



HAL
open science

Etude numérique d'écoulements tourbillonnaires de sillage d'avion

Laurent Nybelen

► **To cite this version:**

Laurent Nybelen. Etude numérique d'écoulements tourbillonnaires de sillage d'avion. Modélisation et simulation. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2008. Français. NNT : . tel-00450477

HAL Id: tel-00450477

<https://theses.hal.science/tel-00450477>

Submitted on 26 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *Université Paul Sabatier Toulouse III*
Discipline ou spécialité : *Dynamique des fluides*

Présentée et soutenue par *Laurent Nybelen*
Le *10 Juin 2008*

Titre : *Étude numérique d'écoulements tourbillonnaires de sillage d'avion*

JURY

J.E. Weisfreid Président Directeur de recherche LPMMH de l'ESPCI Paris
A. Antkowiak Examineur Maître de conférence IJLRA Paris VI
J.-M. Chomaz Rapporteur Directeur de recherche LadHyx-Ecole Polytechnique Palaiseau
P. Comte Rapporteur Professeur LEA-ENSMA Poitiers
F. Laporte Examineur Coordinateur A380 Airbus France Toulouse
R. Paoli Examineur Chercheur CERFACS Toulouse

Ecole doctorale : *Mécanique, Energétique, Génie civil & Procédés*

Unité de recherche : *U.F.R - M.I.G.*

Directeur(s) de Thèse : *A. Giovannini et P. Brancher*

Rapporteurs : *J.M. Chomaz et P. Comte*

Thèse préparée au CERFACS réf. interne: TH/CFD/08/60

UNIVERSITÉ TOULOUSE III - PAUL SABATIER
U.F.R - M.I.G

Thèse

présentée pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université de Toulouse
délivré par l'Université de Toulouse III - Paul Sabatier

Spécialité : **Dynamique des Fluides**

par

Laurent Nybelen

Étude numérique d'écoulements tourbillonnaires de sillage d'avion

Soutenue le 10 Juin 2008 devant le jury composé de :

J.E. Weisfreid	Président	Directeur de recherches LPMMH de l'ESPCI Paris
A. Antkowiak	Examinateur	Maitre de Conférences IJLRA Paris VI
P. Brancher	Directeur de thèse	Maitre de Conférences IMFT-UPS Toulouse III
J.-M. Chomaz	Rapporteur	Directeur de recherches LadHyX-Ecole Polytechnique Palaiseau
P. Comte	Rapporteur	Professeur LEA-ENSMA Poitiers
A. Giovannini	Directeur de thèse	Professeur IMFT-UPS Toulouse III
F. Laporte	Examinateur	Coordinateur A380 Airbus France Toulouse
R. Paoli	Examinateur	Chercheur CERFACS Toulouse

Thèse préparée au CERFACS
Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique
Toulouse

Réf. CERFACS : /TH/CFD/08/60

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au sein de l'équipe *Computational Fluid Dynamics* du CERFACS, sous la direction de Pierre Brancher et André Giovannini de l'IMFT-UPS.

Je voudrais tout d'abord remercier très chaleureusement les membres de jury pour leur présence au CERFACS le 10 juin 2008, qui ont contribué ainsi à faire de cette journée le moment exceptionnel de ma thèse. Je tiens à saluer le travail conséquent et pertinent des deux rapporteurs, Pierre Comte et Jean-Marc Chomaz.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à mes directeurs de thèse qui m'ont permis de réaliser cette thèse. En particulier, Pierre, pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux, pour les nombreuses explications et discussions enrichissantes ainsi que ses nombreux conseils. Je voudrais remercier André Giovannini, notamment, pour m'avoir donné l'opportunité de découvrir l'enseignement.

Je voudrais adresser un grand merci et exprimer mon amitié à Hugues Deniau, pour son aide précieuse, sa franchise, sa disponibilité et sa remarquable ouverture d'esprit. Je tiens à souligner le travail qu'il a fourni, à travers ses idées et ses développements numériques pour la réalisation des simulations spatiales.

Mes remerciements vont également à Roberto Paoli pour son écoute, son aide et son soutien durant ces années de thèse.

Merci à Guilhem Chevalier et Henri Moet qui m'ont donné la possibilité de faire cette thèse. Je remercie Henri pour m'avoir initié à la recherche et pour tout ce qu'il m'a appris. Merci à mon chef d'équipe Jean-François Boussuge pour son suivi et sa contribution à ma formation. Le bon déroulement de cette thèse doit beaucoup à l'entre-aide et la bonne ambiance qui règne au CERFACS et en particulier au sein d'AAM. Je souhaite remercier vivement toute l'équipe, ainsi que Marie Labadens notre secrétaire et Séverine Toulouse notre documentaliste. Je voudrais remercier aussi l'équipe informatique, Gérard Dejean, Fabrice Fleury et Isabelle D'Ast pour leur aide précieuse.

Les travaux menés pendant cette thèse ont été effectués dans le cadre du projet européen FAR-Wake. J'ai ainsi pu rencontrer et échanger avec des acteurs majeurs de la thématique "tourbillons de sillage". Je tiens à saluer tout les membres de cette communauté et je remercie en particulier l'équipe de Thomas Leweke et Stéphane Le Dizès, celle de Grégoire Winckelmans, David Fabre et Anton de Bruin.

Mes plus tendres remerciements s'adressent à Nathalie, pour m'avoir supporté et soutenu pendant les moments de doutes, pour sa confiance et son enthousiasme intouchable.

Enfin, je remercie mes parents, mes deux soeurs, Hélène et Isabelle, mon frère Vincent, pour leur soutien affectif indispensable.

Table des matières

1	Introduction générale	5
2	Méthodes numériques	11
2.1	Équations de la mécanique des fluides	12
2.2	Simulations des Grandes Échelles	15
2.2.1	Notions de filtrage	16
2.2.2	Équations filtrées	17
2.2.3	Concept de viscosité de sous-maille	19
2.2.4	Modèles de sous-maille	20
2.2.4.1	Modèle de Smagorinsky	20
2.2.4.2	Modèle de Fonction de Structure	21
2.2.4.3	Modèle de Fonction de Structure Filtrée	22
2.3	Schémas numériques du code NTMIX	23
2.3.1	Discrétisation spatiale	23
2.3.2	Traitement des maillages cartésiens irréguliers	24
2.3.3	Erreur de repliement ou d' <i>aliasing</i>	24
2.3.4	Intégration temporelle	25
2.3.5	Modèles pour la simulation des grandes échelles	26
2.3.6	Traitement numérique supplémentaire utilisé pour les simulations spatiales	26
2.4	Conditions limites	29
2.4.1	Conditions de symétrie	31
2.4.2	Conditions limites basées sur les variables caractéristiques	32
2.4.2.1	Théorie pour les équations d'Euler	32
2.4.2.2	Condition d'injection subsonique instationnaire	34
2.4.2.3	Condition limite latérale	39
2.4.2.4	Condition limite de sortie	44
2.5	Cas test de validation de simulation spatiale	48
3	Propagation et collision de fronts d'onde axisymétriques le long d'un tourbillon	53
3.1	Introduction	53
3.2	Propagation d'un front d'onde le long d'un tourbillon	54
3.2.1	Modélisation et génération d'un front	54
3.2.2	Topologie de la propagation	56
3.2.3	Vitesse de propagation	60
3.2.4	Vitesse axiale induite	61

3.2.5	Propagation d'onde et instabilité hélicoïdale	63
3.3	Collision de deux fronts : explosion tourbillonnaire ?	67
3.3.1	Dynamique globale	67
3.3.2	Conséquences et caractérisation du phénomène	71
3.4	Conclusion	76
4	Interaction entre un jet et un tourbillon de sillage d'avion	77
4.1	Introduction	77
4.2	Modélisation et initialisation	78
4.2.1	Approximation d'un jet moteur d'avion double-flux	79
4.2.2	Modélisation de l'interaction	81
4.2.3	Maillage et conditions limites	83
4.3	Interaction en conditions de croisière	84
4.3.1	Obtention d'un jet turbulent	84
4.3.1.1	Topologie de l'écoulement	84
4.3.1.2	Période d'auto-similarité	84
4.3.1.3	Initialisation de la configuration d'interaction	85
4.3.2	Analyse de l'interaction	87
4.3.2.1	Dynamique d'enroulement	87
4.3.2.2	Influence du jet et de sa position	89
4.4	Interaction en conditions hypersustentées	93
4.4.1	Description de l'interaction	93
4.4.2	Analyse de la structure du tourbillon	96
4.5	Interactions avec un jet chaud	99
4.5.1	Conditions de croisière	99
4.5.2	Conditions hypersustentées	101
4.6	Conclusion	103
5	Fusion de deux tourbillons co-rotatifs identiques	105
5.1	Introduction	105
5.2	Modélisation et condition initiale	106
5.2.1	Modèle analytique de tourbillon	106
5.2.2	Initialisation	108
5.3	Simulations temporelles	109
5.3.1	Description des simulations	109
5.3.2	Processus bidimensionnel : fusion stable	110
5.3.2.1	Dynamique globale	110
5.3.2.2	Caractérisation	111
5.3.2.3	Analyse structurelle	116
5.3.3	Processus tridimensionnel : instabilités elliptiques	117
5.3.3.1	Prédiction théorique	118
5.3.3.2	Dynamique tridimensionnelle	119
5.3.3.3	Taux de croissance de l'instabilité	121
5.3.3.4	Structure du tourbillon final	125
5.4	Simulations spatiales	126
5.4.1	Mise en place des simulations	127
5.4.2	Développement des instabilités	129

5.4.3	Analyses quantitatives	131
5.4.3.1	Grandeurs moyennes temporelles	131
5.4.3.2	Caractérisation de l'instabilité	133
5.5	Conclusion	138
6	Conclusion générale et perspectives	141

Introduction générale

Le travail de recherche présenté ici se focalise sur la dynamique des écoulements de sillage d'avion à l'aide de simulations numériques. La particularité de ces sillages est qu'ils sont composés de tourbillons intenses inhérents à la portance de l'avion. Le différentiel de pression entre l'intrados et l'extrados autour de l'aile est responsable de la mise en rotation de l'air à ses extrémités (Green [33]), formant ainsi des tourbillons longitudinaux intenses et concentrés. Les différentes discontinuités de surfaces portantes (volets, becs, nacelles, empennage...) constituent également des éléments générateurs de tourbillons. Ces différents tourbillons interagissent entre eux ainsi qu'avec les écoulements de jet des moteurs, pour finalement former une paire de tourbillons marginaux derrière l'avion qui peut persister plusieurs minutes dans l'atmosphère.

Ces tourbillons marginaux peuvent représenter un danger pour un avion suiveur qui subirait leur influence, en particulier pour les phases critiques de décollage et d'approche. Une telle rencontre peut causer un moment de roulis difficilement contrôlable de l'appareil ou même des pertes soudaines d'altitude. L'enjeu majeur est donc lié à la sécurité du transport aérien. L'administration fédérale américaine de l'aviation (FAA) et l'organisation internationale d'aviation civile (ICAO) ont donc établi des distances de sécurité à respecter entre deux décollages ou deux atterrissages. Ces distances dépendent des caractéristiques respectives des avions générateur et suiveur pour chaque phase de vol (décollage, approche et croisière). Le tableau 1.1 présente la grille de distances recommandées par l'ICAO pour un avion en phase d'approche. Les valeurs sont basées sur des données empiriques. Si elles s'avèrent suffisantes pour la sécurité des voyageurs, elles sont, cependant, un facteur limitant de la capacité des aéroports. De plus, l'introduction de nouveaux avions pose le problème des distances appropriées à imposer. Dans les années soixante-dix, les premiers problèmes sérieux de rencontre avion/tourbillon ont eu lieu avec le Boeing 757 (d'où les distances particulières pour cet avion). Ces aspects représentent donc un enjeu économique très important pour les industriels de l'aéronautique. L'introduction récente de l'Airbus A380 a ainsi motivé depuis une dizaine d'années plusieurs programmes de recherches européens sur la dynamique des tourbillons de sillage. L'objectif de ces recherches est de caractériser la signature tourbillonnaire d'un avion et sa durée de vie pour mieux évaluer le danger qu'elle peut représenter. Cela permettrait ainsi de reconsidérer les distances de sécurité en adéquation avec le danger potentiel correctement évalué.

Plusieurs solutions sont aujourd'hui envisagées pour minimiser le danger des sillages et per-

Avion suiveur	Avion générateur				
	<i>Light</i>	<i>Medium</i>	B757	<i>Heavy</i>	A380
<i>Light</i>	3	4	6	6	10
<i>Medium</i>	3	3	5	5	8
<i>Heavy</i>	—	—	4	4	6
A380	—	—	—	—	4

TAB. 1.1 – Grille de distances de séparation en miles nautiques recommandée par l’ICAO. Les avions sont classés par catégories selon leur poids maximum au décollage (MTOW, *Maximum Take-Off Weight*) : *Light* < 7000kg < *Medium* < 136000kg < *Heavy*. Les données pour l’Airbus A380 pourraient être révisées à la baisse à l’issue des dernières campagnes d’études (les valeurs répertoriées ici datent du mois de septembre 2006).

mettre de limiter la contrainte des distances de sécurité. Gerz *et al.* [29] mentionnent les deux approches qui se distinguent :

- 1- une approche tactique qui consiste à prendre une décision heure par heure par les autorités du trafic aérien (ATC) de réduire ou non les distances. Cette décision est prise à l’aide d’instruments de mesures et de prédictions des trajectoires et du temps de vie des tourbillons dans les couloirs aériens de phase d’approche et de décollage, en fonction des conditions atmosphériques (système AVOSS, *Aircraft Vortex Spacing System* [71]). Ce système utilise la technologie Lidar pour des mesures en temps réel. L’information est ensuite traitée numériquement pour déterminer le critère de distance. Un concept similaire est employé à l’aéroport de Francfort (WSWS, Wirbelschleppen-Warnsystem). Une autre tactique peut être utilisée en définissant une route de vol à suivre qui minimise le risque de rencontre avion/tourbillon (Rossow [78]), comme le système HALS-DTOP, *High Approach Landing System / Dual Threshold Operation* [44], développé pour l’aéroport de Francfort ou SOIA *Simultaneous Offset Instrumented Approach* [88] développé par la FAA pour l’aéroport de San Francisco.
- 2- Une approche stratégique basée sur la connaissance du comportement des tourbillons de sillage, notamment des mécanismes de dégénérescence. Cette approche a pour objectif d’atteindre la source même du problème, en agissant sur la voilure pour générer une signature tourbillonnaire peu offensive. Pour cela, les moyens envisagés seraient l’injection massive de turbulence à petite échelle par différents dispositifs (aileron, déflecteur aérodynamique...) qui réduiraient l’intensité des tourbillons de façon importante. Cependant de tels systèmes ont l’inconvénient d’augmenter la traînée totale qui est une contrainte plus importante pour les avionneurs. Une autre solution est l’utilisation de systèmes de déclenchement d’instabilités des tourbillons qui accélèrent leur décroissance (instabilités de Crow [15], de moyenne longueur d’onde [14,21], perturbation optimale [23]). Mais pour cela, il est nécessaire de connaître les caractéristiques stationnaires et instationnaires du sillage, les instabilités intrinsèques au système de tourbillons et leurs caractéristiques (en régimes linéaire, non-linéaire et turbulent), ainsi que les moyens actifs ou passifs permettant de fournir de l’énergie à moindre coût aux modes instables que l’on désire exciter.

Les sillages d’avion représentent un domaine vaste d’écoulements en raison des nombreux mécanismes qui peuvent avoir lieu (fonction du nombre de tourbillons générés et des conditions

atmosphériques). De nombreuses études ont donc été menées pour identifier, comprendre et caractériser ces différents processus (voir la revue de Spalart [87] par exemple) mais restent encore aujourd'hui incomplètes étant donnée l'étendue du sujet. Le paragraphe suivant présente une description synthétique globale d'un sillage en fonction de la distance en aval du bord fuite de la voilure.

Description d'un sillage tourbillonnaire d'avion

L'âge d'un sillage correspond à une certaine distance derrière l'avion. Quatre régions se distinguent [36] quelle que soit la configuration de l'avion générateur (hypersustentée ou croisière). En notant c la corde aérodynamique moyenne de l'aile, et B l'envergure de l'avion, ces régions sont :

- le champ proche : $x/c = \mathcal{O}(1)$

Il couvre la formation de la nappe de vorticité générée à partir des bords de fuite de la voilure, et des tourbillons très concentrés générés aux discontinuités des surfaces portantes (Fig. 1.1). Dans cette partie du sillage, les jets moteurs ne sont turbulents qu'à petite échelle, la distance aval correspondant seulement à quelques diamètres du jet ($D_j/c = \mathcal{O}(1)$) .



FIG. 1.1 – Sillage d'un avion dans le champ proche en phase d'approche, illustré par la vapeur d'eau pour des conditions atmosphériques très particulières (@airliners.net).

- Le champ proche étendu : $x/B = \mathcal{O}(1)$

Cette région est caractérisée par l'enroulement de la nappe tourbillonnaire autour des tourbillons concentrés (bout de volet, bout d'aile). Certains tourbillons co-rotatifs peuvent fusionner ensemble et réduisent ainsi le nombre de tourbillons derrière chaque aile. Les écoulements de jet des moteurs sont généralement devenus turbulents à grande échelle (instabilité naturelle de Kelvin-Helmholtz) et interagissent avec les tourbillons principaux.

- Le champ moyen : $x/B = \mathcal{O}(10)$

   cette distance aval, le sillage est généralement composé d'une unique paire de tourbillons contra-rotatifs qui peuvent vivre plusieurs minutes dans l'atmosphère (Fig. 1.2).

Les écoulements de jet ne se distinguent plus et se sont enroulés autour des tourbillons.



FIG. 1.2 – Sillage d’un avion dans le champ moyen, illustré par l’éjection de fumées lors de tests grandeur nature (@airliners.net).

- Le champ lointain : $x/B = \mathcal{O}(100)$

Quel que soit le système tourbillonnaire obtenu, il dégénère sous l’effet combiné des instabilités intrinsèques au système et de la turbulence externe. Cette région correspond au régime de destruction. Les systèmes tourbillonnaires, qu’ils soient composés d’une ou plusieurs paires de tourbillons sont instables vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles (voir Crouch [13], Crow [15]). Ces perturbations proviennent en général de la turbulence externe et permettent le développement d’instabilités responsables d’une dégénérescence. Le régime non linéaire des instabilités correspond à une interaction forte entre les différents tourbillons, qui s’accompagne de la déstructuration plus ou moins rapide du sillage (comme les anneaux tourbillonnaires résultant de la reconnection lors de l’instabilité de Crow [15] qui peuvent persister longtemps dans l’atmosphère). Suivant le niveau de turbulence de l’atmosphère, le temps de saturation des instabilités peut également varier de manière significative. Globalement, la vitesse de dégénérescence est liée au niveau de turbulence atmosphérique.

Objectifs et organisation du manuscrit

Le travail de recherche présenté dans ce manuscrit s’inscrit dans l’approche stratégique du problème, avec pour objectif de contribuer à l’étude des écoulements de sillage d’avion en utilisant le moyen numérique. Il a été réalisé dans le cadre du projet européen FAR-Wake, *Fundamental Research on Aircraft Wake Phenomena*.

Au cours de cette thèse, trois types d’écoulements sont abordés, qui ont été observés dans le champ proche étendu et dans le champ lointain d’un sillage d’avion. Chaque dynamique est étudiée indépendamment des autres, la simulation complète de l’évolution des tourbillons de sillage n’étant pas réalisable en raison des écarts d’échelles spatiales pouvant être très élevés,

de l'ordre de $10^3 - 10^4$ (en première approximation le rayon d'un tourbillon étant de l'ordre $0.01B$ [37]). Les différents mécanismes physiques sont donc étudiés de manière séparés en fonction de la région du sillage considéré.

Les trois configurations tourbillonnaires typiques de sillage d'avion abordées ici sont :

- la propagation et la collision de fronts d'onde le long d'un tourbillon en champ lointain, en partie responsable de la dissipation du sillage lors de l'instabilité de Crow [15]. Ces phénomènes identifiés depuis les années soixante-dix sont encore mal compris. Ils ont pour conséquence de modifier les caractéristiques du tourbillon, allant jusqu'à la déstructuration complète des tourbillons (explosion tourbillonnaire ou *vortex bursting*).
- L'interaction entre un jet et un tourbillon en champ proche étendu pour des conditions réalistes. L'intérêt de cette étude porte notamment sur les mécanismes d'interaction entre un écoulement axial et un écoulement de rotation. De plus, ce type d'écoulement est à l'origine de la formation de traînées de condensation observables par temps clair dans le ciel, qui par la suite se transforme en nuage de type cirrus (impact climatique).
- La fusion de deux tourbillons co-rotatifs identiques en champ proche étendu. Ce processus conduit à la formation de la paire de tourbillons contra-rotatifs potentiellement dangereux qui persistent dans l'atmosphère par la suite, d'où son importance pour déterminer les caractéristiques des tourbillons. Cette fusion résulte soit du rapprochement progressif des deux tourbillons, soit du développement d'instabilités [63].

Pour ces écoulements, on recherche la possibilité d'un développement d'instabilité intrinsèque au système et dans ce cas à le caractériser (taux d'amplification et longueurs d'onde des modes instables), mais aussi d'autres mécanismes de déstructuration des tourbillons, conduisant ainsi à une dissipation prématurée du sillage. L'accès à ce type d'information fine n'est envisageable qu'au travers l'utilisation d'un schéma numérique précis et de modèle capable d'une résolution spectrale suffisante (simulations numériques directes et aux grandes échelles).

L'organisation du manuscrit s'articule autour de ces trois thèmes. Sont exposées dans le chapitre 2, les équations de la mécanique des fluides dans un contexte de simulations numériques directes et de simulations aux grandes échelles. Les développements numériques au niveau des conditions limites pour les simulations spatiales sont également précisés ainsi que leurs validations.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la propagation de front d'onde axisymétrique le long d'un tourbillon, où un accent particulier est mis sur la caractérisation de leur vitesse de propagation. Il est ensuite discuté des résultats des simulations directes de la collision de deux fronts qui peut conduire au phénomène d'explosion tourbillonnaire (*vortex bursting*).

Au chapitre 4, il est examiné l'impact de l'écoulement de jet d'un moteur sur un tourbillon pour des configurations réalistes de vol, à l'aide de simulations aux grandes échelles. Une étude paramétrique est présentée pour déterminer notamment les paramètres importants qui caractérisent cette interaction.

Le chapitre 5 est dédié au phénomène de fusion de deux tourbillons co-rotatifs. Ce processus peut être bidimensionnel ou tridimensionnel par le développement d'une instabilité de courtes longueurs d'onde. Deux approches numériques ont été utilisées : l'approche temporelle où il est supposé que l'écoulement se comporte de manière périodique dans la direction longitudinale, et l'approche spatiale, plus naturelle, qui permet en outre de tenir compte de l'effet d'une vitesse axiale.

Ces trois derniers chapitres se terminent par une courte conclusion, les perspectives étant évoquées dans le chapitre de conclusion générale (chapitre 6).

Méthodes numériques

Introduction

L'objet de ce chapitre est de décrire les équations de la mécanique des fluides et les méthodes numériques qui ont permis d'obtenir les résultats présentés dans les chapitres suivants. Les deux approches numériques utilisées au cours de cette thèse sont la simulation numérique directe (SND ou DNS pour *Direct Numerical Simulation*) et celle aux grandes échelles (SGE ou LES pour *Large-Eddy Simulation*). La première résout le système d'équation de Navier-Stokes sans modélisation pour des écoulements à faible nombre de Reynolds (section 2.1), tandis que la seconde modélise les échanges d'énergie entre des échelles non-résolues et celles résolues dans le cas d'écoulement à haut nombre de Reynolds (section 2.2). La résolution numérique des équations est effectuée avec le code nommé NTMIX. Les différents schémas implémentés dans cet outil sont présentés dans la section 2.3.

Pour la simulation d'écoulements de tourbillons de sillage d'avion, la difficulté majeure provient des différentes échelles spatiales et temporelles présentes dans l'écoulement, dont le rapport entre les plus grandes et les plus petites peut être de l'ordre de $\mathcal{O}(10^3 - 10^4)$. L'approche naturelle d'une simulation spatiale d'une dynamique tourbillonnaire peut être compromise par les limites informatiques (espace mémoire, temps de calcul exorbitant...). Ainsi, on a recours à des simulations temporelles où une partie du sillage est isolée dans un domaine de calcul, dont on suppose un développement périodique dans la direction axiale (l'axe de vol de l'avion). Le passage du temporel au spatial est effectué en supposant que ce domaine se déplace à une vitesse constante (celle de l'avion ici). Cette technique permet de réaliser des simulations d'une grande partie des mécanismes de dynamique tourbillonnaire de sillage d'avion sans être trop onéreuses. En revanche, elle reste une approximation de la réalité et a des limites qui seront discutées par la suite dans les chapitres concernant les résultats. La majorité des simulations présentées dans cette thèse n'a pas nécessité des modifications du code NTMIX, tous les ingrédients pour faire des simulations instationnaires précises étaient déjà développés et validés [47,66]. Toutefois, il a été implanté de nouvelles conditions limites qui ont permis de réaliser des simulations spatiales de dynamique tourbillonnaire, détaillées dans la section 2.4. La validation des développements numériques est présentée dans la dernière section 2.5 de ce chapitre. Tous les calculs ont été effectués sur des machines parallèles utilisant la librairie MPI (*Message Passing Interface*) pour les communications entre processeurs.

2.1 Équations de la mécanique des fluides

Les équations générales de Navier-Stokes instationnaires expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie d'un écoulement de fluide compressible newtonien. En considérant qu'il n'y a pas de force volumique extérieure ou de source de chaleur externe, elles s'écrivent sous forme conservative dans un repère cartésien de coordonnées (x, y, z)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{f}_c - \mathbf{f}_v)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{g}_c - \mathbf{g}_v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{h}_c - \mathbf{h}_v)}{\partial z} = 0, \quad (2.1)$$

où \mathbf{U} représente le vecteur d'état

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e_t \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

où ρ est la masse volumique du fluide, u, v, w le champ de vitesse et e_t l'énergie totale. La pression est notée p . Les vecteurs colonnes \mathbf{f}_c , \mathbf{g}_c , \mathbf{h}_c représentent les termes des flux convectifs

$$\mathbf{f}_c = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(\rho e_t + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_c = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(\rho e_t + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_c = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ w(\rho e_t + p) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

et les vecteurs \mathbf{f}_v , \mathbf{g}_v , \mathbf{h}_v les termes de flux visqueux

$$\mathbf{f}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ u_j \sigma_{xj} - q_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ u_j \sigma_{yj} - q_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \\ \sigma_{zz} \\ u_j \sigma_{zj} - q_z \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

où $j = x, y, z$ (utilisation de la convention de sommation d'Einstein), σ_{ij} le tenseur des contraintes visqueuses et $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ le vecteur flux de chaleur.

Pour un fluide supposé newtonien, la partie visqueuse du tenseur des contraintes ne dépend que du tenseur des vitesses de déformation S_{ij} de manière linéaire et isotrope tel que

$$\sigma_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (2.5)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.6)$$

où μ est la viscosité dynamique, λ second coefficient de viscosité et δ_{ij} le symbole de Kröner. L'hypothèse de Stokes d'égalité entre la pression mécanique et thermodynamique implique

$$2\mu + 3\lambda = 0. \quad (2.7)$$

Pour un fluide en équilibre thermodynamique local, le tenseur des contraintes visqueuses devient

$$\sigma_{ij} = 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij}. \quad (2.8)$$

Le mode de transfert thermique considéré est uniquement de type conductif, les composantes q_i du vecteur flux de chaleur \mathbf{q} sont données par la loi de Fourier

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (2.9)$$

où T est la température, et k le coefficient de conductivité thermique. Ce dernier est calculé en supposant un nombre de Prandtl constant, ce qui indique que k ne dépend que de la température :

$$k = \frac{\mu c_p}{Pr}, \quad (2.10)$$

où c_p est le coefficient de chaleur spécifique à pression constante, défini pour un gaz parfait par la relation

$$c_p = \gamma c_v = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \quad c_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad (2.11)$$

avec c_v le coefficient de chaleur spécifique à volume constant, R la constante des gaz parfaits et γ le rapport des coefficients de chaleur spécifique. La viscosité laminaire du fluide μ dépend de la température et peut être exprimée selon la loi de Sutherland

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + C}{T + C}, \quad (2.12)$$

où μ_0 est la viscosité à la température de référence T_0 et C une constante ($C = 110.3$ pour l'air). Pour des raisons de simplicité, il est utilisé dans le code NTMIX une approximation de cette loi de type loi en puissance :

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^b \quad \text{avec} \quad 0.5 < b < 1. \quad (2.13)$$

Les travaux présentés dans ce manuscrit concernent uniquement les écoulements d'air, ainsi la valeur des constantes dans les expressions précédentes sont respectivement $R = 287 \text{ J/kgK}$, $\gamma = 1.4$ et $b = 0.76$.

L'équation d'état qui relie la pression aux autres variables thermodynamiques est

$$p = \rho RT. \quad (2.14)$$

L'énergie interne e s'écrit

$$e = c_v T = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{p}{\rho}. \quad (2.15)$$

L'énergie totale e_t est la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique

$$e_t = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2), \quad (2.16)$$

ce qui ferme le système d'équations de Navier-Stokes.

Adimensionnement

Le code NTMIX résout les équations de Navier-Stokes sous forme adimensionnelle. Les variables adimensionnées sont notées avec le symbole $*$, et obtenues de la manière suivante

$$\begin{aligned} x_i^* &= \frac{x_i}{L_\infty}, & \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_\infty}, & u^* &= \frac{u}{a_\infty}, & p^* &= \frac{p}{\rho_\infty a_\infty^2}, & T^* &= \frac{T}{(\gamma-1)T_\infty}, \\ e_t^* &= \frac{e_t}{a_\infty^2}, & \nu^* &= \frac{\nu}{\nu_\infty}, & c_p^* &= \frac{c_p}{c_{p_\infty}}, & t^* &= \frac{t}{(L_\infty/a_\infty)}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

où l'indice ∞ indique les quantités d'un écoulement arbitraire vérifiant l'équation d'état des gaz parfaits. L_∞ est un échelle de longueur caractéristique du problème considéré, par exemple le rayon d'un tourbillon. Le coefficient adimensionné de chaleur spécifique à pression constante est fixé à $c_p^* = 1$. Le rapport des coefficients de chaleur spécifique est pris constant à la valeur $\gamma = 1.4$. L'échelle de vitesse est la vitesse du son isentropique $a_\infty = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}$. Ainsi la formulation adimensionnelle du système d'équations de Navier-Stokes s'écrit :

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* u_i^*)}{\partial x_i^*} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial(\rho^* u_i^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* u_i^* u_j^*)}{\partial x_j^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} = \frac{1}{Re_c} \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j^*}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial(\rho^* e_t^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial[(\rho^* e_t^* + p^*) u_j^*]}{\partial x_j^*} = \frac{1}{Re_c} \frac{\partial(u_i^* \sigma_{ij}^*)}{\partial x_j^*} - \frac{1}{Re_c Pr} \frac{\partial q_j^*}{\partial x_j^*}, \quad (2.20)$$

L'énergie adimensionnée est définie par :

$$e_t^* = \frac{1}{\gamma} T^* + \frac{1}{2} u_k^* u_k^*, \quad (2.21)$$

et la loi des gaz parfaits s'écrit :

$$p^* = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho^* T^*. \quad (2.22)$$

Les relations du tenseur des contraintes visqueuses 2.8 et du flux de chaleur 2.9 restent inchangées sous forme adimensionnelle. Le nombre de Prandtl est constant tel que $Pr = 0.72$. Le nombre de Reynolds numérique $Re_c = a_\infty L_\infty / \nu_\infty$ est fixé en fonction du nombre de Reynolds physique de l'écoulement simulé. Pour les simulations de système tourbillonnaire on utilise un nombre de Reynolds basé sur la circulation Γ , ainsi $Re_c = \nu^* / \Gamma^* Re_\Gamma$.

Simulation numérique directe (SND) et aux grandes échelles (SGE)

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes implique de tenir compte du plus grand nombre d'échelles spatio-temporelles possibles pour obtenir une solution de qualité. Pour les écoulements turbulents, le rapport entre les différentes échelles est très important, du fait de leur caractère tridimensionnel, instationnaire et pseudo-aléatoire. Dans le cas particulier d'un écoulement turbulent statistiquement homogène et isotrope (une définition précise est donnée dans [83]), le rapport entre la longueur caractéristique de l'échelle la plus énergétique l , et celle de la plus petite η (échelle dissipative de Kolmogorov) est

$$\frac{l}{\eta} \sim \left(\frac{ul}{\nu} \right)^{3/4} = Re_l^{3/4}, \quad (2.23)$$

où Re_l est le nombre de Reynolds turbulent des grandes structures de l'écoulement. Pour les écoulements où ce nombre de Reynolds est élevé, plusieurs ordres de grandeurs séparent les différentes échelles. Or pour simuler toutes les échelles d'un écoulement turbulent isotrope, la taille de maille Δ doit être inférieure à $\eta/2$ et la taille du domaine de calcul L supérieure à l . Le nombre de points de calcul nécessaire pour un écoulement tridimensionnel est alors de

$$N_{xyz} = (L/\Delta)^3 \sim Re_l^{9/4}. \quad (2.24)$$

Les équations de Navier-Stokes peuvent être résolues directement sans ajout de modèle, approche appelée simulation numérique directe (SND ou DNS pour *Direct Numerical Simulation*). Elle permet de résoudre toutes les échelles de l'écoulement en respectant la condition (2.23). Étant données la puissance et la capacité mémoire des calculateurs, elle est limitée à des nombres de Reynolds faibles. Pour palier à cette contrainte et pouvoir simuler des écoulements à plus haut nombre de Reynolds, une autre technique appelée simulation numérique des grandes échelles (SGE ou LES pour *Large-Eddy Simulation*) a été développée ; elle consiste à ne résoudre qu'une partie de l'écoulement et à modéliser l'autre. La section suivante présente de manière non-exhaustive cette approche, le lecteur pourra alors se référer au livre de P. Sagaut [83] pour plus de détails.

2.2 Simulations des Grandes Échelles

La simulation des grandes échelles consiste à ne résoudre que les structures les plus énergétiques de l'écoulement, correspondant aux plus grandes échelles, et à modéliser les moins énergétiques (Fig. 2.1). Le formalisme mathématique de cette distinction d'échelles se fait à l'aide d'un filtre. L'application de ce filtre aux équations de Navier-Stokes permet d'obtenir les équations pour les variables filtrées, où il apparaît de nouveaux termes qui traduisent le couplage entre les échelles résolues (filtrées) avec les échelles non-résolues appelées de sous-maille (un tenseur de corrélation des vitesses et un flux de chaleur de sous-maille). Afin de modéliser les échanges entre les échelles, il existe deux stratégies de simulation des grandes échelles, l'approche structurelle et l'approche fonctionnelle.

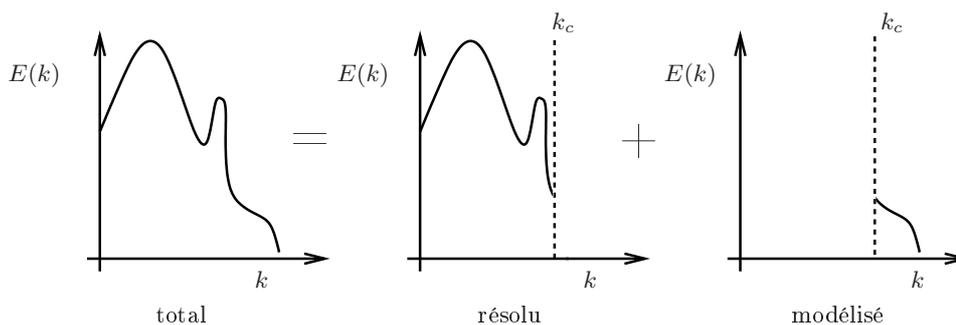


FIG. 2.1 – Schéma du spectre d'énergie dans l'espace spectral entre les échelles résolues et modélisées de l'approche Simulation aux Grandes Échelles (SGE).

L'approche structurelle est basée sur la connaissance de la structure des petites échelles pour relier les termes de sous-maille aux grandeurs résolues. Elle repose sur une des deux hypothèses suivantes : soit les petites échelles de l'écoulement ont une forme et un caractère universels

et par conséquent sont décorréliées des structures résolues ; soit au contraire il existe une très forte corrélation entre les structures de différentes échelles pour que le comportement des structures de sous-maille soit déduit des termes résolus. On peut citer par exemple le modèle de Bardina [3].

De son côté, l'approche fonctionnelle repose sur la connaissance des interactions entre les différentes échelles et non sur leur structure. Dans ce cas les échanges entre échelles de sous-maille et échelles résolues sont supposés posséder un caractère universel. Les termes de sous-maille ne sont alors pas modélisés directement, mais leur influence est estimée. Dans le cas d'une turbulence développée, homogène, isotrope, ces interactions entre échelles se caractérisent par :

- une cascade d'énergie directe des grosses structures vers les échelles de sous-maille,
- et un transfert d'énergie inverse d'intensité moindre.

Les modèles fonctionnels s'attachent essentiellement à la cascade d'énergie responsable de la perte d'énergie des échelles résolues. La cascade inverse est souvent négligée dans la modélisation, car les résultats obtenus ne sont pas assez satisfaisants et sa prise en compte favorise l'apparition d'instabilités numériques (injection d'énergie aux hautes fréquences).

Ces deux types de modélisation ont leurs avantages et leurs inconvénients. Les modèles fonctionnels prédisent en général correctement le niveau de transfert d'énergie mais moins bien la structure du tenseur de sous-maille, contrairement aux modèles structurels. Ces derniers ont cependant l'inconvénient de prédire un niveau trop faible d'énergie de transfert. Il existe des modèles mixtes ou hybrides combinant les deux approches pour obtenir un modèle possédant de bonnes qualités structurelles et énergétiques, comme le modèle mixte Smagorinsky-Bardina par exemple.

Pour les travaux présentés dans ce mémoire, un modèle basé sur l'approche fonctionnelle uniquement a été utilisé étant donné que son efficacité a été prouvée dans les précédentes études de Laporte [47] et Moet [66] pour le type d'écoulement en transition considéré (développement d'instabilités).

2.2.1 Notions de filtrage

On considère qu'une variable $\phi(x)$ peut se décomposer en une partie résolue $\overline{\phi(x)}$ et une partie non résolue $\phi''(x)$

$$\phi = \overline{\phi} + \phi'' \quad (2.25)$$

Le filtrage spatial est défini dans l'espace physique par une intégrale de convolution sur un domaine Ω

$$\overline{\phi(x)} = \int_{\Omega} G(x - \xi, \Delta_c) \phi(\xi) d^3\xi, \quad (2.26)$$

où le noyau de convolution G (aussi appelé fonction filtre) est caractéristique du filtre utilisé et dépend en particulier de la longueur de coupure haute-fréquence Δ_c . Les filtres les plus courants sont le filtre porte, gaussien et boîte. Le filtrage SGE implique en général

$$\overline{\overline{\phi}} \neq \overline{\phi}, \quad \overline{\phi''} \neq 0. \quad (2.27)$$

Un second filtrage a donc pour conséquence d'éliminer encore plus de structures de l'écoulement. Pour les écoulements compressibles, un changement de variable par pondération par la masse volumique est très souvent utilisé, appelé filtrage de Favre par analogie avec la définition

de la moyenne de Favre :

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi', \quad \tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}}, \quad (2.28)$$

avec l'hypothèse que l'opérateur commute avec les opérateurs de dérivation spatiale et temporelle

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_i}. \quad (2.29)$$

Pour que le filtre soit applicable aux équations de Navier-Stokes, il doit vérifier deux autres propriétés : la conservation des constantes ($\bar{a} = a$) et la linéarité.

À toute discrétisation spatiale des équations de Navier-Stokes correspond un filtre implicite (filtre de type porte) de longueur d'onde de coupure dans les hautes fréquences $\lambda_c = 2\Delta$, où Δ est le pas d'espace du maillage. Pour des maillages réguliers le filtre satisfait les propriétés (2.29). La majorité des simulations de cette thèse ont été effectuées sur des maillages localement réguliers (*c.-à-d.* dans la zone d'intérêt de l'écoulement). La fonction filtre réellement appliquée au cours d'une simulation n'est jamais explicitement connue, car les termes de dissipation numérique des schémas de discrétisation, ou encore de la dissipation artificielle parfois utilisée, peuvent être interprétés comme des opérations de filtrage additionnelles.

2.2.2 Équations filtrées

En utilisant le changement de variables de Favre (Eq. 2.28) et la notation indicielle, les équations filtrées de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2.31)$$

où le tenseur des tensions (corrélations de vitesses) de sous-maille à modéliser est défini par

$$\tau_{ij} = -(\overline{\rho u_i u_j} - \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j). \quad (2.32)$$

L'approche de Smagorinsky [86] consiste à modéliser directement ce tenseur en se basant sur la stratégie de modélisation fonctionnelle. Des approches alternatives existent et reposent sur la décomposition des termes non-linéaires comme la décomposition de Leonard par exemple [83] (modélisation structurelle). Dans toute la suite, on ne s'intéressera qu'à l'approche fonctionnelle.

Pour les écoulements à haut nombre de Reynolds, les fluctuations de température peuvent être supposées faibles et les non-linéarités dues à la viscosité négligeables [20]. Si de plus, le filtrage de Favre du tenseur des déformations est supposé similaire à celui de Reynolds (décomposition des grandeurs d'un écoulement en valeurs moyennes et fluctuantes), les termes visqueux deviennent

$$\bar{\sigma}_{ij} \approx \tilde{\sigma}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}. \quad (2.33)$$

La validité de ces hypothèses a été démontrée par Vreman *et al.* [94] dans le cas d'une couche de mélange compressible.

Le filtrage de l'équation de l'énergie conduit à

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{e}_t}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} e_t + p) u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{q}_j}{x_j}, \quad (2.34)$$

avec $\rho e_t = \rho c_v T + 1/2 \rho u_i u_i$.

Les termes visqueux de l'équation (2.34) peuvent être simplifiés car leur contribution de sous-maille est supposée petite, et deviennent

$$\bar{\sigma}_{ij} u_i = \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i. \quad (2.35)$$

Les non-linéarités dans les flux de chaleur sont également négligées à haut nombre de Reynolds, d'où

$$\bar{q}_j \approx \tilde{q}_j = -k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}. \quad (2.36)$$

L'énergie interne peut être combinée avec le terme de pression-vitesse et en utilisant l'équation d'état filtrée pour un gaz parfait

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T}, \quad (2.37)$$

on obtient la relation

$$\begin{aligned} \overline{\rho c_v T u_j} + \overline{p u_j} &= \bar{\rho} c_v \tilde{T} \tilde{u}_j + \bar{p} \tilde{u}_j + \overline{\rho c_v T u_j} + \overline{\rho R T u_j} - (\bar{\rho} c_v \tilde{T} \tilde{u}_j + \bar{\rho} R \tilde{T} \tilde{u}_j) \\ &= \bar{\rho} c_v \tilde{T} \tilde{u}_j + \bar{p} \tilde{u}_j + Q_j. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Le flux de chaleur de sous-maille [20] est défini par

$$Q_j = \overline{\rho c_p T u_j} - \bar{\rho} c_p \tilde{T} \tilde{u}_j. \quad (2.39)$$

Le dernier terme dans l'équation de l'énergie à modéliser est $\overline{\rho K u_j}$, avec $K = \frac{1}{2} u_i u_i$ désignant l'énergie cinétique. Ce terme est approximé en négligeant certaines tensions par

$$\overline{\rho K u_j} \approx \bar{\rho} \tilde{K} \tilde{u}_j - \tau_{ij} \tilde{u}_j, \quad (2.40)$$

où on a supposé que $\tau_{ij} = -\bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''}$ avec u_i'' représentant une estimation de la partie sous-maille de vitesse. Cette approximation n'est basée que sur l'analogie avec la modélisation statistique de la turbulence, et les termes négligés ne le sont pas avec certitude. À l'aide des équations (2.38) et (2.40), nous obtenons

$$\overline{(\rho e_t + p) u_j} = (\bar{\rho} \tilde{e}_t + \bar{p}) \tilde{u}_j - \tau_{ij} \tilde{u}_i + Q_j, \quad (2.41)$$

où l'énergie totale résolue est donnée par la relation

$$\tilde{e}_t = c_v \tilde{T} + \frac{1}{2} \widetilde{u_i u_i}. \quad (2.42)$$

Il est à noter que l'énergie cinétique $\bar{\rho} \widetilde{u_i u_i}$ peut être exprimée à l'aide du tenseur des tensions de sous-maille par $\bar{\rho} \widetilde{u_i u_i} = \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_i - \tau_{ii}$.

En résumé, les équations de Navier-Stokes filtrées s'écrivent alors

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{e}_t}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{e}_t + \bar{p}) \tilde{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial (\tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}) \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial x_j}. \quad (2.45)$$

Le tenseur des corrélations de vitesses de sous-maille τ_{ij} et le flux de chaleur de sous-maille Q_i doivent être modélisés pour les relier aux variables résolues et ainsi fermer le système d'équations.

2.2.3 Concept de viscosité de sous-maille

Ce paragraphe introduit le concept de viscosité de sous-maille qui est utilisé dans la construction de modèle fonctionnel. Afin de modéliser la cascade directe de l'énergie des structures énergétiques vers les échelles de sous-maille, une analogie avec la cinétique des gaz est effectuée. On suppose que le mécanisme de transfert d'énergie des échelles résolues vers les échelles de sous-maille peut être représenté par un terme de diffusion grâce à l'utilisation d'une viscosité de sous-maille μ_{sm} . Une formulation de type Boussinesq est utilisée dans laquelle la partie déviatrice du tenseur des contraintes de sous-maille τ_{ij} (Eq. 2.32), est reliée au tenseur de déformation \tilde{S}_{ij} du champ résolu par

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = -2\mu_{sm}(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tilde{S}_{kk}). \quad (2.46)$$

La viscosité de sous-maille μ_{sm} requiert une modélisation. Le terme $\frac{1}{3}\tau_{kk}$ qui correspond à l'énergie cinétique de sous-maille est introduit pour valider la relation en cas de contraction des indices (le second membre étant de trace nulle). La trace τ_{kk} peut être soit modélisée, soit négligée [20]. L'approche de Ducros *et al.* [19] est retenue ici, qui consiste à introduire une pression modifiée \bar{P} tenant compte de la trace τ_{kk}

$$\bar{P} = \bar{p} - \frac{1}{3}\tau_{kk}. \quad (2.47)$$

En réécrivant la relation de l'énergie totale sous la forme

$$\bar{\rho}\tilde{e}_t = \bar{\rho}c_v(\tilde{T} - \frac{1}{2\rho c_v}\tau_{kk}) + \frac{1}{2}\bar{\rho}\tilde{u}_k\tilde{u}_k, \quad (2.48)$$

et en définissant une température modifiée par

$$\Theta = \tilde{T} - \frac{1}{2\bar{\rho}c_v}\tau_{kk}, \quad (2.49)$$

l'équation d'état devient

$$\bar{P} = \bar{\rho}R\Theta - \left(\frac{1}{3} - \frac{R}{2c_v}\right)\tau_{kk} = \bar{\rho}R\Theta - \frac{5-3\gamma}{6}\tau_{kk}. \quad (2.50)$$

Le terme τ_{kk} est inconnu dans la modélisation de sous-maille compressible. En introduisant le nombre de Mach de sous-maille $M_{sgs}^2 = \tau_{kk}/\gamma\bar{\rho}c^2$, et comme $\bar{c}^2\rho = \gamma\bar{p}$, il s'écrit $\tau_{kk} = \gamma M_{sgs}^2\bar{p}$. Ng et Erlebacher [70] proposent de négliger ce terme devant la pression, ce qui implique comme condition $\gamma M_{sgs}^2 \ll 1$ dans tout le domaine de calcul. Pour les gaz monoatomiques (par exemple l'argon ou l'hélium) pour lesquels $\gamma \sim 5/3$, le coefficient devant le terme τ_{kk} dans l'équation 2.50 est négligeable quel que soit le nombre de Mach de sous-maille. Lesieur et Comte [54] proposent de généraliser cette approximation à l'air $\gamma = 1.4$, en supposant que $(|5 - 3\gamma|/6)\gamma M_{sgs}^2 \ll 1$. Avec cette hypothèse, l'équation d'état est déterminée à partir de grandeurs connues :

$$\bar{P} \approx \bar{\rho}R\Theta. \quad (2.51)$$

Cette approximation revient à intégrer la partie isotrope du tenseur τ dans la partie thermodynamique, puis à la négliger par la suite. Les variables \bar{P} et Θ sont directement calculables à partir du champ résolu. La viscosité est alors donnée en fonction de la température modifiée par la loi de Sutherland (Eq. 2.12) ou une loi en puissance.

La modélisation d'une viscosité de sous-maille μ_{sm} peut être obtenue en considérant une échelle de longueur l_0 et une échelle de temps t_0 caractéristiques des quantités de sous-maille. En suivant un raisonnement dimensionnel analogue à celui de Prandtl, la viscosité de sous-maille est telle que

$$\mu_{sm} \propto l_0^2 t_0^{-1}. \quad (2.52)$$

Ce type de modèle est local en espace et en temps par construction de l'équation (2.46). Les modèles de sous-maille déterminent les échelles caractéristiques des quantités de sous-maille l_0 et t_0 .

Le flux de chaleur Q est modélisé en utilisant l'hypothèse que le nombre de Prandtl turbulent est constant, ce qui conduit à

$$Q_i = -\frac{\mu_{sm} c_p}{Pr_t} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = -k_{sm} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}. \quad (2.53)$$

Le coefficient de conductivité thermique k_{sm} de sous-maille est alors défini.

Avec ces hypothèses et en définissant la partie déviatrice du tenseur des taux de déformation par

$$D_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} S_{kk}, \quad (2.54)$$

les équations de Navier-Stokes filtrées se réduisent finalement à

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\mu + \mu_{sm}) \tilde{D}_{ij}], \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{e}_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\tilde{u}_i (\bar{\rho} \tilde{e}_t + \bar{P})] = \frac{\partial}{\partial x_i} [(\mu + \mu_{sm}) \tilde{u}_j \tilde{D}_{ij}] + (k + k_{sm}) \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}, \quad (2.57)$$

où l'expression de la viscosité de sous-maille $\mu_{sm} = \rho \nu_{sm}$ reste à déterminer. Ces équations filtrées ne diffèrent des équations de Navier-Stokes que par l'ajout des termes μ_{sm} et k_{sm} .

2.2.4 Modèles de sous-maille

2.2.4.1 Modèle de Smagorinsky

Le modèle de Smagorinsky [83, 86] est présenté ici à titre d'information, il est l'un des premiers modèles SGE et est à l'origine de nombreux autres. Ce modèle basé sur les échelles résolues utilise directement une approche semblable au modèle de longueur de mélange de Prandtl, par une analyse dimensionnelle. L'échelle de longueur l_0 est obtenue en supposant que la longueur de coupure Δ_c imposée par le filtre est représentative des modes de sous-maille

$$l_0 = C_s \Delta_c, \quad (2.58)$$

où C_s est la constante du modèle à déterminer. L'évaluation de l'échelle de temps suppose qu'il existe un équilibre local entre le taux de production d'énergie cinétique, le taux de dissipation de cette énergie par viscosité en énergie interne et le flux d'énergie cinétique à travers la coupure, imposée par le filtre. Le temps caractéristique des échelles de sous-maille est alors égal à celui des échelles résolues. Il correspond au temps de retournement d'une grosse structure donné par

$$\frac{1}{t_0} = \left(2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}\right)^{1/2}. \quad (2.59)$$

La viscosité de sous-maille s'écrit donc

$$\nu_{sm} = (C_s\Delta_c)^2(2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij})^{1/2}, \quad (2.60)$$

avec $\overline{S}_{ij} = 1/2(\partial\overline{u}_i/\partial x_j + \partial\overline{u}_j/\partial x_i)$, le modèle ayant été développé dans un cadre incompressible. La constante C_s est déterminée théoriquement en supposant un spectre de Kolmogorov inertiel infini. Elle est évaluée de façon à ce que la dissipation de sous-maille soit équivalente au taux de dissipation à la coupure, ce qui donne

$$C_s = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3C_K}{2}\right)^{-3/4} \approx 0.18, \quad (2.61)$$

avec $C_K = 1.4$ (constante de Kolmogorov). En pratique, ce modèle est connu pour être trop dissipatif pour des écoulements où un cisaillement moyen est présent (type couche limite par exemple). De plus, la valeur de C_s doit être modifiée selon le type d'écoulement considéré. Un point critique pour les études de stabilité des écoulements tourbillonnaires est que ce modèle est incapable de prédire la dynamique des écoulements faiblement turbulents ou transitionnels.

2.2.4.2 Modèle de Fonction de Structure

Le modèle de Fonction de Structure se base sur les mêmes hypothèses que celles du modèle de Smagorinsky. La viscosité de sous-maille est évaluée en fonction de l'énergie cinétique à la coupure. Métais et Lesieur [60] ont établi la transposition de la viscosité de sous-maille exprimée dans l'espace spectral à l'espace physique. La suppression de la dépendance de cette viscosité vis-à-vis du nombre d'onde conduit à une relation locale en fréquence. L'énergie cinétique à la coupure est déterminée à l'aide de la fonction de structure d'ordre deux \overline{F}_2 . En supposant un spectre inertiel de Kolmogorov pour les échelles de sous-maille, la viscosité de sous-maille s'écrit

$$\nu_{sm}(\mathbf{x}, \Delta_c, t) = 0.063 \Delta_c \sqrt{\overline{F}_2(\mathbf{x}, \Delta_c, t)}, \quad (2.62)$$

où la fonction de structure est calculée dans l'espace physique en moyennant spatialement sur la distance Δ_c

$$\overline{F}_2(\mathbf{x}, \Delta_c, t) = \langle \|\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)\|^2 \rangle_{\|\mathbf{r}\|=\Delta_c}. \quad (2.63)$$

Ce modèle permet d'obtenir des résultats comparables au modèle spectral, et a été employé avec succès pour des simulations d'écoulements cisailés libres. Bien que basé sur l'énergie à la coupure, le modèle est directement lié aux échelles résolues

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{r}\nabla\tilde{\mathbf{u}} + O(|\mathbf{r}|^2), \quad (2.64)$$

ce qui prouve la sensibilité de la fonction \overline{F}_2 aux gradients de vitesse résolue. Le modèle souffre alors du même problème que celui de Smagorinsky, à savoir son incapacité à simuler les phénomènes de transition.

2.2.4.3 Modèle de Fonction de Structure Filtrée

Ce modèle est basé sur le modèle de Fonction de Structure [60]. La localité en espace de ce dernier induit une non-localité en fréquence conformément au principe d'incertitude, conduisant à une mauvaise estimation de l'énergie à la coupure.

Les gradients des plus grandes échelles sont pris en compte dans la modélisation avec un poids équivalent à ceux des plus petites échelles résolues. Or, c'est la dynamique des ces dernières qui est déterminante pour les transferts d'énergie. Afin d'éliminer l'influence des plus grandes échelles résolues dans l'estimation de la viscosité de sous-maille, Ducros *et al.* [19] propose d'appliquer un filtre passe-haut au champ de vitesse résolu avant de calculer la fonction de structure. Ce filtre est un filtre Laplacien discret \mathcal{H} , appliqué n fois au champ de vitesse résolu

$$\tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(n)} = \mathcal{H}(\tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(n-1)}) = \tilde{\mathbf{u}}_{i+1,j,k}^{(n-1)} - 2\tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(n-1)} + \tilde{\mathbf{u}}_{i-1,j,k}^{(n-1)} + \quad (2.65)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{i,j+1,k}^{(n-1)} - 2\tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(n-1)} + \tilde{\mathbf{u}}_{i,j-1,k}^{(n-1)} + \quad (2.66)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k+1}^{(n-1)} - 2\tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(n-1)} + \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k-1}^{(n-1)}, \quad (2.67)$$

où les indices i, j, k sont les indices des points du maillage et où $\tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(n)}$ est la vitesse filtrée n fois. Cette opération implique une perte de localité dans l'espace physique, ce qui conduit à un enrichissement spectral. La viscosité de sous-maille s'écrit après n application du filtre

$$\nu_{sm}(\mathbf{x}, \Delta_c, t) = \alpha^{(n)} \Delta_c \sqrt{F_2^{(n)}(\mathbf{x}, \Delta_c, t)}, \quad (2.68)$$

et constitue l'expression du modèle de structure filtrée d'ordre deux des vitesses.

La constante $\alpha^{(n)}$ varie en fonction du nombre d'applications n du filtre laplacien. Ducros *et al.* [19] montrent que la valeur optimale du nombre d'applications du filtre pour des simulations de couches limites compressibles est $n = 3$ ($\alpha^{(3)} = 0.00084$). Le modèle ainsi obtenu apparaît moins dissipatif que le modèle de Smagorinsky ou de fonction de structure et permet de simuler la transition à la turbulence. En pratique, la fonction de structure $\overline{F_2^{(n)}}$ est calculée sur les six points de maillage voisins de \mathbf{x}

$$\begin{aligned} \overline{F_2^{(n)}}(\mathbf{x}, \Delta_c, t) = & \frac{1}{6} \left[\|\tilde{\mathbf{u}}_{i+1,j,k}^{(n)} - \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(n)}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}_{i-1,j,k}^{(n)} - \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(n)}\|^2 \right. \\ & + \|\tilde{\mathbf{u}}_{i,j+1,k}^{(n)} - \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(n)}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}_{i,j-1,k}^{(n)} - \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(n)}\|^2 \\ & \left. + \|\tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k+1}^{(n)} - \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(n)}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k-1}^{(n)} - \tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(n)}\|^2 \right]. \quad (2.69) \end{aligned}$$

L'échelle de longueur de coupure Δ_c est fixée par la discrétisation spatiale, correspondante à la largeur du filtre. Pour un maillage régulier, elle est simplement égale à la longueur de la maille $\Delta_c = \Delta$. Dans le cas de maillage irrégulier, elle peut être calculée dans un contexte volume fini, par : $\Delta_c = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3} = V^{1/3}$, où V est le volume de la maille et Δ_i correspond à la taille de la maille dans la direction i .

Ce modèle dissipe très peu, $\nu_{sm} \rightarrow 0$ lorsque l'écoulement est complètement résolu (*c.-à-d.* quand il n'y a pas d'énergie à la fréquence de coupure). Si le maillage est suffisamment raffiné, ce modèle permet de simuler avec une très bonne précision la phase linéaire du développement des instabilités de grandes longueurs d'onde ou de courtes longueurs d'onde rencontrées dans les écoulements de tourbillons de sillage. Dans ce cas, l'écoulement de base est complètement

résolu et le modèle reste inactif tant que les petites structures générées par le couplage des modes dans le régime non-linéaire ont une échelle de longueur supérieure à la longueur de coupure. Lorsque le mode le plus instable sature, le régime non-linéaire alimente les petites longueurs d'onde jusqu'à la coupure, ce qui déclenche le modèle pendant la transition vers la turbulence.

2.3 Schémas numériques du code NTMIX

2.3.1 Discrétisation spatiale

La méthode numérique employée dans le code NTMIX pour calculer les termes de dérivation spatiale (premier et second ordre) est la méthode des différences finies. Le schéma numérique est un schéma compact de type Padé d'ordre six [53].

Considérons la dérivée première d'une fonction f au point x_i , notée f'_i . Pour cette dérivée, un schéma de type Padé s'écrit de manière générale sur un maillage uniforme de pas d'espace Δ

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6\Delta} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta}. \quad (2.70)$$

Les relations entre les coefficients a, b, c et α, β sont obtenues par identification aux coefficients des séries de Taylor à plusieurs ordres. Le premier coefficient de la série qui ne peut être identifié détermine l'ordre de troncature du schéma (Eq. 2.70). Selon l'ordre d'approximation voulu, les relations de contraintes sur les coefficients sont

$$a + b + c = 1 + 2\alpha + 2\beta \quad (\text{ordre } 2), \quad (2.71)$$

$$a + 2^2b + 3^2c = 2 \frac{3!}{2!} (\alpha + 2^2\beta) \quad (\text{ordre } 4), \quad (2.72)$$

$$a + 2^4b + 3^4c = 2 \frac{5!}{4!} (\alpha + 2^4\beta) \quad (\text{ordre } 6). \quad (2.73)$$

Dans le cas général $\beta \neq 0$, le calcul des dérivées premières f'_i en tout point i du maillage par la relation (Eq. 2.70) se ramène à la résolution d'un système linéaire pentadiagonal de la forme

$$Af' = Bf. \quad (2.74)$$

La classe de schémas (2.70) est ainsi implicite en espace. Pour le cas particulier où $\beta = 0$, ce système se réduit à un système tridiagonal. Le schéma spatial retenu dans NTMIX est d'ordre six parmi cette classe de schéma où $\beta = 0$. Les autres constantes pour ce schéma, donné par Lele [53] sont $\alpha = 1/3, a = 14/9, b = 1/9$ et $c = 0$. La résolution du système tridiagonal, inversé à l'aide d'un algorithme de Thomas fournit l'approximation f'_i en tout point. De plus, Lele a montré que ce schéma possède des erreurs dispersives très faibles.

Pour l'utilisation de conditions aux limites non-périodiques, l'ordre de précision est dégradé aux bords du domaine (ordre trois dans le cas général) où une formulation décentrée est utilisée, pour assurer la stabilité du schéma (Carpenter *et al.* [9]). L'utilisation de conditions aux limites périodiques dans les trois directions permet en revanche de conserver formellement l'ordre six dans tout le domaine de calcul, y compris aux frontières.

Pour les dérivées secondes en espace, un schéma tridiagonal d'ordre six est également employé

$$\beta f''_{i-2} + \alpha f''_{i-1} + f''_i + \alpha f''_{i+1} + \beta f''_{i+2} = c \frac{f_{i+3} - 2f_i + f_{i-3}}{9\Delta^2} + b \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4\Delta^2} + a \frac{f_{i+1} - f_i + f_{i-1}}{\Delta^2}, \quad (2.75)$$

avec $\alpha = 2/11, \beta = 0, a = 12/11, b = 3/11$ et $c = 0$.

2.3.2 Traitement des maillages cartésiens irréguliers

Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées et résolues dans le code NTMIX sur des maillages cartésiens réguliers ou non. L'utilisation des maillages irréguliers permet de considérer des grands domaines de calcul pour minimiser l'impact du traitement des conditions limites sur la dynamique étudiée. Le nombre de points de calcul peut être ainsi considérablement réduit, avec une résolution fine dans la zone d'intérêt de l'écoulement.

Plusieurs méthodes existent pour calculer les dérivées sur un maillage de pas irrégulier telle que la méthode de transformation de Jacobi et la méthode *Fully Included Metrics* (FIM). Cette dernière méthode a été implantée dans le code NTMIX et utilisée pour les simulations de tourbillons de sillage. Ce choix est basé sur le fait que la méthode de transformation de Jacobi peut mener à des erreurs conséquentes si l'évolution du pas d'espace est trop grande. La méthode FIM consiste à tenir compte de la métrique directement dans le calcul des coefficients du schéma numérique [28]. La contrainte majeure est de conserver exactement l'ordre de précision dans le cas où le maillage utilisé est uniforme. Gamet *et al.* [28] montrent que l'ordre de précision sur un maillage non-uniforme peut être conservé si l'évolution du pas d'espace est douce. Dans le cas contraire, avec un schéma compact d'ordre six (Eq. 2.70), l'ordre de précision est au moins d'ordre quatre pour les dérivées premières et trois pour les dérivées secondes.

