



HAL
open science

**Étude de différents aspects des EDP hyperboliques :
persistance d'onde de choc dans la dynamique des
fluides compressibles, modélisation du trafic routier,
stabilité des lois de conservation scalaires.**

Magali Lécureux-Mercier

► **To cite this version:**

Magali Lécureux-Mercier. Étude de différents aspects des EDP hyperboliques : persistance d'onde de choc dans la dynamique des fluides compressibles, modélisation du trafic routier, stabilité des lois de conservation scalaires.. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2009. Français. NNT: . tel-00452936

HAL Id: tel-00452936

<https://theses.hal.science/tel-00452936>

Submitted on 3 Feb 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N ° d'ordre : 246-2009

UNIVERSITÉ DE LYON 1

THÈSE DE DOCTORAT

(Arrêté du 7 août 2006)

Spécialité : Mathématiques

Présentée et soutenue publiquement par

Magali MERCIER

le 7 décembre 2009

Titre :

ÉTUDE DE DIFFÉRENTS ASPECTS DES EDP
HYPERBOLIQUES :

PERSISTANCE D'ONDE DE CHOC DANS LA DYNAMIQUE DES FLUIDES
COMPRESSIBLES,
MODÉLISATION DU TRAFIC ROUTIER,
STABILITÉ DES LOIS DE CONSERVATION SCALAIRES.

Directrice de thèse :

Sylvie BENZONI-GAVAGE

Rapporteurs :

Thierry GOUDON et Olivier LAFITTE

Jury :

Mme	Sylvie	BENZONI-GAVAGE	Directrice de thèse
M.	Rinaldo M.	COLOMBO	
M.	Francis	FILBET	
Mme	Barbara	KEYFITZ	
M.	Olivier	LAFITTE	Rapporteur
M.	Régis	MONNEAU	
M.	Denis	SERRE	

Résumé

On étudie dans ce travail des équations aux dérivées partielles hyperboliques, et plus particulièrement des systèmes de lois de conservation intervenant par exemple dans l'écoulement de fluides compressibles, dans la modélisation macroscopique du trafic routier ou piéton et dans un modèle de chaîne de montage. De telles équations apparaissent naturellement en physique via, entre autres, la conservation de la masse, de la quantité de mouvement ou de l'énergie. On s'intéressera également aux équations avec terme source de nature géométrique (à cause de certaines symétries) ou dynamique.

La première partie est consacrée à la dynamique des fluides compressibles, et en particulier au temps d'existence des solutions régulières et régulières par morceaux. Après avoir présenté l'état de l'art en matière de solutions régulières, on montre une extension à des gaz plus généraux d'un théorème de M. Grassin donnant l'existence globale en temps de solutions régulières lorsque la densité et l'entropie initiales sont à support compact. D'autre part, on étudie les solutions *ondes de chocs*, qui sont des solutions régulières de part et d'autre d'une discontinuité. L'existence en temps grand de solutions proches d'ondes de choc à symétrie sphérique est un problème soulevé par A. Majda en 1983 et encore essentiellement ouvert, même si diverses pistes ont été dégagées depuis par P. Godin et d'autres auteurs. On développe une approche due à T. T. Li afin d'estimer le temps d'existence dans le cas isentropique à symétrie plane, cylindrique ou sphérique. On développe également l'approche de G. B. Whitham qui nous permet d'obtenir une équation approchée vérifiée par la surface de discontinuité dans le cas des gaz de Van der Waals. On montre que cette équation admet des solutions à symétrie sphérique globales « proches » des solutions autosimilaires fournies par l'analyse dimensionnelle et la résolution numérique des EDO associées, dans la limite des chocs forts. Lorsque les conditions initiales ne sont plus sphériques, mais qu'elles sont données sur une surface compacte convexe, on montre qu'il existe une solution locale.

Dans une deuxième partie, motivée par la modélisation d'un rond-point en trafic routier, on étudie un système de lois de conservation unidimensionnel provenant d'une extension du modèle macroscopique de Lighthill–Whitham–Richards à plusieurs types de véhicules. On étudie l'évolution de leur concentration sur une route infinie, découpées en tronçons en raison de la présence de points d'entrée et de sortie de véhicules. On différencie alors les types de véhicules selon leur origine et leur destination et l'on ajoute des conditions aux extrémités des tronçons pour représenter les priorités au niveau des jonctions ainsi que les capacités des routes secondaires. Pour modéliser un rond-point, il suffit ensuite de considérer des conditions périodiques. On montre que le problème de Riemann pour ce nouveau modèle admet une solution entropique unique, ce qui est le premier pas vers la résolution du problème de Cauchy. L'étude du problème de Riemann repose sur les propriétés géométriques des *ensembles de Hugoniot*. Des simulations numériques semblent en outre indiquer que les solutions obtenues existent en temps long. On aborde enfin le

problème de Cauchy par la méthode de *front tracking*.

La dernière partie concerne des équations hyperboliques scalaires avec terme source multidimensionnelles, en particulier avec un flux ou une source non-locale. Ceci comprend par exemple un modèle de trafic piéton en dimension deux et un modèle simplifié pour les gaz radiatifs. La première question abordée est la stabilité dans \mathbf{L}^1 des solutions entropiques par rapport aux conditions initiales, au flux et à la source dans le cas classique où le flux et la source sont des « vraies » fonctions (locales). Ceci passe par un contrôle de la variation totale de la solution. Le résultat obtenu nous permet par la suite d'étudier des équations avec une source et/ou un flux non-local, qui ne rentrent pas dans les théorèmes classiques pour les équations aux dérivées partielles hyperboliques. Une fois établi leur caractère bien posé, on montre la différentiabilité au sens de Gâteaux du semi-groupe obtenu par rapport aux conditions initiales, afin de caractériser les maxima et minima de fonctionnelles de coût sur la solution.

Abstract

In this work, we study hyperbolic partial differential equations, and more precisely conservation laws appearing in fluid dynamics, in the modelling of traffic flow from a macroscopic point of view (for cars or for pedestrians) and in a supply chain model. Such equations appear quite naturally in physics, in particular through conservation of mass, momentum or energy. We are also interested in balance laws, which are conservation laws with source terms of geometrical nature (for symmetry reasons) or dynamical nature.

The first part is devoted to compressible fluid dynamics, and particularly to the lifespan of smooth or piecewise smooth solutions. After presenting the “state of art”, we show an extension to more general gases of a theorem by M. Grassin that gives global existence in time for regular solutions when the density and the entropy have compact support. We also study *shock waves* solutions, which are smooth on both sides of a discontinuity. The long time existence of shock wave solutions that are close to shock waves with spherical symmetry is a problem raised by A. Majda in 1983, which is still open even if some authors such as P. Godin have given partial answers. We extend here Li Ta Tsien’s approach to estimate the time of existence in the isentropic cylindrical or spherical case. We also develop Whitham’s ideas to obtain an approximated equation satisfied by the discontinuity surface for a Van der Waals gas. We show that this equation admits global spherical solutions that are “close” to the self-similar solutions provided by dimensional analysis and numerical computations, in the strong shock limit. When the initial conditions are no longer spherical, but are given on a compact convex surface, we show that there exists a local solution.

In the second part, we set up a new model for a roundabout. This leads us to study a one-dimensional system of conservation laws that comes from a multi-class extension of the macroscopic Lighthill–Whitham–Richards’ model. We study the evolution of concentrations of different classes of vehicles on an infinite road, with some points of discontinuity corresponding to the entry and the exit of vehicles. We distinguish vehicles according to their origin and their destination. Besides, we add some boundary conditions in order to take into account priority rules at junctions and also the capacity of secondary roads. A “real” roundabout amounts to taking periodic conditions. We obtain existence and uniqueness of a weak entropy solution for the Riemann problem, which is an important step towards the Cauchy problem. The study of the Riemann problem is based on geometrical properties of the *Hugoniot locii*. As a complement, we provide numerical simulations that seem to exhibit solutions with a long time of existence. Finally, the Cauchy problem is tackled by the *front tracking* method.

In the last part, we are interested in scalar hyperbolic balance laws, and especially those for which the flow or the source is non-local. This comprises for example a model of pedestrian traffic in two space dimensions, and a toy-model for radiative gases. The first question addressed is the \mathbf{L}^1 stability in of entropy solutions with respect to flow and source

when the flow and source are classical functions (local). In order to show stability, we first have to control the total variation of the solution. Then we obtain the desired result allowing us to study equations with non-local source and/or flow, which do not fit the framework of classical theorems. We show here that these kinds of equations are well posed and we show the Gâteaux-differentiability with respect to initial conditions, which is important to characterize maxima or minima of a given cost functional.

Remerciements

Avant tout chose, je tiens à remercier mes rapporteurs Thierry Goudon et Olivier Lafitte ; mais aussi Rinaldo M. Colombo, Francis Filbet, Barbara Keyfitz, Régis Monneau, Denis Serre qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Bien entendu, ma reconnaissance va particulièrement à ma directrice de thèse, Sylvie Benzoni-Gavage, qui m'a guidée dans mon travail avec beaucoup de patience et de gentillesse. Elle a toujours cherché à stimuler ma curiosité scientifique et en particulier m'a incitée à voyager. Sa rigueur et sa détermination m'ont permis de ne pas perdre le fil de mes travaux et elle a su judicieusement (ré)-orienter mes recherches lorsque cela était utile.

Je veux également remercier chaleureusement Rinaldo M. Colombo, qui m'a accueillie pendant six mois dans son laboratoire, à Brescia, pour un séjour « pré-doc ». Son enthousiasme, sa confiance et son énergie m'ont beaucoup stimulée tandis que ses questions fournissaient des pistes de réflexion fructueuses. Sa collaboration, aussi bien mathématique que pratique, lorsqu'il a fallu que je m'installe provisoirement à Brescia, m'ont été précieuses. Ce fut un plaisir de travailler avec lui !

Je remercie aussi toutes les personnes qui m'ont permis de me développer scientifiquement ou plus simplement de travailler dans une ambiance sereine et motivante. Ainsi, je voudrais remercier mes coauteurs Michael Herty et Massimiliano D. Rosini, les chercheurs rencontrés en conférences, ainsi que les membres du laboratoire de l'Institut Camille Jordan pour leur accueil.

Un grand merci enfin aux personnes qui m'ont accompagnées tout au long de cette thèse : Jean, en premier lieu ; puis mes amis Antoine, Béné, Benji, Fred, Isa, Valérie ; et aussi Amélie, Christophe, Corentin, Laurent, Maxime, Nicolas, Séverine... et plus généralement les autres doctorants ou (ex-doctorants) de Lyon.

Pour finir, je voudrais remercier de tout cœur ma famille qui m'a toujours entourée et soutenue sans réserve.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Remerciements	vii
Introduction générale	1
I Mécanique des fluides	11
1 Introduction	13
1.1 Thermodynamique	15
1.1.1 Lois de conservation	15
1.1.2 Lois d'état	16
1.1.2.A Définitions	16
1.1.2.B Contraintes thermodynamiques	17
1.1.2.C Changement de variables	18
1.1.2.D Exemples de lois d'état	19
1.2 Hyperbolicité	22
1.3 Symétrisation	24
1.3.1 Cas sans vide	24
1.3.2 Cas avec du vide	24
1.4 Condition de Rankine-Hugoniot	26
2 Solutions régulières	29
2.1 Existence locale	29
2.1.1 Cas de la symétrie sphérique	30
2.1.2 Estimation du temps d'existence	32
2.1.2.A Cas avec vide	32
2.1.2.B Cas sans vide	33
2.1.2.C Cas de la symétrie sphérique	35
2.1.3 Positivité de la densité	36
2.2 Cas particuliers d'existence globale	38

2.2.1	Solutions stationnaires	38
2.2.2	Solutions à symétrie sphérique	39
2.2.3	Solutions autosimilaires	40
2.2.3.A	Groupes de transformation	40
2.2.3.B	Changement de variable	44
2.2.3.C	Conditions initiales	47
2.3	Résultats généraux d'existence globale	48
2.3.1	Cas isentropique unidimensionnel	48
2.3.2	Cas multidimensionnel	50
2.4	Preuve du Théorème 2.3.5	52
2.4.1	Cas isentropique	52
2.4.1.A	Existence locale.	53
2.4.1.B	Unicité locale	53
2.4.1.C	Estimations d'énergie.	56
2.4.2	Cas général	59
2.4.2.A	Existence locale	59
2.4.2.B	Unicité locale	60
2.4.2.C	Estimations	62
2.4.3	Lemmes d'estimations 2.4.1 et 2.4.2	64
3	Ondes de choc	69
3.1	Introduction	69
3.2	Solutions autosimilaires	71
3.2.1	Explosions	72
3.2.2	Implosions	73
3.3	Construction analytique d'ondes de choc	74
3.3.1	Fluide isentropique unidimensionnel	75
3.3.2	Fluide isentropique à symétrie cylindrique ou sphérique	85
3.4	Équation de surface	93
3.4.1	Fluide dans une tuyère	94
3.4.2	Équation approchée pour la position du choc	97
3.4.3	Solutions particulières	101
3.4.3.A	Ondes planes	101
3.4.3.B	Solutions autosimilaires	102
3.4.4	Solutions quasi-sphériques	104
II	Trafic routier	109
	Introduction	111
4	Modélisation d'un rond-point	113
4.1	Introduction.	114

4.2	Description of the models and main results.	115
4.2.1	The ‘one-T’ junction.	115
4.2.2	The ‘ n -T’ case.	117
4.3	Technical analysis for the ‘one-T’ case.	119
4.3.1	Riemann problem with two types of vehicles.	119
4.3.2	Half-Riemann problems.	121
4.3.2.A	Left-half problem.	121
4.3.2.B	Right-half problem.	123
4.3.3	The Riemann problem.	124
4.3.3.A	Proof of Theorem 4.2.4.	124
4.3.3.B	Study of the point of discontinuity.	128
4.3.4	Invariant sets.	129
4.3.5	Particular case.	130
4.4	Resolution of the ‘ n -T’ problem.	130
4.4.1	Riemann problem with M types of vehicles on an infinite road.	131
4.4.2	Half-Riemann problem.	131
4.4.3	Local resolution in x_k	132
4.5	Conclusion.	133
5	Simulations numériques	135
5.1	Un point de discontinuité	135
5.1.1	Problème de Riemann	135
5.1.2	Problème de Cauchy	141
5.2	Deux points de discontinuité	141
5.2.1	Problème de Riemann	141
5.2.2	Problème de Cauchy	143
6	Problème de Cauchy pour une route avec jonctions	147
6.1	Un point de jonction	147
6.2	Plusieurs points de jonctions	150
III	Équations scalaires	151
	Introduction	153
7	Dépendance par rapport au flux et à la source	157
7.1	Introduction	157
7.2	Notation and Main Results	158
7.2.1	Estimate on the Total Variation	160
7.2.2	Stability of Solutions with Respect to Flow and Source	161
7.3	Application to a Radiating Gas Model	163
7.4	Proof of Theorem 7.2.5	165

7.5	Proof of Theorem 7.2.6.	175
8	Compléments	187
8.1	Amélioration de la Proposition 7.4.3	187
8.2	Amélioration des Théorèmes 7.2.5 et 7.2.6	189
9	Contrôle de l'équation de continuité	195
9.1	Introduction	195
9.2	Notation and Main Results	196
9.2.1	Existence of a Weak Entropy Solution to (9.0.1)	197
9.2.2	Differentiability	199
9.2.3	Necessary Optimality Conditions for Problems Governed by (9.0.1)	201
9.3	Demand Tracking Problems for Supply Chains	202
9.4	A Model for Pedestrian Flow	204
9.5	Detailed Proofs	205
9.5.1	A Lemma on the Transport Equation	205
9.5.2	Proof of Theorem 9.2.2	208
9.5.3	Gâteaux Differentiability	214
9.5.4	Proofs Related to Sections 9.3 and 9.4	220
	Conclusion	223
	A Aide-mémoire thermodynamique	225
	B Lemmes techniques	233
B.1	Inégalité de Gagliardo-Nirenberg et ses conséquences	233
B.2	Lemmes d'estimation	234
B.3	Temps d'existence pour les EDO	236
	C Calcul des invariants par les groupes de Lie.	239
C.1	Éléments théoriques	239
C.1.1	Quelques définitions	239
C.1.2	Théorie de la continuation	240
C.1.3	Groupes d'invariance d'équations différentielles	241
C.2	Application aux équations d'Euler.	241
C.2.1	Opérateur d'invariance	241
C.2.2	Développement de la première équation	243
C.2.3	Résolution du système	246
C.2.3.A	Cas $b \neq 0$	247
C.2.3.B	Cas $b = 0$	247
C.2.4	Conclusion	248
	Notations	251

Table des figures

1	Réflexion des 1-caractéristiques sur le choc dans un domaine angulaire.	6
1.1	Surface de discontinuité Σ entre les zones 1 et 2.	26
2.1	Groupes de symétrie des équations d'Euler	43
2.2	Courbes $r = \xi t^\alpha$ pour $\alpha < 1$	47
2.3	Recollement des solutions le long de $\partial\mathcal{K}$	54
3.1	Courbe de choc et lieux où $\xi > 1$, $\xi < 1$	74
3.2	Courbe de choc et caractéristiques	75
3.3	Domaine angulaire D et les différentes courbes associées.	77
3.4	Domaines D_0 , D_- , D_+	82
3.5	Dérivée le long de la 2-caractéristique vs. dérivée le long du choc.	95
3.6	Tube de rayon.	97
3.7	Flot allant de Σ_0 à Σ_t	98
4.1	Route « en T »	113
4.2	Diagramme fondamental	115
4.3	Route avec « n-T »	118
4.4	Solution au problème de Riemann ; courbes d'ondes	121
4.5	Ensemble $N(\rho^-)$ des points atteints par une onde de pente négative	122
4.6	Ensemble $P(\rho^+)$ des points atteints par une onde de pente positive	123
4.7	Solution au problème de Riemann	125
4.8	Maximisation des flux à la discontinuité	127
4.9	Ensemble invariant pour le solveur de Riemann	130
5.1	Solution au problème de Riemann pour la route « en T »	136
5.2	Solution au problème de Riemann pour la route « en T »	137
5.3	Solution au problème de Riemann pour la route « en T »	138
5.4	Solution au problème de Riemann pour la route « en T »	138
5.5	Solution du problème de Riemann pour la route « en T »	139
5.6	Solution du problème de Riemann pour la route « en T »	139
5.7	Solution au problème de Riemann pour la route « en T »	140
5.8	Solution au problème de Riemann pour la route « en T »	140

5.9	Solution au problème de Cauchy pour la route « en T »	142
5.10	Solution au problème de Riemann pour la route avec deux « T »	143
5.11	Solution au problème de Riemann pour la route avec deux « T »	144
5.12	Solution au problème de Riemann pour la route avec deux « T »	144
5.13	Solution au problème de Riemann pour la route avec deux « T »	145
5.14	Solution au problème de Cauchy pour la route avec deux « T »	145
5.15	Solution au problème de Cauchy pour la route avec deux « T »	146
5.16	Solution au problème de Cauchy pour la route avec deux « T »	146
6.1	1-Front arrivant de la gauche au niveau d'une discontinuité.	148
7.1	Graphes de Y_ϑ et Y'_ϑ	169
7.2	Graphes de χ et ψ	169
C.1	Groupes de symétrie des équations d'Euler	249

Introduction générale

L'étude des équations aux dérivées partielles (EDP) hyperboliques est un sujet historiquement important dont les premiers pas remontent à d'Alembert avec l'équation des ondes et à Euler, avec les équations du même nom décrivant l'évolution d'un fluide. Un exemple important d'EDP hyperboliques est fourni par les lois de conservation du premier ordre, qui apparaissent assez naturellement en physique, dès qu'un bilan d'énergie, de masse, de quantité de mouvement, de matière... est effectué et que les phénomènes de diffusion (thermique ou par viscosité) sont négligés. Plus formellement, un système de lois de conservation avec source (ou encore « lois d'équilibre¹ ») est un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\partial_t u_i + \operatorname{div} f_i(t, x, u) = F_i(t, x, u), \quad i = 1, \dots, n \quad (0.0.1)$$

où l'inconnue $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une fonction à valeurs vectorielles, $t \in \mathbb{R}_+$ est généralement une variable de temps et $x \in \mathbb{R}^d$ est une variable d'espace. Pour tout $i = 1 \dots n$, les fonctions $f_i \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$ et $F_i \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ sont appelées respectivement *flux* et *sources*. Dans une vision classique des lois de conservation, les flux et sources sont des fonctions ordinaires en la variable u , locales, c'est à dire que \mathcal{U} est un ouvert de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$. Cependant, il arrive pour certains modèles que les flux et sources soient des fonctionnelles en u , non-locales, par exemple avec $f_i(t, u) = \int_{\mathbb{R}^d} u(t, y) dy$ (qui ne dépend pas de x), auquel cas \mathcal{U} sera de la forme $M \times X(M; \mathbb{R}^n)$, où M est un ouvert de \mathbb{R}_+ et X est un espace fonctionnel adapté. Au cours de ce travail on s'intéressera à différents types de systèmes de la forme (0.0.1).

Le modèle étudié dans la première partie est celui des *équations d'Euler pour les fluides compressibles*, qui décrivent l'évolution d'un gaz à travers les grandeurs $\rho \in \mathbb{R}_+$, $u \in \mathbb{R}^d$ et $e \in \mathbb{R}$ représentant respectivement la densité², la vitesse et l'énergie massique du fluide. Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = 0, \\ \partial_t(\rho e + \frac{1}{2}\rho|u|^2) + \operatorname{div}\left(\left(\rho e + \frac{1}{2}\rho|u|^2 + p\right)u\right) = 0, \end{cases} \quad (0.0.2)$$

où $p \in \mathbb{R}$ est la pression. Pour « fermer » ce système, souvent appelé par abus de langage *équations d'Euler compressibles*, on est alors amené à ajouter à ces équations une *loi d'état* $p : (\rho, e) \mapsto p(\rho, e)$, la plus célèbre des lois d'état étant $p = (\gamma - 1)\rho e$, correspondant à un

1. *balance laws* en anglais
2. parfois appelée « masse volumique »

gaz parfait polytropique de coefficient adiabatique γ (les termes en italiques seront expliqués par la suite).

Un autre système, étudié dans la deuxième partie, est un modèle de trafic routier macroscopique à n classes de véhicules, dans lequel le flot de véhicules est supposé constitué de n classes distinctes de véhicules (une classe pouvant correspondre simplement à une couleur). Ce modèle est une extension multi-classe du modèle « LWR » dû à Lighthill–Whitham–Richards [90, 113]. Le trafic est alors décrit par l'évolution des concentrations respectives ρ_i , pour $i \in \{1, \dots, n\}$, de chaque sorte de véhicules : en supposant qu'on a une loi de vitesse $v : \rho \mapsto v(\rho)$ commune à tous les types de véhicules, on écrit la conservation du nombre de véhicules de chaque type. On obtient le système

$$\partial_t \rho_i + \partial_x \left(\rho_i v \left(\sum_{j=1}^n \rho_j \right) \right) = 0, \quad \text{pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Une loi de vitesse très simple (attribuée à Greenshields [64]) est donnée par la fonction affine $v : \rho \mapsto V_{max}(1 - \rho)$, qui est maximale lorsque la densité est nulle et nulle lorsque la densité est maximale (cas d'embouteillage).

Dans la troisième partie, on s'intéresse à des lois de conservation scalaires, c'est-à-dire ne comprenant qu'une seule équation ($n = 1$) avec flux ou source non-local. Il existe de nombreux modèles entrant dans ce cadre. Par exemple, un modèle simplifié de gaz radiatifs, qui entre en jeu notamment dans l'étude des étoiles [78, 79, 91] s'écrit

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = -u + K *_x u, \quad \text{pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

Le terme source est bien non-local puisqu'il s'agit d'un produit de convolution entre l'inconnue u et un noyau $K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Un exemple similaire est un modèle de trafic piéton en dimension 2 d'espace. Pour une concentration de piétons ρ , on écrit la conservation du nombre de piétons en deux dimensions d'espace (si on pense à une foule dans un hall) :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho V(\rho)) = 0, \quad \text{pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2,$$

où la loi de vitesse V n'est plus donnée par une simple fonction de ρ comme dans le cas du trafic routier, mais par une fonctionnelle du type $V : \rho \mapsto v(\mu *_x \rho)$, avec v et μ des fonctions empiriques reflétant la loi de vitesse, la géométrie des trajectoires empruntées par les piétons et la géométrie des ouverts sur lesquels on fait la moyenne de la concentration de piétons. De nouveau, un produit de convolution apparaît, cette fois au niveau du flux.

Un troisième exemple d'équation non-locale est fourni par un modèle de chaîne de montage [4, 5, 6], où l'on étudie l'évolution de la « masse volumique » ρ d'un produit manufacturé, la variable d'espace x représentant le taux d'avancement du produit dans la chaîne de montage. Dans ce modèle, on considère donc qu'un certain produit manufacturé entre en $x = 0$ dans la chaîne de montage et sort en $x = 1$. On suppose par ailleurs que l'usine n'est pas parfaite, c'est-à-dire qu'il peut arriver que des produits arrivent en $x_0 \in]0, 1[$ sans que l'étape $y < x$ ait été effectuée normalement, ce qui conduit le gérant et donc aussi le modélisateur à vouloir redistribuer la densité en x_0 , non seulement vers l'avant où $x \geq x_0$, mais aussi vers l'arrière. On est donc amené, en écrivant la conservation de la masse de produit, à considérer l'équation

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \left(\rho v \left(\int_0^1 \rho(t, y) dy \right) \right), \quad \text{pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

avec $v(\rho) = V_{max}/(1 + \rho)$. De nouveau le flux de ce modèle est non-local.

Revenons à la description détaillé de la première partie de ce travail concernant la dynamique des fluides compressibles (gaz), qui fournit un exemple « standard » de système de lois de conservation quasi-linéaire. Pour un système du type (0.0.1) il n'existe pas de théorie générale assurant l'existence et/ou l'unicité d'une solution : le problème de Cauchy, pour $d \geq 2$ et $n \geq 2$ est encore largement ouvert, même si la théorie s'est considérablement développée depuis les années 1950.

Par exemple, on sait que le problème de Cauchy associé à des conditions initiales régulières admet des solutions régulières locale en temps. On ne peut cependant pas dire grand chose en général sur le temps maximal d'existence de ces solutions régulières. Si l'on trouve des solutions particulières globales en temps, on sait aussi que pour certains types de données initiales, le temps d'existence sera nécessairement fini (on parle d'« explosion » en temps fini).

Avec des données initiales moins régulières, ou bien au-delà du temps d'explosion, on est ainsi amené à considérer des solutions *faibles*, c'est-à-dire des *solutions au sens des distributions*. Ces solutions satisfont, pour toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} (u_i \partial_t \varphi + f_i(t, x, u) \nabla_x \varphi) \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}^d} u_{i,0}(x) \varphi(0, x) \, dx \\ + \int \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} F_i(t, x, u) \varphi(t, x) \, dt = 0. \end{aligned}$$

Les solutions faibles semblent alors régir des phénomènes réversibles, au moins quand la source est nulle ($F_i = 0$) et le flux f_i ne dépend pas de (t, x) . En effet, dans ce cas, si $u(t, x)$ est solution de (0.0.1), alors $\bar{u}(t, x) = u(-t, -x)$ est également une solution (0.0.1). Pourtant, on s'attend à ce que des phénomènes irréversibles se produisent, par exemple lors d'une explosion dans un gaz. Pour introduire cette notion d'irréversibilité, on est amené à étudier une classe restreinte de solutions faibles, à savoir les solutions *faibles entropiques*. En appelant *couple entropie-flux* (E, Ψ) un couple de fonctions tel que toute solution régulière de (0.0.1) satisfasse $\partial_t E + \operatorname{div} \Psi(u) = dE(u) \cdot F(t, x, u)$, on dit que u est une solution faible entropique de (0.0.1) si, pour tout couple *entropie-flux* (E, Ψ) de fonctions régulières telles que E est convexe et pour toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} (E(u) \partial_t \varphi + \Psi(u) \cdot \nabla \varphi + dE(u) \cdot F(u) \varphi) \, dx \, dt \\ + \int_{\mathbb{R}^d} E(u_0(x)) \varphi(0, x) \, dx \geq 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, on a l'inégalité $\partial_t E + \operatorname{div} \Psi(u) \leq dE(u) \cdot F(u)$ au sens des distributions. La notion de couple entropie-flux signifie d'autre part qu'on a égalité dans cette inégalité si u est une solution régulière de (0.0.1). Les résultats connus concernant ce type de solutions se limitent essentiellement au cas scalaire ($n = 1$) ou unidimensionnel ($d = 1$). Par conséquent, dans l'étude des équations d'Euler compressibles multidimensionnelles, on se limite généralement aux solutions faibles qui sont \mathcal{C}^1 par morceaux, et en particulier aux solutions *ondes de choc*, régulières de part et d'autre d'une surface de discontinuité.

Le but de la première partie est d'étudier un phénomène d'explosion en temps grand, ce qui nous amène essentiellement à nous intéresser aux ondes de choc à symétrie sphérique

dans un gaz *poussiéreux*. La démarche a été la suivante : d'une part trouver des solutions régulières globales à symétrie sphérique pour un gaz poussiéreux ; d'autre part essayer de juxtaposer deux solutions régulières le long d'une ligne de discontinuité satisfaisant des conditions de saut adaptées.

On rappellera tout d'abord au Chapitre 1 les relations thermodynamiques fondamentales ainsi que les propriétés analytiques des équations d'Euler compressibles (0.0.2).

Dans le Chapitre 2, on traite ensuite la question du temps d'existence des solutions régulières aux équations d'Euler compressibles. On y fait tout d'abord un état de l'art concernant les solutions régulières : par exemple, on cite des résultats de T. C. Sideris [125, 126], J.-Y. Chemin [27, 28], T. Makino, S. Ukai & S. Kawashima [100] donnant des critères d'explosion en temps fini. On sait néanmoins aussi qu'il peut exister des solutions régulières globales en temps, telles que les solutions stationnaires ou encore les solutions autosimilaires. Il existe de plus des résultats assez généraux d'existence globale de solutions régulières. Par exemple, un tel résultat est dû à Li Ta Tsien [88], cependant il ne concerne que les systèmes unidimensionnels ($d = 1$), à deux équations ($n = 2$), sans termes sources ($F_i = 0$), pour lesquels on dispose d'invariants de Riemann forts, ce qui permet de faire des calculs le long des caractéristiques. Comme application, on obtient des résultats d'existence globale pour les équations d'Euler compressibles isentropiques unidimensionnelles, sous des hypothèses d'« expansivité » des invariants de Riemann. Ce résultat donne même une condition nécessaire et suffisante d'existence globale, et si la condition n'est pas satisfaite, il prédit le temps d'existence maximal de la solution régulière. Ceci est une extension du critère bien connu d'explosion pour l'équation de Burgers³. Dans le cas multidimensionnel, des résultats de D. Serre [122] et M. Grassin [63] donnent l'existence globale de solutions pour des conditions initiales particulières, la densité initiale étant à support compact et proche de zéro et la vitesse initiale étant « expansive ».

La plupart des résultats mathématiques cités ci-dessus concernent les gaz parfaits polytropiques ; cependant, sous certaines conditions (haute pression, basses températures...) la loi des gaz parfaits s'éloigne fortement du comportement des gaz « réels ». On s'intéressera plutôt ici au cas des gaz de Van der Waals, dont la loi prend en compte le volume des molécules. Cette loi est importante dans certains contextes physiques tels que la sonoluminescence, phénomène au cours duquel la focalisation d'une onde de choc dans un gaz crée de la lumière ! La loi de Van der Waals peut de plus également modéliser des milieux *poussiéreux*, comme par exemple après une explosion, pour lesquels on néglige le volume des molécules mais pas pas le volume des poussières. On généralise ici au cas des gaz de Van der Waals un théorème de M. Grassin [63] donnant l'existence globale de solutions régulières, pour obtenir le théorème suivant :

Théorème 0.0.1 (voir Théorème 2.3.5). *Soit $m > 1 + d/2$. Soient (ρ_0, u_0, s_0) les conditions initiales pour le problème de Cauchy associé au système d'équations (0.0.2) pour un gaz de Van der Waals polytropique tel que $\gamma_0 > 0$. On suppose que $0 \leq \rho_0 \leq 1/b$ et*

$$(H1) \quad \|(\pi_0, s_0)\|_{\mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon, \text{ où } \pi_0 = \left(\frac{\rho_0}{1-b\rho_0}\right)^{\frac{\gamma_0-1}{2}} \exp\left(\frac{s_0}{c_v}\right);$$

$$(H2) \quad u_0 \in X = \{z : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; Dz \in \mathbf{L}^\infty, D^2 z \in \mathbf{H}^{m-1}\},$$

$$(H3) \quad \text{Il existe } \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}^d, \text{ dist}(\text{Spec}(Du_0)(x), \mathbb{R}_-) \geq \delta,$$

3. Cette équation, qui s'écrit $\partial_t u + u \partial_x u = 0$, admet en effet des solutions globales régulières si la condition initiale u_0 est croissante, et sinon « explose » au temps $T_* = -1/\min u'_0$.

(H4) ρ_0 et s_0 ont un support compact,

(H5) le coefficient γ_0 vérifie $\gamma_0 = \frac{\nu+1}{\nu-1}$ avec $\nu \in \mathbb{N}$ et $\nu \geq 2$, ou bien $\nu \in \mathbb{R}$ et $\nu \geq m > 1 + \frac{d}{2}$.

Soit \bar{u} la solution de $\partial_t \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = 0$, $\bar{u}(0, x) = u_0(x)$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ alors il existe une solution (ρ, u, s) globale régulière au problème de Cauchy pour (0.0.2) satisfaisant

$$\left(\left(\frac{\rho}{1 - b\rho} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2}}, u - \bar{u}, s \right) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+2})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{m-1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+2})).$$

La preuve de ce théorème repose sur des estimations d'énergie *a priori* et sur une symétrisation adaptée du système, supportant en particulier la présence de zones de vide (où la densité s'annule par définition). Lorsque le gaz suit la loi de Van der Waals, le caractère non-linéaire des équations d'Euler « augmente » et les estimations d'énergie doivent être adaptées, ce qui est présenté à la fin du chapitre 2.

L'étude des ondes de choc pour les équations d'Euler compressibles fait l'objet du Chapitre 3. Des résultats généraux [98] donnent l'existence locale en temps d'ondes de choc lorsque les conditions initiales sont \mathcal{C}^1 par morceaux et vérifient des conditions de compatibilités adéquates au niveau des discontinuités. Mais de nouveau, on ne sait pas dire grand chose sur le temps d'existence de ces solutions. De même que dans l'étude des solutions régulières, on généralise au cas des gaz de Van der Waals quelques résultats connus pour les gaz parfaits polytropiques : on étudie en particulier les solutions autosimilaires, qui fournissent un exemple d'existence globale d'onde de choc à symétrie sphérique, dans la limite des chocs *forts*. Ces solutions correspondent au cas d'explosions ou d'implosion dans un gaz au repos [144].

Dans la suite du chapitre 3, on prolonge au cas de la symétrie sphérique des résultats de Li Ta Tsien déterminant le temps d'existence d'onde de choc pour les équations d'Euler isentropiques unidimensionnelles (sans source). En effet le cas de la symétrie sphérique peut être vu comme un cas « quasi 1D », c'est-à-dire un système 1D avec des termes sources d'origine géométrique. En faisant des calculs le long des caractéristiques similaires à ceux de Li Ta Tsien, on obtient alors le théorème 0.0.2, qui nous permet d'estimer le temps d'existence de solutions dans un domaine angulaire bordé par une 1-caractéristique \mathcal{C}_1 d'une part, et un 2-choc \mathcal{K} d'autre part. Dans ce domaine angulaire, la solution est en effet « perturbée » par le 2-choc (voir Figure 1) : si les 2-caractéristiques sont bien rentrantes au niveau du choc, les 1-caractéristiques sont en revanche entrantes à droite et sortantes à gauche. Ainsi, les 2-caractéristiques se réfléchissent à gauche du choc pour donner des 1-caractéristiques ! On ne peut donc pas, comme dans le cas scalaire 1D, juxtaposer simplement deux solutions régulières le long d'une ligne de discontinuité, mais on peut les juxtaposer de part et d'autre d'un domaine angulaire. Avant de chercher des solutions ondes de choc, on est donc amené à étudier un problème *angulaire*. On obtient pour un gaz de Van der Waals que si le choc est situé en $r = R_0$ au temps initial $t = 0$, alors le temps d'existence sera d'autant plus grand que R_0 est grand. Ces estimations sont possibles en raison de l'existence d'invariants de Riemann forts permettant de diagonaliser le système : $w_1 = u - H$ et $w_2 = u + H$, où $H(\rho) = \int^\rho \frac{c(y)}{y} dy$ ($c(\rho)$ étant la vitesse du son qui s'exprime dans le cas isentropique seulement en fonction de la densité).

Théorème 0.0.2. *On suppose que les conditions de compatibilité ainsi que les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaites en $r = R_0$. Si $w_1 \geq 0$ sur \mathcal{K} et $0 \leq w_2 - w_1 \leq$*

$2 \left(\frac{3-\gamma_0}{b(\gamma_0-1)} \right)^{\frac{\gamma_0-1}{2}}$ sur \mathcal{C}_1 et \mathcal{K} et si de plus $-\partial_r w_2 \geq C$ et $|\partial_r w_2| \leq r$ le long de \mathcal{C}_1 , alors le problème angulaire pour un gaz de Van der Waals admet une solution locale en temps et, avec les notations précédentes, le temps d'existence est minoré de la manière suivante :

$$T_{\text{ex}} \geq R_0 C (\|w^-\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}}),$$

où $C(\|w^-\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}})$ est une constante ne dépendant pas de R_0 .

On obtient ensuite une onde de choc à symétrie sphérique en juxtaposant deux solutions régulières de part et d'autre d'un domaine angulaire comme décrit précédemment, de plus le temps d'existence est assez grand (voir les Corollaires 3.3.5 et 3.3.8).

Finalement, on développe une approche transverse due à G. B. Whitham, dont le principe est d'étudier l'onde de choc du point de vue géométrique. On introduit une fonction β dont les surfaces de niveau sont les positions successives au cours du temps t . Après quelques approximations, on obtient une EDP du deuxième ordre non-linéaire sur β , hyperbolique dans le cas intéressant (à savoir lorsque le fluide est supersonique devant le choc). L'étude de cette équation est aisée dans le cas de la symétrie sphérique, et nous permet de retrouver des résultats obtenus pour les solutions autosimilaires, elle devient cependant assez ardue dans le cas général.

La deuxième partie s'intéresse au modèle de trafic routier, qui est unidimensionnel ($d = 1$). Or, dans le cas unidimensionnel, il existe des schémas numériques, tels que le schéma de Glimm ou le schéma de Godunov donnant l'existence globale de solutions faibles entropiques pour le problème de Cauchy. Ces schémas se basent sur l'étude du problème de Riemann, qui est un problème de Cauchy particulier dans le cas unidimensionnel, pour lequel les données initiales sont constantes de part et d'autre d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Plus précisément, on s'intéresse à une extension multi-classe du modèle de trafic routier LWR

$$\partial_t \rho_i + \text{div}(\rho_i v(\rho_i)) = 0, \quad \text{pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

dans le but d'introduire une nouvelle modélisation de jonction entre deux routes et finalement de modéliser un rond-point en considérant qu'un rond-point est une route périodique possédant un nombre fini de points d'entrée et de sortie de véhicules.

On modélise tout d'abord une jonction en introduisant un point d'entrée et de sortie de véhicule sur une route infinie. Ce point d'entrée et de sortie de véhicules, placé sans

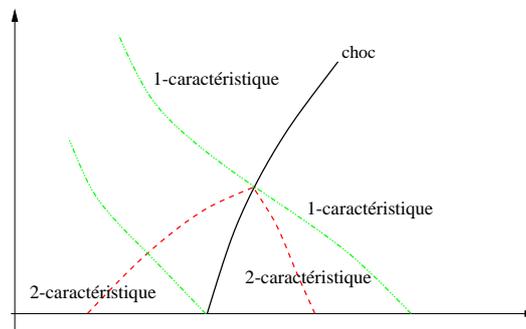


FIGURE 1 – Réflexion des 1-caractéristiques sur le choc dans un domaine angulaire.

perte de généralité en $x = 0$, est considéré comme un point de discontinuité au niveau duquel on donne des conditions aux bords. Le caractère *multi-classe* sert ici à différencier les véhicules selon leur *origine* et leur *destination*. Ainsi, dans le cas d'une route avec une seule discontinuité il y a trois types de véhicules : les véhicules qui restent sur la route principale, de densité ρ_1 , les véhicules qui arrivent de $-\infty$ sur la route principale et qui tournent en $x = 0$ sur la route secondaire, de densité ρ_2 , et les véhicules qui entrent en $x = 0$ sur la route principale en allant vers $+\infty$, de densité ρ_3 . Les conditions aux bords en $x = 0$, de type Bardos–Leroux–Nédélec [10], ressemblent aux conditions introduites dans [37] pour modéliser un péage : il s'agit de conserver le flux de véhicules allant tout droit et de donner des contraintes sur les flux de véhicules entrant et sortant au niveau de la discontinuité. Plus formellement, ces conditions se lisent, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\rho_1(t, 0^-)v(\rho_1(t, 0^-) + \rho_2(t, 0^-)) &= \rho_1(t, 0^+)v(\rho_1(t, 0^+) + \rho_2(t, 0^+)), \\ \rho_2(t, 0^-)v(\rho_1(t, 0^-) + \rho_2(t, 0^-)) &\leq o(t), \\ \rho_3(t, 0^+)v(\rho_1(t, 0^+) + \rho_3(t, 0^+)) &\leq i(t),\end{aligned}$$

où o et i sont des fonctions prescrites, donnant la capacité de la route secondaire.

Dans le Chapitre 4, on étudie ce modèle de jonction et l'on obtient l'existence globale d'une unique solution faible entropique pour le problème de Riemann. De même, on étudie le modèle de rond-point, qui consiste à avoir un nombre dénombrable de jonctions ne s'accumulant nulle part, et l'on obtient existence locale en temps d'une solution faible entropique pour le problème de Riemann ainsi qu'une minoration du temps d'existence :

Théorème 0.0.3 (voir Théorème 4.2.8). *On considère une route possédant un nombre dénombrable de jonctions, situées en les points $(x_i)_{i \in I}$. Sous les hypothèses*

(V) *tous les véhicules ont la même loi de vitesse $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, qui est $\mathcal{C}^{0,1}$, décroissante, s'annulant en $r = 1$;*

(F) *le flux $q : [r \mapsto rv(r)]$ est strictement concave et atteint son maximum q_c en $r = r_c \in]0, 1[$;*

(P) *on connaît les proportions $p_{i,j}$ de véhicules entrant en x_i et sortant en x_j ;*

il existe un temps $T > 0$ tel que le problème de Riemann pour le problème de route avec jonctions en les $(x_i)_{i \in I}$, avec des conditions aux bords comme décrit ci-dessus, admet une unique solution faible entropique pour tout $t \in [0, T]$.

De plus, on peut donner une borne inférieure sur le temps d'existence : soit $L = \min_k \{x_{k+1} - x_k\} > 0$, alors $T \geq \frac{L}{2V}$.

Ce théorème est plus amplement détaillé au chapitre 4 qui constitue par ailleurs un article publié dans *JMAA* [104].

Dans le Chapitre 5, on montre des simulations numériques se basant sur le schéma de Godunov représentant les solutions du problème de Riemann résolu au chapitre 4. On représente aussi des solutions du problème de Cauchy, qui semblent bien se comporter en temps long.

Notre étude de ce modèle de trafic routier se termine au Chapitre 6, avec une amorce de résolution du problème de Cauchy. En effet, quelques cas particuliers, se traitent assez facilement en suivant la méthode de *front tracking*.

La troisième partie est issue d'une collaboration avec Rinaldo M. Colombo et concerne les équations scalaires ($n = 1$). Ce type d'équations est bien mieux connu en matière

d'existence et d'unicité de solutions faibles entropiques, du moins dans le cas classique où le flux et la source sont des fonctions de u et non des fonctionnelles. Ainsi le théorème de Kružkov [81] affirme que, pour tout $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, sous de bonnes hypothèses pour le flux f et la source F , il existe une unique solution faible entropique $u \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ au problème de Cauchy pour (0.0.1) avec $n = 1$. De plus, on sait qu'il y a une dépendance continue dans \mathbf{L}^1 vis à vis des conditions initiales. Ainsi, pour $u_0, v_0 \in \mathbf{L}^\infty$ tels que $u_0 - v_0 \in \mathbf{L}^1$, alors, en notant u et v les solutions faibles entropiques associées on a

$$\|(u - v)(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})} \leq e^{\kappa t} \|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})},$$

où $\kappa = \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times [-\Omega, \Omega]; \mathbb{R})}$ (en supposant $\|u\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \Omega$, $\|v\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \Omega$).

Au cours du Chapitre 7 on s'intéresse à la dépendance de la solution par rapport au flux et à la source : étant donnés (f, F) et (g, G) deux couples « flux-source », peut-on estimer $u - v$ en fonction de $f - g$ et $F - G$? Dans le cas où le flux et la source ne dépendent que de u et pas directement de t et x , il existe déjà de tels résultats [21, 45, 96] qui utilisent de manière fondamentale le fait suivant : « si f et F ne dépendent pas de t et x et si $u_0 \in \mathbf{L}^\infty$ est à variation totale bornée, alors la solution est à variation totale bornée pour tout temps », où la variation totale est définie par

$$\text{TV}(u) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} u \operatorname{div} \psi \, dx ; \psi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \text{ et } \|\psi\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)} \leq 1 \right\}.$$

C'est pourquoi on a tout d'abord voulu donner une estimation de la variation totale de la solution dans le cas général où f et F dépendent de (t, x, u) . Cette question est l'objet du théorème :

Théorème 0.0.4 (voir Théorème 7.2.5). *Soit $u_0 \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ une application bornée. Alors, si (f, F) sont assez réguliers et satisfont des hypothèses satisfaisantes (décrites au chapitre 7). Alors la solution faible entropique u de (0.0.1) satisfait $u(t) \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ pour tout $t > 0$. De plus, si $\kappa_0 = NW_N \left((2N + 1) \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R})} \right)$ où W_N est une constante, alors pour tout $T > 0$,*

$$\text{TV}(u(T)) \leq \text{TV}(u_0) e^{\kappa_0 T} + NW_N \int_0^T e^{\kappa_0(T-t)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \operatorname{div} f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} \, dx \, dt.$$

Une fois cette estimation obtenue, on peut étudier la dépendance par rapport au flux et à la source par l'intermédiaire de la méthode de *doublement des variables* de Kružkov. On obtient le théorème :

Théorème 0.0.5 (voir Théorème 7.2.6). *Soient (f, F) , (g, G) deux couples flux-source satisfaisant des hypothèses adaptées. Soit*

$$\begin{aligned} \kappa &= 2N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R})} + \|\partial_u(F - G)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R})}, \\ M &= \|\partial_u g\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $T, R > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$, l'estimation suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned}
& \int_{\|x-x_0\| \leq R} |u(T, x) - v(T, x)| dx \leq e^{\kappa T} \int_{\|x-x_0\| \leq R+MT} |u_0(x) - v_0(x)| dx \\
& + \frac{e^{\kappa_0 T} - e^{\kappa T}}{\kappa_0 - \kappa} \text{TV}(u_0) \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
& + \text{NW}_N \left(\int_0^T \frac{e^{\kappa_0(T-t)} - e^{\kappa(T-t)}}{\kappa_0 - \kappa} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt \right) \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
& + \int_0^T e^{\kappa(T-t)} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T-t)} \left\| ((F - G) - \text{div}(f - g))(t, x, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt.
\end{aligned}$$

Ces deux estimations, de la variation totale et de dépendance par rapport au flux et à la source sont très satisfaisantes, puisque dans des cas simples tels que : f, g ne dépendent que de u , sans sources $F = G = 0$, ou encore f, g, F, G ne dépendent pas de u , on retrouve des estimations connues.

Cette estimation de dépendance au flux et à la source permet ensuite d'étudier le modèle simplifié du « gaz radiatif » pour lequel le terme source est non-local. En effet, on peut faire une estimation de contraction dans \mathbf{L}^1 pour un temps assez petit, ce qui nous permet, par le théorème de point fixe de Banach de conclure à l'existence locale de solution faible entropique pour le problème de Cauchy associé à ce modèle. Ce chapitre, issu d'une collaboration avec R. M. Colombo et M. D. Rosini, est l'objet de deux articles publiés d'une part dans *Comm. in Math. Sc.* [41] et d'autre part dans les *CRAS* [42].

Dans le chapitre 8, on améliore l'estimation obtenue dans le chapitre 7 en contrôlant plus finement les constantes.

Dans le chapitre 9, on étudie des équations de conservation scalaires avec flux non-local de type $\partial_t \rho + \text{div}(\rho V(\rho)) = 0$, telles que l'équation de trafic piéton ou l'équation de chaîne de montage présentées précédemment. On se donne de plus une fonctionnelle de coût \mathcal{J} représentant par exemple le temps mis par une foule pour sortir d'une pièce. On cherche alors assez naturellement à minimiser cette fonctionnelle de coût. En particulier, on voudrait connaître quelles sont les conditions initiales permettant de minimiser \mathcal{J} . Ce problème nous incite à chercher la dérivée au sens de Gâteaux de la solution par rapport aux conditions initiales. L'étude de ce problème commence par la preuve de l'existence d'une unique solution faible entropique pour le problème de Cauchy associé à ce type de modèle. On utilise pour cela de nouveau l'estimation de dépendance par rapport au flux et à la source obtenue précédemment et le théorème de point fixe de Banach. On obtient

Théorème 0.0.6 (voir Théorème 9.2.2). *Pour tous $\alpha, \beta > 0$ tels que $\beta > \alpha$, il existe un temps $T(\alpha, \beta) > 0$ tel que pour tout $\rho_0 \in \mathcal{X}_\alpha = (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; [0, \alpha])$, le problème*

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho V(\rho)) = 0, \quad \rho(0, x) = \rho_0(x), \quad (0.0.3)$$

admet une unique solution faible entropique $\rho \in \mathcal{C}^0([0, T(\alpha, \beta)]; \mathcal{X}_\beta)$.

On montre ensuite que, si ρ est la solution de $\partial_t \rho + \text{div}(\rho V(\rho)) = 0$, le problème de Cauchy pour l'équation linéarisée

$$\partial_t r + \text{div}(rV(\rho) + \rho DV(\rho)(r)) = 0$$

est bien posé dans $\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty$, et l'on montre que la dérivée au sens de Gâteaux cherchée est la solution de cette équation linéarisée. Plus précisément, on obtient le résultat :

Théorème 0.0.7 (voir Théorème 9.2.10). *Soit $\rho_0 \in (\mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{2,1})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, $r_0 \in (\mathbf{W}^{1,1} \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, et notons T_{ex} le temps d'existence de la solution du problème (0.0.3). Alors, pour tout temps $t \in I_{\text{ex}}$ le semi-groupe local défini au Théorème 0.0.6 est Gâteaux différentiable dans \mathbf{L}^1 dans la direction r_0 . De plus, la dérivée $DS_t(\rho_0)(r_0)$ de S_t en ρ_0 dans la direction r_0 est*

$$DS_t(\rho_0)(r_0) = \Sigma_t^{\rho_0}(r_0).$$

où Σ^{ρ_0} est l'application donnant la solution du problème linéarisé, lorsque $\rho = S_t \rho_0$, pour tout $t \in I_{\text{ex}}$.

On peut alors caractériser les minima de \mathcal{J} comme étant les points où la dérivée s'annule. Ce chapitre, issu d'une collaboration avec R. M. Colombo et M. Herty, est l'objet d'un article accepté pour la publication en novembre 2009 à *ESAIM-COCV* [40].

Première partie

Mécanique des fluides

Chapitre 1

Introduction

Dans cette partie, on s'intéresse au problème de Cauchy en mécanique des fluides compressibles, c'est-à-dire à la description mathématique de l'évolution d'un gaz dont on connaît les propriétés thermodynamiques et cinétiques au temps $t = 0$. Le début de l'étude des fluides compressibles date du XVIIIème siècle, avec les travaux d'Euler (1707-1783) et de d'Alembert (1717-1783), qui développèrent en particulier la théorie de la propagation du son. Les équations d'évolution modélisant la dynamique des gaz sont d'ailleurs appelées *équations d'Euler*, voire *équations d'Euler compressibles* par abus de langage. Cependant, la dynamique des fluides compressibles fait encore aujourd'hui l'objet de nombreux travaux, théoriques, numériques et expérimentaux, liés à des applications variées dans les domaines civils et militaires comme l'aéronautique, les turbomachines, les explosifs...

Au cours de cette étude, le fil conducteur était de déterminer des conditions, de nature géométrique, cinématique ou thermodynamique, assurant l'existence en temps grand de solutions régulières, ou régulières de part et d'autre d'une surface de discontinuité, aux équations d'Euler pour des gaz « réels », c'est-à-dire n'obéissant pas nécessairement à la loi des gaz parfaits polytropiques (GPP, dont la définition est précisée plus loin).

On s'intéressera donc essentiellement à deux types de solutions pour les équations d'Euler compressibles. On commencera par les solutions régulières dans tout l'espace, qui s'obtiennent localement en temps par des critères généraux (hyperbolicité, symétrisabilité), et des résultats désormais classiques (Leray [87], Gårding [53], Kato [77] ...). Le problème du temps d'existence est beaucoup plus délicat, et néanmoins crucial pour les applications. Si de nombreux auteurs comme T. C. Sideris [125, 126], T. Makino, S. Ukai & S. Kawashima [100], J.-Y. Chemin [27, 28] ont donné des critères d'« explosion » au sens mathématique avant tout, on sait néanmoins qu'il peut aussi exister des solutions régulières globales en temps. Par exemple, on peut trouver des solutions stationnaires, ou encore des solutions autosimilaires c'est-à-dire ne dépendant que d'une seule inconnue, combinaison des variables d'espace et de temps (cf. R. F. Chisnell [33, 34], G. B. Whitham [143], Wu & Roberts [144], Landau & Lifshitz [83]). Par ailleurs, des résultats de Li Ta Tsien [88], D. Serre [122], M. Grassin [63] prouvent l'existence globale de solutions régulières sous des hypothèses d'« expansivité » à rapprocher de la condition d'existence globale fournie par la méthode des caractéristiques pour les équations scalaires.

Sachant que la plupart des résultats évoqués sont obtenus pour des gaz parfaits polytropiques, une question naturelle est de déterminer si ces résultats s'étendent à des gaz plus réalistes, qui suivent par exemple la loi de Van der Waals. Cette loi a en effet l'avantage

de prendre en compte le volume des molécules puisqu'elle interdit au volume massique du gaz considéré d'être inférieur à une certaine valeur b , qu'on appelle *covolume* et qui dépend de la taille des molécules qui le constitue. Cette loi est importante dans certains contextes physiques où le gaz est très comprimé, comme dans le phénomène fascinant de la sonoluminescence [18]. Elle est également utile pour modéliser des milieux *poussiéreux* : par exemple après explosion d'une bombe, on a un gaz *poussiéreux* pouvant être modélisé comme un gaz parfait pollué par des particules équi-réparties, et dont la loi d'état se ramène à celle de Van der Waals [65, 117, 127, 138].

Il se trouve que la prise en compte du covolume b modifie de façon non-triviale l'analyse des équations par rapport aux gaz parfaits polytropiques. On généralisera ainsi au chapitre 2 un théorème de M. Grassin donnant l'existence globale de solutions régulières pour des gaz parfaits polytropiques au cas des gaz de Van der Waals. Pour cela, il faut tout d'abord étendre au cas des gaz de Van der Waals la symétrisation de Makino, Ukai & Kawashima, qui supporte les zones de vide, puis faire des estimations d'énergie dans \mathbf{H}^m .

On s'intéressera ensuite au chapitre 3 à ce qui se passe lorsque les solutions décrites précédemment cessent d'être régulières. La théorie des solutions faibles en plusieurs dimensions d'espace étant encore hors de portée (par manque de cadre fonctionnel adéquat), on se concentrera sur les solutions régulières par morceaux et plus particulièrement sur les « ondes de choc », qui sont des solutions régulières de part et d'autre d'une discontinuité appelée *choc*. Les premiers travaux importants à ce propos sont dûs à Riemann (1826-1866). La théorie a connu un essor particulier au cours du XXème siècle, notamment lors de la seconde guerre mondiale pour des raisons tout à fait non-pacifiques et elle reste un sujet d'actualité en raison de l'effet que les ondes de choc peuvent avoir, qu'il soit néfaste, dans l'industrie, ou bénéfique, en médecine. De même que pour les solutions régulières dans tout l'espace, on sait par Majda [99] que, lorsque les conditions initiales sont régulières de part et d'autre d'une discontinuité et vérifient certaines conditions de compatibilité, alors il existe une solution locale en temps de type onde de choc. On est alors de nouveau confronté au problème de l'estimation du temps d'existence de ce type de solutions. Les solutions auto-similaires fournissent un exemple de solution globale en temps et décrivent les phénomènes d'explosion forte ou d'implosion forte. L'explosion forte fut notamment très étudiée à partir des années 1940 en raison du développement de la bombe atomique, ce qui fut à l'origine du modèle de Sedov-Taylor [119, 131], également étudié par J. Von Neumann [62, 140] et L. D. Landau [82]. L'étude de l'implosion, c'est-à-dire la focalisation des ondes de choc, remonte aux travaux de G. Guderley [66], R. F. Chisnell [33, 34], G. B. Whitham [143] et concerne des problèmes physiques variés tels que la cavitation, qui abîme les hélices de bateaux, la sonoluminescence [18], ou la réduction des calculs rénaux. De nouveau la question se pose alors de généraliser les résultats connus pour les gaz parfaits au cas des gaz « réels ».

Notre objectif est de préciser le temps d'existence de solutions ondes de choc pour des gaz « réels ». Dans le cas de fluides isentropiques unidimensionnels pour lesquels on dispose d'invariants de Riemann forts, on y parvient en appliquant la méthode de Li Ta Tsien [88, 89], que l'on poursuit ici pour obtenir une estimation du temps d'existence d'ondes de choc à symétrie cylindrique ou sphérique. Cette méthode se base sur l'existence d'invariants de Riemann forts dans le cas isentropique, unidimensionnel. Or dans le cas des symétries cylindriques et sphériques, les équations sont « quasi-1d » : elles n'ont qu'une variable d'espace, cependant une source apparaît qui empêche de retrouver d'aussi bons résultats que dans le cas vraiment 1d. On obtient toutefois une estimation du temps d'existence pour les ondes de chocs possédant ces symétries. En particulier, pour un gaz de Van der Waals,

on trouve que le temps d'existence de l'onde de choc est d'autant plus grand que le choc se situe loin de l'origine au temps initial.

On développera par ailleurs une approche transverse se concentrant sur les aspects géométriques de l'onde de choc. En suivant une approche développée par R. F. Chisnell, W. Chester, G. B. Whitham [31, 33, 143] on obtiendra en effet une équation approchée pour une fonction β dont les surfaces de niveau de valeurs t correspondent à l'emplacement de la surface de discontinuité au temps t . Cette EDP satisfaite par β est hyperbolique dans le cas qui nous intéresse. On montrera que les solutions à symétrie sphérique de cette équation approchée se comportent au voisinage de l'origine comme les solutions autosimilaires attendues. Dans le cas d'une condition initiale compacte, on obtient l'existence locale d'une solution dont on conjecture qu'elle existe en temps grand si la surface de discontinuité initiale est convexe et le choc expansif.

Cette partie commence par des éléments de thermodynamique permettant de décrire les équations satisfaites par un fluide « réel ». Ensuite, on étudiera les solutions régulières, leur éventuelle explosion en temps fini ainsi que des cas d'existence globale. Enfin, on traitera le cas des solutions ondes de choc, en s'intéressant plus particulièrement aux solutions sphériques ou « quasi-sphériques ».

1.1 Thermodynamique

1.1.1 Lois de conservation

La dynamique des fluides compressibles (gaz), non visqueux et non conducteurs de chaleur est régie par les équations d'Euler, constituées des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie (voir par exemple [48, chap. 2]) :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t q + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = 0, \\ \partial_t E + \operatorname{div}((E + p)u) = 0, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

où ρ est la masse volumique, $q = \rho u$ est la quantité de mouvement par unité de volume et $E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e$ est l'énergie totale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne, par unité de volume. Ceci est un système de $(d + 2)$ équations à $(d + 3)$ inconnues : la densité $\rho \in \mathbb{R}_+$, la vitesse $u \in \mathbb{R}^d$, l'énergie interne spécifique $e \in \mathbb{R}$ et la pression $p \in \mathbb{R}$. Il est complété par une équation d'état, par exemple une équation d'état incomplète, aussi appelée *loi de pression*, $(\rho, e) \mapsto p(\rho, e)$.

Définition 1.1.1. On appelle *équations d'Euler compressibles* le système constitué des lois de conservation (1.1.1) et d'une loi d'état incomplète $p = p(\rho, e)$.

Un modèle simplifié est souvent considéré en ne retenant de ces équations que les conservations de masse et de quantité de mouvement, le fluide étant supposé isentropique ou isotherme (grâce à un dispositif physique violant la loi de conservation de l'énergie en général). Le système se réduit alors à

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t q + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = 0, \end{cases} \quad (1.1.2)$$

et la loi de pression à une relation du type $\rho \mapsto p(\rho)$.

Définition 1.1.2. On appelle équations d'Euler *isentropiques*, respectivement *isothermes*, le système constitué des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (1.1.2) assorti d'une loi d'état $p = p(\rho)$ donnée par

$$p = - \left. \frac{\partial e}{\partial v} \right|_s, \quad \text{respectivement } p = - \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_T,$$

où $v = 1/\rho$ est le volume spécifique, T est la température, s l'entropie spécifique et $f = e - Ts$ est l'énergie libre spécifique, en supposant que le fluide est muni d'une équation d'état exprimant e en fonction de v et s .

Les variables thermodynamiques v, s, e, T, p sont reliées entre elles par des relations décrites dans la section 1.1.2.

Les équations d'Euler font partie des *systèmes de lois de conservation du premier ordre*, dont l'étude est développée en particulier dans les livres de C. Dafermos [46] ou de D. Serre [120, 121].

1.1.2 Lois d'état

L'équation d'état a une forte influence sur l'analyse mathématique des équations d'Euler compressibles. Les équations d'état des gaz dits « réels » peuvent révéler des comportements particuliers et soulever des problèmes d'existence et/ou d'unicité des solutions ne se produisant pas pour les gaz « parfaits », voir [103]. On décrit ci-après les principes physiques qu'une loi d'état doit satisfaire.

1.1.2.A Définitions

On considère un fluide dont l'énergie interne est déterminée de façon régulière par son volume spécifique¹ $v = 1/\rho$ et son entropie spécifique s . Cela revient à dire que le gaz est muni d'une équation d'état *complète*, ou loi d'énergie, $e = e(v, s)$. Le principe fondamental de la thermodynamique s'exprime alors

$$de = -pdv + Tds \tag{1.1.3}$$

où p est la pression et T la température du gaz, ce qui signifie que la pression p et la température T peuvent être définies comme

$$p = - \left. \frac{\partial e}{\partial v} \right|_s, \quad T = \left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_v, \tag{1.1.4}$$

où l'on utilise la notation $|$ pour préciser la variable maintenue constante dans la dérivation partielle.

Les dérivées d'ordre supérieur de e jouent également un rôle important ; on définit les

1. spécifique est un synonyme de massique

quantités adimensionnées suivantes :

$$\gamma = -\frac{v}{p} \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_s, \quad (1.1.5)$$

$$\Gamma = -\frac{v}{T} \left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_s, \quad (1.1.6)$$

$$\delta = \frac{pv}{T^2} \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_v, \quad (1.1.7)$$

$$\mathcal{G} = -\frac{v}{2} \frac{\left. \frac{\partial^3 e}{\partial v^3} \right|_s}{\left. \frac{\partial^2 e}{\partial v^2} \right|_s}, \quad (1.1.8)$$

Le coefficient γ s'appelle *exposant adiabatique* (on verra qu'il est relié à la *vitesse du son* dite *adiabatique*), et Γ est le *coefficient de Grüneisen*. Les quantités γ, δ, Γ et \mathcal{G} caractérisent les propriétés géométriques des courbes isentropes dans le plan (v, p) (cf.[103]). Elles s'expriment en fonction de e à travers les relations

$$\gamma = \frac{v}{p} \frac{\partial^2 e}{\partial v^2}, \quad \Gamma = -\frac{v}{T} \frac{\partial^2 e}{\partial s \partial v}, \quad \delta = \frac{pv}{T^2} \frac{\partial^2 e}{\partial s^2}.$$

On introduit de plus c_v la *capacité calorifique à volume constant* et c_p la *capacité calorifique à pression constante* définies par

$$c_v = \left. \frac{\partial e}{\partial T} \right|_v = \frac{T}{\left. \frac{\partial^2 e}{\partial s^2} \right|_v}, \quad (1.1.9)$$

$$c_p = T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_p. \quad (1.1.10)$$

Ces deux dernières quantités sont reliées au rapport $\frac{pv}{T}$ et aux nombres γ, δ, Γ par

$$\delta c_v = \frac{pv}{T}, \quad c_p = \frac{pv}{T} \frac{\gamma}{\gamma\delta - \Gamma^2}. \quad (1.1.11)$$

Le rapport $\gamma_* = \frac{c_p}{c_v}$ des capacités calorifiques vaut $\gamma_* = \frac{\gamma\delta}{\gamma\delta - \Gamma^2}$. Il est différent de γ en général. Mais on verra que pour un gaz parfait $\delta = \Gamma = \gamma - 1$, de sorte que $\gamma_* = \gamma$.

1.1.2.B Contraintes thermodynamiques

Il est naturel de supposer $v > 0$. On suppose de plus que la pression p et la température T sont positives, ce qui impose que e soit fonction croissante de T et décroissante de v .

Une hypothèse thermodynamique classique demande de plus que e soit une fonction convexe de s et v , ce qui revient à imposer les contraintes de signe suivantes :

$$\gamma\delta - \Gamma^2 \geq 0, \quad \delta \geq 0, \quad \gamma \geq 0.$$

En particulier, $\gamma \geq 0$ signifie que p croît avec la densité $\rho = 1/v$, ce qui nous permet de définir la *vitesse du son adiabatique* par

$$c = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}. \quad (1.1.12)$$

On montre alors que \mathcal{G} s'exprime en fonction de ρ et c par $\mathcal{G} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\rho c)}{\partial \rho} \Big|_s$.

Définition 1.1.3. On appelle *fluide de Bethe-Weyl* [15, 142] tout fluide muni d'une équation d'état complète, avec e bornée inférieurement, telle que

- la pression et la température définies par (1.1.4) soient positives,
- les coefficients γ, δ, Γ et \mathcal{G} définis par (1.1.5), (1.1.7), (1.1.6) et (1.1.8) vérifient :

$$\gamma > 0, \quad \gamma\delta \geq \Gamma^2, \quad \Gamma > 0, \quad \mathcal{G} > 0, \quad (1.1.13)$$

- il existe une densité maximale $\rho_{max} \in]0, +\infty]$ telle que $\lim_{\rho \rightarrow \rho_{max}} p(\rho, s) = +\infty$.

La condition $\Gamma > 0$ n'est pas thermodynamiquement requise mais est vérifiée dans les exemples considérés plus loin (cf. Tableau A.4), et assure en particulier que les isentropes ne se croisent pas dans le plan (v, p) .

La condition $\mathcal{G} > 0$ signifie que les isentropes sont strictement convexes dans le plan (v, p) .

1.1.2.C Changement de variables

L'une des contraintes thermodynamiques décrites précédemment est $T \geq 0$. Si de plus $T > 0$ alors $(v, s) \mapsto (v, e)$ est un difféomorphisme local et l'on peut exprimer les coefficients thermodynamiques en variables (v, e) ou (v, s) indifféremment. On a

$$\frac{\partial}{\partial v} \Big|_s = \frac{\partial}{\partial v} \Big|_e - p \frac{\partial}{\partial e} \Big|_v, \quad \frac{\partial}{\partial s} \Big|_v = T \frac{\partial}{\partial e} \Big|_v,$$

de sorte que les définitions (1.1.5)–(1.1.6)–(1.1.8) deviennent

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{v}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial v} \Big|_e - p \frac{\partial p}{\partial e} \Big|_v \right), \\ \Gamma &= v \frac{\partial p}{\partial e} \Big|_v, \\ \mathcal{G} &= \frac{1}{2} \left[\gamma + 1 - \frac{v}{\gamma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial v} \Big|_e - p \frac{\partial \gamma}{\partial e} \Big|_v \right) \right]. \end{aligned}$$

De même, on peut exprimer les équations du mouvement en variables (ρ, u, e) ou bien (ρ, u, s) tant que l'on s'intéresse aux solutions régulières. En variables (ρ, u, e) le système conservatif (1.1.1) prend la forme quasi-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_e \nabla \rho + \frac{\partial p}{\partial e} \Big|_\rho \nabla e \right) = 0, \\ \partial_t e + u \cdot \nabla e + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \quad (1.1.14)$$

Pour un écoulement isentropique, on peut aussi écrire (1.1.2) sous forme quasi-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{p'(\rho)}{\rho} \nabla \rho = 0. \end{cases} \quad (1.1.15)$$

En variables (ρ, u, s) , la relation $ds = \frac{1}{T} de - \frac{p}{T\rho^2} d\rho$ nous permet d'obtenir

$$\partial_t s = \frac{1}{T} \partial_t e - \frac{p}{T\rho^2} \partial_t \rho.$$

Le système conservatif (1.1.1) prend alors la forme quasi-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \nabla \rho + \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{\rho} \nabla s = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases} \quad (1.1.16)$$

Si $\rho > 0$ et $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$ alors $(v, s) \mapsto (p, s)$ est aussi un difféomorphisme local et l'on peut encore écrire le système conservatif (1.1.1) sous forme quasi-linéaire en variables (p, u, s) :

$$\begin{cases} \partial_t p + u \cdot \nabla p + \rho c^2 \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases} \quad (1.1.17)$$

Selon le contexte, il est plus ou moins commode d'utiliser l'une ou l'autre des formes quasi-linéaires (1.1.14)–(1.1.16)–(1.1.17).

1.1.2.D Exemples de lois d'état

Le tableau A.4 regroupe les lois d'état décrites ci-après ainsi que les quantités associées.

a) Gaz parfait

Définition 1.1.4. Un gaz est dit *parfait* (voir [143, p. 152] ou [103]) s'il vérifie la *loi de pression*

$$pV = \mathfrak{R}T, \quad (1.1.18)$$

où V est le volume molaire et \mathfrak{R} est la constante des gaz parfaits dont la valeur est estimée à $\mathfrak{R} = 8,3144 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

L'équation d'état des gaz parfaits est compatible avec le principe fondamental de la thermodynamique (1.1.3) si e est de la forme

$$e = \mathcal{E}(v^{-\mathfrak{R}} \exp(s)),$$

où \mathcal{E} est une fonction régulière. En effet, la relation fondamentale (1.1.3) implique

$$\left. \frac{\partial e}{\partial v} \right|_s = -p, \quad \left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_v = T.$$

Associées à la loi d'état $pv = \mathfrak{R}T$, ces relations donnent :

$$\left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_v + \frac{v}{\mathfrak{R}} \left. \frac{\partial e}{\partial v} \right|_s = 0.$$

On introduit alors les nouvelles variables $w = v^{-\mathfrak{R}}$ et $\sigma = v^{-\mathfrak{R}} \exp(s)$ et on pose $e(v, s) = \hat{e}(\sigma, w)$. La nouvelle inconnue \hat{e} vérifie alors l'équation $w \partial_w \hat{e} = 0$, ce qui implique pour $w > 0$:

$$\hat{e} = \mathcal{E}(\sigma),$$

où F est une fonction à déterminer. En variable (v, s) cela revient à $e(v, s) = \mathcal{E}(v^{-\mathfrak{R}} \exp(s))$.

