



**HAL**  
open science

## Sous-espaces invariants, théorèmes taubériens et approximation pondérée

Karim Kellay

► **To cite this version:**

Karim Kellay. Sous-espaces invariants, théorèmes taubériens et approximation pondérée. Mathématiques [math]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2008. tel-00451020

**HAL Id: tel-00451020**

**<https://theses.hal.science/tel-00451020>**

Submitted on 28 Jan 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**HABILITATION A DIRIGER DES  
RECHERCHES**

PRESENTEE A

UNIVERSITE AIX-MARSEILLE I

Spécialité : Mathématiques

PAR

**Karim KELLAY**

**Sous-espaces invariants, théorèmes taubériens et  
approximation pondérée**

soutenue le 22 novembre 2008

après avis des rapporteurs :

M. ALEMAN Alexandru, Professeur à l'Université de Lund  
M. BORICHEV Alexandre, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille I  
M. QUEFFELEC Hervé, Professeur à l'Université de Lille I

devant le jury composé de :

M. BORICHEV Alexandre, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille I  
M. COUPET Bernard, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille I  
M. ESTERLE Jean, Professeur à l'Université de Bordeaux I  
M. SEIP Kristian, Professeur à l'Université de Trondheim  
M. THOMAS Pascal, Professeur à l'Université de Toulouse I  
M. YOUSSEFI El-Hassan, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille I

J'exprime mes remerciements à Jean Esterle, qu'il trouve ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Je remercie vivement Alexandre Borichev qui a accepté d'être rapporteur sur mon travail et de participer au Jury.

Je tiens également remercier vivement Alexandru Aleman et Hervé Queffelec qui ont accepté d'être rapporteurs sur mon travail.

Je remercie chaleureusement Bernard Coupet, Kristian Seip, Pascal Thomas et Hassan Youssfi pour l'honneur qu'ils me font en participant au Jury.

Je voudrais aussi exprimer ma sympathie et mes remerciements à tous mes collègues.

## DOCUMENT DE SYNTHÈSE

Karim Kellay

Ma recherche se situe dans le cadre de la théorie de fonctions, de l'analyse harmonique et de la théorie des opérateurs. Pour la commodité de la présentation, nous avons regroupé l'activité de recherche autour des thèmes suivants :

- Théorèmes Taubériens,
- Sous-espaces invariants par le shift et vecteurs cycliques,
- Existence de sous-espaces invariants,
- Interpolation et échantillonnage

**1. Théorèmes Taubériens.** Dans le travail [K1], j'étudie le lien entre la croissance des coefficients de Fourier d'une fonction analytique  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{C} \setminus E$  et l'ensemble de ses singularités  $E$ , supposé être un ensemble de Carleson. Un ensemble fermé  $E$  du cercle unité  $\mathbb{T}$  est dit de Carleson lorsqu'il satisfait à la condition

$$\int_0^{2\pi} \log \left( \frac{2}{\text{dist}(e^{it}, E)} \right) dt < +\infty.$$

Un ensemble de Carleson est l'ensemble des zéros d'une fonction analytique sur le disque unité  $\mathbb{D}$  et "lisse" au bord [14, 62], le Cantor triadique en est un exemple. On appelle hyperfonction, toute fonction analytique  $\phi$  sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$  qui s'annule à l'infini. Le support de  $\phi$  est le plus petit fermé  $E$  de  $\mathbb{T}$  tel que  $\phi$  se prolonge analytiquement sur  $\mathbb{C} \setminus E$ . Les coefficients de Fourier de  $\phi$  sont définis par

$$\phi(z) = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} \hat{\phi}(n) z^n, & |z| < 1, \\ - \sum_{n < 0} \hat{\phi}(n) z^n, & |z| > 1, \end{cases}$$

Soit  $(\omega(n))_{n \geq 0}$  une suite log-concave <sup>1</sup>. On dit que  $\omega$  vérifie la condition (R) si pour certaines constantes  $c > 0$  et  $\alpha < 1/2$ ,  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega(n)}{n^c} > 0$  et la suite  $\left( \frac{\log \omega(n)}{n^\alpha} \right)_{n \geq 1}$  est décroissante. Dans [K1], je donne une version discrète du théorème Khrušcev [40] lorsque l'ensemble est un carleson,

**Théorème 1.** *Soit  $(\omega(n))_{n \geq 0}$  une suite log-concave vérifiant la condition (R). Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Pour tout ensemble de Carleson  $E$  et toute hyperfonction  $\phi$  à support*

*dans  $E$  telle que  $\sup_{n \geq 0} \frac{|\hat{\phi}(n)|}{\omega(n)} < +\infty$  et  $\sum_{n=-\infty}^{-1} |\hat{\phi}(n)|^2 < +\infty$ , on a*

*$\phi = 0$ .*

---

<sup>1</sup> $2 \ln \omega(n) \geq \ln \omega(n+1) + \ln \omega(n-1)$ ,  $n \geq 1$ .

(ii) Pour tout ensemble de Carleson  $E$  et toute hyperfonction  $\psi$  à support dans  $E$  telle que  $\sup_{n \geq 0} \frac{|\hat{\psi}(n)|}{\omega(n)} < +\infty$  et  $\sup_{n < 0} |\hat{\psi}(n)| < +\infty$ , on a  $\phi|_{\mathbb{D}}$  est dans la classe de Smirnov.

(iii)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \log \omega(n)} = +\infty. \quad (1)$$

Ce type de résultat s'inscrit dans une série de travaux liés aux problèmes d'unicité de certaines hyperfonctions [23, 24, 25, 26]. J'étudie ensuite le comportement des itérés d'un opérateur et ce lorsque le spectre est un ensemble de Carleson.

**Théorème 2.** Soit  $T$  une contraction sur un espace de Hilbert telle que le spectre de  $T$  est un ensemble de Carleson. Si  $\|T^{-n}\| = O(\omega(n))(n \rightarrow +\infty)$  avec  $(\omega(n))_{n \geq 0}$  vérifiant (R) et la condition (1), alors  $T$  est unitaire.

Réciproquement si

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \log \omega(n)} < +\infty, \quad (2)$$

alors il existe une contraction  $T$  non unitaire sur un espace de Hilbert telle que son spectre est un ensemble de Carleson  $\|T^{-n}\| = O(\omega(n))(n \rightarrow +\infty)$  et  $\|T^{-n}\| \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Notons que le cas polynomial,  $\omega(n) = O(n^p)(n \rightarrow +\infty)$  pour un certain entier  $p$  positif, a été obtenu par Esterle [23]. Le fait que le spectre de l'opérateur est un ensemble de Carleson est "nécessaire" pour obtenir ce résultat. En effet, je construis une contraction  $T$  inversible et non unitaire dont le spectre est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle et telle que les puissances négatives de  $T$  tendent vers l'infini aussi lentement que l'on veut. Dans [K3, K12], nous considérons les opérateurs sur un espace de Banach à croissance polynomiale et dont le spectre est un  $K$ -ensemble (plus régulier que les ensembles de Carleson). Un ensemble fermé  $E$  du cercle unité  $\mathbb{T}$  est dit  $K$ -ensemble, s'il existe  $c_E > 0$  tel que pour tout arc  $L \subset \mathbb{T}$

$$\sup_{\zeta \in E} d(\zeta, E) \geq c_E |L|,$$

où  $|L|$  est la longueur de  $L$ . Dyn'kin dans [22, 13] a montré que les  $K$ -ensembles sont des ensembles d'interpolation pour les espaces de types Hölder: Soit  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$  l'algèbre du disque, pour  $0 < s < 1$ , on pose

$$\Lambda^s = \left\{ f \in C(\mathbb{T}) : \|f\|_s = \|f\|_{C(\mathbb{T})} + \sup_{h \neq 0, t \in \mathbb{R}} \frac{|f(e^{i(t+h)}) - f(e^{it})|}{|h|^s} < +\infty \right\}$$

et  $A^s = \Lambda^s \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ , alors  $E$  est un  $K$ -ensemble si et seulement si  $\Lambda^s|_E = A^s|_E$ . Nous avons