2.3.3 Erreur de repliement ou d'*aliasing*

La discrétisation des termes non-linéaires des équations de Navier-Stokes (termes de convection, par exemple de la forme $\partial(fg)/\partial x$) conduit à une erreur supplémentaire (en plus de l'erreur de troncature), appelée erreur de repliement ou plus couramment d'*aliasing*. Elle provient du fait que tous les nombres d'onde des termes non-linéaires ne peuvent être représentés sur la grille de discrétisation. Ainsi, l'énergie qui devrait être transférée vers des longueurs d'onde plus courtes que le pas d'espace Δ se retrouve à des nombres d'onde plus faibles : une contribution haute fréquence apparaît alors sous la forme d'une contribution à basse fréquence, d'où le nom de repliement. L'ordre élevé d'un schéma favorise ce type d'erreur, la précision permettant d'accéder à des nombres d'onde plus grands. L'accumulation d'énergie peut conduire à l'apparition d'oscillations et à la détérioration de la solution numérique.

Pour réduire cette erreur les termes non-linéaires de convection sont écrits sous la forme appelée *skew-symmetric*

$$\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} \right). \quad (2.76)$$

Bien que ces deux formulations soient équivalentes, la discrétisation numérique diffère dans la pratique. Ainsi, l'étude de Blaisdell *et al.* [6] montre par des expériences numériques que la formulation semi-conservative (terme de droite de l'équation 2.76) est plus robuste et précise

pour des simulations de turbulence que la formulation conservative ($\partial(\rho u_i u_j)/\partial x_j$). Pour l'équation de continuité et d'énergie totale, le code NTMIX utilise la formulation conservative, $\partial(\rho u_j)/\partial x_j$ et $\partial((\rho e_t + p)u_j)/\partial x_j$, respectivement.

2.3.4 Intégration temporelle

L'intégration temporelle est effectuée à l'aide de la méthode explicite de Runge-Kutta à trois étapes. Ce schéma est précis à l'ordre trois et les coefficients ont été choisis pour minimiser l'encombrement mémoire (méthode de Wray [97] reproduite dans [98]).

Soit l'équation temporelle écrite sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = R(\mathbf{U}), \quad (2.77)$$

où \mathbf{U} représente le vecteur d'état $(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e_t)^T$ et R l'opérateur regroupant le calcul des termes de convection, de diffusion et de pression. L'intégration temporelle entre deux pas de temps, $t^n < t < t^{n+1}$, est effectuée explicitement comme suit

$$\begin{aligned} U_1 &= U^n + \Delta t \left(\frac{8}{15} R_n \right), \\ U_2 &= U^n + \Delta t \left(\frac{1}{4} R_n + \frac{5}{12} R_1 \right), \\ U^{n+1} &= U^n + \Delta t \left(\frac{1}{4} R_n + \frac{3}{4} R_2 \right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

La stabilité du schéma numérique est assurée en respectant la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (*CFL*) pour l'advection et de Fourier (*Fo*) pour la diffusion. En utilisant ce schéma pour résoudre une équation linéaire purement advective de la forme

$$\partial f / \partial t + (u + c) \partial f / \partial x = 0, \quad (2.79)$$

où $u + c$ est la vitesse d'advection égale à la vitesse de propagation des ondes acoustiques, la condition *CFL* s'écrit sous forme adimensionnelle

$$CFL = \max \left[\left(|u^*| + \sqrt{c_p^* (\gamma - 1) T^*} \right) \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \right] \leq \frac{\sqrt{3}}{C_c}, \quad (2.80)$$

où C_c est une constante dépendante de la discrétisation spatiale.

Pour une équation purement diffusive du type

$$\partial f / \partial t - \nu \partial^2 f / \partial x^2 = 0, \quad (2.81)$$

le schéma est stable si le nombre de Fourier (*Fo*) vérifie la relation adimensionnelle

$$Fo = \max \left[\nu^* \frac{\Delta t^*}{(\Delta x^*)^2} \frac{1}{Re} \right] \leq \frac{2.5}{C_d}, \quad (2.82)$$

où le nombre de Reynolds de référence est $Re = a_{ref} L_{ref} / \nu_{ref}$. La constante C_d dépend également du schéma de discrétisation spatiale.

Afin que soit assurée la stabilité numérique, Lele [53] a démontré pour le schéma compact tridiagonal d'ordre six que les constantes sont $C_c = 1.989$, $C_d = 6.857$. Les critères sont alors : $CFL \leq 0.8708$ et $Fo \leq 0.365$. Le pas de temps est choisi en prenant le critère le plus restrictif

entre le critère CFL (Eq. 2.80) et le critère Fo (Eq. 2.82). En pratique, pour tous les calculs effectués, ces critères sont fixés tels que

$$\begin{cases} CFL &= 1/2, \\ Fo &= 1/10. \end{cases} \quad (2.83)$$

2.3.5 Modèles pour la simulation des grandes échelles

Dans le code NTMIX, les modèles disponibles sont le modèle de fonction de structure et le modèle de fonction de structure filtrée (section 2.2). Seul ce dernier modèle est employé pour les simulations des grandes échelles d'écoulements tourbillonnaires de type sillage d'avions présentées dans cette thèse. Il a montré son efficacité dans les précédentes études de Laporte [47] et Moet [66].

2.3.6 Traitement numérique supplémentaire utilisé pour les simulations spatiales

Un schéma numérique de différences finies centré, tel que celui implanté ici (section 2.3.1), est connu pour être sujet à des instabilités numériques liées aux approximations faites par les conditions limites, ou par l'utilisation d'un maillage non-régulier, ou par une sous-résolution des gradients de l'écoulement. Ce type d'instabilité numérique de nombre d'onde très élevé est généralement évité par l'addition d'une dissipation artificielle, ou par un filtrage explicite de la solution.

Pour les simulations spatiales, une précaution a été prise pour éviter des problèmes de stabilité du calcul. Un terme de dissipation artificielle sélective est ajouté aux équations (*selective artificial dissipation*), suivant l'approche de Tam et Webb [90] et Barone [4]. Les contraintes sont les suivantes : les termes doivent concerner uniquement les échelles spatiales bien résolues, l'estimation de l'erreur doit être accessible, et l'erreur supplémentaire provenant des opérateurs d'amortissement doit être liée au rapport entre les échelles de l'écoulement et les échelles du maillage plutôt qu'au maillage uniquement.

Il est utilisé pour ces simulations, un maillage cartésien irrégulier dans les plans transverses (x, y) . Au lieu d'utiliser une méthode semblable à celle employée pour les termes de dérivation (méthode FIM section 2.3.2), l'opérateur de dissipation artificielle D est d'abord calculé dans l'espace de calcul (ξ, η) puis exprimé dans l'espace physique (x, y) pour des raisons de simplicité et de facilité d'implantation. Nous nous restreignons ici à présenter la formulation dans la direction x uniquement (pour la seconde direction, remplacement $x \leftarrow y$, $\xi \leftarrow \eta$, respectivement). Le passage de l'espace de calcul à l'espace physique est effectué suivant la relation

$$D_x = \frac{1}{x_\xi} D_\xi. \quad (2.84)$$

La métrique x_ξ est déterminée à l'aide d'une formulation compacte de Lele [53] pour les dérivées premières.

Dans l'espace de calcul, l'opérateur de dissipation artificielle qui est une approximation de la dérivée sixième en fonction de la puissance cinquième du pas d'espace, s'exprime par

$$D_x = \gamma(\Delta x)^5 \frac{\partial^6 U}{\partial x^6}, \quad (2.85)$$

où γ est un paramètre arbitraire. La dérivée sixième est choisie pour traiter les nombres d'ondes d'échelles k^6 dans l'espace spectral. L'atténuation ou l'amortissement concerne ainsi essentiellement les nombres d'onde très élevés du spectre d'énergie.

Une approximation de la dérivée sixième par un schéma compact représente mieux le comportement en k^6 dans l'espace spectral qu'un schéma explicite. L'opérateur D_ξ est déterminé implicitement par une approximation différences finies pour la dérivée sixième :

$$\frac{\partial^6 U}{\partial \xi^6} \Big|_{i-1} + \alpha \frac{\partial^6 U}{\partial \xi^6} \Big|_i + \frac{\partial^6 U}{\partial \xi^6} \Big|_{i+1} = a_0 U_i + \sum_{l=1}^3 a_l (U_{i+l} + U_{i-l}), \quad (2.86)$$

avec

$$\alpha = 3, \quad a_0 = 80, \quad a_1 = -60, \quad a_2 = 24, \quad a_3 = -4. \quad (2.87)$$

La dissipation artificielle est modifiée pour les deux points proches des frontières, en utilisant respectivement un schéma d'ordre deux et quatre :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \Big|_{i-1} + 10 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \Big|_i + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \Big|_{i+1} = 2U_i - (U_{i+1} + U_{i-1}), \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4} \Big|_{i-1} + 5 \frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4} \Big|_i + \frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4} \Big|_{i+1} = 36U_i - 24(U_{i+1} + U_{i-1}) + 6(U_{i+2} + U_{i-2}). \quad (2.89)$$

Pour les points frontières la dissipation artificielle est simplement nulle. Dans le cas de conditions limites périodiques dans la direction ξ , la formulation (2.86) doit être utilisée pour tous les points discrets. La valeur du paramètre γ contrôle l'intensité de la dissipation artificielle (ici $\gamma \in [0.001, 0.006]$). La dissipation sélective artificielle est testée par des simulations bidimensionnelles et tridimensionnelles dont les résultats sont présentés dans le paragraphe suivant.

Tests : diffusion d'un tourbillon et développement d'une instabilité forcée

L'objectif de l'utilisation de la dissipation sélective artificielle est d'éliminer les ondes numériques qui peuvent engendrer une déstabilisation du calcul ou une solution erronée, sans affecter la dynamique de l'écoulement simulé. Deux aspects de son influence ont été envisagés et testés :

- (i) une sur-estimation de la viscosité physique,
- (ii) un amortissement du taux d'amplification d'une instabilité.

Pour le cas (i), la simulation test est la diffusion visqueuse d'un tourbillon isolé de Lamb-Oseen (voir section 3.2.1 du chapitre 3), solution des équations instationnaires de Navier-Stokes. Le tourbillon s'étale suivant la loi théorique [82]

$$r_c(t) = \sqrt{4\beta\nu t + r_{c0}^2}, \quad (2.90)$$

où r_c est le rayon où la vitesse azimutale atteint son extremum et $\beta = 1.2564$. L'indice 0 correspond au temps initial.

La figure 2.2 montre que l'évolution du rayon du tourbillon en fonction du temps normalisé par l'échelle de temps visqueuse $t_\nu = 2\pi\beta^2 r_{c0}^2 / \nu$, obtenue par les deux simulations avec et sans dissipation artificielle, est en parfait accord avec la loi théorique.

Dans le cas de simulations avec des instabilités tridimensionnelles dans un système tourbillonnaire, on s'intéresse notamment à leur taux d'amplification. Les simulations spatiales visées

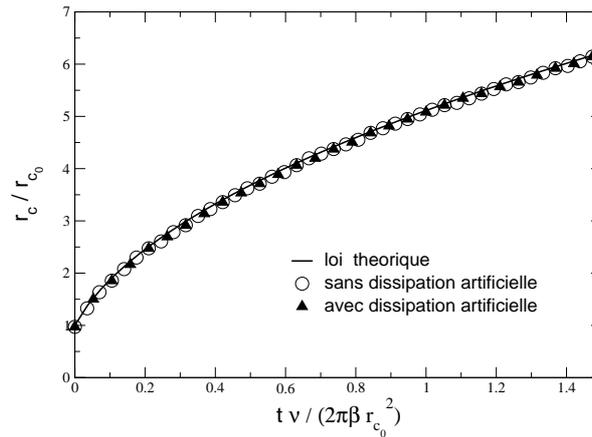


FIG. 2.2 – Évolution du rayon du cœur d'un tourbillon isolé par diffusion visqueuse.

concernent la fusion de deux tourbillons co-rotatifs *via* le développement d'instabilités elliptiques de courtes longueurs d'onde. Le chapitre 3 détaille ce type d'instabilités, nous nous limitons ici à présenter la méthodologie du test numérique et les résultats. Moet [66] et Laporte [47] ont montré qu'il était possible de simuler par une approche temporelle de telles instabilités, notamment par forçage initial d'un mode instable.

Deux simulations temporelles tridimensionnelles ont donc été effectuées, avec et sans dissipation artificielle, d'un système de deux tourbillons co-rotatifs identiques. La prédiction théorique de Le Dizès et Laporte [48] permet d'identifier la longueur d'onde λ de ce mode ainsi que son taux d'amplification σ en fonction du système considéré (rapport a/b entre les rayons des tourbillons et la distance de séparation) et du nombre de Reynolds Re_Γ (basé sur la circulation Γ). Ici, les simulations tests sont réalisées à $Re_\Gamma = 10^4$ et pour un écoulement quasi-incompressible (nombre de Mach $M = v_{\theta_{max}}/c_\infty = 0.1$, où $v_{\theta_{max}}$ est l'extremum de vitesse azimutale). La longueur axiale L_z du domaine de calcul détermine le nombre de longueurs d'onde qui peuvent être prises en compte, ici $L_z = 3\lambda$. La perturbation initiale infinitésimale (indiquée par $'$) de forçage est ajoutée à l'écoulement de base (indiqué par $_b$) sur une des composantes de vitesse transverse en utilisant une loi sinusoïdale :

$$v(x, y, z) = v_b(x, y, z) + v'(x, y, z) = v_b(x, y, z) + A(x, y)\sin(kz), \quad (2.91)$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde et l'amplitude de la perturbation A dépend de x et y , de sorte que la perturbation soit localisée dans le plan xy au voisinage d'un des tourbillons du dipôle. Une fenêtre de perturbation est définie à l'intérieur de laquelle $A(x, y) = \text{constante} = 0.01v_c$ et à l'extérieur de laquelle $A(x, y)$ décroît linéairement en fonction de la distance normale à la fenêtre. Cette fenêtre est centrée sur un tourbillon pour perturber son cœur et son extension couvre environ deux rayons.

La figure 2.3-a illustre l'amplification de l'instabilité elliptique en visualisant une isosurface de vorticité et d'isocontours dans le premier plan. Cette instabilité est caractérisée par une oscillation de la position du cœur des tourbillons dans la direction axiale et une amplification exponentielle dans la phase de régime linéaire $\sim e^{(2\sigma t)}$. Pour calculer son taux d'amplification, une transformée de Fourier par FFT (*Fast Fourier Transform*) des composantes de vitesses

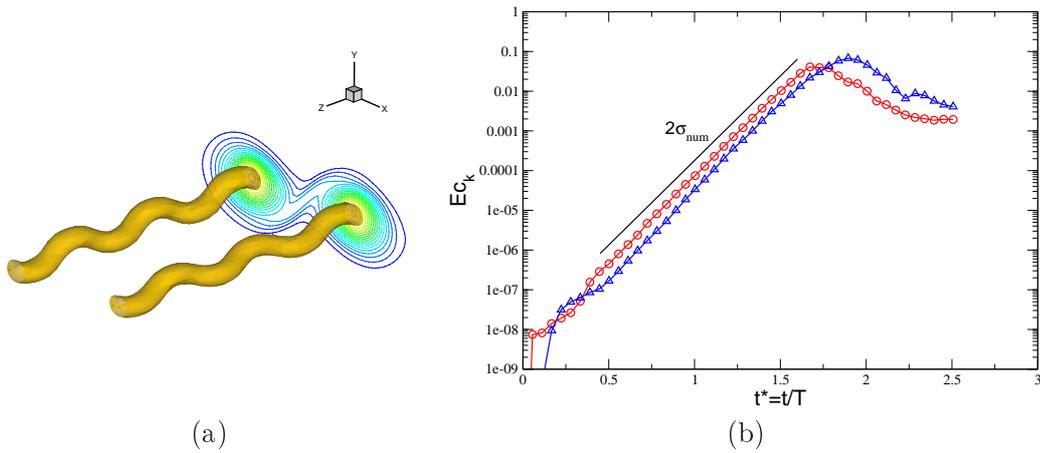


FIG. 2.3 – Instabilité elliptique de courte longueur d’onde dans un système de tourbillons co-rotatifs. (a) Isosurface de vorticité $|\omega| = 0.8|\omega_{max}|$ à $t^* = t/T = 1.56$, où $T = 2\pi^2 b_0^2/\Gamma$ est la période de rotation du système avec b_0 la distance de séparation. (b) Évolution temporelle de l’énergie du mode instable forcé : ligne continue et symbole \circ pour la simulation sans dissipation artificielle, et le symbole Δ pour la simulation avec dissipation artificielle.

est effectuée dans la direction axiale permettant de déterminer l’énergie spectrale de chaque nombre d’onde axial. La dissipation artificielle sélective n’ajoute pas d’erreur supplémentaire au niveau du taux d’amplification (Fig. 2.3-b), mais conduit à un niveau d’énergie légèrement plus faible durant la phase linéaire du développement de l’instabilité. La méthode de forçage implique ici que le régime simulé ne correspond pas exactement à un régime linéaire car le niveau d’énergie injectée n’est pas négligeable devant l’écoulement de base dans le tourbillon où les vitesses deviennent de plus en plus faibles à mesure que l’on se rapproche du cœur. Cependant, la solution numérique est proche de la valeur prédite par l’analyse de stabilité linéaire de Le Dizès et Laporte [48] avec une surestimation de $\sim 8\%$ du taux d’amplification.

2.4 Conditions limites

Le traitement des conditions aux limites est un problème majeur et récurrent pour les simulations de dynamique des fluides et fait l’objet de nombreuses recherches. Dans le cadre des simulations de dynamique tourbillonnaire, on peut distinguer deux classes de conditions limites (non nécessairement décorrélées) qui sont associées à deux types de problèmes. Considérons le domaine de calcul représenté sur la figure 2.4 qui contient un tourbillon. Le premier problème est lié au traitement des faces latérales où on cherche à représenter un domaine ouvert. Le deuxième problème concerne les conditions limites des plans d’entrée et de sortie lorsqu’il y a présence d’un écoulement axial qui doit traverser ces faces. Ce problème se pose en particulier dans le cadre de simulations spatiales.

Une particularité des écoulements tourbillonnaires étudiés dans cette thèse est liée à la circulation non-nulle dans un plan transverse (plan orthogonal à l’axe du tourbillon). Les conditions limites devraient respecter cette propriété en traitant correctement l’information provenant de l’extérieur du domaine. Mais cette information est inaccessible, différentes stratégies peuvent

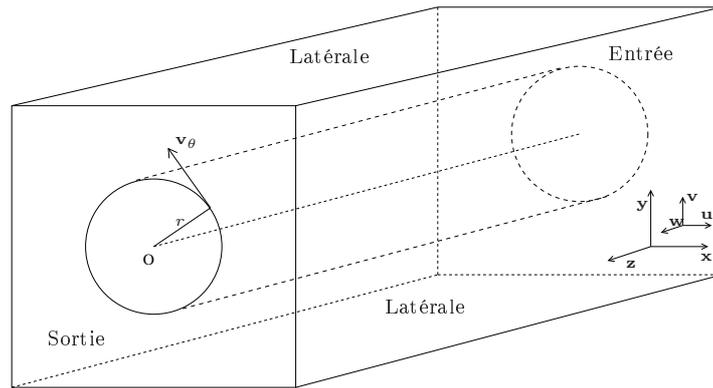


FIG. 2.4 – Exemple de domaine de calcul pour la simulation d’un tourbillon.

alors être employées pour minimiser l’approximation faite ou non de cette information. Il est possible d’utiliser des conditions limites de type périodiques ou symétriques, mais elles impliquent l’existence de tourbillons images, de nombre infinis. L’influence d’un tourbillon en un point dépend de sa distance d’éloignement, on utilise alors des domaines de calcul de grandes dimensions pour minimiser l’impact des tourbillons images sur la dynamique étudiée. Le nombre de points de calcul peut ainsi s’avérer très élevé, alors que toute la dynamique est concentrée dans une zone. On a recours alors à des maillages fins uniquement dans cette région et étirés jusqu’aux frontières pour limiter le nombre de points. Ce type de condition est toutefois peu représentatif de la réalité et généralement employé pour des études fondamentales ou pour un choix de modélisation de l’écoulement (approche temporelle). On peut citer par exemple Sreedhar et Ragab [89] qui ont simulé le développement d’instabilités dans un tourbillon isolé avec des conditions de symétries pour les faces latérales. Pradeep et Hussain [77] ont mis en évidence que l’utilisation de condition limite périodique dans les trois directions pouvaient mener à des résultats incorrects pour des simulations de dynamique tourbillonnaire où la taille du domaine était grande vis-à-vis de celle du tourbillon. Ces mauvais résultats sont liés à la contrainte artificielle de circulation non-nulle inhérente aux simulations périodiques. L’approche *Navier-Stokes Characteristic Boundary Conditions* (NSCBC) de Poinsot et Lele [76] est adaptée à la résolution des équations compressibles. Elle est plus en adéquation avec une modélisation d’écoulements réels. Cette approche est basée sur une écriture des équations sous forme de variables caractéristiques. Il est imposé sur ces caractéristiques des relations liées à la physique de la condition limite. Ceci permet d’obtenir un problème bien posé en imposant le nombre de contrainte adéquat. Les relations correspondantes à la physique du problème résultent de la résolution d’un problème localement monodimensionnel, appelé LODI pour *Local One Dimensional Inviscid*. Au cours de cette thèse, il a été développé une nouvelle condition NSCBC de type entrée/sortie mieux adaptée aux écoulements tourbillonnaires de circulation non-nulle.

Dans le cadre de simulations basées sur une approche temporelle, des conditions de périodicité sont appliquées dans les plans d’entrée et de sortie (Fig. 2.4). L’hypothèse majeure est de considérer que le domaine de calcul se déplace à une vitesse constante, par exemple la vitesse de l’avion dans le contexte des tourbillons de sillage. En revanche, pour des simulations tridimensionnelles spatiales, il est nécessaire d’imposer un écoulement dans le plan d’entrée et

de minimiser la réflexion d'ondes numériques dans le plan de sortie. Pour chaque plan, deux conditions limites de type NSCBC ont été envisagées et testées, permettant d'établir un choix adapté à la simulation spatiale d'instabilité dans un système de tourbillons co-rotatifs (chapitre 5).

Les deux sections suivantes présentent l'aspect technique des conditions aux limites de symétrie et celles basées sur le traitement des ondes et des variables caractéristiques NSCBC, qui ont été utilisées pour les simulations présentées dans ce mémoire.

2.4.1 Conditions de symétrie

Un aspect important de l'utilisation de condition aux limites de symétrie est que les variables primitives scalaires, ρ , e_t , sont symétriques tandis que le vecteur vitesse a des propriétés différentes. En effet, les composantes vectorielles parallèles à la frontière sont symétriques alors que les composantes normales sont anti-symétriques. De plus, une opération de dérivation ou d'intégration change les propriétés : après application pour une variable symétrique, elle devient anti-symétrique et inversement.

Deux types de schéma de différences finies sont employés pour des conditions de symétrie géométrique : une différenciation pour les variables symétriques et une autre pour les variables anti-symétriques. Dans le code NTMIX, la dérivée première en espace d'une variable est effectuée avec un schéma compact de différence finie (section 2.3.1). Pour les points intérieurs du domaine de calcul, le schéma s'écrit

$$3f'_{i+1} + 9f'_i + 3f'_{i-1} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{4}f_{i+2} + 7f_{i+1} - 7f_{i-1} - \frac{1}{4}f_{i-2} \right), \quad (2.92)$$

où Δ est le pas d'espace.

Pour une variable symétrique, la dérivée première en espace au premier point à la frontière $i = 1$ où il faut tenir compte de la symétrie, s'écrit

$$f'_1 = 0, \quad (2.93)$$

et pour le second point $i = 2$

$$3f'_1 + 9f'_2 + 3f'_3 = \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{1}{4}f_0 - 7f_1 + 7f_3 + \frac{1}{4}f_4 \right). \quad (2.94)$$

La symétrie de la variable au point $i = 1$ est exprimée par les relations

$$\begin{aligned} f_{-1} &= f_3, \\ f_0 &= f_2. \end{aligned} \quad (2.95)$$

La dérivée de cette variable est anti-symétrique, d'où

$$\begin{aligned} f'_0 &= -f'_2, \\ f'_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Au point $i = 2$, l'expression de la dérivée est ainsi simplifiée

$$9f'_2 + 3f'_3 = \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{1}{4}f_2 - 7f_1 + 7f_3 + \frac{1}{4}f_4 \right), \quad (2.97)$$

et il n'y a pas de modification ou de simplification du schéma pour les points intérieurs $i \geq 3$.

Pour une variable anti-symétrique au premier point $i = 1$ de la frontière symétrique, la dérivée première s'écrit

$$3f'_0 + 9f'_1 + 3f'_2 = \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{1}{4}f_{-1} - 7f_0 + 7f_2 + \frac{1}{4}f_3 \right), \quad (2.98)$$

où la propriété d'anti-symétrie implique

$$\begin{aligned} f_{-1} &= -f_3, \\ f_0 &= -f_2, \\ f_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.99)$$

La dérivée étant dans ce cas symétrique

$$f'_0 = f'_2, \quad (2.100)$$

l'expression de la dérivée première d'une variable anti-symétrique devient en utilisant aussi les équations (2.99)

$$9f'_1 + 6f'_2 = \frac{1}{\Delta} \left(14f_2 + \frac{1}{2}f_3 \right). \quad (2.101)$$

Au point $i = 2$, le schéma s'écrit

$$3f'_1 + 9f'_2 + 3f'_3 = \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{1}{4}f_0 - 7f_1 + 7f_3 + \frac{1}{4}f_4 \right), \quad (2.102)$$

qui peut être simplifié en utilisant les équations (2.99)

$$3f'_1 + 9f'_2 + 3f'_3 = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{4}f_2 - 7f_1 + 7f_3 + \frac{1}{4}f_4 \right). \quad (2.103)$$

Le schéma reste inchangé pour les autres points $i \geq 3$.

La même procédure est appliquée pour le calcul des dérivées secondes en espace.

2.4.2 Conditions limites basées sur les variables caractéristiques

La formulation de Poinot et Lele [76] pour le traitement des conditions aux limites est basée sur les relations des ondes caractéristiques pour les équations d'Euler, généralisée aux équations de Navier-Stokes par l'ajout des termes visqueux. Cette méthode permet de contrôler la réflexion d'ondes non-physiques aux frontières du domaine de calcul. La formulation NSCBC permet d'avoir des conditions non-réfléchissantes ou réfléchissantes mais aussi de glissement ou de non-glissement. Le paragraphe suivant présente la théorie associée aux ondes et variables caractéristiques pour les équations d'Euler.

2.4.2.1 Théorie pour les équations d'Euler

Soit les équations d'Euler écrites pour les variables primitives $\mathbf{V} = (\rho, u, v, w, p)^T$ sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + C \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\tilde{A} \cdot \nabla) \mathbf{V} = 0, \quad (2.104)$$

où A, B , et C sont les composantes de la matrice jacobienne $\tilde{A} = (A, B, C)$ dont les valeurs propres sont données par

$$\det \left| \lambda I - \tilde{A} \cdot \mathbf{n} \right| = 0, \quad (2.105)$$

où \mathbf{n} est une direction de propagation. Les valeurs propres données par la résolution de (2.105)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - c|\mathbf{n}|, \\ \lambda_2 &= \lambda_3 = \lambda_4 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \\ \lambda_5 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + c|\mathbf{n}|, \end{aligned} \quad (2.106)$$

avec $\mathbf{v} = (u, v, w)^T$, c la vitesse du son et $|\mathbf{n}|$ le module du vecteur \mathbf{n} . Soit \mathbf{r}_i (respectivement l_i) le vecteur propre à gauche associé à la valeur propre λ_i . Les matrices L dont les colonnes sont les \mathbf{r}_i , et L^{-1} dont les lignes sont les l_i (avec $LL^{-1} = I_5$) permettent de diagonaliser la matrice \tilde{A} , de sorte que $\tilde{A} \cdot \mathbf{n} = \Lambda$. Le symbole Λ représente la matrice diagonale de valeurs propres λ_i . Le système des équations d'Euler (2.104) peut donc être transformé sous la forme (Thompson [91])

$$L^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + L^{-1} \Lambda \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} = 0. \quad (2.107)$$

Les variables caractéristiques sont définies par $\delta W = L^{-1} \delta V$ où δ est une différentielle spatiale ou temporelle. Dans toute la suite on se restreint à une direction de propagation selon l'axe Oz ($\mathbf{n} = \mathbf{z}$), on obtient alors le système d'équations d'ondes suivant

$$-\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_4 \\ \mathcal{L}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho c \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \lambda_2 \left(c^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ \lambda_3 \frac{\partial u}{\partial z} \\ \lambda_4 \frac{\partial v}{\partial z} \\ \lambda_5 \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho c \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.108)$$

Dans le cas $\mathbf{n} = \mathbf{z}$, le système hyperbolique des équations d'Euler correspond à un système décrivant la propagation de cinq ondes W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 (dont les amplitudes sont les \mathcal{L}_i). Les ondes W_1 et W_5 correspondent à deux ondes acoustiques se propageant aux vitesses $(w - c)$ et $(w + c)$, respectivement. W_2 est l'onde entropique convectée à la vitesse w , W_3 et W_4 correspondent à l'advection de u et v à la vitesse w .

Les amplitudes \mathcal{L}_i sont estimées en fonction de l'information à l'intérieur ou à l'extérieur du domaine selon le signe des valeurs propres :

- (i) $\lambda_i > 0$ indique que l'onde quitte le domaine et l'amplitude correspondante est spécifiée par l'information connue à l'intérieur du domaine,
- (ii) $\lambda_i < 0$ indique que l'onde est entrante et la valeur de l'amplitude doit être déterminée par une condition respectant la physique de l'écoulement (enjeu des conditions appliquées aux frontières normales à l'axe d'un tourbillon, exposé dans la section 2.4.2.3).

Les relations entre les amplitudes \mathcal{L}_i et les variables primitives sont appelées relations de compatibilité. Elles définissent un système d'équations équivalentes aux équations d'Euler

(2.104), et s'écrivent [91] de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{L}_2 + (\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1)/2}{c^2} \\ \frac{(\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1)}{2} \\ \frac{(\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_1)}{2\rho c} \\ \mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & \gamma p & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & \gamma p & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho \\ p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0. \quad (2.109)$$

Toute la théorie présentée ici est basée sur les équations d'Euler. Poinso et Lele [76] proposent également d'utiliser cette méthode pour les équations de Navier-Stokes, bien que celles-ci ne soient pas hyperboliques. En effet, une bonne approximation consiste à considérer que les ondes se propagent dans un fluide visqueux comme dans un fluide non-visqueux, donc que les ondes pour les équations de Navier-Stokes sont uniquement associées à la partie hyperbolique de ces équations. Les ondes associées au processus de diffusion sont ainsi négligées, ce qui est une bonne approximation dans le cas d'écoulements à grand nombre de Reynolds (en particulier dans les cas de Simulation des Grandes Échelles).

Cette formulation des conditions limites permet de définir des conditions compatibles avec les algorithmes des schémas d'ordre élevé, très peu dissipatifs et permet d'éviter des instabilités numériques en contrôlant la réflexion d'ondes non-physiques. Plusieurs tests et comparaisons avec d'autres méthodes ont été faits par Poinso et Lele [76] montrant la précision et la robustesse de la méthode. Les conditions NSCBC sont implantées dans le code NTMIX pour des conditions d'entrée et de sortie, réfléchissantes et non-réfléchissantes, de mur glissant et non-glissant, et valables pour des écoulements subsoniques et supersoniques.

2.4.2.2 Condition d'injection subsonique instationnaire

Une première stratégie

On considère un écoulement entrant par la face d'entrée du domaine de calcul (Fig. 2.4) dont la normale est $\mathbf{n} = \mathbf{z}$. Les équations (2.108) montrent qu'il existe 4 ondes entrantes (W_2, W_3, W_4, W_5) dans le domaine de calcul à travers cette surface, et une onde sortante (W_1). Si l'on désire imposer un champ de variables primitives sur cette surface comme condition d'entrée au domaine de calcul, on ne peut imposer *a priori* que 4 des 5 variables, la cinquième devant être calculée à partir du champ intérieur (soit 4 conditions physiques et une condition numérique [76]). En effet les caractéristiques de l'onde sortante sont entièrement déterminées à partir du champ intérieur. Pour une condition d'entrée subsonique, les 4 conditions physiques peuvent être obtenues en imposant les variables $(U, V, W, T)(t)$ [76] à la surface délimitant le domaine de calcul, choix retenu ici. Dans ce cas, la densité ou la pression est la cinquième variable qui est calculée par la résolution du système d'équations de Navier-Stokes. L'équation de conservation de la masse (2.109-1) donne l'évolution de la densité en fonction des différentes ondes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \left(\mathcal{L}_2 + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \right) - \frac{\partial \rho u}{\partial x} - \frac{\partial \rho v}{\partial y}. \quad (2.110)$$

Les variables imposées à la surface sont notées $u = U(t)$, $v = V(t)$, $w = W(t)$ et $T = T(t)$. L'équation (2.110) exprimée localement sur la surface limite montre que la densité à la surface est déterminée par le champ de vitesse imposé et par les ondes \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_5 et \mathcal{L}_1 . Le problème se ramène donc à déterminer les amplitudes de ces ondes. \mathcal{L}_1 est une onde sortante, elle peut donc être facilement calculée à la limite à partir du champ intérieur en utilisant (2.108)

$$\mathcal{L}_1 = \lambda_1 \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho c \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (2.111)$$

et un schéma de discrétisation décentré aval. Les amplitudes \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_5 étant des ondes entrantes, elles ne peuvent pas être calculées à partir du champ intérieur.

Le système LODI [76] s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left(\mathcal{L}_2 + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \right) = 0, \quad (2.112)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) = 0, \quad (2.113)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2\rho c} (\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_1) = 0, \quad (2.114)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_3 = 0, \quad (2.115)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}_4 = 0. \quad (2.116)$$

L'évolution d'autres quantités peuvent être également déterminées à partir de (2.112). Dans le cas où l'on impose la température, nous avons aussi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T}{\rho c^2} \left(-\mathcal{L}_2 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) (\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \right) = 0. \quad (2.117)$$

Dans le cas d'une entrée subsonique avec (u, v, w, T) imposés, les relations manquantes entre \mathcal{L}_i peuvent être obtenues par (2.112)-(2.117). Puisque la vitesse $w = W(t)$ est imposée, l'amplitude \mathcal{L}_5 est déterminée par

$$\mathcal{L}_5 = \mathcal{L}_1 - 2\rho c \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (2.118)$$

de même, la température étant imposée

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} (\gamma - 1) (\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) + \frac{\rho c^2}{T} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.119)$$

et finalement une approximation de l'évolution de la densité sur la condition d'entrée est donnée par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \left[\gamma \left(\mathcal{L}_1 - \rho c \frac{\partial W}{\partial t} \right) + \frac{\rho c^2}{T} \frac{\partial T}{\partial t} \right] - \frac{\partial \rho u}{\partial x} - \frac{\partial \rho v}{\partial y}. \quad (2.120)$$

L'efficacité de cette condition limite d'entrée a été montrée par les différents tests de Poinot et Lele [76]. Cependant, l'objectif de simuler spatialement le développement d'un système de deux tourbillons pose le problème d'une solution des équations de Navier-Stokes dans le plan d'entrée. Une solution bidimensionnelle peut être obtenue par une simulation préliminaire mais la question de la distribution de vitesse axiale reste ouverte d'un point de vue modélisation : déficit ou excès de vitesse dans les cœurs tourbillonnaires.

Nouvelle condition d'entrée

Il est proposé ici une condition ayant un degré de liberté plus élevé, où une pression et une température totale, ainsi que les composantes transverses de vitesses sont imposées. La vitesse axiale au cœur des tourbillons est déterminée par la résolution du système d'équations de Navier-Stokes.

La pression et la température totale, p_t et T_t , sont calculées dans la pratique à la première itération par

$$p_t = P \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (2.121)$$

$$T_t = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right), \quad (2.122)$$

où γ est le rapport des coefficients de chaleur spécifiques et M le nombre de Mach :

$$M^2 = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{c^2}, \quad (2.123)$$

où c est la vitesse du son et les vitesses transverses u, v sont déterminées par l'intensité du tourbillon (connue à l'aide d'un modèle analytique ou par une simulation préliminaire d'un système tourbillonnaire). La température T est supposée uniforme $T = 1/(\gamma - 1)$. Pour fermer ce système à deux équations, le champ de pression P et la vitesse axiale w doivent être déterminés. Les seules contraintes fixées sont que ces quantités doivent être uniformes et égales à une valeur cible en dehors de l'écoulement tourbillonnaire, $p = 1/\gamma$ et $w = w_{cible}$, où w_{cible} est la vitesse axiale externe choisie par l'utilisateur.

Le champ de pression d'un tourbillon bidimensionnel axisymétrique de vitesse azimutale $v_\theta(r)$, est donné par l'équation d'équilibre hydrodynamique en coordonnée polaire

$$\frac{\partial p_{2d}}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta(r)}{r^2}. \quad (2.124)$$

Afin de respecter la valeur uniforme en dehors du tourbillon, ce champ de pression est alors calculé par

$$P = \frac{1}{\gamma} + \alpha \left(p_{2d} - \frac{1}{\gamma}\right), \quad (2.125)$$

où α est un paramètre constant arbitraire ($\alpha \in [0, 1]$). Sa valeur contrôle la pression totale et donc la vitesse axiale au cœur du tourbillon.

Le système LODI (section 2.4) est réécrit pour que la pression et la température totale soient constantes, permettant d'exprimer l'amplitude des ondes à partir des grandeurs calculées. Ces deux équations correspondent à celles de l'entropie $s = C_v \log P/\rho^\gamma$ et de l'enthalpie totale $h_{st} = 1/2w^2 + C_p T$. Elles sont exprimées par

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{(\gamma - 1)\rho T} \mathcal{L}_2 = 0, \quad (2.126)$$

$$\frac{\partial h_{st}}{\partial t} + \frac{1}{(\gamma - 1)\rho} \left[-\mathcal{L}_2 + \frac{\gamma - 1}{2} ((1 - M_l)\mathcal{L}_1 + (1 + M_l)\mathcal{L}_5) \right] = 0, \quad (2.127)$$

où $M_l = w/c$ est le nombre de Mach local. L'amplitude de l'onde entropique \mathcal{L}_2 et d'une des ondes acoustiques \mathcal{L}_1 ou \mathcal{L}_5 est déterminée telle que la dérivée temporelle soit nulle, et comme

les vitesses transverses sont fixées, $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4 = 0$.

Cette méthode correspond à une approximation monodimensionnelle, mais pour une simulation tridimensionnelle, la présence de termes de dérivées transverses non pris en compte dans les équations 2.126 et 2.127, peuvent induire des variations temporelles de ces deux quantités. Pour tenir compte de ces variations, un processus de relaxation ou de rappel vers les valeurs de référence peut être utilisé ou même les imposées directement après chaque pas de la méthode de Runge-Kutta (utilisé dans le code NTMIX). Seule la vitesse axiale est calculée par le schéma numérique, mais ce type de choix introduit des petites perturbations numériques qui ne sont pas contrôlables et difficilement quantifiables. Il est donc proposé une autre méthode qui tient compte des termes de dérivées transverses directement dans la résolution du système LODI (Eq. 2.126, 2.127), telle que

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{(\gamma - 1)\rho T} \mathcal{L}_2 + \left\{ \frac{\partial s}{\partial t} \right\}_{transverse} = 0, \quad (2.128)$$

où le dernier terme représente les dérivées transversales. Il est obtenu à l'aide de

$$\frac{\partial s}{\partial t} = C_v \left(\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right). \quad (2.129)$$

Pour assurer une entropie constante, l'amplitude de l'onde entropique est donc

$$\mathcal{L}_2 = (\gamma - 1)\rho T \left\{ \frac{\partial s}{\partial t} \right\}_{transverse}. \quad (2.130)$$

L'intégration temporelle des équations de Navier-Stokes conserve alors l'entropie initiale sans traitement particulier.

La même stratégie est employée pour l'enthalpie totale en utilisant

$$\frac{\partial h_{st}}{\partial t} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + u \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (2.131)$$

Une formulation pour les amplitudes \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_5 (Eq. 2.127) peut être établie avec $\frac{\partial h_{st}}{\partial t} = 0$ exactement respectée.

Tests : influence du paramètre arbitraire α

L'influence du paramètre arbitraire α (Eq. 2.125) de la condition limite d'entrée est évaluée pour un tourbillon isolé unique. Le modèle de tourbillon de Lamb-Oseen est utilisé pour définir le champ tourbillonnaire. La distribution azimutale de vitesse est définie mathématiquement en coordonnée cylindrique par

$$v_\theta(r, t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} (1 - e^{-\beta(r/r_c)^2}), \quad (2.132)$$

avec $\beta = 1.2564$ et Γ_0 la circulation à l'infini. Le champ de pression est défini par l'équation 2.124. Le nombre de Reynolds est basé sur la circulation tel que $Re_\Gamma = \Gamma_0/\nu = 10^4$ (ν est la viscosité cinématique de l'air). L'extremum de vitesse azimutale est atteint au rayon $r = r_c$, fixée à $v_{\theta_{max}} = 0.4$ et la vitesse axiale est initialisée à une valeur constante $w = 0.2$ (vitesses normalisées par la célérité du son). Le domaine de calcul est un parallépipède tel que $L_x \times L_y \times L_z = [-30r_c, 30r_c] \times [-30r_c, 30r_c] \times [0, 100r_c]$. La résolution choisie est relativement

grossière pour éviter des temps de simulation trop longs pour ce type d'analyse. Le pas d'espace dans la direction longitudinale est régulier $\Delta_z = 1$, tandis que dans les directions transverses x, y , on définit un domaine carré de longueur $L = 30r_c$ avec un pas régulier $\Delta_{x,y} = 0.2r_c$ contenant le tourbillon en son centre, entouré d'une zone de maillage étiré.

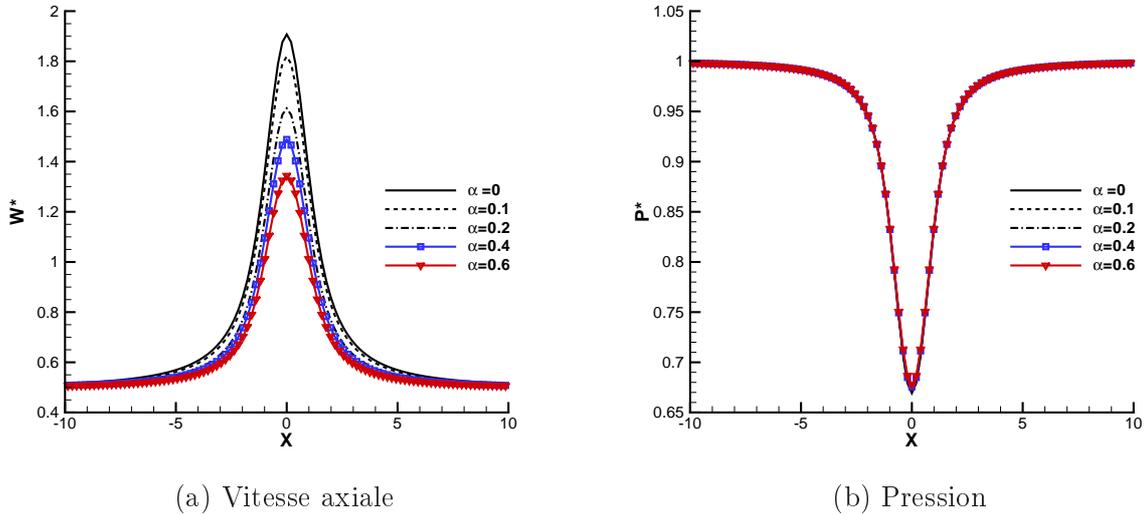


FIG. 2.5 – Coupe transversale à travers le tourbillon dans le plan d'entrée. La vitesse axiale est normalisée par l'extremum de vitesse du tourbillon $W^* = w/v_{\theta_{max}}$ et la pression par la pression ambiante p_∞ .

Pour cinq valeurs de $\alpha = 0/0.1/0.2/0.4/0.6$, les simulations ont permis de montrer, lorsque la solution numérique est convergée, que ce paramètre détermine un excès de vitesse axiale au cœur du tourbillon (Fig. 2.5-a). En effet, pour cette condition les vitesses transverses u, v , la pression p_t et la température totale T_t sont imposées et conservées au cours du temps. Plus la valeur de α est élevée, plus le déficit de pression totale sera prononcé, engendrant un déficit de vitesse axiale. Le champ de pression statique est quant à lui indépendant de la valeur α (Fig. 2.5-b), ce qui vérifie à posteriori la conservation de l'équilibre hydrodynamique dans le plan d'entrée.

De plus, le phénomène d'éclatement tourbillonnaire ou *vortex breakdown*, est observé pour les valeurs $\alpha = 0.4$ et 0.6 (Fig. 2.6) sur la longueur axiale du domaine de calcul. Il est marqué par un ou plusieurs points d'arrêts selon le jeu des valeurs des paramètres. La vitesse axiale diminue avec la distance aval et lorsque l'éclatement a lieu, elle décroît fortement atteignant éventuellement des valeurs négatives (Fig. 2.7). L'apparition de ce phénomène est souvent établie suivant la valeur du nombre de *swirl* S , défini par le rapport des vitesses axiale et azimutale, mais la prédiction à l'aide d'un unique paramètre serait selon Delery [17] une simplification exagérée de la réalité. Cependant, pour ces deux valeurs de α le nombre de *swirl* critique S_c est approximativement identique $S_c = 2v_{\theta_{max}}/w(r=0) \simeq 1.5$, où les valeurs de vitesse sont extraites à la distance aval $z = 20$ et 54 pour $\alpha = 0.4$ et 0.6 , respectivement. Ce rapport critique est très proche de ceux obtenus expérimentalement par Billant *et al.* [5]

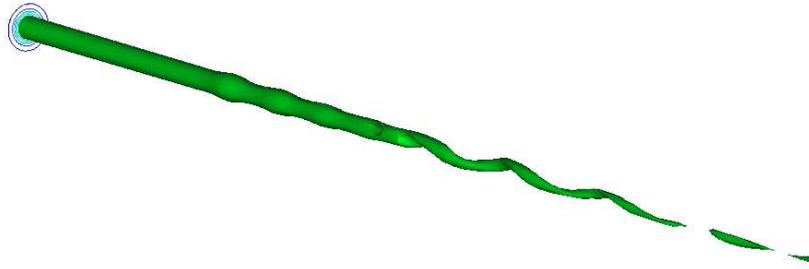


FIG. 2.6 – Illustration du phénomène d'éclatement tourbillonnaire pour le cas $\alpha = 0.6$, par une isosurface de vorticité $|\omega| = 0.44|\omega_{max}|$.

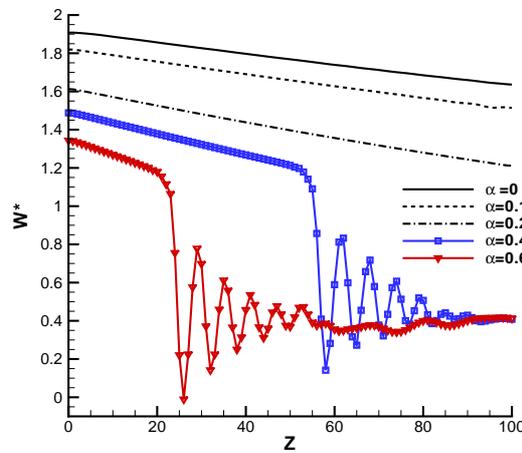


FIG. 2.7 – Distribution de la vitesse axiale dans la direction longitudinale au cœur du tourbillon, normalisée par l'extremum de vitesse du tourbillon dans le plan d'entrée $W^* = W/v_{\theta_{max}}$.

$S_{c_{exp}} = 1.4 \pm 0.18$ pour des jets tournants. Il est proposé dans la section 2.5 un test de validation en utilisant ce type d'écoulement, par reproduction de deux simulations numériques directes SND de Ruith *et al.* [81].

Pour se placer dans un contexte le plus favorable possible et éviter le phénomène d'éclatement tourbillonnaire dans les simulations spatiales de deux tourbillons co-rotatifs, il sera donc utilisé $\alpha = 0$.

2.4.2.3 Condition limite latérale

Une formulation non-réfléchissante classiquement employée pour les faces latérales consiste à considérer que l'amplitude des ondes entrantes dans le domaine est nulle. Comme aucune variable n'est imposée, il est difficile de maintenir une pression statique constante aux frontières du domaine de calcul, Rudy et Strikwerda [79] proposent d'imposer un processus de relaxation pour l'onde caractéristique acoustique entrante, et de fixer l'amplitude des autres à zéro. Afin de simplifier le propos, on se place dans le cadre de propagation d'onde dans la direction Ox du

domaine de calcul tel que $x \in [0, L]$. À la frontière $x = L$, l'amplitude des ondes caractéristique est

$$\mathcal{L}_1 = \sigma \frac{c}{L} (p - p_i) \quad \text{si } \lambda_1 < 0, \quad (2.133)$$

$$\mathcal{L}_i = 0 \quad \forall i \quad \text{tel que } \lambda_i < 0, \quad (2.134)$$

avec σ un paramètre arbitraire tel que $\sigma \in [0, 1]$, c la vitesse du son et p_i une valeur de pression de référence.

Les écoulements tourbillonnaires étudiés ici, sont de circulation globale non-nulle. Du fluide doit pouvoir entrer dans le domaine de calcul à travers les faces latérales, ainsi la valeur nulle des amplitudes des ondes entrantes sont en contradiction avec la physique du problème. Une solution consiste à éloigner les frontières latérales de manière à réduire l'importance du fluide entrant, mais cette stratégie peut conduire à des coûts de calcul prohibitifs pour des simulations tridimensionnelles. Il a donc été construit une condition limite de type entrée/sortie, basée notamment sur la condition d'entrée précédemment détaillée (Eq. 2.127, 2.130).

Une valeur moyenne de pression et de température totale est calculée sur la face ou la frontière considérée, qui est imposée par la suite. En revanche, le choix de la direction de la vitesse de l'écoulement entrant, qui détermine les deux amplitudes \mathcal{L}_3 et \mathcal{L}_4 , est plus délicat. Dans la pratique, il est supposé que cette direction suit la normale à la frontière. Une nouvelle approche est proposée ici, dont l'idée est de considérer que cet écoulement est irrotationnel. Les composantes de vorticités normales sont donc supposées nulles.

Soit la propagation d'ondes suivant la direction normale à la frontière $x = L$, cette hypothèse s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (2.135)$$

Ces deux équations permettent de calculer la dérivée normale des composantes de vitesse v, w conduisant à

$$\mathcal{L}_3 = u \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_4 = u \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (2.136)$$

Les amplitudes \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont déterminées en utilisant le système LODI

$$\frac{\partial h_{st}}{\partial t} + \frac{1}{\rho(\gamma - 1)} \left[-\mathcal{L}_2 + \frac{\gamma - 1}{2} ((1 - M_l)\mathcal{L}_1 + (1 + M_l)\mathcal{L}_5) \right] = 0, \quad (2.137)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{\rho T(\gamma - 1)} \mathcal{L}_2 = 0, \quad (2.138)$$

et ainsi

$$\mathcal{L}_2 = \sigma \rho T(\gamma - 1) \frac{c}{L} (s_{moy} - s), \quad (2.139)$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{2}{(\gamma - 1)(1 - M_l)} [\sigma \rho(\gamma - 1)(h_{moy} - h_{st}) + \mathcal{L}_2] - \frac{1 + M_l}{1 - M_l} \mathcal{L}_5, \quad (2.140)$$

où $M_l = u/c$ le nombre de Mach local et σ un paramètre de relaxation. s_{moy} et h_{moy} sont les valeurs moyennées à la frontière.

Un autre type de condition limite a été implanté et testé, qui diffère des précédentes par le calcul des amplitudes \mathcal{L}_3 et \mathcal{L}_4 . Elle repose sur l'hypothèse que les composantes de vitesses

normales au plan axial (z ici) peuvent être décomposées sous la forme d'une superposition de puits et de tourbillons :

$$\begin{cases} u_s = \sum_{n=0}^N \frac{1}{r^n} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)), \\ v_s = \sum_{n=0}^N \frac{1}{r^n} (a_n \sin(n\theta) - b_n \cos(n\theta)). \end{cases} \quad (2.141)$$

Les coefficients a_n et b_n étant déterminés à l'aide d'une méthode des moindres carrés sur un domaine limité proche des frontières, où le champ de vitesse u_s, v_s coïncide avec le champ de vitesse calculé par la résolution du système d'équations de Navier-Stokes. Ce domaine correspond à une bande de n -points à partir de la frontière. La valeur de \mathcal{L}_3 est

$$\mathcal{L}_3 = u_s \frac{\partial v_s}{\partial x}. \quad (2.142)$$

Pour calculer l'amplitude \mathcal{L}_4 , soit la composante de vorticité suivant x est supposée nulle (Eq. 2.136), soit un processus de relaxation sur la vitesse w à une valeur prédéterminée est employé.

Tests : rotation d'un système de deux tourbillons co-rotatifs

Les simulations tests consistent à simuler la rotation bidimensionnelle de deux tourbillons co-rotatifs placés initialement au centre du domaine de calcul. Ce système tourbillonnaire est censé rester à sa position initiale en l'absence de forces extérieures ou d'écoulement transverse. De plus, on se place dans un cadre où les effets visqueux sont négligeables, permettant de retarder le processus de fusion stable (voir chapitre 3). Ainsi le nombre de Reynolds, basé sur la circulation Γ est $Re_\Gamma = 10^6$, et les tourbillons tournent l'un autour de l'autre par induction mutuelle. La période de rotation est $T = 2\pi^2 b_0^2 / \Gamma$ et dépend de la circulation et de la distance de séparation entre les tourbillons $b_0 = 10r_c$, où r_c est le rayon caractéristique du tourbillon. Le domaine de calcul est un carré de longueur $L = 31r_c$. L'extremum de vitesse azimutale des tourbillons est $v_{\theta_{max}} = 0.4$, ainsi la vitesse induite par un tourbillon positionné en $(X_1, Y_1) = (-5r_c, 0)$    un point frontière $(d, 0) = (-15.5r_c, 0)$ est $v \sim 0.13v_{\theta_{max}}$. Cette configuration représente donc un cas défavorable, qui pourrait être minimisé en considérant un domaine beaucoup plus grand ou une vitesse des tourbillons plus faible, ou même les deux. L'objectif de ces tests est non seulement une validation des nouvelles conditions limites d'entrée/sortie exposées précédemment, mais aussi d'indiquer le meilleur choix pour la simulation spatiale de deux tourbillons co-rotatifs.

L'influence des conditions limites latérales est analys  e, d'une part en terme de maintien du système à sa position initiale et d'autre part en terme de respect de la période de rotation du système. Cinq types de conditions limites ont été testées : symétriques, périodiques, et celles basées sur l'approche classique des caractéristiques non-réfléchissantes (Eq. 2.133, 2.134), entrée/sortie avec rotationnel nul (Eq. 2.139, 2.140) et entrée/sortie avec expansion en série (Eq. 2.142). On applique la même condition limite à chaque frontière du domaine. La notation du type de conditions limites est résumée dans le tableau 2.1.

La première analyse qualitative des lignes de courant met en évidence l'effet des conditions limites (Fig. 2.8). Il en résulte que les conditions de symétries (*cl1*) induisent un effet de

Notation	<i>cl1</i>	<i>cl2</i>	<i>cl3</i>	<i>cl4</i>	<i>cl5</i>
Condition	symétrie	périodique	non-réfléchissante	rotationnel nul	expansion en série

TAB. 2.1 – Notation des conditions limites transverses testées.

confinement car les vitesses normales aux frontières sont imposées à zéro. Ce type de condition n'est pas recommandé pour la simulation spatiale d'un système de tourbillon co-rotatif en raison de son caractère très réfléchissant, même si le système conserve sa position au centre du domaine de calcul. De même, si les frontières sont traitées en utilisant une hypothèse de périodicité (*cl2*), il y a un effet de confinement où la dynamique tourbillonnaire est concentrée dans un cercle de rayon $R = L/2$. L'emploi de ces deux types de conditions n'a pas de justification physique pour simuler des domaines ouverts.

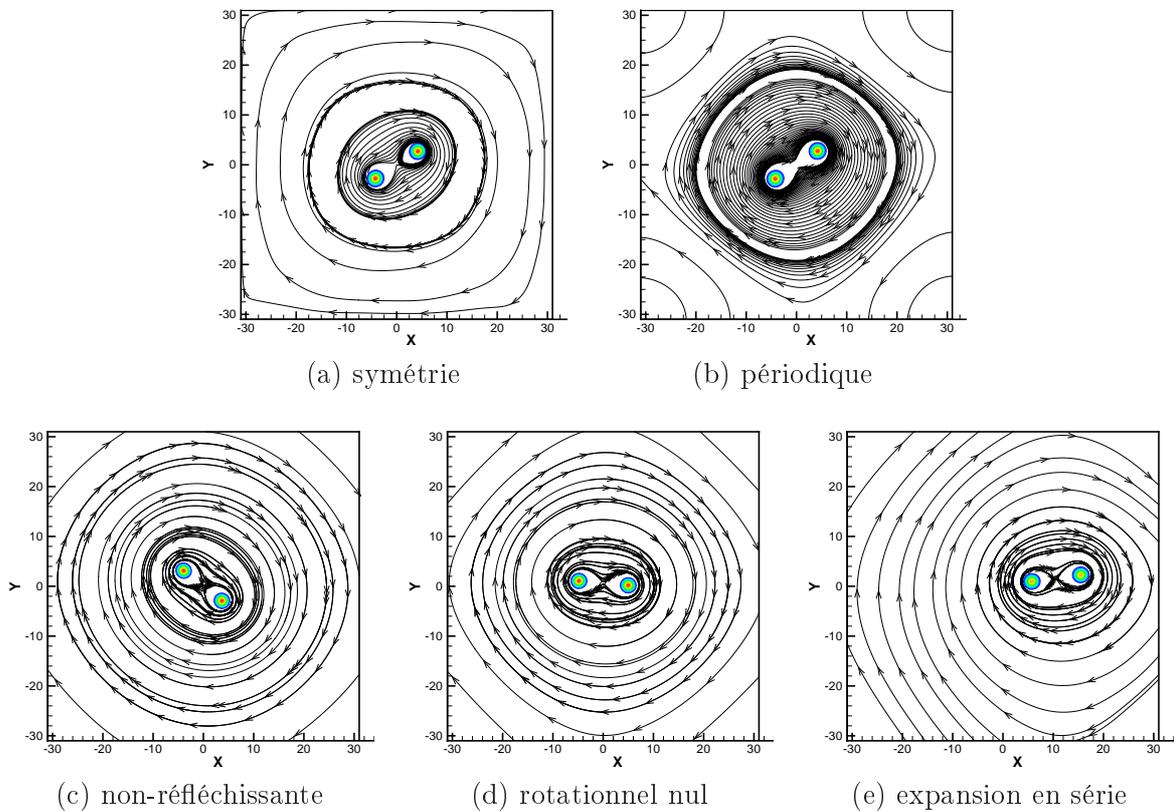


FIG. 2.8 – Effet des conditions limites latérales, illustré par les lignes de courant à l'instant normalisé $t^* = t/T = 5$, où $T = 2\pi^2 b_0^2 / \Gamma$ est la période de rotation du système. Les tourbillons sont repérés par les isocontours de vorticité.

Pour les conditions limites basées sur l'approche des caractéristiques NSCBC, les lignes de courant sont relativement circulaires, mais il y a un déplacement latéral du système dans le cas de la condition d'entrée/sortie avec expansion en série (*cl5*). Les tourbillons étaient initialement alignés sur l'axe horizontal et comme la dynamique est uniquement une rotation

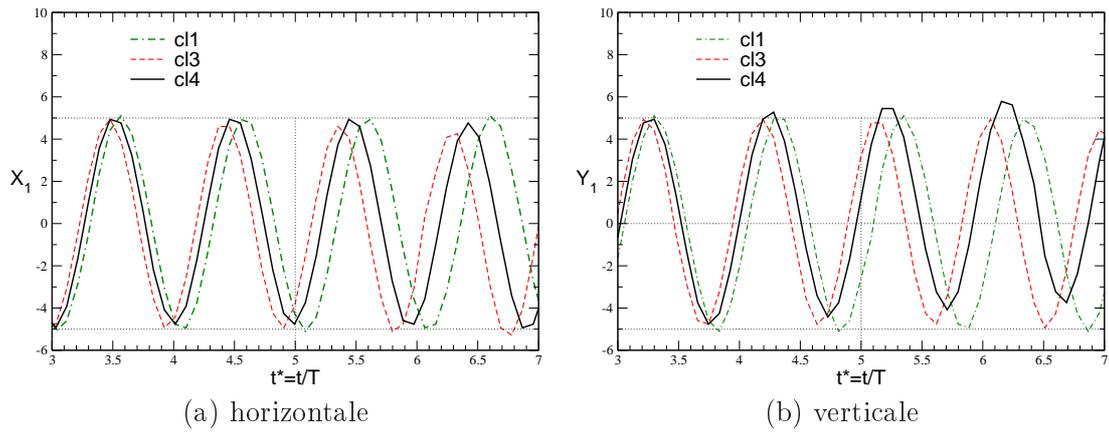


FIG. 2.9 – Coordonnées d'un tourbillon au cours du temps, normalisé par la période de rotation, pour trois types de conditions limites transverses testées. Notation *cl1* : symétrique, *cl3* : non-réfléchissante, et *cl4* : entrée/sortie avec rotationnel nul.

du système, cette position devrait être respectée à chaque période. Après cinq périodes, suivant les conditions limites il y a un décalage plus ou moins important, les conditions d'entrée/sortie avec rotationnel nul (*cl4*) et d'expansion en série (*cl5*) semblent être les plus adaptées vis-à-vis de ce critère.

L'analyse de la position horizontale X_1 et verticale Y_1 d'un tourbillon entre trois et sept périodes de rotation du système (Fig. 2.9), pour les conditions *cl1*, *cl3* et *cl4*, montre que la position horizontale est légèrement avancée dans le cas *cl1* et retardée dans le cas *cl3*, tandis qu'elle est bien respectée dans le cas *cl4*. En revanche, il apparaît que la position verticale dévie pour ce type de condition, contrairement aux deux autres.