Pour une telle loi on trouve que $\delta = \Gamma = \gamma - 1$ de sorte que (1.1.13) est vérifiée si et seulement si $\gamma > 1$.

De plus, la première relation de (1.1.11) implique $\delta = \frac{\mathfrak{R}}{c_v} = \Gamma = \gamma - 1$, d'où effectivement $\gamma_* = \gamma$ pour les gaz parfaits, comme annoncé plus haut. Cependant on n'a pas d'expression simple de \mathcal{G} pour un gaz parfait général.

Définition 1.1.5. On dit qu'un gaz parfait est *polytropique* [143, p. 154] si sa capacité calorifique c_v est constante.

Pour un gaz parfait polytropique, on a donc $\left. \frac{\partial^2 e}{\partial s^2} \right|_v = \frac{T}{c_v} = \frac{1}{c_v} \left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_v$, ce qui devient, puisque $e = \mathcal{E}(v^{-\mathfrak{R}} \exp(s))$,

$$\mathcal{E}'(v^{-\mathfrak{R}} \exp(s)) + v^{-\mathfrak{R}} \exp(s) \mathcal{E}''(v^{-\mathfrak{R}} \exp(s)) = \frac{1}{c_v} \mathcal{E}'(v^{-\mathfrak{R}} \exp(s)),$$

ou encore en variable (σ, w) :

$$\mathcal{E}''(\sigma) = \left(\frac{1}{c_v} - 1 \right) \frac{1}{\sigma} \mathcal{E}'(\sigma),$$

d'où $\mathcal{E}(\sigma) = C \sigma^{1/c_v}$, où C est une constante qu'on peut choisir égale à 1. Ainsi, on a nécessairement $e = \mathcal{E}(v^{-\mathfrak{R}} \exp(s))$ avec $\mathcal{E}(\sigma) = \sigma^{1/c_v}$. Les expressions obtenues dans le cas général permettent de déduire que les quantités γ , δ , Γ , \mathcal{G} sont des constantes reliées à \mathfrak{R} et c_v par :

$$\delta = \Gamma = \gamma - 1 = \frac{\mathfrak{R}}{c_v}, \quad \mathcal{G} = \frac{\gamma + 1}{2}.$$

Pour un gaz parfait polytropique, $\rho_{max} = +\infty$ et l'on a bien $p \rightarrow +\infty$ lorsque $\rho \rightarrow \rho_{max}$.

D'autre part, l'exposant adiabatique γ peut être calculé, dans le cas des gaz parfaits polytropiques, en fonction de la dimension d de l'espace ($d \leq 3$ dans les situations physiques ordinaires) et du nombre β de degrés de liberté non translationnels des molécules. On obtient (cf. [120, chap.1], [143, p.155])

$$\gamma = \frac{d + \beta + 2}{d + \beta}.$$

Ceci donne $\gamma = 5/3$ pour un gaz « monoatomique » (pas de degré de liberté) en dimension 3, $\gamma = 7/5$ pour un gaz « diatomique » (2 degrés de liberté) en dimension 3; ainsi que $\gamma = 2$ pour un gaz monoatomique en dimension 2, $\gamma = 5/3$ pour un gaz diatomique en dimension 2; et finalement $\gamma = 3$ en dimension 1. Dans tous ces cas on a bien $\gamma > 1$. Les gaz parfaits polytropiques sont des exemples de fluides de Bethe-Weyl.

b) Gaz de Van der Waals

Définition 1.1.6. Un gaz est dit *de Van der Waals* s'il vérifie la *loi de pression*

$$p(V - b) = \mathfrak{R}T, \quad (1.1.19)$$

où V est le volume molaire et b le *covolume*, qui représente la limite de compressibilité du fluide, due au volume des molécules.

La loi de Van der Waals est donc une modification de (1.1.18) qui prend en compte la taille des molécules, ce qui est important dans les situations (extrêmes) où le fluide est fortement comprimé. Dans ce cas, la densité maximale est $\rho_{max} = \frac{1}{b}$. De même que pour le cas du gaz parfait, la relation fondamentale (1.1.3) pourvoit une EDP vérifiée par e , de la forme $\partial_v e + \frac{\mathfrak{R}}{v-b} \partial_s e = 0$. En redéfinissant w , σ et \hat{e} par $w = (v-b)^{-\mathfrak{R}}$, $\sigma = (v-b)^{-\mathfrak{R}} \exp(s)$ et $\hat{e}(w, \sigma) = e(v, s)$ on obtient de nouveau $\partial_w \hat{e} = 0$, d'où $e = \mathcal{E}((v-b)^{-\mathfrak{R}} \exp(s))$. Si l'on suppose de plus c_v constant, on a par définition de c_v et par (1.1.3) $\left. \frac{\partial^2 e}{\partial s^2} \right|_v = \frac{1}{c_v} \left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_v$, d'où $\sigma \mathcal{E}'' = (\frac{1}{c_v} - 1) \mathcal{E}'$ et donc $\mathcal{E}(\sigma) = C \sigma^{1/c_v}$, ce qui nous donne :

$$e = (v-b)^{-\frac{\mathfrak{R}}{c_v}} \exp\left(\frac{s}{c_v}\right), \quad p = \frac{\mathfrak{R}}{c_v} \frac{e}{v-b}.$$

Quelques calculs nous permettent alors d'obtenir

$$\gamma = \gamma_0 \frac{v}{v-b}, \quad \Gamma = \delta = (\gamma_0 - 1) \frac{v}{v-b}, \quad \mathcal{G} = \frac{\gamma_0 + 1}{2} \frac{v}{v-b}$$

où

$$\gamma_0 = \frac{\mathfrak{R}}{c_v} + 1. \quad (1.1.20)$$

Les conditions (1.1.13) sont donc satisfaites pour $\gamma_0 > 1$.

Remarque 1.1.7. 1. Un gaz parfait peut être vu comme un gaz de Van der Waals avec $b = 0$.

2. La loi de Van der Waals coïncide avec la loi des gaz dits *poussiéreux* considérée dans [65, 74, 117, 127, 138]. Selon ce modèle, un *gaz poussiéreux* est un mélange de petites particules solides et d'un gaz parfait, en supposant que les poussières sont uniformément distribuées dans le gaz. Ces poussières ont pour effet de diminuer la compressibilité du mélange et d'augmenter la masse totale.

Le plus souvent dans la littérature, les gaz parfaits polytropiques sont considérés comme un exemple canonique de loi d'état. Cependant, leur adéquation avec les observations physiques est moins bonne que la loi des gaz de Van der Waals.

La loi (1.1.19) est elle-même un cas particulier de $p = \frac{\mathfrak{R}T}{V-b} - \frac{a}{V^2}$, qui autorise en outre les changements de phase lorsque T passe sous la température critique $T_c = \frac{8a}{27b\mathfrak{R}}$ [114].

c) Gaz raidis (*stiffened gas*)

Définition 1.1.8. Un *gaz raidi* suit une équation d'état de la forme (voir [103, p. 116])

$$p + p_0 = \mathfrak{R}T\rho. \quad (1.1.21)$$

Cette équation d'état est souvent utilisée lorsqu'on considère de l'eau sous haute pression (explosions sous-marines, sono-luminescence). La constante p_0 y représente l'attraction moléculaire.

Si c_v est constant, l'énergie spécifique s'exprime sous la forme

$$e = v^{-\gamma_0+1} \exp\left(\frac{s}{c_v}\right) + \frac{p_0 v}{\gamma_0},$$

où γ_0 est défini comme en (1.1.20) et l'on a

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_0 + \frac{p_0}{p}, & \delta &= (\gamma_0 - 1) \frac{\gamma_0 p}{\gamma_0 p + p_0}, \\ \Gamma &= \gamma_0 - 1, & \mathcal{G} &= \frac{\gamma_0 + 1}{2}.\end{aligned}$$

Par conséquent les relations (1.1.13) sont vérifiées pour $\gamma_0 > 1$ et $p_0 > 0$.

Remarque 1.1.9. On pourrait « mélanger » les deux lois en posant

$$(p + p_0)(V - b) = \mathfrak{R}T.$$

Par la suite on ne considérera que des fluides à capacité calorifique c_v constante et strictement positive

$$c_v > 0, \quad (1.1.22)$$

ce qui implique en particulier $\gamma_0 := \frac{\mathfrak{R}}{c_v} + 1 > 1$.

1.2 Hyperbolicité

Une notion cruciale pour l'analyse mathématique des systèmes de lois de conservation du premier ordre est leur hyperbolicité (cf. [14, 46, 120]). L'hyperbolicité des équations d'Euler dépend évidemment des propriétés de la loi d'état. Elle est indépendante en revanche des variables thermodynamiques choisies. Par souci de simplicité on considère ici les variables (ρ, u, s) .

Le système (1.1.16) peut s'écrire matriciellement, en posant $V = (\rho, u^{\mathbf{T}}, s)^{\mathbf{T}}$,

$$\partial_t V + \sum_{k \in \llbracket 1, d \rrbracket} \left(\begin{array}{c|c|c} u_k & \rho \mathbf{e}_k^{\mathbf{T}} & 0 \\ \hline \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s \mathbf{e}_k & u_k I_d & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{\rho} \mathbf{e}_k \\ \hline 0 & 0 \quad \dots \quad 0 & u_k \end{array} \right) \partial_k V = 0, \quad (1.2.1)$$

où \mathbf{e}_k est le k -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^d . On pose

$$\begin{aligned} A(\xi, V) &= \sum_k \xi_k \left(\begin{array}{c|c|c} u_k & \rho \mathbf{e}_k^{\mathbf{T}} & 0 \\ \hline \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s \mathbf{e}_k & u_k I_d & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{\rho} \mathbf{e}_k \\ \hline 0 & 0 \quad \dots \quad 0 & u_k \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c} \langle u, \xi \rangle & \rho \xi^{\mathbf{T}} & 0 \\ \hline \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s \xi & \langle u, \xi \rangle I_d & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{\rho} \xi \\ \hline 0 & 0 \quad \dots \quad 0 & \langle u, \xi \rangle \end{array} \right). \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

On trouve aisément que les valeurs propres de la matrice $A(\xi, V)$ sont les solutions de l'équation

$$(\lambda - \langle u, \xi \rangle)^d \left((\lambda - \langle u, \xi \rangle)^2 - |\xi|^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s \right) = 0.$$

Elles sont toutes réelles si et seulement si $\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s \geq 0$, ce qui revient à demander $\gamma \geq 0$ pour $\rho > 0$, $p \geq 0$. Ainsi, le système est hyperbolique si et seulement si la pression croît lorsque le volume décroît, ce qui est une condition physiquement raisonnable. Dans ce cas, on a comme valeurs propres

$$\lambda_{\pm} = \langle u, \xi \rangle \pm |\xi| \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s}, \quad \lambda_0 = \langle u, \xi \rangle.$$

On vérifie de plus que les valeurs propres λ_{\pm} sont simples, tandis que λ_0 est de multiplicité géométrique égale à d .

Proposition 1.2.1. *Soit \mathcal{V} un ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, borné dans les directions ρ et s . Le système (1.1.1) muni d'une loi d'état incomplète satisfaisant*

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s > 0 \quad \text{sur } \mathcal{V} \tag{1.2.3}$$

est hyperbolique sur \mathcal{V} , c'est-à-dire que pour tout $\xi \neq 0$, $A(\xi, V)$ est diagonalisable sur \mathbb{R} . De plus, ses valeurs propres $\lambda_+ = \langle u, \xi \rangle + c|\xi|$, $\lambda_0 = \langle u, \xi \rangle$, $\lambda_- = \langle u, \xi \rangle - c|\xi|$, sont de multiplicité constante. Si $(h_i)_{i \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket}$ est une base de ξ^\perp , les vecteurs propres associés sont

$$\begin{aligned} r_+ &= \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + c^2|\xi|}} \begin{pmatrix} \rho|\xi| \\ -c\xi \\ 0 \end{pmatrix}, & r_- &= \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + c^2|\xi|}} \begin{pmatrix} \rho|\xi| \\ c\xi \\ 0 \end{pmatrix}, \\ r_{0,i} &= \frac{1}{|h_i|} \begin{pmatrix} 0 \\ h_i \\ 0 \end{pmatrix}, \forall i \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket, & r_{0,d} &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial s} \Big|_\rho \\ 0 \\ c^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le champ caractéristique associé à λ_0 est linéairement dégénéré, c'est-à-dire que $d\lambda_0 \cdot r = 0$ quel que soit $r \in \text{Ker}(A - \lambda_0)$. Les premier et troisième champs quant à eux sont vraiment non-linéaires, c'est-à-dire que $d\lambda_{\pm} \cdot r_{\pm} \neq 0$, sous la condition additionnelle

$$\mathcal{G} \neq 0.$$

Preuve. Voir [14, 120] pour les détails. Le caractère linéairement dégénéré de λ_0 vient du calcul

$$d\lambda_0 \cdot x_{0,i} = \xi \cdot h_i / |h_i| = 0$$

par définition de h_i pour $i \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$.

Le caractère vraiment non-linéaire de λ_{\pm} vient du calcul

$$\begin{aligned} d\lambda_{\pm} \cdot r_{\pm} &= \frac{\mp|\xi|}{\sqrt{\rho^2 + c^2}} \left(\rho \frac{\partial c}{\partial \rho} + c \right) \\ &= \frac{\mp|\xi|}{\sqrt{\rho^2 + c^2}} \frac{\partial(\rho c)}{\partial \rho}. \end{aligned}$$

□

Ainsi, les équations d'Euler pour les fluides de Bethe-Weyl sont hyperboliques à valeurs propres de multiplicité constante.

1.3 Symétrisation

Une autre propriété importante, dont l'utilisation remonte aux travaux de Friedrichs [51], est la symétrisabilité des équations d'Euler.

1.3.1 Cas sans vide

Si $\rho > 0$ et $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$ alors le système (1.1.16) peut s'écrire pour les solutions régulières sous la forme (1.1.17), où c désigne la vitesse du son, définie en (1.1.12). La version matricielle de (1.1.17) est $\partial_t \tilde{V} + \sum_k \tilde{A}_k(\tilde{V}) \partial_k \tilde{V} = 0$, avec $\tilde{V} = (p, u^{\mathbf{T}}, s)^{\mathbf{T}}$ et

$$\tilde{A}(\xi, V) = \sum_k \xi_k \tilde{A}_k(\tilde{V}) = \begin{pmatrix} u \cdot \xi & \rho c^2 \xi^{\mathbf{T}} & 0 \\ \frac{1}{\rho} \xi & u \cdot \xi I_d & 0 \\ 0 & 0 & u \cdot \xi \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est « presque » symétrique puisqu'il suffit de la multiplier à gauche par la matrice $D := \text{Diag} \left(\frac{1}{\rho c^2}, \rho, \dots, \rho, 1 \right)$ pour obtenir une matrice symétrique. Ainsi on obtient

Proposition 1.3.1. *Le système (1.1.17) est symétrisable au sens de Friedrichs lorsque les variables (ρ, u, s) sont à valeurs dans un compact inclus dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, en effet, pour de telles valeurs de (ρ, u, s) , $D\tilde{A}(\xi, V)$ est symétrique avec D symétrique définie positive.*

1.3.2 Cas avec du vide

Un défaut de la formulation précédente est qu'elle n'autorise pas ρ à s'annuler (ou même à tendre vers 0, comme c'est le cas à l'infini pour les fonctions dans \mathbf{H}^m pour $m \geq 0$). Makino et al. [100] sont à l'origine d'une symétrisation pour les gaz parfaits polytropiques valable aussi dans les régions où ρ s'annule. On peut généraliser leur méthode au cas des gaz de Van der Waals. On rappelle que dans ce cas on a $\gamma = \frac{\gamma_0}{1-b\rho}$ et $p = (\gamma_0 - 1) \left(\frac{\rho}{1-b\rho} \right)^{\gamma_0} \exp\left(\frac{s}{c_v}\right)$. On introduit la nouvelle variable

$$\pi = 2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \left(\frac{p}{\gamma_0 - 1} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}},$$

et l'on réécrit le système (1.1.16) en les variables (π, u, s) . Pour cela, on part du système (1.1.17) en variable (p, u, s) . Puisque $\pi = f(p) = Cp^\alpha$, il suffit de multiplier la première ligne par $f'(p) = C\alpha p^{\alpha-1}$ pour obtenir une équation en π . On a alors

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + C\alpha p^{\alpha-1} \rho c^2 \nabla \cdot u = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho C\alpha p^{\alpha-1}} \exp\left(\frac{s}{\gamma_0 c_v}\right) \nabla \pi = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

Sachant que $c^2 = \frac{\gamma_0}{1-b\rho} \frac{p}{\rho}$, $C = 2\sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0-1}} \left(\frac{1}{\gamma_0-1}\right)^{\frac{\gamma_0-1}{2\gamma_0}}$ et $\alpha = \frac{\gamma_0-1}{2\gamma_0}$, il reste à évaluer les coefficients

$$C\alpha p^{\alpha-1} \rho c^2 = \frac{\gamma_0 \alpha}{1-b\rho} \pi,$$

$$\frac{1}{\rho C\alpha p^{\alpha-1}} = \frac{\exp(s/(\gamma_0 c_v))}{1-b\rho} \frac{(\gamma_0-1)^{1/\gamma_0}}{\alpha C^{(\gamma_0-1)/(\gamma_0\alpha)}} \pi^{\frac{1-\alpha-1/\gamma_0}{\alpha}}.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0-1}{2} \frac{\pi}{1-b\rho} \nabla \cdot u = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{\gamma_0-1}{2} \frac{\pi}{1-b\rho} \exp\left(\frac{s}{\gamma_0 c_v}\right) \nabla \pi = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

De plus, $1/(1-b\rho) = 1 + b \left(\frac{\gamma_0-1}{4\gamma_0}\right)^{\frac{1}{\gamma_0-1}} \exp\left(\frac{-s}{\gamma_0 c_v}\right) \pi^{\frac{2}{\gamma_0-1}}$. Par conséquent, si l'on note

$$\nu = \frac{\gamma_0+1}{\gamma_0-1} > 1, \quad \text{et} \quad \tilde{b} = b \left(\frac{\gamma_0-1}{4\gamma_0}\right)^{\frac{1}{\gamma_0-1}}, \quad (1.3.2)$$

on obtient $\frac{\pi}{1-b\rho} = \pi(1 + \tilde{b}e^{-s/(\gamma_0 c_v)}\pi^{\nu-1})$, ce qui est bien défini pour tout $\pi \geq 0$ et en particulier pour $p = 0$, puisqu'on a supposé en (1.1.22) $\gamma_0 > 1$. La matrice associée au système (1.3.1) est

$$A(\xi, \pi, u, s) = \begin{pmatrix} u \cdot \xi & \frac{\gamma_0-1}{2} \frac{\pi}{1-b\rho} \xi^T & 0 \\ \frac{\gamma_0-1}{2} \frac{\pi}{1-b\rho} \exp\left(\frac{s}{\gamma_0 c_v}\right) \xi & u \cdot \xi I_d & 0 \\ 0 & 0 & u \cdot \xi \end{pmatrix}.$$

Elle est de nouveau « presque » symétrique, au sens où elle admet le symétriseur

$$S = \text{Diag}(1, \exp(-s/(\gamma_0 c_v)), \dots, \exp(-s/(\gamma_0 c_v)), 1) :$$

ceci est une matrice symétrique définie positive et SA est symétrique. Le symétriseur S est indépendant de p et en particulier reste défini positif même lorsque p (ou ρ) s'annule. Finalement, on a donc obtenu :

Proposition 1.3.2. *Pour un gaz de Van der Waals satisfaisant (1.1.22), le système des équations d'Euler (1.3.1) est symétrisable au sens de Friedrichs pour $(p, u, s) \in \mathcal{K}$, où \mathcal{K} est un compact inclus dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.*

Notons que dans les inconnues (π, u, s) , le système (1.3.1) s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0-1}{2} (1 + \tilde{b} \exp\left(\frac{-s}{\gamma_0 c_v}\right) \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \cdot u = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{\gamma_0-1}{2} \exp\left(\frac{s}{\gamma_0 c_v}\right) (1 + \tilde{b} \exp\left(\frac{-s}{\gamma_0 c_v}\right) \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \pi = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (1.3.3)$$

où ν et \tilde{b} sont définis par (1.3.2).

1.4 Condition de Rankine-Hugoniot

Pour terminer avec les bases techniques concernant les équations d'Euler, donnons quelques détails sur les conditions de Rankine-Hugoniot (cf. [14, p. 312]). Celles-ci interviennent lorsqu'on considère des solutions régulières par morceaux des systèmes de lois de conservation du premier ordre, vérifiant ces lois au sens faible. (Il est bien connu que les solutions classiques « explosent » en temps fini en général : ce sera même l'objet du chapitre 3). Pour les équations d'Euler (1.1.1), les conditions de Rankine-Hugoniot s'écrivent :

$$\begin{cases} -U[\rho] + [\rho(u \cdot \nu)] = 0, \\ -U[\rho u] + [\rho(u \cdot \nu)u + p\nu] = 0, \\ -U[\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e] + [(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e)(u \cdot \nu) + p(u \cdot \nu)] = 0, \end{cases} \quad (1.4.1)$$

à travers une discontinuité de normale ν et de vitesse normale U . Les notations habituelles entre crochets $[\cdot]$ désignent des sauts entre les valeurs limites des quantités considérées de part et d'autre de la discontinuité.

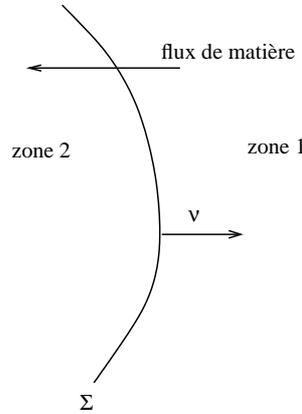


FIGURE 1.1 – Surface de discontinuité Σ entre les zones 1 et 2.

Une solution comportant une discontinuité est généralement appelée *choc* lorsque U est distinct de la vitesse du fluide de part et d'autre de la surface de discontinuité. On conviendra de numérotter les deux zones que sépare la discontinuité de sorte que le vecteur ν va de la zone 2 vers la zone 1 (voir Figure 1.1) : aussi, la zone 1 est la zone *devant le choc* en suivant le fluide si $U - (u_i \cdot \nu)$ ($i = 1$ ou 2) est positif (et c'est la zone *derrière le choc* si $U - (u_i \cdot \nu)$ est négatif). En effet $U - (u_1 \cdot \nu)$ et $U - (u_2 \cdot \nu)$ sont de même signe d'après la première équation de (1.4.1) et s'ils sont positifs c'est que le choc se déplace, dans un référentiel lié au fluide, de l'état 2 vers l'état 1. On notera $W_i = U - (u_i \cdot \nu)$, et l'on supposera sans perte de généralité que ces grandeurs sont positives, de sorte que la zone 1 désignera toujours la zone devant le choc.

Quelques calculs classiques montrent que (1.4.1) équivaut à

$$[\rho W] = 0, \quad [p + \rho W^2] = 0, \quad \left[\rho W \left(\frac{1}{2} W^2 + e + \frac{p}{\rho} \right) \right] = 0. \quad (1.4.2)$$

Par la suite, on notera $\langle p \rangle = \frac{p_1 + p_2}{2}$ la moyenne des pressions de part et d'autre du choc et l'on posera $j = \rho_1 W_1 = \rho_2 W_2$ le flux de masse à travers la discontinuité. D'après l'hypothèse

faite précédemment on a $j \geq 0$. On obtient par la première équation $[W] = j \left[\frac{1}{\rho} \right]$ et par la deuxième équation $[p] + j^2 \left[\frac{1}{\rho} \right] = 0$. En combinant ces résultats avec la remarque que $[pW] = \langle p \rangle [W] + \langle W \rangle [p]$, la dernière équation de (1.4.2) devient $j \left([e] + \langle p \rangle \left[\frac{1}{\rho} \right] \right) = 0$. Si l'on suppose $j \neq 0$ — c'est-à-dire qu'on a vraiment un *choc* — la dernière condition s'écrit alors $[e] + \langle p \rangle \left[\frac{1}{\rho} \right] = 0$. Ainsi, pour un choc, (1.4.1) équivaut à l'existence de $j \neq 0$ tel que

$$[W] = j \left[\frac{1}{\rho} \right], \quad [p] + j^2 \left[\frac{1}{\rho} \right] = 0, \quad [e] + \langle p \rangle \left[\frac{1}{\rho} \right] = 0. \quad (1.4.3)$$

Arrivé à ce point, il est assez naturel de se demander sous quelles conditions un choc détend ou comprime le fluide. D'après la relation $[p] = -j^2[v]$, on voit que $[p]$ et $[v]$ sont de signes opposés, ce qui signifie qu'il est équivalent de faire baisser la pression et d'augmenter le volume. Pour déterminer si une discontinuité est expansive ou compressive, il faut donc regarder le signe de $[p]$ ou $[\rho]$ indifféremment. Cependant, cela dépend du signe de j : pour $j > 0$, le fluide traverse l'interface de la zone 2 vers la zone 1. D'autre part, $j > 0$ implique que la vitesse du fluide est inférieure à la vitesse de la discontinuité dans la direction de la normale. C'est-à-dire que dans un référentiel lié au fluide, se déplaçant à la vitesse $(u_1 \cdot \nu)\nu$, Σ se propage dans la même direction que ν .

On introduit maintenant les *nombres de Mach*

$$M_i = \frac{U - (u_i \cdot \nu)}{c_i} = \frac{W_i}{c_i}, \quad (1.4.4)$$

qui représentent les vitesses relatives du choc de part et d'autre de la discontinuité dans un référentiel lié au fluide par rapport à la vitesse du son. Si $M_i > 1$, on dira que l'état i est *supersonique* ; on dira qu'il est *subsonique* si $M_i < 1$. La condition classique d'admissibilité (condition de choc de Lax) s'écrit alors (voir par exemple [14, p.409])

$$M_2 < 1, \quad M_1 > 1.$$

Exemple des gaz de Van der Waals. On note ici $M = M_1$ et $m = M_2$. On veut exprimer W_2/c_1 , $x = \rho_2/\rho_1$ et $z = c_2/c_1$ en fonction de M et ρ_1 dans le cas d'un gaz de Van der Waals polytropique, où l'on a $p = \frac{\rho(1-b\rho)}{\gamma_0} c^2$ et $e = \frac{(1-b\rho)^2}{\gamma_0(\gamma_0-1)} c^2$. Ces calculs généralisent ceux de G. B. Whitham [143, chap. 6], effectués dans le cas d'un gaz parfait. De plus $j = \rho_1 c_1 M$. En remplaçant j , p , e par leurs expressions en fonction de ρ et c , (1.4.3) devient :

$$\begin{aligned} \frac{W_2}{c_1} &= \frac{M}{x}, \\ (1 - b\rho_1) - z^2 x (1 - b\rho_1 x) + \gamma_0 M^2 \frac{x-1}{x} &= 0, \\ \frac{(1 - b\rho_1)^2}{\gamma_0 - 1} - \frac{(1 - b\rho_1 x)^2}{\gamma_0 - 1} z^2 + \frac{x-1}{2x} \left(1 - b\rho_1 + x(1 - b\rho_1 x) z^2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

La résolution de ce système nous donne

$$\frac{W_2}{c_1} = \frac{M^2(\gamma_0 - 1 + 2b\rho_1) + 2(1 - b\rho_1)}{M(\gamma_0 + 1)}, \quad (1.4.5)$$

$$x = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M^2(\gamma_0 + 1)}{M^2(\gamma_0 - 1 + 2b\rho_1) + 2(1 - b\rho_1)}, \quad (1.4.6)$$

$$z^2 = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 = \frac{(M^2(\gamma_0 - 1 + 2b\rho_1) + 2(1 - b\rho_1))^2}{M^2(\gamma_0 + 1)^2} \frac{2\gamma_0 M^2 - (\gamma_0 - 1)}{(M^2(\gamma_0 - 1) + 2)}. \quad (1.4.7)$$

On peut également déduire de ces expressions le rapport de pressions $\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma_0 M^2 - (\gamma_0 - 1)}{\gamma_0 + 1}$ ainsi que le nombre de Mach par rapport à la zone 2 :

$$m = \frac{U - u_2 \cdot \nu}{c_2} = \frac{c_1 W_2}{c_2 c_1} = \sqrt{\frac{M^2(\gamma_0 - 1) + 2}{2\gamma_0 M^2 - (\gamma_0 - 1)}}. \quad (1.4.8)$$

En particulier, on voit que $M > 1$ implique $m < 1$, et réciproquement $M < 1$ implique $m > 1$. En effet :

$$\begin{aligned} m - 1 &= \sqrt{\frac{M^2(\gamma_0 - 1) + 2}{2\gamma_0 M^2 - (\gamma_0 - 1)}} - 1 \\ &= \frac{(\gamma_0 + 1)(1 - M^2)}{\sqrt{2\gamma_0 M^2 - (\gamma_0 - 1)}(\sqrt{2\gamma_0 M^2 - (\gamma_0 - 1)} + \sqrt{M^2(\gamma_0 - 1) + 2})}. \end{aligned}$$

On dit que le choc est *fort* si $U \gg u_1$, auquel cas on a aussi $p_2 \gg p_1$ et $M \gg 1$. En faisant tendre U vers $+\infty$, on obtient :

$$u_2 \cdot \nu \sim \frac{2U(1 - b\rho_1)}{\gamma_0 + 1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \sim \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1 + 2b\rho_1}, \quad p_2 \sim \frac{2\rho_1(1 - b\rho_1)U^2}{\gamma_0 + 1}.$$

On remarque notamment que le rapport des densités reste borné lorsque la vitesse du choc tend vers l'infini.

D'autre part, $M > 1$ implique $U > u_1 + c_1$ et l'on obtient grâce aux expressions précédentes

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1 c_1}(U - u_2 - c_2) &= M - \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \\ &= M \left(1 - \frac{1}{m}\right) \\ &= \frac{(\gamma_0 + 1)M(1 + M)(1 - M)}{\sqrt{M^2(\gamma_0 - 1) + 2}(\sqrt{2\gamma_0 M^2 - (\gamma_0 - 1)} + \sqrt{M^2(\gamma_0 - 1) + 2})} \\ &< 0, \end{aligned}$$

et finalement,

$$u_2 + c_2 > U > u_1 + c_1, \quad (1.4.9)$$

ce qui sont les inégalités de choc de Lax.

Chapitre 2

Solutions régulières

2.1 Existence locale

Sous condition de symétrisabilité, le problème de Cauchy pour les équations d'Euler compressibles

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \nabla \rho + \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{\rho} \nabla s = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

avec des conditions initiales

$$\begin{cases} \rho(0, x) = \rho_0(x), \\ u(0, x) = u_0(x), \\ s(0, x) = s_0(x), \end{cases} \quad (2.1.2)$$

suffisamment régulières, est connu pour admettre une solution locale unique. Plus précisément, pour une donnée initiale « sans vide », on a le résultat classique suivant, que l'on peut déduire de résultats abstraits [53, 77, 87] (voir aussi [14, p.399]) grâce à la symétrisation décrite au paragraphe 1.3.1.

Théorème 2.1.1. *On considère les équations d'Euler (1.1.1) munies d'une équation d'état incomplète $p = p(\rho, e)$ vérifiant $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$ sur un ouvert \mathcal{V} de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, borné dans les directions s et ρ . Soient $(\bar{\rho}_0, \bar{u}_0, \bar{s}_0) \in \mathcal{V}$ et $m > 1 + d/2$. Si $(\rho_0, u_0, s_0) \in (\bar{\rho}_0, \bar{u}_0, \bar{s}_0) + \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)$ prend ses valeurs dans un compact inclus dans \mathcal{V} , alors il existe un temps $T > 0$ et une unique solution classique $(\rho, u, s) \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+2})$ au problème de Cauchy pour la donnée initiale (ρ_0, u_0, s_0) . De plus $(\rho - \bar{\rho}_0, u - \bar{u}_0, s - \bar{s}_0) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+2})) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbf{H}^{m-1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+2}))$.*

La symétrisation de T. Makino, S. Ukai & S. Kawashima [100] (valable pour les gaz parfaits polytropiques) qu'on a étendu par la Proposition 1.3.2 au cas des gaz de Van der Waals, est utile pour montrer d'autre part l'existence locale de solutions régulières comportant éventuellement des zones de vide.

Théorème 2.1.2. *On considère un gaz de Van der Waals avec c_v constant tel que $\gamma_0 \in]1, 3]$. Soit*

$$\pi_0 = 2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \left(\frac{\rho_0}{1 - b\rho_0} \right)^{(\gamma_0 - 1)/2} \exp\left(\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0 c_v} s_0\right),$$

où $\rho_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3; [0, 1/b])$. On définit aussi $\nu = \frac{\gamma_0+1}{\gamma_0-1}$, $\tilde{b} = b \left(\frac{\gamma_0-1}{4\gamma_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_0-1}}$. On suppose que $(\pi_0, u_0, s_0) \in \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)$ pour $m > 1 + \frac{d}{2}$. Alors il existe $T > 0$ et une unique solution $(\pi, u, s) \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ au problème de Cauchy pour

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0-1}{2} (1 + \tilde{b} \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \cdot u & = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \frac{\gamma_0-1}{2} \exp\left(\frac{s}{\gamma_0 c_v}\right) (1 + \tilde{b} \exp\left(\frac{-s}{\gamma_0 c_v}\right) \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \pi & = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s & = 0, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

satisfaisant la donnée initiale (π_0, u_0, s_0) . De plus,

$$(\pi, u, s) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+2})) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbf{H}^{m-1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+2})).$$

On montre plus loin (Proposition 2.1.4) que si $\operatorname{div} u \in \mathbf{L}^\infty$ et $\pi_0 \geq 0$, alors π est positif pour tout temps $t \in [0, T]$, ce qui nous permet de définir ρ de la façon suivante

$$\rho = \frac{1}{b} \left(1 - \frac{1}{1 + \tilde{b} \exp\left(\frac{-s}{\gamma_0 c_v}\right) \pi^{\frac{2}{\gamma_0-1}}} \right).$$

En particulier, $0 \leq \rho < 1/b$ tant que la solution est bien définie.

J.-Y. Chemin montre dans [27] un théorème similaire pour les gaz parfaits polytropiques mais en se plaçant dans l'espace de Sobolev uniformément local \mathbf{H}_{ul}^m pour $m > 1 + d/2$, \mathbf{H}_{ul}^m étant l'ensemble des $u \in \mathbf{H}_{loc}^m$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, en notant $\varphi_x(y) = \varphi(x - y)$, on a $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|\varphi_x u\|_{\mathbf{H}^m} < \infty$. L'hypothèse sur les conditions initiales est alors $(\rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}, u_0, s_0) \in \mathbf{H}_{ul}^m$, ce qui n'impose aucun comportement particulier à l'infini pour ρ_0 , u_0 et s_0 , contrairement à l'espace de Sobolev normal.

2.1.1 Cas de la symétrie sphérique

Lorsque les conditions initiales sont invariantes par rotation, on montre que les solutions régulières du système (2.1.1) associées à ces conditions initiales le sont également. En effet, soit $R \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ une matrice de rotation. Si $(\rho, u, s) \in \mathcal{C}^1$ est une solution classique de (1.1.1), alors (ρ^R, u^R, s^R) définie par $(\rho^R, u^R, s^R)(t, x) = (\rho, R^{-1}u, s)(t, Rx)$ l'est aussi, et ces deux solutions ont la même condition initiale si celle-ci est aussi invariante par rotation¹. Par unicité des solutions classiques, $(\rho^R, u^R, s^R) = (\rho, u, s)$, pour toute matrice de rotation R . Par conséquent, $\rho(x) = \rho(|x|e_1)$, et $s(x) = s(|x|e_1)$ sont des fonctions de $r = |x|$ seulement. Pour u , on remarque que la norme de $u(x)$ est constante sur les sphères, c'est-à-dire qu'il existe μ telle que $|u(x)| = \mu(|x|)$. On suppose qu'il existe $r_0 > 0$ tel que $\mu(r_0) > 0$ et on considère $\tilde{u} : x \mapsto \frac{|x|}{\mu(r_0)} u(r_0 \frac{x}{|x|})$. L'application \tilde{u} vérifie alors : $|\tilde{u}(x)| = |x|$ et $\tilde{u}(Rx) = R\tilde{u}(x)$ pour tout $R \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$. Soit $y \in \mathbb{R}^d$, on peut trouver $R_y \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ tel que $R_y \tilde{u}(y) = y$. On introduit ensuite \hat{u} tel que $\hat{u}(x) = R_y \tilde{u}(x)$, qui vérifie $\hat{u}(y) = y$. De plus, pour tout $R \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on a $\hat{u}(Rx) = R_y R \tilde{u}(x)$.

En dimension 2, toutes les rotations commutent et on peut en déduire $\hat{u}(Rx) = R\hat{u}(x)$. Or, pour tout $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que $|z| = |y|$, il existe $R_z \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$, tel que $z = R_z y$. Par conséquent

$$\hat{u}(z) = \hat{u}(R_z y) = R_z \hat{u}(y) = R_z y = z.$$

1. On verra d'autre part au paragraphe 2.2.3.A, par une méthode plus analytique, que les équations d'Euler sont invariantes par les transformations $(t, x, \rho, u, s) \mapsto (t, Rx, \rho, Ru, s)$.

Ainsi, \hat{u} est l'identité sur tout cercle de \mathbb{R}^2 , donc $\hat{u} = \text{Id}$ dans tout l'espace, ce qui revient à dire

$$u(r_0 \frac{x}{|x|}) = \mu(r_0) R_y^{-1} \frac{x}{|x|},$$

ce qui signifie que u échange les cercles et est une rotation sur chaque cercle. On ne peut pas conclure que u est radiale en dimension 2 sans argument supplémentaire. Par exemple, elle peut être azimutale.

En dimension 3, on peut étudier \tilde{u} de la même façon que précédemment dans le plan $P_{x,y}$ généré par x et $y \in \mathbb{R}^3$. On trouve donc qu'il existe $R_{x,y} \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ tel que $\tilde{u} = R_{x,y}$ sur $P_{x,y}$. Par conséquent, \tilde{u} est linéaire sur $P_{x,y}$ et $\tilde{u}(x+y) = \tilde{u}(x) + \tilde{u}(y)$. Comme ceci est vrai pour tout $x, y \in \mathbb{R}^3$, cela signifie que \tilde{u} est linéaire dans tout l'espace. Ainsi, \tilde{u} est une application linéaire de \mathbb{R}^3 qui commute avec toutes les rotations.

Or, en dimension 3, on peut trouver une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$, ainsi qu'un vecteur propre réel $e_1 \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels on a $u(e_1) = \lambda e_1$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Il existe alors $R \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ tel que $x/|x| = R e_1$. Comme u commute avec R , on obtient

$$u(x) = u(|x| R e_1) = |x| R u(e_1) = |x| \lambda R e_1 = \lambda x.$$

Ainsi, \tilde{u} est une homothétie, et $|\tilde{u}(x)| = |x|$ impose finalement $\tilde{u} = \text{Id}$. On obtient donc, pour tout $r > 0$,

$$|x| u(r \frac{x}{|x|}) = \mu(r) x,$$

c'est-à-dire que u est nécessairement radiale.

Ainsi, dans le cas de données initiales à symétrie sphérique dans \mathbb{R}^3 , la solution est aussi à symétrie sphérique et les variables ρ, μ, s ne dépendent que de $r = |x|$ en espace.

Proposition 2.1.1. *Si les conditions initiales du problème de Cauchy pour le système (1.1.1) sont régulières et invariantes par rotation dans \mathbb{R}^3 (cas de la symétrie sphérique), les solutions régulières associées le seront aussi et il existe alors $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{s}) \in \mathcal{C}^0([0, T[\times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^3)$ telles que*

$$\rho(t, x) = \tilde{\rho}(t, |x|), \quad u(t, x) = \tilde{u}(t, |x|) \frac{x}{|x|}, \quad s(t, x) = \tilde{s}(t, |x|).$$

En supposant $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{s}) \in \mathcal{C}^1([0, T[\times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^3)$, les équations d'Euler en variables (ρ, u, s) (voir le système (2.1.1)) se réduisent pour $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{s})$ à :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} + \partial_r (\tilde{\rho} \tilde{u}) + \frac{2\tilde{\rho} \tilde{u}}{r} = 0, \\ \partial_t \tilde{u} + \tilde{u} \partial_r \tilde{u} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \partial_r (p(\tilde{\rho}, \tilde{s})) = 0, \\ \partial_t \tilde{s} + \tilde{u} \partial_r \tilde{s} = 0. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

On voit de plus que, pour que (ρ, u, s) soit \mathcal{C}^1 , il faut en fait demander un peu plus que $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{s}) \in \mathcal{C}^1$. Tout d'abord, la forme de $u(t, x) = \tilde{u}(t, |x|) \frac{x}{|x|}$ impose de demander $\tilde{u}(t, 0) = 0$ pour que $u(t, \cdot)$ soit continue en 0. Regardons maintenant les dérivées. On

obtient

$$\begin{aligned}\nabla\rho(t,x) &= \partial_r\tilde{\rho}(t,|x|)\frac{x}{|x|}, \\ \nabla s(t,x) &= \partial_r\tilde{s}(t,|x|)\frac{x}{|x|}, \\ \nabla u(t,x) &= \partial_r\tilde{u}\frac{x\otimes x}{|x|^2} + \tilde{u}\left(\frac{1}{|x|}\text{Id} - \frac{1}{|x|^3}x\otimes x\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, on demande $\partial_r\tilde{\rho}(t,0) = 0$, $\partial_r\tilde{s}(t,0) = 0$ et $\partial_r\tilde{u}(t,0) = 0$. Plus généralement, si $(\rho, u, s) \in \mathcal{C}^k$ pour $k \geq 2$, on demande que les dérivées d'ordre 1 à k de $\tilde{\rho}$, \tilde{s} , \tilde{u} s'annulent à l'origine. En effet, pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, de taille k , au sens $|\alpha|_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_d = k$, la formule de dérivation des fonctions composées donne,

$$\partial^\alpha(\tilde{\rho} \circ |x|) = \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{\beta_1+\dots+\beta_j=\alpha \\ |\beta_i|_1=b_i \geq 1}} c_{\alpha,\beta} \partial_r^j \tilde{\rho} \partial^{\beta_1}|x| \dots \partial^{\beta_j}|x| = c_k \partial_r^k \tilde{\rho} \frac{x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}}{|x|^k} + t.o.i..$$

En supposant que les termes d'ordre inférieur s'annulent en $x = 0$, on obtient $\partial_r^k \tilde{\rho}(t,0) = 0$.

2.1.2 Estimation du temps d'existence

Comme le montre l'exemple des lois de conservation scalaires 1D (voir G. B. Whitham [143, pp. 21–22]), les solutions classiques ne sont pas globales en général, et l'on sait précisément estimer le temps d'existence en fonction de la donnée initiale. Ainsi, pour une équation du type $\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$, où $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, associée à la condition initiale u_0 , on a (voir [120, p. 31])

Proposition 2.1.2. *Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ bornée ainsi que sa dérivée. Si $f' \circ u_0$ est croissante, alors le temps maximal d'existence est $T_{\text{ex}} = +\infty$. Si $\frac{d}{dx}(f' \circ u_0)$ prend des valeurs strictement négatives, alors le temps maximal d'existence est fini et donné par $T_{\text{ex}} = -1/\inf\left(\frac{d}{dx}(f' \circ u_0)\right)$.*

Concernant l'estimation du temps d'existence des solutions régulières pour les systèmes 1D, les travaux fondateurs sont dûs à P. D. Lax [85], T. P. Liu [93], T. T. Li [88, 89] et L. Hörmander [72]. Concernant plus précisément la dynamique des fluides compressibles, on doit des avancées à T. C. Sideris [125, 126], J.-Y. Chemin [27, 28], et P. Godin [56, 57, 58, 59]. L'état de l'art est décrit plus en détails ci-après.

Il existe en fait deux types d'approches, suivant la symétrisation adoptée, ce qui permet d'admettre ou non des zones de vide. En outre, des outils plus spécifiques sont utilisés pour étudier le cas d'écoulements à symétrie cylindrique ou sphérique.

On exposera donc séparément les résultats correspondant au cas où la densité s'annule et au cas où la densité ne s'annule pas, puis on développera les résultats obtenus dans le cas de la symétrie sphérique, sous l'hypothèse que la densité ne s'annule pas.

2.1.2.A Cas avec vide

T. Makino, S. Ukai et S. Kawashima [100] introduisirent en 1986 un symétriseur pour un gaz suivant la loi des gaz parfaits polytropiques (voir la Définition 1.1.5) permettant

de traiter les zones de vide (voir le paragraphe 1.1.2). Ils complétèrent l'existence locale de solutions régulières dans ce cas par un résultat de non-existence globale :

Théorème 2.1.3. *Soit (ρ, u, s) une solution régulière sur $[0, T[$ du système (2.1.1) avec conditions initiales (ρ_0, u_0, s_0) . Si (ρ_0, u_0) est à support compact et ρ_0 n'est pas identiquement nulle, alors la solution ne peut pas être globale, c'est-à-dire que nécessairement $T < \infty$.*

On n'a donc jamais existence globale lorsque la densité et la vitesse sont à support compact pour un gaz parfait polytropique.

Dans [27], J.-Y. Chemin étudie également les gaz parfaits polytropiques admettant éventuellement des zones de vide et utilise la symétrisation de T. Makino, S. Ukai & S. Kawashima pour montrer un résultat d'existence locale pour des données initiales dans un espace un peu plus grand, à savoir \mathbf{H}_{ul}^m pour $m > 1 + d/2$, dont la définition est rappelée page 30. Il fournit de plus un résultat d'explosion en dimension 1 pour un gaz parfait polytropique isentropique :

Théorème 2.1.4. *On considère un gaz parfait polytropique isentropique en dimension 1. Soient (ρ_0, u_0) les conditions initiales associées au système*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{p'(\rho)}{\rho} \nabla \rho = 0. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

On suppose que $(\rho_0^{(\gamma-1)/2}, u_0) \in \mathbf{H}_{ul}^m$ pour $m > 3/2$ et que $x^2 \rho_0 \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|u_0(x)| \leq \frac{2}{\gamma-1} c_0(x) = 2\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \rho_0^{(\gamma-1)/2}(x)$, alors le temps maximal d'existence de la solution régulière est fini.

La condition $|u_0(x)| \leq \frac{2}{\gamma-1} c_0(x)$ signifie que $M_0 = \frac{u_0}{c_0} \leq \frac{2}{\gamma-1}$. Ainsi, pour $\gamma \geq 2$ cette condition signifie que le fluide est subsonique.

2.1.2.B Cas sans vide

En 1985, T. C. Sideris [125] donne un critère d'explosion pour les gaz parfaits polytropiques lorsque la densité reste strictement positive :

Théorème 2.1.5. *Soit $T > 0$ tel que $(\rho, u, s) \in \mathcal{C}^1([0, T[\times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+2})$ soit la solution de (2.1.1) pour un gaz parfait polytropique avec $\gamma > 1$, muni de conditions initiales régulières*

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= \bar{\rho} + \rho_0(x), & u(0, x) &= u_0(x), & s(0, x) &= \bar{s} + s_0(x) \\ &\text{avec } \rho_0, s_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}), & u_0 &\in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \\ &\text{et } \operatorname{Supp}(\rho_0), \operatorname{Supp}(u_0), \operatorname{Supp}(s_0) &\subset B(0, R_0). \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

On introduit les fonctions

$$\begin{aligned} q_0(r) &= \int_{|x|>r} \frac{1}{|x|} (|x| - r)^2 \rho_0(x) \, dx, \\ q_1(r) &= \int_{|x|>r} \frac{1}{|x|^3} (|x|^2 - r^2) (\bar{\rho} + \rho_0(x)) x \cdot u_0(x) \, dx. \end{aligned}$$

S'il existe $R_1 < R_0$ tel que pour tout $r \in]R_1, R_0[$,

$$q_0(r) > 0 \quad \text{et} \quad q_1(r) \geq 0$$

et si $s_0(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, alors le temps d'existence T est fini.

Ainsi, il suffit que, en moyenne dans un voisinage du bord de la boule $B(0, R_0)$, le gaz soit comprimé (de densité supérieure à $\bar{\rho}$) et que la vitesse soit dirigée vers l'extérieur pour que le temps d'existence soit fini.

Un résultat de T. C. Sidéris [126] en 1997 précise le temps d'existence de certaines solutions en dimension 2 d'espace, pour le système isentropique (2.1.5) pour un gaz parfait polytropique avec $\gamma > 1$. Il montre que si les conditions initiales sont une perturbation d'ordre ε de l'état constant $(\bar{\rho}, 0)$, alors le temps d'existence de la solution associée est au moins en $O(1/\varepsilon)$. Pour l'énoncé précis, on considère le système (2.1.5) dans le cas $d = 2$. On se donne des conditions initiales

$$\rho(0, x) = \bar{\rho} + \rho_0(\varepsilon, x), \quad u(0, x) = u_0(\varepsilon, x), \quad (2.1.7)$$

et l'on introduit les champs de vecteurs $x \cdot \nabla$ donnant la dérivée radiale, $\Omega = x^\perp \cdot \nabla$ donnant la dérivée angulaire, où $(x_1, x_2)^\perp = (-x_2, x_1)$. On définit également $\tilde{\Omega}$ par $\tilde{\Omega}u = \Omega u - u^\perp$, et l'on note $\Lambda = (\nabla, \Omega, x \cdot \nabla)$, $\tilde{\Lambda} = (\nabla, \tilde{\Omega}, x \cdot \nabla)$ et

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\Lambda^m(\mathbb{R}^2) &= \left\{ \rho \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2); \|\rho\|_{\mathbf{H}_\Lambda^m} = \sum_{a \in \mathbb{N}^4, |a|_1 \leq m} \|\Lambda^a \rho\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right\}, \\ \tilde{\mathbf{H}}_\Lambda^m(\mathbb{R}^2) &= \left\{ u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2); \|u\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\Lambda^m} = \sum_{a \in \mathbb{N}^4, |a|_1 \leq m} \|\tilde{\Lambda}^a u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Théorème 2.1.6. *Soient $T > 0$, $m \geq 7$ et $(\rho_0, u_0) \in \mathbf{H}_\Lambda^m \times \tilde{\mathbf{H}}_\Lambda^m$. S'il existe $C_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on a*

$$\|\rho_0(\varepsilon, \cdot)\|_{\mathbf{H}_\Lambda^m} + \|u_0(\varepsilon, \cdot)\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\Lambda^m} \leq C_0 \varepsilon,$$

alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ le problème isentropique (ou isotherme) (2.1.5)–(2.1.7) pour un gaz parfait polytropique avec $\gamma > 1$ admet une unique solution $u \in \cap_{j \in [0, m]} \mathcal{C}^j \left([0, \frac{T}{\varepsilon}[; \mathbf{H}_\Lambda^{m-j} \times \tilde{\mathbf{H}}_\Lambda^{m-j} \right)$.

Ce résultat est obtenu en découplant le problème en une partie incompressible et une partie irrotationnelle et en estimant le temps d'existence pour chaque partie.

Par ailleurs, il existe un critère abstrait² d'explosion connu pour les systèmes généraux (cf. par exemple [99, p. 47]) :

Théorème 2.1.7. *Soit E un ouvert de \mathbb{R}^M . On considère une équation du type*

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^N \partial_j F_j(u) = G(t, x, u),$$

où $F_j \in \mathcal{C}^\infty(E; \mathbb{R}^M)$, $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times E; \mathbb{R}^M)$ sont régulières. Soit $u_0 \in \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^N; E)$, pour $m > 1 + d/2$ une condition initiale et $u \in \mathcal{C}([0, T[; \mathbf{H}^m)$ la solution maximale du problème de Cauchy associé. Alors $T < \infty$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite

1. $\|\partial_t u\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^\infty} \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow T$,
2. $u(t, x)$ sort de tout compact de E lorsque $t \rightarrow T$.

2. analogue du théorème « des bouts » pour les EDO

Un résultat dû à J.-Y. Chemin [28] en 1990 précise le critère d'explosion général ci-dessus pour les fluides compressibles.

Théorème 2.1.8. *Soit $(\rho, u, s) \in \mathcal{C}([0, T^*]; \mathbf{H}^m)$, pour $m > 1 + d/2$, une solution maximale du système (1.1.1) pour un fluide quelconque tel que $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$ pour tout $(\rho, s) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $\rho \geq \bar{\rho} > 0$. On a alors*

- soit $T^* = +\infty$;
- soit $T^* < +\infty$ et

$$\int_0^{T^*} \left(\|\operatorname{div} u(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\omega_u(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\nabla \rho(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\nabla s(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} \right) dt = +\infty,$$

où l'on a noté $\omega_u = \frac{\nabla u - \nabla u^T}{2}$ la partie antisymétrique de la matrice $\nabla u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{i,j}$, appelé tenseur de tourbillon.

2.1.2.C Cas de la symétrie sphérique

En 1999, Q. Qiu & H. Yin [147] donnent une estimation du temps d'existence du problème isentropique (2.1.5) en dimension 3, dans le cas de données initiales à symétrie sphérique de la forme

$$\rho(0, x) = \bar{\rho} + \varepsilon \rho_0(|x|), \quad u(0, x) = \varepsilon u_0(|x|)x, \quad (2.1.8)$$

où $\bar{\rho} > 0$ est une constante, $\rho_0, u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ sont à support dans $] -R_0, R_0[$.

Théorème 2.1.9. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que, pour un gaz de loi d'état $p : \rho \mapsto p(\rho) \in \mathcal{C}^\infty$ strictement croissante, le problème (2.1.4) avec les données initiales (2.1.8) admet une unique solution $(\rho, u) \in \mathcal{C}^\infty([0, T_\varepsilon] \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^4)$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln T_\varepsilon) = \tau_*$, où*

$$\tau_* = \frac{-2\bar{c}/(\bar{\rho}c'(\bar{\rho}) + \bar{c})}{\min_{|r| \leq R_0} \left[r^2 \partial_r u_0(r) + \frac{\bar{c}}{\bar{\rho}} (r \partial_r \rho_0(r) + \rho_0(r)) \right]}, \quad \text{avec} \quad \bar{c} = c(\bar{\rho}). \quad (2.1.9)$$

De plus, T_ε est le temps maximal d'existence de (ρ, u) .

Pour montrer cela, Yin et Qiu font la remarque que dans le cas de la symétrie sphérique, la vitesse est irrotationnelle. On peut donc introduire un potentiel φ de sorte que $u = \nabla \varphi$. Le potentiel φ satisfait alors une équation des ondes non-linéaire, ce qui permet, en utilisant des théorèmes généraux sur ce type d'équation, d'obtenir des bornes inférieure et supérieure sur le temps d'existence.

En particulier ce théorème affirme que les solutions régulières associées à des données initiales à symétrie sphérique proches (et distinctes) de la condition initiale constante $(\bar{\rho}, 0)$, avec $\bar{\rho} > 0$, explosent en temps fini, de l'ordre de $e^{\tau_*/\varepsilon}$. Ce temps d'existence est beaucoup plus grand que l'estimation de $O(1/\varepsilon)$ donnée par le théorème 2.1.6. Ce type de résultat est d'ailleurs parfait appelé « existence presque globale » (voir [80]).

Remarque 2.1.10. On peut exprimer τ_* sous la forme

$$\tau_* = \frac{-2/\mathcal{G}}{\min_{|r| \leq R_0} \left[r^2 \partial_r u_0(r) + \frac{\bar{c}}{\bar{\rho}} (r \partial_r \rho_0(r) + \rho_0(r)) \right]}.$$

Par exemple, pour un gaz de Van der Waals, $\mathcal{G} = \frac{\gamma_0+1}{2(1-b\bar{\rho})}$ tend vers $\frac{\gamma_0+1}{2}$ lorsque $\bar{\rho}$ tend vers 0 et

$$\begin{aligned} \frac{\bar{c}}{\bar{\rho}} &= \frac{\sqrt{\gamma_0(\gamma_0-1)}}{(1-b\bar{\rho})^2} \left(\frac{\bar{\rho}}{1-b\bar{\rho}} \right)^{\frac{\gamma_0-3}{2}} \exp\left(\frac{s}{2c_v}\right) \\ &\sim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} \sqrt{\gamma_0(\gamma_0-1)} \bar{\rho}^{\frac{\gamma_0-3}{2}} \exp\left(\frac{s}{2c_v}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\gamma_0 < 3$ et s'il existe $r \leq R_0$ tel que $\partial_r(r\rho_0(r)) \neq 0$, alors $\tau_* \rightarrow 0$ lorsque $\bar{\rho}$ tend vers 0.

Un résultat semblable au Théorème 2.1.9 a été montré par P. Godin [59] en 2005 pour un gaz parfait polytropique et le système complet de Cauchy pour (2.1.1) :

Théorème 2.1.11. *Pour un gaz parfait polytropique. Soit $\varepsilon > 0$. On considère le problème (2.1.1) et des conditions initiales*

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= \bar{\rho} + \varepsilon (\rho_0(|x|) + \varepsilon \rho_1(|x|, \varepsilon)) , \\ u(x, 0) &= \varepsilon (u_0(|x|) + \varepsilon u_1(|x|, \varepsilon)) \frac{x}{|x|} , \\ s(x, 0) &= \bar{s} + \varepsilon (s_0(|x|) + \varepsilon s_1(|x|, \varepsilon)) , \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

où les fonctions ρ_j, u_j, s_j ($j = 0$ ou 1) sont des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ en $r = |x|$ et à support inclus dans $[0, R_0]$. S'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$ il existe $C_\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \quad \left| \partial_x^\alpha \rho_1(|x|, \varepsilon) \right| + \left| \partial_x^\alpha \left(u_1(|x|, \varepsilon) \frac{x}{|x|} \right) \right| + \left| \partial_x^\alpha s_1(|x|, \varepsilon) \right| \leq C_\alpha, \quad (2.1.11)$$

alors pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que (2.1.1)–(2.1.10) admet une unique solution $(\rho, u, s) \in \mathcal{C}^\infty([0, T_\varepsilon] \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^5)$ et de plus T_ε vérifie $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\varepsilon \ln T_\varepsilon) = \tau_*$, où τ_* est défini par

$$\tau_* = \frac{-2/\mathcal{G}}{\min_{|r| \leq R_0} \left[r^2 \partial_r u_0(r) + \frac{\bar{c}}{\bar{\rho}} (r \partial_r \rho_0(r) + \rho_0(r)) \right]}.$$

La démonstration repose sur la construction d'une suite de solutions approchées à partir de solutions isentropiques et de solutions stationnaires. Comme dans Qiu & Yin [147] un potentiel φ tel que $u = \nabla \varphi$ est introduit pour traiter le cas isentropique, ce potentiel satisfaisant alors une équation des ondes non-linéaires.

2.1.3 Positivité de la densité

Pour les solutions régulières, la préservation du signe de ρ est assurée par la théorie des lois de conservation scalaires appliquée à la loi de conservation de la masse.

Proposition 2.1.3. *Soit $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{s}) \in \mathcal{C}^1([0, T_{\text{ex}}] \times \mathbb{R}^d)$ une solution régulière du problème de Cauchy (2.1.1)–(2.1.2) associée à des conditions initiales régulières $(\rho_0, u_0, s_0) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$. Si $\text{div } \bar{u} \in \mathbf{L}^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ pour tout $T < T_{\text{ex}}$, $\rho_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et si $\rho_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, alors pour tout $t \in [0, T_{\text{ex}}[$,*

$$\rho(t, x) \geq 0.$$

Preuve. Considérons le problème

$$\begin{cases} \partial_t w + \operatorname{div}(w\bar{u}) = 0, \\ w(0, x) = w_0(x). \end{cases} \quad (2.1.12)$$

Soit $T_0 < T_{\text{ex}}$. Puisque $\bar{u} \in \mathcal{C}^1([0, T_{\text{ex}}] \times \mathbb{R}^d)$ est régulière et $\operatorname{div} \bar{u} \in \mathbf{L}^\infty([0, T_0] \times B(0, M))$ pour tout $M > 0$, on peut appliquer le théorème de Kružkov [81] selon lequel, pour toute donnée initiale $w_0 \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, il existe une unique solution faible entropique $w \in \mathcal{C}([0, T_0]; \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$; de plus, si l'on considère deux conditions initiales $w_{0,1}$ et $w_{0,2} \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ satisfaisant $w_{0,1} \leq w_{0,2}$ presque partout dans \mathbb{R}^d , alors les solutions faibles entropiques associées w_1 et w_2 satisfont pour tout $t \in [0, T_0]$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $w_1(t, x) \leq w_2(t, x)$.

Puisque $\rho_0 \in \mathcal{C}^1$, on a $w_{0,1} = \rho_0 \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$ et une solution de (2.1.12) associée à cette condition initiale est naturellement $\bar{\rho}$, et comme $\bar{\rho} \in \mathcal{C}^1([0, T_{\text{ex}}] \times \mathbb{R}^d)$, $\bar{\rho}$ est aussi une solution faible entropique. Par unicité des solutions entropiques, on a donc $w_1 = \bar{\rho}$. D'autre part, $w_2 \equiv 0$ est la solution de (2.1.12) associée à la condition initiale $w_{0,2} \equiv 0$. Ainsi, le théorème de Kružkov de comparaison des solutions se lit dans ce cas, pour tous $(t, x) \in [0, T_0] \times \mathbb{R}^d$,

$$\rho_0 \geq 0 \quad \implies \quad \bar{\rho} \geq 0. \quad (2.1.13)$$

Cette inégalité est valable pour tous $T_0 < T_{\text{ex}}$, elle est donc valable pour tous $(t, x) \in [0, T_{\text{ex}}] \times \mathbb{R}^d$. \square

Ainsi, en partant d'une densité positive, la densité reste positive tant que la solution régulière existe.

Remarque 2.1.12. On peut également se servir de la méthode des caractéristiques pour obtenir une expression de la solution au problème de Cauchy (2.1.12). En supposant que $\nabla \bar{u}$ est borné, on obtient :

$$\rho(t, x) = \rho_0(X(0; t, x)) \exp\left(-\int_0^t \operatorname{div} \bar{u}(\tau, X(\tau; t, x)) d\tau\right) > 0,$$

où X est solution du problème de Cauchy

$$\frac{dX}{dt} = \bar{u}(t, X), \quad X(t_0; t_0, x_0) = x_0,$$

cette solution étant globale grâce à l'hypothèse $\nabla \bar{u}$ borné.

De même, on prouve que, pour un gaz de Van der Waals à c_v constant, la variable $\pi = 2\sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0-1}} \left(\frac{p}{\gamma_0-1}\right)^{\frac{\gamma_0-1}{2\gamma_0}}$ introduite au paragraphe 1.3.2 reste positive si elle l'est initialement. Ceci implique en particulier que si $\rho_0 < 1/b$, alors, tant que la solution régulière existe, cette propriété sera vérifiée.

Proposition 2.1.4. *On considère un gaz de Van der Waals à c_v constant. On pose $\pi = 2\sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0-1}} \left(\frac{p}{\gamma_0-1}\right)^{\frac{\gamma_0-1}{2\gamma_0}}$, $\nu = \frac{\gamma_0+1}{\gamma_0-1}$ et $\tilde{b} = b \left(\frac{\gamma_0-1}{4\gamma_0}\right)^{\frac{1}{\gamma_0-1}}$. Soit $(\bar{\pi}, \bar{u}, \bar{s}) \in \mathcal{C}^1([0, T_{\text{ex}}] \times \mathbb{R}^d)$ une solution régulière de*

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0-1}{2}(1 + \tilde{b} \exp(\frac{-s}{\gamma_0 c_v}) \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \cdot u = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \frac{\gamma_0-1}{2} \exp(\frac{-s}{\gamma_0 c_v}) (1 + \tilde{b} \exp(\frac{-s}{\gamma_0 c_v}) \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \pi = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (2.1.14)$$

satisfaisant les conditions initiales

$$\pi(0, x) = \pi_0(x), \quad u(0, x) = u_0(x), \quad s(0, x) = s_0(x),$$

avec $(\rho_0, u_0, s_0) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $s_0 \in \mathbf{L}^\infty$. Si $\operatorname{div} \bar{u} \in \mathbf{L}^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ pour tout $T < T_{\text{ex}}$, si $\pi_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et si $0 \leq \rho_0(x) < 1/b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, alors pour tout $t \in [0, T_{\text{ex}}]$, $\pi \geq 0$. On peut alors définir ρ et on a

$$0 \leq \rho(t, x) < 1/b.$$

Preuve. Soit $T_0 < T_{\text{ex}}$. On introduit le problème

$$\partial_t w + \operatorname{div}(w\bar{u}) = g(t, x, w) = \left(1 - \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} \exp(\frac{-\bar{s}}{\gamma_0 c_v}) w^{\nu-1})\right) w \operatorname{div} \bar{u}, \quad (2.1.15)$$

$$w(0, x) = w_0(x).$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de Kružkov [81, 120], la seule hypothèse à vérifier est que $g(t, x, w) - w \operatorname{div}(\bar{u}(t, x)) = -\frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{-\bar{s}/(\gamma_0 c_v)} w^{\nu-1}) w \operatorname{div} \bar{u}$ est bornée uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}^d$, ce qui est assuré par nos hypothèses. En effet, w est alors considérée comme une variable et sa dépendance en x n'est pas prise en compte.

De plus, $\pi_0 \in \mathbf{L}^\infty$, par conséquent la solution régulière $\bar{\pi}$ coïncide avec la solution entropique w_1 de (2.1.15) associée à $w_{0,1} = \pi_0$.

D'autre part, la solution entropique w_2 de (2.1.15) associée à la condition initiale $w_{0,2} \equiv 0$ est la fonction constante égale à 0. D'après le théorème de comparaison des solutions de Kružkov $w_{0,1} \geq w_{0,2}$ implique donc $w_1 \geq w_2$ pour tous $(t, x) \in [0, T_0] \times \mathbb{R}^d$, c'est-à-dire $\bar{\pi}(t, x) \geq 0$ pour tous $(t, x) \in [0, T_0] \times \mathbb{R}^d$. La formule

$$\rho = \frac{1}{b} \left(1 - \frac{1}{1 + \tilde{b} \exp(\frac{-s}{\gamma_0 c_v}) \pi^{\frac{2}{\gamma_0 - 1}}} \right)$$

nous permet de conclure. □

2.2 Cas particuliers d'existence globale

Malgré les résultats d'explosion en temps fini cités plus haut (Théorème 2.1.4 notamment) il existe des données initiales fournissant des solutions régulières (ou régulières par morceaux) globales. Nous allons en donner quelques exemples avant d'énoncer des résultats généraux.

2.2.1 Solutions stationnaires

Les solutions stationnaires, par définition indépendantes de la variable de temps t , sont naturellement globales en temps. On peut par exemple chercher des solutions stationnaires de (2.1.1) à symétrie plane, cylindrique ou sphérique. Ce sont les solutions indépendantes de t de (2.1.4), c'est-à-dire de

$$\begin{cases} \partial_r (r^{d-1} \rho u) = 0, \\ u \partial_r u + \frac{\partial_r p(\rho, s)}{\rho} = 0, \\ u \partial_r s = 0, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où d vaut 1, 2 ou 3 selon la symétrie requise (respectivement plane, cylindrique ou sphérique). Le système (2.2.1) équivaut à

$$u \equiv 0, \quad p(\rho, s) = p_0, \quad s \text{ quelconque},$$

ou bien, en-dehors des régions où u s'annule

$$s = \bar{s}, \quad u = \frac{\kappa}{\rho r^{d-1}}, \quad \frac{u^2}{2} + h(\rho, \bar{s}) = K,$$

où \bar{s} , κ et K sont des constantes et $h(\rho, s) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{y} \frac{\partial p}{\partial \rho}(y, s) dy$. Si $d = 1$, les seules solutions stationnaires sont donc les constantes, sauf pour une loi de pression telle que $\rho^2 h(\rho, \bar{s}) = K - \frac{\kappa^2}{2}$. Si $d = 2$ ou 3, les seules solutions stationnaires sont obtenues pour $u \equiv 0$.

D'autre part, Y. Liu & C. Zhu [95] trouvent des solutions stationnaires pour la forme lagrangienne des équations d'Euler pour un gaz parfait polytropique. En introduisant les coordonnées lagrangiennes³ $\tau = t$ et $\xi = \int_1^r r^{d-1} \rho(t, r) dr$, les équations d'Euler deviennent en posant $v = 1/(r^2 \rho)$

$$\begin{cases} \partial_{\tau} v - \partial_{\xi} u = 0, \\ \partial_{\tau} u - \frac{\gamma(\gamma-1)v^{-\gamma-1}}{r^{(d-1)(\gamma-1)}} e^{s/c_v} \partial_{\xi} v \\ \quad = \frac{1}{r^{(d-1)(\gamma-1)}} \left(r\gamma(\gamma-1)(d-1) e^{\frac{s}{c_v}} v^{1-\gamma} - (\gamma-1)v^{-\gamma} e^{\frac{s}{c_v}} \partial_{\xi} s \right), \\ \partial_{\tau} s = 0. \end{cases}$$

Pour ce système, les équations stationnaires s'obtiennent sous la forme : $\bar{u} = cste$, $\bar{s} \in \mathcal{C}^1$ quelconque et

$$\bar{v}(\xi) = \bar{v}(0) \left[1 + d\bar{v}(0) \int_0^{\xi} \exp\left(\frac{\bar{s}(y) - \bar{s}(0)}{\gamma}\right) dy \right]^{-(d-1)/d} \exp\left(\frac{\bar{s}(\xi) - \bar{s}(0)}{\gamma}\right).$$

On peut également chercher, en dimension 2, des solutions de la forme $\rho = g(r^2)$, $u = f(r^2)x^{\perp}$ (champ de vitesse azimutal) et $s = \bar{s}$, où \bar{s} est une constante [28]. L'équation $\text{div}(\rho u) = 0$ est alors toujours vérifiée et l'équation $u \cdot \nabla u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \bar{s})}{\partial \rho} \nabla \rho = 0$ se réduit à, puisque $(u \cdot \nabla)u = fu^{\perp}$,

$$\frac{c^2(g)}{g} g' = f^2.$$

Quelle que soit g fonction positive croissante ne s'annulant pas, on peut choisir f de sorte que la condition ci-dessus soit satisfaite : on obtient ainsi toute une famille de solutions stationnaires régulières.

2.2.2 Solutions à symétrie sphérique

S'inspirant de la « fonction potentielle de gravité d'Einstein » G. C. McVittie [102] puis P. L. Sachdev [116] ont décrit les solutions à symétrie sphérique des équations d'Euler compressibles isentropiques. Elles sont données en fonction d'un potentiel φ radial arbitraire par

$$\rho u = -\frac{\partial_r \partial_t \varphi}{\Delta \varphi}, \quad \rho = -\Delta \varphi, \quad p = P(t) - \partial_{tt}^2 \varphi + \frac{(\partial_r \partial_t \varphi)^2}{\Delta \varphi} + 2 \int \frac{(\partial_r \partial_t \varphi)^2}{r \Delta \varphi} dr,$$

où P est une fonction arbitraire (et $\Delta \varphi = \partial_{rr}^2 \varphi + \frac{2}{r} \partial_r \varphi$).