**Théorème 3.** Soit  $w \in (R)$  et soit  $T$  un opérateur sur un espace de Banach  $X$ ,  $\sigma(T)$  est un  $K$ -ensemble,  $\|T^n\| = O(n^p)$  pour un certain  $p \geq 0$  et  $\|T^{-n}\| = O(w_n)$ . Si pour tout  $\alpha \in (0, 1)$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1-\alpha} \log w_n^{1+\alpha}} = +\infty, \quad (3)$$

alors pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\|T^{-n}\| = O(n^{p+\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Lorsque  $X$  est un espace de Hilbert et  $p = 0$ , nous avons

**Théorème 4.** Soit  $w \in (R)$  et soit  $T$  une contraction inversible sur un espace de Hilbert  $X$ ,  $\sigma(T)$  est un  $K$ -ensemble et  $\|T^{-n}\| = O(w_n)$ . Si pour tout  $\alpha \in (0, 1)$  la condition (3) est satisfaite, alors  $T$  est unitaire.

D'autre part, s'il existe  $\alpha \in (0, 1)$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1-\alpha} \log w_n^{1+\alpha}} < +\infty, \quad (4)$$

il existe  $T$  une contraction inversible sur un espace de Hilbert,  $\sigma(T)$  est un  $K$ -ensemble,  $\|T^{-n}\| = O(w_n)$  et  $\|T^{-n}\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \infty$ .

Le théorème 4 n'est pas valable pour les contractions sur un espace de Banach en général. En effet, Esterle dans [24] à construit une contraction  $T$  sur un espace de Banach dont le spectre est un  $K$ -ensemble (un ensemble parfait de rapport constant  $\zeta$  et  $1/\zeta$  n'est pas un nombre de Pisot) et  $\|T^{-n}\| \rightarrow +\infty$ . Notons aussi que le Théorème 4 n'est pas valide si on suppose que  $\sigma(T)$  est juste un ensemble de mesure nulle [K1]. Des résultats de même type tauberien ont été obtenu dans [2, 23, 24, 26, 64].

## 2. Sous-espaces invariants par le shift et vecteurs cycliques.

*2.1. Sous-espaces biinvariants.* Considérons maintenant un poids<sup>2</sup>  $\omega$  qui tend vers l'infinie. On pose

$$L_\omega^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \omega(n)^2 < +\infty\}.$$

On désigne par  $S_\omega$  le shift (opérateur de décalage) agissant sur l'espace à poids  $L_\omega^2(\mathbb{T})$  défini par

$$S_\omega : f(e^{it}) \rightarrow e^{it} f(e^{it}), \quad f \in L_\omega^2(\mathbb{T}).$$

Puisque  $\omega$  est un poids, les opérateurs  $S_\omega$  et  $S_\omega^{-1}$  sont bornés sur  $L_\omega^2(\mathbb{T})$  et le spectre de  $S_\omega$  est  $\mathbb{T}$ . On dira qu'un sous-espace fermé  $B$  de  $L_\omega^2(\mathbb{T})$  est invariant si  $S_\omega B \subset B$  et qu'il est biinvariant lorsque  $S_\omega B = B$ . Il est dit non trivial si  $\{0\} \subsetneq B \subsetneq L_\omega^2(\mathbb{T})$ .

---

<sup>2</sup>une application de  $\mathbb{Z} \rightarrow ]0, +\infty[$  telle que :  $\omega(0) = 1$ ,  $0 < \inf_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\omega(n+1)}{\omega(n)} \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\omega(n+1)}{\omega(n)} < +\infty$  et  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \left( \sup_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\omega(n+m)}{\omega(m)} \right)^{\frac{1}{|n|}} = 1$ .

Soit  $E$  un Borelien de  $\mathbb{T}$ ; on notera  $\mathcal{M}_\omega(E) = \{f \in L_\omega^2(\mathbb{T}) : \chi_E f = 0\}$ , où  $\chi_E$  est la fonction indicatrice de  $E$ , un tel sous-espace fermé sera dit de type spectral. Le théorème classique de Wiener montre que dans le cas où  $\omega(n) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , les espaces de type spectral sont les seuls sous-espaces de  $L_\omega^2(\mathbb{T})$  biinvariants par  $S_\omega$ . Esterle dans [27] a considéré des poids dissymétriques  $\omega(n) = 1$  pour  $n \geq 0$  et  $\lim_{n \rightarrow -\infty} \omega(-n) = +\infty$ , il démontre qu'il existe un sous-espace biinvariant de  $L_\omega^2(\mathbb{T})$  qui n'est pas de type spectral (pour n'importe quelle croissance de croissance  $\omega(-n)$ ). Ces nouveaux sous-espaces sont de type Beurling, c'est-à-dire qu'ils sont générés par des fonctions intérieures. Hanin dans [28] a démontré que la caractérisation de type Wiener est encore valable lorsque  $\omega$  est un poids symétrique de la forme  $\omega(n) = (1 + |n|)^p$ , où  $p \geq$  est un entier ; mentionnons que lorsque  $p = 1/2$ ,  $L_\omega^2(\mathbb{T})$  est l'espace de Dirichlet harmonique et là encore la caractérisation de type Wiener reste valable [54]

Dans l'article [K3], en collaboration avec El-Fallah, nous étudions l'effet de la dissymétrie sur l'apparition et la disparition des espaces de types Beurling (qui ne sont pas de type spectral). Nous considérons les poids  $\omega(n) = (1 + n)^p$  ( $n \geq 0$ ), pour un certain entier  $p \geq 1$ , et  $\liminf_{n \rightarrow -\infty} \frac{\omega(n)}{|n|^p} > 0$ ; donc  $L_\omega^2(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{T})$  et

$$(L_\omega^2(\mathbb{T}))^+ = H_p^2 = \{f \in H^2 : f', f'', f^{(p)} \in H^2\}.$$

où  $H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}$  est l'espace de Hardy usuel. Nous caractérisons  $B \cap (L_\omega^2(\mathbb{T}))^+ = B \cap H_p^2$ , la partie analytique du sous-espace biinvariant  $B$ , selon la croissance et la régularité de  $\omega$ . Contrairement à ce qui se passe pour  $p = 0$  (i.e.  $\omega(n) = 1$ , pour  $n \geq 0$ ), nous montrons le résultat suivant :

**Théorème 5.** *Soit  $\omega \in (R)$ .*

*Si  $\omega$  satisfait la condition (1) alors*

$$B \cap H_p^2 = \mathcal{M}_\omega(E_0, E_1, \dots, E_{p-1}) \cap H_p^2,$$

où  $E_k = \{z \in \mathbb{T} : f^{(k)}(z) = 0 \text{ pour tout } f \in B\}$ .

*Réciproquement, si  $\omega$  satisfait la condition (2), alors il existe une fonction intérieure singulière  $\theta_\mu$  et un sous-espace biinvariant  $B$  fermé de  $L_\omega^2(\mathbb{T})$  tel que*

$$B \cap L_\omega^2(\mathbb{T}) = \theta_\mu H^2 \cap H_p^2.$$

La méthode utilisée consiste d'abord à transformer le problème en un problème d'unicité de certaines classes d'hyperfonctions à support de Carleson. Ensuite, nous utilisons un résultat de Korenblum [42] sur les idéaux fermés de l'algèbre  $H_p^2$  qui est de même nature que celui de Beurling. Nous obtenons aussi dans le premier cas (lorsque la condition (1) est satisfaite) une caractérisation complète des sous-espaces binvariants fermés de  $L_\omega^2(\mathbb{T})$  dont l'ensemble des zéros est un  $K$ -ensemble, nous montrons que si  $Z(B)$  est un  $K$ -ensemble, alors  $B = \mathcal{M}_\omega(E_0, E_1, \dots, E_{p-1})$ .