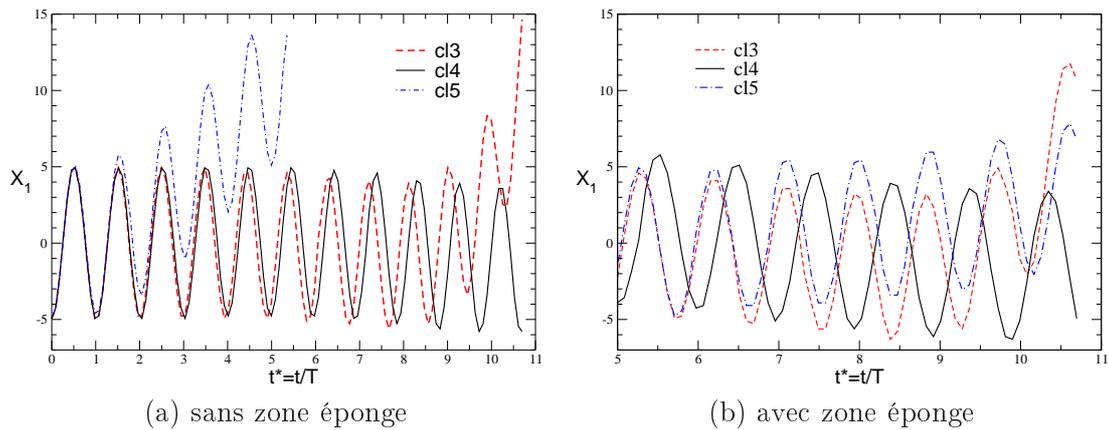


FIG. 2.10 – Position horizontale d'un tourbillon au cours du temps normalisé par la période de rotation T , pour trois types de conditions limites transverses testées (a) et (b) couplées avec une zone éponge proche de frontières. Notation *cl3* : non-réfléchissante, *cl4* : entrée/sortie avec rotationnel nul, et *cl5* : entrée/sortie avec expansion en série.

En comparant la position horizontale X_1 pour les trois conditions limites $cl3$, $cl4$ et $cl5$ sur un temps long de onze périodes de rotation du système (Fig. 2.10-a), on remarque que le système peut dévier fortement et même sortir du domaine de calcul pour les deux cas $cl3$ et $cl5$. Cette dérive est due au mauvais traitement de l'information qui provient de l'extérieur du domaine. Il est possible de la minimiser par l'utilisation d'artifice numérique appliquée dans une zone proche des frontières, tel qu'un filtre ou un ajout de viscosité numérique très important, appelée zone éponge. De nombreuses possibilités existent et sont notamment présentées et discutées dans la section 5 de la revue de Colonius [12] et ne font pas l'objet de recherche dans cette thèse. Ici, un test avec une zone éponge où est appliquée un filtre du second ordre sur les cinq points proches des frontières, montre qu'il n'est pas assez suffisant pour le type de condition $cl3$ mais permet de retarder la dérive du système à des temps très longs pour les conditions de type entrée/sortie avec expansion en série $cl5$ (Fig. 2.10-b).

2.4.2.4 Condition limite de sortie

Poinsot et Lele [76] proposent une condition de sortie parfaitement non-réfléchissante pour les ondes qui se propagent dans la direction normale à la frontière. Ce type de condition est seulement monodimensionnelle. Giles [30], [31] introduit une théorie générale pour obtenir des conditions non-réfléchissantes pour les équations d'Euler. Ses travaux traitent également de différentes formulations pour les cas d'écoulements stationnaires ou instationnaires. La suite du paragraphe présente succinctement la formulation instationnaire de cette théorie.

L'approche de Giles considère les équations d'Euler linéarisées autour d'un vecteur état moyen ou de référence $\bar{\mathbf{V}} = (\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$ exprimé en coordonnées cartésiennes. Pour le vecteur de perturbation \mathbf{V} , ces équations s'écrivent

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + C \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = 0, \quad (2.143)$$

où les matrices Jacobiennes A, B, C basées sur le vecteur d'état de référence sont constantes. Pour identifier les ondes entrantes et sortantes, le vecteur d'état de perturbation est décomposé sous la forme d'une série de Fourier :

$$V(x, y, z, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} v_l e^{i(-\omega_l t + k_l x + l_l y + m_l z)}. \quad (2.144)$$

Le mode particulier $V_l = v_l e^{i(-\omega_l t + k_l x + l_l y + m_l z)}$, introduit dans l'équation 2.143 conduit à l'équation de compatibilité, en omettant l'indice l pour plus de clarté des notations,

$$C_z \mathbf{q} = m \mathbf{q} \quad (2.145)$$

où m est une valeur propre, \mathbf{q} le vecteur propre, avec

$$C_z = -\omega C^{-1} + k C^{-1} A + l C^{-1} B \quad (2.146)$$

La relation de dispersion est un polynôme de degré cinq qui relie les nombre d'ondes k, l, m à la fréquence ω donnée par

$$\det \left| -I + \frac{k}{\omega} A + \frac{l}{\omega} B + \frac{m}{\omega} C \right| = 0. \quad (2.147)$$

Pour une condition limite non-réfléchissante dans la direction z , le mode V_l est décomposé sous la forme d'une somme de ses fonctions propres

$$V_l = \left(\sum_{n=1}^5 a_n q_n e^{im_n z} \right) e^{i(-\omega t + kx + ly)}. \quad (2.148)$$

Les réflexions d'ondes sont évitées théoriquement si $a_n = 0$ pour chaque n . Cette condition peut être exprimée en introduisant le vecteur propre de gauche q_n^g de la matrice C_z par

$$q_n^g V_l = 0 \quad \text{où } n \text{ est l'index de l'onde entrante.} \quad (2.149)$$

La relation de dispersion indique que m_n/ω , q_n^g dépendent de $\lambda = k/\omega$ et $\mu = l/\omega$. En supposant λ et μ de faibles valeurs, le vecteur propre \mathbf{q}_n^g est exprimé sous la forme d'une série de Taylor à l'ordre deux en fonction de ces deux termes

$$\mathbf{q}_n^g(\lambda, \mu) \sim \mathbf{q}_n^g(0, 0) + \lambda \frac{\partial \mathbf{q}_n^g}{\partial \lambda}(0, 0) + \mu \frac{\partial \mathbf{q}_n^g}{\partial \mu}(0, 0) + O(\lambda^2, \mu^2, \mu\lambda). \quad (2.150)$$

Ce développement limité permet d'obtenir une condition limite locale et une équation d'évolution

$$\mathbf{q}_n^g(0, 0) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{q}_n^g}{\partial \lambda}(0, 0) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{q}_n^g}{\partial \mu}(0, 0) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}. \quad (2.151)$$

Ceci correspond à une équation locale de la condition limite et ne constitue qu'une approximation de la nature non-réfléchissante. En effet, cette condition peut générer des réflexions d'ondes sortantes pour lesquelles k et l seraient grands.

Après quelques développements algébriques non détaillés ici, l'équation (2.151) peut être écrite en fonction des variables caractéristiques \mathcal{W} , si l'onde acoustique associée à $w - c$ entre dans le domaine de calcul

$$\frac{\partial \mathcal{W}_5}{\partial t} + (0, w, 0, 0, u) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} + (0, 0, w, 0, v) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} = 0, \quad (2.152)$$

et pour les ondes entrantes associées à $w - c$ et w

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial t} + (u, 0, 0, 0, 0) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} + (v, 0, 0, 0, 0) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial t} + \left(0, u, 0, \frac{1}{2}(w+c), \frac{1}{2}(c-w) \right) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} + (0, v, 0, 0, 0) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{W}_3}{\partial t} + (0, 0, u, 0, 0) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} + \left(0, 0, v, \frac{1}{2}(w+c), \frac{1}{2}(c-w) \right) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{W}_5}{\partial t} + \left(0, \frac{1}{2}(w+c), 0, 0, u \right) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} + \left(0, 0, \frac{1}{2}(w+c), 0, v \right) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.153)$$

Modifications

L'approche de Giles est basée sur la connaissance d'un vecteur d'état \mathbf{V} de référence, connu soit par une simulation stationnaire préliminaire (état moyen), soit par une formulation analytique. Comme l'objectif est d'utiliser ce type de condition limite pour la dynamique spatiale d'écoulement tourbillonnaire, le champ est inconnu à la frontière de sortie, cet état de référence est alors calculé par une moyenne glissante. Cette variation temporelle permet de réduire

l'intensité des ondes sortantes et de limiter les nombres d'ondes des perturbations, par une adaptation continue de l'état de référence vers l'écoulement réel.

Cependant, cette condition n'assure pas une pression statique moyenne constante, sa valeur peut changée en raison de perturbations qui traverseraient la frontière. Un processus de relaxation de la pression (Eq. 2.133) peut être employé, mais uniquement en dehors de la région tourbillonnaire. Les simulations spatiales présentées dans cette thèse concernent le processus de fusion de deux tourbillons co-rotatifs, il est donc attendu une structure tourbillonnaire unique plus ou moins perturbée dans le plan de sortie. Cela se traduit par un paramètre de relaxation σ qui suit une loi du type

$$\sigma = \sigma^* \left(1 - \min \left[1, \max \left(0, \frac{\omega - \omega_l}{\omega_l} \right) \right] \right) \quad \text{avec} \quad \omega_l = \varepsilon \omega_{max}, \quad (2.154)$$

où ω_{max} est la maximum de vorticité dans le plan de sortie, σ^* et ε sont des paramètres arbitraires avec $\sigma^* \in [0.0, 1.0]$ et $\varepsilon \approx 0.001$. Le processus de relaxation est ainsi inactif dans les régions où la pression statique est inférieure à 1% par rapport à la pression de référence.

Bruneau [7] montre que l'intensité d'une onde caractéristique peut être décomposée en deux parties, une associée à l'évolution de l'état de référence et l'autre aux perturbations. Pour l'état de référence ou moyen, il est utilisé des conditions de type LODI (Eq. 2.112), les amplitudes \mathcal{L}_i sont calculées en utilisant un schéma d'ordre deux en espace (la moyenne glissante est donc aussi effectuée pour les deux points intérieurs). Tandis que pour la partie relative aux perturbations, des conditions non-réfléchissantes de Giles sont appliquées (Eq. 2.152 ou 2.154). Cette méthode permet de déterminer l'intensité des ondes sortantes, et pour les ondes entrantes un comportement physique est spécifié, qui consiste au maintien de la pression statique à la valeur de référence (Eq. 2.133, 2.154).

Pour traiter les perturbations qui impliquent une vitesse normale négative, la même stratégie développée pour les conditions latérales (basées sur l'entropie et l'enthalpie totale, section 2.4.2.3) est utilisée mais uniquement pour les ondes caractéristiques associées à l'état de référence.

Tests : convection d'un tourbillon à travers une frontière

Pour évaluer le caractère réfléchissant d'une condition limite, une simulation test consiste à convecter un tourbillon de faible intensité vis-à-vis de l'écoulement porteur à travers la frontière. Deux types de conditions limites basées sur l'approche du traitement des ondes caractéristiques ont été testées. La première est celle de Poinso et Lele [76] et la seconde présentée dans la section précédente de type Giles.

L'écoulement test et le domaine de calcul sont représentés sur la figure 2.11. Le domaine est un carré de longueur $2L$ où L est la longueur de référence, discrétisé par un maillage régulier de pas d'espace $\Delta = 0.02$. La vitesse du son c est utilisée comme vitesse de référence. Le tourbillon est convecté à la vitesse uniforme $U = u/c = 0.2$. Le champ de vitesse est initialisé à l'aide de la fonction de courant d'un écoulement tourbillonnaire incompressible non-visqueux

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (2.155)$$

avec

$$\psi(x, y) = \Gamma \exp\left(-\frac{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}{2R_c^2}\right), \quad (2.156)$$

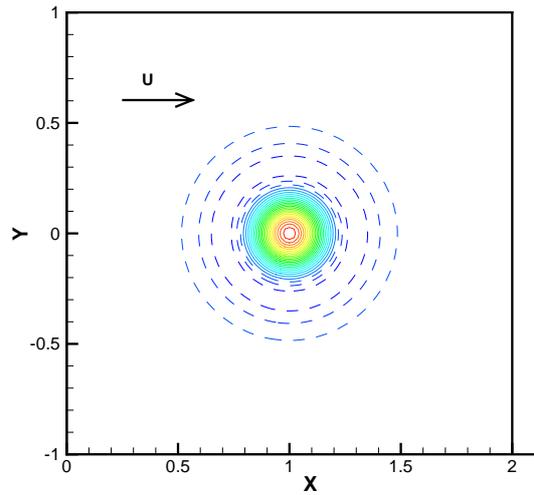


FIG. 2.11 – Convection d’un tourbillon dans la direction Ox à la vitesse U . Illustration des isocontours de vorticité positive en trait plein et négative en pointillé.

où Γ est l’intensité du tourbillon (ici $\Gamma = 0.01$) et (x_c, y_c) la position de son centre. Le rayon caractéristique du tourbillon est $R_c = 0.15L$. Le champ de pression est calculé par

$$p(x, y) - p_\infty = -\frac{\Gamma^2}{2R_c^2\rho} \exp\left(-\frac{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}{R_c^2}\right), \quad (2.157)$$

où p_∞ est la pression infinie amont. Le nombre de Reynolds est $Re = R_c L / \nu = 10000$. Ce type de tourbillon est utilisé pour tester les conditions limites en raison de sa circulation nulle. Le cœur tourbillonnaire de vorticité positive est entouré par une région de vorticité négative. Les conditions limites sont identiques pour les deux simulations tests, exceptée celle à la frontière de sortie $x = 2L$. Elles sont toutes basées sur l’approche NSCBC. La condition limite en $x = 0$ correspond à la vitesse imposée U , tandis que sur les frontières supérieure $y = L$ et inférieure $y = -L$, une condition de mur glissant est utilisée. Pour la condition de Poinot et Lele en sortie, le coefficient de relaxation permettant de maintenir la pression à une valeur de référence, est choisi volontairement nul pour avoir une solution indépendante de ce paramètre.

Le tourbillon traverse la frontière de sortie dans l’intervalle de temps $t^* = t/(L/c) \in [4.25, 5.75]$. Le pic de vorticité positive diminue pour atteindre une valeur nulle lorsque le tourbillon est complètement sorti du domaine (Fig. 2.12, a)). Les deux conditions limites testées conduisent à des résultats identiques pendant la phase de convection et lors de la traversée de la frontière. En revanche, la condition limite de Poinot et Lele induit une réflexion d’ondes qui se traduit par une augmentation de la pression dans le domaine de calcul (Fig. 2.12-b). Les isocontours de pression représentés sur la figure 2.13 illustrent bien le problème de la réflexion d’ondes acoustiques, et l’avantage de la condition de Giles [31] vis-à-vis de celle de Poinot et Lele [76] pour le type de test effectué ici.

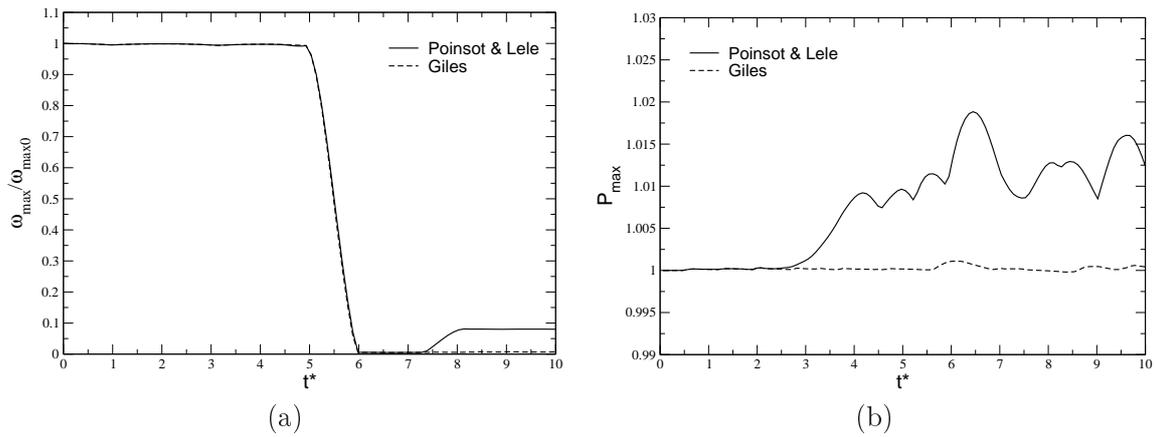


FIG. 2.12 –  volution temporelle du maximum de vorticité (a) et de pression (b) dans le domaine de calcul. Le temps est normalisé tel que $t^* = t/(L/c)$, où L est la longueur de référence et c la vitesse du son.

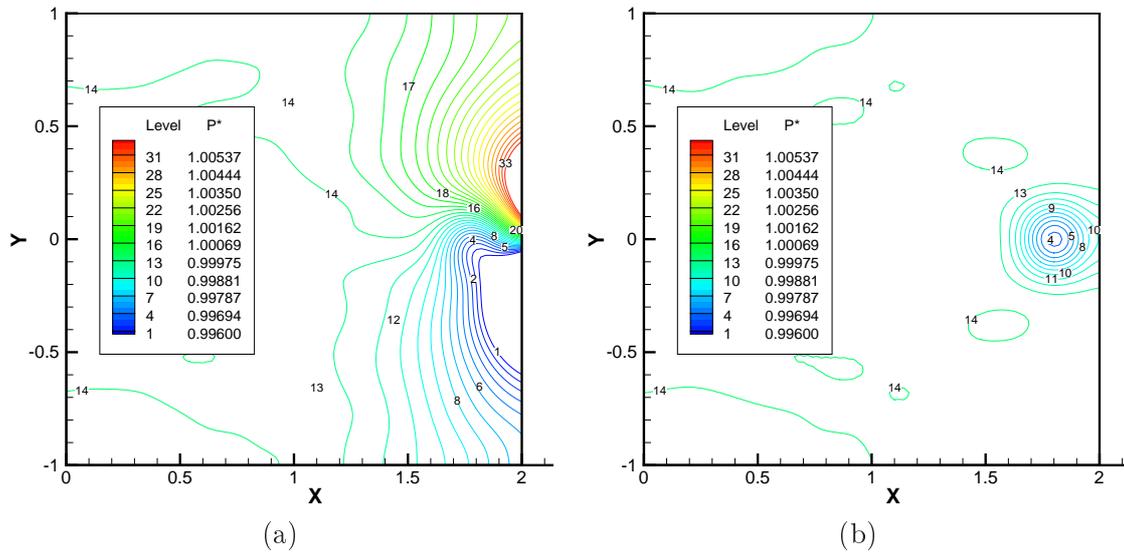


FIG. 2.13 – Isocontours de pression normalisée par la pression infinie amont à l'instant $t^* = 3.989$. Condition limite de sortie non-r f chissante en $x = 2L$: de Poinso et Lele (a) et de type Giles (b).

2.5 Cas test de validation de simulation spatiale

La validation d'un code numérique est réalisée le plus souvent par comparaison à une expérience lorsqu'elle existe, sinon il faut recourir soit à la théorie, soit à d'autres simulations. Nous avons choisi ici de suivre cette dernière stratégie. En effet, le code numérique NTMIX a d j été validé pour des simulations de dynamique tourbillonnaire suivant l'approche temporelle en comparaison avec des résultats théoriques [47,66], mais les développements numériques présentés précédemment concernent la simulation spatiale de la fusion de deux tourbillons co-rotatifs

via le développement d'une instabilité de type elliptique à courte longueur d'onde avec écoulement axial. Il est donc proposé ici une comparaison avec deux simulations numériques directes (SND) spatiales de Ruith *et al.* [81] de l'éclatement tourbillonnaire (ou *vortex breakdown*). Ce phénomène physique a fait l'objet de nombreuses études [1, 5, 17, 50, 81] de par la diversité des domaines dans lequel il peut avoir lieu (aile delta à forte incidence, chambre de combustion, tornade...).

Les travaux de Ruith *et al.* sont une extension de ceux initiés par Grabowski et Berger [32] qui analysent les effets instationnaires et tridimensionnels de l'éclatement tourbillonnaire. Pour cela, ils ont utilisé un code numérique résolvant les équations de Navier-Stokes incompressibles. Leur outil est basé sur un schéma de différences finies d'ordre deux pour des maillages cylindriques [93] et une intégration temporelle par une méthode à pas fractionné [80].

Les configurations d'écoulements sont définies par une famille de profils de vitesse à deux paramètres. Ces profils, appelés « profil de Grabowski », sont imposés comme conditions d'entrée. Ils présentent une vitesse radiale nulle, tandis que les composantes axiale et azimutale sont définies par morceaux entre une région interne et externe, délimitée par un rayon caractéristique R . La vitesse axiale caractérise le type d'écoulement au cœur, jet ou sillage, et atteint une vitesse externe constante en dehors ($r > R$). En utilisant l'échelle de longueur R comme longueur de référence et la vitesse externe U comme vitesse de référence, cette famille de profils s'écrit

$$v_\theta(0 \leq r \leq 1) = Sr(2 - r^2), \quad (2.158)$$

$$v_\theta(1 \leq r) = \frac{S}{r}, \quad (2.159)$$

$$v_r(r) = 0, \quad (2.160)$$

$$v_z(0 \leq r \leq 1) = \alpha + (1 - \alpha)r^2(6 - 8r + 3r^2), \quad (2.161)$$

$$v_z(1 \leq r) = 1, \quad (2.162)$$

où $S = v_\theta(R)/U$ est le rapport entre la vitesse azimutale en $r = R$ et la vitesse axiale d'écoulement externe. Le second paramètre $\alpha = v_z(0)/U$ est le rapport des vitesses axiales au cœur et externe. Deux configurations d'écoulement ($S = 0.8944, \alpha = 1$) et ($S = 1.095, \alpha = 1$) où l'éclatement tourbillonnaire est présent, ont été prises en compte. La première correspond à un éclatement tourbillonnaire axisymétrique stationnaire et la seconde correspond au cas instationnaire. Les profils de vitesse azimutale de ces deux configurations sont représentés sur la figure 2.14, ainsi que les profils de vorticité. Le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse axiale externe et le rayon caractéristique, tel que $Re = UR/\nu = 200$, pour les deux cas.

La condition initiale est un tube tourbillon placé au centre du domaine de calcul. Ce dernier est un cube de côté $L = 30R$. Le pas d'espace est régulier dans la direction axiale $\Delta_z = 0.1R$. Dans les plans transverses, le maillage est régulier uniquement dans la zone d'intérêt de l'écoulement avec un pas d'espace $\Delta = 0.1R$, *c.- -d.* dans le carré de côté $d = 10R$. Le maillage est ensuite étiré jusqu'aux frontières pour minimiser le nombre de points. Ce type de maillage transverse correspond à celui envisagé pour les simulations spatiales de la fusion de deux tourbillons corotatifs.

Les conditions limites employées aux frontières transverses sont celles présentées dans la section 2.4.2.3 d'entrée/sortie avec rotationnel nul (*cl4*). La condition de sortie est basée sur l'approche de Giles (section 2.4.2.4). Dans le plan d'entrée, le champ de vitesse $(u, v, w)^T$ et la densité

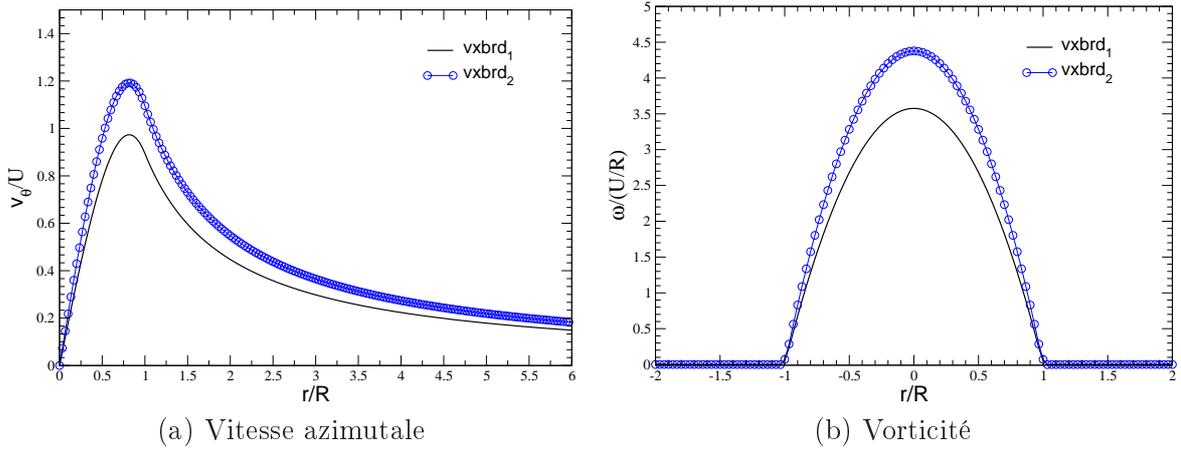


FIG. 2.14 – Profils des tourbillons de « Grabowski » pour les deux configurations simulées : $vxbdr_1 \mapsto (S = 0.8944, \alpha = 1)$ et $vxbdr_2 \mapsto (S = 1.095, \alpha = 1)$.

sont imposés à l'aide de la méthode des caractéristiques (section 2.4). Aucune perturbation n'est ajoutée à l'écoulement de base.

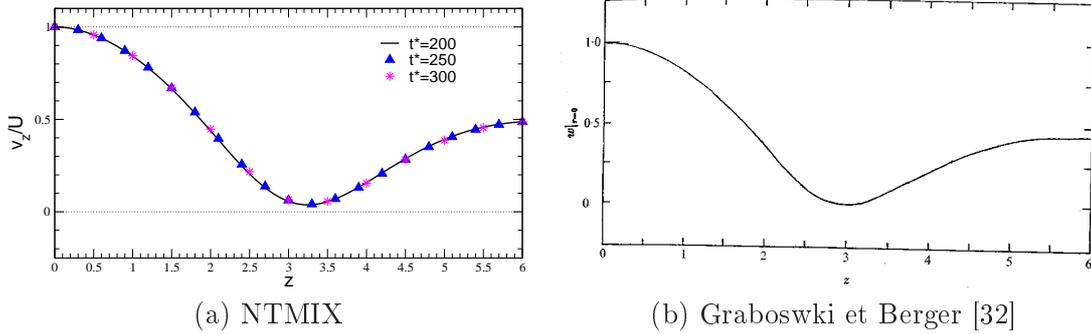


FIG. 2.15 – Éclatement tourbillonnaire axisymétrique stationnaire ($S = 0.8944, \alpha = 1$) et $Re = 200$. Vitesse axiale dans la direction longitudinale au cœur du tourbillon à des temps différents $t^* = t/(R/U)$ et résultat de Grabowski et Berger [32].

La validation de l'éclatement tourbillonnaire axisymétrique stationnaire est représentée sur la figure 2.15 par comparaison avec le résultat obtenu par Grabowski et Berger [32] de la vitesse axiale au cœur en fonction de la direction longitudinale. Son comportement est identique entre les deux simulations. Pour cette configuration d'écoulement, le phénomène physique est caractérisé par la présence d'un fort ralentissement de l'écoulement sur l'axe du tourbillon. De plus, la propriété stationnaire du phénomène pour cette configuration d'écoulement est bien obtenue par la simulation avec NTMIX, les profils étant exactement identiques à trois instants différents.

Ruith *et al.* [81] ont montré que pour le second cas ($S = 1.095, \alpha = 1$), l'éclatement tour-

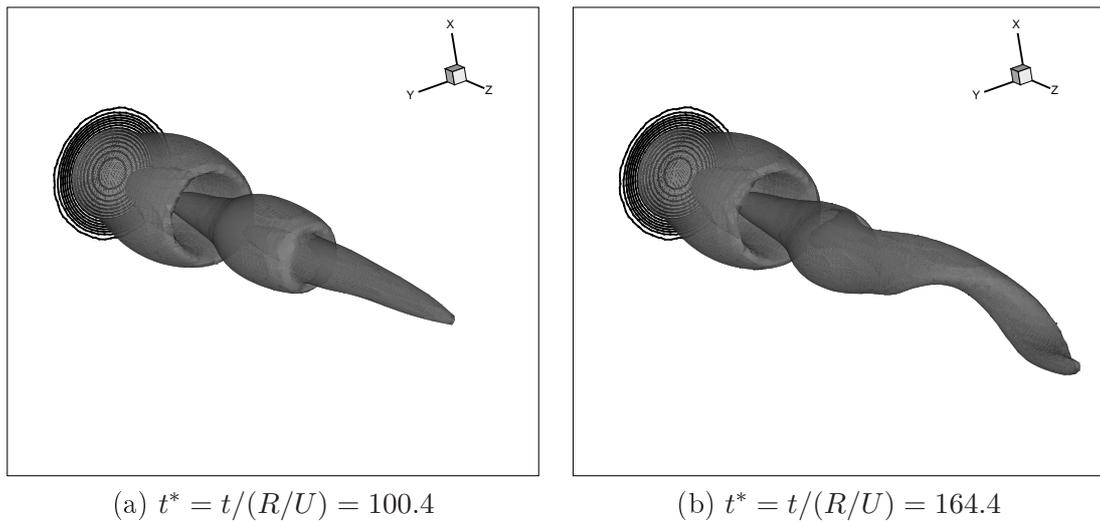


FIG. 2.16 – Éclatement tourbillonnaire ($S = 1.095$, $\alpha = 1$) et $Re = 200$. Visualisation d'une isosurface de vorticité $|\omega| = 0.4|\omega_{max}|$. (a) État quasi-stationnaire et (b) instationnaire.

billonnaire atteignait un état quasi-stationnaire, avant de devenir instable et instationnaire. Ces deux états sont illustrés sur la figure 2.16. L'instationnarité se manifeste par une structure en hélice en aval de la zone d'éclatement. Ruith *et al.* ont extrait les lignes de courant et la vitesse axiale au cœur du tourbillon lorsque l'éclatement est quasi-stationnaire. La procédure pour déterminer cet état est l'évaluation du maximum des différences de vitesse entre un nombre donné d'itérations. Cette différence est calculée entre n et $n + 100$ itérations comme Ruith *et al.*. La figure 2.17 montre que ce maximum diminue au cours du calcul pour atteindre une courte période $85 < t^* < 100$ sur laquelle il est presque constant pour la configuration $S = 1.095$, définissant l'état quasi-stationnaire. De plus, on remarque que le comportement stationnaire pour la première configuration $S = 0.8944$ est obtenu à partir de $t^* = 160$.

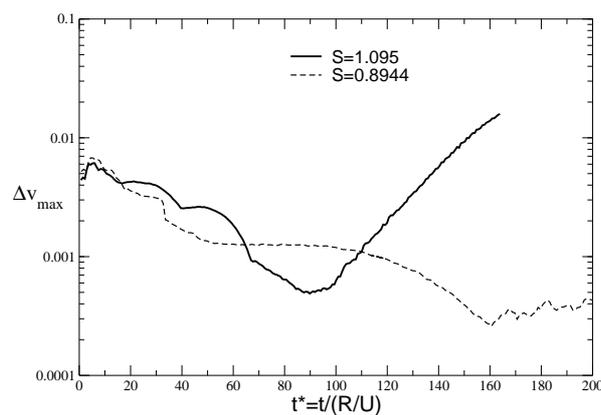


FIG. 2.17 – Maximum de la différence des vitesses évaluée toute les cents itérations pour les deux configurations d'éclatement tourbillonnaire.

Durant la courte période quasi-stationnaire, un accord très convenable est obtenu (Fig. 2.19) pour la position et la forme de la zone de recirculation. La principale différence provient de l'extremum de vitesse axiale à la distance $z = 3$, où un écart de 20% est observé, qui peut être expliqué par les différences des codes. En effet, leur outil résout les équations incompressibles discrètes sur des maillages cylindriques, plus adaptés à ce type d'écoulement, tandis que le code NTMIX est cartésien pour des équations compressibles. De plus, leur schéma de discrétisation spatiale d'ordre deux est plus dissipatif que celui utilisé ici (schéma compact du sixième ordre).

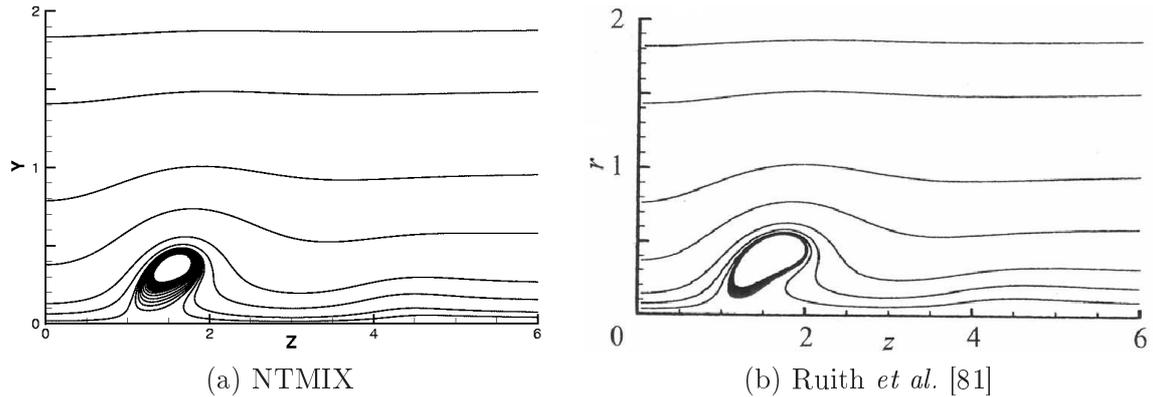


FIG. 2.18 – Lignes de courant dans le plan médian pour l'état quasi-stationnaire. Configuration ($S = 1.095$, $\alpha = 1$).

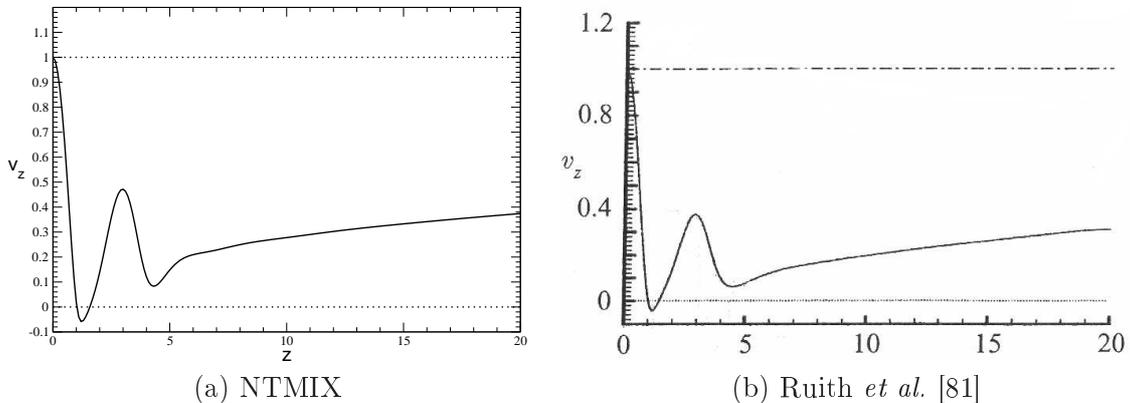


FIG. 2.19 – Vitesse axiale le long du tourbillon pour l'état quasi-stationnaire. Configuration ($S = 1.095$, $\alpha = 1$). Les symboles \circ représentent les valeurs extraites de la simulation de Ruith *et al.* [81].

Étant donné que les différents développements numériques au niveau des conditions limites ont été testés et validés, ainsi que le bon accord obtenu ici d'une simulation SND d'écoulement tourbillonnaire complexe (éclatement tourbillonnaire), nous pouvons être confiants sur la capacité du code à réaliser correctement des simulations spatiales de tourbillons.

Propagation et collision de fronts d'onde axisymétriques le long d'un tourbillon

3.1 Introduction

L'étude des ondes et de leur propagation dans un fluide est un sujet de recherche très vaste, en raison de la diversité des domaines dans lesquels elles sont présentes (hydraulique, acoustique...) mais aussi des multiples conséquences qu'elles peuvent engendrer (chocs, instabilités, transition à la turbulence, éclatement tourbillonnaire...). Dans le contexte des tourbillons de sillage d'avion, les visualisations par fumée au cours d'essais en vol dans les années soixante-dix [11, 92] ont montré la présence de phénomènes de propagation et de collision d'ondes menant à la perte visuelle des tourbillons. Les causes de tels phénomènes sont difficilement identifiables et donc mal connues. Toutefois, la reconnection des tourbillons lors de l'instabilité de Crow [15] est connue pour créer des ondes se propageant le long des tourbillons [67]. De plus, dans les expériences, les limites du domaine dans la direction axiale induisent parfois la génération d'ondes qui voyagent le long des tourbillons et rendent les mesures inexploitable (phénomènes appelés *end-effects*). De nombreuses études expérimentales [35, 56, 84] et théoriques [51, 52] ont été menées à ce sujet, permettant de démontrer l'existence et la diversité de tels phénomènes.

Moet *et al.* [67] proposent une explication au phénomène d'explosion tourbillonnaire, ou *vortex bursting*, mis en évidence par Tombach [92], par la collision de deux fronts d'onde se propageant l'un vers l'autre. Dans sa revue sur les tourbillons de sillage d'avion, Spalart [87] propose notamment un schéma descriptif (Fig. 3.1). Il montre que la contraction locale du tube tourbillonnaire engendre des propagations de fronts qui se rencontrent et forment ainsi un *pancake*, suggérant un phénomène critique et spontané. D'un point de vue théorique, l'étude de Arendt *et al.* [2] montre que des petites perturbations initiales quelconques peuvent être par la suite caractérisées par des ondes de Kelvin, notamment pour un changement local de la taille du tourbillon. Fabre *et al.* [24] ont analysé le comportement de ces ondes pour un tourbillon modèle de Lamb-Oseen représentatif des tourbillons de sillage. La configuration simplifiée considérée ici correspond à ce type d'ondes axisymétriques (modes $m = 0$). En accord avec l'analyse de stabilité linéaire, Moet *et al.* [67] ont montré pour des configurations à haut nombre de Reynolds que ce type de front d'onde se propageaient à une vitesse quasi-constante de l'ordre de la vitesse azimutale du tourbillon. Dans le contexte des tourbillons de sillage, celle-ci est inférieure à la vitesse de l'avion, l'énergie des perturbations est donc convectée en aval de

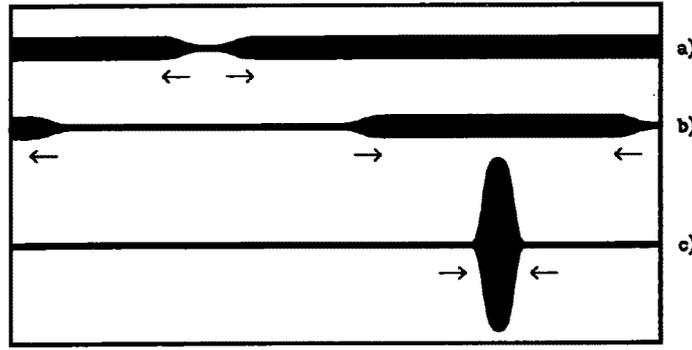


FIG. 3.1 – Schéma de Spalart [87] décrivant le phénomène d'explosion tourbillonnaire ou *vortex bursting*. La vitesse azimutale du tourbillon dans la région de faible rayon est présumée supérieure à celle de la région de plus large rayon (conservation de la circulation).

l'avion. Cette propriété empêche la possibilité de perturbation voyageant en amont à des vitesses supérieures à celle de l'écoulement, une condition nécessaire à l'apparition du phénomène d'éclatement tourbillonnaire (*vortex breakdown* [17]). Spalart argumente également que l'identification directe du phénomène d'éclatement tourbillonnaire à celui d'une explosion doit être évitée, bien qu'il existe des similitudes entre ces événements catastrophiques affectant le cœur des tourbillons.

Les objectifs de cette étude sont d'analyser les phénomènes de propagation de front d'onde axisymétrique le long d'un tourbillon dans un contexte d'écoulements à faible nombre de Reynolds (extension des résultats à haut nombre de Reynolds de Moet *et al.* [67]). Un intérêt particulier est porté sur l'influence des différents paramètres caractéristiques sur la vitesse de propagation du front (section 3.2). Pour cela, des simulations numériques directes ont été réalisées avec le code NTMIX (section 2.3). Le phénomène d'explosion tourbillonnaire par la collision de deux fronts d'onde est ensuite analysé en détails (section 3.3) dans le but notamment d'établir un critère d'apparition objectif.

3.2 Propagation d'un front d'onde le long d'un tourbillon

3.2.1 Modélisation et génération d'un front

La condition initiale est constituée d'un tube tourbillonnaire avec une variation locale de rayon du cœur. La simulation numérique est initialisée à l'aide d'une distribution de vitesse et de pression basée sur le modèle de tourbillon de Lamb-Oseen. Ce modèle est caractérisé par une rotation solide au cœur du tourbillon et par une circulation non-nulle à l'infini. La distribution azimutale de vitesse est définie en coordonnées cylindriques par

$$v_{\theta}(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}(1 - e^{-(r/a)^2}),$$

$$= \frac{v_{\theta_{max}} \alpha r_c}{r}(1 - e^{-(r/a)^2}), \quad (3.1)$$

$$(3.2)$$

où a est le rayon de dispersion, $\alpha = \frac{1}{1 - e^{-(r_c/a)^2}} \sim 1.398$. Le rayon $r = r_c$ est le rayon où la vitesse azimutale atteint son extremum $v_{\theta_{max}}$, et pour un tourbillon de Lamb-Oseen $r_c \sim \sqrt{1.2564}a$ [82]. Le champ de pression est défini par

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v_{\theta}^2(r, t)}{r}. \quad (3.3)$$

La distribution de vorticité axiale est gaussienne et s'écrit

$$\omega_z(r, t) = \frac{\Gamma_o}{4\pi\nu t} e^{-(r/a)^2}, \quad (3.4)$$

où le rayon de dispersion a évolue suivant la loi

$$a(t) = \sqrt{a_0^2 + 4\nu t}. \quad (3.5)$$

La condition initiale dans le domaine numérique tridimensionnel est obtenue par extrusion le long de l'axe du champ bidimensionnel. La variation locale de la taille du cœur définit deux régions décrites par les rayons r_{c1} et r_{c2} respectivement (Fig. 3.2). Le raccord entre les deux valeurs de rayons est effectué à l'aide de la fonction sinus sur une demi-période de longueur E . La région tourbillonnaire de rayon r_{c1} est considérée comme non-perturbée. On définit l'amplitude relative du front d'onde initial par :

$$\varepsilon = |(r_{c2} - r_{c1})/r_{c1}|. \quad (3.6)$$

Toutes les quantités présentées par la suite sont exprimées en fonction des grandeurs caractéristiques de la région 1, telle que, pour les vitesses $v^* = v/v_{\theta_{max1}}$, pour les longueurs $l^* = l/r_{c1}$ et pour le temps $t^* = t/T$ avec $T = 2\pi r_{c1}^2/v_{\theta_{max1}}$. Toutes les simulations ont été effectuées dans un contexte de fluide quasi-incompressible où l'extremum de vitesse du tourbillon correspond à un nombre de Mach $M = 0.2$. Le nombre de Reynolds est basé sur la circulation du tourbillon et la viscosité de l'air : $Re_{\Gamma} = \Gamma/\nu$.

Cette configuration simplifiée permet d'étudier et de comprendre les phénomènes de propagation d'onde le long d'un tourbillon. En effet, la circulation du tube tourbillonnaire étant constante tout le long, la variation locale de rayon induit une variation de vitesse azimutale, conduisant à une variation de pression au cœur du tourbillon du fait de l'équilibre entre le champ de pression et la force centrifuge. Un front d'onde de pression est alors généré et va ensuite se propager.

La configuration $\varepsilon = 1$, $E = 5$ et $Re_{\Gamma} = 10^4$ est utilisée comme configuration de référence (comme Moet *et al.* [67]). Un ensemble de valeurs pour les différents paramètres caractéristiques autour de ce cas a été testé pour déterminer leur importance vis-à-vis de la propagation de front d'onde. Toutes les configurations sont résumées dans le tableau 3.1.

Les premiers résultats correspondants aux cas A et B, ont permis de montrer que la configuration la plus favorable au développement d'instabilités hélicoïdales est la configuration $\varepsilon = 1$ et $E = 5$. Ainsi des simulations SND correspondantes aux configurations C du tableau, ont été effectuées dans un premier temps sans bruit blanc, puis avec pour provoquer la dynamique intrinsèque de développement d'instabilités.

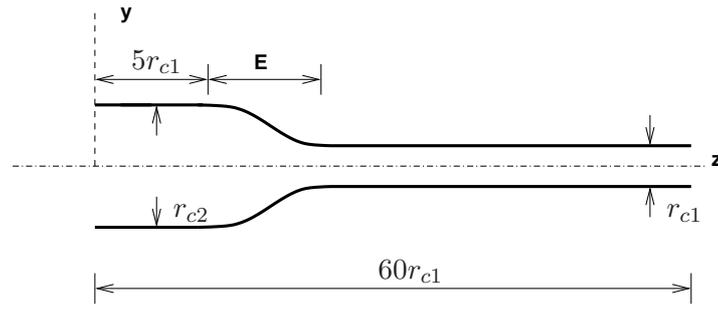


FIG. 3.2 – Schéma de la condition initiale avec la variation de rayon du cœur. r_{c1} et r_{c2} sont les rayons du tourbillon des deux régions et E l'épaisseur du front d'onde.

Cas	A	B	C
ε	1 / 0.75 / 0.4 / 0.25 / 0.1 / 0.0625	1	1
$Re_{\Gamma} (*10^3)$	10	10	10 / 8 / 5 / 2.5 / 1
E	5	3 / 5 / 8 / 13	5

TAB. 3.1 – Synthèse des configurations simulées. Pour les configurations C , les simulations ont été faites sans, puis, avec l'ajout d'une perturbation 3D de très faible amplitude (bruit blanc).

Cadre numérique

Le domaine de calcul a pour dimensions transverses $L_x = L_y = 40r_{c1}$ et pour longueur axiale $L_z = 60r_{c1}$. Le nombre de points de calcul est $N_x \times N_y \times N_z = 145 \times 145 \times 401$. Le maillage est régulier avec un pas de $\Delta = 0.15$ dans la zone d'intérêt de l'écoulement *c.-à-d.* dans la boîte transverse $L_{xp} = L_{yp} = 15r_{c1}$. Le maillage est ensuite étiré jusqu'aux frontières suffisamment éloignées pour minimiser l'influence du type de conditions limites choisi. Pour les frontières transverses le choix des conditions aux limites a été fait en suivant l'approche de Sreedhar *et al.* [89] employée également par Moet *et al.* [67]. Des conditions de symétries sont appliquées dans les deux directions transverses, ce qui implique la présence d'un nombre infini de tourbillons images dont l'influence est négligeable en raison de la taille du domaine utilisé. Des conditions de non-réflexion de type Poinsot and Lele [76] ont également été testées conduisant à des résultats identiques, confortant l'hypothèse d'un domaine de calcul suffisamment grand. Des conditions de non-réflexion sont imposées aux frontières axiales $z^* = 0$ et $z^* = 60$, détaillées dans la section 2.4. Ce type de conditions permet de ne pas avoir d'ondes entrantes ou réfléchies à ces frontières et laisse l'écoulement entièrement résolu à l'intérieur du domaine de calcul.

3.2.2 Topologie de la propagation

La configuration de référence est utilisée pour illustrer la dynamique de propagation, qui est décrite en suivant l'historique d'isosurfaces et d'isocontours de vorticité $|\omega|$ sur la figure 3.3. La structure interne du cœur tourbillonnaire est visualisée en ayant choisi une valeur suffisante du seuil de vorticité. On peut observer qu'une structure annulaire de vorticité est générée et voyage le long du tourbillon. Moet *et al.* [67] expliquent cette génération de structure d'après

l'équation de transport de vorticité dans la direction azimutale

$$\frac{D\omega_\theta}{Dt} = \omega_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\omega_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \omega_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}. \quad (3.7)$$

où $D \cdot /Dt$ représente la dérivée particulaire. Initialement l'écoulement est axisymétrique ($\partial/\partial\theta = 0$) et sans vitesse radiale et axiale ($v_r = v_z = 0$), l'équation 3.7 se simplifie et devient

$$\frac{\partial\omega_\theta}{\partial t} \sim \omega_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}. \quad (3.8)$$

Comme la circulation est constante dans la direction axiale z , le changement de la taille du cœur du tourbillon implique une différence de vitesse azimutale dans cette direction, d'où $\partial v_\theta/\partial z > 0$.  tant donné la symétrie axiale de l'écoulement, une structure annulaire est formée et voyage le long du tourbillon, du fait du gradient de pression entre les deux régions. Cette structure marque la position du front d'onde, qui se propage comme une entité unique et transporte le fluide de la région 1 avec un cœur plus gros vers la région tourbillonnaire 2 de cœur plus petit.

La propagation est bien illustrée par l'évolution temporelle des profils de pression normalisée le long de l'axe du tourbillon, tracés sur la figure 3.4. Cette figure montre notamment que l'onde se propage à une vitesse quasi-constante. Les paramètres influençant cette vitesse de propagation sont discutés dans la prochaine section, mais auparavant les conséquences du passage du front d'onde sont analysées.

Caractéristiques du tourbillon

Lorsque le front d'onde voyage le long du tourbillon, il en modifie les caractéristiques. Elles sont calculées à partir du profil de circulation dans des plans transverses d'analyse définis par $z^* = 24/30/36$. Ce profil est obtenu dans chaque plan en intégrant le champ de vorticité sur un maillage polaire

$$\Gamma(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^r \omega_z(r', \theta) r' dr' d\theta, \quad (3.9)$$

où l'intégration radiale est effectuée à partir du centre du tourbillon (déterminé par l'extremum de vorticité). De ce profil de circulation et en utilisant le fait que l'écoulement est axisymétrique, on en déduit le profil radial de vitesse azimutale

$$v_\theta(r) = \frac{\Gamma(r)}{2\pi r}. \quad (3.10)$$

Le rayon du cœur du tourbillon est défini comme le point où cette vitesse est extremum $v_\theta(r_c) = \max[v_\theta(r)]$.

Les conséquences du passage du front d'onde sont présentées pour la configuration de référence $\varepsilon = 1$ à $Re_\Gamma = 10^4$ et $E = 5$ (Fig. 3.5). Tant que le front d'onde n'est pas passé, le tourbillon diffuse avec une légère augmentation de sa taille et une diminution de son pic de vitesse azimutale. Lorsque le front passe, la taille du cœur augmente au moins de 35% tandis que le pic de vitesse azimutale diminue de $\sim 20\%$. Ces résultats étant identiques pour les trois plans arbitraires d'analyse, le front d'onde généré initialement se comporte donc comme une entité singulière voyageant le long du tourbillon. Cependant on remarque que l'amplitude du front d'onde n'est pas identique à celle imposée initialement, indiquant une adaptation de la solution

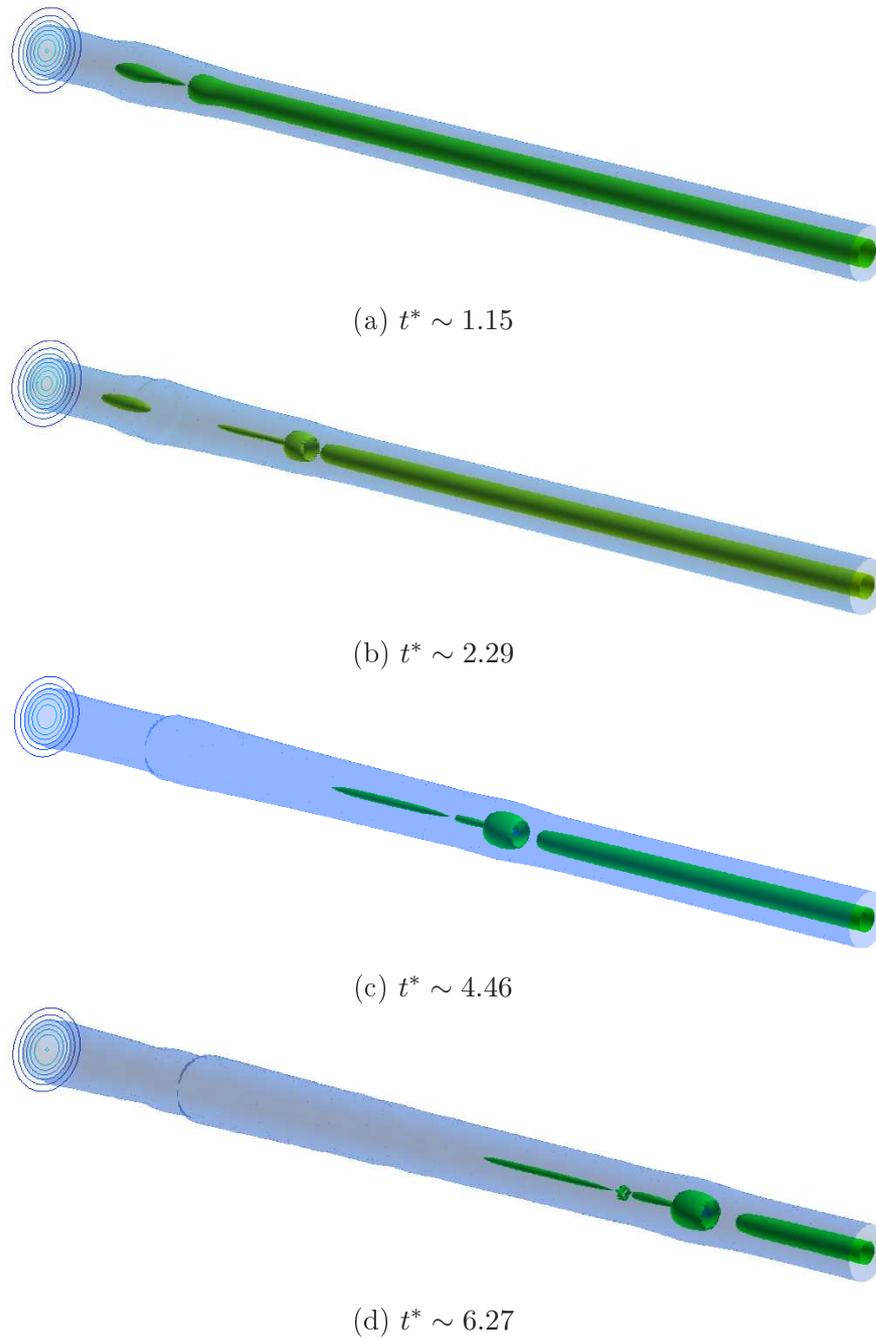


FIG. 3.3 – Propagation de front d'onde axisymétrique : évolution de deux isosurfaces arbitraires de vorticité. Le temps est normalisé tel que $t^* = t/T$ avec $T = 2\pi r_{c1}/v_{\theta_{max1}}$. Configuration ($\varepsilon = 1$, $Re_{\Gamma} = 10^4$).

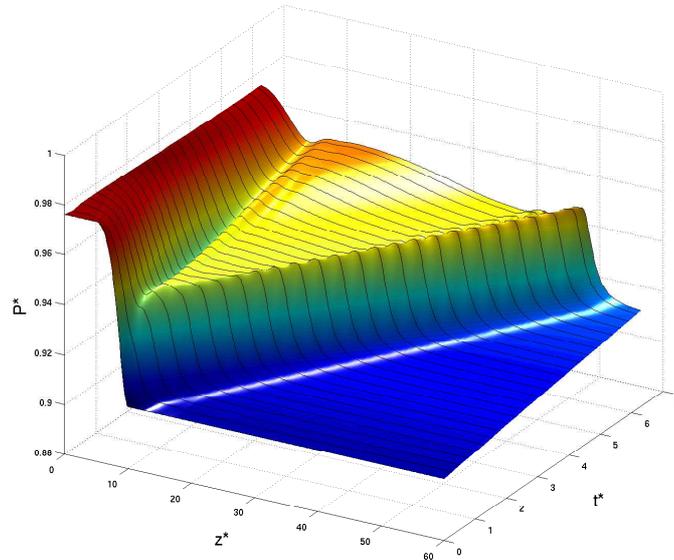


FIG. 3.4 – Évolution temporelle du profil de pression le long de l'axe du tube tourbillonnaire $P^* = P/P_\infty$ où P_∞ est la pression ambiante. Profils tracés pour la configuration ($\varepsilon = 1$, $Re_\Gamma = 10^4$). Le temps t^* est normalisé par le temps de référence $T = 2\pi r_{c1}/v_{\theta_{max1}}$.

générée initialement. En effet, bien que le champ initial soit construit par concaténation de solutions bidimensionnelles des équations de Navier-Stokes, il ne constitue pas pour autant une solution exacte d'équilibre. Cette dernière semble cependant bien être obtenue rapidement une fois la structure annulaire formée (temps très court vis-à-vis de l'échelle de temps convective).

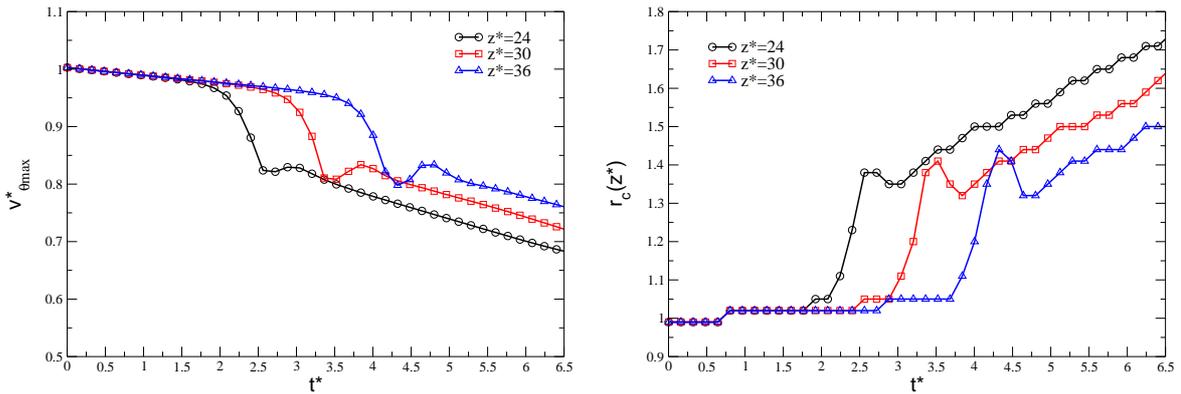


FIG. 3.5 – Évolution du maximum de vitesse et du rayon du cœur du tourbillon dans les trois plans $z^* = 24/30/36$. Configuration ($\varepsilon = 1$, $Re_\Gamma = 10^4$). Le temps est normalisé tel que $t^* = t/T$ avec $T = 2\pi r_{c1}/v_{\theta_{max1}}$.

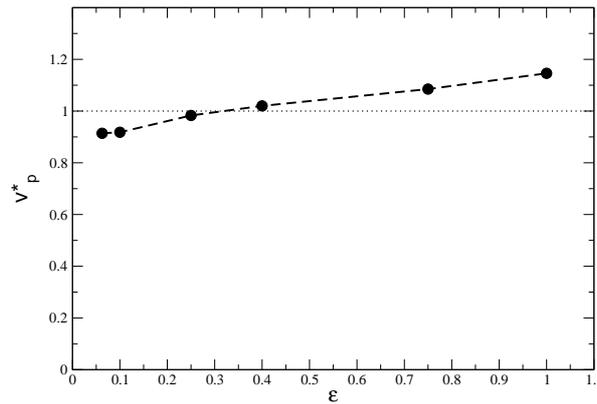


FIG. 3.6 – Vitesse de propagation d’onde en fonction de l’amplitude initiale du front d’onde. Simulation à $Re_\Gamma = 10^4$. La vitesse est adimensionnée telle que $v_p^* = v_p/v_{\theta_{max1}}$ où $v_{\theta_{max1}}$ est le maximum de vitesse azimutale de la région 1.

3.2.3 Vitesse de propagation

Une perturbation quelconque dans un milieu en rotation uniforme engendre la propagation d’ondes dispersives, appelées ondes inertielles. Leur équivalent dans le cas des tourbillons se nomme ondes de Kelvin et joue un rôle fondamental en dynamique tourbillonnaire. Arendt *et al.* [2] ont étudié la stabilité du tourbillon de Rankine et démontrent notamment qu’une perturbation arbitraire du cœur du tourbillon peut toujours être décomposée en une somme de telles ondes. Pour le modèle de tourbillon de Lamb-Oseen, l’étude récente de Fabre *et al.* [24] dresse une cartographie complète de ces ondes à l’aide d’une analyse de stabilité linéaire (décomposition du champ de vitesse et de pression en un écoulement de base plus des perturbations de faible amplitude).

La perturbation considéré ici correspond à un front d’ondes axisymétriques (modes azimutaux $m = 0$). Jacquin *et al.* [38,39] évoquent que la vitesse de groupe d’ondes de Kelvin axisymétriques la plus élevée (dans la limite des grandes longueurs d’onde) est $v_g = d\omega(k)/dk \sim 0.63\Gamma/(2\pi a)$ et correspond approximativement à la vitesse maximum du tourbillon $v_{\theta_{max}}$.

Il est présenté dans cette section une analyse de la vitesse de propagation du front d’ondes axisymétriques pour déterminer si elle est comparable à celle de la théorie des ondes de Kelvin et également pour évaluer l’influence des différents paramètres comme l’amplitude initiale (cas non-linéaire), l’épaisseur du front et le nombre de Reynolds (cas visqueux). La méthode de calcul de cette vitesse consiste à relever la position du front d’ondes à différents instants, puis à moyenner chaque vitesse calculée sur l’intervalle de temps entre deux solutions. La valeur obtenue est d’autant plus juste que le front se propage de manière constante et que le nombre d’échantillons est élevé.

La figure 3.6 montre que la vitesse de propagation dépend légèrement de l’amplitude du front d’onde ε . Pour de faibles valeurs $\varepsilon \leq 0.2$, la vitesse de propagation est plus proche de celle correspondant à l’analyse théorique des ondes de Kelvin axisymétriques. Lorsque l’amplitude initiale du front est élevée, la vitesse de propagation l’est aussi. Pour $\varepsilon = 1$, la vitesse de propagation est supérieure à l’analyse théorique de $\sim 13\%$. Ces résultats montrent que cette vitesse est proportionnelle à la vitesse azimutale du tourbillon de la région 1, qui correspond à

la partie du tourbillon dans laquelle le front d'onde se propage. On peut toutefois s'interroger si d'autres paramètres caractéristiques de l'écoulement, telles que l'épaisseur du front d'onde E ou la viscosité, influencent cette vitesse de propagation et de quelle manière.

Influence de l'épaisseur du front E

L'épaisseur du front d'onde E peut aussi être interprétée comme l'inverse de sa raideur. Une série de simulations a été menée pour différentes valeurs de E avec une amplitude initiale $\varepsilon = 1$ et un nombre de Reynolds $Re_\Gamma = 10^4$. La dynamique décrite précédemment ne change pas, avec un front d'onde voyageant à vitesse quasi-constante. Cette vitesse est plus élevée si sa raideur est plus prononcée (tableau 3.2), mais varie peu et reste de l'ordre de la vitesse azimutale du tourbillon de petit rayon. Par la suite, toutes les figures présentées correspondent à des configurations où l'épaisseur est $E = 5$ qui n'est donc pas rappelée dans les légendes.

E	3	5	8	10	13
v_p^*	1.14	1.13	1.1	1.08	1.06

TAB. 3.2 – Vitesse de propagation du front d'onde en fonction de sa raideur E ($Re_\Gamma = 10^4$ et $\varepsilon = 1$).