3. voir Tableaux A.7 et A.8, Annexe A

2.2.3 Solutions autosimilaires

La recherche de solutions autosimilaires a été intensément menée au milieu du XXème siècle [130, 131, 66]. Même si les solutions autosimilaires ont d'abord été étudiées d'un point de vue « ondes de choc » afin de modéliser une explosion (ce qui fut l'origine du modèle de Sedov-Taylor) ou une implosion, on peut également traiter ce type de solutions sur tout l'espace. Les premiers travaux dans ce domaine sont dûs à G. I. Taylor [130, 131], L. I. Sedov [119] (1959) ainsi que J. Von Neumann [62], G. Guderley [66], W. Chester, R. F. Chisnell & G. B. Whitham [31, 34, 33, 143], qui considèrent tous un gaz parfait polytropique. Des travaux plus récents concernent les gaz de Van der Waals, notamment C. C. Wu & P. H. Roberts [144].

L'existence de solutions autosimilaires se ramène à un problème d'EDO en une variable d'autosimilarité ξ , « combinaison » des variables d'espace r et de temps t , qui n'est pas connue a priori. On peut chercher ξ par des considérations dimensionnelles (voir le paragraphe 3.2) ou une approche algébrique fondée sur les groupes de Lie [108]. Cependant, on doit en général compléter ce travail par l'étude qualitative et numérique du système d'EDO pour déterminer la variable d'autosimilarité ξ adaptée au problème physique (explosion ou implosion).

2.2.3.A Groupes de transformation

On s'intéresse aux groupes de symétrie des équations, ce qui peut donner des informations utiles concernant la forme des solutions. L'article de J. Jena & V. D. Sharma [74] utilise la méthode des groupes de Lie, pour rechercher les invariants des équations d'Euler compressibles avec la loi de Van der Waals. Il s'agit d'une méthode systématique mais très technique. La connaissance de tous les groupes de symétrie leur permet de trouver toutes les formes possibles pour une éventuelle variable autosimilaire, ainsi que l'expression du rayon de la surface de discontinuité pour les ondes de choc autosimilaires.

La théorie se développe essentiellement en deux points, explicités dans l'ouvrage d'Ovsianikov [108] ou encore Olver [107]. On donne quelques idées concernant cette méthode :

1. Pour une variété, définie par un système d'équations « algébriques » au sens « pas différentielles » $\mathcal{F}(x) = 0$, on peut chercher les transformations à un paramètre $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, a) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, on a la relation :

$$\mathcal{F}(x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{F}(f(x, a)) = 0, \quad (2.2.2)$$

par la théorie des groupes de Lie à un paramètre. Cela revient à chercher un *générateur infinitésimal* $\zeta(x) = \partial_a f(x, 0)$. En dérivant la relation (2.2.2) par rapport à a , on voit que l'invariance par le groupe de transformation associé à ζ revient à $(\zeta \cdot \partial)\mathcal{F}(x) = 0$ pour tout x tel que $\mathcal{F}(x) = 0$, où la notation $\zeta \cdot \partial$ signifie :

$$\zeta \cdot \partial = \sum_i \zeta_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

2. Pour un système d'EDP (E), on utilise en plus la *théorie de la continuation*, qui permet de considérer à la fois les variables dites *indépendantes* (r et t dans notre cas) et les fonctions inconnues aussi appelées *variables dépendantes* (ρ , u et p) comme des variables de \mathbb{R}^k avec $k = 5$, ce qui permet de considérer le système d'EDP (E) comme

un système « algébrique ». On peut alors écrire (E) sous la forme :

$$\mathcal{F}(z) = 0$$

où $z = (t, r, \rho, u, p)$, z est la continuation première de z , dans laquelle les dérivées premières des fonctions ρ, u, p sont considérées comme des variables supplémentaires, et où $\mathcal{F} : Z_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

On interprète alors l'ensemble des solutions de (E) comme une variété, ensemble des zéros de \mathcal{F} dans un certain espace, dont on veut trouver les groupes d'invariance. On utilise pour cela la méthode des groupes de Lie donnée au premier point. Avec les mêmes notations, le problème revient alors à trouver ζ .

a) **Opérateur d'invariance.** Pour le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_r(\rho u) + \frac{(d-1)\rho u}{r} = 0, \\ \partial_t u + u \partial_r u + \frac{\partial_r p}{r} = 0, \\ \partial_t p + u \partial_r p - c^2(\partial_t \rho + u \partial_r \rho) = 0, \end{cases}$$

où $d = 2$ en symétrie cylindrique et $d = 3$ en symétrie sphérique, on a :

- deux variables (indépendantes) : r et t ,
- trois inconnues (variables dépendantes) : u , p et ρ ,
- des dérivées d'ordre un : $(u_t, u_r, p_t, p_r, \rho_t, \rho_r)$.

L'opérateur d'invariance (aussi appelé champ de vecteur généralisé [107, p. 295]) s'écrit alors :

$$\zeta \cdot \partial = \xi \partial_t + \eta \partial_r + \sigma \partial_u + \tau \partial_p + \omega \partial_\rho. \quad (2.2.3)$$

Le problème consiste à trouver ξ, η, σ, τ et ω tels que $(\zeta \cdot \partial)F(t, r) = 0$, où l'on a réécrit le système (2.1.4) sous la forme $\mathcal{F}(z) = 0$. Pour cela, on écrit la continuation première de l'opérateur d'invariance (2.2.3), ce qui permet de considérer les dérivées premières comme des variables supplémentaires. La continuation première suffit ici puisque le système (2.1.4) est d'ordre un. On appliquera ensuite cet opérateur à chacune des équations du système (2.1.4).

Tout d'abord, pour simplifier un peu les notations, on introduit l'opérateur D_1 , dans lequel apparaissent les opérateurs de dérivation totale D_t et D_r , opérateurs qui jouent un rôle particulièrement important dans la théorie de la continuation :

$$D_1 = \begin{pmatrix} D_t \\ D_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_t \\ u_r \end{pmatrix} \partial_u + \begin{pmatrix} p_t \\ p_r \end{pmatrix} \partial_p + \begin{pmatrix} \rho_t \\ \rho_r \end{pmatrix} \partial_\rho.$$

D'après [108, chap. 1] ou [107, p. 295], la continuation première (aussi appelé « prolongement ») de l'opérateur (2.2.3) s'écrit alors :

$$\zeta \cdot \partial = \xi \partial_t + \eta \partial_r + \sigma \partial_u + \tau \partial_p + \omega \partial_\rho + \sigma_t \partial_{u_t} + \sigma_r \partial_{u_r} + \tau_t \partial_{p_t} + \tau_r \partial_{p_r} + \omega_t \partial_{\rho_t} + \omega_r \partial_{\rho_r}$$

où :

$$\begin{aligned} \sigma_t &= D_t \sigma - u_t D_t \xi - u_r D_t \eta, \\ \sigma_r &= D_r \sigma - u_t D_r \xi - u_r D_r \eta, \\ \tau_t &= D_t \tau - p_t D_t \xi - p_r D_t \eta, \\ \tau_r &= D_r \tau - p_t D_r \xi - p_r D_r \eta, \\ \omega_t &= D_t \omega - \rho_t D_t \xi - \rho_r D_t \eta, \\ \omega_r &= D_r \omega - \rho_t D_r \xi - \rho_r D_r \eta. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

On peut en outre réécrire le système (2.1.4) sous la forme :

$$\begin{cases} \rho_t = -(u\rho_r + \frac{(d-1)\rho u}{r} + \rho u_r), \\ u_t = -(uu_r + \frac{1}{\rho}p_r), \\ p_t = -(c^2\frac{(d-1)\rho u}{r} + c^2\rho u_r + up_r). \end{cases}$$

Si on applique $\zeta \cdot \partial$ au système (2.1.4), on obtient donc :

$$\begin{cases} \omega_t + u\omega_r + \rho_r\sigma + \frac{(d-1)\omega u}{r} + \frac{(d-1)\rho\sigma}{r} - \frac{j\rho u\eta}{r^2} + \omega u_r + \rho\sigma_r = 0, \\ \sigma_t + u\sigma_r + \sigma u_r + \frac{1}{\rho}\tau_r - \frac{\omega}{\rho^2}p_r = 0, \\ \tau_t + u\tau_r + \sigma p_r - c^2(\omega_t + u\omega_r + \sigma\rho_r) \\ - \gamma_0 \left(\frac{\tau}{\rho(1-b\rho)} - \frac{p\omega(1-2b\rho)}{\rho^2(1-b\rho)^2} \right) (\rho_t + u\rho_r) = 0. \end{cases}$$

Il reste alors à développer tous les termes. De plus, dans la continuation première des inconnues, on a trois variables « libres » : u_r , p_r et ρ_r , et trois variables « dépendantes » : u_t , p_t et ρ_t : on peut en effet, grâce au système (2.1.4), écrire (ρ_t, u_t, p_t) en fonction de (ρ_r, u_r, p_r) . On peut ainsi supprimer toutes les occurrences des variables « dépendantes » dans le développement des équations.

b) Résultats. Tous calculs faits (voir Annexe C), on obtient :

Proposition 2.2.1 (Groupes de symétrie des équations d'Euler.). *Les groupes de symétrie du système (2.1.4), qui donnent les mouvements à symétrie plane ($j=0$), cylindrique ($j=1$) ou sphérique ($j=2$), d'un gaz de Van der Waals de covolume b , à coefficients calorimétriques constants, sont donnés dans le tableau 2.1.*

c) Interprétation. On voudrait, grâce à ces résultats, obtenir une variable d'autosimilarité. Si on considère le cas simple de l'équation $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$, sa solution u étant invariante par le changement d'échelle $(x, t) \rightarrow (\lambda x, \lambda t)$, il apparaît alors assez clairement que les solutions autosimilaires ne dépendront que de x/t .

Dans le cas plus compliqué des équations d'Euler pour un gaz de Van der Waals de coefficients calorimétriques constants, lorsque $b \neq 0$ et $d \neq 1$, les invariances par changement d'échelle sont :

$$(t, u, p) \rightarrow \left(\frac{t}{\lambda}, \lambda u, \lambda^2 p\right) \text{ et } (t, r) \rightarrow (\mu t, \mu r).$$

Ceci se vérifie évidemment en terme d'unités de mesure. Soient $r^* = \mu r$, $t^* = \frac{\mu t}{\lambda}$; on pose :

$$\begin{aligned} u_{\lambda, \mu}^*(r^*, t^*) &= \lambda u\left(\frac{r^*}{\mu}, \frac{\lambda t^*}{\mu}\right), \\ p_{\lambda, \mu}^*(r^*, t^*) &= \lambda^2 p\left(\frac{r^*}{\mu}, \frac{\lambda t^*}{\mu}\right), \\ \rho_{\lambda, \mu}^*(r^*, t^*) &= \rho\left(\frac{r^*}{\mu}, \frac{\lambda t^*}{\mu}\right). \end{aligned}$$

Ces fonctions vérifient les mêmes équations que (u, p, ρ) , pour tous λ, μ . Si de plus les conditions initiales sont aussi invariantes par changements d'échelles, et si le problème de Cauchy admet une solution unique, alors en fait $u_{\lambda, \mu}^*$ et $p_{\lambda, \mu}^*$ ne dépendent pas de (λ, μ) . D'où :

$$\rho(r, t) = \rho^*\left(\mu r, \frac{\mu t}{\lambda}\right), \quad u(r, t) = \frac{1}{\lambda} u^*\left(\mu r, \frac{\mu t}{\lambda}\right), \quad p(r, t) = \frac{1}{\lambda^2} p^*\left(\mu r, \frac{\mu t}{\lambda}\right).$$

En particulier, pour $\lambda = \frac{t}{\alpha r}$ et $\mu = \frac{1}{|t|^\alpha}$, on a : $\mu r = \frac{r}{|t|^\alpha}$ et $\frac{\mu t}{\lambda} = \alpha \frac{r}{|t|^\alpha}$. Ainsi, une possibilité de solution autosimilaire est donnée par

$$\xi = \frac{r}{|t|^\alpha}, \quad \rho = \rho_1 w(\xi), \quad u = \frac{\alpha r}{t} y(\xi), \quad p = \left(\frac{\alpha r}{t}\right)^2 \hat{p}(\xi), \quad (2.2.5)$$

où ρ_1 est une constante. La vitesse du son c s'exprime alors sous la forme $c^2 = \frac{\gamma_0 p}{\rho(1-b\rho)} = \left(\frac{\alpha r}{t}\right)^2 z(\xi)$. Ce résultat est énoncé dans [74] et [124, 112].

Générateurs	Transformations	Type
Cas $b \neq 0$ et $d \neq 1$:		
$\zeta_1 \cdot \partial = \partial_t$	$t \mapsto t + a$	1
$\zeta_2 \cdot \partial = t\partial_t + r\partial_r$	$(t, r) \mapsto (\lambda t, \lambda r)$	2
$\zeta_3 \cdot \partial = -t\partial_t + u\partial_u + 2p\partial_p$	$(t, u, p) \mapsto \left(\frac{t}{\lambda}, \lambda u, \lambda^2 p\right)$	2
Cas $b = 0$ et $d \neq 1$:		
$\zeta_1 \cdot \partial = \partial_t$	$t \mapsto t + a$	1
$\zeta_2 \cdot \partial = t\partial_t + r\partial_r$	$(t, r) \mapsto (\lambda t, \lambda r)$	2
$\zeta_3 \cdot \partial = -t\partial_t + u\partial_u + 2p\partial_p$	$(t, u, p) \mapsto \left(\frac{t}{\lambda}, \lambda u, \lambda^2 p\right)$	2
$\zeta_4 \cdot \partial = t\partial_t - u\partial_u + 2\rho\partial_\rho$	$(t, u, \rho) \mapsto \left(\lambda t, \frac{u}{\lambda}, \lambda^2 \rho\right)$	2
Cas $b \neq 0$ et $d = 1$:		
$\zeta_1 \cdot \partial = \partial_t$	$t \mapsto t + a$	1
$\zeta_2 \cdot \partial = t\partial_t + r\partial_r$	$(t, r) \mapsto (\lambda t, \lambda r)$	2
$\zeta_3 \cdot \partial = -t\partial_t + u\partial_u + 2p\partial_p$	$(t, u, p) \mapsto \left(\frac{t}{\lambda}, \lambda u, \lambda^2 p\right)$	2
$\zeta_4 \cdot \partial = t\partial_r + \partial_u$	$r \mapsto r + at, u \mapsto u + a$	3
$\zeta_5 \cdot \partial = \partial_r$	$r \mapsto r + a$	1
Cas $b = 0$ et $d = 1$:		
$\zeta_1 \cdot \partial = \partial_t$	$t \mapsto t + a$	1
$\zeta_2 \cdot \partial = t\partial_t + r\partial_r$	$(t, r) \mapsto (\lambda t, \lambda r)$	2
$\zeta_3 \cdot \partial = -t\partial_t + u\partial_u + 2p\partial_p$	$(t, u, p) \mapsto \left(\frac{t}{\lambda}, \lambda u, \lambda^2 p\right)$	2
$\zeta_4 \cdot \partial = t\partial_r + \partial_u$	$r \mapsto r + at, u \mapsto u + a$	3
$\zeta_5 \cdot \partial = \partial_r$	$r \mapsto r + a$	1
$\zeta_6 \cdot \partial = t\partial_t - u\partial_u + 2\rho\partial_\rho$	$(t, u, \rho) \mapsto \left(\lambda t, \frac{u}{\lambda}, \lambda^2 \rho\right)$	2

FIGURE 2.1 – Groupes de symétrie des équations d'Euler pour un gaz de Van der Waals à coefficient calorifique c_v constant. Types : 1. translation, 2. changement d'échelle, 3. changement de référentiel galiléen.

2.2.3.B Changement de variable

On réécrit le système avec une seule variable d'espace $r = |x|$ en les variables (ρ, u, c^2) . On remarque en effet que $\left. \frac{\partial c^2}{\partial s} \right|_{\rho} = -v^2 \frac{\partial^2 p}{\partial v \partial s}$, ce qui donne pour un gaz de Van der Waals

$$\left. \frac{\partial c^2}{\partial s} \right|_{\rho} = \gamma_0(\gamma_0 - 1)v^2(v - b)^{-\gamma_0 - 1} \frac{1}{c_v} \exp\left(\frac{s}{c_v}\right) > 0.$$

Ainsi, $(\rho, s) \mapsto (\rho, c^2)$ est bien un changement de variable pour la loi de Van der Waals et on obtient,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_r(\rho u) + \frac{(d-1)\rho u}{r} = 0, \\ \partial_t u + u \partial_r u + \frac{1-b\rho}{\gamma_0} \partial_r(c^2) + \frac{c^2}{\gamma_0 \rho} (1-2b\rho) \partial_r \rho = 0, \\ \partial_t(c^2) + u \partial_r(c^2) - c^2 \frac{1-\gamma_0-2b\rho}{1-b\rho} \left(\partial_r u + \frac{(d-1)u}{r} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (2.2.6)$$

où $d = 1, 2$ ou 3 selon la symétrie considérée : plane, cylindrique ou sphérique.

De même que R. F. Chisnell [33] ou G. B. Whitham [143], on introduit les inconnues adimensionnées (w, y, z) suggérées par (2.2.5), à savoir : $\rho = \rho_1 w$, $u = \frac{\alpha r}{t} y$ et $c^2 = \left(\frac{\alpha r}{t}\right)^2 z$, où α est une constante à déterminer. Le système (2.2.6) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{t}{\alpha} \partial_t w + ry \partial_r w + rw \partial_r y + dwy = 0, \\ \frac{t}{\alpha} \partial_t y + \frac{rz}{\gamma_0 w} (1-2b\rho_1 w) \partial_r w + ry \partial_r y + \frac{1}{\gamma_0} (1-b\rho_1 w) r \partial_r z \\ \quad = -y \left(y - \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{2z}{\gamma_0} (1-b\rho_1 w), \\ \frac{t}{\alpha} \partial_t z - z \frac{1-\gamma_0-2b\rho_1 w}{1-b\rho_1 w} r \partial_r y + ry \partial_r z = -2z \left(y - \frac{1}{\alpha} \right) + dyz \frac{1-\gamma_0-2b\rho_1 w}{1-b\rho_1 w}. \end{array} \right. \quad (2.2.7)$$

On introduit $R : t \mapsto R(t)$ une fonction de t à déterminer et on lui associe la variable $\xi = \frac{r}{R(t)}$, qui est adimensionnée si $R(t)$ a la dimension d'une longueur.

On effectue alors le changement de variables $(t, r) \rightarrow (\tau, \xi)$, où $\tau = t$. On a alors $r \partial_r = \xi \partial_{\xi}$ et $\partial_t = \partial_{\tau} - \xi \frac{R'}{R} \partial_{\xi}$. Le système (2.2.7) devient, dans les variables (τ, ξ) ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau}{\alpha} (\partial_{\tau} w - \xi \frac{R'}{R} \partial_{\xi} w) + y \xi \partial_{\xi} w + w \xi \partial_{\xi} y + dwy = 0, \\ \frac{\tau}{\alpha} (\partial_{\tau} y - \xi \frac{R'}{R} \partial_{\xi} y) + \frac{z}{\gamma_0 w} (1-2b\rho_1 w) \xi \partial_{\xi} w + y \xi \partial_{\xi} y + \frac{1-b\rho_1 w}{\gamma_0} \xi \partial_{\xi} z \\ \quad = -y \left(y - \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{2z}{\gamma_0} (1-b\rho_1 w), \\ \frac{\tau}{\alpha} (\partial_{\tau} z - \xi \frac{R'}{R} \partial_{\xi} z) - z \frac{1-\gamma_0-2b\rho_1 w}{1-b\rho_1 w} \xi \partial_{\xi} y + y \xi \partial_{\xi} z \\ \quad = dyz \frac{1-\gamma_0-2b\rho_1 w}{1-b\rho_1 w} - 2z \left(y - \frac{1}{\alpha} \right). \end{array} \right. \quad (2.2.8)$$

La dépendance en τ apparaît alors seulement sous la forme $t \partial_t = \tau \partial_{\tau} - \xi \tau \frac{R'}{R} \partial_{\xi}$. Considérant des solutions ne dépendant que de ξ et pas de τ , les dérivées en τ s'annulent et la dépendance

en τ disparaît si et seulement si $\tau \frac{R'}{R}$ est une fonction de ξ seulement. Si on recherche une variable d'autosimilarité en tant que produit de puissances ou puissances fractionnaires de r et t , on est amené à considérer que R est une puissance fractionnaire de t . Par conséquent, on obtient $\tau \frac{R'}{R} = \alpha'$, où $\alpha' \in \mathbb{R}$ est une constante. L'expression de R est alors de la forme : $R(t) = \mathcal{A}|t|^{\alpha'}$, où \mathcal{A} et α' sont des constantes, ce qui est bien l'expression proposée par (2.2.5).

On réécrit maintenant le système (2.2.8) sous forme matricielle, pour les fonctions $U = (w, y, z)$ indépendantes de τ et avec $R(t) = \mathcal{A}|t|^{\alpha'}$.

$$\xi A(w, y, z) \times \frac{dU}{d\xi} = B(U), \quad (2.2.9)$$

où

$$A(w, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{w}(y - \frac{\alpha'}{\alpha}) & 1 & 0 \\ \frac{z}{\gamma_0 w}(1 - 2b\rho_1 w) & y - \frac{\alpha'}{\alpha} & \frac{1}{\gamma_0}(1 - b\rho_1 w) \\ 0 & -z \frac{1 - \gamma_0 - 2b\rho_1 w}{1 - b\rho_1 w} & y - \frac{\alpha'}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (2.2.10)$$

$$B(w, y, z) = \begin{pmatrix} -dy \\ -y(y - \frac{1}{\alpha}) - \frac{2z}{\gamma_0}(1 - b\rho_1 w) \\ -2z(y - \frac{1}{\alpha}) + dyz \frac{1 - \gamma_0 - 2b\rho_1 w}{1 - b\rho_1 w} \end{pmatrix}. \quad (2.2.11)$$

Le système (2.2.9) s'écrit également sous forme autonome $A(U) \frac{dU}{d\zeta} = B(U)$ avec $\zeta = \ln \xi$. En revanche il n'est pas résolu (voir [7]) car la matrice $A(U)$ n'est pas inversible partout : son déterminant est en effet

$$\det A(w, y, z) = \frac{-1}{w} (y - \frac{\alpha'}{\alpha}) \underbrace{(z - (y - \frac{\alpha'}{\alpha}))^2}_{=:\Delta(y,z)},$$

et s'annule donc sur la surface $\{\Delta(y, z) = 0\}$ (cylindre parabolique) et sur le plan $\{y = 1\}$. Les déterminants de Cramer du système $AX = B$ sont :

$$\begin{aligned} \Delta_1(w, y, z) &= -y(y - \frac{\alpha'}{\alpha}) \left(y(d-1) + \frac{1}{\alpha} - d\frac{\alpha'}{\alpha} \right) + \frac{2z}{\gamma_0} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) (1 - b\rho_1 w), \\ \Delta_2(w, y, z) &= \frac{1}{w} (y - \frac{\alpha'}{\alpha}) \left[\frac{2z}{\gamma_0} (1 - b\rho_1 w) \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) - y(y - \frac{\alpha'}{\alpha}) \left(y - \frac{1}{\alpha} \right) + dyz \right], \\ \Delta_3(w, y, z) &= \frac{z}{w} \left[\frac{2z}{\gamma_0} \left(\gamma_0 (y - \frac{\alpha'}{\alpha}) - (1 - 2b\rho_1 w) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \right) - 2(y - \frac{\alpha'}{\alpha})^2 \left(y - \frac{1}{\alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \gamma_0 - 2b\rho_1 w}{1 - b\rho_1 w} y(y - \frac{\alpha'}{\alpha}) \left(y(d-1) + \frac{1}{\alpha} - d\frac{\alpha'}{\alpha} \right) \right], \end{aligned}$$

et dans les régions de l'espace des phases où le déterminant $\det A(w, y, z)$ est non-nul, le système (2.2.10) équivaut à

$$\frac{dU}{d\zeta} = \frac{1}{\det A(w, y, z)} \begin{pmatrix} \Delta_1(w, y, z) \\ \Delta_2(w, y, z) \\ \Delta_3(w, y, z) \end{pmatrix}. \quad (2.2.12)$$

Pour savoir si cette singularité est traversée ou non dans l'espace des phases par la courbe intégrale de la solution de (2.2.9), on s'intéressera par exemple aux valeurs limites des inconnues w , y et z , lorsque ξ s'approche des bords de son domaine de définition. Si on cherche des solutions traversant $\{\Delta = 0\}$, pour que la singularité soit factice, il faut passer par un point (w, y, z) pour lequel Δ , Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 s'annulent simultanément (ce qui revient à $B(U) \in \text{Im}A(U)$). On observe que

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{2}{\gamma_0} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) (1 - b\rho_1 w) \Delta(y, z) + \left(y - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) Q(w, y), \\ \Delta_2 &= \frac{1}{w} \left(y - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \left[\left(\frac{2}{\gamma_0} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) (1 - b\rho_1 w) + dy \right) \Delta(y, z) - \left(y - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) Q(w, y) \right], \\ \Delta_3 &= \frac{z}{w} \left[2 \left(\left(y - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) - \frac{1}{\gamma_0} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) (1 - 2b\rho_1 w) \right) \Delta(y, z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - \gamma_0 - 2b\rho_1 w}{1 - b\rho_1 w} \left(y - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) Q(w, y) \right],\end{aligned}$$

avec

$$Q(w, y) = \frac{2}{\gamma_0} (1 - b\rho_1 w) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \left(y - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) - y \left(y(d-1) + \frac{1}{\alpha} - d\frac{\alpha'}{\alpha} \right). \quad (2.2.13)$$

Par conséquent Δ , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 s'annulent simultanément si et seulement si $y = \frac{\alpha'}{\alpha}$ et $z = 0$, ou bien $Q(w, y) = 0$ et $\Delta(y, z) = 0$, le système s'écrivant $\frac{dU}{d\xi} = b(U)$, où $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ avec

$$\begin{aligned}b_1(U) &= \frac{w}{y - \frac{\alpha'}{\alpha}} \left[\frac{2}{\gamma_0} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) (1 - b\rho_1 w) - \left(y - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \frac{Q}{\Delta} \right], \\ b_2(U) &= \frac{2}{\gamma_0} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) (1 - b\rho_1 w) - dy + \left(y - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \frac{Q}{\Delta}, \\ b_3(U) &= \frac{z}{y - \frac{\alpha'}{\alpha}} \left[\frac{2}{\gamma_0} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) (1 - 2b\rho_1 w) - 2 \left(y - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \gamma_0 - 2b\rho_1 w}{1 - b\rho_1 w} \left(y - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \frac{Q}{\Delta} \right].\end{aligned}$$

Pour des solutions planes, on a $d = 1$ et dans ce cas $Q = 0$ implique $\alpha' = 1$ ou $y = \frac{\alpha'}{\alpha} \frac{1 - b\rho_1 w}{1 - b\rho_1 w - \gamma_0/2}$. Si $\alpha' \neq 1$, les surfaces d'équation $\Delta = 0$ et $y = \frac{\alpha'}{\alpha} \frac{1 - b\rho_1 w}{1 - b\rho_1 w - \gamma_0/2}$ ne s'intersectent pas pour $y \geq 0$, $z \geq 0$ et $0 \leq w \leq 1/(b\rho_1)$, cette dernière contrainte provenant de la condition sur la densité $0 \leq \rho < 1/b$. Il n'existe donc pas de solution régulière traversant la surface d'équation $\Delta = 0$. Si l'on veut une telle solution, on est donc amené à choisir $\alpha' = 1$ et la solution s'écrit alors

$$\xi = \frac{r}{t}, \quad w = w_0, \quad y = \xi^{-1} y_0, \quad z = \xi^{-2} z_0,$$

où w_0, y_0 et z_0 sont des constantes. On retrouve les ondes planes de détente habituelles : $\rho = \rho_1 w_0$, $u = y_0$, $c^2 = z_0$.

Remarque 2.2.1. Dans le cas d'un gaz parfait, on a $b = 0$ et, en choisissant $\alpha = \alpha'$, w n'apparaît pas dans le quotient

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{z}{y-1} \frac{\left(\frac{2}{\gamma_0} (1 - 1/\alpha) + 2(y-1) \right) \Delta + (\gamma_0 - 1)(y-1)Q}{\left(\frac{2}{\gamma_0} (1 - 1/\alpha) + dy \right) \Delta - (y-1)Q},$$

où $Q = \frac{2}{\gamma_0}(\frac{1}{\alpha} - 1)(y - 1) - y(y(d - 1) + \frac{1}{\alpha} - d)$ ne dépend pas de w . Le problème se découple alors. Tout d'abord, on intègre cette équation qui donne une expression de $z(y)$; puis, en reportant dans $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{dw}{dy}$ et dans $\frac{\Delta}{\Delta_2} = \frac{d(\ln(\xi))}{dy}$, on peut obtenir $w(y)$ et de $\xi(y)$ par quadrature (voir L. D. Landau & E. M. Lifschitz [83, pp. 569–580]).

2.2.3.C Conditions initiales

On cherche le comportement lorsque $t \rightarrow 0$ des solutions autosimilaires éventuellement trouvées par intégration de (2.2.9). Simultanément, on voudrait connaître le comportement de (w, y, z) lorsque ξ tend vers 0 ou l'infini, selon le signe de α . Plus précisément, on voudrait savoir de quel côté du cylindre parabolique d'équation $z = (y - 1)^2$, le point $(w, y, z)(\xi)$ se trouve lorsque ξ tend vers 0 ou $+\infty$.

a) Coefficient d'autosimilarité positif. En examinant les courbes d'équation $r = \frac{1}{\alpha}\xi t^\alpha$ pour $\xi \in [0, +\infty[$ et $\alpha > 0$ fixés (voir Figure 2.2), on voit que $\rho(t, x) = \rho_1 w(\xi)$ est singulière en $(0, 0)$, à moins d'être constante, puisque toutes les courbes d'équation $r = \xi t^\alpha$ passent par le point $(0, 0)$.

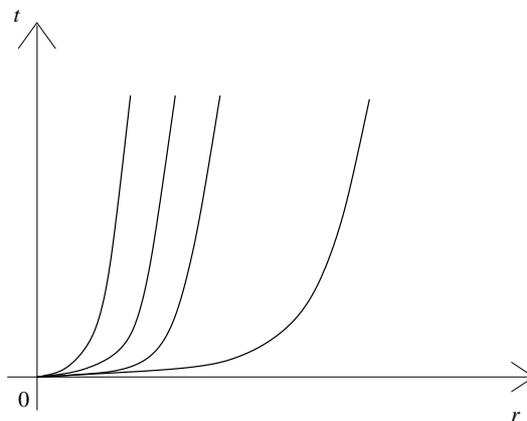


FIGURE 2.2 – Courbes $r = \xi t^\alpha$ pour $\alpha < 1$.

Pour retrouver les conditions initiales des solutions autosimilaires obtenues, on est amené à faire tendre t vers 0, à $r > 0$ fixé, ce qui revient à faire tendre ξ vers $+\infty$. Or $\rho_1 w(\xi) = \rho(t, r)$, $\xi^{1/\alpha} y(\xi) = \alpha^{1/\alpha-1} r^{1/\alpha-1} u(t, r)$ et $\xi^{2/\alpha} z(\xi) = \alpha^{2/\alpha-2} r^{2/\alpha-2} c^2(t, r)$. Par conséquent, on obtient quand $t \rightarrow 0$, pour $r > 0$ fixé :

$$\begin{aligned} \rho_1 \lim_{\xi \rightarrow \infty} w(\xi) &= \rho_0(r), \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} (\xi^{1/\alpha} y(\xi)) &= \alpha^{1/\alpha-1} r^{1/\alpha-1} u_0(r), \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} (\xi^{2/\alpha} z(\xi)) &= \alpha^{2/\alpha-2} r^{2/\alpha-2} c_0^2(r). \end{aligned}$$

Afin que les conditions initiales ne soient pas identiquement infinies ou nulles, on impose donc

$$w \sim_{\xi \rightarrow \infty} 1, \quad y \sim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^{-1/\alpha} y_0, \quad z \sim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^{-2/\alpha} z_0, \quad (2.2.14)$$

où y_0, z_0 sont des constantes. Ainsi, $(w, y, z)(\infty) = (1, 0, 0)$. Les conditions (2.2.14) impliquent en retour d'avoir des conditions initiales de la forme :

$$\rho_0 \equiv \rho_1 \quad u_0 = \alpha^{1-1/\alpha} r^{1-1/\alpha} y_0, \quad c_0^2 = \alpha^{2-2/\alpha} r^{2-2/\alpha} z_0,$$

pour tout $r > 0$. Pour $\alpha \in [0, 1[$, les conditions initiales sont donc singulières en 0. Elles sont régulières sur \mathbb{R}_+ pour $\alpha \geq 1$.

b) Coefficient d'autosimilitude négatif. Pour $\alpha < 0$, la singularité en 0 de ρ disparaît et le même calcul que précédemment nous donne, en faisant tendre ξ vers 0 au lieu de $+\infty$, à $r > 0$ fixé

$$w \sim_{\xi \rightarrow 0} 1, \quad y \sim_{\xi \rightarrow 0} \xi^{-1/\alpha} y_0, \quad z \sim_{\xi \rightarrow 0} \xi^{-2/\alpha} z_0, \quad (2.2.15)$$

où y_0, z_0 sont des constantes. On obtient alors $(w, y, z)(0) = (1, 0, 0)$ et les conditions (2.2.15) impliquent en retour d'avoir des conditions initiales de la forme :

$$\rho_0 \equiv \rho_1 \quad u_0 = \alpha^{1-1/\alpha} r^{1-1/\alpha} y_0, \quad c_0^2 = \alpha^{2-2/\alpha} r^{2-2/\alpha} z_0.$$

Et $\alpha < 0$ implique qu'il n'y a pas de singularité en 0.

Proposition 2.2.2. *Si $\alpha \geq 1$, $\rho(t, r)$ est singulière en $(t, r) = (0, 0)$, et les conditions initiales (ρ_0, u_0, c_0^2) sont régulières.*

Si $\alpha \in [0, 1[$, $\rho(t, r)$ est singulière en $(t, r) = (0, 0)$, et les conditions initiales (ρ_0, u_0, c_0^2) sont singulières en $r = 0$.

Si $\alpha < 0$, $\rho(t, r)$ n'est pas singulière en $(t, r) = (0, 0)$, et les conditions initiales (ρ_0, u_0, c_0^2) sont régulières.

D'autre part, pour $\alpha > 0$, $(w, y, z)(\infty) = (1, 0, 0)$ est sous le cylindre parabolique d'équation $\Delta = z - (y - 1)^2 = 0$, au sens où $z(\infty) - (y(\infty) - 1) \leq 0$.

Pour $\alpha < 0$, $(w, y, z)(0) = (1, 0, 0)$ est sous le cylindre parabolique d'équation $\Delta = z - (y - 1)^2 = 0$, au sens où $z(0) - (y(0) - 1) \leq 0$.

Dans tous les cas, un point de la courbe intégrale de la solution du système d'EDO (2.2.9) est sous le cylindre parabolique d'équation $\Delta = z - (y - 1)^2 = 0$.

2.3 Résultats généraux d'existence globale

Dans le cas de l'équation de Burgers $\partial_t u + u \partial_x u = 0$, les solutions sont globales pour des données initiales \mathcal{C}^1 croissantes (voir la Proposition 2.1.2). Par analogie, lorsque les conditions initiales tendent à disperser le gaz on s'attend à ce que le temps d'existence soit « grand » pour les équations d'Euler, ce qui est confirmé par les travaux de D. Serre [122] et M. Grassin [63].

2.3.1 Cas isentropique unidimensionnel

Les équations d'Euler isentropiques 1D ont l'avantage d'admettre des invariants de Riemann forts permettant de tirer parti de calculs le long des caractéristiques. D'après T. T. Li [88], on a un résultat d'existence globale abstrait pour les systèmes 2×2 en une dimension d'espace, qui généralise le cas de l'équation de Burgers.

Théorème 2.3.1. *On considère un système de deux équations à deux inconnues, en une dimension d'espace :*

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \lambda_1(w) \partial_x w_1 = 0, \\ \partial_t w_2 + \lambda_2(w) \partial_x w_2 = 0, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

en supposant que $\lambda_1 < \lambda_2$ et $\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} > 0$, $\frac{\partial \lambda_2}{\partial w_2} > 0$ pour $w \in \mathcal{W}$, un domaine de \mathbb{R}^2 . On se donne des conditions initiales

$$w_1(0, x) = w_{1,0}(x), \quad w_2(0, x) = w_{2,0}(x). \quad (2.3.2)$$

Si $\lambda_1, \lambda_2, w_{1,0}$ et $w_{2,0}$ sont des fonctions \mathcal{C}^1 , si $w_{1,0}$ et $w_{2,0}$ sont bornées, alors le problème de Cauchy (2.3.1)–(2.3.2) admet une unique solution globale $w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ sous la condition nécessaire et suffisante

$$w'_{1,0} \geq 0, \quad w'_{2,0} \geq 0. \quad (2.3.3)$$

De plus, on a en tout point $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\partial_x w_1 \geq 0$ et $\partial_x w_2 \geq 0$.

Preuve. Voir T. T. Li [88, pp. 35–41]. □

Pour les équations d'Euler isentropiques en une dimension d'espace, les invariants de Riemann s'expriment à l'aide de $H(\rho) = \int^\rho c(y)/y \, dy$. On vérifie en effet que le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_r(\rho u) + \frac{(d-1)\rho u}{r} = 0, \\ \partial_t u + u \partial_r u + \frac{p'(\rho)}{\rho} \partial_r \rho = 0, \end{cases} \quad (2.3.4)$$

s'écrit sous la forme (2.3.1) avec

$$w_1 = u - H(\rho), \quad w_2 = u + H(\rho), \quad (2.3.5)$$

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u + c, \quad (2.3.6)$$

De plus,

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial w_2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\rho c'(\rho)}{c(\rho)} \right) = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho c(\rho)) = \frac{\mathcal{G}}{2}.$$

Pour un fluide de Bethe-Weyl (cf. Définition 1.1.3), la condition (1.1.13) nous assure que $\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial w_2} > 0$. Le Théorème 2.3.1 implique donc :

Théorème 2.3.2. *Pour les équations d'Euler isentropiques unidimensionnelles d'un fluide de Bethe-Weyl, pour des données initiales $(\rho_0, u_0) \in \mathcal{C}^1 \cap \mathbf{L}^\infty$, telles que*

$$u'_0(x) - \left| \frac{c(\rho_0)}{\rho_0} \rho'_0(x) \right| \geq 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

le problème de Cauchy admet une unique solution globale $(u, \rho) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$.

2.3.2 Cas multidimensionnel

Un résultat dû à D. Serre [122] donne un résultat d'existence globale lorsque

- la vitesse initiale est proche d'une application linéaire expansive, au sens où toutes ses valeurs propres réelles sont positives,
- la densité initiale est faible,
- l'entropie initiale est proche d'une constante.

Théorème 2.3.3. *On considère un gaz parfait polytropique avec $\gamma \in]1, 1 + \frac{2}{d}[$, $m > 1 + d/2$. Soient $A_0 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice dont aucune valeur propre n'est réelle négative, $\bar{u}_0(x) = A_0 x$, et $\bar{s} \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\beta > 0$ tel que si*

$$\left\| (\rho_0^{(\gamma-1)/2}, u_0 - \bar{u}_0, s_0 - \bar{s}) \right\|_{\mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+2})} \leq \beta,$$

la solution classique maximale des équations d'Euler (2.1.1) pour les conditions initiales (ρ_0, u_0, s_0) est définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.

On remarque que dans ce cas, la quantité $\rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}$ (proche de la vitesse du son initiale $c_0 = \sqrt{\gamma(\gamma-1)} \rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{\frac{s_0}{2c_v}}$), est supposée *petite* dans $\mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$. En particulier, la densité initiale est elle aussi petite dans \mathbf{L}^2 , ce qui n'était pas du tout le cas dans les théorèmes d'explosion 2.1.5, 2.1.6 où la densité initiale était proche d'une constante non-nulle $\bar{\rho}$ ni dans les théorèmes estimant de temps d'existence 2.1.9 et 2.1.11. Le théorème 2.3.3 utilise d'ailleurs de façon essentielle la symétrisation de T. Makino, S. Ukai & S. Kawashima (voir Proposition 1.3.2), qui permet de traiter des zones de vide dans le cas des gaz parfaits. Il utilise de plus une transformation adaptée des variables (t, x, ρ, u, e) préservant essentiellement la structure des équations d'Euler et transformant le demi-axe des temps en un intervalle borné.

Une extension de ce théorème a ensuite été obtenue, par M. Grassin [63] en utilisant une méthode différente, supposant seulement que le spectre de $\nabla u_0(x)$ était disjoint de \mathbb{R}^- uniformément en x , u_0 étant la condition initiale de la vitesse. En particulier, une application linéaire comme dans le théorème 2.3.3 convient comme condition initiale de la vitesse.

Théorème 2.3.4. *On considère un gaz parfait polytropique avec $\gamma > 1$. Soit $m > 1 + d/2$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si (ρ_0, u_0, s_0) satisfait*

1. $\left\| (\pi_0, s_0) \right\|_{\mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon_0$, où $\pi_0 = \rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}$
2. $u_0 \in X = \{z : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; Dz \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d), D^2 z \in \mathbf{H}^{m-1}(\mathbb{R}^d)\}$
3. il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\text{dist}(\text{Spec}(Du_0)(x), \mathbb{R}_-) \geq \delta$,
4. ρ_0 et s_0 ont un support compact,

alors le problème

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} &= 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ \bar{u}(0, x) &= u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

admet une solution globale et le problème de Cauchy (2.1.1) pour les conditions initiales (ρ_0, u_0, s_0) admet une solution globale régulière

$$(\pi, u - \bar{u}, s) \in \mathcal{C}^0([0, \infty[; \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty[; \mathbf{H}^{m-1}(\mathbb{R}^d)),$$

où $\pi = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$. De plus, $\forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket, \forall t \geq 0$,

$$\left\| \nabla^k V(t) \right\|_{\mathbf{L}^2} \leq K(1+t)^{-k-\theta/2+d/2}, \quad \left\| \nabla^k s(t) \right\|_{\mathbf{L}^2} \leq K(1+t)^{-k+d/2},$$

et $\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|V(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq K(1+t)^{-\theta/2}, & \|s(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq K, \\ \|\nabla V(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq K(1+t)^{-1-\theta/2}, & \|\nabla s(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq K(1+t)^{-1}, \end{aligned}$$

où $V = \left(e^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}\pi}, u - \bar{u} \right)$, K dépend seulement de $\|u_0\|_X = \|\nabla u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\nabla^2 u_0\|_{\mathbf{H}^{m-1}}$, δ , $\|\pi_0\|_{\mathbf{H}^m}$, $\|s_0\|_{\mathbf{H}^m}$, et θ vérifie $0 < \theta < \min(1, \frac{\gamma-1}{2}d)$.

Ce théorème repose d'une part sur la symétrisation de T. Makino, S. Ukai et S. Kawashima, dont on a donné ici une extension au cas des gaz de Van der Waals dans la Proposition 1.3.2 et d'autre part sur des estimations d'énergie. On en montre une extension aux gaz de Van der Waals :

Théorème 2.3.5. *Soit $m > 1 + d/2$. Soient (ρ_0, u_0, s_0) les conditions initiales pour le problème de Cauchy associé au système (1.1.1) pour un gaz de Van der Waals polytropique satisfaisant (1.1.22) telles que $0 \leq \rho_0 \leq 1/b$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si*

(H1) $\|(\pi_0, s_0)\|_{\mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon_0$, où $\pi_0 = \left(\frac{\rho_0}{1-b\rho_0} \right)^{\frac{\gamma_0-1}{2}} \exp\left(\frac{s_0}{c_v}\right)$;

(H2) $u_0 \in X = \{z : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; Dz \in \mathbf{L}^\infty, D^2 z \in \mathbf{H}^{m-1}\}$,

(H3) Il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\text{dist}(\text{Spec}(Du_0)(x), \mathbb{R}_-) \geq \delta$,

(H4) ρ_0 et s_0 ont un support compact,

si \bar{u} est la solution globale de (2.3.7), si de plus $\gamma_0 = \frac{\nu+1}{\nu-1}$ avec $\nu \in \mathbb{N}$ et $\nu \geq 2$, ou bien si γ_0 et m sont tels que $\nu = \frac{\gamma_0+1}{\gamma_0-1} \geq m > 1 + \frac{d}{2}$, alors il existe une solution (ρ, u, s) globale régulière au problème de Cauchy pour (1.1.1) satisfaisant

$$\left(\left(\frac{\rho}{1-b\rho} \right)^{\frac{\gamma_0-1}{2}}, u - \bar{u}, s \right) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+2})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{m-1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+2})).$$

La démonstration de ce théorème est détaillée au paragraphe 2.4.

Solutions à symétrie sphérique. Soit $d \geq 2$. Voyons ce que signifie la condition (H3) dans le cas de la symétrie sphérique. On pose $u_0(x) = U(r^2)x$, où $r = |x|$. On a alors

$$\nabla u_0 = 2U'(r^2)(x \otimes x) + U(r^2)Id.$$

Il existe donc $P \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ tel que $P^T \nabla u_0 P = \text{Diag}(U(r^2) + 2r^2 U'(r^2), U(r^2), \dots, U(r^2))$, et le spectre de ∇u_0 est $\{U(r^2), U(r^2) + 2r^2 U'(r^2)\}$.

Ainsi, la condition (H3) devient : $\forall r \geq 0, U(r^2) \geq \delta$ et $U(r^2) + 2r^2 U'(r^2) \geq 0$. Elle est vérifiée si $U \geq \delta$ et $U' \geq 0$. En outre, $U \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ implique $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$.

Il faut de plus que u_0 satisfasse la condition **(H2)** du Théorème 2.3.4. Ainsi, on doit vérifier les conditions $\nabla u_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ et $\nabla^2 u_0 \in \mathbf{H}^{m-1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. Étant donnée la forme de ∇u_0 , la première de ces conditions nous impose d'avoir U et $r^2 U'(r^2)$ bornées sur \mathbb{R}_+ .

D'autre part,

$$\left\| \nabla^2 u_0 \right\|_{\mathbf{H}^{m-1}} \leq C \sum_{n=E[(m+1)/2]}^{m+1} \left(\int_{\mathbb{R}_+} |U^{(n)}(z)|^2 (1+z)^{m+1-2n} dz \right)^{1/2}$$

Ainsi, si on choisit U suffisamment régulière telle que $U \geq \delta$, $U' \geq 0$, $rU'(r)$ bornée sur \mathbb{R}_+ et telle que le terme de droite dans l'inégalité ci-dessus soit fini, alors le Théorème 2.3.5 s'applique avec $u_0(x) = U(|x|^2)x$.

2.4 Preuve du Théorème 2.3.5

Pour montrer ce théorème on adapte la preuve de M. Grassin [63]. On s'intéresse tout d'abord au cas isentropique ce qui permet de découpler le problème. Pour un gaz de Van der Waals, il apparaît désormais des termes non-linéaires dans les estimations, qu'il faut traiter séparément.

2.4.1 Cas isentropique

Considérons tout d'abord le cas isentropique (1.1.15), qui est techniquement plus simple que le cas général, mais qui fournit des estimations qui seront utiles pour traiter le cas général. On rappelle que pour un gaz de Van der Waals $p = (\gamma_0 - 1) \left(\frac{\rho}{1-b\rho} \right)^{\gamma_0}$. Le problème de Cauchy considéré s'écrit donc

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \gamma_0(\gamma_0 - 1)\rho^{-3} \left(\frac{\rho}{1-b\rho} \right)^{\gamma_0+1} \nabla \rho = 0, \end{cases} \quad (2.4.1)$$

avec les conditions initiales

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), \quad u(0, x) = u_0(x). \quad (2.4.2)$$

On considère d'autre part le problème (2.3.7), obtenu en négligeant ρ dans (2.4.1). D'après [63, Lemme 3.1 et Prop. 3.1] on a le résultat préliminaire suivant

Proposition 2.4.1. *Sous les hypothèses **(H2)** et **(H3)**, le problème (2.3.7) admet une solution régulière globale \bar{u} satisfaisant*

1. $D\bar{u}(t, x) = \frac{\operatorname{Id}}{1+t} + \frac{K(t, x)}{(1+t)^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}_+$,
2. $\left\| D^l \bar{u}(t, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^2} \leq K_l (1+t)^{d/2-(l+1)}$ pour $l \in \llbracket 2, M+1 \rrbracket$,
3. $\left\| D^2 \bar{u}(t, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C(1+t)^{-3}$,

où $K : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\|K\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \leq K_1$, C et K_l pour $l \in \llbracket 1, m+1 \rrbracket$ étant des réels positifs ne dépendant que de $m, d, \delta, \|u_0\|_X$.

2.4.1.A Existence locale.

On construit une solution locale de (2.4.1)–(2.4.2) telle que la différence entre cette solution et $(0, \bar{u})$ soit dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+1})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{m-1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+1}))$. La première étape est la symétrisation du système. On utilise pour cela la Proposition 1.3.2. La forme symétrique permet en effet d'utiliser un théorème général (voir Théorème 2.1.2) donnant l'existence locale de solutions et aussi d'établir des estimations sur la solution. Ainsi, on pose, en supposant $0 \leq \rho < 1/b$,

$$\pi = 2\sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \left(\frac{p}{\gamma_0 - 1} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}} = 2\sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \left(\frac{\rho}{1 - b\rho} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2}}. \quad (2.4.3)$$

Le système (2.4.1) devient, dans les variables (π, u) :

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} \pi^{\frac{2}{\gamma_0 - 1}}) \pi \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} \pi^{\frac{2}{\gamma_0 - 1}}) \pi \nabla \pi = 0. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

où $\tilde{b} = b \left(\frac{\gamma_0 - 1}{4\gamma_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_0 - 1}}$. On utilise alors la même méthode que M. Grassin [63] pour montrer que ce système admet une solution locale en temps, avec une donnée initiale u_0 dans X et non dans un espace de Sobolev (en particulier, u_0 ne tend pas vers 0 à l'infini). On utilise pour cela la compacité du support (hypothèse **(H4)**) de ρ_0 et l'on se sert de la vitesse finie de propagation des solutions d'un système hyperbolique. Plus précisément, on suppose que $\operatorname{Supp}(\rho_0) \subset B(0, R)$ pour $R > 0$. Soit $\eta > 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$ telle que $\varphi \equiv 1$ sur $B(0, R + 2\eta)$. On obtient une solution locale (π^φ, u^φ) du problème (2.4.4) avec conditions initiales $(\pi_0, \varphi u_0) \in \mathbf{H}^m$ pour $t \in [0, T[$. Les Propositions 2.1.3 et 2.1.4, nous assurent alors que la condition $0 \leq \rho < 1/b$ est bien satisfaite.

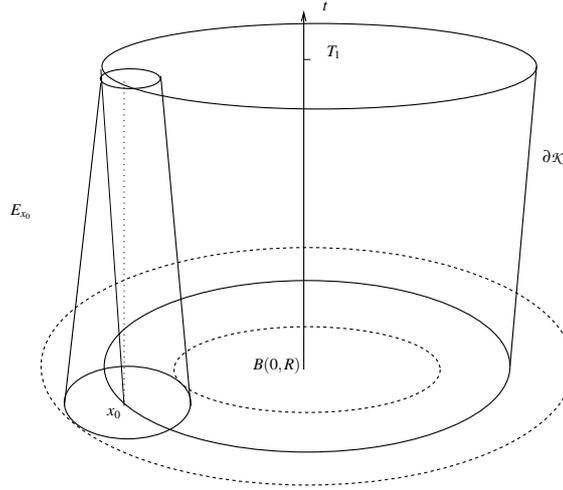
Soit $\varepsilon \in]0, T[$, $M = \sup\{ \frac{\gamma_0 - 1}{2} (|\pi^\varphi| + |\pi^\varphi|^\nu) + |u^\varphi|; t \in [0, T - \varepsilon], x \in \mathbb{R}^d \}$ appelée *vitesse maximale de propagation*. On introduit alors $\varepsilon' \in]0, \frac{\eta}{2M}[$ et $T_1 = \min(T - \varepsilon, \frac{\eta}{2M} - \varepsilon')$ le temps pour lequel cette construction est valable. On obtient finalement une solution (π, u) de (2.4.4)–(2.4.2) en posant

$$(\pi, u) = \begin{cases} (\pi^\varphi, u^\varphi) \text{ dans } \mathcal{K}, \\ (0, \bar{u}) \text{ hors de } \mathcal{K}, \end{cases}$$

où \mathcal{K} est le cône $\mathcal{K} = \{(t, x); 0 \leq t \leq T_1, x \in B(0, R + \eta + Mt)\}$. Il suffit alors de montrer que le recollement des solutions se fait de façon régulière le long de $\partial\mathcal{K}$. On utilise pour cela la propriété d'unicité locale donnée plus loin par la Proposition 2.4.2. En effet, soit $x_0 \in S(0, R + \eta)$ la sphère de rayon $R + \eta$ de centre 0 et $E_{x_0} = \{(t, x); t \in [0, T_1], x \in B(x_0, \eta - Mt)\}$. Le choix de T_1 implique notamment $\partial\mathcal{K} \subset \cup_{x_0 \in S(0, R + \eta)} E_{x_0}$ (cf. Fig. 2.3). Les conditions initiales de (π^φ, u^φ) et $(0, \bar{u})$ coïncident sur E_{x_0} puisque le support de π_0 est inclus dans $B(0, R)$. La Proposition 2.4.2 nous permet alors d'affirmer que $(\pi^\varphi, u^\varphi) = (0, \bar{u})$ sur E_{x_0} et donc en particulier sur un voisinage de $\partial\mathcal{K}$.

2.4.1.B Unicité locale

Proposition 2.4.2. *Soient $U_0 = (\pi_0, u_0)^{\mathbf{T}} \in \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)$ et \tilde{U}_0 deux données initiales pour (2.4.4). Soient $U = (\pi, u)^{\mathbf{T}}$, \tilde{U} deux solutions correspondantes définies pour $0 \leq t \leq T_0$.*

FIGURE 2.3 – Recollement des solutions le long de $\partial\mathcal{K}$.

On suppose que $\left\| D\tilde{U} \right\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T_0] \times \mathbb{R}^d)} < \infty$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $R \geq 0$. On note

$$M = \sup\left\{ \left(\frac{\gamma_0 - 1}{2} |\pi| (1 + \tilde{b}\pi^{\nu-1}) + |u| \right)(t, x), (t, x) \in [0, T_0] \times B(x_0, R) \right\}, \quad (2.4.5)$$

$$C_T = \{(t, x) \in [0, T] \times B(x_0, R - Mt)\} \quad \text{pour } T \in [0, T_1], \quad (2.4.6)$$

où $T_1 = \min(T_0, \eta/M)$. Si $U_0 = \tilde{U}_0$ sur $B(x_0, R)$ alors $U = \tilde{U}$ sur C_{T_1} .

La preuve de cette proposition est classique pour les systèmes hyperboliques (voir par exemple [111]). La constante M désigne ici la plus grande vitesse de propagation.

Preuve. Soient $U_0 = (\pi_0, u_0)$, $\tilde{U}_0 = (\tilde{\pi}_0, \tilde{u}_0)$ deux données initiales pour (2.4.4) telles que $U_0 \in \mathbf{H}^m$. Soient U, \tilde{U} des solutions des problèmes de Cauchy associés. On suppose que ces solutions sont définies sur $[0, T_0]$ avec $T_0 > 0$. Soient de plus $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ et M, C_T comme en (2.4.5) et (2.4.6). On a alors

$$\partial_t U + \sum_j a_j(U) \partial_j U = 0,$$

où

$$a_j(U) = \begin{pmatrix} u_j & 0 & \frac{\gamma_0 - 1}{2} (\pi + \tilde{b}\pi^\nu) & \\ 0 & \ddots & & \\ \frac{\gamma_0 - 1}{2} (\pi + \tilde{b}\pi^\nu) & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & u_j \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $\partial_t(U - \tilde{U}) + \sum_j a_j(U) \partial_j(U - \tilde{U}) + (a_j(U) - a_j(\tilde{U})) \partial_j \tilde{U} = 0$. On fait alors

le produit scalaire avec $(U - \tilde{U})$ et on intègre sur C_T pour $T \in [0, T_0]$. On obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{C_T} \partial_t |U - \tilde{U}|^2 + \sum_j \partial_j \left((U - \tilde{U}) \cdot a_j(U) (U - \tilde{U}) \right) \\ & - \sum_j (U - \tilde{U}) \cdot \partial_j (a_j(U)) (U - \tilde{U}) \, dx \, dt = - \int_{C_T} (U - \tilde{U}) \cdot (a_j(U) - a_j(\tilde{U})) \partial_j \tilde{U} \, dx \, dt . \end{aligned}$$

On utilise alors la formule de Stokes, notant que $\partial C_T = (\{0\} \times B(x_0, \eta)) \cup (\{T\} \times B(x_0, \eta - MT)) \cup \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{B(x_0, R-MT)} |U - \tilde{U}|^2(T, x) \, dx - \frac{1}{2} \int_{B(x_0, \eta)} |U - \tilde{U}|^2(0, x) \, dx \\ & + \frac{1}{2\sqrt{1+1/M^2}} \int_{\mathcal{C}} |U - \tilde{U}|^2 + \sum_j (U - \tilde{U}) \cdot a_j(U) (U - \tilde{U}) \frac{x_j}{M|x|} \, d\sigma \\ & = \int_{C_T} \sum_j (U - \tilde{U}) \cdot \partial_j (a_j(U)) (U - \tilde{U}) - (U - \tilde{U}) \cdot (a_j(U) - a_j(\tilde{U})) \partial_j \tilde{U} \, dx \, dt . \end{aligned}$$

Or $\|\partial_j a_j(u)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \|DU\|_{\mathbf{L}^\infty(C_T)} (1 + \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty(C_T)}^{\nu-1})$. Par conséquent

$$\begin{aligned} & \int_{C_T} (U - \tilde{U}) \cdot \partial_j (a_j(U)) (U - \tilde{U}) - (U - \tilde{U}) \cdot (a_j(U) - a_j(\tilde{U})) \partial_j \tilde{U} \, dx \, dt \\ & \leq C \|DU\|_{\mathbf{L}^\infty(C_T)} (1 + \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty(C_T)}^{\nu-1}) \int_0^T \int_{B(x_0, R-Mt)} |U - \tilde{U}|^2 \, dx \, dt . \end{aligned}$$

D'autre part, le choix de M implique

$$\int_{\mathcal{C}} |U - \tilde{U}|^2 + \sum_j (U - \tilde{U}) \cdot a_j(U) (U - \tilde{U}) \frac{x_j}{M|x|} \, d\sigma \geq 0 ,$$

d'où l'estimation

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{B(x_0, R-MT)} |U - \tilde{U}|^2(T, x) \, dx - \frac{1}{2} \int_{B(x_0, \eta)} |U - \tilde{U}|^2(0, x) \, dx \\ & \leq C \|DU\|_{\mathbf{L}^\infty(C_T)} (1 + \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty(C_T)}^{\nu-1}) \int_0^T \int_{B(x_0, R-Mt)} |U - \tilde{U}|^2 \, dx \, dt . \end{aligned}$$

On conclut par le lemme de Gronwall qui nous donne

$$\frac{1}{2} \int_{B(x_0, R-MT)} |U - \tilde{U}|^2(T, x) \, dx \leq \frac{1}{2} e^{C'T} \int_{B(x_0, R)} |U_0 - \tilde{U}_0|^2(x) \, dx$$

où $C' = C \|DU\|_{\mathbf{L}^\infty(C_T)} (1 + \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty(C_T)}^{\nu-1})$. □

2.4.1.C Estimations d'énergie.

Par rapport au cas des gaz parfaits [63], le système (2.4.4) comporte un terme supplémentaire en $\pi^{(\gamma_0+1)/(\gamma_0-1)}$ qui va modifier les estimations d'énergie. On pose $U = (\pi, u - \bar{u})$, $w = u - \bar{u}$ et $\bar{U} = (0, \bar{u})$. On introduit également,

$$A_j(U) = \begin{pmatrix} u_j - \bar{u}_j & 0 & \dots & \frac{\gamma_0-1}{2}\pi & 0 \\ 0 & u_j - \bar{u}_j & 0 & & 0 \\ \frac{\gamma_0-1}{2}\pi & 0 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_j - \bar{u}_j \end{pmatrix}, \quad B(D\bar{U}, U) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_0-1}{2}\pi \operatorname{div} \bar{u} \\ (w \cdot \nabla) \bar{u} \end{pmatrix}, \quad (2.4.7)$$

de sorte que le système (2.4.4) s'écrive matriciellement

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^d A_j(U) \partial_j U = -B(D\bar{U}, U) - \sum_{j=1}^d \bar{u}_j \partial_j U - F(D\bar{U}, DU, U) \quad (2.4.8)$$

où

$$F(D\bar{U}, DU, U) = \frac{\gamma_0 - 1}{2} \tilde{b} \pi^\nu \begin{pmatrix} \operatorname{div} (w + \bar{u}) \\ \nabla \pi \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \nu = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1}. \quad (2.4.9)$$

Étant données les propriétés de \bar{u} décrites dans la Proposition 2.4.1, on s'attend à ce que les termes $\|D^k U\|_{\mathbf{L}^2}$ pour $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$ décroissent par rapport au temps avec un taux qui dépend de k . On introduit donc

$$Y_k(t) = \|D^k U(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^2}, \quad Z(t) = \sum_{k=0}^m (1+t)^{g_k} Y_k(t), \quad (2.4.10)$$

où $g_k = k + c$, c étant à choisir de sorte que tous les termes de Z aient la même décroissance en temps. Pour estimer Z , on applique D^k à (2.4.8), on fait le produit scalaire avec $D^k U$ et l'on intègre sur \mathbb{R}^d . Le système (2.4.8) diffère essentiellement du système considéré par M. Grassin par le terme $F(D\bar{U}, DU, U)$ donné en (2.4.9). On utilise [63, Prop. 3.2 et 3.3] pour majorer les termes communs. On rappelle ces résultats :

Proposition 2.4.3. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ un d -uplet de taille $k \geq 0$, c'est à dire $\alpha_1 + \dots + \alpha_d = k$. Notons, pour $U = (\pi, u - \bar{u})$,*

$$R_k = - \int_{\mathbb{R}^d} D^k U \cdot D^k \left(\sum_{j=1}^d A_j(U) \partial_j U \right) dx, \\ S_k = - \int_{\mathbb{R}^d} D^k U \cdot D^k \left(B(D\bar{U}, U) + \sum_{j=1}^d \bar{u}_j \partial_j U \right) dx,$$

alors il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de m, d telle que

$$|R_k| \leq C(1+t)^{-g_1-d/2} Y_k^2 Z, \quad S_k \leq C(1+t)^{-g_k-2} Y_k Z - \frac{k+r}{1+t} Y_k^2,$$

où

$$r = \min\left(1 - \frac{d}{2}, \left(\frac{\gamma_0}{2} - 1\right)d\right). \quad (2.4.11)$$

Il nous reste à majorer $-\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^k U \cdot \mathbf{D}^k (F(\mathbf{D}\bar{U}, \mathbf{D}U, U))$. On note $\check{b} = \frac{\gamma_0 - 1}{2} \tilde{b}$ et

$$I = -\check{b} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^k U \cdot \mathbf{D}^k \left(\pi^\nu \begin{pmatrix} \operatorname{div} w \\ \nabla \pi \end{pmatrix} \right), \quad J = -\check{b} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^k U \cdot \mathbf{D}^k \left(\pi^\nu \begin{pmatrix} \operatorname{div} \bar{u} \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

de sorte que $-\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{D}^k U \cdot \mathbf{D}^k (F(\mathbf{D}\bar{U}, \mathbf{D}U, U)) = I + J$. A priori, J est plus facile à traiter que I . Cependant, l'estimation de I est rendue possible par le fait que la matrice $\pi^\nu \begin{pmatrix} 0 & \xi^\mathbf{T} \\ \xi & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique.

a) **On estime I .** Pour cela, on montre le

Lemme 2.4.1. *Avec les notations introduites dans la Section 2.4.1*

$$|I| \leq C \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \|\mathbf{D}U\|_{\mathbf{L}^\infty} \left\| \mathbf{D}^k U \right\|_{\mathbf{L}^2}^2. \quad (2.4.12)$$

b) **On estime J .** Pour cela, on découpe J en deux morceaux. Un premier morceau J_1 où il n'y a que des dérivées d'ordre 1 pour \bar{u} , et un deuxième morceau J_2 où toutes les dérivées de \bar{u} sont au moins d'ordre 2. Plus précisément,

$$J_1 = -\check{b} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha|_1 = k} (\partial^\alpha \pi) (\partial^\alpha \pi^\nu) \operatorname{div} \bar{u},$$

$$J_2 = J - J_1.$$

Pour estimer J_1 , on utilise le premier point de la Proposition 2.4.1 donnant la décroissance en temps de $\mathbf{D}\bar{u}$ ainsi que le Lemme B.2.3 donnant l'estimation

$$\|\partial^\alpha(\pi^\nu)\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \left\| \mathbf{D}^k \pi \right\|_{\mathbf{L}^2},$$

pour tout d -uplet $\alpha \in \mathbb{N}^d$ de taille k , c'est à dire satisfaisant $|\alpha|_1 = \sum \alpha_i = k$. On obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \check{b} \|\partial^\alpha \pi\|_{\mathbf{L}^2} \|\partial^\alpha(\pi^\nu)\|_{\mathbf{L}^2} \|\operatorname{div} \bar{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq C \frac{1}{1+t} \left\| \mathbf{D}^k U \right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1}. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Pour estimer J_2 , on utilise le

Lemme 2.4.2. *Avec les notations introduites dans la Section 2.4.1, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|J_2| \leq C(1+t)^{d_k} \left\| \mathbf{D}^k U \right\|_{\mathbf{L}^2} Z^\nu, \quad (2.4.14)$$

où $d_k = (-g_1 - \frac{d}{2} + 1)(\nu - 1) - g_k - 2$.

c) **On regroupe les estimations.** On obtient en assemblant les résultats de la Proposition 2.4.3 et les estimations (2.4.12)–(2.4.13)–(2.4.14) de I et J , puis en utilisant le Lemme B.2.1

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dY_k^2}{dt} + \frac{k+r}{1+t} Y_k^2 &\leq C(1+t)^\beta Y_k^2 Z + C'(1+t)^{-g_k-2} Y_k Z + C(1+t)^{\beta+(\beta+1)(\nu-1)} Y_k^2 Z^\nu \\ &\quad + C(1+t)^{(\beta+1)(\nu-1)-1} Y_k^2 Z^{\nu-1} + C(1+t)^{(\beta+1)(\nu-1)-g_k-2} Y_k Z^\nu, \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

où on a noté

$$\beta = -g_1 - \frac{d}{2}.$$

On choisit à ce moment la constante c introduite dans $g_k = k + c$ de sorte que $\beta = 0$ afin d'avoir une bonne décroissance en temps. Ainsi, on demande $g_1 + d/2 = 0$ et on obtient $c = -1 - d/2$ puis

$$g_k = k - \frac{d}{2} - 1.$$

On introduit maintenant

$$a = 1 + d/2 + r > 1,$$

de sorte que $k+r = g_k + a$. On simplifie maintenant par Y_k l'inégalité (2.4.15), on multiplie par $(1+t)^{g_k}$ et on somme sur k pour obtenir une inégalité différentielle en Z (défini en (2.4.10)) :

$$\frac{dZ}{dt} + \frac{a}{1+t} Z \leq C \left(Z^2 + \frac{Z}{(1+t)^2} + (1+t)^{\nu-1} Z^{\nu+1} \right).$$

On pose alors $\zeta(t) = (1+t)^a \exp\left(\frac{C}{1+t}\right) Z(t)$ et l'on déduit de l'inégalité précédente

$$\frac{d\zeta}{dt} \leq \frac{C}{(1+t)^a} (\zeta^2 + \zeta^{\nu+1}).$$

Or $\zeta^2 + \zeta^{\nu+1} \leq 2\zeta(1 + \zeta^\nu)$ pour $\nu \geq 2$. Par conséquent

$$\frac{1}{\zeta(1 + \zeta^\nu)} \frac{d\zeta}{dt} \leq \frac{C}{(1+t)^a},$$

c'est à dire

$$\frac{d}{dt}(f(\zeta(t))) \leq \frac{C}{(1+t)^a},$$

avec $f(x) = \frac{1}{\nu} \ln\left(\frac{x^\nu}{1+x^\nu}\right)$. Par intégration, on en déduit $f(\zeta(t)) + \frac{C}{a-1}(1+t)^{-(a-1)} \leq f(\zeta(0)) + \frac{C}{a-1}$. Or f est strictement croissante et réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}_-^* . Donc finalement, si $f(\zeta(0)) + C/(a-1)$ est dans le domaine de définition de f^{-1} ,

$$\zeta(t) \leq f^{-1}\left(f(\zeta(0)) + C/(a-1)\right).$$

Or $f(\zeta(0)) + C/(a-1) \leq 0$ est possible si $\zeta(0)$ est assez petit, puisque $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0, et $\zeta(0) = \exp(C) Z(0) = \exp(C) \|\pi_0\|_{\mathbf{H}^m}$. La condition de petitesse est donc vérifiée par l'hypothèse **(H1)** avec $0 < \varepsilon_0 < f^{-1}\left(\frac{-C}{a-1}\right)$.

d) **Conclusion.** Ainsi, on a obtenu

$$\begin{aligned} Z(t) &\leq \frac{1}{(1+t)^a} \exp\left(\frac{-C}{1+t}\right) f^{-1}\left(f(e^C Z(0)) + \frac{C}{a-1}\right), \\ Y_k(t) &\leq (1+t)^{-g_k} Z(t) \\ &\leq \frac{1}{(1+t)^{k+r}} \exp\left(\frac{-C}{1+t}\right) f^{-1}\left(f(e^C Z(0)) + \frac{C}{a-1}\right). \end{aligned}$$

Les normes \mathbf{L}^2 des dérivées de la solution locale U n'explodent donc pas en temps fini puisque $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^a} \exp\left(\frac{-C}{1+t}\right)$ n'explose pas en temps fini. Supposons que la solution régulière existe jusqu'au temps T . Nos estimations nous donnent, pour tout $t \in [0, T[$, pour C_T ne dépendant que de T ,

$$\|(\pi, u - \bar{u})(t)\|_{\mathbf{H}^m} \leq C_T.$$

Or, notre construction de la solution est valable, lorsque $\text{Supp } \pi \subset B(0, R)$, si la norme dans $\mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)$ de (π, u) est bornée, et

$$\|(\pi, u)(t)\|_{\mathbf{H}^m(B(0, R))} \leq C_T + \|\bar{u}(t)\|_{\mathbf{H}^m(B(0, R))} \leq K_T.$$

À la constante K_T correspond alors un temps d'existence $T_*(K_T)$ pour la solution locale. Soit $t_1 \in]0, T[$ tel que $t \geq T - T_*(K_T)$. En utilisant la solution correspondant à la donnée initiale $(\pi(t_1), u(t_1))$, on prolonge la solution au-delà du temps T .

2.4.2 Cas général

2.4.2.A Existence locale

De même que dans le cas isentropique, on cherche tout d'abord à symétriser le système. On pose

$$\pi = \sqrt{\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0}} \left(\frac{p}{\gamma_0 - 1}\right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}} = \sqrt{\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0}} \left(\frac{\rho}{1 - b\rho}\right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2}} \exp\left(\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0} \frac{s}{c_v}\right).$$

Le système (1.1.1) s'écrit alors dans les variables (π, u, s) :

$$\begin{cases} e^{s/(\gamma_0 c_v)} \partial_t \pi + e^{s/(\gamma_0 c_v)} u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0 - 1}{2} e^{s/(\gamma_0 c_v)} \pi \operatorname{div} u &= -\frac{\gamma_0 - 1}{2} \tilde{b} \pi^{\frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1}} \operatorname{div} u, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \frac{\gamma_0 - 1}{2} e^{s/(\gamma_0 c_v)} \pi \nabla \pi &= -\frac{\gamma_0 - 1}{2} \tilde{b} \pi^{\frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1}} \nabla \pi, \\ (1+t)^{-\theta} (\partial_t s + u \cdot \nabla s) &= 0, \end{cases} \quad (2.4.16)$$

où $\tilde{b} = b \left(\frac{\gamma_0 - 1}{4\gamma_0}\right)^{\frac{1}{\gamma_0 - 1}}$. On a introduit de plus un paramètre θ à déterminer afin d'avoir une estimation de $(1+t)^{-\theta} s$ similaire aux estimations obtenues dans le cas isentropique. Pour obtenir l'existence locale d'une solution on construit une solution en suivant la même méthode que dans le cas isentropique, en utilisant de nouveau une propriété d'unicité locale donnée par la Proposition 2.4.4.