**2.2. Idéaux fermés.** Dans [K13] en collaboration avec Bouya et El-Fallah, nous traitons les idéaux fermés de l'algèbre de Beurling à poids  $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$  des fonctions de l'algèbre du bidisque  $\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$  muni de la norme

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sum_{n,m \geq 0} |\widehat{f}(n,m)|(1+n)^\alpha(1+m)^\beta.$$

Soient  $B$  une algèbre de Banach incluse dans  $\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ ,  $f \in B$  et  $E$  un ensemble fermé de  $\overline{\mathbb{D}^2}$ , on notera par  $I_B(f) = \overline{fB}$  l'idéal fermé de  $B$  engendré par  $f$  et par  $I_B(E) = \{g \in B : g|_E = 0\}$ , l'idéal d'annulation de  $B$  sur  $E$ . Dans ce travail nous nous intéressons à la détermination des fonctions  $f \in B$  qui satisfont  $I_B(f) = I_B(Z_f)$ , où  $Z_f = \{z \in \overline{\mathbb{D}^2} : f(z) = 0\}$  est l'ensemble des zéros de  $f$ , dans le cas où  $B = \mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$ . Dans le cas de l'algèbre du disque,  $B = \mathcal{A}(\mathbb{D})$ , le théorème de Beurling-Rudin donne une caractérisation complète des idéaux fermés de  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ . En particulier, si  $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$  tel que  $Z_f \subset \mathbb{T}$  alors  $I_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}(f) = I_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}(Z_f)$  si et seulement si  $f$  est extérieure. Dans une série de papiers [29, 30, 31], Hedenmalm s'est intéressé au cas de plusieurs variables. Il a obtenu, dans le cas de l'algèbre du bidisque, que si l'ensemble des zéros de la fonction  $f$  est  $\{1\} \times \mathbb{D} \cup \mathbb{D} \times \{1\}$  et si

$$|\log |f(z,w)|| = o(1/\inf(|1-z|, |1-w|)), \quad |1-z||1-w| \rightarrow 0.$$

alors l'idéal d'annulation sur  $Z_f$  coïncide avec l'idéal engendré par  $f$ . Soit  $\alpha \geq 0$ , considérons maintenant les algèbres de Beurling analytiques suivantes:

$$\mathcal{A}_\alpha^+ = \{f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n : \|f\|_\alpha = \sum_{n \geq 0} |a_n|(1+n)^\alpha < \infty\}.$$

Kahane [37] a montré que si  $f \in \mathcal{A}_\alpha^+$  telle que  $Z_f = \{1\}$  alors  $I_{\mathcal{A}_\alpha^+}(f) = I_{\mathcal{A}_\alpha^+}(\{1\})$  si et seulement si  $f$  est extérieure. Notons que dans ce cas cette condition est équivalente à

$$\lim_{|z| \rightarrow 1^-} (1-|z|) \log |f(z)| = 0.$$

Mentionnons également que la caractérisation des idéaux de  $\mathcal{A}_0^+$  paraît compliquée [25]. Dans ce travail nous étendons les résultats obtenus par Hedenmalm aux algèbres  $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$ . Nous montrons les deux théorèmes suivants:

**Théorème 6.** Soient  $(\alpha, \beta) \in [0, 1[ \times ]0, 1[$  et  $f \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$  telle que  $Z_f = \{1\} \times \overline{\mathbb{D}}$ . Alors  $I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(f) = I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(\{1\} \times \overline{\mathbb{D}})$  si et seulement si les fonctions  $f(\cdot, w)$  sont extérieures pour tout  $w \in \overline{\mathbb{D}}$ .

Comme conséquence du Théorème 6 et lorsque  $Z_f = \{(1, 1)\}$ ,  $I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(f) = I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(\{(1, 1)\})$  si et seulement si les fonctions  $f(\cdot, 1)$  et  $f(1, \cdot)$  sont extérieures.

**Théorème 7.** Soient  $(\alpha, \beta) \in ]0, 1[ \times ]0, 1[$  et  $f \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$  telle que  $Z_f = \{1\} \times \overline{\mathbb{D}} \cup \overline{\mathbb{D}} \times \{1\}$ . Si

$$|\log |f(z,w)|| = o(1/\inf(|1-z|, |1-w|)), \quad z \rightarrow 1 \text{ ou } w \rightarrow 1,$$

alors  $I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(f) = I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(\{1\} \times \overline{\mathbb{D}} \cup \overline{\mathbb{D}} \times \{1\})$ .

**2.3. Comportement radial et vecteurs cycliques.** Soit  $H^\infty$  l'ensemble des fonctions holomorphes bornées sur le disque unité  $\mathbb{D}$ . La classe de Nevanlinna  $N$  est l'ensemble des fonctions  $f$  analytiques sur  $\mathbb{D}$  telles que  $f = g_1/g_2$  où  $g_1, g_2 \in H^\infty$ . Pour toute fonction  $f \in N$ , la limite radiale  $f_*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it})$  existe pour presque tout  $e^{it}$  du cercle unité  $\mathbb{T}$  et  $\ln |f_*| \in L^1(\mathbb{T})$ . La classe de Smirnov  $N^+$  est l'ensemble des fonctions  $f \in N$  telles que  $f = g_1/g_2$  où  $g_1, g_2 \in H^\infty$  et  $g_2$  est une fonction extérieure. Il est bien connu que si  $f \in N^+$  telle que  $f_* \in L^2(\mathbb{T})$  alors  $f \in H^2$  et donc les coefficients de Fourier négative de  $f$  sont nuls. Par contre il existe  $f \in N$ ,  $f_* \in L^2(\mathbb{T})$  et  $f \notin H^2$ ; il suffit en effet de prendre l'inverse d'une fonction intérieure singulière.

Soit  $(\alpha(n))_{n \geq 0}$  une suite log-concave telle que  $\alpha(n) \rightarrow +\infty$ . On pose

$$N_\alpha(\mathbb{D}) = \{f \in N : f_* \in L^2(\mathbb{T}) \text{ et } \sum_{n \geq 1} |\widehat{f}_*(-n)|^2 \alpha(n)^2 < +\infty\}.$$

Dans le cas où  $\alpha(n) = e^{c\sqrt{n}}$  pour une certaine constante  $c > 0$ , Shapiro [61] a démontré, par la méthode de l'approximation polynomiale, que  $N_\alpha(\mathbb{D}) = H^2$ . Shamoyan [60] a donné une extension de ce résultat, il a montré que  $N_\alpha(\mathbb{D}) = H^2$  si et seulement si

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln \alpha(n)}{n^{3/2}} = +\infty. \quad (5)$$

Le résultat de Shamoyan peut également être obtenu en utilisant la méthode de Shapiro et le théorème sur l'approximation polynomiale de Nikolskii [51]

Dans [K6, K9] conjoint avec Bourhim et El-Fallah, nous considérons  $N_{\alpha,\beta}$  l'ensemble de fonctions  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in N$  telle que  $f_* \in L^2(\mathbb{T})$  et

$$\sum_{n \geq 0} \frac{|a_n|^2}{\beta(n)^2} < +\infty \text{ et } \sum_{n \geq 0} |\widehat{f}_*(-n)|^2 \alpha(n)^2 < +\infty,$$

où  $(\alpha(n))_{n \geq 0}$  et  $(\beta(n))_{n \geq 0}$  sont deux suites positives log-concaves qui tendent vers l'infini. Nous étudions le seuil de croissance des suites  $(\alpha(n))_n$  et  $(\beta(n))_n$  pour que  $\mathcal{N}_{\alpha,\beta} = H^2$ .

