



Résolutions minimales de d-modules géométriques

Rémi Arcadias

► To cite this version:

Rémi Arcadias. Résolutions minimales de d-modules géométriques. Mathématiques [math]. Université d'Angers, 2009. Français. NNT : . tel-00451962

HAL Id: tel-00451962

<https://theses.hal.science/tel-00451962>

Submitted on 1 Feb 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RESOLUTIONS MINIMALES DE D-MODULES GEOMETRIQUES

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

ECOLE DOCTORALE STIM-ED 503

Présentée et soutenue publiquement

le : 18 mai 2009

à : 14h

par : Mr Rémi Arcadias

Devant le jury ci-dessous :

- Mr Luis Narvaez-Macarro (rapporteur), Catedratico à l'Université de Séville
- Mr André Galligo (rapporteur), Professeur à l'Université de Nice
- Mr Abdallah Assi (examineur), MCF-HDR à l'Université d'Angers
- Mr Marc Chardin (examineur), MCF-HDR à l'Université de Paris 6
- Mr Vladimir Roubtsov (examineur), Professeur à l'Université d'Angers

Directeur de thèse : Mr Jean-Michel Granger, Professeur à l'Université d'Angers

Nom et coordonnées du laboratoire : LAREMA, Université d'Angers, 2 bd Lavoisier
49045 Angers Cedex 01

ED STIM-ED 503

Résolutions minimales de $\mathcal{D}$ -modules
géométriques

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon directeur de thèse Michel Granger. Il a su, au long de ces quatre années, par son enthousiasme, sa ténacité, son expertise et sa disponibilité, me donner la force de mener à bien ce travail. Il n'a pas rechigné à mettre lui même les mains dans le cambouis lorsque cette force a pu me manquer. Je lui dois aussi de m'avoir introduit dans le monde des singularistes, par le biais de conférences en France et en Espagne.

Je remercie Luis Narváez-Macarro pour m'avoir tant soutenu. Son influence transparaît largement dans mon travail, et il me fait l'honneur d'en être un des rapporteurs. Je remercie également le second rapporteur André Galligo, ainsi que les examinateurs Abdallah Assi, Marc Chardin (qui m'a dévoilé l'existence des complexes d'Eagon-Northcott, ce qui a donné lieu à une démonstration plus élégante du Théorème 3.1.1), et Vladimir Roubtsov.

Ma reconnaissance est portée aussi vers le laboratoire LAREMA d'Angers, qui m'a accueilli durant tout ce travail. En particulier je dois saluer les singularistes Abdallah Assi, Philippe Dubois, Mohammed El Amrani, Hélène Maynadier-Gervais et Adam Parusinski, sans oublier Jacquelin Charbonnel et François Ducrot qui ont mis en place les outils informatiques nécessaires à mes (parfois envahissants) calculs de bases de Gröbner. Aussi, j'ai une pensée particulière pour tous mes pairs doctorants ou anciens doctorants sans qui un tel travail de bureau aurait sans doute été moins plaisant : Alexandre, Alexei, Calvin, Cristina, Dika, Hilja, Fabien, Georges, Jean-François, Jean-Marc, Joseph, Julie, Kana, Ludovic, Nicolas, Paulo, Rouchdi, Sahar, Serge, Souleymane, Suzanne, Tomasz, Xavier et Yafei.

Je remercie mon épouse Marie pour son soutien permanent, ainsi que toute ma famille et belle-famille, en particulier ma mère qui a eu la gentillesse de relire entièrement le manuscrit, mon père qui s'y est intéressé plus que de raison, et ma grand-mère Marguerite-Marie qui m'a accueilli pendant mes études à Paris VI.

Enfin, je n'aurais pu accomplir ce travail aussi sereinement sans le soutien financier dont j'ai bénéficié de la part du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, je lui exprime ma sincère gratitude.

Table des matières

0	Introduction	4
1	Résolutions minimales de $\mathcal{D}$-modules	13
1.1	Rappels	13
1.1.1	Anneaux d'opérateurs différentiels	13
1.1.2	Résolution graduée (ou bigraduée) libre minimale . . .	15
1.1.3	Résolutions filtrées de $\mathcal{D}$ -modules et de $\mathcal{D}[s]$ -modules .	17
1.1.4	Résolutions bifiltrées de $\mathcal{D}$ -modules	20
1.1.5	Bases standard	23
1.1.6	Complexes de Koszul	26
1.2	Passage au commutatif et h -saturation	27
1.2.1	Passage au commutatif	27
1.2.2	h -saturation et bases standard	33
1.3	Résolutions minimales génériques	35
1.3.1	Invariants bifiltrés et structure formelle	35
1.3.2	Cas commutatif	36
1.3.3	Cas des $\mathcal{D}$ -modules	39
2	Résolutions de $\mathcal{D}$-modules géométriques	41
2.1	Invariants liés à $\mathcal{D}_{x,t_1,\dots,t_p} f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$	41
2.1.1	Premières propriétés des nombres de Betti	43
2.1.2	Définition d'invariants analytiques	44
2.1.3	Résolution générique et stratification	52
2.2	Pour $p = 1$, description plus fine et passage au commutatif . .	53
2.2.1	Description de $\mathrm{gr}^V(\mathbf{R}\mathcal{D}_{x,t} f^s)$ au moyen de $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s$. .	54
2.2.2	Conditions pour la h -saturation	56
2.2.3	Description de $\mathrm{bigr} N_f$ dans le cas h -saturé	60
2.2.4	Algorithme avec Singular dans le cas h -saturé	60
2.3	Invariants liés à $\mathcal{D}[s] f^s$	63
2.3.1	Invariants analytiques pour les hypersurfaces	64
2.3.2	Algorithme avec Singular	65

3	Singularités isolées et quasi-homogénéité	67
3.1	Singularités isolées quasi homogènes	68
3.1.1	Réduction au commutatif	68
3.1.2	Nombres de Betti de $\mathcal{D}[s]f^s$ et $\frac{\mathcal{D}[s]f^s}{\mathcal{D}[s]f^{s+1}}$	70
3.1.3	Les nombres de Betti de N_f	77
3.1.4	Nombres de Betti de N_f revus avec les complexes de Koszul généralisés	83
3.2	Application : cohomologie locale, présentation dans le cas sin- gularité isolée quasi homogène	87
3.3	Caractérisation de la quasi-homogénéité	89
3.4	Déformations semi-quasi homogènes	93
3.4.1	Déformation par le socle	93
3.4.2	Un exemple de semi-quasi homogène non h -saturé . . .	97
4	Monômes et diviseurs libres localement quasi homogènes	98
4.1	Monômes	98
4.1.1	Description de N_f et passage au commutatif	99
4.1.2	Détermination d'une résolution bigraduée libre de R/I	100
4.1.3	Calcul des nombres de Betti	109
4.2	Diviseurs libres localement quasi homogènes	110

Chapitre 0

Introduction

Résolutions minimales et $\mathcal{D}$ -modules

En algèbre commutative, un outil souvent employé pour étudier les modules consiste en les résolutions libres. Soit A un anneau commutatif et M un A -module, une résolution libre de M est une suite exacte

$$\cdots \rightarrow A^{r_1} \xrightarrow{\phi_1} A^{r_0} \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0.$$

Si A est noethérien et M est de type fini, de telles résolutions existent.

Supposons que A est un anneau gradué, $A = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} A_d$ où A_0 est un corps. Pour $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^r$, soit $A^r[\mathbf{n}]$ le module A^r muni de la graduation $(A^r[\mathbf{n}])_d = \bigoplus_i A_{d-n_i}$. Un module gradué M admet une résolution graduée libre, c'est-à-dire une suite exacte graduée

$$\cdots \rightarrow A^{r_1}[\mathbf{n}^{(1)}] \xrightarrow{\phi_1} A^{r_0}[\mathbf{n}^{(0)}] \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0.$$

On a des méthodes explicites pour calculer des résolutions libres graduées, par exemple l'algorithme de Schreyer dans le cas de $A = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$. (cf. [9], Theorem 15.10).

On peut exiger que les exposants de la résolution r_i soient minimaux au sens suivant : r_0 est le nombre minimal de générateurs de M , r_1 est le nombre minimal de générateurs de $\ker \phi_1$, et ainsi de suite. Une résolution libre dans laquelle les exposants sont minimaux est appelée résolution minimale libre, une telle résolution existe et est unique. Les exposants r_i (appelés nombres de Betti) et les décalages $\mathbf{n}^{(i)}$ sont alors des invariants du module M . Cela est valable aussi dans le cas où A est local, ou encore mixte local-gradué (par exemple $A = \mathbb{C}\{x\}[\xi]$).

Cette démarche est classique en géométrie algébrique, elle est par exemple développée par D. Eisenbud dans [10] pour les $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ -modules gradués :

soit I un idéal gradué définissant une variété projective V , les nombres de Betti du module A/I renseignent sur la géométrie de V . Par exemple, on a un lien entre toute résolution d'un module gradué M et sa fonction de Hilbert $H_M(d) = \dim_{\mathbb{C}}(M_d)$. On sait que H_M coïncide avec un polynôme P_M pour d assez grand. Plus précisément, dans ce contexte M admet une résolution libre graduée minimale finie

$$0 \rightarrow A^{r_\delta}[\mathbf{n}^{(\delta)}] \xrightarrow{\phi_\delta} \dots \rightarrow A^{r_1}[\mathbf{n}^{(1)}] \xrightarrow{\phi_1} A^{r_0}[\mathbf{n}^{(0)}] \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0,$$

ce qui permet de définir les invariants numériques $\mathrm{dp}(M) = \delta$ (la dimension projective de M) et $\mathrm{reg}(M) = \max_{i,j}(\mathbf{n}_j^{(i)} - i)$ (la régularité de M). On a alors $H_M(d) = P_M(d)$ pour $d \geq \mathrm{reg}(M) + \mathrm{dp}(M) - (n + 1)$ (Theorem 4.2).

Cette théorie a été récemment étendue au cas des $\mathcal{D}$ -modules algébriques par T. Oaku et N. Takayama ([22]). Avant d'être plus explicites, penchons-nous sur les motivations de ces auteurs. Les $\mathcal{D}$ -modules représentent un outil algorithmique important en géométrie algébrique et en théorie des équations aux dérivées partielles. Par exemple, les mêmes auteurs donnent dans [20] un algorithme complet du calcul de la cohomologie à coefficients complexes du complémentaire d'une hypersurface au moyen des $\mathcal{D}$ -modules. Cet algorithme consiste à calculer la restriction (une image inverse) d'un certain $\mathcal{D}$ -module. Par ailleurs, l'espace vectoriel des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaires est isomorphe à une restriction du $\mathcal{D}$ -module associé (sous une condition de spécialisabilité), cf. [21], section 5. Le point de départ de ces algorithmes est le calcul d'une résolution libre. On peut à cet effet utiliser la méthode de Schreyer, cependant la résolution obtenue est en général trop longue pour mener à bien les calculs ultérieurs. Les auteurs de [22] ont alors cherché à définir et à calculer des résolutions aussi courtes que possible, ce qui les a conduits à la notion de résolution libre minimale.

Nous présentons maintenant cette notion suivant la version adaptée aux $\mathcal{D}$ -modules analytiques donnée par T. Oaku et M. Granger ([12]). Pour nous, $\mathcal{D}$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients analytiques, c'est-à-dire qu'un élément de $\mathcal{D}$ s'écrit comme une somme finie

$$\sum_{(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n} g_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}(x_1, \dots, x_n) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\beta_n}$$

où pour chaque $(\beta_1, \dots, \beta_n), g_{\beta_1, \dots, \beta_n}$ est une série convergente au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$. Plus généralement, on parle du faisceau d'anneaux $\mathcal{D}_X$ sur une variété analytique lisse X . L'anneau $\mathcal{D}$ est non commutatif mais noethérien. On a donc des résolutions libres de $\mathcal{D}$ -modules. En revanche,

on n'a pas directement de notion de résolution libre minimale, l'anneau $\mathcal{D}$ étant naturellement filtré mais non gradué. Pour y parvenir, on considère des résolutions adaptées à une filtration. Soit pour $d \in \mathbb{Z}$, $F_d(\mathcal{D})$ le sous-espace de $\mathcal{D}$ des opérateurs d'ordre en $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ inférieur à d . On a $\text{gr}^F(\mathcal{D}) \simeq \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, c'est un anneau commutatif pour lequel la théorie des résolutions minimales libres est valide. Soit M un $\mathcal{D}$ -module muni d'une filtration $F_d(M)$. Pour $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^r$, soit $\mathcal{D}^r[\mathbf{n}]$ le module $\mathcal{D}^r$ muni de la filtration décalée du vecteur $\mathbf{n}$, appelé module filtré libre. Une résolution filtrée libre de M est une suite exacte

$$\dots \rightarrow \mathcal{D}^{r_1}[\mathbf{n}^{(1)}] \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{D}^{r_0}[\mathbf{n}^{(0)}] \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0$$

telle que pour tous $d \in \mathbb{Z}$, on ait une suite exacte

$$\dots \rightarrow F_d(\mathcal{D}^{r_1}[\mathbf{n}^{(1)}]) \xrightarrow{\phi_1} F_d(\mathcal{D}^{r_0}[\mathbf{n}^{(0)}]) \xrightarrow{\phi_0} F_d(M) \rightarrow 0.$$

Cette résolution est dite minimale si la suite exacte

$$\dots \rightarrow \text{gr}^F(\mathcal{D}^{r_1}[\mathbf{n}^{(1)}]) \xrightarrow{\phi_1} \text{gr}^F(\mathcal{D}^{r_0}[\mathbf{n}^{(0)}]) \xrightarrow{\phi_0} \text{gr}^F(M) \rightarrow 0$$

est une résolution minimale de $\text{gr}^F(M)$. Si le module filtré M admet une présentation finie et filtrée, alors il admet une résolution filtrée libre minimale. Le but des auteurs de [22] est atteint car une telle résolution est calculable. De plus, celle-ci est unique (à isomorphisme filtré près). Par conséquent, et c'est ce que nous retiendrons, les nombres de Betti et les décalages de la résolution minimale forment des invariants numériques du module filtré M .

Plus généralement, on définit les résolutions libres minimales adaptées à une bifiltration. Elles sont requises pour l'algorithme de restriction d'un $\mathcal{D}$ -module. Les nombres de Betti et les décalages sont alors des invariants pour un module bifiltré.

Dans cette thèse, nous étudions les résolutions bifiltrées minimales de $\mathcal{D}$ -modules en toute généralité d'abord, puis nous concentrons notre attention sur des $\mathcal{D}$ -modules d'un intérêt particulier en singularités. Cela constitue une démarche parallèle à celle adoptée par D. Eisenbud, adaptée à la théorie des singularités.

Liens entre $\mathcal{D}$ -modules et singularités

Par théorie des singularités nous entendons l'étude locale des variétés définies par des fonctions analytiques complexes dans $\mathbb{C}^n$.

La théorie des $\mathcal{D}$ -modules et les singularités sont intimement liées : par exemple, on définit pour un $\mathcal{D}$ -module une variété analytique, la variété caractéristique, et ses propriétés ont des répercussions importantes sur le $\mathcal{D}$ -module lui-même, ce qui montre que la géométrie analytique a son rôle à

jouer dans l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles, mais surtout, on retiendra l'apport des $\mathcal{D}$ -modules en théorie des singularités, que l'on met en lumière au travers de deux $\mathcal{D}$ -modules particuliers, qualifiés de géométriques.

Définissons un premier $\mathcal{D}$ -module géométrique. Soit X un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^n$, notons $\mathcal{O}_X$ le faisceau des germes de fonctions analytiques sur X et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0$. Soit $f \in \mathcal{O}_X$ telle que $f(0) = 0$. On note $\mathcal{D}[s]$ l'anneau des polynômes en s à coefficients dans $\mathcal{D}$. Voyons f^s comme un symbole et considérons l'espace

$$\mathcal{O} \left[\frac{1}{f}, s \right] f^s.$$

On le munit d'une structure de $\mathcal{D}[s]$ -module qui prolonge l'action naturelle

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f^s = s \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{1}{f} f^s.$$

Notre premier $\mathcal{D}$ -module géométrique est $\mathcal{D}[s]f^s$, le sous $\mathcal{D}[s]$ -module de $\mathcal{O}[1/f, s]f^s$ engendré par f^s . Ce module contient beaucoup d'informations sur la singularité $f = 0$. Par exemple, à partir de ce module est défini le polynôme de Bernstein-Sato : c'est le polynôme minimal de l'action de s sur $(\mathcal{D}[s]f^s)/(\mathcal{D}[s]ff^s)$. Bien qu'ayant été introduit dans le but de prolonger des fonctions méromorphes, ce polynôme s'est avéré lié à la théorie des singularités depuis les travaux de B. Malgrange (cf. [16]). En effet, J. Milnor a introduit la monodromie de f (dans le cas où f a une singularité isolée en 0), c'est un opérateur linéaire sur la cohomologie singulière de la fibre générique de f , dite *fibre de Milnor*, qui fournit des informations sur la topologie de la fibre singulière (cf. [18]). B. Malgrange a montré que les valeurs propres de la monodromie sont les $e^{2i\pi\alpha}$ où les α sont les racines du polynôme de Bernstein-Sato.

Définissons notre second module géométrique, extension du premier. Soit $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ l'anneau des germes d'opérateurs différentiels linéaires à l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$, bâti à partir des variables $x_1, \dots, x_n, t$ et des opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t}$. Sur notre espace $\mathcal{O}_X[1/f, s]$, on fait agir $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ en posant

$$t.g(x, s)f^s = g(x, s+1)ff^s$$

avec $g(x, s) \in \mathcal{O}_X[1/f, s]$, et

$$\frac{\partial}{\partial t}.g(x, s)f^s = -sg(x, s-1)\frac{1}{f}f^s.$$

On considère $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}f^s$, le sous $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ -module de $\mathcal{O}_X[1/f, s]f^s$ engendré par f^s , et notre second module géométrique est $N_f = \mathcal{D}_{x,t}f^s$, la fibre de $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}f^s$

en $(0, 0)$. Pour l'utiliser, nous allons le filtrer. Sur les variables

$$\left(x_1, \dots, x_n, t, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

on met respectivement les poids $(0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0, 1)$, cela fournit une filtration $(V_k(\mathcal{D}_{x,t}))_{k \in \mathbb{Z}}$, appelée V -filtration le long de $t = 0$. On munit N_f de la filtration $V_k(N_f) = V_k(\mathcal{D}_{x,t})f^s$ compatible avec la V -filtration de $\mathcal{D}_{x,t}$. On munira aussi N_f d'une bifiltration qui raffine la V -filtration, et nous nous intéresserons aux nombres de Betti et aux décalages issus de la résolution libre minimale bifiltrée.

Notre motivation est ici la cohomologie locale algébrique, et en filigrane, la cohomologie du complémentaire de l'hypersurface $f = 0$. Soit M un $\mathcal{D}_X$ -module. On note $\Gamma_{[f=0]}(M)$ le $\mathcal{O}_X$ -module

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ k}} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X} \left(\frac{\mathcal{O}_X}{f^k}, M \right)$$

Ce module admet une structure de $\mathcal{D}_X$ -module prolongeant celle de $\mathcal{O}_X$ -module. On définit ainsi un foncteur $\Gamma_{[f=0]}$ de la catégorie des $\mathcal{D}_X$ -modules, il est exact à gauche. On s'intéresse alors au foncteur dérivé $\mathbb{R}\Gamma_{[f=0]}$, et $\mathbb{R}\Gamma_{[f=0]}(M)$ est appelée *cohomologie algébrique locale de M à valeurs dans $(f = 0)$* . Notons que ce complexe n'a d'intérêt qu'au voisinage d'un point singulier de f . On considère le cas de $M = \mathcal{O}_X$. C'est un cas particulier intéressant en topologie des singularités car le complexe $\mathbb{R}\Gamma_{[f=0]}(\mathcal{O}_X)$ est un outil pour le calcul des espaces de cohomologie $H^i(X \setminus \{f = 0\}, \mathbb{C}_X)$ (voir par exemple [20], Corollary 7.4). Le lien dans ce cas avec notre module N_f est le suivant. Soit $i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ l'inclusion $i(x) = (x, 0)$. D'après [21], Proposition 7.2, on a

$$H^i \mathbb{L}i^* \mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}} f^s \simeq H^{i+1} \mathbb{R}\Gamma_{[f=0]} \mathcal{O}_X,$$

où i^* désigne l'image inverse spécifique à la théorie des $\mathcal{D}$ -modules. [21], Theorem 5.3 décrit comment obtenir la restriction de N_f à partir d'une résolution libre adaptée à la V -filtration.

On reviendra sur l'exemple de la cohomologie locale au chapitre 3, où l'on donnera une présentation explicite dans le cas où f est quasi homogène à singularité isolée.

Contenu de la thèse

Cette thèse a deux buts : étudier les résolutions minimales de $\mathcal{D}$ -modules, en précisant des méthodes de calcul effectives, d'une part, puis appliquer

ces résolutions aux modules géométriques $\mathcal{D}[s]f^s$ et $\mathcal{D}_{x,t}f^s$ pour définir des invariants géométriques et en étudier les propriétés.

Cette thèse est donc divisée en deux parties. Le chapitre 1 constitue la première, nous y faisons des rappels sur les $\mathcal{D}$ -modules et les résolutions minimales, puis nous montrons que l'on peut dans certains cas se ramener à une situation d'algèbre commutative pour calculer les nombres de Betti. Nous y définissons aussi la notion de résolution générique pour un module dépendant de paramètres.

Dans les chapitres 2 à 4, nous appliquons cette théorie aux $\mathcal{D}$ -modules géométriques. Nous définissons de nouveaux invariants analytiques pour les germes d'espaces complexes, et nous étudions des cas particuliers : les singularités isolées quasi homogènes pour lesquelles nous avons explicitement les nombres de Betti ; les singularités isolées semi-quasi homogènes pour lesquelles nous définissons les nombres de Betti génériques et dont nous caractérisons la quasi-homogénéité par les nombres de Betti et les décalages ; les monômes et les diviseurs libres localement quasi homogènes.

Détaillons précisément nos résultats chapitre par chapitre.

Au chapitre 1, nous rappelons les constructions de résolutions minimales adaptées à une bifiltration. On considère un vecteur de poids

$$(u, v) = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$$

tel que pour tout i , $u_i \leq 0$ et $u_i + v_i \geq 0$. Ces poids sont appliqués respectivement aux variables $(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, cela définit une filtration sur $\mathcal{D}$ que l'on note $(F_k^{(u,v)}(\mathcal{D}))_{k \in \mathbb{Z}}$. La filtration classiquement utilisée (pour définir la variété caractéristique) est celle obtenue pour $u = (0, \dots, 0)$ et $v = (1, \dots, 1)$, notée $F^{(0,1)}(\mathcal{D})$. Soit $(u, v) \neq (0, 1)$, on définit une bifiltration sur $\mathcal{D}$ par

$$F_{d,k}(\mathcal{D}) = F_d^{(0,1)}(\mathcal{D}) \cap F_k^{(u,v)}(\mathcal{D}).$$

Sur un $\mathcal{D}$ -module M , on a la notion naturelle de bifiltration $(F_{d,k}(M))$, compatible avec la bifiltration de $\mathcal{D}$. On considère alors la catégorie des $\mathcal{D}$ -modules bifiltrés, c'est le cadre naturel pour définir la notion de résolution minimale bifiltrée (en particulier, une telle résolution est adaptée à la filtration par les poids (u, v)). On rappelle aussi des méthodes effectives classiques : les complexes de Koszul (dont nous ferons abondamment usage au chapitre 3) et les bases standard.

Dans la section 1.2, on fait l'opération suivante : soit M un $\mathcal{D}$ -module bifiltré, on définit un module

$$\text{bigr}(M) = \bigoplus_{d,k} \frac{F_{d,k}(M)}{F_{d,k-1}(M) + F_{d-1,k}(M)}$$

sur l'anneau commutatif $\text{bigr}(\mathcal{D})$ défini de la même manière. Le module $\text{bigr}(M)$ admet une résolution minimale libre bigraduée unique, donc des nombres de Betti bien définis. Nous montrons que sous la condition

$$\forall d, k, F_{d,k}(M) = (\cup_{d'} F_{d',k}(M)) \cap (\cup_{k'} F_{d,k'}(M)), \quad (1)$$

les nombres de Betti du module bifiltré M sont les mêmes que ceux du module $\text{bigr}(M)$ (Théorème 1.2.1). Cela simplifie le calcul des nombres de Betti, notamment lorsqu'on se risque à calculer de tels objets en machine.

La section 1.3 est consacrée aux résolutions génériques. Elles sont motivées par les déformations semi-quasi homogènes de fonctions quasi homogènes. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_e$ des paramètres, $\mathcal{D}[\lambda]$ l'anneau des opérateurs différentiels à paramètres, et M un $\mathcal{D}[\lambda]$ -module de type fini, admettant une présentation

$$M = \frac{(\mathcal{D}[\lambda])^r}{(P_1, \dots, P_l)}$$

avec $P_i \in \mathcal{D}[\lambda]^r$. Soit K le corps des fractions de $\mathbb{C}[\lambda]$, et $\hat{\mathcal{D}}(K)$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $K[[x_1, \dots, x_n]]$. On définit un $\hat{\mathcal{D}}(K)$ -module $\hat{M} = \hat{\mathcal{D}}(K) \otimes_{\mathcal{D}[\lambda]} M$, muni de la bifiltration quotient par $P_1, \dots, P_l$.

Pour $\lambda_0 \in V$, on définit le $\mathcal{D}$ -module bifiltré

$$M_{\lambda_0} = \frac{\mathcal{D}^r}{(P_1(\lambda_0), \dots, P_l(\lambda_0))}$$

muni de la bifiltration quotient.

Théorème 0.0.1 (Théorème 1.3.1). *Il existe une résolution bifiltrée minimale libre de $\hat{M}$ sur $\hat{\mathcal{D}}(K)$ qui se spécialise pour λ_0 générique en une résolution bifiltrée minimale libre de M_{λ_0} sur $\mathcal{D}$.*

Au chapitre 2, on considère une application $f_1, \dots, f_p : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ et le module $N_f = \mathcal{D}_{x,t} f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ où $t = (t_1, \dots, t_p)$, défini de manière analogue au cas $p = 1$ que nous avons déjà explicité, muni de la bifiltration $F_{d,k}(N_f) = F_{d,k}(\mathcal{D}_{x,t}) f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$, avec la V -filtration le long de $t_1 = \dots = t_p = 0$. Nous notons

$$\beta_f(T) = \sum_{i \geq 0} \beta_i T^i$$

la série dont les coefficients sont les nombres de Betti du module bifiltré N_f . Soit J l'idéal de $\mathbb{C}\{x\}$ engendré par $f_1, \dots, f_p$. On considère le germe d'espace complexe V correspondant, c'est l'algèbre locale $\mathbb{C}\{x\}/J$. Soit n_0 la dimension de plongement de V en 0, et r_0 le nombre minimal de générateurs de l'idéal définissant V dans $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{n_0}\}$. Soit $c_0 = r_0 + n_0$ (c'est un invariant de V).

Proposition 0.0.1 (Proposition 2.1.4). *La série*

$$\beta_V(T) = \frac{\beta_f(T)}{(1+T)^{n+p-c_0}}$$

est un polynôme en T et définit un invariant du germe d'espace complexe V .

On définit aussi les résolutions génériques pour une déformation $F(x, \lambda) = (F_1(x, \lambda), \dots, F_p(x, \lambda)) \in (\mathbb{C}\{x\}[\lambda])^p$ de f , comme corollaire du Théorème 1.3.1.

Ensuite et jusqu'à la fin de la thèse on suppose $p = 1$, c'est-à-dire qu'on ne traite que des hypersurfaces. On donne une condition suffisante pour que le module N_f satisfasse l'hypothèse (1) : f est Euler-homogène et l'idéal $J(f)$ est de type linéaire (Proposition 2.2.2). Nous étudions enfin les nombres de Betti du module filtré $\mathcal{D}[s]f^s$, cela fournit des invariants analytiques dans la catégorie des hypersurfaces.

Au chapitre 3, on traite le cas d'une singularité isolée quasi homogène f , avec les poids $w_1, \dots, w_n$. On peut se ramener au commutatif, au sens de la section 1.2. On a $\text{bigr}(\mathcal{D}_{x,t}) \simeq \mathbb{C}\{x\}[t, \xi, \tau]$ et $\text{bigr}(N_f) \simeq \text{bigr}(\mathcal{D}_{x,t})/I$, où I est l'idéal engendré par les éléments

$$f, t\tau + \sum w_i x_i \xi_i, \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \tau \right)_i, \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \xi_j - \frac{\partial f}{\partial x_j} \xi_i \right)_{i < j}.$$

On calcule explicitement une résolution libre minimale bigraduée de $\text{bigr}(N_f)$. Schématiquement, la méthode est la suivante : on effectue plusieurs dévissages de manière à ne traiter que des modules qu'on sait résoudre par des complexes de Koszul généralisés, on prend ensuite les cônes successifs des résolutions obtenues. On obtient les nombres de Betti suivants :

Théorème 0.0.2 (Théorème 3.1.1). *Les nombres de Betti du module bifiltré N_f sont les suivants : $\beta_0 = 1, \beta_1 = 2 + \frac{n(n+1)}{2}, \beta_2 = 1 + n + 2\binom{n+1}{n-2}$, puis pour $i \geq 3, \beta_i = (i-2)\binom{n+2}{i+1} + 2\binom{n+1}{i+1}$.*

Ce qui est frappant est le fait que ces nombres de Betti ne dépendent que de n . Nous remarquons que la régularité du module $\text{bigr}(N_f)$ au sens de la graduation F est nulle. On déduit des calculs effectués une présentation du module de cohomologie locale de $\mathcal{O}_X$.

On cherche ensuite à caractériser la quasi-homogénéité pour les singularités isolées. On montre que f est quasi homogène si et seulement si la régularité de N_f (au sens de la première filtration) est nulle (Proposition

3.3.1). Pour les courbes réduites, la donnée du premier nombre de Betti suffit : si f est quasi homogène, alors $\beta_1 = 5$, sinon $\beta_1 \geq 6$ (Proposition 3.3.2). On cherche à généraliser ce dernier résultat aux singularités semi-quasi homogènes en toute dimension, on y parvient pour les déformations par le socle (Proposition 3.4.1).

Dans le dernier chapitre, on étudie des cas où on peut encore se ramener au commutatif : les monômes et les diviseurs libres localement quasi homogènes. On décrit complètement les nombres de Betti pour les monômes, au prix de lourds calculs : soit $f = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ avec $a_1, \dots, a_n$ des entiers strictement positifs.

Théorème 0.0.3 (Théorème 4.1.1). — *Si f est non réduite, alors $\beta_1 = 2n + 1$ et $\beta_i = 2\binom{n+1}{i}$ si $i \geq 2$.*
— *Si f est réduite, alors $\beta_1 = 2n + 1$, $\beta_i = 2\binom{n+1}{i}$ si $2 \leq i \leq n - 1$, $\beta_n = 2n + 1$, $\beta_{n+1} = 1$, $\beta_i = 0$ si $i \geq n + 2$.*

Dans le cas des diviseurs libres localement quasi homogènes, nous notons simplement que les résultats de [5] impliquent qu'on peut se ramener au commutatif, ce qui permet d'envisager des calculs en machine.

Chapitre 1

Résolutions minimales de $\mathcal{D}$ -modules

1.1 Rappels

1.1.1 Anneaux d'opérateurs différentiels

Le premier anneau qui nous intéresse est $\mathcal{D}$, l'anneau des germes d'opérateurs différentiels analytiques à l'origine. Notons $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ et pour $\beta \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n}$. Un élément P de $\mathcal{D}$ s'écrit de manière unique

$$P = \sum_{\text{finie}} g_\beta(x) \partial^\beta$$

avec $g_\beta(x) \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$. Rappelons les relations de base dans $\mathcal{D}$: $\partial_{x_i} x_j - x_j \partial_{x_i} = \delta_{i,j}$.

On appelle *vecteur de poids admissible* un vecteur

$$(u, v) = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$$

tel que pour tout i , $u_i + v_i \geq 0$ et $u_i \leq 0$. Pour $P \in \mathcal{D}$ de la forme $P = \sum a_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta$, on définit l'ordre selon (u, v) par

$$\text{ord}_{(u, v)}(P) = \max\left\{\sum u_i \alpha_i + \sum v_i \beta_i, a_{\alpha, \beta} \neq 0\right\}$$

On définit la filtration de $\mathcal{D}$ selon (u, v) par

$$F_k^{(u, v)}(\mathcal{D}) = \{P \in \mathcal{D}, \text{ord}_{(u, v)}(P) \leq k\} \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}.$$

Notation spéciale : Une filtration particulièrement importante est celle obtenue pour $u = (0, \dots, 0)$ et $v = (1, \dots, 1)$, on la notera $F_d(\mathcal{D})$.

Suivant les idées de [8], nous allons homogénéiser les opérateurs différentiels selon la filtration F . On définit à cet effet l'anneau de Rees naturellement gradué

$$\mathbf{R}(\mathcal{D}) = \oplus_d F_d(\mathcal{D})T^d$$

avec la règle de multiplication

$$PT^d \cdot P'T^{d'} = (PP')T^{d+d'}.$$

On définit d'autre part l'anneau $\mathcal{D}^{(h)}$ comme la $\mathbb{C}$ -algèbre engendrée par $\mathbb{C}\{x\}, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, h$ quotientée par les relations

$$ha - ah, h\partial_{x_i} - \partial_{x_i}h, \partial_{x_i}\partial_{x_j} - \partial_{x_j}\partial_{x_i}, \partial_{x_i}a - a\partial_{x_i} - \frac{\partial a}{\partial x_i}h$$

pour tout $a \in \mathbb{C}\{x\}$. Cet anneau est gradué de la façon suivante

$$(\mathcal{D}^{(h)})_d = \left\{ \sum a_{\beta,k}(x) \partial^\beta h^k, |\beta| + k = d \right\}.$$

On définit sur $\mathcal{D}^{(h)}$ une filtration selon (u, v) de la même manière que ci-dessus, avec pour $P \in \mathcal{D}^{(h)}$ de la forme $P = \sum a_{\alpha,\beta,k} x^\alpha \partial^\beta h^k$,

$$\text{ord}_{(u,v)}(P) = \max \left\{ \sum u_i \alpha_i + \sum v_i \beta_i \mid a_{\alpha,\beta,k} \neq 0 \text{ pour un certain } k \right\}$$

c'est-à-dire qu'on donne à la variable h le poids 0.

On a un isomorphisme d'anneaux gradués $\mathcal{D}^{(h)} \simeq \mathbf{R}(\mathcal{D})$ qui envoie $a(x) \partial^\beta h^k$ sur $a(x) \partial^\beta T^{k+|\beta|}$. Notons que la présentation de cet anneau sous la forme $\mathbf{R}(\mathcal{D})$ sera adaptée à la manipulation de modules filtrés, tandis que l'anneau $\mathcal{D}^{(h)}$ sera plus commode pour effectuer des calculs, notamment de bases standard.

Via cet isomorphisme, on a

$$F_k^{(u,v)}(\mathcal{D}^{(h)}) \simeq \oplus_d (F_d(\mathcal{D}) \cap V_k(\mathcal{D})) T^d.$$

On considèrera l'anneau gradué associé $\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{D}^{(h)})$.

Soit (u, v) un vecteur de poids admissible. On définit une bifiltration sur $\mathcal{D}$ par

$$F_{d,k}(\mathcal{D}) = F_d^{(0,1)}(\mathcal{D}) \cap F_k^{(u,v)}(\mathcal{D}) \quad \text{pour } d \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}.$$

On rencontrera l'anneau bigradué $\text{bigr}\mathcal{D}$ correspondant, défini comme suit :

$$\text{bigr}\mathcal{D} = \oplus \text{bigr}_{d,k} \mathcal{D} = \oplus \frac{F_{d,k}(\mathcal{D})}{F_{d,k-1}(\mathcal{D}) + F_{d-1,k}(\mathcal{D})}.$$

C'est un anneau commutatif.

1.1.2 Résolution graduée (ou bigraduée) libre minimale

Nous allons rappeler la notion de résolution libre minimale pour des modules sur des anneaux gradués ou bigradués. Les anneaux considérés sont commutatifs ou non commutatifs, mais possèdent une propriété commune : l'existence d'un lemme de type Nakayama, qui joue un rôle clé dans les démonstrations d'unicité de ces résolutions.

Cas classique

Commençons par le cas classique. Soit $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ muni de la graduation par le degré. A possède un unique idéal maximal gradué $\mathfrak{m}$ engendré par $x_1, \dots, x_n$.

Définition 1.1.1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On note $A[n]$ le A -module gradué A muni de la graduation $A[n]_d = A_{d-n}$. De même, si $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^r$, on note $A^r[\mathbf{n}]$ le A -module gradué A^r muni de la graduation

$$A^r[\mathbf{n}]_d = \bigoplus_{i=1}^r A_{d-n_i}.$$

Soit M un A -module gradué de type fini. Une *résolution graduée libre* de M est une suite exacte graduée

$$\dots \rightarrow \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

avec $\mathcal{L}_i = A^{r_i}[\mathbf{n}^{(i)}]$. On construit une telle résolution comme suit : soit $m_1, \dots, m_{r_0}$ des générateurs homogènes de M , de degrés respectifs $n_1, \dots, n_{r_0}$. Soit $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_{r_0})$. On a une suite exacte graduée

$$A^{r_0}[\mathbf{n}] \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0$$

avec $\phi_0(e_i) = m_i$, où $e_1, \dots, e_{r_0}$ est la base canonique de A^{r_0} . On continue en prenant des générateurs homogènes de $\ker \phi_0$.

Une résolution graduée libre *minimale* de M est une résolution telle que les coefficients des matrices ϕ_i appartiennent à $\mathfrak{m}$, pour $i \geq 1$. C'est équivalent au sens plus intuitif suivant : $\phi_0(e_1), \dots, \phi_0(e_{r_0})$ est un ensemble minimal de générateurs de M , et pour $i \geq 1$, $(\phi_i(e_1), \dots, \phi_i(e_{r_i}))$ est un ensemble minimal de générateurs de $\ker \phi_{i-1}$.

Les résolutions graduées libres minimales existent et sont uniques à isomorphisme près (cf. [9] Theorem 20.2, à adapter au cas gradué). En conséquence, les exposants r_i et les décalages $\mathbf{n}^{(i)}$ sont des invariants du module gradué M .

Définition 1.1.2. Les exposants r_i sont appelés les nombres de Betti du module gradué M .

Cas d'anneaux gradués ou bigradués issus de $\mathcal{D}$

Nous considérerons les anneaux gradués $\mathcal{D}^{(h)}$ et $\text{gr}^F(\mathcal{D})$ et les anneaux bigradués $\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{D}^{(h)})$ et $\text{bigr}(\mathcal{D})$. On définit alors une *résolution graduée* (ou *bigradué*) libre minimale comme étant une suite exacte graduée (ou bigraduée) du type (1.1), avec $\mathfrak{m}$ l'idéal bilatère adéquat que nous allons préciser.

L'anneau $\mathcal{D}^{(h)}$ est non commutatif, mais possède un unique idéal bilatère gradué maximal $\mathfrak{m}$, engendré par $x_1, \dots, x_n, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, h$. Une résolution minimale graduée d'un module à gauche est une suite exacte de modules à gauche du type (1.1), où les coefficients des matrices appartiennent à $\mathfrak{m}$.

L'anneau $\text{gr}^F(\mathcal{D})$ est commutatif, isomorphe à $\mathbb{C}\{x\}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, avec ξ_i la classe de ∂_{x_i} dans $\text{gr}_1^F(\mathcal{D})$. L'idéal $\mathfrak{m}$ est engendré par $x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n$.