2.4.2.B Unicité locale

On montre ici un résultat similaire à celui obtenu en section 2.4.1.B dans le cas isentropique.

Proposition 2.4.4. Soient $U_0 = (\pi_0, u_0, s_0)^{\mathbf{T}} \in \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)$ et \tilde{U}_0 deux données initiales pour (2.4.4). Soient $U = (\pi, u, s)^{\mathbf{T}}$, \tilde{U} deux solutions correspondantes définies pour $0 \leq t \leq T_0$. On suppose que $\|D\tilde{U}\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T_0] \times \mathbb{R}^d)} < \infty$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $R \geq 0$. On note

$$M = \sup\{e^{\frac{s}{2\gamma_0 cv}} \left(\frac{\gamma_0 - 1}{2} |\pi|(1 + \tilde{b}|\pi|^{\nu-1}) + |u|\right)(t, x), (t, x) \in [0, T_0] \times B(x_0, R)\}, \quad (2.4.17)$$

$$C_T = \{(t, x) \in [0, T] \times B(x_0, R - Mt)\} \quad \text{pour } T \in [0, T_1], \quad (2.4.18)$$

où $T_1 = \min(T_0, \eta/M)$.

Si $U_0 = \tilde{U}_0$ sur $B(x_0, R)$ alors $U = \tilde{U}$ sur C_{T_1} .

Preuve. Soient $U_0 = (\pi_0, u_0, s_0), \tilde{U}_0 = (\tilde{\pi}_0, \tilde{u}_0, \tilde{s}_0)$ deux données initiales pour (2.4.16) telles que $U_0 \in \mathbf{H}^m$. Soient U, \tilde{U} des solutions des problèmes de Cauchy associés. On suppose que ces solutions sont définies sur $[0, T_0]$ avec $T_0 > 0$. Soient de plus $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ et M, C_T comme en (2.4.17) et (2.4.18). On a alors

$$\alpha_0(U) \partial_t U + \sum_j \alpha_j(U) \partial_j U = 0,$$

où $\alpha_0 = \text{Diag}(e^{\frac{s}{\gamma_0 cv}}, 1, \dots, 1, 1)$ et, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$,

$$\alpha_j(U) = \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{\gamma_0 cv}} u_j & 0 & e^{\frac{s}{\gamma_0 cv}} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (\pi + \tilde{b}\pi^\nu) & & \\ 0 & \ddots & & & \\ e^{\frac{s}{\gamma_0 cv}} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (\pi + \tilde{b}\pi^\nu) & & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & u_j \end{pmatrix}.$$

On introduit, pour $T \in [0, T_1]$,

$$I = \int_{C_T} \left(\partial_t [(U - \tilde{U}) \cdot \alpha_0(U)(U - \tilde{U})] + \sum_j \partial_j [(U - \tilde{U}) \cdot \alpha_j(U)(U - \tilde{U})] \right) dx dt. \quad (2.4.19)$$

En notant $|U - \tilde{U}|_0^2 = (U - \tilde{U}) \alpha_0(U) (U - \tilde{U})$ et $[U - \tilde{U}]_t = \int_{B(x_0, \eta - Mt)} |(U - \tilde{U})(t, x)|_0^2 dx$, on obtient d'une part par la formule de Stokes,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\partial C_T} \left((U - \tilde{U}) \cdot \alpha_0(U) (U - \tilde{U}) n_t + \sum_j (U - \tilde{U}) \cdot \alpha_j(U) (U - \tilde{U}) n_j \right) d\sigma \\ &= [U - \tilde{U}]_T - [U - \tilde{U}]_0 \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1 + 1/M^2}} \int_C \left(|U - \tilde{U}|_0 + \sum_j (U - \tilde{U}) \cdot \alpha_j(U) (U - \tilde{U}) \frac{x_j}{M|x|} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
& \sum_j (U - \tilde{U}) \alpha_j(U) (U - \tilde{U}) \frac{x_j}{M|x|} \\
&= \left| U - \tilde{U} \right|_0^2 \frac{u \cdot x}{M|x|} + 2e^{\frac{s}{\gamma_0 c_v}} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (\pi + \tilde{b}|\pi|^\nu) (\pi - \tilde{\pi}) \frac{(u - \tilde{u}) \cdot x}{M|x|} \\
&\leq \left| U - \tilde{U} \right|_0^2 \frac{|u|}{M} + e^{s/(2\gamma_0 c_v)} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (|\pi| + \tilde{b}|\pi|^\nu) (e^{s/(\gamma_0 c_v)} |\pi - \tilde{\pi}|^2 + |u - \tilde{u}|^2) \frac{1}{M} \\
&\leq \frac{1}{M} \left| U - \tilde{U} \right|_0^2 (|u| + e^{s/(2\gamma_0 c_v)} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (|\pi| + \tilde{b}|\pi|^\nu)) \\
&\leq \left| U - \tilde{U} \right|_0^2,
\end{aligned}$$

par conséquent

$$I \geq [U - \tilde{U}]_T - [U - \tilde{U}]_0.$$

D'autre part, on a

$$\alpha_0(U) \partial_t (U - \tilde{U}) + \sum_j \alpha_j(U) (U - \tilde{U}) = \sum_j \alpha_0(U) (\alpha_0(\tilde{U})^{-1} \alpha_j(\tilde{U}) - \alpha_0(U)^{-1} \alpha_j(U)) \partial_j \tilde{U},$$

et donc

$$\begin{aligned}
I &= \int_{C_T} (U - \tilde{U}) \partial_t \alpha_0(U) (U - \tilde{U}) + \sum_j (U - \tilde{U}) \partial_j \alpha_j(U) (U - \tilde{U}) \\
&\quad + 2 \int_{C_T} \sum_j \alpha_0(U) (\alpha_0(\tilde{U})^{-1} \alpha_j(\tilde{U}) - \alpha_0(U)^{-1} \alpha_j(U)) \partial_j \tilde{U}.
\end{aligned}$$

Notons

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{C_T} (U - \tilde{U}) \partial_t \alpha_0(U) (U - \tilde{U}), \\
I_2 &= \sum_j \int_{C_T} (U - \tilde{U}) \partial_j \alpha_j(U) (U - \tilde{U}), \\
I_3 &= 2 \int_{C_T} \sum_j \alpha_0(U) (\alpha_0(\tilde{U})^{-1} \alpha_j(\tilde{U}) - \alpha_0(U)^{-1} \alpha_j(U)) \partial_j \tilde{U}.
\end{aligned}$$

On obtient, en calculant explicitement $\partial_t \alpha_0$ et $\partial_j \alpha_j$

$$I_1 = - \int_{C_T} \frac{1}{\gamma_0 c_v} e^{s/(\gamma_0 c_v)} (\pi - \tilde{\pi})^2 (u \cdot \nabla s)$$

et

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{C_T} \frac{1}{\gamma_0 c_v} e^{s/(\gamma_0 c_v)} (\pi - \tilde{\pi})^2 (u \cdot \nabla s) + \int_{C_T} \operatorname{div}(u) \left| U - \tilde{U} \right|_0^2 \\
&\quad + \int_{C_T} (\gamma_0 - 1) e^{s/(\gamma_0 c_v)} (\pi - \tilde{\pi}) (u - \tilde{u}) \cdot \left[\frac{1}{\gamma_0 c_v} (\pi + \tilde{b}|\pi|^\nu) \nabla s + (1 + \tilde{b}\nu\pi^{\nu-1}) \nabla \pi \right] \\
&\leq -I_1 + \|DU\|_{\mathbf{L}^\infty} (1 + C(1 + \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty})(1 + \tilde{b}\nu\|\pi^{\nu-1}\|_{\mathbf{L}^\infty})) \int_0^T [U - \tilde{U}]_t \, dt.
\end{aligned}$$

Finalement, on majore I_3 . Pour cela, on calcule

$$\begin{aligned} & \alpha_0(\tilde{U})^{-1}\alpha_j(\tilde{U}) - \alpha_0(U)^{-1}\alpha_j(U) \\ &= - \left(\begin{array}{c|c|c} u_j - \tilde{u}_j & \frac{\gamma_0-1}{2}(\pi - \tilde{\pi} + \tilde{b}(\pi^\nu - \tilde{\pi}^\nu))\mathbf{e}_j^\mathbf{T} & 0 \\ \theta\mathbf{e}_j & (u_j - \tilde{u}_j)I_d & 0 \\ \hline 0 & 0 & u_j - \tilde{u}_j \end{array} \right), \end{aligned}$$

où $\theta = \frac{\gamma_0-1}{2}(e^{\frac{s}{\gamma_0 c_v}}(\pi + \tilde{b}\pi^\nu) - e^{\frac{\tilde{s}}{\gamma_0 c_v}}(\tilde{\pi} + \tilde{b}\tilde{\pi}^\nu))$. On note $R = \max(\|s\|_{\mathbf{L}^\infty}, \|\tilde{s}\|_{\mathbf{L}^\infty})$. La fonction exponentielle étant convexe, on a

$$\left| e^{s/(\gamma_0 c_v)} - e^{\tilde{s}/(\gamma_0 c_v)} \right| \leq 1/(\gamma_0 c_v) e^{R/(\gamma_0 c_v)} |s - \tilde{s}|.$$

Ainsi,

$$e^{s/(\gamma_0 c_v)}(\pi + \tilde{b}\pi^\nu) - e^{\tilde{s}/(\gamma_0 c_v)}(\tilde{\pi} + \tilde{b}\tilde{\pi}^\nu) \leq C(1 + R^{\nu-1})(|\pi|s - \tilde{s}| + |\pi - \tilde{\pi}|),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \left(\|D\tilde{U}\|_{\mathbf{L}^\infty} (1 + C(1 + \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty})(1 + \tilde{b}\nu\|\pi^{\nu-1}\|_{\mathbf{L}^\infty})) \right. \\ &\quad \left. + \|DU\|_{\mathbf{L}^\infty} (1 + C(1 + \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty})(1 + \tilde{b}\nu\|\pi^{\nu-1}\|_{\mathbf{L}^\infty})) \right) \\ &\quad \times \int_0^T [U - \tilde{U}]_t dt. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$[U - \tilde{U}]_T - [U - \tilde{U}]_0 \leq C(1 + C(1 + \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty})(1 + \tilde{b}\nu\|\pi^{\nu-1}\|_{\mathbf{L}^\infty})) \int_0^T [U - \tilde{U}]_t dt.$$

On conclut par le lemme de Gronwall qui nous donne

$$\frac{1}{2} \int_{B(x_0, R-MT)} |U - \tilde{U}|^2(T, x) dx \leq \frac{1}{2} e^{C'T} \int_{B(x_0, R)} |U_0 - \tilde{U}_0|^2(x) dx$$

où $C' = C\|DU\|_{\mathbf{L}^\infty(C_T)}(1 + \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty(C_T)}^{\nu-1})$. □

2.4.2.C Estimations

Le système (2.4.16) s'écrit matriciellement

$$A_0 \partial_t V + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j V = -B(D\bar{V}, V) - \sum C_j(\bar{V}) \partial_j V - \frac{\gamma_0-1}{2} \tilde{b}\pi^\nu \begin{pmatrix} \operatorname{div}(w + \bar{u}) \\ \nabla \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4.20)$$

où $V = (\pi, u - \bar{u}, s) \in \mathbb{R}^{d+2}$, $\bar{V} = (0, \bar{u}, 0)$ et, $(\mathbf{e}_j)_{1 \leq j \leq d}$ étant la base canonique de \mathbb{R}^d ,

$$A_0 = \text{Diag}(e^{s/(\gamma_0 c_v)}, 1, \dots, 1, (1+t)^{-\theta}) \in \mathcal{M}_{d+2}(\mathbb{R}),$$

$$C_j = \bar{u}_j A_0,$$

$$A_j = \begin{pmatrix} e^{s/(\gamma_0 c_v)} w_j & \frac{\gamma_0 - 1}{2} e^{s/(\gamma_0 c_v)} \pi \mathbf{e}_j^T & 0 \\ \frac{\gamma_0 - 1}{2} e^{s/(\gamma_0 c_v)} \pi \mathbf{e}_j & w_j I_d & 0 \\ 0 & 0 & (1+t)^{-\theta} w_j \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_0 - 1}{2} e^{s/(\gamma_0 c_v)} \pi \text{div } \bar{u} \\ (w \cdot \nabla) \bar{u} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On introduit également $N_k(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^d} D^k V \cdot A_0(V) D^k V dx \right)^{1/2}$ et $Z(t) = \sum_{k=0}^m (1+t)^{g_k} N_k(t)$ avec $g_k = k + r - a$ et $r = \theta/2 - d/2$, $\theta \in]0, \min(1, \frac{\gamma_0 - 1}{2})]$. Pour obtenir des estimations d'énergie, on applique D^k à (2.4.20) puis on fait le produit scalaire avec $D^k V$ et on intègre sur \mathbb{R}^d . Le terme additionnel par rapport au cas des gaz parfaits considéré par M. Grassin [63] est alors

$$F^*(D\bar{V}, DV, V) = \frac{\gamma_0 - 1}{2} \tilde{b} \pi^\nu (\text{div}(w + \bar{u}), \nabla \pi, 0) \in \mathbb{R}^{d+2}.$$

Avec les notations $U = (\pi, w) \in \mathbb{R}^{d+1}$ et F étant déterminé comme en (2.4.9), la dernière composante de F^* étant nulle, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial^k V \partial^k (F^*(D\bar{V}, DV, V)) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \partial^k U \partial^k (F(D\bar{U}, DU, U)) dx.$$

En utilisant les estimations précédentes (2.4.12)–(2.4.13)–(2.4.14) on obtient une estimation en Y_k . La définition de la norme a légèrement changé entre le cas isentropique et le cas général. Cependant, pour tout $v = (v_1, \dots, v_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$, si $v^* = (v_1, \dots, v_{d+1}, z) \in \mathbb{R}^{d+2}$ on a $\|v\|_2 \leq e^{\|s_0\|_{L^\infty}/(\gamma_0 c_v)} t v^* A_0 v^*$, par conséquent $Y_k \leq e^{\|s_0\|_{L^\infty}/(\gamma_0 c_v)} N_k$. Les estimations en Y_k obtenues dans le cas isentropique donnent donc une estimation de N_k pour le cas général.

On obtient ainsi, en ajoutant l'estimation de F obtenue dans le cas isentropique aux estimations de M. Grassin

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dN_k^2}{dt} + \frac{k+r}{1+t} N_k^2 &\leq C(1+t)^\beta N_k^2 Z + C'(1+t)^{-g_k-2} N_k Z + C(1+t)^{\beta+(\beta+1)(\nu-1)} N_k^2 Z^\nu \\ &\quad + C(1+t)^{(\beta+1)(\nu-1)-1} N_k^2 Z^{\nu-1} + C(1+t)^{(\beta+1)(\nu-1)-g_k-2} N_k Z^\nu \\ &\quad + C \sum_{\xi \in E_k} N_k Z^{2+\xi} (1+t)^{-g_k+\beta+\xi(\beta+1+\theta/2)} \end{aligned}$$

où $\beta = -g_1 - \frac{d}{2}$ et

$$E_k = \llbracket 0, k \rrbracket \cup \left\{ \frac{l}{k-1}; l \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket \right\}.$$

On choisit alors a pour avoir $\beta = 0$, i.e.

$$a = 1 + \theta/2 > 1 \text{ avec } \theta \in]0, \min(1, \frac{\gamma_0 - 1}{2})].$$

Puis on simplifie par N_k , on multiplie par $(1+t)^{g_k}$ et on somme sur k pour obtenir,

$$\frac{dZ}{dt} + \frac{a}{1+t}Z \leq C \left(Z^2 + \frac{Z}{(1+t)^2} + (1+t)^{\nu-1}Z^{\nu+1} + Z^{2+m}(1+t)^{am} \right).$$

On pose alors $\zeta(t) = (1+t)^a \exp\left(\frac{C}{1+t}\right) Z(t)$ et l'on déduit de l'inégalité ci-dessus

$$\frac{d\zeta}{dt} \leq \frac{C}{(1+t)^a} (\zeta^2 + \zeta^{\nu+1} + \zeta^{m+2}).$$

On conclut de la même façon que dans le cas isentropique en remplaçant ν par $\nu^* = \max(\nu, m+1) \geq 2$, puisqu'on a $\zeta^2 + \zeta^{\nu+1} + \zeta^{m+2} \leq 2(\zeta^2 + \zeta^{\nu^*+1})$.

2.4.3 Lemmes d'estimations 2.4.1 et 2.4.2

On montre le Lemme 2.4.1, selon lequel, avec les notations introduites dans la Section 2.4.1

$$|I| \leq C \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \|DU\|_{\mathbf{L}^\infty} \left\| \mathbf{D}^k U \right\|_{\mathbf{L}^2}^2.$$

Preuve du Lemme 2.4.1.

Si $k = 0$, $I = -\check{b} \int_{\mathbb{R}^d} \pi^\nu (\pi \operatorname{div} w + w \cdot \nabla w) dx$. Par intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned} I &= -\check{b} \frac{\nu}{\nu+1} \int_{\mathbb{R}^d} \pi^{\nu+1} \operatorname{div} w dx \\ &\leq C \left\| \pi^{\nu-1} \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\pi\|_{\mathbf{L}^2}^2 \|\operatorname{div} w\|_{\mathbf{L}^\infty}. \end{aligned}$$

Si $k \geq 1$, I est de la forme

$$I = -\check{b} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha|_1 = k} \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha \pi \partial^\alpha (\pi^\nu \operatorname{div} w) + \sum_j \partial^\alpha w_j \partial^\alpha (\pi^\nu \partial_j \pi).$$

En développant on obtient

$$I = -\check{b} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha|_1 = k} \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha (\pi) \pi^\nu \partial^\alpha (\operatorname{div} w) + \sum_j \partial^\alpha (w_j) \pi^\nu \partial^\alpha (\partial_j \pi) + T,$$

où T est une somme de termes de la forme $\int_{\mathbb{R}^d} \partial^{\alpha_0} U \partial^{\alpha_1} (\pi^\nu) \partial^{\alpha_2} U$, où U désigne ici n'importe laquelle de ses composantes et où $|\alpha_0|_1 = k$, $|\alpha_1|_1 = l$, $|\alpha_2|_1 = k+1-l$, avec $l \in \llbracket 1, k \rrbracket$ de sorte que les dérivées sont au plus d'ordre k . On traite d'abord un des termes de la somme ci-dessus pour un d -uplet $\alpha \in \mathbb{N}^d$, de taille d , c'est à dire tel que $|\alpha|_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_d = k$. Par intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha (\pi) \pi^\nu \partial^\alpha (\operatorname{div} w) + \sum_j \partial^\alpha (w_j) \pi^\nu \partial^\alpha (\partial_j \pi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \pi^\nu \sum_j \partial_j (\partial^\alpha (\pi) \partial^\alpha (w_j)) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j (\pi^\nu) \partial^\alpha (\pi) \partial^\alpha (w_j), \end{aligned}$$

Ainsi, I est une somme de termes de la forme $\int \partial^k U \partial^l(\pi^\nu) \partial^{k-l+1} U$ où $1 \leq l \leq k-1$. On a utilisé ici la notation selon laquelle $\partial^k U$ désigne $\partial^\alpha U$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha|_1 = \sum \alpha_j = k$. De plus on a fait un abus de notation consistant à écrire U pour n'importe quelle composante de $U = (\pi, w)$. Ainsi, $\partial^k U$ peut désigner $\partial^\alpha w_j$. On utilisera désormais cette notation.

Si $k \geq 1$ et $l \neq 1$, $l \neq k$, en utilisant successivement l'inégalité de Hölder et le Lemme B.1.1 de Gagliardo-Nirenberg, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \partial^k U \partial^l(\pi^\nu) \partial^{k-l+1} U \, dx &\leq \left\| \partial^k U \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \partial^l(\pi^\nu) \partial^{k-l+1} U \right\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq \left\| \partial^k U \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \partial^l(\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^2 \frac{k-1}{l-1}} \left\| \partial^{k-l+1} U \right\|_{\mathbf{L}^2 \frac{k-1}{k-l}} \\ &\leq \left\| \partial^k U \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \partial(\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1-\frac{l-1}{k-1}} \left\| \partial^k(\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{l-1}{k-1}} \\ &\quad \times \left\| \partial U \right\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1-\frac{k-l}{k-1}} \left\| \partial^k U \right\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{k-l}{k-1}}. \end{aligned}$$

On utilise ensuite le Lemme B.2.3 et l'inégalité

$$\begin{aligned} \left\| \partial(\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} &= \left\| \nu \pi^{\nu-1} \partial \pi \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq C \left\| \pi \right\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \left\| \partial \pi \right\|_{\mathbf{L}^\infty}, \end{aligned}$$

pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial^k U \partial^l(\pi^\nu) \partial^{k-l+1} U \, dx \leq C \left\| \partial^k U \right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \left\| \partial U \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \left\| \pi \right\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1}.$$

Si $k \geq 1$ et $l = k$, on doit majorer

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \partial^k U \partial^k(\pi^\nu) \partial U &\leq \left\| \partial^k U \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \partial^k(\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \partial U \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq \left\| \partial^k U \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \pi \right\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \left\| \partial^k \pi \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \partial U \right\|_{\mathbf{L}^\infty}. \end{aligned}$$

Si $k \geq 1$ et $l = 1$, on doit majorer

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \partial^k U \partial(\pi^\nu) \partial^k U &\leq \left\| \partial^k U \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \partial^k(\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \partial U \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq \left\| \partial^k U \right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \left\| \partial^1(\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^\infty}. \end{aligned}$$

Et l'inégalité $\left\| \partial^1(\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \left\| \pi \right\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \left\| \partial^1 \pi \right\|_{\mathbf{L}^\infty}$ nous permet de conclure. \square

On montre désormais le Lemme 2.4.2, selon lequel, avec les notations introduites dans la Section 2.4.1

$$J_2 \leq C(1+t)^{d_k} \left\| \mathbf{D}^k U \right\|_{\mathbf{L}^2} Z^\nu,$$

où $d_k = (\beta+1)(\nu-1) - g_k - 2$ et $\beta = -g_1 - \frac{d}{2}$.

Preuve du Lemme 2.4.2. Pour $k=0$, $J_2=0$. On considère donc ici $k \geq 1$; J_2 est alors une somme de termes de la forme $\int \partial^k U \partial^l(\pi^\nu) \partial^{k-l+1} \bar{u} \, dx$ pour $0 \leq l \leq k-1$. Le choix des

conditions initiales nous donne $U \in \mathbf{H}^m$, mais on ne sait pas si $D^2 U \in \mathbf{L}^\infty$. On distingue donc deux cas : $m > 2 + d/2$ auquel cas $D^2 U \in \mathbf{L}^\infty$ et $m \leq 2 + d/2$.

Cas $m > 2 + d/2$. On étudie différents cas selon les valeurs de k et l .

1. Si $k \geq 1$ et $l = 0$, on utilise la Proposition 2.4.1 et le Lemme B.2.3 pour obtenir l'estimation

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \pi^\nu \partial^k \pi \partial^{k+1} \bar{u} \, dx &\leq \|\pi^\nu\|_{\mathbf{L}^\infty} \left\| \partial^k U \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \partial^{k+1} \bar{u} \right\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C(1+t)^{(\beta+1)\nu} Z^\nu \left\| D^k U \right\|_{\mathbf{L}^2} (1+t)^{d/2-k-2} \\ &\leq C(1+t)^{d_k} \left\| D^k U \right\|_{\mathbf{L}^2} Z^\nu. \end{aligned}$$

En effet $k - d/2 + 2 = \beta + 1 + g_k + 2$.

2. Si $k \geq 2$ et $l = 1$, on doit majorer

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \pi^{\nu-1} \partial \pi \partial^k \pi \partial^k \bar{u} \, dx &\leq \left\| \partial^k \pi \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \partial^k \bar{u} \right\|_{\mathbf{L}^2} \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \|\partial \pi\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq C(1+t)^{d/2-k-1} (1+t)^{(\beta+1)(\nu-1)+\beta} Z^\nu \left\| \partial^k U \right\|_{\mathbf{L}^2}, \end{aligned}$$

ce qui conclut ce cas puisque $d/2 - k - 1 + \beta + (\beta+1)(\nu-1) = (\beta+1)(\nu-1) - g_k - 2$.

3. Si $k = 3$ et $l = 2$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \partial^3 \pi \partial^2 (\pi^\nu) \partial^2 \bar{u} \, dx &\leq \left\| \partial^3 \pi \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \partial^2 \bar{u} \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \left\| \partial^2 (\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq (1+t)^{-3+(\beta+1)(\nu-1)-g_2} \left\| \partial^3 U \right\|_{\mathbf{L}^2} Z^\nu. \end{aligned}$$

Ce qui se conclut par $g_2 + 3 = g_3 + 2$.

4. Si $k > 3$ et $l \in \llbracket 2, k-1 \rrbracket$, on utilise le Lemme B.1.2. En posant $q = 2\frac{k-3}{l-2}$ et $q' = 2\frac{k-3}{k-l-1}$ de sorte que $1/q + 1/q' = 1/2$. On obtient :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \partial^k \pi \partial^l (\pi^\nu) \partial^{k-l+1} \bar{u} \, dx \\ &\leq \left\| \partial^k U \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \partial^l (\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^q} \left\| \partial^{k-l+1} \bar{u} \right\|_{\mathbf{L}^{q'}} \\ &\leq \left\| \partial^k U \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| D^2 (\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1-2/q} \left\| D^{k-1} (\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^2}^{2/q} \left\| D^2 \bar{u} \right\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1-2/q'} \left\| D^{k-1} \bar{u} \right\|_{\mathbf{L}^2}^{2/q'}. \end{aligned}$$

Or

$$\left\| D^2 \bar{u} \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C(1+t)^{-3}, \quad \left\| D^{k-1} \bar{u} \right\|_{\mathbf{L}^2} \leq C(1+t)^{d/2-k},$$

et

$$\begin{aligned} \left\| D^2 (\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C \left(\|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-2} \|D\pi\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 + \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \left\| D^2 \pi \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \right) \\ &\leq C(1+t)^{(\beta+1)\nu-2} Z^\nu, \\ \left\| D^{k-1} (\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^2} &\leq C \|\pi\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \left\| D^{k-1} \pi \right\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C(1+t)^{(\beta+1)(\nu-1)-g_k+1} Z^\nu. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$J_2 \leq C(1+t)^{m_k} \left\| \mathbf{D}^k \pi \right\|_{\mathbf{L}^2} Z^\nu,$$

où

$$\begin{aligned} m_k &= -3 \left(1 - \frac{2}{q} \right) - \frac{2}{q}(1 + \beta + g_k) + \frac{2}{q}((\beta + 1)\nu - 2) \\ &\quad + \left(1 - \frac{2}{q} \right) ((\beta + 1)(\nu - 1) - g_k + 1) \\ &= (\beta + 1)(\nu - 1) - g_k - 2 \\ &= d_k. \end{aligned}$$

Cas $m \leq 2 + d/2$.

Déjà, on remarque que les calculs dans les cas $k \geq 1$ et $l = 0$, $k \geq 2$ et $l = 1$, $k = 3$ et $l = 2$ sont identiques. Il reste à traiter le cas $k > 3$ et $2 \leq l \leq k - 1$. Or $k \leq m \leq 2 + d/2$. Par conséquent, si $d = 1, 2$ ou 3 , on a nécessairement $k \leq 3$, et on a fini.

On suppose maintenant $d \geq 4$. On pose $h = \frac{1}{2}(k + 1 + d/2) > 2$. On a alors $h \leq m$ et

$$0 < h - l \leq \frac{d-1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq h - (k + 1 - l) \leq \frac{d-1}{2}.$$

On pose $h_1 = h - l$, $h_2 = h - (k + 1 - l)$ et $1/q_1 = 1/2 - h_1/d$, $1/q_2 = 1/2 - h_2/d$. On a alors $1/q_1 + 1/q_2 = 2$, ce qui permet d'utiliser l'inégalité de Hölder.

$$J_2(k, l) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial^k \pi \partial^l (\pi^\nu) \partial^{k-l+1} \bar{u} \, dx \leq \left\| \partial^k \pi \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \partial^l (\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^{q_1}} \left\| \partial^{k-l+1} \bar{u} \right\|_{\mathbf{L}^{q_2}}.$$

On applique ensuite le lemme B.1.3 pour obtenir

$$J_2(k, l) \leq C \left\| \partial^k \pi \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \mathbf{D}^n (\pi^\nu) \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \mathbf{D}^h \bar{u} \right\|_{\mathbf{L}^2}.$$

Il reste alors à utiliser le Lemme B.2.3 et la Proposition 2.4.1 :

$$J_2(k, l) \leq C \left\| \partial^k U \right\|_{\mathbf{L}^2} (1+t)^{d/2-h-1-g_h+(\beta+1)(\nu-1)} Z^\nu.$$

Et $d/2 - h - 1 - g_h + (\beta + 1)(\nu - 1) = (\beta + 1)(\nu - 1) - g_k - 2$, ce qui termine la preuve du lemme. \square

Chapitre 3

Ondes de choc

3.1 Introduction

Comme le montrent les résultats décrits au paragraphe 2.1.2, des données initiales même très régulières donnent lieu au développement de singularités (« explosion ») en temps fini dans les solutions des systèmes hyperboliques en général et des équations d'Euler en particulier. Ceci conduit à considérer des solutions faibles, c'est-à-dire des solutions au sens des distributions qui ne sont pas nécessairement continues. L'unicité des solutions faibles n'étant en général pas assurée, il faut leur imposer une condition d'admissibilité, par exemple la *condition d'entropie de Lax* [120, p.102].

Si le schéma de Glimm [55] permet de construire des solutions faibles entropiques globales pour des systèmes de lois de conservation unidimensionnels, il n'a pas d'analogue en plusieurs dimensions d'espace. La théorie des solutions faibles multidimensionnelle est encore très peu avancée, faute d'un cadre fonctionnel adapté. On peut toutefois signaler quelques résultats sur les solutions à symétrie sphérique, qui par définition satisfont un système « quasi 1D », c'est-à-dire en fait un système 1D avec des termes sources d'origine géométrique :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_r(\rho u) = -\frac{(d-1)\rho u}{r}, \\ \partial_t u + u \partial_r u + \frac{1}{\rho} \partial_r(p(\rho, s)) = 0, \\ \partial_t s + u \partial_r s = 0. \end{cases}$$

Ainsi, en modifiant le schéma de Glimm, et en considérant le problème *en-dehors d'une boule de rayon 1*, sur laquelle la vitesse s'annule, T. Yang [145, 146] montre que, pour un état parfait polytropique assez proche d'un gaz stationnaire, il existe une solution faible entropique locale en temps. Le terme source en $1/r$ est en effet non-intégrable à l'origine, ce qui crée des difficultés pour trouver des bornes \mathbf{L}^∞ sur les solutions.

Toutefois, G.-Q. Chen [29] montre l'existence globale de solutions faibles entropiques dans \mathbf{L}^∞ sur tout l'espace, pour les équations d'Euler isentropiques, pour un GPP, lorsque les conditions initiales satisfont

$$0 \leq 2\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}}c_0 = \frac{2}{\gamma-1}\rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}} \leq u_0 < +\infty.$$

Dans le même contexte (équations d'Euler isentropiques et GPP), mais pour des données initiales plus générales, N. Tsuge [134, 135] montre grâce à un schéma de Godunov [61]

modifié, d'une part l'existence locale de solutions faibles entropiques à symétrie sphérique sur tout l'espace et d'autre part l'existence globale de solutions faibles entropiques *en-dehors d'une boule de rayon 1*.

Dans ce qui suit, on se concentre sur les solutions faibles régulières par morceaux, et plus particulièrement sur les solutions régulières de part et d'autre d'une seule surface de discontinuité, que l'on appelle *ondes de choc*. Par définition, une onde de choc doit satisfaire la condition de Rankine-Hugoniot à travers le front du choc. Elle doit en outre satisfaire une condition d'admissibilité, la condition de choc de Lax [120, p. 131] étant la plus commode (et équivalente à la condition d'entropie de Lax pour les chocs de faible amplitude). Des ondes de choc peuvent être observées expérimentalement ou calculées numériquement, mais il n'existe aucun résultat général d'existence globale en plusieurs dimensions d'espace.

Pour les chocs plans, le problème se réduit au cas unidimensionnel, ce qui simplifie les conditions de Rankine-Hugoniot, et se résout de manière essentiellement algébrique : on trouve des chocs plans avec des états constants de part et d'autre d'un front se déplaçant à vitesse constante.

Le cas des chocs sphériques est déjà plus compliqué. Il a été très étudié parallèlement au développement de la bombe atomique. Des solutions *autosimilaires*, pour lesquelles le nombre de variables est réduit, ont pu être déduites de considérations dimensionnelles et comparées favorablement à des résultats enregistrés lors d'essais nucléaires [83, 131]. Ce domaine de recherche est toujours actif pour étudier par exemple des phénomènes tels que la cavitation ou la sonoluminescence [18].

En ce qui concerne des chocs multidimensionnels « quelconques », le principal résultat d'existence est dû à A. Majda [98, 99] : c'est un résultat d'existence locale. On l'énonce ici dans le cas simple d'un gaz isentropique en dimension deux, afin de ne pas alourdir les notations, mais il est valable en dimension 3, et s'étend aux équations d'Euler complètes (cf. [14, p.381]).

Théorème 3.1.1. *Soit Σ_0 une courbe \mathcal{C}^∞ compacte de \mathbb{R}^2 séparant l'espace en deux parties : Ω_- (bornée) et Ω_+ (non-bornée). Soient $(\rho_0^-, u_0^-) \in \mathbf{H}^m(\Omega_-)$ et $(\rho_0^+, u_0^+) \in \mathbf{H}^m(\Omega_+ \cap B(0, R_0))$, pour $m \geq 10$. On suppose qu'il existe une fonction $U \in \mathbf{H}^m(\Sigma_0)$ de sorte que*

1. *les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaites sur Σ_0 pour la vitesse U ,*
2. *les conditions de compatibilité (cf. [98, p. 24] et [14, p. 270,319])*

$$\partial_t^k \left((u^- - u^+)^2 - \left(\frac{1}{\rho^-} - \frac{1}{\rho^+} \right) (p^+ - p^-) \right) \Big|_{t=0} = 0$$

sont satisfaites sur Σ_0 jusqu'à l'ordre $k = 7$,

3. *la condition de choc de Lax*

$$u_0^+(\alpha) \cdot \nu(\alpha) + \sqrt{\partial_\rho p(\rho_0^+(\alpha))} < U(\alpha) < u_0^-(\alpha) \cdot \nu(\alpha) + \sqrt{\partial_\rho p(\rho_0^-(\alpha))} \quad (3.1.1)$$

est satisfaite pour tout $\alpha \in \Sigma_0$, $\nu(\alpha)$ étant la normale unitaire à Σ_0 pointant vers Ω_+ en α ,

4. *la condition de stabilité suivante est satisfaite :*

$$\frac{[p(\rho)]}{[\rho]} < \partial_\rho p(\rho_0^-(\alpha)) + (u_0^-(\alpha) \cdot \nu - U(\alpha))^2,$$

pour tout $\alpha \in \Sigma_0$.

Alors il existe $T > 0$, une hypersurface \mathcal{C}^2 , $\Sigma(t)$ définie pour $t \in [0, T]$, \mathbf{H}^{m+1} par rapport à t , et une solution \mathcal{C}^1 par morceaux satisfaisant les équations d'Euler isentropique (1.1.15) de part et d'autre de $\Sigma(t)$, les conditions de Rankine-Hugoniot (1.4.2) et de choc de Lax (3.1.1) au niveau de $\Sigma(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Il existe néanmoins quelques résultats d'existence en temps grand d'ondes de choc, qu'il s'agisse du cas particulier des solutions autosimilaires ou des résultats généraux de P. Godin [56, 57, 58]. Dans [57], il s'intéresse en particulier aux fluides isentropiques irrotationnels, ce qui comprend les solutions à symétrie sphérique, et il obtient l'existence globale pour des solutions assez proches d'une solution radiale dont le front est le cône $r/t = \sigma > 0$.

La plupart des résultats connus concernent des gaz parfaits polytropiques. Or, dans certaines limites (hautes pressions, températures, ...), le comportement des gaz parfaits est très éloigné des gaz « réels ». Une loi thermodynamique plus réaliste est celle des gaz de Van der Waals (voir paragraphe 1.1.2). Un des objectifs ici est donc d'étendre les résultats connus d'existence en temps long d'ondes de choc pour les gaz parfaits polytropiques à des gaz plus réalistes, tels que les gaz de Van der Waals, sur lesquels la littérature mathématique est beaucoup plus limitée. Le cas vraiment multidimensionnel semblant hors d'atteinte, on adoptera plusieurs approches « simplificatrices » :

- autosimilaire, se ramenant à un problème d'EDO,
- 1D/quasi-1D, d'après Li Ta Tsien,
- géométrique, d'après Chisnell–Chester–Whitham [31, 33, 34, 143].

Les deux premières ont déjà été abordées dans le contexte des solutions régulières au chapitre précédent. La troisième se concentre sur les aspects géométriques de la propagation des ondes de choc, et fournit une équation approchée pour la position du front : il s'agit d'une EDP hyperbolique non-linéaire du second ordre.

3.2 Solutions autosimilaires

L'étude des ondes de choc à symétrie sphérique est motivée par ses applications dans de nombreux domaines tels que l'astrophysique, mais aussi en science nucléaire et en physique des plasmas. Les solutions autosimilaires pour un choc fort généré par l'apport d'une grande énergie en un point à un instant donné dans un gaz parfait polytropique au repos ont été tout d'abord présentées par G. I. Taylor [130, 131], J. Von Neumann [62] et L. I. Sedov [119]. Ce modèle a ensuite été repris par S. Murata [106], E. Waxman & D. Shvarts [141] lorsque l'explosion se produit dans gaz parfait polytropique dont la densité varie. Une autre approche a également été développée par A. Sakurai [118] et S. Takahashi [129], en introduisant deux nouvelles variables : d'une part la variable d'autosimilarité ξ et d'autre part le nombre de Mach. Lorsque le nombre de Mach est infini, Takahashi obtient les solutions autosimilaires classiques, puis il linéarise les équations considérées autour de $M = \infty$ afin de trouver des solutions proches des solutions autosimilaires lorsque M est grand.

La focalisation d'onde de choc a également reçu beaucoup d'attention depuis les années 1940, des points de vue physique et mathématique. Le phénomène de focalisation est en effet un des moyens de générer des hautes pressions et températures au point de convergence, ce qui est en particulier responsable du phénomène de *sonoluminescence* : une bulle d'air étant comprimée par des ondes sonores, un choc se crée dans la bulle et au moment de l'implosion, de la lumière est émise. Les applications de la focalisation sont par ailleurs nombreuses, par exemple en médecine, où les ondes de choc sont utilisées pour traiter les calculs rénaux.

L'étude théorique de ce phénomène a tout d'abord été menée par G. Guderley [66] en 1942. On note également, concernant les gaz parfaits polytropiques, les contributions de Chisnell [33, 34], Whitham [143]. Leurs résultats sont obtenus par intégration numérique d'un système d'EDO, après introduction de la variable d'autosimilarité, en faisant l'hypothèse des chocs fort $M \gg 1$, dans le cas des GPP. Chisnell dans [34] donne de plus une description théorique du système d'EDO obtenu en étudiant les points fixes du système. Dans le cas des gaz de Van der Waals, C. C. Wu & P. H. Roberts [144] étudient de même un système d'EDO sous l'hypothèse des chocs forts, ce qui leur donne une valeur approchée du *coefficient d'autosimilarité*. H. Steiner & T. Hirschler [127] font de même dans le cas d'une gaz poussiéreux, en supposant que le choc est dû au mouvement d'un piston, de vitesse connue.

Une autre technique souvent employée, en particulier pour un problème de piston sphérique (où la vitesse du piston est connue), est celle du développement en série (en puissances de t) de la forme $\sum_n f_n(r)t^n$: par exemple Sachdev [115] donne ainsi une expression de solution autosimilaire. Cette technique de développement en série est reprise par G. Madhumita & V. D. Sharma [97] qui considèrent un milieu où la densité est variable. Cette technique est également reprise par R. Arora & V. D. Sharma [8] dans le cas d'un gaz de Van der Waals.

3.2.1 Explosions

Un modèle simple d'onde de choc sphérique concerne les explosions fortes dans un gaz initialement homogène et au repos. Supposons qu'on injecte au temps $t = 0$ une très grande énergie E au point O dans un gaz de densité $\rho_1 = \text{cste}$, de vitesse $u_1 = 0$, d'énergie $e_1 = \text{cste}$. Ceci produit très vraisemblablement une onde de choc sphérique en l'absence d'obstacles. En utilisant l'analyse dimensionnelle (cf. [62, 82, 83, 130, 131] ou encore Sedov [119, chap. 4], Whitham [143, chap. 6.16]), on trouve facilement que les seules quantités sans dimension que l'on peut former avec des puissances fractionnaires de ρ_1 , E , t et $R(t)$ (le rayon du choc à l'instant t) sont $A := R(t)\rho_1^{1/5}(Et^2)^{-1/5}$ et les puissances fractionnaires de A . Le modèle dit de Sedov-Taylor suppose en effet que $R(t)$ est de la forme $R(t) = A \left(\frac{Et^2}{\rho_1}\right)^{1/5}$ avec A constant et sans dimension. Ceci implique en particulier que la vitesse normale du choc est

$$U = R'(t) = \frac{2}{5}A \left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \frac{A^{5/2} E^{1/2}}{\rho_1^{4/5} R(t)^{3/2}}.$$

On peut aussi en déduire la surpression due au choc grâce aux conditions de Rankine-Hugoniot. En supposant que $M = \frac{U}{c_1} \gg 1$, les relations de Rankine-Hugoniot (1.4.5)–(1.4.6)–(1.4.7) impliquent pour un gaz de Van der Waals

$$w(1) = \frac{M^2(\gamma_0 + 1)}{M^2(\gamma_0 - 1 + 2b\rho_1) + 2(1 - b\rho_1)}, \quad (3.2.1)$$

$$y(1) = \frac{2(1 - b\rho_1)(M^2 - 1)}{(\gamma_0 + 1)M^2}, \quad (3.2.2)$$

$$z(1) = \frac{(M^2(\gamma_0 - 1 + 2b\rho_1) + 2(1 - b\rho_1))^2}{M^4(\gamma_0 + 1)^2} \frac{2\gamma_0 M^2 - (\gamma_0 - 1)}{M^2(\gamma_0 - 1) + 2}. \quad (3.2.3)$$

Pour $M \gg 1$, on obtient alors les relations approchées :

$$\begin{aligned} u_2 &\approx \frac{2(1-b\rho_1)}{\gamma_0+1}U, & \frac{\rho_2}{\rho_1} &\approx \frac{\gamma_0+1}{\gamma_0-1+2b\rho_1}, \\ \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 &\approx \frac{2\gamma_0}{\gamma_0-1} \frac{(\gamma_0-1+2b\rho_1)^2 M^2}{(\gamma_0+1)^2}, & \frac{p_2}{p_1} &\approx \frac{2\gamma_0 M^2}{\gamma_0+1}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression permet notamment d'estimer qu'en pratique la surpression se comporte comme $\frac{E}{R^3}$, ce qui est utilisé pour délimiter des zones de danger autour des installations pyrotechniques (arrêté du 26/09/1980)! On note

$$\xi = \frac{r}{R(t)}, \quad \rho = \rho_1 w(\xi), \quad u = \frac{\alpha r}{t} y(\xi), \quad c^2 = \frac{\gamma_0 p}{\rho(1-b\rho)} = \left(\frac{\alpha r}{t}\right)^2 z(\xi), \quad (3.2.4)$$

où ρ_1 est une constante, avec $R(t) = \tilde{A}t^\alpha$ et $\tilde{A} = AE^{1/5}\rho_1^{-1/5}$, $\alpha = 2/5$. Avec ce choix de la variable autosimilaire qui ramène la position du choc à $\xi = 1^-$, les expressions ci-dessus deviennent

$$w(1) \approx \frac{\gamma_0+1}{\gamma_0-1+2b\rho_1}, \quad (3.2.5)$$

$$y(1) \approx \frac{2(1-b\rho_1)}{(\gamma_0+1)}, \quad (3.2.6)$$

$$z(1) \approx \frac{2\gamma_0(\gamma_0-1+2b\rho_1)^2}{(\gamma_0-1)(\gamma_0+1)^2}. \quad (3.2.7)$$

Sous l'hypothèse de choc fort $M \gg 1$, on peut résoudre analytiquement ou numériquement l'EDO (2.2.9) obtenue après changement de variable $(t, x) \mapsto (t, \xi)$, avec égalité dans les conditions (3.2.5)–(3.2.6)–(3.2.7) en $\xi = 1$ et estimer A en considérant que l'énergie totale de la zone derrière le choc est constante et égale à E . On obtient

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho_1 R(t)^5}{t^2 A^5} = \int_0^{R(t)} \left(\frac{(1-b\rho)^2 \rho c^2}{\gamma_0(\gamma_0-1)} + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{\rho_1 R(t)^5}{t^2} \int_0^1 \frac{16\pi}{25} \xi^4 w \left(\frac{(1-b\rho_1 w)^2}{\gamma_0(\gamma_0-1)} z + \frac{y^2}{2} \right) d\xi, \end{aligned}$$

d'où l'on peut déduire la valeur de A .

3.2.2 Implosions

Pour la focalisation d'une onde de choc dans un gaz au repos de densité constante ρ_1 , on suppose de même que dans le cas de l'explosion qu'un choc se situe en $R(t) = A|t|^\alpha$, avec $t < 0$ (voir Figure 3.1). Le choc atteint donc l'origine en $t = 0$. En posant $\xi = \frac{r}{A|t|^\alpha}$, ceci revient de nouveau à considérer que le choc a lieu en $\xi = 1$. On s'intéresse désormais à la zone $\{(t, r); A|t|^\alpha = R(t) \leq r \leq +\infty; t < 0\}$, c'est-à-dire que la variable d'autosimilarité ξ prend ses valeurs dans l'intervalle $]1, +\infty[$. On ne peut plus donner a priori de valeur pour α car on a une donnée de moins : l'énergie totale est une inconnue du problème. Mais puisqu'on souhaite que $R \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$, et que $U = R'(t)$ soit grand quand $t \rightarrow 0$, on est amené à supposer au moins $\alpha \in]0, 1[$.

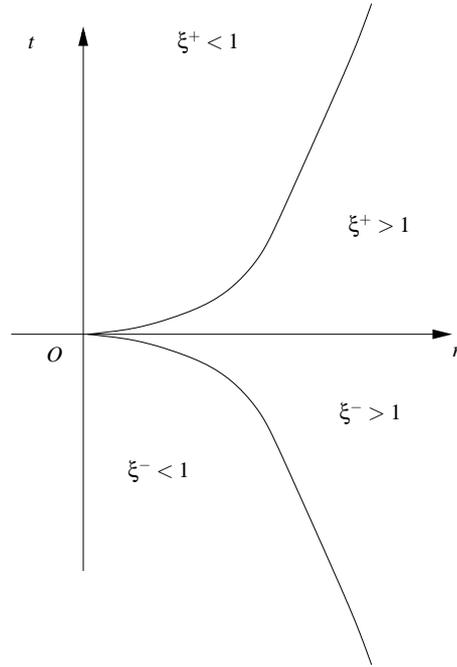


FIGURE 3.1 – Courbe de choc et lieux où $\xi > 1$, $\xi < 1$.

Par la Proposition 2.2.2, on sait alors que, avec les notations de la section 2.2.3, $(w, y, z)(\infty)$ est sous le cylindre parabolique d'équation $z = (y - 1)^2$, c'est-à-dire $z(\infty) - (y(\infty) - 1)^2 < 0$. De plus, les conditions de Rankine-Hugoniot donnent de nouveau (3.2.1)–(3.2.2)–(3.2.3), et dans l'hypothèse d'un choc fort (3.2.5)–(3.2.6)–(3.2.7). On a donc, si $M \geq 1$,

$$z(1) - (y(1) - 1)^2 = \frac{(M^2(\gamma_0 - 1 + 2b\rho_1) + 2(1 - b\rho_1))^2 (\gamma_0 + 1)(M^2 - 1)}{M^4(\gamma_0 + 1)^2 M^2(\gamma_0 - 1) + 2} \geq 0.$$

Le point $(w, y, z)(1)$ est donc au-dessus du cylindre parabolique d'équation $z = (y - 1)^2$. Par conséquent, pour trouver une solution satisfaisant ces conditions aux bords en 1 et en $+\infty$, il faut autoriser la trajectoire décrite par (w, y, z) à traverser la surface d'équation $z = (y - 1)^2$, qui est singulière pour le système d'EDO (2.2.9). Il faut donc passer par un point pour lequel Q et Δ s'annulent simultanément, puisqu'alors la singularité peut être fictive.

On souligne que les solutions autosimilaires trouvées ici ne sont pas des solutions exactes des équations d'Euler, puisqu'on a fait une approximation au niveau des conditions de saut. Cependant quelques auteurs (A. Sakurao, S. Takahashi [118, 129]) traitent le cas exact, en étudiant l'équation linéarisée autour de la solution approchée, dans la limite des chocs forts.

3.3 Construction analytique d'ondes de choc

Pour une équation scalaire $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ avec $f \in \mathcal{C}^1$ et lipschitzienne, on peut toujours juxtaposer deux solutions régulières globales afin de former une onde de choc

globale. En effet, il n'y a alors qu'une seule condition de Rankine-Hugoniot à satisfaire : elle permet de déterminer le lieu de la discontinuité en résolvant l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = \frac{f(u^+(t, X)) - f(u^-(t, X))}{u^+(t, X) - u^-(t, X)},$$

dont les solutions sont globales car f étant lipschitzienne, on a $\left| \frac{f(u^+(t, X)) - f(u^-(t, X))}{u^+(t, X) - u^-(t, X)} \right| \leq \|f'\|_{\mathbf{L}^\infty} < \infty$. On souhaite ici prolonger cette idée pour un système isentropique unidimensionnel, ce qui réduit le nombre d'équations à deux. Cependant, lorsque que le nombre d'équations augmente, le nombre de conditions au niveau du choc augmente également et il faut alors respecter des conditions de compatibilité. On a alors un problème de réflexion des caractéristiques à derrière le choc (cf. Figure 3.2), contrairement au cas 1D pour lequel les caractéristiques sont toutes rentrantes au niveau du choc. Dans ce contexte, on découple

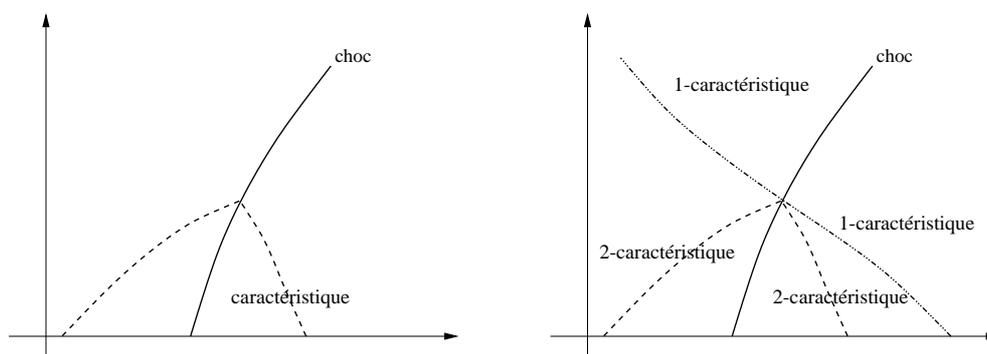


FIGURE 3.2 – Courbe de choc et caractéristiques dans le cas scalaire (à gauche) et dans le cas d'un système de deux équations (à droite).

le problème : d'une part on résout deux problèmes avec conditions initiales régulières, en prolongeant les données initiales à droite et à gauche de manière régulière sur tout le domaine. En se servant de la vitesse finie de propagation, on peut extraire de ces solutions régulières des solutions correspondant aux conditions initiales de droite et de gauche sur des domaines « tronqués ». Il reste ensuite à trouver une solution aux équations d'Euler dans un domaine angulaire (voir Figures 3.3 et 3.4). Dans le cas isentropique unidimensionnel sans terme source, les résultats exposés ici sont directement issus de Li Ta Tsien [88, chap. 6 & 7], cependant on en redonne la preuve, dans un souci de clarté, mais aussi dans le but de prolonger ces calculs dans le cas « avec source ». Ce dernier cas recouvre notamment le cas des symétries cylindrique et sphérique et fera l'objet du paragraphe 3.3.2.

3.3.1 Fluide isentropique unidimensionnel

De même qu'au paragraphe 2.3.1, on s'intéresse à des fluides unidimensionnels isentropiques. Les équations régissant l'écoulement du fluide présentent l'avantage d'admettre des invariants de Riemann forts permettant de tirer parti de calculs le long des caractéristiques. Elles se mettent en effet sous la forme (2.3.1) (cf. paragraphe 2.3.1) :

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \lambda_1(w) \partial_x w_1 = 0, \\ \partial_t w_2 + \lambda_2(w) \partial_x w_2 = 0, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

où

$$w_1 = u - H(\rho), \quad w_2 = u + H(\rho), \quad \lambda_1 = u - c(\rho), \quad \lambda_2 = u + c(\rho), \quad (3.3.2)$$

la fonction H satisfaisant $H'(\rho) = \frac{c(\rho)}{\rho}$. On a $\lambda_1 < \lambda_2$ dans $\{\rho > 0\}$ et l'on a vu au paragraphe 2.3.1 que $\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} > 0$, $\frac{\partial \lambda_2}{\partial w_2} > 0$. Rappelons que les conditions de Rankine-Hugoniot (voir paragraphe 1.4) associées aux conditions d'entropie de Lax donnent pour un 2-choc :

$$U = \frac{\rho u - \rho^+ u^+}{\rho - \rho^+}, \quad u - u^+ = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^+}\right) (p^+ - p)}, \quad (3.3.3)$$

$$\rho > \rho^+, \quad p > p^+, \quad (3.3.4)$$

$$\lambda_1(w^-) < U(w^+, w^-) < \lambda_2(w^-), \quad U(w^+) \geq \lambda_2(w^+), \quad (3.3.5)$$

d'où en particulier

$$U = \left(H^{-1}\left(\frac{w_2 - w_1}{2}\right) \frac{w_2 + w_1}{2} - \rho^+ u^+ \right) \left(H^{-1}\left(\frac{w_2 - w_1}{2}\right) - \rho^+ \right)^{-1}.$$

On reprend ici les idées de T. T. Li [88, Chap. 7] pour montrer le théorème suivant.

Théorème 3.3.1. *Soit un fluide compressible de Bethe-Weyl isentropique unidimensionnel. On considère le problème de Cauchy associé aux conditions initiales (ρ_0, u_0) , \mathcal{C}^1 par morceaux, telles que $(\rho_0, u_0) = (\rho_0^-, u_0^-) \in \mathcal{C}^1([-\infty, 0]; \mathbb{R}^2)$ pour $x \leq 0$, $(\rho_0, u_0) = (\rho_0^+, u_0^+) \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[; \mathbb{R}^2)$ pour $x \geq 0$ et satisfaisant, pour un certain $\delta > 0$, $\rho_0^- \geq \delta > 0$, $\rho_0^+ \geq \delta > 0$, $\min w_{2,0}^- - \max w_{2,0}^+ \geq \delta$, $\max w_{1,0}^- - \min w_{1,0}^+ \leq -\delta$, ainsi que*

$$w_{1,0}^- ' = u_0^- '(x) - \frac{c(\rho_0^-)}{\rho_0^-} \rho_0^- '(x) \geq 0, \quad (3.3.6)$$

$$w_{2,0}^- ' = u_0^- '(x) + \frac{c(\rho_0^-)}{\rho_0^-} \rho_0^- '(x) \leq 0. \quad (3.3.7)$$

On suppose de plus que

- les états $(\rho_0^-(R_0), u_0^-(R_0))$ et $(\rho_0^+(R_0), u_0^+(R_0))$ sont reliés par un 2-choc (dans le plan de phase ils sont sur le même 2-ensemble de Hugoniot), c'est-à-dire

$$u_0^-(R_0) - u_0^+(R_0) = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_0^-(R_0)} - \frac{1}{\rho_0^+(R_0)}\right) (p(\rho_0^+(R_0)) - p(\rho_0^-(R_0)))}.$$

- les conditions de 2-choc de Lax (3.3.4)–(3.3.5) sont satisfaites au temps $t = 0$ en $x = R_0$,
- les conditions initiales (ρ_0^\pm, u_0^\pm) peuvent se prolonger de manière à avoir existence globale,
- pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\partial_x w_1^+ \geq \partial_x w_2^+$.

Sous ces hypothèses, il existe une solution \mathcal{C}^1 de part et d'autre d'une courbe passant par $(0, R_0)$ de (3.3.1)–(3.3.2) avec conditions initiales $(w_{1,0}, w_{2,0})$ au moins jusqu'au temps

$$T_0 = \frac{e^{\max k(w^-) - \min k(w^-)}}{\min(\partial_2 \lambda_2^-) \min(-w_{2,0}^- ')},$$

où λ_2 et w_2 sont définis comme en (3.3.2) et où k vérifie $\partial_1 k = \frac{\partial_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

Si de plus $w_{2,0}^- ' = u_0^- ' + \frac{c_0^-}{\rho_0^-} \rho_0^- ' \equiv 0$, alors cette solution est globale.

Si la solution régulière obtenue par prolongement des données initiales (ρ_0^+, u_0^+) existe jusqu'au temps T_{ex} , alors le théorème précédent est encore valide pour le temps d'existence $T = \min(T_{\text{ex}}, T_0)$.

Afin de prouver ce théorème, on va résoudre trois problèmes :

- deux problèmes de Cauchy réguliers pour des données initiales obtenues par prolongement de w_0^\pm ,
- un problème aux limites dans un domaine « angulaire » à frontière libre $D = \{(t, x) \mid t \geq 0, x_1(t) \leq x \leq x_2(t)\}$, la courbe \mathcal{C}_1 est la 1-caractéristique issue de R_0 à gauche, la courbe \mathcal{K} est « libre », c'est la trajectoire du choc, voir Figure 3.3.

Le problème à frontière libre revient à chercher des solutions au système (2.3.1) dans D vérifiant des conditions aux bords du type

$$w_2(t, x_1(t)) = \omega(t), \quad w_1(t, x_2(t)) = g(t, x_2(t), w_2(t, x_2(t))), \quad (3.3.8)$$

où $\mathcal{C}_1 = \{(t, x_1(t))\}$ et $\mathcal{K} = \{(t, x_2(t))\}$ sont des courbes telles que

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1(w(t, x_1)), \quad x_1(0) = R_0, \quad (3.3.9)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = U(t, w(t, x_2(t))), \quad x_2(0) = R_0. \quad (3.3.10)$$

la vitesse U étant celle d'un 2-choc reliant $w^-(t, x_2(t))$ à $w^+(t, x_2(t))$ définie par la première équation de (3.3.3). Par la suite, le but sera de recoller continûment w à w^- .

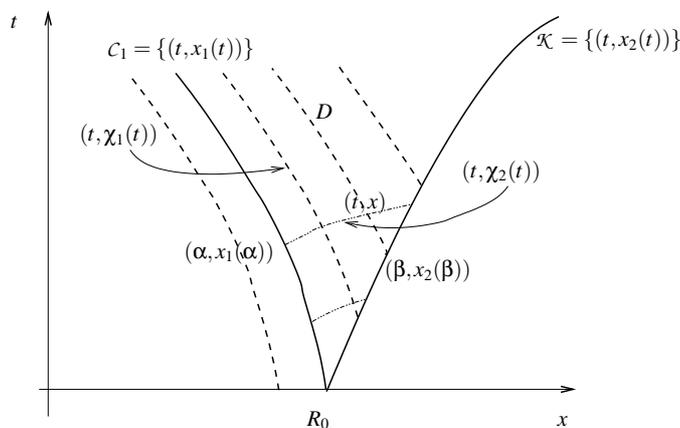


FIGURE 3.3 – Domaine angulaire D et les différentes courbes associées.

De plus, on a (3.3.5) le long de \mathcal{K} , ce qui signifie que les 2-caractéristiques sont sortantes de D et les 1-caractéristiques rentrantes dans D le long de \mathcal{K} . D'autre part, (3.3.3) définit implicitement $g(t, x, w_2)$, au moins localement. En effet on écrit (3.3.3) sous la forme

$$\mathcal{F}(t, x, w) = \tilde{\mathcal{F}}(w^+(t, x), w), \quad \tilde{\mathcal{F}}(w^+, w) = u - u^+ - \sqrt{F(\rho^+, \rho)}, \quad (3.3.11)$$

avec $F(\rho^+, \rho) = (\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^+})(p(\rho^+) - p(\rho))$. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w_1} &= \frac{1}{4\sqrt{F}} \left(2\sqrt{F} + \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho) \frac{\rho}{c} \right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{F}} \left(2\sqrt{(p-p^+)\left(\frac{1}{\rho^+} - \frac{1}{\rho}\right)} + \rho c \left(\frac{1}{\rho^+} - \frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho c}(p-p^+) \right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{F}} \left(\sqrt{\rho c \left(\frac{1}{\rho^+} - \frac{1}{\rho}\right)} + \sqrt{\frac{1}{\rho c}(p-p^+)} \right)^2 \\ &> 0. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

On suppose que $\tilde{\mathcal{F}}(w^+(0, R_0), w(0, R_0)) = 0$, c'est-à-dire que la condition de saut donnée par la deuxième équation de (3.3.3) est satisfaite au temps $t = 0$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe donc (localement) une unique fonction $g(t, x, w_2)$ telle que $\mathcal{F}(t, x, g(t, x, w_2), w_2) = 0$.

On remarque que si $(\rho^+, u^+) \equiv (\bar{\rho}, 0)$ est une solution stationnaire des équations d'Euler isentropiques en une dimension d'espace, alors g et U ne dépendent que de w_2 et pas de (t, x) .

Si l'on suppose que (ρ^+, u^+) est \mathcal{C}^1 et que $\rho - \rho^+ \geq \delta > 0$, on obtient, pour $t \in [0, T]$, $|w_2| < B$, pour des constantes $C_0(T, B)$ et $C_1(T, B)$ ne dépendant que de T et B ,

$$|U(t, x, g(t, x, w_2), w_2)| \leq C_0(T, B) + C_1(T, B)|x|. \tag{3.3.13}$$

En reprenant les calculs de [88, Chap. 7], on obtient le théorème.

Théorème 3.3.2. *Soit $(\rho^+, u^+) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Pour un fluide compressible isentropique unidimensionnel, le système angulaire (3.3.1)–(3.3.2)–(3.3.8)– admet une solution \mathcal{C}^1 , locale en temps dans un domaine D_T vérifiant (3.3.3)–(3.3.9)–(3.3.10) au bord de D . De plus, sous les hypothèses*

1. les inégalités (3.3.4)–(3.3.5)–(3.3.13) sont satisfaites,
2. l'application ω est croissante bornée sur $[0, T_{ex}[$,
3. la condition de saut à $t = 0$ $\mathcal{F}(0, R_0, g(0, R_0, \omega(0)), \omega(0)) = 0$ est satisfaite,
4. on a $\partial_t g + U \partial_x g \geq 0$ le long de \mathcal{K} ,
5. l'application g est bornée sur $([0, T] \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{K} \times [-B, B]$ pour tout $B > 0$,

cette solution existe au moins jusqu'au temps

$$T_0 = \min_{\alpha \geq 0} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(w(\alpha, x_1(\alpha)))e^{\max k(w)}}{e^{k(w(\alpha, x_1(\alpha)))} \omega'(\alpha) \min \partial_2 \lambda_2}. \tag{3.3.14}$$

En particulier, si $\omega' \equiv 0$, on a existence globale. On a également existence globale si en plus des hypothèses ci-dessus on a l'estimation a priori

$$\min \lambda_2 > \max U, \tag{3.3.15}$$

et si $0 \leq t\omega'(t) \leq \varepsilon$, pour ε assez petit satisfaisant (3.3.23).

Remarque 3.3.3. On peut exprimer la condition 4 en fonction de \mathcal{F} . En effet, en dérivant par rapport à t l'expression $\mathcal{F}(t, x_2(t), g(t, x_2(t), w_2), w_2) = 0$ on obtient, en notant $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial w_1}$ et $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial w_2}$,

$$\partial_t \mathcal{F} + U \partial_x \mathcal{F} + \partial_1 \mathcal{F} (\partial_t g + U \partial_x g) = 0,$$

c'est à dire

$$\partial_t g + U \partial_x g = - \frac{\partial_t \mathcal{F} + U \partial_x \mathcal{F}}{\partial_1 \mathcal{F}}.$$

Or, d'après (3.3.12), $\partial_1 \mathcal{F} > 0$, par conséquent, $\partial_t g + U \partial_x g$ est du signe de $-(\partial_t \mathcal{F} + U \partial_x \mathcal{F})$ et la condition 4 peut s'écrire

$$\partial_t \mathcal{F} + U \partial_x \mathcal{F} \leq 0, \quad \text{le long de } \mathcal{K}.$$

Preuve. D'après T. T. Li & W. C. Yu [89, Chap. 3], ce problème admet une solution locale en temps. Afin d'obtenir une estimation du temps d'existence d'une solution classique sur D , il suffit d'établir une estimation *a priori* de $\|w\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(D_T)}$, sur tout domaine $D_T = \{(t, x) \in D \mid t \in [0, T]\}$ (voir T. T. Li [88, Chap. 6, pp. 191–196]).

Estimations dans \mathcal{C}^0 . Étant donnée une solution régulière de (3.3.1)–(3.3.2)–(3.3.8) dans D_T à valeurs dans \mathcal{W} , et un point $(t_0, x_0) \in D_T$, on introduit les courbes caractéristiques définies par

$$\text{1-caractéristique :} \quad \frac{d\chi_1}{dt} = \lambda_1(w(t, \chi_1(t))), \quad \chi_1(t_0) = x_0, \quad (3.3.16)$$

$$\text{2-caractéristique :} \quad \frac{d\chi_2}{dt} = \lambda_2(w(t, \chi_2(t))), \quad \chi_2(t_0) = x_0. \quad (3.3.17)$$

Sachant que les caractéristiques d'une même famille ne se croisent pas (la solution étant régulière sur D_T), et que pour tout $w \in \mathcal{W}$ on a $\lambda_2(w) > \lambda_1(w)$, la 2-caractéristique passant par un point $(t, x) \in D_T$ croise \mathcal{C}_1 en un unique point $(\alpha(t, x), x_1(\alpha(t, x)))$ tel que $\alpha(t, x) \leq t$ (voir Figure 3.3). De plus, pour tout $(t, x) \in D_T$, $\alpha(t, x) \leq t \leq T$. De même, la 1-caractéristique passant par $(t, x) \in D_T$ croise \mathcal{K} en un unique point $(\beta(t, x), x_2(\beta(t, x)))$ et $\beta(t, x) \leq t \leq T$.

D'après la forme diagonale de (3.3.1), on a de plus

$$\frac{d}{dt}(w_1(t, \chi_1(t))) = 0, \quad \frac{d}{dt}(w_2(t, \chi_2(t))) = 0.$$

Par conséquent, $w_2(t, x) = \omega(\alpha(t, x))$ et donc w_2 est bornée sur D_T par $\|\omega\|_{\mathbf{L}^\infty}$. De même $w_1(t, x) = w_1(\beta, x_2(\beta)) = g(\beta, x_2(\beta), w_2(\beta, x_2(\beta)))$, ce qui implique que w_2 et w_1 sont bornées uniformément en temps, puisque ω et g sont bornées sur $[0, T]$. D'autre part,

$$x_2(t) = R_0 + \int_0^t U(\tau, x_2(\tau), g(\tau, x_2(\tau), w_2(\tau, x_2(\tau))), w_2(\tau, x_2(\tau))) \, d\tau.$$

Par conséquent, par (3.3.13) on a $|U| \leq C_0(T, \|w_2\|_{\mathbf{L}^\infty}) + |x|C_1(T, \|w_2\|_{\mathbf{L}^\infty})$,

$$|x_2(t)| \leq C_0(T, \|w_2\|_{\mathbf{L}^\infty}) + C_1(T, \|w_2\|_{\mathbf{L}^\infty}) \int_0^t |x_2(\tau)| \, d\tau,$$

ce qui permet de conclure par le lemme de Gronwall que x_2 reste bien bornée sur $[0, T[$.

Estimations dans \mathcal{C}^1 . Au vu du système (3.3.1), il suffit d'estimer $\partial_x w_1$ et $\partial_x w_2$, les dérivées temporelles se déduisant des dérivées spatiales. On introduit alors (cf. Lax [85]) $v_1 = e^{h(w)} \partial_x w_1$ et $v_2 = e^{k(w)} \partial_x w_2$ où h et k vérifient

$$\partial_2 h = \frac{\partial_2 \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \partial_1 k = \frac{\partial_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Après calcul, on trouve

$$\partial_t v_2 + \lambda_2 \partial_x v_2 = -e^{-k} (\partial_2 \lambda_2) v_2^2,$$

ce qui implique

$$\frac{-1}{v_2^2} \frac{d}{dt} (v_2(t, \chi_2(t))) = e^{-k} \partial_2 \lambda_2.$$

Par conséquent, en intégrant de $\alpha(t, x)$ à t , on obtient

$$\frac{1}{v_2(t, x)} = \frac{1}{v_2(\alpha, x_1(\alpha))} + \int_{\alpha}^t e^{-k(w(s, \chi_2(s)))} \partial_2 \lambda_2(w(s, \chi_2(s))) ds.$$

Or, par (3.3.1) et (3.3.8), on a $\partial_x w_2(\alpha, x_1(\alpha)) = \frac{\omega'(\alpha)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha, x_1(\alpha))}$, donc

$$v_2(t, x) = \frac{e^{k(w(\alpha, x_1(\alpha)))} \omega'(\alpha)}{A(t)}, \quad (3.3.18)$$

où

$$A(t) = e^{k(w(\alpha, x_1(\alpha)))} \omega'(\alpha) \int_{\alpha}^t e^{-k(w(s, \chi_2(s)))} \partial_2 \lambda_2(w(s, \chi_2(s))) ds - (\lambda_2 - \lambda_1)(\alpha, x_1(\alpha)).$$

Ainsi, $\lambda_2 - \lambda_1$ étant positif, $A(\alpha) < 0$ et v_2 est bien défini tant que $A(t) < 0$, ce qui s'écrit

$$e^{k(w(\alpha, x_1(\alpha)))} \omega'(\alpha) \int_{\alpha}^t e^{-k(w(s, \chi_2(s)))} \partial_2 \lambda_2(w(s, \chi_2(s))) ds - (\lambda_2 - \lambda_1)(\alpha, x_1(\alpha)) < 0. \quad (3.3.19)$$

Puisque $\partial_2 \lambda_2 > 0$, si $\omega'(\alpha) \leq 0$, $v_2(t, \chi_2(t; \alpha, x_1(\alpha)))$ est bien défini pour tout temps; si $\omega'(\alpha) > 0$, $v_2(t, \chi_2(t; \alpha, x_1(\alpha)))$ est bien défini pour

$$t \leq T_0(\alpha) = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\alpha, x_1(\alpha)) e^{\max k(w)}}{e^{k(w(\alpha, x_1(\alpha)))} \omega'(\alpha) \min \partial_2 \lambda_2}. \quad (3.3.20)$$

Dans tous les cas, $\partial_x w_2$ est alors du signe de $-\omega'$ tant qu'il est bien défini.