Notons que pour toute fonction  $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in N$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que  $|a_n| = O(e^{c\sqrt{n}})$  ( $n \rightarrow +\infty$ ). Par conséquent, si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \beta_n}{\sqrt{n}} = +\infty$ , alors  $\mathcal{N}_{\alpha,\beta} = N_\alpha(\mathbb{D})$ . Mentionnons aussi que, grâce au théorème de Kahane et Katznelson [38], pour toutes suites  $(\alpha(n))_{n \geq 0}$  et  $(\beta(n))_{n \geq 0}$  tendant vers l'infini et toute fonction  $g \in L^2(\mathbb{T})$  telle que  $\sum_{n \geq 1} |\widehat{g}(-n)|^2 \alpha(n)^2 < +\infty$ , il existe une fonction  $f$  holomorphe sur  $\mathbb{D}$  telle que  $f_* = g$  p.p. sur  $\mathbb{T}$  et les coefficients de Taylor de  $f$  vérifient

$\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|^2}{\beta(n)^2} < +\infty$ . L'appartenance de la fonction  $f$  à la classe de Nevanlinna dans la définition de  $N_{\alpha, \beta}$  apparait donc nécessaire pour l'étude de ce problème.

**Théorème 8.** *Soit  $\alpha, \beta \in (R)$  telle que  $\sup_{n \geq 1} \frac{\ln \alpha(n^2)}{\ln \alpha(n)} < +\infty$ . Alors  $\mathcal{N}_{\alpha, \beta} = \mathbb{H}^2$  si et seulement si*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln \alpha(n+1) - \ln \alpha(n)}{\ln \beta(n)} = +\infty. \quad (6)$$

Lorsque  $\alpha(n) = n^p$ , la condition (6) est équivalente à la condition (1). Lorsque la condition  $\sup_{n \geq 1} \frac{\ln \alpha(n^2)}{\ln \alpha(n)} < +\infty$  n'est pas satisfaite, (croissance lente ou rapide) nous montrons sous certaine condition de régularité sur  $\alpha$  et  $\beta$  que  $\mathcal{N}_{\alpha, \beta} = \mathbb{H}^2$  dès que  $\alpha(n) = \beta(n)$ . Soit maintenant l'ensemble

$$PLA = \{f : f(t) = \sum_{n \geq 1} c(n)e^{int} \text{ convergente p.p.}\}.$$

Kozma et Olevskii ont montré dans [43] qu'il existe  $f \in C^1(\mathbb{T}) \cap PLA \setminus \mathbb{H}^2$ ,

$$|\widehat{f}(n)| = O(\omega(|n|)^{-1}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

si et seulement si

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n \log \omega(n)} = \infty.$$

Par contre, et d'après le Théorème 8,  $C^1(\mathbb{T}) \cap PLA \setminus \mathbb{H}^2 \cap N_* = \emptyset$ , où  $N_* = \{f_* : f \in N\}$

**2.4. Vecteurs cycliques.** Dans [K7, K9, K10, K14], nous nous intéressons au critère de complétude des polynômes dans certains espaces de fonctions analytiques. Soit  $X$  un espace de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité  $\mathbb{D}$  stable par l'opérateur shift  $M_z$  défini par  $M_z f = zf$ ,  $f \in X$ . On notera par  $[f]_X$  l'adhérence dans  $X$  de l'ensemble  $\{pf : p \text{ polynôme}\}$ .  $[f]_X$  est le plus petit sous-espace fermé de  $X$  contenant  $f$  et invariant par  $M_z$ . Une fonction  $f \in X$  est dite cyclique dans  $X$  lorsque  $[f]_X = X$ . Alors que le théorème de Beurling caractérise les vecteurs cycliques dans  $\mathbb{H}^2$ , le problème de la caractérisation des vecteurs cycliques dans les espaces de fonctions analytiques à poids parait compliqué. Par exemple, il existe des fonctions intérieures singulières (qui ne sont pas cycliques dans  $\mathbb{H}^2$ ) qui deviennent cycliques dans l'espace de Bergman et il existe des fonctions extérieures (cyclique dans  $\mathbb{H}^2$ ) qui ne sont pas cycliques dans l'espace Dirichlet.

**2.4.1. Vecteurs cycliques dans l'espace de Bergman à poids.** Soit  $\alpha$  un poids qui tend vers l'infini, on considère

$$B_\alpha^2(\mathbb{D}) := \left\{ f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \sum_{n \geq 0} \frac{|a_n|^2}{\alpha(n)^2} < +\infty \right\}.$$

Nikolski dans [51] a montré que si la condition (5) est satisfaite alors toute fonction  $f \in H^2$  sans zéro est cyclique dans  $B_\alpha^2(\mathbb{D})$ . Korenblum et Roberts [41, 53] ont traité le cas du Bergman classique, où  $\alpha(n) = (1+n)^c$ : ils ont montré que toute fonction intérieure singulière  $S_\mu$  est cyclique dans  $B_\alpha^2$  si et seulement si la mesure singulière  $\mu$  de la fonction  $S_\mu$  ne porte pas de masse sur les ensembles de Carleson. On pose  $\Lambda_\alpha(t) = \sup_{n \geq 1} [n \ln(1-t) + \ln \alpha(n)]$ , pour  $t \in ]0, 1]$ . Un ensemble fermé  $E$  de  $\mathbb{T}$  est dit ensemble  $\Lambda_\alpha$ -Carleson si

$$\int_0^{2\pi} \Lambda_\alpha(d(e^{it}, E)) dt < +\infty.$$

Lorsque  $\alpha(n) = (1+n)^c$ ,  $\Lambda_\alpha(t) \asymp \log 1/t$ , et on retrouve les ensembles de Carleson. Dans [K9] nous montrons

**Théorème 9.** *si  $\mu$  est une mesure positive singulière sur  $\mathbb{T}$  telle que  $\mu(E) = 0$  pour tout ensemble  $\Lambda_\alpha$ -Carleson, alors la fonction intérieure singulière associée à  $\mu$  est cyclique dans l'espace  $B_\alpha^2(\mathbb{D})$ .*

**2.4.2. Vecteurs cycliques dans l'espace de Dirichlet.** Nous allons maintenant traiter le cas des vecteurs cycliques de l'espace de Dirichlet. L'espace de Dirichlet  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des fonctions  $f \in H^2$  telles que

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \sum_{n \geq 0} (1+n) |\hat{f}(n)|^2.$$

Le problème de la caractérisation des fonctions cycliques dans  $\mathcal{D}$  est un problème encore ouvert. Puisque  $\mathcal{D} \subset H^2$ , il est clair que toute fonction  $f \in \mathcal{D}$  cyclique dans  $\mathcal{D}$  est également cyclique dans  $H^2$  et donc  $f$  est nécessairement extérieure, grâce au théorème de Beurling. Rappelons que Beurling a montré que la limite radiale de toute fonction de Dirichlet existe quasi-partout sur  $\mathbb{T}$ . Soit  $E$  un fermé de  $\mathbb{T}$ , on désigne par  $c(E)$  la capacité logarithmique de  $E$  et

$$\mathcal{D}_E := \{f \in \mathcal{D} : f_* = 0 \text{ q.p sur } E\}.$$

Carleson [14] a montré que  $\mathcal{D}_E$  est fermé et  $M_z$  invariant de  $\mathcal{D}$ . Donc si  $f$  est cyclique alors  $c(Z(f_*)) = 0$ , où  $Z(f_*)$  est l'ensemble des zéros de  $f$ . Brown et Shields [11] ont conjecturé que  $f$  est cyclique dans  $\mathcal{D}$  si et seulement si  $f$  est extérieure et la capacité logarithmique de  $Z(f_*)$  est nulle. Hedenmalm et Shields ont montré dans [32] que si  $f \in \mathcal{D} \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$  est extérieure et si  $Z(f) \cap \mathbb{T}$  est un ensemble dénombrable alors  $f$  est cyclique. Dans ce travail [K10, K14] en collaboration avec El-Fallah et Ransford, nous montrons qu'il existe une certaine catégorie d'ensembles parfaits (non-dénombrable) de type Cantor (de capacité logarithmique nulle) qui répond positivement à la conjecture. Plus précisément, soit  $E \subset \mathbb{T}$ , on écrit  $E_t := \{\zeta \in \mathbb{T} : d(\zeta, E) \leq t\}$ .

