# EDSR et EDSPR avec grossissement de filtration, problèmes d'asymétrie d'information et de couverture sur les marchés financiers

Anne Eyraud-Loisel

**UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III**
**U.F.R Mathématique Informatique Gestion**


# THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 7 décembre 2005

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université Paul Sabatier TOULOUSE III**

**(mathématiques appliquées)**

par


Anne EYRAUD-LOISEL


# EDSR et EDSPR avec grossissement de filtration, problèmes d'asymétrie d'information et de couverture sur les marchés financiers

**Composition du jury**

| | | |
|---|---|---|
| *Président :* | Etienne PARDOUX | Professeur Université de Provence |
| *Rapporteurs :* | Shige PENG | Professeur Université de Shandong, Chine |
| | Martin SCHWEIZER | Professeur Université ETH Zürich, Suisse |
| *Examinateurs :* | Ying HU | Professeur Université Rennes 1 |
| | Monique JEANBLANC | Professeur Université Evry Val d'Essonne |
| | Jean-Paul LAURENT *(directeur de thèse)* | Professeur Université Lyon 1 |
| | Monique PONTIER *(directrice de thèse)* | Professeur Université Toulouse 3 |

# Remerciements

Comment ne pas commencer ces remerciements par un hommage à mon premier directeur de thèse, Axel Grorud, qui fut à l'origine de ce sujet, et de mon attrait pour la recherche. Je ne connaissais pas Axel depuis très longtemps, et pourtant, il m'a marquée comme si je le connaissais depuis toujours. Je n'ai commencé à travailler avec lui qu'en été 2001, pour mon stage de DEA. Comme tous ceux qui ont eu le plaisir de le côtoyer, j'ai pu constater à quel point il était attachant, attentionné et surtout profondément gentil. Plus que de diriger mon stage de DEA, puis le début de ma thèse, plus que de m'initier aux mathématiques financières, au grossissement de filtration, et aux problèmes d'initiés, il a été et restera pour moi un modèle. Il m'a transmis sa curiosité, son entrain, et m'a appris que les qualités humaines sont primordiales dans notre métier. Il m'a donné le goût de la recherche, et c'est lui qui m'a donné envie de continuer dans cette voie. Je voudrais exprimer ici tous mes regrets pour sa disparition si brutale, et le vide qu'il a laissé. J'espère continuer ce que nous avions commencé ensemble, avec cette thèse tout d'abord, puis en continuant à creuser toutes les idées dont nous avons pu discuter ensemble.

Je suis infiniment reconnaissante envers Monique Pontier, qui m'a recueillie sous son aile, qui a accepté spontanément de reprendre la direction de ma thèse, et qui m'a conseillée, suivie, soutenue. Elle m'a aidée à retrouver l'envie de travailler, me poussant parfois quand j'en ai eu besoin. Il n'est pas facile de reprendre des travaux en cours de route, ni de suivre le tout à distance, mais elle a toujours répondu présente. J'aimerais lui exprimer ici toute mon admiration et ma gratitude, et la remercier de la confiance qu'elle m'a accordée.

Je tiens également à remercier Jean-Paul Laurent, qui a encadré la partie financière de cette thèse. Je tenais à concilier la partie mathématique avec le côté interprétation financière, et j'ai beaucoup apprécié nos échanges. Sa connaissance encyclopédique est impressionnante, et nos discussions ont toujours été très productives.

Je suis très honorée que les professeurs Martin Schweizer et Shige Peng aient accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie vivement pour le travail que cela leur a demandé. Les questions et les échanges que nous avons pu avoir avec Martin Schweizer m'ont permis de préciser et d'améliorer un certain nombre de points, et je lui en suis extrêmement reconnaissante. J'ai été très touchée également par l'accueil chaleureux et les échanges particulièrement enrichissants que j'ai pu avoir avec Shige Peng à Shanghaï.

Je suis également très reconnaissante envers Monique Jeanblanc, Etienne Pardoux et Ying Hu pour avoir accepté de participer au jury. Je les remercie pour tout le temps qu'ils m'ont consacré tout au long de ma thèse, et pour leur soutien.

Cette thèse n'aurait pas été la même si je n'avais pas fait la connaissance de Manuela Royer, qui m'a permis de connaître les joies de la collaboration scientifique avec les articles que nous écrivons, mais aussi les plaisirs de la cohabitation au bureau. Je la remercie pour

sa gentillesse, et pour son investissement à l'ISFA.

Je remercie également Caroline Hillairet, Christophette Blanchet, Fabrice Baudoin, Laure Coutin et Diana Dorobantu pour leur amitié et le goût qu'ils m'ont donné du travail en équipe, avec notre groupe de travail initié par Axel et continué par Monique. J'espère que nos collaborations continueront et seront fructueuses.

Un énorme merci à toute l'équipe de l'ISFA : à Nicolas, Jean-Claude et Daniel pour leur soutien et leurs encouragements, à toute l'équipe administrative, MariJo, Diane, Marie-Claude, Marie, Michèle et Maria pour leur gentillesse et leur disponibilité, à Alexis et Didier pour les pitreries du bureau d'à côté, à Pierre R. pour ses conseils avisés en anglais, à Axelle pour son amitié et ses cours de droit, à Frédéric et Pierre T. pour avoir su allier vie professionnelle et vie de laboratoire, mais aussi à tous les autres, pour l'ambiance chaleureuse qui y règne, pour tout le soutien et la confiance qu'ils m'ont portés ces dernières années. J'ai beaucoup appris, et je mesure la chance que j'ai eue d'être intégrée dans une équipe si sympathique et dynamique. Je remercie également tous mes étudiants qui, consciemment ou inconsciemment, par leurs questions ou leurs commentaires, m'ont permis de progresser, et m'ont surtout donné le goût de l'enseignement.

Je n'oublierai jamais les discussions, matheuses ou non, toujours fructueuses que j'ai partagées avec Jean-Baptiste, Guillaume, Assia, Glenn, Matthias et bien d'autres. Et j'ai une pensée encore plus particulière pour mes deux copines, Aurélie et Claire, toujours à l'écoute et inconditionnels soutiens, et pour mes copains de toujours, Alexi, Fred, Antoine et Axel.

Je n'aurais pas pu arriver jusque là sans l'équilibre, la chaleur, le soutien et le bonheur dans lequel j'ai vécu, merci Maman, Papa, Audrey et Christelle, mais aussi Régine, Jean et tous ceux qui ont si bien su m'entourer. Et puis, l'ISFA, c'est un peu une tradition dans la famille !

Et enfin, merci n'est qu'un petit mot pour exprimer à Stéphane tout ce que je lui dois après 9 ans de partage, d'équilibre, de bonheur et d'amour. Merci d'avoir supporté mes coups de gueule, d'avoir su gérer mon stress sans cesse sollicité, et d'avoir réussi à me faire rire même dans les moments difficiles.

*à Axel.*

# Table des matières

# Structure du document

Cette thèse est constituée d'un premier article en anglais publié dans *Stochastic Processes and their Applications*, et de deux autres parties, qui ont également donné lieu à des articles en cours de rédaction ou de soumission. La dernière partie est un travail, en anglais, effectué en collaboration avec Manuela Royer.

Ces travaux sont précédés d'une introduction générale destinée à les replacer dans leur contexte, et non à fournir une revue exhaustive du sujet. Entre l'introduction et le corps de la thèse, les principaux résultats obtenus sont résumés et le plan de la thèse ainsi précisé.

# Introduction générale

# Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) et progressives-rétrogrades (EDSPR) avec grossissement de filtration, motivée tout d'abord par l'étude mathématique et probabiliste des marchés financiers en présence d'asymétrie d'information. C'est pourquoi il me semble important de commencer cette introduction par quelques notions financières afin d'expliquer le contexte ainsi que les motivations de ce travail, avant d'en présenter les principaux résultats.

L'actualité regorge de cas d'oreilles indiscrètes traînant au sortir de réunions décisionnelles. Un cas récent datant de juin 2005 illustre parfaitement ce que l'on entend par délit d'initié. Les soupçons portent sur des réunions de la Commission Européenne concernant le rachat du groupe industriel français Pechiney par le canadien Alcan en 2003. De gros montants auraient été investis au sortir de ces réunions et avant l'annonce officielle des décisions. L'alerte a été déclenchée à cause des volumes de titres échangés : un volume bien supérieur aux transactions habituellement enregistrées sur le titre Pechiney et concentré sur quelques séances de Bourse seulement. Même si cela ne constitue pas une preuve directe, et si une enquête poussée est toujours nécessaire, l'étude mathématique et la surveillance des marchés financiers fournit des bases de comparaison permettant dans des cas comme celui-ci de donner l'alerte concernant des cas supposés de délit d'initié. C'est l'une des motivations de l'étude mathématique des marchés financiers avec asymétrie d'information.

Si l'on s'intéresse au point de vue des économistes, le modèle généralement utilisé est celui de la concurrence pure et parfaite. Ce modèle fait l'hypothèse que les agents sont bien informés, ou plutôt parfaitement informés. Cependant, malgré leur diversité et leur efficacité, les modèles en concurrence pure et parfaite ne reflètent pas de manière satisfaisante la réalité. La principale raison à cela est que l'information des agents économiques est imparfaite, ou plus précisément qu'il existe de l'asymétrie d'information.

Le prix est le principal vecteur d'information publique. D'autres indices peuvent apporter des informations en parallèle, comme les volumes échangés par exemple, mais nous ne tiendrons ici pas compte de ces éléments informatifs exogènes aux prix dans l'information publiquement disponible. En effet, dans tout notre travail, l'information générale publique sera supposée être celle engendrée par les processus de prix. Par ailleurs, il peut exister de nombreuses formes d'information supplémentaire extérieure, ou information privée, puisqu'elle n'est pas du domaine de l'information publiquement distribuée à la totalité des agents du marché. De manière légale, ce type d'information est appelée *information privilégiée*, et est définie dans le règlement général de l'Autorité des Marchés Financiers (livre VI - Abus de marché : Opérations d'initiés et manipulations de marché), comme *"une information précise qui n'a pas été rendue publique, qui concerne, directement ou indirectement, un ou plusieurs émetteurs d'instruments financiers, ou un ou plusieurs instruments financiers, et qui si elle était rendue publique, serait susceptible d'avoir une influence sensible sur le cours des instruments financiers concernés ou le cours d'instruments financiers qui leur sont liés"*. Le *délit d'initié*, véritable abus dans le fonctionnement des marchés financiers, consiste en une utilisation de ce type d'informations sur le futur, auxquelles on n'aurait pas dû avoir accès, ou bien que l'on n'aurait pas dû utiliser. L'utilisation comme la communication d'informations privilégiées est un délit, soumis au système répressif français, et est assorti de sanctions pénales et administratives pouvant aller jusqu'à une peine de prison de 2 ans, et une amende de 2 millions d'euros. Ce type de considération juridique nous révèle l'utilité d'un service de surveillance comme l'Autorité des Marchés Financiers en France, afin de pouvoir détecter de tels abus sur les marchés financiers. Ainsi apparaît l'intérêt de la modélisation mathématique dans ce domaine, dont l'un des buts pourrait être l'élaboration de tests statistiques de détection, basés sur la comparaison des stratégies d'un initié avec celles d'un non initié. Ces tests permettraient de mettre en évidence des stratégies de gestion inhabituelles et donc des comportements suspects motivés par la détention d'une information privilégiée. C'est ce type de test qu'ont développé A. Grorud et M. Pontier en 1998 [GP98], test qui a par la suite été utilisé et mis en pratique par un élève de Maria Elvira Mancino, dans son mémoire de master en 2004 pour montrer que certains scandales italiens de délits d'initiés célèbres comme celui de Parmalat, auraient pu être détectés plus tôt grâce à l'utilisation d'un tel test.

Depuis la thèse de Louis Bachelier en 1900 sur la théorie de la spéculation [BAC00] jusqu'au modèle de couverture d'options développé par F. Black, M. Scholes et R. Merton en 1972 [BS72, BS73], et par la suite dans la grande majorité des problèmes de calcul stochastique appliqué à la finance, une des hypothèses fondamentales est l'homogénéité des informations disponibles parmi les agents sur le marché. Cette homogénéité n'est pourtant pas l'exact reflet de la réalité. En effet, il existe sur le marché plusieurs types d'agents, dont les informations disponibles diffèrent. On parle alors d'information partielle ou encore d'information asymétrique.

Comme le fait remarquer Kerry Back dans [BAC04], le terme d'information partielle peut s'entendre de deux manières : information incomplète, ou encore information supplémentaire. D'une part l'étude d'un cadre avec information incomplète peut se faire comme application de la théorie du filtrage (voir le cours de l'Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour sur le filtrage non linéaire de E. Pardoux [PAR91]). De nombreux travaux traitent du problème d'observation partielle, comme ceux de D. Lefèvre, F. Biagini, B. Øksendal et A. Sulem [LØS01, ØS04, BØSW04], ou encore J.-M. Laskri et P.-L. Lions [LL99], ou pour un point de vue plus économique et structurel, on peut se référer à l'article de D. Duffie et D. Lando [DL01]. Dans cette optique, on part de la filtration pour laquelle les processus sont adaptés, et on suppose que les investisseurs ont accès uniquement à une partie de cette information. D'autre part l'étude avec information supplémentaire, le plus souvent utilisée pour la modélisation du délit d'initié, est une application de la théorie du grossissement de filtration. Cette fois, le point de départ est la filtration dans laquelle certains processus comme les prix ou les rendements sont adaptés, et on suppose que l'investisseur possède une information supplémentaire, ce qui revient à grossir la filtration représentant son information disponible. Même si à première vue les concepts comme les outils utilisés sont assez différents et éloignés, nous aurons l'occasion de voir dans cette thèse que souvent ces deux aspects sont fortement liés.

Nous avons choisi dans cette thèse de modéliser l'asymétrie d'information comme information supplémentaire, c'est-à-dire d'utiliser des méthodes de grossissement de filtration. Cet outil de calcul stochastique a été développé au début des années 1980, par J. Jacod, T. Jeulin, M. Yor et l'école française de probabilités dans une série de travaux du "Séminaire de Calcul Stochastique (1982/1983)" de l'Université de Paris VI [JAC85, JEU79, JY85, YOR78], puis repris vers la fin des années 1990 pour des applications à la finance et à la modélisation de la présence d'asymétrie d'information sur les marchés financiers.

De nombreuses études, utilisant le grossissement de filtration, ont été menées en présence d'asymétrie d'information notamment pour résoudre des problèmes de contrôle ou d'optimisation (I. Karatzas et I. Pikovski (1996) [KP96], A. Grorud et M. Pontier (1998) [GP98], ou J. Amendinger, P. Imkeller et M. Schweizer (1998) [AIS98]), ou plus récemment pour étudier des problèmes d'équilibre en présence d'agents différemment informés dans la thèse et les publications de C. Hillairet [HIL04, HIL05c], ou dans l'article de G. Lasserre [LAS04]. La plupart de ces études ont considéré le problème d'un agent différemment informé dans une optique d'optimisation de richesse, de maximisation d'utilité. Quant à nous, nous avons choisi de nous intéresser au point de vue d'un agent différemment informé dans une optique de couverture d'option. C'est ce point de vue qui nous a amenés à étudier les équations différentielles stochastiques rétrogrades, puis les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades, avec grossissement de filtration.

Le but de cette introduction est de présenter et de remettre dans leur contexte les travaux qui sont présentés et utilisés dans cette thèse.

# Asymétrie d'information et grossissement de filtration

Les premiers travaux visant à modéliser des marchés avec asymétrie d'information, avec la présence d'un agent initié, ont commencé avec les articles de A.S. Kyle (1985) [KYL85] et K. Back (1992) [BAC92], puis par ceux de I. Karatzas et I. Pikowski (1996) [KP96]. K.-H. Cho (1997) [CHO97] a repris et généralisé le modèle de A.S. Kyle, approche qui a été ensuite développée par C.-T. Wu (1999) [WU99] et H. Föllmer, C.-T. Wu et M. Yor (1999) [FWY99].

L'école allemande, avec les travaux de M. Schweizer, H. Föllmer, P. Imkeller, puis J. Amendinger et D. Becherer, a également contribué à l'approfondissement des modèles d'asymétrie d'information. En effet, dès 1991, H. Föllmer et M. Schweizer [FS91] se sont posé la question de l'incomplétude d'un marché dû à un manque d'information. Plus tard, J. Amendinger, dans sa thèse en 1999 [AME99, AME00], fera une étude très fine des modèles d'asymétrie d'information et de grossissement de filtration dans un modèle général de prix engendrés par des semi-martingales. Citons sur ce sujet l'article de J. Amendinger, P. Imkeller et M. Schweizer [AIS98].

Parallèlement, Axel Grorud et Monique Pontier, dès 1996, s'intéressent de près à la modélisation du délit d'initié, avec une première note aux C.R.A.S. en 1997 [GP97]. Leur étude porta d'abord sur un modèle purement diffusif [GP98], avec la comparaison des stratégies de deux agents, l'un initié et l'autre non, aboutissant ainsi à un test statistique. Leur travail a cela d'original qu'ils sont les seuls pour le moment à s'être intéressés au problème de la détection d'un point de vue statistique. Ils ont en particulier étudié les probabilités neutres au risque en présence d'asymétrie d'information dans [GP99], démarche dont je me suis inspirée dans plusieurs parties de cette thèse. Puis leur travail a porté sur des marchés incomplets [GRO00, GP01], avec des processus de prix dirigés par un mouvement brownien ainsi que par un processus de Poisson multivarié. Leur collaboration aboutira à l'élaboration d'un modèle d'investisseur informé et influent [GP05], l'un des premiers modèles à considérer que l'agent initié n'est pas forcément un petit investisseur, mais peut influer sur les prix du marché. C'est cette hypothèse de gros investisseur (ou investisseur influent, large investor en anglais), introduite par D. Cuocu et J. Cvitanic en 1998 [CC98] qui sera à la base de la deuxième partie de cette thèse.

Tous ces travaux concernent un certain type d'information, dite information forte initiale, car l'agent initié possède à l'instant initial une information sur le futur, et modélisée en calcul stochastique par le grossissement initial de filtration. C'est l'approche principale que nous avons choisie dans cette thèse, cependant il paraît important de citer quelques autres modélisations sur le sujet. En effet, une autre possibilité est que l'agent initié possède dès le départ une information, mais que cette information est bruitée, et le bruit diminue au cours du temps. C'est l'information forte progressive, qui se traite à l'aide du grossissement progressif de filtration (au sens de J.M. Corcuera et al. (2004) [CIKHN04]). C. Hillairet [HIL05a] a par ailleurs comparé les stratégies d'agents différemment informés, avec des informations de natures différentes, et a mis en évidence les différences de comportements des agents selon leur type d'information disponible, grâce à des simulations des différentes stratégies d'investissement.

D'autres techniques ont été proposées pour étudier la présence d'asymétrie d'information, comme le calcul de Malliavin (P. Imkeller [IMK96], D. Nualart et al. [LNN03]), ou bien des modèles d'information faible (F. Baudoin [BAU03, BNN04]) ou de parieurs (J.M. Corcuera, P. Imkeller, A. Kohatsu-Higa et D. Nualart [CIKHN04]).

Nous avons choisi ici de modéliser l'asymétrie d'information par un grossissement initial de la filtration brownienne. L'une des différences avec les modèles précédemment cités est que l'accent a jusqu'ici surtout porté sur l'étude de problèmes d'optimisation de portefeuille pour un agent initié, ou sur l'existence d'un équilibre en présence d'agents différemment informés. Cependant, contrairement à la plupart de ces travaux, je me suis intéressée à un point de vue de couverture pour un agent informé, et non à un point de vue d'optimisation. Ce genre de problématique a été étudié sous un angle un peu différent par L. Campi dans sa thèse [CAM03, CAM04]. Dans une optique d'optimisation de portefeuille, avec une information forte initiale, A. Grorud et M. Pontier dans un modèle brownien [GP98] par exemple ont montré que dès le départ, l'agent informé avait une stratégie différente de l'agent non informé. C'est ce qui leur a permis de construire un test statistique de détection. L'une des questions principales initialement posées a été la suivante : est-ce que dans une optique de couverture d'actif, et avec le même type d'information, l'agent informé va avoir une stratégie de couverture différente de l'agent non informé ? La réponse est non, comme nous le verrons dans la première partie de cette thèse.

# Equations différentielles stochastiques rétrogrades

L'autre partie du titre de cette thèse porte sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades (en abrégé EDSR, BSDE en anglais) et progressives rétrogrades (EDSPR, FBSDE en anglais). Ce type d'équations est utilisé en mathématiques appliquées à la finance, car elles apparaissent naturellement dans plusieurs cas, notamment en contrôle stochastique (voir par exemple les travaux de S. Peng (1993) [PEN93] et N. El Karoui, S. Peng et M.-C. Quenez [EKPQ97]), et dans notre cas, lorsque l'on s'intéresse à la couverture d'actifs contingents. C'est une notion qui s'est beaucoup développée ces dix dernières années, et qui trouve des applications dans de nombreux domaines comme la biologie, la théorie des jeux, ou pour l'étude d'équations aux dérivées partielles.

La théorie liée à ces équations a été développée par E. Pardoux et S. Peng dès 1990 [PP90, PP92, PP94]. Il s'agit de trouver un couple de processus $(Y_t, Z_t)_{t\geq 0}$ adapté à la filtration considérée (dans le cas usuel la filtration brownienne), c'est-à-dire à l'information disponible à l'instant $t$, qui vérifie l'équation suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T$$

On cherche à déterminer un processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ connaissant sa valeur terminale à l'instant $T$, $\xi$. La principale question sur la théorie des EDSR est l'existence et l'unicité des solutions, suivant les conditions satisfaites par le générateur $f$. C'est un sujet encore étudié actuellement, et l'on cherche à affaiblir les hypothèses que l'on doit mettre sur $f$ et $\xi$ afin de conserver l'existence et l'unicité des solutions. Ce ne sera pas notre but ici, puisque nous nous sommes principalement intéressés à regarder si une EDSR qui a une unique solution adaptée à la filtration brownienne (puisque c'est celle qui est usuellement utilisée), a toujours une unique solution lorsque l'on grossit la filtration.

Si ces équations sont d'abord apparues en finance de manière naturelle à partir de la formule de Black et Scholes par exemple, elles l'étaient avec un générateur linéaire, et donc étaient faciles à résoudre. L'étude de solutions avec générateur non linéaire a débuté avec les travaux de E. Pardoux et S. Peng en 1990 [PP90], et depuis, les efforts se sont accrus pour affaiblir leurs hypothèses lipschitziennes. Citons pour cela les travaux de S. Hamadène (1996) [HAM96], ou J. San Martin et J.-P. Lepeltier (1996) [LSM97].

L'affaiblissement des hypothèses pose des problèmes lorsque l'on est en dimension plus grande, et leur complexité pour avoir l'existence et l'unicité d'une solution nous ont amenés à garder des hypothèses de Lipschitz sur le générateur, d'autant que les générateurs dérivés de problèmes financiers sont le plus souvent lipschitziens.

L'intérêt des EDSR réside également dans le fait que la théorie s'est développée pour des EDSR dirigées également par un processus ponctuel (voir par exemple G. Barles, R. Buckdahn et E. Pardoux (1997) [BBP97] ou S. Tang et X. Li (1994) [TL94]), ainsi que pour les EDSR à horizon aléatoire (voir les travaux de S. Peng (1991) [PEN91], E. Pardoux (1999) [PAR99], et M. Royer (2004) [ROY04]). Les domaines d'application s'étendent alors aux marchés financiers à sauts, ainsi qu'à la couverture d'options de type américain, dont l'horizon de couverture est un temps d'arrêt. Nous nous intéresserons à ce type d'équations dans la troisième partie de cette thèse.

Lorsque l'EDSR est couplée avec une équation différentielle stochastique standard (dite progressive), on parle d'EDSPR. Ces équations apparaissent dans des problèmes de couverture par des gros investisseurs, étudiés par exemple par D. Cuoco et J. Cvitanic (1998) [CC98], ou J. Cvitanic et J. Ma (2000) [CM96], comme nous le verrons dans la deuxième partie de cette thèse.

Malgré plusieurs études sur le sujet comme les travaux de D. Chevance (1997) [CHE97], F. Delarue (2002) [DEL02], E. Gobet, J.-P. Lemor et X. Warin (2005) [GLW05] sur la discrétisation d'EDSR et d'EDSPR, il reste une difficulté dans l'utilisation de ce type d'équations, à savoir celle d'exprimer explicitement les solutions, ou même à les simuler.

# Principaux résultats et publications

## 1 EDSR et grossissement initial de filtration

### Chapitre 1 - Backward Stochastic Differential Equations with Enlarged Filtration

Le premier chapitre de cette thèse est constitué d'un article, accepté dans *Stochastic Processes and their Applications*, intitulé "Backward stochastic differential equations with enlarged filtration. Option hedging of an insider trader in a financial market with jumps". Cet article porte sur l'étude des EDSR avec grossissement initial de la filtration brownienne, motivée par des problèmes financiers de couverture par un agent initié. La problématique première fut de s'intéresser à des problèmes financiers de couverture par un agent initié, c'est-à-dire en présence d'asymétrie d'information, dans un modèle de diffusion pure sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ dirigé par un mouvement brownien $W$ dans un premier temps,

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i (\sigma_s^i, dW_s) \ , \ 0 \leq t \leq T, \tag{1}$$

puis dans un modèle dirigé à la fois par un mouvement brownien $W$ et par un processus ponctuel dérivé d'une mesure de Poisson $\mu$, autorisant le processus de prix à avoir des sauts :

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i (\sigma_s^i, dW_s) + \int_0^t S_{s^-}^i \int_E \phi_s^i(e)\mu(ds, de) \ , \ 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

Le problème de couverture fait apparaître naturellement une équation différentielle stochastique rétrograde, et trouver un portefeuille de couverture revient à la résoudre. La présence d'asymétrie d'information est modélisée par le grossissement initial de la filtration brownienne par une fonctionnelle des prix $L$. La problématique financière nous amène à chercher un portefeuille adapté à cette nouvelle filtration, qui représente l'information disponible de l'agent initié.

Nous commençons par poser le modèle dans le paragraphe 1.1 dans un cadre purement diffusif, et nous nous plaçons tout d'abord dans le paragraphe 1.2 sous l'hypothèse $(\mathbf{H_3})$.

**Hypothèse 1** $(\mathbf{H_3})$ *Il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que sous $\mathbb{Q}$, $\mathcal{F}_t$ et $\sigma(L)$ sont indépendantes, pour tout $t < T'$.*

Cette hypothèse a été développée pour la modélisation de la présence d'un agent initié sur un marché financier par A. Grorud et M. Pontier (1998) [GP98], et par J. Amendinger (2000) [AME99], et elle permet d'introduire une probabilité équivalente à la probabilité historique sous laquelle la filtration engendrée par l'information est indépendante de la filtration initiale. C'est sous cette nouvelle probabilité que nous travaillerons.

On résout d'abord le problème d'existence et d'unicité des solutions de l'équation différentielle stochastique rétrograde dans l'espace grossi sous cette hypothèse. On obtient un premier théorème d'existence et d'unicité de solutions d'EDSR sous filtration grossie dans le paragraphe 1.2.1. La preuve est basée sur l'existence d'un théorème de représentation dans ce cas, obtenu à partir des travaux de J. Jacod et A.N. Shiryaev (1989) [JS03], et de A. Grorud et M. Pontier (1998) [GP98].

Puis on s'intéresse à des problématiques plus financières, comme l'étude de la viabilité et de la complétude du marché du point de vue de l'agent initié dans le paragraphe 1.2.3. Pour cela, nous adopterons les dénominations suivantes dans ce chapitre comme dans les suivants (ce sont les définitions du chapitre 1 de I. Karatzas et S. Shreve [KS98]).

**Définition 1** *Un marché a la* **propriété de représentation prévisible** *par rapport à l'espace filtré* $(\mathcal{F},\mathbb{P})$ *et la* $(\mathcal{F},\mathbb{P})$*-martingale des prix actualisés* $\tilde{S}$ *si pour toute* $(\mathcal{F},\mathbb{P})$*-martingale de carré intégrable* $M$*, il existe un processus* $\mathcal{F}$*-prévisible* $\phi$ *tel que* $E_{\mathbb{P}}\left(\int_0^T \phi_s^2 d<\tilde{S}>_s\right)<+\infty$ *et*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \phi_s d\tilde{S}_s \tag{3}$$

*où* $M_0$ *est mesurable par rapport à la tribu initiale* $\mathcal{F}_0$*, non nécessairement triviale.*

**Définition 2** *Une stratégie de gestion* $\theta$*, c'est-à-dire un processus adapté* $(\theta_s)_{s\in[0,T]}$*, est dite* **autofinancée** *si elle vérifie*

- $\int_0^T |\theta_t|^2 d<\tilde{S}>_t<+\infty$ *p.s.*
- $\theta_t\tilde{S}_t = \theta_0\tilde{S}_0 + \int_0^t \theta_s d\tilde{S}_s$ *p.s.* $\forall t\in[0,T]$

*Une stratégie de gestion est* **admissible** *si elle est autofinancée et si la valeur actualisée* $\theta_t\tilde{S}_t$ *du portefeuille correspondant est positive et telle que* $E_{\mathbb{P}}\left(\sup_{t\in[0,T]}|\theta_t\tilde{S}_t|^2\right)<+\infty$.
*Un actif contingent est dit* **atteignable** *si il existe une stratégie admissible* $\theta$ *telle que la valeur finale du portefeuille correspondant est égale à la valeur à l'échéance de l'actif contingent.*

**Définition 3** *Un marché est dit* **viable** *par rapport à la probabilité* $\mathbb{P}$ *et à la filtration* $\mathcal{F}$ *lorsqu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage. Une stratégie d'arbitrage est une stratégie admissible* $\theta$ *telle que le processus de gain* $G_t=\int_0^t\theta_s d\tilde{S}_s$ *vérifie* $G_T\geq 0$ $\mathbb{P}$*-p.s. et* $G_T>0$ *avec une probabilité* $\mathbb{P}$ *strictement positive.*
*Nous considérerons qu'un marché est* **complet** *par rapport à la probabilité* $\mathbb{P}$ *et à la filtration* $\mathcal{F}$ *si tout actif contingent de carré intégrable sous* $\mathbb{P}$ *est atteignable, c'est-à-dire si le marché possède la propriété de représentation prévisible pour* $(\mathcal{F},\mathbb{P})$.
*Le marché est dit* **incomplet** *dans le cas contraire.*

**Définition 4** *On appelle* **mesure martingale équivalente** *sur une filtration* $\mathcal{F}$ *une mesure de probabilité* $\tilde{\mathbb{Q}}$ *équivalente à la probabilité historique* $\mathbb{P}$ *telle que les prix actualisés sont des* $(\mathcal{F}, \tilde{\mathbb{Q}})$*-martingales.*

**Remarque :** Nous utiliserons ici les deux terminologies usuelles, qui sont mesure martingale équivalente et probabilité neutre au risque. Mais ces deux dénominations désignent la même chose.

Nous remarquerons au passage qu'ici, un marché complet ne signifie pas l'unicité de la mesure martingale équivalente. On peut avoir un marché complet et plusieurs mesures martingales équivalentes (nous le verrons par exemple dans le chapitre 1, paragraphe 1.2.3).

Sous l'hypothèse $(\mathbf{H_3})$, la viabilité et la complétude du marché ne sont pas altérées par le grossissement de filtration. C'est ce que nous montrons dans le paragraphe 1.2.3 du chapitre 1.

Nous comparons également les stratégies de couverture des deux agents, informés et non informés, dans le paragraphe 1.2.2. Le résultat principal est que les stratégies ne changent pas sous l'hypothèse $(\mathbf{H_3})$, contrairement à ce qui se passe quand on considère un objectif de maximisation d'utilité de richesse : A. Grorud et M. Pontier [GP97] ont mis en évidence une différence de stratégie entre l'agent initié et l'agent non initié dans un objectif de maximisation de richesse, et ont construit un test de détection dans un cas particulier. C. Hillairet [HIL05b] a également proposé des simulations de ce genre de comportements. Cependant, dans notre cadre de couverture d'actifs, cette différence de comportement entre un agent informé et un agent non informé n'est plus vérifiée : les stratégies sont identiques.

Nous nous intéressons dans le paragraphe 1.3 à l'existence et l'unicité de solutions de l'EDSR dans l'espace grossi sous l'hypothèse plus faible $(\mathbf{H''})$, sous laquelle la loi conditionnelle de $L$ sachant la filtration initiale est absolument continue par rapport à la loi de $L$, sans lui être équivalente.

**Hypothèse 2** $(\mathbf{H''})$ *La loi conditionnelle de* $L$ *sachant* $\mathcal{F}_t$ *est absolument continue par rapport à la loi de* $L$*, pour tout* $t < T'$*.*

Sous l'hypothèses $(\mathbf{H''})$, on n'obtient pas de théorème de représentation de martingales en toute généralité, et le théorème d'existence et d'unicité de solutions de l'EDSR dans l'espace élargi n'est obtenu que sous réserve d'existence d'une telle représentation. Ainsi, notons que le marché du point de vue de l'initié n'est pas nécessairement complet, bien qu'il possède plus d'information.

Dans la section 1.4 de ce chapitre, le modèle est repris et les prix sont cette fois dirigés à la fois par un mouvement brownien et par un processus de Poisson multivarié. Nous étendons les résultats d'existence et d'unicité précédemment évoqués à ce cas avec sauts. Nous montrons en particulier que le théorème d'existence et d'unicité de solutions sous la filtration grossie peut se généraliser, successivement sous l'hypothèse ($\mathbf{H_3}$) puis sous ($\mathbf{H''}$). Dans un dernier paragraphe 1.4.5, nous présentons également un exemple d'information supplémentaire $L$ vérifiant l'hypothèse ($\mathbf{H''}$) mais pas l'hypothèse ($\mathbf{H_3}$) afin de motiver l'introduction de sauts et l'intérêt de différencier ces deux hypothèses.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions de l'EDSR grossie dans un cadre avec mouvement brownien et processus ponctuel plus général, avec l'introduction d'une mesure de Poisson pouvant diriger les prix. Nous obtenons le même type de résultat d'existence et d'unicité de solutions de l'EDSR adaptées à la filtration élargie, sous l'hypothèse ($\mathbf{H_3}$).

# 2 EDSPR et grossissement initial de filtration

Le modèle développé dans la première partie est un modèle d'agent initié qui est supposé être un petit investisseur, qui n'influence pas les prix du marché. Nous nous affranchissons de cette hypothèse dans cette deuxième partie. En effet, dans les deux chapitres de cette partie 2, nous étudions un modèle d'investisseur initié et influent, qui cherche à couvrir une option à un horizon fini donné.

## Chapitre 2 - Théorème d'existence et d'unicité de solutions d'EDSPR sous filtration grossie

Nous nous plaçons ici dans un cadre de processus continus. Nos résultats dans le chapitre 1 ont montré que dans le cas d'un modèle sans influence, les stratégies de couverture sont les mêmes pour l'agent informé et pour l'agent non informé. Cependant, cette modélisation n'est pas la plus réaliste : il est communément reconnu que certains acteurs sur le marché sont influents, de par leur investissement de grande ampleur, ou par leur notoriété par exemple, et intervient alors un phénomène de "suiveurs" (charter). Ainsi, les prix du marché peuvent être influencés par certains grands investisseurs du marché. Il est aussi plutôt naturel de penser que si des personnes ont des informations supplémentaires, ce ne sont en général pas des petits investisseurs. C'est pourquoi nous considérons ici un modèle avec un grand investisseur influent informé, qui veut couvrir sur le marché une option. Nous supposerons que l'investisseur est un *grand* investisseur, c'est-à-dire que sa richesse $X_t$ peut influencer les prix, par une influence sur la dérive $b$ et la volatilité $\sigma$ du processus de prix, et qu'il est *influent*, et donc que sa stratégie de gestion $\pi_t$ peut également influencer la dérive $b$ et la volatilité $\sigma$ des prix. Or la dynamique de ces deux processus, la richesse et la stratégie, était régie par l'EDSR 1.6 du chapitre 1. On obtient donc dans le cas présent l'équation suivante :

$$\begin{cases} P_t = P_0 + \int_0^t b(s, P_s, X_s, Z_s)ds + \int_0^t < \sigma(s, P_s, X_s, Z_s), dW_s > \\ X_t = \xi - \int_t^T f(s, P_s, X_s, Z_s)ds - \int_t^T < Z_s, dW_s > \end{cases} \tag{4}$$

Les deux processus $X$ et $\pi$ interviennent maintenant également dans l'équation régissant la dynamique des prix. Ce problème de couverture par un agent influent et informé fait ainsi naturellement apparaître un couplage entre l'équation progressive des prix et l'équation rétrograde de la richesse. C'est pourquoi nous choisissons ici de modéliser cette couverture par une équation différentielle stochastique rétrograde, couplée cette fois-ci, contrairement au chapitre 1 (cf. A Eyraud-Loisel[EL05]), avec l'équation progressive des prix. Du fait de la présence d'une information supplémentaire, nous avons donc à résoudre une EDSPR (Equation Différentielle Stochastique Progressive Rétrograde) sous une filtration initialement grossie. Nous nous replaçons cette fois dans un modèle brownien.

Dans le paragraphe 2.1, nous posons le problème financier en termes d'EDSPR et de grossissement de filtration, et rappelons certains résultats utiles dans notre cadre de processus continus.

Dans le paragraphe 2.2, nous donnons, sous certaines hypothèses, un théorème d'existence et d'unicité de solution pour une EDSPR sous une filtration grossie initialement, pour laquelle nous nous inspirons fortement de la démarche de Pardoux et Tang (1999) [PT99]. Nous montrons sous des hypothèses similaires, couplées avec l'hypothèse ($\mathbf{H_3}$) sur l'information supplémentaire, que l'EDSPR a également une unique solution dans l'espace élargi. La démonstration de ce théorème fait l'objet de ce chapitre. Nous utilisons le résultat d'existence et d'unicité de solutions d'EDSR sous filtration grossie établi au chapitre 1, et nous utilisons une méthode de contraction. Le résultat voulu est obtenu dans trois cas d'influence de l'agent informé sur la dérive et la volatilité des prix. Les trois cas d'influence sont d'abord un cas d'influence faible, où les coefficients de Lipschitz de la dérive et de la volatilité des prix par rapport à la richesse et à la stratégie de l'agent initié ne sont pas trop "grands" ; ensuite, lorsque l'objectif de couverture ne dépend pas du prix ; et enfin, le dernier cas d'influence est celui où la stratégie de gestion n'influence pas la volatilité des prix.

Nous obtenons ainsi que sous certaines conditions, l'agent influent initié a une unique stratégie de couverture et nous donnons une interprétation financière de ce résultat, en terme de complétude du marché du point de vue de l'agent initié. Le marché initié est viable et complet, cependant sa stratégie de couverture n'est pas adaptée à la filtration disponible pour un agent non informé. Le marché non informé n'est plus complet. Ce sera la question abordée au chapitre suivant.

## Chapitre 3 - Agent influent et informé : Couverture en marché incomplet

Dans ce chapitre, nous nous plaçons sous les hypothèses du théorème établi dans le chapitre 2, afin d'avoir une unique solution à l'EDSPR de couverture de l'agent informé et influent. De par le couplage entre l'équation progressive du processus de prix et l'équation rétrograde du processus de richesse, c'est-à-dire de par l'influence de l'agent initié, la filtration engendrée par les prix reflète une partie de l'information privée, et n'est par conséquent plus la filtration brownienne.

Nous posons le problème de la comparaison de la stratégie de couverture de l'agent initié, et de celle d'un petit investisseur, non informé. Nous sommes dans un cadre de marché incomplet du point de vue de l'investisseur non informé, issu de son manque d'information. La clé de la complétude du marché (du point de vue de l'agent initié) réside dans l'existence d'une propriété de représentation prévisible des martingales (voir définition 3 page 12 de la complétude). Or lorsque la filtration engendrée par les prix n'est ni la filtration brownienne, ni la filtration grossie, nous n'avons plus de théorème de représentation relativement au processus de prix. Le marché devient incomplet.

La couverture d'actifs contingents en marché incomplet a été développée dans la littérature selon deux principales méthodes. En marché incomplet, tout actif n'est plus atteignable par une stratégie autofinançante. Il faut, pour choisir une stratégie de couverture, affaiblir l'une des deux hypothèses : l'approche *local risk minimization* conserve la réplicabilité, et remplace l'hypothèse d'autofinancement par une propriété d'autofinancement en moyenne, tandis que l'approche *mean-variance hedging* conserve l'autofinancement, mais requiert une réplication seulement approximative, dans $L^2$. La première approche a été introduite par H. Föllmer et D. Sonderman [FS86] dans le cas où les prix sont des martingales, développée par M. Schweizer [SCH91] dans le cas où les prix sont seulement des semi-martingales et H. Föllmer et M. Schweizer [FS91] en termes de mesure martingale minimale. Cette approche montre l'existence d'une unique stratégie minimisant le risque, qui peut être exprimée en utilisant la décomposition de Galtchouk-Kunita-Watanabe (pour une revue sur le sujet, se reporter par exemple aux travaux de J.P. Ansel et C. Stricker [AS93]). La seconde approche s'intéresse aux stratégies autofinançantes approchant l'objectif dans $L^2$, et a été développée par L. Gouriéroux, J.-P.Laurent et H. Pham [GLP98] d'une part, et par T. Rheinlander et M. Schweizer [RS97] d'autre part, qui obtiennent une expression de la stratégie optimale en terme de mesure martingale variance-optimale. Une excellente revue sur ces deux principales techniques de couverture quadratique en marché continu se trouve dans H. Pham (2000) [PHA00].

Nous avons choisi ici l'approche minimisation locale du risque développée dans H. Föllmer et M. Schweizer (1991) [FS91], car notre modèle s'inscrit dans la continuité du modèle qu'ils avaient considéré : celui d'un marché incomplet où l'incomplétude est due à un manque d'information. En effet, si on ajoute l'information de l'initié au marché, celui-ci devient complet d'après les résultats du chapitre 2. Nous considérons donc le point de vue d'un agent non informé qui investit dans le marché influencé par l'agent initié étudié dans la partie précédente. Nous étudions sa stratégie de couverture, comparée à celle de l'agent informé. Nous sommes ramenés à un problème de couverture en marché incomplet, sous l'hypothèse $(H_3)$, qui diffère des hypothèses classiques de couverture quadratique précédemment étudiées dans H. Föllmer et M. Schweizer [FS91]. Nous obtenons ainsi une expression de la stratégie optimale de l'agent non informé en terme de projection de celle de l'agent informé sous une famille de probabilités neutres au risque, relativement à la filtration engendrée par les prix. De plus, nous donnons une version de la formule de Clark-Ocone dans notre cadre de filtration grossie, ainsi qu'une expression de la stratégie de l'agent informé en terme de dérivée de Malliavin. Nous introduisons également une expression du risque résiduel lié au manque d'information de l'agent non informé.

Enfin, dans le dernier paragraphe 3.6, nous présentons un exemple d'influence dans lequel toutes les hypothèses de notre modèle sont vérifiées, et nous exprimons les différentes stratégies de couverture des agents selon les formulations développées auparavant.

# 3 EDSR à horizon aléatoire et grossissement de filtration

La troisième et dernière partie de cette thèse est un travail réalisé en collaboration avec Manuela Royer, qui a soutenu sa thèse en décembre 2003 sur les EDSR à horizon aléatoire. Après nous être intéressées aux EDSR et EDSPR à horizon constant, motivées par des problèmes financiers de couverture à horizon fixé du type options européennes, nous nous sommes demandé si les résultats d'existence et d'unicité de solution d'EDSR sous filtration élargie montrés dans le chapitre 1 restaient vrais pour des EDSR à horizon aléatoire. Nous avons donc étudié différents cas d'EDSR avec un horizon aléatoire et un grossissement de filtration, avec un horizon qui est un temps d'arrêt borné.

## Chapitre 4 - EDSR à horizon aléatoire et grossissement initial

Nous reprenons ici le cadre de la première partie de cette thèse (chapitre 1), mais pour la couverture d'actifs dont les horizons de couverture sont des temps d'arrêt. Par exemple, cela concerne les cas des options américaines ou options Lookback. Ce travail utilise les résultats de Manuela Royer [ROY04] sur les EDSR avec horizon aléatoire sans grossissement de filtration (c'est-à-dire sous la filtration naturelle brownienne), combinés avec les résultats de la première partie de cette thèse sur les EDSR à horizon fixe avec grossissement initial de la filtration brownienne.

On obtient ainsi une généralisation des résultats précédents dans le cas brownien sous l'hypothèse ($\mathbf{H_3}$), tout d'abord pour un horizon qui est un temps d'arrêt p.s. borné par un horizon $T$ strictement inférieur à $T'$. On obtient également le même résultat pour le cas d'un temps d'arrêt plus généralement p.s. strictement inférieur à $T'$.

On peut appliquer ces résultats à la couverture d'options américaines ou Lookback par exemple. Nous montrons donc que pour des cas d'options plus généralement échangées sur le marché, les résultats établis au chapitre 1 restent vrais : l'agent initié aura la même stratégie que le non initié, car l'EDSR à horizon aléatoire sous la filtration grossie a une unique solution, comme dans le cas d'un horizon fixe.