De même, on a

$$\partial_t v_1 + \lambda_1 \partial_x v_1 = -e^{-h} (\partial_1 \lambda_1) v_1^2,$$

ce qui implique

$$\frac{-1}{v_1^2} \frac{d}{dt} (v_1(t, \chi_1(t))) = e^{-h} \partial_1 \lambda_1.$$

D'où, en intégrant de $\beta(t, x)$ à t ,

$$\frac{1}{v_1(t, x)} = \frac{1}{v_1(\beta, x_2(\beta))} + \int_{\beta}^t e^{-h(w(s, \chi_1(s)))} \partial_1 \lambda_1(w(s, \chi_1(s))) ds.$$

Or, par (3.3.1)–(3.3.8)

$$(U - \lambda_1)\partial_x w_1(\beta, x_2(\beta)) = \partial_t g + U\partial_x g + (U - \lambda_2)\partial_x w_2(\beta, x_2(\beta))\partial_2 g.$$

On a alors

$$v_1(\beta, x_2(\beta)) = e^{h(w(\beta, x_2(\beta)))} \left[\frac{\partial_t g + U\partial_x g}{U - \lambda_1} - \frac{\lambda_2 - U}{U - \lambda_1} \partial_x w_2(\beta, x_2(\beta))\partial_2 g, \right]$$

et $v_1(t, \chi_1(t; \beta, x_2(\beta)))$ est bien défini tant que

$$v_1(\beta, x_2(\beta)) \int_{\beta}^t e^{-h} \partial_1 \lambda_1 ds + 1 > 0. \quad (3.3.21)$$

Or, en dérivant par rapport à w_2 l'expression $\mathcal{F}(t, x, g(t, x, w_2), w_2) = 0$, on a

$$\frac{\partial_2 g(t, x, w_2) + 1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{F(\rho)}} \frac{\partial}{\partial \rho} F(\rho) (\partial_1 \rho(g, w_2)\partial_2 g(t, x, w_2) + \partial_2 \rho(g, w_2)) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\partial_2 g + 1)\sqrt{F(\rho)} - \frac{\rho}{2c}(1 - \partial_2 g)\frac{\partial}{\partial \rho} F(\rho) = 0,$$

ou encore

$$\partial_2 g = \frac{\frac{\rho}{2c}\frac{\partial}{\partial \rho} F - \sqrt{F}}{\frac{\rho}{2c}\frac{\partial}{\partial \rho} F + \sqrt{F}} = \frac{(\frac{\rho}{2c}\frac{\partial}{\partial \rho} F)^2 - F}{(\frac{\rho}{2c}\frac{\partial}{\partial \rho} F + \sqrt{F})^2}.$$

Comme

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho}{c}F'\right)^2 - 4F &= \left(\frac{1}{\rho c}(p^+ - p) + \rho c\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^+}\right)\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^+}\right)(p^+ - p) \\ &= \left(\frac{1}{\rho c}(p^+ - p) - \rho c\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^+}\right)\right)^2 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

on en déduit

$$\partial_2 g \geq 0. \quad (3.3.22)$$

De plus $\partial_1 \lambda_1 \geq 0$, $\partial_t g + U\partial_x g \geq 0$ et $\partial_x w_2 = -\text{sgn}(\omega')|\partial_x w_2|$. Par conséquent, si $\omega' \geq 0$, $v_1(\beta, x_2(\beta))$ est positif et $\partial_x w_1$ est bien défini pour tout temps, sous réserve de l'existence de $\partial_x w_2$. Si $\omega' < 0$, on a éventuellement explosion en temps fini, le temps d'explosion correspondant au temps où (3.3.21) cesse d'être vrai.

Dans le cas particulier où $\omega' \equiv 0$, les deux conditions (3.3.19)–(3.3.21) sont satisfaites en même temps et on a existence globale d'une solution onde de choc.

Si on suppose désormais que la condition (3.3.15) est satisfaite, à savoir $\min \lambda_2 - \max U > 0$, les 2-caractéristiques croisent alors toutes \mathcal{C}_1 puis \mathcal{K} . Si $0 \leq \omega' \leq \theta$ pour θ assez petit, le « point d'explosion », c'est-à-dire le point de la 2-caractéristique partant de $(\alpha, x_1(\alpha))$ pour lequel (3.3.20) n'est plus satisfaite, sera situé à droite de \mathcal{K} et donc ne sera pas dans le domaine considéré D_T . On aura alors également existence globale. Plus précisément, soit

$$T_1(\alpha) = \alpha \frac{\max \lambda_2 - \min \lambda_1}{\min \lambda_2 - \max U}$$

le temps maximal de traversée de \mathcal{C}_1 à \mathcal{K} en partant de $(\alpha, x_1(\alpha))$. Si $T_1(\alpha) \leq T_0(\alpha)$, pour $T_0(\alpha)$ défini comme en (3.3.20), le point d'explosion sera bien à droite de \mathcal{K} , et donc hors de la zone qui nous intéresse. Cette condition revient à

$$\omega'(\alpha) \leq \frac{\min \lambda_2 - \max U}{\max \lambda_2 - \min \lambda_1} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\alpha, x_1(\alpha)) e^{\max k(w)}}{\alpha e^{k(w(\alpha, x_1(\alpha)))} \min \partial_2 \lambda_2}.$$

Ainsi, si $\alpha \omega'(\alpha) \leq \varepsilon$, où ε satisfait

$$\varepsilon \leq \frac{\min \lambda_2 - \max U}{\max \lambda_2 - \min \lambda_1} \min_{\alpha} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\alpha, x_1(\alpha)) e^{\max k(w)}}{e^{k(w(\alpha, x_1(\alpha)))} \min \partial_2 \lambda_2} \quad (3.3.23)$$

alors la solution est globale en temps. \square

On utilise le Théorème 3.3.2 pour obtenir :

Preuve du Théorème 3.3.1. D'après le Théorème 2.3.1, on peut prolonger (ρ_0^+, u_0^+) de façon régulière de sorte que ces conditions initiales prolongées admettent une solution globale en temps, et cette solution coïncide avec la solution tronquée sur le domaine D_+ , dont le bord gauche est la 2-caractéristique issue de R_0 (voir Figure 3.4). Comme $U \geq \lambda_2^+ = u^+ + c^+$, la courbe \mathcal{K} est dans ce domaine D_+ , ce qui permet de définir (u^+, ρ^+) dans l'expression de U (cf. (3.3.3)).

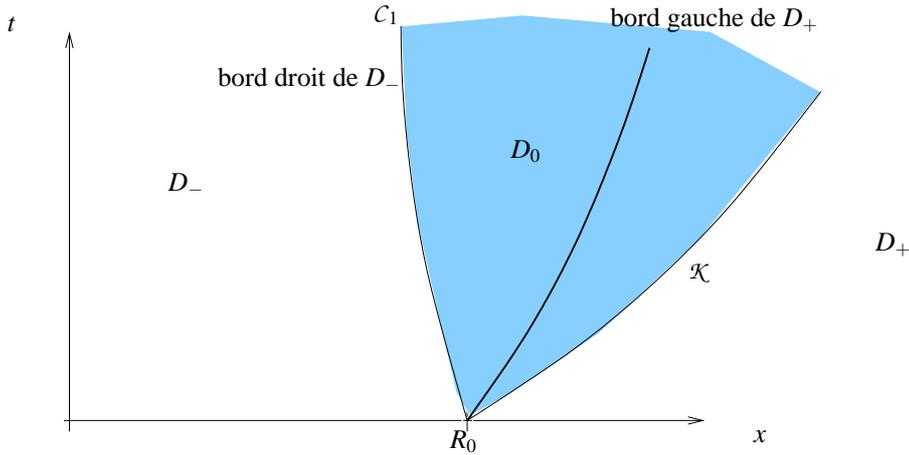


FIGURE 3.4 – Domaines D_0 , D_- , D_+ .

On peut également prolonger (ρ_0^-, u_0^-) de façon à avoir existence *locale* d'une solution régulière sur D_- dont le bord droit est la 1-caractéristique issue de x_0 . En effet, on a bien $w'_{1,0} \geq 0$, mais en revanche $w'_{2,0} \leq 0$. Le temps d'existence est donc minoré, comme dans la preuve du Théorème 3.3.2 de l'explosion de $\partial_x w_2$ par $T_0 = \frac{e^{\max k - \min k}}{\min \partial_2 \lambda_2^- \min(-(w_{2,0}^-)')}$.

On veut désormais appliquer le Théorème 3.3.2, afin d'obtenir une solution sur $D(T_0)$. On vérifie pour cela que les hypothèses sont satisfaites.

1. L'inégalité $\rho - \rho^+ > 0$ est satisfaite. En effet, d'après les estimations dans \mathbf{L}^∞ de w_1

et w_2 , on a pour tout $(t, x) \in [0, T_0] \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \min w_{1,0}^- &\leq w_1^-(t, x) \leq \max w_{1,0}^-, \\ \min w_{2,0}^- &\leq w_2^-(t, x) \leq \max w_{2,0}^-, \end{aligned}$$

et on a des estimations semblables pour w_1^+ et w_2^+ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} H(\rho^-) - H(\rho^+) &= \frac{w_2^- - w_1^-}{2} - \frac{w_2^+ - w_1^+}{2} \\ &\geq \frac{\min w_{2,0}^- - \max w_{1,0}^-}{2} - \frac{\max w_{2,0}^+ - \min w_{1,0}^+}{2} \\ &\geq \delta > 0. \end{aligned}$$

Comme $H' > 0$ pour $\rho > 0$, et $H(0) = 0$, H réalise une bijection croissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ et $H(\rho^-) > H(\rho^+)$ implique $\rho^- > \rho^+$.

2. L'application ω s'exprime en fonction des expressions de ρ_- et u_- le long de la 1-caractéristique \mathcal{C}_1 . Comme (ρ_-, u_-) est régulière sur $[0, T_0[$, pour $T \in [0, T_0[$, on a que ω' est bornée sur $[0, T]$.
3. On a $\omega'(t) = (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_x w_2$, or en remontant la 2-caractéristique, on obtient que $\partial_x w_2$ est du signe de $w_{2,0}^- \leq 0$. Comme $\lambda_1 < \lambda_2$, on obtient $\omega' \geq 0$.
4. Par hypothèse, la relation de compatibilité est satisfaite au temps $t = 0$.
5. On a vu que $\partial_t g + U\partial_x g$ est du signe de $-(\partial_t \mathcal{F} + U\partial_x \mathcal{F})$. Or, \mathcal{F} a une dépendance en (t, x) uniquement par l'intermédiaire de $w^+(t, x)$, on peut donc écrire $\mathcal{F}(t, x, w) = \tilde{\mathcal{F}}(w^+(t, x), w)$. On a alors, en faisant des calculs similaires à ceux effectués pour l'obtention de (3.3.12)

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{F} + U\partial_x \mathcal{F} &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial w_{1,+}} (\partial_t w_1^+ + U\partial_x w_1^+) + \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial w_{2,+}} (\partial_t w_2^+ + U\partial_x w_2^+) \\ &= \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{F}} F'(\rho^+) \frac{\rho^+}{c^+} \right) (U - \lambda_1^+) \partial_x w_1^+ \\ &\quad + \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{F}} F'(\rho^+) \frac{\rho^+}{c^+} \right) (U - \lambda_{2,+}) \partial_x w_2^+ \\ &= \frac{1}{4\sqrt{F}} \left[-(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 (U - \lambda_1^+) \partial_x w_1^+ + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (U - \lambda_{2,+}) \partial_x w_2^+ \right], \end{aligned}$$

où

$$a = \frac{1}{c^+ \rho^+} (p - p^+), \quad b = c^+ \rho^+ \left(\frac{1}{\rho^+} - \frac{1}{\rho} \right).$$

Par conséquent, sachant que $U - \lambda_1^+ > U - \lambda_{2,+} > 0$, on obtient

$$-(\partial_t \mathcal{F} + U\partial_x \mathcal{F}) \geq \frac{U - \lambda_{2,+}}{4\sqrt{F}} \left[(a + b)(\partial_x w_1^+ - \partial_x w_2^+) + 2\sqrt{ab}(\partial_x w_1^+ + \partial_x w_2^+) \right].$$

Comme $w_{1,0}^{+'} \geq 0$ et $w_{2,0}^{+'} \geq 0$, en reprenant les calculs de la preuve précédente, on obtient $\partial_x w_1^+ \geq 0$, $\partial_x w_2^+ \geq 0$. Par hypothèse on a de plus $\partial_x w_1^+ - \partial_x w_2^+ \geq 0$ (ce qui est satisfait par exemple pour $w^+ \equiv (\bar{\rho}, 0)$).

6. L'application (ρ^+, u^+) étant \mathcal{C}^1 , \mathcal{F} est bien définie et le calcul (3.3.12) reste valable tant que $\rho > \rho^+$. Par conséquent g est bien définie et reste bornée.

On a alors existence dans $D(\min(T_1, T_0))$, pour

$$T_1 = \min_{\alpha \geq 0} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\alpha, x_1(\alpha)) e^{\max k(w)}}{e^{k(w(\alpha, x_1(\alpha)))} \omega'(\alpha) \min \partial_2 \lambda_2}.$$

En remarquant qu'on pouvait en fait remonter les 2-caractéristiques de tous les points passant par $(t, x) \in D_T$, on obtient finalement le même temps d'explosion que dans le domaine D_- .

Ainsi, on a une solution \mathcal{C}^1 par morceaux satisfaisant les conditions de Rankine-Hugoniot au niveau de la discontinuité. Il reste à montrer que la solution est bien \mathcal{C}^1 le long de \mathcal{C}_1 . On sait déjà qu'elle est continue, puisqu'on a choisi les conditions aux bords pour cela. D'autre part, les caractéristiques sont bien \mathcal{C}^1 , puisque $w \in \mathcal{C}^0$ au voisinage de \mathcal{C}_1 . Le même calcul que dans la preuve du Théorème 3.3.2 montre alors que $\partial_x w_1$ et $\partial_x w_2$ s'expriment en fonction des données initiales ou des données aux bords. Le choix de ω nous donne que w_2 est \mathcal{C}^1 . \square

Application : gaz de Van der Waals

Pour un gaz de Van der Waals, on a : $c(\rho) = \frac{1}{1-b\rho} \sqrt{\gamma_0(\gamma_0 - 1)} \left(\frac{\rho}{1-b\rho} \right)^{\frac{\gamma_0-1}{2}}$, donc

$$H = 2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \left(\frac{\rho}{1-b\rho} \right)^{\frac{\gamma_0-1}{2}}.$$

Ce qui implique, en notant $\tilde{b} = b \left(\frac{\gamma_0-1}{4\gamma_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_0-1}}$ et $\nu = \frac{\gamma_0+1}{\gamma_0-1} > 1$

$$\rho = \frac{\left(\frac{\gamma_0-1}{4\gamma_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_0-1}} H^{\nu-1}}{1 + \tilde{b} H^{\nu-1}},$$

$$c(\rho) = \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} H^{\nu-1}) H.$$

Par conséquent, en remarquant que $u = \frac{w_1+w_2}{2}$ et $H = \frac{w_2-w_1}{2}$, on obtient

$$\lambda_1 = \frac{w_1 + w_2}{2} - \frac{\gamma_0 - 1}{2} \left(\frac{w_2 - w_1}{2} + \tilde{b} \left(\frac{w_2 - w_1}{2} \right)^\nu \right),$$

$$\lambda_2 = \frac{w_1 + w_2}{2} + \frac{\gamma_0 - 1}{2} \left(\frac{w_2 - w_1}{2} + \tilde{b} \left(\frac{w_2 - w_1}{2} \right)^\nu \right),$$

$$\partial_1 \lambda_1 = \partial_2 \lambda_2 = \frac{\gamma_0 + 1}{4} (1 + \tilde{b} H^{\nu-1}) > 0,$$

$$\partial_2 \lambda_1 = \partial_1 \lambda_2 = \frac{1}{4} \left((3 - \gamma_0) - \tilde{b}(\gamma_0 + 1) H^{\nu-1} \right).$$

On a alors :

$$\partial_1 h = -\partial_2 k = \frac{(3 - \gamma_0) - \tilde{b}(\gamma_0 + 1) H^{\nu-1}}{4(\gamma_0 - 1)(H + \tilde{b} H^\nu)},$$

ce qui implique

$$h = k = \ln \left(H^{(2-\nu)/2} (1 + \tilde{b}H^{\nu-1}) \right),$$

où $2 - \nu = \frac{\gamma_0 - 3}{\gamma_0 - 1} < 0$.

3.3.2 Fluide isentropique à symétrie cylindrique ou sphérique

On veut à présent étudier l'influence de termes sources (géométriques ou non) sur l'analyse précédente.

Dans le cas de fluide isentropique à symétrie cylindrique ($d = 2$) ou sphérique ($d=3$), le système (1.1.15) se réécrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_r(\rho u) = \frac{-(d-1)\rho u}{r}, \\ \partial_t u + u \partial_r u + \frac{p'(\rho)}{\rho} \partial_r \rho = 0. \end{cases} \quad (3.3.24)$$

En définissant $w_1, w_2, \lambda_1, \lambda_2$ comme en (3.3.2), on réécrit le système (3.3.24) sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \lambda_1(w) \partial_r w_1 = f(r, w), \\ \partial_t w_2 + \lambda_2(w) \partial_r w_2 = -f(r, w), \end{cases} \quad (3.3.25)$$

où $f(r, w) = \frac{(d-1)uc}{r}$. On a toujours $\lambda_1 < \lambda_2$, $\partial_1 \lambda_1 \geq 0$, $\partial_2 \lambda_2 \geq 0$.

Théorème 3.3.4. *Soient $T > 0$, $(\rho_0^-, u_0^-) \in \mathcal{C}^1([0, R_0]; \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ et $(\rho_0^+, u_0^+) \in \mathcal{C}^1([R_0; +\infty[; \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$. On suppose que $(\rho_0^-(R_0), u_0^-(R_0))$ et $(\rho_0^+(0, R_0), u_0^+(0, R_0))$ satisfont la condition de compatibilité (3.3.3)*

$$(u_0^-(R_0) - u_0^+(R_0)) = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_0^-(R_0)} - \frac{1}{\rho_0^+(R_0)} \right) (p(\rho_0^+(R_0)) - p(\rho_0^-(R_0)))},$$

et les conditions de 2-choc de Lax (3.3.4)–(3.3.5) à $t = 0$ en $r = R_0$. On suppose de plus que

1. on peut prolonger (ρ_0^-, u_0^-) (respectivement (ρ_0^+, u_0^+)) régulièrement sur \mathbb{R}_+ de façon à obtenir une solution régulière (ρ^-, u^-) (resp. (ρ^+, u^+)) sur $[0, T]$ du système (3.3.24) satisfaisant cette condition initiale,
2. l'inégalité $\partial_r w_2^- \leq -C$, est satisfaite pour un certain $C \in \mathbb{R}$,
3. la condition initiale satisfait $w_{1,0}^-(R_0) = u_0^-(R_0) - H(\rho_0^-(R_0)) \geq 0$,
4. l'application w^+ vérifie les inégalités $\partial_r w_1^+ \geq \partial_r w_2^+$, $w_1^+ + w_2^+ \geq 0$,
5. $\rho_0^-(R_0) > \max(\rho^+(t, x); t \in [0, T], x \in \mathbb{R}_+)$.

Alors le problème (3.3.24) satisfaisant les conditions initiales (ρ_0, u_0) admet une solution onde de choc sur $[0, T_*[$ avec T_* donné par l'expression (3.3.41) ci-après.

En s'inspirant de la méthode de Li Ta Tsien exposée au paragraphe 3.3.1, on résout d'abord le problème aux limites sur le domaine angulaire $D = \{(t, r) \mid x_1(t) \leq r \leq x_2(t)\}$ satisfaisant les conditions aux bords (3.3.8), les bords \mathcal{C}_1 et \mathcal{K} étant définis comme en (3.3.9)–(3.3.10). Comme dans le cas sans source, les conditions de Rankine-Hugoniot donnent les conditions (3.3.3) qui nous permettent, grâce à (3.3.12) de définir g le long de \mathcal{K} . On a encore (3.3.5) et $\partial_2 g \geq 0$ (3.3.22). On peut remarquer que le problème angulaire revient à trouver un prolongement régulier de (ρ_0^-, u_0^-) de façon à ce que les conditions de compatibilité et les conditions de Rankine-Hugoniot soient satisfaites le long d'une même courbe.

Théorème 3.3.5. Soit \mathcal{F} défini comme dans (3.3.11). Si $\mathcal{F}(0, R_0, w_1(0, R_0), \omega(0)) = 0$, alors on définit g comme étant la solution de $\mathcal{F}(t, x, g(w_2), w_2) = 0$. On considère alors le problème angulaire (3.3.25)–(3.3.8) avec ce g . Si

1. sur \mathcal{C}_1 et \mathcal{K} , $w_2 \geq w_1$ (c'est-à-dire $\rho \geq 0$);
2. l'inégalité $\partial_t g + U \partial_r g \geq 0$ est satisfaite sur \mathcal{K} ,
3. sur \mathcal{K} , $w_1 \geq 0$,
4. l'application ω est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ et $-\partial_r w_2 \geq C$, pour un certain $C \in \mathbb{R}$, le long de \mathcal{C}_1 ,
5. la condition initiale satisfait $\rho_0(R_0) = H^{-1} \left(\frac{w_2 - w_1}{2} \right) > \max(\rho^+(t, x); t \in [0, T], x \in \mathbb{R}_+)$,

alors le problème admet une solution locale en temps et on peut estimer le temps d'existence par (3.3.41).

Preuve du Théorème 3.3.5. On se place dans le domaine $D_T = \{(t, r) \in D \mid t \in [0, T]\}$, et on suppose que pour tout $(t, r) \in D_T$, $r \geq \delta > 0$, ce qui est vrai au moins pour T assez petit. En fait, si $\lambda_1(t, x) = u - c \geq 0$, ceci est vrai pour tout temps. S'il existe des temps pour lesquels $\lambda_1(t, x_1(t)) < 0$, alors on doit prendre $T \leq \frac{R_0}{-\min \lambda_1}$.

De même que pour la preuve du Théorème 3.3.5, il suffit d'établir des estimations *a priori* uniformes en temps, sur tout domaine $D_\theta = \{(t, x) \in D \mid t \in [0, \theta]\}$ pour tout $\theta \leq T$. En effet, d'après T. T. Li & W. C. Yu [89, Chap. 3], le problème angulaire pour (3.3.25)–(3.3.8) (avec termes sources) admet une solution régulière locale en temps.

Estimation dans \mathcal{C}^0 . Notons tout d'abord que ρ reste bien à valeurs positives ou nulles dans D_T d'après la première équation de (3.3.24). En effet, pour $(t_0, r_0) \in D_\theta$, en notant χ la solution de l'EDO

$$\frac{d\chi}{dt} = u(t, \chi), \quad \chi(t_0) = r_0,$$

on a

$$\frac{d}{dt} \left(\chi^{d-1} \rho(t, \chi) \exp\left(\int_{t_0}^t \partial_r u \, ds\right) \right) = 0,$$

Par conséquent, comme la condition $w_2 \geq w_1$ sur \mathcal{C}_1 et \mathcal{K} signifie $\rho \geq 0$ aux bords, on obtient $\rho \geq 0$ dans D_θ pour tout $\theta > 0$.

D'autre part, $w_1 \geq 0$ sur \mathcal{K} implique $w_1 \geq 0$ dans D_θ . En effet, on peut minorer l'application f par $f(r, w) = \frac{(d-1)}{r} \frac{w_2 + w_1}{2} c(\rho) \geq \frac{(d-1)}{r} w_1 c(\rho)$. Par conséquent, le long de la 1-caractéristique définie comme en (3.3.16), on obtient

$$\frac{dw_1(t, \chi_1(t))}{dt} \geq \frac{(d-1)}{\chi_1(t)} w_1(t, \chi_1) c(w),$$

ou encore

$$\frac{d}{dt} \left(w_1(t, \chi_1) \exp\left(-\int_{t_0}^t \frac{c(w)}{(d-1)\chi_1(s)} \, ds\right) \right) \geq 0,$$

ce qui implique que $w_1 \geq 0$ dans D_θ pour tout $\theta > 0$ puisque $w_1 \geq 0$ sur \mathcal{K} . Finalement, on a donc $w_2 \geq w_1 \geq 0$, mais aussi $u = \frac{w_1 + w_2}{2} \geq 0$ et $f(r, w) \geq 0$ dans D_T . Le long des 2-caractéristiques, définies par (3.3.17), on a alors $\frac{d}{dt}(w_2(t, \chi_2(t))) = -f(r, w) \leq 0$, ce qui nous donne, pour tout $(t, r) \in D_\theta$, $w_2(t, r) \leq \omega(\alpha(t, r))$. Finalement, on a donc

$$0 \leq w_1 \leq w_2 \leq \|\omega\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T])},$$

ce qui nous donne des bornes uniformes en temps pour w_1 et w_2 .

On peut alors borner x_2 exactement de la même manière que dans la preuve du Théorème 3.3.5, grâce à (3.3.13) et au lemme de Gronwall.

Enfin,

$$\frac{dH(\rho(t, x_2(t)))}{dt} = (1 - \partial_2 g)(\lambda_2 - U)(-\partial_r w_2) - (1 - \partial_2 g)f - (\partial_t g + U\partial_r g).$$

En remarquant que

$$\partial_2 g - 1 = \frac{-2\sqrt{F}}{\frac{\rho}{2c}F' + \sqrt{F}} \leq 0,$$

on obtient que H croît le long de \mathcal{K} pourvu que

$$-\partial_r w_2 \geq \frac{1}{(1 - \partial_2 g)(\lambda_2 - U)} ((\partial_t g + U\partial_r g) + (1 - \partial_2 g)f) \quad (3.3.26)$$

le long de \mathcal{K} , auquel cas $H(\rho(t, x_2(t))) \geq H(\rho(0, R_0))$. L'hypothèse 5 selon laquelle $\rho_0(R_0) > \max(\rho^+(t, x); t \in [0, T], x \in \mathbb{R}_+)$ nous assure alors que $\rho > \rho^+$ le long de \mathcal{K} .

Estimation dans \mathcal{C}^1 . On introduit maintenant l'application v_2 définie par $v_2(t, r) = e^{k(w(t, r))}(\partial_r w_2(t, r) + \Phi(r, w(t, r)))$ (qui n'est pas exactement le même qu'au paragraphe 3.3.1), où $\partial_1 k = \frac{\partial_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$, et où Φ est une fonction de (r, w) à déterminer. On remarque qu'en dérivant par rapport à r la seconde équation de (3.3.25), on obtient

$$\partial_t \partial_r w_2 + \lambda_2 \partial_r \partial_r w_2 + \partial_1 \lambda_2 \partial_r w_1 \partial_r w_2 + \partial_2 \lambda_2 (\partial_r w_2)^2 = -\partial_r f - \partial_1 f \partial_r w_1 - \partial_2 f \partial_r w_2.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \partial_t v_2 + \lambda_2 \partial_r v_2 &= e^k \left(-\partial_r f - \partial_1 f \partial_r w_1 - \partial_2 f \partial_r w_2 - \partial_1 \lambda_2 \partial_r w_1 \partial_r w_2 - \partial_2 \lambda_2 (\partial_r w_2)^2 \right. \\ &\quad \left. + \partial_1 \Phi (\partial_t w_1 + \lambda_2 \partial_r w_1) + \partial_2 \Phi (\partial_t w_2 + \lambda_2 \partial_r w_2) + \lambda_2 \partial_r \Phi \right) \\ &\quad + e^k (\partial_r w_2 + \Phi) (\partial_1 k (\partial_t w_1 + \lambda_2 \partial_r w_1) + \partial_2 k (\partial_t w_2 + \lambda_2 \partial_r w_2)), \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore, en utilisant le système (3.3.25), puis en insérant des Φ de manière à faire apparaître la quantité $\partial_r w_2 + \Phi$,

$$\begin{aligned} &\partial_t v_2 + \lambda_2 \partial_r v_2 \\ &= e^k \left(-\partial_r f - \partial_1 f \partial_r w_1 - \partial_2 f \partial_r w_2 - \partial_1 \lambda_2 \partial_r w_1 \partial_r w_2 - \partial_2 \lambda_2 (\partial_r w_2)^2 \right. \\ &\quad \left. + \partial_1 \Phi ((\lambda_2 - \lambda_1) \partial_r w_1 + f) - f \partial_2 \Phi + \lambda_2 \partial_r \Phi \right) \\ &\quad + e^k (\partial_r w_2 + \Phi) (\partial_1 k ((\lambda_2 - \lambda_1) \partial_r w_1 + f) - f \partial_2 k) \\ &= e^k \left(-\partial_r f - \partial_1 f \partial_r w_1 - \partial_2 f (\partial_r w_2 + \Phi) + \Phi \partial_2 f - \partial_1 \lambda_2 \partial_r w_1 (\partial_r w_2 + \Phi) + \Phi \partial_1 \lambda_2 \partial_r w_1 \right. \\ &\quad \left. - \partial_2 \lambda_2 (\partial_r w_2 + \Phi)^2 - \Phi^2 \partial_2 \lambda_2 + 2\partial_2 \lambda_2 (\partial_r w_2 + \Phi) \Phi \right. \\ &\quad \left. + \partial_1 \Phi ((\lambda_2 - \lambda_1) \partial_r w_1 + f) - f \partial_2 \Phi + \lambda_2 \partial_r \Phi \right) \\ &\quad + e^k (\partial_r w_2 + \Phi) (\partial_1 k ((\lambda_2 - \lambda_1) \partial_r w_1 + f) - f \partial_2 k) \\ &= e^k \left[-\partial_r f + \Phi \partial_2 f - \Phi^2 \partial_2 \lambda_2 + \lambda_2 \partial_r \Phi + f (\partial_1 \Phi - \partial_2 \Phi) \right] \\ &\quad + e^k (\partial_r w_2 + \Phi) \left[-\partial_2 f - \lambda_1 \partial_r w_1 - \partial_2 \lambda_2 (\partial_r w_2 + \Phi) + 2\partial_2 \lambda_2 \Phi + \partial_1 k (\lambda_2 - \lambda_1) \partial_r w_1 \right. \\ &\quad \left. + f (\partial_1 k - \partial_2 k) \right] \\ &\quad + e^k \partial_r w_1 \left[-\partial_1 f + \lambda_1 \Phi + (\lambda_2 - \lambda_1) \partial_1 \Phi \right]. \end{aligned}$$

Le choix de k nous permet d'éliminer les occurrences de $\partial_r w_1$ dans la deuxième parenthèse. Ensuite, on choisit Φ de manière à faire disparaître la dernière parenthèse. On choisit donc Φ de sorte que $\partial_1(e^k \Phi(r, w)) = \frac{e^k \partial_1 f}{\lambda_2 - \lambda_1}$. On remarque ici que k et Φ en tant que fonctions de w seront bornées sur D_T , tant que w est dans leur domaine de définition, grâce aux bornes dans \mathcal{C}^0 obtenues précédemment. On obtient l'équation de « type Riccati » le long de la 2-caractéristique :

$$\begin{aligned} \partial_t v_2 + \lambda_2 \partial_r v_2 = & -e^{-k} v_2^2 \partial_2 \lambda_2 + [(\partial_1 k - \partial_2 k) f - \partial_2 f + 2\Phi \partial_2 \lambda_2] v_2 \\ & + e^k [\Phi \partial_2 f - \partial_r f - \Phi^2 \partial_2 \lambda_2 + \lambda_2 \partial_r \Phi + (\partial_1 \Phi - \partial_2 \Phi) f]. \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

En notant

$$a_0(t) = e^{-k} (\partial_2 \lambda_2) \geq 0, \quad (3.3.28)$$

$$a_1(t) = (\partial_1 k - \partial_2 k) f - \partial_2 f + 2(\partial_2 \lambda_2) \Phi, \quad (3.3.29)$$

$$a_2(t) = e^k (\partial_2 f \Phi - \partial_r f - \partial_2 \lambda_2 \Phi^2 + \lambda_2 \partial_r \Phi + (\partial_1 \Phi - \partial_2 \Phi) f), \quad (3.3.30)$$

cette équation se réécrit, en posant $y_2(t) = -v_2(t, \chi_2(t))$,

$$y_2' = a_0 y_2^2 - a_1 y_2 - a_2. \quad (3.3.31)$$

D'après un lemme de Hörmander [72] (voir Annexe B, lemme B.3.2), si on a pour $\theta > \alpha$

$$\int_{\alpha}^{\theta} |a_2(t)| dt \int_{\alpha}^{\theta} a_0(t) dt \exp(2 \int_{\alpha}^{\theta} |a_1(t)| dt) < 1, \quad (3.3.32)$$

$$\frac{1 - \int_{\alpha}^{\theta} |a_2(t)| dt \int_{\alpha}^{\theta} a_0(t) dt \exp(2 \int_{\alpha}^{\theta} |a_1(t)| dt)}{\int_{\alpha}^{\theta} a_0(t) dt \exp(\int_{\alpha}^{\theta} |a_1(t)| dt)} > y_2(\alpha) \geq 0 \quad (3.3.33)$$

alors l'équation (3.3.31) de condition initiale $y_2(\alpha) = -v_2(\alpha)$ en $t = \alpha$ a une solution sur $[\alpha, \theta]$.

On suppose que a_0, a_2 ne sont pas constamment nuls, ce qui n'est pas le cas en particulier dans le cas 1D où $a_1 = a_2 \equiv 0$. Soit alors $x(A_0, A_1, A_2) \geq 0$ l'unique solution sur \mathbb{R}_+ de l'équation

$$x^2 e^x = \frac{4A_1^2}{A_2 A_0}, \quad (3.3.34)$$

où

$$A_0 = \max(a_0), \quad A_1 = \max |a_1|, \quad A_2 = \max |a_2|, \quad W = \max_{C_1} |\partial_r w_2 + \Phi| e^{k(w)}. \quad (3.3.35)$$

Comme

$$\int_{\alpha}^{\theta} |a_2(t)| dt \int_{\alpha}^{\theta} a_0(t) dt \exp(2 \int_{\alpha}^{\theta} |a_1(t)| dt) \leq \frac{A_0 A_2}{4A_1^2} 4A_1^2 (\theta - \alpha)^2 e^{2A_1(\theta - \alpha)},$$

la condition (3.3.32) est satisfaite pour tout $\theta \leq T$ tel que

$$\theta \leq T(\alpha) = \alpha + \frac{x(A_0, A_1, A_2)}{2A_1}. \quad (3.3.36)$$

La condition (3.3.33) signifie d'une part $\partial_r w_2 + \Phi \leq 0$ sur \mathcal{C}_1 . D'autre part, la condition (3.3.33) est satisfaite tant que

$$\frac{1}{\int_\alpha^\theta a_0(t) dt} - (\theta - \alpha)^2 A_2 \exp\left(\int_\alpha^\theta |a_1(t)| dt\right) - W \exp\left(\int_\alpha^\theta |a_1(t)| dt\right) \geq 0,$$

ce qui est vérifié si

$$1 - A_0 A_2 (\theta - \alpha^2) e^{2 \int_\alpha^\theta |a_1(t)| dt} - W e^{\int_\alpha^\theta |a_1(t)| dt} \geq 0,$$

où A_0, A_1, A_2 sont définis comme en (3.3.35). Cette condition est donc vérifiée pour

$$\frac{1}{2A_2} \left(W - \sqrt{W^2 + 4A_2/A_0} \right) \leq (\theta - \alpha) e^{\int_\alpha^\theta |a_1|} \leq \frac{1}{2A_2} \left(W + \sqrt{W^2 + 4A_2/A_0} \right)$$

En particulier on obtient que la condition (3.3.33) est vérifiée pour tout $\theta \leq T$ tel que

$$(\theta - \alpha) e^{(\theta - \alpha) \max |a_1|} \leq \frac{1}{2A_2} \left(W + \sqrt{W^2 + 4A_2/A_0} \right).$$

En notant $\zeta(W, A_0, A_1, A_2)$ l'unique solution de l'équation

$$x e^x = \frac{A_1}{2A_2} \left(W + \sqrt{W^2 + 4A_2/A_0} \right), \quad (3.3.37)$$

la condition (3.3.39) est donc vérifiée pour tout $\theta \leq T$ tel que

$$\theta \leq \frac{1}{A_1} \zeta(W, A_0, A_1, A_2).$$

De plus, si $\max_{[0, T]}(a_1^2 + 4a_0 a_2) \leq 0$ ou bien si $\max_{[0, T]}(a_1^2 - a_0 a_2) > 0$ et $y_2(\alpha) \geq \frac{\max a_1 + \sqrt{\max(a_1^2 + a_0 a_2)}}{2a_0}$, alors y_2 est croissante et en particulier, $y_2(t) \geq y_2(\alpha)$ pour $t \geq \alpha$. Ainsi, si

$$-\partial_r w_2(\alpha, x_1(\alpha)) \geq \Phi(\alpha, x_1(\alpha)) + e^{-k(w(\alpha))} \frac{\max a_1 + \sqrt{\max |a_1^2 + a_0 a_2|}}{2 \min a_0}, \quad (3.3.38)$$

alors $-(\partial_r w_2 + \Phi)(t, \chi_2(t)) \geq -e^{k(w(\alpha)) - k(w(t))} (\partial_r w_2(\alpha) + \Phi(\alpha)) \geq 0$.

On introduit ensuite $v_1 = e^h \partial_r w_1$, où $\partial_2 h = \frac{\partial_2 \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$. On obtient l'équation

$$\frac{d}{dt}(v_1(t, \chi_1(t))) = -e^{-h} \partial_1 \lambda_1 v_1^2 + ((\partial_1 h - \partial_2 h) f + \partial_1 f) v_1 + \partial_2 f e^{h-k} (v_2 - e^k \Phi) + e^h \partial_r f.$$

En notant

$$\begin{aligned} b_0(t) &= -e^{-h} \partial_1 \lambda_1 \leq 0, \\ b_1(t) &= (\partial_1 h - \partial_2 h) f + \partial_1 f, \\ b_2(t) &= \partial_2 f e^{h-k} (v_2 - e^k \Phi) + e^h \partial_r f, \end{aligned}$$

on obtient existence d'une solution v_1 pour l'EDO ci-dessus satisfaisant la condition initiale $v_1(\beta)$ par le lemme B.3.2 si

$$v_1(\beta) \geq 0, \quad \int_\beta^\theta |b_2(t)| dt \int_\beta^\theta |b_0(t)| dt \exp\left(2 \int_\beta^\theta |b_1(t)| dt\right) < 1. \quad (3.3.39)$$

Comme $(U - \lambda_1)\partial_r w_1 + f = \partial_t g + U\partial_r g + (U - \lambda_2)\partial_2 g \partial_r w_2 - f\partial_2 g$ le long de \mathcal{K} , la condition $\partial_r w_1(\beta, x_2(\beta)) \geq 0$ signifie $\partial_t g + U\partial_r g + (\lambda_2 - U)\partial_2 g(-\partial_r w_2) - f(\partial_2 g + 1) \geq 0$, ce qui est vérifié si $-\partial_r w_2$ est assez grand. D'où finalement, pour $-\partial_r w_2(\alpha, x_1(\alpha)) \geq C(\alpha)$ le long de \mathcal{C}_1 avec

$$C(\alpha) = \Phi(\alpha, x_1(\alpha)) + e^{-k(w(\alpha))} \max \left[\max_{\mathcal{K}} \left(\left(\frac{f(\partial_2 g + 1)}{\lambda_2 - U} - \Phi \right) e^{k(t)} \right), \right. \\ \left. \max_{\mathcal{K}} \left(\left(\frac{\partial_t g + U\partial_r g + (1 - \partial_2 g)f}{(\lambda_2 - U)(1 - \partial_2 g)} - \Phi \right) e^{k(t)} \right), \frac{\max_t a_1 + \sqrt{\max |a_1^2 + a_0 a_2|}}{2 \min a_0}, 0 \right] \quad (3.3.40)$$

le temps d'existence se minore finalement par

$$T_{ex} \geq T_* := \min \left(T, \frac{\zeta(W, A_0, A_1, A_2)}{A_1}, \frac{x(A_0, A_1, A_2)}{A_1}, \frac{x(b_0, b_1, b_2)}{\max |b_1|} \right), \quad (3.3.41)$$

où $x(A_0, A_1, A_2)$ est défini par (3.3.34) et $\zeta(W, A_0, A_1, A_2)$ est défini par (3.3.37). \square

Remarque 3.3.6. Pour montrer que $\partial_r w_1$ reste fini en temps fini, on aurait pu également suivre la même procédure que pour $\partial_r w_2$ et introduire Ψ tel que $\partial_2(e^h \Psi) = \frac{e^h \partial_2 f}{\lambda_1 - \lambda_2}$ et $\bar{v}_1 = e^h(\partial_r w_1 + \Psi)$. On obtient alors l'équation le long de la 1-caractéristique :

$$\partial_t \bar{v}_1 + \lambda_1 \partial_r \bar{v}_1 = -e^{-h} \bar{v}_1^2 \partial_1 \lambda_1 + ((\partial_1 h - \partial_2 h)f - \partial_1 f + 2\partial_1 \lambda_1 \Psi) \bar{v}_1 \\ + e^h (\Psi \partial_1 f - \partial_r f - \Psi^2 \partial_1 \lambda_1 + \lambda_1 \partial_r \Psi + (\partial_1 \Psi - \partial_2 \Psi)f). \quad (3.3.42)$$

D'après le lemme de Hörmander [72] (Lemme B.3.2), en notant

$$\bar{b}_0(t) = -e^{-h} \partial_1 \lambda_1 \leq 0, \\ \bar{b}_1(t) = (\partial_1 h - \partial_2 h)f - \partial_1 f + 2\partial_1 \lambda_1 \Psi, \\ \bar{b}_2(t) = e^h (\Psi \partial_1 f - \partial_r f - \Psi^2 \partial_1 \lambda_1 + \lambda_1 \partial_r \Psi + (\partial_1 \Psi - \partial_2 \Psi)f),$$

si on a

$$\bar{v}_1(\beta) \geq 0, \quad \int_{\beta}^{\theta} |\bar{b}_2(t)| dt \int_{\beta}^{\theta} |\bar{b}_0(t)| dt \exp \left(2 \int_{\beta}^{\theta} |\bar{b}_1(t)| dt \right) < 1, \quad (3.3.43)$$

alors l'équation (3.3.42) de condition initiale $\bar{v}_1(\beta)$ en $t = \beta$ a une solution sur $[\beta, \theta]$. D'une part,

$$-\partial_r w_2(\beta, x_2(\beta)) \geq \frac{f(\partial_2 g + 1) - \Psi(U - \lambda_1)}{\partial_2 g(\lambda_2 - U)}$$

implique $\bar{v}_1(\beta) \geq 0$. D'autre part, la condition (3.3.43) est valide au voisinage de $\theta = \beta$, ainsi, on a existence au moins en temps fini tant que

$$\theta \leq \beta + \frac{x(\max |\bar{b}_0|, \max |\bar{b}_1|, \max |\bar{b}_2|)}{\max |\bar{b}_1|}, \quad (3.3.44)$$

où $x(b_0, b_1, b_2)$ est défini par (3.3.34).

Preuve du Théorème 3.3.4. De même que pour la preuve du Théorème 3.3.1, il s'agit de recoller des morceaux de solutions régulières dans les domaines D_+ , D_- et D_0 . Par hypothèse, on peut construire des solutions régulières correspondant aux conditions initiales (ρ_0^-, u_0^-) , respectivement (ρ_0^+, u_0^+) , dans les domaines D_- et D_+ . Dans ces domaines, ces solutions ne dépendent pas du prolongement choisi. Il reste à trouver une solution dans le domaine angulaire D_0 , ce qui est fait par l'intermédiaire du Théorème 3.3.5. Il reste à vérifier que les hypothèses sont satisfaites

1. Les conditions $\rho_0^- > 0$ et $\rho_0^+ > 0$ assurent que $w_2 \geq w_1$ sur les bords du domaine angulaire.
2. De même que dans le cas sans source, $\partial_t g + U \partial_r g$ est du signe opposé à $\partial_t \mathcal{F} + U \partial_r \mathcal{F}$.
Or

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{F} + U \partial_x \mathcal{F} &= \frac{\partial}{\partial w_1^+} \tilde{\mathcal{F}}(\partial_t w_1^+ + U \partial_x w_1^+) + \frac{\partial}{\partial w_2^+} \tilde{\mathcal{F}}(\partial_t w_2^+ + U \partial_x w_2^+) \\ &= \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{F}} \frac{\partial}{\partial \rho^+} F(\rho^+, \rho) \frac{\rho^+}{c^+} \right) ((U - \lambda_1^+) \partial_x w_1^+ + f(r, w^+)) \\ &\quad + \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{F}} \frac{\partial}{\partial \rho^+} F(\rho^+) \frac{\rho^+}{c^+} \right) ((U - \lambda_2^+) \partial_x w_2^+ - f(r, w^+)) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{F}} \left[-(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 (U - \lambda_1^+) \partial_x w_1^+ + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (U - \lambda_2^+) \partial_x w_2^+ \right] \\ &\quad + f(r, w^+) \frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial}{\partial \rho^+} F(\rho^+) \frac{\rho^+}{c^+} \end{aligned}$$

où

$$a = \frac{1}{c^+ \rho^+} (p - p^+), \quad b = c^+ \rho^+ \left(\frac{1}{\rho^+} - \frac{1}{\rho} \right).$$

Comme $f \geq 0$ car par hypothèse $w_1^+ + w_2^+ = 2u^+ \geq 0$, et $\frac{\partial}{\partial \rho^+} F(\rho^+) = -\frac{1}{\rho^{+2}} (p^- - p^+) - (\frac{1}{\rho^+} - \frac{1}{\rho^-}) c(\rho^+)^2 \leq 0$, $U - \lambda_1^+ > U - \lambda_2^+ > 0$, en utilisant les hypothèses $\partial_r w_1^+ \geq \partial_r w_2^+ \geq 0$, on obtient bien $\partial_t \mathcal{F} + U \partial_r \mathcal{F} \leq 0$.

3. Comme $\frac{d}{dt} w_1^-(t, x_2(t)) = \partial_t g + U \partial_r g - \partial_2 g((\lambda_2^- - U) \partial_r w_2^- + f) \geq 0$ pour $\partial_r w_2^- \leq -C$ et $w_1^-(0, R_0) \geq 0$, en intégrant on obtient $w_1^- \geq 0$ sur \mathcal{K} .

Par hypothèse, les conditions 4 et 5 du théorème 3.3.5 sont satisfaites. \square

Application : gaz de Van der Waals

Pour un gaz de Van der Waals, avec les notations de la Section 3.3.1,

$$f(r, w) = \frac{(d-1)(\gamma_0 - 1)}{8r} (w_2 + w_1)(w_2 - w_1) \left(1 + \tilde{b} \left(\frac{w_2 - w_1}{2} \right)^{\nu-1} \right).$$

Si on suppose $\gamma_0 \neq \frac{5}{3}$, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{d-1}{4r(1+\tilde{b}H^{\nu-1})} \left[\frac{4(\gamma_0+1)(\gamma_0-1)}{(3\gamma_0-5)(\gamma_0-3)} H + \frac{4(\gamma_0-1)\tilde{b}}{3\gamma_0-1} H^\nu + u \left(\frac{4(\gamma_0-1)}{(\gamma_0-3)} + 4\tilde{b}H^{\nu-1} \right) \right], \\ a_0 &= -H^{\frac{\nu}{2}-1} \frac{\gamma_0+1}{2}, \\ a_1 &= \frac{q_1(w)}{r} \\ &= \frac{d-1}{4r} \left[2 \frac{5\gamma_0-7}{3\gamma_0-1} u + (\gamma_0-1) \left(\frac{2(\gamma_0-1)^2}{(3\gamma_0-5)(\gamma_0-3)} - 1 \right) H + \tilde{b}(\gamma_0-1) \frac{3-\gamma_0}{3\gamma_0-1} H^\nu \right], \\ a_2 &= \frac{1}{r^2} q_2(w), \end{aligned}$$

q_1, q_2 étant des fonctions ne dépendant pas de r .

Si $\gamma_0 = 5/3$, les valeurs de Φ , a_1 et a_2 changent, cependant on garde pour a_1 une expression du type $a_1 = \frac{1}{r} q_1(w)$ et pour a_2 une expression du type $a_2 = \frac{1}{r^2} q_2(w)$. De même, $\bar{b}_1 = \frac{1}{r} p_1(w)$, $\bar{b}_2 = \frac{1}{r^2} p_2(w)$, p_1 et p_2 ne dépendant pas de r .

D'autre part, on a $\lambda_1 = u - \frac{\gamma_0-1}{2}(H + \tilde{b}H^\nu) \geq \frac{3-\gamma_0}{2}H - \tilde{b}\frac{\gamma_0-1}{2}H^\nu$. Par conséquent, si $H \leq \left(\frac{3-\gamma_0}{\tilde{b}(\gamma_0-1)} \right)^{\frac{2}{\gamma_0-1}}$ (i.e. $\rho \leq \frac{3-\gamma_0}{2\tilde{b}}$), alors $\lambda_1 \geq 0$ et la 1-caractéristique partant de R_0 s'éloigne de l'origine.

En outre, plus le domaine D_θ est loin de l'origine, c'est-à-dire plus R_0 est grand, plus le temps d'existence sera grand. En effet les conditions (3.3.32)–(3.3.43) sont alors satisfaites plus longtemps. En effet, $x(A_0, A_1, A_2)$ défini en (3.3.34) ne dépend pas de R_0 puisque $\frac{\max |a_1|^2}{\max |a_2| \max |a_0|}$ ne dépend pas de R_0 . Si de plus on a une estimation de $\partial_r w_2$ du type

$$\left| \partial_r w_2^-(t, r) \right| \leq \frac{C}{r},$$

pour tout $(t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$, alors $\zeta(W, A_0, A_1, A_2)$ défini en (3.3.37) ne dépend pas de r . On obtient donc existence sur tout intervalle $[0, \theta]$ si $\theta \leq T$ satisfait

$$\theta \leq R_0 \max \left(\frac{\zeta(W, A_0, A_1, A_2)}{\max |q_1|}, \frac{x(A_0, A_1, A_2)}{\max |q_1(w)|}, \frac{x(\bar{b}_0, \bar{b}_1, \bar{b}_2)}{\max |p_1(w)|} \right).$$

On peut remarquer que la condition ci-dessus de décroissance de $\partial_r w_2$ par rapport à r ne semble pas incompatible avec la condition $\partial_r w_2 \leq -C$. En effet, dans (3.3.26), le minorant de $-\partial_r w_2$ a une dépendance en r à travers une combinaison linéaire de $\partial_r w_1^+$, $\partial_r w_2^+$ et f . En supposant que $\partial_r w_1^+$, $\partial_r w_2^+$ ont une décroissance en $1/r$, les conditions (3.3.26)–(3.3.40) permettent donc à la fonction C d'avoir la même décroissance en espace que Φ , f , $\partial_r w_1^+$ et $\partial_r w_2^+$, c'est-à-dire une décroissance en $1/r$. La même décroissance est donc possible pour $\partial_r w_2$.

Le Théorème 3.3.5 implique :

Corollaire 3.3.7. *On suppose que les conditions de compatibilité ainsi que les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaites en $r = R_0$. Si $w_1 \geq 0$ sur \mathcal{K} et $0 \leq w_2 - w_1 \leq$*

$2 \left(\frac{3-\gamma_0}{b(\gamma_0-1)} \right)^{\frac{\gamma_0-1}{2}}$ sur \mathcal{C}_1 et \mathcal{K} et si de plus $-\partial_r w_2 \geq C$ et $|\partial_r w_2| \leq r$ le long de \mathcal{C}_1 , alors le problème angulaire (3.3.25)–(3.3.8) pour un gaz de Van der Waals admet une solution locale en temps et, avec les notations précédentes, le temps d'existence est minoré de la manière suivante :

$$T_{\text{ex}} \geq R_0 \min \left(\frac{\zeta(W, A_0, A_1, A_2)}{\max |q_1|}, \frac{x(A_0, A_1, A_2)}{\max |q_1|}, \frac{x(\bar{b}_0, \bar{b}_1, \bar{b}_2)}{\max |p_1|} \right),$$

où $\zeta(W, A_0, A_1, A_2)$, $x(A_0, A_1, A_2)$ et $x(\bar{b}_0, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$, définis en (3.3.37) et (3.3.34), ne dépendent pas de R_0 .

Finalement, on peut construire une solution onde de choc, comme dans le Théorème 3.3.4 :

Corollaire 3.3.8. *On considère le problème de Cauchy pour un gaz de Van der Waals isentropique à symétrie cylindrique ou sphérique, qui satisfait donc les équations (3.3.24). On se donne les conditions initiales \mathcal{C}^1 par morceaux (ρ_0, u_0) satisfaisant*

$$\begin{aligned} \rho_0(r) &= \rho_0^-(r), & \text{pour } r \in [0, R_0[, \\ \rho_0(r) &= \rho_0^+(r), & \text{pour } r \in]R_0, +\infty[, \\ u_0(r) &= u_0^-(r), & \text{pour } r \in [0, R_0[, \\ u_0(r) &= u_0^+(r), & \text{pour } r \in]R_0, +\infty[, \end{aligned}$$

où $\rho_0^-, \rho_0^+, u_0^-, u_0^+$ sont \mathcal{C}^1 , et $\rho_0 \geq 0$. On suppose que $u_0 - H(\rho_0) \geq 0$ sur \mathbb{R}_+ et que $\rho_0 \leq \frac{3-\gamma_0}{2b}$. On suppose de plus qu'on peut prolonger régulièrement (ρ_0^-, u_0^-) et (ρ_0^+, u_0^+) de façon à obtenir deux solutions régulières (ρ^-, u^-) et (ρ^+, u^+) définies pour tout temps $t \in [0, T_0[$. Si de plus la condition de compatibilité (3.3.3) et les conditions (3.3.4)–(3.3.5) et $U \geq u^+ + H(\rho^+)$ sont satisfaites en $r = R_0$ et

1. l'application w_2^- satisfait l'inégalité $\partial_r w_2^- \leq \frac{-C(t)}{r}$,
2. l'application w_2^+ satisfait les inégalités $\partial_r w_1^+ \geq \partial_r w_2^+ \geq 0$, $w_1^+ + w_2^+ \geq 0$, $|\partial_r w_1^+| + |\partial_r w_2^+| \leq \frac{C}{r}$,
3. la condition initiale vérifie $w_{1,0}^-(R_0) \geq 0$,
4. la condition initiale vérifie $\rho_0^-(R_0) > \max(\rho^+(t, x), t \in [0, T[, x \in \mathbb{R}_+)$.

Alors, on peut construire une solution onde de choc pour $t \in [0, T_1[$, où $T_1 = \min(T_0, T_{\text{ex}})$, et

$$T_{\text{ex}} \geq R_0 \min \left(\frac{\zeta(W, A_0, A_1, A_2)}{\max |q_1|}, \frac{x(A_0, A_1, A_2)}{\max |q_1|}, \frac{x(\bar{b}_0, \bar{b}_1, \bar{b}_2)}{\max |p_1|} \right),$$

où ζ est défini en (3.3.37) et x en (3.3.34).

3.4 Équation de surface

On se concentre plus particulièrement ici sur les aspects géométriques de la propagation de chocs en plusieurs dimensions d'espace. On s'inspire de l'approximation CCW

(Chisnell, Chester [31, 33, 34], Whitham [143, pp. 277–281]) pour étudier l'équation de la surface de discontinuité. Comme Whitham, on introduit les *rayons* comme étant les courbes orthogonales aux positions successives du choc, et les *tubes de rayon* comme étant des tubes fictifs dont les parois sont constituées de rayons. L'idée est alors de partitionner l'espace en un ensemble de tubes de rayons assez petits, puis d'étudier la propagation du choc indépendamment dans chaque tube de rayon, en considérant que les parois d'un tube sont hermétiques, i.e. que les particules ne sortent pas du tube où elles sont initialement. On fait ici une approximation puisque, en-dehors des cas particuliers des symétries plane cylindrique ou sphérique, les trajectoires des particules n'ont en fait pas de raison d'être identiques aux rayons dans le cas général, même si leur vitesse a même direction au niveau du choc. Par conséquent, les particules vont certainement sortir de leur tube de rayon.

Une étude plus poussée de l'évolution du front de choc est par ailleurs menée dans P. Prasad [110] particulièrement lorsque le choc est faible, l'approximation de Whitham [143] étant assez bonne lorsque le choc est fort d'après [110, p. 319].

3.4.1 Fluide dans une tuyère

La première étape consiste à étudier l'évolution d'un fluide dans un tube de section variable. On suppose que l'axe du tube est l'axe (Ox) et l'on note $A(x)$ la section du tube, que l'on suppose varier régulièrement : $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Dans ce cas, le fluide n'est pas monodimensionnel, mais en considérant des moyennes sur les sections des grandeurs ρ, u, s, p décrivant le fluide, on obtient après une « petite » approximation, les équations suivantes, où $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \partial_t p + u \partial_x p + \rho c^2 \partial_x u + \rho c^2 u \frac{A'}{A} = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \frac{1}{\rho} \partial_x p = 0, \\ \partial_t s + u \partial_x s = 0. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Ce sont les équations d'Euler dans les tuyères¹ (voir [94]). Les termes sources géométriques liés aux symétries cylindriques ou sphériques sont des cas particuliers avec $A(x) = r^n$, où $n = 1$ en symétrie cylindrique et $n = 2$ en symétrie sphérique.

On cherche les solutions régulières de part et d'autre d'une discontinuité que l'on supposera être un 3-choc. Ce qui suit étend aux gaz de Van der Waals le calcul classique pour les gaz parfaits polytropiques [143, pp. 265–274].

On suppose que le nombre de Mach devant le choc M est une fonction de x et l'on cherche une relation entre M et A . Soit $x = X(t)$ la courbe caractéristique d'équation $\frac{dX(t)}{dt} = u(t, X(t)) + c(t, X(t))$ se propageant dans la zone derrière le choc et arrivant au choc en (t_c, x_c) . On obtient alors

$$\left(\frac{1}{c(t, X)} + \frac{1}{u(t, X)} \right) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{d(p(t, X))}{dt} + \frac{d(u(t, X))}{dt} \right) = -\frac{1}{A} \frac{d(A(X))}{dt}. \quad (3.4.2)$$

D'autre part, les conditions de Rankine-Hugoniot donnent les valeurs de p, u, ρ au niveau du choc. On introduit le nombre de Mach derrière le choc $m = \sqrt{\frac{M^2(\gamma_0 - 1) + 2}{2\gamma_0 M^2 - (\gamma_0 - 1)}}$ comme

1. *nozzle* en anglais

en (1.4.8). Pour un gaz de Van der Waals polytropique on obtient (cf. paragraphe 1.4) :

$$\frac{u}{c_1} = \frac{2(1 - b\rho_1)(M^2 - 1)}{M(\gamma_0 + 1)}, \quad \frac{p}{p_1} = \frac{2\gamma_0 M^2 - (\gamma_0 - 1)}{\gamma_0 + 1},$$

$$\frac{c}{c_1} = \frac{M^2(\gamma_0 - 1 + 2b\rho_1) + 2(1 - b\rho_1)}{mM(\gamma_0 + 1)}, \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{M^2(\gamma_0 + 1)}{M^2(\gamma_0 - 1 + 2b\rho_1) + 2(1 - b\rho_1)}.$$

Soit $\chi(t)$ la position du choc à l'instant t . L'application χ vérifie $\frac{d\chi}{dt} = U(t, \chi(t))$. En différentiant la vitesse u et la pression p le long du choc on obtient après calcul

$$\frac{d(u(t, \chi(t)))}{dt} = \frac{2c_1(1 - b\rho_1)}{\gamma_0 + 1} \left(1 + \frac{1}{M^2}\right) \frac{d(M(\chi(t)))}{dt},$$

$$\frac{d(p(t, \chi(t)))}{dt} = \frac{4\rho_1 c_1^2(1 - b\rho_1)}{\gamma_0 + 1} M \frac{d(M(\chi(t)))}{dt}.$$

On remplace ensuite les dérivées de u et p le long de la caractéristique de vitesse $u + c$ dans (3.4.2) par les expressions ci-dessus, qui sont des dérivées le long du choc. On fait donc ici

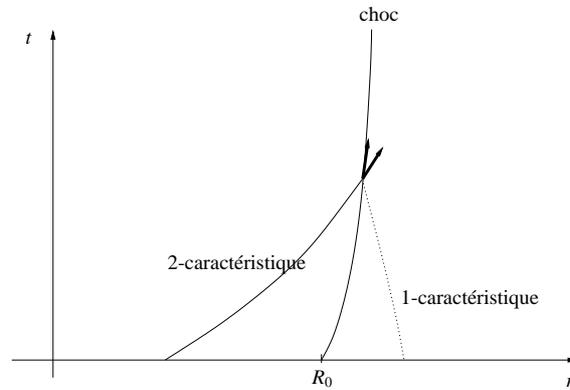


FIGURE 3.5 – Dérivée le long de la 2-caractéristique vs. dérivée le long du choc.

une erreur qu'on suppose petite (voir Figure 3.5). En négligeant cette erreur, on obtient

$$\frac{M}{M^2 - 1} \left(1 + \frac{2(1 - b\rho_1)(M^2 - 1)m}{M^2(\gamma_0 - 1 + 2b\rho_1) + 2(1 - b\rho_1)}\right) \left(1 + 2m + \frac{1}{M^2}\right) \frac{dM}{dx} \approx -\frac{1}{A} \frac{dA}{dx}.$$

Proposition 3.4.1. *Lorsque l'on considère l'évolution d'un gaz de Van der Waals polytropique dans un tube de section variable $A(x)$, on obtient la relation approchée suivante entre le nombre de Mach $M = \frac{U - u_1}{c_1}$ et la section A :*

$$f_b(M) \frac{M}{M^2 - 1} \nabla M = -\frac{\nabla A}{A}, \quad (3.4.3)$$

où

$$f_b(M) = \left(1 + \frac{2(1 - b\rho_1)(M^2 - 1)m}{M^2(\gamma_0 - 1 + 2b\rho_1) + 2(1 - b\rho_1)}\right) \left(1 + 2m + \frac{1}{M^2}\right), \quad (3.4.4)$$

$$\text{et } m = \sqrt{\frac{M^2(\gamma_0 - 1) + 2}{2\gamma_0 M^2 - (\gamma_0 - 1)}}.$$

Remarque 3.4.2. Comme $\gamma_0 > 1$, m est bien défini pour $M > 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{\frac{\gamma_0-1}{2\gamma_0}}$. D'autre part, pour $M > 1$, $f_b(M) > 1$ et

$$f_b(M) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} f_\infty = \left(1 + \frac{2(1-b\rho_1)}{\gamma_0-1+2b\rho_1} \sqrt{\frac{\gamma_0-1}{2\gamma_0}}\right) \left(1 + 2\sqrt{\frac{\gamma_0-1}{2\gamma_0}}\right) > 1. \quad (3.4.5)$$

Preuve. Il reste à estimer l'erreur effectuée. Réécrivons les équations obtenues. Le long de la courbe d'équation $x = X(t)$ on a

$$\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{u}\right) \left[\frac{1}{\rho c} \left(\frac{1}{u+c} \partial_t p + \partial_x p \right) + \left(\frac{1}{u+c} \partial_t u + \partial_x u \right) \right] = \frac{-A'}{A}, \quad (3.4.6)$$

et d'autre part, le long de la courbe d'équation $x = \chi(t)$

$$\frac{1}{U} \partial_t p + \partial_x p = \frac{4\rho_1 c_1^2 (1-b\rho_1) M}{\gamma_0+1} M', \quad (3.4.7)$$

$$\frac{1}{U} \partial_t u + \partial_x u = \frac{2c_1(1-b\rho_1)}{\gamma_0+1} \left(1 + \frac{1}{M^2}\right) M'. \quad (3.4.8)$$

En faisant (3.4.6) – $\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{\rho c}(3.4.7) - (3.4.8)\right)$, on obtient au point d'intersection des deux courbes (t_c, x_c) , où $X(t_c) = \chi(t_c)$,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{u}\right) \left(\frac{1}{u+c} - \frac{1}{U}\right) \left[\frac{1}{\rho c} \partial_t p + \partial_t u \right] \\ & + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{u}\right) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{4\rho_1 c_1^2 (1-b\rho_1) M}{\gamma_0+1} + \frac{2c_1(1-b\rho_1)}{\gamma_0+1} \left(1 + \frac{1}{M^2}\right) \right) M' = \frac{-A'}{A}, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore

$$\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{u}\right) \left(\frac{1}{u+c} - \frac{1}{U}\right) \left[\frac{1}{\rho c} \partial_t p + \partial_t u \right] + \frac{M f_b(M)}{M^2-1} M' = \frac{-A'}{A}.$$

L'approximation effectuée consiste à négliger le premier terme de cette égalité. Or

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{u}\right) \left(\frac{-1}{U} - \frac{1}{u+c}\right) &= \frac{1}{ucU} (u+c-U) \\ &= \frac{-(\gamma_0+1)(1-m)}{2c_1^2(1-b\rho_1)(M^2-1)}. \end{aligned}$$

Si le choc est fort, on a $M \gg 1$ auquel cas $1-m^2 = (1-m)(1+m) = \frac{(\gamma_0+1)(M^2-1)}{(m+1)(2\gamma_0 M^2 - (\gamma_0-1))} \geq 0$ d'où $0 \leq m \leq 1$ et

$$\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{u+c}\right) = o\left(\frac{M f_b(M)}{M^2-1}\right),$$

ce qui justifie l'approximation si on suppose par ailleurs que $1/(\rho c) \partial_t p$, $\partial_t u$ et M' restent bornés. \square

3.4.2 Équation approchée pour la position du choc

On considère un choc à travers une surface de discontinuité Σ se propageant à une vitesse (normale) non-nulle en tout point, de sorte que l'on peut à chaque instant t décrire Σ comme l'ensemble $\Sigma(t) = \{x \in \mathbb{R}^d; \beta(x) - c_1 t = 0\}$, où $\beta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction supposée régulière et sans point critique. On définit les *rayons* comme les courbes intégrales du champ $\nu = \frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|}$, un « tube de rayons » étant alors une région de l'espace délimitée par deux positions distinctes ($\mathcal{A}_0 \subset \Sigma(t_0)$ et $\mathcal{A}_1 \subset \Sigma(t_1)$) du choc et des rayons (voir Figure 3.6). On suppose que, au moins dans un voisinage de Σ_0 les courbes intégrales de ν ne se croisent

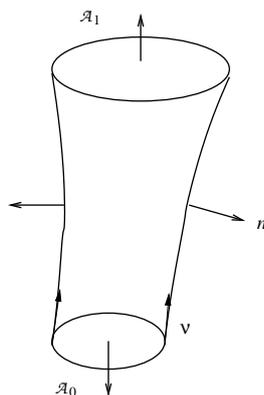


FIGURE 3.6 – Tube de rayon.

pas, ce qui est vrai par exemple si Σ_0 est une sphère (en allant vers l'extérieur). Cette condition nous amène à choisir Σ_0 convexe. Soit $x \in B_r \subset \Sigma(t)$, où $B_r \subset B(x, r) \cap \Sigma(t)$. Il existe alors $B_{0,r}$ l'« image » de B_r sur Σ_0 obtenue en remontant les rayons. On considère alors un tube de rayons reliant $B_r \subset \Sigma(t)$ à $B_{0,r} \in \Sigma_0$ et on note $A(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\int_{B_r} 1 d\sigma}{\int_{B_{0,r}} 1 d\sigma} \right)$ (voir [143, p. 280]).

Proposition 3.4.1. *Pour A défini comme ci-dessus, on a $\nabla \cdot \frac{\nu}{A} = 0$.*

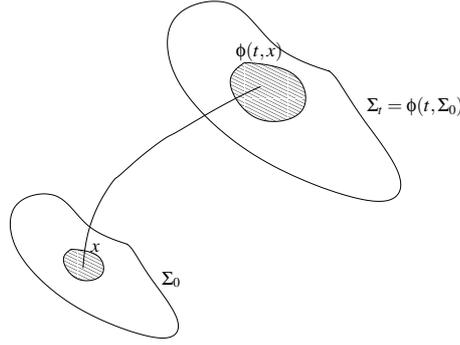
Preuve. Soit φ le flot de la normale aux surfaces $\beta = cste$, pas nécessairement unitaire (un choix intéressant est $\partial_t \varphi = \frac{\nabla\beta(\varphi)}{|\nabla\beta(\varphi)|^2}$, ce qui assure $\frac{d}{dt}\beta(\varphi(t, x)) = 1$ et donc $\beta(\varphi(t, x)) = y(x) + t$).

Soit $\Sigma_t = \varphi(t, \Sigma_0)$ (voir Figure 3.7). L'application A représente l'aire locale et pour tout $x \in \Sigma_0$, $r > 0$ et $\tilde{x} = \varphi(t, x) \in \Sigma_t$, A est définie par

$$A(\tilde{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{|\Sigma_t \cap \varphi(t, B(x, r))|}{|\Sigma_0 \cap B(x, r)|} \right).$$

Or, si $\Sigma_0 = \{f(u, v); u, v \in \Omega\}$, en posant $D_r = f^{-1}(B(x, r))$ on a

$$|\Sigma_0 \cap B(x, r)| = \int_{D_r} \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\| du dv.$$

FIGURE 3.7 – Flot allant de Σ_0 à Σ_t .

D'autre part, on a alors $\Sigma_t = \{\varphi(t, f(u, v)); u, v \in \Omega\}$. Par conséquent $\Sigma_t \cap \varphi(t, B(x, r)) = \{\varphi(t, f(u, v)); u, v \in D_r\}$, et en notant $\tilde{f}(u, v) = \varphi(t, f(u, v))$ on a

$$|\Sigma_t \cap \varphi(t, B(x, r))| = \int_{D_r} \left\| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \right\| du dv .$$

Or $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = D_r \varphi(t, f(u, v)) \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = D_r \varphi(t, f(u, v)) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \right\| &= |\det D_r \varphi(t, f(u, v))| \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\| \\ &\xrightarrow{r \rightarrow 0} |\det D_r \varphi(t, x)| \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\|. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $A(\tilde{x}) = |\det D_r \varphi(t, x)|$. D'où

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} \frac{d\sigma_t(\tilde{x})}{A(\tilde{x})} &= \int_{\Omega} \frac{|\det D_r \varphi(t, x)|}{|\det D_r \varphi(t, x)|} \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\| du dv \\ &= \int_{\Sigma_0} \frac{d\sigma_0(x)}{A(x)}, \end{aligned}$$

puisque $A(x) = 1$ pour tout $x \in \Sigma_0$.