**Théorème 10.** *Soit  $f \in \mathcal{D}$  une fonction extérieure. Soit*

$$E := \{\zeta \in \mathbb{T} : \liminf_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| = 0\}.$$

*Alors  $f$  est cyclique si l'une des deux conditions est satisfaite:*

- (1)  $\int_0^1 c(E_t) \frac{\log \log(1/t)}{t \log(1/t)} dt < \infty;$   
 (2)  $|E_t| = O(t^\alpha)$  pour un certain  $0 < \alpha < 1$  et  $\int_0^1 \frac{dt}{|E_t|} = +\infty$

Notons que la condition (2) entraîne automatiquement que  $E$  est de capacité logarithmique nulle [15]. Pour certains ensemble, elle est équivalente à la capacité nulle. Soit  $(l_n)_{n \geq 0} \subset [0, 2\pi]$  telle que  $\lambda = \sup_{n \geq 0} l_{n+1}/l_n < 1/2$  et soit  $E$  l'ensemble de Cantor généralisé associé à la suite  $(l_n)$  (On commence par l'arc de longueur  $l_0$ , en enlève l'arc du milieu de longueur  $l_1$ , etc.; alors  $E$  est l'intersection de tous les ensemble qui restent). Pour ce type d'ensemble  $E$  satisfait (2)  $\iff \sum_n 2^{-n} |\log l_n| = +\infty \iff E$  est de Capacité logarithmique nulle. De plus,  $|E_t| = O(t^\alpha)$  avec  $\alpha = 1 - \log 2/|\log \lambda|$ . On peut déduire de (2) que Si  $f \in \mathcal{D} \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$  telle que  $E = \{\zeta \in \mathbb{T} : f(\zeta) = 0\}$  est un ensemble de Cantor généralisé comme ci-dessus. Alors  $f$  est cyclique si et seulement si  $f$  est une fonction extérieure et  $E$  est de Capacité logarithmique nulle.

**3. Sur l'existence de sous-espaces invariants.** Soit  $B$  un espace de Banach et  $\mathcal{L}(B)$  l'algèbre des opérateurs bornés sur  $B$ . On dit qu'un sous espace fermé  $E$  de  $B$  est invariant pour l'opérateur  $T \in \mathcal{L}(B)$  lorsque  $TE \subset E$  et qu'il est non trivial si  $\{0\} \subsetneq E \subsetneq B$ . Le sous-espace  $E$  est dit hyper-invariant pour  $T$ , s'il est invariant pour tous les opérateurs qui commutent avec  $T$ . Le problème de l'existence de sous-espaces invariants non triviaux, pour un opérateur  $T$  donné, est une question qui reste ouverte pour les espaces de Hilbert. Mentionnons que Enflo a donné un contre-exemple pour ce qui concerne les espaces de Banach. Néanmoins, diverses techniques ont permis d'en établir l'existence : compacité ; calcul fonctionnel ; étude de la résolvante et de la nature du spectre. En fait, cette dernière approche est liée au problème de majorant analytique et donc au critère de normalité que l'on relatera ultérieurement. L'un des premiers résultats qui assure l'existence de sous-espaces hyper-invariants non triviaux est celui de Wermer [63] sous l'hypothèse : l'opérateur  $T$  est inversible, son spectre n'est pas réduit à un point et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\ln \|T^n\|}{1 + n^2} < +\infty. \quad (7)$$

On dit que  $(\tau(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Beurling si elle est sous-multiplicative<sup>3</sup> et vérifie la condition (7). On montre dans [K1]

<sup>3</sup> $\tau(0) \geq 1$  et  $\tau(n+m) \leq \tau(n)\tau(m)$ , pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ .

**Théorème 11.** Soit  $(\tau(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Beurling telle que

$$\tilde{\tau}_n := \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{\tau_{n+m}}{\tau_m} = O(e^{\epsilon \sqrt{n}}), n \rightarrow +\infty, \quad \text{pour tout } \epsilon > 0.$$

Soit un opérateur  $T \in \mathcal{L}(B)$  non égal à un multiple de l'identité tel que

$$\|T^n\| = O(\tau_n)(n \rightarrow +\infty).$$

On suppose qu'il existe  $y \in B$  avec

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|T^n\|}{\tau_n} > 0$$

et une suite  $(y_n)_{n \geq 0}$  de  $B$  telle que  $Ty_{n+1} = y_n$  avec  $\|y_{n+1}\| \lesssim \|y_n\|$  et

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\ln^+ \|y_n\|}{1 + n^2} < +\infty,$$

Alors  $T$  admet un sous-espace hyper-invariant non trivial.

Notons que c'est une extension de type local du théorème de Wermer, obtenue auparavant par Beauzamy [10] dans le cas où  $\tau(n) \equiv 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) et par Atzmon [4] dans le cas où  $\tilde{\tau}(n) = O(n^p)(n \rightarrow +\infty)$  pour un certain entier  $p$  positif, mais avec des conditions de régularité qui portent sur la suite  $(\|T^{-n}x\|)_{n \in \mathbb{N}}$ . Notre méthode consiste à faire apparaître des sous-espaces invariants liés au prolongement analytique de la résolvante locale, comme dans la construction de Wermer. En combinant le théorème de normalité de Levinson–Sjöberg (la fermeture) et le théorème sur les transformées de Fourier des mesures à support compact de Beurling–Malliavin (la non-trivialité), nous obtenons le résultat souhaité. Ces sous-espaces de *vecteurs analytiques* sont de même nature que ceux mis en évidence par Atzmon et Beauzamy mais leur considération directe permet d'éviter certaines hypothèses de régularité.

Dans [K4, K8] conjoint avec Zarrabi nous étudions l'existence de sous-espaces invariants pour des opérateurs à spectre non nécessairement contenu dans un arc assez régulier. Soient  $E$  un compact du plan complexe  $\mathbb{C}$  de mesure de Lebesgue nulle et soit  $M$  une fonction décroissante sur  $(0, +\infty)$  avec  $M(0+) = +\infty$ . Soit  $A$  une algèbre de Banach de fonctions définies sur  $E$ , qui s'injecte de façon continue dans  $C(E)$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus E$ , soit  $r_\lambda(z) = (\lambda - z)^{-1}$ ,  $z \in E$ . On suppose que  $A$  contient les constantes,  $r_\lambda \in A$  et

$$\|r_\lambda\|_A \leq M(d(\lambda, E)).$$

On dira que  $A$  est non-quasianalytique, si pour tout  $\lambda \in E$  et pour tout voisinage  $V$  de  $\lambda$ , il existe  $f \in A$  telle que  $f(\xi) \neq 0$  et  $f|_{E \setminus V} = 0$ . Dans ce travail nous donnons une condition sur  $M$  qui garantit la non-quasianalyticité de  $A$ . Pour cela nous introduisons la fonction suivante qui dépend de la géométrie de  $E$  :

$$\theta_E(t) = m_2(\{z \in \mathbb{C} : d(z, E) < t\}),$$

où  $m_2$  désigne la mesure de Lebesgue planeaire. La fonction  $\theta_E$  est continue strictement croissante et  $\theta_E(0+) = 0$  puisque  $m_2(E) = 0$ .