L'anneau $\text{gr}^{(u,v)}(\mathcal{D}^{(h)})$ est bigradué et non commutatif en général. Pour définir les résolutions bigraduées on introduit le module bigradué libre $A^r[\mathbf{n}][\mathbf{m}]$ avec $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^r$: c'est le module A^r muni de la bigraduation

$$(A^r[\mathbf{n}][\mathbf{m}])_d = \bigoplus_{i=1}^r A_{d-n_i, d-m_i}.$$

Une résolution bigraduée libre d'un module à gauche est une suite exacte bigraduée du type (1.1), où $\mathcal{L}_i$ est un module bigradué libre. L'idéal $\mathfrak{m}$ est engendré par $x_1, \dots, x_n, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, h$ (où on identifie x_i avec sa classe dans $\text{gr}_{u_i}^V(\mathcal{D}^{(h)})$, ∂_{x_i} avec sa classe dans $\text{gr}_{v_i}^{(u,v)}(\mathcal{D}^{(h)})$ et h avec sa classe dans $\text{gr}_0^{(u,v)}(\mathcal{D}^{(h)})$). C'est l'unique idéal bilatère bigradué maximal.

Enfin, l'anneau $\text{bigr}\mathcal{D}$ est bigradué et commutatif. Une résolution bigraduée libre est constituée de modules bigradués libres. Notons ξ_i la classe de ∂_{x_i} dans $\text{bigr}_{(1,v_i)}(\mathcal{D})$, et x_i la classe de x_i dans $\text{bigr}_{(0,u_i)}(\mathcal{D})$. L'idéal $\mathfrak{m}$ est engendré par $x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n$, c'est l'unique idéal bigradué maximal.

Dans tous ces cas, les résolutions minimales existent et sont uniques à isomorphisme près, ce que l'on démontre de façon similaire au cas commutatif (voir plus particulièrement [12] pour les cas non commutatifs).

Minimalisation

Dans ce paragraphe, A est l'un des anneaux considérés ci-dessus. Pour obtenir une résolution minimale d'un A -module M , on peut partir d'une

résolution libre graduée quelconque

$$\cdots \rightarrow \mathcal{L}_i \xrightarrow{\phi_i} \mathcal{L}_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0$$

Supposons que cette résolution ne soit pas minimale, i.e. il existe $i \geq 1$ et un vecteur de base e_0 de $\mathcal{L}_i$ tel que $\phi_i(e_0) \notin \mathfrak{m}\mathcal{L}_{i-1}$.

Le module

$$\frac{\mathcal{L}_i}{Ae_0}$$

est libre de rang $r_i - 1$ et le module

$$\frac{\mathcal{L}_{i-1}}{A\phi_i(e_0)}$$

est libre de rang $r_{i-1} - 1$ car on peut compléter le vecteur $\phi_i(e_0)$ en une base de $\mathcal{L}_{i-1}$, par le Lemme de Nakayama. Le complexe

$$\cdots \rightarrow \frac{\mathcal{L}_i}{Ae_0} \xrightarrow{\phi_i} \frac{\mathcal{L}_{i-1}}{A\phi_i(e_0)} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0$$

est une résolution libre graduée de M (cf. [10], preuve du Théorème 1.6). Or les rangs ont strictement diminué, on peut donc faire cette opération un nombre fini de fois, jusqu'à obtenir une résolution minimale.

Interprétation des nombres de Betti avec le foncteur Tor

On peut interpréter les nombres de Betti d'une résolution minimale d'un A -module M au moyen du foncteur Tor. On a toujours

$$\frac{A}{\mathfrak{m}} \simeq \mathbb{C}$$

dans les cas $A = \text{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})$ ou $A = \text{bigr}\mathcal{D}$. On voit de cette manière $\mathbb{C}$ comme un A -module à droite.

Lemme 1.1.1 ([10], Proposition 1.7). $\forall i, r_i = \dim_{\mathbb{C}}(\text{Tor}_i^A(\mathbb{C}, M))$.

1.1.3 Résolutions filtrées de $\mathcal{D}$ -modules et de $\mathcal{D}[s]$ -modules

Considérons maintenant l'anneau $\mathcal{D}$. On ne peut pas parler directement de résolution minimale dans la catégorie des $\mathcal{D}$ -modules, mais on sait le faire via une graduation ou une homogénéisation, dans la catégorie des $\mathcal{D}$ -modules munis d'une bonne filtration.

Soit M un $\mathcal{D}$ -module. Rappelons que $F_d(\mathcal{D})$ désigne la filtration $F^{(0,1)}(\mathcal{D})$. Une filtration de M est une collection $\{F_d(M)\}_{d \in \mathbb{Z}}$ de $\mathbb{C}\{x\}$ -sous-modules de M telle que $\bigcup F_d(M) = M$ et pour tous $d, d' \in \mathbb{Z}$, $F_d(M) \subset F_{d+1}(M)$ et $F_{d'}(\mathcal{D})F_d(M) \subset F_{d+d'}(M)$.

Définition 1.1.3. $(F_d(M))$ est une bonne filtration si il existe $f_1, \dots, f_r \in M$ et $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\forall d \in \mathbb{Z}, F_d(M) = F_{d-n_1}(\mathcal{D})f_1 + \dots + F_{d-n_r}(\mathcal{D})f_r.$$

Autrement dit, une filtration est bonne si il existe une suite exacte filtrée

$$\mathcal{D}^r[\mathbf{n}] \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0.$$

On retrouve la définition en posant $\phi(e_i) = f_i$.

Par exemple, soit $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^r$, on note $\mathcal{D}^r[\mathbf{n}]$ le $\mathcal{D}$ -module $\mathcal{D}^r$ muni de la bonne filtration $F_d(\mathcal{D}^r[\mathbf{n}]) = \bigoplus_i F_{d-n_i}(\mathcal{D})$.

Supposons M muni d'une bonne filtration $(F_d(M))$.

Définition 1.1.4. Une résolution libre filtrée de M est une résolution

$$\dots \rightarrow \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0$$

avec $\mathcal{L}_i = \mathcal{D}^{r_i}[\mathbf{n}^{(i)}]$, telle que pour tout $d \in \mathbb{Z}$,

$$\dots \rightarrow F_d(\mathcal{L}_1) \xrightarrow{\phi_1} F_d(\mathcal{L}_0) \xrightarrow{\phi_0} F_d(M) \rightarrow 0$$

est une suite exacte.

Une résolution libre filtrée minimale est une résolution libre filtrée qui induit une résolution libre graduée minimale de $\text{gr}^F(M)$:

$$\dots \rightarrow \text{gr}^F \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\phi_1} \text{gr}^F \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\phi_0} \text{gr}^F M \rightarrow 0.$$

On va voir qu'une telle résolution existe et est unique à isomorphisme filtré près.

Détaillons le devenir des flèches ϕ_i par le passage au gradué. Soit

$$\phi : \mathcal{D}^r[\mathbf{n}] \rightarrow \mathcal{D}^{r'}[\mathbf{n}']$$

définie par $\phi(e_i) = \sum a_{i,j} e_j$, avec $a_{i,j} \in F_{n_i-n'_j}(\mathcal{D})$. Par passage au gradué on obtient

$$\bar{\phi} : \text{gr}^F(\mathcal{D})^r[\mathbf{n}] \rightarrow \text{gr}^F(\mathcal{D})^{r'}[\mathbf{n}']$$

Pour $d \in \mathbb{Z}$, on considère l'application "symbole de degré d " :

$$\sigma_d : F_d(\mathcal{D}) \rightarrow \text{gr}_d^F(\mathcal{D})$$

Notons $e_1, \dots, e_r$ la base canonique de $\mathcal{D}^r[\mathbf{n}]$ et $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r$ celle de $\text{gr}^F(\mathcal{D})^r[\mathbf{n}]$, avec $\bar{e}_i$ de degré n_i . On utilise les mêmes notations pour $\mathcal{D}^{r'}[\mathbf{n}']$. On a alors

$$\bar{\phi}(\bar{e}_i) = \overline{\sum_j a_{i,j} e_j} = \sum_j \sigma_{n_i-n'_j}(a_{i,j}) \bar{e}_j \in \text{gr}_{n_i}^F(\mathcal{D})^{r'}[\mathbf{n}'].$$

On peut aussi définir la notion de résolution filtrée minimale via une homogénéisation. On définit le module de Rees $\mathbf{R}(M)$ par :

$$\mathbf{R}(M) = \oplus F_d(M)T^d.$$

C'est un $\mathcal{D}^{(h)}$ -module avec l'action suivante :

$$a(x)\partial^\beta h^k \cdot (mT^d) = (a(x)\partial^\beta m)T^{d+|\beta|+k}.$$

On a plus généralement un foncteur de Rees, de la catégorie des $\mathcal{D}$ -modules filtrés vers la catégorie de $\mathcal{D}^{(h)}$ -modules. Si $\phi : M \rightarrow M'$ est un morphisme de $\mathcal{D}$ -modules filtrés, on définit $\tilde{\phi} : \mathbf{R}(M) \rightarrow \mathbf{R}(M')$ par $\tilde{\phi}(mT^d) = \phi(m)T^d$.

En particulier, soit

$$\phi : \mathcal{D}^r[\mathbf{n}] \rightarrow \mathcal{D}^{r'}[\mathbf{n}']$$

définie par $\phi(e_i) = \sum a_{i,j}e_j$, avec $a_{i,j} \in F_{n_i-n'_j}(\mathcal{D})$. Notons $(\tilde{e}_i)$ la base canonique de $(\mathcal{D}^{(h)})^r[\mathbf{n}]$. On a un isomorphisme $(\mathcal{D}^{(h)})^r[\mathbf{n}] \simeq \mathbf{R}(\mathcal{D}^r[\mathbf{n}])$, où $\tilde{e}_i$ correspond à $e_iT^{n_i}$. Considérons l'application "homogénéisation de degré d " :

$$H_d : F_d(\mathcal{D}) \rightarrow (\mathcal{D}^{(h)})_d$$

où on homogénéise au moyen de la variable h . On a

$$a_{i,j}e_jT^{n_i} = H_{n_i-n'_j}(a_{i,j}).(e_jT^{n'_j}),$$

alors

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\tilde{e}_i) &= \phi(e_i)T^{n_i} = \left(\sum_j a_{i,j}e_j\right)T^{n_i} = \sum_j H_{n_i-n'_j}(a_{i,j}).(e_jT^{n'_j}) \\ &= \sum_j H_{n_i-n'_j}(a_{i,j})\tilde{e}_j. \end{aligned}$$

On envisage maintenant une résolution filtrée

$$\cdots \rightarrow \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

qui induit une résolution graduée minimale

$$\cdots \rightarrow \mathbf{R}\mathcal{L}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathbf{R}\mathcal{L}_0 \xrightarrow{\phi_0} \mathbf{R}M \rightarrow 0.$$

D'après [12], Theorem 3.4, une telle résolution existe et est unique à isomorphisme filtré près. Nous définirons ceci comme la résolution minimale via l'homogénéisation.

Lemme 1.1.2. *Cette définition est équivalente à la définition via la graduation.*

Preuve Soit une résolution filtrée

$$\cdots \rightarrow \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0. \quad (1.3)$$

Elle est minimale via la graduation (resp. via l'homogénéisation) si les coefficients des matrices $\overline{\phi_i}$ (resp. $\tilde{\phi_i}$) sont dans l'idéal maximal approprié. Or les coefficients de $\overline{\phi_i}$ sont les $\sigma_{n_i-n_j}(a_{i,j})$ tandis que les coefficients de $\tilde{\phi_i}$ sont les $H_{n_i-n_j}(a_{i,j})$. On conclut en remarquant que

$$\sigma_{n_i-n_j}(a_{i,j}) = H_{n_i-n_j}(a_{i,j})|_{h=0}$$

modulo un abus de notation $\square$

Par conséquent, on a existence et unicité des résolutions minimales via la graduation (i.e. satisfaisant la Définition 1.1.4).

Traisons aussi les $\mathcal{D}[s]$ -modules. On pose

$$F_d(\mathcal{D}[s]) = \left\{ \sum P_i s^i, \forall i, \text{ord}^F(P_i) + i \leq d \right\}.$$

On définit comme précédemment la notion de bonne filtration pour un $\mathcal{D}[s]$ -module, puis la notion de résolution libre filtrée minimale via la graduation. Ici, $\mathfrak{m}$ est l'idéal de $\text{gr}^F(\mathcal{D}[s])$ engendré par $x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n, s$, avec ξ_i la classe de ∂_{x_i} dans $\text{gr}_1^F(\mathcal{D}[s])$.

1.1.4 Résolutions bifiltrées de $\mathcal{D}$ -modules

On a même, pour les $\mathcal{D}$ -modules munis d'une bonne bifiltration, la notion de résolution libre minimale bifiltrée. Ces résolutions bifiltrées minimales ont été étudiées par T. Oaku et N. Takayama dans [22] dans le cas de l'algèbre de Weyl (i.e. les coefficients sont polynomiaux), puis par M. Granger et T. Oaku dans [12] dans le cas de $\mathcal{D}$.

Précisons ces notions. Soit $(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}^r$. On définit sur $\mathcal{D}^r$ une filtration décalée

$$F_k^{(u,v)}[\mathbf{m}](\mathcal{D}^r) = \{(P_1, \dots, P_r) \in \mathcal{D}^r \mid \forall i, \text{ord}_{(u,v)}(P_i) + m_i \leq k\}$$

Fixons un vecteur de poids admissible $(u, v) \neq (0, 1)$.

Notation spéciale : Nous noterons $F_d(\mathcal{D}) = F_d^{(0,1)}(\mathcal{D})$ et $V_k(\mathcal{D}) = F_k^{(u,v)}(\mathcal{D})$. Cette dernière notation est motivée par la notion de V -filtration que nous étudierons au chapitre 2.

Soit M un $\mathcal{D}$ -module. Une *bifiltration* de M est une collection

$$\{F_{d,k}(M)\}_{d,k \in \mathbb{Z}}$$

de $\mathbb{C}\{x\}$ -sous-modules de M telle que

$$\begin{aligned} \bigcup F_{d,k}(M) &= M, \\ \forall d, k \in \mathbb{Z}, F_{d,k}(M) &\subset F_{d+1,k}(M) \cap F_{d,k+1}(M) \text{ et} \\ \forall d, d', k, k' \in \mathbb{Z}, (F_{d'}(\mathcal{D}) \cap V_{k'}(\mathcal{D}))F_{d,k}(M) &\subset F_{d+d',k+k'}(M). \end{aligned}$$

Définition 1.1.5. $(F_{d,k}(M))$ est une bonne bifiltration si il existe $f_1, \dots, f_l \in M$ et $n_1, \dots, n_l, m_1, \dots, m_l \in \mathbb{Z}$ tels que

$$F_{d,k}(M) = (F_{d-n_1}(\mathcal{D}) \cap V_{k-m_1}(\mathcal{D}))f_1 + \dots + (F_{d-n_l}(\mathcal{D}) \cap V_{k-m_l}(\mathcal{D}))f_l.$$

Par exemple, soit $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^r$, on note $\mathcal{D}^r[\mathbf{n}][\mathbf{m}]$ le $\mathcal{D}$ -module $\mathcal{D}^r$ muni de la bonne bifiltration

$$(F_d^{(0,1)}[\mathbf{n}](\mathcal{D}^r) \cap F_k^{(u,v)}[\mathbf{m}](\mathcal{D}^r))_{d,k}.$$

Une bifiltration est donc bonne si il existe une suite exacte bifiltrée

$$\mathcal{D}^r[\mathbf{n}][\mathbf{m}] \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0.$$

On retrouve la définition en posant $\phi(e_i) = f_i$.

Soit M muni d'une bonne bifiltration. M est muni d'une bonne F -filtration :

$$F_d(M) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} F_{d,k}(M)$$

ainsi que d'une V -filtration :

$$V_k(M) = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} F_{d,k}(M).$$

On définit aussi les filtrations décalées sur un module libre $(\mathcal{D}^{(h)})^r$. $\mathbf{R}(M)$ est muni d'une bonne V -filtration

$$V_k(\mathbf{R}(M)) = \bigoplus_d F_{d,k}(M)T^d.$$

On peut alors définir le module

$$\mathrm{gr}^V(\mathbf{R}(M)) = \bigoplus_k \mathrm{gr}_k^V(\mathbf{R}(M)) \simeq \bigoplus_k \bigoplus_d \frac{F_{d,k}(M)T^d}{F_{d,k-1}(M)T^d}.$$

C'est un module bigradué sur l'anneau $\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})$. Dans cette catégorie, on peut parler de résolution libre minimale.

Définition 1.1.6. Une résolution libre bifiltrée de M est une suite exacte

$$\dots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

avec $\mathcal{L}_i = \mathcal{D}^{r_i}[\mathbf{n}^{(i)}][\mathbf{m}^{(i)}]$, telle que $\forall d, k \in \mathbb{Z}$,

$$\cdots \rightarrow F_{d,k}(\mathcal{L}_1) \rightarrow F_{d,k}(\mathcal{L}_0) \rightarrow F_{d,k}(M) \rightarrow 0$$

est une suite exacte.

Une résolution libre bifiltrée minimale de M est une résolution libre bifiltrée qui induit une résolution libre bigraduée minimale de $gr^V(\mathbf{R}(M))$

$$\cdots \rightarrow gr^V(\mathbf{R}(\mathcal{L}_1)) \rightarrow gr^V(\mathbf{R}(\mathcal{L}_0)) \rightarrow gr^V(\mathbf{R}(M)) \rightarrow 0.$$

Une telle résolution existe et est unique à isomorphisme bifiltré près ([12], Theorem 3.7). En particulier, les exposants r_i et les décalages $[\mathbf{n}^{(i)}][\mathbf{m}^{(i)}]$ sont des invariants du $\mathcal{D}$ -module bifiltré M .

Définition 1.1.7. On appelle nombres de Betti du module bifiltré $(M, (F_{d,k}))$ (resp. décalages) les exposants (resp. décalages) de la résolution minimale bifiltrée de M .

Régularité

Nous parlerons de la régularité d'un $\mathcal{D}$ -module M bifiltré de type fini, au sens de la première filtration. Soit une résolution minimale bifiltrée de M :

$$\cdots \rightarrow \mathcal{D}^{r_1}[\mathbf{n}^{(1)}][\mathbf{m}^{(1)}] \rightarrow \mathcal{D}^{r_0}[\mathbf{n}^{(0)}][\mathbf{m}^{(0)}] \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Définition 1.1.8. $reg_F M = \sup_{i,j} (\mathbf{n}_j^{(i)} - i)$.

De même, on définit la régularité d'un module bigradué de type fini sur l'anneau $\text{bigr}\mathcal{D}$, au sens de la première graduation.

Remarque : Résolution minimale bifiltrée et changement de coordonnées Soit $\phi : \mathcal{D} \simeq \mathcal{D}$ un isomorphisme d'anneaux bifiltré, i.e.,

$$\forall d, k, \phi(F_{d,k}(\mathcal{D})) = F_{d,k}(\mathcal{D}).$$

Soit M un $\mathcal{D}$ -module muni d'une bonne bifiltration, on définit un $\mathcal{D}$ -module M_ϕ comme suit : $M_\phi = M$ en tant qu'ensemble, muni de l'action de $P \in \mathcal{D}$:

$$P \bullet m = \phi(P)m$$

pour $m \in M_\phi$. On munit M_ϕ de la bonne bifiltration $F_{d,k}(M_\phi) = F_{d,k}(M)$.

Lemme 1.1.3. Les invariants de la résolution minimale de M et de M_ϕ sont les mêmes.

Preuve ϕ s'étend en un automorphisme gradué V -filtré de l'anneau $\mathcal{D}^{(h)}$ en posant $\phi(h) = h$. Cet automorphisme s'étend ensuite en un automorphisme bigradué de l'anneau $\text{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})$. Soit

$$\dots \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0$$

une résolution minimale de M , avec $\phi_0(e_i) = m_i$ et pour $i \geq 1$, ϕ_i représentée par la matrice $(a_{j,k}^{(i)})$. On a alors une résolution minimale de M_ϕ qui a les mêmes nombres de Betti et décalages :

$$\dots \xrightarrow{\psi_2} \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\psi_0} M \rightarrow 0$$

avec $\psi_0(e_i) = m_i$, et pour $i \geq 1$, ψ_i représentée par la matrice $(\phi^{-1}(a_{j,k}^{(i)}))$. $\square$

On rencontrera un exemple d'application de ce lemme au chapitre 2.

1.1.5 Bases standard

Commençons par travailler dans $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Nous introduisons les bases standard pour les A -modules, en vue de l'algorithme de Schreyer qui permet de construire des résolutions libres. Voir les détails et les démonstrations dans [9], chapitre 15.

Soit $<$ un ordre monomial sur $\mathbb{N}^n \times \{1, \dots, r\}$. Ici on suppose que l'ordre est bon. Par exemple sur $\mathbb{N}^n$ on peut prendre l'ordre lexicographique. Soit $P = \sum \lambda_{\alpha,k} x^\alpha e_k \in A^r = \oplus A e_k$. On note $\mathcal{N}(P) = \{(\alpha, i), a_{\alpha,i} \neq 0\}$ le diagramme de Newton de P , et $\text{Exp}(P) = \max_{<} \mathcal{N}(P)$.

Soient $P, P_1, \dots, P_l \in A^r$. Soit $\Delta = \bigcup (\text{Exp}(P_i) + \mathbb{N}^n)$.

Définition 1.1.9. Une division de P par $P_1, \dots, P_l$ est une écriture

$$P = \sum Q_i P_i + R$$

avec $Q_i \in A, R \in A^r, \mathcal{N}(R) \cap \Delta = \emptyset$ et pour tout i , $\text{Exp}(Q_i P_i) \leq \text{Exp}(P)$.

Les divisions existent et ne sont pas uniques (on définira plus loin des divisions uniques). On dira que P est divisible par $P_1, \dots, P_l$ si il existe une division de P par $P_1, \dots, P_l$ où le reste R est nul.

Définition 1.1.10. Soit N un sous-module de A^r . Des éléments $P_1, \dots, P_l$ de N forment une base de Gröbner de N si

$$\bigcup (\text{Exp} P_i + \mathbb{N}^n) = \{\text{Exp} P, P \in N\}.$$

Une base de Gröbner est en fait un système de générateurs. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, on pose $\text{ppcm}(\alpha, \beta) = (\max(\alpha_i, \beta_i))_i$. Soient $P_1, \dots, P_l \in A^r$. Posons $\text{Exp}(P_i) = (\alpha^{(i)}, k_i)$. On écrit $P_i = \lambda_i x^{\alpha^{(i)}} e_{k_i} + \dots$, avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Si pour un couple $i < j$, $k_i = k_j$, on définit le S -opérateur

$$S(P_i, P_j) = \lambda_j x^{\alpha^{(i,j)} - \alpha^{(i)}} P_i - \lambda_i x^{\alpha^{(i,j)} - \alpha^{(j)}} P_j$$

avec $\alpha^{(i,j)} = \text{ppcm}(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})$.

Proposition 1.1.1 (Critère de Buchberger). *$P_1, \dots, P_l$ est une base de Gröbner du module engendré si et seulement si les S -opérateurs sont divisibles par $P_1, \dots, P_l$.*

Donnons maintenant un moyen algorithmique de construire une base de Gröbner de N à partir d'un système de générateurs $P_1, \dots, P_l$.

Algorithme de Buchberger : On part de $P_1, \dots, P_l$. On divise les S -opérateurs éventuels par $P_1, \dots, P_l$. Si un reste non nul apparaît dans une division, on ajoute ce reste à la liste $P_1, \dots, P_l$. On recommence, le processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes.

Algorithme de Schreyer Soit $P_1, \dots, P_l$ une base de Gröbner du module engendré. On a des divisions $S(P_i, P_j) = \sum_k Q_k^{(i,j)} P_k$, donc des relations

$$\lambda_j x^{\alpha^{(i,j)} - \alpha^{(i)}} \epsilon_i - \lambda_i x^{\alpha^{(i,j)} - \alpha^{(j)}} \epsilon_j - \sum_k Q_k^{(i,j)} \epsilon_k$$

dans le sous-module de $\bigoplus A \epsilon_k$ des relations entre $P_1, \dots, P_l$.

Proposition 1.1.2. *Il existe un ordre monomial tel que ces relations forment une base de Gröbner du module des relations entre $P_1, \dots, P_l$.*

Cela permet de construire de proche en proche une résolution libre du module

$$\frac{A^r}{(P_1, \dots, P_l)},$$

c'est ce qu'on appellera l'algorithme de Schreyer.

On veut passer à l'anneau $\mathcal{D}$. Voir [7], section 2. L'ordre considéré n'est plus bon. Les coefficients étant des séries, on parle alors de *bases standard* à la place des bases de Gröbner. On prend un ordre adapté à la F -filtration. Par exemple, définissons un ordre convenable $<$ sur $\mathbb{N}^{2n}$. Fixons un bon ordre $<'$ sur $\mathbb{N}^{2n}$. Soit $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in \mathbb{N}^{2n}$. On pose

$$(\alpha, \beta) < (\alpha', \beta') \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} \sum \beta_i < \sum \beta'_i \\ \text{ou} \quad \sum \beta_i = \sum \beta'_i \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta) >' (\alpha', \beta'). \end{cases}$$

On a des divisions, à condition d'ajouter des hypothèses sur les quotients. Soit $P = \sum a_{\alpha,\beta,i} x^\alpha \partial^\beta e_i \in \mathcal{D}^r$. On note $\mathcal{N}(P) = \{(\alpha, \beta, i), a_{\alpha,\beta,i} \neq 0\}$ le diagramme de Newton de P , et $\text{Exp}(P) = \max_{<} \mathcal{N}(P)$. Soient $P, P_1, \dots, P_l \in \mathcal{D}^r$. Soit $\Delta = \bigcup (\text{Exp}(P_i) + \mathbb{N}^{2n+1})$ et pour $1 \leq i \leq l$,

$$\Delta_i = (\text{Exp}(P_i) + \mathbb{N}^{2n+1}) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j.$$

Théorème 1.1.1. *Il existe une unique division*

$$P = \sum Q_i P_i + R$$

telle que $R \in \mathcal{D}^r$, $\mathcal{N}(R) \cap \Delta = \emptyset$ et pour tout i , $Q_i \in \mathcal{D}$ et $\mathcal{N}(Q_i) + \text{Exp}(P_i) \subset \Delta_i$.

Définition 1.1.11. *Soit I un idéal de $\mathcal{D}$ engendré par $P_1, \dots, P_l$. On dit que $P_1, \dots, P_l$ est une base F -involutive de I si les symboles $\sigma^F(P_1), \dots, \sigma^F(P_l)$ engendrent $gr^F(I)$.*

Les algorithmes de Schreyer et de Buchberger restent valables. De plus, si $P_1, \dots, P_l \in \mathcal{D}$ est une base standard, alors c'est une base F -involutive.

Enfin, on s'intéresse à l'anneau $\mathcal{D}^{(h)}$. Voir ici [2], 3. et [12], 4.1. On considère des ordres monomiaux adaptés à la V -filtration.

Décrivons ces ordres pour les idéaux de $\mathcal{D}^{(h)}$, i.e. sur $\mathbb{N}^{2n+1}$. Le vecteur (α, β, k) représente le monôme $x^\alpha \partial^\beta h^k$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$, notons $L(\alpha, \beta) = \sum u_i \alpha_i + \sum v_i \beta_i$, et $|\beta| = \sum \beta_i$. Fixons un bon ordre $<'$ sur $\mathbb{N}^{2n}$. On définit :

$$(\alpha, \beta, k) < (\alpha', \beta', k') \quad \text{ssi}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\beta| + k < |\beta'| + k' \\ \text{ou } |\beta| + k = |\beta'| + k' \text{ et } L(\alpha, \beta) < L(\alpha', \beta') \\ \text{ou } |\beta| + k = |\beta'| + k', L(\alpha, \beta) = L(\alpha', \beta') \text{ et } |\beta| < |\beta'| \\ \text{ou } |\beta| + k = |\beta'| + k', L(\alpha, \beta) = L(\alpha', \beta'), |\beta| = |\beta'| \text{ et } (\alpha, \beta) >' (\alpha', \beta'). \end{array} \right.$$

On peut diviser (de façon unique) un élément de $(\mathcal{D}^{(h)})^r$ homogène par des éléments homogènes, et les algorithmes de Buchberger et de Schreyer restent valables.

Précisons que pour $P = \sum a_{\alpha,\beta,k,i} x^\alpha \partial^\beta h^k e_i \in (\mathcal{D}^{(h)})^r$, on a $\mathcal{N}(P) = \{(\alpha, \beta, k, i), a_{\alpha,\beta,k,i} \neq 0\}$, et $\text{Exp}(P) = \max_{<} \mathcal{N}(P)$. Pour $P_1, \dots, P_l \in (\mathcal{D}^{(h)})^r$ homogènes, $\Delta = \bigcup (\text{Exp}(P_i) + \mathbb{N}^{2n+1})$ et $\Delta_i = (\text{Exp}(P_i) + \mathbb{N}^{2n+1}) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j$.

Une base standard est une base V -involutive, et l'algorithme de Schreyer fournit une résolution libre graduée V -adaptée.

Notons aussi l'analogie formel de ces considérations. On peut remplacer $\mathcal{D}$ par $\hat{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{D}^{(h)}$ par $\hat{\mathcal{D}}^{(h)}$, i.e. on remplace les coefficients analytiques par des séries formelles. Les démonstrations dans ce cas sont beaucoup plus simples, car c'est l'analyticité des quotients et du reste dans une division qui est difficile à établir.

1.1.6 Complexes de Koszul

Donnons deux présentations du complexe de Koszul.

Par produit extérieur

Soit A un anneau commutatif noethérien. Soient $a_1, \dots, a_r$ des éléments de A . Soit $e_1, \dots, e_r$ la base canonique de A^r . On définit $a = \sum a_i e_i \in \bigwedge^1 A^n$. Le complexe de Koszul $K(A; a_1, \dots, a_r)$ est le suivant :

$$0 \rightarrow \bigwedge^0 A^r \xrightarrow{\wedge a} \bigwedge^1 A^r \xrightarrow{\wedge a} \dots \xrightarrow{\wedge a} \bigwedge^r A^r \rightarrow 0.$$

Ce complexe est une résolution du module $A/(a_i)$ si $a_1, \dots, a_r$ forment une suite régulière de A . (cf. [9], theorem 17.4.).

Cas classique (version duale)

Dans le cas non commutatif, l'algèbre extérieure n'est pas définie. On peut néanmoins former un complexe de Koszul $K'(A; a_1, \dots, a_r)$ à condition que les éléments $a_1, \dots, a_r$ commutent deux à deux. Supposons que A est une $\mathbb{C}$ -algèbre. Le complexe $K'(A; a_1, \dots, a_r)$ est le complexe de A -modules à gauche libres suivant :

$$0 \rightarrow A \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^r \mathbb{C}^r \xrightarrow{\delta_a} A \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^{r-1} \mathbb{C}^r \xrightarrow{\delta_a} \dots \xrightarrow{\delta_a} A \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^0 \mathbb{C}^r \rightarrow 0.$$

Soit $e_1, \dots, e_r$ la base canonique de $\mathbb{C}^r$. Soit $I = (I_1, \dots, I_l)$ un multi-indice de longueur l . On définit δ_a dans la base $(1 \otimes e_I)_I$ par

$$\delta_a(1 \otimes e_I) = \sum_k (-1)^{k-1} a_{I_k} \otimes e_{I \setminus I_k}.$$

Si A est commutatif noethérien, le complexe $K'(A; a_1, \dots, a_r)$ est autodual et est isomorphe au complexe $K(A; a_1, \dots, a_r)$ (cf. [9], Proposition 17.15.). C'est donc une résolution du module $A/(a_i)$ si $a_1, \dots, a_r$ est une suite régulière.

On s'intéresse au cas de $A = \text{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})$. On considère la filtration $F^{(0,1)}(A)$ et pour $P \in A$, on note $\sigma^{(0,1)}(P)$ le symbole de P dans $\text{gr}^{(0,1)}(A)$. Notons que ce dernier anneau est commutatif.

Lemme 1.1.4. *Soient $a_1, \dots, a_r$ des éléments bihomogènes de A , qui commutent deux à deux, tels que $\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_r)$ est une suite régulière de $gr^{(0,1)}(A)$. Alors le complexe $K'(A; a_1, \dots, a_r)$ est une résolution bigraduée F -filtrée du module $A/(a_i)$.*

Preuve On montre d'abord que $a_1, \dots, a_r$ est une base involutive du module qu'ils engendrent, par récurrence sur l'ordre en utilisant la régularité de la suite $\sigma^{(0,1)}(a_1), \dots, \sigma^{(0,1)}(a_r)$. On utilise ensuite le complexe

$$K'(gr^{(0,1)}(A); \sigma^{(0,1)}(a_1), \dots, \sigma^{(0,1)}(a_r))$$

pour montrer que le complexe $K'(A; a_1, \dots, a_r)$ est acyclique en degré négatif, on peut le faire par récurrence sur l'ordre ou utiliser directement [12], Proposition 2.6. (adaptée à l'anneau A).

1.2 Passage au commutatif et h -saturation

1.2.1 Passage au commutatif

Une résolution libre bifiltrée minimale de M est une suite exacte bifiltrée

$$\dots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

avec $\mathcal{L}_i = \mathcal{D}^{r_i}[\mathbf{n}^{(i)}][\mathbf{m}^{(i)}]$, qui induit une résolution libre minimale

$$\dots \rightarrow gr^V(\mathbf{R}(\mathcal{L}_1)) \rightarrow gr^V(\mathbf{R}(\mathcal{L}_0)) \rightarrow gr^V(\mathbf{R}(M)) \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

Cette dernière résolution est un complexe de modules sur l'anneau $gr^V(\mathcal{D}^{(h)})$. C'est un anneau noethérien non commutatif. Notre objectif est d'étudier les nombres de Betti et les décalages de la résolution minimale bifiltrée de M . On se propose, sous certaines conditions, de se ramener à une situation d'algèbre commutative. Nous entendons par là que nous définirons un module $bigr(M)$ sur l'anneau commutatif $bigr(\mathcal{D})$, possédant une résolution minimale dont les invariants sont ceux du module M de départ.

Reprenons la suite exacte (1.4). On souhaite déshomogénéiser.

Lemme 1.2.1. *On a un isomorphisme d'anneaux*

$$gr^V(\mathcal{D}) \simeq \frac{gr^V(\mathcal{D}^{(h)})}{(h-1)}.$$

Proposition 1.2.1. *On a un isomorphisme de $gr^V(\mathcal{D})$ -modules gradués :*

$$\psi : gr^V(M) \simeq gr^V(\mathcal{D}) \otimes_{gr^V(\mathcal{D}^{(h)})} gr^V(\mathbf{R}(M)).$$

On a

$$\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}) \otimes_{\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})} \mathrm{gr}^V(\mathbf{R}(M)) \simeq \frac{\mathrm{gr}^V(\mathbf{R}(M))}{(h-1)\mathrm{gr}^V(\mathbf{R}(M))} \simeq \oplus_k \frac{\mathrm{gr}_k^V(\mathbf{R}(M))}{(h-1)\mathrm{gr}_k^V(\mathbf{R}(M))}.$$

La dernière flèche est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels. Ainsi est définie la V -graduation.

Preuve Précisons le morphisme

$$\psi : \oplus \mathrm{gr}_k^V(M) \rightarrow \mathrm{gr}^V(\mathcal{D}) \otimes \oplus_{d,k} \frac{F_{d,k}(M)T^d}{F_{d,k-1}(M)T^d}.$$

Soit $\bar{m} \in \mathrm{gr}_k^V(M)$, $m \in F_{d,k}(M)$. On pose $\psi(\bar{m}) = 1 \otimes [mT^d]$ où $[mT^d]$ désigne la classe de mT^d dans $F_{d,k}(M)T^d / F_{d,k-1}(M)T^d$.

Montrons que ψ est bien définie. Supposons $m \in F_{d_1,k}(M) \cap F_{d_2,k}(M)$ avec $d_1 < d_2$. Alors

$$1 \otimes [mT^{d_1}] = h^{d_2-d_1} \otimes [mT^{d_1}] = 1 \otimes [mT^{d_1+d_2-d_1}] = 1 \otimes [mT^{d_2}]$$

donc $\psi(\bar{m})$ ne dépend pas de l'entier d . D'autre part, si $m \in V_{k-1}(M)$, alors il existe d tel que $m \in F_{d,k-1}(M)$ et $[mT^d] = 0$ donc $\psi(\bar{m}) = 0$.

Montrons que ψ est $\mathrm{gr}^V(\mathcal{D})$ -linéaire. Soit $\bar{m} \in \mathrm{gr}_k^V(M)$, $m \in F_{d,k}(M)$ et $\overline{g(x)\partial^\beta} \in \mathrm{gr}_k^V(\mathcal{D})$. On a

$$\psi(\overline{g(x)\partial^\beta} \cdot \bar{m}) = \psi(\overline{g(x)\partial^\beta m}) = 1 \otimes [g(x)\partial^\beta m T^{d+|\beta|}].$$

D'autre part

$$\overline{g(x)\partial^\beta} \psi(\bar{m}) = 1 \otimes \overline{g(x)\partial^\beta} [mT^d] = 1 \otimes [g(x)\partial^\beta m T^{d+|\beta|}].$$

On définit ensuite une application

$$\phi : \mathrm{gr}^V(\mathcal{D}) \times \mathrm{gr}^V(\mathbf{R}(M)) \rightarrow \mathrm{gr}^V(M)$$

comme suit : pour $P \in V_{k'}(\mathcal{D})$ et $m \in F_{d,k}(M)$, $\phi(\bar{P}, [mT^d]) = \overline{Pm} \in \mathrm{gr}_{k+k'}^V(M)$. Montrons que cette application passe au produit tensoriel. Soit $Q = g(x)\partial^\beta h^l \in V_{k''}(\mathcal{D}^{(h)})$, alors

$$\phi(\bar{P} \cdot \bar{Q}, [mT^d]) = \overline{Pg(x)\partial^\beta m} \in \mathrm{gr}_{k+k'+k''}^V(M)$$

et

$$\phi(\bar{P}, \bar{Q} \cdot [mT^d]) = \phi(\bar{P}, [g(x)\partial^\beta m T^{d+\beta+l}]) = \overline{Pg(x)\partial^\beta m} \in \mathrm{gr}_{k+k'+k''}^V(M).$$

On a donc une application

$$\phi : \text{gr}^V(\mathcal{D}) \otimes \text{gr}^V(\mathbf{R}(M)) \rightarrow \text{gr}^V(M).$$

Il est clair que ϕ est $\text{gr}^V(\mathcal{D})$ -linéaire et que ψ et ϕ sont inverses l'une de l'autre. $\square$

Le membre de droite de la Proposition 1.2.1 est la déshomogénéisation du module $\text{gr}^V(\mathbf{R}(M))$, notée $\rho(\text{gr}^V(\mathbf{R}(M)))$. Sur ce module, on peut définir une F -filtration comme suit : $\text{gr}^V(\mathbf{R}(M))$ est muni d'une graduation

$$(\text{gr}^V(\mathbf{R}(M)))_d = \oplus_k \frac{F_{d,k}(M)T^d}{F_{d,k-1}(M)T^d}$$

On définit alors

$$F_d(\rho(\text{gr}^V(\mathbf{R}(M)))) = 1 \otimes (\text{gr}^V(\mathbf{R}(M)))_d = 1 \otimes \oplus_k \frac{F_{d,k}(M)T^d}{F_{d,k-1}(M)T^d}.$$

L'image de cette filtration par l'isomorphisme ψ^{-1} définit une F -filtration sur $\text{gr}^V(M)$:

$$F_d(\text{gr}^V(M)) = \psi^{-1}(F_d(\rho(\text{gr}^V(\mathbf{R}(M)))) = \oplus_k \frac{F_{d,k}(M) + V_{k-1}(M)}{V_{k-1}(M)}.$$

Le terme de degré d du gradué associé est :

$$\text{gr}_d^F(\text{gr}^V(M)) = \oplus_k \frac{F_{d,k}(M) + V_{k-1}(M)}{F_{d-1,k}(M) + V_{k-1}(M)}.$$

Supposons maintenant que M vérifie :

$$\forall d, k, F_{d,k}(M) = F_d(M) \cap V_k(M). \quad (1.5)$$

Lemme 1.2.2. *Sous cette hypothèse, on a*

$$\text{gr}_d^F \text{gr}_k^V(M) \simeq \frac{F_{d,k}(M)}{F_{d,k-1}(M) + F_{d-1,k}(M)}.$$

Définition 1.2.1. *Un $\text{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})$ -module bigradué M est dit h -saturé si l'application $h : M \rightarrow M$ est injective.*

Lemme 1.2.3. *$\text{gr}^V(\mathbf{R}(M))$ est h -saturé $\Leftrightarrow \forall d, k, F_{d,k}(M) = F_d(M) \cap V_k(M)$.*

Ce lemme exprime la h -saturation du module $\text{gr}^V(\mathbf{R}(M))$ sous une forme particulièrement simple, en termes de la bifiltration de M . Il découle des deux lemmes suivants.