Influence du nombre de Reynolds

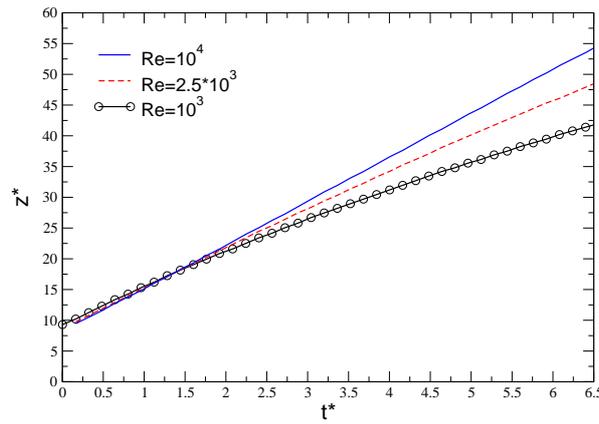
Le tube tourbillonnaire initial est construit avec une circulation constante le long de son axe et sujet aux effets visqueux partout de la même manière. L'effet du nombre de Reynolds est étudié ici en variant la viscosité. Pour le type de fronts d'onde axisymétriques considéré, la viscosité atténue sa vitesse de propagation (Tab. 3.3). La figure 3.7 représente la position du front d'onde le long de l'axe du tourbillon en fonction du temps. Son déplacement est approximativement constant pour les nombres de Reynolds $Re_\Gamma \geq 2500$, tandis que pour le cas où $Re = 1000$ il devient plus court au cours du temps. La vitesse de propagation calculée pour ce cas est donc donnée à titre indicatif dans le tableau, car sa méthode de calcul est basée sur l'hypothèse d'une vitesse de propagation constante qui n'est plus valable pour des nombres de Reynolds bas. En revanche, cette vitesse tend vers une valeur asymptotique lorsque le nombre de Reynolds devient très grand. Moet *et al.* [67] ont obtenu à l'aide d'une simulation SGE, une vitesse de propagation $v_{prop}^* = 1.2$ pour un nombre de Reynolds $Re_\Gamma = 10^6$.

$Re_\Gamma * 10^3$	1.	2.5	5.	8.	10.	1000.
v_p^*	0.77	0.95	1.08	1.11	1.13	1.2

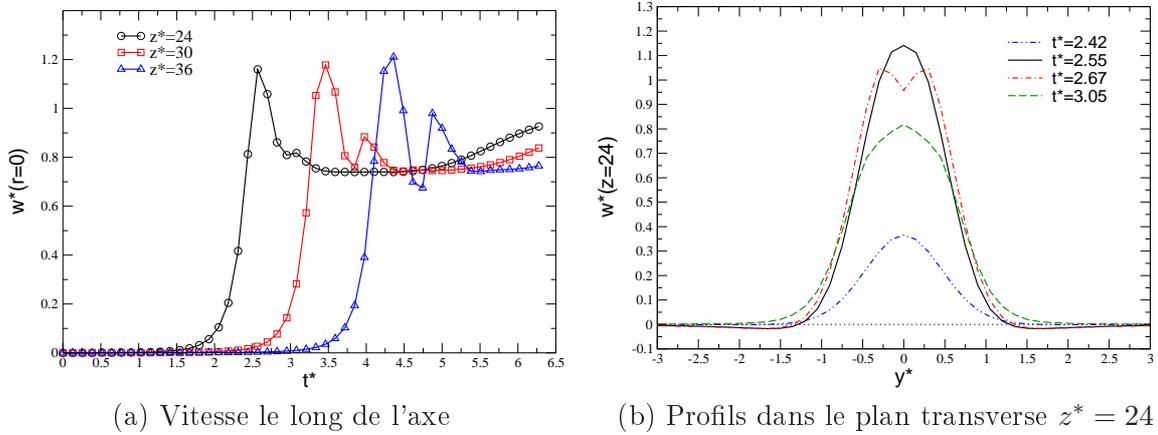
TAB. 3.3 – Vitesse de propagation du front d'onde en fonction du nombre de Reynolds (amplitude initiale $\varepsilon = 1$).

3.2.4 Vitesse axiale induite

Une des conséquences majeures de la propagation d'un front d'onde est l'augmentation significative de la vitesse axiale au cœur du tourbillon. Au passage du front d'onde, la vitesse

FIG. 3.7 – Position du front d'onde pour la configuration $\varepsilon = 1$.

axiale augmente soudainement et fortement (Fig. 3.8-a). Elle dépend de l'amplitude du front d'onde (Fig. 3.9-a), car elle est liée au gradient de pression axial au cœur du tourbillon. Juste après le passage du front, cette vitesse diminue et atteint une valeur presque constante. Les profils de vitesse axiale extraits d'un plan transverse ($z^* = 24$) et représentés à différents instants (Fig. 3.8-b) montrent un léger creux de vitesse axiale au cœur, qui correspond à la structure annulaire qui voyage le long du tourbillon.



(a) Vitesse le long de l'axe

(b) Profils dans le plan transverse $z^* = 24$

FIG. 3.8 – Configuration ($\varepsilon = 1$, $Re_\Gamma = 10^4$) : (a) Historique de la vitesse axiale au cœur du tourbillon dans les plans transverses $z^* = 24/30/36$, adimensionnée par la vitesse azimutale maximum $v_{\theta_{max1}}$. (b) Profils de vitesse axiale à différents temps, normalisé $t^* = t/T$ avec $T = 2\pi r_{c1}/v_{\theta_{max1}}$.

La viscosité a le même effet que sur la vitesse de propagation du front d'onde : la vitesse axiale induite par le front est plus faible à bas nombre de Reynolds. L'écart entre l'échelle de temps diffusif, défini par $t_v^* = t/(2\pi a^2/\nu)$ et l'échelle de temps convectif $t_c^* = t/(2\pi a^2/\Gamma)$ est de plus en plus réduit à mesure que le nombre de Reynolds est faible. À partir d'un nombre de Reynolds limite $Re_\Gamma \geq 5000$, la propagation du front d'onde (échelle de temps convective)

devient prépondérante devant le processus de diffusion du tourbillon.

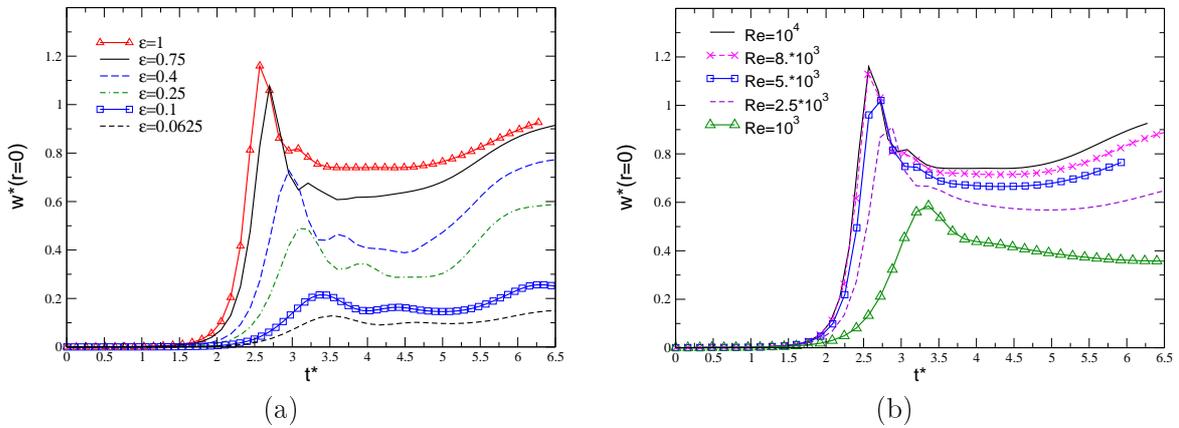


FIG. 3.9 – Évolution de la vitesse axiale au cœur du tourbillon dans le plan transverse $z^* = 24$, en fonction de l'amplitude du front à $Re_\Gamma = 10^4$ (a) et en fonction du nombre de Reynolds pour la configuration $\varepsilon = 1$ (b).

La vitesse induite peut être à l'origine de la déstabilisation du tourbillon, à travers le développement d'instabilités dites hélicoïdales. Les travaux de Mayer et Powell [57] font référence à ce sujet en établissant notamment, un critère de distinction entre les configurations d'écoulements stables et instables. La section suivante présente les résultats où la propagation de front d'onde est couplée avec le développement de ce type d'instabilité.

3.2.5 Propagation d'onde et instabilité hélicoïdale

La configuration d'écoulement tourbillonnaire $\varepsilon = 1$ (cas C du tableau 3.1) est la plus propice au développement d'instabilités hélicoïdales, puisque la vitesse axiale induite au cœur est la plus élevée. Il est nécessaire, dans un contexte numérique, de fournir de l'énergie aux modes potentiellement instables du tourbillon pour simuler le développement d'instabilités. Ainsi il est ajouté une perturbation aléatoire de très faible amplitude de type bruit blanc aux composantes de vitesse. Seules les composantes transverses u, v ne sont pas nulles initialement, d'où

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_{base}(x, y, z)(1 + A \times rand(x, y, z)), \\ v(x, y, z) &= v_{base}(x, y, z)(1 + A \times rand(x, y, z)), \end{aligned}$$

où $rand$ est un nombre aléatoire en fonction du point de l'espace, contenu dans l'intervalle $[-0.5, 0.5]$. Ce type de perturbation permet d'amorcer les instabilités intrinsèques à l'écoulement puisque aucune longueur d'onde instable n'est spécifiée. La même perturbation est appliquée aux différentes configurations avec $A = 10^{-2}$.

La dynamique globale de la propagation de front d'onde axisymétrique engendrant un développement d'instabilités hélicoïdales est illustrée sur les figures 3.10, où sont représentées deux isosurfaces de vorticité. Les premiers temps $t^* \sim 1.11 - 2.23$ sont caractérisés par la

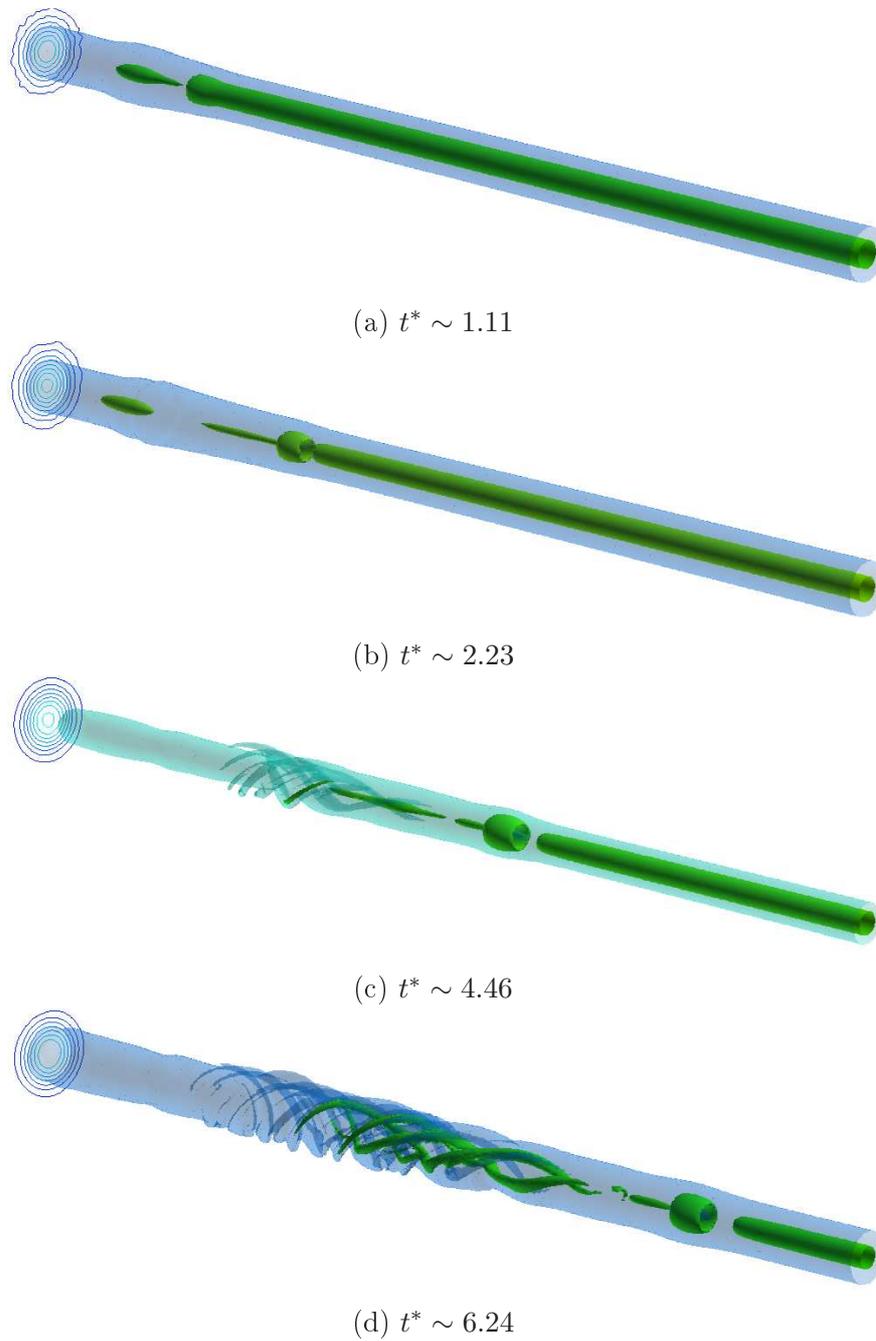


FIG. 3.10 – Propagation de front d'onde et instabilité hélicoïdale : évolution de deux isosurfaces de vorticité. Configuration $(\varepsilon = 1, Re_\Gamma = 10^4)$ + bruit blanc. Le temps est adimensionné tel que $t^* = t/T$ with $T = 2\pi r_{c1}/v_{\theta_{max1}}$.

formation et la propagation d'une structure annulaire le long du tourbillon. Lorsque la vitesse axiale induite est suffisante pour que l'écoulement devienne instable, il apparaît des structures hélicoïdales dans le sillage du front d'onde $t^* \sim 4.46 - 6.24$. À une position axiale particulière fixe, il y a succession de plusieurs structures de nombres d'onde azimuthaux différents.

Nombre de *swirl*

La vitesse axiale induite dans le cœur du tourbillon dépend de l'amplitude initiale du front d'onde et du nombre de Reynolds. Le nombre de *swirl* est le rapport entre la vitesse azimuthale maximum $v_{\theta_{max}}$ et axiale w_{max} . Il est défini ici par

$$q = 1.121\alpha v_{\theta_{max}}/w_{max} \sim 1.569v_{\theta_{max}}/w_{max}, \quad (3.11)$$

où $\alpha = 1.4$. Ce nombre permet de distinguer, suivant sa valeur, l'écoulement tourbillonnaire potentiellement instable d'après l'analyse de Mayer et Powell [57]. En effet, leurs travaux ont mis en évidence pour un tourbillon de Batchelor, appelé aussi *q-vortex*, la présence d'instabilité hélicoïdale pour des nombres de *swirl* $q \leq 1.5$. Ce modèle de tourbillon a une distribution azimuthale identique à celle du tourbillon de Lamb-Oseen (Eq. 3.1), mais la composante de vitesse axiale n'est pas nulle, et est définie par

$$w(r) = w_{max}\alpha \frac{r_c}{r} (1 - e^{-\beta(r/r_c)^2}). \quad (3.12)$$

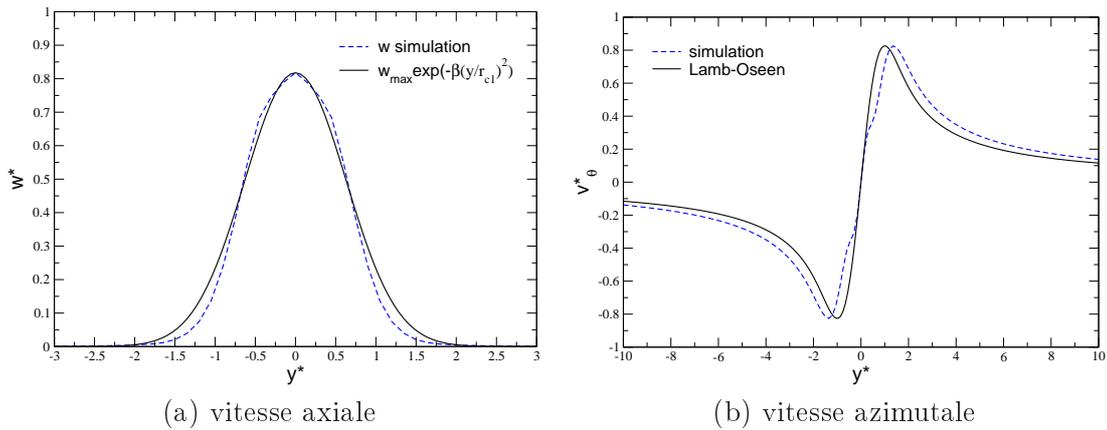


FIG. 3.11 – Profils de vitesse à $t^* = 3.05$ dans le plan $z = 24$ pour la configuration ($\varepsilon = 1$, $Re_\Gamma = 10^4$).

Après le passage du front d'onde, la distribution radiale de vitesse axiale induite au cœur est très proche d'une distribution gaussienne comme le modèle Batchelor (Fig. 3.11-a). En revanche, la distribution azimuthale dans le cœur (rotation solide) est différente avec un petit décalage proche du centre (Fig. 3.11-b), qui est visible notamment au rayon $r = r_c$ où la vitesse atteint son maximum.

Bien que le tourbillon après le passage du front d'onde ne corresponde pas exactement au cas idéal d'un tourbillon de Batchelor, d'un point de vue structurel, l'analyse du nombre de *swirl* reste valable pour déterminer si des modes hélicoïdaux instables peuvent être amplifiés.

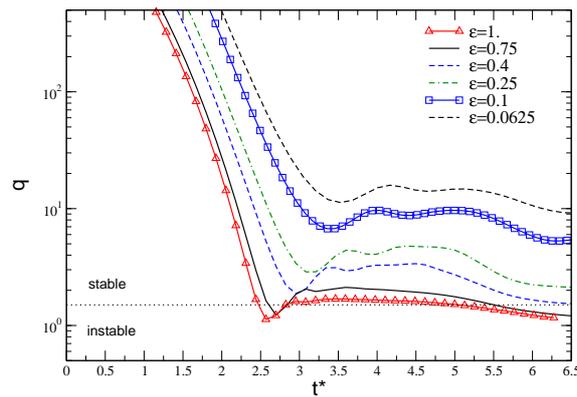


FIG. 3.12 – Historique du nombre de *swirl* dans le plan $z^* = 24$ pour les différentes amplitudes du front d'onde. Simulations à $Re_\Gamma = 10^4$.

L'évolution du nombre de *swirl* q en fonction du temps dans le plan $z = 30$ est tracée sur la figure 3.12 pour les différentes amplitudes de front d'onde considérées. Le nombre de Reynolds choisi pour étudier son influence est $Re_\Gamma = 10^4$, car c'est la configuration où la vitesse axiale induite est la plus élevée et où les effets visqueux sur la vitesse azimutale sont moindres. Le nombre de *swirl* est calculé avec la vitesse azimutale maximale instantanée dans le plan d'analyse en raison des effets de diffusion qui contribuent à la décroissance de ce maximum. Seules les configurations $\varepsilon \geq 0.75$ impliquent un nombre de *swirl* inférieur au seuil, le développement d'une instabilité hélicoïdale est bien observé dans les simulations pour ces cas.

Effet du nombre de Reynolds

Deux conséquences liées au processus de diffusion ont été relevés dans les sections précédentes : la décroissance de la vitesse azimutale maximale (diffusion bidimensionnelle classique), et aussi celle la vitesse axiale induite par la propagation de front d'onde, qui elle dépend également de l'amplitude de ce front. Ici, cette amplitude est fixée à $\varepsilon = 1$ car pour cette configuration elle est la plus élevée. À travers l'évolution temporelle du nombre de *swirl* pour différents nombres de Reynolds, il est ainsi mis en évidence la compétition de ces deux effets, qui peuvent éventuellement mener au développement d'instabilités hélicoïdales si le nombre de *swirl* atteint une valeur inférieure au seuil critique.

Pour illustrer l'effet de la viscosité sur le développement des instabilités hélicoïdales dues à la propagation d'un front d'onde, deux isosurfaces de vorticit e sont représent ees au temps ($t^* = 6.239$) pour quatre nombre de Reynolds consid er es ici sur la figure 3.13. La viscosit e att enu e l'amplification des modes instables jusqu' a les annihiler.

La figure 3.14 montre que le nombre de *swirl*, évaluée dans le plan $z = 30$, est en dessous du seuil critique de stabilit e pour des nombres de Reynolds $Re_\Gamma \geq 5000$ à $t^* \sim 2.7 - 3$. Pour le cas à $Re_\Gamma = 2500$, ce seuil n'est atteint qu'ultérieurement $t^* \geq 6.3$, tandis que pour un nombre de Reynolds bas $Re_\Gamma = 1000$ il n'est pas franchi sur l'intervalle de temps simulée. Le processus de diffusion du tourbillon reste alors pr edominant sur la propagation du front d'onde et le d eveloppement d'instabilit es.

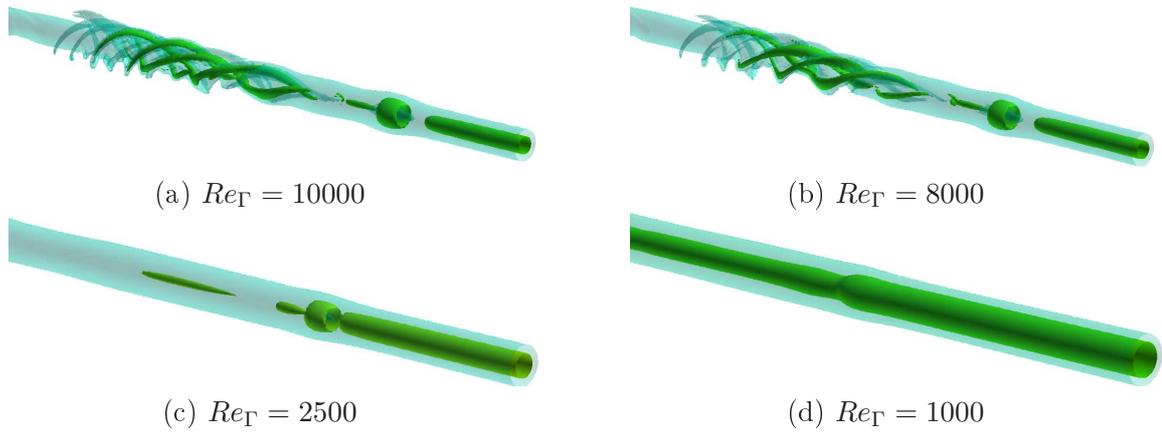


FIG. 3.13 – Deux isosurfaces de vorticité $\|\vec{\omega}\| = \omega_{max}/e^\beta$ et $\|\vec{\omega}\| = 2 * \omega_{max}/e^\beta$ à l’instant ($t^* \sim 6.24$), pour les différentes valeurs du nombre de Reynolds considérées ici. Configuration $\varepsilon = 1$ avec bruit blanc initialement.

3.3 Collision de deux fronts : explosion tourbillonnaire ?

Le phénomène d’explosion tourbillonnaire ou *vortex bursting* peut être interprété par la collision de deux fronts d’onde se propageant l’un vers l’autre [67, 87]. L’écoulement de base est un tube tourbillonnaire avec un changement local de son rayon à ses deux extrémités (Fig. 3.15), générant ainsi un front d’onde axisymétrique (section 3.2). Le champ de vitesse et de pression initial dans chaque plan transverse est obtenue à l’aide du modèle de tourbillon de Lamb-Oseen (Eq. 3.1). Le domaine de calcul considéré ici diffère du précédent uniquement par sa longueur axiale plus grande $L_z = 81r_{c1}$ (taille du domaine transverse et maillage identiques, paragraphe 3.2.1).

Cette étude se place dans un contexte d’écoulement quasi-incompressible, la vitesse maximale correspond à un nombre de Mach $M = 0.2$. Le nombre de Reynolds est identique pour toutes les simulations présentées dans cette section, $Re_\Gamma = \Gamma/\nu = 10^4$.

Les conditions limites dans la direction longitudinale sont périodiques. Ceci correspond à la modélisation d’un tube tourbillonnaire avec plusieurs accroissements locaux de rayon, mais où seulement deux d’entre eux sont pris compte à chacune des extrémités du domaine de calcul. Dans chaque direction transverse, des conditions limites non-réfléchissantes [76] sont employées modélisant un écoulement ouvert.

3.3.1 Dynamique globale

La dynamique de l’écoulement est illustrée en suivant l’évolution de deux isosurfaces de vorticité au cours du temps (Fig. 3.16 et 3.17). Elle peut être décrite par trois régimes : les premiers instants ($t^* \sim 0-4.46$) correspondent à la génération et la propagation de deux entités représentées par des structures annulaires de vorticité. Elles voyagent à vitesse quasi-constante le long du tourbillon dans des directions opposées. Le deuxième régime ($t^* \sim 5.44 - 9.58$)

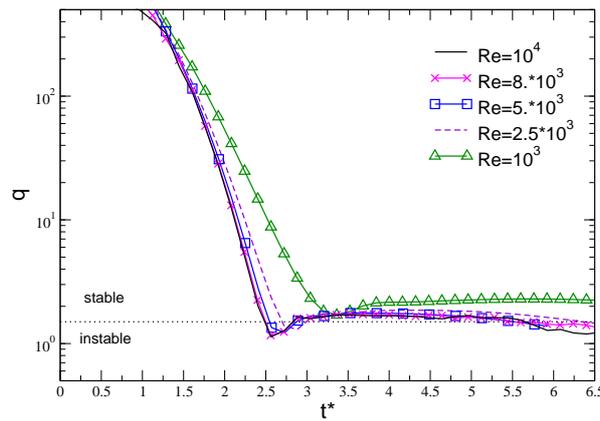


FIG. 3.14 – Évolution temporelle du nombre de *swirl* dans le plan $z^* = 24$ pour la configuration $\varepsilon = 1$ pour différents nombres de Reynolds.

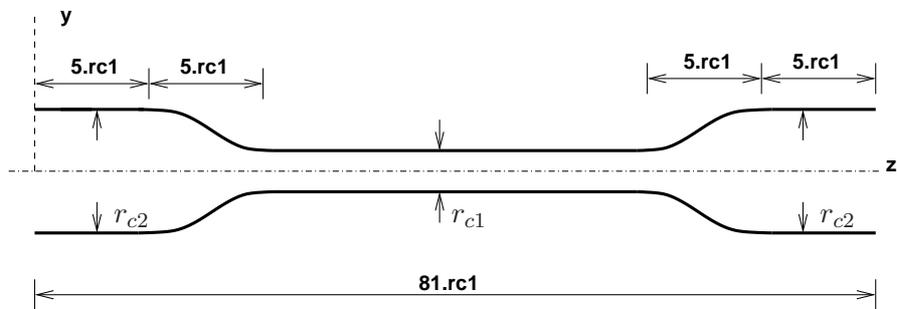


FIG. 3.15 – Schéma de la condition initiale avec variation de rayon du cœur pour l'étude de l'explosion tourbillonnaire, r_{c1} et r_{c2} étant les rayons du tourbillon.

est l'intersection ou la collision des deux fronts au milieu du domaine de calcul caractérisé par un changement soudain et conséquent de la structure tourbillonnaire. On remarque un développement d'instabilités hélicoïdales à ($t^* \sim 6.72$) de part et d'autre de la région de collision, qui est due à la vitesse axiale induite suffisamment élevée pour rendre l'écoulement instable à des perturbations tridimensionnelles. Un troisième régime où les petites structures générées par la collision se dissipent et deux fronts d'onde se propagent dans des directions opposées par rapport à la région de collision. Ces deux propagations sont accompagnées par le développement d'instabilités hélicoïdales ($t^* \sim 11.14$). De plus, la symétrie axiale initiale est bien respectée tout au long de cette dynamique malgré les différentes interactions non-linéaires présentes.

L'évolution temporelle de la pression au cœur du tourbillon dans la direction longitudinale, tracée sur la figure 3.18, montre effectivement la propagation à vitesse quasi-constante des deux fronts d'onde avant leur collision. Lorsque qu'ils se rencontrent, il y a un accroissement soudain du minimum de pression, qui est suivi d'une propagation de deux autres fronts d'onde. En comparant deux configurations d'écoulements, caractérisées par les amplitudes initiales $\varepsilon = 0.0625$ et $\varepsilon = 1$, une différence majeure apparaît : pour $\varepsilon = 1$, la collision conduit à une

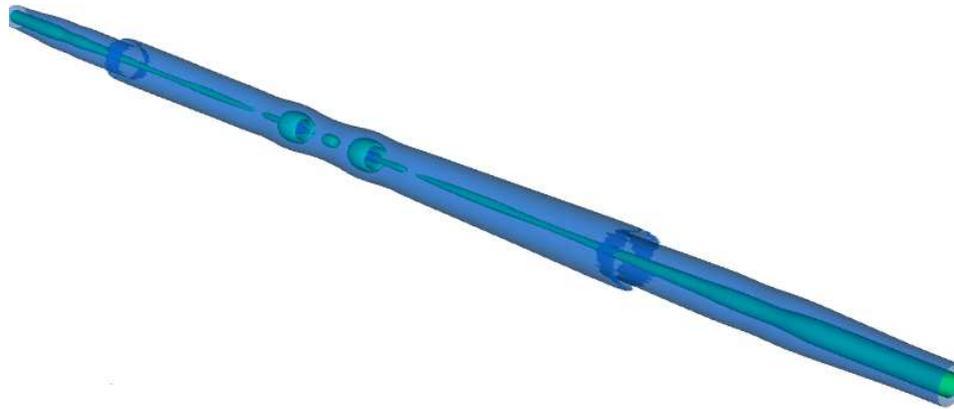
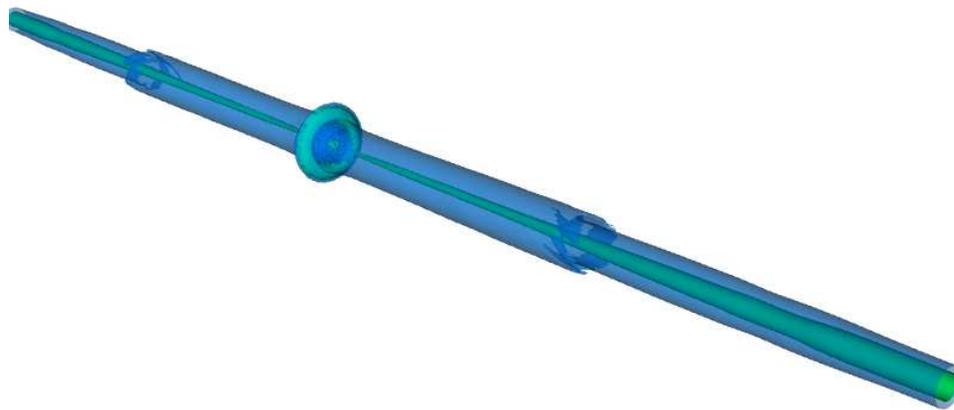
(a) $t^* \sim 3.18$ (b) $t^* \sim 4.46$ (c) $t^* \sim 5.44$

FIG. 3.16 – Illustration du phénomène d'explosion tourbillonnaire par la visualisation de deux isosurfaces de vorticité. Le temps est normalisé tel que $t^* = t/T$ où $T = 2\pi r_{c1}/v_{\theta_{max1}}$. Configuration $\varepsilon = 1$.

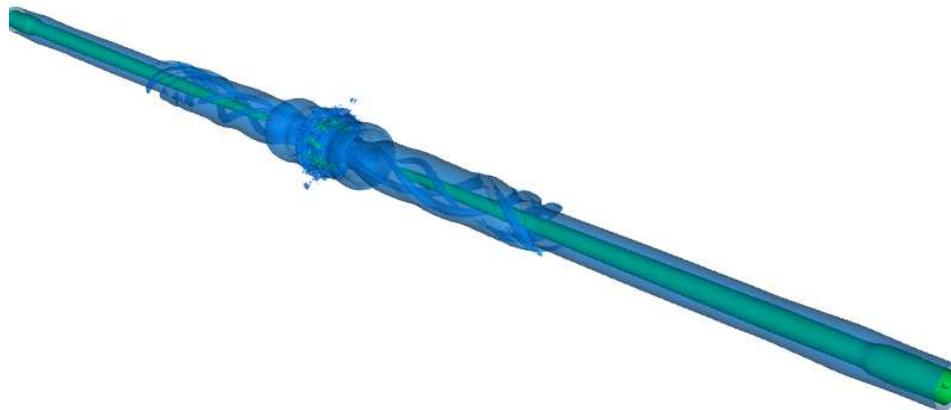
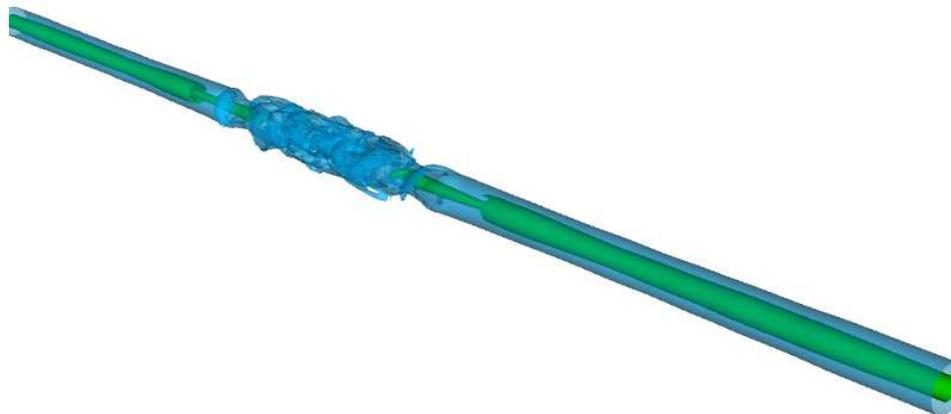
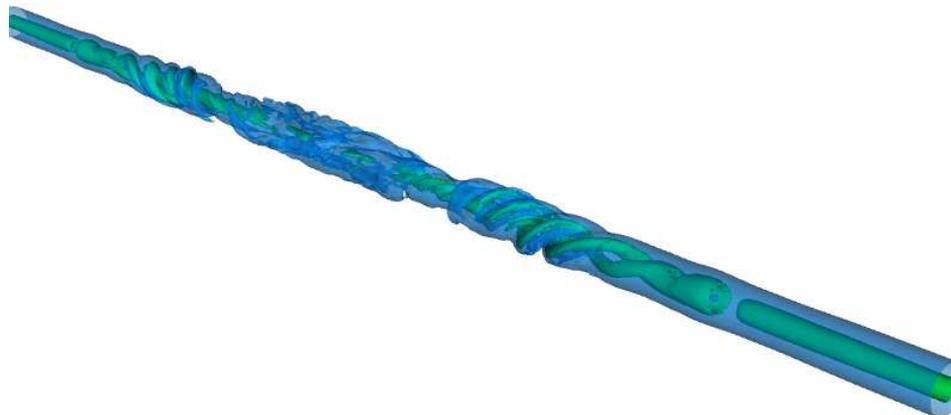
(d) $t^* \sim 6.72$ (e) $t^* \sim 9.58$ (f) $t^* \sim 11.14$

FIG. 3.17 – Illustration du phénomène de *vortex bursting* par la visualisation de l'évolution de deux isosurfaces de vorticité. Le temps est normalisé $t^* = t/T$ où $T = 2\pi r_{c1}/v_{\theta_{max1}}$. Configuration $\varepsilon = 1$.

région tourbillonnaire très perturbée, indiquant de fortes interactions non-linéaires. Tandis que pour le cas de faible amplitude $\varepsilon = 0.0625$, le tourbillon semble retrouver un état stable et laminaire, la collision des fronts ne conduisant pas, dans ce cas, au phénomène d'explosion tourbillonnaire ou *vortex bursting*.

Cette première analyse met en évidence deux types de collisions, une où les conséquences sont majeures et mènent à l'explosion tourbillonnaire et une autre marquée par l'interaction de fronts d'onde de faibles amplitudes sans déstructuration du tourbillon. Par la suite, il est discuté de la caractérisation de ce phénomène en fonction de l'amplitude des fronts d'onde.

3.3.2 Conséquences et caractérisation du phénomène

Structure du tourbillon dans la région de collision

L'explosion tourbillonnaire est identifiée par un changement rapide et radical de la structure du tourbillon [87, 92]. Celle-ci est caractérisée par le profil de circulation en fonction de la distance radiale au cœur par

$$\Gamma(r, \theta) = \iint \omega_z r dr d\theta, \quad (3.13)$$

où ω_z est la composante de vorticité axiale. Les profils de circulation sont extraits pour différentes configurations d'écoulements $\varepsilon = 0.0625/0.3/0.5/1$, dans le plan $z^* = Lz/2 = 40.5$. Ce plan correspond au lieu de rencontre, les fronts d'onde se propagent à la même vitesse car ils sont symétriques de part et d'autre.

La vorticité axiale est tout d'abord interpolée sur un maillage cylindrique, puis intégrée dans la direction azimutale afin d'obtenir un profil de circulation fonction de la distance radiale uniquement. Les figures 3.19 représentent ces profils à différents instants. Pour les cas $\varepsilon = 0.0625-0.3$, la structure tourbillonnaire est très peu affectée par la collision des fronts d'onde. Tandis que, pour les cas $\varepsilon = 0.5-1$, elle conduit à une déstructuration du tourbillon par une augmentation significative de sa taille, d'autant plus importante que l'amplitude est élevée. Après un certain laps de temps qui dépend de l'importance de la collision, la structure du tourbillon redevient bien définie pour toutes les configurations, en raison de la dissipation des petites structures turbulentes dans cette région de l'écoulement.

Evolution de l'enstrophie

L'enstrophie est l'intégrale du carré de la vorticité sur un volume donné.    partir des équations de Navier-Stokes, il est possible d'établir l'équation instationnaire de l'évolution de l'énergie cinétique en fonction du nombre de Reynolds et de l'enstrophie [82]. Pour un fluide incompressible dans un domaine infiniment grand, cette équation s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_D \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 dV = -\frac{1}{Re} Z, \quad (3.14)$$

où V est un volume de contrôle et Z l'enstrophie

$$Z = \int_D \|\omega\|^2 dV. \quad (3.15)$$

Ainsi, l'évolution de l'enstrophie peut être interprétée comme le taux de dissipation d'énergie cinétique par unité de volume.

Pour chaque configuration l'évolution temporelle de l'enstrophie dans le domaine de calcul entier est représentée sur la figure 3.20. Elle décroît au cours du temps par effet de diffusion.

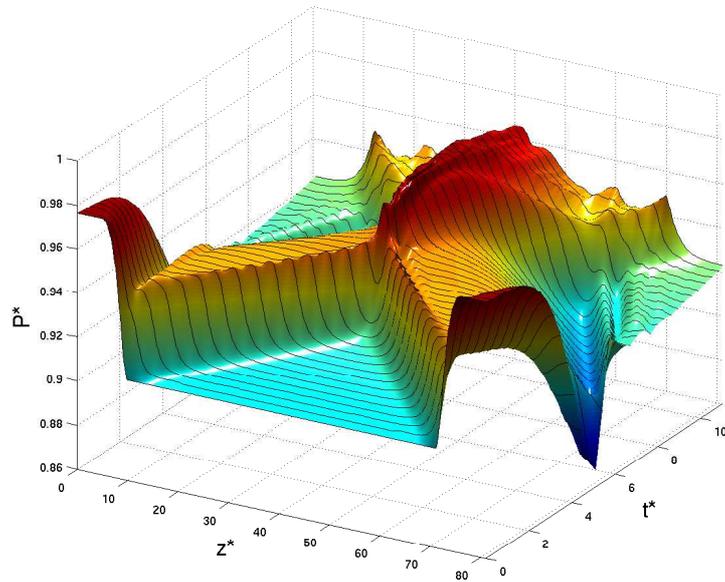
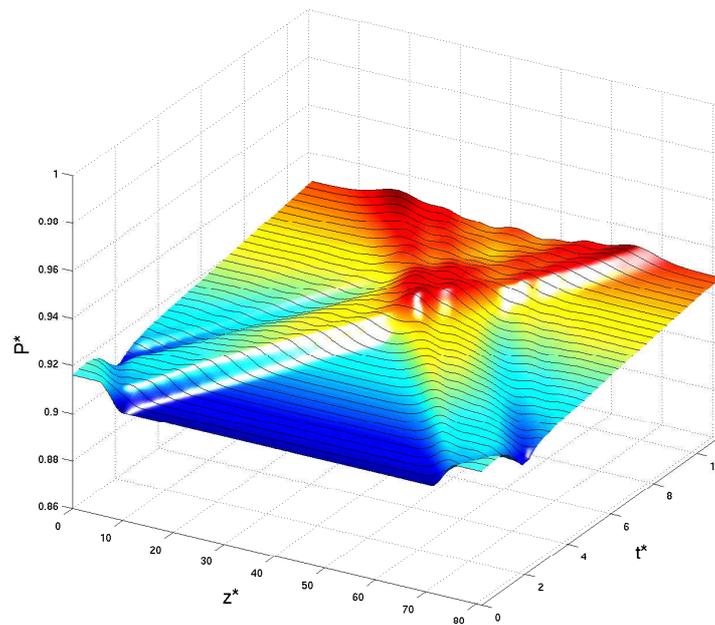
(a) $\varepsilon = 1$ (b) $\varepsilon = 0.0625$

FIG. 3.18 – Profil du minimum de pression au cœur du tourbillon dans la direction axiale en fonction du temps normalisé par $T = 2\pi r c_1 / v_{\theta_{max1}}$ et pour deux amplitudes initiales de front d'onde ε .

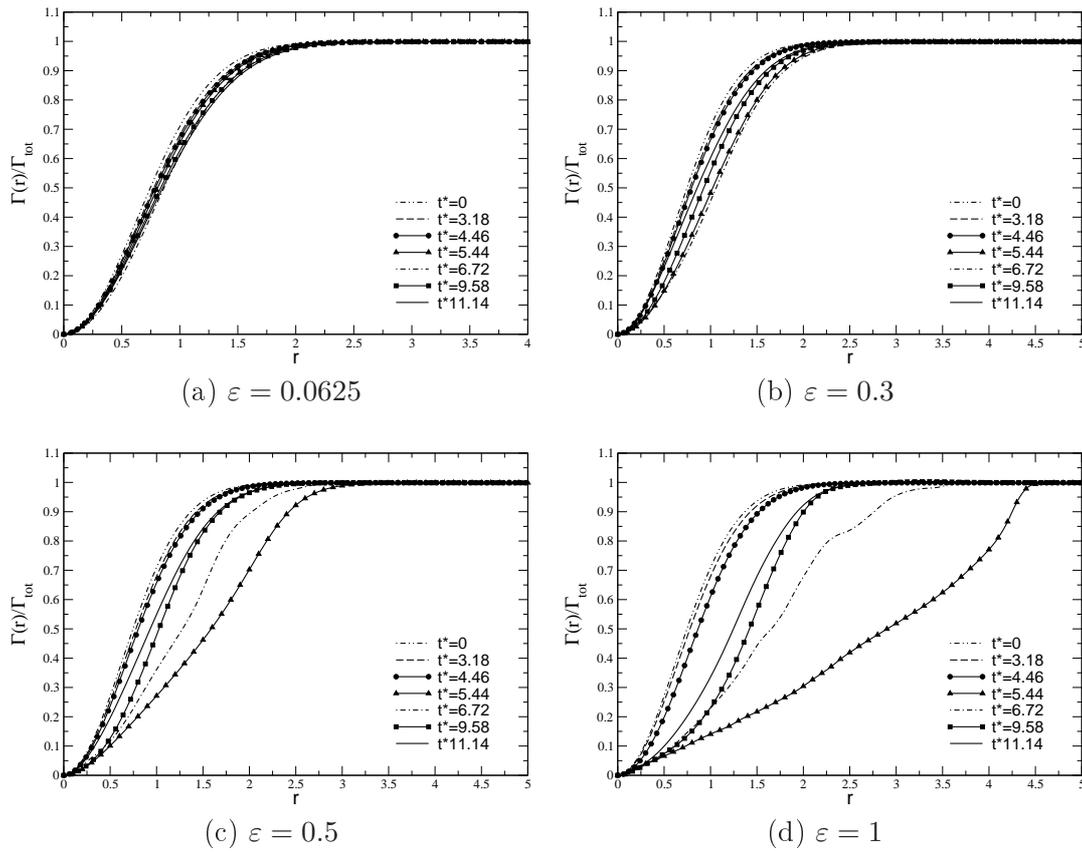


FIG. 3.19 – Profils de circulation du tourbillon dans le plan $z^* = L_z/2 = 40.5$ à différents temps, pour quatre configurations d'écoulements où ε est l'amplitude initiale des fronts d'onde axisymétriques. Les profils sont normalisés par la circulation totale $\Gamma_{tot} = 2\pi\alpha r c_1 v_{\theta_{max1}}$. La collision a lieu à $t^* \sim 5 - 6$.

Lorsque les deux fronts d'onde se rencontrent elle augmente de manière significative pour des amplitudes de fronts grandes $\varepsilon \geq 0.4$, tandis que pour les autres cas son évolution est peu ou non perturbée. Par la suite, l'enstrophie atteint un extremum avant de décroître, indiquant la dissipation des petites structures résultant de la collision. Le léger décalage des temps où l'enstrophie est maximale entre les configurations est du aux légères différences de vitesses de propagation des fronts d'onde. Pour les cas $\varepsilon \geq 0.8$, l'enstrophie s'accroît de nouveau après $t^* = 10$ correspondant au développement d'instabilités hélicoïdales.

Dans le but de distinguer les configurations où l'explosion tourbillonnaire a lieu, un temps de collision t_c^* est défini. Ce temps correspond à celui que met un front d'onde pour parcourir une distance $d^* = (L_z - 2E)/2 = 35.5$ à la vitesse de propagation v_p^* . Cette vitesse dépend de l'amplitude des fronts d'onde ε mais reste proche de la vitesse du tourbillon $v_{\theta_{max1}}$. Ainsi pour conserver un caractère objectif, pour toute les configurations le temps de collision est calculé avec $v_p^* = v_{\theta_{max1}}$. L'analyse de l'enstrophie au temps t_c^* en fonction de l'amplitude des fronts (Fig. 3.21) montre que l'explosion tourbillonnaire a lieu pour des amplitudes supérieures à 40 – 50% du rayon initial. Même si le temps de collision est calculé avec la vitesse de

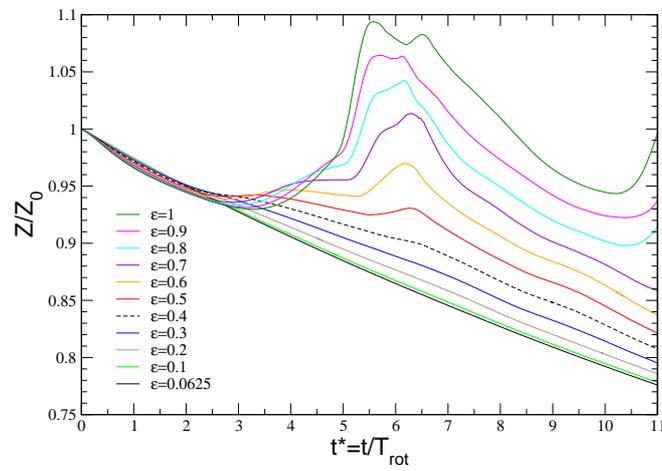


FIG. 3.20 – Évolution temporelle de l'enstrophie Z pour chaque configuration ε , normalisée par sa valeur initiale.

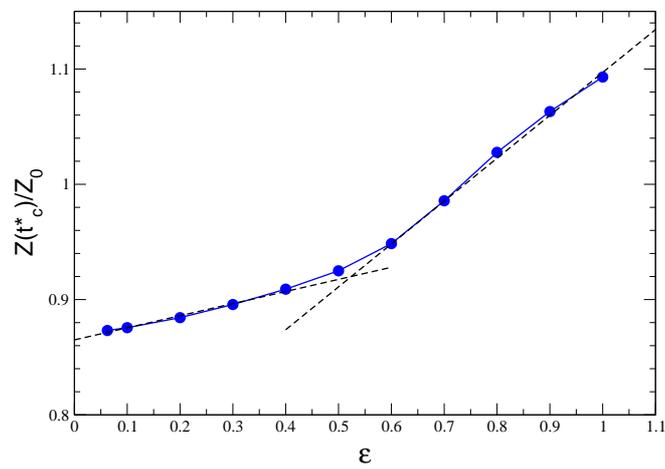
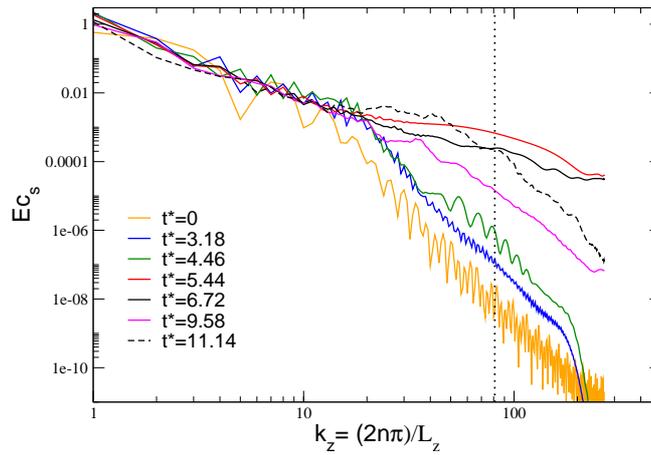


FIG. 3.21 – Enstrophie au temps de collision ($t_c^* = 5.65$), en fonction des amplitudes initiales de front d'onde.

FIG. 3.22 – Spectre d'énergie pour la configuration $\varepsilon = 1$.

propagation respective de chaque configuration, la courbe est similaire avec une brisure de pente pour $\varepsilon \sim 0.4 - 0.5$

Analyse spectrale

La génération de petites structures lors de la collision des fronts d'onde est étudiée suivant l'évolution des spectres d'énergie monodimensionnels dans la direction axiale. Pour calculer cette énergie associée à chaque longueur d'onde, une transformée de Fourier est effectuée. Le champ de vitesse est écrit sous forme d'une série de Fourier :

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{nz-1} \hat{u}(x, y, k_z, t) e^{ik_z z}, \quad k_z = n \frac{2\pi}{L_z}, \quad (3.16)$$

avec nz le nombre de points dans la direction longitudinale et L_z la longueur axiale du domaine de calcul. La transformée de Fourier s'écrit

$$\hat{u}(x, y, k_z, t) = \frac{1}{L_z} \int_0^{L_z} u(x, y, z, t) e^{-ik_z z} dz. \quad (3.17)$$

L'énergie modale de chaque nombre d'onde k_z est définie par

$$E_{k_z}(t) = \frac{L_z}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \hat{u} \cdot \hat{u}^* dx dy, \quad (3.18)$$

où \hat{u}^* est le nombre complexe conjugué de \hat{u} . Les limites des intégrales transverses sont déterminées par les longueurs du domaine de calcul (L_x, L_y).

Pour la configuration $\varepsilon = 1$, les spectres monodimensionnels sont représentés à différents instants de la dynamique de propagation et de collision sur la figure 3.22. Pour cette configuration la collision des fronts conduit à l'explosion tourbillonnaire, caractérisée par la génération de petites structures ($t^* \sim 4.46 - 5.44$). Les spectres d'énergie aux temps ultérieurs ($t^* \sim 6.72 - 9.58$) montrent la dissipation d'énergie associée à ces structures. Au temps ($t^* = 11.14$), le développement d'instabilités hélicoïdales a lieu et contribue à la génération d'autres petites structures.

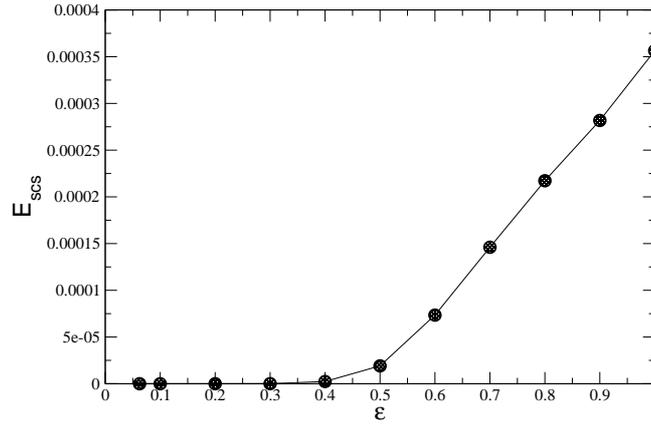


FIG. 3.23 – Énergie cinétique moyenne des petites structures au temps de collision $t_c^* = 5.65$, fonction de l'amplitude des fronts d'onde ϵ .

Pour établir un second diagnostic du phénomène d'explosion tourbillonnaire, une énergie moyenne des petites structures est introduite :

$$E_{scs}(t) = \sum_{k=k_c}^{nz-1} E_k(t), \quad (3.19)$$

où k_c est le nombre d'onde délimitant les plus petites longueurs d'ondes. Pour cette analyse, on choisit toutes les longueurs d'ondes plus petites que le rayon caractéristique du tourbillon r_{c1} où a lieu la collision, *c.-à-d.* un nombre d'onde $k_c = 81$. Pour toutes les configurations, on représente cette énergie moyenne des petites structures au temps de collision t_c^* , défini dans la section précédente 3.3.2. Comme pour l'ensrophie à cet instant, il apparaît que l'explosion tourbillonnaire a lieu seulement pour les configurations $\epsilon \geq 0.5$, caractérisées par un écoulement localement turbulent.

3.4 Conclusion

Les simulations SND ont permis de montrer que la variation locale de la taille d'un tourbillon mène à la génération de fronts d'onde axisymétrique qui se propagent le long d'un tourbillon. L'influence de différents paramètres caractéristiques de l'écoulement a été évaluée : celle de l'amplitude des fronts, de leur épaisseur et également du nombre de Reynolds. Il s'est avéré que pour la gamme de valeurs considérées, la vitesse de propagation d'un tel front est de l'ordre de la vitesse azimutale du tourbillon de la région dans laquelle il se propage. Une des conséquences majeures de la propagation est la génération d'une vitesse axiale qui peut être suffisamment élevée pour déstabiliser l'écoulement à travers le développement d'instabilités hélicoïdales [57].

La collision de deux fronts d'onde se propageant l'un vers l'autre a pour conséquence l'explosion tourbillonnaire lorsque leur amplitude est suffisamment élevée. Il a ainsi été établi un critère objectif d'apparition de ce phénomène, en considérant le changement soudain de l'ensrophie à l'instant de la collision ainsi que la génération de petites structures. L'explosion tourbillonnaire a lieu pour des amplitudes de front d'onde $\epsilon \geq 0.5$.

Interaction entre un jet et un tourbillon de sillage d'avion

4.1 Introduction

Les motivations du champ de recherche sur la dynamique des tourbillons de sillage d'avion sont d'une part la sécurité du transport aérien par la minimisation du danger représenté par la rencontre entre un sillage et un avion suiveur, et d'autre part, l'impact environnemental du trafic aérien à travers la dispersion des polluants sortant des turbo réacteurs dans l'atmosphère. Ces deux aspects sont étroitement liés par le fait que les émissions de gaz brûlés sont entraînées par le champ tourbillonnaire. Sous certaines conditions atmosphériques (temps clair), des panaches blancs, appelés traînées de condensation, se forment derrière l'avion [74], et correspondent aux tourbillons marginaux sur une partie du sillage. Ces traînées résultent de la condensation de la vapeur d'eau issue des jets moteurs, déclenchée par les particules de suies chaudes provenant de la combustion du kérosène dans l'atmosphère très froide. Même après la dégénérescence des tourbillons (causée généralement par une instabilité de Crow [15] ou par l'interaction avec la turbulence atmosphérique [34]), elles peuvent persister plusieurs heures dans l'atmosphère et contribuer à la formation de nuages (cirrus), et ainsi à l'effet de serre.

Il est abordé dans ce chapitre, la dynamique d'interaction entre un écoulement de jet moteur et un tourbillon pour des conditions de vol réalistes. Les premières études d'interaction, notamment celle de Miake-Lye *et al.* [64], ont montré que deux régimes se distinguent en condition de croisière, celui du jet puis celui de l'interaction (Fig. 4.1). Pendant les premières secondes après l'émission, le jet se mélange rapidement avec l'air ambiant, pendant que la nappe de vorticité se roule autour des tourbillons marginaux. Par la suite, la dynamique est gouvernée par l'enroulement du jet autour du tourbillon. L'exp erience en soufflerie de Brunet *et al.* [8] avec un modèle d'avion à echelle r eduite montre que le jet commence à subir l'influence du champ tourbillonnaire à partir d'une distance aval d'une demi envergure. Cette distance est relative à l'intensité du jet considéré qui est fonction du moteur et n'est donc pas généralisable. R ecemment, des campagnes exp erimentales ont été menées, notamment par Jacquin *et al.* [40] et Margaris *et al.* [55], pour évaluer l'influence des diff erents paramètres caractéristiques, comme la distance de séparation entre le jet et le tourbillon, le rapport d'intensité des deux entités ou encore le nombre de Reynolds et l'inclinaison du jet. Paoli *et al.* [75] ainsi que Ferreira *et al.* [27] ont effectué des simulations numériques aux grandes échelles (SGE).   travers l'étude

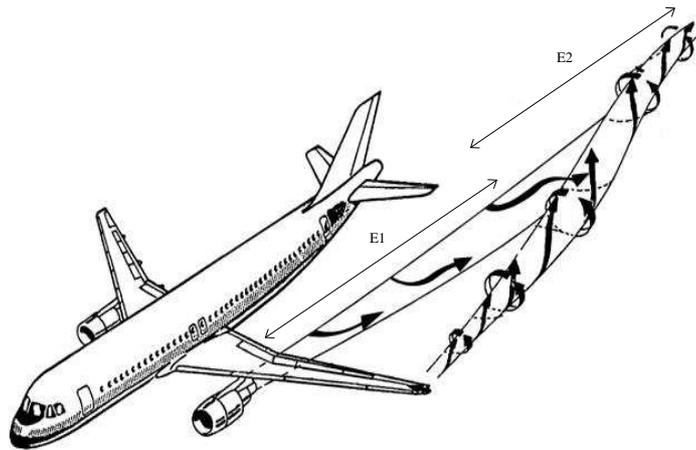


FIG. 4.1 – Illustration de l’interaction jet moteur/tourbillon en condition de croisière, caractérisée par deux régimes : le régime du jet E1, et le régime d’interaction E2.

de l’interaction pour des configurations simplifiées et académiques, ces travaux ont montré les possibilités et l’apport du numérique à ce sujet.

Dans le cadre du projet européen FAR-Wake (2005-2008), cette thématique a fait l’objet de plusieurs études expérimentales (configuration simplifiée en bassin à eau, modèle réduit en soufflerie) et numériques, dans le but d’identifier l’impact du jet sur la dynamique tourbillonnaire et d’en évaluer les conséquences par des comparaisons croisées des nombreux résultats. Cette étude se place dans ce contexte avec pour objectif de réaliser des simulations à haut nombre de Reynolds (à l’aide de SGE) pour des configurations de vol réalistes (phase de décollage, de croisière et d’approche). Plusieurs paramètres sont testés comme la distance de séparation entre le jet et le tourbillon, l’intensité du jet vis-à-vis de celle du tourbillon ainsi que sa température. Dans ce chapitre, on appellera jet chaud celui dont le champ de température est anisotherme, et jet froid dans le cas isotherme (à température atmosphérique).

Ce chapitre est composé de quatre sections. La première section est dédiée à la modélisation ainsi qu’aux différentes hypothèses utilisées. La seconde présente les résultats des simulations SGE en conditions de croisière. La troisième section concerne l’interaction pendant les deux phases de vol hypersustenté, et enfin la dernière section présente les configurations d’interaction tenant compte de la température du jet.

4.2 Modélisation et initialisation

Cette section présente les différentes hypothèses et la méthode employée pour modéliser l’interaction entre un écoulement de jet d’un moteur et un tourbillon de sillage d’avion.

Deux hypothèses majeures sont posées pour la modélisation de ce type d’interaction. La première est l’approche temporelle où il est supposé que l’écoulement est quasi-parallèle dans le domaine de calcul considéré. Cette approche repose sur le fait que les gradients axiaux peuvent être négligés sur la longueur de la boîte de calcul par rapport aux gradients transverses. Des conditions aux limites de périodicité sont donc employées dans la direction axiale. Ainsi, la dynamique de l’écoulement est suivie en fonction du temps, qui peut être assimilé à une distance

aval dans le sillage en supposant que le domaine de calcul se déplace à une vitesse constante (vitesse de l'avion). La deuxième hypothèse concerne l'interaction en condition de croisière. On suppose que le champ tourbillonnaire a peu d'influence sur l'écoulement de jet sur une distance aval d'une envergure environ (ce qui correspond à $50D_j$ avec D_j le diamètre du jet), étant donné qu'ils sont éloignés l'un de l'autre [73]. Pour ce type de condition de vol, on simule dans un premier temps le régime du jet, puis celui de l'interaction avec un tourbillon, tandis que pour les phases hypersustentées seul le régime d'interaction est simulé. Pour les trois phases de vol, la modélisation concerne la dynamique derrière une aile uniquement, supposant une symétrie par rapport à l'axe de vol de l'avion.

Les paragraphes suivants s'attachent à décrire les différentes approximations qui ont permis d'obtenir les paramètres caractéristiques du jet pour les trois configurations de vol et la modélisation de ce type d'écoulement.

4.2.1 Approximation d'un jet moteur d'avion double-flux

La majeure partie des moteurs équipant les avions commerciaux sont de type turboréacteur double-flux. L'objectif n'est pas d'étudier la dynamique de ce type de jet mais l'obtention d'un jet turbulent pour initialiser la simulation d'interaction avec un tourbillon de bout d'aile. Il est alors défini un jet mono-flux équivalent (Fig. 4.2) de débit et de poussée identiques à celui d'un jet double-flux.

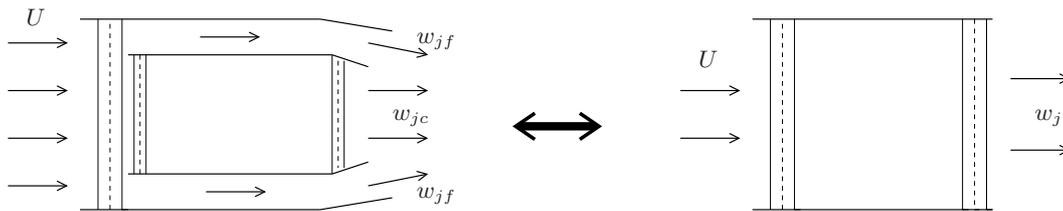


FIG. 4.2 – Schématisation de l'approximation d'un jet double-flux par un jet mono-flux.

Dans le cadre du projet européen FAR-Wake, le laboratoire national d'aéronautique des Pays-Bas (NLR, Pays-Bas), a effectué des simulations de turbine à gaz avec leur programme *Gas turbine Simulation Program* (GSP) pour déterminer les valeurs de vitesse et de température d'un jet double-flux en sortie d'un moteur de General Electrics [16]. Les données obtenues sont résumées dans le tableau 4.1. Les indices \cdot_{jc} et \cdot_{jf} correspondent respectivement aux flux sortant primaire (interne ou *core*) et secondaire (externe ou *fan*).