**Théorème 12.** *Si pour un certain  $\delta > 0$*

$$\int_0^\delta \left( \ln \ln M(\theta_E^{-1}(x^2)) \right)^{1/2} dx < +\infty, \quad (8)$$

*alors  $A$  est non-quasianalytique.*

Puisque  $A$  s'injecte continuellement dans  $C(E)$ , la résolvante satisfait  $\|r_\lambda\|_A \geq cd(\lambda, E)^{-1}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus E$ ; donc  $M(x) \geq cx^{-1}$  et (8) entraîne que

$$\int_0^\delta \left( \ln \ln \frac{1}{\theta_E^{-1}(x^2)} \right)^{1/2} dx < +\infty, \quad (9)$$

La preuve de ce résultat est basée sur le principe de dualité de Matsaev [21] et la normalité de certaines fonctions analytiques. Plus précisément, soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  soit  $\mathcal{H}_M(E, \Omega)$  la famille des fonctions holomorphes  $f$  sur  $\Omega$  telle que  $|f(z)| \leq M(d(z, E))$ ,  $z \in \Omega$ . Nous montrons, grâce au critère de normalité de Domar [18], que si la condition (8) est vérifiée, alors la famille  $\mathcal{H}_M(E, \Omega)$  est normale. Lorsque  $E = [-1, 1]$ ,  $d(z, E) = |\operatorname{Im} z|$ , le théorème log log de Levinson [17, 9, 19, 44] affirme que la famille  $\mathcal{H}_M(E, \Omega)$  est normale si

$$\int_0^\delta \ln \ln M(y) dy < +\infty \quad (10)$$

alors la famille  $\mathcal{H}_M(E, \Omega)$  est normale.

Nous étudions ensuite la non-quasianalyticité de certaines classes de fonctions telles l'algèbre des fonctions asymptotiquement holomorphes ou la classe de Carleman définie sur un compact quelconque de mesure de Lebesgue planeaire nulle. Ces deux classes sont intimement liées grâce au théorème d'extension de Dyn'kin [19]. En combinant le calcul fonctionnel non-holomorphe de Dyn'kin [20] basé sur la formule de Cauchy-Green et la non quasianalyticité de l'algèbre des fonctions asymptotiquement holomorphes définies sur le spectre, nous obtenons

**Théorème 13.** *Soient  $B$  un espace de Banach et  $T \in \mathcal{L}(B)$ . On suppose qu'il existe un ouvert  $O$  et un compact  $E$  parfait de mesure de Lebesgue planeaire nulle tels que  $Sp(T) \cap O \subset Sp(T) \cap E$  et vérifiant (9). Si la fonction*

$$M(\tau) = \sup\{\|(zI - T)^{-1}\| : \operatorname{dist}(z, E) \geq \tau, z \in O\}$$

*satisfait (8), alors  $T$  admet un sous-espace hyper-invariant non trivial.*

Comme application, nous donnons l'existence de sous-espaces invariants non triviaux pour certains opérateurs de Toeplitz à symboles continus. Mentionnons que Ljubich et Matsaev ont montré dans [45], pour un opérateur donné sur un espace de Banach, que si une partie de son spectre contient un arc de classe  $C^2$  et si la résolvante tolère au voisinage de cet arc une croissance de type Levinson (10), alors l'opérateur en question admet un sous-espace invariant non trivial. Notre résultat est de même nature que celui de

Ljubich et Matsaev, mais pour des opérateurs à spectre non nécessairement contenus dans un arc assez régulier, et ce lorsque la résolvante a une croissance modérée au voisinage de cette partie.

Dans [K5], en collaboration avec Chalendar et Ransford, nous démontrons le résultat suivant :

**Théorème 14.** *Si une suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  de nombres complexes satisfait*

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} a_k = O(n^p)(n \rightarrow +\infty) \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} a_k = O(n^p)(n \rightarrow +\infty)$$

*pour un entier  $p$  positif, alors  $a_n = 0$  pour tout  $n > p$ .*

La preuve de ce résultat est basée sur l'étude de certaines fonctions entières et leurs transformées de Laplace ainsi que le principe de Phragmén–Lindelöf. Comme application, nous donnons une extension du théorème de Carleman sur la détermination d'une mesure probabilisée par ses moments ainsi qu'un théorème sur des sous-espaces invariants :

**Corollaire 15.** *Soit  $B$  un espace de Banach. Si pour certains vecteurs non nuls  $x \in B$  et  $l \in B^*$ , et pour un certain entier  $p$  positif,*

$$|\langle (T - I)^n x - (T + I)^n x, l \rangle| = O(n^p)(n \rightarrow +\infty),$$

*alors  $T$  admet un sous-espace invariant non trivial.*

Une contraction  $T$  est dite de classe  $C_0$  si elle est complètement non-unitaire et s'il existe  $\theta \in H^\infty$  tel que  $\theta(T) = 0$ , la fonction minimale de telles fonctions sera notée  $m_T$ . La fonction  $m_T$  est intérieure et  $\sigma(T)$  est égal à l'adhérence du support de  $m_T$  [50]. Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , la multiplicité  $\mu_T$  est le nombre cardinal minimum d'un sous-ensemble  $G$  de  $H$  tel que  $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n G = H$ . Notons que  $\mu_T = 1$  signifie que  $T$  admet un vecteur cyclique.

Atzmon–Isaev dans [2, 36] ont montré que si  $T$  est une contraction inversible sur un espace de Hilbert tel que  $\mu_T = 1$ ,  $\|T^{-n}\| = O(e^{c\sqrt{n}})$  et le spectre de  $T$ , est réduit à un point,  $\sigma(T) = \{1\}$  alors  $I - T$  est compact. Notons que  $\phi(T) = 0$  où  $\phi(z) = (1 - z)e^{cT \frac{z+1}{z-1}} \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$  [6]. Dans [K15] nous montrons

**Théorème 16.** *Soit  $T$  une contraction de classe  $C_0$  telle que  $\mu(T) < +\infty$ . Soit  $f$  une fonction de l'algèbre du disque. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $f(T)$  est compact,
- (2)  $f|_{\sigma(T) \cap \mathbb{T}} = 0$ .

Comme corollaire, nous obtenons que si  $T$  est une contraction telle que  $\mu_T < \infty$  et s'il existe  $0 \neq \phi \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$  telle que  $\phi(T) = 0$ , alors  $f(T)$  est compact pour toute fonction  $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$  s'annulant sur  $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ .

**3. Interpolation et échantillonnage pour les espaces de fonctions analytiques à poids.** Soit  $h : [0, 1[ \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction croissante, régulière et  $\lim_{r \rightarrow 1} h(r) = +\infty$ . L'espace de Bergman à poids  $h$ , noté  $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ , est l'ensemble des fonctions holomorphes  $f$  sur le disque unité  $\mathbb{D}$  telles que

$$\|f\|_h = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| e^{-h(|z|)} < +\infty.$$

Soit  $\Gamma \subset \mathbb{D}$ , on dit que  $\Gamma$  est d'échantillonnage pour  $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$  s'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$  nous avons

$$\delta \|f\|_h \leq \|f\|_{h,\Gamma} := \sup\{|f(z)| e^{-h(|z|)} : z \in \Gamma\}.$$

Soit  $\ell_h(\Gamma) = \{v = (v_\lambda)_{\lambda \in \Gamma} \in \mathbb{C} : \|v\|_{h,\Gamma} = \sup_{\lambda \in \Gamma} |v_\lambda| e^{-h(|\lambda|)} < \infty\}$ . Un ensemble  $\Gamma \subset \mathbb{D}$  est dit d'interpolation pour  $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$  s'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $v \in \ell_h(\Gamma)$  il existe  $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$  telle que

$$v = f|_\Lambda, \quad \delta \|f\| \leq \|v\|_{h,\Gamma}.$$

Lorsque  $h(r) = -\alpha \ln(1 - r^2)$ ,  $\alpha > 0$ , nous notons  $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D}) = \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ . Seip dans [57] a montré que la suite  $\Gamma$  est un ensemble d'échantillonnage pour  $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$  si et seulement si elle contient une sous-suite uniformément séparée  $\Gamma'$  par rapport à la distance pseudo-hyperbolique et telle que  $\Gamma'$  est un ensemble d'échantillonnage pour  $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$  et la densité hyperbolique uniforme inférieure de  $\Gamma'$

$$D^-(\Gamma') = \liminf_{r \rightarrow 1^-} \inf_{w \in \mathbb{D}} \frac{\sum_{z \in \Gamma' : \frac{1}{2} < |\Phi_w(z)| < r} |\ln |\Phi_w(z)||}{|\ln(1 - r)|} > \alpha.$$

Dans le même article Seip donne une caractérisation complète des suites d'interpolation en terme de densité. Berndtsson et Ortega-Cerdà [8] et Seip [58] ont montré que la condition ci-dessus est nécessaire et suffisante pour les poids  $h$  dont le Laplacien vérifie  $\Delta h(z) \sim (1 - |z|^2)^{-2}$ . Mentionnons également que Marco, Massaneda et Ortega-Cerdà [49] ont donné une description complète des ensembles d'échantillonnage et d'interpolation pour les espaces de Fock à poids dont le laplacien est une mesure doublante.