Lemme 1.2.4. *$\text{gr}^V(\mathbf{R}(M))$ est h -saturé $\Leftrightarrow \forall d, k, F_{d,k}(M) = F_{d+1,k}(M) \cap F_{d,k+1}(M)$.*

Preuve $\text{gr}^V(\mathbf{R}(M))$ est h -saturé $\Leftrightarrow$

pour tous d, k , l'application $h : \frac{F_{d,k}(M)T^d}{F_{d,k-1}(M)T^d} \rightarrow \frac{F_{d+1,k}(M)T^{d+1}}{F_{d+1,k-1}(M)T^{d+1}}$ est injective.

Cela équivaut à :

$$\begin{aligned} \forall d, k, F_{d,k}(M) \cap F_{d+1,k-1}(M) &\subset F_{d,k-1}(M) \\ \Leftrightarrow (\forall d, k, F_{d,k}(M) &= F_{d+1,k}(M) \cap F_{d,k+1}(M)) \end{aligned}$$

Lemme 1.2.5. $(\forall d, k, F_{d,k}(M) = F_{d+1,k}(M) \cap F_{d,k+1}(M)) \Leftrightarrow (\forall d, k, F_{d,k}(M) = F_d(M) \cap V_k(M))$

Preuve Supposons $(\forall d, k, F_{d,k}(M) = F_{d+1,k}(M) \cap F_{d,k+1}(M))$. Soit $x \in F_d(M) \cap V_k(M)$. On sait $\exists i \geq 0, x \in F_{d+i,k}(M) \cap F_{d,k+i}(M)$. Alors $x \in F_{d',k'}(M)$ si

$$\begin{cases} d' \geq d \\ k' \geq k \\ d' + k' = d + k + 2i - 1 \end{cases}$$

Montrons par récurrence descendante sur $j \geq 0$ que $x \in F_{d',k'}(M)$ si

$$\begin{cases} d' \geq d \\ k' \geq k \\ d' + k' = d + k + j \end{cases}$$

Le premier pas de la récurrence est donné par $j = 2i - 1$. Supposons la propriété vraie au rang j . Soit (d', k') tel que

$$\begin{cases} d' \geq d \\ k' \geq k \\ d' + k' = d + k + j - 1 \end{cases}$$

On a $x \in F_{d'+1,k'}(M) \cap F_{d',k'+1}(M) \subset F_{d',k'}$. Pour $j = 0$ on a donc $x \in F_{d,k}(M)$.

La réciproque est évidente. $\square$

On va alors énoncer un résultat analogue au théorème 3.4 de [12], ce qui fournira une définition des résolutions minimales bifiltrées via la bigraduation.

Auparavant, on a besoin d'un résultat analogue à la Proposition 3.3 de [12]. L'isomorphisme d'anneaux $\text{gr}^V(\mathcal{D}) \simeq \frac{\text{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})}{(h-1)}$ nous a permis de définir un foncteur $\rho = \text{gr}^V(\mathcal{D}) \otimes_{\text{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})} -$ dit de déshomogénéisation, de

la catégorie des $\text{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})$ -modules bigradués vers la catégorie des $\text{gr}^V(\mathcal{D})$ -modules gradués F -filtrés.

Réciproquement, on a un isomorphisme d'anneaux $\mathbf{R}(\text{gr}^V(\mathcal{D})) \simeq \text{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})$ qui fournit un foncteur d'homogénéisation noté encore $\mathbf{R}$, de la catégorie des $\text{gr}^V(\mathcal{D})$ -modules gradués F -filtrés vers la catégorie des $\text{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})$ -modules bigradués.

Proposition 1.2.2. *Les foncteurs ρ et $\mathbf{R}$ sont exacts et établissent une équivalence de catégorie entre la catégorie des $\text{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})$ -modules bigradués h -saturés de type fini et la catégorie des $\text{gr}^V(\mathcal{D})$ -modules gradués munis d'une bonne F -filtration.*

La démonstration est analogue à celle de la Proposition 3.3 de [12].

Notation : Pour un $\mathcal{D}$ -module bifiltré M , notons

$$\text{bigr}(M) = \oplus_{d,k} \frac{F_{d,k}(M)}{F_{d-1,k}(M) + F_{d,k-1}(M)}.$$

C'est un module bigradué sur l'anneau $\text{bigr}(\mathcal{D})$ commutatif.

Théorème 1.2.1. *Soit M un $\mathcal{D}$ -module muni d'une bonne bifiltration tel que $\forall d, k, F_{d,k}(M) = F_d(M) \cap V_k(M)$. Alors il existe une unique résolution bifiltrée libre*

$$\cdots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

qui induit une résolution bigraduée minimale libre

$$\cdots \rightarrow \text{bigr}(\mathcal{L}_1) \rightarrow \text{bigr}(\mathcal{L}_0) \rightarrow \text{bigr}(M) \rightarrow 0.$$

De plus cette résolution est la résolution minimale bifiltrée de M au sens de la Définition 1.1.6.

Preuve Partons de la résolution bifiltrée minimale de M :

$$\cdots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \tag{1.6}$$

Par définition, elle induit une résolution bigraduée libre minimale

$$\cdots \rightarrow \text{gr}^V(\mathbf{R}(\mathcal{L}_1)) \rightarrow \text{gr}^V(\mathbf{R}(\mathcal{L}_0)) \rightarrow \text{gr}^V(\mathbf{R}(M)) \rightarrow 0. \tag{1.7}$$

Déshomogénéisons la résolution (1.7), i.e. appliquons le foncteur ρ , pour obtenir un complexe

$$\cdots \rightarrow \mathcal{L}'_1 \rightarrow \mathcal{L}'_0 \rightarrow \text{gr}^V(M) \rightarrow 0 \tag{1.8}$$

où $\mathcal{L}'_i \simeq \text{gr}^V(\mathcal{L}_i)$.

Or M vérifie l'hypothèse (1.5) et chaque $\mathcal{L}_i$ également, alors les modules $\text{gr}^V(\mathbf{R}(\mathcal{L}_i))$ et $\text{gr}^V(\mathbf{R}(M))$ sont h -saturés d'après le Lemme 1.2.3, donc le complexe (1.8) est F -filtré par la Proposition 1.2.2. On peut le F -graduer pour obtenir une suite exacte bigraduée

$$\cdots \rightarrow \text{bigr}(\mathcal{L}_1) \rightarrow \text{bigr}(\mathcal{L}_0) \rightarrow \text{bigr}(M) \rightarrow 0 \quad (1.9)$$

en utilisant le Lemme 1.2.2.

Pour passer de (1.7) à (1.9), dans les matrices on fait $h = 0$, alors la résolution (1.9) est minimale. On a donc montré que la résolution bifiltrée minimale de M satisfait l'énoncé. De plus, le module bigradué $\text{bigr}(M)$ et le module bifiltré M ont les mêmes nombres de Betti.

Pour montrer l'unicité, on va montrer qu'une résolution satisfaisant l'énoncé est une résolution minimale bifiltrée. Soit donc

$$\cdots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (1.10)$$

une résolution bifiltrée qui induit une résolution bigraduée minimale

$$\cdots \rightarrow \text{bigr}(\mathcal{L}_1) \rightarrow \text{bigr}(\mathcal{L}_0) \rightarrow \text{bigr}(M) \rightarrow 0.$$

La résolution (1.10) a donc les nombres de Betti du module bigradué $\text{gr}^V(\mathbf{R}(M))$. D'autre part, en appliquant à (1.10) le foncteur de Rees puis en graduant par rapport à la V -filtration, on obtient une suite exacte bigraduée

$$\cdots \rightarrow \text{gr}^V(\mathbf{R}(\mathcal{L}_1)) \rightarrow \text{gr}^V(\mathbf{R}(\mathcal{L}_0)) \rightarrow \text{gr}^V(\mathbf{R}(M)) \rightarrow 0.$$

Cette suite exacte est donc une résolution minimale bigraduée. $\square$

Corollaire 1.2.1. *Sous les hypothèse du théorème, les nombres de Betti et les décalages du module bifiltré M sont les nombres de Betti et les décalages du module bigradué $\text{bigr}(M)$.*

Donnons un énoncé sur la remontée des suites exactes bigraduées.

Proposition 1.2.3. *Soient M_1, M_2, M_3 des $\mathcal{D}$ -modules munis de bonnes bifiltrations tels que $\forall i, d, k, F_{d,k}(M_i) = F_d(M_i) \cap V_k(M_i)$. Soit un complexe bifiltré*

$$M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3.$$

Alors

1. *La suite $\text{bigr}M_1 \rightarrow \text{bigr}M_2 \rightarrow \text{bigr}M_3$ est un complexe.*
2. *Si ce dernier est exact, alors le complexe $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3$ est bifiltré exact.*

Preuve $\text{bigr}M_1 \rightarrow \text{bigr}M_2 \rightarrow \text{bigr}M_3$ est un complexe : suivre les étapes de la démonstration du Théorème 1.2.1 : homogénéisation, V -graduation, déhomogénéisation, F -graduation.

Supposons le complexe $\text{bigr}M_1 \rightarrow \text{bigr}M_2 \rightarrow \text{bigr}M_3$ exact. Alors le complexe

$$\text{gr}^V M_1 \rightarrow \text{gr}^V M_2 \rightarrow \text{gr}^V M_3$$

est exact (remontée des suites exactes F -filtrées) et V -gradué. Le complexe

$$\text{gr}^V \mathbf{R}M_1 \rightarrow \text{gr}^V \mathbf{R}M_2 \rightarrow \text{gr}^V \mathbf{R}M_3$$

est exact (homogénéisation) bigradué. Le complexe

$$\mathbf{R}M_1 \rightarrow \mathbf{R}M_2 \rightarrow \mathbf{R}M_3$$

est exact gradué V -filtré d'après [12], Proposition 2.5. Finalement par déhomogénéisation, le complexe

$$M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3$$

est exact bifiltré. $\square$

1.2.2 h -saturation et bases standard

Soit W l'anneau $\text{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})$. Soit M un W -module bigradué de type fini, admettant une présentation bigraduée

$$M \simeq \frac{W^r}{N}.$$

On va caractériser la h -saturation de M au moyen des bases standard, pour un ordre adéquat.

Définissons un ordre monomial $<'$ sur $\mathbb{N}^{2n+1}$. Fixons un bon ordre $<''$ sur $\mathbb{N}^{2n}$. Le vecteur (α, β, k) représente le monôme $x^\alpha \partial^\beta h^k \in W$. On pose

$$(\alpha, \beta, k) <' (\alpha', \beta', k') \quad \text{ssi}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\beta| + k < |\beta'| + k' \\ \text{ou } |\beta| + k = |\beta'| + k' \quad \text{et } |\beta| < |\beta'| \\ \text{ou } |\beta| + k = |\beta'| + k', |\beta| = |\beta'| \text{ et } (\alpha, \beta) >'' (\alpha', \beta'). \end{array} \right.$$

Suivant les notations de la section 1.1.6, il s'agit d'un ordre adapté à la forme linéaire $L(\alpha, \beta) = |\beta|$. Pour les sous-modules de W^r , on définit un ordre $<$ sur $\mathbb{N}^{2n+1} \times \mathbb{N}^r$ par

$$(\alpha, \beta, k, i) < (\alpha', \beta', k', i') \quad \text{ssi} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha, \beta, k) <' (\alpha', \beta', k') \\ \text{ou } (\alpha, \beta, k) = (\alpha', \beta', k') \quad \text{et } i < i'. \end{array} \right.$$

Avec un tel ordre, on peut diviser un élément bihomogène par des éléments bihomogènes.

Notons que si $(\alpha, \beta, k, i) \geq (\alpha', \beta', k', i')$ et $|\beta| + k = |\beta'| + k'$, alors $k \leq k'$.

Définition 1.2.2. Pour $P \in W^r$, on note $\text{in}(P)$ le monôme dont l'exposant est $\text{Exp}(P)$.

Définition 1.2.3. Une base standard $P_1, \dots, P_s$ de N est dite minimale si

$$\forall i, \text{Exp} P_i \notin \bigcup_{j \neq i} (\text{Exp} P_j + \mathbb{N}^{2n+1}).$$

Proposition 1.2.4. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. W^r/N est h -saturé.
2. Il existe une base standard $P_1, \dots, P_s$ bihomogène de N telle que pour tout i , h ne divise pas P_i .
3. Pour toute base standard minimale $P_1, \dots, P_s$ bihomogène de N , pour tout i , h ne divise pas P_i .
4. Pour toute base standard minimale $P_1, \dots, P_s$ bihomogène de N , pour tout i , h ne divise pas $\text{in} P_i$.

Preuve Montrons $1) \Rightarrow 2)$. Soit $P_1, \dots, P_s$ une base standard. Supposons h divise P_i . Par h -saturation, $\frac{P_i}{h} \in I$. Or $\text{in}(\frac{P_i}{h}) = \frac{\text{in} P_i}{h}$ donc

$$\text{Exp} \frac{P_i}{h} \in \bigcup_{j \neq i} (\text{Exp} P_j + \mathbb{N}^{2n+1}),$$

d'où

$$\text{Exp} P_i \in \bigcup_{j \neq i} (\text{Exp} P_j + \mathbb{N}^{2n+1}).$$

On peut alors retirer P_i de la base standard. On recommence avec les éléments restants. Ce processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes.

Montrons $2) \Rightarrow 1)$. Soit $P \in W^r$ bihomogène tel que $hP \in N$. Montrons que $P \in N$. Par division, $hP = \sum Q_i P_i$ avec Q_i bihomogènes, et pour tout i , $\deg(Q_i P_i) = \deg(hP)$, $\text{ord}^{(0,1)}(Q_i P_i) \leq \text{ord}^{(0,1)}(hP)$.

Supposons : il existe i tel que h ne divise pas Q_i . Alors $\text{ord}^{(0,1)} Q_i = \deg Q_i$. Par hypothèse, h ne divise pas P_i donc $\text{ord}^{(0,1)} P_i = \deg P_i$. Alors

$$\text{ord}^{(0,1)}(Q_i P_i) = \text{ord}^{(0,1)}(Q_i) + \text{ord}^{(0,1)}(P_i) = \deg Q_i + \deg P_i = \deg(hP).$$

Or

$$\text{ord}^{(0,1)}(Q_i P_i) \leq \text{ord}^{(0,1)}(hP) < \deg(hP),$$

d'où une contradiction. Donc pour tout i , h divise Q_i . Alors $P = \sum \frac{Q_i}{h} P_i \in I$.

Montrons $2) \Leftrightarrow 3) \Leftrightarrow 4)$. On remarque que par définition de l'ordre $<$, pour $P \in W^r$, on a : h divise $P \Leftrightarrow h$ divise $\text{in}P$. Considérons l'escalier de N :

$$E = \bigcup_i (\text{Exp}P_i + \mathbb{N}^{2n+1})$$

obtenu à partir de n'importe quelle base standard bihomogène $P_1, \dots, P_s$. Les sommets de l'escalier E sont bien définis, notons-les

$$(\alpha_1, \beta_1, k_1), \dots, (\alpha_l, \beta_l, k_l),$$

où le triplet (α, β, k) correspond au monôme $x^\alpha \partial_x^\beta h^k$. Il est alors clair que les assertions 2), 3) et 4) sont équivalentes à la condition suivante :

$$k_1 = \dots = k_l = 0. \square$$

On utilisera cette caractérisation de la h -saturation à la section 3.4.2.

1.3 Résolutions minimales génériques

Cette section est motivée par les déformations à μ -constant d'une hypersurface complexe à singularité isolée. On introduit ici les résolutions génériques en toute généralité pour un $\mathcal{D}$ -module. Cela s'appliquera naturellement aux $\mathcal{D}$ -modules géométriques au chapitre 2.

1.3.1 Invariants bifiltrés et structure formelle

Pour définir les résolutions génériques, nous aurons besoin de remplacer les coefficients analytiques par des séries formelles. Nous montrons ici que ceci n'affecte en rien les invariants tirés des résolutions bifiltrées.

Soit K un corps de caractéristique nulle. L'anneau $K[[x]]$ des séries formelles en $x_1, \dots, x_n$ est noethérien local, d'idéal maximal engendré par $x_1, \dots, x_n$.

Soit $\hat{\mathcal{D}} = K[[x]]\langle \partial_x \rangle$ l'anneau des opérateurs différentiels formels à coefficients dans $K[[x]]$. La théorie des résolutions minimales bifiltrées est valable pour $\hat{\mathcal{D}}$ (existence et unicité des résolutions).

Soit maintenant M un $\mathcal{D}$ -module muni d'une bonne bifiltration. On définit un $\hat{\mathcal{D}}$ -module $\hat{M}$, le formalisé de M par

$$\hat{M} = \mathbb{C}[[x]] \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} M$$

muni de la bifiltration $F_{d,k}(\hat{M}) = \mathbb{C}[[x]] \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} F_{d,k}(M)$. C'est une bonne bifiltration car si

$$F_{d,k}(M) = \sum_i F_{d-n_i, k-m_i}(\mathcal{D}) f_i$$

alors

$$F_{d,k}(\hat{M}) = \sum_i F_{d-n_i, k-m_i}(\hat{\mathcal{D}})f_i.$$

Proposition 1.3.1. *Soit $\mathcal{L}_\bullet \rightarrow M \rightarrow 0$ une résolution minimale bifiltrée de M . Alors $\mathbb{C}[[x]] \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} \mathcal{L}_\bullet \rightarrow \hat{M} \rightarrow 0$ est une résolution minimale bifiltrée de $\hat{M}$. En particulier, M et $\hat{M}$ ont les mêmes invariants bifiltrés.*

Preuve Par définition, on a pour tout (d, k) une suite exacte

$$F_{d,k}(\mathcal{L}_\bullet) \rightarrow F_{d,k}(M) \rightarrow 0.$$

Par platitude de $\mathbb{C}[[x]]$ sur $\mathbb{C}\{x\}$, on a une suite exacte

$$\mathbb{C}[[x]] \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} F_{d,k}(\mathcal{L}_\bullet) \rightarrow F_{d,k}(\hat{M}) \rightarrow 0,$$

donc

$$\mathbb{C}[[x]] \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} \mathcal{L}_\bullet \rightarrow \hat{M} \rightarrow 0$$

est une résolution bifiltrée de $\hat{M}$. Par suite,

$$\mathrm{gr}^V \mathbf{R}(\mathbb{C}[[x]] \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} \mathcal{L}_\bullet) \rightarrow \mathrm{gr}^V \mathbf{R}(\hat{M}) \rightarrow 0$$

est une résolution de $\mathrm{gr}^V \mathbf{R}(\hat{M})$. Elle est minimale car ses matrices sont les mêmes que celles de la résolution $\mathrm{gr}^V \mathbf{R}(\mathcal{L}_\bullet) \rightarrow \mathrm{gr}^V \mathbf{R}(M) \rightarrow 0$.

1.3.2 Cas commutatif

Soit K le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_e]$. L'anneau des séries formelles $K[[x]] = K[[x_1, \dots, x_n]]$ est local noethérien d'idéal maximal $(x_1, \dots, x_n)$.

Définition 1.3.1. *Soit $g = \frac{p}{q} \in K$, écrit de manière irréductible. On appelle pôles de g l'hypersurface $V(q) \in \mathbb{C}^e$. Soit $g = \sum g_i(\lambda)x^i \in K[[x]]$. On appelle pôles de g l'ensemble des pôles des g_i . On note cet ensemble $\mathrm{pôles}(g)$.*

A priori, pour $g \in K[[x]]$, l'ensemble $\mathrm{pôles}(g)$ est algébriquement gros, c'est une réunion dénombrable d'hypersurfaces, ce qui n'est pas nécessairement contenu dans une hypersurface. Fixons un ordre monomial sur $\mathbb{N}^n$.

Lemme 1.3.1. *Soit*

$$S = \{g \in K[[x]], \exists V \text{ hypersurface stricte de } \mathbb{C}^e \text{ contenant les pôles de } g\}.$$

S est un sous-anneau local de $K[[x]]$, avec idéal maximal $(x_1, \dots, x_n)$. De plus les divisions existent dans S : soient $P, P_1, \dots, P_l \in S$, définissons une partition de $\mathbb{N}^n$ comme suit : $\Delta_i = (\exp(P_i) + \mathbb{N}^n) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j$ et $\bar{\Delta} = \mathbb{N}^n \setminus \bigcup \Delta_i$. Alors $\exists ! (Q_1, \dots, Q_l, R) \in S^{l+1}$ tels que

- $P = \sum Q_i P_i + R$
- $\mathcal{N}(Q_i) + \exp(P_i) \subset \Delta_i$
- $\mathcal{N}(R) \subset \overline{\Delta}$.

Preuve Il est clair que S est un sous-anneau de $K[[x]]$. Montrons que S est local. Il s'agit de voir que si $g_0 \in K \setminus 0$, $g_1 \in \sum K[[x]]x_i$, alors $g_0 + g_1$ est inversible dans S . Or dans $K[[x]]$, on a

$$h = \frac{1}{g_0 + g_1} = \frac{1}{g_0} \left(1 - \frac{g_1}{g_0} + \left(\frac{g_1}{g_0} \right)^2 + \dots \right).$$

Ceci est un élément de S car pôles(h) $\subset$ pôles(g) $\cup$ $\{g_0(\lambda) = 0\}$.

Passons aux divisions. On sait qu'elles existent et sont uniques dans $K[[x]]$, il faut montrer que les quotients et le reste sont dans S . Notons $\text{in}(P_i) = c(P_i)x^{\exp(P_i)}$, avec $c(P_i) \in K$.

Rappelons l'algorithme de division : si P possède un monôme $P_\alpha x^\alpha$ tel qu'il existe i tel que $\alpha \in \exp(P_i) + \mathbb{N}^n$, alors on pose

$$P' = P - \frac{P_\alpha}{c(P_i)} x^{\alpha - \exp(P_i)} P_i$$

puis on repart de P' . On constate :

$$\text{pôles}(Q_k) \subset \left(\bigcup_i \{c(P_i)(\lambda) = 0\} \right) \cup \text{pôles}(P) \cup \left(\bigcup_i \text{pôles}(P_i) \right).$$

De même pour les pôles de R . $\square$

Notons qu'on a de même des divisions dans S^r .

Proposition 1.3.2. *Soit $N \subset K[[x]]^r$ un sous-module engendré par des éléments de S^r . Alors il existe $P_1, \dots, P_s \in S^r$ base standard de N . De plus, il existe une hypersurface stricte V telle que si $\lambda_0 \notin V$, alors les éléments $P_1(\lambda_0), \dots, P_s(\lambda_0)$ forment une base standard du sous-module de $\mathbb{C}[[x]]^r$ qu'ils engendrent.*

Preuve On construit $P_1, \dots, P_s$ par l'algorithme de Buchberger. Comme ceci se fait en un nombre fini d'étapes, ces éléments vivent dans S^r . Ensuite si $c(P_i)(\lambda_0) \neq 0$ et $c(P_j)(\lambda_0) \neq 0$, alors $S(P_i, P_j)(\lambda_0) = S(P_i(\lambda_0), P_j(\lambda_0))$ et une division $S(P_i, P_j) = \sum Q_k P_k$ est évaluable en λ_0 si

$$\lambda_0 \notin \text{pôles}(S_{i,j}) \cup \left(\bigcup_k \text{pôles}(Q_k) \right) \cup \left(\bigcup_k \text{pôles}(P_k) \right).$$

Donc par le critère de Buchberger, $P_1(\lambda_0), \dots, P_s(\lambda_0)$ est une base standard dans $\mathbb{C}[[x]]^r$.

Etudions maintenant la spécialisation des résolutions minimales libres.

Définition 1.3.2. *Une suite exacte libre*

$$0 \rightarrow K[[x]]^{r_t} \xrightarrow{M_t} \dots \xrightarrow{M_2} K[[x]]^{r_1} \xrightarrow{M_1} K[[x]]^{r_0}$$

est dite *spécialisable* en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ si λ_0 n'est pas un pôle d'un des coefficients des matrices M_i et si le complexe

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[[x]]^{r_t} \xrightarrow{M_t(\lambda_0)} \dots \xrightarrow{M_2(\lambda_0)} \mathbb{C}[[x]]^{r_1} \xrightarrow{M_1(\lambda_0)} \mathbb{C}[[x]]^{r_0}$$

est exact.

Proposition 1.3.3. *Soit $N \subset K[[x]]^r$ un sous-module engendré par des éléments de S^r . Alors il existe une résolution minimale libre de $K[[x]]^r/N$ spécialisable en dehors d'une hypersurface stricte. En particulier les nombres de Betti du module $\text{coker}(M_1(\lambda_0))$ sont génériquement constants.*

Preuve On construit une résolution par l'algorithme de Schreyer : à chaque étape on a une base standard des relations. Ces bases standard se spécialisent en dehors d'une hypersurface, en vertu de la proposition précédente. On minimalise ensuite la résolution obtenue, on effectue parallèlement les mêmes opérations sur la résolution spécialisée, ce qui est licite pour λ_0 générique. Lorsque la résolution sur $K[[x]]$ est minimale, la résolution spécialisée l'est aussi.

Stratification Soit Q un idéal premier de $\mathbb{C}[\lambda]$. On peut former le corps

$$K = \text{Frac} \left(\frac{\mathbb{C}[\lambda]}{Q} \right).$$

On peut étudier la spécialisation des résolutions de $K[[x]]$ -modules, comme ci-dessus. La spécialisation a un sens pour $\lambda_0 \in V(Q)$. Soit

$$S_Q = \{g \in K[[x]], \exists V \text{ hypersurface stricte de } V(Q) \text{ contenant les pôles de } g\}.$$

On obtient le résultat suivant.

Proposition 1.3.4. *Soit $N \subset K[[x]]^r$ un sous-module engendré par des éléments de S_Q^r . Alors il existe une résolution minimale libre de $K[[x]]^r/N$ spécialisable en dehors d'une hypersurface stricte de $V(Q)$.*

Proposition 1.3.5 (Stratification). *Soit V une sous-variété affine irréductible de $\mathbb{C}^e$. Soit M un $\frac{\mathbb{C}[\lambda]}{Q}[[x]]$ -module de type fini, admettant une présentation*

$$\frac{(\frac{\mathbb{C}[\lambda]}{Q}[[x]])^r}{(P_1, \dots, P_l)}$$

avec $P_i \in (S_Q)^r$. On note, pour $\lambda_0 \in V$, M_{λ_0} le $\mathbb{C}[[x]]$ -module

$$\frac{(\mathbb{C}[[x]])^r}{(P_1, \dots, P_l)}.$$

Alors il existe une stratification de V par des localement fermés telle que sur chaque strate, les nombres de Betti de M_{λ_0} sont constants.

Preuve On sait que les nombres de Betti sont constants en dehors d'une hypersurface. On décompose cette hypersurface en un nombre fini de variétés irréductibles. On recommence sur chaque composante, ainsi que sur les intersections de composantes.

1.3.3 Cas des $\mathcal{D}$ -modules

Les résultats précédents s'étendent aux modules sur $\mathcal{D}^{(h)}$. Les ordres monomiaux seront ceux adaptés à la V -filtration.

K est défini comme dans le paragraphe sur la stratification. Soit $\hat{\mathcal{D}}^{(h)}(K) = K[[x]]\langle \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, h \rangle$. On démontre de la même manière que ci-dessus la proposition suivante.

Proposition 1.3.6. *Soit $N \subset (\hat{\mathcal{D}}^{(h)}(K))^r$ un sous-module engendré par des éléments de $(S_Q\langle \partial_x, h \rangle)^r$. Alors il existe une résolution minimale V -adaptée libre de $(\hat{\mathcal{D}}^{(h)}(K))^r/N$ spécialisable en dehors d'une hypersurface stricte de $V(Q)$.*

On étend enfin ces résultats aux $\mathcal{D}$ -modules bifiltrés. Soit l'anneau

$$\mathcal{D}[\lambda] = \mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[\lambda]}{Q}.$$

On a $\mathcal{D}[\lambda] \subset \hat{\mathcal{D}}(\frac{\mathbb{C}[\lambda]}{Q}) \subset \hat{\mathcal{D}}(K)$. Soit M un $\mathcal{D}[\lambda]$ -module de type fini, admettant une présentation

$$M = \frac{(\mathcal{D}[\lambda])^r}{(P_1, \dots, P_l)}$$

avec $P_i \in \mathcal{D}[\lambda]^r$. On définit un $\hat{\mathcal{D}}(K)$ -module $\hat{M} = \hat{\mathcal{D}}(K) \otimes_{\mathcal{D}[\lambda]} M$, muni de la bifiltration quotient par $P_1, \dots, P_l$.

Pour $\lambda_0 \in V$, on définit le $\mathcal{D}$ -module bifiltré

$$M_{\lambda_0} = \frac{\mathcal{D}^r}{(P_1(\lambda_0), \dots, P_l(\lambda_0))}$$

muni de la bifiltration quotient.

Théorème 1.3.1. *Il existe une résolution bifiltrée minimale libre de $\hat{M}$ sur $\hat{\mathcal{D}}(K)$ qui se spécialise pour λ_0 générique en une résolution bifiltrée minimale libre de M_{λ_0} sur $\mathcal{D}$.*

Preuve On commence par homogénéiser $\hat{M}$ et M_{λ_0} parallèlement, en prenant des bases standard F -adaptées. Le processus coïncide génériquement, on obtient des présentations V -adaptées de $\mathbf{R}(\hat{M})$ sur $\hat{\mathcal{D}}^{(h)}(K)$ et de $\mathbf{R}(M_{\lambda_0})$ sur $\mathcal{D}^{(h)} \subset \hat{\mathcal{D}}^{(h)}$, la seconde étant la spécialisée de la première génériquement.

On applique ensuite la Proposition 1.3.6 à $\mathbf{R}(\hat{M})$. On en déduit une résolution minimale V -adaptée de $\mathbf{R}(\hat{M})$ spécialisable génériquement en une résolution minimale V -adaptée de $\mathbf{R}(M_{\lambda_0})$ sur $\mathcal{D}^{(h)}$, en effet les coefficients restent analytiques par unicité des divisions.

On déshomogénéise, et on conclut en remarquant que la déshomogénéisation commute à la spécialisation. $\square$

On en déduit comme dans le cas commutatif l'existence d'une stratification.

Théorème 1.3.2. *Il existe une stratification de V par des espaces constructibles telle que sur chaque strate, les invariants bifiltrés de M_{λ_0} sont constants.*

Chapitre 2

Résolutions de $\mathcal{D}$ -modules géométriques

2.1 Invariants liés à $\mathcal{D}_{x,t_1,\dots,t_p} f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$

Soit $f = (f_1, \dots, f_p) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ un germe d'application holomorphe avec pour tout $i, f_i \neq 0$. Notons $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x\} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, considérons l'espace

$$\mathcal{O} \left[\frac{1}{f_1 \dots f_p}, s_1, \dots, s_p \right]$$

que nous noterons

$$\mathcal{O} \left[\frac{1}{f_1 \dots f_p}, s_1, \dots, s_p \right] f^s$$

(ou de manière abrégée, $\mathcal{O}[\frac{1}{f}, s] f^s$) où f^s est un symbole, représentant $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$.

Soit $\mathcal{D}_{x,t}$ l'anneau des opérateurs différentiels sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$, à coefficients dans $\mathbb{C}\{x, t\}$, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$, $t = (t_1, \dots, t_p)$. On munit $\mathcal{O}[\frac{1}{f}, s] f^s$ d'une structure de $\mathcal{D}_{x,t}$ -module comme suit : l'action de $\mathcal{O}$ est triviale ; soit $g(x, s) \in \mathcal{O}[\frac{1}{f}, s]$, on pose

$$\partial_{x_i} \cdot g(x, s) f^s = \frac{\partial g}{\partial x_i} f^s + \sum_j s_j g(x, s) \frac{\partial f_j}{\partial x_i} f_j^{-1} f^s,$$

$$t_i \cdot g(x, s) f^s = g(x, s_1, \dots, s_i + 1, \dots, s_p) f_i f^s,$$

cette dernière action est bijective, et $\partial_{t_i} = -s_i t_i^{-1}$ agissant sur $\mathcal{O}[\frac{1}{f}, s] f^s$.

On note $\mathcal{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels sur $\mathbb{C}^n$ à coefficients dans $\mathbb{C}\{x\}$. Pour $p = 1$, l'espace $\mathcal{O}[\frac{1}{f}, s] f^s$ est aussi muni d'une structure de $\mathcal{D}[s]$ -module prolongeant celle de $\mathcal{D}$ -module, par l'action triviale de s .

On s'intéressera à partir d'ici au module

$$N_f = \mathcal{D}_{x,t} f^s = \mathcal{D}_{x,t} f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p},$$

le sous $\mathcal{D}_{x,t}$ -module module de $\mathcal{O}[\frac{1}{f}, s] f^s$ engendré par f^s , et pour $p = 1$, au module $\mathcal{D}[s] f^s$, le sous $\mathcal{D}[s]$ -module de $\mathcal{O}[\frac{1}{f}, s] f^s$ engendré par f^s .

On considère la filtration donnée par le vecteur de poids

$$(0, \dots, 0; -1, \dots, -1; 0, \dots, 0; 1, \dots, 1)$$

correspondant aux variables $(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_p; \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}; \partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_p})$, appelée V -filtration le long de $t_1 = \dots = t_p = 0$, et la bonne bifiltration de N_f suivante : $F_{d,k}(N_f) = F_{d,k}(\mathcal{D}_{x,t}) \cdot f^s$.

Les invariants bifiltrés de N_f et leur lien avec la singularité définie par $f_1, \dots, f_p$ constitue l'objet de notre étude.

Notation : On notera en particulier $(\beta_i(f))_i$ les nombres de betti du module bifiltré N_f .

Donnons une autre description de ce module N_f . En théorie des $\mathcal{D}$ -modules, on a une notion d'image directe notée par le symbole $+$ (cf. [17]). Soit $X \subset \mathbb{C}^n$ un voisinage ouvert de 0 sur lequel est définie f . Soit le plongement par le graphe

$$i_f : X \rightarrow X \times \mathbb{C}^p$$

défini par $i_f(x) = (x, f_1(x), \dots, f_p(x))$. Pour un $\mathcal{D}_X$ -module M , on a

$$i_{f+}(M) \simeq M \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_p}]$$

avec la structure de $\mathcal{D}_{x,t}$ -module donnée par

$$\xi.(m \otimes \partial_t^\nu) = \xi(m) \otimes \partial_t^\nu - \sum_i \xi(f_i) m \otimes \partial_t^{\nu+e_i}$$

pour ξ un champ de vecteurs sur X ,

$$t_i.(m \otimes \partial_t^\nu) = f_i m \otimes \partial_t^\nu - \nu_i m \otimes \partial_t^{\nu-e_i}$$

et

$$\partial_{t_i}.(m \otimes \partial_t^\nu) = m \otimes \partial_t^{\nu+e_i}.$$

Dans le cas de $M = \mathcal{O}_X$, $i_{f+}(\mathcal{O}_X)_0$ est engendré par $1 \otimes 1$ sur $\mathcal{D}_{x,t}$, on prend la bifiltration associée soit $F_{d,k}(i_{f+}(\mathcal{O}_X)_0) = F_{d,k}(\mathcal{D}_{x,t}).(1 \otimes 1)$. On va voir qu'on a un isomorphisme bifiltré

$$N_f \simeq i_{f+}(\mathcal{O})_0$$

qui envoie f^s sur $1 \otimes 1$. On utilisera dans la suite cet isomorphisme, de plus cela nous fournit une définition de N_f même lorsqu'un des f_i est la fonction nulle.

2.1.1 Premières propriétés des nombres de Betti

Lemme 2.1.1. $\text{ann}_{\mathcal{D}_{x,t}}(f^s) = \text{ann}_{\mathcal{D}_{x,t}}(1 \otimes 1)$ est engendré par les éléments

$$(t_j - f_j)_j, (\partial_{x_i} + \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \partial_{t_j})_i$$

et ces éléments forment une base F -involutive.

Preuve On vérifie que les dits éléments annulent $f^s \in \mathcal{D}_{x,t} f^s$ et $1 \otimes 1 \in (i_f)_+(\mathcal{O})$. On utilise ensuite un changement de variable présent dans [16]

$$\phi : (\mathbb{C}^{n+p}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+p}, 0)$$

défini par $\phi(x_i) = x_i$ et $\phi(t_j) = f_j - t_j$. Ce changement de variable s'étend en un automorphisme $\phi_\star$ de l'anneau $\mathcal{D}_{x,t}$, qui est F -filtré (mais pas V -filtré). Soit I l'idéal engendré par les éléments cités dans l'énoncé. L'idéal $\phi_\star(I)$ admet pour générateurs $(t_j)_j, (\partial_{x_i})_i$, ils forment une base F -involutive d'après le Lemme 1.1.4. On montre aisément que cet idéal est maximal. $\square$

Corollaire 2.1.1. 1.

$$\mathcal{D}_{x,t} f^s \simeq i_{f+}(\mathcal{O}_X)_0 \simeq \frac{\mathcal{D}_{x,t}}{I}$$

2.

$$\mathbf{R}(N_f) \simeq \frac{\mathcal{D}_{x,t}^{(h)}}{((t_j - f_j)_j, (\partial_{x_i} + \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \partial_{t_j})_i)}$$

3. La résolution minimale graduée du $\mathcal{D}_{x,t}^{(h)}$ -module $\mathbf{R}(N_f)$ admet pour nombres de Betti $\binom{n+p}{i}$, pour $i = 0, \dots, n+p$.

Preuve 1) et 2) découlent du Lemme 2.1.1. Pour 3), on reprend l'isomorphisme F -filtré $\phi_\star$ de la démonstration du Lemme 2.1.1, on est alors ramené à calculer la résolution minimale graduée du module

$$\frac{\mathcal{D}_{x,t}^{(h)}}{((t_i), (\partial_{x_i}))}.$$

C'est le complexe de Koszul $K(\mathcal{D}_{x,t}^{(h)}; (t_i), (\partial_{x_i}))$ (cf. Lemme 1.1.4). $\square$

Proposition 2.1.1. $\forall i$, on a $\beta_i(f) \geq \binom{n+p}{i}$.

Preuve Une résolution minimale bifiltrée

$$\cdots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow N_f \rightarrow 0$$

induit une résolution graduée

$$\cdots \rightarrow \mathbf{R}(\mathcal{L}_1) \rightarrow \mathbf{R}(\mathcal{L}_0) \rightarrow \mathbf{R}(N_f) \rightarrow 0$$

éventuellement non minimale. On peut la minimaliser, d'où le résultat d'après le corollaire 2.1.1, 3). $\square$

Notons que les nombres de Betti $\binom{n+p}{i}$ sont atteints, pour $(f_1, \dots, f_p) = (x_1, \dots, x_p)$. On peut le vérifier par un calcul de bases standard, mais nous le démontrerons comme corollaire d'énoncés plus généraux.

2.1.2 Définition d'invariants analytiques

Les résultats suivants sont inspirés de [4].

Soit $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}$ définies sur X ouvert. On veut, dans un premier temps, définir des invariants de l'idéal de $\mathcal{O}$ engendré par $f_1, \dots, f_p$. Supposons $g_1, \dots, g_{p'} \in \sum \mathcal{O}f_i$. Soit $V \in \mathbb{Z}^l$. Pour $\beta \in \mathbb{N}$, notons V^β la concaténation β -fois du vecteur V , donc $V^\beta \in \mathbb{Z}^{l\beta}$. Notons $\mathbf{1} \in \mathbb{Z}^\beta$ le vecteur $(1, \dots, 1)$.