On applique maintenant le théorème de Green-Ostrogradsky à un tube de rayon V reliant $\mathcal{A}_0 = \Sigma_0 \cap B(x, r)$ à $\mathcal{A}_t = \Sigma_t \cap \varphi(t, B(x, r))$, on obtient

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\nu}{A} \right) dV = \int_{\partial V} \frac{\nu \cdot n}{A} d\sigma = \int_{\mathcal{A}_t} \frac{d\sigma_t}{A} - \int_{\mathcal{A}_0} \frac{d\sigma_0}{A},$$

n étant la normale sortante du tube. En effet, par définition des rayons, $\nu \cdot n = 0$ sur les parois constituée de rayons. Il reste donc seulement les intégrales sur les surfaces transverses. Ainsi

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\nu}{A} \right) dV = 0.$$

Comme cela est vrai pour tout tube de rayon, cette égalité implique $\nabla \cdot \frac{\nu}{A} = 0$. \square

Proposition 3.4.3. *On considère une solution onde de choc des équations d'Euler compressibles (1.1.1), la zone devant le choc —indiquée par 1— étant au repos. La surface de discontinuité d'une solution onde de choc des équations d'Euler compressibles étant donnée sous la forme : $\Sigma(t) = \{x \in \mathbb{R}^d; \beta(x) = c_1 t\}$, l'équation vérifiée par β est donnée de manière approchée par :*

$$\left(\frac{f_b(1/|\nabla\beta|)}{1 - |\nabla\beta|^2} + 1 \right) \frac{\nabla\beta^{\mathbf{T}}}{|\nabla\beta|} \nabla^2\beta \frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|} = \Delta\beta, \quad (3.4.9)$$

où f_b est défini comme en (3.4.4).

Preuve. La vitesse normale de propagation de la surface $\Sigma(t) = \{x; \beta(x) - c_1 t = 0\}$ est : $U = \frac{c_1}{|\nabla\beta|} = M c_1$, donc $M = \frac{1}{|\nabla\beta|}$ par définition de M (voir (1.4.4)). D'autre part, la direction normale à la surface $\Sigma(t)$ est $\nu = \frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|}$. On considère maintenant un tube de rayon de volume V (voir Figure 3.6), les rayons étant les trajectoires suivant le champ de vecteurs ν . On suppose que les rayons joignent les surfaces transverses aux rayons $\mathcal{A}_0 \in \Sigma_0$ et $\mathcal{A}_1 \in \Sigma(t_1)$. Avec la relation entre A et M (3.4.3), on a finalement

$$\frac{M f_b(M)}{M^2 - 1} \nabla M = -\frac{\nabla A}{A}, \quad M = \frac{1}{|\nabla\beta|}, \quad (3.4.10)$$

$$\nu = \frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|}, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\nu}{A} \right) = 0. \quad (3.4.11)$$

On réunit alors d'une part les deux équations de (3.4.10) et d'autre part les deux équations de (3.4.11) afin d'obtenir deux relations entre β et A :

$$\frac{f_b(1/|\nabla\beta|)}{1 - |\nabla\beta|^2} \frac{\nabla^2\beta \nabla\beta}{|\nabla\beta|^2} = \frac{\nabla A}{A}, \quad (3.4.12)$$

$$\Delta\beta - \frac{\nabla^2\beta(\nabla\beta, \nabla\beta)}{|\nabla\beta|^2} = \nabla\beta \cdot \frac{\nabla A}{A}, \quad (3.4.13)$$

d'où l'on élimine $\frac{\nabla A}{A}$ en faisant le produit scalaire par $\nabla\beta$ dans (3.4.12). \square

Remarque 3.4.4. L'équation (3.4.9) est en fait une équation en $Y = \nabla\beta$, de la forme

$$\frac{1}{|Y|^2} \left(\frac{f_b(1/|Y|)}{1 - |Y|^2} + 1 \right) \nabla Y(Y, Y) = \operatorname{div} Y,$$

où Y satisfait la condition supplémentaire $\nabla Y = \nabla Y^{\mathbf{T}}$.

Soit Σ_0 une hypersurface de \mathbb{R}^d et Y un champ de vecteurs transverse à cette hypersurface. Le problème considéré s'écrit alors :

$$\begin{cases} \Delta\beta - \left(\frac{f_b(1/|\nabla\beta|)}{1 - |\nabla\beta|^2} + 1 \right) \nabla^2\beta \left(\frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|}, \frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|} \right) = 0, \\ \beta|_{\Sigma_0} = 0, \\ \nabla\beta|_{\Sigma_0} = c_1 \frac{|\rho_1 - \rho_2|}{\|\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2\|} N, \end{cases} \quad (3.4.14)$$

où ρ_1, ρ_2, u_1, u_2 vérifient les conditions de compatibilité de Rankine-Hugoniot à travers Σ_0 et où N est la normale sortante de Σ_0 , colinéaire à u_2 et de même direction.

On étudie désormais plus précisément l'EDP du second ordre non-linéaire (3.4.9). On rappelle au préalable quelques définitions (cf. Strichartz [128, §§ 8.4 & 8.5]).

Définition 3.4.5. Pour un opérateur linéaire du second ordre à coefficients constants $L = \sum_{j,k \in \llbracket 1, d \rrbracket} a^{j,k} \partial_j \partial_k$, le *symbole* de l'opérateur est le polynôme

$$p(\xi) = - \sum_{j,k \in \llbracket 1, d \rrbracket} a_0^{j,k} \xi_j \xi_k.$$

Pour un opérateur à coefficients variables $L = \sum_{j,k \in \llbracket 1, d \rrbracket} a^{j,k}(x) \partial_j \partial_k$, le *symbole* de l'opérateur en x est le symbole de la partie principale du linéarisé autour de l'état constant x . On obtient finalement $p(x, \xi) = - \sum_{j,k \in \llbracket 1, d \rrbracket} a^{j,k}(x) \xi_j \xi_k$.

Définition 3.4.6. L'opérateur du second ordre $L = \sum_{j,k \in \llbracket 1, d \rrbracket} a^{j,k}(x) \partial_j \partial_k$ est dit *hyperbolique* dans la direction $N \in \mathbb{R}^d$ si pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ le polynôme $\omega \mapsto p(\xi + \omega N)$ admet deux racines réelles. Si de plus, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \text{Vect}\{N\}$ ses deux racines sont distinctes, alors on dit que L est *strictement hyperbolique* dans la direction N .

L'équation $\sum_{j,k \in \llbracket 1, d \rrbracket} a^{j,k}(x) \partial_j \partial_k u = 0$ est *hyperbolique* si l'opérateur

$$L = \sum_{j,k \in \llbracket 1, d \rrbracket} a^{j,k} \partial_j \partial_k$$

est hyperbolique.

Définition 3.4.7. Le *cône caractéristique* en x de l'opérateur $L = \sum_{j,k \in \llbracket 1, d \rrbracket} a^{j,k}(x) \partial_j \partial_k$, hyperbolique dans la direction N , est l'ensemble

$$\text{car}_x(L) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d; p(x, \xi) = 0 \right\}.$$

Le *cône 'forward'* en x noté $\Gamma_x(L)$ est alors la composante connexe de $\mathbb{R}^d \setminus \text{car}_x(L)$ contenant N .

Définition 3.4.8. Une hypersurface S est dite *'spacelike'* en $x \in S$ pour une équation hyperbolique du type (3.4.20) si $\nu(x) \in \Gamma_x(L) \cap (-\Gamma_x(L))$, lorsque $\nu(x)$ représente la normale à la surface S en x .

Proposition 3.4.9. L'équation (3.4.9) est *strictement hyperbolique* tant que $|\nabla \beta| < 1$. Elle est de *type elliptique* pour $|\nabla \beta| > 1$.

Le cas qui nous intéresse est le cas supersonique, c'est à dire $M > 1$. Comme, $M = 1/|\nabla \beta|$, cela revient à considérer $|\nabla \beta| < 1$, ce qui correspond au cas hyperbolique.

Preuve. On note $F(u) = \frac{f_b(1/u)}{1-u^2}$. Soit β une solution de (3.4.9) et $\nu = \frac{\nabla \beta}{|\nabla \beta|}$. L'équation linéarisée de (3.4.9) autour de β s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta b = & (F(|\nabla \beta|) + 1) \left(\nabla^2 b(\nu, \nu) - 2\nabla^2 \beta(\nu, \nu) \langle \nu, \frac{\nabla b}{|\nabla \beta|} \rangle + 2\nabla^2 \beta(\nu, \frac{\nabla b}{|\nabla \beta|}) \right) \\ & + F'(|\nabla \beta|) (\nu \cdot \nabla b) \nabla^2 \beta(\nu, \nu). \end{aligned}$$

Le symbole principal de l'équation (3.4.9), qui est dans le cas non-linéaire le symbole principal du linéarisé s'écrit alors, pour $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} p_2(\nabla \beta, \xi) &= |\xi|^2 - (F(|\nabla \beta|) + 1) \langle \xi, \nu \rangle^2 \\ &= \xi^{\mathbf{T}} \left(\text{Id} - (F(|\nabla \beta|) + 1) \nu \nu^{\mathbf{T}} \right) \xi. \end{aligned}$$

On remarque ici que la matrice $\text{Id} - (F(|\nabla\beta|) + 1)\nu\nu^{\mathbf{T}}$ est symétrique réelle de valeurs propres $(-F(|\nabla\beta|), 1, \dots, 1)$. Ainsi, si F est à valeurs strictement positives, ce qui correspond à $|\nabla\beta| < 1$, la forme quadratique associée est de signature $(d-1, 1)$ et définit donc une métrique de Lorentz. Plus précisément, cette forme quadratique sera négative selon la direction ν et positive sur le sous-espace vectoriel orthogonal à cette direction. On peut vérifier que l'équation est alors bien hyperbolique dans la direction ν ; en effet, pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} p(x, \xi + \omega\nu) &= |\xi + \omega\nu|^2 - (F(|\nabla\beta|) + 1)\langle \xi + \omega\nu, \nu \rangle^2 \\ &= |\xi|^2 + \omega^2 + 2\omega\langle \xi, \nu \rangle - (F(|\nabla\beta|) + 1)\left(\langle \xi, \nu \rangle^2 + \omega^2 + 2\omega\langle \xi, \nu \rangle\right) \\ &= -F(|\nabla\beta|) \left[\omega^2 + 2\omega\langle \xi, \nu \rangle + \langle \xi, \nu \rangle^2 + \frac{\langle \xi, \nu \rangle^2 - |\xi|^2}{F(|\nabla\beta|)} \right]. \end{aligned}$$

Il suffit de vérifier que les racines de ce polynôme en ω sont toutes réelles. Or le déterminant associé à ce polynôme est

$$\Delta = \frac{4}{F(|\nabla\beta|)} \left(|\xi|^2 - \langle \xi, \nu \rangle^2 \right) \geq 0.$$

On a de plus égalité si et seulement si ξ est parallèle à ν , ce qui donne la stricte hyperbolicité de l'équation.

Si F est strictement négative, i.e. $|\nabla\beta| > 1$, alors la forme quadratique associée est de signature $(d, 0)$. L'équation est alors bien elliptique (voir D. Gilbarg & N. S. Trudinger [54, chap. 6]). \square

Dans le cas elliptique, l'équation (3.4.9) peut être comparée à une équation de courbure moyenne de la forme $(1 + |\nabla u|^2)\Delta u - \nabla^2 u(\nabla u, \nabla u) = dH(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}$ (voir [54, chap. 16]). On s'attend alors à ce que les propriétés de l'équation (3.4.9) soient similaires à celles de l'équation de courbure moyenne.

3.4.3 Solutions particulières

On cherche des solutions particulières de l'équation (3.4.9) ne dépendant que de $r = |x|$. En observant que, si $\beta(x) = B(|x|)$, on a $\Delta\beta = B'' + \frac{2}{r}B'$ et en coordonnées sphériques

$$\nabla^2\beta = \begin{pmatrix} B'' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B'}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B'}{r} \end{pmatrix}, \text{ on obtient l'équation}$$

$$\frac{f_b(|B'(r)|^{-1})}{1 - |B'(r)|^2} B'' = \frac{d-1}{r} B'. \quad (3.4.15)$$

3.4.3.A Ondes planes

Dans le cas des ondes planes, on s'attend à trouver U et M constant et donc aussi $\nabla\beta$ constant. On considère dans ce cas β de la forme $\beta(x) = \bar{\beta}(x \cdot e)$, où $e \in \mathbb{R}^d$ est fixé. L'équation en $\bar{\beta}$ est alors semblable à (3.4.15) en prenant $d = 1$. L'équation devient alors $f_b(|\bar{\beta}'|)\bar{\beta}'' = 0$. On suppose $\bar{\beta}'(0) < 1$ de sorte que $M(0) = \frac{1}{|\bar{\beta}'(0)|} > 1$. D'où, par (3.4.4),

on voit que $f_b(\bar{\beta}'(0)) > 0$. Ainsi, au voisinage de l'origine et tant que $\bar{\beta}' > 1$, l'équation devient $\bar{\beta}'' = 0$. Par conséquent, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\bar{\beta}'(r) > 1$ et la solution donnée par $\bar{\beta}(r) = \bar{\beta}'(0)r + \bar{\beta}(0)$ est définie pour tout $r \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a bien obtenu U , M , $\nabla\beta$ constants.

3.4.3.B Solutions autosimilaires

Lorsqu'on cherche une onde de choc autosimilaire, on s'attend à ce que la surface de discontinuité soit régie par une équation de la forme $\beta(x) = B(|x|) = c_1 t$ avec $B(r) = c_1 \left(\frac{r}{A}\right)^{1/\alpha}$. En effet, l'emplacement du choc est censé être donné par $R(t) = A|t|^\alpha$. En reportant cette forme de β dans l'équation (3.4.15), on obtient

$$\left(\frac{f_b(B'^{-1})}{1 - B'^2}\right) \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = (d - 1).$$

On ne trouve donc pas de solution exacte, à moins que $f_b(M) = \frac{d-1}{1/\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)$, ce qui est en contradiction avec la définition (3.4.4) de f_b . En prenant la limite lorsque $r \rightarrow 0$, en supposant $\alpha < 1$ (cas de l'implosion, voir Sections 2.2.3 et 3.2) on a $B' = \frac{c_1}{A\alpha} \left(\frac{r}{A}\right)^{1/\alpha-1} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ et $M = \frac{1}{|B'|} \xrightarrow{r \rightarrow 0} +\infty$. On trouve alors $f_\infty \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = d - 1$, où $f_\infty = \lim_{M \rightarrow \infty} f_b(M) > 1$ est défini comme en (3.4.5), et par conséquent

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{d-1}{f_\infty}. \quad (3.4.16)$$

En comparant les valeurs obtenues pour le coefficient d'autosimilarité α aux valeurs numériques données par R. F. Chisnell [34] dans le cas d'un gaz parfait polytropique on obtient le Tableau 3.1 : l'erreur relative moyenne est de 0,13% lorsque $b = 0$, lorsqu'on compare aux résultats de Chisnell [34]. Cependant, l'erreur augmente avec b , lorsqu'on compare aux résultats de Arora & Sharma [8] (voir Tableau 3.2). Elle augmente d'ailleurs plus vite pour $d = 3$ que pour $d = 2$, et, à b et d fixés, elle est plus grande pour $\gamma_0 = 7/5$ que pour $\gamma_0 = 5/3$.

En posant $y = B'$ dans l'équation (3.4.15), on se ramène à étudier l'équation suivante pour $r \in \mathbb{R}_+^*$:

$$y' = \frac{1 - y^2}{f_b(|y|^{-1})} \frac{d-1}{r} y, \quad y(1) = B_1 \in]0, 1[. \quad (3.4.17)$$

En posant $\tau = \ln r$ et $z(\tau) = y(r)$ cette EDO devient autonome

$$z' = (d-1) \frac{1 - z^2}{f_b(|z|^{-1})} z, \quad y(1) = B_1 \in]0, 1[. \quad (3.4.18)$$

Proposition 3.4.10. *Soit y la solution de l'équation (3.4.17) avec condition initiale $y(1) = B_1$. Si $B_1 \in]0, 1[$ alors y est globale et à valeurs dans $]0, 1[$. De plus :*

$$y(r) = B'(r) \sim_{r \rightarrow 0} K_0 r^{(d-1)/f_\infty},$$

où K_0 est une constante positive non-nulle et f_∞ est définie comme en (3.4.5). De plus :

$$y = B'(r) \sim_{r \rightarrow \infty} 1 - K_1 r^{2(d-1)/f_b(1)},$$

où K_1 est une constante positive non-nulle.

γ_0	$b\rho_1$	d	f_∞	α par (3.4.16)	α par [34]	α par [144]	α par [8]
6/5	0	3	6.1307	0.7540	0.757145		
6/5	0	2	"	0.8597	0.861162		
7/5	0	3	5.0743	0.7172	0.717172	0.717	
7/5	0	2	"	0.8354	0.835322		
5/3	0	3	4.4360	0.6892	0.688378		
5/3	0	2	"	0.81604	0.815625		
6/5	0.00006	3	6.1277	0.7539			0.757447
6/5	0.0004	3	6.1108	0.7534			0.757263
6/5	0.01	3	5.6754	0.7394			0.734492
7/5	0.05	3	4.2779	0.6814		0.661	0.661544
7/5	0.05	2	"	0.8105			0.802926
5/3	0.003	3	4.4058	0.68778			0.6864959
5/3	0.025	3	4.19963	0.6774			0.66979
7/5	0.1	3	3.7469	0.65199			0.596033
7/5	0.1	2	"	0.78933			0.77411
5/3	0.1	3	3.6540	0.6462			0.632769
5/3	0.1	2	"	0.7851			0.779399
7/5	0.2	3	3.0833	0.6065			0.537973
7/5	0.2	2	"	0.7551			0.728344
5/3	0.2	3	3.1652	0.61279			0.594130
5/3	0.2	2	"	0.7599			0.751708
7/5	0.25	3	2.8620	0.5886		0.534	0.507834
7/5	0.25	2	"	0.7410			0.71577

TABLE 3.1 – Calcul du coefficient d'autosimilarité α .

γ_0	$b\rho_1$	erreur relative pour $d = 3$	erreur relative pour $d = 2$
6/5	0.00006	0.46%	
6/5	0.0004	0.50%	
6/5	0.01	0.66%	
7/5	0.05	2.96%	0.94%
5/3	0.003	0.19%	
5/3	0.025	1.12%	
7/5	0.1	8.95%	1.94%
5/3	0.1	2.11%	0.73%
7/5	0.2	11.98%	3.61%
5/3	0.2	3.08%	1.08%
7/5	0.25	14.79%	3.57%

TABLE 3.2 – Calcul de l'erreur relative sur α entre (3.4.16) et [8].

Preuve. Étudier la solution y de (3.4.17) avec condition initiale $y(1) = B_1$ revient à étudier la solution z de (3.4.18) avec condition initiale $z(0) = B_1$. Comme cette équation est autonome, on peut étudier ses points fixes, qui sont 0, 1 et -1. On note $\Theta(z) = (d-1)\frac{1-z^2}{f_b(|z|^{-1})}z$. On a

$$\begin{aligned}\Theta'(-1) &= \frac{-2(d-1)}{f_b(1)}, \\ \Theta'(0) &= \frac{d-1}{f_\infty}, \\ \Theta'(1) &= \frac{2(d-1)}{f_b(1)}.\end{aligned}$$

La condition initiale se trouvant dans l'intervalle $]0, 1[$, z va donc de 0 quand τ tend vers $-\infty$ vers 1 quand τ tend vers $+\infty$. L'équation linéarisée en 0 est alors $z' = \frac{d-1}{f_\infty}z$ et l'équation linéarisée en 1 est $z' = \frac{2(d-1)}{f_b(1)}z$. On obtient donc les équivalents $z \sim_{-\infty} K_0 e^{\frac{d-1}{f_\infty}\tau}$ et $z \sim_{+\infty} 1 + K_1 e^{\frac{2(d-1)}{f_b(1)}\tau}$. \square

3.4.4 Solutions quasi-sphériques

On s'intéresse désormais à des solutions plus générales de l'équation (3.4.9). On cherche à utiliser le résultat d'existence locale suivant (voir [132, chap. 16]).

Théorème 3.4.11. *On considère une équation scalaire du second ordre quasi-linéaire de la forme*

$$\partial_{tt}^2 u - \sum_{j,k \in [1, d-1]} a^{j,k}(t, y, D^1 u) \partial_j \partial_k u - \sum_{j \in [1, d-1]} B^j(t, y, D^1 u) \partial_j \partial_t u = C(t, y, D^1 u), \quad (3.4.19)$$

où $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^{d-1}$, $D^1 u = (u, \partial_t u, \partial_1 u, \dots, \partial_{d-1} u) \in \mathbb{R}^{d+1}$, les coefficients $a^{j,k}$, B^j et C étant réguliers et à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose de plus qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout (t, y, W) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d+1}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$\sum_{j,k \in [1, d-1]} a^{j,k}(t, y, W) \xi_j \xi_k \geq K |\xi|^2.$$

Alors, pour tout $f \in \mathbf{H}^{k+1}(\mathbb{R}^{d-1})$, $g \in \mathbf{H}^k(\mathbb{R}^{d-1})$, avec $k > (d-1)/2 + 1$ l'équation (3.4.19), associée aux conditions initiales $u(0, y) = f(y)$, $\partial_t u(0, y) = g(y)$, admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{H}^{k+1}(\mathbb{R}^{d-1})) \cap \mathcal{C}^1(I, \mathbf{H}^k(\mathbb{R}^{d-1}))$, sur un voisinage I de 0 dans \mathbb{R} .

De plus, cette solution persiste tant que la quantité

$$\|u(t)\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}(\mathbb{R}^{d-1}; \mathbb{R})} + \|\partial_t u(t)\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^{d-1}; \mathbb{R})}$$

est bornée.

Dans le cas qui nous préoccupe, l'équation s'écrit

$$A : \nabla^2 \beta = \sum_{j,k \in [0, d-1]} a^{j,k}(\nabla \beta) \partial_j \partial_k \beta = 0, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^d, \quad (3.4.20)$$

avec $A = I_d - \frac{1}{|\nabla\beta|^2}(F(|\nabla\beta|) + 1)\nabla\beta(\nabla\beta)^{\mathbf{T}}$. Les coefficients $a^{j,k}$ et c sont donc réguliers et à valeurs réelles et la matrice $A = \left(a^{j,k}\right)_{j,k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket}$ définit une métrique de Lorentz sur \mathbb{R}^d , si $|\nabla\beta| < 1$. On connaît de plus Σ_0 une hypersurface de \mathbb{R}^d sur laquelle sont données des conditions de Cauchy :

$$\beta|_{\Sigma_0} = 0, \quad \nabla\beta|_{\Sigma_0} = \frac{1}{M(0)}N,$$

où $N : \sigma_0 \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ est une application associant à chaque point de Σ_0 la normale à Σ_0 en ce point, supposée unitaire et sortante, et $M(0)$ est le nombre de Mach initial. Notons que la normale sortante est bien définie en supposant Σ_0 convexe et compacte. Afin de pouvoir utiliser le Théorème 3.4.11, on est amené à faire un changement de variable mettant l'équation (3.4.20) sous la forme (3.4.19).

Proposition 3.4.12. *On considère l'équation (3.4.20), avec des conditions initiales données sur Σ_0 , hypersurface de classe \mathcal{C}^2 , compacte, strictement convexe. On suppose de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $A(x)$ est symétrique réelle et diagonalisable dans une base $Q(x) \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ sous la forme*

$$Q(x)^{\mathbf{T}}A(x)Q(x) = \begin{pmatrix} -\alpha_0(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1(x) & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_{d-1}(x) \end{pmatrix}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$ sont strictement positifs pour tous $x \in \Sigma_0$. Alors

1. l'opérateur $L = A : \nabla^2$ est strictement hyperbolique dans la direction $\nu(x) = Q(x)e_1$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$;
2. si, pour tout $x_0 \in \Sigma_0$ la normale $\mu(x_0)$ à Σ_0 est le premier vecteur-colonne de $Q(x_0)$ alors Σ_0 est 'spacelike' ;
3. l'application $\psi : (t, x_0) \in \mathbb{R} \times \Sigma_0 \mapsto x_0 + t\mu(x_0)$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme local en temps qui met l'équation (3.4.20) sous la forme (3.4.19) ;
4. si de plus, pour tout $x_0 \in \Sigma_0$ l'endomorphisme de Weingarten $W(x_0)$ de Σ_0 en x_0 n'admet que des valeurs propres négatives, alors ψ réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+ \times \Sigma_0$ dans $\mathbb{R}^d \setminus \text{Conv}(\Sigma_0)$, où $\text{Conv}(\Sigma_0)$ est l'enveloppe convexe de Σ_0 .

On rappelle que $W = -D\mu|_{T\Sigma_0}$, où $T_{x_0}\Sigma_0$ est l'espace tangent en x_0 à Σ_0 .

Preuve. 1. Hyperbolicité : le symbole associé à l'opérateur L est le polynôme $p(x, \xi) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j = \xi^{\mathbf{T}}A(x)\xi$. En posant $\xi = Q(x)\eta$, on obtient $p(x, Q\eta) = -\alpha_0(x)\eta_0^2 + \sum_k \alpha_k(x)\eta_k^2$. Et pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} p(x, Q\eta + \omega Qe_1) &= p(x, Q(\eta + \omega e_1)) \\ &= -\alpha_0(\eta_0 + \omega)^2 + \sum_k \alpha_k \eta_k^2 \\ &= -\alpha_0 \omega^2 - 2\alpha_0 \eta_0 \omega - \alpha_0 \eta_0^2 + \sum_k \alpha_k \eta_k^2. \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme en ω est alors

$$\begin{aligned}\Delta &= 4\alpha_0^2\eta_0^2 - 4\alpha_0(\alpha_0\eta_0^2 - \sum_k \alpha_k\eta_k^2) \\ &= 4\alpha_0 \sum_k \alpha_k\eta_k^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

On a de plus $\Delta = 0$ si et seulement si $\eta = (\eta_0, 0, \dots, 0)^{\mathbf{T}} = \eta_0 e_1$, c'est à dire $\xi = \eta_0 Q e_1$. Ainsi L est strictement hyperbolique dans la direction $N(x) = Q(x)e_1$.

2. Par définition le *cône forward* de l'opérateur L est la composante connexe de $\mathbb{R}^d \setminus \text{car}_x(L)$ contenant la direction d'hyperbolicité ν ; et la surface Σ_0 est *spacelike* si sa normale est dans le cône forward. Or on suppose ici que la normale N à la surface Σ_0 est exactement la direction d'hyperbolicité. Par conséquent, Σ_0 est bien *spacelike*.

3. Difféomorphisme. Observons tout d'abord l'effet d'un changement de variable sur l'équation (3.4.20). Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un \mathcal{C}^1 difféomorphisme, qu'on définira de manière adéquate. Notons \tilde{u} l'application telle que $u = \tilde{u} \circ \varphi$, $\nabla u = (\partial_i u_j)$ et $Du = (\partial_j u_i) = \nabla u^{\mathbf{T}}$. Alors, pour tout $h, k \in \mathbb{R}^d$, $Du \cdot h = D\tilde{u} \cdot (D\varphi \cdot h)$ et $\nabla^2 u(h, k) = \nabla^2 \tilde{u}(\nabla\varphi \cdot h, \nabla\varphi \cdot k) + \nabla\tilde{u} \cdot \nabla^2\varphi(h, k)$. Ainsi, en notant $\tilde{\beta} = \beta \circ \varphi^{-1}$, l'équation (3.4.20) en β équivaut à

$$(\nabla\varphi)^{\mathbf{T}} A \nabla\varphi : \nabla^2 \tilde{u} \beta + \sum_{k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket} (\partial_k \tilde{\beta}) A : \nabla^2 \varphi_k = 0.$$

En particulier, si $\nabla\varphi(x) = Q(x)^{\mathbf{T}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, alors l'équation sur $\tilde{\beta}$ est de la forme (3.4.19).

On considère maintenant l'application ψ définie par

$$\psi : (t, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \Sigma_0 \mapsto x_0 + tN(x_0).$$

Vérifions que cette application définit bien un changement de variables. On commence par montrer que cette application est un difféomorphisme local en l'écrivant dans une carte adaptée. Σ_0 étant une variété de dimension $d-1$, pour tout $x_0 \in \Sigma_0$, il existe $U \subset \Sigma_0$ un voisinage de x_0 dans Σ_0 et $\theta : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow U$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. On a alors, pour $\Psi(t, y) = \psi(t, \theta(y))$,

$$\begin{aligned}\partial_t \Psi &= N(\theta(y)) \\ D_y \Psi &= (I_n + t D_{x_0} N) D_y \theta\end{aligned}$$

On remarque ici que la restriction de DN à l'espace tangent $T_{x_0}\Sigma_0$ est l'opposé de l'endomorphisme de Weingarten, dont on sait qu'il est symétrique, et donc diagonalisable dans une base de $T_{x_0}\Sigma_0$. On note v_1, \dots, v_{d-1} les vecteurs de $T_{x_0}\Sigma_0$ diagonalisant la restriction de DN à ce sous-espace. Alors, $(N(x_0), v_1, \dots, v_{d-1})$ est une base de \mathbb{R}^d et pour tout $j \in \{1, \dots, d-1\}$, il existe $w_j, z_j \in \mathbb{R}$ tels que

$$v_j^{\mathbf{T}} DN = -w_j v_j^{\mathbf{T}} + z_j N^{\mathbf{T}},$$

où les w_j sont les courbures principales de Σ_0 . D'autre part $\|N\|_2 = 1$ implique $N^{\mathbf{T}} DN = 0$.

En notant $P = (N(x_0), v_1, \dots, v_{d-1})$, on a donc

$$P^{\mathbf{T}}DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -w_1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & -w_{d-1} \end{pmatrix} P^{\mathbf{T}} + \begin{pmatrix} 0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{d-1} \end{pmatrix} N^{\mathbf{T}}.$$

On remarque ensuite que $D\theta$ est une base de $T_{x_0}\Sigma_0$. Par conséquent $N^{\mathbf{T}}D\theta = 0$ et on a

$$P^{\mathbf{T}}(I_d + tDN)D\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - tw_1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 - tw_{d-1} \end{pmatrix} P^{\mathbf{T}}D\theta,$$

d'où finalement

$$D_{t,y}\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - tw_1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 - tw_{d-1} \end{pmatrix} P^{\mathbf{T}} \left(N \mid D\theta \right),$$

ce qui montre que $D_{t,y}\Psi$ est inversible, $(N, D\theta)$ étant de rang d . Par le théorème d'inversion locale, on voit que Ψ est un difféomorphisme local. On obtient alors, en posant $\varphi = \Psi^{-1}$ et en notant $M = \tilde{P}^{\mathbf{T}}D\theta$, $W = \text{Diag}(0, w_1, \dots, w_{d-1})$

$$\begin{aligned} \nabla\varphi^{\mathbf{T}}A\nabla\varphi &= D\Psi^{-1}PP^{\mathbf{T}}QQ^{\mathbf{T}}AQQ^{\mathbf{T}}PP^{\mathbf{T}}(D\Psi^{-1})^{\mathbf{T}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} (I_d - tW)P^{\mathbf{T}}Q \text{Diag}(-\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1}) \\ &\quad \times Q^{\mathbf{T}}P(I_d - tW) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M^{\mathbf{T}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il reste alors seulement à remarquer que les premiers vecteur colonne de P et Q sont les mêmes. De plus, ces matrices sont toutes deux orthogonales, il existe donc $R \in \mathcal{O}_{d-1}(\mathbb{R})$

telle que $P^{\mathbf{T}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$, d'où

$$\nabla\varphi^{\mathbf{T}}A\nabla\varphi = \begin{pmatrix} -\alpha_0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M} \end{pmatrix},$$

où

$$\mathcal{M} = M^{\mathbf{T}}\text{Diag}(1 - tw_i)R\text{Diag}(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d-1}R^{\mathbf{T}}\text{Diag}(1 - tw_i)M.$$

Pour t assez petit, $1 - tw_i > 0$ pour tout $i \in \{2, \dots, d\}$, et \mathcal{M} est alors symétrique définie positive. L'équation (3.4.20) se retrouve bien sous la forme souhaitée.

4. Si on suppose de plus que les valeurs propres de l'endomorphisme de Weingarten w_1, \dots, w_{d-1} sont toutes négatives, alors $D\Psi$ est inversible pour tout temps, localement en espace. Ainsi,

on a montré que ψ est un difféomorphisme local en espace, local en temps. En utilisant de plus que Σ_0 est compacte, strictement convexe, on voit que les droites dirigées par les normales se coupent pour des temps négatifs. En ne considérant que des temps positifs, on se retrouve alors à l'extérieur de la surface. Réciproquement, si $x \in \mathbb{R}^d \setminus \text{Conv}(\Sigma_0)$, il existe $t \geq 0$ tel que $x \in \Sigma_t$. □

Pour l'équation linéarisée, $A = I_d - (F_0 + 1)\nu\nu^{\mathbf{T}}$. Et on peut choisir Q de sorte que P et Q coïncident. On a alors $N = I_{d-1}$ et

$$\nabla\varphi^{\mathbf{T}}A\nabla\varphi = \left(\begin{array}{c|c} -F(|\nabla\varphi\nabla\tilde{u}|) & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{M} \end{array} \right)$$

où $\mathcal{M} = M^{\mathbf{T}}\text{Diag}((1 - tw_i)^2)_{2 \leq i \leq d}M$ et $M = \tilde{P}^{\mathbf{T}}D\theta$.

Pour l'équation initiale, $A = I_d - (F(\nabla u) + 1)\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)^{\mathbf{T}}$, par conséquent on doit avoir $Q(x)\mathbf{e}_1 = N = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$. On introduit alors χ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\chi(t, x_0)}{dt} &= N(\chi(t, x_0)), \\ \chi(0, x_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\partial_t \chi = N$. Il reste à déterminer si $(t, x_0) \mapsto \chi(t, x_0)$ est un difféomorphisme. On ne peut pas calculer directement $T_{x_0}\chi$, mais on sait néanmoins que $T_{x_0}\chi(0, x_0) = \text{Id}_{T_{x_0}\Sigma_0}$ et que $\partial_t T_{x_0}\chi(t, x_0) = -W(\chi(t, x_0))T_{x_0}\chi(t, x_0)$. Par conséquent

$$T_{x_0}\chi = \text{Id}_{T_{x_0}\Sigma_0} - \int_0^t W(\chi(\tau, x_0))T_{x_0}\chi(\tau, x_0)d\tau.$$

On voit ainsi que pour t assez petit, $T_{x_0}\chi$ est de rang $d - 1$, ce qui nous permet de conclure que χ est un difféomorphisme local.

Deuxième partie

Trafic routier

Introduction

Cette partie traite un problème de modélisation de trafic routier consistant à déterminer l'évolution de la densité de véhicules sur un rond-point. Des modélisations de réseaux routiers ont déjà été introduits, par exemple par M. Rascle & S. Moutari [68, 69, 105] ou encore M. Garavello & B. Piccoli [52] ou [32], qui peuvent en particulier s'appliquer au rond-point même si le point de vue adopté est peut-être plus adapté au cas de réseaux autoroutiers. On choisit ici une approche macroscopique du trafic, ce qui signifie qu'on étudie une densité de véhicules au lieu d'étudier chaque véhicule séparément, et on adopte le modèle LWR dû à Lighthill–Whitham–Richards [90, 113] consistant simplement en la conservation de la masse des véhicules.

On considère ici qu'un rond-point est une route infinie périodique, comprenant des points d'entrée et de sortie de véhicules. La période correspond alors au périmètre du rond-point. En particulier, on ne veut pas étudier ici le trafic sur les routes secondaires de sortie et d'entrée de véhicules.

Plus précisément, le modèle introduit est tel que, entre deux points d'entrée et de sortie de véhicules, le trafic suit le modèle LWR, de sorte que la densité totale $r(t, x)$ vérifie l'équation :

$$\partial_t r + \partial_x(rv(r)) = 0,$$

où v est une loi de vitesse donnée. En fait, on considère plutôt une extension multi-classe du modèle LWR, comme dans [86], les catégories de véhicules dépendant de leur origine et de leur destination. Comme cette distinction est assez artificielle, on donne la même loi de vitesse à tous les véhicules. Finalement, si ρ_a est la densité d'un type de véhicule, elle vérifie l'équation suivante sur n'importe quel segment contenu entre deux points de discontinuité :

$$\partial_t \rho_a + \partial_x(\rho_a v(r)) = 0.$$

En sommant sur tous les a , on retrouve l'équation sur la densité totale r . D'autre part, les points d'entrée et de sortie de véhicules sont traités par des conditions aux bords spéciales inspirées des conditions de Bardos–Leroux–Nédélec [10], [121, Chapter 15]. Ces conditions aux bords sont données par des inégalités et sont comparables aux conditions de R. M. Colombo & P. Goatin [37] au niveau d'un péage : ce sont des bornes sur le flux des véhicules entrant ou sortant. Ces bornes peuvent être considérées comme des contraintes correspondant aux capacités des routes secondaires.

On traite tout d'abord le cas de la route « en T », puis on colle les solutions obtenues au voisinage de chaque point d'entrée et sortie afin de trouver des solutions locales en temps. Pour le problème de la route en T, on différencie trois types de véhicules : les véhicules allant tout droit de densité ρ_1 , les véhicules sortant de la route principale de densité ρ_2 et les véhicules entrant sur la route principale de densité ρ_3 . On demande alors que, au niveau du point de discontinuité, le flux de ρ_1 soit conservé, le flux de ρ_2 soit borné par une fonction

« de sortie » o , et le flux de ρ_3 soit borné par une fonction « d'entrée » i . On résout alors le problème de Riemann pour ce modèle qui consiste à prendre des conditions initiales de part et d'autre de la discontinuité. Ce problème semble peu intéressant au premier abord, cependant c'est la brique fondamentale pour des schémas numériques tels que le schéma de Godunov et le schéma de Glimm. C'est donc un premier pas important avant d'aborder le problème de Cauchy, pour lequel les données initiales sont quelconques. On obtient ainsi, pour le problème de Riemann associé à ce modèle de route en T une unique solution faible entropique.

On traite enfin le cas du problème de Riemann pour la route à « n -T ». Pour cela, il suffit de coller les solutions locales au niveau de chaque discontinuité, la vitesse finie de propagation permettant de calculer dans ce cas une unique solution faible entropique. On peut de plus donner une borne inférieure pour le temps d'existence de cette solution

On donne ensuite des simulations numériques pour une route avec un ou deux points d'entrée et sortie en utilisant un schéma de Godunov. Ces simulations laissent à penser que, même pour des données initiales sinusoïdales la variation totale diminue au cours du temps.

Grâce à la méthode de *front tracking*, on montre finalement que dans certains cas, en particulier lorsque la densité initiale est assez faible et la capacité des routes secondaire assez élevées, le problème de Cauchy pour une route avec n jonctions admet une solution faible entropique globale.

Chapitre 4

Modélisation d'un rond-point

Dans le but de modéliser le trafic routier sur un rond-point, on est amené à étudier le trafic sur une route ayant des points d'entrée et de sortie de véhicules. Dans cet article, publié dans *Journal of Mathematical Analysis and Applications* en Février 2009 [104], on décrit la modélisation d'une route avec jonctions et on résout le problème de Riemann pour un tel modèle. Plus précisément, entre deux points de discontinuité, on utilise une extension multi-classe du modèle LWR pour décrire l'évolution de la densité de véhicules, l'approche multi-classe étant utilisée afin de distinguer les véhicules selon leur origine et leur destination. D'autre part, les points d'entrée et de sortie de véhicules sont mis en place à travers des conditions aux bords donnant des bornes sur les flux des différents types de véhicules.

Dans le cas d'une route infinie avec une seule jonction —aussi appelée route « en T », voir Figure 4.1— on obtient un résultat d'existence et d'unicité. Cette première étape nous permet d'obtenir un résultat similaire pour une route infinie avec n jonctions. Cet article prouve ces résultats et décrit également quelques propriétés des solutions obtenues, afin de voir dans quelle mesure ce modèle est valide.

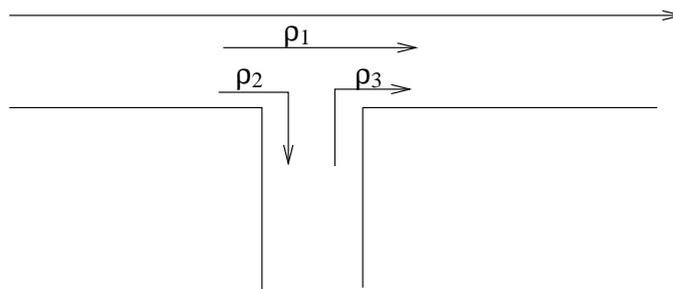


FIGURE 4.1 – A ‘T-road’.

Au paragraphe 4.2, on décrit plus précisément le modèle et on donne nos principaux résultats; au paragraphe 4.3, la preuve des résultats obtenus dans le cas de la *route en T* est détaillée; et au paragraphe 4.4, on prouve les résultats du cas général.

La suite est en anglais car c'est la reproduction de l'article [104].

4.1 Introduction.

Traffic modelling, in particular from a macroscopic point of view has been intensively investigated since the seminal paper by M. J. Lighthill & G. B. Whitham [90] and P. I. Richards [113], see for example [105], [52]. This paper is motivated by the modelling of roundabouts. Some papers have already tackled this problem by considering the roundabouts as special networks, see [69] or [32]. Here, we want rather to consider a roundabout as an infinite road with points of entry and exit periodically distributed, so that a period corresponds to the roundabout's perimeter. In particular, we do not want to study here the traffic on the roads of arrival and exit.

More precisely, the model we introduce is such that between two points of entry and exit the traffic is governed by the LWR model, so that the total density of the vehicles, denoted by $r(t, x)$, verifies the equation :

$$\partial_t r + \partial_x (rv(r)) = 0, \quad (4.1.1)$$

where v is a given speed law. In fact, we will rather consider here a multi-class extension of the LWR model, as in [86], differentiating the vehicles after the place they come from and the place they are going to. As this distinction is quite artificial, we have to give the same speed law v for all the types of vehicles. Finally, if ρ_a is the density of one type of vehicle, it verifies the following equation on each open segment between two points of discontinuity :

$$\partial_t \rho_a + \partial_x (\rho_a v(r)) = 0$$

By summation over all a , we re-find the equation (4.1.1).

Besides, the points of entry and exit are treated thanks to special boundary conditions, inspired from the Bardos–Leroux–Nédélec ones [10], [121, Chapter 15]. These boundary conditions are given as inequalities and follow in fact the same ideas as R. Colombo and P. Goatin [37] : they consist in bounds on the flows of vehicles and give a constraint corresponding to the capacity of the secondary road the vehicles are entering or exiting.

We will first treat the case of the ‘one-T road’ (see Figure 4.1), and then glue the solutions obtained for each point of entry and exit (in order to obtain a local in time solution).

The idea is that, at one point of entry and exit, we can differentiate three types of vehicles : the vehicles that go straight, of density ρ_1 , the vehicles that are about to exit the road, of density ρ_2 , and the vehicles that have entered the road, of density ρ_3 . Then we require that, across the point of discontinuity, the flow of ρ_1 is conserved, the flow of ρ_2 is less than some prescribed output function, and the flow of ρ_3 is less than some prescribed input function. We obtain in this way a unique weak entropy solution.

In order to treat the n -T case, we have only to collate the local solutions at each point of discontinuity, the finite propagation speed allowing in this case to obtain a unique local in time weak entropy solution. We can also give a lower bound on the time of existence of the solution.

This paper is structured as follows : in Section 4.2, we describe more precisely the model and we give our principal results ; in Section 4.3, we give the details of the proof in the case of the ‘one-T road’ ; and in Section 4.4, we give the details of the proof in the general case.

4.2 Description of the models and main results.

4.2.1 The ‘one-T’ junction.

a) General hypotheses. Throughout, we assume the following conditions on the speed law :

(V) All the vehicles have the same speed law $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, which is $\mathcal{C}^{0,1}$, decreasing and vanishes at $r = 1$.

Here we denote $\mathcal{C}^{0,1}$ the set of continuous Lipschitz functions and \mathbb{R}_+ the interval $[0, +\infty)$.

(F) The flow $q : [r \mapsto rv(r)]$ is strictly concave and attains its maximum q_c at $r = r_c \in]0, 1[$, see Figure 4.2.

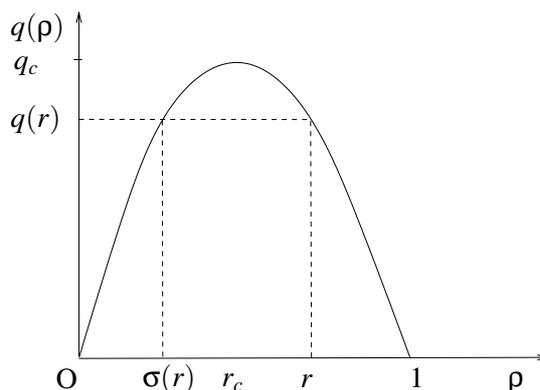


FIGURE 4.2 – Fundamental diagram for the flow density.

Below, we denote $\sigma : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ the continuous map uniquely defined by

$$rv(r) = \sigma(r)v(\sigma(r))$$

and $\sigma(r) \neq r$ for $r \neq r_c$.

b) Particular case. For a concrete example, we may take

$$v(r) = V_m(1 - r).$$

In this case, we have $q(r) = V_m r(1 - r)$, $r_c = 1/2$, $q_c = V_m/4$ and $\sigma(r) = 1 - r$.

c) Description of the ‘one-T’ model. Let ρ_1 be the density of the population that neither enters nor exits the road, ρ_2 the density of the population that exits and ρ_3 the density of the population that enters. Assuming that the behavior of drivers, modelled by the speed law $r \rightarrow v(r)$, is independent from both their origin and their destination, we are led to the local conservation laws :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \partial_x (\rho_1 v(\rho_1 + \rho_2)) = 0 \\ \partial_t \rho_2 + \partial_x (\rho_2 v(\rho_1 + \rho_2)) = 0 \end{cases} \text{ for } x < 0, \quad (4.2.1)$$

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \partial_x (\rho_1 v(\rho_1 + \rho_3)) = 0 \\ \partial_t \rho_3 + \partial_x (\rho_3 v(\rho_1 + \rho_3)) = 0 \end{cases} \text{ for } x > 0.$$

Furthermore, we add the initial data :

$$\begin{aligned}\rho_1(0, x) &= \rho_{1,0}(x) & \text{for } x \in \mathbb{R} \\ \rho_2(0, x) &= \rho_{2,0}(x) & \text{for } x < 0 \\ \rho_3(0, x) &= \rho_{3,0}(x) & \text{for } x > 0,\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

and the following ‘boundary’ conditions, that can be compared with the ones given in [37], where a toll-gate is considered :

$$\begin{aligned}\rho_1 v(\rho_1 + \rho_2)(t, 0-) &= \rho_1 v(\rho_1 + \rho_3)(t, 0+) & \max, \\ \rho_2 v(\rho_1 + \rho_2)(t, 0-) &\leq o(t) & \max, \\ \rho_3 v(\rho_1 + \rho_3)(t, 0+) &\leq i(t) & \max,\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

where o and i are some prescribed output and input functions taking values in \mathbb{R}^+ . In these equations, *max* means that the flows of ρ_1 , ρ_2 and ρ_3 are maximized.

These conditions signify that the flow of ρ_1 is conserved across the points of discontinuity, whereas the flow of ρ_2 (respectively ρ_3) must be less than the capacity of the secondary road this kind of vehicles is entering (respectively exiting).

At this point, we have to add a priority rule ; otherwise, it will not be possible to decide which flow is maximized first. Our goal being to treat the case of a roundabout, we choose to give priority to the vehicles that are already on the road. This means that we maximize the flows of ρ_2 and ρ_1 first, and only after the flow of ρ_3 .

Remark 4.2.1. It is *a priori* not obvious that we can maximize at the same time the flows of ρ_1 and ρ_2 , but it will turn out in the resolution that, except in the special cases where we have to treat null densities at time $t = 0$, the maximization of these densities is simultaneous.

d) Definitions.

Definition 4.2.2. Let $o, i \in \mathbf{BV}([0, +\infty); [0, q_c])$. A *solution* to (4.2.1)–(4.2.2)–(4.2.3) is a triple of functions

$$\rho_1 \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}; [0, 1]), \quad \rho_2 \in \mathbf{BV}((-\infty, 0); [0, 1]), \quad \rho_3 \in \mathbf{BV}((0, +\infty); [0, 1])$$

such that

1. (ρ_1, ρ_2) is a *weak entropy solution* to (4.2.1) for $(t, x) \in [0, +\infty) \times (-\infty, 0)$;
2. (ρ_1, ρ_3) is a *weak entropy solution* to (4.2.2) for $(t, x) \in [0, +\infty) \times (0, +\infty)$;
3. for a.e. $x \in \mathbb{R}$, the traces of ρ_1, ρ_2, ρ_3 in $t = 0$ satisfy (4.2.2).
4. for a.e. $t > 0$, the traces of ρ_1, ρ_2, ρ_3 in $x = 0$ satisfy (4.2.3).

We denote below $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{\rho} = (\rho, \tilde{\rho}) \in \mathbb{R}^2 : \rho \geq 0, \tilde{\rho} \geq 0, \rho + \tilde{\rho} \leq 1\}$.

Definition 4.2.3. By *Riemann problem* for (4.2.1)–(4.2.2)–(4.2.3) we mean (4.2.1)–(4.2.2)–(4.2.3) with constant boundary values $i \geq 0$ and $o \geq 0$ for the inflow and the outflow, and with constant initial data, i.e.

$$\begin{aligned}\rho_1(0, x) &= \rho_1^- & \text{for } x \in (-\infty, 0) & \quad \rho_2(0, x) &= \rho_2^- & \text{for } x \in (-\infty, 0) \\ \rho_1(0, x) &= \rho_1^+ & \text{for } x \in [0, +\infty) & \quad \rho_3(0, x) &= \rho_3^+ & \text{for } x \in (0, +\infty)\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

In this case, we obtain the following result :

Theorem 4.2.4. *Under the hypotheses (V) and (R), the Riemann problem for (4.2.1)–(4.2.2)–(4.2.3)–(4.2.4) admits a unique solution in the sense of the Definition 4.2.2.*

Furthermore, when $o > 0$, $i > 0$, there exists some invariant set $T_{a,b} = \{(\rho_1, \rho_2) \in \mathcal{S}; a \leq \rho_1 + \rho_2 \leq b\}$, for $a \geq 0$ small enough and $b \leq 1$ large enough.

On \mathcal{S} the Riemann solver for the considered problem is not continuous. However, it is continuous on some subset : for $o \in [\varepsilon, 1]$ with $\varepsilon > 0$ and $\boldsymbol{\rho} \in T_{0,b}$, with $b < 1$ ($T_{0,b}$ being an invariant set), the solution is obtained continuously.

e) Qualitative properties.

Remark 4.2.5. If $\rho_1 = 0$ at time $t = 0$, then $\rho_1(t, x) = 0$ for all t and x and (4.2.1)–(4.2.2)–(4.2.3) decouples in two independent IBVPs. From the traffic point of view, it means that those who exit do not interact with those who enter.

Remark 4.2.6. If $i \equiv 0$, $\rho_2 = 0$ and $\rho_3 = 0$ at time $t = 0$, then $\rho_2(t, x) = \rho_3(t, x) = 0$ for all t and x , while ρ_1 is the usual solution to a scalar conservation law, and we recover the classical LWR model, as exposed in G. B. Whitham's book [143].

We observe here that some discontinuities appear when $o, \rho_2^- \rightarrow 0$ and also when $r^+ \rightarrow 1$, $\rho_1^- \rightarrow 0$. We can explain this qualitatively as follows : when a road where vehicles can go is jammed (which corresponds to $o = 0$, respectively $r^+ = 1$), the behavior of the traffic on the left-side of the road will depend dramatically on the presence or the absence of vehicles willing to go on this jammed road. In fact, in the case $o = 0$ (respectively $r^+ = 1$), if $\rho_2^- > 0$ (respectively $\rho_1^- > 0$) then the total density on the left will increase abruptly to 1 ; whereas if $\rho_2^- = 0$ (respectively $\rho_1^- = 0$) then the problem arising from the blocked road is simply ignored and nothing particular happens.

4.2.2 The ‘n-T’ case.

In order to modelise a roundabout we would like to address the problem of an infinite road with entries periodically distributed, so that a period corresponds to the perimeter of a roundabout. More generally, we can also consider an infinite road with a countable number of points of entry and exit, the points of discontinuity not accumulating in some point. In fact, we consider first the easier case of a road with n points of entry and exit and $n \in \mathbb{N}$, $n < \infty$. Indeed, thanks to the finite propagation speed, it is sufficient to see what happens in this case to obtain local in time result, even in the case of a countable number of points periodically distributed. Later, if we want to study what happens for larger times on a roundabout, it will be necessary to consider the case of countable periodically distributed discontinuities.

We have to introduce here some notations. We assume that the points of entry and exit are located in the points $x_k \in \mathbb{R}$, for $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, with $x_{k-1} < x_k < x_{k+1} < \dots$. Furthermore, we number the main entry by 0, and the main exit by $n + 1$. In this context, we call $\rho_{i,j}$ the density of vehicles which enter in i and exit in j (see Figure 4.3) ; in fact, the multi-class approach by origin–destination has already been introduced in the previous work [86]. As no vehicle enters in $n + 1$ or exits in 0, we finally have $(n + 1)^2$ unknowns : the $(\rho_{i,j})_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$.

Remark 4.2.7. We do not allow vehicles to do more than one turn. This means that just after x_k , say in x_k^+ , $\rho_{i,k} = 0$ for all $i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}$; and just before x_k , say in x_k^- , $\rho_{k,j} = 0$ for all $j \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket \setminus \{k\}$.

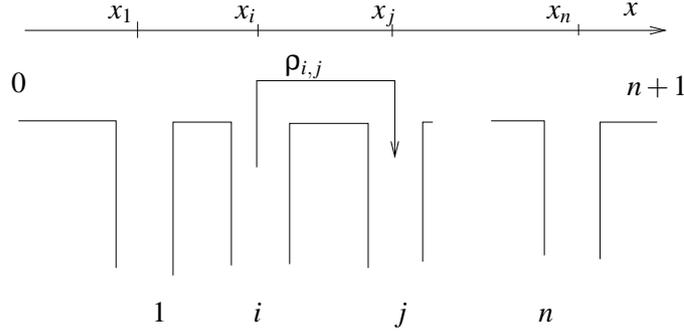


FIGURE 4.3 – An ‘n-T road’.

We add here the following hypothesis :

(P) We know the numbers $p_{i,j}$ that represent the proportion of vehicles entering in i that are to exit in j .

We have the following (local) conservation laws on the intervals $(-\infty, x_1)$, $(x_n, +\infty)$ and (x_k, x_{k+1}) , for $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \quad \partial_t \rho_{i,j} + \partial_x \left(\rho_{i,j} v \left(\sum_{l,m} \rho_{l,m} \right) \right) = 0. \quad (4.2.5)$$

For all $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, we could prescribe as boundary conditions in x_k :

$$\begin{aligned} \forall i \neq k, \forall j \neq k \quad & \rho_{i,j} v \left(\sum_{l,m} \rho_{l,m} \right) (t, x_k^-) = \rho_{i,j} v \left(\sum_{l,m} \rho_{l,m} \right) (t, x_k^+) \quad \text{max}, \\ \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad & \rho_{i,k} v \left(\sum_{l,m} \rho_{l,m} \right) (t, x_k^-) \leq o_k(t) \quad \text{max}, \\ \forall j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \quad & \rho_{k,j} v \left(\sum_{l,m} \rho_{l,m} \right) (t, x_k^+) \leq i_k(t) \quad \text{max}, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

the flows of the $\rho_{i,j}$ being maximized in all these equations.

However, it is better to consider stronger boundary conditions in x_k that take into account the total flow for the exiting and entering vehicles :

$$\begin{aligned} \forall i \neq k, \forall j \neq k \quad & \rho_{i,j} v \left(\sum_{l,m} \rho_{l,m} \right) (t, x_k^-) = \rho_{i,j} v \left(\sum_{l,m} \rho_{l,m} \right) (t, x_k^+) \quad \text{max}, \\ & \sum_{0 \leq i \leq n} \rho_{i,k} v \left(\sum_{l,m} \rho_{l,m} \right) (t, x_k^-) \leq o_k(t) \quad \text{max}, \\ & \sum_{1 \leq j \leq n+1} \rho_{k,j} v \left(\sum_{l,m} \rho_{l,m} \right) (t, x_k^+) \leq i_k(t) \quad \text{max}, \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

the flows being maximized first in x_k^- and then in x_k^+ because of the priority rule. As in the one-T case, o_k and i_k are some prescribed output and input functions, taking values in \mathbb{R}^+ and corresponding to the capacity of the secondary road located in x_k .

We denote below

$$\mathcal{S}_{(n+1)^2} = \left\{ \rho \in \mathbb{R}^{(n+1)^2} : \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \rho_{i,j} \geq 0, \sum_{i,j} \rho_{i,j} \leq 1 \right\}.$$

We can remark that the notation of the previous section can be identified here by $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2$.

a) The Riemann problem. We are interested in weak entropy solutions of the problem (4.2.5)–(4.2.7), when the functions o_k and i_k are taken to be constants and when we choose initial conditions that are constant on the intervals $(-\infty, x_1)$, $(x_n, +\infty)$ and (x_k, x_{k+1}) , for $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} \Big|_{t=0, x \in (-\infty, x_1)} &= \rho_{i,j}^-, \\ \rho_{i,j} \Big|_{t=0, x \in (x_k, x_{k+1})} &= \rho_{i,j}^{k+1/2}, \quad k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ \rho_{i,j} \Big|_{t=0, x \in (x_n, +\infty)} &= \rho_{i,j}^+, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

With the previous notations, we can announce the following :

Theorem 4.2.8. *Under the hypotheses (V), (F) and (P), there exists $T > 0$ such that the Riemann problem (4.2.5)–(4.2.7)–(4.2.8) admits a unique weak entropy solution for $t \in [0, T]$.*

Furthermore, we can give a lower bound for the time of existence : let $L = \min_k \{x_{k+1} - x_k\} > 0$, then $T \geq \frac{L}{2V}$.

b) Qualitative properties. As in the case $n = 1$, some discontinuity phenomena appear when we make the initial conditions vary.

4.3 Technical analysis for the ‘one-T’ case.

In this section, we solve the Riemann problem for (4.2.1)–(4.2.2)–(4.2.3). In Section 4.3.1, we first study the Riemann problem on a standard road with two types of vehicles which have the same speed law. Then, in Section 4.3.2, we study ‘half’ Riemann problems in the quarter planes $\{x \leq 0, t \geq 0\}$ and $\{x \geq 0, t \geq 0\}$. Finally, in Section 4.3.3, we will complete the proof of Theorem 4.2.4.

4.3.1 Riemann problem with two types of vehicles.

First, we consider the classical Riemann problem, for a road with two types of vehicles, of respective densities ρ_1 and ρ_2 , which have the same speed law. We obtain the following result :

Proposition 4.3.1. *Let us consider the two-populations system*

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \partial_x (\rho_1 v(\rho_1 + \rho_2)) &= 0, \\ \partial_t \rho_2 + \partial_x (\rho_2 v(\rho_1 + \rho_2)) &= 0. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

with the following piecewise constant initial data :

$$\begin{aligned} \rho_1(0, x) &= \rho_1^- \text{ for } x \in \mathbb{R}_-^*, & \rho_1(0, x) &= \rho_1^+ \text{ for } x \in \mathbb{R}_+^*, \\ \rho_2(0, x) &= \rho_2^- \text{ for } x \in \mathbb{R}_-^*, & \rho_2(0, x) &= \rho_2^+ \text{ for } x \in \mathbb{R}_+^*. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Then, for all $\boldsymbol{\rho}^- = (\rho_1^-, \rho_2^-)$, $\boldsymbol{\rho}^+ = (\rho_1^+, \rho_2^+)$ in \mathcal{S} , there exists a unique weak entropy solution.

Proof. The 2×2 system (4.3.1) is of a standard type (‘straight-line systems’ see [9] ; see also rich or Temple systems, see [133], [121, Chapters 12& 13]). We also based our study

on [120] and on the article of S. Benzoni and R. Colombo [12].

Let $r = \rho_1 + \rho_2$ and $s = \rho_1/\rho_2$ when $\rho_2 \neq 0$; we also denote $r^+ = \rho_1^+ + \rho_2^+$, $s^+ = \rho_1^+/\rho_2^+$, etc. We easily obtain that, for smooth solutions with $\rho_2 \neq 0$, the system (4.3.1) is equivalent to :

$$\begin{cases} \partial_t r + (v(r) + rv'(r))\partial_x r &= 0, \\ \partial_t s + v(r)\partial_x s &= 0. \end{cases}$$

If $\rho_2 = 0$ and $\rho_1 \neq 0$, we obtain something similar by considering ρ_2/ρ_1 instead of ρ_1/ρ_2 , so the only problem is in $\rho = 0$. Consequently, we first solve the problem in $\mathcal{S} \setminus \{0\}$.

The characteristic speeds of (4.3.1) are $\lambda_1(\rho) = v(r) + rv'(r)$ and $\lambda_2(\rho) = v(r)$, with $\rho = (\rho_1, \rho_2)$. We remark that $\lambda_1(\rho) < \lambda_2(\rho)$ when $\rho = (\rho_1, \rho_2) \neq 0$, and that λ_2 is always non-negative (except in $r = 1$). The associated eigenvectors are $v_1(\rho) = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \rho$ and

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. This allows us to see that the 1-characteristic field is genuinely nonlinear when $\rho \neq 0$, as $d\lambda_1(\rho) \cdot v_1(\rho)$ does not vanish in $\mathcal{S} \setminus \{0\}$, q being strictly concave. The 2-characteristic field is linearly degenerate since for all $\rho \in \mathcal{S}$ we have $d\lambda_2 \cdot v_2 \equiv 0$. We can remark here that the functions r and s are strong Riemann invariants. Let $\bar{\rho} \in \mathcal{S}$.

The wave curves are $\mathcal{O}_1(\bar{\rho}) = \mathcal{O}_1(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2) = \{(\rho_1, \rho_2) \in \mathcal{S}; \rho_1/\rho_2 = \bar{\rho}_1/\bar{\rho}_2\}$, when $\bar{\rho}_2 \neq 0$, and $\mathcal{O}_2(\bar{\rho}) = \{(\rho_1, \rho_2) \in \mathcal{S}; \rho_1 + \rho_2 = \bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2\}$. In particular, the shock-curves and the rarefaction-curves coincide and are straight lines.

The 1-waves are made of shocks or rarefaction waves, whereas the 2-waves are contact discontinuities. More precisely, we have the following :

If $\bar{\rho}_1/\bar{\rho}_2 = \rho_1^+/\rho_2^+$ and $r^+ \leq \bar{r}$, the 1-waves that go from $\bar{\rho} = (\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2)$ to $\rho^+ = (\rho_1^+, \rho_2^+)$ are rarefaction waves, which are between the lines of equations $x/t = q'(\bar{r})$ and $x/t = q'(r^+)$.

If $\bar{\rho}_1/\bar{\rho}_2 = \rho_1^+/\rho_2^+$ and $r^+ > \bar{r}$, the 1-waves that go from $\bar{\rho}$ to ρ^+ are shocks of speed

$$c = \frac{r^+v(r^+) - \bar{r}v(\bar{r})}{r^+ - \bar{r}}.$$

In order to solve the Riemann problem, we must find an intermediate state $\rho_I = (\rho_{1,I}, \rho_{2,I})$ so that $s(\rho_I) = s^-$ and $r(\rho_I) = r^-$ (see Figure 4.4). Clearly, we have $\rho_I = \frac{r^+}{r^-} \rho^-$, when $r^- \neq 0$.

Now, we want to see what happens when ρ^- or ρ^+ is 0.

If we make ρ^- tend to 0 along a line $\rho_1/\rho_2 = cst$, it looks like we could obtain different solutions : a 1-wave from 0 to whatever point in $\Delta_{r^+} = \{\rho \in \mathcal{S}; \rho_1 + \rho_2 = r^+\}$, and then a 2-wave from this intermediate state to ρ^+ . However, all these intermediate states correspond

in fact to the same solution, because the 1-shocks are of speed $c = \frac{q(r^+) - q(r^-)}{r^+ - r^-} = v(r^+)$

and the 2-waves are of speed $\lambda_2(\rho^+) = v(r^+)$, so the waves are attached. If we do not accept fictitious waves between $\rho^- = 0$ and ρ^+ , we take only a shock of speed $c = v(r^+)$.

To summarize :

if $\rho^- = \rho^+ = 0$, we define the solution as $\rho \equiv 0$;

if $\rho^- = 0$, we define the solution by linking ρ^- to ρ^+ by a 1-shock;

if $\rho^+ = 0$, we define the solution by linking ρ^- to ρ^+ by a 1-wave.

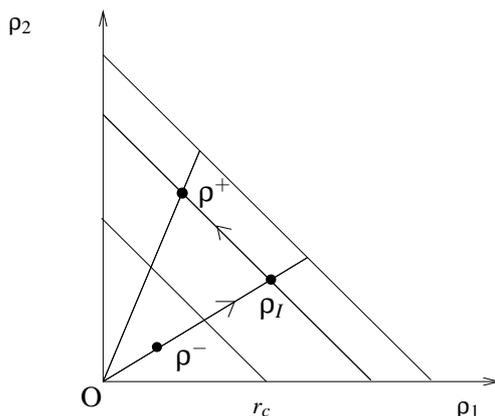


FIGURE 4.4 – Solution of the Riemann problem; waves curves.

□

Remark 4.3.2. The set \mathcal{S} is invariant under the flow of the system (4.3.1). More precisely, the trapezoids whose boundaries are the Hugoniot loci are also invariant under the flow of the system (4.3.1). (For some general results on invariant sets, see [70].)

4.3.2 Half-Riemann problems.

We call ‘half-Riemann problem’ the simple case of an initial boundary value problem in the quarter of plane $\{x \leq 0; t \geq 0\}$ or $\{x \geq 0; t \geq 0\}$ when the initial condition is a constant. The problem here is to find the acceptable boundary conditions in $x = 0$. Some general criteria have been introduced in the literature in an attempt to characterize the set of attainable states (see [10], [50], [11]).

4.3.2.A Left-half problem.

We fix a left state and we look for the right states attainable by a wave of negative speed.

Lemma 4.3.3. Fix $\boldsymbol{\rho}^- = (\rho_1^-, \rho_2^-) \in \mathcal{S}$ and denote $r^- = \rho_1^- + \rho_2^-$. Then the set $N(\boldsymbol{\rho}^-)$ of points $\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) \in \mathcal{S}$ such that the solution to the Riemann problem

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \partial_x (\rho_1 v(\rho_1 + \rho_2)) = 0 \\ \partial_t \rho_2 + \partial_x (\rho_2 v(\rho_1 + \rho_2)) = 0 \\ (\rho_1, \rho_2)(0, x) = \begin{cases} (\rho_1^-, \rho_2^-) & \text{if } x < 0 \\ (\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) & \text{if } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

contains only waves with negative speed is :

If $r^- \geq r_c$: the segment with extreme points $\frac{r_c}{r^-} \boldsymbol{\rho}^-$ and $\frac{1}{r^-} \boldsymbol{\rho}^-$ (see Figure 4.5, left);

If $r^- < r_c$: the segment with extreme points $\frac{\sigma(r^-)}{r^-} \boldsymbol{\rho}^-$ and $\frac{1}{r^-} \boldsymbol{\rho}^-$, together with the point $\boldsymbol{\rho}^-$ (see Figure 4.5, right).

In both cases, for all $\rho^- \in \mathcal{S}$, $\min_{N(\rho^-)} \rho_1 v(\rho_1 + \rho_2) = 0$.

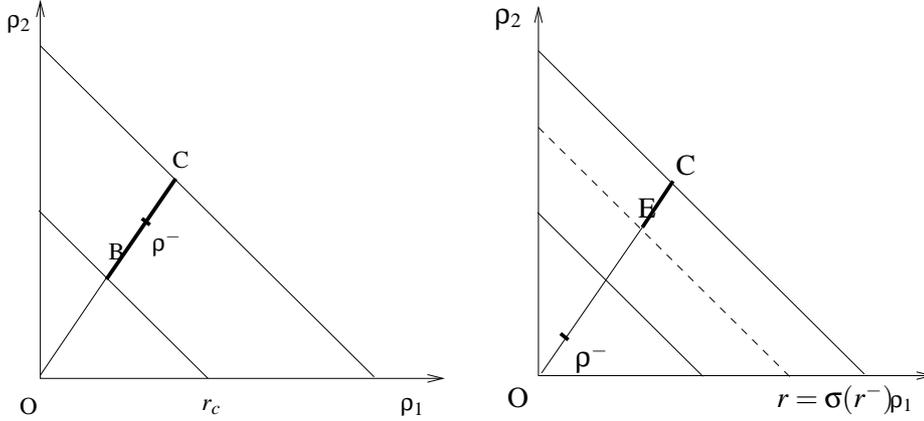


FIGURE 4.5 – Left, $r^- \geq r_c$ and $N(\rho^-) = [B, C]$; right, $r^- < r_c$ and $N(\rho^-) = \{\rho^-\} \cup [E, C]$.

Remark 4.3.4. When we want not to consider shocks of zero speed in the left-half problem (that are fictitious as they are located on the axis $x = 0$), we have to modify a little the set $N(\rho^-)$ in the case $r^- < r_c$ and take $N'(\rho^-) = \{\rho^-\} \cup \{\lambda \rho^-; \lambda \in]\frac{\sigma(r^-)}{r^-}, \frac{1}{r^-}]\}$.

Proof of Lemma 4.3.3. The study of the left-half problem is equivalent to searching an artificial right state $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2)$ in a problem like (4.3.1)–(4.3.2). We are here only interested in the waves with negative speed, in order to know what are the states attainable on the line $\{x = 0\}$. We have seen in the proof of Proposition 4.3.1, that the 2-waves always have positive speed, so we can only have a 1-wave : either a shock or a rarefaction wave, depending on the sign of $\hat{r} - r^-$, which means in particular that $N(\rho^-) \subset \{\rho \in \mathcal{S}; \rho_1/\rho_2 = \rho_1^-/\rho_2^-\}$.

If $\hat{r} > r^-$, we have a shock of speed $c = \frac{q(\hat{r}) - q(r^-)}{\hat{r} - r^-}$, which is negative if and only if

$q(\hat{r}) - q(r^-) \leq 0$. There are two cases :

- when $r^- \geq r_c$, $q(\hat{r}) \leq q(r^-) \Leftrightarrow \hat{r} \geq r^-$,
- when $r^- < r_c$, $q(\hat{r}) \leq q(r^-) \Leftrightarrow \hat{r} \geq \sigma(r^-)$.

If $\hat{r} \leq r^-$, we have a rarefaction wave which is located between the lines of equations $x/t = q'(r^-)$ and $x/t = q'(\hat{r})$. These two lines have negative slopes if and only if $\hat{r} \geq r_c$, because q' is non-increasing. Finally, we obtain $r^- \geq \hat{r} \geq r_c$ (in particular $r^- \geq r_c$).

We can summarize the situation as follows :

- if $r^- \geq r_c$, we have a wave of negative slope when $r_c \leq \hat{r} \leq 1$,
- if $r^- \leq r_c$, we have a wave of negative slope when $\sigma(r^-) \leq \hat{r} \leq 1$.

In order to complete the proof, we note that we can always have the state ρ^- as artificial right state. In this case, nothing happens and the solution is taken to be constant, equal to ρ^- .

In the special case $\rho^- = 0$, we define $N(0) = \{0\} \cup \Delta_1$, where $\Delta_1 = \{\rho \in \mathcal{S}; \rho_1 + \rho_2 = 1\}$.

□

4.3.2.B Right-half problem.

We fix now a right state and we search the states on the left attainable by a wave of positive speed.