Dans [K11], en collaboration avec Borichev et Dhuez, nous donnons une description complète des suites d'interpolation et d'échantillonnage avec  $h$  régulière qui croît plus vite que  $-\alpha \ln(1 - r^2)$ . On pose  $\rho(z)^2 = 1/\Delta h(|z|)$  et pour  $z, w \in \mathbb{D}$ ,

$$d_\rho(z, w) = \frac{|z - w|}{\min(\rho(z), \rho(w))}.$$

Soit  $\Gamma \subset \mathbb{D}$ , on dit que  $\Gamma$  est  $d_\rho$ -séparée si

$$\inf_{z, w \in \Gamma, z \neq w} d_\rho(z, w) > 0.$$

On désigne par  $D(z, r)$  le disque de centre  $z$  et de rayon  $r$ . Nous montrons le résultat suivant

**Théorème 17.**  $\Gamma$  est d'échantillonnage pour  $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$  si et seulement si  $\Gamma$  contient une sous-ensemble  $d_\rho$ -séparé  $\Gamma'$  et

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \liminf_{|z| \rightarrow 1^-} \frac{\text{Card}(\Gamma' \cap D(z, R\rho(z)))}{R^2} > \frac{1}{2}.$$

**Théorème 18.**  $\Gamma$  est d'interpolation pour  $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$  si et seulement si  $\Gamma$  est  $d_\rho$ -séparé et

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \limsup_{|z| \rightarrow 1^-} \frac{\text{Card}(\Gamma \cap D(z, R\rho(z)))}{R^2} < \frac{1}{2}.$$

Pour démontrer ces résultats on adopte l'approche de Lyubarskii–Seip [47] basé sur la fonction pic. Pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , nous construisons une fonction pic  $f_z \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$  telle que

$$f_z(w) \asymp e^{h(w) - |z-w|^2 \Delta h(w)/4}.$$

La construction de la fonction pic se fait grâce à la discrétisation de la mesure  $\Delta h(z) dm_2(z)$ ; pour certains poids de telle construction a été faite par Lyubarskii–Sodin [47] et Lyubarskii–Malinnikova [46]. La fonction pic nous permet de se ramener au problème résolu par Seip de la caractérisation des ensembles d'échantillonnage et d'interpolation pour les espaces de Fock [57, 56]. Mentionnons que ces résultats (et dans le cas Hilbertien) permettent de produire des sous-espaces invariants par  $M_z$  avec un indice grand comme dans [1, 10, 33, 34]. Nous obtenons des résultats similaires sur l'échantillonnage et l'interpolation pour les espaces de Fock à poids.

#### REFERENCES

- [1] E. Abakumov, A. Borichev, Shift invariant subspaces with arbitrary indices in  $\ell^p$  spaces, *J. Funct. Anal.* 188 (2002), 1–26.
- [2] C. Agrafeuil. On the growth of powers of operators with spectrum contained in Cantor sets. *Indiana Univ. Math. J.* 54 (2005), 1473–1481.
- [3] A. Aleman, S. Richter, Sundberg, Beurling's theorem for the Bergman space. *Acta Math.* 177 (1996), 275–310.
- [4] A. Atzmon. On the existence of hyperinvariant subspaces. *J. Op. theory* 11 (1984), 3–40.
- [5] A. Atzmon, Unicellular and nonunicellular dissipative operators. *Acta Sci. Math. (Szege)* 57 (1993), 45–54.
- [6] A. Atzmon, Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces. *Acta Math.* 144 (1980), 27–63.
- [7] B. Beauzamy. Sous-espaces invariants de type fonctionnel dans les espaces de Banach. *Acta Math.* 144 (1980), 65–82.
- [8] B. Berndtsson, J. Ortega–Cerdà. On interpolation and sampling in Hilbert spaces of analytic functions. *J. Reine Angew. Math.* 464 (1995), 109–128.
- [9] A. Beurling, Analytic continuation across a linear boundary, *Acta Math.* 128(1972), 154–182.
- [10] A. Borichev, Invariant subspaces of given index in Banach spaces of analytic functions, *J. Reine Angew. Math.* 505 (1998), 23–44.
- [11] L. Brown, A. Shields. Some examples of cyclic vectors in the Dirichlet space. *Trans. Am. Math. Soc.* 95 (1985), 42–46.

- [12] J. Bruna, On the peak sets for holomorphic Lipschitz functions. *Indiana Univ. Math. J.* 32 (1983), no. 2, 257–272.
- [13] J. Bruna, Les ensembles d'interpolation des  $A^p(D)$ . *C. R. Acad. Sci. Paris S' r. A-B* 290 (1980), no. 1, A25–A27.
- [14] L. Carleson, Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle, *Acta Math.* 87 (1952), 325–345.
- [15] L. Carleson, *Selected Problems on Exceptional Sets*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1967.
- [16] R. Dhuez, Möbius instability of sampling for small weighted spaces of analytic functions. *Bulletin London Math. Soc.* 37 (2005) 738–746.
- [17] Y. Domar, On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function, *Ark. Mat.* (1958), 429–440.
- [18] Y. Domar, Uniform boundedness in families related to subharmonic functions, *J. London Math. Soc.* 38 (1988), 485–491.
- [19] E.M. Dyn'kin, Functions with given estimate for  $\partial f/\partial \bar{z}$  and N. Levinson's theorem, *Math. USSR Sb.* 18 (1972), 181–189.
- [20] E. Dyn'kin. An operator calculus based on the Cauchy–Green formula. *J. Soviet Math.* 4 (1975), 329–334.
- [21] E. Dyn'kin, Growth of analytic function near its singularity, *J. Soviet Math.* 4 (1975), 438–440.
- [22] E. Dyn'kin. Free interpolation sets for Holder classes. *Mat. Sb.* 109 (151) (1979), 107–128.
- [23] J. Esterle. Uniqueness, strong forms of uniqueness and negative powers of contraction. *Banach Center Publ.*, 30 (1994), 127–145.
- [24] J. Esterle. Distributions on Kronecker sets, strong forms of uniqueness, and closed ideals of  $A^+$ . *J. Reine Angew. Math.* 450 (1994), 43–82.
- [25] J. Esterle; E. Strouse; F. Zouakia, Closed Ideals of the algebra of absolutely convergent Taylor series. *Bull. AMS* 31 (1994), 39–43.
- [26] J. Esterle, M. Rajoelina, M. Zarrabi. On contractions with spectrum contained in the Cantor set. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc* 177 (1995), 339–343.
- [27] Esterle, J., Singular inner functions and biinvariant subspaces for dissymmetric weighted shifts, *J. Func. Anal*, 94 (1997) 64–144
- [28] L. Hanin Spectral synthesis of ideals in algebras of functions having generalized derivatives, *Russian Math. Surveys*, 39 (1984), 167–168.
- [29] H. Hedenmalm, Outer functions in function algebras on the bidisc. *Trans. Amer. Math. Soc.* 306(1988), 697–714.
- [30] H. Hedenmalm, Outer functions of several complex variables. *J. Funct. Anal.* 80 (1988), 9–15.
- [31] H. Hedenmalm, Translates of functions of two variables. *Duke Math. J.* 58 (1989), 251–297.
- [32] H. Hedenmalm, A. Shields. Invariant subspaces in Banach spaces of analytic functions. *Mich. Math. J.* 37 (1990), 91–104.
- [33] H. Hedenmalm, An invariant subspace of the Bergman space having the codimension two property, *J. Reine Angew. Math.* 443 (1993), 1–9.
- [34] H. Hedenmalm, S. Richter, K. Seip, Interpolating sequences and invariant subspaces of given index in the Bergman spaces, *J. Reine Angew. Math.* 477 (1996), 13–30.
- [35] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman space*, Graduate Texts in Math. 199, Springer–Verlag, 2000.
- [36] L.E. Isaev, A certain class of operators with spectrum concentrated at zero. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 178 (1968), 783–785.
- [37] J. P. Kahane. Idéaux fermés dans certaines algèbres de fonctions analytiques, *Actes Table Ronde Int. CNRS. Montpellier, Lecture Notes in Math.*, 336, Springer, Berlin, 1973, 5–14.