# Première partie

# EDSR et grossissement initial de filtration

La première partie de cette thèse est constituée d'un premier article, rédigé en anglais, et accepté pour la publication dans *Stochastic Processes and their Applications*. Ce premier article porte sur l'étude des EDSR avec grossissement initial de filtration. La motivation première fut de s'intéresser à des problèmes financiers de couverture par un agent initié, c'est-à-dire en présence d'asymétrie d'information, dans un modèle de diffusion pure dans un premier temps, puis dans un modèle dirigé à la fois par un mouvement brownien et par un processus ponctuel dérivé d'une mesure de Poisson, autorisant le processus de prix à avoir des sauts. Ce sont les filtrations naturelles engendrées par ces processus que nous élargissons, et nous définirons en quel sens dans le chapitre 1.1.

Le problème financier de la couverture d'actif fait apparaître naturellement une équation différentielle stochastique rétrograde 1.6, et trouver un portefeuille de couverture revient à la résoudre. La présence d'asymétrie d'information est modélisée ici par un grossissement initial de la filtration naturelle considérée par une fonctionnelle des prix futurs $L$. C'est ce que l'on appelle une information forte initiale. La problématique financière nous amène à chercher un portefeuille adapté à cette nouvelle filtration, c'est-à-dire à l'information disponible de l'agent initié.

Nous commençons par poser le modèle dans le paragraphe 1.1 dans un cadre purement diffusif, et nous nous plaçons tout d'abord dans le paragraphe 1.2 sous l'hypothèse $(\mathbf{H_3})$. Cette hypothèse a été développée pour la modélisation de la présence d'un agent initié sur un marché financier par A. Grorud et M. Pontier (1998) [GP98], puis par J. Amendinger (2000) [AME99], et elle permet d'introduire une probabilité équivalente à la probabilité historique sous laquelle la filtration engendrée par l'information est indépendante de la filtration initiale. C'est sous cette nouvelle probabilité que nous travaillerons.

Dans un premier temps, le problème d'existence et d'unicité des solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde dans l'espace grossi est résolu sous cette hypothèse. On obtient un premier théorème d'existence et d'unicité de solution d'EDSR sous filtration grossie dans le paragraphe 1.2.1. La preuve est basée sur l'existence d'un théorème de représentation dans ce cas, obtenu à partir des travaux de J. Jacod et A.N. Shiryaev (2003) [JS03], et de A. Grorud et M. Pontier (1998) [GP98].

Puis nous nous intéressons à des problématiques plus financières, comme la viabilité et la complétude du marché initié (comme définis dans l'introduction générale, définition 3 page 12) dans le paragraphe 1.2.3. Nous comparons également les stratégies des deux agents, informés et non informés (paragraphe 1.2.2). Le résultat principal est que les stratégies ne changent pas sous l'hypothèse $(\mathbf{H_3})$, contrairement à ce qui se passe quand on considère un objectif de maximisation d'utilité de richesse : A. Grorud et M. Pontier [GP97] ont mis en évidence une différence de stratégie entre l'agent initié et l'agent non initié dans une optique de maximisation de richesse, et ont même construit un test de détection à partir de ces résultats. C. Hillairet [HIL05b] a également fait des simulations de ce genre de comportements. Cependant dans notre cadre de couverture d'actifs financiers, cette différence de comportement entre un agent informé et un agent non informé n'est plus vérifiée, alors que l'information considérée est du même type.

Nous nous intéressons dans le paragraphe 1.3 à l'existence et l'unicité de solutions de l'EDSR dans l'espace grossi sous l'hypothèse plus faible $(\mathbf{H''})$, sous laquelle la loi conditionnelle de $L$ sachant la filtration initiale est absolument continue par rapport à la loi de $L$. On n'obtient pas de théorème de représentation de martingales en toute généralité, et le théorème d'existence n'est obtenu que sous réserve d'existence d'une telle représentation.

Dans le paragraphe 1.4 de ce chapitre, le modèle est repris et les prix sont cette fois dirigés à la fois par un mouvement brownien et par un processus de Poisson mulitivarié. Successivement sous $(\mathbf{H_3})$ puis sous $(\mathbf{H''})$, nous étendons les résultats des parties précédentes et établissons un théorème d'existence et d'unicité de solution de l'EDSR sous la filtration grossie. Dans le paragraphe 1.4.5, nous donnons un exemple d'information $L$ vérifiant l'hypothèse $(\mathbf{H''})$ mais pas l'hypothèse $(\mathbf{H_3})$.

Le dernier paragraphe de ce chapitre est consacré à l'étude dans un cadre dirigé par un brownien et un processus ponctuel plus général, avec l'introduction d'une mesure de Poisson pouvant diriger les prix. Nous obtenons le même type de résultat d'existence et d'unicité de solutions de l'EDSR adaptée à la filtration élargie, sous l'hypothèse $(\mathbf{H_3})$.

# Chapitre 1

# Backward Stochastic Differential Equations with Enlarged Filtration

## *Option hedging of an insider trader in a financial market with jumps*

Insider trading consists in having an additional information, unknown from the common investor, and using it on the financial market. Mathematical modeling can study such behaviors, by modeling this additional information within the market, and comparing the investment strategies of an insider trader and a non informed investor. Research on this subject has already been carried out by A. Grorud and M. Pontier since 1996 (see [7], [8], [9] et [11]), studying the problem in a wealth optimization point of view. This work focuses more on option hedging problems. We have chosen to study wealth equations as backward stochastic differential equations (BSDE), and we use T. Jeulin's method of enlargement of filtration (see [5]) to model the information of our insider trader. We will try to compare the strategies of an insider trader and a non insider one. Different models are studied : at first prices are driven only by a Brownian motion, and in a second part, we add jump processes (Poisson point processes) to the model.

## 1.1 Mathematical Model

Let $W$ be a standard $d$-dimensional Brownian motion, and $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T'}, P)$ a filtered probability space, with $\Omega = C([0,T'];\mathbf{R}^d)$ and $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T']}$ the natural filtration of Brownian motion $W_t$. We consider a financial market with $d$ risky assets, whose prices are driven by :

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i(\sigma_s^i, dW_s)\ ,\ 0 \leq t \leq T < T', \tag{1.1}$$

and a bond (or riskless asset) evolving as : $S_t^0 = 1 + \int_0^t S_s^0 r_s ds$. Parameters $b, \sigma, r$ are supposed to be bounded on $[0,T]$, $\mathcal{F}$-adapted, and take values respectively on $\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^{d\times d}, \mathbf{R}$. Matrix $\sigma$ is supposed to be invertible $dt \otimes dP$-a.s.This is the usual conditions to have a complete market. A financial agent has a positive $\mathcal{F}_0$-measurable initial wealth $X_0$ at time $t = 0$ ($X_0$ constant a.s. as $\mathcal{F}_0$ is trivial). His consumption $c$ is a nonnegative $\mathcal{F}$-adapted process verifying $\int_0^T c_s ds < \infty$, $P$-a.s. He gets $\theta^i$ parts of $i^{th}$ asset. His wealth at time $t$ is $X_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i S_t^i$. We consider the standard self-financing hypothesis :

$$dX_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i dS_t^i - c_t dt \tag{1.2}$$

It means that the consumption is only financed with the profits realized by the portfolio, and not by outside benefits. Then, the wealth of the agent satisfies the following equation :

$$dX_t = \theta_t^0 S_t^0 r_t dt + \sum_{i=1}^d \theta_t^i S_t^i b_t^i dt + \sum_{i=1}^d \theta_t^i S_t^i (\sigma_t^i, dW_t) - c_t dt \tag{1.3}$$

Then, we denote by $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$ the amount of wealth invested in the $i^{th}$ asset for $i = 1, ..., d$, and we notice that $\theta_t^0 S_t^0 = X_t - \sum_1^d \pi_t^i$. We denote also by $\pi_t = (\pi_t^i, i = 1, .., d)$ the portfolio (or strategy), and so the total wealth can be written as a solution of a stochastic differential equation :

$$dX_t = (X_t r_t - c_t)dt + (\pi_t, b_t - r_t\mathbf{1})dt + (\pi_t, \sigma_t dW_t)\ , \tag{1.4}$$

where $\mathbf{1}$ is the vector with all coordinates equal to 1. The previous line can also be rewritten by integrating from $t$ to $T$ :

$$X_T - X_t = \int_t^T (X_s r_s - c_s)ds + \int_t^T (\pi_s, b_s - r_s\mathbf{1})ds + \int_t^T (\pi_s, \sigma_s dW_s) \text{ a.s.} \tag{1.5}$$

so :

$$X_t = X_T - \int_t^T \underbrace{[(X_s r_s - c_s) + (\pi_s, b_s - r_s\mathbf{1})]}_{-f(s,X_s,Z_s)} ds - \int_t^T (\underbrace{\sigma_s^* \pi_s}_{Z_s}, dW_s) \text{ a.s.} \tag{1.6}$$

It is the form under which we will study the wealth process, as a solution of a backward stochastic differential equation. We consider an option hedging problem, represented by a pay-off $\xi$, to be reached at maturity $T$. As a transcription, we have a problem of portfolio duplication : we look for the initial wealth $X_0$ and the portfolio $\pi$ such that $X_T = \xi$. The reason why BSDEs are interesting in our case is that they allow us to model such a

problem of option hedging with a unique equation (see N. El Karoui, S. Peng and M.-C. Quenez [6]).
BSDEs are stochastic differential equations of the form :

$$X_t = \xi + \int_t^T f(s, X_s, Z_s)ds - \int_t^T (Z_s, dW_s) \ , \forall 0 \leq t \leq T \tag{1.7}$$

- $\xi \in L^2(\Omega)$ is the final wealth, a goal to reach,
- $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k \times k} \longrightarrow \mathbf{R}^k$ is a drift function,
- $X_t$ is the total wealth of the portfolio at time $t$,
- $Z_t$ represents the portfolio investments at time $t$.

One of the fundamental results about BSDEs is a theorem given by E. Pardoux and S. Peng (see [17, 18]), which gives the existence and uniqueness of the solution of a BSDE under some Lipschitz hypotheses on the drift function.

**Theorem 1.1.1** *Suppose $f(.,y,z)$ is $\mathcal{F}$-progressively measurable, and*

1. $\exists \phi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *increasing such that $P$-a.s.,* $|f(t,y,0)| \leq |f(t,0,0)| + \phi(|y|), \forall t, y$
2. $\mathbf{E}_P(\int_0^T |f(t,0,0)|^2) < \infty$
3. *$f$ is globally Lipschitz w.r.t. $z$ and continuous w.r.t. $y$*
4. *$P$-a.s.,* $\langle y - y', f(t,y,z) - f(t,y',z) \rangle \leq \mu |y - y'|^2, \forall t, y, y', z.$

*Then the BSDE has a unique solution $(X,Z)$ such that $\mathbf{E}_P \int_0^T \| Z_t \|^2 dt < \infty$*

From now on, we suppose that the financial agent is an insider trader : he has an additional information compare to the standard normally informed investor. To model it, we use the method of enlargement of filtration. We will suppose in all this paper that $r = 0$, which means that we don't have interest rates, because we will only consider small investors, who do not influence interest rates. In this model, we introduce an insider, who has an information at time 0 denoted by $L \in \mathcal{F}_{T'}$. $L$ is $\mathcal{F}_{T'}$-measurable, which means that it will be public at time $T'$. To model the insider space, we enlarge the initial filtration with $L$, in order to obtain the filtration of the insider trader probability space :

$$\mathcal{Y} := \left\{ \mathcal{Y}_t = \bigcap_{s>t} (\mathcal{F}_s \vee \sigma(L)), \ t \in [0, T'] \right\} \tag{1.8}$$

Since the discounted asset prices are martingales in the initial probability space under a risk-neutral probability, it would be interesting and natural that they still have similar properties in the larger space. So the main problem is under which condition do we have the following useful property :

**Hypothesis 1 (H')** *If $(M_t)_{0 \leq t \leq T'}$ is a given $(\mathcal{F}_t, P)$-martingale (or semi-martingale), then $(M_t)$ is a $(\mathcal{Y}_t, P)$-semi-martingale.*

This problem has been developed by T. Jeulin [5] and M. Yor, and by J. Jacod [12], who shows that this assertion is true under the following hypothesis :

**Hypothesis 2** ($\mathbf{H}''$) *The conditional probability law of $L$ knowing $\mathcal{F}_t$ is absolutely continuous with respect to the probability law of $L$, $\forall t < T'$.*

**Remark :** if $L$ is $\mathcal{F}_{T'}$-measurable, and if its conditional probability law given $\mathcal{F}_{T'}$ ($\delta_L$) is absolutely continuous with respect to the distribution of $L$, it implies that $\sigma(L)$ is atomic (see for a deeper study A. Meyer [16]). But this is not the case in this article, because we will suppose $L \in \mathcal{F}_{T'}$ and a terminal point of view of our problem $T < T'$.
Under hypothesis ($\mathbf{H}''$), J. Jacod [12] gives the expected decomposition : one split a $(\mathcal{F}, P)$-martingale (Brownian motion $W$ in our example) into a $(\mathcal{Y}, P)$-martingale part and a finite variation part as $W_t = B_t + \int_0^t l_s ds$ where $B$ is a $(\mathcal{Y}, P)$-martingale (a $(\mathcal{Y}, P)$-Brownian motion in case of $W$ Brownian motion), and $l$ is $\mathcal{Y}$-adapted. This property is also verified under a stronger hypothesis, for which we have stronger results, and which has been developed by T. Jeulin [5], J. Amendinger [1], A. Grorud and M. Pontier [9] :

**Hypothesis 3** ($\mathbf{H_3}$) *There exists a probability $Q$ equivalent to $P$ under which $\mathcal{F}_t$ and $\sigma(L)$ are independent, $\forall t < T'$.*

Among the remarkable consequences of this hypothesis, we can notice that $W$ is a $(\mathcal{Y}, Q)$-Brownian motion. We can also choose $\mathbb{Q}$ such that for all $t \leq T < T'$, we have $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$, and we define it by $\mathbb{Q} = \frac{1}{q(T,L)}\mathbb{P}$ on $\mathcal{Y}_T$ (D. Becherer [BEC01] for further details).

This article will successively study the existence and uniqueness of the BSDE on the enlarged probability space under ($\mathbf{H_3}$) and under ($\mathbf{H}''$).

**Remark :** Before the study of hypothesis ($\mathbf{H}'$), ($\mathbf{H}''$) and ($\mathbf{H_3}$), P. Bremaud and M. Yor [4] studied hypothesis ($\mathbf{H}$) under which $(\mathcal{F}, P)$-(local) martingales are still $(\mathcal{Y}, P)$-(local) martingales. This hypothesis is not currently used in insider models with initial enlargement of filtrations. In the case of initial enlargement, ($\mathbf{H_3}$) implies ($\mathbf{H}$). In fact, ($\mathbf{H_3}$) implies the existence of a probability $Q$ under which ($\mathbf{H}$) is verified (see also J. Amendinger [2]). Conversely, it is easy to prove that if ($\mathbf{H}$) is true under $P$, and if $\mathcal{F}_0$ is trivial, then ($\mathbf{H_3}$) is true under $P$ (with $Q = P$). In a practical and financial sense, it means that it is not realistic to consider that the "natural" probability makes the information and the market independent. Nevertheless, hypothesis ($\mathbf{H}$) appears to be relevant and useful in default risk models and progressive enlargement of filtrations.

## 1.2 BSDE under hypothesis ($H_3$)

### 1.2.1 Existence and Uniqueness Theorem

Let ($\mathbf{H_3}$) be verified. We denote by $Q$ the new probability. As ($\mathbf{H_3}$) can not hold until $T'$ exactly, but only for $t < T'$, we chose $L \in \mathcal{F}_{T'}$ and we consider a problem of maturity $T < T'$. So we can enlarge our filtration until $T$. We suppose also that the BSDE with parameter $(\xi, f)$ has a unique solution in the non insider space : we will suppose that the hypotheses of Theorem 1.1.1 are verified. To simplify the proof, we will even suppose that $f$ is globally Lipschitz with respect to $y$ and $z$. For the non insider investor, the initial BSDE is verified :

$$\begin{cases} X_t = \xi + \int_t^T f(s, X_s, Z_s)ds - \int_t^T (Z_s, dW_s) \ , \forall 0 \leq t \leq T \\ (\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P), \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P) \end{cases} \tag{1.9}$$

As $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ is still a Brownian motion under $((\mathcal{Y}_t)_{0 \leq t \leq T}, Q)$ thanks to hypothesis ($\mathbf{H_3}$) (cf J. Jacod [12]), the equation becomes in the insider space :

$$\begin{cases} \tilde{X}_t = \xi + \int_t^T f(s, \tilde{X}_s, \tilde{Z}_s)ds - \int_t^T (\tilde{Z}_s, dW_s) \ , \forall 0 \leq t \leq T \\ (\Omega, (\mathcal{Y}_t)_{0 \leq t \leq T}, Q), \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{Y}_T, Q) \end{cases} \tag{1.10}$$

where a solution $(\tilde{X}, \tilde{Z})$ is a couple of $\mathcal{Y}$-adapted processes. We also suppose that $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{Y}_T, Q)$, such that the problem is correctly given in the insider space. We have then the following result :

**Theorem 1.2.1** *Under hypothesis of Theorem 1.1.1, and if $E_Q(\int_0^T |f(t,0,0)|^2 dt) < \infty$ then the backward stochastic differential equation (1.10) has a unique solution in the insider space, such that $E_Q \int_0^T \parallel \tilde{Z}_s \parallel^2 ds < +\infty$.*

**Remark :** In our financial application, as $f(t, 0, 0) = 0$, the hypothesis is always satisfied, but this theorem is true in a more general case.

**Proof :** The hypotheses of Theorem 1.1.1 can be checked. The filtration is not the natural filtration of the Brownian motion any more. We will have to cope with this problem. $f(., y, z)$ is $\mathcal{F}$-progressively measurable $\forall y, z$ and $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{Y}_t$, so $f(., y, z)$ is $\mathcal{Y}$-progressively measurable. Moreover, as $P \sim Q$ the $P$-null sets are the same as the $Q$-null sets. So we still have point 1, 3 and 4 $Q$-a.s. For point 2, under new probability $Q$, the expected value is not finite any more, so we have to suppose this point true in the hypotheses of Theorem 1.2.1. The last problem we have to cope with is the new filtration which is not the natural Brownian filtration any more. This is annoying because the proof of Theorem 1.1.1 uses Itô martingale representation theorem, which supposes that the filtration is the natural Brownian filtration (see [14]). Nevertheless, as the new filtration $\mathcal{Y}$ is generated by $L$ and by the Brownian motion, we still have a martingale representation result in the case of a filtration generated by the Brownian motion and $\mathcal{H}_0$ an initial $\sigma$-algebra (see [13] Theorem $III$.4.33 p.189). And so Pardoux's proof can be adapted to our case. To simplify our proof, we suppose $f$ globally Lipschitz in $y$.

Let $\mathcal{M}^2(0,T)^k$ denote the set of $\mathbb{R}^k$-valued $\mathcal{Y}$-progressively measurable processes, $\{u(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ such that

$$\| u(.) \|_0 := \left( E_Q \int_0^T |u(s)|^2 ds \right)^{1/2} < +\infty$$

Let $\mathcal{B}^2 = \left(\mathcal{M}^2(0,T)^k\right) \times \left(\mathcal{M}^2(0,T)^{k\times d}\right)$. We will define a function $\Phi : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}^2$ such that $(X,Z) \in \mathcal{B}^2$ is a solution of the BSDE if it is a fixed point of $\Phi$. Let $(U,V) \in \mathcal{B}^2$, and $(X,Z) = \Phi(U,V)$ with :

$$X_t = \mathbf{E}_Q \left[ \xi + \int_t^T f(s,U_s,V_s)ds \middle| \mathcal{Y}_t \right] \ , 0 \leq t \leq T \ , X_T = \xi.$$

Then $\{Z_t, 0 \leq t \leq T\}$ is obtained by using J. Jacod and A.N. Shiryaev [13] generalized martingale representation theorem, applied to the martingale

$$E_Q \left[ \xi + \int_0^T f(s,U_s,V_s)ds \middle| \mathcal{Y}_t \right]_{t\in[0,T]} .$$

So we obtain :

$$\xi + \int_0^T f(s,U_s,V_s)ds = \mathbf{E}_Q \left( \xi + \int_0^T f(s,U_s,V_s)ds \middle| \sigma(L) \right) + \int_0^T (Z_s, dB_s)$$

In this last equality, conditional expectation is taken with respect to $\mathcal{Y}_t$ and so $\forall t \leq T$ :

$$X_t + \int_0^t f(s,U_s,V_s)ds = X_0 + \int_0^t (Z_s, dB_s)$$

$$\text{Which implies} \quad X_0 = \xi + \int_0^T f(s,U_s,V_s)ds - \int_0^T (Z_s, dB_s)$$

$$\text{and consequently} \quad X_t = \xi + \int_t^T f(s,U_s,V_s)ds - \int_t^T (Z_s, dB_s) \tag{1.11}$$

This proves that $(X,Z) \in \mathcal{B}^2$ is solution of the BSDE if and only if $(X,Z)$ is a fixed point of $\Phi$. As $f$ is globally Lipschitz with respect to $U,V$ and using Davis-Burkholder-Gundy's inequality, we deduce :

$$\mathbf{E}_Q \left( \sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2 \right) < \infty.$$

Moreover $\{\int_0^t (X_s, Z_s dB_s), 0 \leq t \leq T\}$ is a $(\mathcal{Y}, Q)$-martingale.
More precisely, as $\int_0^t (X_s, Z_s dB_s)$ is a local martingale, as a stochastic integral w.r.t. $B$ Brownian motion of an adapted process $X_s Z_s$, we only need that $XZ$ is square integrable (in $L^2([0,T]\times\Omega, dt\times d\mathbb{Q})$) in order to conclude that it is a uniformly integrable martingale. Then, using Burkholder Davis Gundy inequality, we obtain

$$E_Q \sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2 < +\infty$$

and we use also the fact that

$$2E_Q\left[\left(\int_0^T |X_t|^2 \parallel Z_t \parallel^2 dt\right)^{1/2}\right] \leq E_Q \sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2 + E_Q \int_0^T \parallel Z_t \parallel^2 dt < +\infty$$

which proves finally that $\left(\int_0^t (X_s, Z_s dB_s)\right)_{t\in[0,T]}$ is a martingale, w.r.t. the considered filtration and probability (here $(\mathcal{Y}, Q)$).
Let $(U,V),(U',V') \in \mathcal{B}^2$, $(X,Z) = \Phi(U,V),(X',Z') = \Phi(U',V')$,
$(\bar{U},\bar{V}) = (U-U',V-V')$ and $(\bar{X},\bar{Z}) = (X-X',Z-Z')$.
Then, from Itô formula, $\forall\gamma \in \mathbf{R}$, we have :

$$\begin{array}{rcl} e^{\gamma t}\mathbf{E}_Q|\bar{X}_t|^2 & + & \mathbf{E}_Q \int_t^T e^{\gamma s}(\gamma|\bar{X}_s|^2 + \parallel \bar{Z}_s \parallel^2)ds \\ & \leq & 2K\mathbf{E}_Q \int_t^T e^{\gamma s}|\bar{X}_s|(|\bar{U}_s| + \parallel \bar{V}_s \parallel)ds \\ & \leq & 8K^2\mathbf{E}_Q \int_t^T e^{\gamma s}|\bar{X}_s|^2 ds + \frac{1}{2}\mathbf{E}_Q \int_t^T e^{\gamma s}(|\bar{U}_s|^2 + \parallel \bar{V}_s \parallel^2)ds \end{array} \tag{1.12}$$

We chose $\gamma = 1 + 4K^2$, and obtain :

$$\mathbf{E}_Q \int_0^T e^{\gamma t}(|\bar{X}_t|^2 + \parallel \bar{Z}_t \parallel^2)dt \leq \frac{1}{2}\mathbf{E}_Q \int_0^T e^{\gamma t}(|\bar{U}_t|^2 + \parallel \bar{V}_t \parallel^2)dt \tag{1.13}$$

Then $\Phi$ is a strict contraction on $\mathcal{B}^2$ with norm
$|||(X,Z)|||_\gamma = (\mathbf{E}_Q \int_0^T e^{\gamma t}(|X_t|^2 + \parallel Z_t \parallel^2)dt)^{\frac{1}{2}}$.
We deduce that $\Phi$ has a unique fixed point and we conclude that the BSDE has a unique solution.

□

### 1.2.2 Comparison of the solutions

We first look at an intuitive example. Suppose $L = S_T$ : the agent knows the final price (he deduces it for instance from an information on a former financial operation, as a takeover bid). Suppose also that he wants to hedge a digital option $\mathbf{1}_{S_T \leq K}$. The insider will then have two possible investments : invest on the risky asset if $S_T \leq K$, or do nothing otherwise. He has obviously a different strategy from the non insider agent. Moreover, in this special case, there is an arbitrage opportunity.
In the general case, it is not so easy to determine whether the insider will have a different investment strategy from the non insider or not, especially when information is at time $T' > T$. So two questions naturally arise : will the insider invest differently from the non insider ? Is there an arbitrage opportunity in the insider space ? Answering these questions can give us other clues : is the information relevant ? Is it useful ? Moreover, when the insider has a very different strategy from the non insider, it will be possible to detect the former through statistical tests. This could be useful for market fraud detection agencies, as the French A.M.F. We can recall that in a wealth optimization point of view (see A. Grorud and M. Pontier [8]), the insider will immediately have a completely different strategy from the non insider. Is it the same in our hedging problem ? We compare first the strategies of the two agents (comparison of the solutions of the two BSDE's (1.9) and (1.10)), before studying viability and completeness of the insider market.

**Corollary 1.2.1** *Suppose that $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{Y}_T, Q) \cap L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, so that the financial problem has a sense in the insider space as in the non insider space. We denote by $(X, Z)$ and $(X', Z')$ the solutions of the two BSDE's. Then, the solution of the insider's BSDE is the same as the non insider's one : $(X, Z) = (X', Z')$.*

**Proof :** According to Theorem 1.2.1, in the insider space $(\Omega, (\mathcal{Y}_t)_{0\leq t\leq T}, Q)$ the BSDE has a unique solution $(X'_t, Z'_t)_{0\leq t\leq T}$. But the non insider BSDE solution $(X_t, Z_t)_{0\leq t\leq T}$ is $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-progressively measurable, and so is it with respect to $(\mathcal{Y}_t)_{0\leq t\leq T}$. As the BSDE is the same in both spaces, we have

$$X_t = \xi + \int_t^T f(s, X_s, Z_s)ds - \int_t^T (Z_s, dB_s)$$

So $(X_t, Z_t)$ is a solution of the insider BSDE. But we have $P = Q$ on $\mathcal{F}$, so as $Z$ is an $\mathcal{F}$-adapted solution, and satisfies that the $P$-expectation of $\int_0^T \parallel Z_t \parallel^2 dt < \infty$ is finite, then its $Q$-expectation is the same, so is finite. And finally, as $\mathbf{E}_Q \int_0^T \parallel Z_t \parallel^2 dt < \infty$, we conclude that it is the unique solution of the insider BSDE. □

**Remarks** : Intuitively, as $L \in (\mathcal{F}_{T'})$, $T < T'$ and $L$ is independent of $\xi$ under $Q$, from hypothesis $(\mathbf{H_3})$, we can understand that if under $Q$ the objective is independent from the insider information, he will not have a different strategy, as soon as this strategy is admissible in the insider space. In a certain sense, the information is useless. In this case, there is no arbitrage opportunity, and the insider market is viable. We have a hedging problem in a complete initial market, so there exists a price for the option, and a strategy for hedging the risk (completeness here means that any square integrable contingent claim is attainable by an admissible strategy, see [15]). What is the use of the information? Either to create an arbitrage, which is impossible under $(\mathbf{H_3})$ (see next paragraph), or to propose a different price for the option in the market. But then two problems appear : first, who would buy such an option? And second, proposing a different price from the market means exhibiting the fact that one has an information... which is uninteresting from the insider's point of view considering that using the information is a fraud.

### 1.2.3 Viability and completeness of the insider market

We try to translate our results in term of viability and completeness of the market. The main point is to know if there is an arbitrage opportunity, and if the insider market is complete.

**Theorem 1.2.2** *Suppose that the insider market is viable, and let $P^*$ and $Q^*$ be risk-neutral probabilities, respectively in the non insider and in the insider market. If $\xi \in L^2(\mathcal{F}, P^*) \cap L^2(\mathcal{Y}, Q^*)$, then $E_{P^*}(\xi) = E_{Q^*}(\xi)$. So the information does not create any arbitrage opportunity : prices are the same in both spaces.*

**Proof :** By a Girsanov transformation, risk-neutral probabilities allows us to remove drift in price processes, keeping volatility. So in the insider space as in the non insider space, we obtain $dS_t = S_t(\sigma_t, dW_t)$ where $W_t$ is a $(\mathcal{F}, P^*)$ and a $(\mathcal{Y}, Q^*)$-Brownian motion. If we apply the martingale representation Theorem to $\xi$ under probability $P^*$, we obtain :

$$\xi = E_{P^*}(\xi) + \int_0^T \phi_s dW_s$$

And as $W$ is also a $(\mathcal{Y}, Q^*)$-Brownian motion, by taking the expectation under $Q^*$, we obtain that $E_{P^*}(\xi) = E_{Q^*}(\xi)$. □

In general, the insider market does not have the property of uniqueness of the risk neutral probability, but has a particular property :

**Theorem 1.2.3** *Let $R_1$ and $R_2$ be two risk neutral probabilities in the insider space. Let $Y \in L^1_{R_1}(\mathcal{Y}) \cap L^1_{R_2}(\mathcal{Y})$, then prices are equal : $E_{R_1}(Y) = E_{R_2}(Y)$.*

**proof :** See A. Grorud [7]. □

The insider market may have several risk neutral probabilities. The risk neutral probability is not necessarily unique, nevertheless the market is always complete in the sense of definition 3. All prices calculated under different risk neutral probabilities are the same. It could be interpreted by the fact that prices in the insider market will only depend on information $L$ and on the non insider market : as the non insider has a unique risk neutral probability, there is only one price in the insider market.

Finally, following J. Amendinger [2] and A. Grorud and M. Pontier [9, 8] we have the following result :

**Theorem 1.2.4** *Under $(\mathbf{H_3})$, if the non insider market is viable, then the insider market is also viable. Financially speaking the information $L$ does not create any arbitrage opportunity.*

On the other hand, uniqueness of the risk neutral probability in the non insider market does not necessarily imply uniqueness of the risk neutral probability in the insider market. The enlarged space may have several risk neutral probabilities, but which will keep the property of completeness of the insider market according to Theorem (1.2.3).

# 1.3 BSDE under hypothesis (H")

## 1.3.1 Existence and Uniqueness Theorem

In this section ($\mathbf{H}''$) is supposed to hold : the conditional probability law of $L$ knowing $\mathcal{F}_t$ is absolutely continuous with respect to the law of $L$, $\forall t \leq T$. We still take $L \in \mathcal{F}_{T'}$, $T < T'$. Let's recall the non insider BSDE :

$$\begin{cases} X_t = \xi + \int_t^T f(s, X_s, Z_s)ds - \int_t^T (Z_s, dW_s) \ , \forall 0 \leq t \leq T \\ (\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, P) \end{cases} \tag{1.14}$$

($\mathbf{H}'$) holds, say every $(\mathcal{F}, P)$-martingale $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ is a $(\mathcal{Y}, P)$-semi-martingale. So the Brownian motion $W$ can be written : $W_t = B_t + \int_0^t l_s ds$ where $B$ is a $(\mathcal{Y}, P)$-Brownian motion and $l$ is a $\mathcal{Y}$-adapted process. We deduce the new backward equation in the insider space :

$$\begin{cases} X_t = \xi + \int_t^T [f(s, X_s, Z_s) - (Z_s, l_s)] \, ds - \int_t^T (Z_s, dB_s) \ , \forall 0 \leq t \leq T \\ (\Omega, (\mathcal{Y}_t)_{0\leq t\leq T}, P) \end{cases} \tag{1.15}$$

If we take $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{Y}_T, P)$ in the insider space, we have a new BSDE with a new drift, deduced from the previous drift according to the formula :

$$g(\omega, t, y, z) = f(\omega, t, y, z) - (z, l(\omega, t)).$$

Let's consider existence and uniqueness Theorem 1.1.1. The filtration is not generated by the Brownian motion any more. So we don't have any martingale representation theorem. $f(., y, z)$ and $l_t$ are $\mathcal{Y}_t$-progressively measurable, so the new drift $g(., y, z)$ is $\mathcal{Y}_t$-progressively measurable. As $g(t, y, 0) = f(t, y, 0)$, the condition on $f$ stands also on $g$, so $|g(t, y, 0)| \leq |g(t, 0, 0)| + \phi(|y|)$, $\forall y, z$ $P$-a.s. Identically, as $g(t, 0, 0) = f(t, 0, 0)$ we still have $\mathbf{E}_P(\int_0^T |g(t, 0, 0)|^2 dt) < \infty$. On the other hand, $g$ is not globally Lipschitz, because :

$$|g(t, y, z) - g(t, y, z')| = |f(t, y, z) - f(t, y, z') + l(t)(z - z')| \leq (K + l_t) \parallel z - z' \parallel$$

So if $l_t$ is a.s. bounded, then $g$ is globally Lipschitz with respect to $z$, but if $l_t$ is not bounded, this property does not hold. Moreover, as $g(y) = f(y) + constant$, we still have $< y-y', g(t, y, z)-g(t, y', z) >=< y-y', f(t, y, z)-f(t, y', z) >\leq \mu|y-y'|^2$. As $f$, $g$ is also continuous with respect to $y$, $\forall t, z$ a.s. Finally, all conditions are verified for the enlarged BSDE in the insider space, as soon as we suppose $l_t$ bounded. But we need a martingale representation theorem. If $l_t$ is almost surely bounded, then $E_P(\mathcal{E}(-l.B)) = 1$, $\forall t < T$. Then, according to proposition 4.2 of A. Grorud and M. Pontier [11], hypothesis ($\mathbf{H_3}$) is verified. We are in the previous case : under hypothesis ($\mathbf{H_3}$), we have a martingale representation theorem, and we can conclude similarly to Theorem 2.1 (and without a change of probability). We obtained the following result :

**Theorem 1.3.1** *Under* ($H''$) *and hypotheses of Theorem* 1.1*, if* $l_t$ *is a.s. bounded in the enlarged space* $(\Omega, (\mathcal{Y}_t)_{0\leq t\leq T}, P)$*, then we deduce the existence and uniqueness of the solution of the enlarged BSDE.*

**Remark :** It will be useful to study what happens on examples for which $l$ is not bounded, and $(\mathbf{H_3})$ does not hold. But a problem is that we do not know any example of $L$ in a continuous model for which $(\mathbf{H}'')$ holds but not $(\mathbf{H_3})$. And if $(\mathbf{H_3})$ holds, we have the result of previous section, and the problem is solved. This is the reason why it seems natural to introduce jump processes into our model, in order to have examples of $L$ for which we have $(\mathbf{H}'')$ but not $(\mathbf{H_3})$.

## 1.4 Introduction of jump processes

### 1.4.1 Extended model

We add jump processes in the price dynamics studied in the previous section. $W$ is a $m$-dimensional standard Brownian motion on $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, P^W)$ and $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in[0,T']}$ its completed natural filtration. We denote by $(\Omega^N, \mathcal{F}^N, P^N)$ another probability space where $N = (N^1, .., N^n) : \Omega^N \to \mathbf{R}^n$ is a $n$-dimensional multivariate Poisson process, with intensity $\lambda_t,\ t \in [0, T']$. We denote by $M_t = N_t - \int_0^t \lambda_s ds$ the compensated multivariate Poisson process. $N$ is denoted as a vector $(N^k)_{k=1,..,n}$ of one-dimensional Poisson processes with deterministic intensity $(\lambda^k)_{k=1,..,n}$. $\mathcal{F}^N$ is generated by the jump times of $N$. So the global probability space is :

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T']}, P) = (\Omega^W \times \Omega^N, \mathcal{F}^W \otimes \mathcal{F}^N, (\mathcal{F}_t^W \otimes \mathcal{F}_t^N)_{t\in[0,T']}, P^W \times P^N).$$

The market model still contains a bond and $d = m+n$ risky assets whose prices $(S_t^i)_{i=1,..,d}$ follow a diffusion run by $W$ and $N$ :

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= S_t^0 r_t\ , \quad S_0^0 = 1 \\ dS_t^i &= S_t^i b_t^i dt + S_t^i(\sigma_t^i, dW_t) + S_t^i(\rho_t^i, dM_t)\ , \quad S_0^i = x^i, \quad i = 1, .., d. \end{aligned} \tag{1.16}$$

We suppose the following, so that the market is viable and complete :

- $b, r, \sigma, \rho$ are predictable and globally bounded processes,
- $\lambda$ is a nonnegative $\mathcal{F}_0$-measurable process, which does not meet any neighborhood of 0, $\rho_t^{i,k} > -1,\ \forall i, k, t$,
- $\Phi_t^* \Phi_t$ is uniformly elliptic, where $\Phi_t = [\sigma_t \rho_t]$
- Let $\theta = \Phi^{-1}(b - r\mathbf{1})$, then $\theta^{m+k} < \lambda^k,\ \forall k = 1, .., n$.

We consider again an insider in this new market with jumps. The insider still has information $L \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_{T'}, P)$ taking its values in $\mathbf{R}^d$, and the new filtration on the insider space is $\mathcal{Y}_t = \cap_{s>t}(\mathcal{F}_s \vee \sigma(L)),\ \forall t \in [0, T],\ T < T'$. We have the same hypothesis on wealth process and investment strategy, and we study self-financing strategies $dX_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i dS_t^i - c_t dt$, so the wealth process of the trader on this market satisfies :

$$\begin{aligned} X_t = X_0 &+ \int_0^t \theta_s^0 S_s^0 r_s ds - \int_0^t c_s ds \\ &+ \sum_{i=1}^d \left[ \int_0^t \left( \theta_s^i S_s^i b_s^i ds + \theta_s^i S_s^i (\sigma_s^i, dW_s) + \theta_s^i S_s^i (\rho_s^i, dM_s) \right) \right] \end{aligned} \tag{1.17}$$

As in the continuous model, we obtain the following BSDE for the wealth process :

$$\begin{aligned} X_t = X_T &- \int_t^T \underbrace{[(X_s r_s - c_s) + (\pi_s, b_s - r_s \mathbf{1})]}_{-f(s, X_s, Z_s, U_s)} ds \\ &- \int_t^T (\underbrace{\sigma_s^* \pi_s}_{Z_s}, dW_s) - \int_t^T (\underbrace{\rho_s^* \pi_s}_{U_s}, dM_s) \text{ a.s.} \end{aligned} \tag{1.18}$$

### 1.4.2 BSDE with jumps

In this model with jumps, and even in a more general model with Poisson point processes (see further), G. Barles, R. Buckdahn and E. Pardoux [3] developed an existence and uniqueness theorem for the solution of BSDE's with jumps. We denote by $\mathcal{B}^2 = \mathcal{S}^2 \times L^2_m(P) \times L^2_n(P)$ where :

- $\mathcal{S}^2$ is the set of $k$-dimensional $\mathcal{F}_t$-adapted càdlàg processes $\{Y_t\}_{0\le t\le T}$ such that $||Y||_{\mathcal{S}^2} = \| \sup_{0\le t\le T} |Y_t| \, \|_{L^2(\Omega)} < \infty$
- $L^2_m(P)$ the set of all $k\times m$-dimensional $\mathcal{F}_t$-progressively measurable processes $\{Z_t\}_{0\le t\le T}$ such that $||Z||_{L^2_m(P)} = \left(E_P \int_0^T |Z_t|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$
- $L^2_n(P)$ the set of all $k\times n$-dimensional $\mathcal{F}_t$-progressively measurable processes $\{U_t\}_{0\le t\le T}$ such that $||U||_{L^2_n(P)} = \left(E_P \int_0^T |U_t|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$

We have the following theorem (see G. Barles et al. [3]) :

**Theorem 1.4.1** *Let $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)^k$ and $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times m} \times \mathbf{R}^{k\times n} \longrightarrow \mathbf{R}^k$. If $f$ is measurable, if $E_P \int_0^T |f_t(0,0,0)|^2 dt < \infty$ and if $\exists K$ such that : $|f_t(y,z,u) - f_t(y',z',u')| \le K(|y-y'| + ||z-z'|| + ||u-u'||), \forall t \le T, y, y', z, z', u, u'$ then there exists a unique triple $(X,Z,U) \in \mathcal{B}^2$ solution of the BSDE :*

$$X_t = \xi + \int_t^T f_s(X_s, Z_s, U_s) ds - \int_t^T (Z_s, dW_s) - \int_t^T (U_s, dM_s), \quad 0 \le t \le T$$

**Proof** : The proof is the same as proof of Theorem 1.1.1 : constructing a strict contraction and using a martingale representation theorem. □

**Remark :** In our case of financial application, $k = 1$ is the dimension of the wealth process. But all results here are verified for a general dimension $k$ for process $X$. That is the reason why in the general case, theorems are given for general dimensions, and for financial applications we should take $k = 1$.

### 1.4.3 Under hypothesis $(H_3)$

Everything works globally as in the first part of the paper. More precisely :

#### Existence and Uniqueness Theorem

Thanks to J. Jacod and A.N. Shiryaev ([13] Theorem $III.4.34$ p.189), A. Grorud ([7] Theorem 3.1 p.648) shows a martingale representation theorem under $(\mathbf{H_3})$ with jumps. With this martingale representation theorem, we can adapt the proof of Theorem 1.4.1, and as in the continuous case in section 1.2.1, we have the following result :

**Theorem 1.4.2** *Under hypothesis of Theorem 1.4.1 (so the initial BSDE has a unique solution), for $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{Y}_T, Q)$ and if $E_Q \left(\int_0^T |f_t(0,0,0)|^2 dt\right) < \infty$ then the BSDE in the insider space has a unique solution $(X,Z,U) \in \mathcal{B}^2$.*

**Comparison of solutions**

We have a similar result as in section 1.2.2 :

**Proposition 1.4.1** *For $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{Y}_T, Q) \cap L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$, if $E_Q\left(\int_0^T \| Z_t \|^2_{L^2_m(Q)} + \| U_t \|^2_{L^2_n(Q)} dt\right) < \infty$, then the solution of the enlarged BSDE is the same as the solution of the initial BSDE : $(X, Z, U) = (X', Z', U')$.*

**Viability and Completeness of the market**

As in the continuous case, if the non insider market is viable, then the insider market is also viable : there is no arbitrage opportunity (see A. Grorud [7]).

### 1.4.4 Under hypothesis (H")

In this case, the new model becomes interesting, because now we have examples of $L$ for which $(\mathbf{H}'')$ holds but not $(\mathbf{H_3})$. We summarize the results we have under this hypothesis before treating an example. We use J. Jacod's result on enlargement of filtration under $(\mathbf{H}'')$ (see [12]), a bit different from the result in the continuous model (see A. Grorud [7]).

**Proposition 1.4.2** *Under hypothesis $(\mathbf{H}'')$, we have :*

- *If $Q_t$ is the conditional law of $L$ knowing $\mathcal{F}_t$, then there exists a measurable version of the conditional density $dQ_t : (\omega, t, x) \mapsto p(\omega, t, x)$ which is a martingale and can be written as, $\forall x \in \mathbf{R}$ :*

$$p(t,x) = p(0,x) + \int_0^t (\alpha(s,x), dW_s) + \int_0^t (\beta(s,x), dM_s)$$

  *where $\forall x$, $s \mapsto \alpha(s,x)$ and $s \mapsto \beta(s,x)$ are $\mathcal{F}$-predictable processes. Moreover, $\forall s < T'$, $p(s,L) > 0$ a.s.*
- *If $Y$ is a martingale written as $Y_t = Y_0 + \int_0^t (u_s, dW_s) + \int_0^t (v_s, dM_s)$ then $d < Y, p(.,x) >_t = < \alpha(.,x), u >_t dt + < \beta(.,x), v >_t dt$ a.s. $\forall t$, and :*

$$\bar{Y}_t = Y_t - \int_0^t \frac{(< \alpha(.,x), u >_s + < \Gamma.\beta(.,x), v >_s)|_{x=L}}{p(s,L)} ds, \quad 0 \le t \le T$$

  *is a $(\mathcal{Y}, P)$-local martingale where $\Gamma$ is the diagonal matrix of intensities of $N$ : $d < M >_s = \Gamma_s ds$*

We denote by $l_s = \frac{\alpha(s,L)}{p(s,L)}$ and $\mu_s = \frac{\Gamma_s \beta(s,L)}{p(s,L)}$. Then $\bar{W}_t = W_t - \int_0^t l_s ds$ is a $(\mathcal{Y}, P)$-Brownian motion and if $1 + \frac{\beta(t,L)}{p(t,L)} \ge 0$ then $\bar{M}_t = M_t - \int_0^t \mu_s ds$ is a $(\mathcal{Y}, P)$-compensated Poisson process with intensity $\lambda_t(1 + \frac{\beta(t,L)}{p(t,L)})$.
Then the wealth process can be written in term of a BSDE in the insider space :

$$\begin{aligned} X_t &= X_T - \int_t^T \underbrace{[(X_s r_s - c_s) + (\pi_s, b_s - r_s \mathbf{1}) + \sigma_s^* \pi_s l_s + \rho_s^* \pi_s \mu_s]}_{-g(s, X_s, Z_s, U_s)} ds \\ &\quad - \int_t^T (\underbrace{\sigma_s^* \pi_s}_{Z_s}, dW_s) - \int_t^T (\underbrace{\rho_s^* \pi_s}_{U_s}, dM_s) \text{ a.s.} \end{aligned}$$

with a new drift $g(s, X_s, Z_s, U_s) = f(s, X_s, Z_s, U_s) - l_s Z_s - \mu_s U_s$.

