. H. et SUMIHARA, K. (1984). Rational approach for assumed stress finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:1638–1685.
- [Piperno *et al.*, 1995] PIPERNO, S., FARHAT, C. et LARROUTUROU, B. (1995). Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 124(34):79–112.
- [Rank, 1992] RANK, E. (1992). Adaptive remeshing and $h - p$ domain decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101:299–313.
- [Rank et Krause, 1997] RANK, E. et KRAUSE, R. (1997). A multiscale finite element method. *Computers and Structures*, 64(1–4):139–144.
- [Rannou *et al.*, 2007] RANNOU, J., GRAVOUIL, A. et COMBESCURE, A. (2007). A multi-grid extended finite element method for elastic crack growth simulation. *European Journal of Computational Mechanics*, 16(2):161–182.
- [Ransom, 1997] RANSOM, J. B. (1997). Interface technology for geometrically nonlinear analysis of multiple connected subdomains.
- [Ransom *et al.*, 1992] RANSOM, J. B., MCCLEARY, S. L., AMINPOUR, M. A. et JR., N. F. K. (1992). Computational methods for global/local analysis. Technical Memorandum 107591, NASA.
- [Rey *et al.*, 2007] REY, C., GOSSELET, P. et PEBREL, J. (2007). Computational strategy on nonlinear patches with mixed transfer conditions. In *USNCCM 9 — 9th US National Congress on Computational Mechanics*.
- [Royer, 1990] ROYER, C. (1990). *Une approche des problèmes de dynamique non-linéaire par la méthode à grand incrément de temps*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- [Saad, 2000] SAAD, Y. (2000). *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS Publishing Company, 3rd edition édition.
- [Saka, 1991] SAKA, M. P. (1991). Finite element applications of the theorems of structural variation. *Computers and Structures*, 41:519–530.
- [Sanchez-Palencia, 1974] SANCHEZ-PALENCIA, E. (1974). Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *International Journal for Engineering Science*, 12:231–251.
- [Schwartz, 1981] SCHWARTZ, D. J. (1981). Practical analysis of stress raisers in solid structures. In *Proceedings of the 4th International Conference on Vehicle Structural Mechanics*, pages 227–231, Warrandale, PA.
- [Series *et al.*, 2003] SERIES, L., FEYEL, F. et ROUX, F.-X. (2003). Une méthode de décomposition de domaine avec deux multiplicateurs de Lagrange. In *Actes du 16e congrès français de mécanique*.

- [Sherman et Morrison, 1949] SHERMAN, J. et MORRISON, W. J. (1949). Adjustment of an inverse matrix corresponding to changes in the element of a given column or a given row of the original matrix.
- [Srinivasan *et al.*, 1996] SRINIVASAN, S., BIGGERS, S. B. et LATOUR, R. A. (1996). Identifying global/local interface boundaries using an Objective Search Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:805–828.
- [Srinivasan *et al.*, 1997] SRINIVASAN, S., de ANDRADE, J. R., JR., S. B. B. et JR., R. A. L. (1997). 3-d global/local analysis of composite hip prostheses - a model for multiscale structural analysis. *Composite Structures*, 45:163–170.
- [Steger *et al.*, 1982] STEGER, J. L., DOUGHERTY, F. C. et BENEK, J. A. (1982). A Chimera grid scheme. In *ASME Mini-Symposium on Advances in Grid Generation*.
- [Storti *et al.*, 2006] STORTI, M., DALCÍN, L., PAZ, R., YOMMI, A., SONZOGNI, V. et NIGRO, N. (2006). A preconditioner for the Schur complement matrix. *Advances in Engineering Software*, 37:754–762.
- [Strouboulis *et al.*, 2000] STROUBOULIS, T., BABUSKA, I. et COPPS, K. (2000). The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181:43–69.
- [Terada et Kikuchi, 2001] TERADA, K. et KIKUCHI, N. (2001). A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:5427–5464.
- [Violeau, 2003] VIOLEAU, D. (2003). Sur une amélioration de la stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation. Mémoire du dea tacs, LMT-Cachan.
- [Violeau, 2007] VIOLEAU, D. (2007). *A micromodel-based computation for laminated composites*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan.
- [Voleti *et al.*, 1995] VOLETI, S. R., N. CHANDRA et MILLER, J. R. (1995). Global-local analysis of large-scales composite structures using finite element methods. *Computers and Structures*, 58(3):453–464.
- [Weisser et Bouhaddi, 2009] WEISSER, T. et BOUHADDI, N. (2009). Méthode robuste de réduction de modèle par approximations combinées — extension à la sous-structuration. In *Actes du 9e Colloque National en Calcul de Structures*.
- [Whitcomb, 1991] WHITCOMB, J. D. (1991). Iterative global/local finite element analysis. *Computers and Structures*, 40(4):1027–1031.
- [Whitcomb et Woo, 1993a] WHITCOMB, J. D. et WOO, K. (1993a). Application of iterative global/local finite element analysis. Part 1 : Linear analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9:745–756.
- [Whitcomb et Woo, 1993b] WHITCOMB, J. D. et WOO, K. (1993b). Application of iterative global/local finite element analysis. Part 2 : Geometrically non-linear analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9:757–766.

- [Woodbury, 1950] WOODBURY, M. (1950). Inverting modified matrices. Memorandum Report 42, Statistical Research Group, Princeton University, Princeton, NJ.
- [Xiao et Belytschko, 2004] XIAO, S. P. et BELYTSCHKO, T. (2004). A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193(17–20):1645–1669.
- [Yserentant, 1986] YSERENTANT, H. (1986). On the multi-level splitting of finite element spaces. *Numer. Math.*, 49:379–412.
- [Zienkiewicz et al., 1983] ZIENKIEWICZ, O. C., DE, S. R., CAGO, J. P. et KELLY, D. W. (1983). The hierarchical concept in finite element analysis. *Computers and Structures*, 16(1–4):53–65.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1992] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1331–1364.
- [Zohdi et al., 1996] ZOHDI, T. I., ODEN, J. T. et RODIN, G. J. (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138:273–298.
- [Zohdi et Wriggers, 1999] ZOHDI, T. I. et WRIGGERS, P. (1999). A domain decomposition method for bodies with microstructure based upon material regularization. *International Journal of Solids and Structures*, 36(1):2507–2526.
- [Zohdi et al., 2001] ZOHDI, T. I., WRIGGERS, P. et HUET, C. (2001). A method of substructuring large-scale computational micromechanical problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(43–44):5639–5656.