Phase	U [m/s]	T_a [K]	P_a [Pa]	w_{jf} [m/s]	w_{jc} [m/s]	T_{jf} [K]	T_{jc} [K]
approche	68.1	288.15	101325	143	136	294	605
décollage	85.1	288.15	101325	255	306	297	605
croisière	254.8	234.6	34381	334	464	253	570

TAB. 4.1 – Estimation d'un jet double-flux d'un moteur de General Electrics, obtenue par le NLR.

Les relations d'équivalences pour le débit D et la poussée T , entre un jet double-flux et un jet mono-flux, s'écrivent

$$D = D_c + D_f = D_e, \quad (4.1)$$

$$T = D_j(w_j - U) = D_c(w_{jc} - U) + D_f(w_{jf} - U), \quad (4.2)$$

avec $D_* = \rho_* w_* A_*$, où ρ_* est la densité, w_* la vitesse axiale et A_{j*} l'aire respective de chaque partie du jet cylindrique et U la vitesse de l'avion (vitesse à l'entrée). L'indice \cdot_j indique le jet équivalent mono-flux. Il est supposé que les gaz sortants du jet double-flux vérifient la relation des gaz parfaits, permettant d'obtenir les valeurs de densité respectives. Les inconnues restantes sont les rayons des parties du jet cylindrique des flux primaires r_{jc} et secondaires r_{jf} permettant de déterminer les aires respectives (A_{jf}, A_{jc}). Le rapport des débits $bpr = \frac{D_f}{D_c}$ caractéristique d'un moteur permet d'établir :

$$r_{jc} = R_m \sqrt{\frac{H}{H + bpr}} \quad \text{avec} \quad H = \frac{\rho_f w_f}{\rho_c w_c}. \quad (4.3)$$

où R_m est le rayon du moteur connu à l'entrée, le rayon du flux secondaire est $r_{jf} = R_m - r_{jc}$. L'estimation du rapport des flux sortants H , conduit à une valeur du rayon r_{jc} variant légèrement en fonction des configurations. On choisit alors d'utiliser $H = 1$ pour avoir un rayon constant. Il est alors plus faible de $\sim 20\%$ que celui estimé en tenant compte des valeurs exactes des flux ($H \sim 1.6 - 2$).

Le débit D et la poussée T du jet double-flux peuvent alors être calculés. La résolution du système d'équations (4.1) et (4.2) fournit les caractéristiques du jet mono-flux :

$$w_j = \frac{T}{D}, \quad (4.4)$$

$$\rho_j = \frac{D}{w_j A_j} \quad \text{avec} \quad A_j = \pi r_j^2 = \pi R_m^2, \quad (4.5)$$

avec r_j le rayon à demi-vitesse du jet équivalent, choisi identique au rayon R_m .

L'initialisation du champ de vitesse axiale du jet est effectuée en utilisant une distribution radiale de vitesse et de densité le cas échéant, suivant un profil en tangente hyperbolique :

$$w(r) = \frac{1}{2} \left\{ (w_j + w_a) - (w_j - w_a) \tanh \left[\frac{1}{4} \frac{r_j}{\theta} \left(\frac{r}{r_j} - \frac{r_j}{r} \right) \right] \right\}, \quad (4.6)$$

$$\rho(r) = \frac{1}{2} \left\{ (\rho_j + \rho_a) - (\rho_j - \rho_a) \tanh \left[\frac{1}{4} \frac{r_j}{\theta} \left(\frac{r}{r_j} - \frac{r_j}{r} \right) \right] \right\}, \quad (4.7)$$

où ρ_a est la densité de l'atmosphère. L'écoulement externe n'est pas pris en compte, d'où $w_a = 0$. Ce type de profil a été utilisé dans les précédentes études numériques d'interaction entre un jet et un tourbillon de Paoli *et al.* [75], ou de Ferreira *et al.* [27], en raison des travaux de Moore [69]. Ce dernier a montré que cette famille de profils modélise correctement le profil d'un jet cylindrique expérimental dans la région du cône potentiel. L'épaisseur de quantité de mouvement de la couche de mélange du jet θ est définie par

$$\theta = \int_0^\infty \frac{w(r)}{w_j} \left(1 - \frac{w(r)}{w_j} \right) dr. \quad (4.8)$$

Pour toutes les configurations, sa valeur est $r_j/\theta = 10$ qui correspond au cas le plus instable parmi les trois valeurs (2.5, 5, 10) étudiées par Michalke et Herman [65]. Les variations de densité peuvent affecter la stabilité d'un jet, Monkewitz et Sohn [68] ont montré qu'il pouvait être absolument instable pour des rapports de densité $S = \rho_j/\rho_a \leq 0.72$. Les jets chauds définis ici ont un rapport supérieur à cette valeur critique, les instabilités sont donc de type convectives, en adéquation avec l'approche temporelle employée ici. On remarque toutefois que l'approximation du jet double-flux avec les hypothèses utilisées conduit à des jets simple flux dont la température est nettement plus faible que les jets primaires.

Pour estimer la vitesse du jet froid, on se place dans le cadre où la poussée uniquement est identique à celle du jet chaud. Il est cependant possible d'estimer les propriétés d'un jet froid équivalentes à celles d'un jet chaud pour une poussée et un débit identiques mais la différence de densité implique nécessairement une différence de la taille du jet. Ce choix n'a pas été retenu ici privilégiant la modélisation d'un écoulement de jet provenant du même moteur équipant le même avion (géométrie identique). Le jet froid ainsi estimé a un débit supérieur de 7% pour les configurations hypersustentées et de 14% en condition de croisière. Les valeurs des paramètres caractéristiques des jets mono-flux, chaud et froid, sont récapitulées dans le tableau 4.2. La vitesse du jet froid aurait pu être évaluée à partir d'un même débit avec la même restriction géométrique, dans ce cas les vitesses auraient été plus faibles alors que l'estimation du jet double-flux en jet simple flux conduit déjà à des vitesses moindres que celle du flux primaire (Tab. 4.1 et 4.2).

Type de jet	paramètre	approche	décollage	croisière
chaud	w_j [m/s]	142.407	260.375	348.272
	T_j [K]	321.611	325.556	281.818
froid	w_j [m/s]	137.2	247.99	335.56
	T_j [K]	288.15	288.15	234.6

TAB. 4.2 – Paramètres des jets équivalents froids et chauds. La température du jet froid correspond à celle de l'air ambiant.

4.2.2 Modélisation de l'interaction

Pour distinguer les différentes configurations de l'interaction, un paramètre sans dimension R est introduit, traduisant le rapport entre l'intensité du jet et celui du sillage tourbillonnaire de circulation Γ :

$$R = \frac{\rho_j w_j (w_j - U) A_j}{\rho_a \Gamma^2}. \quad (4.9)$$

Une autre hypothèse majeure de la modélisation de l'interaction concerne l'intensité du tourbillon. On considère un tourbillon de taille et de circulation bien définies. Pour les configurations hypersustentées, la modélisation concerne l'interaction d'un tourbillon de volet émis juste au-dessus du moteur ; tandis que pour les phases de vol de type croisière, elle concerne celle d'un tourbillon émis en bout d'aile plus ou moins distant du jet.

Pour toutes les configurations, la circulation du tourbillon considéré Γ est supposée moins

intense que la circulation totale Γ_0 , car l'interaction commence avant la fin de l'enroulement complet de la nappe de vorticité emise derrière une aile. Nous avons choisi dans cette étude $\Gamma = 0.6\Gamma_0$. La circulation totale Γ_0 peut être déterminée en fonction des paramètres de vol pour un avion réel [16]. L'équilibre entre la force verticale de portance et le flux de quantité de mouvement vertical du sillage est traduit par la relation

$$\frac{\rho_a C_L}{2Ar} B^2 U^2 = \rho_a U b_0 \Gamma_0, \quad (4.10)$$

où U est la vitesse de l'avion, B son envergure, Ar le rapport d'aspect de l'aile, C_L le coefficient de portance de l'aile, b_0 la distance entre les deux tourbillons marginaux de bout d'aile après enroulement total de la nappe de vorticité. La circulation s'exprime en fonction des paramètres de vol par

$$\Gamma_0 = \frac{C_L U B}{2sAr}, \quad (4.11)$$

où $s = b_0/B$ le facteur de chargement de l'aile. Ce paramètre est fonction de la circulation locale et traduit la distance de séparation des centro  ides tourbillonnaires. Pour une aile elliptique $s = \frac{\pi}{4}$ [37]. En pratique, même si les distributions de circulation ne sont pas elliptiques pour des configurations hypersustentées, ce coefficient peut néanmoins être très proche de cette valeur [29]. Ainsi, pour estimer la circulation à partir des paramètres de vol, on utilise $s = \frac{\pi}{4}$.

Le champ tourbillonnaire est défini en utilisant le modèle de Lamb-Oseen, dont on rappelle la loi de distribution de vitesse azimutale :

$$v_\theta(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - e^{-(r/a)^2}) = \frac{v_{\theta_{max}} \alpha r_c}{r} (1 - e^{-\beta(r/r_c)^2}), \quad (4.12)$$

où a est le rayon de dispersion, $v_{\theta_{max}}$ l'extremum de vitesse atteint au rayon $r = r_c$ et $\alpha = 1.398$. La constante $\beta = 1.2564$ provient de la relation entre le rayon de dispersion a et le rayon $r_c = 1.121a$. On considère un tourbillon formé partiellement par l'enroulement de la nappe, ainsi le rayon r_c est relativement plus petit que celui issu d'un sillage complètement formé. Pour toutes les configurations, on choisit $r_c \simeq 0.015B$ où B est l'envergure de l'avion, car il correspond à un bon ordre de grandeur dans le champ proche étendu [16]. Par rapport à la taille caractéristique du jet r_j , ce rayon correspond à $r_c = 0.5r_j$ ($r_j \simeq 0.03B$) dans toutes les simulations présentées dans ce chapitre.

Le domaine de calcul est représenté sur la figure 4.3 et les configurations considérées sont récapitulées dans le tableau 4.3. Les valeurs sont présentées sous forme normalisée en utilisant comme vitesse de référence, la vitesse du son c , et comme longueur de référence le rayon à demi-vitesse du jet r_j . Les distances de séparation entre le jet et le tourbillon pour les conditions de croisière sont identiques à celles employées dans les expériences effectuées en soufflerie par l'ONERA dans le cadre du projet FAR-Wake [40].

Les résultats obtenus de l'interaction entre le jet et le tourbillon sont présentés sous forme adimensionnelle. Pour cela, les grandeurs utilisées sont la vitesse de l'avion U , le rayon du jet mono-flux équivalent r_j et la température atmosphérique T_∞ le cas échéant. Un temps sans dimension est introduit définissant l'âge du sillage [29], tel que $\tau = t \times 16C_L U / (\pi^4 Ar B)$. Comme les paramètres de vol sont pris en compte, ce temps adimensionnel permet d'avoir une notion temporelle de référence entre les différentes configurations.

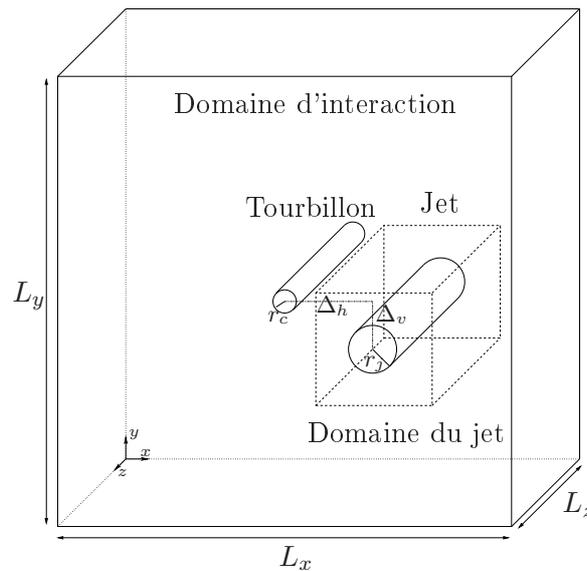


FIG. 4.3 – Modélisation de l’interaction entre un jet de moteur et un tourbillon de sillage d’avion derrière une aile.

4.2.3 Maillage et conditions limites

Pour les conditions de croisière, les simulations sont effectuées en deux étapes : le développement du jet seul puis l’interaction avec un tourbillon (Fig. 4.3). Pour la simulation du jet seul, le domaine de calcul est de longueurs $L_x = L_y = 16r_j$ et $L_z = 6r_j$, discrétisé par un maillage uniforme dans les trois directions avec dix points dans le rayon du jet ($N_x \times N_y \times N_z = 161 \times 161 \times 61$). Cette résolution correspond à celle employée par Paoli *et al.* [75]. La longueur du domaine L_z a été choisie de manière à simuler deux longueurs d’onde λ du mode linéaire le plus instable. Pour le type de profils de vitesse considéré ici (Michalke et Hermann [65]), cette longueur d’onde est $\lambda/r_j \sim 3$. Les longueurs transverses du domaine de calcul sont choisies de manière à minimiser les réflexions d’ondes numériques parasites. Le processus d’interaction entre un jet et un tourbillon est simulé dans un domaine plus grand, dont les directions transverses sont $L_x = L_y = 80r_j$, tandis que la longueur axiale est identique à celle utilisée pour le régime du jet seul. Le maillage est régulier dans la zone d’intérêt de la dynamique (Fig. 4.4), de longueur $L_{xr} = L_{yr} = 36r_j$ et de résolution identique à celle employée pour le régime du jet. Le pas d’espace est ensuite augmenté jusqu’aux points frontières. L’avantage d’une résolution identique entre la simulation du régime du jet et celle de l’interaction pour les configurations de type croisière, est d’éviter une erreur supplémentaire liée à une éventuelle interpolation du jet turbulent.

Les conditions limites sont de type périodique dans la direction axiale correspondant à l’approche temporelle employée pour cette étude. Pour les faces latérales, des conditions non-réfléchissantes de Poinsot et Lele [76] sont utilisées (section 2.4.2.4). De plus, une précaution a été prise pour le traitement de ces frontières avec une zone éponge sur cinq points, dans laquelle la viscosité augmente linéairement jusqu’au point frontière. Ce type de traitement, employé par Paoli *et al.* [75], s’est avéré à posteriori indispensable pour supprimer les réflexions parasites.

Phase	Distance ($\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j$)	R	S	M_j	M	Re_j $\times 10^6$	Re_Γ $\times 10^6$
Croisière	(5, -2)	4.36	0.832	0.304	0.103	2.88	5.99
Croisière	(10, -2)	4.36	0.832	0.304	0.103	2.88	5.99
Approche	(0, -2)	0.94	0.897	0.218	0.119	5.34	15.55
Décollage	(0, -2)	4.	0.885	0.515	0.119	12.33	15.55
Croisière	(5, -2)	4.36	1	0.263	0.103	3.46	5.99
Croisière	(10, -2)	4.36	1	0.263	0.103	3.46	5.99
Approche	(0, -2)	0.94	1	0.203	0.119	6.03	15.55
Décollage	(0, -2)	4.	1	0.479	0.119	14.22	15.55

TAB. 4.3 – Configurations d’interaction entre un jet de rayon r_j et un tourbillon de rayon $r_c = 0.5r_j$ (Fig. 4.3). La paramètre R correspond au rapport d’intensité du jet et du tourbillon. $S = \rho_j/\rho_a$ est le rapport des densités entre le jet et l’atmosphère. Les nombres de Mach du jet et du tourbillon sont respectivement $M_j = \frac{w_j - U}{c}$ et $M = \frac{v_{\theta max}}{c}$.

4.3 Interaction en conditions de croisière

4.3.1 Obtention d’un jet turbulent

Cette section est dédiée au développement d’un jet froid en condition de croisière. Pour provoquer le développement d’instabilités, une perturbation aléatoire en espace et de faible amplitude (bruit blanc) est ajoutée telle que $w_j \rightarrow w_j(1 + \epsilon)$. L’amplitude maximale de cette perturbation est $5 \cdot 10^{-3}$.

4.3.1.1 Topologie de l’écoulement

La dynamique d’un jet est gouvernée par le développement d’une instabilité de Kelvin-Helmholtz. Cette dynamique est illustrée sur la figure 4.5 représentant une isosurface de scalaire passif et des isocontours de vorticité dans un plan de coupe à travers le jet. Cette instabilité est présente dans les écoulements où il y a de forts gradients de cisaillement entre deux couches de fluide de vitesses ou de densités différentes. Elle est caractérisée par un enroulement d’une couche avec l’autre.

La figure 4.6 présente l’évolution temporelle de la vitesse axiale dans le plan de coupe transverse $z = 3$. L’évolution de l’écoulement de jet est caractérisée par une phase laminaire correspondant au cône potentiel où le profil de vitesse ne change pas. Par la suite, l’amplification de l’instabilité modifie les profils et conduit à une phase turbulente où la forme des profils de vitesse est très perturbée.

4.3.1.2 Période d’auto-similarité

Le comportement d’un jet turbulent a fait l’objet de nombreux travaux expérimentaux et numériques. Il se caractérise essentiellement par trois propriétés : la vitesse axiale au centre du jet évolue suivant une loi inversement proportionnelle à la distance aval, l’épaisseur du jet augmente linéairement et enfin, les profils moyens de vitesse sont indépendants de la distance

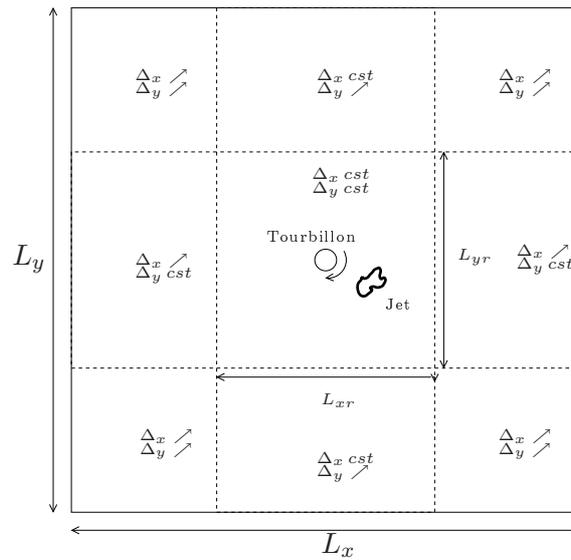


FIG. 4.4 – Schéma du maillage non-uniforme dans un plan transverse.

aval s'ils sont normalisés par les variables appropriées. Cette propriété d'auto-similarité est valable dans le cas d'un jet spatial où les variables sont moyennées en temps. On peut toutefois définir une période d'auto-similarité dans le cas d'une approche temporelle où les variables sont moyennées en espace dans la direction périodique [26, 75].

Le champ moyen est interpolé sur un maillage polaire, ici à l'aide des polynômes de Lagrange d'ordre trois. Une moyenne azimutale est effectuée pour obtenir un profil de vitesse axiale dépendant uniquement de la distance au centre $w(r)$. Les figures 4.7-a-b représentent respectivement l'inverse de la vitesse moyenne au centre et le rayon à demi-vitesse $r_{1/2}$ (rayon où la vitesse atteint la moitié de sa valeur au centre) en fonction du temps. Pendant la période d'auto-similarité l'inverse de la vitesse au centre évolue de manière linéaire en fonction du temps, ainsi que le rayon à demi-vitesse. Cette période est relativement courte ($t^* = t/(r_j/w_j) \in [42, 58]$) à cause d'un nombre de Reynolds très élevé.

Les profils de vitesse coïncident à différents temps lorsque l'adimensionnalisation est effectuée avec la vitesse au centre et le rayon à demi-vitesse. La figure 4.8 illustre le comportement auto-similaire, convenablement obtenu ici. Les écarts des courbes sont attribués en partie à la méthode de post-traitement, notamment à la définition du centre du jet qui est choisi ici comme le centre géométrique initial et ne correspondant pas forcément au maximum de vitesse axiale lorsque le jet est devenu pleinement turbulent.

4.3.1.3 Initialisation de la configuration d'interaction

Pour initialiser la simulation d'interaction entre un jet et un tourbillon dans des conditions de croisière, il est nécessaire de choisir un instant du développement du jet. Ce choix peut être basé sur la considération d'une distance aval à partir de laquelle l'influence du tourbillon sur l'écoulement de jet n'est plus négligeable. Cependant, l'approche temporelle conduit à une mauvaise évaluation de cette distance à cause de la longueur du cône potentiel qui est plus grande. Cette surestimation est due au temps d'émergence de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz

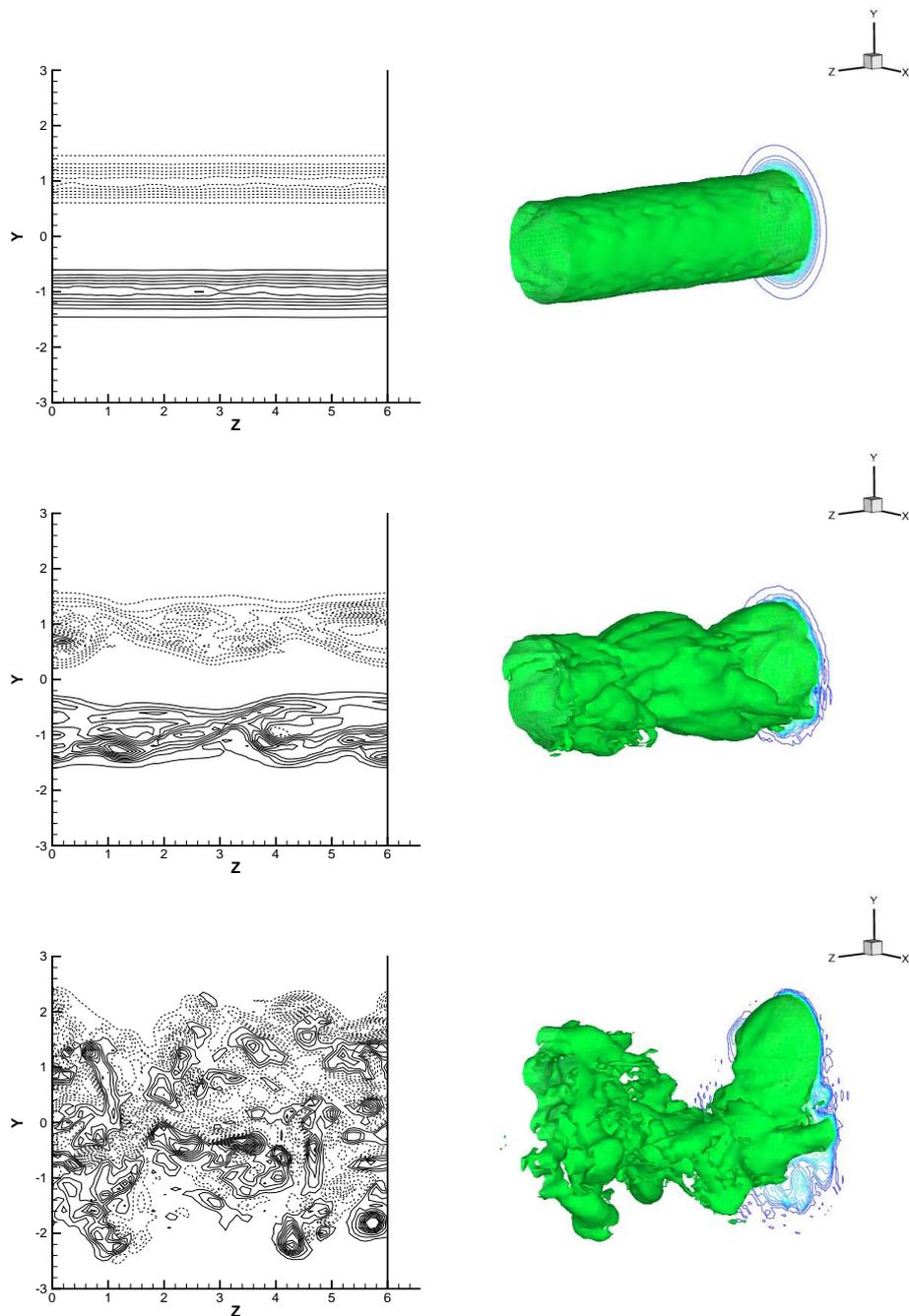


FIG. 4.5 – Dynamique d'un jet froid pour des conditions de vol de type croisière. De haut en bas : $t_j = t/(w_j/r_j) = 15.78/31.56/47.34$. Figures de gauche : isocontours de vorticité transverse ω_x dans le plan $y-z$ à travers le jet [lignes continues pour les isocontours positifs et en pointillé pour ceux négatifs]. Figures de droite : isosurface de scalaire passif $Y_t = 0.4Y_t(t = 0)$.

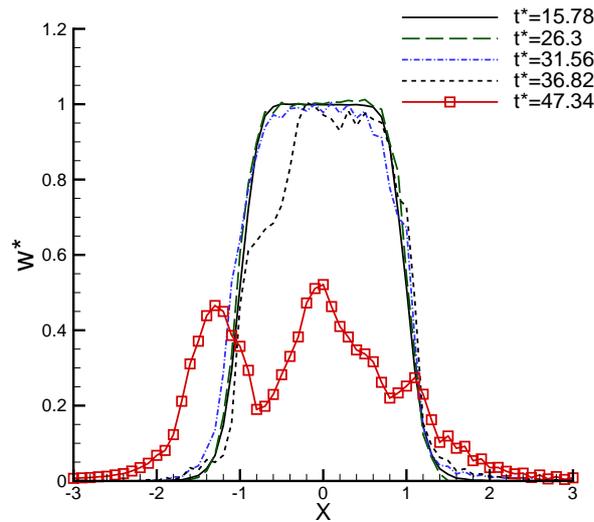


FIG. 4.6 – Évolution de la vitesse axiale du jet w_j dans le plan de coupe transverse $z = 3$.

qui est initialement provoquée par une perturbation de l'écoulement de base. Le choix de la perturbation et de son intensité peuvent contribuer également à des différences notables. Pour s'affranchir de ces incertitudes, on choisit ici un instant de la période d'auto-similarité, garantissant un écoulement de jet turbulent pleinement développé. La solution numérique du jet à $t^* = 47.34$ est ainsi utilisée pour initialiser la simulation d'interaction avec un tourbillon. En effectuant la transformation du passage temporel à une distance spatiale $d = U * t$ (où U est la vitesse de l'avion), cet instant correspond à une distance aval $d \sim 4.34B$ avec B l'envergure de l'avion. En revanche, si on s'affranchit de la longueur de la zone laminaire, elle est estimée à $d \sim 1.2B$ qui est une distance raisonnable pour le début de l'interaction [73].

À l'instant $t^* = 47.34$, la vitesse maximum du jet a diminué de moitié, et le champ est composé de structures d'échelles différentes (Fig. 4.9-a). À l'aide d'une transformée de Fourier discrète (FFT) dans la direction axiale [75], on représente le spectre d'énergie de ce champ turbulent sur la figure 4.9-b. La partie inertielle du spectre de pente $-5/3$ est bien couverte pour les échelles de grandes et moyennes longueurs.

4.3.2 Analyse de l'interaction

L'instant initial de l'interaction correspond à celui où l'écoulement du jet turbulent est ajouté à celui du tourbillon dans le grand domaine de calcul (Fig. 4.3). Le rayon initial du tourbillon est $r_c = 0.5r_j$ avec r_j le rayon initial du jet.

4.3.2.1 Dynamique d'enroulement

La dynamique de l'interaction est gouvernée par l'entraînement du jet dans le champ tourbillonnaire. Elle est illustrée sur les figures 4.10 et 4.11, représentant une isosurface de la vorticité axiale et les isocontours dans le plan $z^* = 0$ ainsi qu'une isosurface de la norme de la vorticité transverse $\omega_t = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ pour distinguer le jet turbulent (configuration de croisière

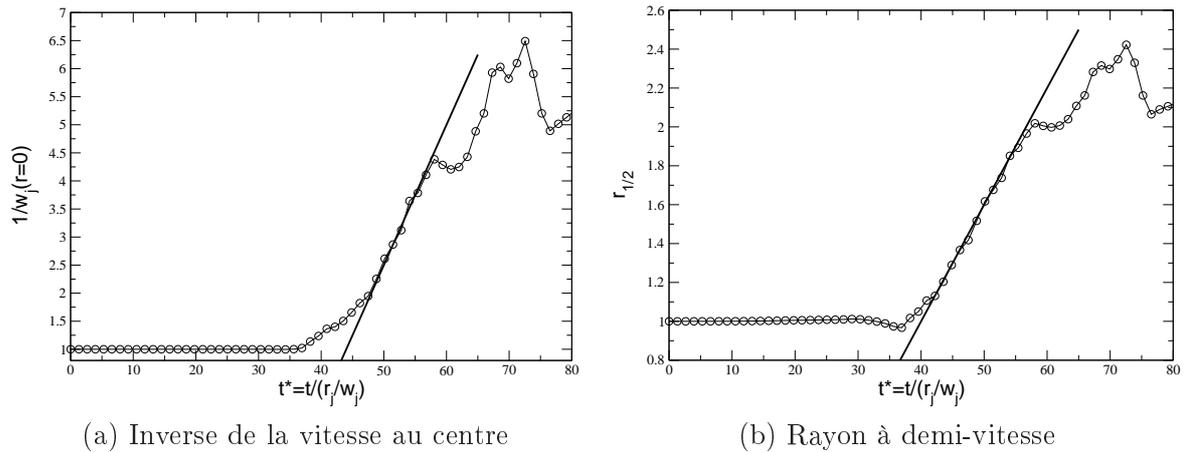


FIG. 4.7 – Évolution de la vitesse axiale moyenne au centre du jet w_j et du rayon moyen à demi-vitesse $r_{1/2}$, normalisés respectivement par leur valeur initiale. Le temps est adimensionné par le temps caractéristique du jet $t_j = r_j/w_j$.

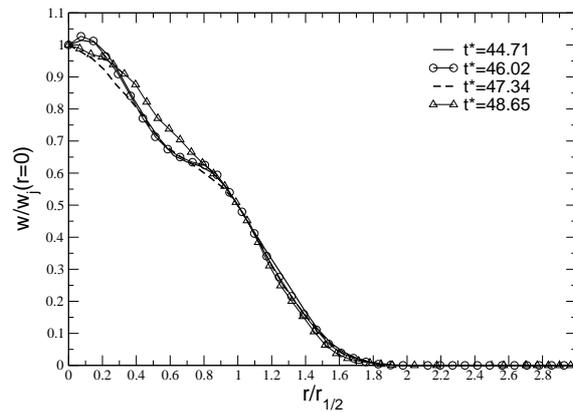


FIG. 4.8 – Profils de vitesse adimensionnée par la vitesse au centre en fonction de la distance radiale adimensionnée par le rayon à demi-vitesse. Le temps est adimensionné par le temps caractéristique du jet $t^* = t/t_j = t/(r_j/w_j)$.

$(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (5, -2)$). Trois phases se distinguent : une première où les structures turbulentes du jet se rapprochent du tourbillon, une seconde où l'interaction est forte lorsqu'elles sont proches, qui est caractérisée par des grands anneaux de vorticit e autour du tourbillon, puis une derni ere o u les grandes structures se dissipent par des processus d'interaction mutuels.

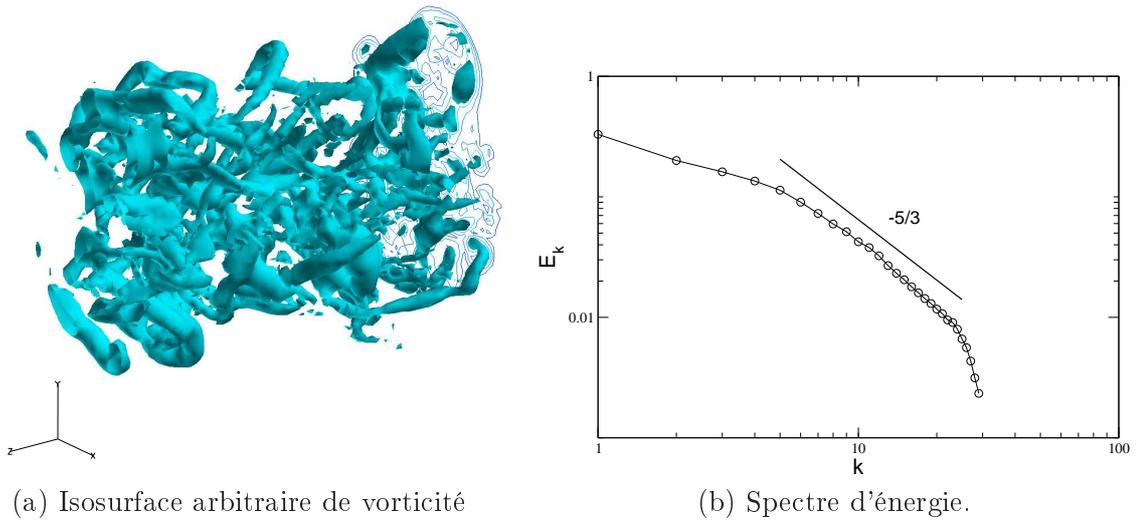


FIG. 4.9 – Jet turbulent choisi comme condition initiale pour la simulation d’interaction avec un tourbillon en conditions de croisière, solution à $t^* = t/t_j = 47.34$

La seconde phase de l’interaction est caractérisée par la création de larges structures annulaires de vorticité azimuthale entourant le tourbillon. Elles résultent de l’interaction entre la vitesse azimuthale du tourbillon et la vitesse axiale du jet, qui s’expliquent d’après l’équation de vorticité azimuthale en coordonnées cylindriques centrées sur l’axe du tourbillon sous forme incompressible :

$$\frac{D\omega_\theta}{Dt} = \omega_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\omega_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \omega_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}. \quad (4.13)$$

Au début de la phase d’entraînement, les composantes radiale et azimuthale sont nulles autour du cœur du tourbillon, $\omega_r = \omega_\theta \simeq 0$. Comme le jet est enroulé par la suite autour du tourbillon, il induit une variation axiale du champ de vitesse azimuthale, conduisant ainsi à $\partial\omega_\theta/\partial t \simeq \omega_z \partial v_\theta/\partial z$.

Bien que l’interaction génère essentiellement de la vorticité azimuthale, il y a également de la vorticité radiale. Une étude plus approfondie pourrait être menée sur la quantification de chaque composante de vorticité résultante de l’interaction.

Au niveau de la dynamique d’interaction, on note d’une part que les structures de vorticité de signes identiques fusionnent ensemble et d’autre part, qu’elles se dissipent en interagissant avec celles de signes opposés (Fig. 4.12). L’écoulement se relaminarise et une structure tourbillonnaire bien définie persiste par la suite. On remarque de plus, que le jet ne pénètre pas à l’intérieur du tourbillon au cours de l’interaction (Fig. 4.11).

4.3.2.2 Influence du jet et de sa position

Il a été décrit dans le paragraphe précédent le processus de génération de vorticité azimuthale lors de l’interaction, on propose ici d’analyser l’évolution temporelle de l’extremum de vorticité azimuthale autour du tourbillon (dans un disque de rayon $r = 2r_c$ pour éviter de considérer la vorticité du jet turbulent). En pratique, la méthode d’extraction est la suivante : le champ de vorticité cartésien est dans un premier temps calculé, puis exprimé dans le repère

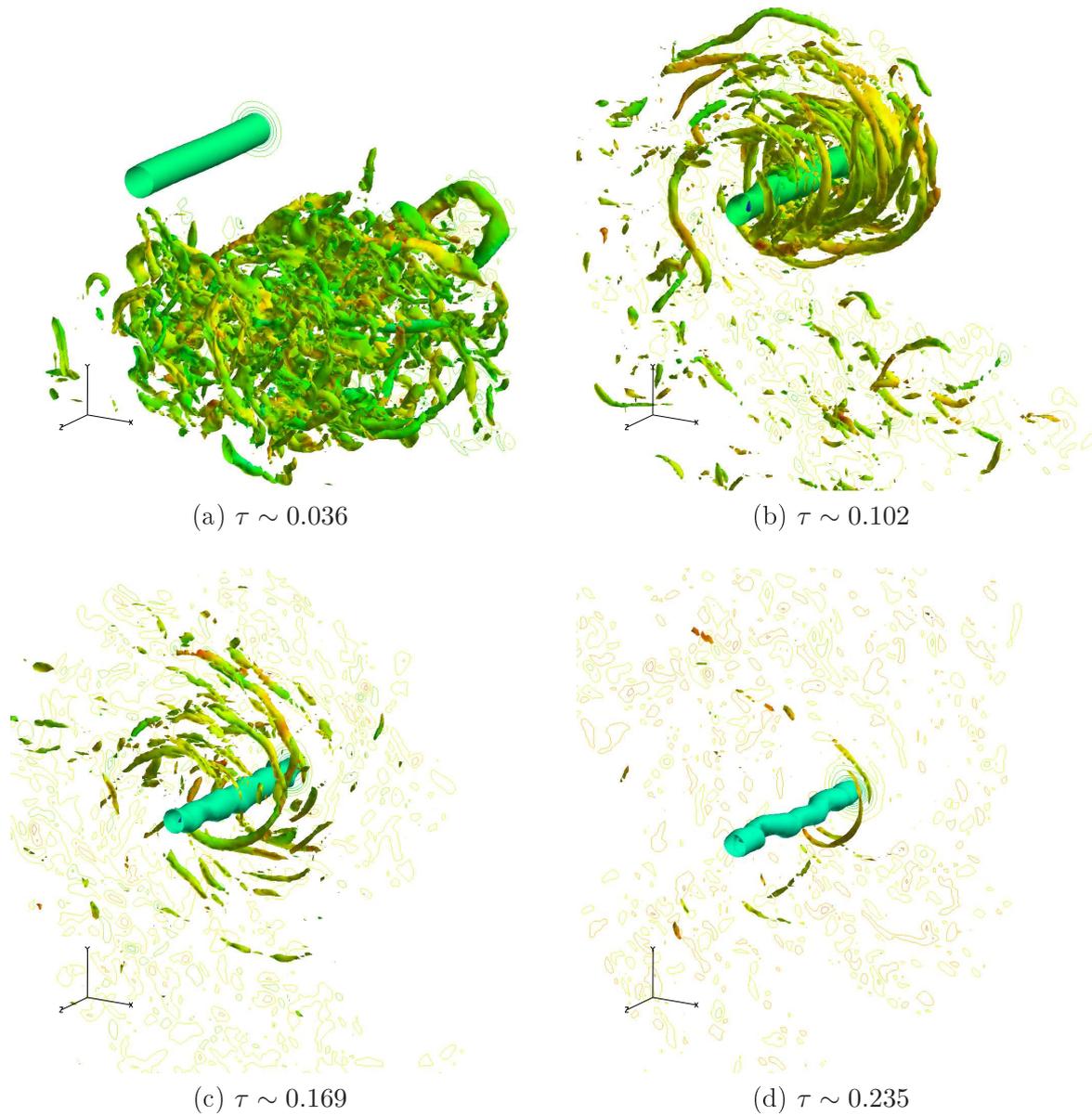


FIG. 4.10 – Interaction jet/tourbillon en condition de croisière $(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (5, -2)$: Isosurface $\omega_z = 0.4\omega_{z_{max}}$ et isocontours dans le plan $z^* = 0$ de la vorticité axiale (tourbillon), et une isosurface de la norme de la vorticité transverse $\omega_t = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ coloriée par la vorticité axiale.

cylindrique associé au tourbillon. L'extremum de vorticité azimutale est extrait dans chaque plan transverse et constitue un ensemble de valeurs parmi lesquelles est considéré le maximum. Cette procédure permet de conserver le caractère local de la formation d'anneau de vorticité azimutale autour du tourbillon. La figure 4.13 représente l'évolution temporelle de ce maximum pour les deux positions initiales du jet considérées. Le processus en trois phases est retrouvé et commence plus tôt lorsque le jet est plus près du tourbillon. L'interaction est

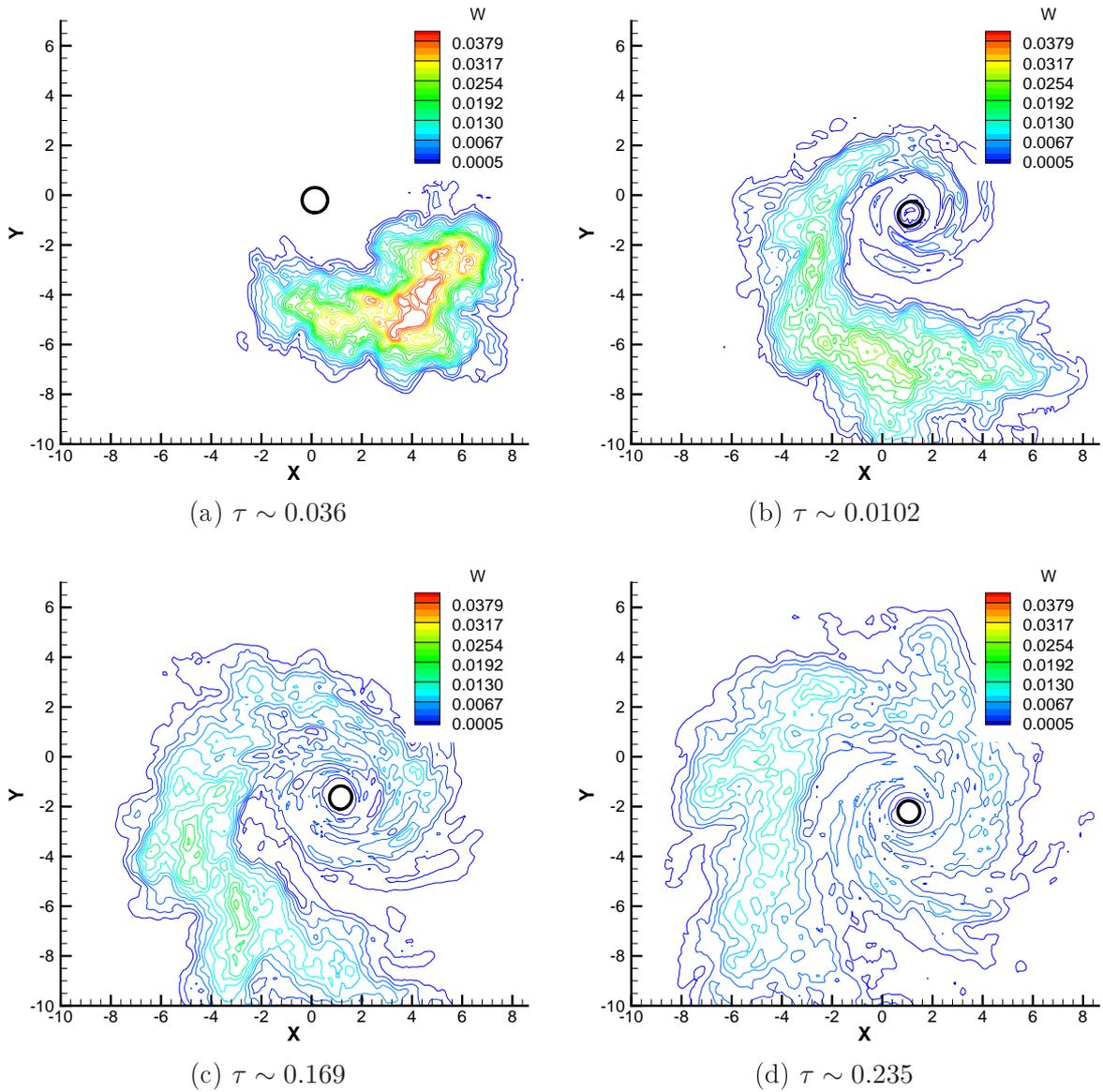


FIG. 4.11 – Isocontours de vitesse moyenne axiale lors de l'interaction en condition de croisière avec $(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (5, -2)$. L'isocontour de vorticité axiale $\omega_z = \omega_{z_{max}}/e^\beta$ est également représenté pour délimiter et positionner le cœur tourbillonnaire ($\omega_{z_{max}}$ est l'extremum de vorticité initial du tourbillon).

dans ce cas plus prononcée, la diffusion turbulente du jet et son étirement étant moindre avant d'interagir avec le champ tourbillonnaire.

Une analyse de l'impact de l'interaction sur le tourbillon est effectuée suivant son profil de circulation $\Gamma(r)$ et de vitesse azimutale $v_\theta(r)$. Pour obtenir ces profils, une moyenne spatiale dans la direction axiale du champ de vitesse cartésien est effectuée. Le champ de vorticité est ensuite calculé, puis interpolé sur un maillage polaire, permettant de déterminer le profil de

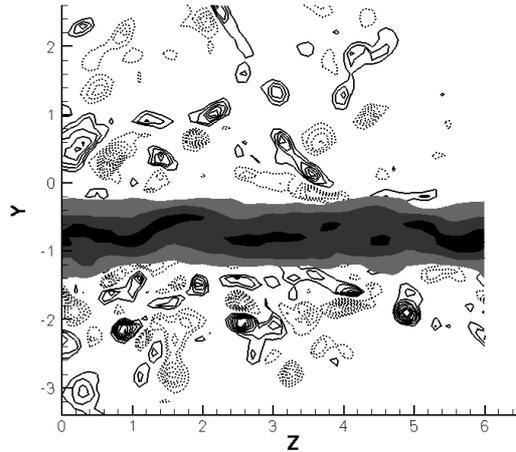


FIG. 4.12 – Isocontours de vorticité azimutale à l’instant $\tau = 0.102$ de l’interaction en condition de croisière dans un plan de coupe à travers le tourbillon (configuration $(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (5, -2)$). Vorticités positives en lignes continues et négatives en lignes pointillées. Le tourbillon est représenté par les isosurfaces de la vorticité axiale telle que $\omega_z \leq \omega_{z_{max}}/e^\beta$.

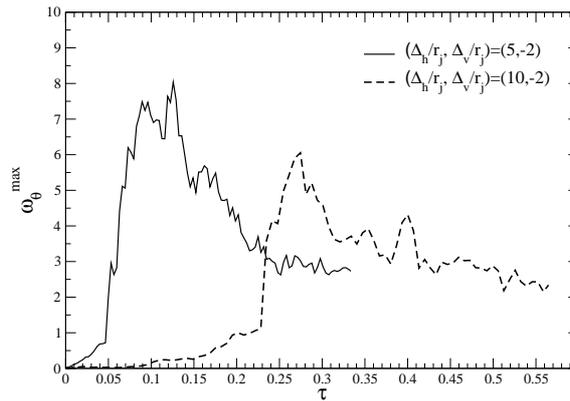


FIG. 4.13 – Évolution de l’extremum local de la vorticité azimutale dans un disque de rayon $r = 2r_c$, pendant l’interaction en condition de croisière pour deux positions initiales du jet.

circulation par intégration radiale et azimutale (Eq. 3.9 et 3.10, chapitre 3). Les profils ainsi obtenus sont tracés sur la figure 4.14 à différents instants. À mesure que le jet turbulent se rapproche du tourbillon, sa circulation diminue dans la région proche du cœur. On remarque que les profils restent non-perturbés pour des rayons $r < r_c$. Les conséquences en terme de vitesse du tourbillon se traduisent par une diminution des extrema. À l’instant $\tau = 0.333$, elle atteint $\sim 38\%$ de la valeur initiale pour le cas $(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (5, -2)$ et $\sim 19\%$ pour $(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (10, -2)$. En revanche, quelle que soit la position initiale du jet, la taille du tourbillon défini par le rayon r_c où la vitesse azimutale atteint un pic, reste constante.

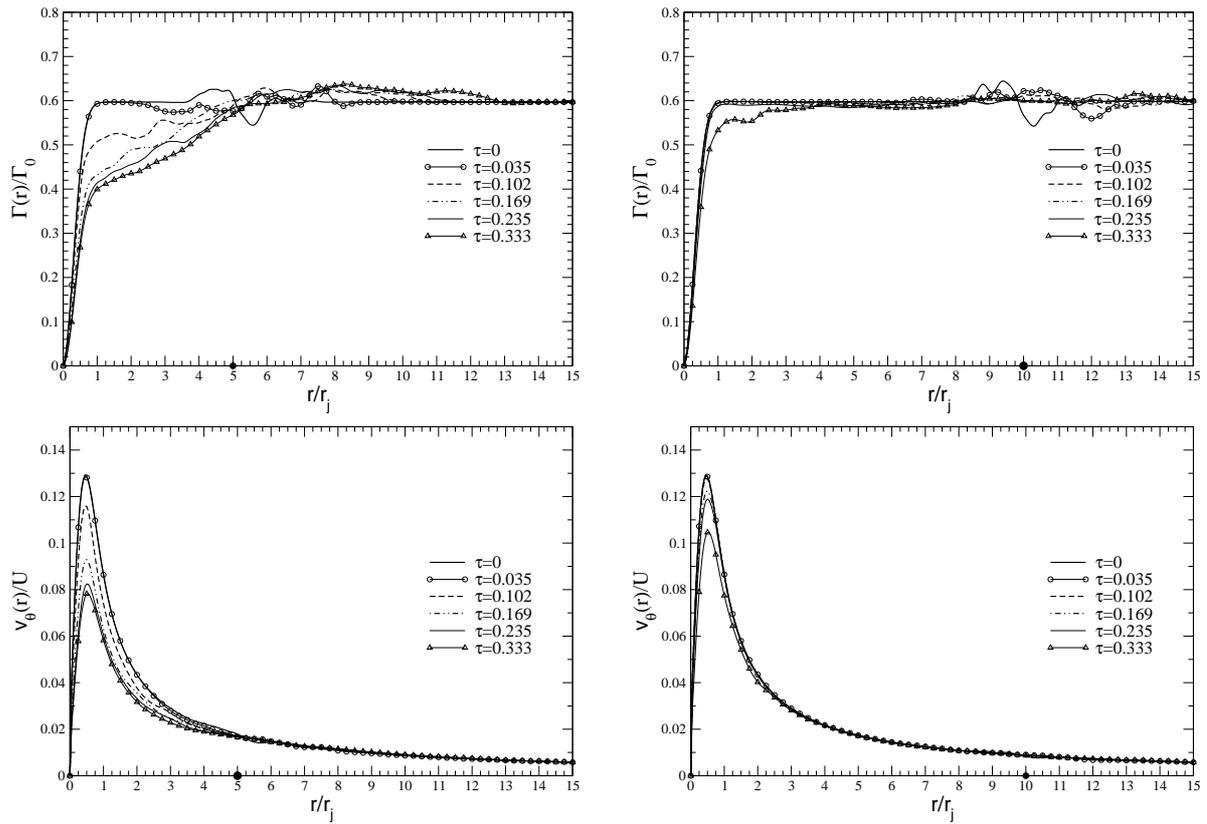


FIG. 4.14 – Profils de circulation $\Gamma(r)$ et de vitesse azimutale $v_\theta(r)$ lors de l'interaction en condition de croisière. La position initiale du jet est indiquée par un point sur l'axe des abscisses. Figures de gauche pour $(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (5, -2)$ et de droite pour $(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (10, -2)$.

4.4 Interaction en conditions hypersustentées

4.4.1 Description de l'interaction

Les configurations étudiées dans cette section modélisent l'interaction entre un tourbillon généré au niveau d'un volet avec le jet débouchant d'un turboréacteur placé juste en dessous, dans des conditions de décollage ou de phase d'approche. Comme le jet est très proche du tourbillon, l'hypothèse de deux régimes distincts ne peut être posée et justifiée. Ainsi, les jets considérés (Tab. 4.3) sont initialement laminaires et leur axe est placé proche du tourbillon (à un diamètre de jet). L'écoulement de base du jet est perturbé initialement par l'ajout d'un bruit blanc ($w_j \rightarrow w_j(1 + \epsilon)$ avec $\epsilon \in [-5 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}]$) pour favoriser l'apparition d'instabilités. Les rapports des vitesses caractéristiques, axiale et azimutale, sont initialement de $w_j/v_{\theta_{max}} \sim 1.71$ pour la configuration de phase d'approche et de $w_j/v_{\theta_{max}} \sim 4.02$ pour la configuration de décollage (valeurs déduites du tableau 4.3).

La dynamique globale est illustrée en suivant l'évolution d'une isosurface de la vorticité axiale et une isosurface de la norme de la vorticité transverse (Fig. 4.15, 4.16). Le jet s'étire et s'enroule dès les premiers instants autour du tourbillon, en raison du champ de contrainte induit par le tourbillon. L'écoulement se déstabilise et devient rapidement turbulent pour

les deux configurations. Un décalage temporel est observé entre la configuration de décollage et celle de phase d'approche, mais le résultat final est similaire avec la présence de grandes structures turbulentes. Paoli *et al.* [75] ont obtenu le même résultat pour ce type d'interaction avec des valeurs de rapports de vitesse proches de celles considérées ici ($w_j/v_{\theta_{max}} = 1.5$ et $w_j/v_{\theta_{max}} = 3$ et un jet placé initialement à une distance deux fois plus courte).

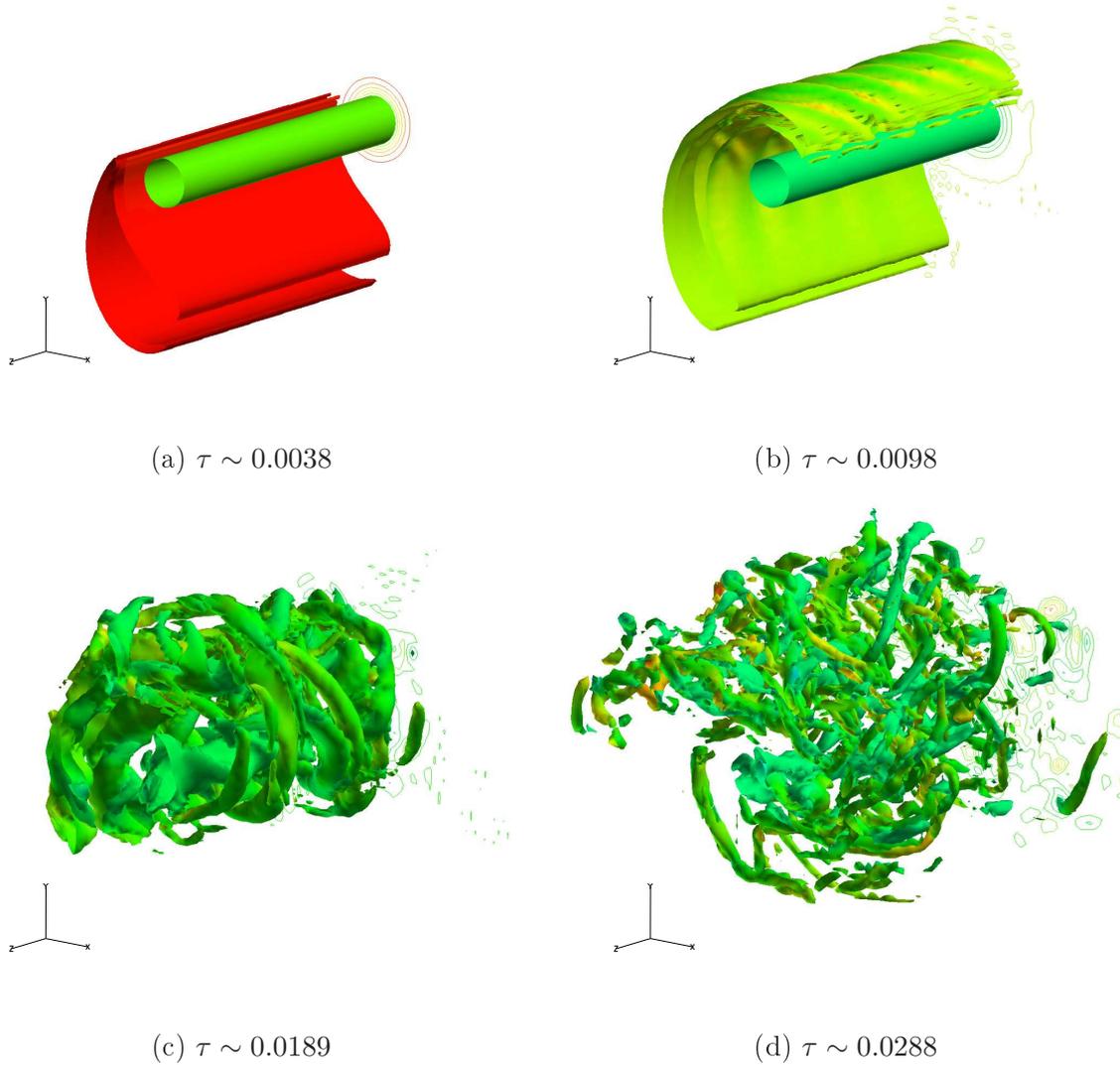


FIG. 4.15 – Interaction jet/tourbillon en condition de phase d'approche : isosurface de la vorticité axiale $\omega_z = 0.4\omega_{z_{max}}$ et isocontours dans le plan $z^* = 0$ ($\omega_{z_{max}}$ est le maximum initial), et une isosurface de la norme de la vorticité transverse $\omega_t = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ coloriée par la vorticité axiale.

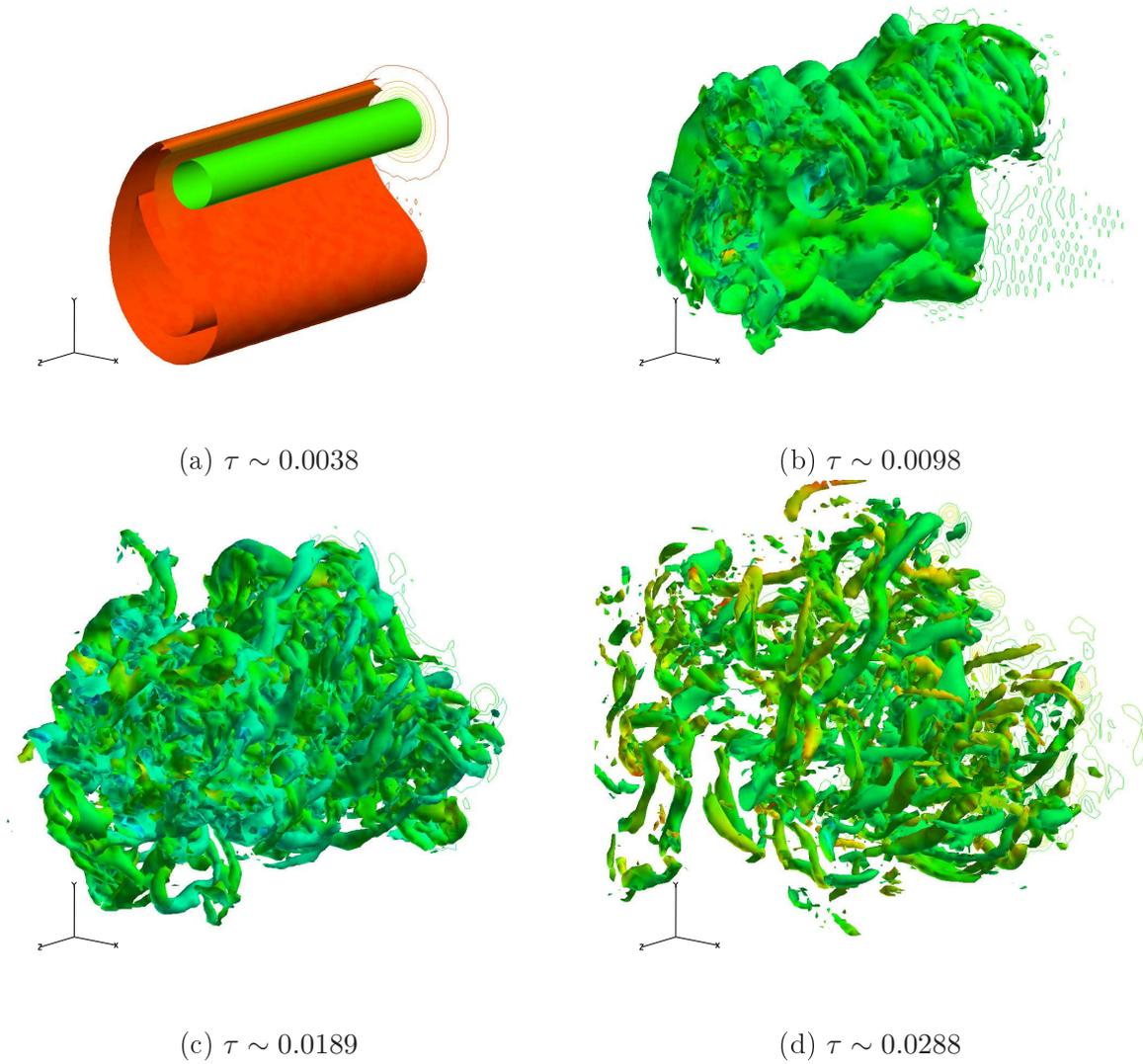


FIG. 4.16 – Interaction jet/tourbillon en condition de décollement : isosurface de la vorticité axiale $\omega_z = 0.4\omega_{z_{max}}$ et isocontours dans le plan $z^* = 0$ ($\omega_{z_{max}}$ est le maximum initial), et une isosurface de la norme de la vorticité transverse $\omega_t = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ coloriée par la vorticité axiale.

4.4.2 Analyse de la structure du tourbillon

Les profils de circulation et de vitesse azimutale permettent de quantifier la structure du tourbillon (Fig. 4.17). Pour les deux configurations, l'interaction se traduit par une perturbation qui se propage vers le cœur (délimité par un rayon de $r_c = 0.5r_j$) jusqu'à l'affecter fortement. La perturbation est indiquée par un excès de circulation typique des instabilités centrifuges (discuté également par Jacquin et Pantano [41]). Ces instabilités se développent dans des écoulements tourbillonnaires lorsqu'il y a présence de vorticité axiale opposée à celle du tourbillon ou d'un maximum local de circulation. L'interaction de la vitesse axiale avec la vitesse azimutale conduit à la génération de larges structures de vorticité radiale, azimutale et axiale de signes différents. Il semblerait donc que ce soit ce type d'instabilité qui est responsable de la déstructuration du tourbillon.

La différence notable entre la configuration de phase d'approche et de décollage est que la déstructuration du tourbillon est plus prononcée en condition de décollage, ce qui peut s'expliquer par l'intensité du jet plus élevée dans ce cas (Tab. 4.3).