### 1.4.5 Study of an example of L

For this example, let us take $L = N_T$ : the insider trader knows the number of jumps at final time $T$. In order to simplify the problem, we will consider a one-dimensional process. The law of $L$ is absolutely continuous with respect to the counting measure on $\mathbb{N}$. We obtain a measurable version of the conditional density :

$$p(t,y) = \exp\left(-\int_t^T \lambda_s ds\right) \frac{(\int_t^T \lambda_s ds)^{y-N_t}}{(y-N_t)!} \mathbf{1}_{[N_t;\infty[}(y).$$

Then it is clear that $(\mathbf{H_3})$ does not hold (non equivalence of the laws), whereas $(\mathbf{H}'')$ is verified (law absolutely continuous with respect to the law of $L$). We give an explicit expression of $\beta$ from Proposition 1.4.2 :

$$\beta(s,y) = k_s^y p(s^-, y) \text{ with } k_t^y = \frac{y - N_{t-}}{\int_t^T \lambda_s ds} - 1 \text{ and so } \mu_t = \lambda_t k_t^L = \lambda_t \left(\frac{N_T - N_{t-}}{\int_t^T \lambda_s ds} - 1\right)$$

In the insider space, $\tilde{M}_t = M_t - \int_0^t \lambda_s \left(\frac{N_T - N_{s-}}{\int_s^T \lambda_u du} - 1\right) ds$ is a $\mathcal{Y}_t$-martingale. So $N$ is a $\mathcal{Y}$-Poisson process with intensity $\frac{N_T - N_{t-}}{T-t} \geq 0,\ \forall t \leq\ T$ with respect to $\mathcal{Y}$. Indeed we should enlarge the initial space until $T$. Brownian motion does not change because the conditional density is represented only on the Poisson process, because of the independence between Brownian motion and Poisson process. In this case, the enlarged BSDE is :

$$X_T = \xi + \int_t^T \left(f(s, X_s, Z_s, U_s) - \lambda_s \left(\frac{N_T - N_{s-}}{\int_s^T \lambda_u du} - 1\right)\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s - \int_0^T U_s d\tilde{M}_s$$

The martingale representation theorem that stands in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ allows us to find a solution to the enlarged BSDE, but we do not have any uniqueness result in this case ($\mu$ is not bounded).

## 1.5 Introduction of a Poisson measure

Such a model is interesting to develop because its incompleteness allows us to have hypothesis ($\mathbf{H''}$) without ($\mathbf{H_3}$) (see [11])

### 1.5.1 The model

In our last section we introduce jump processes where jumps are continuous in time and space, by using a Poisson measure.
We consider a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, P)$ with $\mathcal{F}$ the completed filtration generated by both $(W_t)_{t\geq 0}$ and $(N_t)_{t\geq 0}$. $(W_t)_{t\geq 0}$ is a standard $m$-dimensional Brownian motion and $(N_t)_{t\geq 0}$ a point process with random Poisson measure $\mu$ on $\mathbb{R}_+ \times E$ and compensator $\nu(dt, de)$ such that $\{\tilde{\mu}([0,t]\times A) = (\mu-\nu)([0,t]\times A)\}_{t\geq 0}$ is a martingale $\forall A \in \mathcal{E}$ satisfying $\nu([0,t]\times A) < \infty$. $E = \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ with its Borel $\sigma$-algebra $\mathcal{E}$. We can write as $N_t = \int_0^t \int_E \mu(ds, de)$ the point process, so $dN_t = \int_E \mu(dt, de)$. And we denote by $\tilde{N}_t = N_t - \int_0^t \int_E \nu(ds, de)$ the compensated process. We use an additional hypothesis on $\nu$ : $\nu(dt, de) = dt\lambda(de)$, $\lambda$ supposed to be a $\sigma$-finite measure on $(E, \mathcal{E})$ that satisfies : $\int_E (1 \vee |e|^2)\lambda(de) < +\infty$.
Let $\mathcal{H}$ be a finite-dimensional linear space, and let

- $L^2_{\mathcal{F}}([0,1];\mathcal{H})$ be the space of all $(\mathcal{F}_t)$-adapted $\mathcal{H}$-valued square integrable processes
- $L^2_{\mathcal{F},P}([0,1];\mathcal{H})$ be the space of $(\mathcal{F}_t)$-predictable equivalent class versions.

As previously we consider a financial market with one bond and $d$ risky assets, in which asset prices are driven by the following stochastic differential equation ($t \in [0,T], 1 \leq i \leq d$) :

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i(\sigma_s^i, dW_s) + \int_0^t S_{s^-}^i \int_E \phi_s^i(e)\mu(ds, de) \tag{1.19}$$

where $b, \sigma$ and $\phi$ are predictable and globally Lipschitz processes. We rewrite the self-financing equation as a BSDE, and the wealth-investment process is solution of :

$$\begin{aligned} X_t &= X_T - \int_t^T \underbrace{[(X_s r_s - c_s) + (\pi_s, b_s - r_s\mathbf{1})]}_{-f(s,X_s,Z_s)} ds - \int_t^T (\underbrace{\sigma_s^*\pi_s}_{Z_s}, dW_s) \\ &\quad - \int_t^T \int_E \underbrace{(\pi_{s^-}, \phi(s,e))}_{U_s(e)} \mu(ds, de) \text{ a.s.} \end{aligned} \tag{1.20}$$

As in the previous parts, an insider trader has an information $L \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_{T'}, \mathbb{R}^d)$ on the future. $\mathcal{Y}$ still denotes the insider's natural filtration. In both spaces, we study again existence and uniqueness of the admissible wealth-portfolio processes in order to cover a pay-off represented by $\xi = X_T$.

### 1.5.2 Existence and uniqueness

We use here two main articles : G. Barles, R. Buckdahn and E. Pardoux [3], and S. Tang and X. Li [19]. Let us first define several process spaces.

Let $\mathcal{S}^2(\mathcal{F})$ be the set of all $\mathcal{F}_t$-adapted càdlàg $k$-dimensional square-integrable processes $\{Y_t\}_{0\le t\le T}$ such that $\| Y \|_{\mathcal{S}^2(\mathcal{F})}=\| \sup_{0\le t\le T}|Y_t| \|_{L^2(\Omega)}<\infty$.
Let $L^2(W)$ be the set of all $\mathcal{F}_t$-progressively measurable $k\times d$-dimensional processes $\{Z_t\}_{0\le t\le T}$ such that $\| Z \|_{L^2(W)}=\left(E_P\int_0^T|Z_t|^2dt\right)^{1/2}<\infty$.
Let $L^2(\tilde\mu)$ be the set of all mappings $U:\Omega\times[0,T]\times E\to\mathbb{R}$ that are $\mathcal{P}\otimes\mathcal{E}$-measurable ($\mathcal{P}$ being the $\sigma$-algebra of $\mathcal{F}_t$-predictable subsets of $\Omega\times[0,T]$) such that $\| U \|_{L^2(\tilde\mu)}=\left(E_P\int_0^T\int_E U_t(e)^2\nu(de,dt)\right)^{1/2}<\infty$.
Finally we define the functional space $\mathcal{B}^2(\mathcal{F})=\mathcal{S}^2(\mathcal{F})\times L^2(W)\times L^2(\tilde\mu)$. Then we have the following result :

**Theorem 1.5.1** *(G. Barles et al. [3] Theorem 2.1, and S. Tang and X. Li [19] Lemma 2.4) Let $\xi\in(L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P))^k$ and let $f:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}\times L^2(E,\mathcal{E},\nu;\mathbb{R}^k)\to\mathbb{R}^k$ be a $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}_k\otimes\mathcal{B}_{k\times d}\times\mathcal{B}(L^2(E,\mathcal{E},\nu;\mathbb{R}^k))$-measurable function satisfying :*

$$\begin{aligned}\exists K>0,\quad E_P\int_0^T|f_t(0,0,0)|^2dt &< K \\ |f_t(y,z,u)-f_t(y',z',u')| &\le K\left[|y-y'|+|z-z'|+\| u-u' \|\right]\end{aligned}\tag{1.21}$$

*Then there exists a unique triple $(Y,Z,U)\in\mathcal{B}^2(\mathcal{F})$ solution of the BSDE :*

$$Y_t=\xi+\int_t^T f_s(Y_s,Z_s,U_s)ds-\int_t^T Z_sdW_s-\int_t^T\int_E U_s(e)\tilde\mu(ds,de)\ ,\ 0\le t\le T$$

### 1.5.3 BSDE under $(H_3)$ : Adaptation of the Existence and Uniqueness Theorem

Under hypothesis ($\mathbf{H_3}$), in this model with continuous random jumps, we can also adapt the existence theorem, as in the standard model under the same hypothesis on the drift. An insider with information $L$ verifying ($\mathbf{H_3}$) will have an admissible hedging strategy for an option with pay-off $\xi$. We have the following theorem :

**Theorem 1.5.2** *Let $\xi\in(L^2(\Omega,\mathcal{Y}_T,Q))^k$ and let $f$ be a drift function verifying hypothesis (1.21), and such that $E_Q\int_0^T|f_t(0,0,0)|^2dt<\infty$. Then there exists a unique triple $(Y,Z,U)\in\mathcal{B}^2(\mathcal{Y})$ solution of the BSDE :*

$$Y_t=\xi+\int_t^T f_s(Y_s,Z_s,U_s)ds-\int_t^T Z_sdW_s-\int_t^T\int_E U_s(e)\tilde\mu(ds,de)$$

We first prove an important lemma for this proof : a martingale representation theorem in our context, under $(\mathcal{Y},Q)$ :

**Lemme 1.5.1** *Let $\mathcal{H}$ be a finite-dimensional space and $M_t$ an $\mathcal{H}$-valued $(\mathcal{Y}_t)$-adapted square integrable martingale.*
*Then there exists $Z^i(.)\in L^2(W), i=1,..,d$ and $U(.,.)\in L^2(\tilde\mu)$ such that*

$$M_t=M_0+\int_0^t Z_s^i dW^i(s)+\int_0^t\int_E U(s,e)\tilde\mu(ds,de)$$

**Proof of the Lemma :** $\tilde{N}(ds,de) = N(ds,de) - \lambda(de)ds$ is a local martingale. The couple $(W,N)$ is a Brownian-Poisson process couple, and it is an independent increment process (IIP) on space $(\mathcal{F},P)$. So $(W,N)$ is the same Brownian-Poisson process IIP in the enlarged space $(\mathcal{Y},Q)$, from hypothesis $(\mathbf{H_3})$. Then, J. Jacod and A.N. Shiryaev ( [13] th. $III.4.34$) gives us the expected martingale representation theorem for independent increment processes. □

We can now prove the theorem.

**Proof of the theorem :**

For all $(\bar{Y}(.),\bar{Z}(.),\bar{U}(.,.)) \in \mathcal{B}^2(\mathcal{Y})$, we know from the previous lemma that there exists $Z^i(.) \in L^2(W), i=1,..,d$ and $U(.,.) \in L^2(\tilde{\mu})$ such that :

$$E_Q\left[Y_T + \int_0^T f_s(\bar{Y}_s,\bar{Z}_s,\bar{U}_s)ds \middle| \mathcal{Y}_t\right] = \xi + \int_0^t Z_s dW_s + \int_0^t \int_E U_s(e)\tilde{\mu}(ds,de)$$

This implies :

$$\xi = Y_T + \int_0^T f_s(\bar{Y}_s,\bar{Z}_s,\bar{U}_s)ds - \int_0^T Z_s dW_s - \int_0^T \int_E U_s(e)\tilde{\mu}(ds,de)$$

$$\text{We put} \quad Y_t = E_Q\left[Y_T + \int_t^T f_s(\bar{Y}_s,\bar{Z}_s,\bar{U}_s)ds \middle| \mathcal{Y}_t\right]$$

We verify then that for each triple $(\bar{Y}(.),\bar{Z}(.),\bar{U}(.,.))$, the triple $(Y(.),Z(.),U(.,.))$ is characterized by the following equation :

$$Y_t = Y_T + \int_t^T f_s(\bar{Y}_s,\bar{Z}_s,\bar{U}_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T \int_E U_s(e)\tilde{\mu}(ds,de)$$

which implies :

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f_s(\bar{Y}_s,\bar{Z}_s,\bar{U}_s)ds + \int_0^t Z_s dW_s + \int_0^t \int_E U_s(e)\tilde{\mu}(ds,de)$$

The previous equation defines a mapping $\Lambda : (\bar{Y}(.),\bar{Z}(.),\bar{U}(.,.)) \to (Y(.),Z(.),U(.))$. We introduce, for $k := (Y(.),Z(.),U(.,.)) \in \mathcal{B}^2(\mathcal{Y})$ the norm defined by :

$$\parallel k \parallel := \sup_{0\le t\le T} e^{bt} E_Q|Y_t|^2 + \sup_{0\le t\le T} e^{bt}\left[\int_t^T E_Q|Z_s|^2 ds + \int_t^T \int_E E_Q|U_s(e)|^2 \nu(ds,de)\right]$$

with $b > 0$ a constant to be determined later.

To complete the proof, it is sufficient to prove that $\Lambda$ maps $\mathcal{B}^2(\mathcal{Y})$ onto itself, and is a strict contraction for the previous norm.

Let for $i = 1,2$,

$$(\bar{Y}_i(.),\bar{Z}_i(.),\bar{U}_i(.,.)) \in \mathcal{B}^2(\mathcal{Y})$$

and

$$(Y_i(.),Z_i(.),U_i(.,.) := \Lambda(\bar{Y}_i(.),\bar{Z}_i(.),\bar{U}(.,.))$$

Then, using Itô's formula and equation (1.21), we obtain :

$$\begin{aligned}
& E_Q|Y_1(t)-Y_2(t)|^2+E_Q\int_t^T\sum_{i=1}^d|Z_1^i(s)-Z_2^i(s)|^2ds \\
& +E_Q\int_t^T\int_E|U_1(s,e)-U_2(s,e)|^2\nu(ds,de) \\
\leq \; & \bar\gamma K^2E_Q\int_t^T|Y_1(s)-Y_2(s)|^2ds+\frac{1}{\bar\gamma}\left[E_Q\int_t^T|\bar Y_1(s)-\bar Y_2(s)|^2ds\right. \\
& \left.+E_Q\int_t^T\sum_{i=1}^d|\bar Z_1^i(s)-\bar Z_2^i(s)|^2ds+E_Q\int_t^T\int_E|\bar U_1(s,e)-\bar U_2(s,e)|^2\nu(ds,de)\right]
\end{aligned}$$

Which implies, from Gronwall inequality :

$$\begin{aligned}
& E_Q|Y_1(t)-Y_2(t)|^2+E_Q\int_t^T\sum_{i=1}^d|Z_1^i(s)-Z_2^i(s)|^2ds \\
& +E_Q\int_t^T\int_E|U_1(s,e)-U_2(s,e)|^2\nu(ds,de) \\
\leq \; & \frac{1}{\bar\gamma}\left[E_Q\int_t^T|\bar Y_1(s)-\bar Y_2(s)|^2ds+E_Q\int_t^T\sum_{i=1}^d|\bar Z_1^i(s)-\bar Z_2^i(s)|^2ds\right. \\
& \left.+\,E_Q\int_t^T\int_E|\bar U_1(s,e)-\bar U_2(s,e)|^2\nu(ds,de)\right] \\
& +K^2\int_t^T e^{\bar\gamma K^2(s-t)}\left[E_Q\int_t^T|\bar Y_1(\tau)-\bar Y_2(\tau)|^2d\tau+E_Q\int_t^T\sum_{i=1}^d|\bar Z_1^i(\tau)-\bar Z_2^i(\tau)|^2d\tau\right. \\
& \left.+E_Q\int_t^T\int_E|\bar U_1(\tau,e)-\bar U_2(\tau,e)|^2\nu(d\tau,de)\right]
\end{aligned}$$

where $\bar\gamma$ is a positive real number. So we conclude :

$$\parallel(Y_1-Y_2,Z_1-Z_2,U_1-U_2)\parallel\leq\alpha\parallel(\bar Y_1-\bar Y_2,\bar Z_1-\bar Z_2,\bar U_1-\bar U_2)\parallel$$

$$\text{with } \alpha=\max\{\frac{2}{b\bar\gamma},\frac{4K^2}{\bar\gamma b(b-\bar\gamma K^2)},\frac{2K^2}{b-\bar\gamma K^2}\}$$

which completes the proof, with an appropriate choice of $\bar\gamma$ and $b$ such that the constant $\alpha$ is strictly majored by 1. It means that $\bar\gamma$ and $b$ has to verify $\bar\gamma(1+\bar\gamma/2)<K^{-2}$ and $b>2/\bar\gamma$. □

Thanks to this theorem, we have a similar result as in the two other models : under $(\mathbf{H_3})$ we have existence and uniqueness of the solution of the enlarged BSDE. Moreover, as before, if the problem is well defined in both spaces, both solutions are the same.

## Acknowledgements

I am deeply indebted to Axel Grorud for this paper. He guided my first steps into research, and I would like to express here all my thanks and gratefulness, together with my regrets for the loss of a most respected superviser. I am also very thankful to the anonymous referee for his careful reading and his help to improve this paper.

## Conclusion

Successively in a continuous process model, in a discrete jump process model and finally in a continuous jump process model, we have studied and compared the strategies of an insider trader and a non informed agent. Under certain hypotheses we proved existence and uniqueness of solutions for their hedging strategies, and arbitrage free model for the insider trader. In fact, with correct hypotheses on the information on a complete initial market, the insider market is viable, and even pseudo-complete.

A limit to these models can be raised : we have only considered small investors. It is perhaps not relevant enough. A further work would be to consider an option hedging problem in a jump process model with a large investor. This would lead us to use Forward-Backward stochastic differential equations, instead of BSDEs.

What is the practical use of such results ? It seems difficult to concretely apply them at the moment. However such comparison results between insider and non insider investment strategies could be interesting to establish statistical tests for the detection of insider traders. Applied to market datas, it could help organisms like French A.M.F. determining whether an agent is informed or not. Unfortunately, theories are not yet enough performing to compute such tests, and A.M.F.'s monitoring agents do not use so specialized statistical tests.

# Bibliographie

[1] Amendinger, J., 1999, Initial enlargement of filtrations and additional information of financial markets, Doctoral Thesis, T-U. Berlin

[2] Amendinger, J., 2000, Martingale Representation Theorems for Initially Enlarged Filtrations, Stochastic Processes and their Applications, 89, p. 101–116

[3] Barles, G., Buckdahn, R., Pardoux, E., 1997, BSDE's and integral-partial differential equations, Stochastics and Stochastic Reports, Vol. 60, pp. $57-83$.

[4] Brémaud, P., Yor, M., Changes of filtrations and of probability measures. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 45 (1978), no. 4, 269–295

[5] Chaleyat-Maurel, M., Jeulin, T., 1985, Grossissement gaussien de la filtration brownienne, Séminaire de Calcul stochastique, $1982-83$, Paris, Lecture Notes in Mathematics 1118, $59-109$, Springer-Verlag

[6] El Karoui, N., Peng, S., Quenez, M.C., 1997, Backward Stochastic Differential Equations in Finance, Mathematical Finance, Vol 7, $1,1-71$.

[7] Grorud, A., 2000, Asymmetric information in a financial market with jumps, Int. Journal of Theor. and Applied Fin., vol 3, 4, $641-659$.

[8] Grorud, A., Pontier, M., 1997, Comment détecter le délit d'initié ? C.R.Acad.Sci.Paris, t.324, Serie I, p.$1137-1142$, Probabilités.

[9] Grorud, A., Pontier, M., 1998, Insider trading in a continuous time market model, IJTAF, Vol 1, 3, $331-347$.

[10] Grorud, A., Pontier, M., 1999, Probabilités neutres au risque et asymétrie d'information, C.R.Acad.Sci.Paris, t.329, Série I, p.$1009-1014$, Probabilités

[11] Grorud, A., Pontier, M., 2001 Asymmetrical information and incomplete markets, Int. Journal of Theor. and Applied Fin., Vol 4, No2,$285-302$

[12] Jacod, J., 1985, Grossissement Initial, Hypothèse H' et Théorème de Girsanov, Séminaire de calcul stochastique $1982-83$, Paris, Lecture Notes in Mathematics 1118, $15-35$, Springer-Verlag

[13] Jacod, J., Shiryaev, A.N., 2003, Limit Theorems for Stochastic Processes, Springer-Verlag, Berlin, second edition

[14] Karatzas, I., Shreve, S.E., 1991, Brownian motion and stochastic calculus, $2^{nd}$ edition, Graduate Texts in Mathematics 113, Springer-Verlag

[15] Karatzas, I., Shreve, S.E., 1998, Methods of Mathematical Finance, Applications of Mathematics (New York) 39, Springer-Verlag New York

[16] Meyer, P.A, 1978, Sur un théorème de J. Jacod, Sémin. Probab. XII, Univ. Strasbourg 1976/77, Lect. Notes Math. 649, 57 – 60

[17] Pardoux, E., 1999, BSDE's, weak convergence and homogeneisation of semilinear PDE's, Nonlinear analysis, differential equations and control (Montreal, QC, 1998), 503–549, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht

[18] Pardoux, E., Peng, S., 1990, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Syst. Control Lett. 14, 55 – 61

[19] Tang, S., Li, X., sept. 1994 Necessary conditions for optimal control of stochastic systems with random jumps, SIAM J. Control and Optimization, vol 32 n°5.

# Deuxième partie

# EDSPR et grossissement initial de filtration

Dans cette partie, nous étudions un modèle d'investisseur initié et influent, qui cherche à couvrir une option à un horizon fini donné. Le modèle est le même que le modèle du chapitre 1, mais l'agent initié est supposé pouvoir influer sur les prix du marché.

Nous nous plaçons dans ce chapitre dans un cadre de processus continus. Nos résultats dans le chapitre 1 ont montré que dans le cas d'un modèle sans influence, les stratégies de couverture sont les mêmes pour l'agent informé et pour l'agent non informé. Cependant, cette modélisation n'est pas la plus réaliste : il est communément reconnu que certains acteurs sur le marché sont influents, soit par leur investissement de grande ampleur, soit par leur notoriété par exemple, et intervient alors un phénomène de "suiveurs". Ainsi, les prix du marché peuvent être influencés par certains grands investisseurs du marché. Il est aussi plutôt naturel de penser que si des personnes ont des informations supplémentaires, ce ne sont en général pas des petits investisseurs. C'est pourquoi nous considérons ici un modèle avec un grand investisseur informé, qui veut couvrir sur le marché une option. Nous choisissons ici de modéliser cette couverture par une équation différentielle stochastique rétrograde, couplée cette fois-ci, contrairement au premier chapitre (cf. A. Eyraud-Loisel[EL05]), avec l'équation progressive des prix. Du fait de la présence d'une information supplémentaire, nous avons donc à résoudre une EDSPR (Equation Différentielle Stochastique Progressive Rétrograde) sous une filtration initialement grossie.

Dans le paragraphe 2.1, nous posons le problème financier en termes d'EDSPR et de grossissement de filtration, et rappelons certains résultats utiles dans notre cadre.

Dans le paragraphe 2.2, nous donnons, sous certaines hypothèses, un théorème d'existence et d'unicité de solution pour une EDSPR sous une filtration grossie initialement, pour laquelle nous nous inspirons fortement de la démarche de E. Pardoux et S. Tang [PT99]. Nous montrons ainsi que sous certaines conditions, l'agent influent initié a une unique stratégie de couverture et nous donnons une interprétation financière de ce résultat, en terme de complétude du marché initié.

Enfin, dans le chapitre 3, nous posons le problème de la comparaison, dans ce marché, de la stratégie de couverture de l'agent initié, et de celle d'un petit investisseur, non informé. Nous sommes dans un cadre de marché incomplet du point de vue de l'investisseur non informé, du fait de son manque d'information.

Dans le dernier paragraphe 3.6 de cette partie, nous présentons un exemple d'influence dans lequel toutes les hypothèses de notre modèle sont vérifiées, et nous exprimons les différentes stratégies de couverture des agents selon les formulations développées auparavant.

# Chapitre 2

# Théorème d'existence et d'unicité de solutions d'EDSPR sous filtration grossie

# 2.1 Présentation du problème

## 2.1.1 Modèle de marché brownien

Soit $W$ un mouvement brownien standard de dimension $k$, et $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, avec $\Omega = C([0,T];\mathbf{R}^k)$, où $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ désigne la filtration naturelle du mouvement brownien $W$, complétée des ensembles de $P$-mesure nulle. On considère un marché financier avec $k$ actifs risqués, et un actif sans risque. La dynamique de prix des actifs est influencée par la richesse et la stratégie d'un agent du marché, appelé grand investisseur, ou investisseur influent. On note $X_t$ la richesse à l'instant $t$ de l'agent, $\pi_t$ son portefeuille et $c_t$ sa consommation instantanée. Les prix des actifs risqués sont donc décrits par la diffusion suivante :

$$\begin{aligned} dP_t^i &= b_i(t, P_t, X_t, \pi_t)dt + (\sigma_i(t, P_t, X_t, \pi_t), dW_t) \\ P_0^i &= p_i > 0, \forall 1 \leq i \leq k \end{aligned} \tag{2.1}$$

où l'on suppose les coefficients de la forme :

$$\begin{aligned} b_i(t, P_t, X_t, \pi_t) &= b_i'(t, P_t, X_t, \pi_t).P_t^i \\ \sigma_i(t, P_t, X_t, \pi_t) &= \sigma_i'(t, P_t, X_t, \pi_t).P_t^i \end{aligned}$$

et le placement sans risque évolue selon l'équation :

$$dP_t^0 = P_t^0 r(t, X_t, \pi_t)dt \ , \ P_0^0 = 1. \tag{2.2}$$

Les fonctions $b_i', \sigma_i'$ et $r$ définies sur $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ sont supposés $\mathcal{F}$-adaptées à $p, x, z$ fixés, et à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k\times k}, \mathbb{R}$. Les hypothèses sur ces fonctions seront précisées en 2.2.
L'agent financier cherche à déterminer sa richesse initiale strictement positive et $\mathcal{F}_0$-adaptée $X_0$ au temps $t = 0$ et son portefeuille, pour couvrir une option d'échéance $T$.
Sa consommation $c$ est un processus positif $\mathcal{F}$-adapté tel que $\int_0^T c_s ds < \infty$, $\mathbb{P}$-p.s.
Il possède en outre $\theta^i$ parts du $i$-ème actif. Sa richesse au temps $t$ est alors

$$X_t = \sum_{i=0}^{k} \theta_t^i P_t^i. \tag{2.3}$$

La part de son portefeuille dans l'actif $i$ est : $\pi_t^i = \theta_t^i P_t^i$, pour $i = 1, .., k$.
$\theta$ et $\pi$ sont également des processus $\mathcal{F}$-adaptés.
On considère l'hypothèse d'autofinancement standard :

$$dX_t = \sum_{i=0}^{k} \theta_t^i dP_t^i - c_t dt \tag{2.4}$$

c'est-à-dire que la consommation est uniquement financée par les profits réalisés par le portefeuille, et non par des apports extérieurs.

Alors, la richesse de l'agent satisfait l'équation suivante :

$$\begin{aligned} dX_t = \theta_t^0 P_t^0 r(t, X_t, \pi_t)dt + \sum_{i=0}^{k} \theta_t^i b_i(t, P_t, X_t, \pi_t)dt \\ + \sum_{i=0}^{k} \theta_t^i (\sigma_i(t, P_t, X_t, \pi_t), dW_t) - c_t dt \end{aligned} \tag{2.5}$$

On remarque que $\theta_t^0 P_t^0 = X_t - \sum_1^k \pi_t^i$.
Puis en notant $\pi_t = (\pi_t^i, i = 1, .., k)$ le portefeuille de gestion (ou stratégie de gestion), la richesse s'écrit comme solution de l'équation différentielle stochastique suivante (les prix vérifient $P^i > 0$, $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement d'après la forme exponentielle de l'équation différentielle stochastique de diffusion de prix 2.1 et 2.2) :

$$\begin{aligned} dX_t &= \left( (X_t - \sum_{i=0}^{k} \pi_t^i) r(t, X_t, \pi_t) - c_t \right) dt + \sum_{i=1}^{k} \pi_t^i b_i'(t, P_t, X_t, \pi_t)dt \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \pi_t^i < \sigma_i'(t, P_t, X_t, \pi_t), dW_t > \end{aligned}$$

puisque l'on a supposé les coefficients de la forme :

$$\begin{aligned} b_i(t, P_t, X_t, \pi_t) &= b_i'(t, P_t, X_t, \pi_t).P_t^i \\ \sigma_i(t, P_t, X_t, \pi_t) &= \sigma_i'(t, P_t, X_t, \pi_t).P_t^i \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} dX_t &= (X_t r(t, X_t, \pi_t) - c_t)dt + < \pi_t, b'(t, P_t, X_t, \pi_t) - r(t, X_t, \pi_t).\mathbb{I} > dt \\ &\quad + < \pi_t, \sigma(t, P_t, X_t, \pi_t)dW_s > \end{aligned}$$

D'où en intégrant entre $t$ et $T$,

$$\begin{aligned} X_T - X_t &= \int_t^T [X_s r(s, X_s, \pi_s) - c_s + < \pi_s, b'(s, P_s, X_s, \pi_s) - r(s, X_s, \pi_s).\mathbb{I} >] \, ds \\ &\quad + \int_t^T < \pi_s, \sigma'(s, P_s, X_s, \pi_s)dW_s > \end{aligned}$$

Soit

$$X_t = X_T - \int_t^T f(s, P_s, X_s, Z_s)ds - \int_t^T < Z_s, dW_s >$$

avec

$$\begin{aligned} f(s, P_s, X_s, Z_s) &= X_s r(s, X_s, \pi_s) - c_s + < \pi_s, b'(s, P_s, X_s, \pi_s) - r(s, X_s, \pi_s).\mathbb{I} > \\ &= X_s r(s, X_s, Z_s) - c_s + < {\sigma'^*}^{-1} Z_s, b'(s, P_s, X_s, Z_s) - r(s, X_s, Z_s).\mathbb{I} > \\ \text{et } Z_s &= \sigma'^*(s, X_s, P_s, \pi_s)\pi_s \end{aligned}$$

On obtient donc un couplage entre l'équation progressive des prix et l'équation rétrograde de la richesse,

$$\left\{\begin{array}{l} P_t = P_0 + \int_0^t b(s, P_s, X_s, Z_s)ds + \int_0^t < \sigma(s, P_s, X_s, Z_s), dW_s > \\ X_t = X_T - \int_t^T f(s, P_s, X_s, Z_s)ds - \int_t^T < Z_s, dW_s > \end{array}\right. \tag{2.6}$$

les hypothèses restant bien sûr à préciser pour qu'un tel système admette une solution forte. C'est tout l'objet de la section 2.2.

Nous nous intéressons à un problème de couverture d'option de "pay-off" $\xi$ (bénéfice terminal de l'option), ou plus généralement d'un objectif $\xi$, à atteindre à l'échéance $T$. On est donc face à un problème de duplication : on cherche la richesse initiale $X_0$ et le portefeuille $\pi$ tels que $X$ solution de (2.6) satisfait l'objectif de couverture

$$X_T = \xi = g(P_T).$$

Par exemple, pour une option call européenne du point de vue du vendeur, il faut être capable de couvrir le bénéfice de l'acheteur de l'option $\xi = (P_T - K)_+$. Nous nous intéresserons pour l'instant à des objectifs de couverture à échéance fixée. Pour le cas des options américaines, échéance variable (temps d'arrêt optimal), nous en ferons l'étude plus tard.

### 2.1.2 Investisseur influent informé

L'investisseur influent considéré dans le modèle décrit dans le paragraphe précédent est maintenant supposé être initié : il possède à l'instant initial $t = 0$ une information $L \in \mathcal{F}_{T'}$, qu'il va chercher à exploiter. On suppose que cette information porte sur un instant postérieur à l'échéance de la couverture : $T < T'$. Cette information est $\mathcal{F}_{T'}$-mesurable : elle sera publique au temps $T'$. Cela signifie que l'information dont dispose l'agent informé influent à l'instant $t < T'$ n'est plus seulement $\mathcal{F}_t$ mais est plus importante : elle a été augmentée de l'information $L$. Pour modéliser la prise en compte de cette nouvelle information dans l'espace vu par l'agent initié, nous augmentons la filtration de départ avec $L$, et nous obtenons ainsi la filtration de l'espace de probabilité de l'agent influent initié :

$$\mathcal{Y}_t := \bigcap_{s>t} (\mathcal{F}_s \vee \sigma(L)) \tag{2.7}$$

C'est le grossissement initial de la filtration brownienne (voir Jacod [JAC85]). On parle d'information forte initiale.

Nous travaillerons sous les hypothèses suivantes (voir T. Jeulin [JEU79, JEU80a], A. Grorud et M. Pontier [GP98] et A. Eyraud-Loisel [EL05](chapitre 1)) qui sont les hypothèses usuelles permettant le grossissement initial de la filtration brownienne :

**Hypothèse 3** (**H**$''$) *La loi conditionnelle de $L$ sachant $\mathcal{F}_t$ est absolument continue par rapport à la loi de $L$, pour tout $t < T'$.*

Dans ce cas, toute $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale (le brownien $W_t$ en particulier) est une $(\mathcal{Y}_t, \mathbb{P})$-semi-martingale dont la décomposition est :

$$W_t = B_t + \int_0^t l_s ds \tag{2.8}$$

où $B_t$ est une $(\mathcal{Y}_t, \mathbb{P})$-martingale (un $\mathcal{Y}$-brownien dans le cas où $W_t$ est un brownien), et $l$ est $\mathcal{Y}$-adaptée.
Une hypothèse plus forte que $(\mathbf{H}'')$ est l'hypothèse suivante, sous laquelle nous nous placerons :

**Hypothèse 4** $(\mathbf{H_3})$ *Il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que sous $\mathbb{Q}$, $\mathcal{F}_t$ et $\sigma(L)$ sont indépendants, pour tout $t < T'$.*

Cette hypothèse $(\mathbf{H_3})$ est équivalente à l'hypothèse

**Hypothesis 4** $(\mathbf{H_J})$ *La loi conditionnelle de $L$ sachant $\mathcal{F}_t$ est équivalente à la loi de $L$, pour tout $t < T'$.*

De plus, sous $(\mathbf{H_3})$, une propriété remarquable est que $W_t$ est un $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q})$-mouvement brownien. On choisit $\mathbb{Q}$ telle que pour tout $t \leq T < T'$, on a $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$ et on la définit par $\mathbb{Q} = \frac{1}{q(T,L)}\mathbb{P}$ sur $\mathcal{Y}_T$. Pour une référence de l'existence d'une telle probabilité et de l'équivalence entre ces deux dernières hypothèses $(\mathbf{H_3})$ et $(\mathbf{H_J})$, voir les travaux de T. Jeulin [JEU80a], J. Amendinger [AME99], A. Grorud et M. Pontier [GP98]. Citons par exemple le lemme 3.1 de A. Grorud et M. Pontier [GP98], tiré de T. Jeulin où cette propriété est démontrée.

## 2.2 Solution d'EDSPR grossie

### 2.2.1 EDSPR à résoudre, hypothèses

Le problème mathématique posé est donc de résoudre le système différentiel stochastique progressif-rétrograde (EDSPR) suivant dans l'espace grossi $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$, puisque sous l'hypothèse $(\mathbf{H_3})$ le mouvement brownien $W$ est toujours un mouvement brownien sous la nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_t = P_0 + \int_0^t b(s, P_s, X_s, Z_s)ds + \int_0^t < \sigma(s, P_s, X_s, Z_s), dW_s > \\ X_t = g(P_T) - \int_t^T f(s, P_s, X_s, Z_s)ds - \int_t^T < Z_s, dW_s > \end{array} \right. \tag{2.9}$$

avec $W$ un $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q})$-mouvement brownien, $P_0 \in \mathcal{Y}_0$ et $\xi = g(P_T) \in L^2(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$.

La difficulté pour résoudre l'EDSPR est liée au couplage des deux équations différentielles stochastiques, qui entraîne une dépendance circulaire entre l'équation progressive des prix et l'équation rétrograde de la richesse, qui ne peuvent pas être résolues séparément. Pardoux et Tang [PT99] montrent l'existence d'une unique solution dans le cas de la filtration naturelle du brownien, et donc d'une $\sigma$-algèbre initiale triviale, ce qui n'est pas le cas ici. Nous allons donc adapter la preuve au cas qui nous intéresse.

Notons ici que, contrairement au cas du chapitre 1 où les coefficients de la diffusion des prix étaient adaptés à la filtration brownienne, et où donc $\mathcal{F}^P = \mathcal{F}^W$, nous recherchons ici une richesse $X$ et un portefeuille $Z$, $\mathcal{Y}$-adaptés. Donc les coefficients de la diffusion de $P$ ne sont plus $\mathcal{F} = \mathcal{F}^W$-adapté, puisqu'ils dépendent de $X$ et $Z$. Donc $\mathcal{F}^P \neq \mathcal{F}$. $\mathcal{F}^P \subset \mathcal{Y}$ : l'information transmise par l'observation des prix "révèle" une partie de l'information supplémentaire.

Si $\mathbb{H}$ est un espace euclidien, on note $M^2(0, T; \mathbb{H})$ l'ensemble des processus $\mathcal{Y}$-progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{H}$, $\{u(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ tels que

$$\parallel u(.) \parallel_0 := \left( E_{\mathbb{Q}} \int_0^T |u(s)|^2 \right)^{1/2} < +\infty$$

Pour tout processus de $M^2(0, T; \mathbb{R}^d)$, notons également

$$\parallel u(.) \parallel_\lambda := \left( E_{\mathbb{Q}} \int_0^T e^{-\lambda s} |u(s)|^2 \right)^{1/2} < +\infty$$

Toutes ces normes indexées par $\mathbb{R}$ sont équivalentes.

On note $\mathcal{S}^2_{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des processus $X$ $\mathcal{Y}$-progressivement mesurables tels que

$$\|X\|^2 := E_{\mathbb{Q}} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right] < +\infty$$

et $\mathcal{S}^2_{\mathbb{Q},c}$ le sous-espace de $\mathcal{S}^2_{\mathbb{Q}}$ formé des processus continus, identifié à son quotient par la relation d'indistinguabilité.

On cherche une **solution forte** du système (2.9), c'est-à-dire une solution $\mathcal{Y}$-adaptée $(P_t, X_t, Z_t)_{0\leq t\leq T}$ telle que :

$$E_{\mathbb{Q}} \int_0^T \parallel Z_t \parallel^2 dt < +\infty, \tag{2.10}$$

c'est-à-dire on cherche un portefeuille admissible qui atteigne l'objectif.

$b$, $\sigma$, $f$ et $g$ sont supposées vérifier les hypothèses suivantes (de $(A1)$ à $(A8)$), qui sont les hypothèses de Pardoux-Tang garantissant l'existence d'une unique solution dans le cas où il n'y a pas d'information supplémentaire initiale (c'est-à-dire lorsque la tribu initiale est triviale) :

(A1) $\sigma$ est inversible $dt \times d\mathbb{P}$-presque sûrement. De plus, $\sigma'$ et $\sigma'^{-1}(b' - r)$ sont supposés bornés.

(A2) Les fonctions

$$\begin{array}{rcl} b & : & \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & : & \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k \\ \sigma & : & \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times k} \\ g & : & \Omega \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

sont continues par rapport aux variables $p, x, z$ dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$, pour tout $(\omega, t) \in \Omega \times [0,T]$.

(A3) $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t, p, p_1, p_2, x, x_1, x_2, z$, $\mathbb{P}$-p.s. :

$$\begin{array}{rcl} < b(t,p_1,x,z) - b(t,p_2,x,z), p_1 - p_2 > & \leq & \lambda_1 |p_1 - p_2|^2 \\ < f(t,p,x_1,z) - f(t,p,x_2,z), x_1 - x_2 > & \leq & \lambda_2 |x_1 - x_2|^2 \end{array}$$

(A4) $b$ est uniformément lipschtizienne par rapport aux variables $x$ et $z$, et au plus linéairement croissante en $p$, et $f$ est uniformément lipschtizienne par rapport aux variables $p$ et $z$, et au plus linéairement croissante en $x$ : $\exists k, k_i$ tels que $\mathbb{P}$-p.s. $\forall t, p_i, x_i, z_i$

$$\begin{array}{rcl} |b(t,p,x_1,z_1) - b(t,p,x_2,z_2)| & \leq & k_1|x_1 - x_2| + k_2 \parallel z_1 - z_2 \parallel \\ |b(t,p,x,z)| & \leq & |b(t,0,x,z)| + k(1 + |p|) \\ |f(t,p_1,x,z_1) - f(t,p_2,x,z_2)| & \leq & k_3|p_1 - p_2| + k_4 \parallel z_1 - z_2 \parallel \\ |f(t,p,x,z)| & \leq & |f(t,p,0,z)| + k(1 + |x|) \end{array}$$

(A5) $\sigma$ est uniformément lipschtizienne par rapport à $p$, $x$ et $z$ : $\exists k_i$ tels que $P$-p.s. $\forall t, p_i, x_i, z_i$

$$\parallel \sigma(t,p_1,x_1,z_1) - \sigma(t,p_2,x_2,z_2) \parallel^2 \leq k_5^2 |p_1 - p_2|^2 + k_6^2 |x_1 - x_2|^2 + k_7^2 \parallel z_1 - z_2 \parallel^2$$

(A6) $g$ uniformément lipschtizienne par rapport à $p$ : $\exists k_8$ tel que $\mathbb{P}$-p.s. $\forall p_i$

$$|g(p_1) - g(p_2)|^2 \leq k_8^2 |p_1 - p_2|^2$$

(A7) $\forall p,\ x,\ z,\ b(.,p,x,z),\ f(.,p,x,z)$ et $\sigma(.,p,x,z)$ sont des processus $\mathcal{F}$-adaptés et $g(p)$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable. De plus on suppose :

$$\begin{aligned} & E_{\mathbb{P}} \int_0^T |b(s,0,0,0)|^2 ds + E_{\mathbb{P}} \int_0^T |f(s,0,0,0)|^2 ds \\ & + E_{\mathbb{P}} \int_0^T \parallel \sigma(s,0,0,0) \parallel^2 ds + E_{\mathbb{P}} |g(0)|^2 < +\infty \end{aligned} \tag{2.11}$$

(A8) $b$ est uniformément lipschitzienne en la variable $p$ : $\exists k_9$ tel que $\mathbb{P}$-p.s. $\forall t, p_i, x, z$

$$|b(t,p_1,x,z) - b(t,p_2,x,z)|^2 \leq k_9^2 |p_1 - p_2|^2$$

**Remarques** :

- L'hypothèse $(A1)$ permet de garantir

$$E_{\mathbb{P}} \left( \exp \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s'^2 ds \right) < +\infty$$

  ce qui garantit, puisque le prix $P$ est une exponentielle de Doléans de $\sigma' \tilde{W}$ sous une probabilité neutre au risque $\tilde{\mathbb{P}}$, d'avoir une vraie martingale, puisque martingale locale uniformément intégrable, et de plus, cela assure que les prix sont strictement positifs $\mathbb{P}$-p.s. (voir D. Lépingle et J. Mémin [LM78] théorème II-2 p.181, et théorème III-7 p.190).

- De plus, également grâce à l'hypothèse $(A1)$, $\mathcal{E}(-\sigma'^{-1}(b' - r\mathbb{1}).W)$ est $\mathbb{P}$-intégrable. Cela permet d'avoir l'existence d'une probabilité neutre au risque (arguments classiques entraînant l'absence d'opportunité d'arbitrage, donc marché viable) en l'absence d'information supplémentaire, voir par exemple F. Delbaen et W. Schachermayer [DS99].

- Notons que tout ceci est également vrai sous la probabilité $\mathbb{Q}$.

- Nous n'aurons besoin de l'hypothèse $(A8)$ qu'à partir du paragraphe 2.2.4. En effet, dans les démonstrations des lemmes suivants, nous n'utilisons que les hypothèses $(A1)$ à $(A7)$.

Toutes ces hypothèses garantissent l'existence dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ d'un unique portefeuille (seulement dans certains cas de couplage des deux équations, voir E. Pardoux et S. Tang [PT99], ainsi que les conditions $(I1)$ à $(I3)$ définies plus loin) dans le cas où l'investisseur influent n'a pas d'information supplémentaire. Avec la nouvelle information $L$, sur l'espace $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$, existe-t-il encore une unique solution au système d'équations ?