- [38] J. P. Kahane, Y. Katznelson. Sur le comportement radial des fonctions analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B 227 (1971), A718–A719.
- [39] J. P. Kahane, R. Salem. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann Paris, 1963.
- [40] S. V. Khruscev. The problem of simultaneous approximation and singularities of Cauchy type integrals. Proc. Steklov Inst. Math. 130 (1979), 133–203.
- [41] B. Korenblum. Cyclic elements in some spaces of analytic functions. Bull. AMS. 5 (1981), 317–318.
- [42] B. Korenblum. Invariant subspace of the shift operator in weighted Hilbert space. Mat. Sbornik 89 (1972), 112–138.
- [43] G. Kozma, A. Olevskii. Analytic representation of function and a new quasi-analyticity threshold. Annals of Math, 164 (2006) 1033–1064
- [44] N. Levinson, Gap and Density Theorems, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1940.
- [45] J. Ljubich, V. Matsaev. Operators with separable spectrum. Amer. Math. Soc. Trans. 47 (1965), 89–129.
- [46] Yu. Lyubarskii, E. Malinnikova, On approximation of subharmonic functions, J. Anal. Math. 83 (2001), 121–149.
- [47] Yu. Lyubarskii, K. Seip, Sampling and interpolation of entire functions and exponential systems in convex domains, Ark. Mat. 32 (1994), 157–193.
- [48] Yu. Lyubarskii, M. Sodin, Analogues of sine type functions for convex domains, preprint no. 17, Inst. Low Temp. Phys. Eng., Ukrainian Acad. Sci., Kharkov, 1986.
- [49] N. Marco, X. Massaneda, J. Ortega–Cerdà, Interpolation and sampling sequences for entire functions. Geom. Funct. Anal 13 (2003), 862–914.
- [50] B. Sz.-Nagy; C. Foias, Analyse harmonique des opérateurs de l’espace de Hilbert, Masson, 1967.
- [51] Nikolski N.K., Selected problems of weighted approximation and analysis, Proc. Steklov. Inst. Math. 120 (1974).
- [52] S. Richter, C. Sundberg, Invariant subspaces of the Dirichlet shift and pseudocontinuations, Trans. Amer. Math. Soc. 341 (1994), 863–879.
- [53] J.W. Roberts, Cyclic inner functions in the Bergman spaces and weak outer functions in  $H^p$ ,  $0 < p < 1$ , Illinois J. Math. 29 (1985), 25–38.
- [54] S. Richter, W. T. Ross, and C. Sundberg. Hyperinvariant subspaces of the harmonic Dirichlet space. J. Reine Angew. Math. 448 (1994), 1–26.
- [55] K. Seip, Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space, I, J. Reine Angew. Math. 429 (1992), 91–106.
- [56] K. Seip, R. Wallstén, Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space, II, J. Reine Angew. Math. 429 (1992), 107–113.
- [57] K. Seip. Beurling type density theorems in the unit disk. Inv. Math., 113 (1993), 21–31.
- [58] K. Seip. Developments from nonharmonic Fourier series. Documenta Math. J. DMV, Extra Volume ICM (1998), 713–722.
- [59] K. Seip, Interpolating and Sampling in Spaces of Analytic Functions, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004
- [60] Shamoyan F.A., Characterization of the rate of decrease of the Fourier coefficients of functions of bounded type and of a class of analytic functions with infinitely differentiable boundary values, Siberian Math. J. 36 (1995), 816–826.
- [61] Shapiro H.S., Weighted polynomial approximation and boundary behavior of analytic functions, Contemporary Problems in Theory Anal. Functions (Internat. Conf., Erevan, 1965) 326–335.
- [62] B. A. Taylor, D. L. Williams. Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values. Can. J. Math 22 (1970), 1266–1283.
- [63] J. Wermer. The existence of invariant subspaces. Duke Math. J., 19 (1952), 615–622.

- [64] M. Zarrabi, Contractions à spectre dénombrable et propriétés d'unicité des fermés dénombrables du cercle. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 43 (1993), 251–263.
- [K1] K. Kellay, Contractions et hyperdistributions à spectre de Carleson. *J. London Math. Soc.* 58 (1998), 185–196.
- [K2] K. Kellay, Existence de sous-espaces hyperinvariants. *Glasgow Math. J.* 40 (1998), 133–141.
- [K3] O. El-Fallah, K. Kellay, Sous-espaces biinvariants pour certains shifts pondérés. *Ann. Inst. Fourier.* 48 (1998), 1543–1558
- [K4] K. Kellay, M. Zarrabi, Classes de fonctions non-quasianalytiques et sous-espaces invariants. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 327 (1998), 793–796
- [K5] I. Chalendar, K. Kellay, T. Ransford, Binomial sums, moment and invariant subspaces. *Israel J. Math.*, 115 (2000), 303–321
- [K6] A. Bourhim, K. Kellay, O. El-Fallah, Comportement radial des fonctions de la classe de Nevanlinna. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 333 (2001), 529–532
- [K7] K. Kellay, Fonctions intérieures et vecteurs bicycliques. *Arch. Math.* 77 (2001), 253–264.
- [K8] K. Kellay, M. Zarrabi, Normality, non-quasianalyticity and invariant subspaces. *J. Operator Theory* 46 (2001), 221–250.
- [K9] A. Bourhim, O. El-Fallah, K. Kellay, Boundary behaviour of functions of Nevanlinna class. *Indiana Univ. Math. J.* 53 (2004), 347–395.
- [K10] O. El-Fallah, K. Kellay, T. Ransford, Cyclicity in the Dirichlet space. *Ark. Mat.* 44 (2006), 61–86.
- [K11] A. Borichev, R. Dhuez, K. Kellay, Sampling and interpolation in large Bergman and Fock spaces. *J. Funct. Anal.* 242 (2007), 563–606.
- [K12] C. Agrafeuil, K. Kellay, Tauberien type Theorem for operator with interpolation spectrum, *Proc. Am. Math. Soc.* 136 (2008), 2477–2482.
- [K13] B. Bouya, O. El-Fallah, K. Kellay, Idéaux fermés de l'algèbre du bidisque à poids, Soumis. <http://arxiv.org/abs/0802.0898>
- [K14] O. El-Fallah, K. Kellay, T. Ransford, On the Brown–Shields conjecture for the cyclicity in the Dirichlet space. Soumis. <http://arxiv.org/abs/0809.4557>
- [K15] K. Kellay, M. Zarrabi, Compact operators that commute with a contraction. Soumis. <http://arxiv.org/abs/0809.3184>