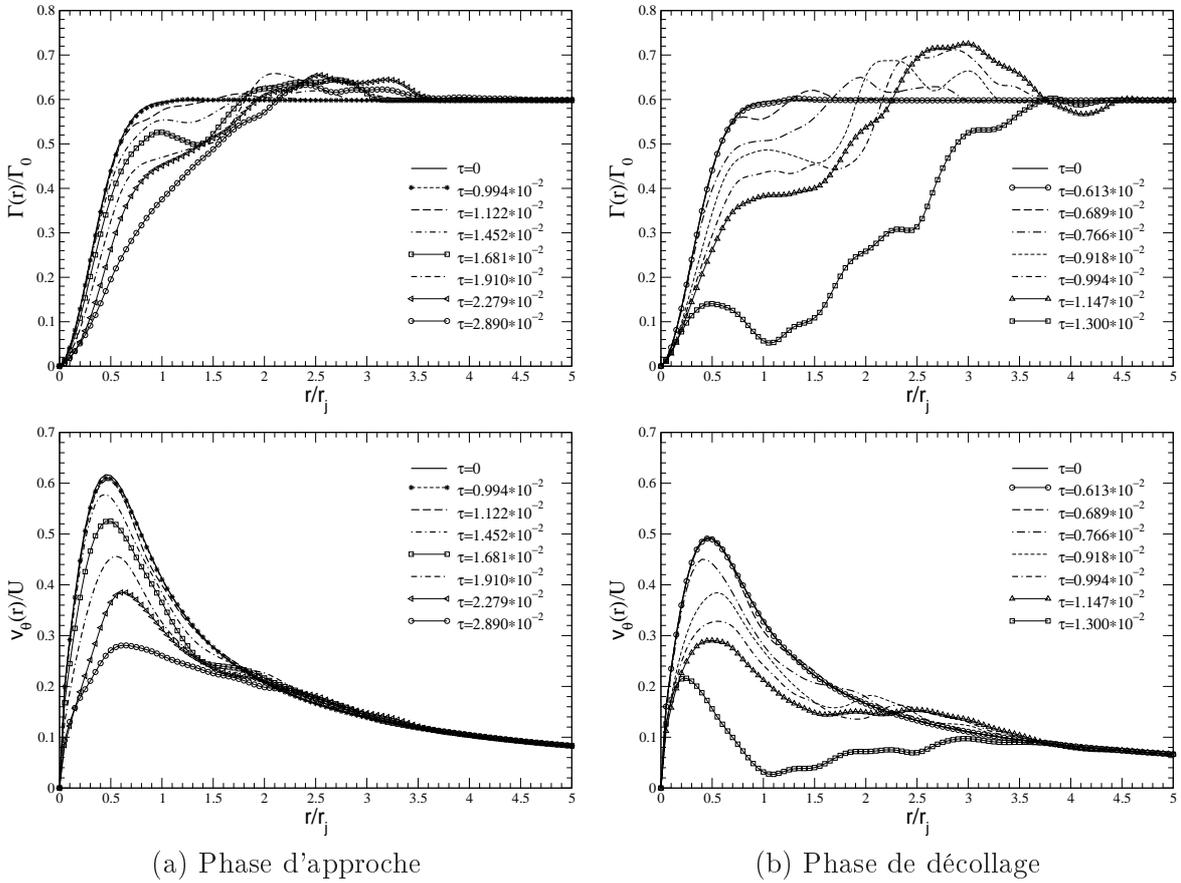


FIG. 4.17 – Profils de circulation $\Gamma(r)$ et de vitesse azimutale $v_\theta(r)$ lors de l'interaction jet/tourbillon en conditions hypersustentées. Le jet est initialement placé à $r = 2r_j$.

Pour les configurations hypersustentées modélisées ici, l'écoulement axial du jet est intense et très proche du tourbillon. La figure 4.18 montre l'évolution de la distribution de vitesse axiale moyennée dans la direction axiale au cours de la dynamique. Le jet s'enroule autour

du tourbillon. En raison de l'interaction avec la vitesse azimutale du tourbillon, l'écoulement devient instable et turbulent. On remarque que pour la configuration de décollage, la vitesse axiale du jet pénètre à l'intérieur du tourbillon. Pour la phase d'approche, elle ne semble pas y entrer ou du moins en plus faible intensité et plus tardivement. Il semble donc possible que pour la configuration de décollage, il y ait un développement d'instabilités hélicoïdales.

En effet, ces configurations d'interaction sont proches d'un écoulement décrit par un tourbillon de Batchelor (champ gaussien de vitesses azimutale et axiale), dont la condition de stabilité est établie en fonction du nombre de *swirl* (instable si $q \leq 1.5$ [57]). Par analogie avec ce type d'écoulement, on évalue un nombre de *swirl* en considérant la vitesse maximale du jet $w_{max} = w_j$, même si les axes de l'écoulement de jet et du tourbillon ne sont pas confondus. Les nombres de *swirl* initiaux des deux conditions hypersustentées ($q \sim 0.918$ en condition d'approche et $q \sim 0.39$ en condition de décollage) considérées ici sont bien inférieurs à la valeur limite de stabilité.

Jacquin et Pantano [41] discutent de l'existence d'une zone tampon, appelée *buffer dispersion*, adjacente au cœur du tourbillon de Batchelor, qui empêcherait la turbulence d'être transportée vers l'intérieur ou vers l'extérieur du tourbillon selon son origine. Ils montrent notamment que cette zone est plus étendue lorsque le nombre de *swirl* est élevé, le tourbillon est dans ce cas plus stable et la turbulence disparaît progressivement due à l'atténuation du cisaillement tandis que le moment angulaire est conservé. En revanche, pour des nombres de *swirl* faibles, la turbulence peut être transportée à travers cette zone, en raison de l'instabilité de l'écoulement et de la diffusion du moment angulaire. Cette zone est presque inexistante pour $q \lesssim 0.7$.

Les deux configurations étudiées sont caractérisées par un nombre de *swirl* faible et différent d'un facteur supérieur à deux. Pour les conditions de décollage, le nombre de *swirl* est inférieur à la valeur limite d'existence d'une zone tampon contrairement au cas de la phase d'approche. Ces résultats confirment l'existence de cette zone tampon, qui apporte une explication au décalage temporel observé dans la dynamique globale d'interaction précédemment décrite. Pour résumer, il semble que la déstructuration du tourbillon soit causée par le couplage ou un processus continu de deux types d'instabilités, centrifuge et hélicoïdale, pour la configuration de décollage tandis qu'elle serait associée uniquement aux instabilités centrifuges pour la configuration de phase d'approche.

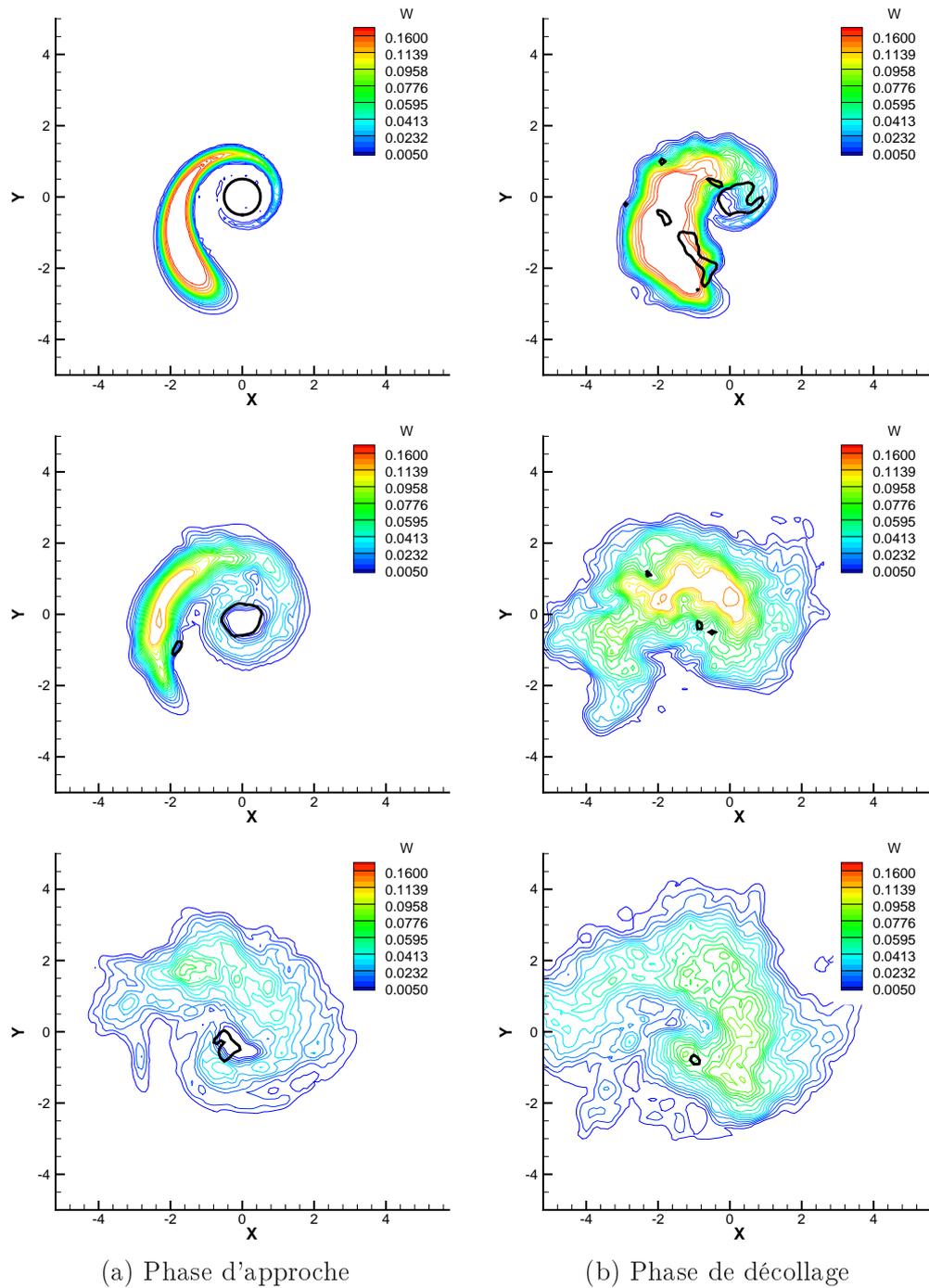


FIG. 4.18 – Isocontours de la vitesse axiale moyenne lors de l'interaction jet/tourbillon en conditions hypersustentées. De haut en bas : $\tau = 0.0098/0.0189/0.0288$. L'isocontour de vorticité $\omega_z = \omega_{z_{max}}/e^\beta$ est également représenté pour délimiter et positionner le cœur tourbillonnaire (ω_{max} est l'extremum de vorticité initial du tourbillon).

4.5 Interactions avec un jet chaud

On s'intéresse dans cette section aux effets de la température du jet qui est plus élevée que celle de l'atmosphère. Les simulations SGE sont réalisées avec le même cadre numérique (domaine, maillage, conditions limites) que celles précédentes avec un jet froid (isotherme à température ambiante). La méthodologie d'initialisation des configurations d'interaction est également identique, notamment pour les conditions de croisière où les simulations sont effectuées en deux étapes (régime du jet et régime d'interaction).

Cette étude se place dans un contexte à isoaleur du paramètre de configuration R (Eq. 4.9), qui se traduit par une poussée des jets froids et chauds identiques (débits différents), pour ces configurations d'interaction simplifiées.

4.5.1 Conditions de croisière

Le développement du jet chaud seul est en premier lieu simulé. Pour les caractéristiques du jet chaud considéré, il se développe une instabilité de Kelvin-Helmholtz. Les échanges thermiques entre le jet et l'air ambiant contribuent à baisser la température maximale du jet (Fig. 4.19-a).

Pour la simulation d'interaction avec un tourbillon, on choisit un instant de la dynamique du jet où il vérifie un comportement auto-similaire. À cet instant $t^* = t/(r_j/w_j) \sim 45.5$, la vitesse et la température ont diminué de moitié. Les résultats des simulations d'interaction ne montrent aucune différence d'un point de vue dynamique avec celles obtenues en considérant un jet froid. Le jet turbulent et son champ de température associé, sont entraînés vers le tourbillon et s'enroule autour de lui (Fig. 4.20). Au cours de ce processus, les échanges thermiques entre le jet et l'air ambiant continuent. Ainsi, lorsque le jet est proche du tourbillon les gradients thermiques sont faibles et n'ont donc que peu d'influence sur le tourbillon (Fig. 4.19-b).

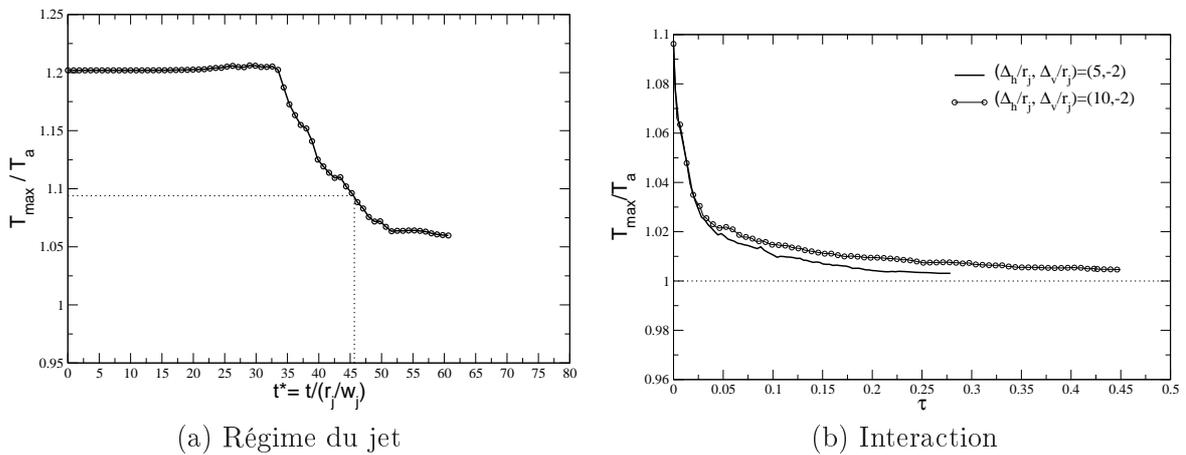


FIG. 4.19 – Maximum de température en condition de croisière pour chaque régime.

Une comparaison des deux types d'interaction d'un tourbillon avec un jet chaud et celle avec un jet froid, est illustrée par la figure 4.21, pour la configuration de croisière où $(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (5, -2)$. Elle représente les isocontours de la vitesse axiale du champ moyen à l'instant $\tau \sim 0.0413$ (solution moyennée dans la direction axiale). Il apparaît que l'entraînement du jet

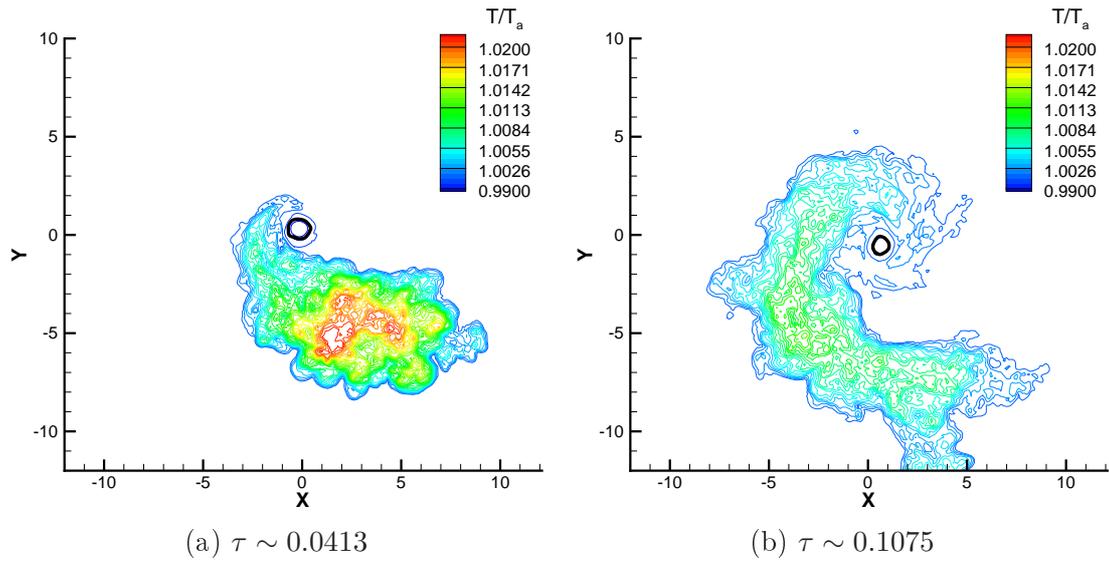


FIG. 4.20 – Isocontours de température au cours de l’interaction en condition de croisière avec $(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (5, -2)$.

commence plus tôt dans le cas d’un jet chaud. Le champ de contrainte induit par le tourbillon sur les couches de fluides de densité plus faible implique un étirement plus important. Ainsi l’interaction est avancée par rapport à celle avec un jet froid.

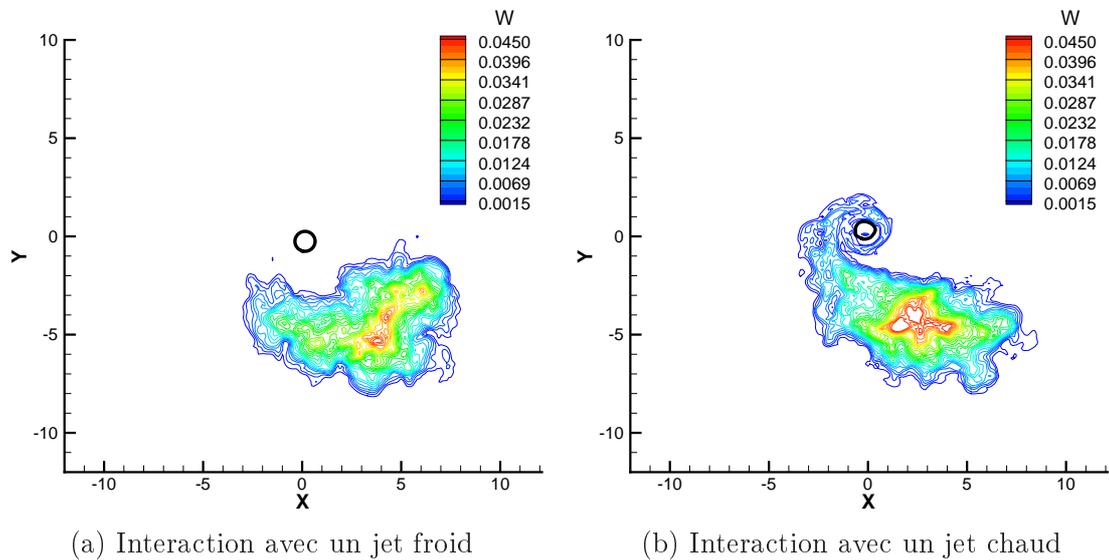


FIG. 4.21 – Isocontours de vitesse axiale moyenne à l’instant $\tau \sim 0.0413$ pour les configurations de type croisière avec un jet positionné initialement tel que $(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (5, -2)$.

L’énergie cinétique transverse peut être utilisée comme quantité pour déterminer l’importance de la dégénérescence d’un sillage tourbillonnaire [16]. On propose ici d’évaluer cette énergie

pour les différentes configurations. Elle est définie par

$$E_{Ccf} = \int_{-L_{yr}/2}^{L_{yr}/2} \int_{-L_{xr}/2}^{L_{xr}/2} \rho(u^2 + v^2) dx dy, \quad (4.14)$$

La figure 4.22 montre que cette énergie décroît lorsque le jet interagit fortement avec le tourbillon. Le décalage temporel entre les configurations avec un jet chaud et celles avec un jet froid est observée dans le cas $(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (5, -2)$. Le jet chaud est entraîné plus tôt autour du tourbillon. Il serait donc possible que ce jet ait plus d'influence sur le tourbillon. Cependant, étant donné l'approche employée ici pour ces conditions de croisière (simulation de deux régimes), cette idée est relativisée par le fait que le jet turbulent initial de l'interaction n'est pas le même. Pour la configuration où le jet est plus éloigné du tourbillon $(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (10, -2)$, l'énergie cinétique transverse se comporte de manière similaire.

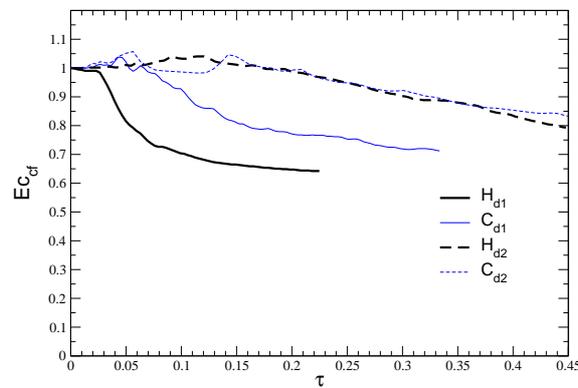


FIG. 4.22 – Énergie cinétique moyenne transverse au cours de l'interaction en condition de croisière. Légende : H_{d1} configuration avec un jet chaud et une position initiale $(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (5, -2)$, H_{d2} pour une position $(\Delta_h/r_j, \Delta_v/r_j) = (10, -2)$. C_{d1} et C_{d2} correspondent au cas d'un jet froid, respectivement pour les mêmes positions initiales du jet.

4.5.2 Conditions hypersustentées

Les configurations où le jet chaud est très proche du tourbillon (décollage et phase d'approche) sont caractérisées par des vitesses du jet légèrement différentes de celles du jet froid (Tab. 4.3). Les simulations montrent que la dynamique est similaire à celle précédemment obtenue avec un jet froid, respectivement pour chaque phase. Le jet est enroulé très rapidement autour du tourbillon et l'interaction conduit à un écoulement turbulent avec une déstructuration du tourbillon (Fig. 4.23, 4.24).

Bien qu'il existe des gradients de température ou de densité proches du tourbillon, il est difficile d'identifier leur influence. L'extremum de température initialement au centre du jet diminue fortement lorsque l'écoulement devient turbulent et tend à s'uniformiser par la suite vers la température ambiante (Fig. 4.25-a). La dynamique semble être contrôlée par l'intensité des vitesses du jet et du tourbillon pour ces configurations où le jet est initialement proche du tourbillon. De plus, l'évolution de l'énergie cinétique moyenne transverse (Eq. 4.14) confirme la similitude des résultats avec le cas d'un jet froid (Fig. 4.25-b).

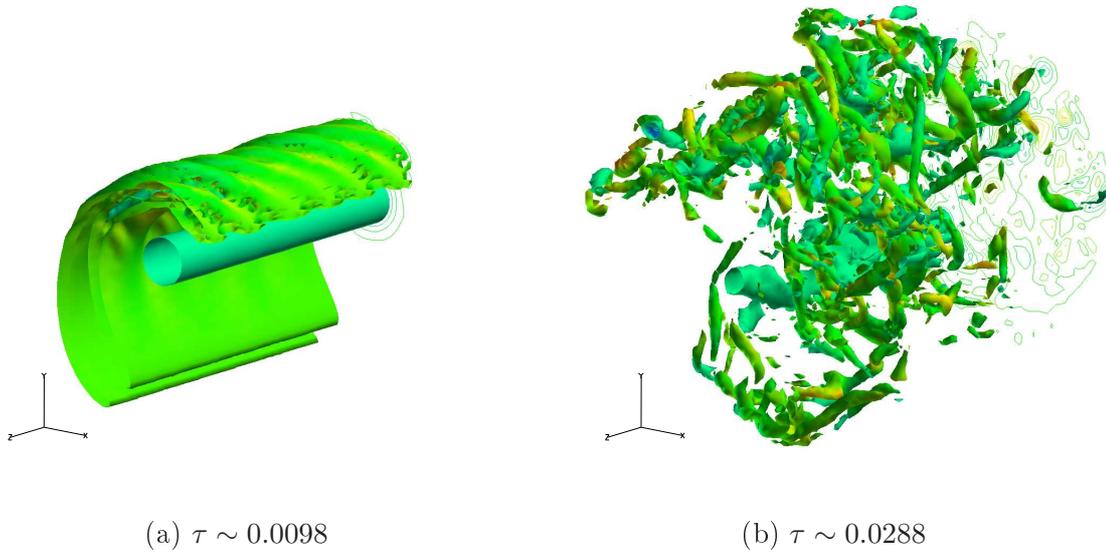


FIG. 4.23 – Interaction jet/tourbillon en condition de phase d'approche : isosurface de la vorticité axiale $\omega_z = 0.4\omega_{z_{max}}$ et isocontours dans le plan $z^* = 0$ ($\omega_{z_{max}}$ est le maximum initial), et une isosurface de la norme de la vorticité transverse $\omega_t = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ coloriée par la vorticité axiale. Les valeurs des isosurfaces sont identiques à celles aux cas d'interaction avec un jet froid.

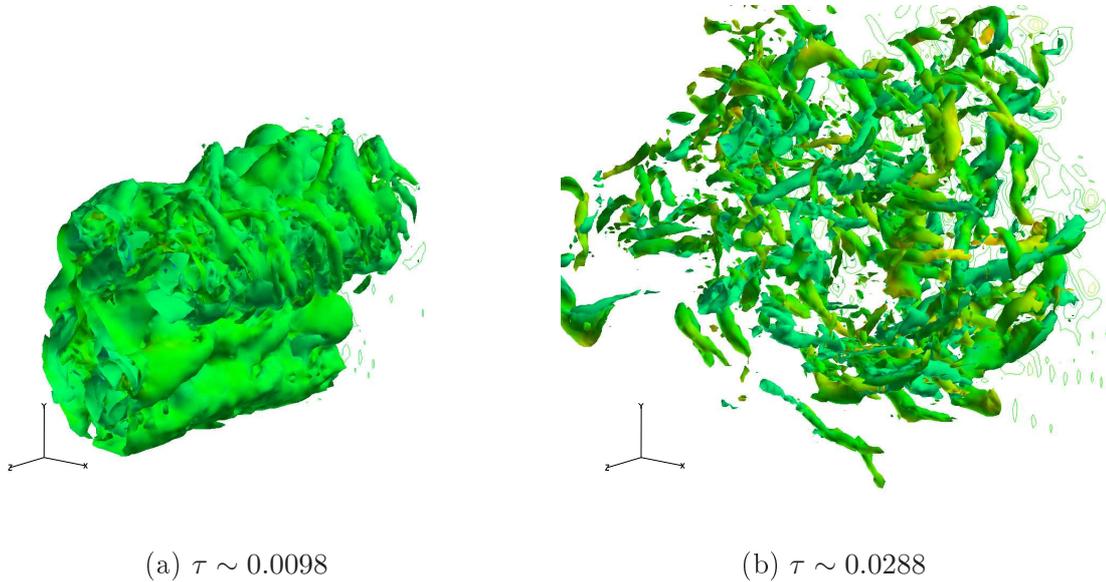


FIG. 4.24 – Interaction jet/tourbillon en condition de décollage : isosurface de la vorticité axiale $\omega_z = 0.4\omega_{z_{max}}$ et isocontours dans le plan $z^* = 0$ ($\omega_{z_{max}}$ est le maximum initial), et une isosurface de la norme de la vorticité transverse $\omega_t = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ coloriée par la vorticité axiale. Les valeurs des isosurfaces sont identiques à celles aux cas d'interaction avec un jet froid.

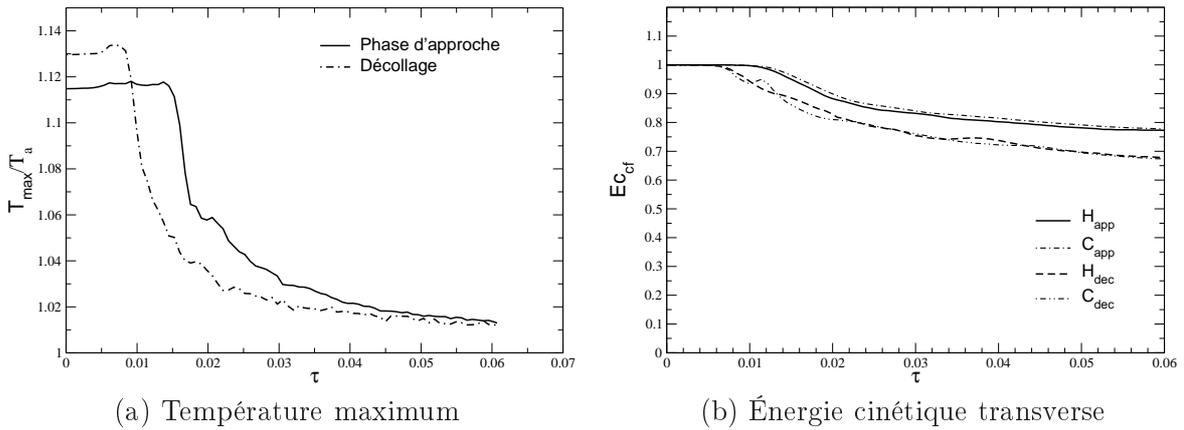


FIG. 4.25 – Configurations d'interaction en conditions hypersustentées. (a) Évolution du maximum de température moyenne dans le cas d'interaction avec un jet chaud. (b) Comparaison de l'évolution de l'énergie cinétique transverse. Légende : H_{app} pour la configuration d'approche avec un jet chaud et C_{app} avec un jet froid ; H_{dec} pour la configuration de décollage avec un jet chaud et C_{dec} avec un jet froid.

4.6 Conclusion

Les simulations SGE de l'interaction entre un jet et un tourbillon ont été réalisées pour des configurations de vol réalistes (décollage, croisière et phase d'approche). Bien que la modélisation numérique nécessite des approximations de ce type d'écoulement, les valeurs des paramètres caractéristiques utilisées sont proches des conditions réelles. Il a été mis en évidence que l'impact du jet sur le tourbillon s'avère prononcé pour des distances de séparation courtes. En conditions de vol hypersustentées, le tourbillon généré au niveau d'un volet juste au-dessus d'un moteur est même complètement déstructuré ; tandis que pour les conditions de croisière, l'interaction conduit à une diminution du pic de vitesse du tourbillon sans changer sa taille.

Pour la gamme de valeurs des paramètres considérée ici, la différence de température entre le jet et l'atmosphère ne semble pas avoir de conséquences sur la dynamique d'interaction quelles que soient les conditions de vol. Il a toutefois été obtenu que le jet chaud s'enroulait plus tôt en conditions de croisière lorsque le jet était proche du tourbillon, ce qui correspond à une modélisation d'interaction entre le jet extérieur et le tourbillon de bout d'aile d'un avion quadri-moteur. Pour les autres configurations, il n'y a pas de différence notable. Les deux paramètres importants de la dynamique d'interaction sont donc la distance entre le jet et le tourbillon ainsi que le rapport d'intensité.

Fusion de deux tourbillons co-rotatifs identiques

5.1 Introduction

L'étude présentée dans ce chapitre concerne le mécanisme de fusion de deux tourbillons co-rotatifs. Ce processus est aujourd'hui bien connu et documenté dans la littérature en raison des nombreux domaines dans lesquels il est présent (turbulence, météorologie, géophysique, aéronautique...). Dans le contexte des tourbillons de sillage d'avion, ce phénomène a lieu derrière chaque aile entre les tourbillons émis en bout d'aile et de volet sur une distance aval entre cinq et dix envergures (champ proche étendu), essentiellement en conditions de vol hypersustentées (Fig. 5.1).

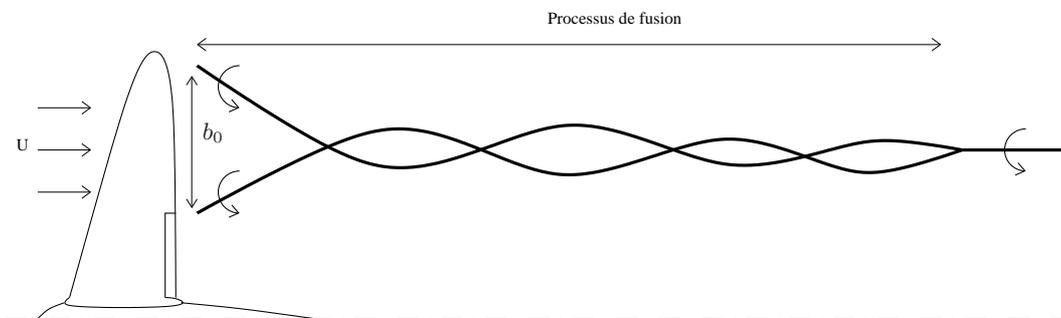


FIG. 5.1 – Schéma en vue de dessus du processus de fusion des tourbillons co-rotatifs de bout d'aile et de volet, dans le champ proche étendu d'un sillage d'avion.

Les expériences de Cerretelli et Williamson [10] ont montré que le mécanisme de fusion de deux tourbillons co-rotatifs à faible nombre de Reynolds étaient essentiellement bidimensionnel et avait lieu dans des conditions stables des tourbillons. Ils montrent notamment que ce processus se décompose en quatre étapes : une première étape de diffusion, une étape de convection, une seconde étape de diffusion et une étape d'axisymétrisation (discutées en détail dans la section 5.3.2). Meunier *et al.* [61] montrent que l'amorce du processus de fusion commence dès que le

rapport entre le rayon d'un tourbillon a et la distance qui le sépare de son voisin b atteignait la valeur critique $(a/b)_c \sim 0.22 - 0.24$.

Pour des sillages réels d'avion, ce rapport caractéristique est inférieur à cette valeur seuil, et la diffusion visqueuse des tourbillons est très lente (nombre de Reynolds très élevé de l'ordre de 10^6). Cependant, l'enroulement de toute la nappe de vorticité contribue à l'augmentation de la taille des tourbillons a , et l'influence d'autres tourbillons de signes opposés (celui de l'empennage par exemple) peut conduire à une réduction de la distance de séparation b , la valeur critique $(a/b)_c$ peut ainsi être atteinte. Le processus de fusion bidimensionnel stable peut donc avoir lieu dans des configurations réelles de sillage d'avion.

Un autre mécanisme identifié expérimentalement par Meunier et Leweke [63] mène à la fusion des tourbillons, c'est le développement d'une instabilité de courte longueur d'onde (fusion tridimensionnelle instable). Cette instabilité est appelée instabilité elliptique car elle a pour origine la déformation des lignes de courant internes des tourbillons prenant une forme elliptique en raison du champ de contrainte induit par un tourbillon sur son voisin. Elle est caractérisée par une déformation sinusoïdale des tourbillons le long de leur axe. Le Dizès et Laporte [48] ont établi une relation analytique de prédiction du taux d'amplification et des longueurs d'ondes de l'instabilité elliptique pour des tourbillons gaussiens, confirmée par des simulations SND et SGE. Ce taux dépend du rapport a/b et du nombre de Reynolds.

Meunier *et al.* [62] ont synthétisé les derniers travaux expérimentaux, théoriques et numériques de ces deux mécanismes menant à la fusion des tourbillons. Ils mentionnent quelques questions encore ouvertes à propos de la modélisation utilisée pour cet écoulement : l'influence d'un modèle de tourbillon non-gaussien sur ce processus de fusion, l'effet de la vitesse axiale et d'une dissymétrie des tourbillons. Les objectifs de ce chapitre correspondent aux deux premiers points, pour lesquels deux approches numériques ont été employées, temporelle et spatiale.

La première section de ce chapitre est dédiée à la définition des modèles de tourbillon utilisés et introduit les configurations considérées pour l'approche temporelle. La seconde section présente les résultats des simulations temporelles SND et SGE pour lesquelles il n'y a pas d'écoulement axial. Dans ce chapitre, on évoquera la fusion stable en l'absence de développement d'instabilités et la fusion instable dans le cas contraire. Il est ensuite discuté, dans la troisième section, des premiers résultats de simulations spatiales SND du développement d'instabilités avec vitesse axiale. Ce type de simulation a été réalisée pour la première fois à notre connaissance par Orlandi [72].

5.2 Modélisation et condition initiale

Le système de deux tourbillons co-rotatifs considéré ici modélise les deux tourbillons émis en bout d'aile et de volet. On suppose que l'enroulement de la nappe de vorticité autour de ces tourbillons est complet, permettant ainsi de considérer des tourbillons bien formés et concentrés localement. De plus, on se place dans un contexte simplifié et fondamental, où les deux tourbillons co-rotatifs sont de taille et d'intensité identiques, les objectifs majeurs étant la compréhension et la caractérisation de leur interaction.

5.2.1 Modèle analytique de tourbillon

Plusieurs modèles analytiques existent pour décrire un tourbillon issu d'un enroulement de nappe de vorticité, en majeure partie récapitulés par Gerz *et al.* [29]. Deux familles se dis-

tingent : une où les modèles se définissent avec une seule échelle de longueur caractéristique comme celui de Lamb-Oseen ou encore de Hallock-Burnham, et une autre avec des modèles basés sur deux échelles de longueur caractéristiques comme ceux de Fabre et Jacquin [37], [22], *Vortex Model 1* (VM1) et *Vortex Model 2* (VM2). Ils ont établi ces modèles à partir de données expérimentales qui correspondent à la structure d'un tourbillon issu d'un enroulement de nappe de vorticité (résultat observé également dans les expériences de Devenport *et al.* [18]). Un des objectifs dans ce chapitre est l'analyse de l'influence de la structure des tourbillons sur le processus de fusion de deux tourbillons co-rotatifs. Deux modèles ont donc été étudiés : celui de Lamb-Oseen (LO) et celui de Fabre et Jacquin VM2 [22].

Le modèle de tourbillon de Lamb-Oseen est décrit à l'aide d'une seule échelle de longueur caractéristique, le rayon $r = r_c$ où est atteint l'extremum de vitesse azimutale. Le fluide suit un mouvement de rotation sans déformation $v_\theta(r) \sim r$ dans le cœur du tourbillon ($0 < r < r_c$), tandis que la vitesse décroît potentiellement $v_\theta(r) \sim 1/r$   l'extérieur ($r > r_c$). La distribution analytique de vitesse azimutale exprimée en coordonnées cylindriques s'écrit

$$v_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - e^{-(\frac{r}{a})^2}), \quad (5.1)$$

où Γ représente la circulation du tourbillon et a son rayon de dispersion défini à partir du second moment de la vorticité :

$$a = \frac{1}{\Gamma} \int \int r^2 \omega dS, \quad (5.2)$$

où S est la surface contenant le champ tourbillonnaire. Les rayons r_c et a sont liés par la relation linéaire : $r_c \sim 1.12a$ [82]. La circulation est proportionnelle à l'extremum de vitesse et au rayon caractéristique r_c telle que

$$\Gamma = 2\pi \epsilon r_c v_{\theta_{max}}, \quad \epsilon = \frac{1}{(1 - e^{-(\frac{r_c}{a})^2})}. \quad (5.3)$$

Le modèle VM2 de Fabre et Jacquin [22] a été construit à partir de données expérimentales obtenues en soufflerie. Il est basé sur deux échelles de longueur caractéristiques. Le premier rayon a_1 correspond à la position du maximum de vitesse azimutale, noté V_1 . Le second rayon a_2 marque le début de la région externe potentielle. La zone intermédiaire entre ces deux rayons est caractérisée par une loi en puissance $v_\theta(r) \sim r^{-\alpha}$. Ce modèle de tourbillon s'écrit en coordonnées cylindriques

$$v_\theta(r) = \frac{\Omega_0 r}{[1 + (r/a_1)^4]^{(1+\alpha)/4} [1 + (r/a_2)^4]^{(1-\alpha)/4}}, \quad (5.4)$$

où $\Omega_0 = V_1/a_1$ est la vitesse angulaire dans la région interne. La circulation de ce type de tourbillon est définie par la relation :

$$\Gamma = 2\pi \Omega_0 a_1^2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{(1-\alpha)}. \quad (5.5)$$

Les paramètres α et a_2/a_1 définissent une famille de profils de vitesse, les valeurs utilisées pour cette étude sont $(\alpha, a_2/a_1) = (0.5, 10)$. Ces valeurs correspondent à celles obtenues expérimentalement en soufflerie avec une aile d'avion de type A300 [37].

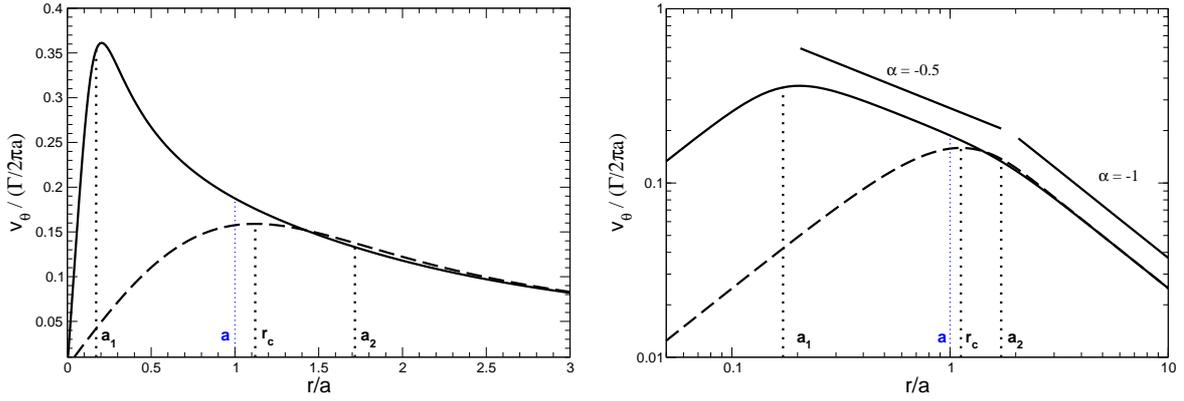


FIG. 5.2 – Profils de vitesse azimutale d’un tourbillon VM2 (ligne continue) et Lamb-Oseen (ligne pointillée), pour un rayon de dispersion et une circulation identiques. La distance radiale est adimensionnée par le rayon de dispersion initial a_0 et la vitesse en utilisant la circulation Γ et a_0 .

Pour un tourbillon axisymétrique de circulation Γ et de rayon de dispersion a identique, la figure 5.2 représente les profils de vitesse azimutale de chaque modèle, VM2 et Lamb-Oseen. Le tourbillon VM2 est plus concentré que le tourbillon LO, son rayon de dispersion a est lié au rayon caractéristique a_1 tel que $a_1 \sim 0.1716a$ tandis que pour un tourbillon de Lamb-Oseen la relation est $r_c \sim 1.12a$ [82].

5.2.2 Initialisation

Le champ de vitesse azimutale d’un tourbillon, VM2 ou Lamb-Oseen, permet d’initialiser le champ de vitesse en coordonnées cartésiennes. Le champ de pression est déduit de la vitesse azimutale à l’aide de l’équation d’équilibre entre l’accélération centrifuge et la force de pression. Cette équation exprimée dans un repère cylindrique suivant la direction radiale s’écrit

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta^2(r)}{r} \quad (5.6)$$

Le champ de pression ainsi défini est intégré radialement sur une distance limitée par la taille du domaine de calcul, puis interpolé sur le maillage cartésien pour chaque tourbillon. La configuration du système de deux tourbillons est définie par le rapport a/b initial entre la taille caractéristique d’un tourbillon a et la distance de séparation b entre les deux centres tourbillonnaires, ainsi que par le nombre de Reynolds basé sur la circulation

$$Re_\Gamma = \frac{\Gamma}{\nu}. \quad (5.7)$$

La distance initiale entre les deux tourbillons b_0 est utilisée dans toute la suite comme longueur de référence.

5.3 Simulations temporelles

Les processus de fusion bidimensionnel et tridimensionnel de deux tourbillons co-rotatifs sans vitesse axiale sont présentés dans cette section. Les simulations sont réalisées suivant l'approche temporelle étant donné que dans les sillages réels d'avion, l'hypothèse d'un écoulement quasi-parallèle est valable dans un domaine de calcul ayant une courte longueur axiale.

5.3.1 Description des simulations

Pour les simulations bidimensionnelles, le domaine de calcul est un carré de côté $L = 20b_0$, dans lequel est placé le système de tourbillons co-rotatifs en son centre. Cette taille de domaine de calcul est relativement élevée, mais elle permet de minimiser l'influence des conditions limites latérales. En effet, l'écoulement au niveau des frontières est censé être au repos mais cette condition ne peut être assurée en raison de l'écoulement induit par les tourbillons. La difficulté du traitement des conditions limites latérales est associée à la circulation non nulle qui a été montrée et discutée dans la section 2.4.2.3 du chapitre 2. Les conditions limites de symétrie sont employées ici à chaque frontière latérale car le domaine de calcul est très grand vis-à-vis de l'échelle du tourbillon (influence des tourbillons images négligeable). De plus, Shreedar et Ragab [89] ont obtenu de bons résultats avec ce type de condition limite pour les frontières latérales.

Deux systèmes de tourbillons sont considérées pour cette étude. Ils sont caractérisés par un rapport caractéristique entre la taille des tourbillons a_0 et la distance qui les séparent b_0 , tels que $a_0/b_0 = 0.1$ et $a_0/b_0 = 0.15$. On utilise un maillage fin et régulier dans la zone d'intérêt de l'écoulement et étiré autour pour limiter le coût du calcul. Dans la région de pas d'espace régulier, le cœur d'un tourbillon définie par le rayon de dispersion a est discrétisé avec 14 points pour les configurations avec $a_0/b_0 = 0.1$ et 21 points pour $a_0/b_0 = 0.15$.

Le mécanisme de fusion stable est connu pour être bidimensionnel [63], il est donc étudiée ici à l'aide de simulations numériques directes (SND) bi-dimensionnelles. Les configurations considérées pour cette étude sont récapitulées dans le tableau 5.1.

Les simulations temporelles tridimensionnelles du développement d'instabilités elliptiques

Configuration	Modèle	a_0/b_0	Re_Γ	Nx	Ny	Nz
<i>L1</i>	LO	0.1	750	401	401	1
<i>L2</i>	LO	0.1	1500	401	401	1
<i>L2b</i>	LO	0.15	1500	401	401	1
<i>L3</i>	LO	0.1	5000	401	401	1
<i>L4</i>	LO	0.15	10000	401	401	1
<i>V1</i>	VM2	0.1	750	401	401	1
<i>V2</i>	VM2	0.1	1500	401	401	1
<i>V3</i>	VM2	0.1	5000	401	401	1
<i>V4</i>	VM2	0.15	10000	401	401	1

TAB. 5.1 – Récapitulatif des simulations temporelles bidimensionnelles.

menant à la fusion des tourbillons (fusion instable) sont récapitulées dans le tableau 5.2. Le domaine de calcul est un parallépipède pour ces simulations, dont chaque plan transverse est

identique à celui employé pour les simulations $2D$ (carré de côté L). La longueur axiale L_z est choisie en fonction du nombre d'onde de l'instabilité elliptique (méthode précisée dans la section 5.3.3). Les configurations $L5$ et $V5$ ont été réalisées dans le but d'une comparaison avec le processus de fusion stable d'où le choix du nombre de Reynolds intermédiaire $Re_\Gamma = 10000$, tandis que les configurations $L6$ et $V6$ correspondent à un nombre de Reynolds élevé plus proche d'écoulements de sillage réels.

L'ensemble des simulations bidimensionnelles et tridimensionnelles ont été réalisées dans le contexte d'écoulement quasi-incompressible (vitesses initiales des tourbillons correspondent à un nombre de Mach $M = 0.2$).

Configuration	Modèle	a_0/b_0	Re_Γ	Nx	Ny	Nz	L_z/b_0	SND	SGE
$L5$	LO	0.15	10000	401	401	36	1.48	*	
$L5b$	LO	0.15	10000	401	401	36	1.92	*	
$L6$	LO	0.15	240000	401	401	36	1.48		*
$V5$	VM2	0.15	10000	401	401	36	1.48	*	
$V6$	VM2	0.15	240000	401	401	36	1.48		*

TAB. 5.2 – Récapitulatif des simulations temporelles tridimensionnelles.

5.3.2 Processus bidimensionnel : fusion stable

Pour étudier le mécanisme de fusion bidimensionnel stable, on considère une configuration simplifiée de deux tourbillons co-rotatifs et symétriques (circulation et taille identiques) de faibles rapports caractéristiques a/b évoluant sous l'effet de la viscosité. Cette dernière est utilisée pour modéliser l'augmentation du rapport a/b (diffusion de la taille des tourbillons $a = \sqrt{a_0^2 + 4\nu t}$ [82]), car l'enroulement de la nappe de vorticité et les tourbillons secondaires ne sont pas pris en compte dans la modélisation.

5.3.2.1 Dynamique globale

La dynamique globale de la fusion stable est illustrée sur la figure 5.3 repr esentant des isocontours de vorticité et des lignes de courant tracées dans le repère lié au système tourbillonnaire (son origine est le centre du système et son abscisse est la ligne de connectivité des deux tourbillons). Cerretelli et Williamson [10] ont mis en évidence expérimentalement que ce processus se décompose en quatre étapes :

- une première étape de diffusion, où les tourbillons tournent l'un autour de l'autre à la vitesse angulaire $\Omega = \Gamma/\pi b_0^2$, tandis que leur taille augmente par diffusion visqueuse. La forme initiale axisymétrique des tourbillons devient rapidement elliptique à cause du champ de contrainte induit par un tourbillon sur son voisin, et la majeure partie de leur vorticité est confinée dans les zones internes de la ligne de courant séparatrice en forme de « huit ».
- Une deuxième étape, dite convective, qui débute lorsqu'une partie de la vorticité associée à un tourbillon traverse cette ligne de courant. Elle est ensuite convectée le long des deux lignes de courant externes et les tourbillons commencent à échanger leur vorticité respective et à se rapprocher. Deux arguments sont avancés pour expliquer cette phase, soit elle est due à la création d'un champ de vorticité antisymétrique pr esentant deux

dipôles qui induisent une vitesse de rapprochement des deux tourbillons [10], soit elle est une conséquence de la conservation du second moment de la vorticité [63].

- Une troisième étape, nommée seconde étape de diffusion, où les deux centres tourbillonnaires sont encore visibles, l'écoulement est alors caractérisé par l'interaction entre le cisaillement des cœurs tourbillonnaires et la diffusion visqueuse.
- Une dernière étape, appelée d'axisymétrisation, où la fusion des tourbillons est complète avec un seul extremum de vorticité, les filaments de vorticité disparaissent sous l'effet combiné du cisaillement et de la diffusion (*shear-diffusion*). Le tourbillon final devient ainsi axisymétrique.

5.3.2.2 Caractérisation

Les évolutions temporelles de la distance de séparation entre les deux tourbillons et de leur taille transcrivent quantitativement le processus de fusion stable en quatre étapes (Fig. 5.4). L'étape 2 de convection débute lorsqu'ils commencent à se rapprocher et à échanger de leur vorticité, le rapport caractéristique du système ayant atteint la valeur critique $(a/b)_c \sim 0.22$. La détermination de ce rapport critique a fait l'objet de nombreuses études (revues par Meunier *et al.* [63]), sa valeur peut différer suivant la définition de la taille du tourbillon (rayon de dispersion, rayon d'extremum de vitesse). En revanche, en utilisant le rayon de dispersion tous s'accordent sur une valeur critique $(a/b)_c = 0.22 - 0.24$. Cette valeur a été confirmée par les expériences de Meunier *et al.* [61], et de Cerretelli et Williamson [10], mais également par les simulations numériques directes de Le Dizès et Verga [49]. La valeur obtenue ici pour toutes les configurations considérées est déterminée dès que la distance de séparation b/b_0 décroit (instant t_1^* , Fig. 5.4), le rayon de dispersion est alors calculé à cet instant par intégration dans un domaine autour d'un tourbillon. Ce dernier est délimité par la médiatrice du segment connectant les deux tourbillons et par la taille du domaine régulier. Cette technique permet d'isoler le champ de vorticité associé à chaque tourbillon, mais n'a plus de sens lorsque les tourbillons échangent leur vorticité (  tape 2 de convection). Les valeurs de ce rayon sont donc erronées sur l'intervalle de temps $t^* \in [t_1^*, t_3^*]$.

Pour toutes les configurations bidimensionnelles, la croissance de la taille de chaque tourbillon suit la loi théorique établie pour un tourbillon isolé $a(t) = \sqrt{a_0^2 + 4\nu t}$ (Fig. 5.5-a). Le temps caractéristique de la première phase de diffusion, normalisé par la période de rotation du système $t_c = 2\pi/\Omega_c = 2\pi^2 b_0^2/\Gamma$, est alors donné par

$$t_1^* = \frac{Re_\Gamma}{8\pi^2} \left[\left(\frac{a}{b} \right)_c^2 - \frac{a_0^2}{b_0^2} \right]. \quad (5.8)$$

Pendant l'étape de convection $t_1^* < t^* < t_2^*$, la distance de séparation décroit en deux phases : une transitionnelle ($b/b_0 \in [1.0, 0.8]$) et une linéaire ($b/b_0 \in [0.8, 0.28]$) avec comme coefficient directeur $d(b/b_0)/dt^* = -3.25$, indépendamment du nombre de Reynolds (Fig. 5.5). Pour expliquer le mécanisme de rapprochement mutuel des tourbillons durant cette phase, Cerretelli et Williamson [10] et Melander *et al.* [59] montrent que les filaments de vorticité éjectés autour du système engendrent un champ de vorticité antisymétrique qui induit sur chaque tourbillon une vitesse qui les pousse l'un vers l'autre. La décomposition du champ de vorticité ω en partie

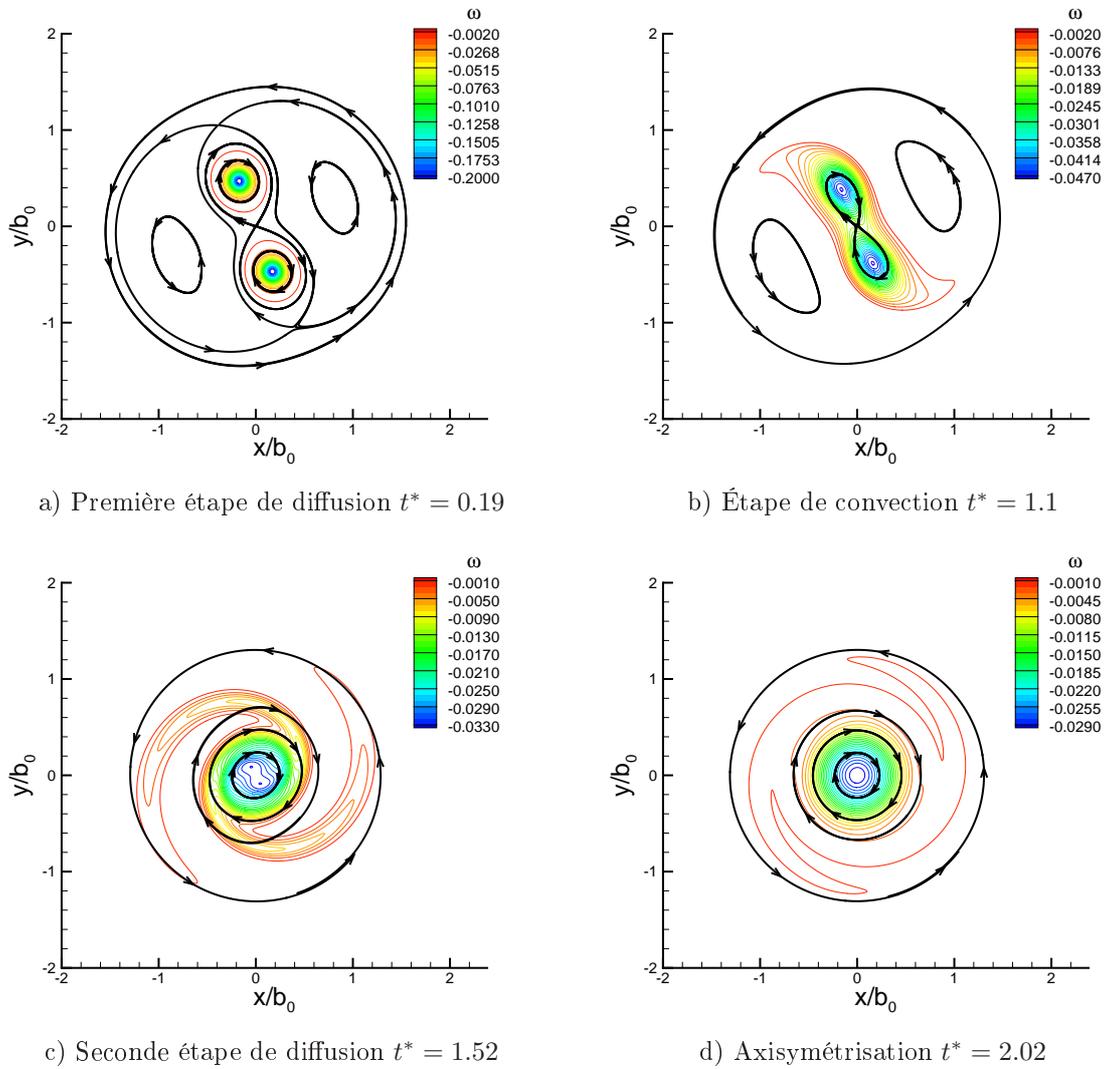


FIG. 5.3 – Dynamique du processus de fusion stable (configuration V2) illustrée par les iso-contours de la vorticité normalisée $\omega/(\Gamma/a_0^2)$. Les lignes de courant, calculées dans le repère tournant à la vitesse angulaire du système $\Omega = \Gamma/\pi b_0^2$, sont également représentées par les lignes continues noires. Le temps est adimensionnalisé par la période de rotation du système $t_c = 2\pi^2 b_0^2/\Gamma$.

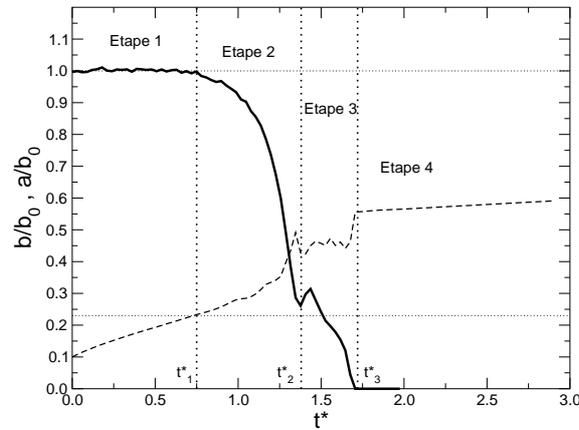


FIG. 5.4 – Évolution temporelle de la distance de séparation des deux tourbillons b (ligne continue) et du rayon de dispersion des tourbillons a (ligne pointillée) au cours du processus de fusion stable pour la configuration $L2$. Le temps est normalisé par la période de rotation du système $t_c = 2\pi^2 b_0^2 / \Gamma$.

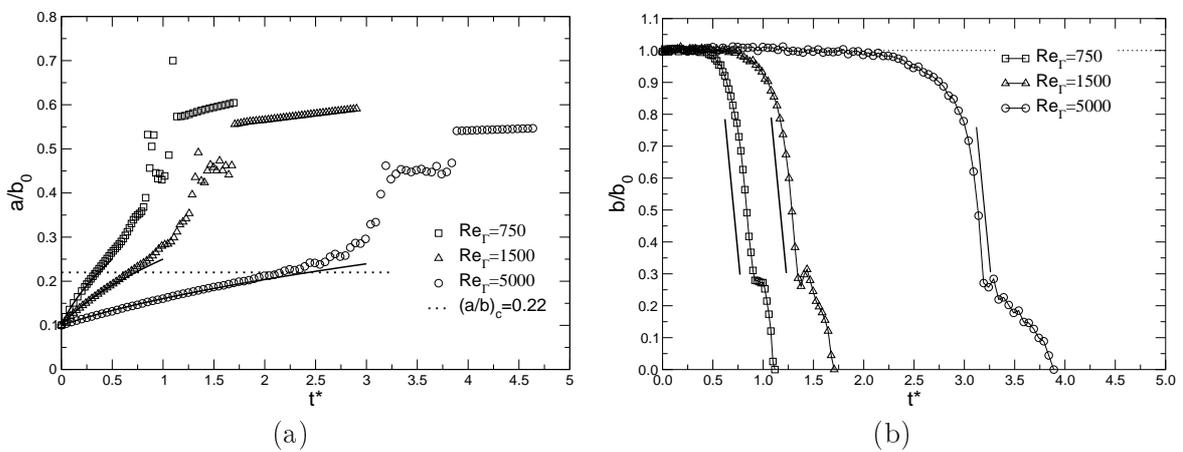


FIG. 5.5 – Évolution du rayon de dispersion d'un des deux tourbillons (a) et de la distance de séparation entre les deux (b) pour les configurations $L1$, $L2$, $L3$. Le temps est normalisé par la période de rotation du système $t_c = 2\pi^2 b_0^2 / \Gamma$. La loi théorique d'accroissement du rayon d'un tourbillon isolé par diffusion est également représentée en ligne continue.

symétrique ω_s et antisymétrique ω_a s'écrit

$$\begin{aligned}\omega(x, y) &= \omega_s(x, y) + \omega_a(x, y) \\ &= \frac{1}{2}[\omega(x, y) + \omega(x, -y)] + \frac{1}{2}[\omega(x, y) - \omega(x, -y)],\end{aligned}\quad (5.9)$$

avec comme conditions de symétrie et d'antisymétrie

$$\omega_s(x, y) = \omega_s(-x, y) = \omega_s(x, -y) \quad (5.10)$$

$$\omega_a(x, y) = -\omega_a(-x, y) = -\omega_a(x, -y). \quad (5.11)$$

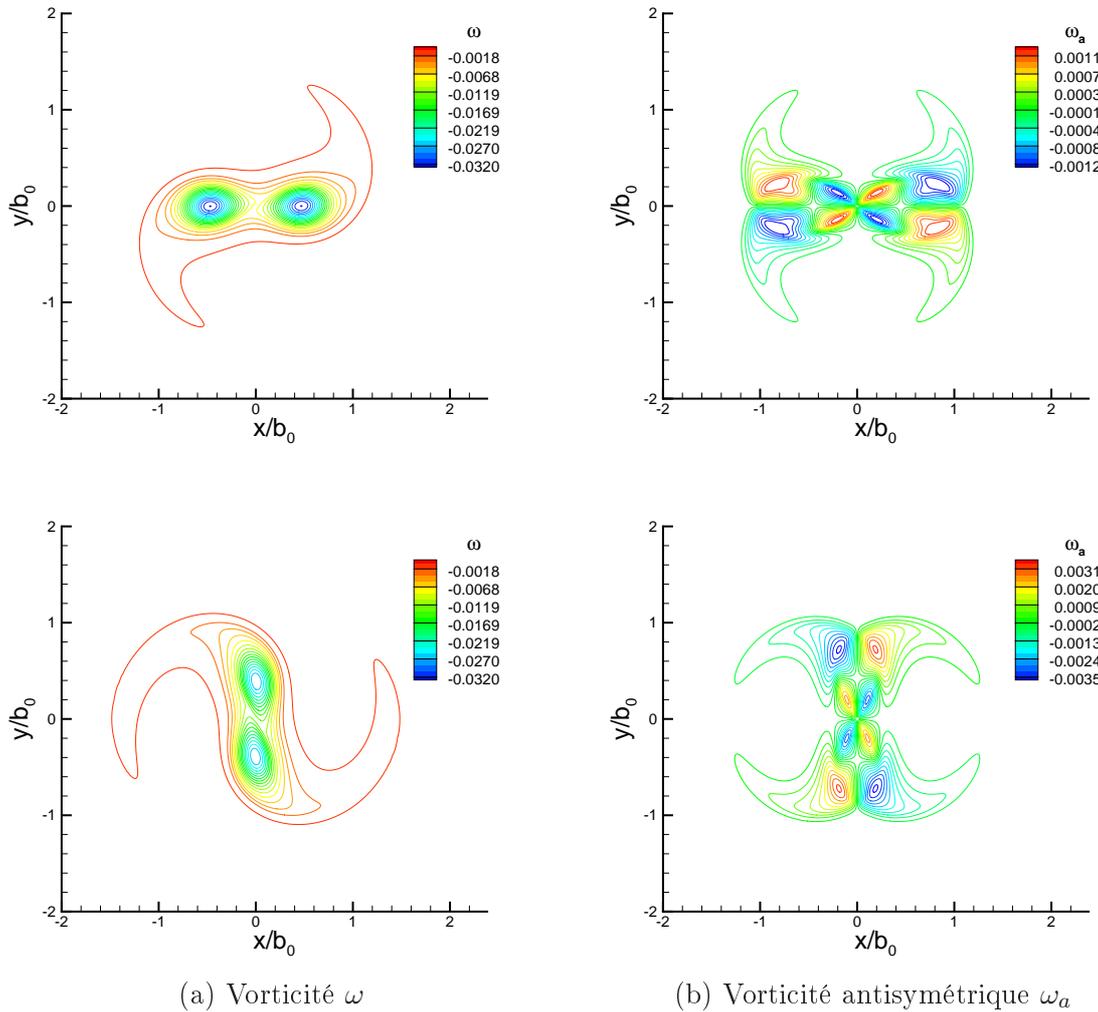


FIG. 5.6 – Champ de vorticité à deux instants de l'étape de convection, $t^* = 0.97$ (haut) et $t^* = 1.17$ (bas). Les valeurs des isocontours sont normalisées par Γ/a_0^2 .