Proposition 2.1.2.

$$\forall i, \beta_i(f, g) = \sum_{k=0}^i \binom{p'}{k} \beta_{i-k}(f)$$

Si les décalages au cran i pour N_f sont $[\mathbf{n}^{(i)}][\mathbf{m}^{(i)}]$, alors les décalages au cran i pour $N_{(f,g)}$ sont

$$[\mathbf{n}^{(i)}, (\mathbf{n}^{(i-1)})^{p'}, (\mathbf{n}^{(i-2)})^{\binom{p'}{2}}, \dots, (\mathbf{n}^{(0)})^{\binom{p'}{i}}]$$

$$[\mathbf{m}^{(i)}, (\mathbf{m}^{(i-1)} - \mathbf{1})^{p'}, (\mathbf{m}^{(i-2)} - 2.\mathbf{1})^{\binom{p'}{2}}, \dots, (\mathbf{m}^{(0)} - i.\mathbf{1})^{\binom{p'}{i}}].$$

Preuve Notons $g_i = \sum a_{i,j} f_j$. Considérons les plongements suivants :

$$i_f : X \rightarrow X \times \mathbb{C}^p$$

défini par $i_f(x) = (x, f_1(x), \dots, f_p(x))$,

$$i_{f,g} : X \times \mathbb{C}^{p+p'}$$

défini par $i_{f,g}(x) = (x, f_1(x), \dots, f_p(x), g_1(x), \dots, g_{p'}(x))$,

$$i : X \times \mathbb{C}^p \rightarrow X \times \mathbb{C}^{p+p'}$$

défini par $i(x, t) = (x, t, 0)$,

$$\phi : X \times \mathbb{C}^p \rightarrow X \times \mathbb{C}^{p+p'}$$

défini par $\phi(x, t) = (x, t, \sum_j a_{1,j}t_j, \dots, \sum_j a_{p',j}t_j)$, et le changement de variables local à l'origine

$$\psi : X \times \mathbb{C}^{p+p'} \rightarrow X \times \mathbb{C}^{p+p'}$$

défini par $\psi(x, t, u) = (x, t, u_1 + \sum a_{1,j}t_j, \dots, u_{p'} + \sum a_{p',j}t_j)$. On observe que ψ préserve la variété $t_1 = \dots = t_r = u_1 = \dots = u_{p'} = 0$.

On a $N_f \simeq i_{f+}(\mathcal{O}_X)_0$, de même $N_{(f,g)} \simeq (i_{f,g})_+(\mathcal{O}_X)_0$. Or $i_{f,g} = \phi \circ i_f = \psi \circ i \circ i_f$, d'où par fonctorialité de l'image directe,

$$N_{(f,g)} \simeq \psi_+ i_+ N_f.$$

ψ_+ est un isomorphisme bifiltré de $\mathcal{D}_{x,t,u}$, donc $\beta_k(f, g) = \beta_k(i_+ N_f)$ d'après le Lemme 1.1.3 (ψ_+ et ψ_* coïncident).

Partons d'une résolution bifiltrée minimale de N_f :

$$\dots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow N_f \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

avec $\mathcal{L}_i = \mathcal{D}_{x,t}^{l_i}[\mathbf{n}^{(i)}][\mathbf{m}^{(i)}]$.

On applique le foncteur exact i_+ , on obtient une suite exacte de $\mathcal{D}_{x,t,u}$ -modules :

$$\dots \rightarrow i_+ \mathcal{L}_1 \rightarrow i_+ \mathcal{L}_0 \rightarrow i_+ N_f \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Rappelons que si M est un $D_{x,t}$ -module à gauche, alors

$$i_+ M \simeq M \bigotimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_{u_1}, \dots, \partial_{u_{p'}}]$$

avec la structure de $\mathcal{D}_{x,t,u}$ -module à gauche suivante :

$$u_i \bullet m \otimes \partial_u^\alpha = -\alpha_i m \otimes \partial_u^{\alpha - e_i}$$

$$\partial_{u_i} \bullet m \otimes \partial_u^\alpha = m \otimes \partial_u^{\alpha + e_i}$$

$$P(x, \partial_x) \bullet m \otimes \partial_u^\alpha = P(x, \partial_x) m \otimes \partial_u^\alpha.$$

On a $i_+ N_f \simeq \psi_+^{-1} N_{(f,g)}$ et la bifiltration qu'on obtient par transport sur $i_+ N_f$ est la suivante :

$$F_{d,k}(i_+ N_f) = F_{d,k}(\mathcal{D}_{x,t}) \bullet \delta \otimes 1 = \bigoplus_{\xi} F_{d-|\xi|,k-|\xi|}(\mathcal{D}_{x,t}) \delta \otimes \partial_u^\xi$$

où δ est le générateur canonique de N_f . La suite exacte (2.2) est alors exacte bifiltrée en posant :

$$F_{d,k}(\mathcal{L}_i \otimes \mathbb{C}[\partial_u]) = \bigoplus_{\xi} F_{d-|\xi|,k-|\xi|}(\mathcal{L}_i) \otimes \partial_u^\xi.$$

Or

$$\mathcal{D}_{x,t}^l \otimes \mathbb{C}[\partial_u] \simeq \left(\frac{\mathcal{D}_{x,t,u}}{\langle u \rangle} \right)^l$$

donc on a un isomorphisme bifiltré

$$\mathcal{L}_i \otimes \mathbb{C}[\partial_u] \simeq \bigoplus_{k=1}^{l_i} \frac{\mathcal{D}_{x,t,u}[n_k^{(i)}][m_k^{(i)}]}{\langle u \rangle}.$$

La bifiltration obtenue est une bonne bifiltration, et en notant W l'anneau $\text{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t,u}^{(h)})$, on a

$$\text{gr}^V \mathbf{R} \left(\frac{\mathcal{D}_{x,t,u}}{\langle u \rangle} \right)^l \simeq \left(\frac{W}{\langle u \rangle} \right)^l$$

puis

$$\text{gr}^V \mathbf{R}(\mathcal{L}_i \otimes \mathbb{C}[\partial_u]) \simeq \bigoplus_{k=1}^{l_i} \frac{W[n_k^{(i)}][m_k^{(i)}]}{\langle u \rangle}.$$

Maintenant, on homogénéise puis on V -gradue la suite exacte (2.2) pour obtenir une suite exacte W -bigraduée :

$$\dots \rightarrow \bigoplus_{k=1}^{l_1} \frac{W[n_k^{(1)}][m_k^{(1)}]}{\langle u \rangle} \rightarrow \bigoplus_{k=1}^{l_0} \frac{W[n_k^{(0)}][m_k^{(0)}]}{\langle u \rangle} \rightarrow \text{gr}^V \mathbf{R}(i_+ N_f) \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

La résolution minimale de $W/\langle u \rangle$ est le complexe de Koszul $K'(W; u_1, \dots, u_{r'})$:

$$\dots \rightarrow W \otimes \bigwedge^2 \mathbb{C}^{r'} \rightarrow W \otimes \bigwedge^1 \mathbb{C}^{r'} \rightarrow W \rightarrow 0.$$

La résolution minimale de $W[n][m]/\langle u \rangle$ est le même complexe, où le module libre $W \otimes \bigwedge^i \mathbb{C}^{p'}$ est muni des décalages

$$[n]^{(p'_i)}[m-i]^{(p'_i)}$$

car chaque u_k est de bidegré $(0, -1)$.

On complète le complexe (2.3) en un complexe double en ajoutant en colonne les résolutions des modules $\oplus_{k=1}^{l_i} \frac{W[n_k^{(i)}][m_k^{(i)}]}{\langle u \rangle}$ données par le complexe de Koszul. Soit le diagramme suivant (où on omet les décalages) :

$$\begin{array}{ccccccc}
W^{l_m} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W^{l_1} & \longrightarrow & W^{l_0} \\
\uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
W^{l_m} \otimes \bigwedge^1 \mathbb{C}^{p'} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W^{l_1} \otimes \bigwedge^1 \mathbb{C}^{p'} & \longrightarrow & W^{l_0} \otimes \bigwedge^1 \mathbb{C}^{p'} \\
\uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
W^{l_m} \otimes \bigwedge^{p'} \mathbb{C}^{p'} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W^{l_1} \otimes \bigwedge^{p'} \mathbb{C}^{p'} & \longrightarrow & W^{l_0} \otimes \bigwedge^{p'} \mathbb{C}^{p'}
\end{array}$$

Le complexe simple associé est une résolution libre bigraduée de $\text{gr}^V \mathbf{R}(i_+ N_f)$. De plus les composantes des flèches horizontales sont dans l'idéal maximal car la résolution (2.1) est supposée minimale, et par fonctorialité du complexe de Koszul. Les composantes des flèches verticales sont dans l'idéal maximal par définition du complexe $K'(W; u_1, \dots, u_{p'})$. On obtient alors les nombres de Betti et les décalages annoncés. $\square$

Notons $\beta_f(T)$ le polynôme

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \beta_i(f) T^i.$$

On peut interpréter le résultat précédent de la façon suivante :

$$\beta_{(f,g)}(T) = (1 + T)^{p'} \beta_f(T).$$

Corollaire 2.1.2. *Les nombres de Betti et les décalages sont des invariants de l'idéal $I = (f_1, \dots, f_p)$ si p est minimal (i.e. $p = \dim_{\mathbb{C}}(I/\mathfrak{m}I)$).*

Preuve Soient $f_1, \dots, f_p$ et $g_1, \dots, g_p$ deux ensembles minimaux de générateurs de I . On a $\beta_{(f,g)}(T) = (1 + T)^r \beta_f(T)$ et de même $\beta_{(g,f)}(T) = (1 + T)^r \beta_g(T)$. Donc $\beta_f(T) = \beta_g(T)$.

Notons $[\mathbf{n}^{(i)}][\mathbf{m}^{(i)}]$ les décalages au cran i pour f et $[\tilde{\mathbf{n}}^{(i)}][\tilde{\mathbf{m}}^{(i)}]$ les décalages au cran i pour g . Les décalages au cran i pour (f, g) donnent

$$[\mathbf{n}^{(i)}, (\mathbf{n}^{(i-1)})^p, (\mathbf{n}^{(i-2)})^{\binom{p}{2}}, \dots, (\mathbf{n}^{(0)})^{\binom{p}{i}}]$$

$$= [\tilde{\mathbf{n}}^{(i)}, (\tilde{\mathbf{n}}^{(i-1)})^{r'}, (\tilde{\mathbf{n}}^{(i-2)})^{\binom{p}{2}}, \dots, (\mathbf{n}^{(0)})^{\binom{p}{i}}]$$

et

$$\begin{aligned} & [\mathbf{m}^{(i)}, (\mathbf{m}^{(i-1)} - \mathbf{1})^p, (\mathbf{m}^{(i-2)} - 2\mathbf{1})^{\binom{p}{2}}, \dots, (\mathbf{m}^{(0)} - i\mathbf{1})^{\binom{p}{i}}] \\ &= [\tilde{\mathbf{m}}^{(i)}, (\tilde{\mathbf{m}}^{(i-1)} - \mathbf{1})^p, (\tilde{\mathbf{m}}^{(i-2)} - 2\mathbf{1})^{\binom{p}{2}}, \dots, (\tilde{\mathbf{m}}^{(0)} - i\mathbf{1})^{\binom{p}{i}}]. \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence ascendante sur i : $\mathbf{n}^{(i)} = \tilde{\mathbf{n}}^{(i)}$ et $\mathbf{m}^{(i)} = \tilde{\mathbf{m}}^{(i)}$. $\square$

Les nombres de Betti et les décalages forment alors un invariant pour les sous-ensembles analytiques de $(\mathbb{C}^n, 0)$ (n est fixé), en associant à un ensemble analytique V son idéal réduit $I(V)$.

On veut passer à la catégorie plus générale des germes d'espaces complexes. Pour cela, on étudie la dépendance des nombres de Betti et des décalages par rapport au plongement. Il s'agit de comparer N_f à $N_{(f,y)}$, où y est une nouvelle variable. Rappelons que $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $t = (t_1, \dots, t_p)$.

Proposition 2.1.3.

$$\forall k, \beta_k(f, y) = \beta_k(f) + 2\beta_{k-1}(f) + \beta_{k-2}(f).$$

Les décalages au cran i pour $N_{(f,y)}$ sont

$$\begin{aligned} & [\mathbf{n}^{(i)}, \mathbf{n}^{(i-1)}, \mathbf{n}^{(i-1)} + \mathbf{1}, \mathbf{n}^{(i-2)} + \mathbf{1}] \\ & [\mathbf{m}^{(i)}, \mathbf{m}^{(i-1)}, \mathbf{m}^{(i-1)} + \mathbf{1}, \mathbf{m}^{(i-2)} + \mathbf{1}]. \end{aligned}$$

Preuve

Lemme 2.1.2. Soit I un idéal de $\mathcal{D}_{y,u}^{(h)}$ possédant une base standard V -adaptée $P_1, \dots, P_r$ telle que pour tout i , h ne divise pas $\text{Exp}P_i$, et soit J un idéal de $\mathcal{D}_{x,t}^{(h)}$. Notons $\mathcal{D}^{(h)}$ l'anneau $\mathcal{D}_{x,y,t,u}^{(h)}$, et V la V -filtration restreinte à $\mathcal{D}_{x,t}^{(h)}$ et $\mathcal{D}_{y,u}^{(h)}$. Alors

$$\text{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)}I + \mathcal{D}^{(h)}J) = \text{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})\text{gr}^V(I) + \text{gr}^V(\mathcal{D}^{(h)})\text{gr}^V(J).$$

Preuve Nous nous inspirons ici de la preuve de [14], Proposition 4.3.. Soit n le nombre total de variables x, t, y, u . Soit $Q_1, \dots, Q_{r'}$ une base standard V -adaptée de J . Soit $U \in \mathcal{D}^{(h)}I + \mathcal{D}^{(h)}J$. Cet élément s'écrit

$$U = \sum U_i P_i + \sum V_j Q_j.$$

Divisons V_j par $P_1, \dots, P_r$ i.e. $V_j = \sum_i U'_{i,j} P_i + W_j$. Donc

$$U = \sum_i (U_i + \sum_j U'_{i,j} Q_j) P_i + \sum W_j Q_j.$$

On a

$$\mathcal{N}(W_j) \cap \left(\bigcup_i \text{Exp} P_i + \mathbb{N}^{2n} \right) = \emptyset.$$

De même

$$\mathcal{N}(W_j Q_j) \cap \left(\bigcup_i \text{Exp} P_i + \mathbb{N}^{2n} \right) = \emptyset$$

car $Q_j \in \mathcal{D}_{x,t}^{(h)}$ et h ne divise pas $\text{Exp} P_i$. Or $P_1, \dots, P_r$ forment une base standard donc

$$\text{Exp} \left(\sum_i (U_i + \sum_j U'_{i,j} Q_j) P_i \right) \in \left(\bigcup_i \text{Exp} P_i + \mathbb{N}^{2n} \right).$$

Ainsi

$$\text{Exp} \left(\sum_i (U_i + \sum_j U'_{i,j} Q_j) P_i \right) \neq \text{Exp} \left(\sum_j W_j Q_j \right).$$

Alors

$$\sigma_V(U) = \epsilon_1 \sigma_V \left(\sum_i (U_i + \sum_j U'_{i,j} Q_j) P_i \right) + \epsilon_2 \sigma_V \left(\sum_j W_j Q_j \right)$$

avec $\epsilon_i = 0$ ou 1 . $\square$

On a

$$\mathbf{R}(N_{(f,y)}) = \frac{\mathcal{D}^{(h)}}{\mathcal{D}^{(h)} I + \mathcal{D}^{(h)} J}$$

où I est l'idéal de $\mathcal{D}_{y,u}^{(h)}$ engendré par $y - u$ et $\partial_y + \partial_u$, et J est l'idéal de $\mathcal{D}_{x,t}^{(h)}$ engendré par les éléments $t_i - f_i$ et $\partial_{x_i} + \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \partial_{t_j}$. Nous sommes dans les conditions du lemme précédent donc en notant W l'anneau $\text{gr}^V(\mathcal{D}_{x,y,t,u}^{(h)})$, on a

$$\text{gr}^V \mathbf{R} N_{(f,y)} \simeq \frac{W}{W \text{gr}^V(I) + W \text{gr}^V(J)} \simeq \frac{W}{W y + W \partial_u + W \text{gr}^V(J)}.$$

Ceci est encore isomorphe au W -module

$$\text{gr}^V \mathbf{R} N_f \otimes_{\mathbb{C}[h]} \mathbb{C}[u, \partial_y, h].$$

Prenons une résolution minimale bigraduée de $\text{gr}^V \mathbf{R} N_f$:

$$\cdots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \text{gr}^V \mathbf{R} N_f \rightarrow 0$$

avec $\mathcal{L}_i = (\text{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t}^h))^{l_i} [\mathbf{n}^{(i)}][\mathbf{m}^{(i)}]$.

On applique le foncteur exact $- \otimes_{\mathbb{C}[h]} \mathbb{C}[u, \partial_y, h]$ en remarquant que

$$\mathcal{L}_i \otimes \mathbb{C}[u, \partial_y, h] \simeq \bigoplus_{k=1}^{l_i} \frac{W[n_k^{(i)}][m_k^{(i)}]}{\langle y, \partial_u \rangle},$$

on obtient donc une suite exacte de W -modules bigradués

$$\cdots \rightarrow \bigoplus_{k=1}^{l_1} \frac{W[n_k^{(1)}][m_k^{(1)}]}{\langle y, \partial_u \rangle} \rightarrow \bigoplus_{k=1}^{l_0} \frac{W[n_k^{(0)}][m_k^{(0)}]}{\langle y, \partial_u \rangle} \rightarrow \mathrm{gr}^V \mathbf{RN}_{(f,y)} \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

On résoud le module $\frac{W[n][m]}{\langle y, \partial_u \rangle}$ par le complexe de Koszul bigradué $K'(W; y, \partial_u)$:

$$0 \rightarrow W[n+1][m+1] \xrightarrow{\phi_2} W^2[n, n+1][m, m+1] \xrightarrow{\phi_1} W[n][m] \xrightarrow{\phi_0} \frac{W[n][m]}{\langle y, \partial_u \rangle} \rightarrow 0$$

avec $\phi_1(e_1) = y, \phi_1(e_2) = \partial_u$ et $\phi_2(1) = \partial_u e_1 - y e_2$.

On complète alors la suite exacte (2.4) en un double complexe en ajoutant en colonne les complexes de Koszul. Le complexe simple associé au complexe double suivant est ainsi la résolution minimale de $\mathrm{gr}^V \mathbf{RN}_{(f,y)}$ (on omet les décalages) :

$$\begin{array}{ccccccc} W^{l_m} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W^{l_1} & \longrightarrow & W^{l_0} \\ \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\ W^{2l_m} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W^{2l_1} & \longrightarrow & W^{2l_0} \\ \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\ W^{l_m} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W^{l_1} & \longrightarrow & W^{l_0} \end{array}$$

On en déduit les nombres de Betti et les décalages annoncés. $\square$

Nous nous intéressons désormais seulement aux nombres de Betti. On interprète le résultat précédent comme suit :

$$\beta_{f,y}(T) = (1+T)^2 \beta_f(T).$$

Donnons-nous un germe d'espace complexe V , c'est-à-dire une algèbre locale $\mathbb{C}\{x\}/J$.

Soit n_0 la dimension de plongement de V en 0, et p_0 le nombre minimal de générateurs de l'idéal définissant V dans $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{n_0}\}$. Soit $f_1, \dots, f_p$ un ensemble quelconque de générateurs de J . Soit $c_0 = p_0 + n_0$ (c'est un invariant de V).

Proposition 2.1.4. *La série*

$$\beta_V(T) = \frac{\beta_f(T)}{(1+T)^{n+p-c_0}}$$

est un polynôme en T et définit un invariant du germe d'espace complexe V .

Preuve La série décrite est un polynôme car lorsque $n = n_0$ et $p = p_0$, on a $\beta_V(T) = \beta_f(T)$. Pour montrer que c'est un invariant, il suffit de montrer que $\frac{\beta_f(T)}{(1+T)^{n+p}}$ est défini pour l'idéal J et est invariant par rapport au plongement.

Dans le premier cas, soit $g \in J$. D'après la Proposition 2.1.2, $\beta_{f,g}(T) = (1+T)\beta_f(T)$ d'où

$$\frac{\beta_{f,g}(T)}{(1+T)^{n+(p+1)}} = \frac{\beta_f(T)}{(1+T)^{n+p}}.$$

Dans le deuxième cas, d'après la Proposition 2.1.3, $\beta_{f,y}(T) = (1+T)^2\beta_f(T)$ d'où

$$\frac{\beta_{f,y}(T)}{(1+T)^{(n+1)+(p+1)}} = \frac{\beta_f(T)}{(1+T)^{n+p}}.$$

□

Remarquons que si p' est le nombre minimal de générateurs de J , alors $p' = p_0 + (n - n_0)$, de plus rappelons que $n_0 = n - \text{rang}(J(f)(0))$ donc finalement

$$\beta_V(T) = \frac{\beta_f(T)}{(1+T)^{(p-p')+2\text{rang}(J(f)(0))}}.$$

Donnons un énoncé qui nous sera utile pour l'étude des fonctions monomiales. Soit $f \in \mathbb{C}\{x\}$. Notons $\tilde{f}$ la fonction f vue dans $\mathbb{C}\{x, y\}$, où y est une nouvelle variable. Géométriquement parlant, on compare la variété $\{f = 0\}$ à la variété $\{f = 0\} \times \mathbb{C}$.

Proposition 2.1.5. $\forall i, \beta_i(\tilde{f}) = \beta_i(f) + \beta_{i-1}(f)$.

Preuve On a

$$\mathbf{R}\mathcal{D}_{x,y,t}\tilde{f}^s \simeq \frac{\mathcal{D}_{x,y,t}^{(h)}}{\langle (t_i - f_i), (\partial_{x_i} + \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \partial_{t_j}), \partial_y \rangle}.$$

Soit J l'idéal de $\mathcal{D}_{x,t}^{(h)}$ engendré par $(t_i - f_i), (\partial_{x_i} + \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \partial_{t_j})$. D'après le Lemme 2.1.2, on a

$$\text{gr}^V \mathbf{R}N_{\tilde{f}} \simeq \frac{W}{\text{gr}^V(J) + W\partial_y}$$

où W désigne l'anneau $\text{gr}^V(\mathcal{D}_{x,y,t}^{(h)})$.

Donc

$$\mathbf{R}N_{\tilde{f}} \simeq \text{gr}^V(\mathbf{R}(N_f)) \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} \mathbb{C}\{x, y\},$$

et on a

$$W \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} \mathbb{C}\{x, y\} \simeq \frac{W}{\langle \partial_y \rangle}.$$

De la même manière que dans les démonstrations des propositions précédentes, on considère la résolution minimale du W -module $\text{gr}^V \mathbf{R}N_f$, on applique le foncteur exact $- \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} \mathbb{C}\{x, y\}$ puis on résoud en colonne les modules $\left(\frac{W}{\langle \partial_y \rangle}\right)^{\beta_i(f)}$ à l'aide du complexe de Koszul

$$0 \rightarrow W \xrightarrow{\cdot \partial_y} W \rightarrow \frac{W}{\langle \partial_y \rangle} \rightarrow 0$$

qui est la résolution minimale du W -module $W/(\partial_y)$. On obtient enfin la résolution minimale du module $\text{gr}^V(\mathbf{R}(N_{\hat{f}}))$ en prenant le complexe simple associé au double complexe ainsi construit. $\square$

On peut interpréter ce résultat en terme de produit de séries :

$$\beta_{\hat{f}}(T) = (1 + T)\beta_f(T).$$

Exemple : les résultats précédents nous permettent de traiter un exemple déjà annoncé : l'application $f = (x_1, \dots, x_p)$. Démontrons que

$$\beta_f(T) = (1 + T)^{n+p}.$$

Pour $n = 0$ on a $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} = \mathbb{C}$, on commence par considérer la fonction $0 \in \mathbb{C}$. On a $N_f \simeq \mathcal{D}_t/(t)$ et

$$\text{gr}^V(\mathbf{R}(N_f)) \simeq \frac{\text{gr}^V(\mathcal{D}_t^{(h)})}{(t)}$$

dont la résolution minimale bigraduée est l'endomorphisme de multiplication par t , donc $\beta_0(T) = 1 + T$.

Ensuite on considère $f = (0, x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_p\}^p$. D'après la Proposition 2.1.3, $\beta_{(0, x_1, \dots, x_p)}(T) = (1 + T)^{2p}\beta_0(T) = (1 + T)^{2p+1}$. Or 0 est dans l'idéal engendré par $x_1, \dots, x_p$ donc par la Proposition 2.1.2,

$$\beta_{x_1, \dots, x_p} = \frac{\beta_{(0, x_1, \dots, x_p)}(T)}{1 + T} = (1 + T)^{2p}.$$

Enfin si $n \geq p$, $f = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}^p$, on a d'après la Proposition 2.1.5, $\beta_f(T) = (1 + T)^{n-p}\beta_{x_1, \dots, x_p}(T) = (1 + T)^{n+p}$.

2.1.3 Résolution générique et stratification

Soit $F(x, \lambda) = (F_1(x, \lambda), \dots, F_p(x, \lambda)) \in (\mathbb{C}\{x\}[\lambda])^p$, avec $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_e)$, une déformation de $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \in (\mathbb{C}\{x\})^p$, i.e. $F(x, 0) = f(x)$.

Pour $\lambda_0 \in \mathbb{C}^r$, on note $F_{\lambda_0}(x) = F(x, \lambda_0)$. Nous supposons que pour chaque i et λ_0 , aucune des fonctions F_i et $(F_{\lambda_0})_i$ n'est identiquement nulle. Soit K le corps des fractions de $\mathbb{C}[\lambda]$. L'anneau $\hat{\mathcal{D}}_{x,t}(K)$ agit sur

$$K[[x]]\left[\frac{1}{F_1 \dots F_p}, s_1, \dots, s_p\right] F_1^{s_1} \dots F_p^{s_p}$$

et on s'intéresse au module

$$N_F = \hat{\mathcal{D}}_{x,t}(K) F^s.$$

Ce module admet une bonne bifiltration définie par la présentation :

$$N_F = \frac{\hat{\mathcal{D}}_{x,t}(K)}{((t_i - F_i), (\partial_{x_i} + \sum_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \partial_{t_j}))}.$$

De même

$$\mathcal{D}_{x,t} F_{\lambda_0}^s = \frac{\mathcal{D}_{x,t}}{((t_i - (F_{\lambda_0})_i), (\partial_{x_i} + \sum_j \frac{\partial (F_{\lambda_0})_j}{\partial x_i} \partial_{t_j}))}.$$

Par application directe des Théorèmes 1.3.1 et 1.3.2, on obtient l'existence d'une résolution générique et d'une stratification.

Théorème 2.1.1. *Il existe une résolution bifiltrée minimale libre de N_F sur $\hat{\mathcal{D}}_{x,t}(K)$ qui se spécialise pour λ_0 générique en une résolution bifiltrée minimale libre de $\mathcal{D}_{x,t} F_{\lambda_0}^s$ sur $\mathcal{D}_{x,t}$. Par conséquent, pour λ_0 générique, on a $\beta(F) = \beta(F_{\lambda_0})$.*

Théorème 2.1.2. *Il existe une stratification de $\mathbb{C}^e$ par des espaces constructibles telle que sur chaque strate, l'application $\lambda_0 \mapsto \beta(F_{\lambda_0})$ est constante.*

2.2 Pour $p = 1$, description plus fine et passage au commutatif

On se restreint au cas des hypersurfaces, i.e. $p = 1$. Soit $f \in \mathbb{C}\{x\} = \mathcal{O}$ non identiquement nulle. Notons pour $i = 1, \dots, n$, $f'_i = \partial f / \partial x_i$ et $J(f)$ l'idéal de $\mathcal{O}$ engendré par les f'_i .

Dans la section 2.2.1 on va présenter le module $\text{gr}^V(\mathbf{R}(N_f))$ au moyen de $\text{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s$.

Par des méthodes similaires on obtiendra dans la section 2.2.2 une condition suffisante pour la h -saturation de ce module : $f \in J(f)$ et $J(f)$ est de type linéaire. Notons que d'après [6], Remark 1.6.6 [a], cette condition est

équivalente à la condition suivante : l'idéal engendré par f et $J(f)$ est de type linéaire. Cette condition est intrinsèque au sens des hypersurfaces (réduites).

On donnera aussi (section 2.2.3) une présentation du module $\text{bigr}(N_f)$ sous l'hypothèse de h -saturation.

2.2.1 Description de $\text{gr}^V(\mathbf{RD}_{x,t}f^s)$ au moyen de $\text{ann}_{\mathcal{D}[s]}f^s$

Lemme 2.2.1. 1. Soit $k \geq 1$ et $P(s) \in F_{d-k}(\mathcal{D}[s])$. Alors

$$P(s)\partial_t^k f^s \in \sum_{i \leq k-1} F_{d-i}(\mathcal{D}[s])\partial_t^i f^s \Leftrightarrow$$

$$P(s)\partial_t^k \in \sum_i F_{d-k+1}(\mathcal{D}[s])\partial_t^{k-1} f'_i \partial_t + F_{d-k}(\mathcal{D}[s])\partial_t^k f + \partial_t^k F_{d-k}(\text{ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)).$$

2. Soit $k \geq 0$ et $P(s) \in F_d(\mathcal{D}[s])$. Alors

$$P(s)t^k f^s \in F_d(\mathcal{D}[s])f^{s+k+1} \Leftrightarrow P(s)t^k \in F_d(\mathcal{D}[s])t^k f + t^k F_d(\text{ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)).$$

Preuve

1. Par récurrence sur k . Soit $k = 1$. On suppose $P(s)\partial_t f^s = Q(s)f^s$. Comme $\partial_{x_i} f^s = -f'_i \partial_t f^s$, on peut supposer modulo $f'_i \partial_t$ que $Q(s) \in \mathcal{O}[s]$. On a

$$-P(s)s f^{s-1} = Q(s)f^s.$$

Faisant $s = 0$, on obtient $Q(0)(1) = 0$ donc $Q(0) = 0$ car $Q(0) \in \mathcal{O}$. Donc $Q(s) = s\tilde{Q}(s)$. Simplifions par s :

$$P(s)f^{s-1} = -\tilde{Q}(s)f^s.$$

Appliquons t :

$$P(s+1)f^s = -\tilde{Q}(s+1)f^{s+1}.$$

Donc $P(s+1) = A(s)f + B(s)$ avec $B(s)f^s = 0$. Multiplions à gauche par ∂_t :

$$P(s)\partial_t = A(s-1)\partial_t f + \partial_t B(s).$$

Supposons maintenant l'énoncé vrai au rang k . Soit

$$P(s)\partial_t^{k+1} f^s = \sum_{i \leq k} Q_i(s)\partial_t^i f^s.$$

On peut supposer $Q_0(s) \in \mathcal{O}[s]$ en reportant sur $Q_1(s)$ grâce à l'identité $\partial_{x_i} f^s = f'_i \partial_t f^s$.

Faisons $s = 0$. On a

$$\partial_t^i f^s = (-1)^i s(s-1) \cdots (s-i+1) f^{s-i},$$

alors $Q_0(0)(1) = 0$ donc $Q_0(0) = 0$ et $Q_0(s) = s\tilde{Q}_0(s)$. On a

$$-P(s)st^{-1}\partial_t^k f^s = \sum_{1 \leq i \leq k} -Q_i(s)st^{-1}\partial_t^{i-1} f^s + s\tilde{Q}_0(s)f^s.$$

On peut simplifier par s , puis on applique t :

$$P(s+1)\partial_t^k f^s = \sum_{1 \leq i \leq k} Q_i(s+1)\partial_t^{i-1} f^s - \tilde{Q}_0(s+1)f^{s+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, il vient

$$P(s+1)\partial_t^k = \partial_t^k A(s) + B(s)\partial_t^k f + \sum C_i(s)\partial_t^k f'_i$$

avec $A(s)f^s = 0$. Multiplions à gauche par ∂_t :

$$P(s)\partial_t^{k+1} = \partial_t^{k+1} A(s) + B(s-1)\partial_t^{k+1} f + \sum C_i(s-1)\partial_t^{k+1} f'_i.$$

On remarque que dans les opérations effectuées, l'ordre F est conservé. La réciproque est évidente.

2. Soit $P(s)t^k f^s = Q(s)f^{s+k+1}$. Appliquons $(t^{-1})^k$:

$$P(s-k)f^s = Q(s-k)f^{s+1}.$$

Alors $P(s-k) = Q(s-k)f + B(s)$ avec $B(s)f^s = 0$. Multiplions par t^k à gauche :

$$P(s)t^k = Q(s)t^k f + t^k B(s).$$

La réciproque est évidente. $\square$

Soit

$$\delta = \overline{f^s T^0} \in \text{gr}_0^V(\mathbf{R}(N_f)).$$

Notons $W = \text{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t}^{(h)})$ anneau bigradué. Pour $P \in \mathcal{D}_{x,t}$, on note $H(P)$ son homogénéisé dans $\mathcal{D}_{x,t}^{(h)}$. Pour $P \in \mathcal{D}_{x,t}^{(h)}$, on note

$$\rho(P) = P_{|h=1}$$

son déshomogénéisé dans $\mathcal{D}_{x,t}$.

Proposition 2.2.1. *$\text{ann}_W(\delta)$ est engendré par $f, f'_1 \partial_t, \dots, f'_n \partial_t$ et $H(\text{ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s))$.*

$H(\text{ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s))$ est un idéal de $\mathcal{D}[s]^{(h)}$. C'est un sous-objet de W par l'isomorphisme

$$\mathcal{D}[s]^{(h)} \simeq \text{gr}_0^V(\mathcal{D}_{x,t}^{(h)}).$$

Preuve Soit $P \in W_{d,k} \cap \text{ann}_W(\delta)$ avec $k \geq 1$. On a $\rho(P) \in F_{d-k}(\mathcal{D}[s])\partial_t^k$ et $P\delta = 0$ i.e. $\rho(P)f^s \in F_{d,k-1}(\mathcal{D}_{x,t}f^s)$. Or, rappelons que pour $k \geq 0$,

$$F_{d,k}(N_f) = \sum_{i \leq k} F_{d-i}(\mathcal{D}[s])\partial_t^i f^s.$$

D'après le Lemme 2.2.1, on a une écriture

$$\rho(P) = \sum_i A_i(s)\partial_t^k f'_i + B(s)\partial_t^k f + \partial_t^k C(s)$$

avec $A_1(s), \dots, A_n(s), B(s), C(s) \in F_{d-k}(\mathcal{D}[s])$ et $C(s)f^s = 0$. On a $P = h^l H(\rho(P))$ et il existe des entiers positifs $a_1, \dots, a_n, b, c$ tels que

$$P = \sum h^{a_i} H(A_i(s))\partial_t^k f'_i + h^b H(B(s))\partial_t^k f + \partial_t^k h^c H(C(s)).$$

D'où le résultat.

Pour $k \leq 0$, la preuve est similaire, en utilisant

$$F_{d,-k}(N_f) = F_d(\mathcal{D}[s])f^{s+k}.$$

□

2.2.2 Conditions pour la h-saturation

Définition 2.2.1 (cf.[5]). Soit I un idéal de $\mathcal{O}$ engendré par $a_1, \dots, a_r$. Définissons un morphisme de $\mathcal{O}$ -algèbres graduées

$$\varphi : \mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_r] \rightarrow \bigoplus_{d \geq 0} I^d T^d$$

par $\varphi(\xi_i) = a_i T$. I est dit de type linéaire si $\ker \varphi$ est engendré par des éléments homogènes de degré 1.

Définition 2.2.2. f est dite Euler homogène si $f \in J(f)$.

Notation : Notons $\Theta = \bigoplus \mathcal{O}\partial_{x_i}$ le $\mathcal{O}$ -module des germes de champs de vecteurs.

Soit f telle que $J(f)$ est de type linéaire, et $S_1, \dots, S_r$ des champs de vecteurs engendrant $\text{ann}_\Theta f$. Alors $\sigma(S_1), \dots, \sigma(S_r)$ engendrent $\ker \varphi$, où φ est le morphisme associé à l'idéal $J(f)$.

Lemme 2.2.2. Soit f telle que $J(f)$ est de type linéaire, et $S_1, \dots, S_r$ des champs de vecteurs engendrant $\text{ann}_\Theta f$.

1. $S_1, \dots, S_r$ est une base F -involutive de $\text{ann}_\mathcal{D} f^s$.
Par conséquent, $\text{gr}^F(\text{ann}_\mathcal{D}(f^s)) = \ker \varphi$.
2. Si de plus f est Euler-homogène avec E un champ de vecteurs tel que $E(f) = f$, alors $S_1, \dots, S_r, E-s$ est une base F -involutive de $\text{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s$.

Preuve

1. Soit $P \in \mathcal{D}$ tel que $Pf^s = 0$. Procédons par récurrence sur $d = \text{ord}^F P$.
Si $d = 0$ alors $P = 0$. Soit $d \geq 1$. Alors

$$\sigma(P)(f'_1, \dots, f'_n) = 0$$

On a alors une écriture homogène

$$\sigma(P) = \sum B_i(\xi)\sigma(S_i)$$

car $J(f)$ est de type linéaire. On traite alors $P - \sum B_i S_i$ par hypothèse de récurrence.

2. Soit $P(s) \in \mathcal{D}[s]$ tel que $P(s)f^s = 0$. On se ramène à 1. en considérant le reste de la division euclidienne (suivant le degré en s) de $P(s)$ par $s - E$. $\square$

Proposition 2.2.2. *Soit f Euler-homogène telle que $J(f)$ est de type linéaire. Alors le W -module $\text{gr}^V(\mathbf{R}(\mathcal{D}_{x,t}f^s))$ est h -saturé.*

Preuve Il s'agit de montrer :

$$\forall d, k, F_{d,k}(N_f) \cap F_{d+1,k-1}(N_f) \subset F_{d,k-1}(N_f). \quad (2.5)$$

Rappelons que si $k \geq 0$,

$$F_{d,k}(N_f) = \sum_{l \leq k} F_{d-l}(\mathcal{D}[s])\partial_t^l f^s$$

et

$$F_{d,-k}(N_f) = F_d(\mathcal{D}[s])f^{s+k}.$$

Or par Euler-homogénéité, on a $sf^s \in \mathcal{D}f^s$ et alors

$$F_{d,k}(N_f) = \sum_{l \leq k} F_{d-l}(\mathcal{D})\partial_t^l f^s$$

et

$$F_{d,-k}(N_f) = F_d(\mathcal{D})f^{s+k}.$$

Montrons (2.5) pour $k \leq 0$. Il s'agit de montrer : si $Pf^l f^s = Qf^{l+1}f^s$ avec $P \in F_d(\mathcal{D})$, $Q \in F_{d+1}(\mathcal{D})$, $l \in \mathbb{N}$, alors $Pf^l f^s = Hf^{l+1}f^s$, avec $H \in F_d(\mathcal{D})$. On peut supposer $l = 0$ (faire agir t^{-l}) et $Q \notin F_d(\mathcal{D})$ (sinon c'est gagné). Désignons par σ le F -symbole d'un opérateur. On a $(P - Qf)f^s = 0$, alors

$$0 = \sigma(P - Qf)(f'_1, \dots, f'_n) = -f\sigma(Q)(f'_1, \dots, f'_n).$$

Donc

$$\sigma(Q)(f'_1, \dots, f'_n) = 0.$$

D'après le Lemme 2.2.2, $\text{gr}^F(\text{ann}_{\mathcal{D}}(f^s)) = \ker \varphi$ donc il existe $Q' \in F_{d+1}(\mathcal{D})$ tel que $\sigma(Q) = \sigma(Q')$ et $Q'f^s = 0$. De même, $Q'f^{s+1} = 0$. Alors $Pf^s = Qf^{s+1} = (Q - Q')f^{s+1}$. L'opérateur $H = Q - Q'$ convient.