Les hypothèses $(A1)$ à $(A8)$ se retrouvent toutes vérifiées, sauf $(A7)$, dans l'espace élargi $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$, sous la nouvelle filtration $\mathcal{Y}$ et la nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$. En effet, comme $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, les assertions vraies $\mathbb{P}$-p.s. le restent $\mathbb{Q}$-p.s. De plus, comme $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{Y}_t$, les processus $\mathcal{F}_t$-adaptés restent $\mathcal{Y}_t$-adaptés. Donc dans les hypothèses $(A1)$ à $(A6)$ on peut remplacer $\mathbb{P}$ par $\mathbb{Q}$. Dans $(A7)$, les processus $\mathcal{F}$-adaptés sont a fortiori $\mathcal{Y}$-adaptés, et il faut juste ajouter une nouvelle hypothèse remplaçant (2.11) puisque l'intégrabilité sous $\mathbb{P}$ n'entraîne pas l'intégrabilité sous $\mathbb{Q}$. On suppose donc en plus des hypothèses précédentes :

$$\begin{aligned} (A7') \qquad & E_{\mathbb{Q}} \int_0^T |b(s,0,0,0)|^2 ds + E_{\mathbb{Q}} \int_0^T |f(s,0,0,0)|^2 ds \\ & + E_{\mathbb{Q}} \int_0^T \parallel \sigma(s,0,0,0) \parallel^2 ds + E_{\mathbb{Q}} |g(0)|^2 < +\infty \end{aligned} \tag{2.12}$$

**Remarque :** Comme c'était le cas déjà dans le chapitre 1, dans notre exemple d'application financière, comme tous les paramètres sont nuls en 0, cette condition est toujours vérifiée. Cependant dans un cadre plus général, cette hypothèse reste indispensable.

### 2.2.2 Espace des solutions

Notons ici que nous donnons les résultats suivants (lemmes et théorèmes d'existence et d'unicité de solutions de notre EDSPR élargie) en tout généralité de dimension, pour des processus $(P_t, X_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ à valeurs respectives dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{m\times d}$. Dans notre cadre d'application, nous avons vu auparavant $n = k$, $m = 1$ et $d = k$, ce que nous appliquerons lorsque nous en aurons besoin, mais les résultats énoncés le sont dans le cas général.

Même dans notre cas de filtration grossie, où la $\sigma$-algèbre initiale n'est pas triviale, on a le résultat suivant, identique au résultat pour une filtration brownienne :

**Lemme 2.2.1** *Si $(P_t, X_t, Z_t)_{0\le t\le T}$ est une solution forte de l'EDSPR (2.9) (c'est-à-dire vérifiant (2.10)), si $E|X_0|^2 < \infty$ et si les hypothèses (A1) à (A7) et (A7') sont vérifiées, alors*

$$E_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\le t\le T}|P_t|^2 + \sup_{0\le t\le T}|X_t|^2\right) < +\infty \tag{2.13}$$

Autrement dit, toute solution forte de l'EDSPR (2.9) sous nos hypothèses appartient de fait à $\mathcal{S}^2(0,T;\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)\times M^2(0,T;\mathbb{R}^{m\times d})$, et donc en particulier appartient à $M^2(0,T;\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d})$.

**Preuve :**
Soit $\lambda$ un réel. On applique le lemme d'Itô à $e^{-\lambda t}|P_t|^2$ entre 0 et $t$, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned}e^{-\lambda t}|P_t|^2 = |P_0|^2 - \lambda\int_0^t e^{-\lambda s}|P_s|^2 ds + \int_0^t e^{-\lambda s}\sigma^2(s,P_s,X_s,Z_s)ds\\ +2\int_0^t P_s e^{-\lambda s} b(s,P_s,X_s,Z_s)ds + 2\int_0^t P_s e^{-\lambda s}\sigma(s,P_s,X_s,Z_s)dW_s\end{aligned} \tag{2.14}$$

On prend l'espérance du sup de l'expression obtenue. On majore ensuite les termes à accroissements finis en utilisant les hypothèses de Lipschitz, de monotonie et de croisance linéaire (A1) à (A7) et (A7'). Cela nous permet d'obtenir, $\forall\varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned}&E_{\mathbb{Q}}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(e^{-\lambda t}|P_t|^2 + \lambda\int_0^t e^{-\lambda s}|P_s|^2 ds\right)\right] \le E_{\mathbb{Q}}|P_0|^2 + 2\lambda_1 E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}|P_s|^2 ds\\ &+(1+\varepsilon)E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}\left(k_5^2|P_s|^2 + k_6^2|X_s|^2 + k_7^2 \parallel Z_s \parallel^2\right)ds\\ &+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}|\sigma(s,0,0,0)|^2 ds\\ &+2E_{\mathbb{Q}}\int_0^T |P_s|e^{-\lambda s}(k_1|X_s| + k_2 \parallel Z_s \parallel)ds + 2E_{\mathbb{Q}}\int_0^T |P_s|e^{-\lambda s}|b(s,0,0,0)|\\ &+2E_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t P_s e^{-\lambda s}\sigma(s,P_s,X_s,Z_s)dW_s\right|\right)\end{aligned}$$

Le terme martingale se majore grâce à l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy pour $p = 1/2$ puis les hypothèses de Lipschitz sur $\sigma$ :

$$\begin{aligned}
&2E_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t P_s e^{-\lambda s}\sigma(s,P_s,X_s,Z_s)dW_s\right|\right)\\
&\le 8\sqrt{2}E_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T P_s^2 e^{-2\lambda s}\sigma(s,P_s,X_s,Z_s)^2 ds\right)^{1/2}\\
&\le 8\sqrt{2}E_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\le s\le T}\left|P_s e^{-\frac{\lambda}{2}s}\right|\left(e^{-\lambda s}\sigma(s,P_s,X_s,Z_s)^2 ds\right)^{1/2}\right)\\
&\le 8\sqrt{2}\varepsilon E_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\le s\le T}|P_s|^2 e^{-\lambda s}\right)+\frac{8\sqrt{2}}{\varepsilon}(1+\frac{1}{\varepsilon})E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}|\sigma(s,0,0,0)|^2 ds\\
&\quad+\frac{8\sqrt{2}}{\varepsilon}(1+\varepsilon)E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}\left(k_5^2|P_s|^2+k_6^2|X_s|^2+k_7^2\parallel Z_s\parallel^2\right)ds
\end{aligned}$$

Ensuite, grâce à des majorations usuelles de sommes de carrés, cela nous donne $\forall\varepsilon, C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ :

$$\begin{aligned}
&(1-8\sqrt{2}\varepsilon)E_{\mathbb{Q}}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(e^{-\lambda t}|P_t|^2+\lambda\int_0^t e^{-\lambda s}|P_s|^2 ds\right)\right]\\
&\le E_{\mathbb{Q}}|P_0|^2+\frac{2}{\varepsilon}E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}|b(s,0,0,0)|^2 ds\\
&+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(1+\frac{8\sqrt{2}}{\varepsilon}\right)E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}|\sigma(s,0,0,0)|^2 ds\\
&+\left[2\lambda_1+8\sqrt{2}(1+\varepsilon)\varepsilon^{-1}k_5^2+k_1C_1^{-1}+k_2C_2^{-1}+(1+\varepsilon)k_5^2+2\varepsilon\right]E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}|P_s|^2 ds\\
&+\left[8\sqrt{2}(1+\varepsilon)\varepsilon^{-1}k_6^2+k_1C_1+(1+\varepsilon)k_6^2\right]E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}|X_s|^2 ds\\
&+\left[8\sqrt{2}(1+\varepsilon)\varepsilon^{-1}k_7^2+k_2C_2+(1+\varepsilon)k_7^2\right]E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}\parallel Z_s\parallel^2 ds
\end{aligned}\tag{2.15}$$

Puis on applique de même le lemme d'Itô à $e^{-\lambda t}|X_t|^2$ entre 0 et $t$, ce qui nous donne comme précédemment :

$$\begin{aligned}
E_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\le t\le T}(e^{-\lambda t}|X_t|^2+\lambda E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}|X_s|^2 ds)\right)&\le E_{\mathbb{Q}}|X_0|^2+\int_0^T e^{-\lambda s}\parallel Z_s\parallel^2 ds\\
+2E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}|X_s||f(s,P_s,X_s,Z_s)|ds&+2E_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t e^{-\lambda s}X_sZ_s dW_s\right|\right)
\end{aligned}$$

Les termes à accroissements finis se majorent comme précédemment avec les propriétés (A1) à (A7) et (A7'), et la partie martingale se majore avec l'inégalité de Burkholder-

Davis-Gundy pour $p = 1/2$, qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
2E_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t e^{-\lambda s}X_sZ_sdW_s\right|\right) &\le 8\sqrt{2}E_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T X_s^2e^{-2\lambda s}Z_s^2ds\right)^{1/2}\\
&\le 8\sqrt{2}\varepsilon E_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\le s\le T}|X_s|^2e^{-\lambda s}\right)+\frac{8\sqrt{2}}{\varepsilon}E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}\parallel Z_s\parallel^2 ds \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Et on obtient donc, $\forall\varepsilon, C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ :

$$\begin{aligned}
&(1-8\sqrt{2}\varepsilon)E_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\le t\le T}e^{-\lambda t}|X_t|^2+\lambda\int_0^t e^{-\lambda s}|X_s|^2ds\right)\\
&\le E_{\mathbb{Q}}|X_0|^2+\frac{2}{\varepsilon}E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}|f(s,0,0,0)|^2ds \qquad (2.17)\\
&+\left[2\lambda_2+2k_3C_3+2k_4C_4+2\varepsilon\right]E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}|X_s|^2ds\\
&+\left[2k_3C_3^{-1}\right]E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}|P_s|^2ds\\
&+\left[8\sqrt{2}\varepsilon^{-1}+2k_4C_4^{-1}\right]E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}\parallel Z_s\parallel^2 ds
\end{aligned}$$

Ce qui permet, en sommant les deux inégalités (2.15) et (2.16) ainsi obtenues, d'obtenir finalement pour $0 < \varepsilon < (8\sqrt{2})^{-1}$ la majoration suivante avec $F(t) = |P_t|^2 + |X_t|^2$ :

$$(1-8\sqrt{2}\varepsilon)\left(E_{\mathbb{Q}}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(e^{-\lambda t}F(t)+\lambda\int_0^t e^{-\lambda s}F(s)ds\right)\right]\right)$$

$$\begin{aligned}
&\le E_{\mathbb{Q}}|P_0|^2+E_{\mathbb{Q}}|X_0|^2+(1+\frac{1}{\varepsilon})(1+\frac{8\sqrt{2}}{\varepsilon})E_{\mathbb{Q}}\int_0^T|\sigma(s,0,0,0)|^2ds\\
&+\frac{2}{\varepsilon}E_{\mathbb{Q}}\int_0^T|b(s,0,0,0)|^2ds+\frac{2}{\varepsilon}E_{\mathbb{Q}}\int_0^T|f(s,0,0,0)|^2ds+\\
&+\sup\{[2\lambda_1+8\sqrt{2}(1+\varepsilon)\varepsilon^{-1}k_5^2+k_1C_1^{-1}+k_2C_2^{-1}+(1+\varepsilon)k_5^2+2\varepsilon+2k_3C_3^{-1}],\\
&[2(\lambda_2+k_3C_3+k_4C_4+\varepsilon+4\sqrt{2}(1+\varepsilon)\varepsilon^{-1}k_6^2)+k_1C_1+(1+\varepsilon)k_6^2]\}E_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}F(s)ds\\
&+\left[8\sqrt{2}\varepsilon^{-1}+2k_4C_4^{-1}+8\sqrt{2}(1+\varepsilon)\varepsilon^{-1}k_7^2+k_2C_2+(1+\varepsilon)k_7^2\right]E_{\mathbb{Q}}\int_0^T\parallel Z_s\parallel^2 ds
\end{aligned}$$

Ceci peut également s'écrire

$$(1-8\sqrt{2}\varepsilon)\left(E_{\mathbb{Q}}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(e^{-\lambda t}F(t)+\lambda\int_0^t e^{-\lambda s}F(s)ds\right)\right]\right)\le A+BE_{\mathbb{Q}}\int_0^T e^{-\lambda s}F(s)ds$$

Avec $A, B < +\infty$.

Posons

$$G(t) = e^{-\lambda t}F(t) + \lambda \int_0^t e^{-\lambda s}F(s)ds,$$

Alors, si $\lambda > 0$, on a

$$\int_0^T e^{-\lambda s}F(s)ds \leq \frac{1}{\lambda}G(T) \leq \frac{1}{\lambda}\sup_t G(t)$$

On prend l'espérance afin d'obtenir

$$E_{\mathbb{Q}}(\int_0^T e^{-\lambda s}F(s)ds) \leq \frac{1}{\lambda}E_{\mathbb{Q}}\sup_t G(t) \leq \frac{1}{\lambda}(A + BE_{\mathbb{Q}}(\int_0^T e^{-\lambda s}F(s)ds))$$

soit

$$\left(1 - \frac{B}{\lambda}\right)E_{\mathbb{Q}}(\int_0^T e^{-\lambda s}F(s)ds) \leq \frac{A}{\lambda}$$

Donc si $\lambda > B$ :

$$E_{\mathbb{Q}}(\int_0^T e^{-\lambda s}F(s)ds) \leq \frac{A}{\lambda}\left(1 - \frac{B}{\lambda}\right)^{-1} < +\infty$$

Donc on en déduit directement si $\lambda > B$ :

$$E_{\mathbb{Q}} \sup_{0\leq t\leq T} e^{-\lambda t}F(t) < +\infty$$

Et le lemme est donc montré puisque cela permet de conclure :

$$E_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|P_t|^2\right) + E_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right) < \infty$$

$\square$

### 2.2.3 Lemmes de majoration

Nous avons besoin, dans la suite de la démonstration, des quatre lemmes de majoration de normes de E. Pardoux et S. Tang [PT99]. Bien que l'espace considéré ne soit pas le même, et en particulier que la $\sigma$-algèbre initiale ne soit pas triviale, ceux-ci restent vérifiés dans notre cas, puisqu'ils n'utilisent, en plus de la formule d'Itô, que les propriétés de Lipschitz et de croissance linéaire des différentes fonctions, hypothèses (A1) à (A7) et (A7'), qui sont supposées vraies sous $\mathbb{P}$, et qui comme nous l'avons vu auparavant page 57 restent vérifiées sous $\mathbb{Q}$. Nous donnons ici l'énoncé et la preuve de ces quatre lemmes dans notre cas.

**Lemme 2.2.2** *Supposons vérifiées les hypothèses $(A3)-(A5)$, $(A7)$ et $(A7')$. Etant donnés $(X(.), Z(.)) \in M^2(0,T;\mathbb{R}^m) \times M^2(0,T;\mathbb{R}^{m\times d})$, soit $(P(.)) \in M^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ solution de l'équation progressive du système (2.9). Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \varepsilon, C_1, C_2 > 0$,*

$$\begin{aligned}
&\| P(.) \|_\lambda^2 \\
&\quad \le \frac{1-e^{-\bar{\lambda_1}T}}{\bar{\lambda_1}} \Big[ \big(k_1C_1 + k_6^2(1+\varepsilon)\big) \| X \|_\lambda^2 + \big(k_2C_2 + k_7^2(1+\varepsilon)\big) \| Z \|_\lambda^2 \\
&\quad + E_{\mathbb{Q}}|P_0|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \| b(.,0,0,0) \|_\lambda^2 + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) \| \sigma(.,0,0,0) \|_\lambda^2 \Big]
\end{aligned} \tag{2.18}$$

*avec*

$$\bar{\lambda_1} := \lambda - 2\lambda_1 - k_1C_1^{-1} - k_2C_2^{-1} - k_5^2(1+\varepsilon) - \varepsilon. \tag{2.19}$$

*Et si $\bar{\lambda_1} \ge 0$, on obtient :*

$$\begin{aligned}
&e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}}|P_T|^2 \\
&\quad \le \big(k_1C_1 + k_6^2(1+\varepsilon)\big) \| X \|_\lambda^2 + \big(k_2C_2 + k_7^2(1+\varepsilon)\big) \| Z \|_\lambda^2 \\
&\quad + E_{\mathbb{Q}}|P_0|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \| b(.,0,0,0) \|_\lambda^2 + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) \| \sigma(.,0,0,0) \|_\lambda^2
\end{aligned} \tag{2.20}$$

**Preuve :** Etant donnés $(X(.), Z(.)) \in M^2(0,T;\mathbb{R}^m) \times M^2(0,T;\mathbb{R}^{m\times d})$, soit $(P(.)) \in M^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ solution de l'équation progressive du système (2.9). Appliquons la formule d'Itô à $e^{-\lambda t}|P_t|^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda t}|P_t|^2 - |P_0|^2 &= \int_0^t \left[ -\lambda e^{-\lambda s}|P_s|^2 + \frac{2e^{-\lambda s}}{2} \sigma(s,P_s,X_s,Z_s)^2 \right] ds + \int_0^t 2e^{-\lambda s} P_s dP_s \\
&= \int_0^t \left[ -\lambda e^{-\lambda s}|P_s|^2 + e^{-\lambda s}|\sigma(s,P_s,X_s,Z_s)|^2 \right] ds \\
&\quad + \int_0^t 2P_s e^{-\lambda s} \left( b(s,P_s,X_s,Z_s)ds + \sigma(s,P_s,X_s,Z_s)dW_s \right)
\end{aligned}$$

On prend l'espérance sous $\mathbb{Q}$ de cette équation, donc l'espérance de la partie martingale $E_{\mathbb{Q}} \int_0^t 2P_s e^{-\lambda s}\sigma(s, P_s, X_s, Z_s)dW_s$ s'annule et il vient :

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda t}E_{\mathbb{Q}}|P_t|^2 - E_{\mathbb{Q}}|P_0|^2 &= 2E_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}P_s b(s, P_s, X_s, Z_s)ds\right) \\
&\quad + E_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}|\sigma(s, P_s, X_s, Z_s)|^2 ds\right) - \lambda E_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}|P_s|^2 ds\right) \\
&\leq 2E_{\mathbb{Q}}\int_0^t e^{-\lambda s}|P_s|\,|b(s, P_s, X_s, Z_s) - b(s, 0, X_s, Z_s)|\,ds \\
&\quad + 2E_{\mathbb{Q}}\int_0^t e^{-\lambda s}|P_s||b(s, 0, X_s, Z_s)|ds \\
&\quad + E_{\mathbb{Q}}\int_0^t e^{-\lambda s}|\sigma(s, P_s, X_s, Z_s) - \sigma(s, 0, 0, 0) + \sigma(s, 0, 0, 0)|^2 ds \\
&\quad - \lambda E_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}|P_s|^2 ds\right)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Pour majorer le premier terme, nous utilisons la monotonie de $b$ en la variable $p$ (hypothèse $(A3)$), pour le deuxième terme, l'hypothèse $(A4)$ de Lipschitz sur $b$ en les deux autres variables $x$ et $z$. Pour le troisième terme, les hypothèses $(A5)$ de Lipschitz sur $\sigma$, et l'équation (2.12) d'intégrabilité de $\| \sigma(s, 0, 0, 0) \|^2$, ainsi que l'inégalité standard $\forall\ \varepsilon > 0,\ |a + b|^2 \leq (1 + \varepsilon)a^2 + (1 + \frac{1}{\varepsilon})b^2$ permettent d'obtenir une majoration. On obtient ainsi l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
&e^{-\lambda t}E_{\mathbb{Q}}|P_t|^2 - E_{\mathbb{Q}}|P_0|^2 \\
&\leq (2\lambda_1 - \lambda)\, E_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}|P_s|^2 ds\right) + 2E_{\mathbb{Q}}\int_0^t |P_s|e^{-\lambda s}\left(k_1|X_s| + k_2 \| Z_s \|\right) ds \\
&\quad + 2E_{\mathbb{Q}}\int_0^t |P_s|e^{-\lambda s}|b(s, 0, 0, 0)|ds + E_{\mathbb{Q}}\int_0^t e^{-\lambda s}(1 + \varepsilon)|\sigma(s, P_s, X_s, Z_s) - \sigma(s, 0, 0, 0)|^2 ds \\
&\quad + E_{\mathbb{Q}}\int_0^t e^{-\lambda s}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)|\sigma(s, 0, 0, 0)|^2 ds
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } \forall C_1 > 0, &\quad 2|P_s|e^{-\lambda s}|X_s| \leq e^{-\lambda s}\left(\tfrac{1}{C_1}|P_s|^2 + C_1|X_s|^2\right) \\
\forall C_2 > 0, &\quad 2|P_s|e^{-\lambda s} \| Z_s \| \leq e^{-\lambda s}\left(\tfrac{1}{C_2}|P_s|^2 + C_2 \| Z_s \|^2\right) \\
\text{et } \forall \varepsilon > 0, &\quad 2P_s b_s \leq \varepsilon P_s^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}b_s^2
\end{aligned} \tag{2.23}$$

D'où l'on obtient

$$\begin{aligned}
&e^{-\lambda t}E_{\mathbb{Q}}|P_t|^2 - E_{\mathbb{Q}}|P_0|^2\\
&\leq \left[2\lambda_1 - \lambda + k_1C_1^{-1} + k_2C_2^{-1} + \varepsilon + (1+\varepsilon)k_5^2\right] E_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}|P_s|^2 ds\right)\\
&\quad + \left(k_1C_1 + (1+\varepsilon)k_6^2\right) E_{\mathbb{Q}}\int_0^t e^{-\lambda s}|X_s|^2 ds + \left(k_2C_2 + (1+\varepsilon)k_7^2\right) E_{\mathbb{Q}}\int_0^t e^{-\lambda s} \parallel Z_s \parallel^2 ds\\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon}E_{\mathbb{Q}}\int_0^t e^{-\lambda s}|b(s,0,0,0)|^2 ds + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) E_{\mathbb{Q}}\int_0^t e^{-\lambda s} \parallel \sigma(s,0,0,0) \parallel^2 ds
\end{aligned}$$

Puis finalement, une application de Fubini-Tonelli permet de conclure et d'obtenir une première inégalité :

$$\begin{aligned}
&\forall \lambda \in \mathbb{R}, \varepsilon, C_1, C_2 > 0,\\
&e^{-\lambda t}E_{\mathbb{Q}}|P_t|^2 + \bar{\lambda_1}\int_0^t e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}}|P_s|^2 ds \leq (k_1C_1 + k_6^2(1+\varepsilon))\int_0^t e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}}|X_s|^2 ds\\
&\quad +(k_2C_2 + k_7^2(1+\varepsilon))\int_0^t e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}}|Z_s|^2 ds + E_{\mathbb{Q}}|P_0|^2 \qquad (2.24)\\
&\quad +\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}}|b(s,0,0,0)|^2 ds + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_0^t e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}} \parallel \sigma(s,0,0,0) \parallel^2 ds
\end{aligned}$$

$$\text{avec } \bar{\lambda_1} := \lambda - 2\lambda_1 - k_1C_1^{-1} - k_2C_2^{-1} - k_5^2(1+\varepsilon) - \varepsilon.$$

On applique (2.24) en remplaçant $\lambda$ par $\lambda - \bar{\lambda}_1$, en sorte d'annuler le deuxième terme du membre de gauche, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&e^{-(\lambda-\bar{\lambda}_1)t}E_{\mathbb{Q}}|P_t|^2 + \bar{\lambda_1}'\int_0^t e^{-(\lambda-\bar{\lambda}_1)s}E_{\mathbb{Q}}|P_s|^2 ds \leq (k_1C_1 + k_6^2(1+\varepsilon))\int_0^t e^{-(\lambda-\bar{\lambda}_1)s}E_{\mathbb{Q}}|X_s|^2 ds\\
&\quad +(k_2C_2 + k_7^2(1+\varepsilon))\int_0^t e^{-(\lambda-\bar{\lambda}_1)s}E_{\mathbb{Q}}|Z_s|^2 ds + E_{\mathbb{Q}}|P_0|^2 \qquad (2.25)\\
&\quad +\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-(\lambda-\bar{\lambda}_1)s}E_{\mathbb{Q}}|b(s,0,0,0)|^2 ds + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_0^t e^{-(\lambda-\bar{\lambda}_1)s}E_{\mathbb{Q}} \parallel \sigma(s,0,0,0) \parallel^2 ds
\end{aligned}$$

$$\text{avec } \bar{\lambda_1}' := (\lambda - \bar{\lambda}_1) - 2\lambda_1 - k_1C_1^{-1} - k_2C_2^{-1} - k_5^2(1+\varepsilon) - \varepsilon = 0$$

Il ne reste alors plus qu'à multiplier à droite et à gauche par $e^{-\bar{\lambda}_1 t}$ qui est positif, et on obtient une seconde inégalité :

$$\begin{aligned}
&e^{-\lambda t}E_{\mathbb{Q}}|P_t|^2 \leq (k_1C_1 + k_6^2(1+\varepsilon))\int_0^t e^{-\bar{\lambda_1}(t-s)}e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}}|X_s|^2 ds\\
&\quad +(k_2C_2 + k_7^2(1+\varepsilon))\int_0^t e^{-\bar{\lambda_1}(t-s)}e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}}|Z_s|^2 ds + E_{\mathbb{Q}}|P_0|^2 e^{-\bar{\lambda_1}t}\\
&\quad +\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\bar{\lambda_1}(t-s)}e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}}|b(s,0,0,0)|^2 ds\\
&\quad +\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_0^t e^{-\bar{\lambda_1}(t-s)}e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}} \parallel \sigma(s,0,0,0) \parallel^2 ds \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Pour toute fonction $f$ positive, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^t e^{-\bar{\lambda_1}(t-s)} f(s) ds dt &= \int_0^T f(s) \int_s^T e^{-\bar{\lambda_1}(t-s)} dt ds \\ &= \int_0^T \left( \frac{1 - e^{-\bar{\lambda_1}(T-s)}}{\bar{\lambda_1}} \right) f(s) ds \qquad (2.27)\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^T \int_0^t e^{-\bar{\lambda_1}(t-s)} f(s) ds dt - \frac{1 - e^{-\bar{\lambda_1} T}}{\bar{\lambda_1}} \int_0^T f(s) ds = \int_0^T \left( \frac{e^{-\bar{\lambda_1} T} - e^{-\bar{\lambda_1}(T-s)}}{\bar{\lambda_1}} \right) f(s) ds \leq 0$$

comme intégrale d'une fonction négative. Donc d'après (2.26), on en déduit :

$$\begin{aligned}&\| P(.) \|_\lambda^2 \\ &\quad \leq \frac{1 - e^{-\bar{\lambda_1} T}}{\bar{\lambda_1}} \Big[ \big( k_1 C_1 + k_6^2 (1+\varepsilon) \big) \| X \|_\lambda^2 + \big( k_2 C_2 + k_7^2 (1+\varepsilon) \big) \| Z \|_\lambda^2 \\ &\quad + E_{\mathbb{Q}} |P_0|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \| b(.,0,0,0) \|_\lambda^2 + \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \| \sigma(.,0,0,0) \|_\lambda^2 \Big]\end{aligned}$$

Enfin, si $\bar{\lambda_1} \geq 0$, on obtient d'après (2.24), pour $t = T$ :

$$\begin{aligned}&e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}} |P_T|^2 \\ &\quad \leq \big( k_1 C_1 + k_6^2 (1+\varepsilon) \big) \| X \|_\lambda^2 + \big( k_2 C_2 + k_7^2 (1+\varepsilon) \big) \| Z \|_\lambda^2 \\ &\quad + E_{\mathbb{Q}} |P_0|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \| b(.,0,0,0) \|_\lambda^2 + \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \| \sigma(.,0,0,0) \|_\lambda^2\end{aligned}$$

qui sont les majorations recherchées. $\square$

**Lemme 2.2.3** *Supposons vérifiées les hypothèses* $(A3), (A4)$ *et* $(A6), (A7)$ *et* $(A7')$. *Etant donné* $(P(.)) \in M^2(0,T;\mathbb{R}^n)$, *soit* $(X(.), Z(.)) \in M^2(0,T;\mathbb{R}^m) \times M^2(0,T;\mathbb{R}^{m\times d})$ *solution de l'équation rétrograde du système (2.9). Soit pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}, \varepsilon, C_3, C_4 > 0$, *tel que* $0 < C_4 < k_4^{-1}$,

$$\bar{\lambda_2} := -\lambda - 2\lambda_2 - k_3 C_3^{-1} - k_4 C_4^{-1} - \varepsilon. \tag{2.28}$$

*Alors :*

$$\begin{aligned} &\| X(.) \|_\lambda^2 \\ &\leq \frac{1 - e^{-\bar{\lambda_2} T}}{\bar{\lambda_2}} \Bigg[ k_8^2 (1+\varepsilon) e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}} |P_T|^2 + k_3 C_3 \| P(.) \|_\lambda^2 \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}} |g(0)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \| f(.,0,0,0) \|_\lambda^2 \Bigg] \end{aligned} \tag{2.29}$$

*Et si de plus* $\bar{\lambda_2} \geq 0$ *:*

$$\begin{aligned} &\| Z(.) \|_\lambda^2 \\ &\leq \frac{1}{1 - k_4 C_4} \Bigg[ k_8^2 (1+\varepsilon) e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}} |P_T|^2 + k_3 C_3 \| P(.) \|_\lambda^2 \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}} |g(0)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \| f(.,0,0,0) \|_\lambda^2 \Bigg] \end{aligned} \tag{2.30}$$

**Preuve :** Ce lemme se montre de manière similaire au précédent. On applique la formule d'Itô à $e^{-\lambda t}|X_t|^2$ entre $t$ et $T$, et on utilise le fait que $X$ et $Z$ sont solution de l'équation rétrograde,

$$dX_t = -f(s, P_s, X_s, Z_s)ds + Z_s dW_s$$

cela nous donne :

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t}|X_t|^2 + \int_t^T e^{-\lambda s}|Z_s|^2 ds &= e^{-\lambda T}|X_T|^2 \\ + \int_t^T \lambda e^{-\lambda s}|X_s|^2 ds + 2\int_t^T X_s f(s, P_s, X_s, Z_s) e^{-\lambda s} ds &- 2\int_t^T X_s Z_s dW_s \end{aligned}$$

Comme $\int_t^T X_s Z_s dW_s$ est une $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q})$-martingale nulle en $T$, ce terme disparaît lorsque l'on prend l'espérance sous $\mathbb{Q}$, et on obtient :

$$\begin{aligned} &e^{-\lambda t} E_{\mathbb{Q}}|X_t|^2 + \int_t^T e^{-\lambda s} E_{\mathbb{Q}}|Z_s|^2 ds \\ &= E_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\lambda T}|g(P_T)|^2\right) + \lambda \int_t^T e^{-\lambda s} E_{\mathbb{Q}}|X_s|^2 ds + 2E_{\mathbb{Q}} \int_t^T X_s f(s, P_s, X_s, Z_s) e^{-\lambda s} ds \end{aligned}$$

Or d'après l'hypothèse (A6), $g$ est lipschitzienne en $p$ donc $\forall \varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}(e^{-\lambda T}|g(P_T)|^2) &= E_{\mathbb{Q}}(e^{-\lambda T}|g(P_T) - g(0) + g(0)|^2) \\ &\leq (1+\varepsilon)e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}}(|g(P_T) - g(0)|^2) + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}}(|g(0)|^2) \\ &\leq (1+\varepsilon)e^{-\lambda T} k_8^2 E_{\mathbb{Q}}(|P_T|^2) + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}}(|g(0)|^2) \end{aligned}$$

Les hypothèses (A3) et (A4) de Lipschitz en $p$ et $z$ et de monotonie en $x$ sur $f$ nous permettent de majorer le dernier terme, et d'obtenir, $\forall\, \varepsilon, C_3, C_4 > 0$ :

$$\begin{aligned}
&2\int_t^T X_s f(s,P_s,X_s,Z_s)e^{-\lambda s}ds \\
&\leq \ 2\int_t^T X_s\left(f(s,P_s,X_s,Z_s)-f(s,P_s,0,Z_s)\right)e^{-\lambda s}ds+2\int_t^T |X_s||f(s,P_s,0,Z_s)|e^{-\lambda s}ds \\
&\leq \ 2\lambda_2\int_t^T e^{-\lambda s}|X_s|^2ds+2\int_t^T e^{-\lambda s}|X_s|\left(k_3|P_s|+k_4 \parallel Z_s \parallel\right)ds+\int_t^T e^{-\lambda s}|X_s||f(s,0,0,0)|ds \\
&\leq \ \left(2\lambda_2+\varepsilon+k_3C_3^{-1}+k_4C_4^{-1}\right)\int_t^T e^{-\lambda s}|X_s|^2ds+k_3C_3\int_t^T e^{-\lambda s}|P_s|^2ds \\
&\quad +k_4C_4\int_t^T e^{-\lambda s}\parallel Z_s \parallel^2 ds+\frac{1}{\varepsilon}\int_t^T e^{-\lambda s}|f(s,0,0,0)|^2ds
\end{aligned}$$

Et donc finalement en posant

$$\bar{\lambda_2} = -\lambda - 2\lambda_2 - \varepsilon - k_3C_3^{-1} - k_4C_4^{-1}$$

on obtient la majoration

$$\begin{aligned}
&e^{-\lambda t}E_{\mathbb{Q}}|X_t|^2+\bar{\lambda_2}\int_t^T e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}}|X_s|^2ds+(1-k_4C_4)\int_t^T e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}}|Z_s|^2ds \\
&\quad \leq k_8^2(1+\varepsilon)e^{-\lambda T}E_{\mathbb{Q}}|P_T|^2+k_3C_3\int_t^T e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}}|P_s|^2ds \qquad (2.31)\\
&\quad +\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\lambda T}E_{\mathbb{Q}}|g(0)|^2+\frac{1}{\varepsilon}\int_t^T e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}}|f(s,0,0,0)|^2ds
\end{aligned}$$

Puis on procède comme dans la preuve du lemme précédent : on applique (2.31) en remplaçant $\lambda$ par $\lambda + \bar{\lambda_2}$ en sorte d'annuler le deuxième terme à gauche de (2.31). Puis on multiplie par $e^{\bar{\lambda_2}t}$ pour avoir une seconde majoration :

$$\begin{aligned}
&e^{-\lambda t}E_{\mathbb{Q}}|X_t|^2+(1-k_4C_4)\int_t^T e^{-\bar{\lambda_2}(s-t)}e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}}|Z_s|^2ds \qquad (2.32)\\
&\quad \leq k_8^2(1+\varepsilon)e^{-\bar{\lambda_2}(T-t)}e^{-\lambda T}E_{\mathbb{Q}}|P_T|^2+k_3C_3\int_t^T e^{-\bar{\lambda_2}(s-t)}e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}}|P_s|^2ds \\
&\quad +\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\bar{\lambda_2}(T-t)}e^{-\lambda T}E_{\mathbb{Q}}|g(0)|^2+\frac{1}{\varepsilon}\int_t^T e^{-\bar{\lambda_2}(s-t)}e^{-\lambda s}E_{\mathbb{Q}}|f(s,0,0,0)|^2ds
\end{aligned}$$

Avec le même type d'arguments que ceux du lemme (2.2.2), (voir l'équation (2.27)), on intègre (2.32) de 0 à $T$ et si $0 < C_4 < k_4^{-1}$ on obtient (2.29)

$$\begin{aligned}
&\parallel X(.) \parallel_\lambda^2 \\
&\quad \leq \frac{1-e^{-\bar{\lambda_2}T}}{\bar{\lambda_2}}\Bigg[k_8^2(1+\varepsilon)e^{-\lambda T}E_{\mathbb{Q}}|P_T|^2+k_3C_3 \parallel P(.) \parallel_\lambda^2 \\
&\quad +\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\lambda T}E_{\mathbb{Q}}|g(0)|^2+\frac{1}{\varepsilon}\parallel f(.,0,0,0) \parallel_\lambda^2\Bigg]
\end{aligned}$$

Notons tout d'abord que

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_t^T e^{-\bar{\lambda}_2(s-t)} e^{-\lambda s} E_{\mathbb{Q}}|Z_s|^2 ds dt &= \int_0^T \frac{1-e^{-\bar{\lambda}_2 s}}{\bar{\lambda}_2} e^{-\lambda s} E_{\mathbb{Q}}|Z_s|^2 ds \\ &= \frac{1}{\bar{\lambda}_2}\left(\| Z \|_\lambda - \| Z \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}\right) \qquad (2.33)\end{aligned}$$

Et si de plus $\bar{\lambda}_2 \geq 0$, intégrons (2.32) entre 0 et $T$. On obtient, en utilisant l'expression (2.33) ci dessus :

$$\begin{aligned}&\frac{1-k_4C_4}{\bar{\lambda}_2}\left(\| Z \|_\lambda^2 - \| Z \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}^2\right) \leq k_8^2(1+\varepsilon)e^{-\lambda T}\frac{1-e^{-\bar{\lambda}_2 T}}{\bar{\lambda}_2}E_{\mathbb{Q}}|P_T|^2 \\ &\quad +\frac{k_3C_3}{\bar{\lambda}_2}\left(\| P \|_\lambda^2 - \| P \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}^2\right) + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\lambda T}\frac{1-e^{-\bar{\lambda}_2 T}}{\bar{\lambda}_2}E_{\mathbb{Q}}|g(0)|^2 \\ &\quad +\frac{1}{\varepsilon\bar{\lambda}_2}\left(\| f(.,0,0,0) \|_\lambda^2 - \| f(.,0,0,0) \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}^2\right)\end{aligned}$$

D'où après simplification par $\bar{\lambda}_2$ qui a été supposé positif :

$$\begin{aligned}\| Z \|_\lambda^2 \leq &\frac{1}{1-k_4C_4}\Big[k_8^2(1+\varepsilon)e^{-\lambda T}(1-e^{-\bar{\lambda}_2 T})E_{\mathbb{Q}}|P_T|^2 \\ &+k_3C_3\left(\| P \|_\lambda^2 - \| P \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}^2\right) + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\lambda T}(1-e^{-\bar{\lambda}_2 T})E_{\mathbb{Q}}|g(0)|^2 \\ &+\frac{1}{\varepsilon}\left(\| f(.,0,0,0) \|_\lambda^2 - \| f(.,0,0,0) \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}^2\right)\Big] + \| Z \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}^2\end{aligned}$$

Or si on applique l'équation (2.32) en $t=0$, cela nous permet de majorer $\| Z \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}^2$ :

$$\begin{aligned}\| Z \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}^2 \leq &\frac{1}{1-k_4C_4}\Big[k_8^2(1+\varepsilon)e^{-\lambda T}e^{-\bar{\lambda}_2 T}E_{\mathbb{Q}}|P_T|^2 \\ &+k_3C_3 \| P \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}^2 + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\lambda T}e^{-\bar{\lambda}_2}E_{\mathbb{Q}}|g(0)|^2 \\ &+\frac{1}{\varepsilon} \| f(.,0,0,0) \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}^2\Big]\end{aligned}$$

D'où finalement la majoration de $\| Z \|_\lambda^2$ attendue, lorsque $\bar{\lambda}_2$ est strictement positif :

$$\begin{aligned}&\| Z(.) \|_\lambda^2 \\ &\quad \leq \frac{1}{1-k_4C_4}\Big[k_8^2(1+\varepsilon)e^{-\lambda T}E_{\mathbb{Q}}|P_T|^2 + k_3C_3 \| P(.) \|_\lambda^2 \\ &\quad +\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\lambda T}E_{\mathbb{Q}}|g(0)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \| f(.,0,0,0) \|_\lambda^2\Big]\end{aligned}$$

Cette inégalité est aussi vraie pour $\bar{\lambda}_2 = 0$ : c'est juste une réécriture de (2.32) pour $t=0$. Elle est donc vraie pour tout $\bar{\lambda}_2 \geq 0$. □

**Lemme 2.2.4** *Supposons vérifiées les hypothèses* $(A3)-(A5)$, $(A7)$ *et* $(A7')$. *Soit* $P^i(.)$ *la solution de l'équation progressive du système (2.9) associée à* $(X(.), Z(.)) = (X^i(.), Z^i(.)) \in M^2(0,T;\mathbb{R}^m) \times M^2(0,T;\mathbb{R}^{m\times d})$, $i = 1,2$. *Soit pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}, C_1, C_2 > 0$

$$\bar{\lambda_1} := \lambda - 2\lambda_1 - k_1 C_1^{-1} - k_2 C_2^{-1} - k_5^2$$

*Alors,*

$$\| \Delta P \|_\lambda^2 \leq \frac{1 - e^{-\bar{\lambda_1} T}}{\bar{\lambda_1}} \left[ (k_1 C_1 + k_6^2) \| \Delta X \|_\lambda^2 + (k_2 C_2 + k_7^2) \| \Delta Z \|_\lambda^2 \right] \tag{2.34}$$

*et*

$$e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}} |\Delta P_T|^2 \leq \left[ 1 \vee e^{-\bar{\lambda_1} T} \right] (k_1 C_1 + k_6^2) \| \Delta X \|_\lambda^2 + (k_2 C_2 + k_7^2) \| \Delta Z \|_\lambda^2 \tag{2.35}$$

**Preuve :** On applique la formule d'Itô à $e^{-\lambda t}|P_t^1 - P_t^2|^2$, on obtient, en notant $\Delta y = y^1 - y^2$ :

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} |\Delta P_t|^2 &= \int_0^t \left[ -\lambda e^{-\lambda s} |\Delta P_s|^2 + e^{-\lambda s} |\Delta \sigma|^2 \right] ds \\ &+ 2 \int_0^t \Delta P_s e^{-\lambda s} \left( \Delta b ds + \Delta \sigma d W_s \right) \end{aligned} \tag{2.36}$$

En prenant l'espérance sous $\mathbb{Q}$, on élimine la partie martingale d'espérance nulle. On utilise les hypothèses (A3) et (A4) sur $b$ (lipschitzienne en $x$ et $z$ et monotone en $p$) et (A5) sur $\sigma$ lipschitzienne en $p$, $x$ et $z$, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} |\Delta P_t|^2 &\leq (-\lambda + 2\lambda_1) E_{\mathbb{Q}} \left( \int_0^t e^{-\lambda s} |\Delta P_s|^2 ds \right) \\ &+ 2 k_1 E_{\mathbb{Q}} \int_0^t e^{-\lambda s} |\Delta P_s| |\Delta X_s| ds + 2 k_2 E_{\mathbb{Q}} \int_0^t e^{-\lambda s} |\Delta P_s| \| \Delta Z_s \| ds \\ &+ E_{\mathbb{Q}} \int_0^t e^{-\lambda s} \left( k_5^2 |\Delta P_s|^2 + k_6^2 |\Delta X_s|^2 + k_7^2 \| \Delta Z_s \|^2 \right) ds \end{aligned} \tag{2.37}$$

Et avec $\forall C_1, C_2 > 0$

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}} \int_0^t e^{-\lambda s} |\Delta P_s| |\Delta X_s| ds &\leq C_1^{-1} \int_0^t e^{-\lambda s} |\Delta P_s|^2 + C_1 \int_0^t e^{-\lambda s} |\Delta X_s|^2 \\ E_{\mathbb{Q}} \int_0^t e^{-\lambda s} |\Delta P_s| \| \Delta Z_s \| ds &\leq C_2^{-1} \int_0^t e^{-\lambda s} |\Delta P_s|^2 + C_2 \int_0^t e^{-\lambda s} \| \Delta Z_s \|^2 \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} E_{\mathbb{Q}} |P_t^1 - P_t^2|^2 + \bar{\lambda_1} \int_0^t e^{-\lambda s} E_{\mathbb{Q}} |P_s^1 - P_s^2|^2 ds \\ \leq (k_1 C_1 + k_6^2) \int_0^t e^{-\lambda s} E_{\mathbb{Q}} |X_s^1 - X_s^2|^2 ds \\ + (k_2 C_2 + k_7^2) \int_0^t e^{-\lambda s} E_{\mathbb{Q}} |Z_s^1 - Z_s^2|^2 ds \end{aligned} \tag{2.38}$$

De même qu'auparavant, en remplaçant $\lambda$ par $\lambda - \bar{\lambda_1}$ dans (2.38) en sorte d'annuler le deuxième terme à gauche de (2.38), puis en multipliant par $e^{-\bar{\lambda_1} t}$, on obtient de même la majoration : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda t} E_{\mathbb{Q}} |P_t^1 - P_t^2|^2 \\ & \leq (k_1 C_1 + k_6^2) \int_0^t e^{-\bar{\lambda_1}(t-s)} e^{-\lambda s} E_{\mathbb{Q}} |X_s^1 - X_s^2|^2 ds \\ & + (k_2 C_2 + k_7^2) \int_0^t e^{-\bar{\lambda_1}(t-s)} e^{-\lambda s} E_{\mathbb{Q}} |Z_s^1 - Z_s^2|^2 ds. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Cela permet d'en déduire par intégration de cette inégalité de 0 à $T$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \| \Delta P \|_\lambda^2 \leq \frac{1 - e^{-\bar{\lambda_1} T}}{\bar{\lambda_1}} \left[ (k_1 C_1 + k_6^2) \| \Delta X \|_\lambda^2 + (k_2 C_2 + k_7^2) \| \Delta Z \|_\lambda^2 \right]$$

Puis on déduit de l'inégalité (2.38), pour $t = T$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ :

$$e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}} |\Delta P_T|^2 \leq \left[ 1 \vee e^{-\bar{\lambda_1} T} \right] (k_1 C_1 + k_6^2) \| \Delta X \|_\lambda^2 + (k_2 C_2 + k_7^2) \| \Delta Z \|_\lambda^2 \tag{2.40}$$

et si $\bar{\lambda_1} \geq 0$, on obtient plus simplement :

$$e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}} |\Delta P_T|^2 \leq (k_1 C_1 + k_6^2) \| \Delta X \|_\lambda^2 + (k_2 C_2 + k_7^2) \| \Delta Z \|_\lambda^2 \tag{2.41}$$

$\square$

**Lemme 2.2.5** *Supposons vérifiées les hypothèses* $(A3), (A4)$ *et* $(A6), (A7)$ *et* $(A7')$. *Soit* $(X^i(.), Z^i(.))$ *la solution de l'équation rétrograde du système (2.9) associée à* $P(.) = P^i(.) \in M^2(0,T;\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$. *Soit pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}, C_3, C_4 > 0$, *tels que* $0 < C_4 < k_4^{-1}$,

$$\bar{\lambda_2} := -\lambda - 2\lambda_2 - k_3C_3^{-1} - k_4C_4^{-1}. \tag{2.42}$$

*Alors :*

$$\| \Delta X \|_\lambda^2 \leq \frac{1 - e^{-\bar{\lambda_2}T}}{\bar{\lambda_2}} \left[k_8^2 e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}}|\Delta P_T|^2 + k_3C_3 \| \Delta P \|_\lambda^2\right] \tag{2.43}$$

*et*

$$\| \Delta \bar{Z} \|_\lambda^2 \leq \frac{k_8^2 e^{-\bar{\lambda_2}T} e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}}|\Delta P_T|^2 + k_3C_3(1 \vee e^{-\bar{\lambda_2}T}) \| \Delta P \|_\lambda^2}{(1 - k_4C_4)(1 \wedge e^{-\bar{\lambda_2}T})} \tag{2.44}$$

*Si de plus* $\lambda_2 \geq 0$, *on a même plus simplement :*

$$\| \Delta \bar{Z} \|_\lambda^2 \leq \frac{1}{1 - k_4C_4} \left[k_8^2 e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}}|\Delta P_T|^2 + k_3C_3 \| \Delta P \|_\lambda^2\right] \tag{2.45}$$

**Preuve :**

On suit la même démarche que dans le lemme 2.2.4, on utilise les inégalités (2.23) et on applique la formule d'Itô à $e^{-\lambda s}|X_s^1 - X_s^2|^2$ entre $t$ et $T$ pour obtenir l'inégalité

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda t} E_{\mathbb{Q}}|X_t^1 - X_t^2|^2 + \bar{\lambda_2} \int_t^T e^{-\lambda s} E_{\mathbb{Q}}|X_s^1 - X_s^2|^2 ds \\ & +(1 - k_4C_4) \int_t^T e^{-\lambda s} E_{\mathbb{Q}}|Z_s^1 - Z_s^2|^2 ds \\ & \leq k_8^2 e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}}|P_T^1 - P_T^2|^2 + k_3C_3 \int_t^T e^{-\lambda s} E_{\mathbb{Q}}|P_s^1 - P_s^2|^2 ds \end{aligned} \tag{2.46}$$

Puis on remplace $\lambda$ par $\lambda + \bar{\lambda_2}$ pour annuler le deuxième terme à gauche de (2.46) et on multiplie par $e^{\bar{\lambda_2}t}$ :

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda t} E_{\mathbb{Q}}|X_t^1 - X_t^2|^2 + (1 - k_4C_4) \int_t^T e^{-\bar{\lambda_2}(s-t)} e^{-\lambda s} E_{\mathbb{Q}}|Z_s^1 - Z_s^2|^2 ds \\ & \leq k_8^2 e^{-\bar{\lambda_2}(T-t)} e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}}|P_T^1 - P_T^2|^2 + k_3C_3 \int_t^T e^{-\bar{\lambda_2}(s-t)} e^{-\lambda s} E_{\mathbb{Q}}|P_s^1 - P_s^2|^2 ds \end{aligned} \tag{2.47}$$

Enfin, si $0 < C_4 < k_4^{-1}$, ce que nous supposerons désormais toujours vérifié, en intégrant (2.47) entre 0 et $T$ on peut déduire la majoration (2.43) :

$$\| \Delta X \|_\lambda^2 \leq \frac{1 - e^{-\bar{\lambda_2}T}}{\bar{\lambda_2}} \left[k_8^2 e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}}|\Delta P_T|^2 + k_3C_3 \| \Delta P \|_\lambda^2\right].$$

Enfin, si l'on prend $t = 0$ dans (2.47) on obtient la majoration :

$$\| \Delta \bar{Z} \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}^2 \leq \frac{k_8^2 e^{-(\bar{\lambda}_2+\lambda)T} E_{\mathbb{Q}}|\Delta P_T|^2 + k_3C_3 \| \Delta P \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}^2}{(1 - k_4C_4)} \tag{2.48}$$

Or toutes ces normes sont équivalentes, et en particulier :

$$\|f\|_\lambda^2 \leq \sup(1, e^{\bar{\lambda}_2 T})\|f\|_{\bar{\lambda}_2+\lambda}^2$$

D'où l'on tire bien (2.44). Et si de plus $\bar{\lambda}_2 \geq 0$, on a une expression plus simple. Intégrons (2.47) entre 0 et $T$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1-k_4C_4}{\bar{\lambda}_2}\left[\| \Delta Z \|_\lambda^2 - \| \Delta Z \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}^2\right] \\
\leq\ & k_8^2 \frac{1-e^{-\bar{\lambda}_2 T}}{\bar{\lambda}_2} e^{\lambda T} E_{\mathbb{Q}}|\Delta P_T|^2 + \frac{k_3C_3}{\bar{\lambda}_2}\left[\| \Delta P \|_\lambda^2 - \| \Delta P \|_{\lambda+\bar{\lambda}_2}^2\right]
\end{aligned}$$

que l'on peut simplifier par $\bar{\lambda}_2$ s'il est positif. Il suffit alors d'utiliser la majoration (2.48) et en combinant les deux, on obtient :

$$\| \Delta Z \|_\lambda^2 \leq \frac{1}{1-k_4C_4}\left[k_8^2 e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}}|\Delta P_T|^2 + k_3C_3 \| \Delta P \|_\lambda^2\right] \tag{2.49}$$

$\square$

### 2.2.4 Existence et Unicité de la solution de l'équation progressive

**Definition 2.2.1** *Soit* $P \in S^2_{\mathbb{Q},c}$, $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$, $(X, Z) \in M^2(0,T;\mathbb{R}^m) \times M^2(0,T;\mathbb{R}^{m\times d})$. *Posons* $\forall t \in [0,T]$

$$\phi(P)_t := \xi + \int_0^t b(s, P_s, X_s, Z_s)ds + \int_0^t \sigma(s, P_s, X_s, Z_s)dW_s. \tag{2.50}$$

Remarquons que $\phi(P)$ est un processus bien défini et continu puisque $P \in \mathcal{S}^2_{\mathbb{Q},c}$ et grâce aux propriétés de $b$ et $\sigma$.