Lemma 4.3.5. Fix $\rho^+ = (\rho_1^+, \rho_3^+) \in \mathcal{S}$ and denote $r^+ = \rho_1^+ + \rho_3^+$. Then, the set $P(\rho^+)$ of points $\check{\rho} = (\check{\rho}_1, \check{\rho}_3) \in \mathcal{S}$ such that the solution to the Riemann problem

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \partial_x (\rho_1 v(\rho_1 + \rho_3)) = 0 \\ \partial_t \rho_3 + \partial_x (\rho_3 v(\rho_1 + \rho_3)) = 0 \\ (\rho_1, \rho_3)(0, x) = \begin{cases} (\check{\rho}_1, \check{\rho}_3) & \text{if } x < 0 \\ (\rho_1^+, \rho_3^+) & \text{if } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

contains only waves with positive speed is :

If $r^+ \leq r_c$: the triangle T_{r_c} of points $\check{\rho} \in \mathcal{S}$ such that $\check{\rho}_1 + \check{\rho}_3 \leq r_c$ (see Figure 4.6, left).

If $r^+ > r_c$: the triangle $T_{\sigma(r^+)}$ of points $\check{\rho} \in \mathcal{S}$ such that $\check{\rho}_1 + \check{\rho}_3 \leq \sigma(r^+)$, together with the line $\Delta_{r^+} = \{\rho \in \mathcal{S}; \check{\rho}_1 + \check{\rho}_3 = r^+\}$ (see Figure 4.6, right).

In both cases, for all $(\rho_1^+, \rho_3^+) \in \mathcal{S}$, $\min_{P(\rho^+)} \rho_1 v(\rho_1 + \rho_3) = 0$.

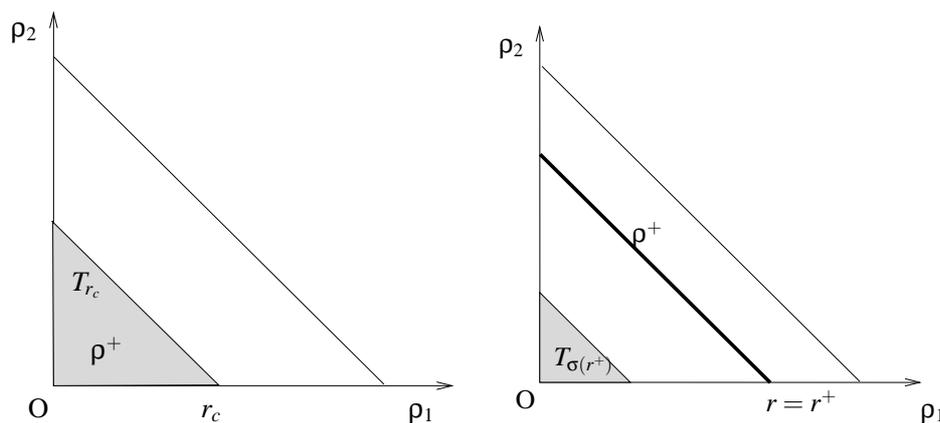


FIGURE 4.6 – Let $P = P(\rho^+)$: left, $r^+ \leq r_c$ and $P = T_{r_c}$; right, $r^+ > r_c$ and $P = T_{\sigma(r^+)} \cup \Delta_{r^+}$.

Remark 4.3.6. As before, when we do not want to consider shocks of zero speed, we have to change a little the definition of P in the case $r^+ > r_c$ into $P'(\rho^+) = \Delta_{r^+} \cup \{\rho \in \mathcal{S}; \sigma(r^+)/r^+ > r \geq 0\}$.

Proof of Lemma 4.3.5. The ideas of the proof are essentially the same as for Lemma 4.3.3, up to replacing ‘negative speed’ by ‘positive speed’. For this reason, the 2-waves are now always allowed, that is why the line Δ_{r^+} of equation $\rho_1 + \rho_3 = r^+$ is always in $P(\rho^+)$. It also implies that we only have to search the admissible 1-waves and then add whatever 2-wave. That is why we search the states $\check{\rho}$ that can be linked to ρ^+ by a 1-wave. This 1-wave is a shock or a rarefaction wave, depending on the sign of $\check{r} - r^+$.

If $\check{r} \geq r^+$, we have a rarefaction wave located in the quarter plane $\{x \geq 0, t \geq 0\}$ if and only if $\check{r} \leq r_c$. So, in this case, we have $r^+ \leq \check{r} \leq r_c$.

If $\check{r} \leq r^+$, we have a shock of speed $c = \frac{q(\check{r}) - q(r^+)}{\check{r} - r^+}$, which is positive if and only if

$$q(\check{r}) \leq q(r^+).$$

– If $r^+ > r_c$, $c \leq 0$ if $\check{r} \leq \sigma(r^+)$.

– If $r^+ \leq r_c$, $c \leq 0$ if $\check{r} \leq r^+$.

Finally,

– if $r^+ > r_c$, then $(\check{\rho}_1, \check{\rho}_3) \in T_{\sigma(r^+)} \cup \Delta_{r^+}$,

– if $r^+ \leq r_c$, then $(\check{\rho}_1, \check{\rho}_3) \in T_{r_c}$.

□

4.3.3 The Riemann problem.

4.3.3.A Proof of Theorem 4.2.4.

Now we prove Theorem 4.2.4, according to which the Riemann problem for (4.2.1)–(4.2.2)–(4.2.3) admits a unique solution.

Proof of Theorem 4.2.4. Let $r^- = \rho_1^- + \rho_2^-$ and $r^+ = \rho_1^+ + \rho_3^+$. The solution consists in (see Figure 4.7) :

1. the state (ρ_1^-, ρ_2^-) ;
2. a (possibly null) 1-wave with negative speed;
3. the state $(\widehat{\rho}_1, \widehat{\rho}_2)$ in $N(\rho_1^-, \rho_2^-)$;
4. a non-classical discontinuity with 0 speed;
5. the state $(\check{\rho}_1, \check{\rho}_3)$ in $P(\rho_1^+, \rho_3^+)$;
6. a (possibly null) 1-wave with positive speed;
7. the state $(\widetilde{\rho}_1, \widetilde{\rho}_3)$;
8. a (possibly null) 2-wave with positive speed.

The first wave and the last two waves are the restrictions of a standard solution to the Riemann problem (4.3.1); the states $(\widehat{\rho}_1, \widehat{\rho}_2)$, $(\check{\rho}_1, \check{\rho}_3)$ are obtained thanks to Lemma 4.3.3 and Lemma 4.3.5. Now we only have to attach these states in $x = 0$, which is possible if the boundary conditions (4.2.3) are realized. The uniqueness will come from the maximization of these conditions.

There are several cases, depending on the position of r^- and r^+ with respect to r_c .

If $r^+ \leq r_c$, we note

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(\rho_1^-, \rho_2^-) = N(\rho_1^-, \rho_2^-) \cap \{(\rho_1, \rho_2), \rho_2 v(\rho_1 + \rho_2) \leq 0\}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{P}(\rho_1^+, \rho_3^+) \\ &= P(\rho_1^+, \rho_3^+) \cap \{(\rho_1, \rho_3), \rho_1 v(\rho_1 + \rho_3) = M\} \cap \{(\rho_1, \rho_3), \rho_3 v(\rho_1 + \rho_3) \leq i\}, \end{aligned}$$

with $M = \widehat{\rho}_1 v(\widehat{\rho}_1 + \widehat{\rho}_2)$, so that \mathcal{N} and \mathcal{S} are the sets where the boundary conditions are verified. These sets are non-empty : for example the point $\frac{1}{r^-}(\rho_1^-, \rho_2^-)$ is in \mathcal{N} , and

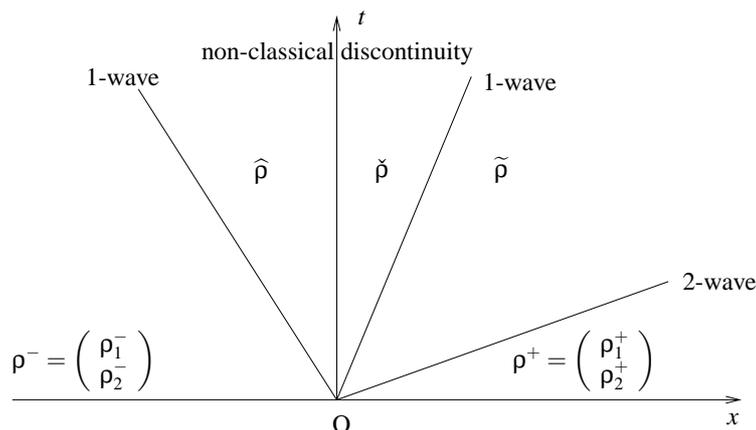


FIGURE 4.7 – Solution.

the point $(q|_{[0,r_c]}^{-1}(M), 0)$ is in \mathcal{P} since q is bijective from $[0, r_c]$ to $[0, q_c]$ and $M \leq q_c$ for all $(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) \in \mathcal{N}$. Now, we need to maximize the flows of ρ_1 , ρ_2 and ρ_3 on \mathcal{N} and \mathcal{P} . The question is : is the maximum uniquely attained ?

First, we maximize the flow of $\hat{\rho}_2$ on $\mathcal{N} \cap \{\rho_1 + \rho_2 \geq r_c\}$, which is the same as maximizing the function $f_2 : (t \mapsto t\rho_2^- v(tr^-))$, with $t \geq r_c/r^-$.

If $\rho_2^- \neq 0$, we can write $f_2(t) = \frac{\rho_2^-}{r^-} q(tr^-)$, and we obtain a unique maximum for this function as we have here $tr^- \geq r_c$ and q is strictly decreasing on $[r_c, 1]$.

Moreover, we have $f_2(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{r^-} q|_{[r_c, 1]}^{-1}\left(\frac{\sigma r^-}{\rho_2^-}\right)$. Thus we take $\hat{\rho} = t\rho^-$

with $t = \max\left\{\frac{\sigma(r^-)}{r^-}, \frac{r_c}{r^-}, t_0\right\}$.

Throughout, we can remark that the maximum of the flow of $\hat{\rho}_1$ is attained at the same point that realizes also the maximum of the flow of $\hat{\rho}_2$. This comes from the fact that we obtain the maximum of the flow of $\hat{\rho}_1$ by maximizing $f_1 : (t \mapsto t\rho_1^- v(tr^-))$, f_1 and f_2 being defined on the same set.

If $\rho_2^- = 0, \rho_1^- \neq 0$, then we have $f_2 \equiv 0$ and we cannot maximize the flow of ρ_2 . Instead we maximize the flow of ρ_1 . We get that f_1 is maximized for $t_1 = \frac{r_c}{\rho_1^-}$

and then we take $t = \max\left\{\frac{\sigma(r^-)}{r^-}, \frac{r_c}{r^-}\right\}$.

If $\rho_1^- = \rho_2^- = 0$, then we take $\hat{\rho} = \rho^-$ or $\hat{\rho} \in \Delta_1 = \{\rho \in \mathcal{S}; r = 1\}$. It seems here that the maximum is not uniquely defined, but in fact from $(0, 0)$ to whatever point in Δ_1 , there is a shock of speed zero, hence it does not appear as this shock is located on the axis $x = 0$. Finally all these points correspond to the same solution.

Now, we would like to know if we have continuity of the solution with respect to the initial conditions. Essentially, we have to examine what happens when $\rho_2^- \rightarrow 0$, since the definition of t in the cases $\rho \neq 0$ differs in respect to t_0 , and more generally what happens when $\rho^- \rightarrow 0$.

We assume at first that $\sigma > 0$; then, t_0 is well defined when $\frac{\sigma r^-}{\rho_2^-} \leq q_c$.

If $\rho_1^- = 0$, then $\frac{o r^-}{\rho_2^-} = o$ and t_0 is invariant when $\rho_2^- \rightarrow 0$; thus we have $\hat{r} = t r^- = \max\{\sigma(\rho_2^-), r_c, q^{-1}(o)\} = \sigma(\rho_2^-)$ for ρ_2^- small enough. Consequently, $\hat{r} \rightarrow 1$ when $\rho_2^- \rightarrow 0$ and we find the same solution as in the case $\rho^- = 0$.

If $\rho_1^- \neq 0$, we have that $t_0 r^- \rightarrow r_c$ when $\rho_2^- \rightarrow 0$, and even, for ρ_2^- small enough, t_0 is no longer well defined : for example for $\rho_2^- < \frac{\rho_1^- o}{q_c}$, we have $f_2(t) < o \forall t \geq r_c/r^-$, and the condition is automatically verified. Hence, o does not intervene any longer. In this case, we have $t = \max\left\{\frac{\sigma(r^-)}{r^-}, \frac{r_c}{r^-}\right\}$ and we have the same solution as in the case $\rho_2^- = 0, \rho_1^- \neq 0$.

Finally, let us see what happens if we make $r^- \rightarrow 0$. As before, t_0 will not realize the maximum and we have only to see that t becomes $\frac{\sigma(r^-)}{r^-}$ for r^- small enough. Consequently, $\hat{\rho}$ tends to a point of Δ_1 , and we are done since all the points of Δ_1 correspond to the same solution $\hat{\rho} = 0$.

Finally, in the case $o > 0$, there is no problem of discontinuity when $\rho^- \rightarrow 0$.

Now, if $o = 0$ we have $t_0 = \frac{1}{r^-}$ when $\rho_2^- \neq 0$, hence $t = t_0, \hat{\rho} \in \Delta_1$. But, if $\rho_1^- \neq 0$ and $\rho_2^- = 0$, then we obtain a very different solution $\hat{\rho} = \max\{\sigma(\rho_1^-)/\rho_1^-, r_c/\rho_1^-\}(\rho_1^-, 0)$, and we have a discontinuity in the solution when $\rho_2^- \rightarrow 0$. That is why we have to impose $o > 0$ if we want to have a continuity in the Riemann solver.

At this point there are two cases :

1. if $r^- \geq r_c, \mathcal{N} = \mathcal{N} \cap \{\rho_1 + \rho_2 \geq r_c\}$, and the work is finished ;
2. if $r^- < r_c$, either $\mathcal{N} = \mathcal{N} \cap \{\rho_1 + \rho_2 \geq r_c\}$ and the work is finished, or $\mathcal{N} = \{(\rho_1^-, \rho_2^-)\} \cup (\mathcal{N} \cap \{\rho_1 + \rho_2 \geq r_c\})$, and the maximum could be obtained in two points. We have to observe what happens in this last case : the maximum is obtained in $t(\rho_1^-, \rho_2^-)$ (with $t \geq r_c/r^-$) and in (ρ_1^-, ρ_2^-) and we have :

$$\begin{aligned} \rho_2^- v(r^-) &= t \rho_2^- v(t r^-) \\ \text{i.e.} \quad t r^- &= \sigma(r^-). \end{aligned}$$

Finally, in this case, we have two solutions :

- $(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = (\rho_1^-, \rho_2^-)$
- $(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = \frac{\sigma(r^-)}{r^-}(\rho_1^-, \rho_2^-)$, and we have between (ρ_1^-, ρ_2^-) and $(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2)$ a shock of speed $c = \frac{q(\sigma(r^-)) - q(r^-)}{\sigma(r^-) - r^-} = 0$, so this shock is in fact fictitious as it is on the axis $x = 0$.

Moreover, the flows of $\hat{\rho}_1$ are the same in the two cases. Consequently, we have in fact two times the same half solution in the quarter $\{x \leq 0, t \geq 0\}$.

Secondly, we maximize the flow of $\check{\rho}_3$ on \mathcal{P} . As v is strictly non-increasing, when $M \neq 0$ the elements of \mathcal{P} can be written as $(\check{\rho}_1, v^{-1}\left(\frac{M}{\check{\rho}_1}\right) - \check{\rho}_1)$ so that the flow of $\check{\rho}_3$ is :

$$\begin{aligned} f_3(\rho_1) &= v^{-1}\left(\frac{M}{\rho_1}\right) \frac{M}{\rho_1} - M \\ &= q\left(v^{-1}\left(\frac{M}{\rho_1}\right)\right) - M. \end{aligned}$$

As we are on T_{r_c} and q is strictly increasing on $[0, r_c]$, we obtain a unique maximum for f_3 that is attained when ρ_1 is maximum.

Besides, $f_3(\rho_1) = i \Leftrightarrow \rho_1 = \frac{M}{i+M}q|_{[0,r_c]}^{-1}(i+M)$, which is defined when $M+i$ is small enough, more precisely when $M+i \leq q_c$. For $M+i$ larger we take $\check{\rho} \in \Delta_{r_c}$ and in this case, we have $\rho_1 = \frac{M}{v(r_c)}$.

If $M=0$, then we have $\rho_1=0$ and $f_3(\rho_3) = q(\rho_3)$, or $r=1$ and $f_3=0$. As we want to maximize f_3 , we take $\rho_1=0$ and $\rho_3 = \min\{q|_{[0,r_c]}^{-1}(i), r_c\}$. We see here that the choice of $\check{\rho}$ is then continuous, if we assume that M varies continuously.

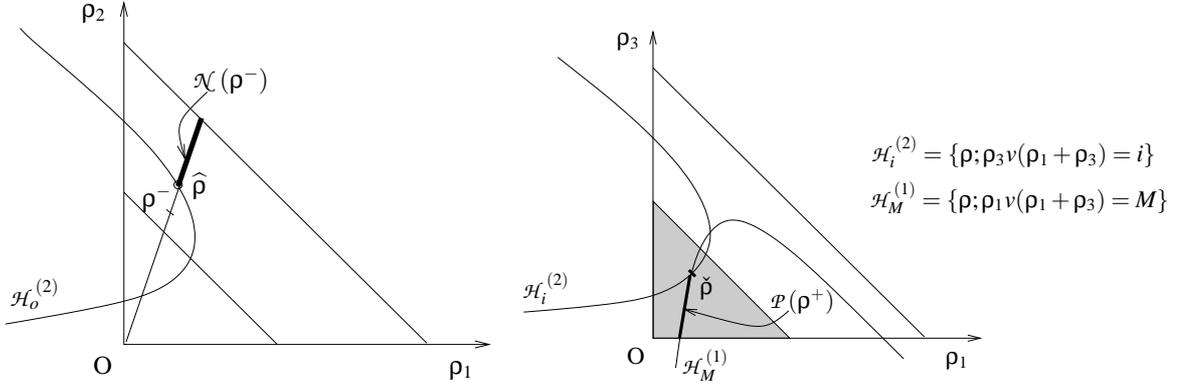


FIGURE 4.8 – Maximization of the flows of ρ_2 and ρ_1 (left) and of ρ_3 (right), when $r^- \geq r_c$ and $r^+ \leq r_c$.

If $r^+ > r_c$ the ideas are the same, but we now denote

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \mathcal{N}(\rho_1^-, \rho_2^-) \\ &= N(\rho_1^-, \rho_2^-) \cap \{(\rho_1, \rho_2), \rho_2 v(\rho_1 + \rho_2) \leq o\} \cap \{(\rho_1, \rho_2), \rho_1 v(\rho_1 + \rho_2) \leq q(r^+)\}. \end{aligned}$$

whereas the definition of \mathcal{P} is unchanged. This new definition guarantees that these sets are non empty. Indeed, if we reconsider the same examples as in the first case, we see now that $M \leq q(r^+) \Rightarrow q|_{[0,r_c]}^{-1}(M) \leq \sigma(r^+)$ and the point $(q|_{[0,r_c]}^{-1}(M), 0)$ is in $T_{\sigma(r^+)}$, thus it is in \mathcal{P} .

The way to maximize the flows of $\hat{\rho}_1$ and $\hat{\rho}_2$ is the same as in the first case, so we will not rewrite all. Now we have $\hat{\rho} = t\rho^-$, with $tr^- = \max\{\sigma(r^-), r_c, t_0r^-, t_1r^-\}$ and $t_0r^- = q|_{[r_c,1]}^{-1}\left(\frac{or^-}{\rho_2^-}\right)$, $t_1r^- = q|_{[r_c,1]}^{-1}\left(\frac{q(r^+)r^-}{\rho_1^-}\right)$. We have seen before that there is a lack of continuity when $o, \rho_2^- \rightarrow 0$. This phenomenon is always to consider, but slightly changed : when $o, \rho_2^- \rightarrow 0$, $\hat{\rho} \rightarrow q_+^{-1}(\kappa)(1, 0)$, $\forall \kappa \in [0, \min\{q(r^+), q_c, q(\rho_1^-)\}]$ when $\rho_1^- \neq 0$ and $\hat{\rho}$ tends to $(0, 0)$ if also $\rho_1^- \rightarrow 0$.

Besides, here an other phenomenon of discontinuity can appear when we make $r^+ \rightarrow 1$ and $\rho_1^- \rightarrow 0$, when ρ_2^- tends to something strictly positive. In this case, $t = t_1$ for $q(r^+)$ and ρ_1^- small enough, and we obtain that for $\rho_2^- \neq 0$, $\hat{\rho} \rightarrow q_+^{-1}(\kappa)(0, 1)$, $\forall \kappa \in [0, \min\{o, q(\rho_2^-), q_c\}]$. However, the flow of $\hat{\rho}_2$ is not maximized for all these solutions, but only for $\kappa = \min\{o, q(\rho_2^-), q_c\}$. We obtain these limits by making $\frac{q(r^+)\rho_2^-}{\rho_1^-} \rightarrow \kappa$.

However, the discontinuity disappears if we make also $\rho_2^- \rightarrow 0$, since in this case the only choice possible for $\hat{\rho}$ is $(0, 0)$.

The way to maximize the flow of $\check{\rho}_3$ on \mathcal{P} is slightly changed.

As before, we obtain a unique maximum of the flow of $\check{\rho}_3$ on $\mathcal{P} \cap \{\rho_1 + \rho_3 \leq r_c\}$.

However an other point may attain the maximum on the line Δ_{r^+} . In this case, we have $(\check{\rho}_1^1, \check{\rho}_3^1) \in \mathcal{P} \cap \{\rho_1 + \rho_3 \leq r_c\}$ and $(\check{\rho}_1^2, \check{\rho}_3^2) = (\tilde{\rho}_1^2, \tilde{\rho}_3^2) \in \Delta_{r^+}$, so we have

$$\begin{aligned} \check{\rho}_1^1 v(\check{r}^1) &= M \\ \check{\rho}_3^1 v(\check{r}^1) &\leq i \\ \check{r}^1 &\leq \sigma(r^+). \end{aligned}$$

and $\check{\rho}_1^2 v(\check{r}^2) = M$, $\check{\rho}_3^2 v(\check{r}^2) = \check{\rho}_3^1 v(\check{r}^1)$, this last condition giving :

$$\begin{aligned} (\check{r}^1 - \check{\rho}_1^1) v(\check{r}^1) &= (\check{r}^2 - \check{\rho}_1^2) v(\check{r}^2) \\ \text{i.e.} \quad q(\check{r}^1) - M &= q(r^+) - M \\ \text{so} \quad \check{r}^1 &= \sigma(r^+). \end{aligned}$$

Thus, we have between $(\check{\rho}_1^1, \check{\rho}_3^1)$ and $(\tilde{\rho}_1^1, \tilde{\rho}_3^1) = \frac{r^+}{\sigma(r^+)} \left(\frac{M}{v(\sigma(r^+))}, \sigma(r^+) - \frac{M}{v(\sigma(r^+))} \right)$ a shock of speed $c' = 0$, meaning that it is fictitious. Moreover $(\tilde{\rho}_1^1, \tilde{\rho}_3^1) = (\tilde{\rho}_1^2, \tilde{\rho}_3^2)$, and we have in fact the same solution. \square

Remark 4.3.7. Here, we have given two different definitions of the set \mathcal{N} , depending on r^+ greater or less than r_c . In fact, this corresponds to giving only one definition :

$$\mathcal{N}(\rho_1^-, \rho_2^-) = N(\rho_1^-, \rho_2^-) \cap \{(\rho_1, \rho_2), \rho_2 v(\rho_1 + \rho_2) \leq o\} \cap \{(\rho_1, \rho_2), \rho_1 v(\rho_1 + \rho_2) \leq d(r^+)\},$$

where d is a function equal to q_c on $[0, r_c]$ and coinciding with q on $[r_c, 1]$.

4.3.3.B Study of the point of discontinuity.

We observed in the proof just above that there is a lack of continuity of the Riemann solver when o and ρ_2^- tend together to 0. We have obtained the following :

Proposition 4.3.8. *Some discontinuities appear when o and ρ_2^- tend together to 0, and also when $r^+ \rightarrow 1$, $\rho_1^- \rightarrow 0$.*

Now, we would like to see what are the different limits obtained, depending on the manner that ρ_2^- and o tend to 0 and how we can have access to them in the (ρ_2^-, o) plane.

Proposition 4.3.9. *In the case $r^+ \leq r_c$, when o and ρ_2^- tend together to 0, we have the following :*

- if $\rho_1^- \geq r_c$ and $\frac{o}{\rho_2^-} \rightarrow \frac{\kappa}{\rho_1^-}$, with $\kappa \leq q_c$, then $\hat{\rho} \rightarrow q|_{[r_c, 1]}^{-1}(\kappa)(1, 0)$;
- if $0 < \rho_1^- < r_c$ and $\frac{o}{\rho_2^-} \rightarrow \frac{\kappa}{\rho_1^-}$, with $\kappa \leq q(\rho_1^-)$, then $\hat{\rho} \rightarrow q|_{[r_c, 1]}^{-1}(\kappa)(1, 0)$;
- if o, ρ_2^- and ρ_1^- tend together to 0, then $\hat{\rho} \rightarrow 0$.

Proof. We have seen that, when $\rho_2^- \neq 0$ the solution is given by

$$\hat{\rho} = \frac{t}{r^-} \rho^- \quad \text{with } t = \max \left\{ \sigma(r^-), r_c, q_+^{-1} \left(\frac{or^-}{\rho_2^-} \right), q_+^{-1} \left(\frac{d(r^+)r^-}{\rho_1^-} \right) \right\},$$

where we have denoted $q_+^{-1} = q|_{[r_c, 1]}^{-1}$, and the definition of t has been slightly changed by a multiplicative constant.

We assume first that ρ_1^- stays strictly positive, so the problem is essentially the behavior of t when $o, \rho_2^- \rightarrow 0$. If $q_+^{-1}\left(\frac{or^-}{\rho_2^-}\right)$ has not to be taken into account at the limit (so that the maximum has to be taken between $\sigma(r^-)$ and r_c), then the solution will be $\hat{\rho} = \max\{\sigma(\rho_1^-), r_c\}(1, 0)$. The question is now to know if this are the only possible limits.

We can see that the limit of t will be $\lim_{\rho_2^- \rightarrow 0} q_+^{-1}\left(\frac{or^-}{\rho_2^-}\right)$ if $\lim_{\rho_2^- \rightarrow 0} q_+^{-1}\left(\frac{or^-}{\rho_2^-}\right) \geq \max\{\sigma(r^-), r_c\}$.

Here we have to study two different cases depending on the situation of ρ_1^- with respect to r_c .

- If $\rho_1^- \geq r_c$, then the condition is $o\left(1 + \frac{\rho_1^-}{\rho_2^-}\right) < q_c$. Consequently, if $o\frac{\rho_1^-}{\rho_2^-} \rightarrow \kappa \leq q_c$, the limit will be $\hat{\rho} = q_+^{-1}(\kappa)(1, 0)$.
- If $0 < \rho_1^- < r_c$, then for ρ_2^- small enough, we have also $r^- < r_c$ and the condition is $o < \rho_2^- v(r^-)$. Then, if $\frac{o}{\rho_2^- v(r^-)} \rightarrow \frac{\kappa}{q(\rho_1^-)} \leq 1$, we get $\hat{\rho} \rightarrow q_+^{-1}(\kappa)(1, 0)$.

Now, we want to see what happens when we have also $\rho_1^- \rightarrow 0$ (and so $r^- \rightarrow 0$). In this case, $\frac{1}{r^-}\rho^-$ tends to whatever points in Δ_1 . Besides, $t > \sigma(r^-) \Rightarrow o < \rho_2^- v(r^-)$ and as before, we take o, ρ_2^-, r^- such that $\frac{o}{\rho_2^- v(r^-)} \rightarrow \kappa \leq 1$. In this case we have $\frac{o}{\rho_2^- v(r^-)} r^- v(r^-) \sim \kappa q(r^-) \rightarrow 0$, because $q(0) = 0$ and $r^- \rightarrow 0$. Then $t \rightarrow 1$ and $\hat{\rho}$ tends to whatever point in Δ_1 , which corresponds in fact to the same solution and it is equivalent to take $\hat{\rho} = (0, 0)$. So, we keep continuity by making ρ_1^- tend to 0. \square

Remark 4.3.10. Among all the possible limits, only one limit realizes the maximum condition on the flow.

Remark 4.3.11. We have not treated here the cases $r^+ > r_c$ and $r^+ \rightarrow 1$ because they are very similar.

4.3.4 Invariant sets.

We would like to describe here some invariant sets of this problem, that is to say that we want to find the sets $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ such that $(\rho^-, \rho^+) \in \mathcal{U}^2 \Rightarrow (\hat{\rho}, \check{\rho}, \tilde{\rho}) \in \mathcal{U}^3$. We will prove the following :

Proposition 4.3.12. *We assume that $o, i > 0$ and we introduce $m = q|_{]0, r_c[}^{-1}(i)$, $M = q|_{]r_c, 1[}^{-1}(o)$ and $T_{a,b} = \{\rho \in \mathcal{S}; a \leq r \leq b\}$ for $0 \leq a \leq b \leq 1$. Then $\forall a \leq m$ and $\forall b \geq M$, $T_{a,b}$ is an invariant set for the Riemann problem (4.2.1)–(4.2.2)–(4.2.3), see Figure 4.9.*

Proof. First, we highlight that we have automatically $a \leq r_c$ and $b \geq r_c$. Then, we have seen before that there are in fact only few cases for $\hat{\rho} : \hat{r} \leq r_c$ and $\hat{\rho} = \rho^-$; otherwise $\hat{r} \geq r_c$ and $\hat{\rho} \in \Delta_{r_c}$ or $\hat{\rho} \in \mathcal{H}_o^{(2)} = \{\rho, \rho_2 v(\rho_1 + \rho_2) = o\}$ or $\hat{\rho} \in \mathcal{H}_{q(r^+)}^{(1)} = \{\rho, \rho_1 v(\rho_1 + \rho_2) = q(r^+)\}$. Now we examine these cases :

1. if $\hat{\rho} = \rho^-$, it is obvious as we have taken $\rho^- \in T_{a,b}$;
2. if $\hat{\rho} \in \Delta_{r_c}$: we have $\Delta_{r_c} \subset T_{a,b}$, since $a \leq r_c$ and $b \geq r_c$ so $\hat{\rho} \in T_{a,b}$;
3. if $\hat{\rho} \in \mathcal{H}_o^{(2)}$: here we have $\hat{\rho}_2 v(\hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_2) = o$ so $\hat{r} v(\hat{r}) \geq o$. As $\hat{r} \geq r_c$ and q decreases on $]r_c, 1[$, then $\hat{r} \leq M$, and we are done ;

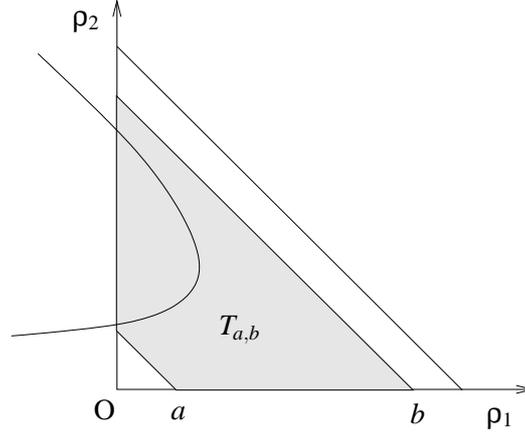


FIGURE 4.9 – Example of an invariant set.

4. if $\hat{\rho} \in \mathcal{H}_{q(r^+)}^{(1)}$: as above, we see that $\hat{\rho}_1 v(\hat{r}) = q(r^+)$ implies $q(\hat{r}) \geq q(r^+)$ and consequently $\hat{r} \leq r^+ \leq M$, and we have finished.

Then we have to do the same thing for $\check{\rho}$. Either $\check{r} > r_c$ and $\check{\rho} \in \Delta_{r^+}$; or $\check{r} \leq r_c$ and $\check{\rho} \in \mathcal{H}_i^{(2)} = \{\rho; \rho_2 v(\rho_1 + \rho_2) = i\}$ or $\check{\rho} \in \Delta_{r_c}$. As before, we examine very briefly the different cases :

1. if $\check{\rho} \in \Delta_{r^+}$, then $\check{r} = r^+$ and then $\check{\rho} \in T_{a,b}$.
2. if $\check{\rho} \in \mathcal{H}_i^{(2)}$, then $\check{\rho}_2 v(\check{r}) = i$ so $q(\check{r}) \geq i$ and consequently, as $\check{r} \leq r_c$ then $\check{r} \geq m$.

In order to finish the proof, we have only to say that $\tilde{\rho} \in \Delta_{r^+}$, and we have directly that $\tilde{\rho} \in T_{a,b}$. \square

4.3.5 Particular case.

In the case $v(r) = V_m r(1 - r)$, we have $q(r) = V_m r(1 - r)$; and $\rho_1 v(\rho_1 + \rho_2) = i$ becomes $\rho_1^2 + \rho_1 \rho_2 - \rho_1 + i/V_m = 0$. We are thus led to study the curve H of equation $x^2 + xy - x + C/V_m = 0$ in the plane (x, y) . This is the equation of a hyperbola of centre $(0, 1)$ and of asymptotes the lines of equations $x = 0$ and $y = 1 - x$; and if $C/V_m \leq 1/4$, then $H \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$.

If $r^- \geq r_c$ and $r^+ \leq r_c$, then we obtain Figure 4.8.

4.4 Resolution of the ‘n-T’ problem.

We want to consider an infinite road with only one point of entry and exit. That is why, in order to treat the half Riemann problems, we first deal with a Riemann problem on a road without extra entry or exit but with M types of vehicles, with the same speed law.

4.4.1 Riemann problem with M types of vehicles on an infinite road.

Proposition 4.4.1. *The Riemann problem with M types of vehicles :*

$$\forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket, \partial_t \rho_i + \partial_x \left(\rho_i v \left(\sum_{1 \leq i \leq M} \rho_i \right) \right) = 0 \quad (4.4.1)$$

with constant initial conditions :

$$\forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket, \begin{cases} \rho_i(0, x) = \rho_i^- & \text{for } x < 0, \\ \rho_i(0, x) = \rho_i^+ & \text{for } x > 0, \end{cases} \quad (4.4.2)$$

where $\rho^-, \rho^+ \in \mathcal{S}_M$ admits a unique solution.

Proof. Let $r = \sum_{1 \leq i \leq M} \rho_i$, $s_i = \frac{\rho_i}{\rho_i}$, for $i \in \llbracket 2, M \rrbracket$. For regular solutions, the system is equivalent to :

$$\begin{cases} \partial_t r + \partial_x (rv(r)) = 0 \\ \partial_t s_i + v(r) \partial_x s_i = 0 \text{ for } i \in \llbracket 2, M \rrbracket \end{cases}$$

We see here that the characteristic speeds of the system are $\lambda_1 = v(r) + rv'(r)$, which is of order 1, and $\lambda_2 = v(r) \geq 0$, which is of order $M - 1$. We also obtain the wave set :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1(\bar{\rho}) &= \{t\bar{\rho}, 0 \leq t \leq 1/\bar{r}\}, \\ \mathcal{O}_2(\bar{\rho}) &= \{r = \bar{r}\}. \end{aligned}$$

The solution of the Riemann problem consists consequently of a 1-wave followed by a 2-wave, the intermediate state being $\tilde{\rho} = \frac{r^+}{r^-} \rho^-$. \square

4.4.2 Half-Riemann problem.

We use the same ideas as for the half Riemann problem with only two types of vehicles, as the second characteristic speed is always positive, so we have only to take the first characteristic speed into account : only the total density is seen.

Lemma 4.4.2. *Fix $\rho^- \in \mathcal{S}_{(n+1)^2}$ and denote $r^- = \sum_{i,j} \rho_{i,j}^-$. Then the set $N(\rho^-)$ of points $\hat{\rho} \in \mathcal{S}_{(n+1)^2}$ such that the solution to the Riemann problem (4.4.1)–(4.4.2) contains only waves with negative speed is :*

If $r^- \geq r_c$: the segment with extreme points $\frac{r_c}{r^-} \rho^-$ and $\frac{1}{r^-} \rho^-$;

If $r^- < r_c$: the segment with extreme points $\frac{\sigma(r^-)}{r^-} \rho^-$ and $\frac{1}{r^-} \rho^-$, together with the point ρ^- .

Lemma 4.4.3. *Fix $\rho^+ \in \mathcal{S}_{(n+1)^2}$ and denote $r^+ = \sum_{i,j} \rho_{i,j}^+$. Then, the set $P(\rho^+)$ of points $\check{\rho} \in \mathcal{S}_{(n+1)^2}$ such that the solution to the Riemann problem (4.4.1)–(4.4.2) contains only waves with positive speed is :*

If $r^+ \leq r_c$: the set T_{r_c} of points $\check{\rho} \in \mathcal{S}_{(n+1)^2}$ such that $r \leq r_c$;

If $r^+ > r_c$: the set $T_{\sigma(r^+)}$ of points $\check{\rho} \in \mathcal{S}_{(n+1)^2}$ such that $r \leq \sigma(r^+)$, together with the line $\Delta = \{r = r^+\}$.

4.4.3 Local resolution in x_k .

We have now to stick the two half problems in $x = x_k$, taking the boundary conditions into account.

Proof of Theorem 4.2.8. Locally in a neighborhood of x_k , the solution consists of :

1. the state ρ^- ;
2. a (possibly null) 1-wave with negative speed ;
3. the state $\hat{\rho}$ in $N(\rho^-)$;
4. a non classical discontinuity with 0 speed ;
5. the state $\check{\rho}$ in $P(\rho^+)$;
6. a (possibly null) 1-wave with positive speed ;
7. the state $\check{\rho}$;
8. a (possibly null) 2-wave with positive speed.

The first wave and the last two waves are a standard solution to the Riemann problem ; the states $\hat{\rho}$, $\check{\rho}$ are obtained thanks to Lemma 4.4.2 and Lemma 4.4.3. Now we only have to stick these states in $x = x_k$, which is possible if the boundary conditions (4.2.6)–(4.2.7) are realized. The uniqueness will come from the maximization of these conditions.

In order to do this we are coming back to a Riemann problem for a ‘one-T’ road with only three types of vehicles. Let $\rho_1 = \sum_{i \neq k, j \neq k} \rho_{i,j}$, $\rho_2 = \sum_{0 \leq i \leq n} \rho_{i,k}$ and $\rho_3 = \sum_{1 \leq i \leq n+1} \rho_{k,j}$. Thanks to the preceding work, we obtain $(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2)$ and $(\check{\rho}_1, \check{\rho}_3)$. We get :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 &= \sum_{i \neq k, j \neq k} \hat{\rho}_{i,j}, & \check{\rho}_1 &= \sum_{i \neq k, j \neq k} \check{\rho}_{i,j}, \\ \hat{\rho}_2 &= \sum_{0 \leq i \leq n} \hat{\rho}_{i,k}, & \check{\rho}_3 &= \sum_{1 \leq j \leq n+1} \check{\rho}_{k,j}. \end{aligned}$$

In particular, we know $\hat{r} = \sum_{i,j} \hat{\rho}_{i,j} = \hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_2$. The $\hat{\rho}_{k,j}$, for $j \neq k$, seem to miss, but in fact the correspondent vehicles are disappearing before the road $k - 1$; their densities are consequently null. Otherwise, it is sufficient to know \hat{r} in order to know $\hat{\rho}$, as $\hat{\rho} \in N(\rho^-)$ and so it is proportional to ρ^- . Hence we have : $\hat{\rho} = \frac{\hat{r}}{r^-} \rho^-$.

It is the same for $\check{r} = \sum_{i,j} \check{\rho}_{i,j} = \check{\rho}_1 + \check{\rho}_3$. The missing species have indeed their densities null, as they disappear in x_k . This fact allows us to determine the $\check{\rho}_{i,j}$ for $i \neq k, j \neq k$, if $\check{r} \neq 1$, as the flow conservation gives : $\check{\rho}_{i,j} = \frac{v(\check{r})}{v(\bar{r})} \hat{\rho}_{i,j}$.

We now have only to determine the $\check{\rho}_{k,j}$ for $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, knowing that $\check{\rho}_3 = \sum_{1 \leq j \leq n+1} \check{\rho}_{k,j}$. As we know the numbers $p_{k,j}$ giving the probability for a vehicle entering in k to go in j , we can conclude :

$$\check{\rho}_{k,j} = p_{k,j} \check{\rho}_3,$$

and we are done.

The case $\check{r} = 1$ arrives if and only if $r^+ = 1$, so nothing happens on the right because the traffic is blocked. That is why, in this case, we take $\check{\rho} = \rho^+$. In fact, all the points of maximal densities are equivalent, as they are linked by a 2-wave of speed $v(1) = 0$.

Then, it remains to collate these local solutions, which is possible as long as the waves do not cross each other. As the points of discontinuity are separated by at least L , the time of existence is $T \geq L/(2V)$, where $V = v(0)$. \square

4.5 Conclusion.

Thanks to this work, we have obtained a new modellization of the traffic on a roundabout. The main point in this new modellization is the introduction of special boundary conditions in order to treat the points of entry and exit. Thanks to classical tools of hyperbolic systems and maximization of the boundary conditions, we first obtain a result of existence and uniqueness of a weak entropy solution in the case of the one-T road. Then, collating the solutions obtained locally, we have been able to derive a result of existence and uniqueness of a weak entropy solution for the Riemann problem in the case of a roundabout; the time of existence of this solution is finite, but we can give a lower bound on it. An other important result is that the obtained Riemann solver is not continuous, what corresponds to the fact that a road is blocked, and in particular if we want the Riemann solver to be continuous we have to exclude the points with maximal densities from the set of initial condition, what can be done since there exists invariant set in the phase plane avoiding the points of maximal density.

Qualitatively, the discontinuities of the Riemann solver can be understood : if a road is jammed and nobody wants to enter it, the problem is ignored, but if only one car wants to go there, then it will stop and block all the traffic.

Finally, we can consider some new problems : if we avoid initial conditions attaining the maximal density, and if the output functions have a lower bound strictly positive, then we can think to the front tracking method (see [22], [46], [71]) in order to address the Cauchy problem, and perhaps prolongate the time of existence.

Chapitre 5

Simulations numériques

On va illustrer les résultats obtenus dans le chapitre précédent par des simulations en Matlab[®]. On veut utiliser le schéma de Godunov (voir [60, pp. 182–186]) afin d’obtenir numériquement la solution du problème au Cauchy pour la route en « T », et aussi pour une route avec deux « T ». Pour cela, on écrit tout d’abord des solveurs de Riemann dans le cas classique (c’est à dire sans point de sortie et d’entrée de véhicules) et dans le cas avec discontinuité.

On écrit ensuite un programme `rieg`, donnant la valeurs $\hat{\rho}$ de la solution du problème de Riemann lorsque la discontinuité est un point d’entrée et de sortie de véhicules en $x = 0^-$; ainsi qu’un programme `ried`, donnant la valeurs $\check{\rho}$ de la solution au problème de Riemann lorsque la discontinuité est un point d’entrée et de sortie de véhicules en $x = 0^+$.

5.1 Un point de discontinuité

5.1.1 Problème de Riemann

On écrit finalement un programme donnant la solution au problème de Riemann pour la route en T. On pose :

`V=60` (vitesse)

`n=50` (nombre de mailles à droite et à gauche de la discontinuité)

`h=1/n` ; (pas d’espace)

`k=h/(2*V)` ; (pas de temps)

`N=2*n` (nombre de pas de temps)

`ko=1/8`

`ki=1/8`

(où $k_o = o/V \in [0, 1/4]$, $k_i = i/V \in [0, 1/4]$)

`rhon=[0,0]`

`rhop=[1/4,0]`

`w=ones(1,n)` ;

(données initiales : début des matrices contenant toutes les données)

`A=[rhon(1)*w,rhop(1)*w]'` ;

`B=[rhon(2)*w,rhop(2)*w]'` ;

On utilise alors un schéma de Godunov pour obtenir une approximation numérique de la solution. On prend de plus des conditions aux bords sans réflexions (voir [60, p. 454]),

i.e. on considère que la maille fictive en-dehors du domaine prend la même valeur que la maille au bord du domaine, ce qui permet de n'avoir que des ondes sortant du domaine.

Pour le problème de Riemann, on obtient les figures 5.1, 5.3, 5.5 et 5.7. D'autre part, lorsqu'on examine les cas $\rho_2^- = \rho_3^+ = 0$ et $o = i = 0$, où

$$k_o = o/V, \quad \text{et } k_i = i/V,$$

on obtient les mêmes figures que pour un problème de Riemann sans point de sortie et d'entrée de véhicules.

Exemple 1. On donne aux différents paramètres les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} V &= 60, & n &= 50, & N &= 300, \\ k_o &= 1/8, & k_i &= 1/8, \\ \rho^-(t=0) &= [2/3, 1/5], & \rho^+(t=0) &= [1/3, 0]. \end{aligned}$$

On obtient la figure 5.1, où on observe, pour ρ_1 , deux détentes de part et d'autre de la discontinuité, pour ρ_2 une détente, et pour ρ_3 une détente suivie d'une discontinuité de contact. Ces résultats sont cohérents avec ce que l'on attend, puisque, d'après le diagramme de phase (voir Figure 5.2), on passe de ρ^- à $\hat{\rho}$ (qui est la valeur de ρ en 0^-) par une détente. On a ensuite $\check{\rho} = \hat{\rho}$, où $\check{\rho}$ est la valeur de ρ en 0^+ , et on va de $\check{\rho}$ à ρ^+ par une détente suivie d'une discontinuité de contact.

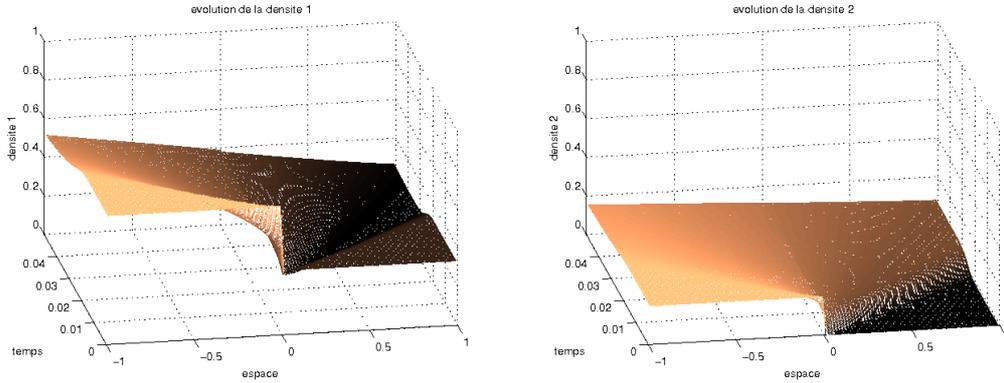


FIGURE 5.1 – Résultat du problème de Riemann pour la route en T avec discontinuité en $x = 0$ et espace des phases. À gauche ρ_1^- pour $x < 0$ et ρ_1^+ pour $x > 0$, à droite ρ_2^- pour $x < 0$ et ρ_3^+ pour $x > 0$; pour $V = 60$, $n = 50$, $N = 300$, $k_o = 1/8$, $k_i = 1/8$, $\rho^-(t = 0) = [2/3, 1/5]$, $\rho^+(t = 0) = [1/3, 0]$.

Exemple 2. On donne aux différents paramètres les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} V &= 60, & n &= 50, & N &= 300, \\ k_o &= 1/8, & k_i &= 1/8, \\ \rho^-(t=0) &= [0, 1/2], & \rho^+(t=0) &= [1/3, 1/6]. \end{aligned}$$

On obtient la figure 5.3, où on observe, pour ρ_2 , un choc à droite de la discontinuité, pour ρ_1 et ρ_3 un choc suivi d'une discontinuité de contact à gauche de la discontinuité. Ces résultats sont cohérents avec ce que l'on attend. En effet, on voit que l'on passe de ρ^- à $\hat{\rho}$ par un choc. On a ensuite une discontinuité entre $\hat{\rho}$ et $\check{\rho}$ en $x = 0$ et on va de $\check{\rho}$ à ρ^+ d'abord par un choc jusque $\check{\rho} = \rho^-$, puis par une discontinuité de contact jusque ρ^+ .

Exemple 3. On donne aux différents paramètres les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} V &= 60, & n &= 50, & N &= 300, \\ k_o &= 0, & k_i &= 1/8, \\ \rho^-(t=0) &= [1/4, 0], & \rho^+(t=0) &= [1/3, 1/4]. \end{aligned}$$

Par rapport aux deux exemples précédents, on remarque notamment que le coefficient de sortie $k_o = o/V$ est désormais nul alors qu'il était auparavant strictement positif. Ce nouveau cas correspond donc au fait de bloquer la sortie en $x = 0$ mais pas l'entrée puisque le coefficient d'entrée $k_i = i/V$ reste strictement positif. Ce cas est donc l'un des cas litigieux pour lesquels plusieurs solutions sont possibles, ce qu'on a appelé la non-continuité du solveur de Riemann. D'autre part, on remarque que la densité ρ_2^- de véhicules désirant sortir en 0 est nulle.

On obtient la solution numérique de la Figure 5.5. Sur le diagramme de phase 5.6, on voit que la solution est obtenue en prenant $\hat{\rho} = \rho^-$. Ensuite, le choix de $\check{\rho}_0$ est imposé puisqu'il doit majorer le flux de ρ_3 sur l'hyperbole $\mathcal{H}_{\hat{\rho}}$. On obtient ainsi $\check{\rho} \in \mathcal{H}_{\hat{\rho}} \cap \Delta_{r^+}$ en $x = 0^+$ (voir Figure 5.6), qui rejoint ρ^+ par une discontinuité de contact.

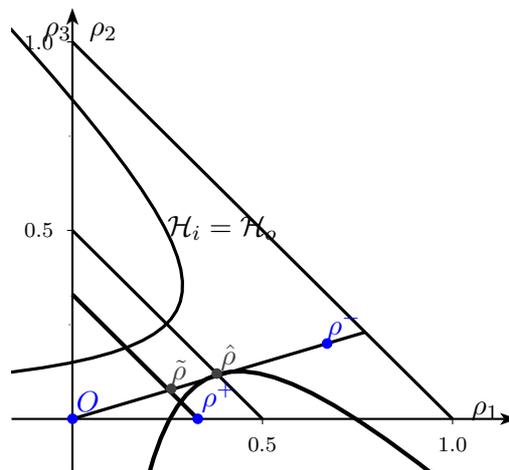


FIGURE 5.2 – Espace de phase du problème de Riemann pour la route en T, pour $k_o = 1/8$, $k_i = 1/8$, $\rho^-(t=0) = [2/3, 1/5]$, $\rho^+(t=0) = [1/3, 0]$.

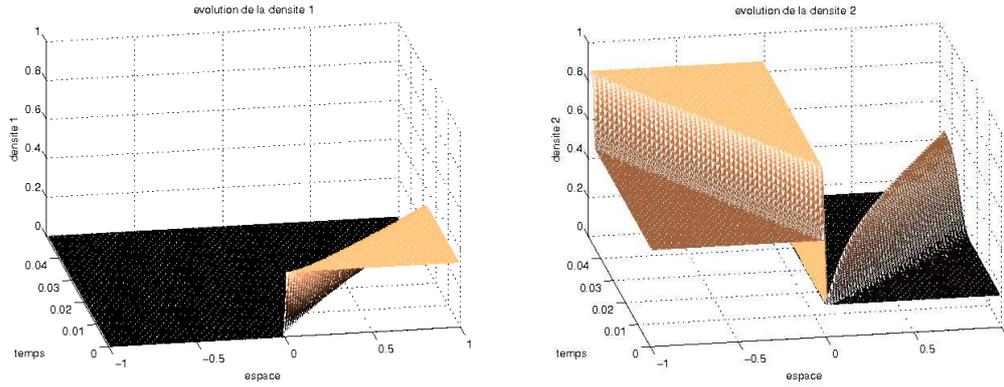


FIGURE 5.3 – Résultat du problème de Riemann pour la route en T avec discontinuité en $x = 0$. À gauche ρ_1^- pour $x < 0$ et ρ_1^+ pour $x > 0$, à droite ρ_2^- pour $x < 0$ et ρ_3^+ pour $x > 0$; pour $V = 60$, $n = 50$, $k_o = 0.1250$, $k_i = 0.1250$, $\rho^-(t = 0) = [0 , 1/2]$, $\rho^+(t = 0) = [1/3 , 1/6]$.

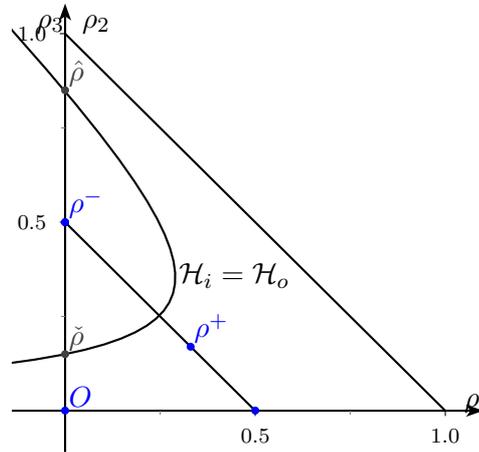


FIGURE 5.4 – Espace de phase du problème de Riemann pour la route en T, pour $k_o = 0.1250$, $k_i = 0.1250$, $\rho^-(t = 0) = [0 , 1/2]$, $\rho^+(t = 0) = [1/3 , 1/6]$.

Exemple 4. On donne aux différents paramètres les valeurs suivantes

$$\begin{aligned}
 V &= 60, & n &= 50, & N &= 300, \\
 k_o &= 0, & k_i &= 1/8, \\
 \rho^-(t = 0) &= [1/4, 1/1000], & \rho^+(t = 0) &= [1/3, 1/4].
 \end{aligned}$$

De nouveau, le coefficient de sortie $k_o = o/V$ est nul, ce qui signifie qu’aucun véhicule ne peut sortir en $x = 0$. D’autre part, les données initiales sont très proches des données initiales de l’exemple 3, le seul changement étant que désormais la densité de véhicules désirant sortir en $x = 0$ est $\rho_2^- = 1/1000 \neq 0$, qui n’est pas nulle même s’il elle reste très petite. Ce choix nous amène théoriquement à prendre $\hat{\rho}$ de densité maximal (voir Figure 5.8), ce qui est bien ce qu’on obtient numériquement puisqu’on observe un saut jusqu’à un état de densité maximal.

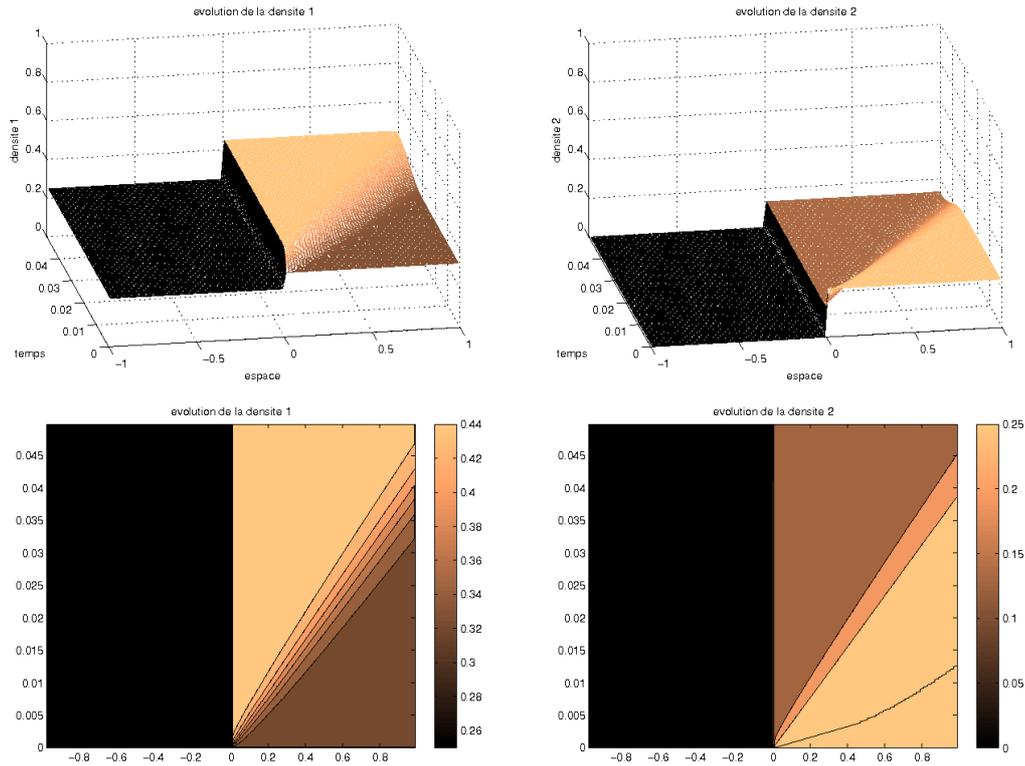


FIGURE 5.5 – Résultat du problème de Riemann pour la route en T avec discontinuité en $x = 0$. À gauche ρ_1^- pour $x < 0$ et ρ_1^+ pour $x > 0$, à droite ρ_2^- pour $x < 0$ et ρ_3^+ pour $x > 0$; pour $V = 60$, $n = 50$, $k_o = 0$, $k_i = 1/8$, $\rho^-(t = 0) = [1/4, 0]$, $\rho^+(t = 0) = [1/3, 1/4]$.

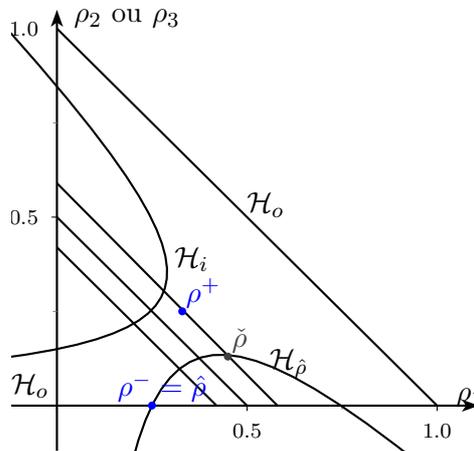


FIGURE 5.6 – Espace de phase du problème de Riemann pour la route en T, pour $k_o = 0$, $k_i = 1/8$, $\rho^-(t = 0) = [1/4, 0]$, $\rho^+(t = 0) = [1/3, 1/4]$.

L'hyperbole $\mathcal{H}_{\hat{\rho}}$ est dégénérée et constituée des droites $\rho_3 = 0$ et $\rho_1 + \rho_3 = 0$, ce qui impose le choix de $\check{\rho}$ d'où l'on va, via un choc et une discontinuité de contact, jusque ρ^+ . C'est bien

ce qu'on observe sur la Figure 5.7.

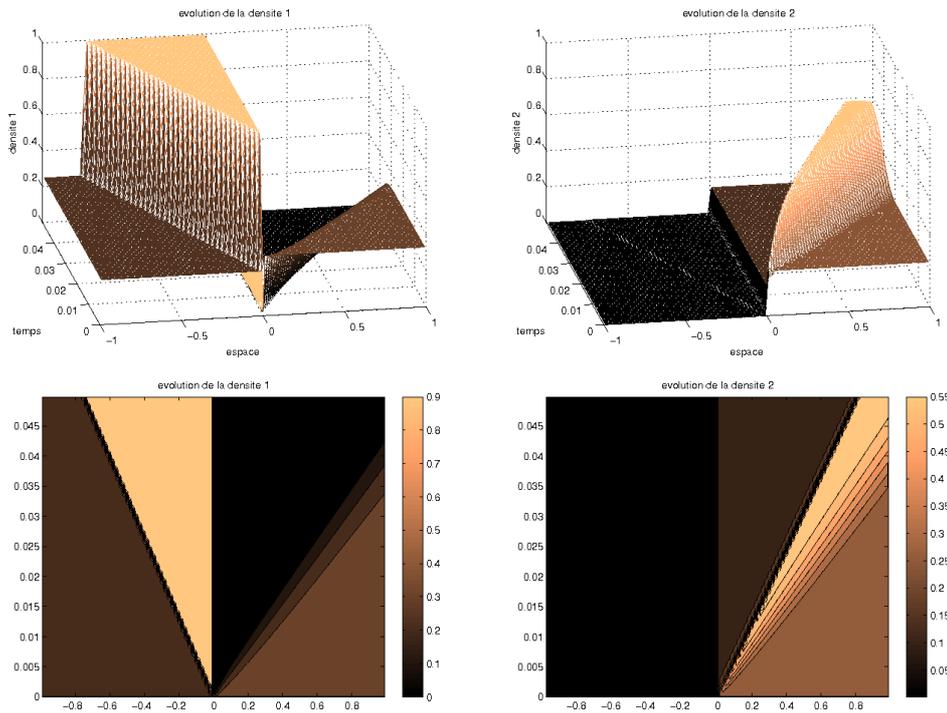


FIGURE 5.7 – Résultat du problème de Riemann pour la route en T avec discontinuité en $x = 0$. À gauche ρ_1^- pour $x < 0$ et ρ_1^+ pour $x > 0$, à droite ρ_2^- pour $x < 0$ et ρ_3^+ pour $x > 0$; pour $V = 60$, $n = 50$, $N = 300$, $k_o = 0$, $k_i = 1/8$, $\rho^-(t = 0) = [1/4, 1/1000]$, $\rho^+(t = 0) = [1/3, 1/4]$.

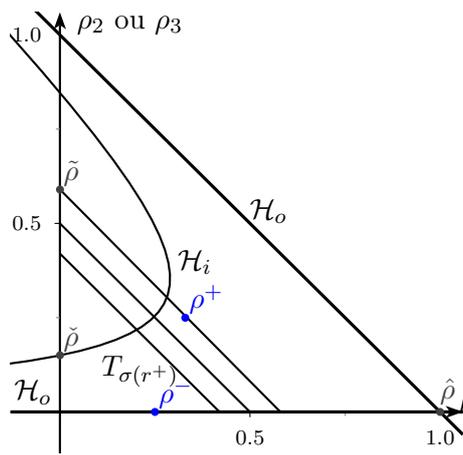


FIGURE 5.8 – Espace de phase du problème de Riemann pour la route en T, pour $k_o = 0$, $k_i = 1/8$, $\rho^-(t = 0) = [1/4, 1/1000]$, $\rho^+(t = 0) = [1/3, 1/4]$.

Ainsi, on peut observer la discontinuité du solveur de Riemann par rapport aux condi-

tions initiales lorsque $o = 0$ et $\rho_2^- \rightarrow 0$: si $\rho_2^- = 0$ on obtient les figures 5.5, et dans le cas où ρ_2^- est proche de zéro mais strictement positif, on obtient les figures 5.7. On peut interpréter ces figures comme suit, sachant que $o = 0$ signifie qu'aucun véhicule ne peut sortir en $x = 0^-$:

- si la sortie en $x = 0^-$ est bloquée ($o = 0$) et si aucun véhicule ne veut sortir en $x = 0$ (i.e. $\rho_2^- = 0$) alors le problème est ignoré ; on obtient la figure 5.5 ;
- si la sortie en $x = 0^-$ est bloquée ($o = 0$) et la densité de véhicules désirant sortir en $x = 0$ n'est pas nulle (i.e. $\rho_2^- > 0$), alors il y a formation d'un embouteillage à partir de $x = 0^-$ vers l'arrière : les véhicules désirant sortir s'arrêtent et bloquent toute la circulation sur la partie gauche de la route ; on obtient la figure 5.7.

Le même phénomène est observable lorsque $r^+ = 1$ (la densité est maximale à droite) et $\rho_1^- \rightarrow 0$. En effet, on aura alors deux comportements très différents en fonction de l'existence ou non de véhicules désirant aller tout droit.

5.1.2 Problème de Cauchy

On prend des conditions initiales sinusoïdales. Plus précisément, on prend $w(x) = |\sin(2\pi x)|$, et on se donne $\text{rhon}=[1/5, 1/2]$ et $\text{rhop}=[1/3, 1/6]$. On considère alors les conditions initiales $A = (\rho_1^-, \rho_1^+)$ et $B = (\rho_2^-, \rho_3^+)$ telles que

$A=[\text{rhon}(1)*w, \text{rhop}(1)*w]$;

$B=[\text{rhon}(2)*w, \text{rhop}(2)*w]$;

On obtient la Figure 5.9. On observe notamment que les oscillations tendent à diminuer au cours du temps, ce qui signifie une diminution de la variation totale.

5.2 Deux points de discontinuité

5.2.1 Problème de Riemann

On modélise maintenant une route avec deux points de discontinuité. La proportion de véhicules entrant en i et allant en j est notée p_{ij} . On choisit $p_{2,3} = 1$ et

$p_{12}=1/3$

$p_{13}=1-p_{12}$.

On prend de plus les conditions initiales suivantes, où $\rho = [\rho_{0,1}, \rho_{0,2}, \rho_{0,3}, \rho_{1,2}, \rho_{1,3}, \rho_{2,3}]$,

$\text{rhon}=[1/2, 1/4, 1/4, 0, 0, 0]$

$\text{rhom}=[0, 1/4, 1/4, 1/4, 1/5, 0]$

$\text{rhop}=[0, 0, 1/6, 0, 1/5, 1/6]$

On obtient alors les figures 5.10, 5.12, 5.13 où les conditions initiales sont de la forme $\rho(t = 0, x) = |\cos(x\pi)|(\rho^- w, \rho_{milieu} w, \rho^+ w)$ où w est un vecteur de taille n de la forme $w = \text{ones}(1, n)$. Le nombre de mailles total est alors $3n$ et le nombre de pas de temps est pris égal à $8n = 400$, les tailles des pas d'espace et de temps étant inchangées par rapport au paragraphe précédent (le pas d'espace est $h = 1/n$ et le pas de temps $k = h/(2V)$).

Du point de vue théorique, en considérant séparément la discontinuité de droite, située en $x = 2$, et la discontinuité de gauche, située en $x = 1$, on obtient les diagrammes de phases de la Figure 5.11, où à gauche on a

$$\rho_1^g = \rho_{0,2} + \rho_{0,3} + \rho_{2,3}, \quad \rho_2^g = \rho_{0,1}, \quad \rho_3^g = \rho_{1,2} + \rho_{1,3},$$

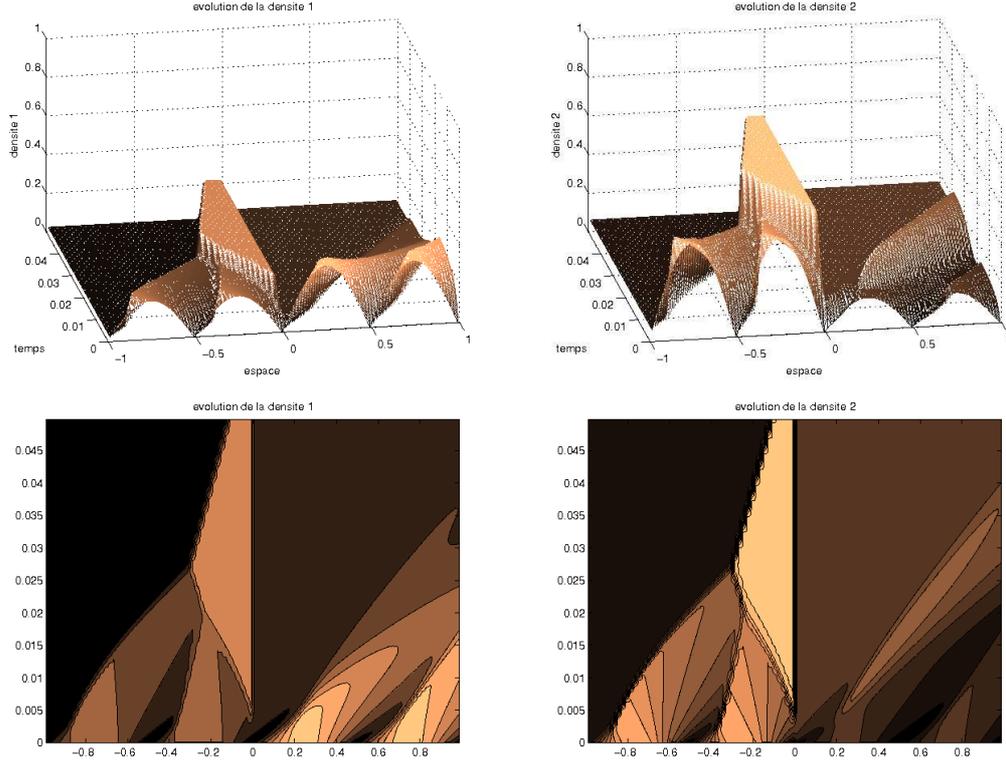


FIGURE 5.9 – Résultat du problème de Cauchy pour la route en T (discontinuité en $x = 0$). À gauche ρ_1^- pour $x < 0$ et ρ_1^+ pour $x > 0$, à droite ρ_2^- pour $x < 0$ et ρ_3^+ pour $x > 0$; pour $V = 60$, $n = 50$, $k_o = 1/8$, $k_i = 1/8$, $\rho^- = [1/5, 1/2]$, $\rho^+ = [1/3, 1/6]$ et $\rho(t = 0, x) = |\sin(2x\pi)|(\rho^-, \rho^+)$.

tandis qu'à droite

$$\rho_1^d = \rho_{0,1} + \rho_{0,3} + \rho_{1,3}, \quad \rho_2^d = \rho_{0,2} + \rho_{1,2}, \quad \rho_3^d = \rho_{2,3}.$$

Ainsi, on doit avoir autour de $x = 1$, une détente à gauche, entre les droites d'équation $x = 1 - Vt$ et $x = 1 - 0.8 * V * t$. Ensuite, on passe à l'état $\tilde{\rho}^g$ qui se confond avec l'état $\tilde{\rho}^g$ puisque ces deux états sont reliés par un choc de vitesse nulle. Ainsi, l'état à gauche de $x = 1$ est $\tilde{\rho}$ qui est relié à ρ_g^+ par une discontinuité de contact. On remarque en particulier que $\tilde{\rho}_1^g$ est très proche de 1. Après calculs, on obtient $\tilde{\rho}_{0,2}^g = \frac{q(\tilde{r})}{r-v(\tilde{r})}\rho_{0,2}^- = \frac{9}{20}$, de même $\rho_{0,3} = \frac{9}{20}$. Il y a donc une augmentation brutale de $\rho_{0,2}$ et $\rho_{0,3}$ de $1/4$ à $9/20$, ce qui est presque le double! En effet, sur la deuxième ligne de la Figure 5.10 et sur la première ligne de la Figure 5.12, on observe bien cette augmentation brutale et étroite, l'étroitesse provenant de la faible vitesse de la discontinuité de contact d'équation $x = 1 + 0,05 * V * t$.

D'autre part, à droite, d'après le diagramme de phase (diagramme de droite de la Figure 5.11), on doit voir à gauche de $x = 2$ une détente de ρ_d^- à $\hat{\rho}^d$ et à droite une discontinuité de contact de $\tilde{\rho}^d$ à ρ_d^+ , ce qu'on observe bien sur la première ligne de la Figure 5.12.

On voit qu'assez rapidement, les ondes émises à partir de $x = 1$ et $x = 2$ interagissent. On remarque en particulier que l'onde émise à gauche de $x = 2$ est réfléchiée après avoir

rencontré la discontinuité de contact et la droite $x = 1$. D'une part, lorsque la détente interagit avec la discontinuité de contact, la détente reste inchangée tandis que la pente de la discontinuité de contact augmente. Cette réflexion ne se retrouve toutefois pas sur la densité totale (voir Figure 5.13), ce qui s'explique par le fait que, lorsque le 1-choc rencontre la discontinuité de contact puis la discontinuité, il crée une discontinuité de contact à droite et une détente à gauche. Or la discontinuité de contact disparaît lorsqu'on considère la densité totale. On ne voit donc sur la densité totale (voir Figure 5.13) que les détente.