Montrons (2.5) pour $k \geq 1$ par récurrence sur k . Soit $k = 1$. Supposons

$$P\partial_t f^s + Qf^s = Hf^s$$

avec $P \in F_{d-1}(\mathcal{D})$, $Q \in F_d(\mathcal{D})$, $H \in F_{d+1}(\mathcal{D})$. Vu dans $\mathcal{O}[\frac{1}{f}, s]f^s$, le terme dominant en s donne

$$s^{d+1} \frac{1}{f^{d+1}} \sigma(H)(f'_1, \dots, f'_n) = 0.$$

Donc $\sigma(H)(f'_1, \dots, f'_n) = 0$ et on conclut comme dans le cas $k \leq 0$ en abaissant l'ordre de H .

Supposons la relation (2.5) vraie au rang k et montrons-la au rang $k + 1$. Supposons

$$P\partial_t^{k+1} f^s = \sum_{i \leq k} Q_i \partial_t^i f^s \quad (2.6)$$

avec $P \in F_d(\mathcal{D})$, $Q_i \in F_{d+1-i}(\mathcal{D})$. En utilisant l'identité

$$\partial_i f^s = -f'_i \partial_t f^s,$$

on peut supposer $Q_0 \in \mathcal{O}$ quitte à reporter les termes $g(x)\partial^\beta$ sur $Q_1 \partial_t f^s$. Faisons $s = 0$, alors $Q_0(1) = 0 \Rightarrow Q_0 = 0$. On peut réécrire (2.6) :

$$Pst^{-1} \partial_t^k f^s = \sum_{1 \leq i \leq k} Q_i st^{-1} \partial_t^{i-1} f^s.$$

On simplifie par s puis on applique t :

$$P\partial_t^k f^s = \sum_{1 \leq i \leq k} Q_i \partial_t^{i-1} f^s.$$

Par hypothèse de récurrence, on a alors $P\partial_t^k f^s \in F_{d-1, k-1}(N_f)$. En appliquant ∂_t , on obtient $P\partial_t^{k+1} f^s \in F_{d, k}(N_f)$. $\square$

Lemme 2.2.3. *Soit f Euler-homogène telle que $J(f)$ est de type linéaire. Fixons un champ de vecteurs E tel que $E(f) = f$ et notons $\chi = \sigma(E)$. Alors l'application suivante est injective*

$$\text{gr}^F(\mathcal{D}[s]f^s) \xrightarrow{f} \text{gr}^F(\mathcal{D}[s]f^s).$$

Preuve On a

$$\mathrm{gr}^F(\mathcal{D}[s]f^s) \simeq \frac{\mathcal{O}[\xi, s]}{(s - \chi, (S_i))}.$$

Soit $P(s) \in \mathcal{O}[\xi, s]$ tel que $P(s)f = \sum P_i(s)S_i + Q(s)(s - \chi)$ (écriture graduée).

Modulo $s - \chi$, on peut supposer $P(s) = P \in \mathcal{O}[\xi]$. On substitue alors $s = f$ et $\xi_i = f'_i$, alors $P(f'_1, \dots, f'_n) = 0$ d'où $P \in \langle (S_i) \rangle$. $\square$

Donnons un dernier critère pour la h -saturation (que nous n'utiliserons pas dans la suite).

On a $\mathrm{gr}_0^V(\mathcal{D}_{x,t}) \simeq \mathcal{D}[s]$, ce qui permet d'identifier $\mathcal{D}[s]$ à un sous-anneau de $\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t})$. Dans ce qui suit, on considère $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}[s]}f^s$ comme sous-espace de $\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t})$.

Proposition 2.2.3. *$\mathrm{gr}^V(\mathbf{RN}_f)$ est h -saturé si et seulement si l'ensemble*

$$(f, (f'_i \partial_t)_i, \mathrm{ann}_{\mathcal{D}[s]}f^s)$$

est un système F -involutif de l'idéal engendré de $\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t})$.

Preuve Supposons que $\mathrm{gr}^V(\mathbf{RN}_f)$ est h -saturé. Soit $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$ une base F -involutive de $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}[s]}f^s$. On sait (Proposition 2.2.1) que $\mathrm{gr}^V(\mathbf{RN}_f)$ admet la présentation bigraduée suivante (où on omet les vecteurs de décalage) :

$$\left(\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t}^{(h)}) \right)^{1+n+r} \xrightarrow{\phi_1} \mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t}^{(h)}) \rightarrow \mathrm{gr}^V(\mathbf{RN}_f) \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

où ϕ_1 envoie la base canonique sur les éléments $f, (f'_i \partial_t)_i, (H(P_i))$.

On applique le foncteur de déshomogénéisation ρ , qui est exact sous l'hypothèse de h -saturation (voir Proposition 1.2.2), et on obtient une présentation F -filtrée de $\mathrm{gr}^V(N_f)$. Pour le morphisme ϕ_1 , la déshomogénéisation correspond à faire $h = 1$.

Traisons la réciproque. On veut montrer :

$$\forall d, k, F_{d,k}(N_f) \cap F_{d+1,k-1}(N_f) \subset F_{d,k-1}(N_f)$$

Soit $k \geq 0$. Soit $P \in F_{d,k}(\mathcal{D}_{x,t})$ tel que $Pf^s \in F_{d+1,k-1}(N_f)$. On a

$$Pf^s = P_k(s)\partial_t^k f^s + P_{k-1}(s)\partial_t^{k-1} f^s + \dots + P_0(s)f^s$$

avec $P_i(s) \in F_{d-i}(\mathcal{D}[s])$. Donc $P_k(s)\partial_t^k f^s \in F_{d+1,k-1}(N_f)$ et on sait alors (Lemme 2.2.1)

$$P_k(s)\partial_t^k \in \sum F_{d+1}(\mathcal{D}[s]\partial_t^k f'_i) + F_{d+1}(\mathcal{D}[s]\partial_t^k f) + F_{d+1}(\partial_t^k \mathrm{ann}_{\mathcal{D}[s]}f^s)$$

On peut voir ceci dans $\text{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t})$, alors par involutivité on a une réécriture

$$P_k(s)\partial_t^k \in \sum F_d(\mathcal{D}[s]\partial_t^k f'_i) + F_d(\mathcal{D}[s]\partial_t^k f) + F_d(\partial_t^k \text{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s).$$

Donc $P(s)\partial_t^k f^s \in F_{d,k-1}(N_f)$ et $Pf^s \in F_{d,k-1}(N_f)$.

Pour $k < 0$, on a un raisonnement analogue en utilisant le Lemme 2.2.1.

□

2.2.3 Description de $\text{bigr}N_f$ dans le cas h -saturé

Proposition 2.2.4. *Si $\text{gr}^V(\mathbf{R}(N_f))$ est h -saturé, alors le $\text{bigr}(\mathcal{D}_{x,t})$ -module $\text{bigr}(N_f)$ admet la présentation :*

$$\text{bigr}(N_f) \simeq \frac{\text{bigr}(\mathcal{D}_{x,t})}{(f, (f'_i \tau), \text{gr}^F(\text{ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)))}.$$

Preuve Soit $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$ une base F -involutive de $\text{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s$. On sait (Proposition 2.2.1) que $\text{gr}^V(\mathbf{R}N_f)$ admet la présentation suivante (où on omet les vecteurs de décalage) :

$$\left(\text{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t}^{(h)}) \right)^{1+n+r} \xrightarrow{\phi_1} \text{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t}^{(h)}) \rightarrow \text{gr}^V(\mathbf{R}(N_f)) \rightarrow 0$$

où ϕ_1 envoie la base canonique sur les éléments $f, (f'_i \partial_t), (H(P_i))$. Sous l'hypothèse de h -saturation, on obtient une présentation F -filtrée de $\text{gr}^V(N_f)$ en déshomogénéisant cette présentation (i.e. en faisant $h = 1$ dans la matrice de ϕ_1) d'après la Proposition 1.2.2. On gradue alors par rapport à la filtration F (i.e. on prend les F -symboles dans la matrice ϕ_1), ce qui fournit une présentation bigraduée de $\text{bigr}(N_f)$ d'après le Lemme 1.2.2 sous l'hypothèse de h -saturation.

2.2.4 Algorithme avec Singular dans le cas h -saturé

Soit $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. On peut tester avec le logiciel Singular ([13]) la h -saturation de $\text{gr}^V \mathbf{R}(N_f)$, et calculer les nombres de Betti bifiltrés dans le cas h -saturé.

On va donner un algorithme complet. Dans celui-ci, on calcule dans un premier temps des générateurs de $\text{ann}_{\text{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t}^{(h)})}(\delta)$. Pour ce faire, on utilise la description donnée par la Proposition 2.2.1 et on détermine $\text{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s$. On détermine en fait $\text{ann}_{A_n[s]} f^s$, ce qui suffit en vertu du lemme suivant.

Lemme 2.2.4. $\mathcal{D}[s] \text{ann}_{A_n[s]} f^s = \text{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s$

Preuve Soit $I = \text{ann}_{A_n[s]} f^s$ idéal de $A_n[s]$. On a une suite exacte

$$0 \rightarrow I \rightarrow A_n[s] \rightarrow A_n[s]f^s \rightarrow 0,$$

donc par exactitude à droite du produit tensoriel par $\mathcal{D}[s]$ au-dessus de $A_n[s]$, une suite exacte

$$\mathcal{D}[s] \otimes_{A_n[s]} I \xrightarrow{\phi} \mathcal{D}[s] \rightarrow \mathcal{D}[s] \otimes_{A_n[s]} A_n[s]f^s \rightarrow 0,$$

et $\text{im}(\phi) = \mathcal{D}[s]I$.

Il suffit alors d'établir : $\mathcal{D}[s] \otimes_{A_n[s]} A_n[s]f^s \simeq \mathcal{D}[s]f^s$.

Or on a $\mathcal{D}[s] \otimes_{A_n[s]} A_n[s]f^s \simeq \mathbb{C}\{x\} \otimes_{\mathbb{C}[x]} A_n[s]f^s$, et une suite exacte

$$0 \rightarrow A_n[s]f^s \rightarrow \mathbb{C}[x] \left[\frac{1}{f}, s \right] f^s,$$

d'où par platitude de $\mathbb{C}\{x\}$ sur $\mathbb{C}[x]$, une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{C}\{x\} \otimes_{\mathbb{C}[x]} A_n[s]f^s \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}\{x\} \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathbb{C}[x] \left[\frac{1}{f}, s \right] f^s.$$

ψ est l'isomorphisme souhaité car $\mathbb{C}\{x\} \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathbb{C}[x] \left[\frac{1}{f}, s \right] f^s \simeq \mathbb{C}\{x\} \left[\frac{1}{f}, s \right] f^s$ et $\text{im}(\psi) = \mathcal{D}[s]f^s$. $\square$.

Plus précisément, on veut une base F -involutive de $\text{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s$, il suffit de calculer une base F -involutive de $\text{ann}_{A_n[s]} f^s$, d'après le lemme précédent et le lemme 1.1.2 de [1]. Nous prenons comme exemple la fonction $f = x^4 + y^5 + x^2y^3$.

```
LIB "dmod.lib";
ring R=0,(x,y),rp;
poly f=x^4+y^5+x^2y^3;
def A = Sannfs(f);
setring A;
ring R2=0,(x,y,Dx,Dy,s,h),wp(0,0,1,1,1,1);
matrix C[6][6]=1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1;
matrix D[6][6]=
0,0,1,0,0,0,
0,0,0,1,0;
```



```

ncalgebra(C,D);
ideal I1=fetch(A,LD);
ideal I2=std(I1);

```

$R2$ est l'anneau $A_n[s]$ (avec une variable h d'homogénéisation), $I2$ est une base de Gröbner de $\text{ann}_{A_n[s]} f^s$.

```

ideal I3=homog(I2,h);
ring W = 0,(x,y,t,Dx,Dy,Dt,h),wp(0,0,0,1,1,1,0);
matrix
C1[7][7]=1,1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,1;
matrix D1[7][7]=
0,0,0,h,0,0,0,
0,0,0,0,h,0,0,
0,0,0,0,0,h,0;
ncalgebra(C1,D1);
map M=R2,x,y,Dx,Dy,-Dt*t,h;
ideal I4=M(I3);
poly f0=imap(R,f);
poly f1=diff(f0,x)*Dt;
poly f2=diff(f0,y)*Dt;
ideal I5=I4,f0,f1,f2;

```

L'anneau W est $\text{gr}^V(A_{n+1}^{(h)})$ et $I5$ engendre l'idéal $\text{ann}_W \delta$.

On teste ensuite la h -saturation du module

$$M = \frac{\text{gr}^V(A_{n+1}^{(h)})}{\langle f, (f'_i \partial_t), (P_i) \rangle}$$

avec (P_i) une base F -involutive de $\text{ann}_{A_n[s]} f^s$. Mais on a

$$\text{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t}^{(h)})M = \text{gr}^V(\mathbf{R}\mathcal{D}_{x,t}f^s)$$

Si M est h -saturé, alors $\text{gr}^V(\mathbf{R}\mathcal{D}_{x,t}f^s)$ l'est aussi par platitude de $\text{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t}^{(h)})$ sur $\text{gr}^V(A_{n+1}^{(h)})$.

```
option(prot);option(redSB);
ideal I6=slimgb(I5);
```

$I6$ est une base de Gröbner de $I5$. Si on essaie de calculer à ce niveau (non commutatif) les relations entre les générateurs de $I5$ par la commande `syz(I6);`, la machine plante, d'où l'intérêt de se ramener au commutatif.

```
ideal I6b=lead(I6);
ideal I6b=lead(I6);
subst(I6b,h,0);
```

Si la liste donnée par la dernière commande ne contient aucun 0, cela signifie que h ne figure pas dans les exposants privilégiés des éléments de la base de Gröbner, et cela implique la h -saturation de M d'après la Proposition 1.2.4. C'est le cas ici. On passe alors en commutatif.

```
ideal I7=subst(I5,h,0);
ring R3=0,(x,y,t,Dx,Dy,Dt),ls;
ideal I8=imap(W,I7);
mres(I8,0);
```

$R3$ est l'anneau $\text{bigr}(\mathcal{D}_{x,t})$ muni d'un ordre adapté au calcul des bases standard. $I6$ est l'idéal obtenu à partir de $I5$ en faisant $h = 0$, c'est donc $\text{ann}_{\text{bigr}(\mathcal{D}_{x,t})} \delta$ grâce à la condition de h -saturation. La dernière commande fournit instantanément les nombres de Betti 1, 6, 8, 3.

Notons que la fonction $f = x^4 + y^5 + x^2y^3$ n'est pas Euler-homogène mais à singularité isolée (donc telle que $J(f)$ est de type linéaire), c'est un exemple de fonction ne satisfaisant pas tout à fait les hypothèses de la Proposition 2.2.2 et telle que $\text{gr}^V(\mathbf{R}(N_f))$ est h -saturé.

2.3 Invariants liés à $\mathcal{D}[s]f^s$

On considère le $\mathcal{D}[s]$ -module $\mathcal{D}[s]f^s$ muni de la bonne filtration $F_d(\mathcal{D}[s]f^s) = F_d(\mathcal{D}[s])f^s$. On s'intéresse à ses nombres de Betti. Ceux-ci sont en pratique plus faciles à calculer que les nombres de Betti de N_f , en revanche on ne sait pas comment étendre ces invariants à une variété quelconque. On ne traite ici que le cas $p = 1$.

Exemple : Le cas lisse Supposons $f = x_1 \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$. Déterminons $\text{ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$. On a $(x_1\partial_{x_1} - s)f^s = 0$ et pour $i \geq 2$, $\partial_{x_i}f^s = 0$. Modulo ces éléments, si $P \in \text{ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$, alors $P = \sum g_i(x)\partial_{x_1}^i$, avec $g_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}$. On a

$$0 = Pf^s = \sum g_i(x)s^i f^{s-i}$$

donc pour tout $i, g_i = 0$ et $P = 0$. Ainsi $\text{ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ est engendré par $x_1\partial_{x_1} - s, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}$, ceci de manière involutive.

Donc

$$\mathcal{D}[s]f^s \simeq \frac{\mathcal{D}[s]}{(x_1\partial_{x_1} - s, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n})}$$

et

$$\text{gr}^F(\mathcal{D}[s]f^s) \simeq \frac{\mathcal{O}[\xi, s]}{(x_1\xi_1 - s, \xi_2, \dots, \xi_n)}.$$

La résolution minimale graduée de $\text{gr}^F(\mathcal{D}[s]f^s)$ est le complexe de Koszul $K(\mathcal{O}[\xi, s]; x_1\xi_1 - s, \xi_2, \dots, \xi_n)$, donc les nombres de Betti sont $\binom{n}{i}$, pour $i = 0, \dots, n$.

2.3.1 Invariants analytiques pour les hypersurfaces

Soit f réduite. On dit que f et g ont le même type analytique si il existe un isomorphisme analytique local $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \simeq (\mathbb{C}^n, 0)$ tel que $\varphi(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$.

Proposition 2.3.1. *Les nombres de Betti de $\mathcal{D}[s]f^s$ sont des invariants analytiques de f .*

Preuve En vertu du Nullstellensatz, il suffit de vérifier qu'effectuer un changement de variable ou multiplier f par une unité n'affecte pas les nombres de Betti.

1. Soit $u \in \mathbb{C}\{x\}$ une unité, montrons que $\mathcal{D}[s]f^s$ et $\mathcal{D}[s](uf)^s$ ont les mêmes nombres de Betti.

On définit un automorphisme ϕ de l'anneau $\mathcal{D}[s]$ par l'identité sur $\mathcal{O}[s]$ et

$$\phi(\partial_{x_i}) = \partial_{x_i} - su^{-1}\partial_{x_i}(u).$$

ϕ^{-1} est défini par l'identité sur $\mathcal{O}[s]$ et $\phi^{-1}(\partial_{x_i}) = \partial_{x_i} + su^{-1}\partial_{x_i}(u)$. On constate que ϕ est un isomorphisme filtré.

Ensuite, on a $\phi(\text{ann}f^s) = \text{ann}(uf)^s$. Pour cela, on utilise les identifications

$$\mathcal{O}\left[\frac{1}{f}, s\right]f^s = \mathcal{O}\left[\frac{1}{f}, s\right] \simeq \mathcal{O}\left[\frac{1}{uf}, s\right] = \mathcal{O}\left[\frac{1}{uf}, s\right](uf)^s$$

et on affirme que pour $P \in \mathcal{D}[s]$, $Pf^s = \phi(P)(uf)^s$. Vérifions-le pour $P = \partial_{x_i}$, l'assertion étant évidente sur $\mathcal{O}[s]$.

$$\begin{aligned} \phi(\partial_{x_i})(uf)^s &= (\partial_{x_i} - su^{-1}\partial_{x_i}(u))(uf)^s \\ &= (\partial_{x_i}(uf)s(uf)^{-1} - su^{-1}\partial_{x_i}(u))(uf)^s \\ &= su\partial_{x_i}(f)(uf)^{-1}(uf)^s \end{aligned}$$

que l'on identifie à $\partial_{x_i} f^s$.

On a ainsi établi un isomorphisme entre $\mathcal{D}[s]f^s$ et $\mathcal{D}[s](uf)^s$ au-dessus d'un automorphisme filtré de $\mathcal{D}[s]$, ce qui permet de conclure.

2. Soit $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \simeq (\mathbb{C}^n, 0)$ un isomorphisme analytique. Montrons que $\mathcal{D}[s]f^s$ et $\mathcal{D}[s](f \circ \varphi)^s$ admettent les mêmes nombres de Betti.

On étend φ en φ_* un automorphisme filtré de l'anneau $\mathcal{D}$, puis φ_* en un automorphisme filtré de l'anneau $\mathcal{D}[s]$ par $\varphi_*(s) = s$. On vérifie $\varphi_*^{-1}(\text{ann} f^s) = \text{ann}(f \circ \varphi)^s$ donc les modules $\mathcal{D}[s]f^s$ et $\mathcal{D}[s](f \circ \varphi)^s$ sont isomorphes au-dessus de l'automorphisme φ_* . $\square$

2.3.2 Algorithme avec Singular

Les nombres de Betti de $\mathcal{D}[s]f^s$ sont plus facilement calculables en machine, car on passe en commutatif dans tous les cas. Voici un algorithme avec Singular pour les courbes algébriques, avec comme exemple $f = x^7 + y^8 + x^3y^5$. On calcule d'abord $\text{ann}_{A_n[s]} f^s$.

```
LIB "dmod.lib";
ring R=0,(x,y),dp;
poly f=x^7+y^8+x^3*y^5;
def A = Sannfs(f);
setring A;
```

On définit l'anneau $R2 = A_n[s]$ muni d'un ordre adapté à la F -filtration, avec une variable h d'homogénéisation :

```
ring R2=0,(x,y,Dx,Dy,s,h),wp(0,0,1,1,1,1);
matrix C[6][6]=1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1,
1,1,1,1,1,1;
matrix D[6][6]=
0,0,1,0,0,0,
0,0,0,1,0,0;
nc_algebra(C,D);
```

On calcule une base de Gröbner de $\text{ann}_{A_n[s]} f^s$, c'est une base F -involutive de $\text{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s$:

```
ideal I1=fetch(A,LD);
ideal I2=std(I1);
```

On passe en commutatif et on calcule une résolution minimale :

```
ideal I3=subst(homog(I2,h),h,0);  
ring R3=0,(x,y,Dx,Dy,s),ls;  
ideal I4=imap(R2,I3);  
mres(I4,0);
```

$R3$ est l'anneau $\text{gr}^F(\mathcal{D}[s])$, $I4$ est l'idéal $\text{ann}_{\text{gr}^F(\mathcal{D}[s])}\delta$, et la dernière commande fournit instantanément les nombres de Betti 1, 5, 5, 1.

Chapitre 3

Singularités isolées et quasi-homogénéité

Soit $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ définissant une singularité isolée. On s'intéresse au module bifiltré $N_f = \mathcal{D}_{x,t} f^s$. Commençons par donner une décomposition de N_f . Notons toujours pour $i = 1, \dots, n$, $f'_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ et $J(f)$ l'idéal jacobien de f dans $\mathbb{C}\{x\}$ engendré par $f'_1, \dots, f'_n$. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie supplémentaire de $J(f)$ dans $\mathbb{C}\{x\}$. $\mathcal{D}$ désigne toujours l'anneau des opérateurs différentiels sur $\mathbb{C}^n$. Pour alléger l'écriture, on notera parfois ∂_i l'opérateur ∂_{x_i} . Notons $\mathbb{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels sur $\mathbb{C}^n$ à coefficients constants, i.e.

$$\mathbb{D} = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \mathbb{C} \partial_x^\beta.$$

Proposition 3.0.2 ([3], A.1.4). *On a une décomposition en somme directe de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels*

$$N_f = \mathcal{D}J(f)f^s \oplus (\oplus_{i \geq 0} \mathbb{D}E \partial_t^i f^s)$$

et $\forall i \geq 0$, l'application

$$\mathbb{D}E \rightarrow \mathbb{D}E \partial_t^i f^s$$

qui à $P \in \mathbb{D}E$ associe $P \partial_t^i f^s$ est injective.

Explicitons la manière dont on obtient cette décomposition. On écrit les opérateurs de $\mathcal{D}_{x,t}$ à droite, i.e. sous la forme

$$\sum \lambda_{\alpha\nu\beta\mu} \partial_x^\beta \partial_t^\mu x^\alpha t^\nu.$$

Comme $t.f^s = f.f^s$, on a

$$\mathcal{D}_{x,t} f^s = \sum \mathcal{D} \partial_t^i f^s.$$

Ensuite

$$f'_i \partial_t f^s = -\partial_{x_i} f^s,$$

alors

$$\sum \mathcal{D} \partial_t^i f^s = \mathcal{D} J(f) f^s + \sum \mathbb{D} E \partial_t^i f^s$$

en divisant les coefficients analytiques par $f'_1, \dots, f'_n$. L'unicité de la décomposition provient de la régularité de la suite $f'_1, \dots, f'_n$.

Une propriété importante des singularités isolées est que $J(f)$ est de type linéaire. Reprenons le morphisme $\phi : \mathcal{O}[\xi, \dots, \xi_n] \rightarrow \oplus J(f)^i T^i$ qui envoie ξ_i sur $f'_i T$.

Proposition 3.0.3 ([5], Proposition 3.3). *$J(f)$ est de type linéaire et $\ker \phi$ est engendré par les éléments $f'_i \xi_j - f'_j \xi_i$, pour $1 \leq i < j \leq n$.*

Notation : Si $1 \leq i < j \leq n$, nous notons $S_{i,j} = f'_i \xi_j - f'_j \xi_i$.

3.1 Singularités isolées quasi homogènes

Supposons maintenant que f est quasi homogène, i.e. il existe des poids $w_1, \dots, w_n$ avec $0 < w_i < 1$, tels que le champ d'Euler $\theta = \sum w_i x_i \partial_{x_i}$ vérifie $\theta(f) = f$.

Nous allons calculer les nombres de Betti $\beta_i(f)$. Pour cela, nous nous ramenons au commutatif et nous utiliserons le $\mathcal{D}[s]$ -module filtré $\mathcal{D}[s]f^s$, dont nous calculons aussi les nombres de Betti.

3.1.1 Réduction au commutatif

Proposition 3.1.1. *Pour $k \geq 0$,*

$$V_k(N_f) = \mathcal{D} J(f) f^s \oplus (\oplus_{0 \leq i \leq k} \mathbb{D} E \partial_t^i f^s),$$

$$F_{d,k}(N_f) = F_d(\mathcal{D}) J(f) f^s \oplus (\oplus_{0 \leq i \leq k} F_{d-i}(\mathbb{D}) E \partial_t^i f^s).$$

Pour $k \leq 0$,

$$V_k(N_f) = \mathcal{D} f^{-k} f^s,$$

$$F_{d,k}(N_f) = F_d(\mathcal{D}) f^{-k} f^s.$$

Preuve Donnons le schéma de la preuve. On a $\theta(f^s) = sf^s$ et comme $s = -\partial_t t$, on en déduit

$$\partial_t t f^s = -\theta f^s \in \mathcal{D}f^s. \quad (3.1)$$

Un opérateur $P \in V_k(\mathcal{D}_{x,t})$ s'écrit

$$P = \sum_{i \geq -k, \beta, l} \partial_x^\beta g_{l,i,\beta}(x) t^i (\partial_t t)^l$$

si $k \leq 0$, ou

$$P = \sum_{i \leq k, \beta, l} \partial_x^\beta g_{l,i,\beta}(x) \partial_t^i (\partial_t t)^l + Q$$

si $k > 0$, avec $Q \in V_0(\mathcal{D}_{x,t})$. En appliquant P à f^s , on peut éliminer les $(\partial_t t)^l$ en utilisant la formule (3.1). On décompose enfin les coefficients $g \in \mathbb{C}\{x\}$ dans $J(f) \oplus E$. On en déduit les décompositions de $V_k(N_f)$. Les assertions sur la bifiltration en découlent, car les changements d'écriture opérés laissent stables le F -ordre.

Proposition 3.1.2. *Pour tous d, k , on a $F_{d,k}(N_f) \cap F_{d+1,k-1}(N_f) \subset F_{d,k-1}(N_f)$.*

Preuve Si $k \geq 1$, c'est évident : il s'agit de l'unicité de l'écriture dans la décomposition de N_f . Supposons $k \leq 0$. Il s'agit de montrer : si $P f^l f^s = Q f^{l+1} f^s$ avec $P \in F_d(\mathcal{D}), Q \in F_{d+1}(\mathcal{D}), l \in \mathbb{N}$, alors $P f^l f^s = H f^{l+1} f^s$, avec $H \in F_d(\mathcal{D})$. On peut supposer $l = 0$ (faire agir t^{-l}) et $Q \notin F_d(\mathcal{D})$ (sinon c'est gagné). Désignons par σ le F -symbole d'un opérateur. On a $(P - Qf)f^s = 0$, alors

$$0 = \sigma(P - Qf)(f'_1, \dots, f'_n) = -f \sigma(Q)(f'_1, \dots, f'_n).$$

Donc $\sigma(Q)(f'_1, \dots, f'_n) = 0$ et on peut écrire

$$\sigma(Q) = \sum_{i < j} B_{i,j}(\xi) \cdot (f'_i \xi_j - f'_j \xi_i)$$

avec $B_{i,j} \in \mathbb{C}\{x\}[\xi]$ homogène en ξ , d'après la Proposition 3.0.3. Soit

$$H = Q - \sum B_{i,j}(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}) \cdot (f'_i \partial_{x_j} - f'_j \partial_{x_i}).$$

On a $Hf^s = Qf^s$ et H a l'ordre voulu. $\square$

Par passage au commutatif, on va s'intéresser au module $\text{bigr}(N_f)$ sur l'anneau

$$R = \text{bigr}(\mathcal{D}_{x,t}) \simeq \mathbb{C}\{x\}[t, \xi, \tau].$$

On a pour $k \leq 0$,

$$\text{bigr}_{d,k}(N_f) = \frac{F_d(\mathcal{D})f^{-k}f^s}{F_{d-1}(\mathcal{D})f^{-k}f^s + F_d(\mathcal{D})f^{-k+1}f^s}$$

et pour $k > 0$,

$$\text{bigr}_{d,k}(N_f) = \text{gr}_{d-k}^F(\mathbb{D})E\partial_t^k f^s$$

avec $\text{gr}_{d-k}^F(\mathbb{D}) = \oplus_{|\beta|=d-k} \mathbb{C}\partial_x^\beta$ qui s'identifie à un sous-espace de $F_{d-k}(\mathbb{D})$.

De plus, $\text{bigr}(N_f)$ est engendré sur R par la classe de $f^s \in \text{bigr}_{0,0}(N_f)$ que nous noterons δ . Notons $\chi = \sum w_i x_i \xi_i$.

Proposition 3.1.3. *L'annulateur de δ dans R est l'idéal engendré par $f, t\tau + \chi, f'_i \xi_j - f'_j \xi_i$ pour $0 \leq i < j \leq n, f'_i \tau$ pour $0 \leq i \leq n$.*

Preuve On sait que les éléments suivants de $\mathcal{D}_{x,t}$ annulent $f^s : t - f, \partial_{x_i} + f'_i \partial_t, f'_i \partial_{x_j} - f'_j \partial_{x_i}, \sum w_i x_i \partial_{x_i} + \partial_t t$. On en déduit que les éléments de R cités dans la proposition annulent δ .

Soit P dans l'annulateur de δ , on peut le supposer bihomogène de degré (d, k) . Comme $t\tau + \sum w_i x_i \xi_i \in I$, $P \equiv \sum_{\alpha \geq 0} g_\alpha(x, \xi) t^\alpha + \sum_{\alpha > 0} h_\alpha(x, \xi) \tau^\alpha$ modulo I . Mais P étant bihomogène, on a $P \equiv g(x, \xi) \tau^\alpha$ ou $P \equiv g(x, \xi) t^\alpha$. Si $P \equiv g(x, \xi) t^\alpha$, alors

$$\begin{aligned} P \cdot \delta = 0 &\Leftrightarrow g(x, \partial_x) f^\alpha f^s \in F_{d-1}(\mathcal{D}) f^\alpha f^s + F_d(\mathcal{D}) f^{\alpha+1} f^s \\ &\Leftrightarrow g(x, \partial_x) = P_1 + P_2 f + \sum A_{i,j} \cdot (f'_i \partial_{x_j} - f'_j \partial_{x_i}), \end{aligned}$$

avec $A_{i,j} \in F_{d-1}(\mathcal{D})$, $P_1 \in F_{d-1}(\mathcal{D})$, $P_2 \in F_d(\mathcal{D})$. Alors P est dans l'idéal de R engendré par f et les $f'_i \xi_j - f'_j \xi_i$.

Si $P \equiv g(x, \xi) \tau^\alpha$, comme $f'_i \tau \in I$, on a $P \equiv \sum \xi^\beta h_\beta(x) \tau^\alpha$ avec $h_\beta \in E$. Alors $P \cdot \delta = 0 \Leftrightarrow \sum (\partial_x)^\beta h_\beta(x) (\partial_t)^\alpha f^s = 0$. Cela implique $\sum (\partial_x)^\beta h_\beta(x) (\partial_t)^\alpha = 0$ (d'après la Proposition 3.0.2) et $\forall \beta, h_\beta = 0$. Par suite $P \equiv 0$ modulo I . $\square$

Remarquons que f étant quasi homogène et $J(f)$ étant de type linéaire, les Propositions 3.1.2 et 3.1.3 se déduisent des Propositions 2.2.2 et 2.2.4 et de la connaissance du noyau du morphisme $\mathcal{O}[\xi] \rightarrow \oplus (J(f))^i T^i$. Nous avons préféré donner des preuves directes, dans la mesure où la structure de N_f rendait plus simples les démonstrations de ces assertions. De plus, la structure de N_f introduite nous sera utile à la section 3.3.

3.1.2 Nombres de Betti de $\mathcal{D}[s]f^s$ et $\frac{\mathcal{D}[s]f^s}{\mathcal{D}[s]f^{s+1}}$

On considère le $\mathcal{D}[s]$ -module $\mathcal{D}[s]f^s$ muni de la bonne F -filtration

$$F_d(\mathcal{D}[s]f^s) = F_d(\mathcal{D}[s])f^s$$

où on rappelle que pour la filtration $F_d(\mathcal{D}[s])$, les variables $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, s$ ont le poids 1 et les variables $x_1, \dots, x_n$ ont le poids 0. On étudie les nombres de Betti de $\mathcal{D}[s]f^s$ car ce sont des objets d'intérêt en soi, et ils nous serviront au calcul des nombres de Betti de N_f . Dans notre cas, f est une singularité isolée quasi homogène, et on a d'après la Proposition 3.0.3 et le Lemme 2.2.2 :

$$\mathrm{gr}^F(\mathcal{D}[s]f^s) = \frac{\mathrm{gr}^F(\mathcal{D}[s])}{< s - \chi, (S_{i,j}) >} \simeq \frac{\mathcal{O}[\xi, s]}{< s - \chi, (S_{i,j}) >}.$$

On va donner la résolution minimale graduée du module $\frac{\mathcal{O}[\xi]}{\sum \mathcal{O}[\xi]S_{i,j}}$.

Lemme 3.1.1 (K. Saito, cf. [24]). *Soit R un anneau noethérien commutatif, et $\omega_1, \dots, \omega_k \in R^n$. Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal engendré par les mineurs d'ordre k de la matrice dont les colonnes sont $\omega_1, \dots, \omega_k$. Soit l la profondeur de $\mathfrak{a}$. Alors si $0 \leq p < l$, on a :*

$$\forall \omega \in \bigwedge^p R^n, \omega \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0 \Rightarrow \omega \in \sum \omega_i \wedge \bigwedge^{p-1} R^n$$

Soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathcal{O}[\xi]^n$ et notons $f' = \sum f'_i e_i$, $\xi = \sum \xi_i e_i$. Considérons le double complexe suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \longrightarrow & \bigwedge^{n-4} \mathcal{O}[\xi]^n & \xrightarrow{f' \wedge} & \bigwedge^{n-3} \mathcal{O}[\xi]^n & \xrightarrow{f' \wedge} & \bigwedge^{n-2} \mathcal{O}[\xi]^n \\ & & \uparrow & & \uparrow \xi \wedge & & \uparrow \xi \wedge \\ & & \dots & \longrightarrow & \bigwedge^{n-4} \mathcal{O}[\xi]^n & \xrightarrow{f' \wedge} & \bigwedge^{n-3} \mathcal{O}[\xi]^n \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \xi \wedge \\ & & & & \dots & \longrightarrow & \bigwedge^{n-4} \mathcal{O}[\xi]^n \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & \dots \end{array}$$

où le terme en haut à droite est placé en degré $(0, 0)$. Soit K le complexe simple associé.

Lemme 3.1.2. *Le complexe*

$$K \xrightarrow{f' \wedge \xi \wedge} \bigwedge^n \mathcal{O}[\xi]^n \longrightarrow 0$$

est la résolution minimale bigraduée du module $\frac{\mathcal{O}[\xi]}{\sum \mathcal{O}[\xi]S_{i,j}}$. Ses nombres de Betti sont donc : $1, \binom{n}{2}, 2\binom{n}{3}, \dots, n-1$.

Preuve Une colonne du double complexe K est tirée du complexe de Koszul de $\xi_1, \dots, \xi_n$. Ces éléments formant une suite régulière, cette colonne est exacte sauf en degré 0. En considérant la suite spectrale du double complexe associée à la première filtration, on obtient que K est quasi isomorphe au complexe L suivant :

$$0 \rightarrow \bigwedge^0 \mathcal{O}[\xi]^n \xrightarrow{f' \wedge} \frac{\bigwedge^1 \mathcal{O}[\xi]^n}{\xi \wedge \bigwedge^0 \mathcal{O}[\xi]^n} \xrightarrow{f' \wedge} \frac{\bigwedge^2 \mathcal{O}[\xi]^n}{\xi \wedge \bigwedge^1 \mathcal{O}[\xi]^n} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{\bigwedge^{n-2} \mathcal{O}[\xi]^n}{\xi \wedge \bigwedge^{n-3} \mathcal{O}[\xi]^n} \rightarrow 0$$

le terme en degré 0 étant $\frac{\bigwedge^{n-2} \mathcal{O}[\xi]^n}{\xi \wedge \bigwedge^{n-3} \mathcal{O}[\xi]^n}$.

L'idéal $\sum \mathcal{O}[\xi] S_{i,j}$ est de dimension inférieure à $n+1$. En effet, il définit la variété caractéristique du $\mathcal{D}$ -module $\mathcal{D}[s]f^s = \mathcal{D}f^s$ et cette dernière est de dimension inférieure à $n+1$ en tous points, d'après [11], Proposition 31. Donc l'idéal $\sum \mathcal{O}[\xi] S_{i,j}$ est de profondeur supérieure à $2n - (n+1) = n-1$. Le lemme de Saito implique alors que L est acyclique sauf en degré 0. En effet, soit $\omega \in \bigwedge^{n-i} \mathcal{O}[\xi]^n$, avec $i \geq 3$, telle que $f' \wedge \omega = \xi \wedge \eta$. Alors $\xi \wedge f' \wedge \omega = 0$ et $\omega = f' \wedge \alpha + \xi \wedge \beta$ d'après le lemme de Saito. Donc $\bar{\omega} = f' \wedge \bar{\alpha}$ dans $\frac{\bigwedge^{n-i} \mathcal{O}[\xi]^n}{\xi \wedge \bigwedge^{n-i-1} \mathcal{O}[\xi]^n}$. Ainsi $H^p(K) = 0$ si $p < 0$. Encore d'après le lemme de Saito, l'image de $K^{-1} \rightarrow K^0$ est égale au noyau de l'application $K^0 \xrightarrow{f' \wedge \xi \wedge} \bigwedge^n \mathcal{O}[\xi]^n$. Or l'image de cette application est précisément l'idéal $\sum \mathcal{O}[\xi] S_{i,j}$ en identifiant $\mathcal{O}[\xi]$ et $\bigwedge^n \mathcal{O}[\xi]^n$. $\square$

Avant de poursuivre le calcul des nombres de Betti de $\mathcal{D}[s]f^s$, nous allons donner explicitement la résolution du $\mathcal{D}$ -module F -filtré $\mathcal{D}f^s$. On a un isomorphisme filtré

$$\mathcal{D}f^s \simeq \frac{\mathcal{D}}{(f'_i \partial_j - f'_j \partial_i)_{i < j}}$$

où le membre de droite est muni de la filtration quotient. On a donc

$$\text{gr}^F(\mathcal{D}f^s) \simeq \frac{\mathcal{O}[\xi]}{(S_{i,j})}$$

dont la résolution est donnée par le complexe K . Pour les besoins de l'algèbre non commutative, réécrivons le double complexe dont il est issu au moyen des complexes de Koszul $K'(\mathcal{O}[\xi]; \xi_1, \dots, \xi_n)$ et $K'(\mathcal{O}[\xi]; f'_1, \dots, f'_n)$ munis des différentielles respectives δ_ξ et $\delta_{f'}$. On forme le double complexe suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \Lambda^4 \mathcal{O}[\xi]^n & \xrightarrow{\delta_{f'}} & \Lambda^3 \mathcal{O}[\xi]^n & \xrightarrow{\delta_{f'}} & \Lambda^2 \mathcal{O}[\xi]^n \\
& & \uparrow & & \uparrow \delta_\xi & & \uparrow \delta_\xi \\
& & \cdots & \longrightarrow & \Lambda^4 \mathcal{O}[\xi]^n & \xrightarrow{\delta_{f'}} & \Lambda^3 \mathcal{O}[\xi]^n \\
& & & & \uparrow & & \uparrow \delta_\xi \\
& & & & \cdots & \longrightarrow & \Lambda^4 \mathcal{O}[\xi]^n \\
& & & & & & \uparrow \\
& & & & & & \cdots
\end{array}$$

où le terme en haut à droite est placé en degré $(0,0)$. Le complexe simple associé K' muni de l'augmentation $\Lambda^2 \mathcal{O}[\xi]^n \rightarrow \mathcal{O}[\xi]$ qui envoie $e_i \wedge e_j$ sur $S_{i,j}$, est la résolution minimale de $\mathcal{O}[\xi]/(S_{i,j})$. Nous allons relever cette résolution au niveau des $\mathcal{D}$ -modules filtrés.