Par ailleurs, nous supposerons de plus à partir de maintenant que, outre les hypothèses $(A1)$ à $(A7)$ et $(A7')$, l'hypothèse $(A8)$ est également satisfaite.

**Lemme 2.2.6** $\phi(P)$ *appartient à* $\mathcal{S}^2_{\mathbb{Q},c}$ *dès que* $P \in \mathcal{S}^2_{\mathbb{Q},c}$, *c'est-à-dire que*

$$\| \phi(P) \|^2 = E_{\mathbb{Q}}[\sup_{0\le t\le T} |\phi(P)_t|^2] < +\infty$$

**Preuve :** Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{S}^2_{Q,c}$. On a en utilisant les inégalités de Doob et de Hölder :

$$\begin{aligned} &E_{\mathbb{Q}}[\sup_{0\le t\le u} |\phi(P_1)_t - \phi(P_2)_t|^2] \\ \le\ & \quad 2TE_{\mathbb{Q}}\left[\textstyle\int_0^u |b(s, P_1(s)) - b(s, P_2(s))|^2 ds\right] \\ & +8E_{\mathbb{Q}}\left[\textstyle\int_0^u \| \sigma(s, P_1(s)) - \sigma(s, P_2(s)) \|^2\, ds\right] \end{aligned}$$

D'où, comme $b$ et $\sigma$ sont uniformément lipschitziennes, il existe $K > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} &E_{\mathbb{Q}}[\sup_{0\le t\le u} |\phi(P_1)_t - \phi(P_2)_t|^2] \\ &\le\ 2K^2(T+4)TE_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^u |P_1(s) - P_2(s)|^2 ds\right] \\ &\le\ 2K^2(T+4)TE_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^u \sup_{0\le t\le s} |P_1(t) - P_2(t)|^2 ds\right] \end{aligned} \tag{2.51}$$

De plus, on obtient en utilisant les inégalités de Hölder et de Doob,

$$\begin{aligned} &E_{\mathbb{Q}}[\sup_{0\le t\le T} |\phi(0)_t|^2] \\ &\le\ 3\left(E_{\mathbb{Q}}[\xi^2] + E_Q\left[\sup_{0\le t\le T} |\int_0^t b(s,0)ds|^2\right] + E_{\mathbb{Q}}\left[\sup_{0\le t\le T} |\int_0^t \sigma(s,0)dW_s|^2\right]\right), \end{aligned}$$

puis en appliquant $(A4)$ et $(A5)$ entre $(x, z)$ et $(0, 0)$ ainsi que $(A7')$ pour obtenir la majoration :

$$E_{\mathbb{Q}}[\sup_{0\le t\le T} |\phi(0)_t|^2] \le 3\left(E_{\mathbb{Q}}(\xi^2) + T^2K^2 + 4TK^2\right).$$

D'où

$$E_Q[\sup_{0\leq t\leq T}|\phi(P)_t|^2] \leq 2E_Q[\sup_{0\leq t\leq T}|\phi(P)_t-\phi(0)_t|^2+|\phi(0)_t|^2]$$
$$\leq \quad 4K^2T(T+4)E_Q\left[\sup_{0\leq t\leq T}|P(t)|^2\right]+3E_Q[\xi^2]+K^2T^2+4K^2T \tag{2.52}$$

Donc $\phi(P)_t \in \mathcal{S}^2_{\mathbb{Q},c}$ dès que $P_t \in \mathcal{S}^2_{\mathbb{Q},c}$. □

Démontrons maintenant que l'équation progressive a une unique solution forte.

**Lemme 2.2.7** *Soient $(X(.),Z(.))$ fixés dans $M^2(0,T,\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d})$ et soit $\xi\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{Y}_0=\sigma(L),\mathbb{Q})$. Alors l'équation*

$$P(t)=\xi+\int_0^t b(s,P_s,X_s,Z_s)ds+\int_0^t\sigma(s,P_s,X_s,Z_s)dW_s \tag{2.53}$$

*admet une unique solution $P(.)$ $\mathcal{Y}$-adaptée dans $M^2(0,T;\mathbb{R}^n)$.*

**Preuve :** La preuve est semblable à celle du cas classique, deux choses changent : $P(0)$ n'est plus déterministe, et la filtration utilisée n'est plus celle du brownien. On a donc à résoudre une EDS standard dans $(\Omega,\mathcal{Y},\mathbb{Q})$, puisque sous $(H_3)$, $W$ est un $(\mathcal{F},\mathbb{P})$ ou un $(\mathcal{Y},\mathbb{Q})$-brownien.
Fixons $X$ et $Z$ deux processus $\mathcal{Y}$-adaptés dans $M^2(0,T,\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d})$.

1. *Existence*

On construit par récurrence une suite de processus de $\mathcal{S}^2_{\mathbb{Q},c}$ :

$$P^0=0,\ \ P^{n+1}=\phi(P^n),\ \ \forall n\geq 0.$$

Puis en utilisant la majoration (2.51) et la formule de Cauchy on déduit :

$$E_{\mathbb{Q}}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|P^{n+1}_t-P^n_t|^2\right]\leq 2K^2(T+4)T\int_0^T E_{\mathbb{Q}}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|P^n_t-P^{n-1}_t|^2\right]$$
$$\leq C^n\frac{1}{(n-1)!}\int_0^T(T-s)^{n-1}E_{\mathbb{Q}}\left[\sup_{0\leq t\leq s}|P^1_t|^2\right]ds\leq\frac{C^nT^n}{n!}E_{\mathbb{Q}}\left[\sup_{0\leq T\leq s}|P^1_t|^2\right]$$

Soit encore en notant $D$ le majorant de la formule (2.52) associé à $P=P^0=0$,

$$E_{\mathbb{Q}}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|P^{n+1}_t-P^n_t|^2\right]\leq D\frac{C^nT^n}{n!}$$

D'où il résulte que

$$\sum_{n\geq 0}\|\sup_{0\leq t\leq T}|P^{n+1}_t-P^n_t|\,\|_{L^1}\ \leq\ \sum_{n\geq 0}\|\sup_{0\leq t\leq T}|P^{n+1}_t-P^n_t|\,\|_{L^2}$$
$$\leq\ \sqrt{D}\sum_{n\geq 0}\frac{(CT)^{n/2}}{\sqrt{n!}}<+\infty$$

La série converge $\mathbb{Q}$-p.s., donc $P^n$ converge uniformément $\mathbb{Q}$-p.s. sur $[0,T]$ vers $\tilde{P}$ continu. De plus $\tilde{P} \in \mathcal{S}^2_{\mathbb{Q},c}$ puisque la convergence a lieu dans $\mathcal{S}^2_{\mathbb{Q}}$. Enfin, $\tilde{P}$ est solution de l'EDS par passage à la limite dans $P^{n+1} = \phi(P^n)$.

*2. Unicité*

Si $P^1$ et $P^2$ sont deux solutions de l'EDS dans $\mathcal{S}^2_{\mathbb{Q},c}$, on a

$$E_Q\left[\sup_{0\leq t\leq u} |P^1_t - P^2_t|^2\right] \leq 2K^2(T+4)\int_0^u E_Q\left[\sup_{0\leq t\leq r} |P^1_t - P^2_t|^2\right] dr$$

donc par application du lemme de Gronwall, ils sont indistinguables :

$$E_Q\left[\sup_{0\leq t\leq u} |P^1_t - P^2_t|^2\right] = 0.$$

Ceci montre donc l'unicité de la solution de l'équation progressive à $(X,Z)$ fixés dans $M^2(0,T,\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d})$. $\square$

### 2.2.5 Contractions

Nous introduisons maintenant deux opérateurs $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ définis comme suit. L'équation progressive induit une application

$$M_1 : (X, Z) \in M^2(0, T, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}) \mapsto M_1(X(.), Z(.)) = P(.),$$

unique solution de l'équation progressive à $(X(.), Z(.))$ fixés. Cela est justifié par le lemme 2.2.7.
De même, on définit

$$M_2 : P \in M^2(0, T, \mathbb{R}^n) \mapsto M_2(P(.)) = (X(.), Z(.)) \in M^2(0, T, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d})$$

l'unique solution de l'équation rétrograde à $P(.)$ fixé. Cela est possible grâce au résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR sous filtration grossie donnée dans A. Eyraud-Loisel [EL05], chapitre 1 de cette thèse (théorème 1.2.1).

On définit enfin

$$\Gamma_1 := M_2 \circ M_1 \text{ et } \Gamma_2 := M_1 \circ M_2.$$

Les deux résultats d'existence et d'unicité de solution forte de l'équation progressive d'une part et de l'équation rétrograde d'autre part montrent que en particulier $\Gamma_1$ envoie $M^2(0, T; \mathbb{R}^{m\times d})$ dans lui-même, et que $\Gamma_2$ envoie $M^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ dans lui-même.
Soit $(X^i, Z^i) \in M^2(0, T; \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d})$, $i = 1, 2$. Soit alors

$$P^i := M_1(X^i, Z^i)$$

$$\text{et } (\bar{X}^i, \bar{Z}^i) = \Gamma_1((X^i, Z^i)), \; i = 1, 2.$$

D'après les majorations (2.34), (2.35), (2.43), et (2.44), des lemmes 2.2.4 et 2.2.5, on a pour tout $\lambda$ réel :

$$\begin{aligned}
\| \Delta P \|_\lambda^2 &\leq \frac{1 - e^{-\bar{\lambda}_1 T}}{\bar{\lambda}_1} \left[(k_1 C_1 + k_6^2) \| \Delta X \|_\lambda^2 + (k_2 C_2 + k_7^2) \|\Delta Z\|_\lambda^2\right] \\
e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}} |\Delta P_T|^2 &\leq [1 \vee e^{-\bar{\lambda}_1 T}] \left[(k_1 C_1 + k_6^2) \| \Delta X \|_\lambda^2 + (k_2 C_2 + k_7^2) \| \Delta Z \|_\lambda^2\right] \\
\| \Delta \bar{X} \|_\lambda^2 &\leq \frac{1 - e^{-\bar{\lambda}_2 T}}{\bar{\lambda}_2} \left[k_8^2 e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}} |\Delta P_T|^2 + k_3 C_3 \| \Delta P \|_\lambda^2\right] \\
\| \Delta \bar{Z} \|_\lambda^2 &\leq \frac{k_8^2 e^{-\bar{\lambda}_2 T} e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}} |\Delta P_T|^2 + k_3 C_3 (1 \vee e^{-\bar{\lambda}_2 T}) \| \Delta P \|_\lambda^2}{(1 - k_4 C_4)(1 \wedge e^{-\bar{\lambda}_2 T})}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

De plus, si $\bar{\lambda}_1 \geq 0$ et $\bar{\lambda}_2 \geq 0$, on a même les majorations plus simples (2.41) et (2.45) qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}} |\Delta P_T|^2 &\leq (k_1 C_1 + k_6^2) \| \Delta X \|_\lambda^2 + (k_2 C_2 + k_7^2) \| \Delta Z \|_\lambda^2 \\
\| \Delta \bar{Z} \|_\lambda^2 &\leq \frac{k_8^2 e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}} |\Delta P_T|^2 + k_3 C_3 \| \Delta P \|_\lambda^2}{1 - k_4 C_4}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Un théorème d'existence et d'unicité de solution de l'EDSPR grossie s'obtient alors en suivant la démarche de E. Pardoux et S. Tang [PT99], qui utilisent les majorations obtenues dans les quatre lemmes pour montrer que l'une des deux applications $\Gamma_1$ ou $\Gamma_2$ est strictement contractante, et cela dans trois cas. Chaque cas, que nous détaillons un peu plus loin, nécessite de plus une borne supérieure sur la quantité $\lambda_1 + \lambda_2$ en fonction des $k_i$.

On distingue 3 cas :

*(I1)* Les équations progressive et rétrograde sont faiblement couplées. Autrement dit $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ qui dépend des constantes $k_3, k_4, k_5, k_8, \lambda_1, \lambda_2$ et $T$ des hypothèses de départ tel que les constantes des hypothèses A4 et A5 de dépendance de $b$ et $\sigma$ par rapport à $x, z$ : $k_1, k_2, k_6, k_7$, sont dans $[0, \varepsilon_0)$.

*(I2)* $g$, $\mathcal{F}_T$-mesurable, est indépendante des prix et on rajoute une contrainte dans l'hypothèse (A3), qui est modifiée de telle manière que les coefficients $\lambda_1$ et $\lambda_2$ satisfassent : $\exists\ C_i > 0, i = 1, 2, 3, 4, C_4 < k_4^{-1}, \theta > 0$ tels que

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 \quad & < -\frac{1}{2}\left[k_3C_3\left(\frac{k_2C_2 + k_7^2}{1 - k_4C_4} + \frac{k_1C_1 + k_6^2}{\theta}\right)\right. \\ + \quad & \left. k_1C_1^{-1} + k_2C_2^{-1} + k_3C_3^{-1} + k_4C_4^{-1} + k_5^2 + \theta\right] \end{aligned} \tag{2.56}$$

où les $k_i$ ont été définis dans les hypothèses $(A1)$ à $(A8)$.

*(I3)* $\sigma$ est indépendante de $z$ : le portefeuille n'influe pas sur la volatilité des prix, et de plus l'hypothèse (A3) est modifiée pour avoir $\exists C_i > 0, i = 1, 3, 4,\ C_4 < k_4^{-1},\ \theta > 0,\ \alpha > 0$ tels que

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 \quad & < -\frac{1}{2}\left[(1+\alpha)\left[k_1C_1 + k_6^2 + \frac{k_2^2}{\alpha(1 - k_4C_4)}\right]\left(k_8^2 + \frac{k_3C_3}{\theta}\right)\right. \\ + \quad & \left. k_1C_1^{-1} + k_3C_3^{-1} + k_4C_4^{-1} + k_5^2 + \theta\right] \end{aligned} \tag{2.57}$$

où les $k_i$ ont été définis dans les hypothèses $(A1)$ à $(A8)$.

Dans ces trois cas, les théorèmes d'existence et d'unicité de solutions donnés par E. Pardoux et S. Tang [PT99] restent vérifiés dans l'espace grossi.

**Theorem 2.2.1** *On suppose les hypothèses A1 à A6, A7′ et A8 vérifiées. On suppose que l'on est dans l'un des trois cas I1 à I3. Alors le système différentiel progressif-rétrograde suivant :*

$$\left\{\begin{array}{l} P_t = P_0 + \int_0^t b(s, P_s, X_s, Z_s)ds + \int_0^t < \sigma(s, P_s, X_s, Z_s), dW_s > \\ X_t = g(P_T) - \int_t^T f(s, P_s, X_s, Z_s)ds - \int_t^T < Z_s, dW_s > \end{array}\right. \tag{2.58}$$

*admet dans l'espace* $(\Omega, \mathcal{Y}, Q)$ *une unique solution* $(P, X, Z)$ $\mathcal{Y}$*-adaptée telle que*

$$E_{\mathbb{Q}} \int_0^T \left(\sup_{0 \le u \le t} |P_t|^2 + \sup_{0 \le u \le t} |X_t|^2 + \parallel Z_t \parallel^2\right) dt < +\infty \tag{2.59}$$

**Preuve :** Les 4 lemmes et les mêmes arguments que E. Pardoux et S. Tang [PT99] nous permettent, dans les cas 1 et 3, de terminer la démonstration en prouvant que $\Gamma_1$ est une contraction stricte (les majorations de normes utilisées ne changent ni par changement de probabilité ni par changement de filtration) et dans le cas 2, en montrant que $\Gamma_2$ est une contraction stricte.

*(I1)/ Faible couplage des équations progressive et rétrograde*

Nous montrons ici que $\Gamma$ est une contraction stricte pour la norme $\| \,.\, \|_\lambda$.
D'après les majorations (2.54), on trouve :

$$\begin{aligned} &\| \Delta\bar{X} \|_\lambda^2 + \| \Delta\bar{Z} \|_\lambda^2 \\ \leq &\left[\frac{1-e^{-\bar{\lambda_2}T}}{\bar{\lambda_2}} + \frac{1}{1-k_4C_4}\right]\left(k_8^2(1 \vee e^{-\bar{\lambda_1}T}) + k_3C_3\frac{1-e^{-\bar{\lambda_1}T}}{\bar{\lambda_1}}\right) \\ &\times \left((k_1C_1+k_6^2) \| \Delta X \|_\lambda^2 + (k_2C_2+k_7^2) \| \Delta Z \|_\lambda^2\right) \end{aligned} \tag{2.60}$$

Ainsi, dès que

$$\begin{aligned} k_1C_1 + k_6^2 &< \left[\frac{1-e^{-\bar{\lambda_2}T}}{\bar{\lambda_2}} + \frac{1}{1-k_4C_4}\right]^{-1}\left(k_8^2(1 \vee e^{-\bar{\lambda_1}T}) + k_3C_3\frac{1-e^{-\bar{\lambda_1}T}}{\bar{\lambda_1}}\right)^{-1}, \\ k_2C_2 + k_7^2 &< \left[\frac{1-e^{-\bar{\lambda_2}T}}{\bar{\lambda_2}} + \frac{1}{1-k_4C_4}\right]^{-1}\left(k_8^2(1 \vee e^{-\bar{\lambda_1}T}) + k_3C_3\frac{1-e^{-\bar{\lambda_1}T}}{\bar{\lambda_1}}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{2.61}$$

$\Gamma_1$ est une contraction stricte. Donc l'existence de $\varepsilon_0$ qui dépend de $k_3, k_4, k_8, \lambda_1, \lambda_2, T$ tel que si $k_1, k_2, k_6, k_7 \in [0, \varepsilon_0)$ montre que $\Gamma_1$ est une contraction stricte, et donc il existe une unique solution adaptée $(P, X, Z)$ à l'EDSPR (2.9).

*(I2)/ L'objectif est indépendant des prix*

On suppose ici que $g$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable indépendante des prix, c'est-à-dire $k_8 = 0$, et que de plus l'hypothèse (A3) est modifiée de telle manière que les coefficients $\lambda_1$ et $\lambda_2$ vérifient $\exists\ C_i > 0, i = 1,2,3,4, C_4 < k_4^{-1}, \theta > 0$ tels que

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &< -\frac{1}{2}\left[k_3C_3\left(\frac{k_2C_2+k_7^2}{1-k_4C_4} + \frac{k_1C_1+k_6^2}{\theta}\right)\right. \\ &+ \left. k_1C_1^{-1} + k_2C_2^{-1} + k_3C_3^{-1} + k_4C_4^{-1} + k_5^2 + \theta\right] \end{aligned} \tag{2.62}$$

Choisissons d'abord

$$\lambda = -(2\lambda_2 + k_3C_3^{-1} + k_4C_4^{-1} + \theta)$$

Alors par définition de $\bar{\lambda}_2$ dans le lemme 2.2.3 et de $\bar{\lambda}_1$ dans le lemme 2.2.2,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda_2} &= \theta > 0 \\ \bar{\lambda_1} &= -(2\lambda_1 + 2\lambda_2 + k_1C_1^{-1} + k_2C_2^{-1} + k_3C_3^{-1} + k_4C_4^{-1} + k_5^2 + \theta) \end{aligned}$$

ce qui d'après (2.62) est supérieur à

$$k_3C_3(\frac{k_2C_2+k_7^2}{1-k_4C_4}+\frac{k_1C_1+k_6^2}{\theta})>0.$$

Montrons alors que $\Gamma_2$ est une contraction stricte. D'après les lemmes 2.2.4 et 2.2.5, on a :

$$\begin{aligned}
\| \Delta\bar{P} \|_\lambda^2 &\leq \frac{1-e^{-\bar{\lambda_1}T}}{\bar{\lambda_1}}\left[(k_1C_1+k_6^2)\| \Delta\bar{X} \|_\lambda^2+(k_2C_2+k_7^2)\| \Delta\bar{Z} \|_\lambda^2\right]\\
\| \Delta\bar{X} \|_\lambda^2 &\leq \frac{1-e^{-\bar{\lambda_2}T}}{\bar{\lambda_2}}k_3C_3\| \Delta P \|_\lambda^2\\
\| \Delta\bar{Z} \|_\lambda^2 &\leq \frac{k_3C_3}{1-k_4C_4}\| \Delta P \|_\lambda^2
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Et ainsi, on obtient :

$$\| \Delta\bar{P} \|_\lambda^2\leq \frac{1-e^{-\bar{\lambda_1}T}}{\bar{\lambda_1}}k_3C_3\left(\frac{k_2C_2+k_7^2}{1-k_4C_4}+\frac{k_1C_1+k_6^2}{\theta}\right)\| \Delta P \|_\lambda^2 \tag{2.64}$$

Ainsi, dès que l'on a (2.62), on a bien

$$\bar{\lambda_1}>k_3C_3\left(\frac{k_2C_2+k_7^2}{1-k_4C_4}+\frac{k_1C_1+k_6^2}{\theta}\right)$$

donc le coefficient de $\| \Delta P \|_\lambda^2$ dans (2.64) est bien positif et strictement plus petit que 1. Ainsi, $\Gamma_2$ est une contraction stricte, admet un unique point fixe, et il existe donc une unique solution à l'EDSPR (2.9).

*(I3)/ Le coefficient de diffusion $\sigma$ ne dépend pas du portefeuille et l'hypothèse (A3) est modifiée.*

Nous supposons donc ici que $k_7=0$ et que de nouveau l'hypothèse $(A3)$ est modifiée, de telle manière que les coefficients $\lambda_1$ et $\lambda_2$ vérifient cette fois $\exists C_i>0, i=1,3,4,\ C_4<k_4^{-1},\ \theta>0,\ \alpha>0$ tels que

$$\begin{aligned}
\lambda_1+\lambda_2 \qquad &< -\frac{1}{2}\left[(1+\alpha)\left[k_1C_1+k_6^2+\frac{k_2^2}{\alpha(1-k_4C_4)}\right]\left(k_8^2+\frac{k_3C_3}{\theta}\right)\right.\\
&+\left. k_1C_1^{-1}+k_3C_3^{-1}+k_4C_4^{-1}+k_5^2+\theta\right]
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Dans ce cas, on montre que $\Gamma_1$ est une contraction stricte, ce qui permet une fois encore de conclure à l'existence et l'unicité de la solution de l'EDSPR (2.9).
Choisissons d'abord

$$\lambda=2\lambda_1+k_1C_1^{-1}+k_2C_2^{-1}+k_5^2+\theta$$

Alors

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda_1} &= \theta>0\\
\bar{\lambda_2} &= -(2\lambda_1+2\lambda_2+k_1C_1^{-1}+k_2C_2^{-1}+k_3C_3^{-1}+k_4C_4^{-1}+k_5^2+\theta).
\end{aligned}$$

D'après (2.65)

$$\bar{\lambda_2} + k_2 C_2^{-1} > (1+\alpha)\left[k_1 C_1 + k_6^2 + \frac{k_2^2}{\alpha(1-k_4C_4)}\right]\left(k_8^2 + \frac{k_3C_3}{\theta}\right)$$

donc $\bar{\lambda_2} + k_2 C_2^{-1} > 0$ puisque tous les coefficients du membre de droite le sont.
Comme cela est vrai pour tout $C_2 > 0$, on en déduit que $\bar{\lambda_2} > 0$. Comme $k_7 = 0$, on déduit des majorations (2.54) et (2.55), puisque $\bar{\lambda_2} > 0$ :

$$\begin{aligned}
\| \Delta\bar{X} \|_\lambda^2 &\leq \frac{1}{\bar{\lambda_2}}\left(k_8^2 + k_3C_3\frac{1-e^{-\bar{\lambda_1}T}}{\bar{\lambda_1}}\right)\left[(k_1C_1 + k_6^2) \| \Delta X \|_\lambda^2 + (k_2C_2) \| \Delta Z \|_\lambda^2\right] \\
\| \Delta\bar{Z} \|_\lambda^2 &\leq \frac{1}{1-k_4C_4}\left(k_8^2 + k_3C_3\frac{1-e^{-\bar{\lambda_1}T}}{\bar{\lambda_1}}\right)\left[(k_1C_1 + k_6^2) \| \Delta X \|_\lambda^2 + (k_2C_2) \| \Delta Z \|_\lambda^2\right]
\end{aligned}$$

Posons

$$\gamma = \alpha\frac{1-k_4C_4}{\bar{\lambda_2}}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\| \Delta\bar{X} \|_\lambda^2 + \gamma \| \Delta\bar{Z} \|_\lambda^2 \leq &\frac{1+\alpha}{\bar{\lambda_2}}\left(k_8^2 + k_3C_3\frac{1-e^{-\bar{\lambda_1}T}}{\bar{\lambda_1}}\right) \\
&\times(k_1C_1 + k_6^2)\left[\| \Delta X \|_\lambda^2 + \frac{k_2C_2}{\alpha(1-k_4C_4)(k_1C_1+k_6^2)}\bar{\lambda_2}\gamma \| \Delta Z \|_\lambda^2\right]
\end{aligned}$$

En choisissant

$$C_2^{-1} = \frac{k_2\bar{\lambda_2}}{\alpha(1-k_4C_4)(k_1C_1+k_6^2)}$$

et en combinant avec les inégalités précédentes, on obtient

$$\bar{\lambda_2} > (1+\alpha)\left(k_8^2 + \frac{k_3C_3}{\theta}\right)\left(k_1C_1 + k_6^2\right)$$

et

$$\| \Delta\bar{X} \|_\lambda^2 + \gamma \| \Delta\bar{Z} \|_\lambda^2 \leq \frac{1+\alpha}{\bar{\lambda_2}}\left(k_8^2 + \frac{k_3C_3}{\theta}\right)(k_1C_1 + k_6^2)\left[\| \Delta X \|_\lambda^2 + \gamma \| \bar{Z} \|_\lambda^2\right].$$

On obtient ainsi que $\Gamma_1$ est une contraction stricte dès que la condition (2.65) est satisfaite. Elle admet donc un unique point fixe, qui est l'unique solution de l'EDSPR (2.9). □

## 2.3 Borne sur la richesse

**Proposition 2.3.1** *Sous les hypothèses* $(A1)$ *et* $(A8)$, $\forall \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$, *si* $k_3$*=0 et si* $f(s,0,0,0)$ *est borné, alors on a une majoration de* $X_t$ *solution de l'EDSPR 2.9 :*

$$|X_t|^2 \leq e^{-\lambda(T-t)} E_{\mathbb{Q}}\left( |\xi|^2 \middle| \mathcal{Y}_t \right) + \frac{1}{\varepsilon} E_{\mathbb{Q}} \left( \int_t^T e^{-\lambda(s-t)} |f(s,0,0,0)|^2 ds \middle| \mathcal{Y}_t \right) \tag{2.66}$$

*où* $\lambda = -(2\lambda_2 + \varepsilon + k_4 C_4^{-1})$, *avec* $\varepsilon > 0$ *et* $0 < C_4 \leq k_4^{-1}$.

**Preuve :** Appliquons le lemme d'Itô au processus $e^{-\lambda t}|X_t|^2$ entre $t$ et $T$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t}|X_t|^2 + \int_0^T e^{-\lambda s}|Z_s|^2 ds &= e^{-\lambda T}|\xi|^2 \\ +\lambda \int_t^T e^{-\lambda s}|X_s|^2 ds &+ 2\int_t^T X_s f(s,P_s,X_s,Z_s) e^{-\lambda s} ds - 2\int_t^T X_s Z_s e^{-\lambda s} dW_s \end{aligned} \tag{2.67}$$

On prend l'espérance conditionnelle de cette expression par rapport à la tribu $\mathcal{Y}_t$ et la probabilité $\mathbb{Q}$, ce qui permet d'éliminer le dernier terme, par indépendance des accroissements du Brownien, comme $W$ est un $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q})$-brownien. En majorant les termes grâce aux hypothèses $(A3), (A4)$ et comme $k_3 = 0$, on obtient, $\forall \varepsilon, C_3, C_4 > 0$ :

$$\begin{aligned} |X_t|^2 e^{-\lambda t} &\leq e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}}\left( |\xi|^2 \middle| \mathcal{Y}_t \right) \\ &+ \left( \lambda + 2\lambda_2 + \varepsilon + \frac{k_4}{C_4} \right) E_{\mathbb{Q}} \left( \int_t^T e^{-\lambda s}|X_s|^2 ds \middle| \mathcal{Y}_s \right) \\ &+ (k_4 C_4 - 1) E_{\mathbb{Q}} \left( \int_t^T e^{-\lambda s}|Z_s|^2 ds \middle| \mathcal{Y}_s \right) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} E_{\mathbb{Q}} \left( \int_t^T e^{-\lambda s}|f(s,0,0,0)|^2 ds \middle| \mathcal{Y}_s \right) \end{aligned} \tag{2.68}$$

Ainsi, en choisissant $\lambda = -(2\lambda_2 + \varepsilon + k_4 C_4^{-1})$, et $0 < C_4 \leq k_4^{-1}$, comme $X$ solution de l'EDSPR (2.9) satisfait $E_Q(\int_0^T |X_t|^2 dt) < +\infty$ (voir lemme 2.2.1), on peut annuler le second terme et rendre le troisième terme négatif. Ainsi, il reste la majoration suivante recherchée :

$$\begin{aligned} |X_t|^2 e^{-\lambda t} &\leq e^{-\lambda T} E_{\mathbb{Q}}\left( |\xi|^2 \middle| \mathcal{Y}_t \right) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} E_{\mathbb{Q}} \left( \int_t^T e^{-\lambda s}|f(s,0,0,0)|^2 ds \middle| \mathcal{Y}_s \right) \end{aligned} \tag{2.69}$$

□

**Corollaire 2.3.1** *Si de plus* $\xi$ *est borné, alors le processus* $X$ *est borné.*

**Preuve :** Cela apparaît immédiatement à partir de l'équation 2.66 puisque le membre de droite est alors borné. □

**Remarque :** $k_3 = 0$ dans la proposition 2.3.1 et le corollaire 2.3.1 signifie que $f$ ne dépend pas de $p$. Ce qui, dans notre cadre où

$$f(s,p,x,z) = xr(s,x,z) - c_s + < \sigma'^{*^{-1}} z, b'(s,p,x,z) - r(s,x,z).\mathbb{1} >$$

signifie que $b'$ est indépendant de $p$, mais peut bien entendu dépendre de $x$ et de $z$, on peut donc avoir un modèle du type Black et Scholes où l'on introduit de l'influence en $x$ et $z$ dans les paramètres.

**Application financière :** Nous pouvons trouver un exemple simple d'une telle situation dans un cas où les prix sont dirigés par un mouvement brownien géométrique (modèle de Black et Scholes), sans influence donc, on a

$$f(s,p,x,z) = xr + \sigma'^{-1}(b' - r)z.$$

$f$ ne dépend pas de la variable $p$, donc $k_3 = 0$, et $f(s,0,0,0) = 0$ donc est a fortiori borné. Les hypothèses $(A1)$ à $(A8)$ sont satisfaites, avec $k_1 = k_2 = k_3 = k_6 = k_7 = 0$, et nous sommes dans le cas $(I1)$.
On a dans tous les cas de pay-off $\xi$ à couvrir la majoration sur $X$ :

$$|X_t|^2 \leq e^{-\lambda(T-t)} E_{\mathbb{Q}}\left(|\xi|^2 \middle| \mathcal{F}_t\right) \tag{2.70}$$

Et donc dans le cas d'un pay-off $\xi$ borné (par exemple une option de vente européenne $(K - P_T)_+$, bornée par $K$, nous avons :

$$|X_t|^2 \leq e^{-\lambda(T-t)} K^2 \leq e^{-\lambda T} K^2 \tag{2.71}$$

la richesse est bien bornée.
Sous ces hypothèses, si l'objectif de couverture est borné, alors la richesse l'est aussi.

## 2.4 Interprétation financière

Dans ces différents cas particuliers d'influence $(I1)$, $(I2)$ et $(I3)$, l'équation différentielle stochastique progressive rétrograde ayant une unique solution dans l'espace grossi, cela signifie que l'agent influent considéré a une unique stratégie de couverture dans l'espace grossi ; nous avons supposé $\sigma$ inversible, ce qui permet, à partir de $Z_t$, de trouver l'unique portefeuille $\pi_t$ répliquant l'objectif : $\pi_t = \sigma_t'^{-1} Z_t$

**Remarque 1 :** Si la solution de l'initié est adaptée à la petite filtration, alors c'est la même que s'il n'avait pas l'information.

**Remarque 2 :** Tout actif contingent de $L^2(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$ vérifiant l'hypothèse (A6) est donc atteignable. En fait, le marché relativement à la filtration grossie est complet pour l'initié. Le problème de couverture dans ce marché se réduit à un problème de résolution explicite d'EDSPR, dont le couplage est fonction de l'influence de l'agent sur le marché.

Nous obtenons donc ici les mêmes résultats d'existence et d'unicité que pour la solution d'une EDSR grossie, voir A. Eyraud-Loisel 2004 [EL05], chapitre 1 de cette thèse. En effet, comme nous venons de le montrer, les démonstrations standard s'adaptent au cas d'une filtration grossie, même avec un changement de probabilité, et avec une $\sigma$-algèbre initiale non triviale. Le point clé, comme nous l'avions soulevé dans le chapitre 1, est la présence sous l'hypothèse $(\mathbf{H_3})$ d'un théorème de représentation de martingales dans l'espace grossi. Ce point est ici un peu "caché", puisqu'il intervient surtout implicitement dans l'utilisation du théorème 1.2.1 du chapitre 1. Il n'en est pas moins crucial.

Ce qui change par rapport au modèle sans influence du chapitre 1 est la forme du marché lorsque l'information n'est plus disponible. En effet, étant donnée l'influence de l'agent informé, le marché sans l'information supplémentaire n'est plus complet. Nous allons développer ce point de vue dans la partie suivante. La différence avec le cadre du premier chapitre de cette thèse est que l'hypothèse d'agent influent, ou grand investisseur sur le marché rend le manque d'information "palpable" pour un petit investisseur. Ainsi, nous avons un exemple de marché complet, qui devient incomplet du point de vue d'un petit investisseur.

# Chapitre 3

# Agent influent et informé : Couverture en marché incomplet

## 3.1 Introduction d'un agent non informé

Nous nous plaçons ici dans l'un des trois cas d'influence, *(I1)* à *(I3)*, pour lesquels nous avons une unique solution au problème de couverture par l'agent initié (voir théorème 2.2.1). Les prix du marché sont alors influencés par l'investissement de l'agent initié. Considérons à présent, toujours sur le même marché, sous les mêmes hypothèses, le point de vue d'un agent non informé (ou agent $N$), supposé petit investisseur, c'est-à-dire n'ayant aucune influence sur les prix des actifs, qui investit sur le marché influencé par l'agent informé (agent $I$). Nous sommes ramenés à l'étude d'un marché en information partielle : l'agent $N$ ne peut observer *que* les prix. Les processus (en particulier le mouvement brownien) apparaissant dans l'EDSR de couverture du petit investisseur ne sont pas observables directement sur le marché. L'historique des prix des actifs risqués est l'unique information disponible. L'agent non informé $N$ n'a donc à sa disposition que la filtration engendrée par les prix

$$\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_t^P := \sigma(P_s, 0 \leq s \leq t)$$

pour investir sur le marché. Sa stratégie de portefeuille, et donc sa richesse, devront être des processus $\tilde{\mathcal{F}}$-adaptés.

Supposons que le petit investisseur $N$ non informé veuille couvrir une option. Du fait que les stratégies d'investissement appartiennent à deux ensembles différents, l'ensemble des stratégies admissibles diffère : même si le marché initié est complet, le marché non initié ne l'est pas forcément. Si l'investisseur $N$ a une stratégie de couverture, elle sera a priori différente de celle de l'investisseur $I$, qui a une stratégie de réplication exacte, $\mathcal{Y}$-adaptée. Etre en marché complet, comme nous l'avons défini page 12 définition 3 dans l'introduction, dépend de la filtration et de la probabilité considérée : tout dépend de l'existence ou non d'un théorème de représentation, que nous avons sous l'hypothèse $(H_3)$ dans l'espace grossi $\mathcal{Y}$, sous la probabilité $\mathbb{Q}$, et dans l'espace brownien $\mathcal{F}$ sous la probabilité $\mathbb{P}$, mais pas dans l'espace $\tilde{\mathcal{F}}$. Nous sommes donc amenés à étudier un problème de couverture en marché incomplet.

Nous montrons tout d'abord dans le paragraphe 3.2 proposition 3.2.1 que la décomposition de Kunita-Watanabe de $H$ dans la filtration des prix et sous toute probabilité neutre au risque du point de vue de l'initié, a pour intégrand le projeté sous cette probabilité et relativement à cette filtration, de l'intégrand de la représentation dans la grosse filtration.

Nous établissons dans la section 3.3 une formule de Clark-Ocone dans l'espace grossi, qui permet d'obtenir l'expression de l'intégrand dans le théorème de représentation dans cet espace.

Nous obtenons ensuite une expression du risque résiduel quadratique lié au manque d'information de l'agent non informé, successivement sous deux familles de probabilités neutres au risque, celles neutres au risque pour l'initié dans le paragraphe 3.4.1 et celles neutres au risque pour l'agent non informé dans le paragraphe 3.4.2.

Enfin, dans un dernier paragraphe, nous présentons un modèle de marché, d'influence et d'information rentrant dans le cadre de notre étude et vérifiant toutes nos hypothèses, et nous exprimons les différentes stratégies de couverture des agents selon les formulations développées auparavant.

## 3.2 Stratégie de couverture et décomposition de Kunita-Watanabe

Les relations entre les différentes tribus considérées s'écrivent :

$$\tilde{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{Y}_t \quad , \text{et } \mathcal{F}_t \subset \mathcal{Y}_t$$
$$\mathcal{Y}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \vee \sigma(L) = \bigcap_{s>t} \tilde{\mathcal{F}}_s \vee \sigma(L).$$

Nous considérerons ici, dans un souci de simplification des notations, un seul actif risqué, mais les résultats qui suivent se généralisent aisément au cas $d$-dimensionnel. La dynamique du prix de l'actif risqué vérifie l'équation progressive suivante :

$$P_t = P_0 + \int_0^t P_s b'(s, P_s, X_s^L, \pi_s^L) ds + \int_0^t P_s \sigma'(s, P_s, X_s^L, \pi_s^L) dW_s \tag{3.1}$$

où $P_s$, $X_s^L$ et $\pi_s^L$ sont respectivement le prix de l'actif risqué, la richesse et la stratégie de couverture de l'agent initié, déduites de l'unique solution de l'EDSPR de la partie précédente (voir théorème 2.2.1).