La configuration $L2$ est utilisée pour illustrer cette décomposition du champ de vorticité à deux instants de l'étape 2 de convection (Fig. 5.6). Le champ antisymétrique obtenu ici est composé

de huit lobes, dont quatre sont situés à l'extérieur du système et les quatre autres entre les deux tourbillons. Les quatre lobes externes induisent une vitesse sur chaque tourbillon qui les poussent l'un vers l'autre, tandis que les quatre internes ont un rôle inverse (Fig. 5.7-a). Ces derniers ne sont pas mis en évidence dans l'expérience de Cerretelli et Williamson [10] bien que le champ de vorticité totale indique bien la présence d'une dissymétrie entre les deux tourbillons. Le nombre de Reynolds de leur expérience est $Re_\Gamma = 530$. Ferreira de Sousa et Pereira [25] ont reproduit numériquement par SND cette configuration d'écoulement et montrent que les quatre lobes internes sont quasi-inexistants à un instant de la dynamique proche de celui de Cerretelli et Williamson. Pour la configuration à $Re_\Gamma = 1500$, ils obtiennent le même champ de vorticité anti-symétrique que celui obtenu ici. Il semble que l'influence des quatre lobes internes ne soit pas négligeable et reste encore mal évaluée. Le rapprochement des tourbillons peut alors être interprété par un déséquilibre entre l'influence des lobes externes et celle des lobes internes. En effet, la vitesse sur l'axe connectant les deux tourbillons montre que les lobes externes induisent une vitesse supérieure à celle des lobes internes (Fig. 5.7-b). Cette différence est plus importante à l'instant correspondant exactement à la phase purement convective du processus de fusion $t^* = 1.17$.

Ces considérations sur le champ de vorticité antisymétrique apportent une explication au rapprochement des tourbillons durant la phase de convection ( tape 2).

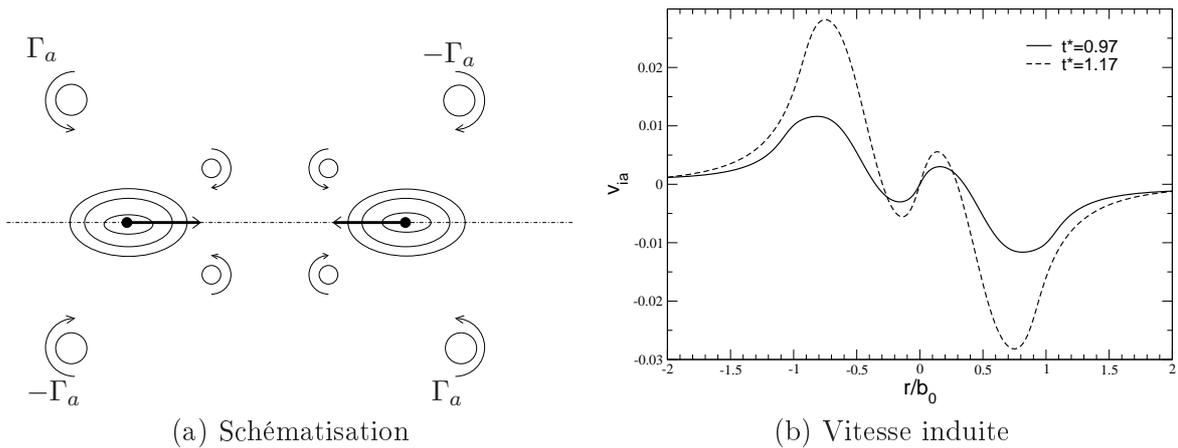


FIG. 5.7 – Schématisation de l'influence du champ de vorticité antisymétrique (a) (les deux tourbillons co-rotatifs sont représentés par les points noirs). Vitesse induite v_{ia} sur l'axe connectant les deux tourbillons (normalisée par $\Gamma/2\pi a_0$)   deux instants de l'étape de convection.

La troisième étape du processus de fusion, appelée seconde phase de diffusion, est caractérisée par la persistance des deux centres tourbillonnaires repérés par les deux extrema de vorticité. En effet, après le rapprochement rapide des tourbillons, les forts gradients de cisaillement au cœur de chacun empêchent la fusion complète, qui ne sera atteinte que sous l'influence de la diffusion visqueuse. Josserand et Rossi [42] ont montré numériquement par SND que la durée de cette phase dépend du nombre de Reynolds telle que $t_3^* - t_2^* = \mathcal{O}(Re^{1/2})$. Ce comportement est également obtenu pour toutes les configurations considérées ici.

La fusion complète se distingue par la présence d'un unique extremum de vorticité et par un processus d'axisymétrisation [45, 58], où les filaments de vorticité finissent par disparaître. Le

tourbillon final devient axisymétrique et sa circulation correspond à la somme des circulations initiales de chacun des tourbillons.

La section suivante présente une analyse de la structure de chaque tourbillon avant et après la fusion, dans le but d'identifier l'influence du modèle de tourbillon sur ce processus, notamment de celui à deux échelles VM2.

5.3.2.3 Analyse structurelle

La superposition initiale de deux tourbillons n'est pas solution stationnaire des équations de Navier-Stokes. Le système peut évoluer cependant vers une solution quasi-stationnaire dans le repère tournant par un processus de relaxation. Le Dizès et Verga [49] ont montré par des simulations numériques directes bidimensionnelles qu'il se décompose en deux étapes. La première, appelée adaptation non-visqueuse, est associée au champ de contrainte imposé par un tourbillon sur son voisin et dont le temps caractéristique est l'échelle de temps convective $T_a = (2\pi a_0^2)/\Gamma$. Le second processus de relaxation est lié aux effets de la viscosité, qui impliquent que quel que soit le modèle de tourbillon, le système évolue comme celui de deux tourbillons initiaux gaussiens sur une échelle de temps diffusive $T_\nu = \pi a_0^2/\nu$. Sipp *et al.* [85] ont obtenu les mêmes conclusions pour des systèmes de deux tourbillons contra-rotatifs. La gamme des nombres de Reynolds considérés ici est incluse dans celle de Le Dizès et Verga [49], pour laquelle il existe une unique solution du système tourbillonnaire co-rotatif avant la phase convective du processus de fusion stable.

Pendant la première étape du processus de fusion stable, les tourbillons axisymétriques prennent rapidement une forme elliptique (adaptation non-visqueuse), mais diffusent indépendamment l'un de l'autre comme un tourbillon isolé (Fig. 5.5-a). Pour le système décrit avec le modèle de tourbillon VM2 à deux échelles, seul le premier rayon a_1 augmente alors que la seconde échelle reste constante, menant à la disparition de la zone intermédiaire du profil de vitesse azimutale (Fig. 5.8). Ces profils sont calculés suivant la méthode décrite dans le chapitre 3 (Eq. 3.10). Le système de deux tourbillons initiaux VM2 devient similaire à celui avec des tourbillons de Lamb-Oseen. La dynamique du processus de fusion stable n'est donc pas affectée par le modèle de tourbillon. Ce résultat a été confirmé pour toutes les simulations bidimensionnelles réalisées dans cette étude (Tab.5.1).

Une analyse importante de l'étude du processus de fusion concerne la structure du tourbillon final, car il constitue par la suite un des deux tourbillons marginaux contra-rotatifs du sillage d'avion potentiellement dangereux. Pour toutes les simulations de la fusion stable, il est obtenu un tourbillon final dont la structure est décrite par deux échelles (Fig. 5.9), même si les deux tourbillons initiaux n'ont qu'une échelle de longueur caractéristique (modèle de Lamb-Oseen). Il apparaît que la zone intermédiaire suit une loi en puissance $v_\theta(r) \sim r^{-\alpha}$ avec $\alpha \sim 0.6$ qui diffère de celle initiale avec des tourbillons VM2 ($\alpha = 0.5$). Ce résultat montre que la structure du tourbillon final est indépendante des paramètres caractéristiques que sont le nombre de Reynolds et le rapport a_0/b_0 . Elle semble donc être spécifique au processus de fusion stable, du moins pour la gamme de paramètres envisagés ici.

Dans les sillages d'avion, la dynamique des tourbillons co-rotatifs peut être affectée par le développement d'instabilités tridimensionnelles, on peut s'interroger sur l'influence de ces phénomènes tridimensionnels sur la structure du tourbillon final. La section suivante présente les

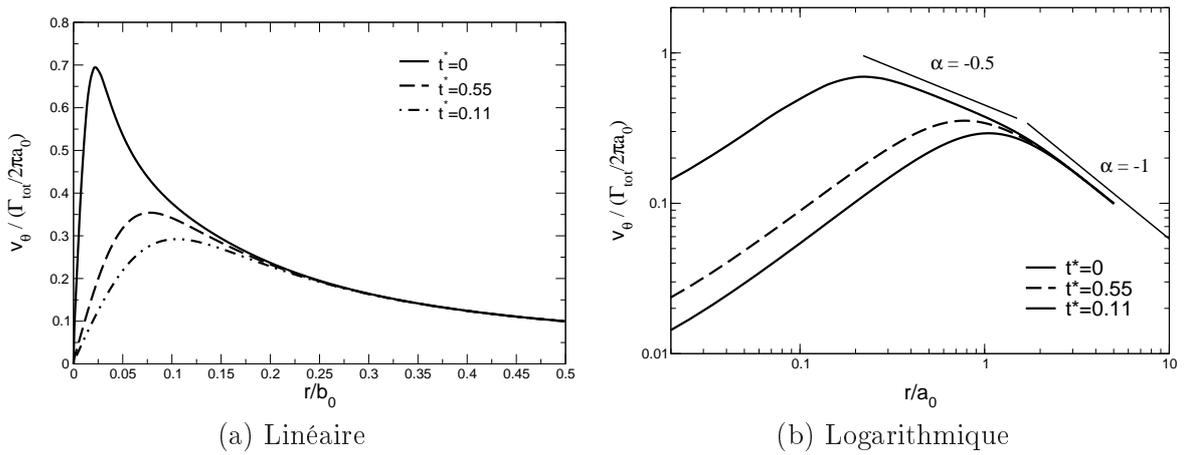


FIG. 5.8 – Profils de vitesse d’un des tourbillons VM2 (cas V2) pendant la première phase de diffusion du processus de fusion stable. La vitesse est normalisée par la circulation totale ($\Gamma_{tot} = \Gamma_1 + \Gamma_2$) et le rayon de dispersion initial a_0 , la distance au cœur par la distance initial de séparation, et le temps par la période de rotation du système $t_c = 2\pi^2 b_0^2 / \Gamma$.

simulations de ce type d’instabilités en l’absence de vitesse axiale.

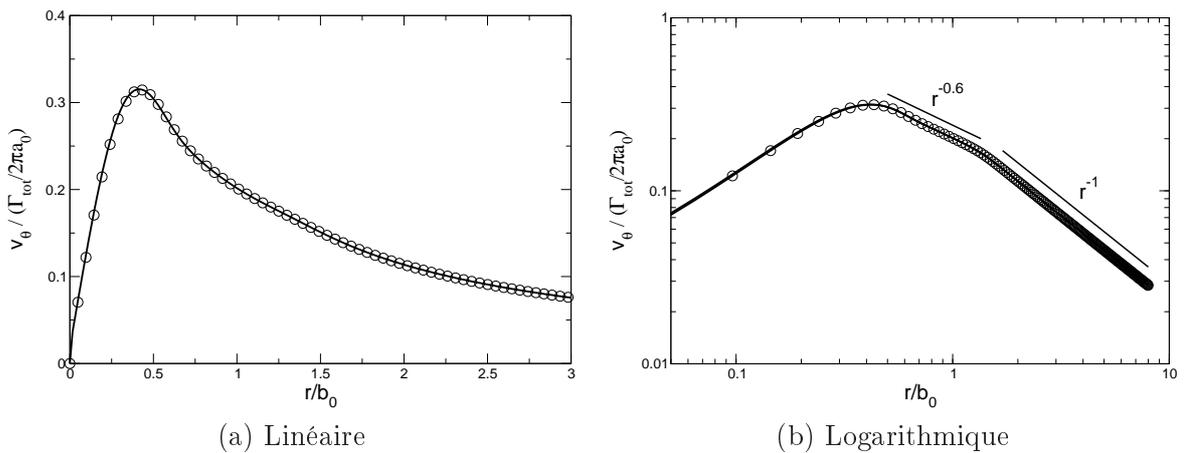


FIG. 5.9 – Profils du tourbillon final pour les configurations V2 (ligne continue) et L2 (symbols circulaires) à $t^* = t/t_c \sim 1.7$. La vitesse est normalisée par la circulation totale ($\Gamma_{tot} = \Gamma_1 + \Gamma_2$) et le rayon de dispersion initial a_0 , la distance au cœur par la distance initial de séparation.

5.3.3 Processus tridimensionnel : instabilités elliptiques

Un des mécanismes favorables à la minimisation de l’intensité d’un sillage tourbillonnaire est lié au développement d’instabilités. Dans le champ proche étendu (distance aval de l’ordre de l’envergure), la fusion des tourbillons co-rotatifs émis en bout d’aile et de volet derrière chaque aile peut être affectée par le développement d’instabilités de courte longueur d’onde (de l’ordre du rayon d’un tourbillon), appelé également instabilités elliptiques à cause de la forme des tourbillons. Certaines conditions favorisent ce type d’instabilité comme un faible

rapport caractéristique a/b , un nombre de Reynolds élevé et un fort taux de turbulence atmosphérique, qui peut fournir de l'énergie aux modes potentiellement instables du système. Cette section présente les résultats obtenus à l'aide de simulations temporelles tridimensionnelles (SND et SGE). Les configurations étudiées sont résumées dans le tableau 5.2.

5.3.3.1 Prédiction théorique

Cette sous-section présente succinctement la prédiction théorique proposée par Le Dizès et Laporte [48] pour les instabilités elliptiques dans un système de deux tourbillons co-rotatifs gaussiens (type Lamb-Oseen) sans vitesse axiale. On considère dans ce paragraphe un système de rapport caractéristique a/b . Cette théorie a permis en outre de déterminer le choix de la longueur axiale du domaine périodique, notamment par prédiction des longueurs d'onde des modes instables du système considéré. L'approche temporelle fixe le nombre d'onde qui peut être simulé, par la longueur axiale du domaine de calcul. Ainsi, pour des simulations où les instabilités ne sont pas forcées explicitement mais simplement excitées par l'ajout d'une petite perturbation (méthode employée ici avec un bruit blanc), la longueur axiale correspond nécessairement à un multiple de la longueur d'onde de l'instabilité.

Le développement de l'instabilité elliptique a pour origine le champ de cisaillement induit sur la structure interne du tourbillon par son voisin. Deux articles majeurs de la littérature sont celui de Le Dizès et Laporte [48] pour les aspects théoriques et celui de Meunier et Leweke [63] pour les résultats expérimentaux.

L'analyse de stabilité linéaire est basée sur une décomposition de l'écoulement d'un tourbillon en modes normaux, appelés ondes de Kelvin, de la forme

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(r)e^{i(k_z z + m\theta - \omega t)} \quad (5.12)$$

où k_z est le nombre d'onde axial, m celui azimutal et ω la pulsation. Ces quantités sont déterminées à partir d'une relation de dispersion $D(k_z, m, \omega) = 0$, qui correspond à la résolution du système d'équations linéarisées. Cette relation dépend du profil de vorticité du tourbillon considéré. Pour un tourbillon de Rankine, une description de ces ondes a été établie par Kelvin [43], et pour un tourbillon de Lamb-Oseen par Fabre *et al.* [24]. La particularité des instabilités elliptiques est qu'elles proviennent d'un phénomène de résonance entre deux modes neutres (k_{z_1}, m_1, ω_1) et (k_{z_2}, m_2, ω_2) , qui est provoquée par le champ de contrainte d'un tourbillon sur son voisin (déformation elliptique). Les conditions de résonance s'écrivent

$$k_{z_1} - k_{z_2} = 0 \quad (5.13)$$

$$m_1 - m_2 = 2 \quad (5.14)$$

$$\omega_1 - \omega_2 = 2\Omega \quad (5.15)$$

$$(5.16)$$

où $\Omega = \Gamma/\pi b_0^2$ est la vitesse angulaire de rotation du système. Plusieurs paires de modes peuvent satisfaire ces conditions, mais avec des taux d'amplification différents. Pour des tourbillons de Lamb-Oseen, la configuration la plus instable est constituée des ondes de Kelvin telles que $(m_1 = 1, \omega_1 = \Omega)$ et $(m_2 = -1, \omega_2 = -\Omega)$ pour un nombre d'onde $k_z(\Omega)$. Le Dizès et Laporte [48] ont établi pour la résonance de ces modes, une formule du taux d'amplification

en fonction du rapport caractéristique a/b et du nombre de Reynolds. Celle-ci adimensionnée par la période de rotation du système t_c s'écrit

$$\sigma^* = \sigma t_c = \pi \sqrt{\left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2}X \right]^4 \left(\frac{s_i}{s_e} \right)^2 - 4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 \left[\frac{1}{2} - X - \cos(\xi^{(n)}) \right]^2} - \frac{2\pi^2 (k_z b)^2}{Re_\Gamma \cos^2(\xi^{(n)})}, \quad (5.17)$$

avec $k_z = 2\pi/\lambda$ le nombre d'onde, $X = (a/b)^2$ et où

$$\frac{s_i}{s_e} = 1.5 + 0.038(0.16 - X)^{-\frac{9}{5}}, \quad (5.18)$$

$$\cos(\xi^{(n)}) = \frac{1}{2} - \frac{(2.26 + 1.69n) - k_z a}{14.8 + 9n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.19)$$

où s_i/s_e est le rapport des champs de contrainte interne et externe, respectivement, ξ est l'angle d'inclinaison du vecteur d'onde par rapport à l'axe du tourbillon, et n est l'indice de la bande d'instabilité. Cette formule théorique a été validée par des résultats expérimentaux et numériques [63].

La figure 5.10 représente les trois premières bandes d'instabilité pour les configurations $L5$, $L5b$ et $L6$. Le rapport caractéristique a/b fixe la largeur des bandes d'instabilité tandis que la viscosité atténuée le taux d'amplification. La longueur axiale L_z du domaine de calcul est choisie de manière à capturer trois longueurs d'ondes λ du mode le plus instable, *c.-à-d.* dont le taux d'amplification est le plus élevé.

Le Dizès et Laporte [48] établissent également le nombre de Reynolds critique en fonction du rapport a/b à partir duquel l'instabilité de courte longueur d'onde peut être présente. Pour un système de deux tourbillons co-rotatifs identiques (même taille et circulation), la relation s'écrit

$$Re_c = \frac{2\pi(2.26 - 14.8X)^2 b^2}{\left(\frac{1}{2} - X\right)^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}X\right)^2 \left(\frac{s_i}{s_e}\right) a^2}. \quad (5.20)$$

Pour le type de système considéré, ce nombre de Reynolds critique est approximativement proportionnel à $(b/a)^2$, comme illustré par la figure 5.11 (toutes les configurations de cette étude sont également représentées).

5.3.3.2 Dynamique tridimensionnelle

La condition initiale des simulations tridimensionnelles est une paire de deux tubes tourbillonnaires co-rotatifs identiques. Le champ de vitesse transverse de base (u, v) est perturbé par l'ajout d'une perturbation de faible amplitude aléatoire en espace pour fournir de l'énergie aux modes potentiellement instables ($u \rightarrow u(1 + \epsilon)$ avec $\epsilon \in [-5 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4}]$).

Le développement de l'instabilité elliptique est illustré par deux isosurfaces de la norme de vortécité sur les figures 5.12 et 5.13, pour les simulations initialisées avec un modèle Lamb-Oseen et VM2, respectivement. Les tourbillons tournent l'un autour de l'autre et lorsque l'amplitude des modes instables est suffisamment élevée, une dynamique complexe tridimensionnelle du processus de fusion a lieu et mène à une structure tourbillonnaire unique perturbée. Le développement de l'instabilité elliptique est caractérisé par une déformation sinusoïdale des tourbillons dans la direction axiale, avec une longueur d'onde bien définie (Fig. 5.12, $t^* \sim 1.95$). Quatre longueurs d'ondes sont visibles pour la configuration avec des tourbillons de Lamb-Oseen, et seulement trois avec les tourbillons VM2. On remarque visuellement que la sinusoïde

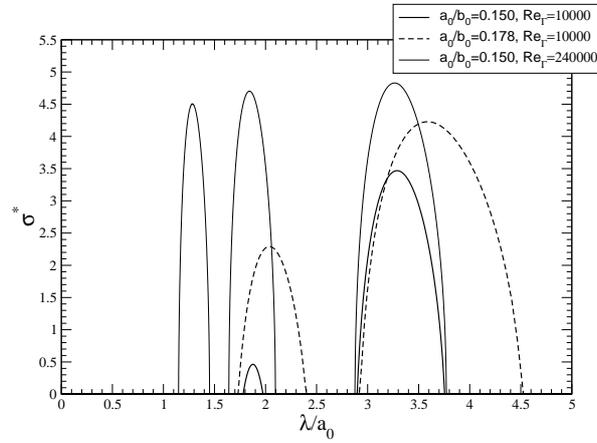


FIG. 5.10 – Comparaison des caractéristiques de l’instabilité elliptique d’un système de deux tourbillons co-rotatifs identiques gaussiens de rapport caractéristique a/b . Le taux d’amplification est adimensionalisé par la période de rotation du système tel que $\sigma^* = \sigma t_c$ et les longueurs d’ondes par le rayon de dispersion initial a_0 .

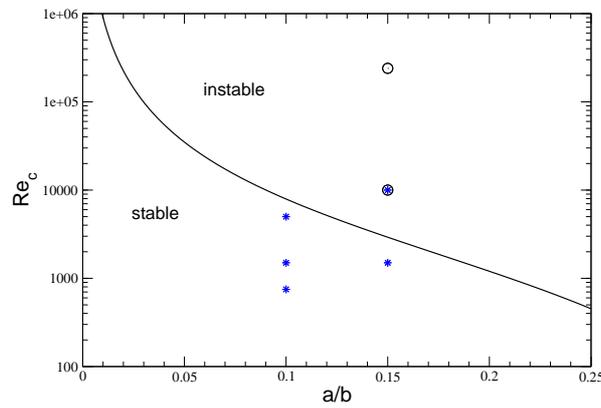


FIG. 5.11 – Nombre de Reynolds critique en fonction du rapport caractéristique a/b pour un système de deux tourbillons co-rotatifs identiques. Les simulations bidimensionnelles effectuées sont représentées par les symboles $*$ et les simulations tridimensionnelles par des signes o .

est moins bien définie pour ces tourbillons, qui peut s'expliquer par le développement de plusieurs modes instables. En effet, la perturbation initiale excite plusieurs modes instables. Cette phase correspond au régime linéaire de l'instabilité. Elle est suivie par une phase non-linéaire où la déformation des cœurs tourbillonnaires est suffisamment élevée pour qu'ils échangent leur vortacité ($t^* = 2.431$ dans le cas du système Lamb-Oseen et $t^* = 2.233$ dans le cas VM2). De grosses structures de vortacité allongées sont alors visibles entre les deux tourbillons. L'origine de cet échange est l'instant où une partie de la vortacité de chaque tourbillon atteint le point hyperbolique de la ligne de courant séparatrice en forme de « huit » (Fig. 5.3). La saturation de l'instabilité est caractérisée par la présence de nombreuses structures de tailles plus ou moins grandes, qui par la suite se réorganisent et fusionnent ensemble pour former une structure tourbillonnaire unique perturbée. Le fin de la dynamique est marquée par une relaminarisation de l'écoulement en raison des effets visqueux et du mouvement global de rotation. Cette dynamique globale a été observée pour toutes les configurations tridimensionnelles considérées ici. On remarque toutefois qu'il y a un décalage temporel entre les deux modèles de tourbillons, indiquant un taux de croissance de l'instabilité plus élevé dans le cas des tourbillons VM2. Les caractéristiques de l'instabilité sont discutées dans la prochaine section respectivement pour chaque configuration.

5.3.3.3 Taux de croissance de l'instabilité

Pour déterminer les caractéristiques de l'instabilité elliptique de chaque configuration, une analyse spectrale a été menée à l'aide d'une transformée de Fourier dans la direction axiale. L'amplification de chaque mode de Fourier k instable durant le régime linéaire est déterminée par une croissance exponentielle de son énergie spectrale $E_k \sim e^{(2\sigma t)}$. Pour les configurations $L5$ et $L5b$, l'évolution temporelle des modes dominants est représentée sur la figure 5.14. Un temps de transition est observé avant la phase linéaire de l'instabilité pour toutes les configurations. Il correspond à un temps d'émergence du mode le plus instable intrinsèque à l'écoulement, étant donné que ce mode n'est pas explicitement forcé. Les résultats numériques sont résumés dans le tableau 5.3 ainsi que les prédictions théoriques visqueuse et non-visqueuse.

Configuration	k	λ/b_0	σ_{num}^*	$\sigma_{th_v}^*$	$\sigma_{th_{inv}}^*$
$L5$	4	0.371	5.0	—	—
$L5$	3	0.493	3.6	3.47	4.89
$L5b$	3	0.640	5.1	4.23	5.13
$L6$	3	0.427	4.6	4.83	4.89
$V5$	3	0.493	6.2	—	—
$V6$	7	0.211	6.0	—	—

TAB. 5.3 – Récapitulatifs de l'analyse spectrale : k mode de Fourier, λ/b_0 longueur d'onde de l'instabilité associé à ce mode, et $\sigma^* = \sigma t_c$ est le taux d'amplification (t_c est la période de rotation du système). Les prédictions théoriques, visqueuse $\sigma_{th_v}^*$ et non-visqueuse $\sigma_{th_{inv}}^*$ sont également notées.

Il a été mentionné précédemment que l'approche temporelle fixe implicitement le nombre

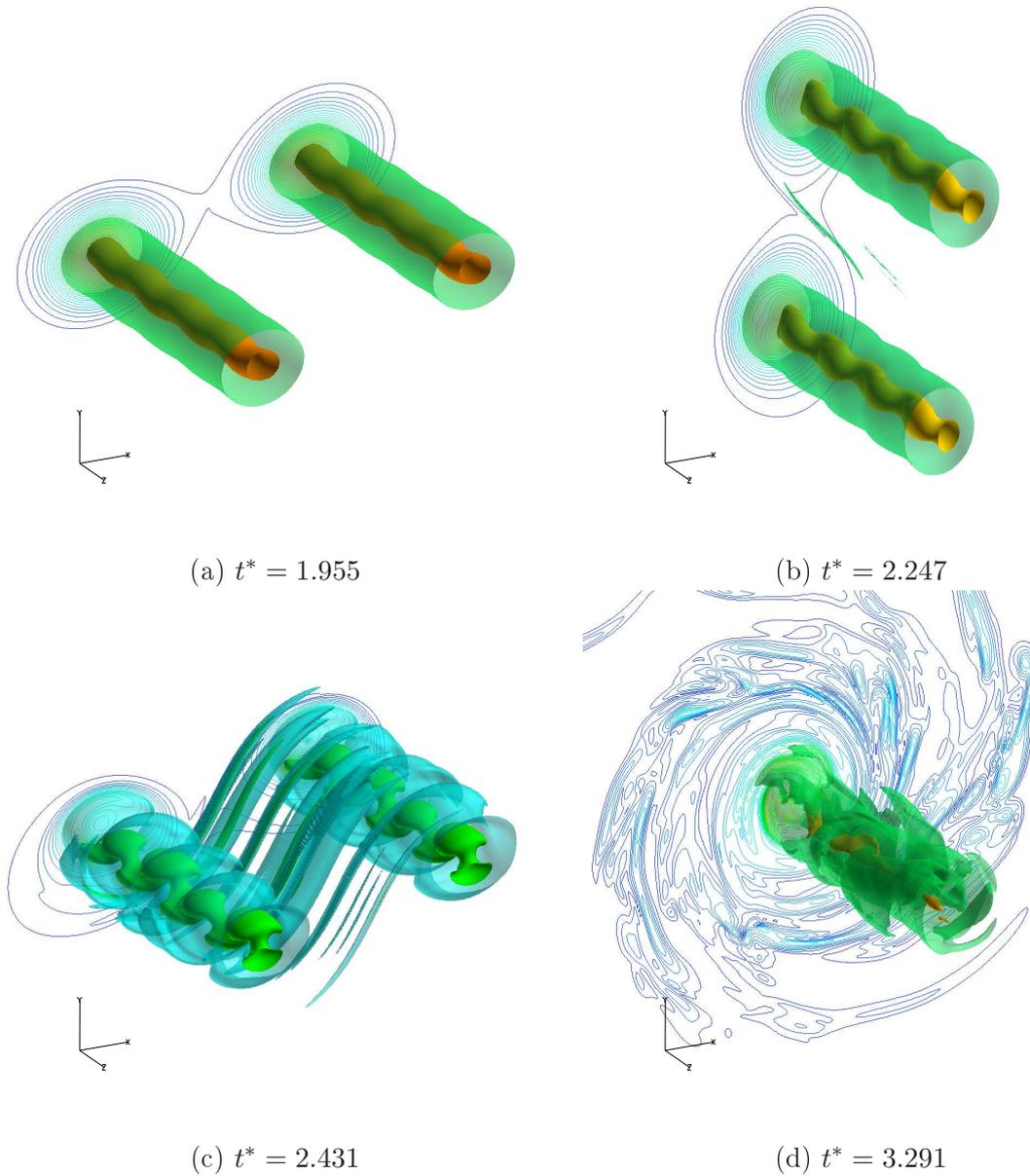


FIG. 5.12 – Dynamique du processus de fusion instable avec le développement d’une instabilité elliptique pour un système de deux tourbillons co-rotatifs identiques de type Lamb-Ossen. Visualisation de deux isosurfaces de normes de vorticité $\omega_1 = \|\boldsymbol{\omega}\|/(\Gamma_1/a_0^2) = 0.1675$ and $\omega_2 = 0.0837$, coloriées par le niveau instantané de norme de vorticité, pour la configuration $L5$.

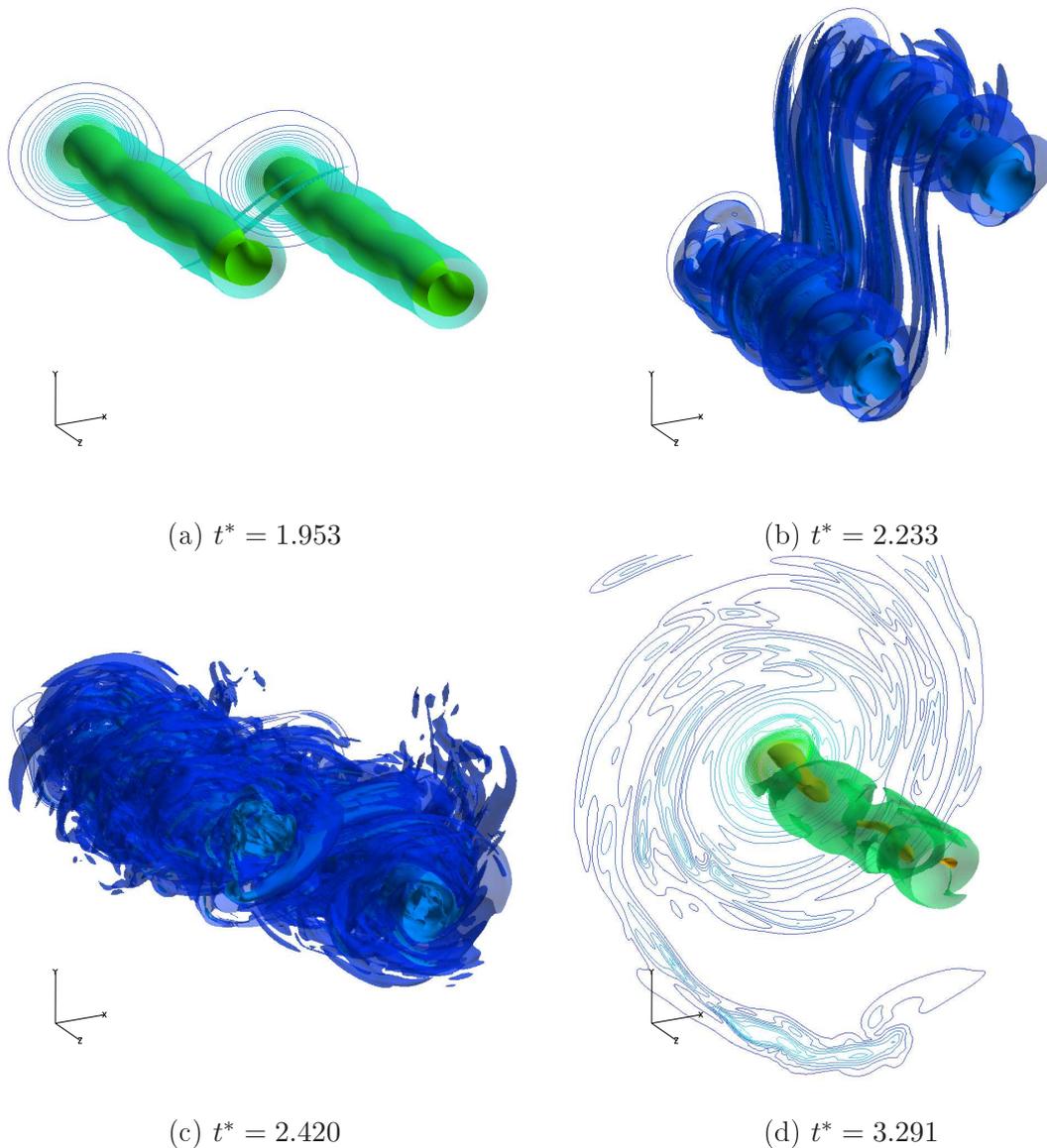


FIG. 5.13 – Dynamique du processus de fusion instable avec le développement d’une instabilité elliptique pour un système de deux tourbillons co-rotatifs identiques de type VM2. Visualisation de deux isosurfaces de la norme de la vorticité $\omega_1 = \|\boldsymbol{\omega}\|/(\Gamma_1/a_0^2) = 0.1675$ and $\omega_2 = 0.0837$, colorisées par le niveau instantané de la norme de la vorticité, pour la configuration V5.

d’onde qui peut être capturé par la simulation. Utilisant la prédiction théorique pour des tourbillons gaussiens (Lamb-Oseen), la longueur axiale du domaine de calcul correspond à trois longueurs d’onde du mode ayant le taux le plus élevé. Ainsi, pour la configuration L5, il était attendu que ce soit le mode de Fourier $k = 3$ qui domine la dynamique. Or, la simulation montre que c’est le mode $k = 4$ qui gouverne la dynamique (confirmé visuellement sur la figure 5.12 à $t^* = 2.247$) qui n’était pas prédit par la théorie. On remarque cependant que

le mode visé $k = 3$ est bien amplifié avec un taux en très bon accord avec la théorie, mais il est par la suite atténué ($t^* \sim 1.5$ Fig. 5.14), laissant place au mode $k = 4$ qui a un taux d'amplification plus élevé. Ce résultat montre la difficulté associée à la sélection des modes de l'instabilité elliptique, qui dépendent du rapport caractéristique a/b . En effet, le choix de la longueur axiale du domaine de calcul est basé sur le rapport initial $a_0/b_0 = 0.15$, mais comme il y a existence d'une période d'émergence de l'instabilité et des effets visqueux non négligeables, ce rapport est plus élevé au début du régime linéaire $a(t^* \sim 0.5)/b_0 = 0.178$. Les propriétés de l'instabilité ne correspondent plus au choix initial de longueur du domaine périodique. En effet, la simulation *L5b* a été réalisée avec le même rapport initial $a_0/b_0 = 0.15$ mais avec un domaine plus long correspondant exactement à trois longueurs du mode le plus instable prédit par la théorie pour un système $a/b = 0.178$. Le mode attendu $k = 3$ gouverne effectivement la dynamique avec un taux d'amplification proche de la théorie. L'écart entre la simulation et la prédiction visqueuse est de $\sim 17\%$ et de moins de 1% avec la prédiction non-visqueuse. Cette différence a déjà été observée dans les travaux de Le Dizès et Laporte [48], et les raisons sont mal connues. Ils émettent les explications suivantes : une possibilité d'interaction avec le processus de fusion stable, ou que la viscosité affecte les caractéristiques des ondes de Kelvin (non pris en compte pour l'établissement de l'équation 5.17). Dans ce cas, la résonance des modes de Kelvin changeraient de bandes d'instabilité vers des longueurs d'onde plus grandes et une atténuation visqueuse plus faible. La différence serait alors moins importante, notamment pour le nombre de Reynolds intermédiaire utilisé ici.

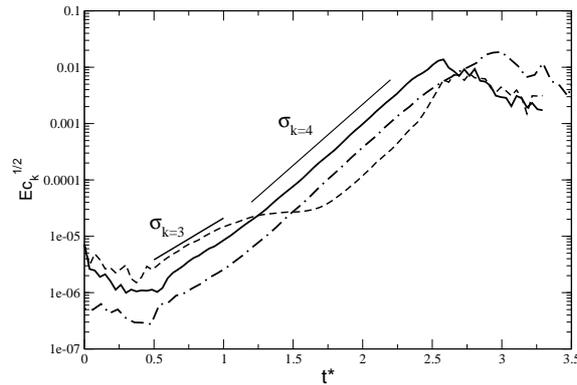


FIG. 5.14 – Évolution de l'énergie spectrale du mode le plus instable de l'instabilité elliptique pour les configurations *L5* et *L5b*. Ligne continue pour le mode de Fourier $k = 4$ et en pointillée pour le mode $k = 3$ dans le cas d'une longueur du domaine axiale de $L_z/b_0 = 1.48$. Ligne tiret-point pour le mode $k = 3$ avec $L_z/b_0 = 1.92$ (*L5b*).

Le cas des tourbillons initiaux VM2 est plus délicat car ils ne sont pas gaussiens. Il n'existe pas à l'heure actuelle de prédiction théorique semblable à celle de Le Dizès et Laporte [48]. De plus, pour la configuration *V5*, la viscosité modifie la structure interne du tourbillon en réduisant la longueur de la zone intermédiaire (Fig. 5.15). Toutefois, deux échelles se distinguent toujours au début du régime linéaire. La sélection implicite du mode le plus instable et de sa longueur d'onde avec ce type de modèle de tourbillon est associée au mode de Fourier $k = 3$, correspondant étonnamment à celui attendu pour un tourbillon gaussien. On remarque cependant que le taux d'amplification est plus élevé de $\sim 30\%$ (Tab. 5.3). Ce résultat est en accord avec ceux obtenus par Fabre et Jacquin [22] pour ce type de profil. Ils établissent que les longueurs

d'ondes des modes instables sont de l'ordre de l'échelle a_1 pour les profils où $0.5 \leq \alpha < 1$ et de l'ordre de a_2 pour $0 < \alpha < 0.4$. Comme ici le rapport des deux échelles est très faible au début du régime linéaire, la distinction des longueurs d'ondes ne peut être établie. Le mode qui se développe a cependant bien une longueur d'onde de l'ordre du rayon du tourbillon, caractéristique des instabilités elliptiques.

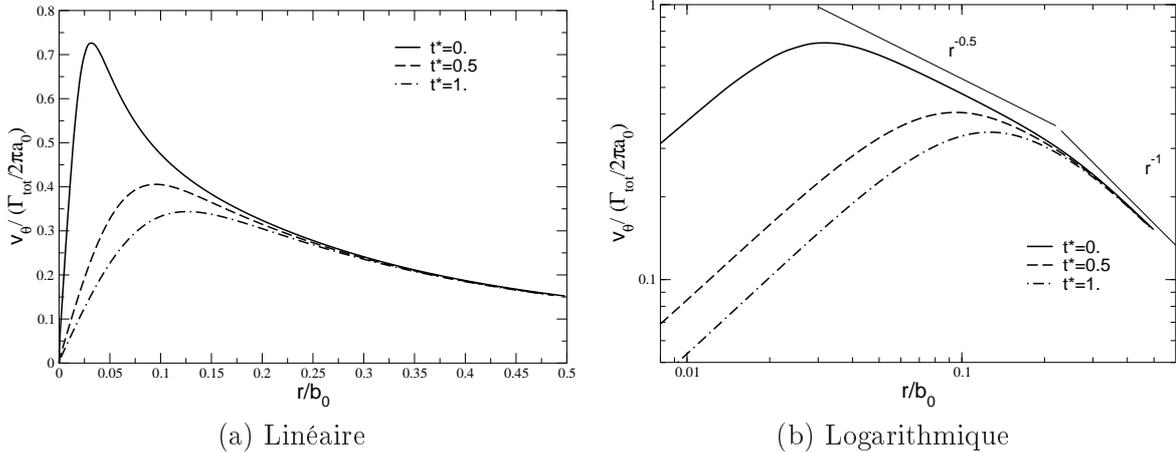


FIG. 5.15 – Profils de vitesse azimutale d'un tourbillon VM2 à différents temps avant le régime linéaire de l'instabilité elliptique pour la configuration V5 où $Re_\Gamma = 10000$.

La comparaison des deux modèles de tourbillons vis-à-vis de l'instabilité elliptique est mieux adaptée pour les configurations à plus haut nombre de Reynolds, L6 et V6. Les effets de la viscosité sur la structure interne des tourbillons VM2 étant faibles, la caractéristique d'une structure à deux échelles est conservée plus longtemps, notamment au début du régime linéaire de l'instabilité. Il résulte de l'analyse spectrale des modes instables (Fig. 5.16 et Tab. 5.3), que le taux d'amplification est plus élevé dans le cas de tourbillons VM2 que pour des tourbillons de Lamb-Oseen. On remarque également que la longueur d'onde du mode le plus instable est plus courte dans ce cas.

5.3.3.4 Structure du tourbillon final

Les résultats du processus de fusion stable montrent que le tourbillon final n'est pas gaussien et que sa structure est décrite par deux échelles de longueurs caractéristiques comme le modèle VM2 mais avec des paramètres différents de l'initialisation. Il est proposé ici la même analyse des profils de vitesse azimutale, obtenus en considérant le champ solution moyenné dans la direction axiale et azimutale pour avoir une distribution dépendant uniquement de la direction radiale.

Il apparaît clairement que le tourbillon issu de la fusion instable *via* le développement d'une instabilité elliptique a également une structure composée de deux échelles de longueurs, similaire à celle d'un tourbillon VM2. Cependant, les caractéristiques de ces profils diffèrent de celles initiales pour la configuration V5 et V6. De plus, la loi en puissance de la zone intermédiaire entre les deux rayons $v_\theta(r) \sim r^{-\alpha}$ est différente de celle obtenue par la fusion stable, ici

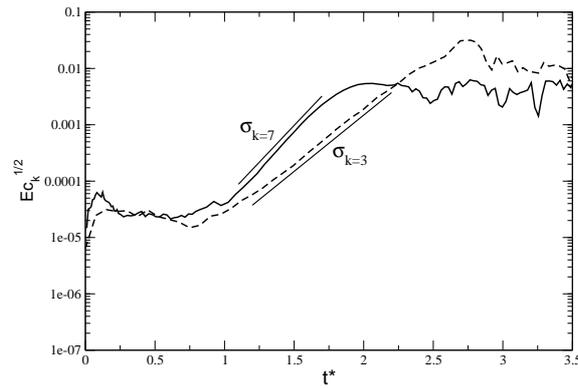


FIG. 5.16 – Évolution de l'énergie spectrale du mode le plus instable de l'instabilité elliptique pour les configurations *L6* et *V6*. Ligne continue dans le cas d'un système initial VM2 (*V6*) et en pointillée dans le cas Lamb-Oseen (*L6*).

$\alpha \sim 0.35$. Ce type de structure interne peut être expliquée par la persistance de filaments de vorticit e proches du c oeur, qui ont  et e  eject es au cours du processus. En conclusion, la structure interne du tourbillon final est donc li ee au processus de fusion et des conditions dans lesquelles il a lieu.

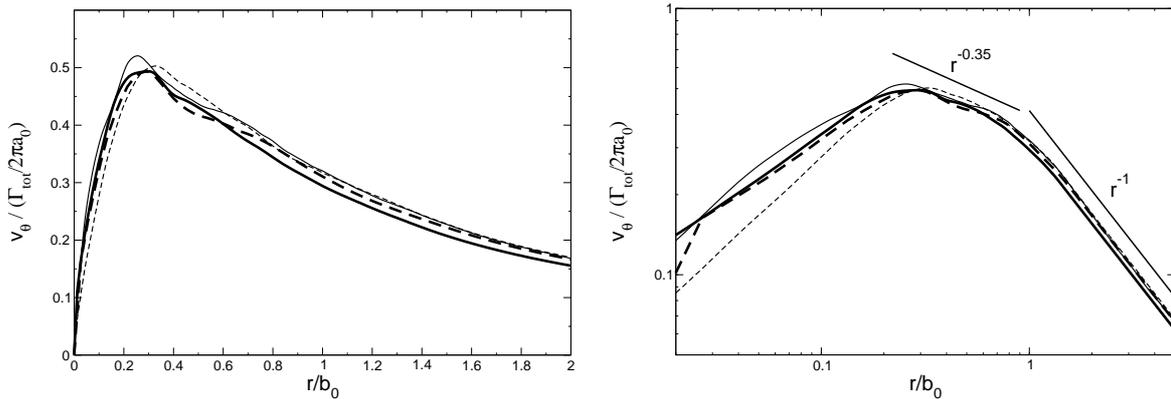


FIG. 5.17 – Profils du tourbillon final pour les configurations VM2 (lignes continues) et Lamb-Oseen (lignes pointill ees) : lignes fines  a $t^* = t/t_c \sim 3.29$ et $Re_\Gamma = 10000$ (*L5* et *V5*), lignes  epaisses  a $t^* = t/t_c \sim 3.93$ et $Re_\Gamma = 240000$ (*L6* et *V6*). La vitesse est normalis ee par la circulation totale ($\Gamma_{tot} = \Gamma_1 + \Gamma_2$) et le rayon de dispersion initial a_0 .

5.4 Simulations spatiales

Il a  et e pr esent e dans la section pr ec edente le d eveloppement d'instabilit es elliptiques dans un syst eme de tourbillons co-rotatifs sans vitesse axiale, suivant une approche temporelle de la dynamique instationnaire. L'inconv enient de ce type d'approche est l'hypoth ese forte d'un  ecoulement quasi-parall ele sur la longueur axiale p eriodique du domaine de calcul. Elle peut  etre remise en cause lorsque les deux tourbillons sont tr es proches car la torsion de chaque tube

tourbillonnaire est prononcée. De plus, cette approche ne permet de simuler que des instabilités convectives, et le choix de la longueur du domaine dans la direction périodique limite le nombre d'ondes qui peut être simulées (forçage implicite). Les simulations du développement spatio-temporel permettent de s'affranchir de ces limites, mais sont très onéreuses en termes de ressources informatiques contrairement aux simulations temporelles, en raison de l'écart entre les différentes échelles de l'écoulement.

L'objectif des simulations présentées dans cette section est de simuler le développement spatial d'une instabilité elliptique dans un système de deux tourbillons co-rotatifs. Cette approche permet en outre de tenir compte de l'influence de la vitesse axiale et de l'auto-induction des tourbillons due à la torsion des structures tourbillonnaires.

Cette section présente les premiers résultats de deux simulations spatiales, qui diffèrent par le rapport entre la vitesse azimutale du tourbillon et la vitesse axiale de convection. Les configurations choisies et la mise en place des calculs sont discutées dans la prochaine section.

5.4.1 Mise en place des simulations

Les configurations tourbillonnaires simulées ont été choisies d'une part pour correspondre à des paramètres expérimentaux et d'autre part pour effectuer des simulations numériques directes.

Ainsi, le nombre de Reynolds basé sur la circulation est $Re_\Gamma = 10000$ pour les deux configurations. Les caractéristiques du système tourbillonnaire co-rotatif imposées dans le plan d'entrée sont récapitulées dans le tableau 5.4. Les rapports caractéristiques a/b entre le rayon de dispersion a des tourbillons et la distance b qui les sépare sont inférieurs à la valeur critique de déclenchement du processus de fusion stable $(a/b)_c \sim 0.22 - 0.24$ étudiée dans la section 5.3.2.

Configuration	a/b	$v_{\theta_{max}}$	w_0	$w(r=0)$	L_x, L_y, L_z	nx, ny, nz
spa_1	0.212	0.06	0.2	0.223	100, 100, 500	241 * 241 * 2001
spa_2	0.166	0.31	0.2	0.552	120, 120, 420	291 * 291 * 1401

TAB. 5.4 – Caractéristique du système tourbillonnaire dans le plan d'entrée, du domaine de calcul et du nombre de points dans chaque direction. Les vitesses sont adimensionnalisées par la vitesse du son c et les longueurs par le rayon caractéristique d'un tourbillon de Lamb-Oseen r_c .

Le champ solution bidimensionnel imposé dans le plan d'entrée du domaine de calcul a été obtenu à l'aide d'une pré-simulation bidimensionnelle initialisée par superposition de deux tourbillons de Lamb-Oseen (Eq. 3.1). Le rapport caractéristique a/b de ce système augmente au cours du temps par diffusion visqueuse des cœurs tourbillonnaires (initialement $a_0/b_0 = 0.1$). Lorsqu'il atteint la valeur visée, la solution est extraite pour servir de champ initial du plan d'entrée de la simulation spatiale. De plus, pendant cette phase diffusive, chaque tourbillon s'adapte au champ de contrainte imposé par son voisin, prenant alors une forme elliptique (processus de relaxation mis en évidence par Le Dizès et Verga [49]). Cette procédure permet donc d'obtenir une solution bidimensionnelle aux équations de Navier-Stokes.

Les deux tourbillons tournent l'un autour de l'autre à la période $t_c = 2\pi^2 b_0^2 / \Gamma$. La vitesse de convection w_0 dans la direction longitudinale a pour conséquence la torsion des tubes tourbillonnaires. On peut alors définir un pas d'hélice du système d_h qui correspond à la distance

aval pour laquelle les tourbillons ont effectué un tour complet. Ce pas d'hélice est déterminé par la relation $d_h = w_0 t_c$.

Une différence notable entre les deux configurations est la vitesse azimutale des tourbillons, impliquant une longueur de retournement du système plus grande lorsque la vitesse azimutale est plus faible (configuration spa_1). Ainsi, les effets tridimensionnels seront plus prononcés pour la configuration spa_2 , tandis que le pas d'hélice du système sera plus long pour la configuration spa_1 , se rapprochant ainsi de l'hypothèse employée pour les simulations temporelles. Pour ces simulations spatiales, la vitesse axiale n'est pas explicitement imposée dans le plan d'entrée. Elle est calculée par la résolution du système d'équations de Navier-Stokes et correspond au niveau choisi de pression et de température totale qui est imposé dans ce plan (choix de la condition limite). En première approximation, la pression totale s'écrit $P_t = p + \frac{1}{2}\rho w^2$, et comme la pression statique p au cœur du tourbillon dépend de la vitesse azimutale du tourbillon, la vitesse axiale $w(r=0)$ est plus ou moins élevée selon la configuration choisie.

Domaine de calcul

Le domaine de calcul est un parallélépipède dont les dimensions L_x, L_y, L_z sont précisées dans le tableau 5.4 pour chaque configuration. Les valeurs des longueurs transverses L_x, L_y sont fixées de manière à minimiser l'impact des conditions limites sur la dynamique. Pour limiter le nombre de points, on utilise un maillage régulier uniquement dans la zone d'intérêt de la dynamique (domaine $L_{xreg}, L_{yreg} = [50, 50]$), avec un pas d'espace $\Delta_x = \Delta_y = 0.25r_c$ où r_c est le rayon caractéristique initial du tourbillon de Lamb-Oseen dans la pré-simulation bidimensionnelle. Au début de la simulation spatiale, il y a huit points dans le cœur de chaque tourbillon pour la configuration spa_1 et six points pour spa_2 . La longueur axiale L_z permet de simuler au moins deux rotations du système tourbillonnaire, en corrélation avec le rapport des vitesses axiale et azimutale. Cependant, ce choix ne permet pas de garantir que la fusion sera obtenue avant la fin de la boîte de calcul, il correspond seulement à un ordre de grandeur du processus de fusion instable qui serait réalisé avec une simulation temporelle. Le maillage est régulier dans cette direction axiale, telle que $\Delta_z = 0.3r_c$ pour la configuration spa_1 et $\Delta_z = 0.25r_c$ pour spa_2 . Bien que la prédiction théorique des caractéristiques de l'instabilité elliptique de Le Dizès et Laporte [48] ne tienne pas compte de la vitesse axiale, elle permet d'indiquer une gamme de longueurs d'onde des modes instables. Ainsi, pour les systèmes tourbillonnaires considérés, la discrétisation axiale correspond à huit points par longueur d'onde. Au total le nombre de point de calcul est 118.63×10^6 pour la configuration spa_1 et 116.22×10^6 . Ces deux simulations ont été réalisées par des calculs massivement parallèles (1024 processeurs) et ont posées des difficultés au niveau du stockage des données mais également en terme de post-traitement pour la visualisation (capacité mémoire).

Conditions limites

Les conditions limites des faces latérales sont basées sur l'approche du traitement des ondes caractéristiques, développé et détaillé dans la section 2.4.2.3 du chapitre 2. Elles correspondent à des conditions de type entrée/sortie, avec un écoulement entrant irrotationnel (Eq. 2.139, 2.140).

Une condition d'injection subsonique est utilisée dans le plan d'entrée, qui impose une pression et une température totale (section 2.4.2.2) ainsi que les composantes transverses de vitesse (associé au champ tourbillonnaire). La condition limite de sortie du domaine de calcul est une

condition de non-réflexion basée sur l'approche de Giles [31] (section 2.4.2.4).

Perturbations des tourbillons

Pour provoquer le développement d'instabilités, il est nécessaire de fournir de l'énergie aux modes potentiellement instables de l'écoulement. D'un point de vue numérique, deux stratégies existent pour les exciter :

- (i) l'ajout d'une perturbation aléatoire de très faible amplitude (bruit blanc),
- (ii) un forçage explicite d'une fréquence prédéterminée de l'instabilité.

La première (i) a l'avantage de laisser libre le développement d'instabilités liées aux conditions de l'écoulement, mais ne garantit pas le type d'instabilité qui va gouverner la dynamique, contrairement à la seconde stratégie (ii).

Pour s'assurer du développement d'une instabilité elliptique dans les systèmes considérées ici, un autre type de perturbation est proposé. L'idée est de laisser une part de liberté aux instabilités mais en utilisant le fait que l'instabilité elliptique est connue pour affecter le cœur des tourbillons en changeant leur position. La perturbation utilisée pour les deux simulations spatiales se base sur cette propriété, où un mouvement de translation aléatoire de faible amplitude est introduit dans le champ d'entrée. Cela correspond à l'ajout d'une perturbation de vortacité autour de chaque cœur tourbillonnaire, telle que

$$\omega' = (\epsilon_1 \cos \theta + \epsilon_2 \sin \theta) \exp\left(-\frac{r^2}{b'^2}\right), \quad (5.21)$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont des nombres aléatoires ($\epsilon_1 = \epsilon_2 \in [0.0002, 0.0004]$), et b' délimite l'aire de la perturbation (ici $b' = 2r_c$). La loi de Biot et Savart [82] est ensuite utilisée pour traduire la perturbation en termes de composantes transverses de vitesse.

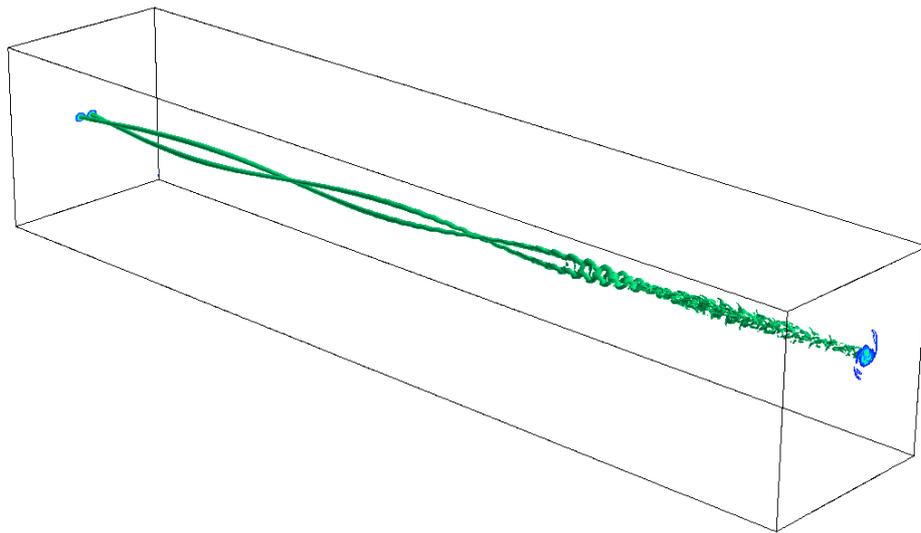
5.4.2 Développement des instabilités

Initialement, le domaine de calcul contient deux tourbillons co-rotatifs identiques parallèles, placés en son centre. Ces deux tubes tourbillonnaires longilignes s'enroulent l'un autour de l'autre par induction mutuelle au cours du calcul jusqu'à l'établissement d'un régime établi, où les torsions du système sont visibles sur toute la longueur longitudinale du domaine de calcul. Cette période correspond à l'obtention d'un champ solution tridimensionnel du système tourbillonnaire avec écoulement axial. Après cette période de transition, une perturbation est injectée dans le plan d'entrée au cœur des tourbillons et convectée le long des tourbillons. Le système devient alors instable à partir d'une certaine distance aval (Fig. 5.18 et 5.19). L'instabilité est caractérisée par une déformation sinusoïdale des tubes tourbillonnaires et affectant leur cœur, typique des instabilités elliptiques. Les figures représentent une isosurface arbitraire de la norme de vortacité de la solution numérique statistiquement convergée. En raison du très grand nombre de points (problème de mémoire), il n'est utilisé que un point sur deux pour le traitement visuel de ces solutions.

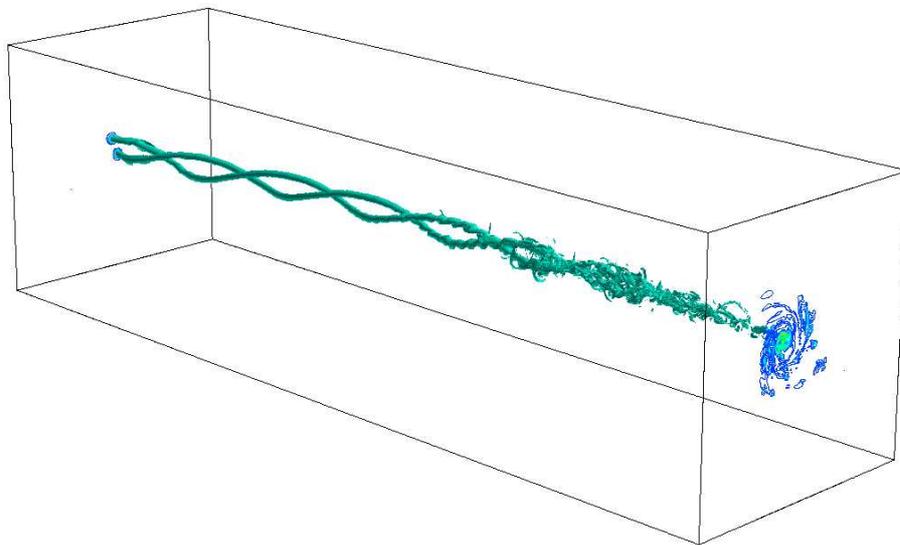
Pour les deux configurations considérées, il semble exister une symétrie entre les deux tourbillons indiquant un développement d'instabilité en phase. La différence entre les deux configurations est observable qualitativement. Elle est marquée par des déformations plus allongées pour la configuration *spa*₂. Cette dernière est caractérisée par une vitesse de rotation des tourbillons supérieure à la vitesse de convection, le pas d'hélice du système est par conséquent court. La déformation des tourbillons implique dans ce cas une auto-induction qui semble

contribuer à l'allongement des oscillations dans la direction axiale.

Dans les deux cas, le mécanisme du développement d'instabilités est semblable et mène à la fusion tridimensionnelle des deux tourbillons co-rotatifs. Il résulte de ce processus une structure tourbillonnaire unique très perturbée.



(a)



(b)

FIG. 5.18 – Isosurface de la norme de la vorticité pour spa_1 (a) et spa_2 (b).



FIG. 5.19 – Zoom du développement d’instabilités. Isosurface de la norme de la vorticité pour spa_1 (a) et spa_2 (b).

5.4.3 Analyses quantitatives

5.4.3.1 Grandeurs moyennes temporelles

Les tourbillons sont localisés dans le domaine de calcul par la présence d’un extremum de vorticité axiale. Leur position est déterminée à chaque instant puis moyennée temporellement. Ces positions moyennes permettent d’indiquer le nombre de rotations des tourbillons mais également la position axiale de la fusion (Fig. 5.20). La relation de la longueur du pas d’hélice d_h du système est vérifiée seulement pour la configuration spa_1 . Pour la configuration spa_2 , le pas est bien plus long que celui estimé avec la relation $d_h = w_0 t_c$ (différence de $\sim 50\%$). Ce résultat s’explique par la condition limite d’injection de l’écoulement car la vitesse axiale n’est pas imposée. Il en résulte une accélération du fluide entre les deux tourbillons (Fig. 5.23) qui contribue ainsi à l’allongement du pas d’hélice. Ce type de condition limite a été choisi pour éviter l’apparition du phénomène d’éclatement tourbillonnaire, obtenu avec une autre condition limite d’injection subsonique (section 2.4.2.2 du chapitre 2). La sur-vitesse au centre du système tourbillonnaire est moins élevée pour la configuration spa_1 permettant d’obtenir un pas d’hélice correspondant à la relation $d_h = w_0 t_c$.

Un mouvement de translation d’ensemble des tourbillons se produit progressivement en aval, observé également dans les simulations spatiales de Laporte [47] avec un autre code numérique et un système tourbillonnaire différent (champ de mesures expérimentales). Cette dérive est liée ici à l’introduction de la perturbation dans le plan d’entrée, car ce mouvement est quasi-inexistant en l’absence de perturbation. Pour les deux configurations les tourbillons restent dans le domaine régulier $L_{xreg} = [-25, 25] \times L_{yreg} = [-25, 25]$ où l’écoulement est bien résolu.