On a des complexes de Koszul $K'(\mathcal{D}; f'_1, \dots, f'_n)$ et $K'(\mathcal{D}; \partial_1, \dots, \partial_n)$ munis des différentielles respectives $\delta_{f'}$ et δ_∂ .

Lemme 3.1.3. *On a un double complexe*

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \mathcal{D} \otimes \Lambda^4 \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\delta_{f'}} & \mathcal{D} \otimes \Lambda^3 \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\delta_{f'}} & \mathcal{D} \otimes \Lambda^2 \mathbb{C}^n \\
& & \uparrow & & \uparrow \delta_\partial & & \uparrow \delta_\partial \\
& & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{D} \otimes \Lambda^4 \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\delta_{f'}} & \mathcal{D} \otimes \Lambda^3 \mathbb{C}^n \\
& & & & \uparrow & & \uparrow \delta_\partial \\
& & & & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{D} \otimes \Lambda^4 \mathbb{C}^n \\
& & & & & & \uparrow \\
& & & & & & \cdots
\end{array}$$

Le complexe simple associé (avec différentielles ϕ_i , $i \geq 2$), muni de l'augmentation $\phi_1 : \mathcal{D} \otimes \Lambda^2 \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{D}$ qui envoie $1 \otimes e_i \wedge e_j$ sur $f'_i \partial_j - f'_j \partial_i$, est la résolution minimale filtrée (avec les décalages évidents) de $\mathcal{D}f^s$.

Preuve Montrons qu'on a bien un complexe. Remarquons tout d'abord que $f'_i \partial_j - f'_j \partial_i = \partial_j f'_i - \partial_i f'_j$. Soit $i < j < k$. On a

$$\begin{aligned}
\phi_1 \circ \phi_2(e_i \wedge e_j \wedge e_k, 0) &= \phi_1(\partial_i \otimes e_j \wedge e_k - \partial_j \otimes e_i \wedge e_k - \partial_k \otimes e_i \wedge e_j) \\
&= \partial_i(\partial_k f'_j - \partial_j f'_k) - \partial_j(\partial_k f'_i - \partial_i f'_k) + \partial_k(\partial_j f'_i - \partial_i f'_j) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de même

$$\phi_1 \circ \phi_2(0, e_i \wedge e_j \wedge e_k) = f'_i(f'_j \partial_k - f'_k \partial_j) - f'_j(f'_i \partial_k - f'_k \partial_i) + f'_k(f'_i \partial_j - f'_j \partial_i) = 0$$

donc $\phi_1 \circ \phi_2 = 0$.

Pour avoir $\phi_i \circ \phi_{i+1} = 0$ pour $i \geq 2$, il suffit de montrer qu'on est bien en présence d'un double complexe au départ, i.e. $\delta_\partial \circ \delta_{f'} = -\delta_{f'} \circ \delta_\partial$. Soit I un multiindice de longueur l . Notons $I^k = I \setminus I_k$. On a

$$\begin{aligned} \delta_{f'} \circ \delta_\partial(1 \otimes e_I) &= \delta_{f'} \left(\sum (-1)^{k-1} \partial_{I_k} \otimes e_{I \setminus I_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{l+1} (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^l (-1)^{j-1} \partial_{I_k} f'_{I_j^k} \otimes e_{I^k \setminus I_j^k} \\ &= \sum_k (-1)^{k-1} \sum_{j < k} (-1)^{j-1} \partial_{I_k} f'_{I_j} \otimes e_{I \setminus \{I_k, I_j\}} \\ &\quad + \sum_k (-1)^{k-1} \sum_{j > k} (-1)^j \partial_{I_k} f'_{I_j} \otimes e_{I \setminus \{I_j, I_k\}} \end{aligned}$$

Dans la deuxième somme on échange les indices j et k d'où

$$\delta_{f'} \circ \delta_\partial(1 \otimes e_I) = \sum_{j < k} (-1)^{j+k-1} (\partial_{I_j} f'_{I_k} - \partial_{I_k} f'_{I_j}) \otimes e_{I \setminus \{I_j, I_k\}}.$$

On calcule de la même manière

$$\delta_\partial \circ \delta_{f'} = \sum_{j < k} (-1)^{j+k-1} (f'_{I_j} \partial_{I_k} - f'_{I_k} \partial_{I_j}) \otimes e_{I \setminus \{I_j, I_k\}} = -\delta_{f'} \circ \delta_\partial(1 \otimes e_I).$$

On a un donc bien un double complexe. On conclut par passage au gradué en utilisant le Lemme 3.1.2. $\square$

Remarque : Dans ce lemme, f n'est pas nécessairement quasi homogène, l'hypothèse de singularité isolée suffit.

Achevons maintenant l'étude des nombres de Betti de $\mathcal{D}[s]f^s$.

Proposition 3.1.4. *Les nombres de Betti de $\mathcal{D}[s]f^s$ sont $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = \binom{n}{2} + 1$, et $\forall i \geq 2, \beta_i = i \binom{n}{i+1} + (i-1) \binom{n}{i}$*

Preuve On a $\text{gr}^F(\mathcal{D}[s]f^s) \simeq \frac{\mathcal{O}[\xi, s]}{\langle s - \chi, (S_{i,j}) \rangle}$ et une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{O}[\xi, s]}{\langle (S_{i,j}) \rangle} \xrightarrow{s-\chi} \frac{\mathcal{O}[\xi, s]}{\langle (S_{i,j}) \rangle} \rightarrow \frac{\mathcal{O}[\xi, s]}{\langle s - \chi, (S_{i,j}) \rangle} \rightarrow 0$$

Le résultat se déduit alors de la connaissance de la résolution minimale $K_\bullet$ graduée de $\frac{\mathcal{O}[\xi, s]}{\langle (S_{i,j}) \rangle}$, car le cône du morphisme de complexe $K_\bullet \xrightarrow{s-\chi} K_\bullet$ est la résolution minimale souhaitée. $\square$

Nous pouvons expliciter la résolution minimale du $\mathcal{D}[s]$ -module $\mathcal{D}[s]f^s$ (cela ne nous servira pas dans la suite). Notons $\theta = \sum w_i x_i \partial_i$, de sorte que $\sigma(\theta) = \chi$. On a un isomorphisme filtré

$$\mathcal{D}[s]f^s \simeq \frac{\mathcal{D}[s]}{\langle s - \theta, (f'_i \partial_j - f'_j \partial_i) \rangle}$$

et une suite exacte courte filtrée

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{D}[s]}{\langle (f'_i \partial_j - f'_j \partial_i) \rangle} \xrightarrow{\rho} \frac{\mathcal{D}[s]}{\langle (f'_i \partial_j - f'_j \partial_i) \rangle} \rightarrow \frac{\mathcal{D}[s]}{\langle s - \theta, (f'_i \partial_j - f'_j \partial_i) \rangle} \rightarrow 0$$

avec $\rho(1) = s - \theta$, qui est bien définie car $(f'_i \partial_j - f'_j \partial_i)(s - \theta) = (s - \theta - 1 + w_i + w_j)(f'_i \partial_j - f'_j \partial_i)$. Le Lemme 3.1.3 donne (après tensorisation par $\mathcal{D}[s]$ au-dessus de $\mathcal{D}$) la résolution minimale filtrée de $\mathcal{D}[s]/(f'_i \partial_j - f'_j \partial_i)$:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow (\mathcal{D}[s] \otimes \bigwedge^4 \mathbb{C}^n)^2 \xrightarrow{\phi_3} (\mathcal{D}[s] \otimes \bigwedge^3 \mathbb{C}^n)^2 \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{D}[s] \otimes \bigwedge^2 \mathbb{C}^n \xrightarrow{\phi_1} \\ \mathcal{D}[s] \rightarrow \frac{\mathcal{D}[s]}{(f'_i \partial_j - f'_j \partial_i)_{i < j}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

avec

$$\phi_1(1 \otimes e_i \wedge e_j) = f'_i \partial_j - f'_j \partial_i,$$

$$\phi_2(\omega, \eta) = \delta_\partial(\omega) + \delta_{f'}(\eta),$$

$$\text{et pour } i \geq 3, \phi_i(\omega, \eta) = (\delta_{f'}(\omega), \delta_\partial(\omega) + \delta_{f'}(\eta)).$$

Pour obtenir une résolution de $\mathcal{D}[s]f^s$, il nous suffit de relever le morphisme ρ en un morphisme de résolutions.

Proposition 3.1.5. *Les flèches suivantes relèvent ρ :*

$$\begin{aligned} \rho_0 : \mathcal{D}[s] &\rightarrow \mathcal{D}[s] \\ 1 &\mapsto s - \theta \\ \rho_1 : \mathcal{D}[s] \otimes \bigwedge^2 \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathcal{D}[s] \otimes \bigwedge^2 \mathbb{C}^n \\ 1 \otimes e_i \wedge e_j &\mapsto (s - \theta + 1 - w_i - w_j) \otimes e_i \wedge e_j \end{aligned}$$

Pour $i \geq 2$, (si I est un multiindice, notons $w_I = \sum w_{I_k}$) :

$$\begin{aligned} \rho_i : (\mathcal{D}[s] \otimes \bigwedge^{i+1} \mathbb{C}^n)^2 &\rightarrow (\mathcal{D}[s] \otimes \bigwedge^{i+1} \mathbb{C}^n)^2 \\ (1 \otimes e_I, 0) &\mapsto ((s - \theta + i - 1 - w_I) \otimes e_I, 0) \\ (0, 1 \otimes e_I) &\mapsto (0, (s - \theta + i - w_I) \otimes e_I). \end{aligned}$$

Le cône du morphisme de complexes correspondant est la résolution minimale filtrée du $\mathcal{D}[s]$ -module $\mathcal{D}[s]f^s$.

Preuve La vérification du relèvement est élémentaire, en utilisant les commutateurs suivants :

$$[\theta, f'_i \partial_j - f'_j \partial_i] = (1 - w_i - w_j)(f'_i \partial_j - f'_j \partial_i),$$

$$[\theta, \partial_j] = -w_j \partial_j,$$

$$[\theta, f'_j] = (1 - w_j)f'_j.$$

On conclut ensuite par passage au gradué, en ajoutant les décalages évidents.

□

Considérons désormais

$$M_f = \frac{\mathcal{D}[s]f^s}{\mathcal{D}[s]f^{s+1}}.$$

C'est un $\mathcal{D}[s]$ -module muni de la bonne F -filtration $F_d(M_f) = F_d(\mathcal{D}[s])\overline{f^s}$. On a $M \simeq \text{gr}_0^V(N_f)$ au-dessus de l'isomorphisme d'anneaux $\text{gr}_0^V(\mathcal{D}_{x,t}) \simeq \mathcal{D}[s]$. De plus, comme le module $\text{gr}^V(\mathbf{R}(N_f))$ est h -saturé, on a $\text{gr}_d^F(M_f) \simeq \text{bigr}_{(d,0)}(N_f)$. De même, soit $\mathcal{L}_\bullet \rightarrow N_f \rightarrow 0$ une résolution libre bifiltrée de N_f . Elle induit une résolution F -adaptée $\text{gr}_0^V(\mathcal{L}_\bullet) \rightarrow M_f \rightarrow 0$, qui a les mêmes nombres de Betti, mais pas les mêmes décalages pour la filtration F . Cette résolution n'est pas nécessairement minimale si la première l'est.

D'après la présentation obtenue de $\text{bigr}(N_f)$ dans la Proposition 3.1.3, on obtient une présentation

$$\text{gr}^F(M_f) \simeq \frac{\mathcal{O}[\xi, s]}{\langle f, s - \chi, (S_{i,j}), (f'_i s) \rangle}$$

puis

$$\text{gr}^F(M_f) \simeq \frac{\mathcal{O}[\xi, s]}{\langle f, s - \chi, (S_{i,j}) \rangle}$$

car $f'_i s = f'_i(s - \chi) + \sum_k x_k w_k S_{i,k} + f \xi_i$.

Lemme 3.1.4. *On a une suite exacte courte graduée*

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{O}[\xi, s]}{\langle s - \chi, (S_{i,j}) \rangle} \xrightarrow{f} \frac{\mathcal{O}[\xi, s]}{\langle s - \chi, (S_{i,j}) \rangle} \rightarrow \text{gr}^F(M_f) \rightarrow 0$$

Preuve Il reste à montrer que l'application de multiplication par f est injective, c'est ce qu'affirme le Lemme 2.2.3.

Proposition 3.1.6. *Les nombres de Betti de M_f sont $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2 + \binom{n}{2}$, $\beta_2 = 2\binom{n+1}{3} + 1$, et $\forall i \geq 3$,*

$$\beta_i = (i-2) \binom{n+2}{i+1} + 2 \binom{n+1}{i+1}$$

Preuve La résolution minimale graduée de $\text{gr}^F(M)$ est le cône du morphisme f ci-dessus, les nombres de Betti se déduisent de la connaissance des nombres de Betti du module $\text{gr}^F(\mathcal{D}[s]f^s)$.

3.1.3 Les nombres de Betti de N_f

Puisqu'on a la propriété de h -saturation, on cherche les nombres de Betti du module bigradué $\frac{R}{\text{ann}\delta} \simeq \text{bigr} N_f$. Soit J l'idéal de R engendré par les $f'_i \tau$ et les $S_{i,j}$. On a une suite exacte

$$0 \rightarrow \frac{\text{ann}\delta}{J} \rightarrow \frac{R}{J} \rightarrow \frac{R}{\text{ann}\delta} \rightarrow 0.$$

On va donner les résolutions de $\frac{R}{J}$ puis de $\frac{\text{ann}\delta}{J}$ pour en déduire enfin les nombres de Betti de $\frac{R}{\text{ann}\delta}$.

La résolution de R/J

On part de la suite exacte

$$0 \rightarrow \frac{J}{\sum RS_{i,j}} \rightarrow \frac{R}{\sum RS_{i,j}} \rightarrow \frac{R}{J} \rightarrow 0.$$

On connaît la résolution minimale bigraduée du module $R/(S_{i,j})$, c'est la résolution donnée dans le Lemme 3.1.2 à laquelle on applique le foncteur exact $R \otimes_{\mathcal{O}[\xi]} -$. Résolvons maintenant le module $\frac{J}{\sum RS_{i,j}}$. Il s'identifie au sous-module de $\frac{\bigwedge^n R^n}{f' \wedge \xi \wedge \bigwedge^{n-2} R^n}$ engendré par les n -formes $f'_i \tau e_1 \wedge \dots e_n$. On a donc une surjection

$$\phi_o : \bigwedge^{n-1} R^n \rightarrow \frac{J}{\sum RS_{i,j}}$$

définie par $\phi_o(\omega) = -\tau f' \wedge \omega$.

Soit K le complexe simple associé au complexe double suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & \bigwedge^{n-3} R^n & \xrightarrow{f' \wedge} & \bigwedge^{n-2} R^n & \xrightarrow{f' \wedge} & \bigwedge^{n-1} R^n \\
 & & \uparrow & & \uparrow \xi \wedge & & \uparrow \xi \wedge \\
 & & \cdots & \longrightarrow & \bigwedge^{n-3} R^n & \xrightarrow{f' \wedge} & \bigwedge^{n-2} R^n \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \xi \wedge \\
 & & & & \cdots & \longrightarrow & \bigwedge^{n-3} R^n \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & \cdots
 \end{array}$$

Lemme 3.1.5. *Le complexe $K \xrightarrow{\phi_0} \frac{J}{\sum RS_{i,j}} \rightarrow 0$ est la résolution minimale bigraduée de $\frac{J}{\sum RS_{i,j}}$.*

Preuve Il s'agit clairement d'un complexe. Pour voir qu'il est exact en degré < 0 , on raisonne comme dans la démonstration du Lemme 3.1.2, en utilisant le Lemme 3.1.1.

Détaillons l'exactitude en degré 0. Soit donc $\omega \in \bigwedge^{n-1} R^n$ telle que $\tau f' \wedge \omega = \xi \wedge f' \wedge \eta$. Faisant $\tau = 0$, on a $\xi \wedge f' \wedge \eta|_{\tau=0} = 0$ donc $\tau f' \wedge \omega = \xi \wedge f' \wedge (\eta - \eta|_{\tau=0}) \in \tau f' \wedge \xi \wedge \bigwedge^{n-2} R^n$ d'où $f' \wedge \omega = f' \wedge \xi \wedge \eta'$, ce que l'on réécrit $f' \wedge (\omega - \xi \wedge \eta') = 0$. Mais la suite $f'_1, \dots, f'_n$ étant régulière, le complexe de Koszul $K(R; f')$ est exact et on a $\omega - \xi \wedge \eta' \in f' \wedge \bigwedge^{n-2} R^n$, ce qui prouve que ω est dans l'image de ϕ_{-1} . $\square$

On peut étendre le morphisme $\frac{J}{\sum RS_{i,j}} \rightarrow \frac{R}{\sum RS_{i,j}}$ en un morphisme α de résolutions :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \bigwedge^{n-1} R^n & \xrightarrow{\alpha_0} & \bigwedge^n R^n \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (\bigwedge^{n-2} R^n)^2 & \xrightarrow{\alpha_1} & \bigwedge^{n-2} R^n \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (\bigwedge^{n-3} R^n)^3 & \xrightarrow{\alpha_2} & (\bigwedge^{n-3} R^n)^2 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \cdots & & \cdots
 \end{array}$$

avec $\alpha_0(\omega) = -\tau f' \wedge \omega$ et pour $i > 0$, $\alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_i) = \tau(\omega_2, \dots, \omega_i)$ (se vérifie par récurrence).

On obtient alors

Lemme 3.1.6. *La résolution minimale du module R/J est le cône du morphisme α .*

La résolution de $\text{ann}\delta/J$

On a une surjection $\phi_0 : R^2 \rightarrow \frac{\text{ann}\delta}{J}$ donnée par $\phi_0(e_1) = f$, $\phi_0(e_2) = t\tau + \chi$.

Lemme 3.1.7. *Le noyau de ϕ_0 est engendré par les éléments $(-\xi_i, f'_i)$ et $(\tau, 0)$.*

Preuve On a

$$-\xi_k f + f'_k(t\tau + \sum w_i x_i \xi_i) = t\tau f'_k + \sum_{i \neq k} w_i x_i (f'_k \xi_i - f'_i \xi_k) \in J$$

et $\tau f - \sum w_i x_i \tau f'_i = 0$ donc $(-\xi_i, f'_i) \in \ker \phi_0$ et $(\tau, 0) \in \ker \phi_0$. Soit M le sous-module de R^2 engendré par $(\tau, 0)$ et les $(-\xi_i, f'_i)$. Soit $(P, Q) \in \ker \phi_0$ avec P et Q bihomogènes. Nécessairement, $\deg^F(P) \geq 1$ donc modulo M on peut supposer $P = 0$. On a donc

$$Q \cdot (t\tau + \sum w_i x_i \xi_i) = \sum R_{i,j} S_{i,j} + \sum P_i f'_i \tau. \quad (3.2)$$

Faisons $\tau = 0$ et $\xi_i = f'_i$. Alors $Q|_{\tau=0}(\xi_1 = f'_1, \dots, \xi_n = f'_n) \cdot f = 0$, donc $Q|_{\tau=0}(\xi_1 = f'_1, \dots, \xi_n = f'_n) = 0$, cela implique $Q|_{\tau=0} \in \sum R S_{i,j}$ d'après la Proposition 3.0.3. Or $\xi_i(-\xi_j, f'_j) - \xi_j(-\xi_i, f'_i) = (0, S_{i,j})$ donc modulo M , on est ramené à $Q|_{\tau=0} = 0$.

Faisant $\tau = 0$ dans (3.2), on obtient alors $\sum R_{i,j}|_{\tau=0} S_{i,j} = 0$ donc $\sum R_{i,j} S_{i,j} \subset \tau \sum R S_{i,j} \subset \sum R f'_i \tau$. On peut donc supposer $R_{i,j} = 0$ en reportant $R_{i,j} S_{i,j}$ sur les $f'_i \tau$.

Maintenant posons $Q = Q_1 \tau + \dots + Q_d \tau^d$. On a $Q_d \tau^d t \tau = \sum (P_i)_d f'_i \tau \Rightarrow Q_d \tau^d t = \sum (P_i)_d f'_i \Rightarrow Q_d \tau^d = \sum P'_i f'_i$ car $(f'_1, \dots, f'_n, t)$ est une suite régulière. En faisant $\tau = 0$ on peut supposer τ divise P'_i . Alors $Q_d \tau^d \in \sum R f'_i \tau$. Or $\xi_i(\tau, 0) + \tau(-\xi_i, f'_i) = (0, \tau f'_i)$ donc modulo M , on fait diminuer le degré en τ de Q . Ceci jusqu'à $Q = 0$. $\square$

Définissons $\phi_1 : R^{n+1} \rightarrow R^2$ par $\phi_1(e_i) = (-\xi_i, f'_i)$ si $1 \leq i \leq n$ et $\phi_1(e_{n+1}) = (\tau, 0)$ et $\phi_{1|R^n}$ le morphisme ϕ_1 restreint à $R^n = \oplus_{1 \leq i \leq n} R e_i$.

Lemme 3.1.8. 1. *$\ker \phi_{1|R^n}$ est engendré par les éléments $S_{i,j} e_k - S_{i,k} e_j + S_{j,k} e_i$ pour $0 \leq i < j < k \leq n$.*
2. *$\ker \phi_1$ est engendré par les éléments $S_{i,j} e_k - S_{i,k} e_j + S_{j,k} e_i$ pour $0 \leq i < j < k \leq n$ et $\tau f'_i e_j - \tau f'_j e_i + S_{i,j} e_{n+1}$, pour $0 \leq i < j \leq n$.*

Preuve

1. Soit $\sum C_i e_i \in \ker \phi_1|_{R^n}$, i.e.

$$\begin{cases} \sum C_i f'_i = 0 \\ \sum C_i \xi_i = 0 \end{cases}$$

Comme $\xi_1, \dots, \xi_n$ est une suite régulière, il existe une matrice anti-symétrique P telle que

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Alors

$$0 = (f'_1, \dots, f'_n) P \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \sum_{i < j} P_{i,j} S_{i,j}$$

D'après la résolution du module $R/\sum R S_{i,j}$ (Lemme 3.1.2), on en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} P_{i,j} E_{i,j} &= \sum_{i < j < k} \lambda_{i,j,k} (\xi_k E_{i,j} - \xi_j E_{i,k} + \xi_i E_{j,k}) \\ &+ \sum_{i < j < k} \mu_{i,j,k} (f'_k E_{i,j} - f'_j E_{i,k} + f'_i E_{j,k}) \end{aligned}$$

avec $E_{i,j}$ la matrice dont le seul coefficient non nul est 1 en place (i, j) . En reportant ceci dans (3.3), on obtient :

$$\sum C_i e_i \in \sum_{i < j < k} R(S_{i,j} e_k - S_{i,k} e_j + S_{j,k} e_i).$$

2. Soit $A e_{n+1} + \sum_{1 \leq i \leq n} B_i e_i \in \ker \phi_1$ i.e. $A\tau - \sum B_i \xi_i = 0$ et $\sum B_i f'_i = 0$. Posons $B_i = c_i + \tau d_i$ avec $c_i = B_i|_{\tau=0}$. On a alors $\sum c_i e_i \in \ker \phi_1|_{R^n}$ donc $\sum c_i e_i \in \sum_{i < j < k} R(S_{i,j} e_k - S_{i,k} e_j + S_{j,k} e_i)$ d'après 1.

Ensuite

$$\begin{cases} \sum d_i f'_i = 0 \\ \sum d_i \xi_i = A \end{cases}$$

implique $\sum d_i e_i + A e_{n+1} \in \sum_{i < j} R(f'_i e_j - f'_j e_i + S_{i,j} e_{n+1})$. D'où le résultat. $\square$

Pour résoudre le module $\text{ann}\delta/J \simeq R^2/\ker\phi_0$, nous utilisons la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \frac{\ker\phi_0}{\sum R(-\xi_i, f'_i)} \rightarrow \frac{R^2}{\sum R(-\xi_i, f'_i)} \rightarrow \frac{R^2}{\ker\phi_0} \rightarrow 0.$$

La résolution minimale du module $R^2/\sum R(-\xi_i, f'_i)$ est le complexe suivant :

$$\cdots \rightarrow (\bigwedge^{n-4} R^n)^2 \xrightarrow{\psi_3} \bigwedge^{n-3} R^n \xrightarrow{\psi_2} \bigwedge^{n-1} R^n \xrightarrow{\psi_1} R^2 \rightarrow \frac{R^2}{\sum R(-\xi_i, f'_i)} \rightarrow 0$$

avec $\psi_1(e_{I \setminus i}) = (-1)^i(-\xi_i, f'_i)$, $\psi_2(\omega) = \xi \wedge f' \wedge \omega$. On a $\text{im } \psi_2 = \ker \psi_1$ d'après le Lemme 3.1.8, 1. La suite de la résolution est analogue au complexe K du Lemme 3.1.5.

On sait aussi résoudre le module $\ker\phi_0/\sum R(-\xi_i, f'_i)$ car on a un isomorphisme

$$\frac{R}{\sum RS_{i,j}} \simeq \frac{\ker\phi_0}{\sum R(-\xi_i, f'_i)}$$

qui envoie 1 sur $(\tau, 0)$, d'après le Lemme 3.1.8, 2, et la résolution de $R/\sum RS_{i,j}$ (Lemme 3.1.2). On relève maintenant la flèche $\frac{\ker\phi_0}{\sum R(-\xi_i, f'_i)} \rightarrow \frac{R^2}{\sum R(-\xi_i, f'_i)}$ en un morphisme de résolutions :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bigwedge^n R^n & \xrightarrow{\alpha_0} & R^2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bigwedge^{n-2} R^n & \xrightarrow{\alpha_1} & \bigwedge^{n-1} R^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\bigwedge^{n-3} R^n)^2 & \xrightarrow{\alpha_2} & \bigwedge^{n-3} R^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\bigwedge^{n-4} R^n)^3 & \xrightarrow{\alpha_2} & (\bigwedge^{n-4} R^n)^2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

avec $\alpha_0(e_I) = (\tau, 0)$, $\alpha_1(\omega) = \tau f' \wedge \omega$, et pour $i \geq 2$, $\alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_i) = -\tau(\omega_2, \dots, \omega_i)$.

Proposition 3.1.7. *La résolution minimale bigraduée de $\text{ann}\delta/J$ est le cône du morphisme précédent.*

En effet les coefficients des matrices α_i sont dans l'idéal maximal.

Les nombres de Betti de $R/\text{ann}\delta$

Théorème 3.1.1. 1. Les nombres de Betti du module bifiltré N_f sont les suivants : $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2 + \frac{n(n+1)}{2}$, $\beta_2 = 1 + n + 2\binom{n+1}{n-2}$, puis pour $i \geq 3$, $\beta_i = (i-2)\binom{n+2}{i+1} + 2\binom{n+1}{i+1}$
 2. $\text{reg}_F N_f = 0$.

Par exemple, pour $n = 2$ on obtient la liste 1, 5, 5, 1 et pour $n = 3$ la liste 1, 8, 12, 7, 2, ce qui confirme un soupçon des auteurs de [12] établi à partir d'exemples calculés en machine.

Preuve Démontrons 1. On connaît les résolutions de $\text{ann}\delta/J$ et R/J . Appelons-les respectivement L et L' . On peut relever le morphisme $\text{ann}\delta/J \rightarrow R/J$ en un morphisme de résolutions $\alpha : L \rightarrow L'$. Le cône de α est alors une résolution de $R/\text{ann}\delta$. On ne sait pas expliciter toutes les flèches α_i . Néanmoins, donnons les deux premières.

$$\alpha_0 : R^2 \rightarrow \bigwedge^n R^n$$

définie par $\alpha_0(e_1) = fe_I$, $\alpha_0(e_2) = (t\tau + \sum w_i x_i)e_I$.

Soit $\gamma = (x_1 w_1, \dots, x_n w_n) \in R^n$. On a un morphisme de produit intérieur par γ :

$$\iota : \bigwedge^p R^n \rightarrow \bigwedge^{p-1} R^n$$

défini par $\iota(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = \sum (-1)^{j-1} \gamma_{i_j} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$. On peut alors prendre

$$\alpha_1 : \bigwedge^n R^n \oplus \bigwedge^{n-1} R^n \rightarrow \bigwedge^{n-1} R^n \oplus \bigwedge^{n-2} R^n$$

définie par $\alpha_1(\omega_1, \omega_2) = (\iota(\omega_1) + t\omega_2, -\iota(\omega_2))$. Pour le vérifier on utilise la formule suivante : $-\xi_k f + (t\tau + \sum w_i x_i \xi_i) f'_k = t f'_k \tau + \sum_{j < k} w_j x_j S_{j,k} - \sum_{j > k} w_j x_j S_{j,k}$.

On a calculé une résolution bigraduée du module $\text{bigr}(N_f)$

$$\dots \rightarrow R^{\beta_2} \xrightarrow{\Phi_2} R^{\beta_1} \xrightarrow{\Phi_1} R \xrightarrow{\Phi_0} \text{bigr}(N_f) \rightarrow 0$$

dont les nombres de Betti sont ceux du théorème. Montrons que c'est la résolution minimale bigraduée de $\text{bigr} N_f$, i.e. pour tout $i \geq 1$, $\text{im}\phi_i \subset \mathfrak{m}R^{\beta_{i-1}}$. Pour $i = 1$ et $i = 2$, cela résulte du calcul des flèches α_0 et α_1 .

Pour $i \geq 3$, procédons comme suit : supposons $\text{im}\phi_{i_0} \not\subset \mathfrak{m}R^{\beta_{i_0-1}}$, avec $i_0 \geq 3$. On peut alors minimaliser la résolution, on obtient une résolution dont le i_0 -ième nombre de Betti est strictement inférieur à β_{i_0} . Mais toute

résolution de $\text{bigr}(N_f)$ induit une résolution de $\text{gr}^F(M_f)$, et on sait que les nombres de Betti du théorème sont ceux de $\text{gr}^F(M_f)$. Quitte à minimaliser la résolution de $\text{gr}^F(M_f)$ obtenue, on arrive à une contradiction.

Démontrons maintenant 2. On a $\text{reg}_F(\text{ann}\delta/J) = 1$. En effet, le générateur $t\tau + \chi$ est de degré 1, ensuite les coefficients des matrices de la résolution construite ont pour degré 0 ou 1. De même, on a $\text{reg}_F(R/J) = 0$ d'après la résolution construite. Enfin, on a vu dans la démonstration de 1. que le cône du morphisme α est la résolution minimale de $R/\text{ann}\delta$. Donc

$$\text{reg}_F N_f = \text{reg}_F \left(\frac{R}{\text{ann}\delta} \right) = \max \left(\text{reg}_F \left(\frac{\text{ann}\delta}{J} \right) - 1, \text{reg}_F \frac{R}{J} \right) = 0.$$

3.1.4 Nombres de Betti de N_f revus avec les complexes de Koszul généralisés

Nous donnons une seconde démonstration de la détermination des nombres de Betti du module bifiltré N_f pour f singularité isolée quasi homogène. Celle-ci est très proche de celle que nous avons donnée, la différence résidant dans l'utilisation de complexes de Koszul généralisés au lieu du Lemme de Saito, ce qui nous permet de conclure plus rapidement. Nous avons favorisé les complexes bâtis à partir du Lemme de Saito de manière à être le plus élémentaire possible, dans la mesure où la régularité des suites $f'_1, \dots, f'_n$ et $\xi_1, \dots, \xi_n$ permettait l'usage du Lemme de Saito. Dans ce qui suit, on utilise le plus souvent seulement la profondeur de l'idéal engendré par les $S_{i,j}$.

Complexes de Koszul généralisés

Nous rappelons la notion de *complexe de Koszul généralisé*, suivant [19], Appendix C. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une matrice $m \times n$ à coefficients dans R . Notons Λ l'algèbre extérieure du module libre $\bigoplus_{i=1}^n Re_i$, S l'algèbre symétrique du module libre $\bigoplus_{i=1}^m RX_i$ et $\mathfrak{a}$ l'idéal des mineurs d'ordre m de A . Pour $1 \leq i \leq m$, on a un complexe de Koszul associé à la suite $a_{m,1}, \dots, a_{m,n}$ avec différentielle δ_i . Pour $1 \leq j \leq m$, on définit un morphisme $X_i : S \rightarrow S$ de multiplication par X_i , et $X_i^{-1} : S \rightarrow S$ de division par X_i (nul sur un monôme non multiple de X_i). Soit $t \in \mathbb{Z}$. On définit le complexe de Koszul généralisé $K(A, t)$:

$$\dots \rightarrow K_h \xrightarrow{d_h(t)} K_{h-1} \rightarrow \dots$$

avec

$$K_h = \begin{cases} \Lambda^{m+h-1} \otimes S_{h-t-1} & \text{si } h > t \\ \Lambda^h \otimes S_{t-h} & \text{si } h \leq t \end{cases}$$

et

$$d_h(\omega \otimes \alpha) = \begin{cases} \sum \delta_i(\omega) \otimes X_i^{-1}(\alpha) & \text{si } h > t + 1 \\ \delta_m(\delta_{m-1}(\dots \delta_1(\omega))) \otimes \alpha & \text{si } h = t + 1 \\ \sum \delta_i(\omega) \otimes X_i(\alpha) & \text{si } h \leq t \end{cases}.$$

Théorème 3.1.2 ([19], Appendix C, Theorem 2). *Si $t \leq n - m$ et $0 \leq n - m - q + 1 \leq Gr_R(\mathfrak{a})$, alors le complexe tronqué*

$$0 \rightarrow K_{n-m+1}(A, t) \rightarrow K_{n-m}(A, t) \rightarrow \dots \rightarrow K_q(A, t)$$

est exact.

Nombres de Betti de $\mathcal{D}[s]f^s$ et $\mathcal{D}[s]f^s/\mathcal{D}[s]f^{s+1}$

Construisons les complexes de Koszul généralisés associés à l'anneau $\mathcal{O}[\xi]$ et à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} f'_1 & \dots & f'_n \\ -\xi_1 & \dots & -\xi_n \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc le complexe de Koszul associé à la suite régulière $f'_1, \dots, f'_n$ muni de la différentielle δ_1 , et celui associé à la suite (régulière aussi) $-\xi_1, \dots, -\xi_n$ muni de δ_2 .

L'idéal $\mathfrak{a}$ est l'idéal des $S_{i,j}$, de profondeur supérieure à $n - 1$ (ici, Gr désigne la profondeur). Dans le Théorème 3.1.2, on peut prendre $q \geq n - m + 1 - (n - 1) = 0$. On notera $K(t)$ le complexe $K(A, t)$.

Considérons le complexe $K(0)$ tronqué au degré 0 :

$$\dots \rightarrow \Lambda^4 \otimes S_2 \rightarrow \Lambda^3 \otimes S_1 \xrightarrow{d_2(0)} \Lambda^2 \otimes S_0 \xrightarrow{d_1(0)} \Lambda^0 \otimes S_0.$$

C'est la résolution minimale de $\mathcal{O}[\xi]/<(S_{i,j})>$ car $d_1(0)(e_i \wedge e_j) = S_{i,j}$. Notons que ce complexe est appelé *complexe d'Eagon-Northcott* (cf. [9], A2.6). On a $S_i = \bigoplus_{k=0}^i \mathcal{O}[\xi] X_1^k X_2^{i-k} \simeq \mathcal{O}[\xi]^{i+1}$, donc les nombres de Betti de $\mathcal{O}[\xi]/<(S_{i,j})>$ sont $1, \binom{n}{2}, 2\binom{n}{3}, 3\binom{n}{4}, \dots, n - 1$.

On en déduit les nombres de Betti de $\mathcal{D}[s]f^s$ comme dans la Proposition 3.1.4 puis ceux de $\mathcal{D}[s]f^s/\mathcal{D}[s]f^{s+1}$ comme dans la Proposition 3.1.6.

Les nombres de Betti de N_f

On utilise les mêmes dévissages. Soit J l'idéal de R engendré par les $f'_i \tau$ et les $S_{i,j}$. On a une suite exacte

$$0 \rightarrow \frac{\text{ann} \delta}{J} \rightarrow \frac{R}{J} \rightarrow \frac{R}{\text{ann} \delta} \rightarrow 0.$$

La résolution de R/J On part de la suite exacte

$$0 \rightarrow \frac{J}{<(S_{i,j})>} \rightarrow \frac{R}{<(S_{i,j})>} \rightarrow \frac{R}{J} \rightarrow 0.$$

On connaît la résolution minimale bigraduée du module $R/ <(S_{i,j})>$, c'est le complexe $K(0)$ (où on remplace $\mathcal{O}[\xi]$ par R). Résolvons maintenant le module $J/ <(S_{i,j})>$.

Lemme 3.1.9. *On a un isomorphisme*

$$\frac{\Lambda^1}{\delta_1(\Lambda^2) + \delta_2(\Lambda^2)} \simeq \frac{J}{<(S_{i,j})>}$$

défini par $\omega \mapsto -\tau\delta_1(\omega)$.

Preuve Soit donc $\omega \in \Lambda^1 R^n$ telle que $\tau\delta_1(\omega) = \delta_1 \circ \delta_2(\eta)$. Faisant $\tau = 0$, on a $\delta_1 \circ \delta_2(\eta|_{\tau=0}) = 0$ donc $\tau\delta_1(\omega) = \delta_1 \circ \delta_2(\eta - \eta|_{\tau=0}) \in \tau\delta_1 \circ \delta_2(\Lambda^3)$ d'où $\delta_1(\omega) = \delta_1 \circ \delta_2(\eta')$, ce que l'on réécrit $\delta_1(\omega - \delta_2(\eta')) = 0$. Mais la suite $f'_1, \dots, f'_n$ étant régulière, le complexe de Koszul $K(R; f')$ est exact et on a $\omega - \delta_2(\eta') \in \delta_1(\Lambda^2)$. $\square$

Or la résolution de $\Lambda^1/(\delta_1(\Lambda^2) + \delta_2(\Lambda^2))$ est donnée par le complexe $K(-1)$ tronqué au degré 0 :

$$\dots \rightarrow \Lambda^3 \otimes S_2 \rightarrow \Lambda^2 \otimes S_1 \xrightarrow{d_1^{(-1)}} \Lambda^1 \otimes S_0.$$

On étend le morphisme $J/ <(S_{i,j})> \rightarrow R/ <(S_{i,j})>$ en un morphisme de résolutions $\alpha : K(-1) \rightarrow K(0)$ défini par $\alpha_0(\omega \otimes 1) = -\tau\delta_1(\omega) \otimes 1$ et pour $i \geq 1$, $\alpha_i(\omega \otimes \alpha) = \tau\omega \otimes X_2^{-1}\alpha$. Le cône de ce morphisme fournit la résolution minimale de R/J .