L'agent $N$ cherche à couvrir une option européenne $H = h(P_T) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{Q})$. Dans un premier temps, cette option n'est pas forcément la même que celle couverte par l'agent initié $I$. Cela nous permettra de comparer les investissements d'un petit investisseur possédant toute l'information, y compris l'information privée, et un petit investisseur ne pouvant qu'observer les prix sur le marché, et donc ne possédant qu'une partie de l'information totale. Nous pourrons regarder ensuite le cas particulier de la même option que l'initié dans le but de comparer les stratégies de couverture des deux agents, non informé, et informé influent.

Nous nous plaçons sous $\mathbb{Q}$, la probabilité de la partie précédente (définition 4 page 53) sous laquelle on a l'hypothèse ($\mathbf{H_3}$), c'est-à-dire sous laquelle $W_t$ est un $\mathcal{Y}$-brownien, et donc $P_t$ est une $(\mathcal{Y}, Q)$-semi-martingale. Comme $P_t$ est $\tilde{\mathcal{F}}$-adapté, c'est aussi une $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{Q})$-semi-martingale. Ce marché n'est pas complet : en effet, comme l'option $H$ est atteignable dans $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q})$, la stratégie réplicante est adaptée à la filtration $\mathcal{Y}$, et n'est donc pas admissible pour l'agent $N$ dans l'espace plus petit. Nous allons développer des arguments de couverture quadratique introduits par Föllmer et Schweizer [FS91] afin de chercher la stratégie de couverture de l'agent N qui va minimiser le risque résiduel intrinsèque à la possession de son option, risque lié au fait qu'il lui manque une partie de l'information régissant le marché (l'information se transmet sur le marché du fait de l'influence).

Mathématiquement, le problème essentiel d'où provient l'incomplétude réside dans le fait qu'il existe un théorème de représentation des martingales dans l'espace $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ (Itô), et dans l'espace $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q})$ (voir J. Jacod et A.N. Shiryaev [JS03] et A. Eyraud-Loisel [EL05]), mais pas dans $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{Q})$.

On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble des mesures martingales sous la filtration $\mathcal{Y}$ équivalentes à $\mathbb{Q}$, c'est à dire l'ensemble des mesures de probabilités équivalentes à $\mathbb{Q}$, donc à $\mathbb{P}$, sous

lesquelles $P$ est une $\mathcal{Y}$-martingale, ensemble des probabilités neutres au risque pour l'agent initié.
Notons également $\mathcal{Q}_N$ l'ensemble des mesures martingales sur la filtration $\tilde{\mathcal{F}}$, équivalentes à $\mathbb{P}$, ensemble des mesures de probabilités équivalentes à $\mathbb{P}$, donc à $\mathbb{Q}$, sous lesquelles $P$ est une $\tilde{\mathcal{F}}$-martingale. C'est l'ensemble des probabilités neutres au risque pour l'agent non initié.
On a de manière évidente

$$\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}_N$$

En effet, intuitivement, de par son manque d'information, l'agent non initié aura plus de mesures neutres au risque : certaines apparaîtront neutres au risque de son point de vue, alors qu'en disposant de l'information supplémentaire, il apparaît qu'elles ne le sont pas. Et réciproquement, toute probabilité neutre au risque pour l'agent initié est neutre au risque pour l'agent non initié, puisque si $P$ est une $\mathcal{Y}$-martingale, comme il est adapté à $\tilde{\mathcal{F}}$, c'est une $\tilde{\mathcal{F}}$-martingale.
De plus, $\mathcal{Q} \neq \emptyset$, puisque nous avons supposé $\sigma'$ inversible et $\mathcal{E}(-\sigma'^{-1}(b'-r)W)$ intégrable (voir hypothèses $(A1)$), arguments classiques entraînant l'absence d'opportunité d'arbitrage (voir par exemple F. Delbaen et W. Schachermayer [DS94]).

Rappelons d'abord la définition d'orthogonalité (voir P. Protter [PRO01], et H. Pham [PHA00]) :

**Définition 5** *Deux martingales $L, N$ sont (fortement) orthogonales si leur produit $LN$ est une martingale locale de valeur initiale $L_0N_0 = 0$.
Si $L$ et $N \in \mathcal{M}^2_{loc}$, cela est équivalent à $< L, N >= 0$.*

Nous donnons ensuite la définition de la décomposition de Kunita-Watanabe (voir J.P. Ansel et C. Stricker [AS93] ou H. Pham [PHA00]) sur un espace probabilisé filtré général $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

**Définition 6** *Soit $N$ une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale locale à valeurs réelles, et $M$ une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale locale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Si $N \in \mathcal{M}^2_{(loc)}(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ ($(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale locale de carré intégrable sous $\mathbb{P}$) et $M \in \mathcal{M}^2_{(loc)}(\mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors on a le résultat de projection suivant, appelée* **décomposition de Kunita-Watanabe** *de la $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale $N$ par rapport à $M$ :*

$$N_t = N_0 + \int_0^t \theta_u dM_u + L_t, \quad \mathbb{P} - p.s. \quad 0 \leq t \leq T \tag{3.2}$$

*où $\theta \in L^2_{(loc)}(M)$, $L \in \mathcal{M}^2_{0,(loc)}(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ ($(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale locale de carré intégrable sous $\mathbb{P}$ et de valeur initiale 0) et $L$ orthogonale à $M$ dans $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$.
La décomposition 3.2 est unique au sens où si*

$$N_t = N_0 + \int_0^t \theta_u dM_u + L_t = \tilde{N}_0 + \int_0^t \tilde{\theta}_u dM_u + \tilde{L}_t$$

*avec $(N_0, \theta, L)$ et $(\tilde{N}_0, \tilde{\theta}, \tilde{L})$ satisfaisant les hypothèses du théorème de Kunita-Watanabe, alors $N_0 = \tilde{N}_0$, $\int_0^t \theta_u dM_u = \int_0^t \tilde{\theta}_u dM_u$ et $L_t = \tilde{L}_t$ $\mathbb{P}$-p.s. $\forall 0 \leq t \leq T$.
Remarquons également que si $M$ et $N$ sont dans $\mathcal{M}^2(\mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors $\theta \in L^2(M)$ et $L \in \mathcal{M}^2_0(\mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

Plaçons-nous sous une probabilité $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}$ neutre au risque, $\tilde{\mathbb{Q}}$ équivalente à $\mathbb{Q}$, sous laquelle $P$ est une $(\mathcal{Y}, \tilde{\mathbb{Q}})$-martingale. Puisque $P_t$ est $\tilde{\mathcal{F}}$-adapté, c'est donc une $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{Q}})$-martingale.

$H \in \mathcal{L}^2(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{Q}})$ est atteignable par rapport à la grosse filtration, le théorème de représentation dans $\mathcal{Y}$ nous donne donc l'existence de $\phi_s^L \in L^2(\Omega \times [0,T], \tilde{\mathbb{Q}} \otimes d\langle P\rangle)$

$$\begin{aligned} H &= E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H|\mathcal{Y}_0) + \int_0^T \phi_s^L dP_s \\ &= E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H|\sigma(L)) + \int_0^T \phi_s^L dP_s \end{aligned} \tag{3.3}$$

**Remarque :** cette décomposition ne dépend pas du choix de $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}$ probabilité neutre au risque du point de vue de l'agent initié. En effet, d'après A. Grorud et M. Pontier [GP99], soient $\tilde{\mathbb{Q}}_1$ et $\tilde{\mathbb{Q}}_2$ deux probabilités neutres au risque de $\mathcal{Q}$, alors $\tilde{\mathbb{Q}}_1 = f(L)\tilde{\mathbb{Q}}_2$, où $f(L)$ est une variable aléatoire positive, d'espérance 1 sous $\tilde{\mathbb{Q}}_2$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} E_{\tilde{\mathbb{Q}}_1}(H|\sigma(L)) &= \frac{E_{\tilde{\mathbb{Q}}_2}(f(L)H|\sigma(L))}{E_{\tilde{\mathbb{Q}}_2}(f(L)|\sigma(L))} \\ &= \frac{f(L)E_{\tilde{\mathbb{Q}}_2}(H|\sigma(L))}{f(L)} \\ &= E_{\tilde{\mathbb{Q}}_2}(H|\sigma(L)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ainsi, $E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H|\sigma(L))$ ne dépend pas du choix de $\tilde{\mathbb{Q}}$ neutre au risque de $\mathcal{Q}$. Par suite, $\phi_s^L$ ne dépend pas non plus de la probabilité considérée.

Ici, lorsque $H$ représente l'option considérée par l'agent initié, on a $\phi_s^L = \pi_s^L$ qui est la stratégie de couverture de l'initié, $\mathcal{Y}$-adaptée (voir partie 2.2).

De plus, nous sommes dans un cadre continu, où les martingales sont de carré localement intégrable. Nous avons donc la décomposition unique de Kunita-Watanabe (voir définition 3.2) de $H$ relativement à la $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{Q}})$-martingale $P$, valable pour toute $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}_N$ :

$$H = E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H) + \int_0^T \phi_s^{\tilde{\mathbb{Q}}} dP_s + L_T^{\tilde{\mathbb{Q}}} \tag{3.5}$$

et même

$$V_t := E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H|\tilde{\mathcal{F}}_t) = E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H) + \int_0^t \phi_s^{\tilde{\mathbb{Q}}} dP_s + L_t^{\tilde{\mathbb{Q}}} \tag{3.6}$$

où $\phi_s^{\tilde{\mathbb{Q}}}$ est $\tilde{\mathcal{F}}_s$-mesurable, dans $L^2(\Omega \times [0,T], \tilde{\mathbb{Q}} \otimes d\langle P\rangle)$ et où le reste $(L_t^{\tilde{\mathbb{Q}}})$ est une $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{Q}})$-martingale locale orthogonale à l'espace stable engendré par $P$, d'espérance nulle $E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(L_t^{\tilde{\mathbb{Q}}}) = 0$.

On a la formulation de H. Föllmer et M. Schweizer [FS91] de l'intégrand :

$$\phi_s^{\tilde{\mathbb{Q}}} = \frac{d < V, P >_s}{d < P >_s}$$

Cette formulation n'étant pas ici exploitable, nous en donnons une en terme de projection sur l'espace des processus $\tilde{\mathcal{F}}$-adaptés sous n'importe quelle mesure martingale équivalente $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}$ par le théorème suivant :

**Proposition 3.2.1** *Sous toute probabilité neutre au risque $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}$, on a la décomposition de Kunita-Watanabe relative à $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{Q}})$ et au processus $P$*

$$H = E_{\tilde{\mathbb{Q}}}[H] + \int_0^T E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\phi_s^L | \tilde{\mathcal{F}}_s\right) dP_s + L_T^{\tilde{\mathbb{Q}}} \quad p.s. \tag{3.7}$$

*c'est-à-dire*

$$\phi_s^{\tilde{\mathbb{Q}}} = E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\phi_s^L | \tilde{\mathcal{F}}_s\right) \tag{3.8}$$

**Preuve :** Si $E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s)$ vérifie les hypothèses du théorème de décomposition de Kunita-Watanabe donné dans la définition 6, c'est bien $\phi_s^{\tilde{\mathbb{Q}}}$ par unicité de cette décomposition.

Tout d'abord, $\left(E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s)\right)_{0 \leq s \leq T}$ est bien $\tilde{\mathcal{F}}$-adapté. Posons :

$$L_t = E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H|\tilde{\mathcal{F}}_t) - E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H) - \int_0^t E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s) dP_s \tag{3.9}$$

Il suffit de montrer que $L$ est une $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{Q}})$-martingale d'espérance nulle orthogonale à $P$. $L$ est bien une $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{Q}})$-martingale : $P$ est une $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{Q}})$-martingale, donc $\int_0^t E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s)dP_s$ est une $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{Q}})$-martingale comme intégrale d'un processus $\tilde{\mathcal{F}}$-adapté de carré intégrable suivant une $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{Q}})$-martingale, et $E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H|\tilde{\mathcal{F}}_t)$ est une $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{Q}})$-martingale. De plus,

$$E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(L_t) = E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H) - E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H) - E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\int_0^t E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s)dP_s\right) = 0$$

le dernier terme étant l'espérance d'une $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{Q}})$-martingale nulle en 0.

Il reste donc à montrer que $L$ est bien orthogonale aux martingales engendrées par $dP$, espace stable engendré par $P$, noté $\mathcal{M}(dP)$. Utilisant la décomposition (3.3) de $H$ dans $(\mathcal{Y}, \tilde{\mathbb{Q}})$, on obtient :

$$\begin{aligned} L_t &= E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H|L) + \int_0^T \phi_s^L dP_s \middle| \tilde{\mathcal{F}}_t\right) - E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H) - \int_0^t E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s)dP_s \\ &= E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[\int_0^T \phi_s^L dP_s|\tilde{\mathcal{F}}_t\right] - \int_0^t E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s\right] dP_s \\ &\quad + \underbrace{E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H|\sigma(L))|\tilde{\mathcal{F}}_t\right) - E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H)}_{N_t} \end{aligned} \tag{3.10}$$

où le dernier terme $N_t$ est $\tilde{\mathcal{F}}_t$-mesurable.

Nous utilisons maintenant le lemme suivant, résultat classique de filtrage (voir par exemple le cours de l'école d'été de probabilités de Saint-Flour de E. Pardoux en 1989 sur le filtrage non linéaire [PAR91])

**Lemme 3.2.1** *Soit $M$ une $(\mathcal{F},\tilde{\mathbb{Q}})$-martingale, $\theta \in L^2_{loc}(M)$ sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega,\mathcal{Y},\tilde{\mathbb{Q}})$, tel que $\mathcal{F}$ vérifie $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{Y}_t$ $\forall t \in [0,T]$. Alors :*

$$E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\int_0^t \theta_s dM_s \middle| \mathcal{F}_t\right) = \int_0^t E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\theta_s | \mathcal{F}_s\right) dM_s \tag{3.11}$$

Par conséquent, on peut écrire

$$E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\int_0^t \phi_s^L dP_s|\tilde{\mathcal{F}}_t\right) = \int_0^t E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s)dP_s \tag{3.12}$$

Cela nous permet de réécrire $L_t$ de manière plus simple :

$$\begin{aligned}
L_t &= E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[\int_0^T \phi_s^L dP_s|\tilde{\mathcal{F}}_t\right] - \int_0^t E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s)dP_s + N_t \\
&= E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[\int_0^T \phi_s^L dP_s \middle| \tilde{\mathcal{F}}_T\right]\middle| \tilde{\mathcal{F}}_t\right] - \int_0^t E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s)dP_s + N_t \text{ par la loi des espérances itérées} \\
&= E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[\int_0^T E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\phi_s^L \middle| \tilde{\mathcal{F}}_s\right) dP_s \middle| \tilde{\mathcal{F}}_t\right] - \int_0^t E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s)dP_s + N_t \text{ par le lemme ci-dessus} \\
&= \int_0^t E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\phi_s^L \middle| \tilde{\mathcal{F}}_s\right) dP_s - \int_0^t E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\phi_s^L \middle| \tilde{\mathcal{F}}_s\right) dP_s + N_t \text{ puisque c'est une } (\tilde{\mathcal{F}}_t,\tilde{\mathbb{Q}})\text{-martingale} \\
&= N_t
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Soit $(\theta_s)$ un processus $\tilde{\mathcal{F}}$-adapté borné. En utilisant la formulation de $L_t$ précédemment obtenue (3.13), cela donne :

$$E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(L_t \int_0^t \theta_s dP_s\right) = E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(N_t \int_0^t \theta_s dP_s\right) \tag{3.14}$$

Il nous reste maintenant à étudier le terme

$$E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[N_t \int_0^t \theta_s dP_s\right]. \tag{3.15}$$

Rappelons que $N_t$ s'écrit :

$$N_t = E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\underbrace{E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H|\sigma(L))}_{f(L)} \middle| \tilde{\mathcal{F}}_t\right) - E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H) \tag{3.16}$$

Or $E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H|\sigma(L))$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $L$, et peut donc s'écrire sous la forme $f(L)$ où $f$ est une fonction borélienne. Ainsi :

$$\begin{aligned}
E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[N_t \int_0^t \theta_s dP_s\right] &= E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[\left[E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(f(L)|\tilde{\mathcal{F}}_t\right) - E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H)\right] \int_0^t \theta_s dP_s\right] \\
&= E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(f(L) \int_0^t \theta_s dP_s \middle| \tilde{\mathcal{F}}_t\right)\right) - E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(H) E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\int_0^t \theta_s dP_s\right) \\
&= E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(f(L) \int_0^t \theta_s dP_s\right)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

La littérature sur le grossissement initial de filtration (voir A. Grorud et M. Pontier [GP99] par exemple) a établi que si on a deux probabilités $\mathbb{Q}_i$ neutres au risque, alors il existe $z$ telle que $\mathbb{Q}_2 = z(L)\mathbb{Q}_1$, où $z(L)$ est une variable aléatoire $\mathcal{Y}_0$-mesurable, positive, d'espérance 1 sous $\mathbb{Q}_1$. Tout ce que nous venons de montrer ne dépend pas du choix de la probabilité neutre au risque $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}$. Soit donc $\mathbb{Q}^*$ la probabilité, neutre au risque d'après ce qui précède, définie par

$$\mathbb{Q}^* = \frac{f(L)}{E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(f(L))}\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}.$$

Comme c'est une probabilité neutre au risque, $\int_0^t \theta_s dP_s$ est une $\tilde{\mathcal{F}}$-martingale sous $\mathbb{Q}^*$. Donc

$$0 = E_{\mathbb{Q}^*}\left(\int_0^t \theta_s dP_s\right) = \frac{1}{E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(f(L))} E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(f(L)\int_0^t \theta_s dP_s\right)$$

On en déduit que

$$E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(f(L)\int_0^t \theta_s dP_s\right) = 0$$

et donc on a bien

$$E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[N_t \int_0^t \theta_s dP_s\right] = 0, \forall \theta \; \tilde{\mathcal{F}} - \text{mesurable} \tag{3.18}$$

Sous toute mesure martingale $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}$, on a bien l'orthogonalité voulue. Nous avons donc donné sous toute probabilité neutre au risque $\tilde{\mathbb{Q}}$ de $\mathcal{Q}$ la décomposition de Kunita-Watanabe de $H$ avec pour intégrand $E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s\right)$. □

## 3.3 Formule de Clark-Ocone

Puisque $\phi_s^{\tilde{\mathbb{Q}}}$ s'exprime en fonction de $\phi_s^L$, il est intéressant de regarder comment obtenir $\phi_s^L$. Nous l'exprimons ici en fonction de la dérivée de Malliavin de $H$, via l'utilisation de la formule de Clark-Ocone. Nous ne pouvons pas utiliser directement cette formule dans notre cas sous la filtration $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}_0 = \sigma(L)$ n'étant pas dégénérée, mais grâce à une transformation et l'indépendance entre $\sigma(L)$ et $\mathcal{F}$ sous $\mathbb{Q}$, nous allons utiliser la formule de Clark-Ocone qui existe uniquement sous $\mathcal{F}$, et obtenir une expression de $\phi_s^L$.

**Proposition 3.3.1** *Si $H \in L^2(\Omega, \mathcal{Y}, Q)$ et $\forall x, H(., x) \in \mathbb{D}^{1,2}$, alors*

$$\phi_s^L = \left( E_{\mathbb{Q}}\left[D_s(H(., x))|\mathcal{F}_s\right]\big|_{x=L}\right)(\sigma_s^L)^{-1} \tag{3.19}$$

**Preuve :** Dans l'espace grossi $\mathcal{Y}$, sous $(\mathbf{H_3})$, $\sigma(L)$ et $\mathcal{F}_t$ sont indépendantes. De plus, $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}} = \mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}|_{\sigma(L)} = \mathbb{P}^L$ la loi de $L$.
$H$ est mesurable par rapport à $\mathcal{Y}_T$, donc $H$ s'écrit (grâce à l'indépendance et au fait que $\mathcal{Y}_T$ est engendré par $\mathcal{F}$ et $\sigma(L)$) : $H = H(W, L)$. Alors, à $L = x$ fixé, $H(W, x)$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable. On a donc la représentation donnée par la formule de Clark-Ocone :

$$\begin{aligned} H(W,x) &= E_{\mathbb{P}}\left(H(W,x)\right) + \int_0^T E_{\mathbb{P}}\left(D_s(H(W,x))|\mathcal{F}_s\right) dW_s \quad \mathbb{P} \;\; p.s. \\ &= E_{\mathbb{Q}}\left(H|L\right)|_{L=x} + \int_0^T E_{\mathbb{Q}}\left(D_s(H(W,x))|\mathcal{F}_s\right) dW_s \end{aligned} \tag{3.20}$$

En effet, dériver $H$ selon $W$ avec $L = x$ a un sens sous $\mathbb{Q}$ car $W$ et $L$ sont indépendantes, et dériver $W \mapsto H(W, L)$ sous $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{P}$ revient au même car $W$ est un $\mathbb{Q}$- et un $\mathbb{P}$-brownien. De nouveau par indépendance, on peut écrire

$$H(W,L) = H(W,x)|_{x=L}$$

et donc par identification

$$\sigma_s^L \phi_s^L = E_{\mathbb{Q}}\left[D_s(H(W,x))|\mathcal{F}_s\right]\big|_{x=L} \tag{3.21}$$

□

# 3.4 Risque résiduel

## 3.4.1 Expression du risque résiduel sous une probabilité neutre au risque de $\mathcal{Q}_N$

Nous donnons ici l'expression du risque résiduel pour une probabilité neutre au risque de $\mathcal{Q}_N$.
Soit $\mathbb{Q}^* \in \mathcal{Q}_N$ une probabilité neutre au risque pour l'agent non forcément initié.

On a l'expression du risque résiduel $L_t^{\mathbb{Q}^*}$ au temps $t$, puisque les équations 3.5 et 3.6 sont vraies pour toute $\mathbb{Q}^* \in \mathcal{Q}_N$ :

$$\begin{aligned} L_t^{\mathbb{Q}^*} &= E_{\mathbb{Q}^*}\left[\int_0^T \phi_s^L dP_s|\tilde{\mathcal{F}}_t\right] - \int_0^t \phi_s^{\mathbb{Q}^*} dP_s \\ &+ E_{\mathbb{Q}^*}\left[E_{\mathbb{Q}^*}(H|\sigma(L))|\tilde{\mathcal{F}}_t\right] - E_{\mathbb{Q}^*}(H) \end{aligned} \tag{3.22}$$

La deuxième partie correspond à la différence de prix sous $\mathbb{Q}^*$ de l'option selon que l'on possède ou non l'information, c'est-à-dire selon que l'on est sur le marché initié (complet) ou sur le marché non initié. Dans un cas le prix sera $E_{\mathbb{Q}^*}(H|\sigma(L))$, projeté sur les prix conformes au prix de l'actif, c'est-à-dire les variables aléatoires $\tilde{\mathcal{F}}_t$-mesurables, et dans l'autre cas, le prix est $E_{\mathbb{Q}^*}(H)$.

La première partie peut se réécrire grâce au lemme 3.2.1. On a ainsi :

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}^*}\left[\int_0^T \phi_s^L dP_s|\tilde{\mathcal{F}}_t\right] &= E_{\mathbb{Q}^*}\left[E_{\mathbb{Q}^*}\left(\int_0^T \phi_s^L dP_s|\tilde{\mathcal{F}}_T\right)|\tilde{\mathcal{F}}_t\right] \\ &= E_{\mathbb{Q}^*}\left[\int_0^T E_{\mathbb{Q}^*}\left(\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s\right) dP_s|\tilde{\mathcal{F}}_t\right] \text{ d'après le lemme (3.2.1)} \\ &= \int_0^t E_{\mathbb{Q}^*}\left(\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s\right) dP_s \text{ car } P \text{ est une } (\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{Q}^*) - \text{martingale} \end{aligned}$$

On peut donc réécrire le risque résiduel :

$$\begin{aligned} L_t^{\mathbb{Q}^*} &= \int_0^t \left[E_{\mathbb{Q}^*}\left(\phi_s^L|\tilde{\mathcal{F}}_s\right) - \phi_s^{\mathbb{Q}^*}\right] dP_s \\ &+ E_{\mathbb{Q}^*}\left[E_{\mathbb{Q}^*}(H|\sigma(L))|\tilde{\mathcal{F}}_t\right] - E_{\mathbb{Q}^*}(H) \end{aligned} \tag{3.23}$$

La somme de ces deux quantités forme le risque résiduel dû au manque d'information du non initié. Ce risque est le risque minimum sous $\mathbb{Q}^*$ que l'agent $N$ peut espérer prendre en détenant l'option (voir H. Föllmer et S. Schweizer [FS91] et H. Pham [PHA00]). C'est la composante de l'option à couvrir orthogonale aux prix du marché (voir décomposition de Kunita-Watanabe précédemment décrite dans la définition 3.2).

Une mesure de ce risque représenté par $L_t^H$, martingale d'espérance nulle, est la variance de $L_T^H$, risque résiduel quadratique à l'instant terminal $T$.

A l'instant terminal, on a :

$$\begin{aligned} L_T^{\mathbb{Q}^*} = & \int_0^T \left[ E_{\mathbb{Q}^*}\left(\phi_s^L | \tilde{\mathcal{F}}_s\right) - \phi_s^{\mathbb{Q}^*}\right] dP_s \\ & + E_{\mathbb{Q}^*}\left[ E_{\mathbb{Q}^*}(H|\sigma(L))|\tilde{\mathcal{F}}_T\right] - E_{\mathbb{Q}^*}(H) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Et donc

$$\begin{aligned} Var_{\mathbb{Q}^*}(L_T^{\mathbb{Q}^*}) = & E_{\mathbb{Q}^*}\left(\left(\int_0^T \left[ E_{\mathbb{Q}^*}\left(\phi_s^L | \tilde{\mathcal{F}}_s\right) - \phi_s^{\mathbb{Q}^*}\right] dP_s\right)^2\right) \\ & + 2E_{\mathbb{Q}^*}\left(\int_0^T \left[ E_{\mathbb{Q}^*}\left(\phi_s^L | \tilde{\mathcal{F}}_s\right) - \phi_s^{\mathbb{Q}^*}\right] dP_s \times \left(E_{\mathbb{Q}^*}\left[ E_{\mathbb{Q}^*}(H|\sigma(L))|\tilde{\mathcal{F}}_T\right] - E_{\mathbb{Q}^*}(H)\right)\right) \\ & + E_{\mathbb{Q}^*}\left(\left(E_{\mathbb{Q}^*}\left[ E_{\mathbb{Q}^*}(H|\sigma(L))|\, \tilde{\mathcal{F}}_T\right] - E_{\mathbb{Q}^*}(H)\right)^2\right) \end{aligned} \tag{3.25}$$

Remarquons également que comme $L_T^{\mathbb{Q}^*}$ est orthogonale à $P$, cette expression se simplifie un peu et la variance peut se réécrire :

$$\begin{aligned} Var_{\mathbb{Q}^*}(L_T^{\mathbb{Q}^*}) = & E_{\mathbb{Q}^*}\left(\int_0^T \left[ E_{\mathbb{Q}^*}\left(\phi_s^L | \tilde{\mathcal{F}}_s\right) - \phi_s^{\mathbb{Q}^*}\right] dP_s \times \left(E_{\mathbb{Q}^*}\left[ E_{\mathbb{Q}^*}(H|\sigma(L))|\tilde{\mathcal{F}}_T\right] - E_{\mathbb{Q}^*}(H)\right)\right) \\ & + E_{\mathbb{Q}^*}\left(\left(E_{\mathbb{Q}^*}\left[ E_{\mathbb{Q}^*}(H|\sigma(L))|\, \tilde{\mathcal{F}}_T\right] - E_{\mathbb{Q}^*}(H)\right)^2\right) \end{aligned}$$

Ceci est l'expression générale du risque résiduel quadratique pour une mesure dans $\mathcal{Q}_N$.

Dans le cas d'une mesure neutre au risque dans $\mathcal{Q}_N$ et non dans $\mathcal{Q}$, on ne peut pas simplifier l'expression précédente. On obtient seulement, par orthogonalité, une formulation plus simple du risque résiduel quadratique.

Soit une probabilité $\mathbb{Q}^* \in \mathcal{Q}_N$ qui n'est pas dans $\mathcal{Q}$. Alors on peut écrire la décomposition de Kunita-Watanabe :

$$H - E_{\mathbb{Q}^*}(H) = \int_0^T \phi_s^{\mathbb{Q}^*} dP_s + L_T^{\mathbb{Q}^*}$$

$P$ est une $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{Q}^*)$-martingale, mais pas une $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q}^*)$-martingale (sinon $\mathbb{Q}^*$ serait dans $\mathcal{Q}$). Il n'y a donc aucun théorème de représentation de martingales.
$L_T^{\mathbb{Q}^*}$ étant orthogonale au prix, on a donc une autre expression du risque résiduel quadratique :

$$Var_{\mathbb{Q}^*}\left(L_T^{\mathbb{Q}^*}\right) = E_{\mathbb{Q}^*}\left((H - E_{\mathbb{Q}^*}(H))^2\right) - E_{\mathbb{Q}^*}\left(\left(\int_0^T \phi_s^{\mathbb{Q}^*} dP_s\right)^2\right)$$

### 3.4.2 Expression du risque résiduel sous une probabilité neutre au risque de $\mathcal{Q}$

En revanche, dans le cas d'une probabilité $\mathbb{Q}^*$ neutre au risque de $\mathcal{Q}$, le premier terme de $L_T^{\mathbb{Q}^*}$ dans 3.25 s'annule, en application de la proposition (3.2.1). Ainsi, l'expression devient plus simple :

$$Var(L_T^{\mathbb{Q}^*}) = E_{\mathbb{Q}^*}\left(E_{\mathbb{Q}^*}\left[E_{\mathbb{Q}^*}(H|\sigma(L))|\,\tilde{\mathcal{F}}_T\right]^2\right) - E_{\mathbb{Q}^*}(H)^2 \tag{3.26}$$

D'où finalement une mesure du risque résiduel sous une probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}^* \in \mathcal{Q}$ :

$$Var(L_T^{\mathbb{Q}^*}) = E_{\mathbb{Q}^*}\left(E_{\mathbb{Q}^*}\left[E_{\mathbb{Q}^*}(H|\sigma(L))|\,\tilde{\mathcal{F}}_T\right]^2\right) - E_{\mathbb{Q}^*}(H)^2 \tag{3.27}$$

Cette quantité mesure donc la révélation de l'information dans les prix, puisque l'agent non informé ne possède pas l'information, mais il "voit" quand même l'information transparaître dans les prix du marché.

Un risque minimum existe, c'est

$$\inf_{Q^*\in\mathcal{Q}} E_{\mathbb{Q}^*}\left(E_{\mathbb{Q}^*}\left[E_{\mathbb{Q}^*}(H|\sigma(L))|\,\tilde{\mathcal{F}}_T\right]^2\right) - E_{\mathbb{Q}^*}(H)^2,$$

et il peut être approché par une suite minimisante.

**Remarque :** Nous sommes ici dans un cadre un peu différent de celui développé par H. Föllmer et S. Schweizer (1991) [FS91]. En effet, plusieurs points diffèrent : leur hypothèse d'invariance de la décomposition de Doob-Meyer des prix ne reste pas valable dans notre cas (Ils supposent que la décomposition de Doob-Meyer des prix sous la filtration $\tilde{\mathcal{F}}$ et la probabilité $\mathbb{Q}$, $P = P_0 + M + A$ où $A$ est $\tilde{\mathcal{F}}$-prévisible, et où $M$ est une $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{Q})$-martingale, reste la décomposition de Doob-Meyer des prix, en d'autres termes, $M$ reste une $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q})$-martingale, bien qu'adaptée à $\tilde{\mathcal{F}}$. Voir hypothèse (4.1) à (4.3) dans [FS91]). Cette hypothèse, bien que plus faible, s'apparente à l'hypothèse (**H**) du filtrage (utilisée également en grossissement progressif de filtration, dans des modèles comme ceux de M. Jeanblanc [JR02, BSJ04]). A la place, nous nous plaçons sous l'hypothèse ($\mathbf{H_3}$). De plus, nous distinguons ici trois filtrations distinctes : celle du brownien, celle des prix, et celle grossie avec l'information. En revanche, notre étude s'inscrit parfaitement dans le cadre d'incomplétude qu'ils ont étudié : l'incomplétude due à un manque d'information.

**Remarque :** Notons que mesurer le risque résiduel sous une probabilité neutre au risque est un peu arbitraire, puisque choisir cette mesure martingale est déjà un choix arbitraire, et qu'au départ, le modèle prenait en compte une probabilité historique dont on ne tient pas compte dans cette mesure de risque. De plus le risque évalué est le risque de ce modèle sous cette mesure, et non le risque intrinsèque.

## 3.5 Existence d'une mesure martingale minimale

Ecrivons la décomposition de Doob-Meyer de la $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{Q})$-semi-martingale des prix $P$ :

$$P_t = P_0 + M_t + A_t \tag{3.28}$$

où $M$ est une $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{Q})$-martingale d'espérance nulle (martingale locale uniformément intégrable d'après l'hypothèse $(A1)$ (voir Lépingle et Mémin [LM78] théorème II-2 p.181, et théorème III-7 p.190), et $A$ est un processus $\tilde{\mathcal{F}}$-prévisible à variations finies, à accroissements de carré intégrable sous $\mathbb{Q}$ et satisfaisant $A_0 = 0$.
Par le théorème de Girsanov, et comme l'hypothèse $(A1)$ nous assure l'existence d'une mesure martingale équivalente, $A$ peut s'écrire :

$$A_t = \int_0^t \lambda_u d < M >_u \ , \ 0 \leq t \leq T \tag{3.29}$$

où $\lambda$ est un processus $\tilde{\mathcal{F}}$-prévisible.
Notons

$$K_t = \int_0^t \lambda'_u d < M >_u \lambda_u \ , \ 0 \leq t \leq T \tag{3.30}$$

et notons $\hat{Z}$ le processus solution de l'équation différentielle stochastique :

$$d\hat{Z}_t = -\hat{Z}_t \lambda_t dM_t \ , \ 0, \leq t \leq T, \quad \hat{Z}_0 = 1 \tag{3.31}$$

Alors, $\hat{Z}_t$ peut s'écrire :

$$\hat{Z}_t = \exp\left( - \int_0^t \lambda_u dM_u - \frac{1}{2} K_t \right), \ 0 \leq t \leq T. \tag{3.32}$$

$\hat{Z}$ est une $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{Q})$-martingale locale strictement positive, uniformément intégrable d'après nos hypothèses, donc c'est une $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{Q})$-martingale. Ce processus définit une mesure de probabilité $\hat{\mathbb{Q}}$ équivalente à $\mathbb{Q}$ par

$$\frac{d\hat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} = \hat{Z}_T \in L^2(\mathbb{Q}) \tag{3.33}$$

Comme $P$ est un processus continu et $\hat{Z} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{Q})$, on peut appliquer la proposition 4.3 de H. Pham (2000) et établir le résultat suivant dans notre cas :

**Proposition 3.5.1** *La mesure de probabilité $\hat{\mathbb{Q}}$ est une mesure martingale équivalente, appelée* mesure martingale minimale. *Elle satisfait la propriété suivante : toute $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{Q})$-martingale de carré intégrable orthogonale à $M$ sous $\mathbb{Q}$ reste une $(\tilde{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{Q}})$-martingale.*

$$L \in \mathcal{M}^2(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{Q}), L \perp_{\mathbb{Q}} M \Rightarrow L \textit{ est une martingale sous } (\tilde{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{Q}}). \tag{3.34}$$

Egalement d'après H. Pham (2000) [PHA00], paragraphe 4.3, Théorème 4.2, nous pouvons citer le résultat suivant, qui dans le cas où $K$ est uniformément borné, donne l'expression de la stratégie minimisant le risque local :

**Corollaire 3.5.1** *Si $K$ est uniformément borné, alors il existe une stratégie minimisant le risque local, donnée par :*

$$\begin{aligned} V_t^* &= E_{\hat{\mathbb{Q}}}\left(H|\tilde{\mathcal{F}}_t\right) \\ \phi_t^* &= \phi_t^H \end{aligned} \tag{3.35}$$

*où $\phi_t^H$ est l'intégrand dans la décomposition de Föllmer-Schweizer de $H$ sous $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \int_0^T \phi_t^H dP_t + L_t^H \\ &\quad H_0 \in \mathbb{R},\ \phi^H \in L^2(M) \cap L^2(A),\ L^H \in \mathcal{M}(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{Q}) \perp M \end{aligned} \tag{3.36}$$

C'est la projection de Kunita-Watanabe de la $(\tilde{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{Q}})$-martingale $V^*$ sur la $(\tilde{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{Q}})$-martingale $P$. En effet, $L^H$ est une $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{Q})$-martingale orthogonale à $M$, donc reste une martingale sous $\hat{\mathbb{Q}}$.

**Remarque :** Par unicité de la décomposition de Kunita-Watanabe sous $\hat{\mathbb{Q}}$, on a $H_0 = E_{\hat{\mathbb{Q}}}(H)$ le premier terme de la décomposition de Föllmer-Schweizer.

## 3.6 Exemple

Dans cette dernière section, nous présentons un exemple de modèle d'influence pour lequel toutes nos hypothèses sont vérifiées.

Présentons d'abord l'exemple de modèle de marché incomplet de l'article de H. Föllmer et M. Schweizer [FS91], afin de pouvoir insister sur les différences entre ce modèle et le modèle que nous avons choisi, ainsi que la raison pour laquelle cet exemple ne rentre pas dans le cadre de notre étude.

Ils supposent que les prix suivent la dynamique de Black-Scholes modifiée suivante :

$$dP_t = b'(X_t, \pi_t)P_t dt + \sigma'_t(\eta)P_t dW_t \tag{3.37}$$

avec

$$\sigma'_t(\eta) = \sigma^0 \mathcal{I}_{[0,t_0[}(t) + \sigma^\eta \mathcal{I}_{[t_0,T]}(t) \tag{3.38}$$

avec $\eta \in \{+,-\}$, et $\sigma^0, \sigma^+, \sigma^- > 0$. La volatilité du modèle est ainsi constante par morceaux, et peut prendre 3 valeurs $\sigma^0$, $\sigma^+$ et $\sigma^-$ fixées par le modèle, $\eta$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\{+,-\}$.

L'information détenue par l'agent informé est

$$L = \eta \ \ \mathcal{F}_{t_0} - \text{mesurable}\ , t_0 < T.$$

De fait, ni $(\mathbf{H_3})$ ni $(\mathbf{H}'')$ n'est vérifiée dans ce cas. Nous ne sommes pas dans le cadre de grossissement fort initial traité auparavant. C'est en particulier ce point qui empêche cet exemple de rentrer dans notre cadre. C'est pourquoi nous avons choisi de traiter un exemple un peu différent.

Nous proposons ici le modèle suivant. Supposons que les prix suivent la dynamique (à volatilité aléatoire) suivante :

$$dP_t = b'(P_t, X_t, \pi_t)P_t dt + \sigma'_t(\eta)P_t dW_t \tag{3.39}$$

avec

$$\sigma'_t(\eta) = \sigma^0 \mathcal{I}_{[0,\eta[}(t) + \sigma^1 \mathcal{I}_{[\eta,T]}(t)\ ,\ \sigma^0, \sigma^1 \neq 0 \tag{3.40}$$

La volatilité du modèle est ainsi constante par morceaux, pouvant prendre 2 valeurs $\sigma^0$ et $\sigma^1$ fixées par le modèle, $\eta$ est une variable aléatoire vérifiant l'hypothèse $(\mathbf{H_3})$, à valeurs dans $[0, T+\varepsilon]$.

L'information détenue par l'agent informé est

$$L = \eta \ \ \mathcal{F}_{T+\varepsilon} - \text{mesurable}$$

Nous sommes bien dans le cadre de grossissement fort initial traité auparavant.

### 3.6.1 Cas sans influence

Si nous choisissons pour notre modèle un paramètre de dérive $b'(P_t, X_t, \pi_t) = b_0$ constant, on obtient un exemple où il n'y a pas d'influence. Le couplage entre l'équation rétrograde et l'équation progressive disparaît, et on se trouve face à un problème de résolution d'EDSR en présence de grossissement de filtration. On a ainsi un modèle qui satisfait toutes les hypothèses $(A1)$ à $(A8)$ et le cas $I1$ (pas de dépendance, donc a fortiori dépendance faible), et dans lequel, même sans influence de l'initié sur les prix, le modèle est complet pour l'initié et incomplet pour l'agent non-informé. L'information "complète" le marché.

### 3.6.2 Cas avec influence

Nous prenons dans cette partie un paramètre de dérive qui vérifie :

$$b'(X_t, P_t, \pi_t) = b_0 + \frac{b_1}{(1+P_t)(1+\pi_t^2)} \ , \quad b_0, b_1 \in \mathbb{R} \text{ fixé} \tag{3.41}$$

Le taux d'intérêt est ici supposé constant égal à $r$.

La dérive $b'$ est ici bornée et varie entre deux valeurs seuil $b_0$ et $b_0 + a$. Deux cas se présentent, selon le signe de $b_1$. Si $b_1$ est négatif, l'influence est une influence "positive" : plus le portefeuille investi est gros, plus la dérive des prix est élevée, ceci modéré par le niveau de prix, plus les prix sont élevés, plus l'influence est faible. Dans le cas $b_1$ positif, l'effet est inverse, plus le portefeuille investit est gros, plus la dérive des prix diminue, ceci modéré par le niveau de prix, plus les prix sont élevés, plus l'influence est forte.

Remarquons que dans le cas où on choisit $b_1 = 0$, on se retrouve dans le cas précédent. Selon le signe de $b_1$, amplitude de l'influence, cette influence aura un effet levier ou un effet de rappel sur le drift du processus de prix vers la valeur $b_0$. L'influence s'exerce via le portefeuille de l'initié sur la tendance, qui reste toutefois bornée.

Remarquons également que

$$\sigma_s'^{-1}(b_s' - r_s) = \sigma_s'^{-1}(b_0 - r + \frac{b_1}{(1+P_t)(1+\pi_t^2)})$$

est borné, ainsi que $\sigma'$, donc il existe bien une probabilité $\tilde{\mathbb{Q}}$ neutre au risque sous laquelle $dP_t = \sigma_t' P_t d\tilde{W}_t$ est une martingale strictement positive, uniformément intégrable (voir D. Lépingle et J. Mémin [LM78] théorèmes II-2 et III-7).

**Remarque :** Nous n'avons pas ici de contrainte de signe sur $b_0$ ou $b_1$, contrairement à certains cas d'influence traités dans la littérature, notamment au cas traité par D. Cuoco et J. Cvitanic (1998) [CC98], et repris par A. Grorud et M. Pontier (2005) [GP05] (donc la forme d'influence est toutefois un peu différente de celle décrite ici), puisque nous traitons un problème de couverture, et non un problème d'optimisation, et nous n'avons donc pas besoin de convexité des paramètres.

Nous avons donc les paramètres suivants pour ce modèle, en considérant la couverture d'une option européenne d'échéance $T$ et de prix d'exercice $K$ :

$$\begin{aligned} f(s, P_s, X_s, \pi_s) &= X_s r + \left(b_0 - r + \frac{b_1}{(1+P_t)(1+\pi_t^2)}\right)\pi_s \\ g(P_T) &= (P_T - K)_+ \end{aligned} \tag{3.42}$$

Ce qui donne l'équation différentielle progressive rétrograde suivante, correspondant au problème de couverture de l'agent informé :

$$\begin{cases} P_t = P_0 + \int_0^t \left(b_0 + \frac{b_1}{(1+P_t)(1+\pi_t^2)}\right) P_s ds + \int_0^t \sigma_s(\eta) P_s dW_s \\ X_t = (P_T - K)_+ - \int_t^T (X_s r + (b_0 + ah(\pi_s))\,\pi_s - r\pi_s) ds - \int_t^T \sigma_s(\eta)\pi_s dW_s \end{cases} \tag{3.43}$$

Vérifions les hypothèses du théorème 2.2.1.

(A1) $\sigma'$ est borné et inversible, puisque $\sigma^0$ et $\sigma^1$ sont constantes, différentes de 0. De plus, $\sigma'^{-1}(b' - r)$ est bien borné puisque $b'$ et $\sigma'^{-1}$ le sont.

(A2) $b$, $\sigma$, $f$ et $g$ sont bien continues par rapport aux variables $p, x, z$.