On évalue la pression et la vitesse axiale moyenne en temps au centre des tourbillons en utilisant la procédure suivante : à chaque instant on extrait les valeurs de pression et de vitesse axiale au centre de chaque tourbillon (repéré par un extremum local de vorticité axiale), puis ces valeurs sont moyennées temporellement. Les figures 5.22, 5.23 illustrent ces deux variables moyennées. Le déficit de pression au centre des tourbillons est proportionnel au carré de la vitesse azimutale du tourbillon en raison de l’équilibre hydrodynamique. Ce déficit est de faible amplitude pour la configuration spa_1 contrairement à la configuration spa_2 pour laquelle la vitesse azimutale est cinq fois plus élevée. Le minimum de pression augmente doucement en fonction de la distance aval par diffusion des tourbillons, et fortement lorsque le processus de fusion instable est amorcé. Il atteint un pic à la position axiale $z \sim 370r_c$ correspondant à

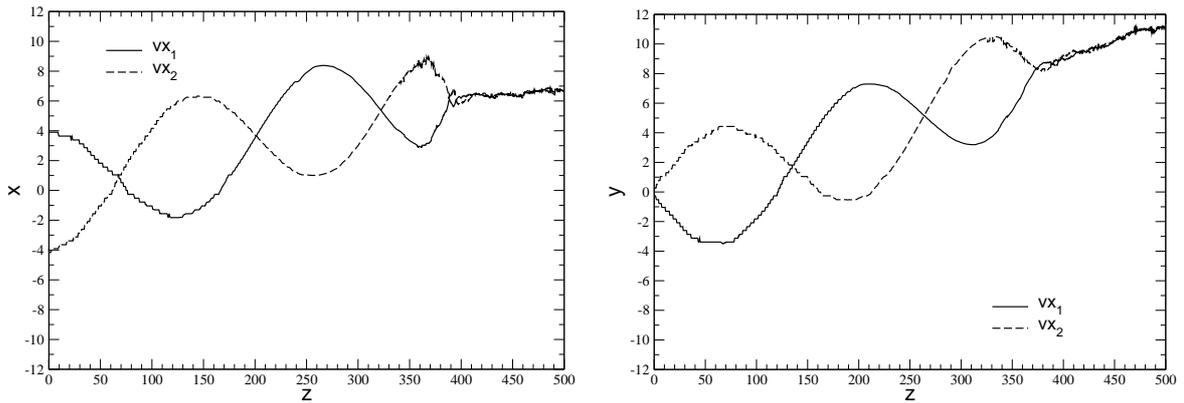


FIG. 5.20 – Positions horizontale et verticale des deux tourbillons (vx_1, vx_2) pour la configuration spa_1 .

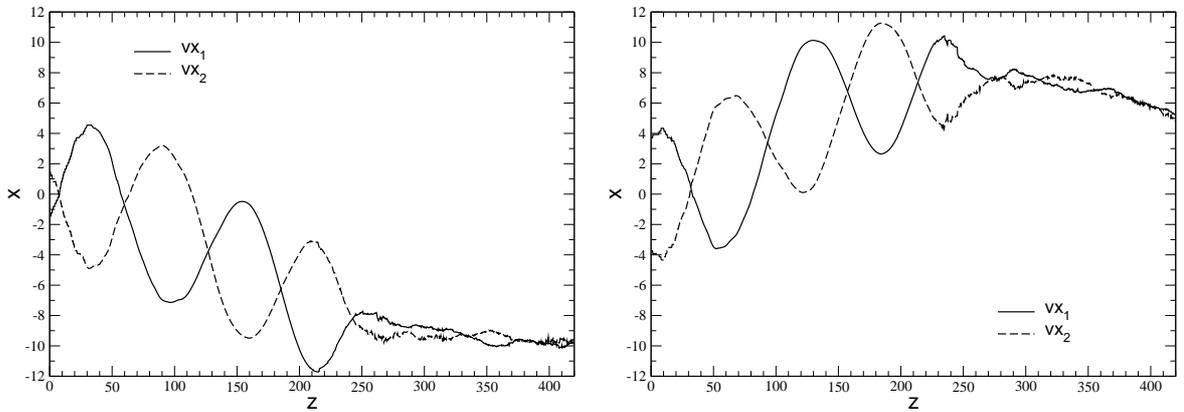


FIG. 5.21 – Positions horizontale et verticale des deux tourbillons (vx_1, vx_2) pour la configuration spa_2 .

la perte structurelle de chaque tourbillon due à la saturation de l'instabilité, puis s'atténue lorsque les structures turbulentes se réorganisent en une seule. Cet accroissement du minimum de pression au moment de la fusion est utilisé par Orlandi [72] pour détecter ce processus. Il est en revanche bien moins visible pour la configuration spa_2 , où pour des distances aval supérieures à $z = 50r_c$, il augmente continuellement pour atteindre un niveau presque constant à partir de $z \sim 250r_c$. Cet accroissement est lié à l'amplification de la perturbation montrée par la suite avec l'évolution de l'énergie cinétique des fluctuations. De plus, il est obtenu une oscillation spatiale de ce minimum après la fusion de longueur $l \sim 45r_c$ dont l'origine est incomprise.

La vitesse axiale moyenne au cœur des tourbillons est plus élevée que celle de l'écoulement ambiant de convection car elle n'est pas imposée par la condition limite d'injection subsonique (section 5.4.1) et dépend de la valeur de la pression totale imposée dans ce plan.

Cette sur-vitesse axiale moyenne décroît continuellement en fonction de la distance aval pour la

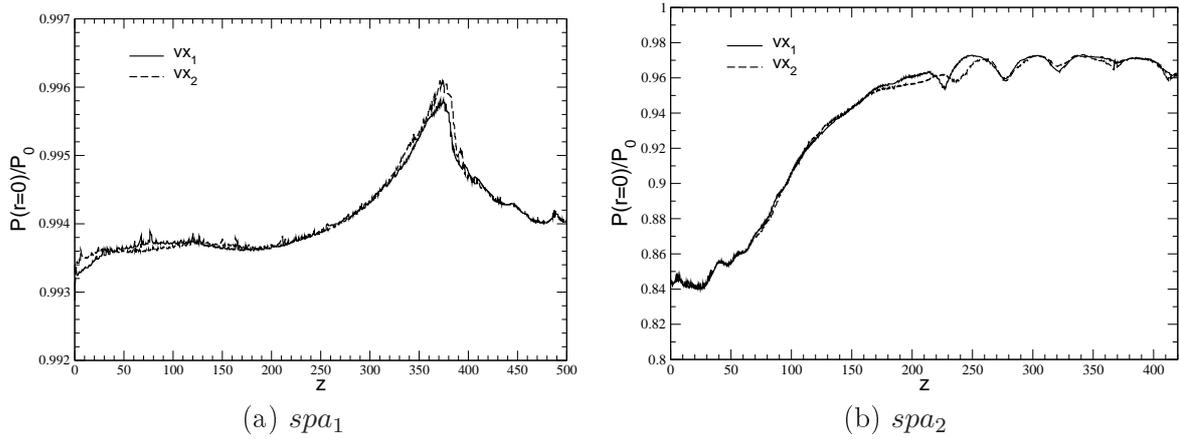


FIG. 5.22 – Minimum de pression au centre des tourbillons.

configuration spa_1 due aux effets visqueux. Elle augmente soudainement lorsque les tourbillons fusionnent par le développement d'une instabilité. Tandis que pour la seconde configuration spa_2 , cette décroissance lente est seulement obtenue jusqu'à $z \sim 50r_c$ puis elle est plus importante par la suite. La vitesse axiale moyenne atteint finalement une valeur quasi-constante après la fusion des tourbillons.

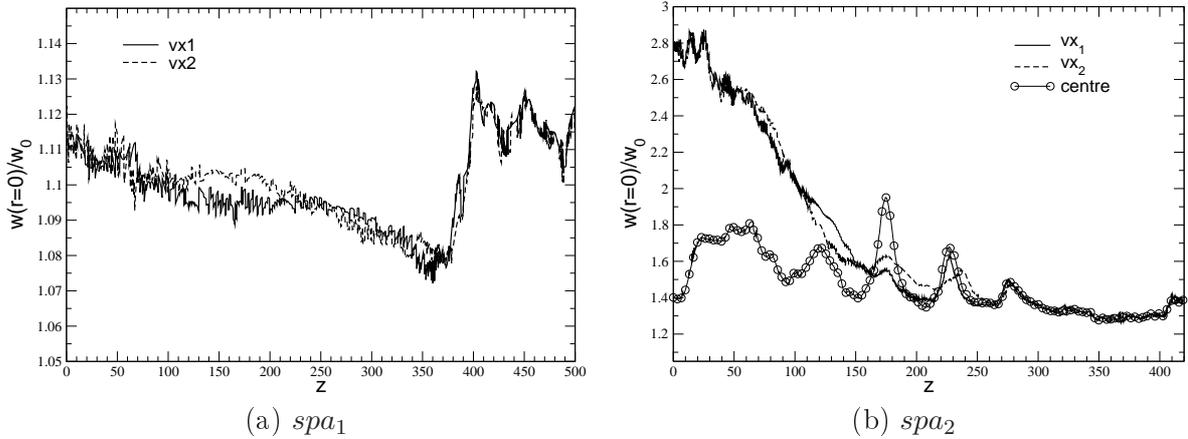


FIG. 5.23 – Vitesse axiale au centre des tourbillons.

5.4.3.2 Caractérisation de l'instabilité

La première analyse du développement d'une instabilité de type elliptique avec écoulement axial dans un système de deux tourbillons co-rotatifs est effectuée suivant l'évolution spatiale des énergies cinétiques des fluctuations transverses

$$Ec_{cf} = \frac{1}{2} \int \int (\overline{u'^2} + \overline{v'^2}) dS, \quad (5.22)$$

et totale

$$Ec_f = \frac{1}{2} \int \int (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) dS, \quad (5.23)$$

où l'intégration est effectuée dans chaque plan transverse $z = cst$ et où le champ de fluctuation est défini par $f' = f - \bar{f}$. Ces deux quantités sont calculées dans une fenêtre englobant les deux tourbillons, délimitée par le domaine de pas d'espace régulier. Elles permettent d'une part d'indiquer la convergence statistique du calcul et d'autre part de montrer l'amplification spatiale d'une perturbation dans le système tourbillonnaire.

Un temps de convection est introduit t_{conv} correspondant au temps mis par une particule fluide pour parcourir la longueur axiale du domaine de calcul L_z à la vitesse de convection w_0 (temps de convection $t_{conv} = L_z/w_0$). Les figures 5.24 et 5.25 représentent les évolutions spatiales des deux énergies cinétiques pour les deux configurations d'écoulements. Tant que l'instabilité n'est pas développée, elles sont nulles et augmentent lorsque le processus instable est amorcé. Il apparaît que cet accroissement est essentiellement dû aux fluctuations des composantes transverses de vitesse (u', v'), traduisant le fait que l'instabilité affecte la zone interne des tourbillons où ces vitesses sont élevées. Pour la configuration spa_1 , une brisure de pente a lieu à la distance aval $z \sim 400r_c$ qui correspond à la fusion des deux tourbillons (Fig. 5.20). Ce résultat n'est pas obtenu pour la configuration spa_2 (Fig. 5.25).

On remarque cependant que la convergence n'est pas atteinte pour cette configuration, bien que les deux instants utilisés correspondent à de nombreuses itérations, respectivement 14344 et 24744 (même ordre de grandeur pour spa_1). Au niveau du temps de calcul, il est à noter que seulement cinq cents itérations sont réalisables sur un temps d'occupation du super-calculateur de six heures, en utilisant pourtant 1024 processeurs.

Cette mauvaise convergence des deux énergies peut s'expliquer par la présence d'un mouvement instationnaire de dérive du système tourbillonnaire dans le domaine de calcul dû à l'injection des perturbations dans le plan d'entrée et qui serait plus important pour cette configuration spa_2 . Une convergence statistique des grandeurs moyennes et des variances d'un écoulement régi par une oscillation de basse fréquence nécessite un très grand nombre d'itérations qui ne peut être atteint ici. Il est proposé dans le paragraphe suivant une analyse locale montrant un niveau de convergence statistique convenable.

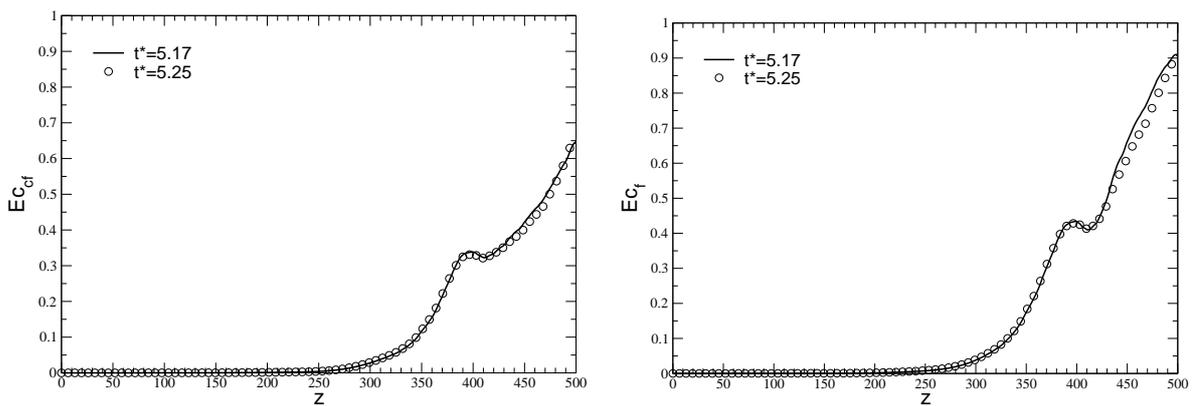


FIG. 5.24 – Énergie cinétique des fluctuations transversales Ec_{cf} et totales Ec_f pour la configuration spa_1 .

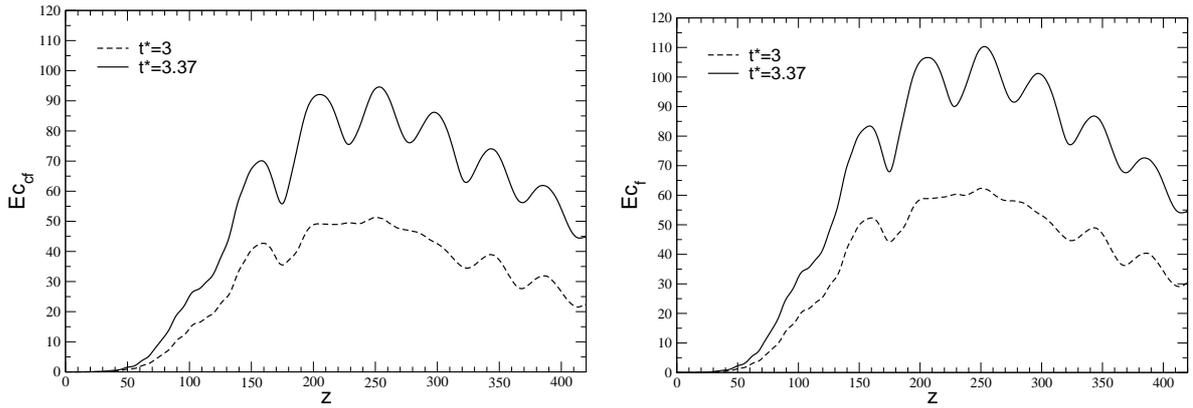


FIG. 5.25 – Énergie cinétique des fluctuations transversales Ec_{cf} et totales Ec_f pour la configuration spa_2 .

La seconde analyse des simulations spatiales concerne les déformations structurelles d'un tourbillon selon l'amplification de la perturbation. Pour cela, une décomposition de la vorticité axiale ω_z en série de Fourier est calculée dans le repère lié au système tourbillonnaire. L'axe de ce repère est la ligne de connectivité des deux tourbillons et son origine est le point médian entre les deux tourbillons (Fig. 5.26). Pour chaque tourbillon, la composante de vorticité axiale est interpolée sur un maillage cylindrique puis exprimée sous la forme d'une série de Fourier (on se restreint ici à six modes), telle que

$$\omega_z(R, \theta, z, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^6 a_n(R, z, t) \cos(n\theta) + b_n(R, z, t) \sin(n\theta). \quad (5.24)$$

où les coefficients de Fourier sont

$$a_0(R, z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \omega_z(R, \theta, z, t) d\theta \quad (5.25)$$

$$a_n(R, z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \omega_z(R, \theta, z, t) \cos(n\theta) d\theta, \quad (5.26)$$

$$b_n(R, z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \omega_z(R, \theta, z, t) \sin(n\theta) d\theta. \quad (5.27)$$

$$(5.28)$$

L'évolution en fonction de la distance aval d'un coefficient moyenné en temps $\overline{a_n}$ ou $\overline{b_n}$   deux instants de la simulation permet de s'assurer de la convergence statistique de la solution. En effet, le mouvement de dérive du système à basse fréquence dans le domaine de calcul n'est pas pris en compte car on se place dans le repère lié aux tourbillons. Pour la configuration spa_2 dont la convergence des énergies fluctuantes n'était pas établie, il apparaît que ce défaut est corrigé avec cette analyse locale des coefficients de Fourier. Les valeurs moyennes se comportent de manière très similaire ainsi que leurs variances (Fig. 5.27). On obtient pour la configuration spa_1 exactement les mêmes résultats. On rappelle que la variance d'une fonction f par rapport

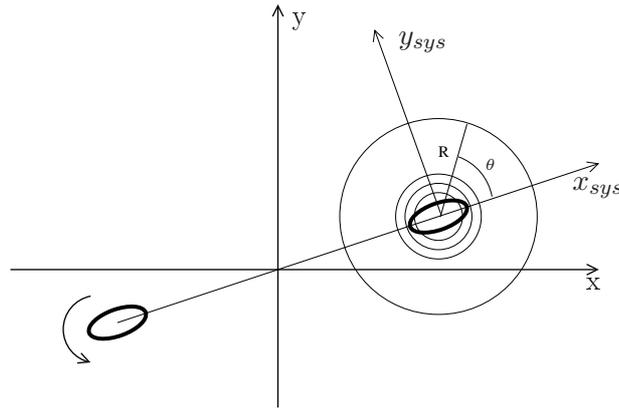


FIG. 5.26 – Repère lié au tourbillon (x_{sys}, y_{sys}) utilisé pour la décomposition de la vorticité de chaque tourbillon en série de Fourier.

à sa moyenne temporelle \bar{f} s'écrit par définition

$$\text{Var}(f) = \overline{f^2} - \bar{f}^2. \quad (5.29)$$

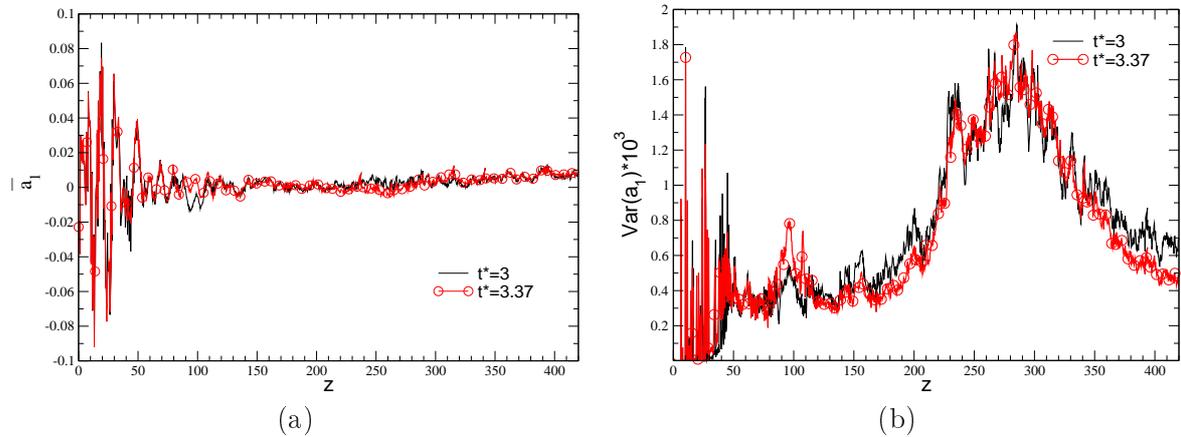


FIG. 5.27 – Comparaison à deux instants différents du coefficient a_1 , moyenné en temps \bar{a}_1 (a) et de sa variance (b), pour la configuration spa_2 . Extraction du coefficient au rayon $R = 0.8$.

Les coefficients de Fourier (\bar{a}_n, \bar{b}_n) permettent de déterminer le mode prédominant de la structure du tourbillon. Le mode $n = |2|$ est le plus présent pour la configuration spa_1 (Fig. 5.28), dont sa structure est illustrée sur la figure 5.29. Ce mode correspond à la déformation elliptique du tourbillon par le champ de déformation induit par son voisin. On remarque cependant qu'il s'amplifie à partir de la distance aval $z \sim 300r_c$ et atteint un niveau de saturation à $z \sim 400r_c$ qui correspond à la fusion des tourbillons pour cette configuration (Fig. 5.20). Les fluctuations importantes du mode $n = 1$ sont dues à la difficulté d'une localisation précise des centres des tourbillons qui est effectuée ici simplement à l'aide de l'extremum de vorticité axiale.

Pour la seconde configuration spa_2 , l'écoulement est plus complexe et il est plus difficile de déterminer le mode de déformation pré-dominant (Fig. 5.30). Le mode $n = |2|$ est également présent mais il n'a cependant pas un accroissement significatif lorsque l'écoulement devient instable comme pour la configuration spa_1 . On remarque que le mode $n = |4|$ présente une oscillation de longueur d'onde $\lambda \sim 30r_c$ pour les deux directions, ce qui indique le développement d'un mode de structure hélicoïdale.

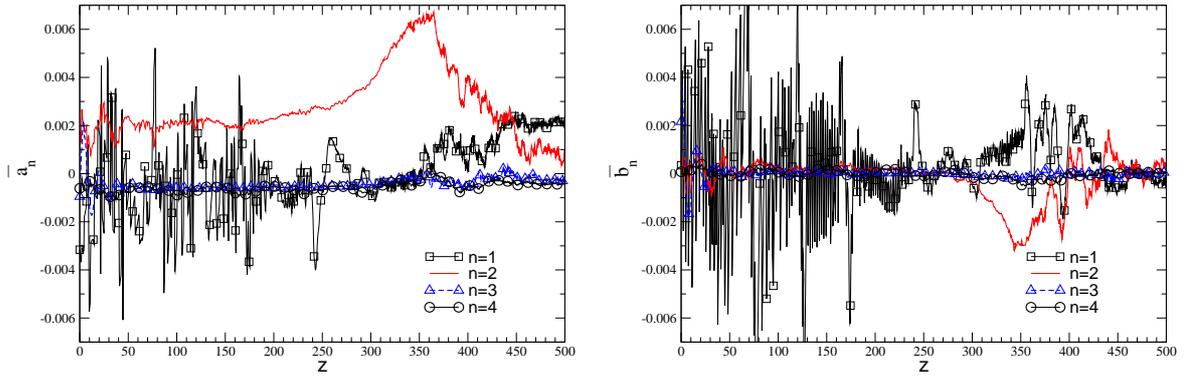


FIG. 5.28 – Comparaison de quatre modes moyennés en temps pour la configuration spa_1 et évalué en $R = 0.8$.

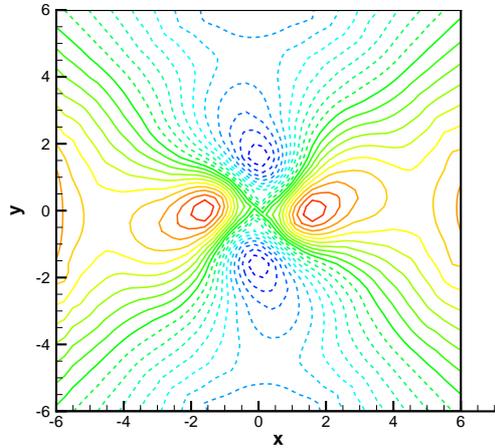


FIG. 5.29 – Reconstruction du champ moyen de vorticité axiale du mode pré-dominant $n = 2$ pour la configuration spa_1 : $\overline{\omega_z}(R, z, \theta) = \overline{a_2}\cos(2\theta) + \overline{b_2}\sin(2\theta)$, avec $R = 0.8$ et $z = 330r_c$.

L'évolution des variances des modes représentée sur la figure 5.31 montre que les modes $n = 0$ et $n = 2$ ont un accroissement similaire et à partir de la même distance longitudinale (lorsque l'écoulement devient instable). Il semble donc que ces deux modes sont ceux qui résonnent et qui gouvernent le développement de l'instabilité elliptique (condition de résonance Eq. 5.15).

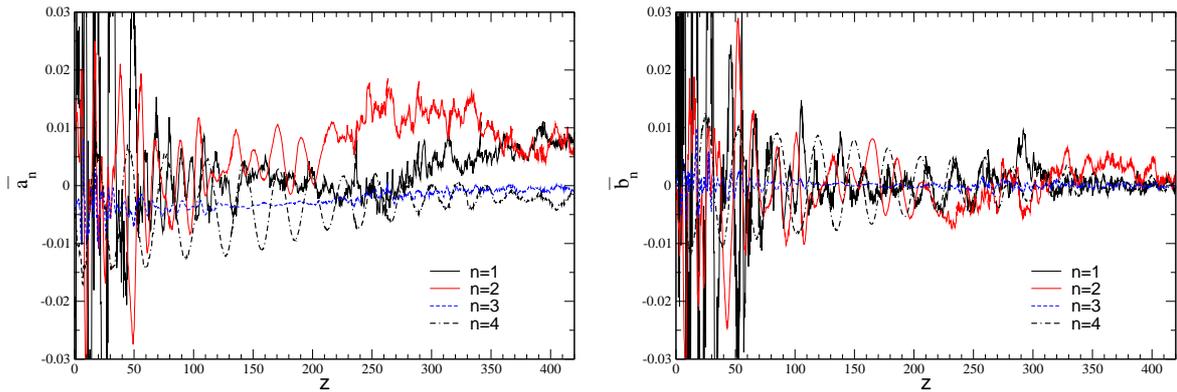


FIG. 5.30 – Comparaison de quatre modes moyennés en temps pour la configuration spa_2 et évalué en $R = 0.8$.

Ce résultat est en accord avec l'analyse de Lacaze *et al.* [46] sur l'effet de la vitesse axiale sur ce type d'instabilité, en changeant le couple de modes satisfaisant les conditions de résonances de l'apparition (Eq. 5.14, 5.13, 5.15). De plus, les variances des coefficients a_2 et b_2 ont le même comportement pour les deux configurations, indiquant la direction de déformation des tourbillons. Ainsi, l'amplification des perturbations lors du développement de l'instabilité suit la direction d'angle $\pi/4$ par rapport à la ligne de connectivité des deux tourbillons. Cette direction correspond à celle du champ de contrainte induit par un tourbillon sur son voisin en accord avec la théorie des instabilités elliptiques [48, 95, 96].

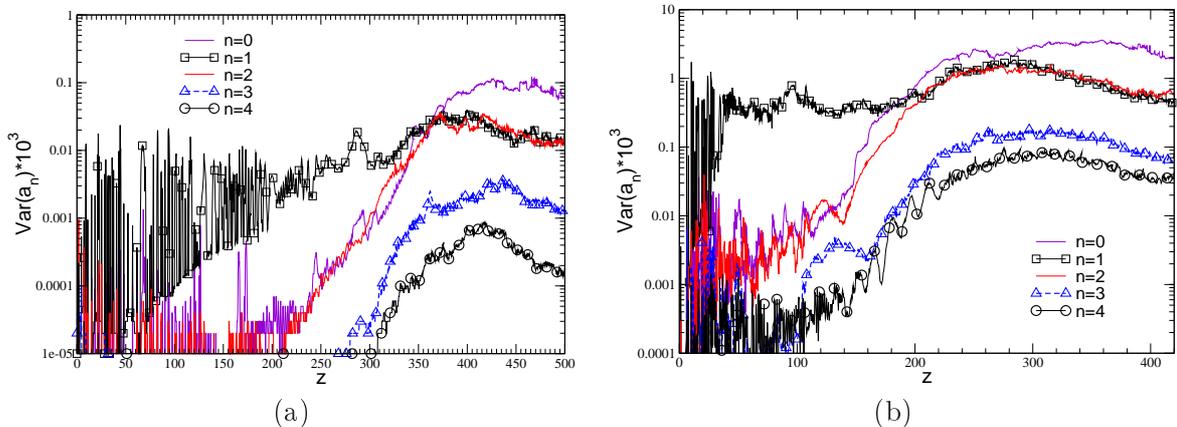


FIG. 5.31 – Variance des cinq premiers modes (coefficient a_n) évaluée en $R = 0.8$ pour les configurations spa_1 (a) et spa_2 (b).

5.5 Conclusion

La fusion de deux tourbillons co-rotatifs identiques (taille et circulation) a été étudiée à l'aide de deux types de simulations : temporelles et spatiales.

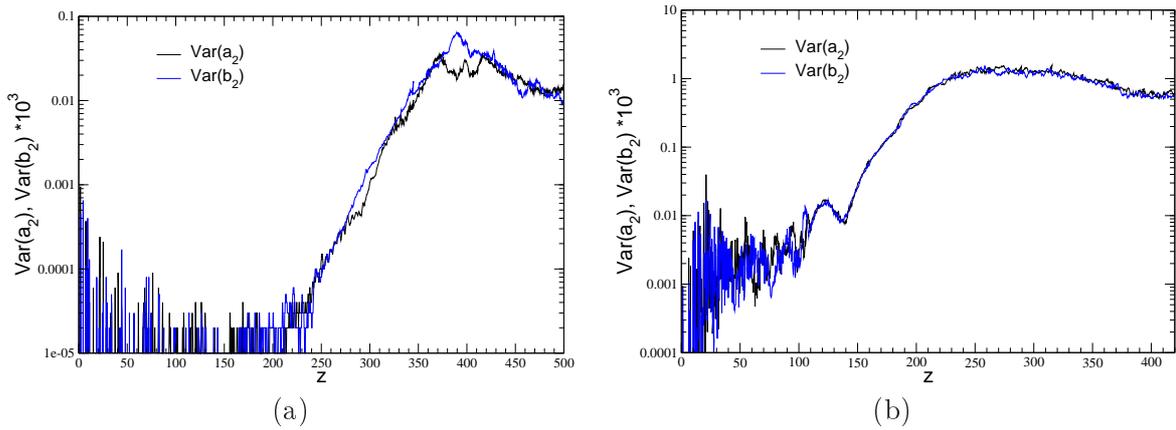


FIG. 5.32 – Variance des coefficients a_2 et b_2 évaluée en $R = 0.8$ pour les configurations spa_1 (a) et spa_2 (b).

Les simulations temporelles ont permis d'analyser le processus de fusion bidimensionnelle et tridimensionnelle sans vitesse axiale. Le mécanisme bidimensionnel se décompose en quatre étapes : une première étape de diffusion, une étape de convection, une seconde étape de diffusion et enfin une étape d'axisymétrisation. Une analyse structurale a été menée pour évaluer l'influence du modèle de tourbillon sur ce mécanisme (Lamb-Oseen ou VM2). À faible nombre de Reynolds, les cœurs des tourbillons diffusent, leur structure converge alors vers celle d'un tourbillon gaussien. Le processus de fusion bidimensionnelle est amorcé dès que le rapport entre les rayons des tourbillons a et la distance qui les sépare l'un de l'autre b atteint la valeur critique $(a/b)_c \sim 0.22$. La phase de convection est caractérisée par l'éjection de filaments de vorticité autour du système qui induisent une vitesse les poussant l'un vers l'autre.

Lorsque le nombre de Reynolds est élevé, la fusion peut être obtenue par le développement d'instabilités elliptiques. Ce type d'instabilité est responsable d'une fusion qui a lieu plus tôt. Les résultats d'analyse du taux d'amplification ont montré qu'il était plus élevé dans des tourbillons VM2, qui sont plus représentatifs de tourbillons issus d'un enroulement de nappe de vorticité comme dans un sillage d'avion.

Pour ces deux mécanismes de fusion, la structure du tourbillon final est définie par deux échelles de longueurs pour les configurations considérées dans cette étude. Ce résultat est intrinsèque au processus de fusion. La valeur de la puissance de la loi de vitesse azimutale $v_\theta(r)$ entre les deux rayons diffère selon le mécanisme, $\alpha \sim 0.6$ dans le cas $2D$ et $\alpha \sim 0.35$ dans le cas tridimensionnel.

Les simulations spatiales tiennent compte de la vitesse axiale et de la torsion du système, contrairement à l'approche temporelle. Deux configurations d'écoulements ont été simulées pour lesquelles la fusion est obtenue par le développement d'instabilités elliptiques. Une caractérisation des modes de déformations des tourbillons a été proposée. Ces premiers résultats montrent l'effet de la vitesse axiale sur le développement spatio-temporel d'instabilités dans un système de deux tourbillons co-rotatifs, en changeant notamment le couple de modes qui entrent en résonance. Cependant, ce type de simulations est limité à des configurations académiques en raison des grandes ressources informatiques nécessaires.

Conclusion générale et perspectives

Le travail de recherche présenté dans ce manuscrit a pour objectif principal de contribuer à la compréhension et la caractérisation des écoulements tourbillonnaires de sillage d'avion en réalisant des simulations numériques directes et aux grandes échelles. Cette contribution s'inscrit dans une stratégie basée sur la connaissance du comportement des tourbillons pour agir à la source du problème de la limitation de la capacité des aéroports. Les apports des simulations numériques proviennent d'une part du fait qu'elles tiennent compte d'une grande partie de la complexité des écoulements, et d'autre part, de la précision des résultats qu'elles peuvent atteindre, et ce même pour des nombres de Reynolds très élevés.

La richesse des écoulements de sillage d'avion, due aux nombreux mécanismes à différentes échelles, impose de considérer des configurations épurées représentant seulement une partie du sillage. Au cours de cette thèse, trois écoulements caractéristiques ont été étudiés : la propagation et la collision de fronts d'onde, l'interaction entre un jet et un tourbillon, et la fusion de deux tourbillons co-rotatifs identiques.

Synthèse des résultats

Concernant la propagation et la collision de fronts d'onde axisymétriques, il a été établi que la variation locale du rayon des tourbillons a pour conséquence la génération d'une entité unique se propageant à vitesse quasi-constante le long du tourbillon. Nous avons montré que cette vitesse de propagation dépend essentiellement de la vitesse azimutale du tourbillon même pour des amplitudes de fronts non-linéaires. Une conséquence majeure d'une telle propagation est la génération d'un écoulement axial au cœur du tourbillon, qui peut s'avérer suffisant pour déstabiliser l'écoulement *via* le développement d'instabilités hélicoïdales.

Les simulations numériques directes de deux fronts se propageant l'un vers l'autre ont permis de montrer que leur collision pouvait mener à un phénomène d'explosion tourbillonnaire lorsque leur amplitude était élevée. Nous avons établi un critère objectif d'apparition de ce phénomène par deux diagnostics différents : une augmentation soudaine d'entropie et une génération de petites structures. Plus précisément, l'explosion tourbillonnaire a lieu pour des variations relatives de rayon supérieures à 40%.

Dans le but d'identifier un mécanisme de minimisation de l'intensité des tourbillons, nous sommes intéressés à l'impact de l'écoulement de jet issu d'un moteur sur un tourbillon,

pour les trois phases de vol d'un avion. Dans un premier temps, les efforts ont porté sur l'estimation d'une gamme de paramètres proche des configurations réelles, en corrélation avec la modélisation utilisée. En effet, nous avons considéré une configuration simplifiée de l'interaction d'un jet et d'un tourbillon ayant permis d'effectuer des simulations temporelles aux grandes échelles. Il ressort de ces simulations que le jet a peu d'influence sur le tourbillon en configuration de croisière. Il contribue à réduire l'extremum de vitesse azimutale du tourbillon et ce, de manière plus prononcée lorsqu'il est plus proche. Pour les configurations hypersustentées, le tourbillon est au contraire complètement déstructuré par l'interaction avec le jet à travers le développement d'instabilités de type centrifuge couplé ou non avec le déclenchement d'instabilités hélicoïdales. De plus, les simulations avec un jet chaud n'ont pas montré de différences notables de la dynamique d'interaction pour les paramètres considérés dans cette étude. Cette dynamique semble principalement contrôlée par le rapport des vitesses caractéristiques du jet et du tourbillon.

Le troisième écoulement abordé concerne le processus de fusion des deux tourbillons co-rotatifs émis en bout d'aile et de volet qui gouverne la dynamique dans le champ proche étendu. L'intérêt de son étude est la détermination des caractéristiques des tourbillons contra-rotatifs persistant par la suite dans l'atmosphère. Deux approches numériques ont été employées. La première approche dite temporelle est celle classiquement utilisée pour les simulations des tourbillons de sillage. Elle est basée sur l'hypothèse d'un écoulement quasi-parallèle sur la longueur longitudinale de la boîte de calcul. Des simulations numériques directes et aux grandes échelles ont été réalisées pour étudier le processus bidimensionnel et tridimensionnel *via* le développement d'instabilités elliptiques. Nous avons étudié l'influence du modèle de tourbillon sur ce mécanisme en considérant deux modèles de tourbillon : le modèle classique de Lamb-Oseen à une échelle de longueur caractéristique et celui de Fabre et Jacquin à deux échelles représentatif d'une structure tourbillonnaire issue d'un enroulement de nappe de vorticité. Le premier résultat obtenu avec ces simulations temporelles est que le taux de croissance de l'instabilité elliptique est plus important dans les tourbillons à deux échelles. Le second résultat concerne la structure du tourbillon final qui est définie par deux échelles de longueurs caractéristiques indépendamment du modèle initial de tourbillon et du processus de fusion bidimensionnel et tridimensionnel. En revanche, ces simulations ne tiennent compte ni de la vitesse axiale, ni de la torsion du système tourbillonnaire due au champ de contrainte exercé par un tourbillon sur son voisin. Nous avons donc mis en place des simulations spatiales de ce processus pour palier ce manque.

Les difficultés majeures rencontrées pour ces simulations étaient dans un premier temps d'ordre numérique. Nous avons développé de nouvelles conditions limites mieux adaptées à la physique du problème, aussi bien pour la condition d'injection dans le plan d'entrée, que celle de sortie, ainsi que celles des faces latérales en raison de la circulation non-nulle de l'écoulement considéré. Ces développements ont été validés par comparaison de simulations numériques directes d'éclatement tourbillonnaire stationnaire et instationnaire. La deuxième difficulté majeure a été la gestion de l'accumulation de fichiers de tailles très importantes ainsi que le post-traitement de solutions, même si une partie a été effectuée au cours des calculs.

Deux configurations de système tourbillonnaire ont été considérées. Elles se différencient par deux valeurs de rapport de vitesse entre celle du tourbillon et celle de l'écoulement axial. Pour ces deux simulations numériques directes, le système tourbillonnaire développe une instabilité qui semble bien être de type elliptique, conduisant à la fusion complète des deux tourbillons. Une analyse structurelle des tourbillons a été proposée en décomposant le champ de vorticité

axiale sous la forme d'une série de Fourier dans le repère lié aux tourbillons. Elle a permis de mettre en évidence que les modes instables observés ne sont pas les mêmes que pour les configurations sans vitesse axiale.

Ce travail montre de plus la possibilité de réaliser de telles simulations, ouvrant ainsi de nombreuses perspectives pour l'étude de la dynamique des tourbillons.

Perspectives

Les résultats obtenus au cours de cette thèse ont permis d'identifier quelques perspectives sur la dynamique des tourbillons de sillage d'avion.

L'étude des phénomènes de propagation de fronts d'onde axisymétriques pourrait être poursuivie, notamment en considérant des fronts d'origines physiques différentes, comme un changement de circulation ou de vitesse axiale, résultant d'une accélération ou décélération de l'avion ou d'une perte locale de portance. Il serait également intéressant d'étudier la propagation de fronts d'onde non-axisymétriques (modes $m = 1$) qui pourraient provenir d'un déplacement de la position des cœurs des tourbillons issu d'une légère embardée de l'avion par rapport à son axe de vol. D'un point de vue plus fondamental, les fronts d'onde d'ordre supérieur ($m \geq 2$) peuvent également se propager et en étudier les conséquences en termes d'instabilités secondaires représente aussi une autre poursuite d'étude. Pour ces différents types de front, nous pouvons nous interroger sur leur stabilité. D'un point de vue théorique, il pourrait être recherché des solutions notamment concernant le nouvel état du tourbillon, stationnaire ou instationnaire en se plaçant éventuellement dans le repère se propageant à la vitesse du front d'onde.

Concernant la collision de deux fronts d'onde, on peut s'interroger sur les mécanismes d'interaction lorsque les amplitudes sont différentes, et si l'explosion tourbillonnaire peut avoir lieu et dans quelles conditions.

Nous avons analysé ici les phénomènes de propagation et de collision de fronts d'onde pour un tourbillon isolé alors qu'ils peuvent être présents dans un contexte d'une paire de tourbillons contra-rotatifs (champ moyen et lointain d'un sillage d'avion). Il apparaît ainsi naturellement la question de l'influence du champ de contrainte exercé par un tourbillon sur son voisin sur ces phénomènes, notamment le couplage éventuel avec le développement d'instabilités elliptiques.

Le rapprochement des deux tourbillons co-rotatifs égaux lors du processus de fusion bidimensionnel est généralement expliqué par la présence d'un champ de vorticité anti-symétrique représenté par un quadripôle externe, qui induit sur chaque tourbillon une vitesse les poussant l'un vers l'autre. Or, il semble que la structure de ce champ de vorticité ne soit pas aussi simple durant les premiers instants où les tourbillons se rapprochent. En effet, nous avons montré la présence d'un quadripôle de vorticité anti-symétrique situé entre les deux tourbillons qui a un rôle opposé au quadripôle externe. Il reste cependant à analyser dans les détails et à quantifier son influence sur le processus de fusion bidimensionnelle.

Les effets d'un écoulement axial sur le développement d'instabilités elliptiques dans un système de deux tourbillons co-rotatifs sont encore mal déterminés. Il serait donc souhaitable de poursuivre les travaux, notamment avec des vitesses axiales au cœurs des tourbillons différentes. D'un point de vue de la modélisation numérique, le type de perturbation des tourbillons qui amorce le développement d'instabilités constitue également un sujet d'étude, car il peut d -

terminer le type d'instabilité qui va gouverner la dynamique.

L'interaction entre un jet et un tourbillon pourrait être simulée spatialement, qui avec l'approche temporelle souffre d'un manque de réalisme (développement spatio-temporel du jet, torsion du jet autour du tourbillon). Dans cette perspective, l'influence du jet sur l'enroulement d'une nappe de vorticité, sur la naissance des tourbillons concentrés et par suite sur le mécanisme de fusion pourrait être aussi analysée. De nouvelles fonctionnalités pourraient s'avérer utiles pour minimiser le coût de telles simulations, comme l'utilisation de maillages curvilignes ou le découpage du domaine de calcul en plusieurs blocs.

Dans le contexte général des sillages d'avion, les aspects physico-chimiques des rejets des moteurs représentent un domaine ouvert dont les enjeux concernent l'environnement et les changements climatiques globaux à venir. Les gaz et les particules émis par les avions ont un impact sur la chimie et sur le bilan radiatif de l'atmosphère, de part la formation de traînées de condensation dégénéralant en nuages de type cirrus, et d'autre part, par la production ou la destruction d'ozone causée par les oxydes d'azote issus de la combustion du kérosène interférant avec la chimie de l'atmosphère. Le trafic aérien ne cessant d'augmenter, le manque d'informations précises et objectives de la contribution de ces rejets au réchauffement climatique rend nécessaire l'étude de la dynamique des tourbillons de sillage en prenant en compte la stratification atmosphérique et les réactions chimiques associées aux gaz et aux suies issus des moteurs.

Bibliographie

- [1] W. Althaus, Ch. Brücker, and M. Weimer. *Breakdown of slender vortices*. Fluid Vortices, Kluwer Academic Publishers, S. I. Green (Ed.) edition, 1996. 373-426.
- [2] S. Arendt, David C. Fritts, and Andreassen O. The initial value problem for Kelvin vortex waves. *J. Fluid Mech.*, 344 :182–212, 1997.
- [3] J. Bardina, J.H. Ferziger, and W.C. Reynolds. Improved subgrid scale models for large-eddy simulation. *AIAA Paper*, 80-1357, 1980.
- [4] M.F. Barone. *Receptivity of Compressible Mixing-Layer*. PhD thesis, PhD Thesis, Stanford University, 2003.
- [5] P. Billant, J.M. Chomaz, and P. Huerre. Experimental study of vortex breakdown in swirling jets. *J. Fluid Mech.*, 376 :183–219, 1998.
- [6] G.A. Blaisdell, E.T. Spyropoulos, and J.H. Qin. The effects of the formulation of nonlinear terms on aliasing errors in spectral methods. *Applied Numerical Mathematics*, 21, 1996.
- [7] C.H. Bruneau and E. Creuse. Towards a transparent boundary condition for compressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 36 :807–840, 2001.
- [8] S. Brunet, F. Garnier, and L. Jacquin. Numerical/experimental simulations of exhaust jet mixing in wake vortex. *30th AIAA/Fluid Dynamics Conference*, 1999. Norfolk, Virginia, (AIAA 99-3418).
- [9] M.H. Carpenter, D. Gottlieb, and S. Abarbanel. The stability of numerical boundary treatments for compact high-order finite-difference schemes. *J. Comp. Phys.*, 108 :272–295, 1993.
- [10] C. Cerretelli and C.H.K. Williamson. The physical mechanism for vortex merging. *J. Fluid Mech.*, 475 :41–77, 2003.
- [11] H. Chevalier. Flight test studies of the formation and dissipation of trailing vortices. *J. Aircraft*, 10 :14–18, 1973.
- [12] T. Colonius. Modeling artificial boundary conditions for compressible flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 36 :315–345, 2004.
- [13] J.D. Crouch. Instability and transient growth for two trailing-vortex pairs. *J. Fluid Mech.*, 350, 1997.
- [14] J.D. Crouch, G.D. Miller, and P.R. Spalart. Active control system for breakup of airplane trailing vortices. *AIAA J.*, 39, 2001.
- [15] S.C. Crow. Stability theory for a pair of trailing vortices. *AIAA J.*, 8 :2172–2179, 1970.
- [16] A.C. De Bruin. Estimation of exhaust velocities and temperatures for various operation phases of a modern high by-pass turbofan. *FAR-Wake project*, D2.1.1-1.b, 2005.

- [17] J.M. Delery. Aspects of vortex breakdown. *Prog. Aerospace Sci.*, 30 :1–59, 1994.
- [18] W.J. Devenport, M.C. Rife, Liapis S.I., and J. Miranda. The structure and development of a wing-tip vortex. *J. Fluid Mech.*, 312 :67–106, 1996.
- [19] F. Ducros, P. Comte, and M. Lesieur. Large-eddy simulation of transition to turbulence in a boundary layer spatially developing over a flat plate. *J. Fluid Mech.*, 326 :1–36, 1996.
- [20] G. Erlebacher, M.Y. Hussaini, C.G. Speziale, and Zang T.A. Towards the Large-Eddy Simulation of Compressible Turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 238 :155–187, 1992.
- [21] D. Fabre and L. Jacquin. Stability of a four-vortex aircraft wake model. *Phys. Fluids*, 12 :2438–2443, 2000.
- [22] D. Fabre and L. Jacquin. Short-wave cooperative instabilities in representative aircraft vortices. *Phys. Fluids*, 16(5), 2004.
- [23] D. Fabre, L. Jacquin, and A. Loof. Optimal perturbations in a four-vortex aircraft wake in counter-rotating configuration. *J. Fluid Mech.*, 451 :319–328, 2002.
- [24] D. Fabre, D. Sipp, and L. Jacquin. Kelvin waves and the singular modes of the Lamb-Oseen vortex. *J. Fluid Mech.*, 551 :235–274, 2006.
- [25] Paulo J.S.A. Ferreira de Sousa and J.C.F. Pereira. Reynolds number dependence of two-dimensionnal laminar co-rotating vortex merging. *Theo. and Comp. Fluid Dynamics*, 19 :65–75, 2005.
- [26] C. Ferreira Gago. *Simulations numériques d'un jet rond turbulent et de son interaction avec un tourbillon de sillage*. PhD thesis, Université de Marne-La-Vallée, 2002.
- [27] C. Ferreira Gago, S. Brunet, and F. Garnier. Numerical investigation of turbulent mixing in a jet/wake vortex interaction. *AIAA Journal*, 40, 2002.
- [28] L. Gamet, F. Ducros, F. Nicoud, and T. Poinso. Compact finite difference schemes on non-uniform meshes. Application to direct numerical simulations of compressible flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 29 :159–191, 1999.
- [29] T. Gerz, F. Holzäfel, and D. Darracq. Commercial aircraft wake vortices. *Progress in Aerospace Sciences*, 38 :181–208, 2002.
- [30] M.B. Giles. A numerical method for unsteady inviscid flow in Turbomachinery. *GTL Report 195, MIT Gas Turbine Laboratory*, 1988.
- [31] M.B. Giles. Nonreflecting Boundary Conditions for Euler Equation Calculations. *AIAA Journal*, 28 :2050–2058, 1990.
- [32] W.J. Grabowski and S.A. Berger. Solutions of the Navier-Stokes equations for vortex breakdown. *J. Fluid Mech.*, 75 :525–544, 1976.
- [33] S.I. Green. *Wing tip vortices*. Kluwer Academic Publishers, S. I. Green (Ed.) edition, 1995. 427-470.
- [34] F. Holzäpfel, T. Hofbauer, D. Darracq, H. Moet, F. Garnier, and C. Ferreira Gago. Analysis of wake vortex decay mechanisms in the atmosphere. *Aerospace Science and Technology*, 7, 2003.
- [35] E.J. Hopfinger, F.K. Browand, and Y. Gagne. Turbulence and waves in a rotating tank. *J. Fluid Mech.*, 125 :505–534, 1982.
- [36] L. Jacquin. Sillage des avions de transport. 36^{eme} Colloque d'Aérodynamique appliquée, 2000. Orléans.

- [37] L. Jacquin, D. Fabre, and Geffroy P. The properties of a Transport Aircraft Wake in the Extended Near Field : an Experimental Study. *In : AIAA Paper 2001-1038*, 2001.
- [38] L. Jacquin, D. Fabre, D. Sipp, and E. Coustols. Unsteadiness, instability and turbulence in trailing vortices. *C. R. Physique*, 6 :399–414, 2005.
- [39] L. Jacquin, D. Fabre, D. Sipp, V. Theofilis, and H. Vollmers. Instability and unsteadiness of aircraft wake vortices. *Aerospace Science and Technology*, 7 :577–593, 2003.
- [40] L. Jacquin, P. Molton, P. Loiret, and E. Coustols. An experiment on jet/wake vortex interaction. *37th AIAA/Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, 2007. Miami, Floride.
- [41] L. Jacquin and C. Pantano. On the persistence of trailing vortices. *J. Fluid Mech.*, 471 :159–168, 2002.
- [42] Ch. Josserand and M. Rossi. The merging of two co-rotating vortices : a numerical study. *European J. Mech., B/Fluids*, 26 :779–794, 2007.
- [43] (Lord) Kelvin. Vibrations of a columnar vortex. *Phil. Mag.*, 10, 1880.
- [44] J. Konopka. Increasing capacity by wake turbulence avoidance systems at Frankfurt/main airport. *Conference on capacity and wakes vortices, Imperial College of Science, Technology and Medicine*, 2001. London.
- [45] P. Koumoutsakos. Inviscid axisymmetrization of an elliptical vortex. *J. Comp. Phys.*, 138 :821–857, 1997.
- [46] L. Lacaze, K. Ryan, and S. Le Dizes. Elliptic instability in a strained Batchelor vortex. *J. Fluid Mech.*, 577 :341–361, 2007.
- [47] F. Laporte. *Simulation numérique appliquée à la caractérisation et aux instabilités des tourbillons de sillage d'avions de transport*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2002.
- [48] S. Le Dizes and F. Laporte. Theoretical prediction for elliptical instability in a two-vortex flow. *J. Fluid Mech.*, 471 :169–201, 2002.
- [49] S. Le Dizes and A. Verga. Viscous interactions of two co-rotating vortices before merging. *J. Fluid Mech.*, 467 :389–410, 2002.
- [50] S. Leibovich. The structure of vortex breakdown. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 10 :221–246, 1978.
- [51] S. Leibovich and Ma H.Y. Soliton propagation on vortex cores and the Hasimoto soliton. *Phys. Fluids*, 26 :3173–3179, 1983.
- [52] S. Leibovich and A. Kribus. Large-amplitude wave trains and solitary waves in vortices. *J. Fluid Mech.*, 216 :459–504, 1990.
- [53] S.K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.*, 103 :16–42, 1992.
- [54] M. Lesieur and P. Comte. Favre filtering and macro-temperature in large-eddy simulations of compressible turbulence. *Compte Rendu Acad. Sci.-Series IIB-Mechanics*, 329, 2001.
- [55] P. Margaritis, D. Marles, and I. Gursul. Experiments on jet/vortex interaction. *Exp. Fluids*, 44 :261–278, 2008.
- [56] T. Maxworthy and E.J. Hopfinger. Wave motions on vortex cores. *J. Fluid Mech.*, 151 :141–165, 1985.

- [57] E.W. Mayer and K.G. Powell. Viscous and inviscid instabilities of a trailing vortex. *J. Fluid Mech.*, 145 :91–114, 1992.
- [58] M.V. Melander, J.C. McWilliams, and N.J. Zabusky. Axisymmetrisation and vorticity-gradient intensification of an isolated vortex through filamentation. *J. Fluid Mech.*, 178 :137–159, 1987.
- [59] M.V. Melander, N.J. Zabusky, and J.C. McWilliams. Symmetric vortex merger in two dimensions : causes and conditions. *J. Fluid Mech.*, 195 :303–340, 1988.
- [60] O. Métais and M. Lesieur. Spectral Large-Eddy Simulation of Isotropic and Stably Stratified Turbulence. *J. Fluid Mech.*, 239 :157–194, 1992.
- [61] P. Meunier, U. Ehrenstein, T. Leweke, and M. Rossi. A merging criterion for two-dimensional co-rotating vortices. *Phys. Fluids*, 14(8), 2002.
- [62] P. Meunier, S. Le Dizès, and T. Leweke. Physics of vortex merging. *C.R. Physique*, no. 6, 2005.
- [63] P. Meunier and T. Leweke. Elliptic instability of a co-rotating vortex pair. *J. Fluid Mech.*, 533 :125–159, 2005.
- [64] R.C. Miake-Lye, M. Martinez-Sanchez, R.C. Brown, and C.E. Kolb. Plume and wake dynamics, mixing, and chemistry behind a high speed civil transport aircraft. *J. Aircraft*, 30 :467–479, 1993.
- [65] A. Michalke and G. Hermann. On the inviscid instability of a circular jet with external flow. *J. Fluid Mech.*, 114 :343–359, 1982.
- [66] H. Moet. *Simulation numérique du comportement des tourbillons de sillage dans l'atmosphère*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2003.
- [67] H. Moet, F. Laporte, G. Chevalier, and T. Poinso. Wave propagation in vortices and vortex bursting. *Phys. Fluids*, 17, 2005.
- [68] P. Monkewitz and X.D. Sohn. Absolute instability in hot jets. *AIAA J.*, 26 :911–916, 1988.
- [69] C.J. Moore. The role of shear-layer instability waves in jet exhaust noise. *J. Fluid Mech.*, 80 :321–367, 1977.
- [70] L. Ng and G. Erlebacher. Secondary instabilities in compressible boundary layers. *Phys. Fluids A*, 4, 1992.
- [71] O'Connor. Aircraft Vortex Spacing System (AVOSS) Overview and future direction. *Conference on capacity and wakes vortices, Imperial College of Science, Technology and Medicine*, 2001. London.
- [72] P. Orlandi. Two-dimensional and three-dimensional direct numerical simulation of co-rotating vortices. *Phys. Fluids*, 19, 2007.
- [73] R. Paoli and F. Garnier. Interaction of exhaust jets and aircraft wake vortices : small-scale dynamics and potential microphysical-chemical transformations. *C. R. Physique*, 6 :525–547, 2005.
- [74] R. Paoli, Hélié J., and Poinso T. Contrails formation in aircraft wakes. *J. Fluid Mech.*, 502 :361–373, 2004.
- [75] R. Paoli, F. Laporte, and B. Cuenot. Dynamics and mixing in jet/vortex interactions. *Phys. Fluids*, 15 :1843–1860, 2003.

- [76] T.J. Poinso and S.K. Lele. Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flows. *J. Comput. Phys.*, 101 :104–129, 1992.
- [77] D.S. Pradeep and F. Hussain. Effects of boundary condition in numerical simulations of vortex dynamics. *J. Fluid Mech.*, 516 :115–124, 2004.
- [78] V.J. Rossow. Use of individual flight corridors to avoid vortex wakes. *J. Aircraft*, 40 :225–231, 2003.
- [79] D.H. Rudy and J.C. Strikwerda. A non-reflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes calculations. *J. Comput. Phys.*, 36 :55–70, 1980.
- [80] M.R. Ruith, P. Chen, and E. Meiburg. Development of boundary conditions for direct numerical simulations of three-dimensional vortex breakdown phenomena in semi-infinite domains. *Comp. Fluids*, 33 :1225–1250, 2004.
- [81] M.R. Ruith, P. Chen, E. Meiburg, and T. Maxworthy. Three-dimensional vortex breakdown in swirling jets and wakes : direct numerical simulation. *J. Fluid Mech.*, 486 :331–378, 2003.
- [82] P.G. Saffman. *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press, 1992.
- [83] P. Sagaut. *Large-Eddy Simulation for incompressible flows*. Springer, 1998.
- [84] T. Sarpkaya and J.J. Daly. Effect of ambient turbulence on trailing vortices. *J. Aircraft*, 24 :399–404, 1987.
- [85] D. Sipp and L. Jacquin. Self adaptation and viscous selection in concentrated two-dimensional vortex dipoles. *Phys. Fluids*, 12(2), 2000.
- [86] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, 91,(3), 1963.
- [87] P.R. Spalart. Airplane trailing vortices. *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, 30, 1998.
- [88] E.A. Spitzer, R.P. Rudis, J.N. Hallock, and G.C. Greene. Windline for parallel runway operations at San Francisco Airport. *XXV Assembly of the European Geophysical Society*, 2001. Nice.
- [89] M. Sreedhar and Saab Ragab. Large-Eddy simulation of longitudinal stationary vortices. *Phys. Fluids*, 17, 1994.
- [90] C.K. Tam and J.C Webb. Dispersion- relation- preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J. Comp. Phys.*, 107, 1993.
- [91] K.W. Thompson. Time dependant boundary conditions for hyperbolic systems. *J. Comp. Phys.*, 89 :439–461, 1990.
- [92] I. Tombach. Observations of Atmospheric Effects on Vortex Wake Behaviour. *J. Aircraft*, 10 :641–647, 1973.
- [93] R. Verzicco and P. Orlandi. A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates. *J. Comp. Phys.*, 123 :402–414, 1996.
- [94] V. Vreman, B. Geurts, and H. Kuerten. Comparison of numerical schemes in large-eddy simulation of the temporal mixing layer. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 22 :297–311, 1996.
- [95] F. Waleffe. On the three-dimensional instability of strained vortices. *Phys. Fluids*, A2 (1), 1990.
- [96] S.E Widnall, D.B. Bliss, and C.Y. Tsai. The instability of short waves on a vortex ring. *J. Fluid Mech.*, 66 :35–47, 1974.

- [97] A.A. Wray. Very low storage time advancement schemes. *Internal Report NASA Ames Research Center, CA*, 1986.
- [98] Sheng-Tao Yu, Kwang-Chung Hsieh, and Y.-L. Peter Tsai. Simulating waves in flows by Runge-Kutta and compact difference schemes. *AIAA J.*, 33 :421–429, 1995.

Étude numérique d'écoulements tourbillonnaires de sillage d'avion

Auteur : Laurent Nybelen

Directeurs de thèse : Pierre Brancher et André Giovannini (IMFT-UPS Toulouse III)

Spécialité : Dynamique des fluides

Lieu et date de soutenance : CERFACS-10 Juin 2008

Résumé : Un sillage d'avion est composé de plusieurs tourbillons énergétiques dont la durée de vie peut atteindre plusieurs minutes. Ils peuvent représenter un danger pour un avion suiveur en induisant un fort moment de roulis. Le travail présenté ici contribue à la connaissance du comportement de ces tourbillons à l'aide de simulations numériques directes et aux grandes échelles. Différents aspects de la dynamique des tourbillons ont été étudiés. Le premier concerne la propagation et la collision de fronts d'onde le long d'un tourbillon. Ils peuvent être générées lors de la reconnection des tourbillons contra-rotatifs dans le champ lointain du sillage. Les caractéristiques de la propagation et de ses conséquences ont été mises en évidence, ainsi qu'un critère objectif d'apparition du phénomène d'explosion tourbillonnaire (*vortex bursting*). Par le biais de simulations temporelles, une étude paramétrique a ensuite été menée pour caractériser et quantifier l'interaction entre un tourbillon et un jet de moteur. Les résultats obtenus montrent que l'écoulement de jet a pour effet de diminuer l'extremum de vitesse des tourbillons en condition de croisière. En conditions hypersustentées, le jet peut être suffisamment puissant pour mener à la déstructuration du tourbillon. Le dernier phénomène étudié est la fusion des tourbillons co-rotatifs émis en bout d'aile et de volet. L'approche temporelle a permis d'étudier ce processus dans des conditions stables et instables sans vitesse axiale pour deux modèles de tourbillons réalistes. Des conditions aux limites adaptées ont par la suite été implantées dans le but d'effectuer des simulations spatiales. Ce type de simulation permet en outre de prendre en compte la torsion du système tourbillonnaire et l'influence de la vitesse axiale. Deux configurations d'écoulements ont été simulées et ont permis de montrer la complexité des mécanismes instationnaires existants.

Mots-clefs : Simulation numérique - Dynamique tourbillonnaire - Propagation d'onde - Interaction jet/tourbillon - Fusion - Instabilités

Numerical study of aircraft wake vortex

Abstract : The wake of an aircraft is composed of intense vortices whose lifetime may be of the order of several minutes in calm air. They may represent a significant danger to any following aircraft as they may cause an upset in roll or downwash. The aim of the present work is to contribute to the knowledge of the wake vortex behavior, studying different flow configurations by direct numerical and large-eddy simulations. The first one concerns the wave propagation and collision along a single vortex, modeling the end-effects and vortex bursting phenomena, respectively. The wave propagation characteristics and its consequences were analyzed. Moreover, an objective criterion of appearance of the vortex bursting has been established. Then, the interaction between a vortex and jet has been simulated by temporal large-eddy simulations for the three flight conditions. In cruise condition, the interaction has for consequences to reduce the velocity extrema of the wing tip vortex. This effect is less important if the separation distance is large. For the take-off and approach phases, the study deals with the vortex emanating from a flap just above the engine jet. The results showed that the jet may be sufficient strong to lead to the complete loss of the vortex structure. The third phenomenon studied is the merging of two co-rotating vortices, which governs the dynamics in the extended near-field of an aircraft wake. The temporal approach allowed to analyze the process in stable and unstable conditions, without axial flow and for two realistic vortex models. The boundary conditions have been adapted to perform spatial simulations. These simulations are more representative and let to take into account the torsion of the system and the effects of axial flow. Two vortex flow configurations were simulated showing the complexity of the mechanisms.

Keywords : Numerical simulation - Vortex bursting - Jet/vortex interaction - Merging - Instabilities

Laboratoire : CERFACS, 42 Avenue Gaspard Coriolis 31057 TOULOUSE