La résolution de $\text{ann}\delta/J$ D'après le Lemme 3.1.7, on a un isomorphisme

$$\phi_0 : \frac{R^2}{<(f'_i, -\xi_i), (0, \tau)>} \rightarrow \frac{\text{ann}\delta}{J}$$

défini par $X_1 \rightarrow t\tau + \chi$ et $X_2 \rightarrow f$.

Pour résoudre le module $R^2/ <(f'_i, -\xi_i)_i, (0, \tau)>$, nous utilisons la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \frac{<(f'_i, -\xi_i), (0, \tau)>}{<(f'_i, -\xi_i)>} \rightarrow \frac{R^2}{<(f'_i, -\xi_i)>} \rightarrow \frac{R^2}{<(f'_i, -\xi_i), (0, \tau)>} \rightarrow 0.$$

La résolution minimale du module $R^2/\sum R(f'_i, -\xi_i)$ est donnée par le complexe $K(1)$ tronqué au degré 0 (valable en théorie pour $n \geq 3$ mais en réalité aussi pour $n = 2$) :

$$\cdots \rightarrow \Lambda^4 \otimes S_1 \rightarrow \Lambda^3 \otimes S_0 \rightarrow \Lambda^1 \otimes S_0 \xrightarrow{d_1(1)} \Lambda^0 \otimes S_1 \simeq R^2.$$

Ce complexe est appelé dans la littérature *complexe de Buchsbaum-Rim* (cf. [9], A2.6).

Lemme 3.1.10. *On a un isomorphisme*

$$\frac{R}{<(S_{i,j})>} \simeq \frac{<(f'_i, -\xi_i), (0, \tau)>}{<(f'_i, -\xi_i)>}$$

défini par $1 \mapsto (0, \tau)$.

Preuve Soit $A \in R$ tel que $A(\tau, 0) = \sum B_i(f'_i, -\xi_i)$. Alors $\sum B_i f'_i = 0$ donc $\sum B_i e_i = \sum_{i < j} R_{i,j}(f'_i e_j - f'_j e_i)$ par régularité de la suite $f'_1, \dots, f'_n$. D'où $A\tau = -\sum B_i \xi_i = -\sum R_{i,j} S_{i,j}$ et $A \in \sum R S_{i,j}$. $\square$

On a déjà donné la résolution du module $R/(S_{i,j})_{i < j}$, on a donc la résolution minimale du module $<(f'_i, -\xi_i), (0, \tau)> / <(f'_i, -\xi_i)>$. Pour obtenir la résolution de $R^2 / <(f'_i, -\xi_i), (0, \tau)>$, il suffit alors de relever le morphisme $<(f'_i, -\xi_i), (0, \tau)> / <(f'_i, -\xi_i)> \rightarrow R^2 / <(f'_i, -\xi_i)>$ en un morphisme de résolutions encore appelé α . On peut prendre $\alpha_0 : \Lambda^0 \otimes S_0 \rightarrow \Lambda^0 \otimes S_1$ défini par $\alpha_0(1 \otimes 1) = \tau \otimes X_2$, $\alpha_1 : \Lambda^2 \otimes S_0 \rightarrow \Lambda^1 \otimes S_0$ tel que $\alpha_1(\omega \otimes 1) = \tau \delta_1(\omega) \otimes 1$, et pour $i \geq 2$, $\alpha_i : \Lambda^{i+1} \otimes S_{i-1} \rightarrow \Lambda^{i+1} \otimes S_{i-2}$ défini par $\alpha_i(\omega \otimes \eta) = -\tau \omega \otimes X_2^{-1} \eta$. Le cône de ce morphisme est la résolution minimale de $R^2 / ((f'_i, -\xi_i)_i, (0, \tau)) \simeq \text{ann}\delta / J$.

Les nombres de Betti de $R/\text{ann}\delta$ On procède comme dans la preuve du Théorème 3.1.1. Il s'agit de relever le morphisme $\text{ann}\delta / J \rightarrow R / J$ en un morphisme de résolutions. On donne les deux premières flèches. $\alpha_0 : \Lambda^0 \otimes S_1 \rightarrow \Lambda^0 \otimes S_0$ définie par $\alpha_0(1 \otimes X_1) = (t\tau + \chi) \otimes 1$ et $\alpha_0(1 \otimes X_2) = f \otimes 1$. Ensuite,

$$\alpha_1 : \Lambda^0 \otimes S_0 \oplus \Lambda^1 \otimes S_0 \rightarrow \Lambda^1 \otimes S_0 \oplus \Lambda^2 \otimes S_0$$

et un bref calcul montre qu'on peut prendre $\alpha_1(1 \otimes 1, 0) = (-\sum w_i x_i e_i, 0)$ et $\alpha_1(0, \omega \otimes 1) = (-t\omega, -\omega \wedge \sum w_i x_i e_i)$. On a donc bien la propriété de minimalité pour le début de la résolution construite.

3.2 Application : cohomologie locale, présentation dans le cas singularité isolée quasi homogène

On continue de supposer que f est à singularité isolée et quasi homogène. Notons X un petit voisinage de l'origine dans l'espace ambiant $\mathbb{C}^n$. Soit M un $\mathcal{D}_X$ -module. On note $\Gamma_{[f=0]}(M)$ le $\mathcal{O}_X$ -module

$$\lim_{\overleftarrow{k}} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X} \left(\frac{\mathcal{O}_X}{f^k}, M \right).$$

Ce module admet une structure de $\mathcal{D}_X$ -module étendant celle de $\mathcal{O}_X$ -module. On définit ainsi un foncteur $\Gamma_{[f=0]}$ de la catégorie des $\mathcal{D}_X$ -modules, il est exact à gauche. On s'intéresse alors au foncteur dérivé $\mathbb{R}\Gamma_{[f=0]}$, et $\mathbb{R}\Gamma_{[f=0]}(M)$ est appelée *cohomologie algébrique locale de M à valeurs dans $(f=0)$* . Ce complexe est important en théorie des singularités et en géométrie algébrique. Notons que ce complexe n'a d'intérêt qu'au voisinage d'un point singulier de $(f=0)$.

On considère le cas de $M = \mathcal{O}_X$, on se place à l'origine. On sait ([14], IV.2) que le complexe $\mathbb{R}\Gamma_{[f=0]}(\mathcal{O}_X)$ n'a de cohomologie qu'en degré 1, avec

$$H^1 \mathbb{R}\Gamma_{[f=0]}(\mathcal{O}_X) \simeq \frac{\mathcal{O}_X[\frac{1}{f}]}{\mathcal{O}_X}.$$

Notre but est d'obtenir une présentation en tant que $\mathcal{D}$ -module de la fibre à l'origine de ce module de cohomologie locale, i.e. de $\mathcal{O}[\frac{1}{f}]/\mathcal{O}$.

Or ce module a un lien avec le module $\mathcal{D}_{x,t}f^s$. Soit $i : X \rightarrow X \times \mathbb{C}$ l'inclusion $i(x) = (x, 0)$. D'après [21], Proposition 7.2, on a

$$H^i \mathbb{L}i^*(\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}f^s) \simeq H^{i+1} \mathbb{R}\Gamma_{[f=0]}\mathcal{O}_X.$$

D'après [21], Theorem 5.3, on peut obtenir la restriction $\mathbb{L}i^*(\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}f^s)$ au moyen d'une résolution adaptée à la V -filtration le long de $t=0$ de $\mathcal{D}_{x,t}f^s$.

Lemme 3.2.1. *On a une présentation adaptée à la V -filtration*

$$\mathcal{D}_{x,t}^r[\mathbf{m}] \xrightarrow{\psi} \mathcal{D}_{x,t}[0] \rightarrow \mathcal{D}_{x,t}f^s \rightarrow 0$$

où $r = 2 + \binom{n}{2} + n$,

$$\mathcal{D}_{x,t}^r = \mathcal{D}_{x,t}e_1 \oplus \mathcal{D}_{x,t}e_2 \oplus \bigoplus_{i < j} \mathcal{D}_{x,t}e_{i,j} \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathcal{D}_{x,t}\tilde{e}_i$$

$$\begin{aligned}
\psi(e_1) &= t - f \\
\psi(e_2) &= \partial_t t + \sum w_i x_i \partial_{x_i}, \\
\psi(e_{i,j}) &= f'_j \partial_{x_i} - f'_i \partial_{x_j}, \\
\psi(\tilde{e}_i) &= \partial_{x_i} + f'_i \partial_t,
\end{aligned}$$

et $\mathbf{m}$ est le vecteur de décalage dont les composantes sont les V -ordres des images par ψ des éléments de la base canonique.

Preuve Ce complexe est une présentation bifiltrée (en ajoutant des décalages pour la F -filtration) car en prenant le complexe bigradué correspondant on obtient la présentation de la section précédente (Proposition 3.1.3), et on utilise notre proposition de remontée des résolutions bigraduées (Proposition 1.2.3). $\square$

L'algorithme de Oaku-Takayama (i.e. [21], Theorem 5.3) nécessite aussi la connaissance d'une b -fonction, que nous noterons $\tilde{b}$. Il s'agit d'un polynôme $\tilde{b}(u) \in \mathbb{C}[u]$ tel que $\tilde{b}(t\partial_t)$ annule $\text{gr}_0^V(\mathcal{D}_{x,t} f^s)$. Le polynôme de Bernstein-Sato est défini par l'équation fonctionnelle $b(s)f^s \in \mathcal{D}[s]f^{s+1}$. Comme $s = -\partial_t t$, si $b(s)$ est un polynôme de Bernstein-Sato, alors $b(-u-1)$ est satisfaisant pour Oaku-Takayama. On sait que dans ce cas précis, les racines du polynôme de Bernstein-Sato sont comprises strictement entre $-n$ et 0 ([3]). Les racines de $\tilde{b}$ sont alors comprises strictement entre -1 et $n-1$. On peut donc prendre $k_0 = 0$ et $k_1 = n-2$ dans l'algorithme de Oaku-Takayama (ce sont les plus petite et plus grande racines entières possibles). On a

$$\mathcal{D}_{X \rightarrow X \times \mathbb{C}} = \frac{\mathcal{D}_{x,t}}{t\mathcal{D}_{x,t}} \simeq \mathcal{D}[\partial_t].$$

D'après [21], Theorem 5.3, le $\mathcal{D}$ -module de cohomologie locale $H^1 \mathbb{R}\Gamma_{[f=0]}(\mathcal{O}_X)$ est isomorphe au conoyau de l'application suivante induite par ψ :

$$\frac{V_{n-2}(\mathcal{D}[\partial_t]^r[m])}{V_{-1}(\mathcal{D}[\partial_t]^r[m])} \xrightarrow{\bar{\psi}} \frac{V_{n-2}(\mathcal{D}[\partial_t])}{V_{-1}(\mathcal{D}[\partial_t])}.$$

Proposition 3.2.1.

$$\text{coker } \bar{\psi} \simeq \frac{\bigoplus_{k=0}^{n-2} \mathcal{D} \partial_t^k}{N}$$

où N est le sous-module engendré par

$$\begin{aligned}
&f, k\partial_t^{k-1} - f\partial_t^k \text{ pour } 1 \leq k \leq n-2, \\
&(k+1 + \sum x_i w_i \partial_{x_i}) \partial_t^k \text{ pour } 0 \leq k \leq n-2, \\
&(f'_j \partial_{x_i} - f'_i \partial_{x_j}) \partial_t^k \text{ pour } i < j, 0 \leq k \leq n-2, \\
&\partial_{x_i} \partial_t^{k-1} + f'_i \partial_t^k \text{ pour } 1 \leq k \leq n-2.
\end{aligned}$$

Preuve On a $V_{-1}(\mathcal{D}[\partial_t]^r[m]) = 0$ et $V_{-1}(\mathcal{D}[\partial_t]) = 0$,

$$V_{n-2}(\mathcal{D}[\partial_t]^r[m]) = \bigoplus_{k=0}^{n-2} \mathcal{D} \partial_t^k e_1 \oplus \bigoplus_{k=0}^{n-2} \mathcal{D} \partial_t^k e_2 \oplus \bigoplus_{i < j} \bigoplus_{k=0}^{n-2} \mathcal{D} \partial_t^k e_{i,j} \oplus \bigoplus_i \bigoplus_{k=0}^{n-3} \mathcal{D} \partial_t^k \tilde{e}_i,$$

c'est un $\mathcal{D}$ -module libre, et $V_{n-2}(\mathcal{D}[\partial_t]) = \bigoplus_{k=0}^{n-2} \mathcal{D} \partial_t^k$. On calcule alors les images par $\bar{\psi}$ des éléments de base $\partial_t^k e_1, \partial_t^k e_2, \partial_t^k e_{i,j}, \partial_t^k \tilde{e}_i$. Par exemple,

$$\bar{\psi}(\partial_t^k e_1) = \partial_t^k(t - f) = k\partial_t^{k-1} + t\partial_t^k - f\partial_t^k = k\partial_t^{k-1} - f\partial_t^k.$$

3.3 Caractérisation de la quasi-homogénéité

Soit $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ à singularité isolée en 0.

Notations : Jusqu'à la fin du chapitre, on désigne par W l'anneau $\text{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t}^{(h)})$ et pour $i < j$, $S_{i,j} = f'_i \partial_{x_j} - f'_j \partial_{x_i}$. On considèrera aussi les champs de vecteurs logarithmiques $\text{Der}(\log D)$, c'est l'ensemble des champs de vecteurs χ tels que $\chi(f) \in \mathcal{O}f$.

Soit l'idéal de $\mathcal{D}$

$$I = \{P \in \mathcal{D}, Psf^s \in \mathcal{D}f^s\}.$$

Soit l'idéal de $\mathcal{O}$

$$\mathfrak{a} = \{u \in \mathcal{O}, uf \in J(f)\}.$$

Lemme 3.3.1. $I = \mathcal{D}\mathfrak{a}$.

Preuve Soit $P = \sum \partial_x^\beta u_\beta$. On décompose

$$u_\beta f = a_\beta + b_\beta \in J(f) \oplus E.$$

Comme $sf^s = -f\partial_t f^s$, alors

$$Psf^s = -\sum \partial^\beta u_\beta f \partial_t f^s = -\sum \partial^\beta b_\beta \partial_t f^s \mod \mathcal{D}f^s.$$

Alors $Psf^s \in \mathcal{D}f^s$ ssi $\forall \beta, b_\beta = 0$ d'après la décomposition de N_f (Proposition 3.0.2). $\square$

Lemme 3.3.2. $F_{d-1}(\mathcal{D})sf^s \cap \mathcal{D}f^s \subset F_d(\mathcal{D})f^s$.

Preuve Supposons $Ps f^s = Qf^s$ avec $P \in F_{d-1}(\mathcal{D})$. Si $\text{ord}_F(Q) = d' > d$, alors

$$\sigma(Q)(f'_1, \dots, f'_n) = 0.$$

Comme $J(f)$ est de type linéaire (Proposition 3.0.3), il existe $H \in F_{d'}(\mathcal{D})$ tel que $Hf^s = 0$ et $\sigma(H) = \sigma(Q)$. Alors $Qf^s = (Q - H)f^s$ et $\text{ord}_F(Q - H) < d'$. On fait ainsi diminuer l'ordre du membre de droite autant que nécessaire. $\square$

Soit $u_1, \dots, u_l$ un ensemble de générateurs de $\mathfrak{a}$ sur $\mathcal{O}$. Soit δ_i un champ de vecteurs tel que $\delta_i(f) = u_i f$. Alors $Q_i = u_i s - \delta_i \in \text{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s$.

Rappelons qu'il existe un bon opérateur annulant f^s , c'est-à-dire un élément $S_L(s) \in \mathcal{D}[s]$ de degré L en s , unitaire, de la forme $S_L(s) = \sum P_i s^i$ avec $P_i \in F_{L-i}(\mathcal{D})$ tel que $S_L(s)f^s = 0$. Choisissons S_L de degré minimal en s .

Lemme 3.3.3. *Il existe un système F -involutif de générateurs de $\text{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s$ composé de $(S_{i,j})_{i < j}, Q_1, \dots, Q_l, R_1, \dots, R_m, S_L$, où pour tout i , R_i est de degré en s supérieur à 2.*

Preuve D'après les Lemmes 3.3.1 et 3.3.2, et le fait que les $S_{i,j}$ forment une base F -involutive de $\text{ann}_{\mathcal{D}}(f^s)$, si $P(s) \in \text{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s$ est de degré inférieur ou égal à 1 en s alors

$$P(s) \in \sum_{1 \leq i \leq l} F_{\text{ord}_F(P(s))-1}(\mathcal{D})Q_i + \sum_{i < j} F_{\text{ord}_F(P(s))-1}(\mathcal{D})S_{i,j}.$$

Prenons un système F -involutif de générateurs de $\text{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s$. On peut remplacer les éléments de degré en s supérieur à $L + 1$ par S_L , et ceux de degré inférieur à 1 par $Q_1, \dots, Q_l, (S_{i,j})$ d'après la remarque précédente. $\square$

Utilisons maintenant $\text{Der}(\log D)$. C'est un $\mathcal{O}$ -module de type fini, prenons-en un système minimal de générateurs $\delta_1, \dots, \delta_p$. On a $\delta_i(f) = u_i f$. Posons $V_i = u_i s - \delta_i$. Alors $V_i f^s = 0$ et $u_1, \dots, u_p$ engendrent $\mathfrak{a}$.

Lemme 3.3.4. *Il existe un système F -involutif de générateurs de $\text{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s$ composé de $V_1, \dots, V_p, R_1, \dots, R_m, S_L$, où pour tout i , R_i est de degré en s supérieur à 2.*

Preuve D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que les $S_{i,j}$ sont engendrés par les V_i , de manière adaptée à la filtration F . On a $S_{i,j}(f) = 0$ donc $S_{i,j} \in \text{Der}(\log D)$, soit $S_{i,j} = \sum a_i \delta_i$. Alors $0 = S_{i,j}(f) = \sum a_i \delta_i(f) = \sum a_i u_i f$ donc $\sum a_i u_i = 0$ et $S_{i,j} = -\sum a_i V_i$. $\square$

Corollaire 3.3.1. *l'ensemble*

$$(f, (f'_i \partial_t), (H(V_i)), (H(R_i)), H(S_L))$$

est un système de générateurs bihomogènes de $\text{ann}_W \delta$.

Cela découle de la Proposition 2.2.1.

Lemme 3.3.5. *Les éléments $f, f'_i \partial_t, H(S_L)$ sont indispensables dans ce système de générateurs.*

Preuve Soit une relation bihomogène

$$Af + \sum B_i f'_i \partial_t + \sum C_i V_i + \sum D_i H(R_i) + EH(S_L) = 0. \quad (3.4)$$

W est un anneau bigradué. Soit $\bar{s} = -\partial_t t \in W$. Soit $k \geq 0$.

$$W_{d,k} = \bigoplus_{0 \leq i \leq d-k} \bar{s}^i (\mathcal{D}^{(h)})_{d-i-k} \partial_t^k$$

$$W_{d,-k} = \bigoplus_{0 \leq i \leq d} \bar{s}^i (\mathcal{D}^{(h)})_{d-i} t^k$$

Montrons qu'on ne peut pas avoir un des coefficients A, B_i, E égal à 1, dans la relation (3.4).

$A = 1$ est impossible compte tenu du degré total.

Supposons $B_{i_0} = 1$. La relation est alors de bidegré $(1, 1)$. Nécessairement, $\forall i, C_i = D_i = E = 0$. On en déduit

$$f'_{i_0} \in \sum_{j \neq i_0} \mathcal{O} f'_j + \mathcal{O} f.$$

Ceci ne peut pas arriver si f est à singularité isolée en 0.

Si $E = 1$, on regarde le terme de plus haut degré en s et on obtient que 1 est dans l'idéal maximal bilatère de W , ce qui est absurde. $\square$

Remarque : Ce lemme montre que pour une singularité isolée, on a toujours $\beta_1 > n + 1$. On a donc une caractérisation de la lissité par β_1 , car dans le cas lisse, $\beta_1 = n + 1$.

Nous allons maintenant caractériser la quasi-homogénéité. Si f est quasi homogène, on a un bon opérateur de la forme $s - \theta$, et $\text{ann}_W \delta$ est engendré minimalement par $f, (f'_i \partial_t), (f'_i \partial_j - f'_j \partial_i), s - \theta$. Les décalages correspondant pour la filtration F sont respectivement 0, 1, 1, 1.

Si f n'est pas quasi homogène, alors le degré en s du bon opérateur S_L est supérieur à 2. En effet, supposons au contraire qu'il existe un bon opérateur $s + P$ avec $P = u + \theta$, $u \in \mathcal{O}$ et θ un champ de vecteurs.

$$0 = (s + P)f^s = (s(1 + \theta(f)\frac{1}{f}) + u)f^s.$$

Faisant $s = 0$, on obtient $u = 0$. Alors $\theta(f)\frac{1}{f} = -1$ donc $\theta(f) = -f$ et f est quasi homogène, une contradiction.

Proposition 3.3.1. *f est quasi homogène si et seulement si $\text{reg}_F N_f = 0$.*

Preuve Si f n'est pas quasi homogène, alors $H(S_L)$ est de degré en F supérieur à 2, or $H(S_L)$ est un générateur indispensable de $\text{ann}_W \delta$, donc il existe j tel que $\mathbf{n}_j^{(1)} \geq 2$ d'où $\text{reg}_F N_f \geq 1$. Si f est quasi homogène, on a $\text{reg}_F N_f = 0$ d'après le Théorème 3.1.1. $\square$

Nous caractérisons maintenant la quasi-homogénéité seulement par β_1 , dans le cas des courbes. Si f est quasi homogène, on a $\beta_1 = 5$.

Proposition 3.3.2. *Supposons $n = 2$ et f non quasi homogène. Alors $\beta_1 \geq 6$.*

Preuve On sait que $\text{Der}(\log D)$ est libre de rang 2. Donc $p = 2$.

Il suffit alors de montrer qu'on ne peut pas retirer de l'ensemble de générateurs trouvé les éléments suivants : $f, (f'_i \partial_t), (V_i), H(S_L)$. D'après le Lemme 3.3.5, il reste à montrer qu'on ne peut pas avoir $C_i = 1$ dans une relation bihomogène du type (3.4). Supposons par exemple $C_1 = 1$. Compte tenu du bidegré, on a $D_i = E = 0, C_2 \in \mathcal{O}, B_i \in \mathcal{O}t$ et $A \in \mathcal{O}h \oplus \mathcal{O}t\partial_t \oplus \mathcal{O}\partial_i$. Prenant les termes dans $\oplus \mathcal{O}\partial_i$ dans (3.4), on obtient

$$\delta_1 \in \mathcal{O}\delta_2 + \sum \mathcal{O}f\partial_i. \quad (3.5)$$

Montrons que $f\partial_i \in \mathbf{m}\text{Der}(\log D)$. Posons

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}$$

avec $A \in M_2(\mathcal{O})$. On a

$${}^t(\text{co}A) \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \det(A) \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} = uf \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}$$

avec u une unité, d'après [25]. De plus, $\forall i, j, a_{i,j} \in \mathbf{m}$. Sinon supposons $a_{1,1}$ inversible, alors

$$u_1 f = \delta_1(f) = \sum a_{1,j} f'_j$$

donc $f'_1 \in \mathcal{O}f + \mathcal{O}f'_2$, ce qui est impossible.

Revenant à (3.5), on a

$$\delta_1 \in \mathcal{O}\delta_2 + \mathbf{m}\text{Der}(\log D)$$

ce qui contredit la minimalité du système (δ_i) . $\square$

3.4 Déformations semi-quasi homogènes

3.4.1 Déformation par le socle

Prenons des poids $w_1, \dots, w_n$ strictement positifs. Soit $g = \sum g_\alpha x^\alpha \in \mathcal{O}$, avec $g_\alpha \in \mathbb{C}$. Notons

$$\rho(g) = \inf_{\alpha, g_\alpha \neq 0} \left(\sum w_i \alpha_i \right)$$

le poids de g , et

$$\text{ing} = \sum_{\alpha, \rho(\alpha) = \rho(g)} g_\alpha x^\alpha$$

la partie initiale de g .

Une fonction f est dite *semi-quasi homogène* si $\text{ing} f$ est à singularité isolée en 0.

Fixons f semi-quasi homogène de poids 1. D'après [23], on peut supposer $\forall i, 0 < w_i \leq 1/2$. Rappelons que le socle σ de l'algèbre $\mathcal{O}/J(f)$ est $n - 2 \sum w_i$ (cf. [3]).

On définit une filtration sur $\Theta = \oplus \mathcal{O} \partial_i$ par les poids suivants : on pose

$$\rho(g \partial_i) = \rho(g) - w_i.$$

Lemme 3.4.1. *Pour ce système de poids, l'ensemble des $S_{i,j}$ est un système involutif du module qu'ils engendrent.*

Preuve Supposons l'existence de fonctions $g_{i,j}$ telles que

$$\rho \left(\sum g_{i,j} S_{i,j} \right) > \min \rho(g_{i,j} S_{i,j})$$

et notons $d = \min \rho(g_{i,j} S_{i,j})$. On a alors

$$\sum \text{in}_{d - \rho(S_{i,j})}(g_{i,j}) \text{in}(S_{i,j}) = 0.$$

Or $\text{in}(S_{i,j}) = \text{in} f'_i \partial_j - \text{in} f'_j \partial_i$, et comme par hypothèse les $\text{in} f'_i$ forment une suite régulière, on a d'après le complexe de Koszul :

$$\sum \text{in}_{d - \rho(S_{i,j})}(g_{i,j}) e_{i,j} = \sum_{i < j < k} h_{i,j,k} (\text{in} f'_i e_{j,k} - \text{in} f'_j e_{i,k} + \text{in} f'_k e_{i,j}),$$

ceci vivant dans le $\mathcal{O}$ -module libre de base $(e_{i,j})_{i < j}$. Soit

$$\Lambda = \sum_{i < j} g_{i,j} e_{i,j} - \sum_{i < j < k} h_{i,j,k} (f'_i e_{j,k} - f'_j e_{i,k} + f'_k e_{i,j})$$

qu'on peut réécrire $\Lambda = \sum \Lambda_{i,j} e_{i,j}$. On a

$$\sum \Lambda_{i,j} S_{i,j} = \sum g_{i,j} S_{i,j} \quad \text{et} \quad \min(\rho(\Lambda_{i,j} S_{i,j})) > d.$$

On peut augmenter ce poids jusqu'à atteindre $\rho(\sum g_{i,j} S_{i,j})$. $\square$

On considère le cas particulier de la déformation par le socle d'une fonction quasi homogène à singularité isolée, i.e.

$$f = \inf + \lambda x^\alpha$$

avec $\rho(\alpha) = \sigma$ et $\sigma > 1$. On supposera aussi $f \in \mathfrak{m}^3$.

On va voir que, dans ce cas, la quasi-homogénéité est encore caractérisée par le premier nombre de Betti.

Proposition 3.4.1. *Sous ces conditions, et $\lambda \neq 0$, on a $\beta_1 > \binom{n}{2} + n + 2$.*

Preuve Soit $\chi = \sum w_i x_i \partial_i$ et $\tilde{f} = f - \chi(f) = \lambda(\sigma - 1)x^\alpha$. Par définition du socle, pour tout i , il existe des $c_{i,j} \in \mathcal{O}$ tels que

$$x_i \tilde{f} = \sum c_{i,j} f'_j$$

et on peut supposer $\rho(c_{i,j} f'_j) \geq \sigma$.

Soit $\delta_i = x_i \chi + \sum c_{i,j} \partial_j$. On a donc $\delta_i(f) = x_i f$. On en déduit que l'ensemble $((\delta_i)_i, (S_{i,j})_{i < j})$ est un système de générateurs de $\text{Der}(\log D)$.

Lemme 3.4.2. *Ce système de générateurs est minimal.*

Preuve Considérons une relation (à coefficients dans $\mathcal{O}$) :

$$\sum a_i \delta_i + \sum b_{i,j} S_{i,j} = 0. \quad (3.6)$$

Supposons $a_1 = 1$. On applique les champs de vecteurs à f dans (3.6). On obtient $\sum a_i x_i f = 0$ donc $\sum a_i x_i = 0$ ce qui est absurde.

Montrons que les $S_{i,j}$ sont indispensables. Supposons par exemple $b_{1,2} = 1$ dans l'équation (3.6). On a $\sum a_i x_i = 0$ donc

$$\sum a_i e_i \in \sum_{i < j} \mathcal{O}(x_i e_j - x_j e_i)$$

dans le $\mathcal{O}$ -module libre de base $e_1, \dots, e_n$. Alors

$$\sum a_i \delta_i = (a_1 \dots a_n) \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \in \sum_{i < j} \mathcal{O}(x_i \delta_j - x_j \delta_i).$$

Or

$$x_i \delta_j - x_j \delta_i \in \sum_k \mathcal{O}(x_j c_{i,k} - x_i c_{j,k}) \partial_k,$$

donc on peut réécrire

$$\sum a_i \delta_i = \sum b'_{i,j} S_{i,j}$$

avec $\forall i, j, \rho(b'_{i,j} S_{i,j}) \geq \rho(\sum a_i \delta_i)$. D'autre part,

$$\rho(c_{i,k}) \geq \rho(x_i \tilde{f}) - \rho(f'_k) \geq w_i + w_k + \sigma - 1,$$

donc

$$\begin{aligned} \rho(b'_{a,b}) &\geq \min_{i < j} (w_i + w_j + \sigma - 1) - 1 + w_a + w_b \\ &\geq n - 2 \sum w_i - 2 + \min(w_i + w_j) + w_a + w_b. \end{aligned}$$

Maintenant, en supposant $f \in \mathfrak{m}^3$, on a pour tout i , $0 < w_i < 1/2$. En effet, supposons $w_1 = 1/2$. Alors les monômes de $\inf$ sont de la forme $x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, ou $x_1 x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ avec $\sum \alpha_i \geq 2$. Alors pour tout i , $f'_i(x_1, 0, \dots, 0) = 0$ et f n'est pas à singularité isolée.

Alors $\forall a, b, \rho(b'_{a,b}) > 0$ d'où $b'_{a,b} \in \mathfrak{m}$. Ainsi,

$$\sum a_i \delta_i \in \mathfrak{m} \sum \mathcal{O} S_{i,j}$$

et

$$S_{1,2} \in \sum_{(i,j) \neq (1,2)} S_{i,j} + \mathfrak{m} \sum \mathcal{O} S_{i,j}.$$

On conclut en remarquant que $(S_{i,j})$ est un système minimal. En effet, supposons

$$S_{1,2} \in \sum_{(i,j) \neq (1,2)} \mathcal{O} S_{i,j}.$$

Les termes en ∂_2 donnent $f'_1 \in \sum_{j \neq 1} f'_j$, c'est absurde. $\square$

Posons $V_i = x_i s - \delta_i$. D'après le Corollaire 3.3.1, on a un système de générateurs du W -module $\text{ann}_W \delta$:

$$(f, (f'_i \partial_t), (S_{i,j}), (V_i), (H(R_i)), H(S_L)).$$

En fait, on peut montrer que S_L est de degré 2 en s . D'après le Lemme 3.3.5, les éléments $f, (f'_i \partial_t), H(S_L)$ sont indispensables.

Montrons que les V_i sont indispensables. Si V_1 est dispensable, on a une équation bihomogène

$$Af + \sum B_i f'_i \partial_t + \sum C_{i,j} S_{i,j} + \delta_1 + \sum_{i \neq 1} D_i \delta_i = 0.$$

Les termes en $t\partial_t$ donnent

$$x_1 \in \sum_{i \neq 1} \mathcal{O}x_i + \sum \mathcal{O}f'_i + \mathcal{O}f,$$

c'est absurde car $f \in \mathfrak{m}^3$ donc $f'_i \in \mathfrak{m}^2$.

Supposons les poids ordonnés : $0 < w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n < 1/2$.

Lemme 3.4.3. $f\partial_1 \in \mathfrak{m}\text{Der}(\log D)$.

Preuve Ecrivons $f'_1 = \sum a_j x_j$ avec $a_j \in \mathfrak{m}$, $\rho(a_j) \geq 1 - w_1 - w_j$. Alors $f\partial_1(f) = ff'_1 = \sum_j a_j x_j f = \sum_j a_j \delta_j(f)$. On a alors

$$f\partial_1 - \sum_j a_j \delta_j = \sum b_{k,l} S_{k,l}.$$

De plus, $\rho(\delta_j) \geq w_j$ alors dans l'équation précédente on peut supposer

$$\rho(b_{k,l}) \geq \rho(f\partial_1 - \sum_j a_j \delta_j) - \rho(S_{k,l}) \geq (1 - w_1) - (1 - w_k - w_l) \geq w_k + w_l - w_1 > 0,$$

la dernière inégalité provenant de l'ordre des poids. Donc $b_{k,l} \in \mathfrak{m}$. $\square$

Achevons la preuve de la proposition en construisant $\binom{n}{2} - n + 1$ éléments du module $\sum \mathcal{O}S_{i,j}$, indispensables dans $\text{ann}_W(\delta)$.

Comme dans la démonstration de la Proposition 3.3.2, on doit considérer une équation à coefficients dans $\mathcal{O}$

$$\sum a_i f\partial_i + \sum c_{i,j}^{(a)} S_{i,j} + \sum d_i^{(a)} \delta_i = 0. \quad (3.7)$$

En appliquant les champs de vecteurs à f , on obtient $d_i^{(a)} \in \mathfrak{m}$. D'autre part, d'après le Lemme 3.3.2, $c_{i,j}^{(0)} \in \mathfrak{m}$. Enfin, $f\partial_i \in \text{Der}(\log D)$. On en déduit l'existence d'une application $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \frac{\mathcal{O}^n}{\mathfrak{m}\mathcal{O}^n} \simeq \mathbb{C}^n &\rightarrow \oplus \mathbb{C}S_{i,j} \simeq \mathbb{C}^{\binom{n}{2}} \\ a = (a_1, \dots, a_n) &\mapsto \sum c_{i,j}^{(a)}(0) S_{i,j}. \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, on a $\varphi(1, 0, \dots, 0) = 0$ donc $p = \text{rang}(\varphi) \leq n - 1$. Soit alors

$$\oplus \mathbb{C}S_{i,j} = \oplus \mathbb{C}T_i$$

avec $T_1, \dots, T_p$ une base de $\text{im}\varphi$. On peut remplacer les $S_{i,j}$ par les T_i , et $T_{p+1}, \dots, T_{\binom{n}{2}}$ sont indispensables.

3.4.2 Un exemple de semi-quasi homogène non h -saturé

Soit $f = x^6 + y^7 + x^2y^5$. C'est une fonction semi-quasi homogène pour les poids $w_1 = 1/6, w_2 = 1/7$. On va établir que $\text{gr}^V(\mathbf{R}(N_f))$ n'est pas h -saturé.

Notons W l'anneau $\text{gr}^V(\mathcal{D}_{x,t}^{(h)})$. Avec Singular, on calcule un idéal bihomogène I de $\text{gr}^V(A_{n+1}^{(h)})$ tel que $WI = \text{ann}\delta$. (cf. paragraphe 2.2.4). La base de Gröbner minimale I_6 de I contient l'élément $x^4y^3\partial_t h$. Donc $x^4y^3\partial_t h \in I$ tandis que $x^4y^3\partial_t \notin I$, ce qui montre que le module algébrique

$$\frac{\text{gr}^V(A_{n+1}^{(h)})}{I}$$

n'est pas h -saturé.

On veut montrer que le module analytique W/WI n'est pas h -saturé. Il suffit de montrer que $x^4y^3\partial_t \notin WI$.

On sait (Corollaire 3.3.1) que $\text{ann}_W\delta$ admet un système de générateurs de la forme $(f, (f'_i\partial_t), (V_i), (H(R_i)), H(S_L))$. Supposons $x^4y^3\partial_t \in WI$. Compte tenu du bidegré, on aurait

$$x^4y^3\partial_t \in \mathcal{O}\partial_t f + \sum \mathcal{O}f'_i\partial_t$$

ou de manière équivalente,

$$x^4y^3 \in \mathcal{O}f + \sum \mathcal{O}f'_i.$$

Or on peut à l'aide de Singular montrer que c'est faux : on calcule une base standard de l'idéal de $\mathcal{O}$ engendré par $f, (f'_i)$, avec un ordre adapté aux séries (par la déclaration d'anneau `ring S=0,(x,y),ls;`). Le monôme x^4y^3 est sous l'escalier correspondant, il ne peut donc pas (d'après l'algorithme de division) appartenir à l'idéal $(f, (f'_i))$.

Chapitre 4

Monômes et diviseurs libres localement quasi homogènes

Nous présentons dans ce chapitre des exemples de singularités non isolées satisfaisant notre critère de passage au commutatif : les monômes et les diviseurs libres localement quasi homogènes.

4.1 Monômes

Considérons le cas d'une fonction monomiale

$$f = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$$

avec $a_1, \dots, a_n$ des entiers positifs. On peut supposer, à l'aide de la Proposition 2.1.5, que pour tout i , $a_i > 0$. On se propose de calculer les nombres de Betti $\beta_i(f)$.

Théorème 4.1.1. – Si f est non réduite, alors $\beta_1(f) = 2n+1$ et $\beta_i(f) = 2\binom{n+1}{i}$ si $i \geq 2$.
– Si f est réduite, alors $\beta_1(f) = 2n+1$, $\beta_i(f) = 2\binom{n+1}{i}$ si $2 \leq i \leq n-1$, $\beta_n(f) = 2n+1$, $\beta_{n+1}(f) = 1$, $\beta_i(f) = 0$ si $i \geq n+2$.

La démonstration est calculatoire et longue. Pour en faciliter la lecture, donnons-en le plan.

1. Nous commençons par montrer qu'on peut se ramener au commutatif. Pour cela, nous établissons que $J(f)$ est de type linéaire. Nous obtenons une présentation du module bigradué $\text{bigr}(\mathcal{D}_{x,t}f^s)$ sur l'anneau commutatif $R = \text{bigr}(\mathcal{D}_{x,t}) \simeq \mathbb{C}\{x\}[t, \tau, \xi]$. Précisons cette présentation. Notons

$$\chi = \frac{x_1 \xi_1}{a_1}.$$

Alors $\text{bigr}(\mathcal{D}_{x,t}f^s) \simeq R/I$ avec

$$I = \langle f, (f'_i\tau), \chi + t\tau, \left(\chi - \frac{x_i\xi_i}{a_i}\right)_{i>1} \rangle$$

2. Nous déterminons ensuite explicitement une résolution bigraduée de R/I . Ceci est réalisé par une série de dévissages. Le point le plus calculatoire est la détermination de morphismes de complexes.
3. Une fois obtenue une résolution bigraduée libre

$$L_\bullet \rightarrow \frac{R}{I} \rightarrow 0,$$

on utilise le fait suivant :

$$\beta_i = \dim_{\mathbb{C}} H_i(L_\bullet \otimes_R \mathbb{C}).$$

$L_\bullet \otimes_R \mathbb{C}$ correspond à substituer toutes les variables à 0 dans les matrices de la résolution $L_\bullet$. On obtient un complexe de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie, on en calcule l'homologie.

4.1.1 Description de N_f et passage au commutatif

Soit ϕ le morphisme canonique $\mathcal{O}[\xi] \rightarrow \oplus J(f)^i T^i$.

Lemme 4.1.1.

$$\ker \phi = \langle \left(\frac{x_1\xi_1}{a_1} - \frac{x_i\xi_i}{a_i} \right)_i \rangle.$$

Preuve Nous reprenons les arguments donnés dans [15], preuve du Lemme 6.1-2.