(A3) Cette hypothèse est vérifiée avec $\lambda_1 = \sup(b_0, b_0 + b_1)$ :

$$\begin{aligned} &(b(t, p_1, x, z) - b(t, p_2, x, z), p_1 - p_2) \\ &\quad = \left(b_0 p_1 + \frac{b_1}{(1+p_1)(1+\sigma'^{-2}z^2)} - b_0 p_2 - \frac{b_1}{(1+p_2)(1+\sigma'^{-2}z^2)}\right)(p_1 - p_2) \\ &\quad = b_0(p_1 - p_2)^2 + \frac{b_1}{(1+\sigma'^{-2}z^2)} \times \frac{(p_1 - p_2)^2}{(1+p_1)(1+p_2)} \\ &\quad \le \sup(b_0, b_0 + b_1)(p_1 - p_2)^2 \end{aligned} \tag{3.44}$$

et $\lambda_2 = r$ :

$$(f(t, p, x_1, z) - f(t, p, x_2, z), x_1 - x_2) = r(x_1 - x_2)^2 \tag{3.45}$$

(A4) $k_1 = 0$ puisque $b$ ne dépend pas de $x$. $b(t, p, x, z)$ est $\mathcal{C}^1$, dérivable par rapport à $z$, de dérivée :

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial b(t, p, x, z)}{\partial z}\right| &= \left|\frac{b_1 p}{1+p} \frac{(-2\sigma'^{-1}z)}{(1+\sigma'^{-2}z^2)^2}\right| \\ &\le |b_1| \left|\frac{1}{1+\sigma'^{-2}z^2} \times \frac{(-2\sigma'^{-1}z)}{(1+\sigma'^{-2}z^2)}\right| \\ &\le |b_1| \end{aligned} \tag{3.46}$$

Donc $b$ est uniformément lipschitzienne par rapport à $z$, avec $k_2 = |b_1|$. De plus, comme $b(t, 0, x, z) = 0$, on a

$$|b(t, p, x, z)| \le (|b_0| + |b_1|)\,|p| \tag{3.47}$$

donc $k \geq |b_0| + |b_1|$.
$f$ est également $\mathcal{C}^1$, dérivable par rapport à $p$ et $z$, de dérivées :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f(t,p,x,z)}{\partial p}\right| &= \left|b_1 \frac{\pi}{1+\pi^2}\frac{1}{(1+p)^2}\right| \\
&\leq \frac{|b_1|}{2} \\
\left|\frac{\partial f(t,p,x,z)}{\partial z}\right| &= \left|\frac{b_1 \sigma'^{-1}}{(1+p)}\frac{1-\pi^2}{(1+\pi^2)^2}\right| \\
&\leq \frac{|b_1|}{\inf(\sigma^0,\sigma^1)}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Donc $f$ est bien uniformément lipschitzienne par rapport à $p$ et à $z$, avec $k_3 = \frac{|b_1|}{2}$ et $k_4 = \frac{|b_1|}{\inf(\sigma^0,\sigma^1)}$.
Enfin, $f$ est linéaire en $x$, donc $k \geq r$. Finalement $k = \max(r, |b_0| + |b_1|)$ convient.

(A5) $\sigma$ est uniformément lipschitzienne par rapport à $P$ (linéaire par morceaux), et ne dépend pas de $x$ et $z$, avec $k_5 = sup(\sigma^0, \sigma^1)$, $k_6 = 0$, $k_7 = 0$.

(A6) $g$ uniformément lipschitzienne par rapport à $p$, avec $k_8 = 1$.

(A7) $b(., P, X, \pi)$, $f(., P, X, \pi)$ et $\sigma(., P, X, \pi)$ sont des processus $\mathcal{Y}_t$-adaptés et $g(p)$ est déterministe à $p$ fixé.
De plus l'équation d'intégrabilité en 0 est bien vérifiée : tous les termes sont nuls.

(A8) $b$ est uniformément lipschitzienne en $p$, de coefficient $k_9 = |b_0| + |b_1|$ :

$$\begin{aligned}
|b(t,p_1,x,z) - b(t,p_2,x,z)| &= \left|b_0(p_1-p_2) + \frac{b_1(p_1-p_2)}{(1+\pi^2)(1+p_1)(1+p_2)}\right| \\
&\leq (|b_0| + |b_1|)\,|p_1 - p_2|
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Nous sommes dans le cas $I1$ d'influence faible du théorème 2.2.1 d'existence et d'unicité de la solution de l'EDSPR grossie. En effet, quelle que soit la valeur de $b_1$, on peut choisir $C_2$ suffisamment petit pour que l'équation 2.61 du chapitre 2 soit vérifiée. Dans notre cas, cette équation devient, puisque $k_1 = k_6 = k_7 = 0$

$$|b_1|C_2 < \left[\frac{1-e^{-\bar{\lambda_2}T}}{\bar{\lambda_2}} + \frac{1}{1 - \frac{|b_1|C_4}{\inf(\sigma^0,\sigma^1)}}\right]^{-1} \left((1 \vee e^{-\bar{\lambda_1}T}) + \frac{|b_1|C_3}{2}\frac{(1-e^{-\bar{\lambda_1}T})}{\bar{\lambda_1}}\right)^{-1} \tag{3.50}$$

Cette dernière inégalité peut toujours être vérifié puisque $C_2 > 0$ peut être choisi arbitrairement petit.

Remarquons tout de même que si $b_0$ et $b_1$ sont suffisamment négatifs, afin de vérifier 2.65, on pourrait également se placer dans le cas $I3$, car il n'y a pas d'influence de l'initié sur la volatilité.

Toutes les hypothèses sont vérifiées, ce qui permet donc de conclure à l'existence d'une unique solution au problème de couverture de l'initié.

Le marché initié est complet, en revanche le marché non initié est incomplet.

D'après le paragraphe 3.3, nous avons une expression de la stratégie de l'initié :

$$\sigma_s^L \phi_s^L = E_{\mathbb{Q}}[D_s(H(W,x))|\mathcal{F}_s]|_{x=L}$$

Soit dans notre cas d'option européenne $H(W,x) = (P_T^x - K)_+$ où $P_T^x$ est le prix à l'échéance lorsque le saut de volatilité a lieu à l'instant $x$, donc :

$$\sigma_s^L \phi_s^L = E_{\mathbb{Q}}[\mathcal{I}_{P_T^x > K} D_s P_T^x | \mathcal{F}_s]_{x=L}$$

On a ainsi l'expression de la stratégie optimale de couverture de l'agent non informé, d'après les résultats de la partie 3 :

$$\phi_s^{\mathbb{Q}^*} = E_{\mathbb{Q}^*}\left[\left(\sigma_s^L\right)^{-1} E_{\mathbb{Q}}[\mathcal{I}_{P_T^x > K} D_s P_T^x | \mathcal{F}_s]_{x=L} \middle| \tilde{\mathcal{F}}_s\right] \tag{3.51}$$

Et l'expression du risque quadratique résiduel :

$$Var(L_T^{\mathbb{Q}^*}) = E_{\mathbb{Q}^*}\left(E_{\mathbb{Q}^*}\left[E_{\mathbb{Q}^*}((P_T^L - K)_+|L) \middle| \tilde{\mathcal{F}}_T\right]^2\right) - E_{\mathbb{Q}^*}((P_T^L - K)_+)^2 \tag{3.52}$$

**Remarque :** On a

$$\sigma_t(L)^2 = \frac{1}{P_t^2}\frac{d < P >_t}{dt}$$

Donc $\sigma_t(L)^2$ est $\tilde{\mathcal{F}}$-mesurable, donc observable. Par conséquent, considérons un initié faible, qui ne connaîtrait que la loi de $L$. Alors dès qu'il observe le saut, il a la même information que l'agent fortement informé. Cela signifierait intuitivement que l'information faible suffirait à compléter le marché, puisqu'elle permettrait de couvrir quand même...
Un prolongement envisageable de ce modèle serait l'étude d'une EDSR ou EDSPR avec d'autres type d'information supplémentaire (faible, progressive), et donc d'autre types de grossissements de filtration.

# Troisième partie

# EDSR à horizon aléatoire et grossissement initial

Après nous être intéressés aux EDSR et EDSPR à horizon constant, motivés par des problèmes financiers de couverture à horizon fixé du type options européennes, nous nous sommes demandés si nos résultats restaient vérifiés pour un horizon aléatoire, ce qui est financièrement le cas pour d'autres types d'options courantes telles les options américaines ou les options Lookback. En effet, nous avons montré que dans le cas d'un agent informé non influent, c'est-à-dire d'une EDSR avec grossissement initial de filtration, la solution dans l'espace grossi était la même que dans l'espace initial. La question à laquelle nous répondons dans cette dernière partie, et ce sera l'objet du chapitre 4, est : qu'en est-il pour des horizons de couverture de type option américaine, c'est-à-dire pour une EDSR à horizon aléatoire, avec grossissement initial de filtration ?

Nous partons des résultats d'existence et d'unicité de solutions pour des EDSR à horizon aléatoire de M. Royer dans sa thèse et dans [ROY04] en 2004. Nous les adaptons à notre cas de filtration grossie.

Nous montrons que dans le cas d'un horizon temps d'arrêt borné le résultat obtenu est le même que pour une EDSR à horizon constant. En effet, sous l'hypothèse ($\mathbf{H_3}$), l'EDSR à horizon aléatoire, sous les mêmes hypothèses, à une unique solution adaptée à la filtration grossie.

Cela signifie que l'agent possédant une information initiale satisfaisant l'hypothèse ($\mathbf{H_3}$) va avoir la même stratégie de couverture que l'agent non informé, même pour un actif contingent de maturité aléatoire. Ceci est une généralisation des résultats obtenus dans la première partie de cette thèse.

# Chapitre 4

# EDSR à horizon aléatoire et grossissement initial

## 4.1 Introduction

We study here existence and uniqueness of solutions of BSDEs with random terminal time under enlarged filtration, motivated by a financial problem : we aim to study the financial hedging strategy for an American contingent claim in a market with asymmetrical information.

BSDEs were first introduced by E. Pardoux ans S. Peng in 1990 [PP90]. Such equations are frequently used, and have a large panel of application fields, especially in ma thematical finance : they naturally appear in several cases, from stochastic control (see S. Peng [PEN93], N. El Karoui, S. Peng and M.C. Quenez [EKPQ97], and X. Zhou and J. Yong [YZ99]) to problems linked with PDEs (see E. Pardoux [PAR98]). We use here this type of equations to study hedging problems. As we study hedging of contingent claims with random exercise time, we model it with BSDE with random terminal time. Such equations were introduced by S. Peng (1991) [PEN91], and developped by E. Pardoux (1999) [PAR99] and M. Royer (2004) [ROY04] among others.

To model the asymmetrical information in the market we have chosen initial enlargement of filtration, theory developed by J. Jacod [JAC85], T. Jeulin [JEU79] and M. Yor [YOR78], and often used to model insider trading (see A. Grorud and M. Pontier [GP98], who constructed a statistical test to detect insider traders).

A. Eyraud-Loisel stated in [EL05] existence and uniqueness of solutions of BSDE with a constant terminal time under enlargement of filtration. She stated that an insider trader having an additional information on the market about a terminal time $T' > T$ and satisfying a standard hypothesis for the enlargement of filtration ($\mathbf{H_3}$), has no other strategy for hedging a European option with terminal exercise time $T$ than if he had not the additional information. For this work, the financial motivation still comes from hedging problems for insider traders, as in the previous article of A. Eyraud-Loisel, but we consider here the hedging of contingent claims with random terminal time, such as American options or Lookback options. In the present article, we extend these results to the case of BSDE with a random terminal time, under an initial enlargement of the Brownian filtration.

We prove that the results of A. Eyraud-Loisel (2005) stated in [EL05] remain true when the hedging terminal time is a random stopping time. We take standard existence and uniqueness hypotheses, as in E. Pardoux (1999) [PAR99] who studied BSDEs with random terminal time without enlargement of filtration (i.e. under the natural Brownian filtration). We obtain existence and uniqueness results for the BSDE in the Brownian case with initial enlargement of filtration under hypothesis ($\mathbf{H_3}$) for a bounded random terminal time. We first deal with stopping time a.s. bounded by $T < T'$, and we extend the results for all stopping times a.s. strictly bounded by $T'$.

This financially means that an agent who has an initial additional information satisfying hypothesis ($\mathbf{H_3}$) will have the same hedging strategy as a non informed agent, for a contingent claim with random terminal time, as it was previously proved for a constant terminal time. This result extends results from [EL05] to more general claims traded on the market (hedging of American or Lookback options for instance), and is consistent with the result for a fixed terminal time. It still differs from the results obtained by A. Grorud and M. Pontier who stated that in a wealth optimization point of view, under the same kind of enlargement of filtration, an insider trader has a different strategy from a non informed trader.

## 4.2 Model

### 4.2.1 Financial Motivation

Let $W$ be a standard $d$-dimensional Brownian motion, and let $\big(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, \mathbb{P}\big)$ be a filtered probability space, with $\Omega = \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$. Let $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ be the natural filtration of Brownian motion $W$. We consider a financial market with $k$ risky assets, whose prices are driven by :

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i (\sigma_s^i, dW_s)\ ,\ 0\le t\le T,\ ,\quad i=1,...,d \tag{4.1}$$

and where the bond (or riskless asset) evolves as : $S_t^0 = 1+\int_0^t S_s^0 r_s ds$. Parameters $b, \sigma, r$ are supposed to be bounded on $[0,T]$, adapted, and take values respectively in $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\times k}, \mathbb{R}$. Matrix $\sigma_t$ is invertible $dt\otimes d\mathbb{P}$ a.s. and the Doléans-Dade exponential $\mathcal{E}(-\sigma^{-1}(b-r).W)$ is supposed to be integrable. These are the usual conditions to have existence of a risk-neutral probability (no-arbitrage).

A financial agent has a positive initial wealth $Y_0$ at time $t=0$, and he wishes to hedge a contingent claim with terminal payoff $\xi$ at uncertain time horizon $\tau$, with maturity $T$.
$\tau$ is a $\mathcal{F}$-stopping time. Generally, $\tau$ is not given, it may depend on the strategic decision of the owner of the option. It may in particular be the optimal stopping time determined with the help of the notion of the Snell envelope of the price process (see N. El Karoui et al. [EKKP$^+$97], N. El Karoui [EK81] and I. Karatzas and S. Shreve [KS98]). But in our study, the stopping time is not necessarily the optimal stopping time, we do not deal with the optimal stopping problem here.
For example the agent is the seller of an American option with strike $K$, and pay-off $\xi = (S_{\tau\wedge T} - K)_+$ where $\tau$ is a stopping time, which represents the time when the buyer of the option decides to exercise his option. The seller wants to hedge against the risk of this option, and so wants to get $\xi$ at random time $\tau$ : $Y_{\tau\wedge T} = \xi$.

His consumption is here supposed to be zero. His wealth at time $t$ is $Y_t = \sum_{i=0}^k \theta_t^i S_t^i$. The standard self-financing hypothesis can be written as :

$$dY_t = \sum_{i=0}^k \theta_t^i dS_t^i. \tag{4.2}$$

It means that the consumption is only financed with the profits realized by the portfolio, and not by outside benefits. Then, the wealth of the agent satisfies the following equation :

$$dY_t = \theta_t^0 S_t^0 r_t dt + \sum_{i=0}^k \theta_t^i S_t^i b_t^i dt + \sum_{i=0}^k \theta_t^i S_t^i (\sigma_t^i, dW_t). \tag{4.3}$$

Then, we denote by $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$ the amount of wealth invested in the $i^{th}$ asset for $i = 1, ..., k$, and we notice that $\theta_t^0 S_t^0 = Y_t - \sum_1^k \pi_t^i$. We denote also by $\pi_t = (\pi_t^i, i = 1, .., k)$ the portfolio (or strategy), and so the total wealth can be written as a solution of a stochastic differential equation :

$$dY_t = Y_t \, r_t \, dt + (\pi_t, b_t - r_t \mathbf{1}) \, dt + (\pi_t, \sigma_t \, dW_t) \tag{4.4}$$

where $\mathbf{1}$ is the vector with all coordinates equal to 1. The previous line can also be rewritten by integrating from $t \wedge \tau$ to $T \wedge \tau$ :

$$Y_{T\wedge\tau} - Y_{t\wedge\tau} = \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} Y_s \, r_s \, ds + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} (\pi_s, b_s - r_s \mathbf{1}) \, ds + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} (\pi_s, \sigma_s \, dW_s) \text{ a.s.} \tag{4.5}$$

so :

$$Y_{t\wedge\tau} = Y_{T\wedge\tau} - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \underbrace{[Y_s \, r_s + (\pi_s, b_s - r_s \mathbf{1})]}_{-f(s,Y_s,Z_s)} \, ds - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} (\underbrace{\sigma_s^* \pi_s}_{Z_s}, dW_s) \text{ a.s.} \tag{4.6}$$

The wealth equation can be written as a BSDE with random terminal time. A first interest of writing the problem in this way is to model the hedging problem with a unique equation, and another interesting aspect is that such a tool does not use the notion of equivalent martingale measure to solve the hedging problem (see N. El Karoui, S. Peng and M.-C. Quenez [EKPQ97]).

We consider two different agents in the market : agent $N$ is a normally informed agent, as presented above, and the other agent, agent I, has got an additional information on the market. He knows, at time $t = 0$, a random variable $L \in \mathcal{F}_{T'}$, where $T' \geq T$ (in general $T' > T$). The filtration representing his information is obtained by enlarging the natural filtration of the Brownian motion.

$$\mathcal{Y}_t = \bigcap_{s>t} (\mathcal{F}_s \vee \sigma(L)). \tag{4.7}$$

Because the actualized assets prices are martingales in the initial probability space under a risk-neutral probability, it would be interesting and natural that they still have similar properties in the larger space. So the main problem is under which condition do we have the following useful property :

**Hypothesis (H')** *If $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ is a given $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale (or semi-martingale), then $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ is a $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-semi-martingale.*

This problem has been developed by T. Jeulin and M. Yor [JY78b, JY78a, JY85], next by J. Jacod [JAC85], and later by J. Amendinger [AME99] and A. Grorud and M. Pontier [GP97]. The main assumption we will work with is the following :

**Hypothesis ($\mathbf{H_3}$)** *There exists a probability $\mathbb{Q}$ equivalent to $\mathbb{P}$ under which $\mathcal{F}_t$ and $\sigma(L)$ are independent, $\forall t < T'$.*

Remark that ($\mathbf{H_3}$) implies ($\mathbf{H'}$). And among the remarkable consequences of this hypothesis, we can notice that, $W$ is a $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q})$-Brownian motion (see J. Jacod [JAC85]). Another very important tool that holds under hypothesis ($\mathbf{H_3}$) is a martingale representation theorem for $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q})$-martingales with respect to Brownian motion $W$, stated in J. Jacod and A.N. Shiryaev [JS03] (Theorem $III$.4.33 p. 189), and used as a key tool in the proof of the main Theorem in [EL05].

Some of the questions raised in this article that naturally appear when dealing with additional information is : will the informed agent hedge his option as the non informed agent ? Will he have a different hedging strategy ?

The case of European contingent claims was studied by A. Eyraud-Loisel (2004) [EL05], who studied existence and uniqueness of solution of a backward stochastic differential equation with fixed horizon, under an initial enlargement of filtration. Under hypothesis ($\mathbf{H_3}$), she proved that the informed agent will have a unique hedging strategy for the European option, which is the same as a non informed agent. The main financial question is : is it the case for American options ? And this turns out to be mathematically : does the BSDE with random terminal time under enlarged filtration have a unique solution ? Is this solution adapted to the small filtration ?

### 4.2.2 Mathematical formulation

Mathematically speaking, from a more general point of view, we are looking for a solution of the following BSDE with random terminal time :

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} (Z_s, dW_s) \ , \forall 0 \leq t \leq T \tag{4.8}$$

which belongs to the enlarged space $\mathcal{Y}_t$, and with

- $\xi \in L^2(\mathcal{Y}_\tau)$ is the terminal condition,
- $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ is the driver,
- $Y_t$ is the total wealth of the portfolio at time $t$,
- $Z_t$ represents the portfolio investments at time $t$.

One of the fundamental results on solutions of BSDEs with random terminal time is an existence and uniqueness theorem given by E. Pardoux [PAR98] which gives the existence and uniqueness of the solution of the BSDE with random terminal time under some Lipschitz hypothesis and also monotonicity conditions on the drift function. P. Briand and Y. Hu [BH98a] improved the result in the one-dimensional case and M. Royer [ROY04] reduced again the hypotheses on monotonicity conditions preserving existence and uniqueness of the solution of the BSDE with random terminal time.

## 4.3 BSDE with random terminal time under enlarged filtration

### 4.3.1 Stopping time a.s. bounded by $T < T'$

Let $\tau$ be a stopping time a.s. bounded by $T$. $\tau \leq T < T'$.
Suppose $f(.,y,z)$ is $\mathcal{F}$-progressive measurable, and satisfies the following assumptions

**(A 1)** $f$ is Lipschitz w.r.t. $z$ (Lipschitz constant $K$),

**(A 2)** $f$ is continuous w.r.t. $y$ and $\exists$ an increasing function $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ such that

$$|f(t,y,0)| \leq |f(t,0,0)| + \varphi(|y|), \mathbb{P} - a.s.\ , \forall t, y,$$

**(A 3)** $f$ is monotonous w.r.t. $y$ : $\exists\, \mu \in \mathbb{R}$ such that

$$< y - y', f(t,y,z) - f(t,y',z) > \leq \mu |y - y'|^2,\ \mathbb{P} - a.s.,\ \forall t, y, y', z,$$

**(A 4)** $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\int_0^T |f(t,0,0)|^2 dt) < \infty$.

We denote by $(\,\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{F}\,, \mathbf{P}\,)$ a probability space which stands either for the standard space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ or for the enlarged space $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$.
We define, for any real $A > 0$, the following spaces of $\mathbf{F}$-progressively measurable processes :

$$\mathcal{M}^2_{\mathbf{P},\mathbf{F}}\big(0, A; \mathbb{R}^d\big) = \left\{ \mathbb{R}^d\text{-valued } \mathbf{F}\text{-adapted process } \psi; \quad \mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left( \int_0^A \|\psi_s\|^2 ds \right) < \infty \right\}$$

$$S^2_{\mathbf{P},\mathbf{F}}\big(0, A; \mathbb{R}^d\big) = \left\{ \mathbb{R}^d\text{-valued } \mathbf{F}\text{-adapted process } \psi; \quad \mathbb{E}_{\mathbf{P}}\left( \sup_{0 \leq s \leq A} \|\psi_s\|^2 \right) < \infty \right\}$$

We are looking for a solution of the following BSDE with random terminal time :

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} (Z_s, dW_s)\ , \forall\, 0 \leq t \leq T \tag{4.9}$$

**Definition 4.3.1**
*A $(\,\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{F}\,, \boldsymbol{P}\,)$-solution (or a solution on $(\,\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{F}\,, \boldsymbol{P}\,)$) to equation (4.9) is a pair of $\boldsymbol{F}$-progressively measurable processes $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$-valued $\big(Y_t, Z_t\big)_{0\leq t\leq T}$ such that*

1. $Z \in \mathcal{M}^2_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{F}}\big(0, T; \mathbb{R}^{k\times d}\big)$,
2. *On the set* $\{t \geq \tau\}$, *we have* $Y_t = \xi$ *and* $Z_t = 0$,
3. $\forall t \in [0,T]$, *we have* $Y_{t\wedge\tau} = Y_\tau + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} (Z_s, dW_s)$.

We look for a solution successively on the standard space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and on the enlarged space $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$.

Under the Brownian filtration, the previous hypotheses on the driver $f$ guarantee the following existence and uniqueness result (see for a proof E. Pardoux [PAR98]) :

**Theorem 4.3.1** *Suppose $f(.,y,z)$ is $\mathcal{F}$-prog. measurable, and satisfies the previous hypotheses **(A1)** to **(A4)**. Then for all $\xi \in L^2_{\mathbb{P}}(\mathcal{F}_\tau)$, the BSDE*

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} (Z_s, dW_s) \ , \forall\, 0 \leq t \leq T\wedge\tau \tag{4.10}$$

*has a unique adapted solution $(Y,Z)$ in $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.*

We are now proving that under the same hypotheses on the driver $f$, asking for an additional integration hypothesis under the new probability $\mathbb{Q}$, the BSDE with random terminal time also has a unique solution in the enlarged space $(\Omega,\mathcal{Y},\mathbb{Q})$.

**Theorem 4.3.2**
*Under the hypotheses **(A1)** to **(A4)** on $f$, and if $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\int_0^T |f(s,0,0)|^2\, ds) < \infty$, then for all $\xi \in L^2_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Y}_\tau)$, the BSDE*

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} (Z_s, dW_s) \ , \forall\, 0 \leq t \leq T \tag{4.11}$$

*has a unique adapted solution $(Y,Z)$ in $(\Omega,\mathcal{Y},\mathbb{Q})$.*

**Remark :** On the set $\{t \geq \tau\}$, we have $Y_t = Y_\tau = \xi$.

**Proof.**

**1. Existence**

We fix $\xi \in L^2_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Y}_\tau)$.
From existence and uniqueness Theorem in A. Eyraud-Loisel (2005) [EL05], we can define $\big(Y_t, Z_t\big)_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{M}^2_{\mathbb{Q},\mathcal{Y}}\big(0,T;\mathbb{R}^{k\times d}\big)\times\mathcal{M}^2_{\mathbb{Q},\mathcal{Y}}\big(0,T;\mathbb{R}^{k\times d}\big)$ as the unique $\mathcal{Y}_t$-adapted solution of the following BSDE

$$\forall\, t\in[0,T], \quad Y_t \;=\; \xi \;+\; \int_t^T 1\!\!1_{s\leq\tau}\; f(s,Y_s,Z_s)ds \;-\; \int_t^T (Z_s, dW_s)\,, \tag{4.12}$$

which can be rewritten in the following way

$$\forall\, t\in[0,T], \quad Y_t \;=\; \xi\; 1\!\!1_{\{\tau\leq T\}} \;+\; \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s,Y_s,Z_s)ds \;-\; \int_t^T (Z_s, dW_s)\,.$$

We fix $t\in[0,T]$.

By definition, $\quad Y_{t\wedge\tau} \;=\; \xi \;+\; \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s,Y_s,Z_s)\; ds - \int_{t\wedge\tau}^{T} (Z_s, dW_s)\,.$

Consequently $\quad Y_{T\wedge\tau} \;=\; \xi \;-\; \int_\tau^T (Z_s, dW_s)\,,\quad$ hence $\int_\tau^T (Z_s, dW_s)$ is $\mathcal{Y}_\tau$-measurable.

This leads to $\quad \int_\tau^T (Z_s, dW_s) \;=\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big(\int_\tau^T (Z_s, dW_s)\;\Big|\;\mathcal{Y}_\tau\Big) \;=\; 0,$

as $\Big(\int_0^t (Z_s, dW_s)\Big)_{t\geq 0}$ is a $\big(\mathcal{Y}_t,\mathbb{Q}\big)$-martingale.

Hence $\quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big( \int_\tau^T \big|\big|Z_s\big|\big|^2 \, ds\Big) \;=\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(\Big( \int_\tau^T (Z_s, dW_s)\Big)^2\bigg) \;=\; 0,$

which means that $Z_t = 0 \;\; \mathbb{Q}\, a.s.$ on the set $\{\tau < t \leq T\}$.

We deduce that

$$Y_{t\wedge\tau} \;=\; \xi \;+\; \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s, Y_s, Z_s)\; ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} (Z_s, dW_s)\,.$$

Besides, $\forall\, t \in [0,T], \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big(\,|Y_t \;-\; Y_{t\wedge\tau}|^2\,\big) \;=\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big(\, \int_{t\wedge\tau}^{t} \|Z_s\|^2\, ds\,\big)\,.$

Then it follows that, $\forall\, t \in [0,T], \quad Y_t \;=\; Y_{t\wedge\tau} \quad dt \otimes d\mathbb{Q} \,-\, a.s.$

**2. Uniqueness**

Suppose that there exists at least two $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$-solutions to the equation (4.9). We denote by $\big(Y_t^1, Z_t^1\big)_{t\in[0,T]}$ and $\big(Y_t^2, Z_t^2\big)_{t\in[0,T]}$ these solutions.

Let us recall that $\forall t \geq \tau,\; Y_t^1 = Y_t^2 = \xi$ and $Z_t^1 = Z_t^2 = 0$.

We first wish to prove that $Y^1 = Y^2 \quad \mathbb{Q} - a.s.$

We set $\hat{Y} = Y^1 - Y^2$ and $\hat{Z} = Z^1 - Z^2$.

Let $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ and $t \in [0,T]$.

Applying Itô's formula to $\; e^{\lambda s}|\widehat{Y}_s|^2 \;$ we get that

$$e^{\lambda(t\wedge\tau)}|\widehat{Y}_{t\wedge\tau}|^2 \;=\; e^{\lambda\tau}\; |\widehat{Y}_\tau|^2 \;-\; 2 \int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\lambda s}\; \widehat{Y}_s\; (\widehat{Z}_s, dW_s) \;-\; \int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\lambda s}\; \|\widehat{Z}_s\|^2\; ds$$

$$-\; \lambda \int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\lambda s}|\widehat{Y}_s|^2\; ds \;+\; 2 \int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\lambda s} \; < \widehat{Y}_s \,,\; f(s, Y_s^1, Z_s^1) \;-\; f(s, Y_s^2, Z_s^2) > \; ds.$$

Hence, by taking the convenient expectation,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big(e^{\lambda(t\wedge\tau)}|\widehat{Y}_{t\wedge\tau}|^2\Big) \;&\leq\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big(\; e^{\lambda\tau}\; |\widehat{Y}_\tau|^2\Big) \;-\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\lambda s}\; \|\widehat{Z}_s\|^2\; ds\bigg) \\ &\quad + \; (2\mu - \lambda)\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\lambda s}|\widehat{Y}_s|^2\; ds\bigg) \;+\; 2K\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\lambda s}|\widehat{Y}_s|\; \|\widehat{Z}_s\|\; ds\bigg) \\ &\leq\; (K^2 + 2\mu - \lambda)\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(\int_0^T e^{\lambda s}|\widehat{Y}_s|^2\; ds\bigg). \end{aligned}$$

We deduce that for any $\lambda \geq 2\mu + K^2, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big(e^{\lambda(t\wedge\tau)}|\widehat{Y}_{t\wedge\tau}|^2\Big) \;\leq\; 0$, which yields to the uniqueness of $Y$ in $\mathcal{M}^2_{\mathbb{Q},\mathcal{Y}}\big(0,T;\mathbb{R}^k\big)$.

After replacing $\widehat{Y}$ by 0 in the equation satisfied by $(\widehat{Y}, \widehat{Z})$, we obtain $\forall\, t \in [0, T]$,

$$\int_{t\wedge\tau}^{\tau} \big( f(s, Y_s^1, Z_s^1) - f(s, Y_s^1, Z_s^2) \big)\, ds \;=\; \int_{t\wedge\tau}^{\tau} (\widehat{Z}_s, dW_s)\,.$$

Given that a martingale can be equal to a finite variation process if and only if it is a null process, then

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^{t\wedge\tau} \|\widehat{Z}_s\|^2\, ds\right) = 0,$$

which provides also the uniqueness of $Z$ in $\mathcal{M}^2_{\mathbb{Q},\mathcal{Y}}\big(0, T; \mathbb{R}^{k\times d}\big)$. $\square$

**Corollary 4.3.1**
*Let $\xi \in L^2_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Y}_\tau)$. If $(Y_t, Z_t)_{0\le t\le T}$ is a $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$-solution of the BDSE (4.9) as defined in the Definition 4.3.1, with $f$ satisfying the conditions **(A1)** to **(A4)**, and satisfying additionally $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\int_0^T |f(s, 0, 0)|^2\, ds) < \infty$, then*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\le t\le T} |Y_t|^2\right) < +\infty. \tag{4.13}$$

**Proof.** From Itô's formula and Burckholder-Davis-Gundy's inequality, and by using assumptions **(A1)** to **(A4)**, we get that

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big(\sup_{0\le t\le T} |Y_t|^2\Big) \;&\le\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big(|\xi|^2\big) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big(\int_0^T |f(s, 0, 0)|^2\, ds\Big) \\ &+ (1 + 2\mu + K^2)\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big(\int_0^T |Y_s|^2\, ds\Big) \;+\; 2C^2_{\text{BDG}}\, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big(\int_0^T \|Z_s\|^2\, ds\Big),\end{aligned}$$

which is finite thanks to the hypotheses on $\xi$ and $f$, and because the solution $(Y, Z)$ of the BSDE (4.9) is in $\mathcal{M}^2_{\mathbb{Q},\mathcal{Y}}\big(0, T; \mathbb{R}^k\big) \times \mathcal{M}^2_{\mathbb{Q},\mathcal{Y}}\big(0, T; \mathbb{R}^{k\times d}\big)$. $\square$

### 4.3.2 Stopping time a.s. strictly bounded by $T'$

Let now $\tau$ be a $\mathcal{F}$-stopping time, a.s. strictly bounded by $T'$.
We want to solve the following BSDE

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s, Y_s, Z_s) ds \;-\; \int_{t\wedge\tau}^{\tau} (Z_s, dW_s)\ ,\, \forall\, 0 \le t \le T' \tag{4.14}$$

We will now suppose that $f(., y, z)$ is $\mathcal{F}$-progressively measurable, and satisfies the following assumptions :

**(A1)** $f$ is Lipschitz with respect to $z$, with Lipschitz constant $K$,

**(A2')** $f$ is continuous w.r.t. $y$, $\forall t, z$ a.s., and there exists a constant $K$ such that

$$|f(t, y, z)| \le |f(t, 0, 0)| + K|y| + K \parallel z \parallel, \mathbb{P} - a.s.\ , \forall t, y, \tag{4.15}$$

**(A3)** $f$ is monotonous w.r.t. $y$ : $\exists \mu \in \mathbb{R}$ such that

$$< y - y', f(t,y,z) - f(t,y',z) > \leq \mu |y - y'|^2, \ \mathbb{P} - a.s., \ \forall t, y, y', z,$$

**(A4)** $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\int_0^{T'} |f(t,0,0)|^2 dt) < \infty$.

**Definition 4.3.2**
*A $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$-solution (or a solution on $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$) to equation (4.14) is a pair of $\boldsymbol{F}$-progressively measurable processes $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$-valued $\big(Y_t, Z_t\big)_{0\leq t \leq T'}$ such that*

1. $(Y,Z) \in S^2_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{F}}\big(0,T';\mathbb{R}^k\big) \times \mathcal{M}^2_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{F}}\big(0,T';\mathbb{R}^{k\times d}\big)$,
2. *On the set* $\{t \geq \tau\}$, *we have* $Y_t = \xi$ *and* $Z_t = 0$,
3. $\forall t \in [0,T']$, *we have* $Y_{t\wedge\tau} = Y_\tau + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s,Y_s,Z_s)\, ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} (Z_s, dW_s)$.

We look again for a solution successively on the standard space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and on the enlarged space $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$.

Under the Brownian filtration, the previous hypotheses on the driver $f$ guarantee the existence and uniqueness result for $\xi \in L^2_{\mathbb{P}}(\mathcal{F}_\tau)$ (see E. Pardoux [PAR98], or [PAR99] Theorem 4.1 p. 23). Under additional hypotheses we have the following theorem, as in case of the previous section, but for a more general stopping time, we prove that under the same hypotheses on the driver $f$, asking for an additional integration hypothesis under the new probability $\mathbb{Q}$, the BSDE with random terminal time also has a unique solution in the enlarged space $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$.

**Theorem 4.3.3**
*If $\tau < T'$ a.s., under the hypotheses **(A1)**, **(A2')**, **(A3)** and **(A4)** on $f$, and if moreover $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\int_0^T |f(s,0,0)|^2\, ds) < \infty$, then for all $\xi \in L^2_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Y}_\tau)$, the BSDE*

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s,Y_s,Z_s) ds \ - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} (Z_s, dW_s) \ , \forall\, 0 \leq t \leq T' \tag{4.16}$$

*has a unique adapted solution $(Y_t, Z_t)_{0\leq t\leq T'}$ in $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{Q})$.*
*Moreover, the solution satisfies*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t}|Y_t|^2 + \int_0^\tau e^{\lambda t}|Y_t|^2 dt + \int_0^\tau e^{\lambda t} \parallel Z_t \parallel^2 dt\right) \\ &\leq C\, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\lambda\tau}|\xi|^2 + \int_0^\tau e^{\lambda t}|f(t,0,0)|^2 dt\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

**Proof.**

**1. Existence**

For each $n \in \mathbb{N}$, we construct a solution $\{(Y^n_t, Z^n_t); t \geq 0\}$ on the fixed interval $[0, T' - \frac{1}{n}]$, of the following BSDE

$$Y^n_t = \xi_n + \int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} f(s, Y^n_s, Z^n_s) ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} (Z^n_s, dW_s), \ 0 \leq t \leq T_n, \tag{4.18}$$

where $T_n, \tau_n, \xi_n$ denote respectively $T_n = T' - \frac{1}{n}$, $\tau_n = T_n \wedge \tau$, and $\xi_n = \xi 1\!\!1_{\tau \leq T_n}$.

This equation has a unique solution in $\mathcal{M}^2_{\mathbb{Q},\mathcal{Y}}(0, T_n; \mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2_{\mathbb{Q},\mathcal{Y}}(0, T_n; \mathbb{R}^{k\times d})$, according to the existence and uniqueness result of Theorem 4.3.2 from previous subsection, for a random terminal time bounded by $T' - \frac{1}{n} < T'$.
Moreover, $\{(Y^n_t, Z^n_t); t \in [T_n, T']\}$ is defined by

$$\begin{cases} Y^n_t &= \xi_n, \ \forall t > \tau_n, \\ Z^n_t &= 0, \ \forall t > \tau_n. \end{cases} \tag{4.19}$$

Hence $(Z^n) \in \mathcal{M}^2_{\mathbb{Q},\mathcal{Y}}(0, T'; \mathbb{R}^{k\times d})$, and $(Y^n) \in \mathcal{M}^2_{\mathbb{Q},\mathcal{Y}}(0, T'; \mathbb{R}^k)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Let now $m > n$, and define $\Delta Y_t = Y^m_t - Y^n_t$, $\Delta Z_t = Z^m_t - Z^n_t$.
We want to prove that $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ and $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are Cauchy sequences, and so are convergent. The limit will satisfy the BSDE (4.16).

We first have that for any $t \leq T_n < T_m$ :

$$\begin{aligned} \Delta Y_t \ &= \ \xi_m - \xi_n + \int_{t\wedge\tau}^{\tau_m} f(s, Y^m_s, Z^m_s) ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} f(s, Y^n_s, Z^n_s) ds \\ &\quad - \int_{t\wedge\tau}^{\tau_m} (Z^m_s, dW_s) + \int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} (Z^n_s, dW_s) \end{aligned}$$

Consequently, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, for any $t \leq T_n$, applying Itô's formula to $e^{\lambda t} |\Delta Y_t|^2$ between $t \wedge \tau$ and $\tau_n = T_n \wedge \tau$ and using the same argument as in the proof of uniqueness, we obtain that

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big( e^{\lambda(t\wedge\tau)} |\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 \Big) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} e^{\lambda s} \left(\lambda |\Delta Y_s|^2 + \parallel \Delta Z_s \parallel^2\right) ds \\ &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{\lambda\tau_n}\big( |\xi_m - \xi_n|^2\big)\right) + 2\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} e^{\lambda s} \left(\mu |\Delta Y_s|^2 + K |\Delta Y_s| \times \parallel \Delta Z_s \parallel\right) ds \end{aligned} \tag{4.20}$$

and so, for all $\lambda \geq 2\mu + K^2$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big( e^{\lambda(t\wedge\tau)} |\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 \Big) \ \leq \ e^{\lambda T'} \ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big( |\xi_m - \xi_n|^2 \big). \tag{4.21}$$

We also have that

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(|\xi_m - \xi_n|^2\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(|\xi|^2 1\!\!1_{T_n < \tau \leq T_m}\right) \tag{4.22}$$

As we have supposed $\tau < T'$ a.s., this tends to 0 as $n$ tends to infinity (dominated convergence Theorem).
So the last term in (4.21) converges to zero as $n$ tends to infinity. So $\Delta Y_{t\wedge\tau}$ goes to 0.

Next, consider the case of $t \in [T_n, T_m]$. Then $Y^n_t = \xi_n$, and so

$$\Delta Y_t = \xi_m - \xi_n + \int_{t\wedge\tau}^{\tau_m} f(s, Y^m_s, Z^m_s) ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau_m} (Z^m_s, dW_s). \tag{4.23}$$

We can also apply Itô's formula on $e^{\lambda t}|\Delta Y_t|^2$ between $t \wedge \tau$ and $\tau_m$.
We remark that $Z_s^n = 0 \, \forall s \geq T_n$ so $Z_s^m = \Delta Z_s$ for $s \geq t$.
We obtain the following :

$$\begin{aligned}
e^{(\lambda t \wedge \tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 &+ \int_{t\wedge\tau}^{\tau_m} e^{\lambda s}\left(\lambda|\Delta Y_s|^2 + \| \Delta Z_s \|^2\right) ds \\
&= e^{\lambda \tau_m}|\xi_m - \xi_n|^2 + 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau_m} e^{\lambda s} < \Delta Y_s, f(s, Y_s^m, \Delta Z_s) > ds \\
&-2\int_{t\wedge\tau}^{\tau_m} e^{\lambda s}(\Delta Y_s, \Delta Z_s dW_s) \\
&\leq e^{\lambda \tau_m}|\xi_m - \xi_n|^2 + 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau_m} e^{\lambda s}\left(\mu|\Delta Y_s|^2 + K|\Delta Y_s| \times \| \Delta Z_s \|\right) ds \\
&\quad +2\int_{t\wedge\tau}^{\tau_m} e^{\lambda s}|\Delta Y_s| \times |f(s, \xi_n, 0)| ds - 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau_m} e^{\lambda s}(\Delta Y_s, \Delta Z_s dW_s) \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

We take the $\mathbb{Q}$-expectation of the previous inequality, the martingale term has expectation 0, and we deduce using standard inequalities

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{(\lambda t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2\right) \\
&\leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\lambda\tau_m}|\xi_m - \xi_n|^2\right) + \left(2\mu + K^2 + 1 - \lambda\right)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_{t\wedge\tau}^{\tau_m} e^{\lambda s}|\Delta Y_s|^2 ds\right) \\
&\quad +\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_{t\wedge\tau}^{\tau_m} e^{\lambda s}|f(s, \xi_n, 0|^2 ds\right) \\
&\leq e^{\lambda T'}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(|\xi_m - \xi_n|^2\right) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_{\tau_n}^{\tau_m} e^{\lambda s}|f(s, \xi_n, 0|^2 ds\right) \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

for all $\lambda \geq 2\mu + K^2 + 1$.
Then, from assertion **(A2')**,

$$|f(s, \xi_n, 0)|^2 \leq 2|f(t, 0, 0)|^2 + 2K|\xi_n|^2 \leq 2|f(t, 0, 0)|^2 + 2K|\xi|^2$$

So it is $\mathbb{Q}$-integrable from hypotheses of the theorem, and so as $\tau_m - \tau_n$ tends to zero as $n$ goes to infinity, the right term of (4.25) tends to zero as $n$ tends to infinity. This proves that $\Delta Y_t$ tends to zero as $n$ tends to infinity. We obtain that $\Delta Z_t$ also converges to 0 by taking the limit as $n$ tends to infinity in inequality (4.24).

Finally, we consider $t \in [T_m, T']$.
As said previously, $Y_t^m - Y_t^n = \xi_m - \xi_n$ converges $\mathbb{Q}$ a.s. to zero as $n$ tends to the infinity, so in this case also, $\Delta Y_t$ goes to 0.

Hence $(Y_t^n)_{n\geq 0}$ is a Cauchy sequence $\mathbb{Q}$-a.s.
We now need to state the following a-priori estimate, which provides an upper bound of the expected wealth process $Y$ under probability $\mathbb{Q}$, whenever $\xi \in L^2_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Y}_\tau)$.