Soit J l'idéal de $\mathcal{O}[\xi]$ engendré par les éléments $\frac{x_1\xi_1}{a_1} - \frac{x_i\xi_i}{a_i}$. De manière évidente, $J \subset \ker \phi$. D'autre part, J est réduit et $V(J)$ est égal à l'adhérence dans $T^*\mathbb{C}^n$ de l'ensemble

$$\{(x_1, \dots, x_n, a_1 \frac{s}{x_1}, \dots, a_n \frac{s}{x_n}), s \in \mathbb{C}, \forall i, x_i \in \mathbb{C}^*\}.$$

Les éléments de $\ker \phi$ s'annulent sur $V(J)$, donc $\ker \phi \subset J$. $\square$

D'après le lemme précédent, $J(f)$ est de type linéaire. De plus, f est Euler homogène car $\chi(f) = f$ et on en déduit (à l'aide du Lemme 2.2.2) :

$$\text{ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s) = \langle \chi - s, \left(\frac{x_1\partial_1}{a_1} - \frac{x_i\partial_i}{a_i} \right)_i \rangle.$$

D'après la Proposition 2.2.2, il résulte qu'on peut passer au commutatif et la Proposition 2.2.4 donne la présentation : $\text{bigr}(N_f) \simeq R/I$ avec

$$I = \langle f, (f'_i \tau), \chi + t\tau, (\chi - \frac{x_i \xi_i}{a_i})_{i \geq 1} \rangle.$$

4.1.2 Détermination d'une résolution bigraduée libre de R/I

Nous travaillons désormais dans la catégorie des R -modules bigradués.

Les éléments $\chi + t\tau, (\chi - \frac{x_i \xi_i}{a_i})_{i \geq 1}, f$ forment une suite régulière. En effet la régularité de la suite $\chi + t\tau, (\chi - \frac{x_i \xi_i}{a_i})_{i \geq 1}$ est évidente, et l'application

$$\text{gr}^F(\mathcal{D}(s)f^s) \xrightarrow{f} \text{gr}^F(\mathcal{D}(s)f^s)$$

est injective (Lemme 2.2.3). Soit l'idéal

$$J = \langle \chi + t\tau, \left(\chi - \frac{x_i \xi_i}{a_i} \right)_{i \geq 1}, f \rangle.$$

On a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \frac{I}{J} \rightarrow \frac{R}{J} \rightarrow \frac{R}{I} \rightarrow 0$$

et on connaît la résolution minimale de R/J : c'est un complexe de Koszul. On veut maintenant résoudre I/J . Soit l'idéal

$$K = \langle \chi + t\tau, \left(\chi - \frac{x_i \xi_i}{a_i} \right)_{i \geq 1} \rangle.$$

Soit

$$\tilde{\phi}_0 : R^{n+1} \rightarrow \frac{I}{K}$$

définie par $\tilde{\phi}_0(e_0) = f$ et $\tilde{\phi}_0(e_i) = f'_i \tau$ pour $1 \leq i \leq n$.

Lemme 4.1.2. *$\ker \tilde{\phi}_0$ est engendré par*

$$S_i = \tau e_0 - \frac{x_i}{a_i} e_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

$$T_i = \xi_i e_0 + t e_i, \text{ } 1 \leq i \leq n,$$

$$\xi_{i,j} = \xi_i e_j - \xi_j e_i, \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n.$$

Preuve On a $f'_i = a_i x^{a-e_i}$, donc $\frac{x_i}{a_i} f'_i = f$, d'où $S_i \in \ker \tilde{\phi}_0$. D'autre part,

$$f'_i \left(\frac{x_1}{a_1} \xi_1 - \frac{x_i}{a_i} \xi_i \right) = f'_i \left(\frac{x_1}{a_1} \xi_1 + t\tau \right) - t f'_i \tau - \xi_i f$$

donc $T_i \in \ker \tilde{\phi}_0$. Enfin,

$$\xi_i f'_j \tau - \xi_j f'_i \tau = \tau a_i a_j x^{a-e_i-e_j} \left(\frac{x_i}{a_i} \xi_i - \frac{x_j}{a_j} \xi_j \right) \in \sum_k R \left(\frac{x_1}{a_1} \xi_1 - \frac{x_k}{a_k} \xi_k \right)$$

donc $\xi_{i,j} \in \ker \tilde{\phi}_0$.

Soit une relation bihomogène $Af + \sum B_i f'_i \tau \in K$. On va raisonner modulo les relations S_i, T_i et $\xi_{i,j}$. Nécessairement, $A \in (\xi_1, \dots, \xi_n, \tau)$ donc on peut supposer $A = 0$ modulo $(S_i), (T_i)$. Soit donc

$$\sum B_i f'_i \tau = C \left(\frac{x_1 \xi_1}{a_1} - s \right) + \sum_{i \neq 1} D_i \left(\frac{x_1}{a_1} \xi_1 - \frac{x_i}{a_i} \xi_i \right). \quad (4.1)$$

Rappelons la structure bigraduée de R : pour $k \geq 0$, on a $\bigoplus_d R_{d,k} = \mathcal{O}[\xi, s] \tau^k$ et $\bigoplus_d R_{d,-k} = \mathcal{O}[\xi, s] t^k$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$ le V -degré de la relation (4.1). Supposons $k \geq 1$. On a $B_i = b_i(s, \xi) \tau^{k-1}$ avec $b_i(\xi, s) \in \mathcal{O}[\xi, s]$. On a $(s - \chi)e_i \in \ker \tilde{\phi}_0$ et

$$(s - \chi)e_i = -(t\tau + \chi)e_i = -\tau T_i + \xi_i S_1 - \frac{x_1}{a_i} \xi_{1,i}$$

(avec $\xi_{1,i} = 0$ si $i = 1$), donc on peut travailler modulo $(s - \chi)e_i$, ainsi on peut supposer $B_i = b_i(\xi) \tau^{k-1}$ avec $b_i(\xi) \in \mathcal{O}[\xi]$.

Avec des notations similaires, on a $C = c(\xi, s) \tau^k$ et $D_i = d_i(\xi, s) \tau^k$. Simplifiant par τ^k dans (4.1), on obtient

$$\sum b_i(\xi) f'_i = c(\xi, s) \left(\frac{x_1 \xi_1}{a_1} - s \right) + \sum_{i \neq 1} d_i(\xi, s) \left(\frac{x_1}{a_1} \xi_1 - \frac{x_i}{a_i} \xi_i \right),$$

ceci ayant lieu dans $\mathcal{O}[\xi, s]$. Faisons $\xi = f'_i$ et $s = f$, alors $\sum b_i(f') f'_i = 0$, donc d'après le Lemme 4.1.1,

$$\sum b_i(\xi) \xi_i = \sum c_i \left(\frac{x_1 \xi_1}{a_1} - \frac{x_i \xi_i}{a_i} \right)$$

avec $c_i \in \mathcal{O}[\xi]$ homogène en ξ , ce que nous réécrivons sous la forme

$$\left(b_1 - \sum_{i \geq 2} c_i \frac{x_1}{a_1} \right) \xi_1 + \sum_{i \geq 2} \left(b_i + c_i \frac{x_i}{a_i} \right) \xi_i = 0.$$

La suite $\xi_1, \dots, \xi_n$ étant régulière, il existe des $d_{i,j} \in \mathcal{O}[\xi]$ homogènes tels que

$$\left(b_1 - \sum_{i \geq 2} c_i \frac{x_1}{a_1}\right) e_1 + \sum_{i \geq 2} \left(b_i + c_i \frac{x_i}{a_i}\right) e_i = \sum_{i < j} d_{i,j} (\xi_i e_j - \xi_j e_i)$$

donc

$$\sum b_i e_i = \sum_{i \geq 2} c_i \left(\frac{x_1}{a_1} e_1 - \frac{x_i}{a_i} e_i\right) + \sum_{i < j} d_{i,j} (\xi_i e_j - \xi_j e_i).$$

On a $\frac{x_1}{a_1} e_1 - \frac{x_i}{a_i} e_i = S_i - S_1$, donc $\sum B_i e_i = \tau^{k-1} \sum b_i e_i$ est engendré par les S_i et les $\xi_{i,j}$.

Supposons maintenant $k \leq 0$. Alors $B_i = b_i(\xi, s) t^{k+1}$ et on se ramène en utilisant la relation $(s - \chi) e_i$ à $B_i = b_i(\xi) t^{k+1}$. On a $C = c(\xi, s) t^k$ et $D_i = d_i(\xi, s) t^k$. La relation (4.1) devient après simplification par t^k :

$$-\sum b_i(\xi) f'_i s = c(\xi, s) \left(\frac{x_1 \xi_1}{a_1} - s\right) + \sum_{i \neq 1} d_i(\xi, s) \left(\frac{x_1}{a_1} \xi_1 - \frac{x_i}{a_i} \xi_i\right).$$

Faisant $\xi_i = f'_i$ et $s = f$, on obtient $\sum b_i(f') f'_i f = 0$ donc $\sum b_i(f') f'_i = 0$ et on conclut comme dans le cas $k \geq 1$. $\square$

Soit

$$\phi_0 : R^n \rightarrow \frac{I}{J}$$

définie par $\phi_0(e_i) = \overline{f'_i \tau}$. D'après le lemme 4.1.2, on a :

Lemme 4.1.3. *le noyau de ϕ_0 est engendré par les éléments*

$$\frac{x_i}{a_i} e_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

$$te_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

$$\xi_{i,j}, \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n.$$

Soit

$$\phi_1 : R^{2n + \binom{n}{2}} \rightarrow R^n$$

l'application qui envoie respectivement les vecteurs de base $e'_i, e''_i, e_{i,j}$ sur les éléments $\frac{x_i}{a_i} e_i, te_i, \xi_{i,j}$.

Lemme 4.1.4. *ker ϕ_1 est engendré par*

$$\frac{x_j}{a_j} \xi_j e'_i - \frac{x_i}{a_i} \xi_i e'_j + \frac{x_i x_j}{a_i a_j} e_{i,j} \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n,$$

$$\xi_j e''_i - \xi_i e''_j + te_{i,j} \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n,$$

$$te'_i - \frac{x_i}{a_i} e''_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

$$\xi_i e_{j,k} - \xi_j e_{i,k} + \xi_k e_{i,j} \text{ pour } 1 \leq i < j < k \leq n.$$

Preuve(abrégée) On calcule une base de Gröbner du sous-module de R^n engendré par $(\frac{x_i}{a_i}e_i)_i, (te_i)_i, (\xi_{i,j})_{i < j}$, par l'algorithme de Buchberger.

Un vecteur $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \delta, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma, i)$ représentant le monôme $x^\alpha t^\delta \xi^\beta \tau^\gamma e_i$, on utilise l'ordre lexicographique sur les coordonnées $\gamma, \beta_n, \dots, \beta_1, \delta, \alpha_n, \dots, \alpha_1, i$.

Lorsqu'on calcule les S -opérateurs, il apparaît des nouveaux éléments : pour $i < j$, $\frac{x_i}{a_i}\xi_i e_j$. En adjoignant ces éléments aux générateurs initiaux, on obtient une base de Gröbner. On connaît alors les relations entre les éléments de cette base de Gröbner, et on en déduit les relations entre les générateurs initiaux. On vérifie enfin que ces relations sont engendrées par celles décrites dans l'énoncé.

Lemme 4.1.5. *Le noyau de l'application*

$$\begin{aligned} R^n &\rightarrow \frac{R^n}{(\xi_{i,j})} \\ e'_i &\mapsto \frac{x_i}{a_i}e_i \end{aligned}$$

est engendré par les éléments

$$\frac{x_j}{a_j}\xi_j e'_i - \frac{x_i}{a_i}\xi_i e'_j, \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq n.$$

Preuve Calcul de bases de Gröbner du sous-module de R^n engendré par $(\frac{x_i}{a_i}e_i)_i, (\xi_{i,j})_{i < j}$, analogue à celui de la preuve du Lemme 4.1.4.

Soit le R -module

$$M_2 = \frac{R^n}{< (\frac{x_i}{a_i}e_i), (\xi_{i,j}), (te_i) >}.$$

On a un isomorphisme $\phi_0 : M_2 \simeq I/J$. Pour résoudre ce module, on va utiliser encore un dévissage : soit le R -module

$$M_1 = \frac{R^n}{< (\frac{x_i}{a_i}e_i), (\xi_{i,j}) >}.$$

On a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \frac{< (\frac{x_i}{a_i}e_i), (\xi_{i,j}), (te_i) >}{< (\frac{x_i}{a_i}e_i), (\xi_{i,j}) >} \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Or d'après le Lemme 4.1.4,

$$\frac{< (\frac{x_i}{a_i}e_i), (\xi_{i,j}), (te_i) >}{< (\frac{x_i}{a_i}e_i), (\xi_{i,j}) >} \simeq M_1,$$

l'isomorphisme étant donné par $M_1 \ni \bar{e}_i \mapsto \bar{te}_i$. Donc la suite exacte (4.2) s'identifie à la suite exacte

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{t} M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$$

et pour résoudre M_2 , il suffit de résoudre M_1 . Pour ce faire, on utilise la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \frac{\langle (\frac{x_i}{a_i}e_i), (\xi_{i,j}) \rangle}{\langle (\xi_{i,j}) \rangle} \rightarrow \frac{R^n}{\langle (\xi_{i,j}) \rangle} \rightarrow M_1 \rightarrow 0.$$

On connaît la résolution minimale de $R^n / \langle (\xi_{i,j}) \rangle$: elle provient du complexe de Koszul associé à la suite régulière $\xi_1, \dots, \xi_n$. Enfin, d'après le Lemme 4.1.5,

$$\frac{\langle (\frac{x_i}{a_i}e_i), (\xi_{i,j}) \rangle}{\langle (\xi_{i,j}) \rangle} \simeq \frac{R^n}{\langle (\frac{x_j}{a_j}\xi_j e_i - \frac{x_i}{a_i}\xi_i e_j) \rangle}$$

et on connaît la résolution de ce dernier module, elle provient du complexe de Koszul associé à la suite régulière $(\frac{x_i}{a_i}\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On connaît ainsi potentiellement une résolution de R/I , en prenant les cônes des morphismes de résolutions provenant des suites exactes courtes décrites. Nous allons maintenant expliciter ces morphismes.

Résolution de M_1

La résolution minimale bigraduée de M_1 est donnée par le cône du morphisme de complexes suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^1 R^n & \xrightarrow{\alpha_1} & \bigwedge^1 R^n \\ \delta_{\frac{x\xi}{a}} \uparrow & & \uparrow \delta_\xi \\ \bigwedge^2 R^n & \xrightarrow{\alpha_2} & \bigwedge^2 R^n \\ \delta_{\frac{x\xi}{a}} \uparrow & & \uparrow \delta_\xi \\ \bigwedge^3 R^n & \xrightarrow{\alpha_3} & \bigwedge^3 R^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

avec δ_ξ le morphisme de Koszul associé à la suite $\xi_1, \dots, \xi_n$, $\delta_{\frac{x\xi}{a}}$ le morphisme de Koszul associé à la suite $\frac{x_1\xi_1}{a_1}, \dots, \frac{x_n\xi_n}{a_n}$, et α_i définie par

$$\alpha_i(e_I) = \prod_k \frac{x_{I_k}}{a_{I_k}} e_I$$

où I est un multiindice de longueur i .

Notons $\bigwedge^i = \bigwedge^i R^n$. On peut expliciter la résolution de M_1 :

$$\cdots \rightarrow \bigwedge^2 \oplus \bigwedge^3 \xrightarrow{\varphi_2} \bigwedge^1 \oplus \bigwedge^2 \xrightarrow{\varphi_1} \bigwedge^1 \xrightarrow{\varphi_0} M_1 \rightarrow 0$$

avec

$$\varphi_0(e_i) = e_i,$$

$$\varphi_1(\omega, \eta) = \alpha_1(\omega) + \delta_\xi(\eta),$$

$$\text{pour } (\omega, \eta) \in \bigwedge^i \oplus \bigwedge^{i+1}, \varphi_i(\omega, \eta) = (\delta_{\frac{x\xi}{a}}(\omega), (-1)^{i-1}\alpha_i(\omega) + \delta_\xi(\eta)).$$

Résolution de M_2

La résolution minimale bigraduée de M_2 est donnée par le cône du morphisme de complexes suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^1 & \xrightarrow{t\text{Id}} & \bigwedge^1 \\ \varphi_1 \uparrow & & \varphi_1 \uparrow \\ \bigwedge^1 \oplus \bigwedge^2 & \xrightarrow{t\text{Id}} & \bigwedge^1 \oplus \bigwedge^2 \\ \varphi_2 \uparrow & & \varphi_2 \uparrow \\ \bigwedge^2 \oplus \bigwedge^3 & \xrightarrow{t\text{Id}} & \bigwedge^2 \oplus \bigwedge^3 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

D'où la résolution minimale bigraduée de M_2 :

$$\cdots \rightarrow (\bigwedge^1 \oplus \bigwedge^2) \oplus (\bigwedge^2 \oplus \bigwedge^3) \xrightarrow{\theta_2} \bigwedge^1 \oplus (\bigwedge^1 \oplus \bigwedge^2) \xrightarrow{\theta_1} \bigwedge^1 \xrightarrow{\theta_0} M_2 \rightarrow 0.$$

Explicitons les morphismes θ_i .

$$\theta_0(\omega) = \omega,$$

$$\theta_1(\omega, \underline{\eta}) = t\omega + \varphi_1(\underline{\eta}),$$

$$\text{pour } i \geq 2, \theta_i(\underline{\omega}, \underline{\eta}) = (\varphi_{i-1}(\underline{\omega}), (-1)^{i+1}t\underline{\omega} + \varphi_i(\underline{\eta})).$$

Résolution de R/I

Une résolution bigraduée de R/I est donnée par le cône du morphisme de complexes suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \bigwedge^1 & \xrightarrow{\rho_0} & \bigwedge^0 R^{n+1} \\
 \uparrow \theta_1 & & \uparrow \delta \\
 \bigwedge^1 \oplus (\bigwedge^1 \oplus \bigwedge^2) & \xrightarrow{\rho_1} & \bigwedge^1 R^{n+1} \\
 \uparrow \theta_2 & & \uparrow \delta \\
 (\bigwedge^1 \oplus \bigwedge^2) \oplus (\bigwedge^2 \oplus \bigwedge^3) & \xrightarrow{\rho_2} & \bigwedge^2 R^{n+1} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

avec $\rho_0(e_i) = f'_i \tau$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{I}{J} & \xrightarrow{\quad} & \frac{R}{J} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \bigwedge^1 & \xrightarrow{\rho_0} & \bigwedge^0 R^{n+1}
 \end{array}$$

et δ le morphisme de Koszul associé à la suite régulière

$$(g_1, \dots, g_{n+1}) = (\chi + t\tau, (\chi - \frac{x_i \xi_i}{a_i})_{i \geq 1}, f).$$

Explicitons les flèches ρ_i pour $i \geq 1$. Si I est un multiindice, notons $x_I = \prod x_{I_k}$ et $a_I = \prod a_{I_k}$.

Lemme 4.1.6. *Les flèches suivantes rendent le diagramme ci-dessus commutatif.*

$$\begin{aligned}
 \rho_1(e_i, (0, 0)) &= -f'_i e_i + f'_1 e_1 - \xi_i e_{n+1} \text{ si } i \neq 1, \\
 \rho_1(e_1, (0, 0)) &= f'_1 e_1 - \xi_1 e_{n+1}, \\
 \rho_1(0, (e_i, 0)) &= \tau e_{n+1}, \\
 \rho_1(0, (0, e_{i,j})) &= \tau \frac{a_i a_j}{x_i x_j} x^a (e_j - e_i) \text{ si } i \neq 1, \\
 \rho_1(0, (0, e_{1,j})) &= \tau \frac{a_1 a_j}{x_1 x_j} x^a e_j.
 \end{aligned}$$

Supposons $i \geq 2$.

$$\rho_i : (\bigwedge^{i-1} \oplus \bigwedge^i) \oplus (\bigwedge^i \oplus \bigwedge^{i+1}) \rightarrow \bigwedge^i R^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
Si \ 1 \notin I, \ \rho_i((e_I, 0), \underline{0}) &= (-1)^i \sum_k (-1)^{k-1} e_{(J \setminus J_k) \cup \{n+1\}} \quad \text{avec } J = 1 \cup I. \\
Si \ 1 \in I, \ \rho_i((e_I, 0), \underline{0}) &= (-1)^{i+1} e_{I \cup \{n+1\}}. \\
Si \ 1 \notin I, \ \rho_i((0, e_I), \underline{0}) &= (-1)^i \frac{a_I}{x_I} x^a \sum_k (-1)^{k-1} e_{J \setminus J_k} \quad \text{avec } J = 1 \cup I. \\
Si \ 1 \in I, \ \rho_i((0, e_I), \underline{0}) &= (-1)^{i+1} \frac{a_I}{x_I} x^a e_I. \\
Si \ 1 \notin I, \ \rho_i(\underline{0}, (e_I, 0)) &= \tau \sum_k (-1)^{k-1} e_{(I \setminus I_k) \cup \{n+1\}}. \\
Si \ 1 \in I, \ \rho_i(\underline{0}, (e_I, 0)) &= \tau e_{(I \setminus 1) \cup \{n+1\}}. \\
Si \ 1 \notin I, \ \rho_i(\underline{0}, (0, e_I)) &= \tau \frac{a_I}{x_I} x^a \sum_k (-1)^{k-1} e_{I \setminus I_k}. \\
Si \ 1 \in I, \ \rho_i(\underline{0}, (0, e_I)) &= \tau \frac{a_I}{x_I} x^a e_{I \setminus 1}.
\end{aligned}$$

Preuve Vérification fastidieuse mais directe. Il s'agit de montrer que pour tout i , pour tout élément e de la base canonique utilisée dans l'énoncé, on a $\rho_i \theta_{i+1}(e) = \delta \rho_{i+1}(e)$. Montrons-le pour $i \geq 2$, $e = ((e_I, 0), \underline{0})$ avec $1 \notin I$, les autres vérifications étant similaires. Notons $J^k = 1 \cup (I \setminus I_k)$ et $J = 1 \cup I$.

$$\begin{aligned}
\rho_i \theta_{i+1}((e_I, 0), \underline{0}) &= \rho_i(\delta_{\frac{x}{a}}(e_I), (-1)^{i+1} \alpha_i(e_I), (-1)^i t e_I, 0) \\
&= \rho_i \left(\sum_k (-1)^{k-1} \frac{x_{I_k} \xi_{I_k}}{a_{I_k}} e_{I \setminus I_k}, (-1)^{i+1} \Pi_k \frac{x_{I_k}}{a_{I_k}} e_I, (-1)^i t e_I, 0 \right) \\
&= (-1)^i \sum_k (-1)^{k-1} \frac{x_{I_k} \xi_{I_k}}{a_{I_k}} \sum_l (-1)^{l-1} e_{J^k \setminus J_l^k \cup \{n+1\}} \\
&\quad - x^a \sum_k (-1)^{k-1} e_{J \setminus J_k} + (-1)^i t \tau \sum_k (-1)^{k-1} e_{I \setminus I_k \cup \{n+1\}} \\
&= (-1)^{i+1} \sum_k (-1)^{k-1} g_{I_k} \sum_l (-1)^{l-1} e_{J^k \setminus J_l^k \cup \{n+1\}} \\
&\quad + (-1)^i \chi \sum_k (-1)^{k-1} \sum_l (-1)^{l-1} e_{J^k \setminus J_l^k \cup \{n+1\}} \\
&\quad - g_{n+1} \sum_k (-1)^{k-1} e_{J \setminus J_k} + (-1)^i t \tau \sum_k (-1)^{k-1} e_{I \setminus I_k \cup \{n+1\}}
\end{aligned}$$

On a $\sum_k (-1)^{k-1} \sum_{l \geq 2} (-1)^{l-1} e_{J^k \setminus J_l^k \cup \{n+1\}} = -\delta_{\underline{1}} \delta_{\underline{1}}(e_I) = 0$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_k (-1)^{k-1} \sum_{l \geq 1} (-1)^{l-1} e_{J^k \setminus J_l^k \cup \{n+1\}} &= \sum_k (-1)^{k-1} e_{J^k \setminus J_1^k \cup \{n+1\}} \\
&= \sum_k (-1)^{k-1} e_{I \setminus I_k \cup \{n+1\}}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \rho_i \theta_{i+1}((e_I, 0), \underline{0}) &= (-1)^{i+1} \sum_k (-1)^{k-1} g_{I_k} \sum_l (-1)^{l-1} e_{J^k \setminus J_l^k \cup \{n+1\}} \\ &\quad + (-1)^i g_1 \sum_k (-1)^{k-1} e_{I \setminus I_k \cup \{n+1\}} - g_{n+1} \sum_k (-1)^{k-1} e_{J \setminus J_k}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

D'autre part, notons $\tilde{J}^k = J \setminus J_k \cup \{n+1\}$, on a

$$\begin{aligned} \delta \rho_{i+1}((e_I, 0), \underline{0}) &= \delta((-1)^{i+1} \sum_k (-1)^{k-1} e_{J \setminus J_k \cup \{n+1\}}) \\ &= (-1)^{i+1} \sum_k (-1)^{k-1} \sum_l (-1)^{l-1} g_{\tilde{J}_l^k} e_{\tilde{J}^k \setminus \tilde{J}_l^k}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Identifions terme à terme (4.3) et (4.4), que nous voyons comme des combinaisons linéaires des g_i .

Dans (4.4) le coefficient de g_{n+1} est $(-1)^{i+1} \sum_k (-1)^{k-1} (-1)^i e_{J \setminus J_k}$, le même que dans (4.3).

Le coefficient de g_1 dans (4.4) est $(-1)^{i-1} \sum_{k \geq 2} (-1)^{k-1} g_1 e_{I \setminus I_{k-1} \cup \{n+1\}}$, égal à celui de (4.3).

Dans (4.3), le coefficient de g_{I_p} est

$$(-1)^{i+1} (-1)^{p-1} \sum_{l \geq 1} (-1)^{l-1} e_{J^p \setminus J_l^p \cup \{n+1\}}.$$

D'autre part, comme $I_p = \tilde{J}_l^k$ si et seulement si

$$k \neq p+1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} l = p & \text{si } k < p+1 \\ \text{ou } l = p+1 & \text{si } k > p+1, \end{cases}$$

le coefficient de g_{I_p} dans (4.4) est

$$(-1)^{i+1} \left(\sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} (-1)^{p-1} e_{\tilde{J}^k \setminus \tilde{J}_p^k} + \sum_{k=p+2}^{i+1} (-1)^{k-1} (-1)^p e_{\tilde{J}^k \setminus \tilde{J}_{p+1}^k} \right).$$

Pour conclure, on remarque que si $k < p$, alors $J^p \setminus J_k^p \cup \{n+1\} = \tilde{J}^k \setminus \tilde{J}_p^k$, et si $k > p$, alors $J^p \setminus J_k^p \cup \{n+1\} = \tilde{J}^{k+1} \setminus \tilde{J}_p^k$. $\square$

On en déduit une résolution bigraduée de R/I :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow ((\bigwedge^1 \oplus \bigwedge^2) \oplus (\bigwedge^2 \oplus \bigwedge^3)) \oplus \bigwedge^3 R^{n+1} \xrightarrow{\Phi_3} (\bigwedge^1 \oplus (\bigwedge^1 \oplus \bigwedge^2)) \oplus \bigwedge^2 R^{n+1} \xrightarrow{\Phi_2} \\ \bigwedge^1 \oplus \bigwedge^1 R^{n+1} \xrightarrow{\Phi_1} R \xrightarrow{\Phi_0} \frac{R}{I} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

4.1.3 Calcul des nombres de Betti

Cas non réduit

On suppose f non réduite.

Notons $\bigwedge^i = \bigwedge^i \mathbb{C}^n$.

On déduit de la résolution obtenue de R/I que le complexe $\frac{R}{I} \otimes^L \mathbb{C}$ est quasi isomorphe au complexe suivant :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow ((\bigwedge^1 \oplus \bigwedge^2) \oplus (\bigwedge^2 \oplus \bigwedge^3)) \oplus \bigwedge^3 \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\bar{\Phi}_3} (\bigwedge^1 \oplus (\bigwedge^1 \oplus \bigwedge^2)) \oplus \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\bar{\Phi}_2} \\ \bigwedge^1 \oplus \bigwedge^1 \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\bar{\Phi}_1} \mathbb{C} \xrightarrow{\bar{\Phi}_0} 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

avec $\bar{\Phi}_2 = \bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_0 = 0$. Si $i \geq 3$, soit e_I un vecteur de la base canonique de $\bigwedge^{i-2} \subset ((\bigwedge^{i-2} \oplus \bigwedge^{i-1}) \oplus (\bigwedge^{i-1} \oplus \bigwedge^i)) \oplus \bigwedge^i \mathbb{C}^{n+1}$. Si $1 \notin I$, soit $J = 1 \cup I$, alors

$$\bar{\Phi}_i(e_I) = \sum_k (-1)^{k-1} e_{J \setminus J_k \cup \{n+1\}} \in \bigwedge^{i-1} \mathbb{C}^{n+1}.$$

Si $1 \in I$, alors

$$\bar{\Phi}_i(e_I) = -e_{I \cup \{n+1\}} \in \bigwedge^{i-1} \mathbb{C}^{n+1}.$$

Les autres composantes de $\bar{\Phi}_i$ exprimée dans les bases canoniques sont nulles.

Lemme 4.1.7. Si $i \geq 3$, $\text{rang}(\bar{\Phi}_i) = \binom{n}{i-2}$.

Preuve Soit l'injection

$$\iota : \bigwedge^{i-2} \mathbb{C}^n \rightarrow \bigwedge^{i-1} \mathbb{C}^{n+1}$$

définie par $\iota(e_I) = e_{I \cup \{n+1\}}$. Soit l'application $\mathbb{C}$ -linéaire

$$A : \bigwedge^{i-2} \mathbb{C}^n \rightarrow \bigwedge^{i-2} \mathbb{C}^n$$

définie par $A(e_I) = \sum (-1)^{k-1} e_{J \setminus J_k}$ si $1 \notin I$, avec $J = 1 \cup I$, et $A(e_I) = -e_I$ si $1 \in I$.

On a $\text{rang} \bar{\Phi}_i = \text{rang}(\iota \circ A) = \text{rang} A$. Or dans la décomposition

$$\bigwedge^i \mathbb{C}^n = \left(\bigoplus_{1 \in I} \mathbb{C} e_I \right) \oplus \left(\bigoplus_{1 \notin I} \mathbb{C} e_I \right),$$

la matrice de A est de la forme

$$\begin{pmatrix} -\text{Id} & \star \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$$

donc A est un isomorphisme et $\text{im } \bar{\Phi}_i = \iota(\bigwedge^{i-2} \mathbb{C}^n)$. $\square$

On en déduit β_i .

Cas réduit

On suppose $f = x_1 \dots x_n$ et $n \geq 2$. Les nouvelles unités figurant dans les matrices de la résolution de R/I proviennent de la flèche ρ_n :

$$\rho_n((0, e_{1,\dots,n}), \underline{0}) = (-1)^{n+1} e_{1,\dots,n}.$$

Dans le complexe (4.5), seule la flèche $\bar{\Phi}_{n+1}$ est modifiée.

$$\bar{\Phi}_{n+1} : (\bigwedge^{n-1} \oplus \bigwedge^n) \oplus (\bigwedge^n \oplus 0) \oplus \bigwedge^{n+1} \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow (\bigwedge^{n-2} \oplus \bigwedge^{n-1}) \oplus (\bigwedge^{n-1} \oplus \bigwedge^n) \oplus \bigwedge^n \mathbb{C}^{n+1}$$

$\bar{\Phi}_{n+1}(((0, e_{1,\dots,n}), (0, 0)), 0) = -e_{1,\dots,n}$, les autres composantes sont analogues au cas non réduit. On a alors

$$\text{im } \bar{\Phi}_{n+1} = \bigwedge^n \mathbb{C}^{n+1}.$$

On en déduit les modifications en conséquence sur les nombres de Betti β_n et β_{n+1} .

4.2 Diviseurs libres localement quasi homogènes

Soit f un diviseur libre localement quasi homogène. On utilise les résultats de [5], que l'on commence par rappeler. $\text{Der}(\log D)$ admet une base sur $\mathcal{O}$ de la forme

$$E, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$$

où $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ est une base sur $\mathcal{O}$ de l'ensemble des champs de vecteurs annulant f , et E le champ d'Euler vérifiant $E(f) = f$.

D'autre part, les symboles $\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_{n-1})$ forment une suite régulière dans $\mathcal{O}[\xi]$ car le diviseur f est Koszul-libre ([5], theorem 4.3). De plus, l'idéal jacobien est de type linéaire ([5], theorem 5.6).

On connaît les nombres de Betti du module filtré $\mathcal{D}[s]f^s$, ce sont $\beta_i = \binom{n}{i}$, ils sont donc indépendants de f . En effet, d'après [5], remarque 5.10

b), le complexe de Spencer sur $\mathcal{D}[s]$ associé à $(\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, E - s)$ est une résolution libre bifiltrée de $\mathcal{D}[s]f^s$. Elle est minimale car son gradué associé est le complexe de Koszul sur $\mathcal{O}[\xi, s]$ associé à $(\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_{n-1}), \sigma(E) - s)$.

Corollaire 4.2.1. *Les nombres de Betti du module bifiltré $\mathcal{D}_{x,t}f^s$ sont les nombres de Betti du module bigradué*

$$\overline{\begin{matrix} R \\ < f, (f'_i \partial_i), (\sigma(\delta_i)), E - s > \end{matrix}}$$

avec $R = \text{bigr} \mathcal{D}_{x,t}$.

En effet, on peut passer en commutatif dans le cas f Euler-homogène et $J(f)$ de type linéaire, et l'ensemble $(\delta_i), E - s$ est une base F -involutive de $\text{ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s$ (Lemme 2.2.2).

Bibliographie

- [1] A. Assi, F.J. Castro-Jiménez and M. Granger, *How to calculate the slopes of a $\mathcal{D}$ -module*, Compositio Mathematica 104 (1996), 107-123.
- [2] A. Assi, F.J. Castro-Jiménez, M. Granger, *The analytic standard fan of a $\mathcal{D}$ -module*, Journal of pure and applied algebra 164 (2001), 3-21.
- [3] J.Briançon, M.Granger, P.Maisonobe, M.Miniconi, *Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein : cas non dégénéré*, Annales de l'institut Fourier, tome 39, n°3 (1989), 553-610.
- [4] N. Budur, M. Mustață, M. Saito, *Bernstein-polynomials of arbitrary varieties*, Compositio Math. 142, n°3 (2006), 779-797.
- [5] F.Calderón-Moreno and L.Narváez-Macarro, *The module $\mathcal{D}f^s$ for locally quasi-homogeneous free divisors*, Compositio Mathematica 134 (2002) 59-74.
- [6] F.J. Calderón-Moreno and L. Narváez-Macarro : *On the logarithmic comparison theorem for integrable logarithmic connections*, Proceedings of the London Mathematical Society, à paraître.
- [7] F.J. Castro and M. Granger, *Explicit calculations in ring of differential operators*, Séminaire et Congrès SMF 8 (2004), 89-128.
- [8] F. Castro-Jiménez, L. Narváez-Macarro, *Homogenising differential operators*, preprint n°36, Universidad de Sevilla, 1997. <http://departamento.us.es/da/prepubli/prepub36.pdf>
- [9] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer, 1995.
- [10] D.Eisenbud, *The geometry of syzygies*, Springer, 2005.
- [11] M. Granger et P. Maisonobe, *A basic course on differential modules*, dans *$\mathcal{D}$ -modules cohérents et holonomes*, Travaux en cours 45, Hermann, 1993, pp. 103-108.
- [12] M. Granger, T. Oaku, *Minimal filtered free resolutions for analytic D -modules*, Journal of pure and applied algebra 191 (2004), 157-180.

- [13] G.-M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann. SINGULAR 3.0 — A computer algebra system for polynomial computations. In M. Kerber and M. Kohlhase : *Symbolic computation and automated reasoning, The Calculemus-2000 Symposium* (2001), pp. 227–233.
- [14] P. Maisonobe et T. Torelli, *Image inverse en théorie des $\mathcal{D}$ -modules*, dans : *Eléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques*, Séminaires et congrès SMF n°8, 2004, pp. 1-57.
- [15] P. Maisonobe et Z. Mebkhout *Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents* dans : *Eléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques*, Séminaires et congrès SMF n°8, 2004, pp. 311-389.
- [16] B. Malgrange, *Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée*, dans : Fourier integral operators and partial differential equations, Coll. Intern. de Nice (1974), Lectures notes in math. vol.459, 1975, pp. 98-119
- [17] B. Malgrange : *De Rham complex and direct images of $\mathcal{D}$ -modules*, in Images directes et constructibilité, Travaux en cours 46, Hermann, Paris, 1993, pp. 1-13.
- [18] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies Number 61, Princeton : Princeton University Press, 1968.
- [19] D.G. Northcott, *Finite free resolutions*, Cambridge University press 71, 1976.
- [20] T. Oaku, N. Takayama, *An algorithm for De Rham cohomology groups of the complement of an affine variety via D -module computation*, Journal of Pure and Applied Algebra 139 (1999), 201-233.
- [21] T. Oaku, N. Takayama, *Algorithms for D -modules-restriction, tensor product, and local cohomology groups*, Journal of Pure and Applied Algebra 156 (2001), 267-308.
- [22] T. Oaku, N. Takayama, *Minimal free resolutions of homogenized D -modules*, J.Symbolic computation (2001) 32, 575-595.
- [23] K. Saito, *Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen*, Invent. Math 14 (1971), 123-142.
- [24] K. Saito, *On a generalization of de Rham lemma*, Annales de l'institut Fourier, tome 26, n°2 (1976), 165-170.
- [25] K. Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 27 (1980), 265-291.

Titre : Résolutions minimales de $\mathcal{D}$ -modules géométriques

Résumé : Nous désignons par $\mathcal{D}$ l'anneau des germes à l'origine d'opérateurs différentiels linéaires à coefficients analytiques. Nous étudions les résolutions libres minimales de $\mathcal{D}$ -modules, introduites par M. Granger, T. Oaku et N. Takayama. Plus précisément nous considérons des modules admettant une V -filtration le long d'une hypersurface lisse, et les résolutions minimales sont adaptées à cette filtration. Nous nous intéressons particulièrement aux rangs d'une telle résolution minimale, appelés nombres de Betti, ce sont des invariants du module. En premier lieu, nous donnons des résultats généraux : nous ramenons le calcul des nombres de Betti à une situation d'algèbre commutative et nous définissons les résolutions minimales génériques. Ensuite, nous considérons une singularité d'hypersurface complexe $f = 0$ et le module $N = D_{x,t}f^s$ introduit par B. Malgrange, dont la restriction le long de $t=0$ fournit la cohomologie locale algébrique du faisceau des fonctions analytiques à support dans $f = 0$. Le module N est naturellement muni de la V -filtration le long de $t = 0$, nous étudions les nombres de Betti correspondants. Ces nombres sont des invariants analytiques pour l'hypersurface $f = 0$. Nous les calculons pour f une singularité isolée quasi homogène ou un monôme. Lorsque f est à singularité isolée, nous caractérisons la quasi-homogénéité en termes des nombres de Betti.

Mots-clé : singularité d'hypersurface complexe, $\mathcal{D}$ -modules, résolutions minimales.

Title : Minimal resolutions of geometric $\mathcal{D}$ -modules

Abstract : Let $\mathcal{D}$ be the ring of germs at the origin of linear differential operators with analytic coefficients. We study minimal free resolutions of $\mathcal{D}$ -modules, introduced by M. Granger, T. Oaku and N. Takayama. More precisely we consider modules endowed with a V -filtration along a smooth hypersurface, and the resolutions are adapted to this filtration. We focus on the ranks of such a resolution, which we call Betti numbers, they are invariant for the module considered. First, we give some general results : we reduce the computation of the Betti numbers to a commutative algebra problem, and we define generic minimal resolutions. Next, we consider a complex hypersurface singularity $f = 0$ and the module $N = D_{x,t}f^s$ introduced by B. Malgrange, whose restriction along $t = 0$ gives the algebraic local cohomology of the sheaf of analytic functions with support in $f = 0$. The module N is naturally endowed with the V -filtration along $t = 0$, we study the Betti numbers associated to this data. Those numbers are analytical invariants for the hypersurface $f = 0$. We compute them in the quasi homogeneous isolated singularity case and in the monomial case. In the isolated singularity case, we characterize the quasi-homogeneity in terms of the Betti numbers.

Key-words : complex hypersurface singularity, $\mathcal{D}$ -modules, minimal resolutions.