**Lemme 4.3.1** *$(Y^n, Z^n)$ satisfies the following inequality, for any $\lambda \geq 2\mu + 2K^2 + \frac{3}{2}$,*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\lambda(t\wedge\tau)}|Y^n_{t\wedge\tau}|^2\right) \leq e^{\lambda T'} E_{\mathbb{Q}}\left(|\xi|^2\right) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^\tau e^{\lambda s}|f(s,0,0)|^2 ds\right), \tag{4.26}$$

*and also*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t}|Y^n_t|^2 + \int_0^\tau e^{\lambda s}|Y^n_s|^2\, ds + \int_0^\tau e^{\lambda s} \parallel Z^n_s \parallel^2\ ds\right)$$
$$\leq C\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\lambda\tau}|\xi|^2 + \int_0^\tau e^{\lambda s}|f(s,0,0)|^2\, ds\right). \tag{4.27}$$

**Proof of of Lemma 4.3.1** We establish the majoration for the sequence $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ previously defined in the proof of existence in Theorem 4.3.3, and then we should obtain identical results on our solution by passing to the limit.
For the first inequality, we apply Itô's formula to $e^{\lambda s}|Y^n_s|^2$ between $t\wedge\tau$ and $\tau_n$, and as previously, we use standard inequalities to obtain the majoration. We have, $\forall t \leq T_n$,

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda(t\wedge\tau)}|Y^n_{t\wedge\tau}|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} e^{\lambda s}\left(\lambda|Y^n_s|^2 + \parallel Z^n_s \parallel^2\right) ds \\
&= e^{\lambda\tau_n}|\xi_n|^2 + 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} e^{\lambda s} < Y^n_s, f(s,Y^n_s,Z^n_s) > ds - 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} e^{\lambda s}(Y^n_s, Z^n_s dW_s) \\
&\leq e^{\lambda\tau_n}|\xi_n|^2 + 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} e^{\lambda s}\left(\mu|Y^n_s|^2 + K|Y^n_s|\times \parallel Z^n_s \parallel\right) ds - 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} e^{\lambda s}(Y^n_s, Z^n_s dW_s) \\
&\quad +2\int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} e^{\lambda s}|Y^n_s| \times |f(s,0,0)| ds.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

So for all $\lambda \geq 2\mu + K^2 + 1$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\lambda(t\wedge\tau)}|Y^n_{t\wedge\tau}|^2\right) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\lambda\tau_n}|\xi_n|^2\right) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} e^{\lambda s}|f(s,0,0)|^2 ds\right). \tag{4.29}$$

For the second inequality, let us first apply Burkholder-Davis-Gundy's inequality to inequality (4.28). We obtain, $\forall \eta, \varepsilon > 0$ :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(1-\eta)\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t}|Y^n_t|^2 + \int_0^{\tau_n} e^{\lambda s}\left((\lambda - 2\mu - \varepsilon K^2 - 1)|Y^n_s|^2 + (1-\frac{1}{\varepsilon}) \parallel Z^n_s \parallel^2\right) ds\right]$$
$$\leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\lambda\tau_n}|\xi_n|^2\right) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\int_0^{\tau_n} e^{\lambda s}|f(s,0,0)|^2 ds + 2C^2_{BDG}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\int_0^{\tau_n} e^{\lambda s} \parallel Z^n_s \parallel ds.$$

Taking $\varepsilon = 2$ and $\eta = 1/2$ provides the following, $\forall \lambda \geq 2\mu - 2K^2 - \frac{3}{2}$ :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t}|Y^n_t|^2 + \int_0^{\tau_n} e^{\lambda s}|Y^n_s|^2 ds + \int_0^{\tau_n} e^{\lambda s} \parallel Z^n_s \parallel^2 ds\right) \tag{4.30}$$
$$\leq 2\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\left(e^{\lambda\tau_n}|\xi_n|^2\right) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\int_0^{\tau_n} e^{\lambda s}|f(s,0,0)|^2 ds + 2C^2_{BDG}\int_0^{\tau_n} e^{\lambda s} \parallel Z^n_s \parallel ds\right).$$

In order to get an upper bound on the last term, we use again Itô's formula on $e^{\lambda s}|Y_s^n|^2$ and take the expectation under $\mathbb{Q}$. We obtain for any $\lambda \geq 2\mu + 2K^2 + 1$ :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^{\tau_n} e^{\lambda s} \parallel Z_s^n \parallel^2 ds\right) \leq 2\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\lambda \tau_n}|\xi|^2\right) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^{\tau_n} e^{\lambda s}|f(s,0,0)|^2 ds\right)\right). \quad (4.31)$$

We replace it in inequality (4.30), and obtain finally, $\forall \lambda \geq 2\mu + 2K^2 + \frac{3}{2}$ :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} e^{\lambda t}|Y_t^n|^2 + \int_0^{\tau_n} e^{\lambda s}|Y_s^n|^2 ds + \int_0^{\tau_n} e^{\lambda s} \parallel Z_s^n \parallel^2 ds\right)\\ &\quad \leq \left(2 + 8C_{BDG}^2\right)\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\lambda \tau_n}|\xi_n|^2\right) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \int_0^{\tau_n} e^{\lambda s}|f(s,0,0)|^2 ds\right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

which completes the proof of the lemma. □

We turn back to the proof of the Theorem 4.3.3.

We obtain the expected inequalities only for $(Y^n, Z^n)$. We need to pass to the limit. For this purpose, we take the conditional expectation of equation (4.28). We obtain :

$$e^{\lambda(t\wedge\tau)}|Y_{t\wedge\tau}^n|^2 \leq e^{\lambda T'}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(|\xi|^2 + \int_0^{T'} |f(s,0,0)|^2 ds \,\middle|\, \mathcal{Y}_{t\wedge\tau}\right). \quad (4.33)$$

This proves that $|Y^n|^2$ is dominated by a $\mathbb{Q}$-integrable process independent of $n$, and the same is true for $\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t}|Y_t^n|^2$ . This allows us to dominate also $|\Delta Y|^2$, and to apply dominated convergence Theorem. We conclude that $Y^n$ is a Cauchy sequence in $\mathcal{M}^2_{\mathbb{Q},\mathcal{Y}}(0,T';\mathbb{R}^k)$. Taking the limit in the equation 4.20, we deduce that the same holds for $\Delta Z_t$ and $(Z_t^n)_{n\geq 0}$ is also a Cauchy sequence in $\mathcal{M}^2_{\mathbb{Q},\mathcal{Y}}(0,T';\mathbb{R}^{k\times d})$. This allows us to define $(Y,Z)$ as the limit of the sequence $(Y^n, Z^n)_{n\geq 0}$.

And next, by taking the limit in equation (4.29) as $n$ tends to infinity, we obtain finally

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{(\lambda t\wedge\tau)}|Y_{t\wedge\tau}|^2\right) \leq e^{\lambda T'}E_{\mathbb{Q}}\left(|\xi|^2\right) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^{\tau} e^{\lambda t}|f(s,0,0)|^2 ds\right), \quad (4.34)$$

which provides the first inequality.

And by taking the limit as $n$ goes to infinity in equation (4.32) :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} e^{\lambda t}|Y_t|^2 + \int_0^{\tau} e^{\lambda s}|Y_s|^2 ds + \int_0^{\tau} e^{\lambda s} \parallel Z_s \parallel^2 ds\right)\\ &\quad \leq \left(2 + 8C_{BDG}^2\right)\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\lambda \tau}|\xi|^2\right) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \int_0^{\tau} e^{\lambda s}|f(s,0,0)|^2 ds\right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

This has just allowed us to define the process $(Y,Z)$ as the limit of the sequence $(Y^n, Z^n)_{n\geq 0}$. This process satisfies equation (4.16) so it is solution of the BSDE $(f,\xi,\tau)$, and satisfies equation (4.17) : existence is proved. We have now to state the uniqueness.

**2. Uniqueness**

Let $(Y, Z)$ and $(Y', Z')$ be two solutions, which satisfy equations (4.16) and (4.17).
Let $(\bar{Y}, \bar{Z}) = (Y - Y', Z - Z')$.
It follows from Itô's formula applied between $t \wedge \tau$ and $\tau \wedge T_n = \tau_n$, and the assumptions (**A1**), (**A2′**), (**A3**) and (**A4**) that for all $\lambda \in \mathbb{R}$ and for $t \leq T_n$,

$$\begin{aligned} e^{(\lambda t \wedge \tau)}|\bar{Y}_{t\wedge\tau}|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} e^{\lambda s}\left(\lambda|\bar{Y}_s|^2 + \parallel \bar{Z}_s \parallel^2\right) ds \\ \leq e^{\lambda\tau_n}|\bar{Y}_{\tau_n}|^2 + 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} e^{\lambda s}\left(\mu|\bar{Y}_s|^2 + K|\bar{Y}_s| \times \parallel \bar{Z}_s \parallel\right) ds \\ -2\int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} e^{\lambda s}(\bar{Y}_s, \bar{Z}_s dW_s). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Combining the above inequality with

$$2K|\bar{Y}_s| \times \parallel \bar{Z}_s \parallel \leq \parallel \bar{Z}_s \parallel^2 + K^2|\bar{Y}_s|^2 \tag{4.37}$$

We deduce

$$e^{(\lambda t\wedge\tau)}|\bar{Y}_{t\wedge\tau}|^2 \leq e^{\lambda\tau_n}|\bar{Y}_{\tau_n}|^2 + (2\mu + K^2 - \lambda)\int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} e^{\lambda s}|\bar{Y}_s|^2 ds - 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau_n} e^{\lambda s}(\bar{Y}_s, \bar{Z}_s dW_s). \tag{4.38}$$

Then taking $\lambda \geq 2\mu + K^2$ and taking expectation under $\mathbb{Q}$ of the previous inequality, as $(W_s)_{0\leq s<T'}$ is a $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q})$-Brownian motion, so that the last term is a $(\mathcal{Y}, \mathbb{Q})$-martingale on $[0, T_n]$, null at $T_n$ so with 0 expectation, we deduce :

$$E_{\mathbb{Q}}\left(e^{(\lambda t\wedge\tau)}|\bar{Y}_{t\wedge\tau}|^2\right) \leq E_{\mathbb{Q}}\left(e^{\lambda\tau_n}|\bar{Y}_{\tau_n}|^2\right)\ \forall t \in [0, T_n]. \tag{4.39}$$

$e^{\lambda\tau_n}|\bar{Y}_{\tau_n}|^2$ is dominated by $e^{\lambda T'}\left(2\sup_{0\leq t\leq T'}|Y_t|^2 + 2\sup_{0\leq t\leq T'}|Y_t'|^2\right)$, which is $\mathbb{Q}$-integrable (by definition of a solution). So by dominated convergence Theorem, we can deduce since $\tau_n$ goes to $\tau$, and $T_n$ goes to $T'$ as $n$ goes to infinity, that

$$E_{\mathbb{Q}}\left(e^{(\lambda t\wedge\tau)}|\bar{Y}_{t\wedge\tau}|^2\right) \leq E_{\mathbb{Q}}\left(e^{\lambda\tau}|\bar{Y}_\tau|^2\right). \tag{4.40}$$

And as $\bar{Y}_\tau = 0$, since $Y_\tau = Y'_\tau = \xi$, this proves that $\forall t \leq \tau$, $\bar{Y}_t = 0$. As this is also true for $t \geq \tau$, as $Y_t = Y'_t = \xi$ by definition of the solution (see Definition 4.3.2), we deduce $\bar{Y}_t = 0\ \forall t \in [0, T']$ ($Y_{T'} = Y'_{T'} = \xi$ as $\tau < T'$ a.s. so this also holds for $T'$).
By replacing $\bar{Y}_t$ by 0 in equation (4.36), we also obtain $\bar{Z}_t = 0\ \forall t \in [0, T']$. Uniqueness is then proved, and Theorem 4.3.3 is stated. □

## 4.4 Financial Interpretation

Most of the contingent claims traded on the market have a maturity $T$ (it means that the exercise may occur before $T$, $\tau \leq T$). We will present here examples with finite maturity $T < T'$, and we will apply Theorem 4.3.2, which is enough to deal with such financial applications.

### 4.4.1 Examples

#### Hedging of American options

If we set the financial problem of hedging an American option with maturity $T < T'$, when the exercise time $\tau$ may occur at any time before $T$, the obtained BSDE is a BSDE with random terminal time. In an enlarged filtration, we can solve the BSDE as stated in the previous results (Theorem 4.3.2 as $\tau \leq T < T'$). The generator is in this case the following :

$$f(s, y, z) = -r_s y + \frac{b_s - r_s}{\sigma_s} z. \tag{4.41}$$

And the payoff has the form $\xi = (S_\tau - K)_+$.
In order to satisfy the hypotheses required in Theorem 4.3.2, we have to check some properties on coefficients : $r_s$ and $\sigma_s^{-1}(b_s - r_s)$ have to be bounded in order to satisfy **(A1)** ; **(A2')** is verified with setting $\varphi(u) = \sup_{s \geq 0} r_s \times u$ and $K = \left(\sup_{s\geq 0} r_s\right) \vee \left(\sup_{s\geq 0} \frac{b_s - r_s}{\sigma_s}\right)$ ; **(A3)** needs $-\mu \leq r_s$ ; and **(A4)** is satisfied since $f(t, 0, 0) = 0$.
As a conclusion, $\mu \leq r_s \leq C$, $\sigma_s^{-1}(b_s - r_s)$ bounded, and $\xi \in L^2$ are sufficient conditions to ensure existence and uniqueness of an hedging portfolio for an American option with or without an additional information satisfying hypothesis ($\mathbf{H_3}$).

**Remark :** In this financial application, $f(t, 0, 0) = 0$ so we can write in this case (see inequality (4.17) for instance) :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\lambda t}|Y_t|^2\right) \leq e^{\lambda T'} E_{\mathbb{Q}}\left(|\xi|^2\right)$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t}|Y_t|^2\right) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^\tau e^{\lambda t}|Y_t|^2 dt + \int_0^\tau e^{\lambda t} \parallel Z_t \parallel^2 dt\right) \leq C\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\lambda\tau}|\xi|^2\right)$$

which provides in particular an upper bound on the expected wealth process and the expected maximum wealth process.

#### Hedging of Lookback options

An example of a Lookback option should be an option with maturity $T < T'$ which pays at exercise the supremum of the price process among the last 2 months. So $\xi$ has mathematically the form :

$$\xi = \sup_{t\in[\tau-2,\tau]} S_t$$

$\xi \in L^2_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Y}) \cap L^2_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Y})$ (We apply Itô and Burkholder-Davis-Gundy on the SDE of the price process).
The generator $f$ is the same as in the equation (4.41). So with the same conditions on the parameters, this allows us to apply Theorem 4.3.2 to the case of Lookback options also.

### 4.4.2 Hedging by an informed agent

We supposed at the beginning a no-arbitrage market, with in particular $\sigma$ invertible. This allows us to deduce from the solution $(Y_s, Z_s)$ of the BSDE, the strategy $\pi_s$ of the portfolio in the risky assets.

The main consequence of our result (Theorem 4.3.2) is that the informed agent in our model will have a unique hedging strategy for the American contingent claim (see previous paragraph), or for any contingent claim which satisfies the hypotheses, in particular for which the exercise time is a bounded stopping time (maturity strictly bounded by $T'$, the time at which the private information is revealed). This case may be financially used when considering the problem of hedging American or Lookback options for instance, whose exercise time is a bounded stopping time. This is very often the case for most financial contingent claims traded in the market.

Our results mean in particular that information $L \in \mathcal{F}_{T'}$ satisfying $(\mathbf{H_3})$ does not provide any additional hedging strategy to the informed agent. In fact, for a $\xi \in \mathcal{F}_\tau$, both agents will have a unique hedging strategy, respectively $\mathcal{F}$ and $\mathcal{Y}$-adapted. But as the BSDE is the same for both agents, the $\mathcal{F}$-adapted solution of the non informed agent is also a solution of the enlarged BSDE, so it is the unique solution of this BSDE. In other words, the strategy of the informed agent is adapted to the small filtration $\mathcal{F}$. Then both agents have the same hedging strategy.

**Remark :** Let us notice that the fact that we obtain this result only strictly until $T'$ is not very surprising. This is mathematically due to the hypotheses of enlargement of filtration, which can hold only strictly until $T'$, but financially, it is quite easy to find some examples of contingent claims with terminal time $T'$, where an information on time $T'$ provides a different hedging strategy. Let us take for instance a digital option, $1\!\!1_{S_{T'} \leq K}$ and suppose that the information is $L = S_{T'}$ or even $1\!\!1_{S_{T'} \in [a,b]}$ then, the insider trader will hedge this option by doing nothing if $S_{T'} > K$ and invest in the non risky asset otherwise, which is different from what would do an ordinary agent.

## 4.5 Conclusion

The results obtained here are consistent with the results obtained for a fixed terminal time (see A. Eyraud-Loisel [EL05]). A further mathematical approach of such problems of BSDE with enlarged filtration and random terminal time will be to look at BSDE with uncertain horizon : the terminal time is not a random time any more, but a general random variable. It will be interesting to look at existence and uniqueness of solutions of such equations. Applications can be found in hedging of defaultable contingent claims, or to hedging of life insurance contracts. This approach is a bit different, because the enlargement of filtration that need to be used is a progressive enlargement of filtration (see M. Yor [YOR78], or default risk models developed in M. Jeanblanc and M. Rutkowski

[JR02, BJR04b, BJR04a], R. Elliott, M. Jeanblanc and M. Yor [EJY00], C. Blanchet-Scaillet and M. Jeanblanc (2004) [BSJ04]). This is a work that is in progress for the moment.

# Conclusion

Nous avons établi des résultats d'existence et d'unicité de solutions d'équations différentielles rétrogrades et progressives-rétrogrades en présence de grossissement de filtration. Nous avons étudié également des applications de tels résultats dans la couverture d'actifs financiers pour un agent informé. Nous avons montré que dans notre cas de grossissement de filtration, et donc d'information, satisfaisant l'hypothèse $(H_3)$, l'agent informé avait une unique stratégie de couverture, qui dans un modèle sans influence et dans un marché complet, pour des actifs contingents à horizon déterministe comme à horizon aléatoire, est la même que la stratégie d'un agent ne possédant que l'information commune. Nous avons également étudié le cas d'un agent influent qui rendait le marché incomplet du point de vue de l'agent ne possédant pas l'information.

De nombreuses extensions de tels modèles sont possibles. En effet, nous n'avons étudié que le cas d'une information forte initiale, c'est-à-dire le cas d'un grossissement initial de filtration. Il serait intéressant de s'intéresser également à d'autres types d'informations, à d'autres types de grossissement de filtration, comme l'information faible initiale (grossissement progressif), ou encore à des problèmes d'anticipation, avec une information dite faible.

D'autres problèmes se posent également, faisant apparaître des EDSR et du grossissement de filtration, comme la résolution d'EDSR dont l'horizon est une variable aléatoire générale, qui n'est pas un temps d'arrêt pour la filtration considérée. En effet, jusqu'à présent, n'ont été considérées que des EDSR dont l'horizon était un temps d'arrêt pour la filtration brownienne. Or ce genre de problème apparaît par exemple lorsque l'on s'intéresse à des problèmes de couverture d'actifs pouvant faire défaut, comme dans les modèles développés par C. Blanchet et M. Jeanblanc (2004) [BSJ04], R. Elliot, M. Jeanblanc et M. Yor (2000) [EJY00] ou par T. Bieliecki , M. Jeanblanc et M. Rutkowski (2002,2004) [JR02, BJR04b, BJR04a], où le temps de défaut n'est pas un temps d'arrêt. Il pourrait être intéressant également d'utiliser de tels modèles à des problèmes de couverture de produits d'assurance-vie, où le temps terminal est un instant de décès. Ces problèmes font naturellement apparaître un grossissement progressif de filtration, qui sous l'hypothèse standard du filtrage (**H**), possède des propriétés remarquables exploitables. Si l'on choisit de modéliser le problème de couverture de ce type d'actifs par une EDSR dont l'horizon est l'instant de défaut, on a à résoudre une EDSR avec un grossissement progressif de filtration, sous l'hypothèse (**H**). C'est un travail en cours, qui constitue un premier prolongement des résultats de cette thèse à un autre type de grossissement de filtration.

# Bibliographie

## Bibliographie

[ABS03] J. AMENDINGER, D. BECHERER, and M. SCHWEIZER. A monetary value for initial information in portfolio optimization. *Finance and Stochastics*, 7(1) :29–46, 2003.

[AI05] S. ANKIRCHNER and P. IMKELLER. Finite utility on financial markets with asymmetric information and structure properties of the price dynamics. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques*, 41(3) :479–503, 2005.

[AIS98] J. AMENDINGER, P. IMKELLER, and M. SCHWEIZER. Additional logarithmic utility of an insider. *Stochastic Processes and their Applications*, 75(2) :263–286, 1998.

[AME99] J. AMENDINGER. *Initial enlargement of filtrations and additionnal information of financial markets*. PhD thesis, T-U. Berlin, 1999.

[AME00] J. AMENDINGER. Martingale representation theorems for initially enlarged filtrations. *Stochastic Processes and their Applications*, 89(1) :101–116, 2000.

[AS93] J.-P. ANSEL and C. STRICKER. Décomposition de Kunita-Watanabe. In *Séminaire de Probabilités, XXVII*, volume 1557 of *Lecture Notes in Math.*, pages 30–32. Springer, Berlin, 1993.

[BAC00] L. BACHELIER. *Théorie de la spéculation*. PhD thesis, 1900.

[BAC92] K. BACK. Insider trading in continuous time. *Review of Financial Studies*, 5 :387–409, 1992.

[BAC93] K. BACK. Asymmetric information and options. *Review of Financial Studies*, 6 :435–472, 1993.

[BAC04] K. BACK. Incomplete and asymmetric information in asset pricing theory. In *Stochastic methods in finance*, volume 1856 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–25. Springer, Berlin, 2004.

[BAL97] V. BALLY. Approximation scheme for solutions of BSDE. In N. El Karoui and L. Mazliak, editors, *Backward stochastic differential equations*, volume 364 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 177–191. Longman, Harlow, 1997.

[BAU02] F. BAUDOIN. Conditioned stochastic differential equations : theory, examples and application to finance. *Stochastic Processes and their Applications*, 100 :109–145, 2002.

[BAU03] F. BAUDOIN. Modeling anticipations on financial markets. In *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance, 2002*, volume 1814 of *Lecture Notes in Math.*, pages 43–94. Springer, Berlin, 2003.

[BB04] K. BACK and S. BARUCH. Information in securities markets : Kyle meets Glosten and Milgrom. *Econometrica. Journal of the Econometric Society*, 72(2) :433–465, 2004.

[BBP97] G. BARLES, R. BUCKDAHN, and E. PARDOUX. Backward stochastic differential equations and integral-partial differential equations. *Stochastics and Stochastics Reports*, 60(1-2) :57–83, 1997.

[BC96] I. BARDHAN and X. CHAO. On martingale measures when asset returns have unpredictable jumps. *Stochastics Processes and their Applications*, 63 :35–54, 1996.

[BCH+00] P. BRIAND, F. COQUET, Y. HU, J. MEMIN, and S. PENG. A converse comparison theorem for BSDEs and related properties. *Electronic Communications in Probability*, 5 :101–117, 2000. (electronic).

[BDH+03] P. BRIAND, B. DELYON, Y. HU, E. PARDOUX, and L. STOICA. $\mathcal{L}^p$ solutions of backward stochastic differential equations. *Stochastic Processes and their Applications*, pages 1–21, 2003.

[BEC01] D. BECHERER. *Rational hedging and valuation with utility-based preferences*. PhD thesis, T-U. Berlin, 2001.

[BH98a] P. BRIAND and Y. HU. Stability of BSDEs with random terminal time and homogenization of semilinear elliptic PDEs. *Journal of Functional Analysis*, 155(2) :455–494, 1998.

[BH98b] R. BUCKDAHN and Y. HU. Hedging contingent claims for a large investor in an incomplete market. *Advances in Applied Probability*, 30(1) :239–255, 1998.

[BH98c] R. BUCKDAHN and Y. HU. Pricing of american contingent claims with jump stock price and constrained portfolios. *Mathematics of Operations Research*, 23(1) :177–203, 1998.

[BJR04a] T. R. BIELECKI, M. JEANBLANC, and M. RUTKOWSKI. Hedging of defaultable claims. In *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2003*, volume 1847 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–132. Springer, Berlin, 2004.

[BJR04b] T. R. BIELECKI, M. JEANBLANC, and M. RUTKOWSKI. Modeling and valuation of credit risk. In *Stochastic methods in finance*, volume 1856 of *Lecture Notes in Math.*, pages 27–126. Springer, Berlin, 2004.

[BL97] G. BARLES and E. LESIGNE. Sde, bsde and pde. In Nicole El Karoui and Laurent Mazliak, editors, *Backward stochastic differential equations*, volume 364 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 47–80. Longman, Harlow, 1997.

[BNN04] F. BAUDOIN and L. NGUYEN-NGOC. The financial value of a weak information on a financial market. *Finance and Stochastics*, 8 :415–435, 2004.

[BØSW04] F. BIAGINI, B. ØKSENDAL, A. SULEM, and N. WALLNER. An introduction to white-noise theory and Malliavin calculus for fractional Brownian motion. *Proceedings of The Royal Society of London. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460(2041) :347–372, 2004. Stochastic analysis with applications to mathematical finance.

[BRE81] P. BREMAUD. *Point Processes and Queues.* Springer-Verlag, New York, 1981.

[BRI98] P. BRIAND. BSDE's and viscosity solutions of semilinear PDE's. *Stochastics and Stochastics Reports*, 64(1-2) :1–32, 1998.

[BS72] F. BLACK and M. S. SCHOLES. The valuation of option contracts and a test of market efficiency. *Journal of Finance*, 27(2) :399–418, 1972.

[BS73] F. BLACK and M. S. SCHOLES. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3) :637–654, 1973.

[BSJ04] C. BLANCHET-SCALLIET and M. JEANBLANC. Hazard rate for credit risk and hedging defaultable contingent claims. *Finance and Stochastics*, 8(1) :145–159, 2004.

[BY78] P. BREMAUD and M. YOR. Changes of filtrations and of probability measures. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 45(4) :269–295, 1978.

[CAM03] L. CAMPI. *Marchés financiers avec une infinité d'actifs, couverture quadratique et délits d'initiés.* PhD thesis, Université de Paris VI, 2003.

[CAM04] L. CAMPI. Some results on quadratic hedging with insider trading. *working paper*, 2004.

[CC98] D. CUOCO and J. CVITANIC. Optimal consumption choices for a "large" investor. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 22(3) :401–436, 1998.

[CHE97] D. CHEVANCE. *Résolution numériques des équations différentielles stochastiques rétrogrades.* PhD thesis, Université de Provence – Aix–Marseille I, Marseille, 1997.

[CHO97] K.-H. CHO. Equilibre avec asymétrie d'information. *Thèse de Doctorat*, 1997.

[CIKHN04] J.M. CORCUERA, P. IMKELLER, A. KOHATSU-HIGA, and D. NUALART. Additional utility of insiders with imperfect dynamical information. *Finance and Stochastics*, 8 :437–450, 2004.

[CM96] J. CVITANIC and J. MA. Hedging options for a large investor and forward-backward SDE's. *The Annals of Applied Probability*, 6(2) :370–398, 1996.

[CMJ83] M. CHALEYAT-MAUREL and T. JEULIN. Grossissement gaussien de la filtration brownienne. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, 296(15) :699–702, 1983.

[DEL02] F. DELARUE. On the existence and uniqueness of solutions to fbsdes in a non-degenerate case. *Stochastic Processes and their Applications*, 99(2) :209–286, 2002.

[DGP00] L. DENIS, Axel GRORUD, and Monique PONTIER. Formes de Dirichlet sur un espace de Wiener-Poisson. Application au grossissement de filtration. In *Séminaire de Probabilités, XXXIV*, volume 1729 of *Lecture Notes in Math.*, pages 198–217. Springer, Berlin, 2000.

[DJP98] R.-A. DANA and M. JEANBLANC-PICQUE. *Marchés financiers en temps continus ; valorisation et équilibre.* Economica, Paris, 2nd edition, 1998.

[DL01] D. DUFFIE and D. LANDO. Term structures of credit spreads with incomplete accounting information. *Econometrica. Journal of the Econometric Society*, 69(3) :633–664, 2001.

[DM75] C. DELLACHERIE and P.-A. MEYER. *Probabilités et potentiel.* Hermann, Paris, 1975. Chapitres I à IV.

[DM80] C. DELLACHERIE and P.-A. MEYER. *Probabilités et potentiel. Théorie des martingales.* Hermann, Paris, 1980. Chapitres V à VIII.

[DP97] R. W. R. DARLING and E. PARDOUX. Backwards SDE with random terminal time and applications to semilinear elliptic PDE. *The Annals of Probability*, 25(3) :1135–1159, 1997.

[DS94] F. DELBAEN and W. SCHACHERMAYER. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, 300(3) :463–520, 1994.

[DS95] F. DELBAEN and W. SCHACHERMAYER. The existence of absolutely continuous local martingale measures. *The Annals of Applied Probability*, 5(4) :926–945, 1995.

[DS99] F. DELBAEN and W. SCHACHERMAYER. Non-arbitrage and the fundamental theorem of asset pricing : summary of main results. In *Introduction to mathematical finance (San Diego, CA, 1997)*, volume 57 of *Proc. Sympos. Appl. Math.*, pages 49–58. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[EJ99] R. J. ELLIOTT and M. JEANBLANC. Incomplete markets with jumps and informed agents. *Mathematical Methods of Operations Research*, 50(3) :475–492, 1999.

[EJY00] R. J. ELLIOTT, M. JEANBLANC, and M. YOR. On models of default risk. *Mathematical Finance*, 10(2) :179–195, 2000. INFORMS Applied Probability Conference (Ulm, 1999).

[EK81] N. EL KAROUI. Les aspects probabilistes du contrôle stochastique. In *Ecole d'été de probabilités de Saint Flour 1979*, volume 876 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1981.

[EKKP+97] N. EL KAROUI, C. KAPOUDJIAN, E. PARDOUX, S. PENG, and M.-C. QUENEZ. Reflected solutions of backward SDE's, and related obstacle problems for PDE's. *The Annals of Probability*, 25(2) :702–737, 1997.

[EKPQ97] N. EL KAROUI, S. PENG, and M.-C. QUENEZ. Backward stochastic differential equations in finance. *Mathematical Finance*, 7(1) :1–71, 1997.

[EL05] A. EYRAUD-LOISEL. Backward stochastic differential equations with enlarged filtration. option hedging of an insider trader in a financial market with jumps. *Stochastic Processes and their Applications*, 115(11) :1745–1763, 2005.

[EP01] A. ESTRADE and M. PONTIER. Backward stochastic differential equations in a lie group. In *Séminaire de Probabilités XXXV*, volume 1755 of *Lecture notes in Mathematics*, pages 241–259. Springer, Berlin, 2001.

[FI93] H. FÖLLMER and P. IMKELLER. Anticipation cancelled by a Girsanov transformation : a paradox on Wiener space. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques*, 29(4) :569–586, 1993.

[FÖL73] H. FÖLLMER. On the representation of semimartingales. *Annals of Probability*, 1 :580–589, 1973.

[FÖL81] H. FÖLLMER. Calcul d'Itô sans probabilités. In *Seminar on Probability, XV (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1979/1980) (French)*, volume 850 of *Lecture Notes in Math.*, pages 143–150. Springer, Berlin, 1981.

[FS86] H. FÖLLMER and D. SONDERMANN. Hedging of nonredundant contingent claims. In *Contributions to mathematical economics*, pages 205–223. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[FS91] H. FÖLLMER and M. SCHWEIZER. Hedging of contingent claims under incomplete information. In *Applied stochastic analysis (London, 1989)*, volume 5 of *Stochastics Monogr.*, pages 389–414. Gordon and Breach, New York, 1991.

[FWY99] H. FÖLLMER, C.-T. WU, and M. YOR. Canonical decomposition of linear transformations of two independent Brownian motions motivated by models of insider trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 84(1) :137–164, 1999.

[GLP98] C. GOURIEROUX, J.-P. LAURENT, and H. PHAM. Mean-variance hedging and numéraire. *Mathematical Finance*, 8(3) :179–200, 1998.

[GLW05] E. GOBET, J.-P. LEMOR, and X. WARIN. A regression-based monte-carlo method to solve backward stochastic differential equations. *To appear in Annals of Applied Probability*, 2005.

[GP97] A. GRORUD and M. PONTIER. Comment détecter le délit d'initié ? *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, 324(1) :1137–1142, 1997.

[GP98] A. GRORUD and M. PONTIER. Insider trading in a continuous time market model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1(3) :331–347, 1998.

[GP99] A. GRORUD and M. PONTIER. Probabilités neutres au risque et asymétrie d'information. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématiques*, 329(1) :1009–1014, 1999.

[GP01] A. GRORUD and M. PONTIER. Asymetrical information and incomplete markets. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 4(2) :285–302, 2001.

[GP05] A. GRORUD and M. PONTIER. Fiancial market model with influential informed investors. *à paraître dans Mathematical Finance*, 2005.

[GRO00] A. GRORUD. Asymetric information in a financial market with jumps. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3(4) :641–659, 2000.

[HAM96] S. HAMADENE. Équations différentielles stochastiques rétrogrades : le cas localement lipschitzien. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 32(5) :645–659, 1996.

[HIL04] C. HILLAIRET. *Equilibre sur un marché financier avec asymétrie d'information et discontinuité des prix*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse 3, thèse soutenue le 20 novembre 2004, 2004.

[HIL05a] C. HILLAIRET. Comparison of insiders' optimal strategies depending on the type of side-information. *à paraître dans Stochastic Processes and their Applications*, 2005.

[HIL05b] C. HILLAIRET. Existence of an equilibrium on a financial market with different asymmetric information. *preprint*, 2005.

[HIL05c] C. HILLAIRET. Existence of an equilibrium with discontinuous prices, asymmetric information, and nontrivial initial $\sigma$-fields. *Mathematical Finance*, 15(1) :99–117, 2005.

[HK79] J. M. HARRISON and D. M. KREPS. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20(3) :381–408, 1979.

[HLP97] S. HAMADENE, J-P. LEPELTIER, and S. PENG. Bsdes with continuous coefficients and stochastic differential games. In N. El Karoui and L. Mazliak, editors, *Backward stochastic differential equations*, volume 364 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 115–128. Longman, Harlow, 1997.

[HP81] J. M. HARRISON and S. R. PLISKA. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11(3) :215–260, 1981.

[HP91] Y. HU and S. PENG. Adapted solution of a backward semilinear stochastic evolution equation. *Stochastic Analysis and Applications*, 9(4) :445–459, 1991.

[HP95] Y. HU and S. PENG. Solution of forward-backward stochastic differential equations. *Probability Theory and Related Fields*, 103(2) :273–283, 1995.

[HPS01] D. HEATH, E. PLATEN, and M. SCHWEIZER. A comparison of two quadratic approaches to hedging in incomplete markets. *Mathematical Finance*, 11(4) :385–413, 2001.

[IMK96] P. IMKELLER. Enlargement of the Wiener filtration by an absolutely continuous random variable via Malliavin's calculus. *Probability Theory and Related Fields*, 106(1) :105–135, 1996.

[IPW01] P. IMKELLER, M. PONTIER, and F. WEISZ. Free lunch and arbitrage possibilities in a financial market model with an insider. *Stochastic Processes and their Applications*, 92(1) :103–130, 2001.

[IW77] N. IKEDA and S. WATANABE. A comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications. *Osaka Univ., Grad. Sch. Sci., Dept. Math., Japan.*, 14(3) :619–633, 1977.

[IW89] N. IKEDA and S. WATANABE. *Stochastic differential equations and diffusion processes*, volume 24 of *North-Holland Math. Library.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, $2^{\text{nd}}$ edition, 1989.

[JAC77] J. JACOD. A general theorem of representation for martingales. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics.*, 31 :37–53, 1977.

[JAC79] J. JACOD. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, volume 714 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1979.

[JAC81] J. JACOD. Convergence en loi de semimartingales et variation quadratique. In *Séminaire de Probabilités, XV*, volume 850 of *Lecture Notes in Math.*, pages 547–560. Springer, Berlin, 1981.

[JAC85] J. JACOD. *Grossissement Initial, Hypothèse H' et Théorème de Girsanov, Séminaire de calcul stochastique* $1982-83$*, Paris*, volume 1118 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[JEU79] T. JEULIN. Grossissement d'une filtration et applications. In *Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78)*, volume 721 of *Lecture Notes in Math.*, pages 574–609. Springer, Berlin, 1979.

[JEU80a] T. JEULIN. Comportement des semi-martingales dans un grossissement de filtration. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 52(2) :149–182, 1980.

[JEU80b] T. JEULIN. *Semi-martingales et grossissement d'une filtration*, volume 833 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.

[JR02] M. JEANBLANC and M. RUTKOWSKI. Default risk and hazard process. In *Mathematical finance—Bachelier Congress, 2000 (Paris)*, Springer Finance, pages 281–312. Springer, Berlin, 2002.

[JS03] J. JACOD and A. N. SHIRYAEV. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[JY78a] T. JEULIN and M. YOR. Grossissement d'une filtration et semi-martingales : formules explicites. In *Séminaire de Probabilités, XII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1976/1977)*, volume 649 of *Lecture Notes in Math.*, pages 78–97. Springer, Berlin, 1978.

[JY78b] T. JEULIN and M. YOR. Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série*, 11(3) :429–443, 1978.

[JY85] Th. JEULIN and M. YOR, editors. *Grossissements de filtrations : exemples et applications*, volume 1118 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Papers from the seminar on stochastic calculus held at the Université de Paris VI, Paris, 1982/1983.

[KP96] I. KARATZAS and I. PIKOVSKY. Anticipative portfolio optimization. *Advances in Applied Probability*, 28(4) :1095–1122, 1996.

[KS91] I. KARATZAS and S. E. SHREVE. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1991.

[KS98] I. KARATZAS and S. E. SHREVE. *Methods of mathematical finance*, volume 39 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[KYL85] A.S. KYLE. Continuous actions and insider trading. *Econometrica*, 53 :1315–1335, 1985.

[LAS04] G. LASSERRE. Asymmetric information and imperfect competition in a continuous time multivariate security model. *Finance and Stochastics*, 8(2) :285–309, 2004.

[LL99] J.-M. LASKRY and P.-L. LIONS. Contrôle stochastique avec informations partielles et applications à la finance. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, 328(11) :1003–1010, 1999.

[LM78] D. LEPINGLE and J. MEMIN. Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 42(3) :175–203, 1978.

[LNN03] J. A. LEON, R. NAVARRO, and D. NUALART. An anticipating calculus approach to the utility maximization of an insider. *Mathematical Finance*, 13(1) :171–171, 2003.

[LØS01] D. LEFEVRE, B. ØKSENDAL, and A. SULEM. An introduction to optimal consumption with partial observation. In *Mathematical finance (Konstanz, 2000)*, Trends Math., pages 239–249. Birkhäuser, Basel, 2001.

[LSM97] J.-P. LEPELTIER and J. SAN MARTIN. Backward stochastic differential equations with continuous coefficients. *Statistics & Probability Letters*, 32(4) :425–430, 1997.

[MPY94] J. MA, Ph. PROTTER, and J. YONG. Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly—a four step scheme. *Probability Theory and Related Fields*, 98(3) :339–359, 1994.

[MR97] M. MUSIELA and M. RUTKOWSKI. *Martingale methods in financial modelling*, volume 36 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

[MY99] J. MA and J. YONG. *Forward-backward stochastic differential equations and their applications*, volume 1702 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[ØKS98] B. ØKSENDAL. *Stochastic differential equations, An introduction with applications*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, $5^{\text{th}}$ edition, 1998.

[ØS04] B. ØKSENDAL and A. SULEM. Partial observation control in an anticipating environment. *Uspekhi Mat. Nauk*, 59(2(356)) :161–184, 2004.

[PAR91] E. PARDOUX. Filtrage non linéaire et équations aux dérivées partielles stochastiques associées. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989*, volume 1464 of *Lecture Notes in Math.*, pages 67–163. Springer, Berlin, 1991.

[PAR98] E. PARDOUX. Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic PDEs of second order. In L. DECREUSEFOND, J. GJERDE, B. ØKSENDAL, and A. S. ÜSTÜNEL, editors, *Stochastic analysis and related topics VI (The Geilo Workshop, 1996)*, volume 42 of *Progr. Probab.*, pages 79–127. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.

[PAR99] E. PARDOUX. BSDEs, weak convergence and homogenization of semilinear PDEs. In *Nonlinear analysis, differential equations and control (Montreal, QC, 1998)*, pages 503–549. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[PEN91] S. PENG. Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations. *Stochastics and Stochastics Reports*, 37(1-2) :61–74, 1991.

[PEN93] S. PENG. Backward stochastic differential equations and applications to optimal control. *Applied Mathematics and Optimization*, 27(2) :125–144, 1993.

[PHA00] H. PHAM. On quadratic hedging in continuous time. *Mathematical Methods for Operational Research*, 51 :315–339, 2000.

[PON97] M. PONTIER. Solutions of forward-backward stochastic differential equations. In N. EL KAROUI and L. MAZLIAK, editors, *Backward stochastic differential equations*, volume 364 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 39–46. Longman, Harlow, 1997.

[PP90] E. PARDOUX and S. PENG. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems & Control Letters*, 14(1) :55–61, 1990.

[PP92] E. PARDOUX and S. PENG. Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations. In B. L. Rozovskii and R. B. Sowers, editors, *Stochastic partial differential equations and their applications (Charlotte, NC, 1991)*, volume 176 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 200–217. Springer, Berlin, 1992.

[PP94] E. PARDOUX and S. PENG. Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDE's. *Probability Theory and Related Fields*, 98(2) :209–227, 1994.

[PRO01] Ph. PROTTER. *Stochastic integration and differential equations, A new approach*, volume 21 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2nd edition, 2001.

[PRS98] H. PHAM, T. RHEINLÄNDER, and M. SCHWEIZER. Mean-variance hedging for continuous processes : new proofs and examples. *Finance and Stochastics*, 2(2) :173–198, 1998.

[PT99] E. PARDOUX and S. TANG. Forward-backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic PDEs. *Probability Theory and Related Fields*, 114(2) :123–150, 1999.

[ROY04] M. ROYER. Bsdes with a random terminal time driven by a monotone generator and their links with pdes. *Stochastics and Stochastics Reports*, 76(4) :281–307, 2004.

[RS97] T. RHEINLÄNDER and M. SCHWEIZER. On $L^2$-projections on a space of stochastic integrals. *The Annals of Probability*, 25(4) :1810–1831, 1997.

[RY91] D. REVUZ and M. YOR. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [A series of Comprehensive Studies in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.

[SCH90] M. SCHWEIZER. Risk-minimality and orthogonality of martingales. *Stochastics and Stochastics Reports*, 30(2) :123–131, 1990.

[SCH91] M. SCHWEIZER. Option hedging for semimartingales. *Stochastic Processes and their Applications*, 37(2) :339–363, 1991.

[SCH92] M. SCHWEIZER. Mean-variance hedging for general claims. *The Annals of Applied Probability*, 2(1) :171–179, 1992.

[SCH94a] M. SCHWEIZER. A projection result for semimartingales. *Stochastics and Stochastics Reports*, 50(3-4) :175–183, 1994.

[SCH94b] M. SCHWEIZER. Risk-minimizing hedging strategies under restricted information. *Mathematical Finance*, 4(4) :327–342, 1994.

[SCH95] M. SCHWEIZER. On the minimal martingale measure and the Föllmer-Schweizer decomposition. *Stochastic Analysis and Applications*, 13(5) :573–599, 1995.

[TL94] S. TANG and X. LI. Necessary conditions for optimal control of stochastic systems with random jumps. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 32(5) :1447–1475, 1994.

[WU99] C.-T. WU. *Construction of Brownian Motions in Enlarged Filtrations and their Role in Mathematical Models of Insider Trading*. PhD thesis, Humbolt Universität, Berlin, 1999.

[YOR78] M. YOR. Grossissement d'une filtration et semi-martingales : théorèmes généraux. In *Séminaire de Probabilités, XII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1976/1977)*, volume 649 of *Lecture Notes in Math.*, pages 61–69. Springer, Berlin, 1978.

[YOR80] M. YOR. Application d'un lemme de T. Jeulin au grossissement de la filtration brownienne. In *Seminar on Probability, XIV (Paris, 1978/1979) (French)*, volume 784 of *Lecture Notes in Math.*, pages 189–199. Springer, Berlin, 1980.

[YZ99] J. YONG and X.Y. ZHOU. *Stochastic controls*, volume 43 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 1999. Hamiltonian systems and HJB equations.

**EDSR et EDSPR avec grossissement de filtration, problèmes d'asymétrie d'information et de couverture sur les marchés financiers**

# Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier l'existence et l'unicité de solution d'équations différentielles stochastiques rétrogrades avec grossissement de filtration. La motivation de ce problème mathématique provient de la résolution d'un problème financier de couverture par un agent possédant une information supplémentaire inconnue sur le marché.

Dans une première partie, nous résolvons ce problème, successivement dans un cadre continu puis avec sauts, et montrons que sous l'hypothèse $(\mathbf{H_3})$ du grossissement de filtration, grâce à un théorème de représentation des martingales, l'EDSR dans l'espace grossie sous des hypothèses standard a une unique solution. L'une des conséquences principales est que, dans un marché complet, la détention d'une information supplémentaire par l'agent initié ne lui confère pas de stratégie de couverture différente.

Dans une seconde partie, nous développons un modèle d'agent informé et influent, ce qui nous amène à résoudre une équation différentielle stochastique progressive rétrograde avec grossissement de filtration, et nous obtenons également un théorème d'existence et d'unicité de solution. Nous sommes également amenés à étudier le problème de couverture en marché incomplet, puisque du fait de l'influence, le marché sans information devient incomplet.

Enfin, dans la dernière partie, nous généralisons les résultats d'existence et d'unicité de solution d'EDSR avec grossissement de filtration à des EDSR à horizon aléatoire.

**Mots-clés:** EDSR, EDSPR, Grossissement de filtration, Délit d'initié, Asymétrie d'information, Théorème de représentation de martingales, Couverture d'actifs financiers, Marché complet, Marché incomplet, Probabilité neutre au risque, Mesure martingale minimale

**BSDE and FBSDE with enlarged filtration, asymmetrical information and hedging problems in financial markets**

# Abstract

The subject of this PhD Thesis is the study of existence and uniqueness of the solution of backward stochastic differential equations, under an initial enlargement of filtration. This mathematical problem was motivated by a financial problem of hedging for an insider trader, who has an additional information on the market.

In a first part, we solve the problem, successively in a continuous framework and in a model with jumps, and we prove, under hypothesis $(\mathbf{H_3})$ on the enlargement of filtration, thanks to a martingale representation theorem, that the BSDE in the enlarged space, has a unique solution under standard hypotheses on the driver. One of the main consequences is that in a complete market, having an additional information does not provide additional hedging strategies.

In a second part, we develop a model of informed and influent agent, which leads to a problem of solving a forward-backward SDE under an enlarged filtration, and we obtain an existence and uniqueness theorem. We deal also with the problem of hedging in an incomplete market, where incompleteness is due to incomplete information.

In the last part, we generalize the results of the first part to BSDEs with random terminal time.

**Keywords:** BSDE, FBSDE, Enlargement of filtration, Insider trading, Asymmetrical information, Martingale Representation Theorem, Hedging of contingent claims, Complete market, Incomplete market, Risk-neutral probability, Minimal martingale measure