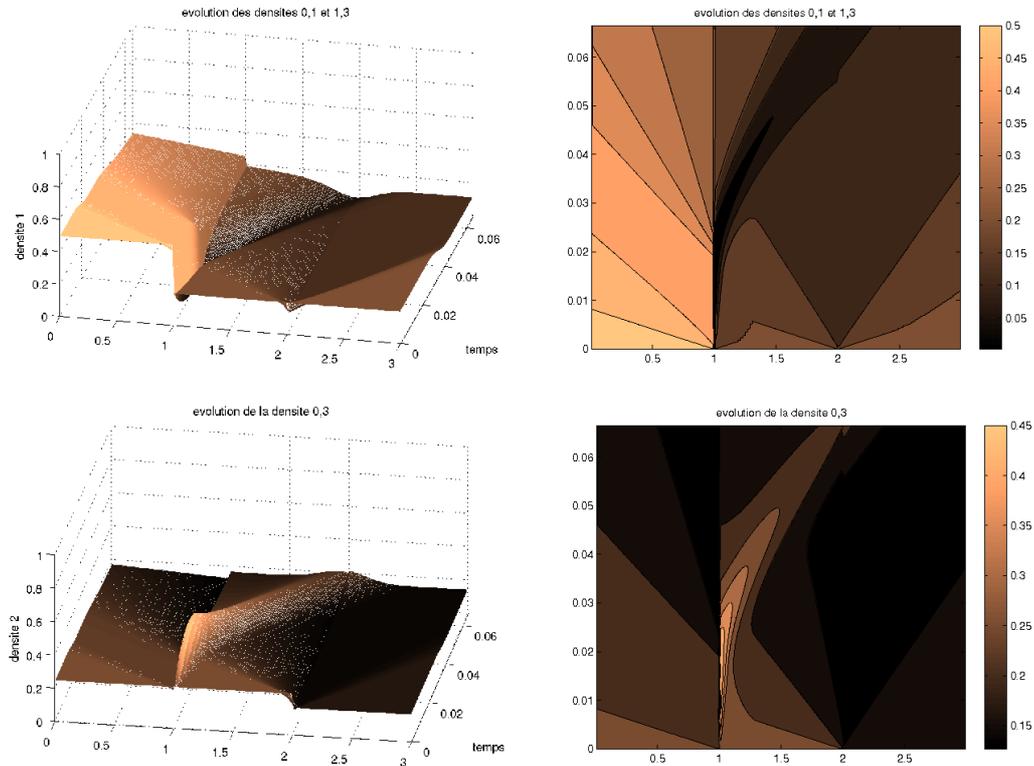


FIGURE 5.10 – Résultat du problème de Riemann pour la route avec deux T (discontinuités en $x = 1$ et $x = 2$), pour $V = 60$, $n = 50$, $k_o = 1/4$, $k_i = 1/4$, $\rho^- = [1/2, 1/4, 1/4, 0, 0, 0]$, $\rho_{milieu} = [0, 1/4, 1/4, 1/4, 1/5, 0]$, $\rho^+ = [0, 0, 1/6, 0, 1/5, 1/6]$.

5.2.2 Problème de Cauchy

On considère désormais des conditions initiales variables. Plus précisément, on garde les mêmes données que pour le problème de Riemann, et on choisit le vecteur w non plus constant mais de la forme suivante :

```
for l= 1 :(n)
w(l)=abs(cos(l*pi/n)) ;
end ;
```

On obtient alors les figures 5.14, 5.15, 5.16. De même que dans le cas avec une seule discontinuité, il semble que la variation totale diminue au cours du temps.

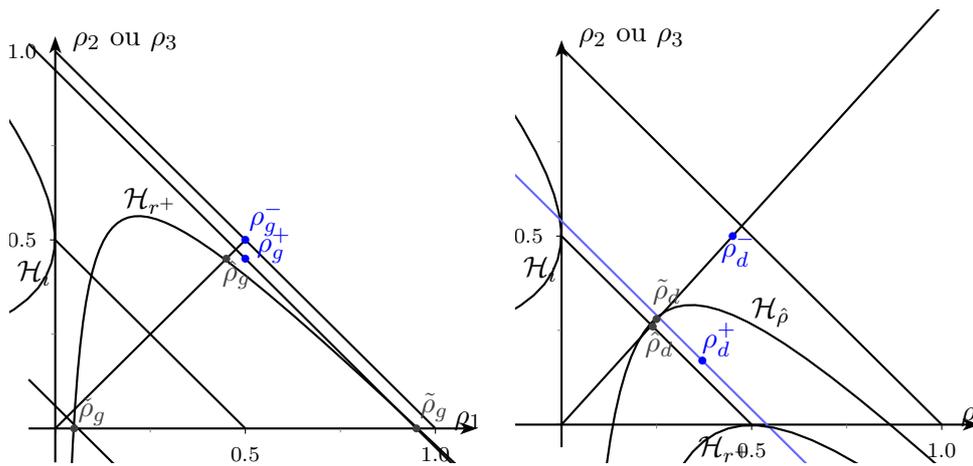


FIGURE 5.11 – Espaces de phase du problème de Riemann pour la route avec deux T (discontinuité en $x = 1$ à gauche et discontinuité en $x = 2$ à droite), pour $k_o = 1/4$, $k_i = 1/4$, $\rho^- = [1/2, 1/4, 1/4, 0, 0, 0]$, $\rho_{milieu} = [0, 1/4, 1/4, 1/4, 1/5, 0]$, $\rho^+ = [0, 0, 1/6, 0, 1/5, 1/6]$.

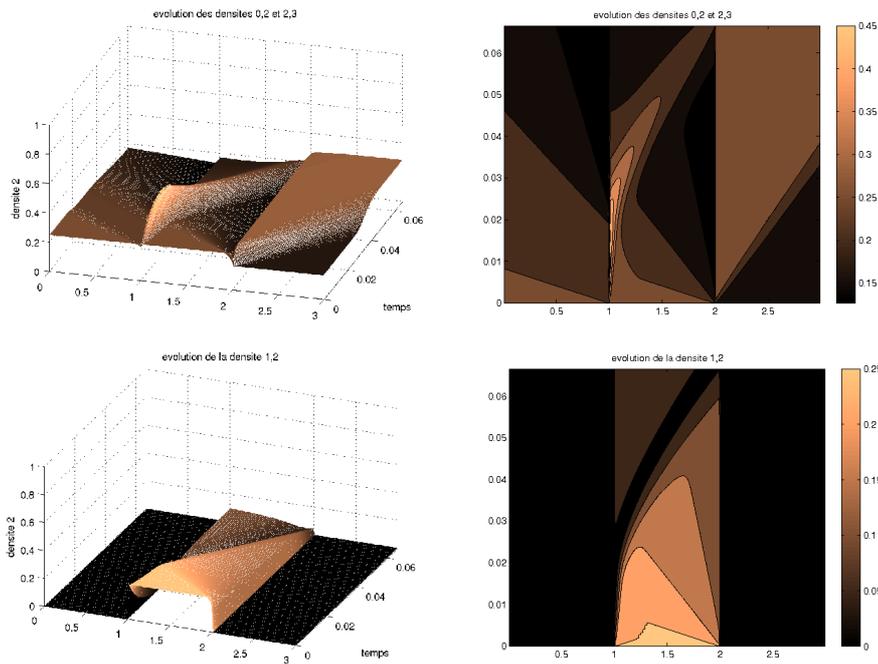


FIGURE 5.12 – Résultat du problème de Riemann pour la route avec deux T (discontinuités en $x = 1$ et $x = 2$), pour $V = 60$, $n = 100$, $k_o = 0.250$, $k_i = 0.250$, $\rho^- = [1/2, 1/4, 1/4, 0, 0, 0]$, $\rho_{milieu} = [0, 1/4, 1/4, 1/4, 1/5, 0]$, $\rho^+ = [0, 0, 1/6, 0, 1/5, 1/6]$.

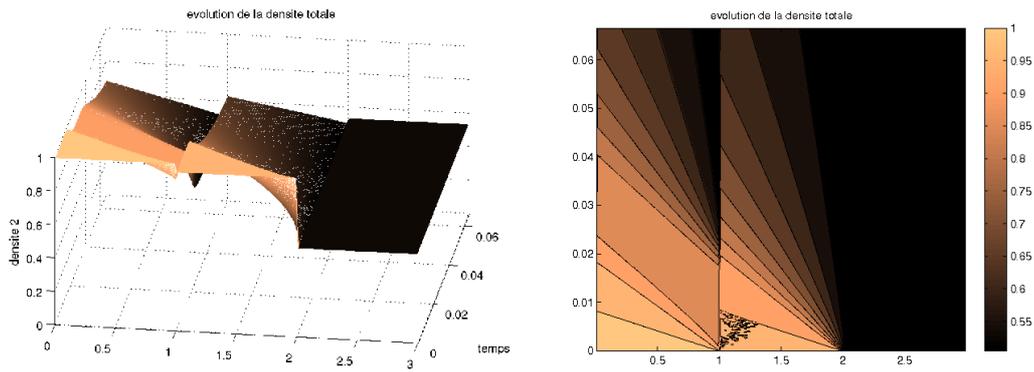


FIGURE 5.13 – Résultat du problème de Riemann pour la route avec deux T (discontinuités en $x = 1$ et $x = 2$), pour $V = 60$, $n = 100$, $k_o = 0.250$, $k_i = 0.250$, $\rho^- = [1/2, 1/4, 1/4, 0, 0, 0]$, $\rho_{milieu} = [0, 1/4, 1/4, 1/4, 1/5, 0]$, $\rho^+ = [0, 0, 1/6, 0, 1/5, 1/6]$.

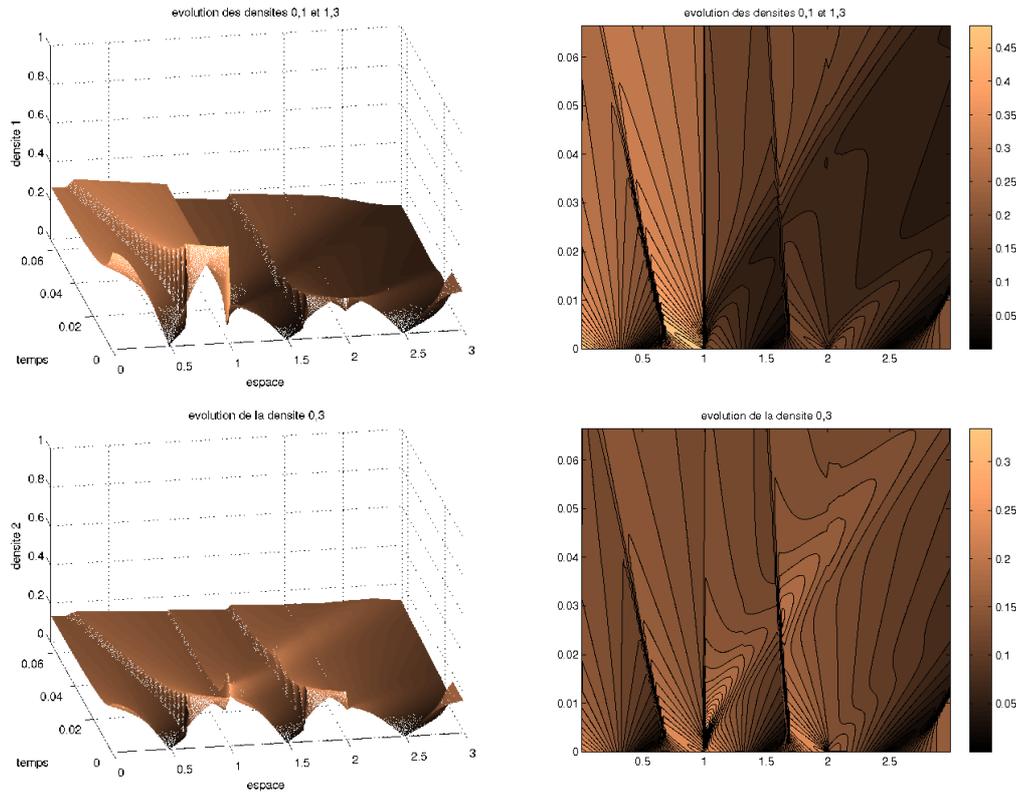


FIGURE 5.14 – Résultat du problème de Cauchy pour la route avec deux T (discontinuités en $x = 1$ et $x = 2$), pour $V = 60$, $n = 100$, $k_o = 0.250$, $k_i = 0.250$, $\rho^- = [1/2, 1/4, 1/4, 0, 0, 0]^T$, $\rho_{milieu} = [0, 1/4, 1/4, 1/4, 1/5, 0]^T$, $\rho^+ = [0, 0, 1/6, 0, 1/5, 1/6]^T$ et $\rho(t = 0, x) = |\cos(x\pi)|(\rho^-, \rho_{milieu}, \rho^+)$.

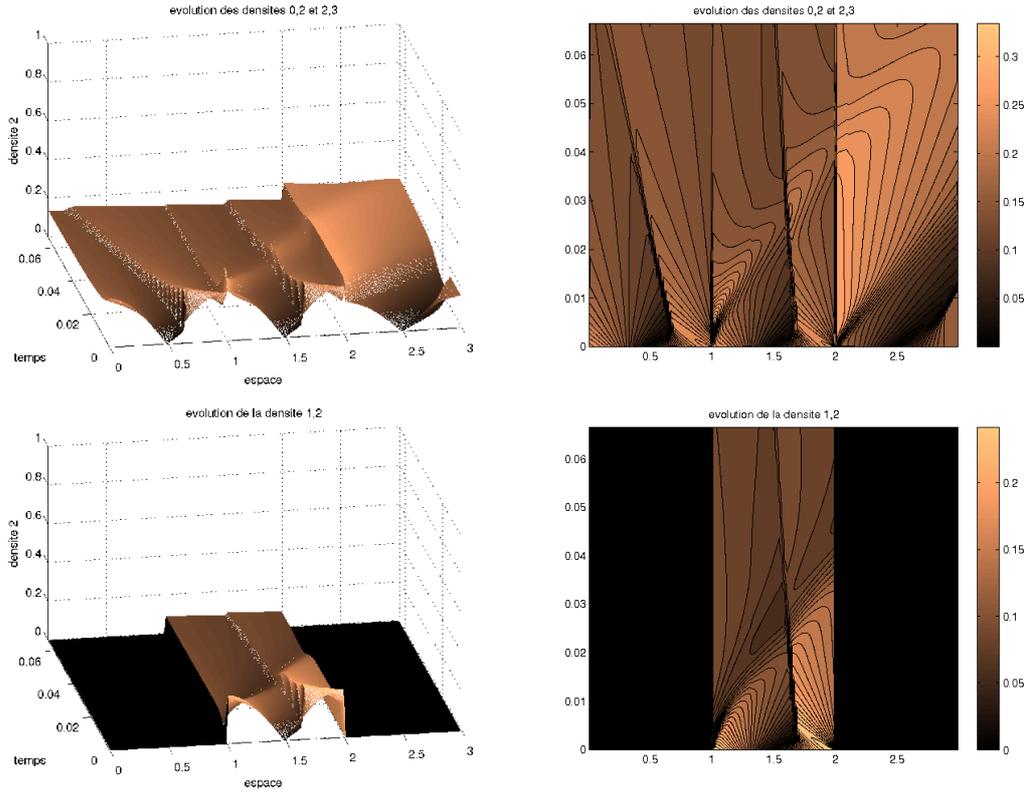


FIGURE 5.15 – Résultat du problème de Cauchy pour la route avec deux T (discontinuités en $x = 1$ et $x = 2$), pour $V = 60$, $n = 100$, $k_o = 0.250$, $k_i = 0.250$, $\rho^- = [1/2, 1/4, 1/4, 0, 0, 0]^T$, $\rho_{milieu} = [0, 1/4, 1/4, 1/4, 1/5, 0]^T$, $\rho^+ = [0, 0, 1/6, 0, 1/5, 1/6]^T$ et $\rho(t = 0, x) = |\cos(x\pi)|(\rho^-, \rho_{milieu}, \rho^+)$.

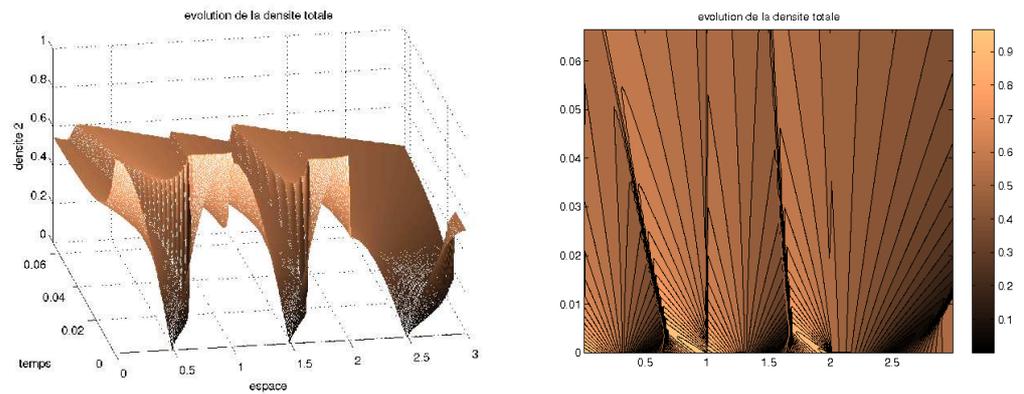


FIGURE 5.16 – Résultat du problème de Cauchy pour la route avec deux T (discontinuités en $x = 1$ et $x = 2$), pour $V = 60$, $n = 100$, $k_o = 0.250$, $k_i = 0.250$, $\rho^- = [1/2, 1/4, 1/4, 0, 0, 0]^T$, $\rho_{milieu} = [0, 1/4, 1/4, 1/4, 1/5, 0]^T$, $\rho^+ = [0, 0, 1/6, 0, 1/5, 1/6]^T$ et $\rho(t = 0, x) = |\cos(x\pi)|(\rho^-, \rho_{milieu}, \rho^+)$.

Chapitre 6

Problème de Cauchy pour une route avec jonctions

Ce chapitre a pour optique l'application de la méthode de *front tracking* (cf. [9, 22, 35, 46, 71]) au problème de Cauchy pour une route infinie avec un nombre fini n de points d'entrée et de sortie de véhicules dans quelques cas particuliers. On traite tout d'abord ce problème lorsque $n = 1$, pour des données initiales bien choisies. On utilise ici les mêmes notations que dans le chapitre 4. La résolution par front tracking repose sur l'idée suivante : on remplace les détentes par une succession de petits chocs non-admissibles, d'amplitude $\delta > 0$ petite puis on fait tendre δ vers 0. On appellera désormais *front* les ondes rencontrées.

6.1 Un point de jonction

On commence par examiner quels sont les états d'équilibre possible à droite et à gauche d'un point de discontinuité et ce qui se passe lorsque cet équilibre est modifié par l'arrivée d'un front par la droite ou par la gauche.

Lemme 6.1.1. *Les états d'équilibre possibles $(\widehat{\rho}, \check{\rho})$ de part et d'autre d'un point de discontinuité correspondant à une jonction du modèle (4.2.1)–(4.2.2)–(4.2.3) vérifient toujours $\widehat{\rho} \in \text{ext}\mathcal{H}_o^{(2)}$, $\check{\rho} \in \text{ext}\mathcal{H}_i^{(2)}$ et correspondent à l'un des cas suivants :*

1. $\widehat{\rho} \in \Delta_{r_c} = \{\rho; \rho_1 + \rho_2 = r_c\}$ et $\check{\rho} \in \Delta_{r_c}$;
2. $\widehat{\rho} \in \Delta_{r_c}$ et $\check{\rho} \in \mathcal{H}_i^{(2)} = \{\rho; \rho_2 v(\rho_1 + \rho_2) = i\}$ avec $\check{r} < r_c$;
3. $\widehat{\rho} \in \Delta_{r_c}$ et $\check{\rho} \in \mathcal{H}_{\check{\rho}}^{(1)} = \{\rho; \rho_1 v(\rho_1 + \rho_2) = \widehat{\rho}_1 v(\widehat{\rho}_1 + \widehat{\rho}_2)\}$ avec $\check{r} > r_c$;
4. $\widehat{\rho} \in \mathcal{H}_o^{(2)}$, $\widehat{r} > r_c$ et $\check{\rho} \in \Delta_{r_c}$;
5. $\widehat{\rho} \in \mathcal{H}_o^{(2)}$, $\widehat{r} > r_c$ et $\check{\rho} \in \mathcal{H}_i^{(2)}$ avec $\check{r} < r_c$;
6. $\widehat{\rho} \in \mathcal{H}_o^{(2)}$, $\widehat{r} > r_c$ et $\check{\rho} \in \mathcal{H}_{\widehat{\rho}}$ avec $\check{r} > r_c$;
7. $\widehat{\rho} \in \text{ext}\mathcal{H}_o^{(2)}$ (avec $\widehat{r} > r_c$) et $\check{\rho} \in \mathcal{H}_{\check{\rho}}^{(1)} \cap \{\rho_2 = 0\}$, $\check{r} > r_c$;
8. $\widehat{\rho} \in \text{ext}\mathcal{H}_o^{(2)}$ (avec $\widehat{r} < r_c$) et $\check{\rho} \in \Delta_{r_c}$;
9. $\widehat{\rho} \in \text{ext}\mathcal{H}_o^{(2)}$ (avec $\widehat{r} < r_c$) et $\check{\rho} \in \mathcal{H}_i^{(2)} = \{\rho; \rho_2 v(\rho_1 + \rho_2) = i\}$ avec $\check{r} < r_c$;
10. $\widehat{\rho} \in \text{ext}\mathcal{H}_o^{(2)}$ (avec $\widehat{r} < r_c$) et $\check{\rho} \in \mathcal{H}_{\check{\rho}}^{(1)} = \{\rho; \rho_1 v(\rho_1 + \rho_2) = \widehat{\rho}_1 v(\widehat{\rho}_1 + \widehat{\rho}_2)\}$ avec $\check{r} > r_c$.

Preuve. Ces résultats découlent directement de la preuve du Théorème 4.2.8. □

Lemme 6.1.2. *Lorsqu'un 1-front arrive de la gauche (cf. Fig. 6.1) sur une discontinuité correspondant à une jonction telle que $o \geq \delta > 0$ et $i \geq \delta > 0$, alors il n'y a jamais de front réfléchi partant vers la gauche après la collision si $r^- \geq r_c$ ou bien si $r^+ \leq r_c$.*

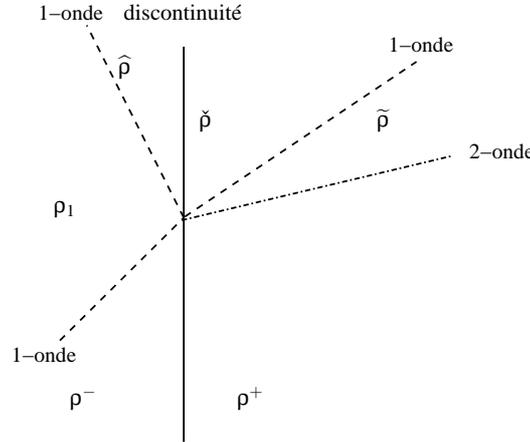


FIGURE 6.1 – 1-Front arrivant de la gauche au niveau d’une discontinuité.

Preuve. On note ρ_1 l’état à gauche du front arrivant sur la discontinuité et ρ^-, ρ^+ les états de part et d’autre de la discontinuité avant que le front ne rencontre la discontinuité (cf. Figure 6.1). On suppose que ρ_1 est distinct de $\rho^-,$ auquel cas il ne se passe rien. Deux remarques préliminaires sont utiles pour l’étude de cette interaction 1-front/discontinuité :

- les états ρ^- et ρ^+ sont à l’équilibre avant l’arrivée du 1-front, c’est à dire qu’on se trouve dans un des cas énoncés dans le Lemme 6.1.1 ;
- le 1-front arrivant de la gauche est de pente positive, ce qui signifie que $\rho_1 \in P(\rho^-) \cap \mathbb{R}\rho^-$ (on utilise ici les notations du chapitre 4, l’ensemble $P(\rho^-)$ étant décrit par le Lemme 4.3.5).

Dans le cas $r^- \geq r_c,$ ces deux remarques, nous permettent de déterminer les valeurs possibles pour $\rho_1,$ qui s’avèrent être toujours dans $T_{\sigma(r^-)} = \{\rho; \rho_1 + \rho_2 \leq \sigma(r^-)\}.$

Comme de plus, ρ^- et ρ^+ sont à l’équilibre, ρ^+ est sur $\mathcal{H}_{\rho^-}.$ Par conséquent, on a automatiquement $\rho_1 \in \{\rho; \rho_1 v(r) \leq d(r^+)\}.$ Par conséquent, lorsqu’on résout le problème de Riemann associé à ρ_1 et $\rho^+,$ on obtient que l’état à gauche de la discontinuité reste égal à ρ_1 et il n’y a pas de front réfléchi.

Dans le cas $r^+ \leq r_c,$ on a $\rho_1 \in T_{r_c} \cap \mathbb{R}\rho^-.$ L’hypothèse $r^+ \leq r_c$ nous permet alors de voir que $\rho_1 \in \{\rho; \rho_1 v(r) \leq d(r^+)\}.$ Par conséquent, lorsqu’on résout le problème de Riemann associé à ρ_1 et $\rho^+,$ on obtient que l’état à gauche de la discontinuité reste égal à ρ_1 et il n’y a pas de front réfléchi. □

Lemme 6.1.3. *Lorsqu’un 2-front arrive de la gauche sur une discontinuité correspondant à une jonction telle que $o \geq \delta > 0$ et $i \geq \delta > 0,$ si $r^+ \leq r_c$ et $\rho_1, \rho^- \in E = \{\rho; \rho_1/\rho_2 \geq A\},$ $A = \frac{q_c}{o} - 1$ étant choisi de sorte que $\mathcal{H}_o^{(2)} \cap \mathring{E} = \emptyset,$ alors il n’y a pas de front réfléchi vers la gauche après la collision.*

Preuve. Tout d'abord, d'après le Lemme 6.1.1, $r^+ \leq r_c$ implique $r^- \leq r_c$ ou bien $\rho^- \in \mathcal{H}_o^{(2)}$. Or, par hypothèse, ρ^- ne peut être sur $\mathcal{H}_o^{(2)}$ que si $r^- = r_c$. En effet, $\rho \in \mathcal{H}_o^{(2)} \cap \{\rho_1/\rho_2 = A\}$ implique $q((1+A)\rho_2) = o(1+A) = q_c$ et donc $\rho_2 = \frac{r_c}{1+A}$. On a alors $\rho_1 + \rho_2 = (1+A)\rho_2 = r_c$. Par conséquent, ρ^- doit appartenir à T_{r_c} . Comme ρ_1 et ρ^- sont reliés par un 2-choc, on a donc également $\rho_1 \in T_{r_c}$.

De plus, la condition $\rho_1 \in E$ empêche que $\rho_1 \in \text{int}\mathcal{H}_o^{(2)}$. Par conséquent, lorsqu'on résout le problème de Riemann associé à ρ_1 et ρ^+ , aucune onde réfléchie n'est créée après la collision. \square

Proposition 6.1.4. *On considère le problème de Cauchy pour le problème (4.2.1)–(4.2.2)–(4.2.3) modélisant une route avec un point d'entrée et sortie en $x = 0$, associé aux conditions initiales*

$$\begin{cases} \rho_1(0, x) = \rho_{1,0}^- \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}; \mathbb{R}), & \text{pour } x < 0, \\ \rho_2(0, x) = \rho_{2,0}^- \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}; \mathbb{R}), & \text{pour } x < 0, \\ \rho_1(0, x) = \rho_{1,0}^+ \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}; \mathbb{R}), & \text{pour } x > 0, \\ \rho_3(0, x) = \rho_{3,0}^+ \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}; \mathbb{R}), & \text{pour } x > 0. \end{cases} \quad (6.1.1)$$

On suppose que pour tout $x > 0$ on a $\rho(0, x) = (\rho_{1,0}^+, \rho_{3,0}^+)(x) \in T_{r_c}$ et que pour tout $x < 0$, $\rho(0, x) = (\rho_{1,0}^-, \rho_{2,0}^-)(x) \in E = \{\rho; \rho_1/\rho_2 \geq A\}$, $A = \frac{q_c}{o} - 1$ étant choisi de sorte que $\mathcal{H}_o^{(2)} \cap \mathring{E} = \emptyset$. Alors, la solution au problème de Cauchy pour une route avec un point d'entrée et de sortie situé en $x = 0$ est définie pour tous temps.

Preuve. Tout d'abord, on sait que les trapézoïdes –dont les bords sont des parties de lieux de Hugoniot– sont invariants pour le problème de Riemann pour une route sans point de discontinuité. On résout d'abord le problème dans le quart de plan supérieur droit $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; x > 0, t > 0\}$, en supposant qu'en $x = 0$ on a une condition au bord $\rho(t, 0) \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ prenant ses valeurs dans T_{r_c} . On peut alors utiliser la technique de *front tracking* (cf. [71, 35, 9, 46, 22]) pour montrer que la solution existe pour tous temps. Cette méthode nécessite dans le cas général de prendre des conditions initiales ayant une variation totale petite, mais ici, le système considéré (4.2.1) est en fait un système dit *de Temple* (les courbes de détente et les courbes de choc coïncident), ce qui permet de traiter également des conditions initiales avec une variation totale bornée, non-nécessairement petite (cf. [9]). Il reste à savoir comment le point de discontinuité intervient dans cet algorithme. On peut déjà remarquer qu'en $x = 0^+$ aucune onde ne vient de la droite puisque dans le quart de plan supérieur droit toutes les ondes ont une vitesse positive, grâce à l'hypothèse selon laquelle la condition initiale pour $x > 0$ prend ses valeurs dans le triangle T_{r_c} .

Il reste à montrer que les fronts émanant de $x = 0$ restent en nombre fini.

On se place maintenant dans le quart de plan supérieur gauche $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; x < 0, t > 0\}$. Le problème de Riemann classique laisse invariant l'ensemble E . De plus, d'après les Lemmes 6.1.2 et 6.1.3, les ondes qui arrivent en $x = 0^-$ n'émettent aucune onde réfléchie à gauche : l'ensemble E est donc invariant également pour le solveur de Riemann à gauche de la discontinuité. De plus, comme on l'a déjà remarqué dans la preuve du Lemme 6.1.3, $\rho^+ \in T_{r_c}$ et $\rho^- \in E$ implique $\rho^- \in T_{r_c}$.

On peut alors utiliser la méthode de front tracking à gauche de $x = 0$, en complétant à droite par les états fictifs $\hat{\rho}$ de manière à ce que le problème à gauche correspondent aux problème sur \mathbb{R} tout entier, complété par les états fictifs. Avec les observations précédentes et les résultats classiques de front tracking [9, 35, 46], on obtient que le nombre de fronts

restera borné et que seulement un nombre fini de fronts est créé en $x = 0^+$. On peut alors traiter par front tracking la partie droite de la route. \square

Remarque 6.1.5. Un autre cas particulier est le cas $\rho(0, x) \in T_{q|_{[0, r_c]}^{-1}(o)}$, cet ensemble étant invariant pour les solveurs de Riemann classiques ou avec discontinuité.

Si on retourne au cas général, on il faudrait éventuellement ajouter des termes dans le potentiel d'interaction de façon à prendre en compte les ondes réfléchies en $x = 0$.

Si on veut considérer un choix plus large pour ρ_0^- , par exemple $\rho_0^- \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{U} \cap \mathcal{H}_o^{(2)} \neq \emptyset$, alors $\rho(t, 0^-)$ peut être en-dehors de T_{r_c} :

Si c'est une 1-onde, la positivité de la pente implique $r_1 < \sigma(r_2)$. Par conséquent, il n'y a pas d'ondes réfléchies et deux chocs peuvent être créés à droite.

Si c'est une 2-onde, il y a une onde réfléchie et deux ondes à droites. Le problème est qu'il semble plus difficile de conclure à la décroissance de la variation totale à gauche désormais. Néanmoins, le nombre de chocs à gauche ne croît pas.

6.2 Plusieurs points de jonctions

On considère maintenant une route avec un nombre fini n de points de discontinuités situées en $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Proposition 6.2.1. *On considère le problème de Cauchy pour la route avec n points d'entrée et de sortie (4.2.5)–(4.2.7) avec une condition initiale $\rho_0 \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{(k+1)^2})$. On suppose que pour tout x , $\rho_0(x) \in T_{r_c} \cap E$. Alors le problème de Cauchy admet une solution pour tous temps.*

Preuve. On a déjà vu dans la preuve de la proposition 6.1.4 que le triangle $T_{r_c} \cap E$ est invariant pour le solveur de Riemann classique, mais aussi pour le solveur de Riemann avec discontinuité. On a également vu précédemment que dans ce cas toutes les ondes ont une pente positive.

Remarque 6.2.2. Les ondes créées sur la droite ont une vitesse limitée puisque pour tout temps t , $\rho(t, x_k^+)$ doit être dans $\mathcal{H}_i^{(2)} \cup T_{r_c}$. Par conséquent les 1-ondes créées sont au plus de vitesse $c = \frac{q(r_c) - i}{r_c - q^{-1}(i)}$, et les 2-ondes sont de vitesse λ telle que $v(q^{-1}(i)) \geq \lambda \geq v(r_c)$.

Si on essaie de résoudre le problème de Cauchy sur $] -\infty, x_1[$, on obtient que le nombre de chocs est borné. On peut alors résoudre le problème de Cauchy sur $]x_1, x_2[$ en ajoutant les fronts créés en $x = x_1$. En répétant cette procédure jusqu'à l'intervalle $]x_n, \infty[$, on obtient finalement une solution pour le problème de Cauchy en utilisant la méthode de front tracking. \square

Il reste encore à traiter le cas d'une route avec une infinité dénombrable de points de discontinuité périodiquement distribués avec des données initiales périodiques, afin de traiter le cas du rond-point.

Troisième partie

Équations scalaires

Introduction

D'après le résultat classique de Kružkov [81, Theorem 5], le problème de Cauchy pour une loi de conservation en N dimension d'espace

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{Div} f(t, x, u) = F(t, x, u) & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

admet une unique solution faible entropique. Le même article prouve également une estimation de stabilité par rapport aux conditions initiales [81, Theorem 1]. Dans le même cadre que [81], on s'intéresse à la stabilité des solutions par rapport au flux f et à la source F . Un résultat intermédiaire important en vue de ce problème est une borne sur la variation totale de la solution.

Dans le cas sans source, c'est-à-dire $F = 0$, et lorsque le flux f est indépendant de t et x , la dépendance de la solution par rapport au flux a déjà été abordé par Lucier [96], Dafermos [45] ou encore F. Bouchut & B. Perthame [21]. Dans ce cas, la borne TV est facilement obtenue et s'écrit $\operatorname{TV}(u(t)) \leq \operatorname{TV}(u_0)$. L'estimation de dépendance au flux s'écrit alors, pour une constante $C > 0$

$$\|u(t) - v(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq \|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} + C \operatorname{TV}(u_0) \mathbf{Lip}(f - g)t,$$

où v est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t v + \operatorname{Div} g(v) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N, \\ v(0, x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

D'autre part, G.-Q. Chen & K. H. Karlsen ont considéré un flux dépendant aussi de x , et s'écrivant $f(x, u) = l(x) \lambda(u)$, pour une source contenant un opérateur parabolique éventuellement dégénéré. Dans ce cadre, la distance dans \mathbf{L}^1 entre deux solutions associées à des flux distincts est contrôlée par la distance entre les flux, cependant, des constantes apparaissent dans cette estimation qui dépendent du terme *a priori* non-borné $\operatorname{TV}(u(t))$. Dans le cas qui nous intéresse, il n'y a pas d'opérateur parabolique dans le terme source, et on remarque que dans le cas général $\operatorname{TV}(u(t))$ peut très bien exploser en temps fini. Par exemple, pour $f(x, u) = \cos x$ avec la condition initiale constante nulle, la variation totale de la solution $u(t, x) = t \sin x$ explose pour tout temps $t > 0$.

Ainsi, on est amené tout d'abord à chercher des conditions pour lesquelles une borne de la variation totale de u existe. Une fois cette borne obtenue, on peut alors estimer la dépendance de la solution par rapport au flux et à la source.

Une telle inégalité peut ensuite servir pour étudier un modèle simplifié des gaz radiatifs. En effet, Le système des gaz radiatifs a déjà été étudié dans [39, 49, 78, 79, 84, 91, 92, 123].

Il est constitué d'une loi de conservation avec un terme source non-local, consistant en un produit de convolution de l'inconnue avec un noyau connu. L'estimation de stabilité obtenue peut alors être utile pour obtenir une estimation de point fixe, et donc obtenir des résultats d'existence et d'unicité qui étendent le résultat de [49, Theorem 2.4] à des flux plus généraux.

L'estimation de dépendance par rapport au flux et à la source obtenue au chapitre 7 est de plus améliorée au chapitre 8, où les constantes apparaissant dans cette inégalité sont plus finement estimées.

Au chapitre 8, on améliore ensuite le résultat obtenu au chapitre 7, en affinant l'estimation des constantes qui interviennent.

Enfin, au chapitre 9, dans le prolongement du chapitre 7, on considère l'équation de continuité en dimension N d'espace

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho V(\rho)) = 0 \\ \rho(0, x) = \rho_0(x) \end{cases}$$

pour laquelle la loi de vitesse V est une fonctionnelle non-locale. Ce type d'équation apparaît dans de nombreux exemples tels que le modèle des chaînes de montage introduit par [4, 6], où $V(\rho) = v \left(\int_0^1 \rho(x) dx \right)$. Un autre exemple est celui du trafic piéton pour lequel la fonctionnelle de vitesse s'écrit $V(\rho) = v(\rho * \eta) \vec{v}(x)$. On adapte nos hypothèses à ces deux exemples plus particulièrement. Par conséquent, les hypothèses introduites sur l'application V , satisfaites dans le cas du trafic piéton et des chaînes de montage, ne sont a priori pas satisfaites par des fonctions classiques, mais plutôt par des fonctionnelles non-locales. Il existe par ailleurs de nombreux modèles similaires, tels qu'un modèle cinétique de trafic routier [13] ou encore le modèle de Keller–Segel [109].

La première question à se poser est alors celle du caractère bien-posé de l'équation avec flux non-local. On montre donc au chapitre 9 que pour une donnée initiale $\rho_0 \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty$, ce problème admet une unique solution faible entropique, locale en temps sur un intervalle I . On a de plus une minoration du temps d'existence. En appelant S_t le semi-groupe local obtenu associant à une condition initiale ρ_0 la solution $S_t \rho_0$ au temps t , on se demande alors s'il est possible de dériver le semi-groupe par rapport aux conditions initiales au sens de Gâteaux dans \mathbf{L}^1 . On s'attend à ce que la dérivée au sens de Gâteaux soit formellement la solution de l'équation linéarisée

$$\begin{cases} \partial_t r + \operatorname{div}(rV(\rho) + \rho DV(\rho)(r)) = 0 \\ r(0, x) = r_0(x), \end{cases}$$

où $\rho = S_t \rho_0$ est solution du système initial. Avant tout, on montre donc que, pour tout $r_0 \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty$, ce système admet une unique solution faible entropique, locale en temps, le temps d'existence de r étant le même que celui de ρ . De plus, on obtient que pour tout $t \in I$, l'application $\rho_0 \mapsto S_t \rho_0$ est Gâteaux-différentiable, la dérivée au sens de Gâteaux dans la direction $r_0 \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty$, étant bien la solution faible entropique du système linéarisé.

On souligne que les solutions obtenues pour le problème initial et le problème linéarisé sont construites dans $\mathcal{C}^0(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ et sont des solutions faibles entropiques au sens de Kruřkov. En effet, cette définition est plus exigeante que celle des solutions faibles. En outre, pour montrer l'existence de telles solutions, on utilise de façon cruciale les théorèmes

7.2.5 et 7.2.6, dont les preuves sont basées sur la définition de solution faible entropique de Kružkov. On remarque cependant que dans le cas d'une équation de transport standard, les notions de solution faible et solution faible entropique coïncident.

Rappelons qu'en général, le semi-groupe engendré par une loi de conservation n'est *pas* différentiable dans \mathbf{L}^1 , même dans le cas scalaire 1D (voir [23, Section 1]). Pour traiter ces problèmes, une structure nouvelle a été introduite dans [23], et développée dans [16, 24] (concernant des problèmes de contrôle optimal, voir aussi [25, 38]). À propos du cas scalaire 1D, d'autres résultats sont également décrits dans [19, 20, 67, 136, 137].

Le but final est d'introduire une fonctionnelle de coût $\mathcal{J} : S_t \rho_0 \in \mathcal{C}^0(I_{\text{ex}}, \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})) \rightarrow \mathcal{J}(S_t \rho_0) \in \mathbb{R}$, et d'être capable, en utilisant la Gâteaux différentiabilité du semi-groupe, de trouver une condition nécessaire sur les conditions initiales afin de la minimiser.

Chapitre 7

Dépendance par rapport au flux et à la source

Dans cet article, issu d'une collaboration avec R. M. Colombo et M. D. Rosini, publié dans *Communications in Mathematical Sciences* en 2009 [41], ainsi que dans *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* dans une version plus courte [42], on considère l'équation hyperbolique scalaire avec terme source.

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{Div} f(t, x, u) = F(t, x, u) & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

où $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$. Le but est d'estimer la dépendance des solutions de cette équation par rapport au flot f et par rapport à la source F . Pour cela, on est tout d'abord amené à donner une estimation de la variation totale en la variable d'espace de la solution. Ce résultat est ensuite utilisé pour étudier une équation hyperbolique scalaire avec un terme source non-local en espace telle que l'équation simplifiée des gaz radiatifs. Pour ce type d'équation, on obtient finalement le caractère bien-posé de l'équation ainsi que des estimations de stabilité.

Au paragraphe 7.2, on introduit les notations, on énonce les principaux résultats et on les compare avec ceux trouvés dans la littérature. Le paragraphe 7.3 donne une application du résultat de stabilité par rapport au flux et à la source pour le modèle simplifié des gaz radiatifs. Finalement, aux paragraphes 7.4 et 7.5, on donne les preuves détaillées des Théorèmes 7.2.5 et 7.2.6.

La suite est en anglais car c'est la reproduction de l'article [41].

7.1 Introduction

The Cauchy problem for a scalar balance law in N space dimensions

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{Div} f(t, x, u) = F(t, x, u) & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (7.1.1)$$

is well known to admit a unique weak entropy solution, as proved in the classical result by S. N. Kružkov [81, Theorem 5]. The same paper also provides the basic stability estimate on the dependence of solutions from the initial data, see [81, Theorem 1]. In the same setting

established in [81], we provide here an estimate on the dependence of the solutions to (7.1.1) on the flow f , on the source F , and recover the known estimate on the dependence from the initial datum u_0 . A key intermediate result is a bound on the total variation of the solution to (7.1.1), which we provide in Theorem 7.2.5.

In the case of a conservation law, i.e. where $F = 0$, and where f is a flow independent on t and x , the dependence of the solution on f was already considered in [21], where other results were also presented. In this case, the TV bound is obvious, since $\text{TV}(u(t)) \leq \text{TV}(u_0)$. The estimate provided by Theorem 7.2.5 slightly improves the analogous result in [21, Theorem 3.1] (that was already known, see [45, 96]), which reads (for a suitable absolute constant C)

$$\|u(t) - v(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq \|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} + C \text{TV}(u_0) \mathbf{Lip}(f - g) t,$$

where v is the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} \partial_t v + \text{Div}g(v) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N \\ v(0, x) = v_0(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Our result, given by Theorem 7.2.6, reduces to the inequality (7.1.1) when f and g are not dependent on t and x and $F = G = 0$, but with $C = 1$.

A flow dependent also on x was considered in [30, 75], though in the special case $f(x, u) = l(x) \lambda(u)$, but with a source term containing a possibly degenerate parabolic operator. There, estimates on the \mathbf{L}^1 distance between solutions in terms of the distance between the flows were obtained, but are dependent on an *a priori* unknown bound on $\text{TV}(u(t))$. Here, with no parabolic operators in the source term, we provide fully explicit bounds both on $\text{TV}(u(t))$ and on the distance between solutions. Indeed, we remark that with no specific assumptions on the flow, $\text{TV}(u(t))$ may well blow up to $+\infty$ at $t = 0+$, as in the simple case $f(x, u) = \cos x$ with zero initial datum.

Both the total variation and the stability estimates proved below turn out to be optimal in some simple cases, in which optimal estimates are known.

As an example of a possible application, we consider in Section 7.3 a toy model for a radiating gas. This system was already considered in [39, 49, 78, 79, 84, 91, 92, 123]. It consists of a balance law of the type (7.1.1), but with a source that contains also a non local term, due to the convolution of the unknown with a suitable kernel. Using the present results, we prove the well posedness of the model, extending [49, Theorem 2.4] to more general flows, sources, and convolution kernels. Stability and total variation estimates are also provided.

This paper is organized as follows : in Section 7.2, we introduce the notation, state the main results, and compare them with those found in the literature. Section 7.3 is devoted to an application to a radiating gas model. Finally, in sections 7.4 and 7.5 the detailed proofs of Theorems 7.2.5 and 7.2.6 are provided.

7.2 Notation and Main Results

Denote $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ and $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. Below, N is a positive integer, $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, and $B(x, r)$ denotes the ball in \mathbb{R}^N with center $x \in \mathbb{R}^N$ and radius $r > 0$. The volume of

the unit ball $B(0, 1)$ is ω_N . For notational simplicity, we set $\omega_0 = 1$. The following relation can be proved using the expression of ω_N in terms of the Wallis integral W_N :

$$\frac{\omega_N}{\omega_{N-1}} = 2 W_N \quad \text{where} \quad W_N = \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^N d\theta. \quad (7.2.1)$$

In the present work, $\mathbf{1}_A$ is the characteristic function of the set A and δ_t is the Dirac measure centered at t . Additionally, for a vector valued function $f = f(x, u)$ with $u = u(x)$, $\text{Div} f$ stands for the total divergence. On the other hand, $\text{div} f$, respectively ∇f , denotes the partial divergence, respectively gradient, with respect to the space variables. Moreover, ∂_u and ∂_t are the usual partial derivatives. Thus, $\text{Div} f = \text{div} f + \partial_u f \cdot \nabla u$.

Recall the definition of weak entropy solution to (7.1.1), see [81, Definition 1].

Definition 7.2.1. A function $u \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ is a weak entropy solution to (7.1.1) if :

1. for any constant $k \in \mathbb{R}$ and any test function $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(u - k) dt \varphi + (f(t, x, u) - f(t, x, k)) \cdot \nabla \varphi + (F(t, x, u) - \text{div} f(t, x, k)) \varphi \right] \\ \times \text{sign}(u - k) dx dt \geq 0; \quad (7.2.2)$$

2. there exists a set \mathcal{E} of zero measure in \mathbb{R}_+ such that for $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{E}$ the function $u(t, x)$ is defined almost everywhere in \mathbb{R}^N , and for any $r > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{E}} \int_{B(0, r)} |u(t, x) - u_0(x)| dx = 0. \quad (7.2.3)$$

Throughout this paper, we refer to [3, 139] as general references for the theory of **BV** functions. In particular, recall the following basic definition, see [3, Definition 3.4 and Theorem 3.6].

Definition 7.2.2. Let $u \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Define

$$\text{TV}(u) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} u \text{div} \psi dx : \psi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \text{ and } \|\psi\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} \leq 1 \right\} \\ \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) = \left\{ u \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) : \text{TV}(u) < +\infty \right\}.$$

The following sets of assumptions will be of use below.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{H1}) \quad & \left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad F \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}) \\ \partial_u f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N) \\ \partial_u(F - \operatorname{div} f) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \quad F - \operatorname{div} f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \end{array} \right. \\
(\mathbf{H2}) \quad & \left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad F \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}) \\ \nabla \partial_u f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \quad \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \operatorname{div} f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} dx dt < +\infty \\ \partial_t \partial_u f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad \partial_t F \in \mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \\ \partial_t \operatorname{div} f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \end{array} \right. \\
(\mathbf{H3}) \quad & \left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad F \in \mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{R}) \quad \partial_u F \in \mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \\ \partial_u f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \|(F - \operatorname{div} f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})} dx dt < +\infty \end{array} \right.
\end{aligned}$$

The quantity $F - \operatorname{div} f$ has a particular role, since it behaves as the “true” source, see (7.2.6). We note here that the assumptions above can be significantly softened in specific situations. For instance, the requirement that f be Lipschitz, which is however a standard hypothesis, see [21, Paragraph 3], can be relaxed to f locally Lipschitz in the case $f = f(u)$ and $F = 0$, thanks to the maximum principle [81, Theorem 3]. Furthermore, the assumptions above can be obviously weakened when aiming at estimates on bounded time intervals.

Assumptions **(H1)** are those used in the classical results [81, Theorem 1 and Theorem 5]. However, we stress that the proofs below need less regularity. As in [81], we remark that no derivative of f or F in time is ever needed. Furthermore, f needs not be twice differentiable in u , for the only second derivatives required are $\nabla_x \partial_u f$ and $\nabla_x^2 f$.

We recall below the classical result by Kružkov.

Theorem 7.2.3 (Kružkov). *Let **(H1)** hold. Then, for any $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, there exists a unique weak entropy solution u to (7.1.1) in $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ which is right continuous. Moreover, if a sequence $u_0^n \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ converges to u_0 in \mathbf{L}_{loc}^1 , then for all $t > 0$ the corresponding solutions $u^n(t)$ converge to $u(t)$ in \mathbf{L}_{loc}^1 .*

Remark 7.2.4. Under the conditions **(H2)** and $\int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \|(F - \operatorname{div} f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})} dx dt < +\infty$, see **(H3)**, the estimate provided by Theorem 7.2.5 below, allows to use the technique described in [46, Theorem 4.3.1], proving the continuity in time of the solution, so that $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$.

7.2.1 Estimate on the Total Variation

Recall that [75, Theorem 1.3] and [30, Theorem 3.2] provide stability bounds on (7.1.1), in the more general case with a degenerate parabolic source, but assuming *a priori* bounds on the total variation of solutions. Our first result provides these bounds.

Theorem 7.2.5. *Assume that **(H1)** and **(H2)** hold. Let $u_0 \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ be bounded. Then, the weak entropy solution u of (7.1.1) satisfies $u(t) \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ for all $t > 0$.*

Moreover, if

$$\kappa_0 = NW_N \left((2N + 1) \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R})} \right) \quad (7.2.4)$$

with W_N as in (7.2.1), then for all $T > 0$,

$$\mathrm{TV}(u(T)) \leq \mathrm{TV}(u_0) e^{\kappa_0 T} + NW_N \int_0^T e^{\kappa_0(T-t)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \mathrm{div} f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt. \quad (7.2.5)$$

This estimate is optimal in the following situations :

1. If f is independent from x and $F = 0$, then $\kappa_0 = 0$ and the integrand in the right hand side above vanishes. Hence, (7.2.5) reduces to the well known optimal bound $\mathrm{TV}(u(T)) \leq \mathrm{TV}(u_0)$.
2. In the 1D case, if f and F are both independent from t and u , then $\kappa_0 = 0$ and (7.1.1) reduces to the ordinary differential equation $\partial_t u = F - \mathrm{div} f$. Hence, (7.2.5) becomes

$$\mathrm{TV}(u(T)) \leq \mathrm{TV}(u_0) + T \mathrm{TV}(F - \mathrm{div} f). \quad (7.2.6)$$

3. If $f = 0$ and $F = F(t)$ then, trivially, $\mathrm{TV}(u(T)) = \mathrm{TV}(u_0)$ and (7.2.5) is optimal.

The constant NW_N is related to the choice of the norm in \mathbb{R}^N , see Lemma 7.4.1. If $N = 1$, then $NW_N = 1$ and this constant is optimal, for instance, in case 2. above. On the other hand, if $N > 1$, in the case where $f = 0$ and $F(u) = u$, we have that $\kappa_0 = NW_N > 1$ and the bound (7.2.5) reduces to $\mathrm{TV}(u(T)) \leq \mathrm{TV}(u_0) \exp(\kappa_0 T)$, whereas $\mathrm{TV}(u(T)) = \mathrm{TV}(u_0) \exp(T)$.

A simpler but slightly weaker form of (7.2.5) is

$$\mathrm{TV}(u(T)) \leq \mathrm{TV}(u_0) e^{\kappa_0 T} + NW_N \frac{e^{\kappa_0 T} - 1}{\kappa_0} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \mathrm{div} f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx$$

when the right hand side is bounded.

7.2.2 Stability of Solutions with Respect to Flow and Source

Consider now (7.1.1) together with the analogous problem

$$\begin{cases} \partial_t v + \mathrm{Div} g(t, x, v) = G(t, x, v) & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N \\ v(0, x) = v_0(x) & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (7.2.7)$$

We aim at estimates for the difference $u - v$ between the solutions in terms of $f - g$, $F - G$ and $u_0 - v_0$. Estimates of this type were derived by F. Bouchut & B. Perthame in [21] when f, g depend only on u and $F = G = 0$. Here, we generalize their result by adding the (t, x) -dependence. The present technique is essentially based on Theorem 7.2.5.

Theorem 7.2.6. *Let $(f, F), (g, G)$ satisfy **(H1)**, (f, F) satisfy **(H2)** and $(f - g, F - G)$ verify **(H3)**. Let $u_0, v_0 \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ be bounded. We denote κ_0 as in (7.2.4) and introduce*

$$\begin{aligned} \kappa &= 2N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R})} + \|\partial_u(F - G)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R})}, \\ M &= \|\partial_u g\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Then, for any $T, R > 0$ and $x_0 \in \mathbb{R}^N$, the following estimate holds :

$$\begin{aligned} & \int_{\|x-x_0\| \leq R} |u(T, x) - v(T, x)| dx \leq e^{\kappa T} \int_{\|x-x_0\| \leq R+MT} |u_0(x) - v_0(x)| dx \\ & + \frac{e^{\kappa_0 T} - e^{\kappa T}}{\kappa_0 - \kappa} \text{TV}(u_0) \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & + \text{NW}_N \left(\int_0^T \frac{e^{\kappa_0(T-t)} - e^{\kappa(T-t)}}{\kappa_0 - \kappa} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt \right) \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & + \int_0^T e^{\kappa(T-t)} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T-t)} \left\| ((F - G) - \text{div}(f - g))(t, x, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt. \end{aligned}$$

The above inequality is undefined for $\kappa = \kappa_0$ and, in this case, it reduces to (7.5.16). This bound is optimal in the following situations, where $u_0, v_0 \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$.

1. In the standard case of a conservation law, i.e. when $F = G = 0$ and f, g are independent of x , we have $\kappa_0 = \kappa = 0$ and the result of Theorem 7.2.6 becomes, see [17, Theorem 2.1],

$$\|u(T) - v(T)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq \|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} + T \text{TV}(u_0) \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)}.$$

2. If $\partial_u f = \partial_u g = 0$ and $\partial_u F = \partial_u G = 0$, then $\kappa_0 = \kappa = 0$ and Theorem 7.2.6 now reads

$$\|u(T) - v(T)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq \|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} + \int_0^T \left\| [(F - G) - \text{div}(f - g)](t) \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} dt.$$

3. If (f, F) and (g, G) are dependent only on x , then Theorem 7.2.6 reduces to

$$\|u(T) - v(T)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq \|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} + T \|(F - G) - \text{div}(f - g)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}.$$

The estimate obtained in Theorem 7.2.6 shows also that, depending on the properties of specific applications, the regularity requirement $f \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ can be significantly relaxed. For instance, in the case $f(t, x, u) = l(x)g(u)$ considered in [30, 75], requiring g to be of class \mathcal{C}^1 and l to be of class \mathcal{C}^2 is sufficient. See also Section 7.3 for a case in which the required regularity in time can be reduced.

In the case of conservation laws, i.e. when $F = G = 0$, one proves that $\kappa < \kappa_0$ and the estimate in Theorem 7.2.6 takes the somewhat simpler form

$$\begin{aligned} & \int_{\|x-x_0\| \leq R} |u(T, x) - v(T, x)| dx \leq e^{\kappa_0 T} \int_{\|x-x_0\| \leq R+MT} |u_0(x) - v_0(x)| dx \\ & + T e^{\kappa_0 T} \text{TV}(u_0) \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & + \text{NW}_N T^2 e^{\kappa_0 T} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla \text{div } f(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx \right) \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & + T e^{\kappa_0 T} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T-t)} \|\text{div}(f - g)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx \end{aligned}$$

when the right hand side is bounded. In the case considered in [21, Theorem 3.1], $f = f(u)$, $\kappa_0 = 0$ and we obtain [21, formula (3.2)] with 1 instead of the constant C therein.

7.3 Application to a Radiating Gas Model

The following balance law is a toy model inspired by the Euler equations for radiating gases :

$$\partial_t u + \operatorname{Div} f(t, x, u) = -u + K *_x u. \quad (7.3.1)$$

This has been extensively studied in the literature when $f = f(u)$, see for instance [78, 79, 84, 92, 123] for the scalar 1D case, [39, 91] for 1D systems, and [49] for the scalar N dimensional case.

The estimate provided by Theorem 7.2.6 allows us to present an alternative proof of the well posedness of (7.3.1) proved in [49]. Furthermore, we add stability estimates on the dependence of the solution from f and K , in the case where f is also dependent on t, x and with more general source terms.

Theorem 7.3.1. *Let (f, F) satisfy **(H1)**, **(H2)** and **(H3)**. Assume that*

$$\mathbf{(K)} \quad K \in (\mathcal{C}^2 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \quad \text{and} \quad K \in \mathbf{L}^\infty \left(\mathbb{R}_+^*; \mathbf{W}^{2,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \right).$$

Then, for any $u_0 \in (\mathbf{BV} \cap \mathbf{L}^1)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, the Cauchy problem

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{Div} f(t, x, u) = F(t, x, u) + K *_x u & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (7.3.2)$$

admits a unique weak entropy solution $u \in \mathcal{C}^0 \left(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \right)$. Moreover, denoting $k = \|K\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+^; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))}$, for all $T > 0$, the following estimate holds :*

$$\begin{aligned} \operatorname{TV}(u(T)) &\leq e^{(\kappa_0 + NW_N k)T} \operatorname{TV}(u_0) \\ &\quad + NW_N \int_0^T e^{(\kappa_0 + NW_N k)(T-t)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \operatorname{div} f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt. \end{aligned}$$

If $F(t, x, 0) - \operatorname{div} f(t, x, 0) = 0$ for all $t \in [0, T]$ and $x \in \mathbb{R}^N$, then

1. $\|u(T)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq e^{(\kappa + k)T} \|u_0\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}$.
2. Let \tilde{K} satisfy **(K)** and call \tilde{u} the solution to (7.3.2) with K replaced by \tilde{K} . Then,

$$\|u(T) - \tilde{u}(T)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \frac{e^{kT} - e^{\tilde{k}T}}{k - \tilde{k}} \|K - \tilde{K}\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))}. \quad (7.3.3)$$

Proof. Fix a positive T (to be specified below) and consider the Banach space $X = \mathcal{C}^0 \left([0, T]; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \right)$ equipped with the usual norm $\|u\|_X = \|u\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T]; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))}$. Define on X the map \mathcal{T} so that $\mathcal{T}(w) = u$ if and only if u solves

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{Div} f(t, x, u) = F(t, x, u) + K *_x w & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (7.3.4)$$

in the sense of Definition 7.2.1. Note that the source term does not have the regularity required in **(H1)**. However, by the estimate in Theorem 7.2.6, we can prove that (7.3.4)

does indeed have a unique weak entropy solution, see Lemma 7.3.2 for the details. The fixed points of \mathcal{T} are the solutions to (7.3.1). By Theorem 7.2.3 and Remark 7.2.4, $\mathcal{T}w \in X$ for all $w \in X$. We now show that \mathcal{T} is a contraction, provided T is sufficiently small. Note that

$$\begin{aligned}\kappa_0 &= NW_N \left((2N+1) \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty} \right) \\ \kappa &= 2N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty}.\end{aligned}$$

Moreover, by Theorem 7.2.6

$$\begin{aligned}d(\mathcal{T}w_1, \mathcal{T}w_2) &= \sup_{t \in [0, T]} \|\mathcal{T}w_1 - \mathcal{T}w_2\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left(\frac{e^{\kappa t} - 1}{\kappa} \sup_{\tau \in [0, t]} \|K(\tau) *_x (w_1 - w_2)(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \right) \\ &\leq \frac{e^{\kappa T} - 1}{\kappa} \sup_{\tau \in [0, T]} \|K(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \|(w_1 - w_2)(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq \frac{e^{\kappa T} - 1}{\kappa} k d(w_1, w_2).\end{aligned}$$

Therefore, \mathcal{T} is a contraction as soon as T is smaller than a threshold that depends only on $\|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R})}$, $\|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})}$ and on $\|K\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))}$. Therefore, we proved the well posedness of (7.3.2) globally in time.

Consider the bound on TV ($u(t)$). By Theorem 7.2.5,

$$\begin{aligned}\text{TV}(u(T)) &\leq \text{TV}(u_0) + NW_N \int_0^T e^{\kappa_0(T-t)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)} dx dt \\ &\quad + NW_N \int_0^T e^{\kappa_0(T-t)} k \text{TV}(u(t)) dt\end{aligned}$$

and an application of Gronwall Lemma gives the desired bound.

We estimate the \mathbf{L}^1 norm of the solution to (7.3.2), comparing it with the solution to

$$\begin{cases} \partial_t u + \text{Div } f(t, x, u) = F(t, x, u) + K *_x u & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = 0 & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (7.3.5)$$

By assumption, the function $u(t, x) \equiv 0$ solves the Cauchy problem (7.3.5), hence it is its unique solution. Then, evaluating the distance between the solutions of (7.3.2) and (7.3.5) by means of Theorem 7.2.6, we obtain

$$e^{-\kappa T} \|u(T)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} + \int_0^T e^{-\kappa t} \int_{\mathbb{R}^N} |K *_x u(t, x)| dx dt$$

and, using the Gronwall Lemma, we obtain

$$\|u(T)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq e^{(\kappa+k)T} \|u_0\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}.$$

The final estimate (7.3.3) follows from Theorem 7.2.6 :

$$\begin{aligned}& e^{-\kappa T} \|(u - \tilde{u})(T)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \\ & \leq \left\| K - \tilde{K} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))} \int_0^T e^{-\kappa t} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} dt + k \int_0^T e^{-\kappa t} \|(u - \tilde{u})(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} dt \\ & \leq \left\| K - \tilde{K} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))} \|u_0\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \frac{e^{\kappa T} - 1}{k} + \tilde{k} \int_0^T e^{-\kappa t} \|(u - \tilde{u})(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} dt\end{aligned}$$

and using the Gronwall Lemma, we get the result.

The continuity in time is proved as described in Remark 7.2.4. \square

Lemma 7.3.2. *Let f, F satisfy (H1) and K satisfy (K). If $w \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, then the estimates in Theorem 7.2.5 and in Theorem 7.2.6 apply also to (7.3.4).*

Proof. Fix positive T, R and let w_n be a sequence of \mathcal{C}^∞ functions converging to w in $\mathbf{L}^1([0, T] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Apply Theorem 7.2.3 to the approximate problem

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{Div} f(t, x, u) = F(t, x, u) + K *_{x} w_n & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (7.3.6)$$

to ensure the existence of its weak entropy solution u_n . Apply Theorem 7.2.6 to estimate the distance between u_n and u_{n-1} :

$$\begin{aligned} \|u_n - u_{n-1}\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T]; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))} &\leq \int_0^T e^{\kappa(T-t)} \int_{\mathbb{R}^N} |K * (w_n - w_{n-1})(t, x)| \, dx \, dt \\ &\leq e^{\kappa T} k \|w_n - w_{n-1}\|_{\mathbf{L}^1([0, T] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \end{aligned}$$

showing that the u_n form a Cauchy sequence. Their limit u solves (7.3.2), as it follows passing to the limit over n in the integral conditions (7.2.2)–(7.2.3) and applying the Dominated Convergence Theorem. The estimates in Theorems 7.2.5 and 7.2.6 are extended similarly. \square

7.4 Proof of Theorem 7.2.5

Lemma 7.4.1. *Fix a function $\mu_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ with*

$$\operatorname{Supp}(\mu_1) \subseteq [0, 1[, \quad \int_{\mathbb{R}_+^*} r^{N-1} \mu_1(r) \, dr = \frac{1}{N\omega_N}, \quad \mu_1' \leq 0, \quad \mu_1^{(n)}(0) = 0 \text{ for } n \geq 1. \quad (7.4.1)$$

Define

$$\mu(x) = \frac{1}{\lambda^N} \mu_1\left(\frac{\|x\|}{\lambda}\right). \quad (7.4.2)$$

Then, recalling that $\omega_0 = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mu(x) \, dx = 1, \quad (7.4.3)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x_1| \mu_1(\|x\|) \, dx = \frac{2}{N} \frac{\omega_{N-1}}{\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \|x\| \mu_1(\|x\|) \, dx, \quad (7.4.4)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|x\| \|\nabla \mu(x)\| \, dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \|x\| \mu_1'(\|x\|) \, dx = N, \quad (7.4.5)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|x\|^2 \mu_1'(\|x\|) \, dx = -(N+1) \int_{\mathbb{R}^N} \|x\| \mu_1(\|x\|) \, dx. \quad (7.4.6)$$

Proof. The first relation is immediate. Equalities (7.4.5) and (7.4.6) follow directly from an integration by parts. Consider (7.4.4). The cases $N = 1, 2, 3$ follow from direct computations. Let $N \geq 4$ and pass to spherical coordinates $(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{N-1})$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \theta_{N-1} \\ x_2 &= \rho \sin \theta_{N-1} \cos \theta_{N-2} \\ &\vdots \\ x_{N-1} &= \rho \sin \theta_{N-1} \sin \theta_{N-2} \cdots \cos \theta_1 \\ x_N &= \rho \sin \theta_{N-1} \sin \theta_{N-2} \cdots \sin \theta_1 \end{aligned}$$

with $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta_1 \in [0, 2\pi[$ and $\theta_j \in [0, \pi]$ for $j = 2, \dots, N-1$. If $N \geq 4$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |x_1| \mu_1(\|x\|) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi |\cos \theta_{N-1}| \rho^N \mu_1(\rho) \left(\prod_{j=2}^{N-1} (\sin \theta_j)^{j-1} \right) d\theta_{N-1} d\theta_{N-2} \cdots d\theta_1 d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \left(\prod_{j=2}^{N-2} (\sin \theta_j)^{j-1} \right) d\theta_{N-2} \cdots d\theta_1 \\ &\quad \times \left(\int_0^\pi |\cos \theta_{N-1}| (\sin \theta_{N-1})^{N-2} d\theta_{N-1} \right) \int_{\mathbb{R}_+^*} \rho^N \mu_1(\rho) d\rho \\ &= (N-1) \omega_{N-1} \frac{2}{N-1} \frac{1}{N \omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \|x\| \mu_1(\|x\|) \, dx \\ &= \frac{2}{N} \frac{\omega_{N-1}}{\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \|x\| \mu_1(\|x\|) \, dx \end{aligned}$$

completing the proof. \square

Recall the following theorem (see [3, Theorem 3.9 and Remark 3.10]) :

Theorem 7.4.2. *Let $u \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Then $u \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ if and only if there exists a sequence (u_n) in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ converging to u in \mathbf{L}_{loc}^1 and satisfying*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u_n(x)\| \, dx = L \quad \text{with} \quad L < \infty.$$

Moreover, $\text{TV}(u)$ is the smallest constant L for which there exists a sequence as above.

Proposition 7.4.3. *Fix μ_1 as in (7.4.1). Let $u \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ admit a constant \tilde{C} such that for all positive λ, R and with μ as in (7.4.2)*

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R)} |u(x) - u(x-z)| \mu(z) \, dx \, dz \leq \tilde{C}. \quad (7.4.7)$$

Then $u \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ and $\text{TV}(u) \leq \tilde{C}/C_1$, where

$$C_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |x_1| \mu_1(\|x\|) \, dx. \quad (7.4.8)$$

Note that $C_1 \in]0, 1[$. If moreover $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, then

$$\mathrm{TV}(u) = \frac{1}{C_1} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x) - u(x-z)| \mu(z) \, dx \, dz. \quad (7.4.9)$$

Proof. We introduce now a regularisation of $u : u_h = u * \mu_h$, with $\mu_h(x) = \mu_1(\|x\|/h) / h^N$. Note that $u_h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ and u_h converges to u in \mathbf{L}_{loc}^1 as $h \rightarrow 0$. Furthermore, for R and h positive, we have

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R)} |u_h(x) - u_h(x-z)| \mu(z) \, dx \, dz \\ & \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R+h)} |u(x) - u(x-z)| \mu(z) \, dx \, dz \\ & \leq \tilde{C} \end{aligned}$$

and

$$\frac{u_h(x) - u_h(x-\lambda z)}{\lambda} = \int_0^1 \nabla u_h(x - \lambda s z) \cdot z \, ds.$$

Using the Dominated Convergence Theorem, at the limit $\lambda \rightarrow 0$ we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R)} |\nabla u_h(x) \cdot z| \mu_1(\|z\|) \, dx \, dz \leq \tilde{C}.$$

We remark that for fixed $x \in B(x_0, R)$, when $\nabla u_h(x) \neq 0$, the scalar product $\nabla u_h(x) \cdot z$ is positive (respectively, negative) when z is in a half-space, say H_x^+ (respectively, H_x^-). We can write $z = \alpha \frac{\nabla u_h(x)}{\|\nabla u_h(x)\|} + w$, with $\alpha \in \mathbb{R}$ and w in the hyperplane $H_x^o = \nabla u_h(x)^\perp$. Hence

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_h(x) \cdot z| \mu_1(\|z\|) \, dz &= \int_{H_x^+} \nabla u_h(x) \cdot z \mu_1(\|z\|) \, dz + \int_{H_x^-} \nabla u_h(x) \cdot (-z) \mu_1(\|z\|) \, dz \\ &= 2 \int_{H_x^+} \nabla u_h(x) \cdot z \mu_1(\|z\|) \, dz \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{H_x^o} \alpha \|\nabla u_h(x)\| \mu_1(\sqrt{\alpha^2 + \|w\|^2}) \, dw \, d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{H_x^o} |\alpha| \|\nabla u_h(x)\| \mu_1(\sqrt{\alpha^2 + \|w\|^2}) \, dw \, d\alpha \\ &= \|\nabla u_h(x)\| \int_{\mathbb{R}^N} |z_1| \mu_1(\|z\|) \, dz. \end{aligned}$$

Define C_1 as in (7.4.8) and note that $C_1 \in]0, 1[$. Then we obtain, for all $R > 0$,

$$\int_{B(x_0, R)} \|\nabla u_h(x)\| \, dx \leq \frac{\tilde{C}}{C_1}. \quad (7.4.10)$$

Finally, when $R \rightarrow \infty$ we get $\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u_h(x)\| \, dx \leq \tilde{C}/C_1$ and in the limit $h \rightarrow 0$, by Theorem 7.4.2 we also have that $\mathrm{TV}(u) \leq \tilde{C}/C_1$, concluding the proof of the first statement.

Assume now that $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Then, using the same computations as above,

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x) - u(x - z)| \mu(z) dx dz \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_0^1 \nabla u(x - \lambda s z) \cdot z ds \right| \mu_1(\|z\|) dx dz \\ &= C_1 \text{TV}(u), \end{aligned}$$

completing the proof. \square

In the following proof, this property of any function $u \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ will be of use :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x) - u(x - z)| dx \leq \|z\| \text{TV}(u) \quad \text{for all } z \in \mathbb{R}^N. \quad (7.4.11)$$

For a proof, see [3, Remark 3.25].

Proof of Theorem 7.2.5. First, we assume that $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. The general case will be considered only at the end of this proof.

Let u be the weak entropy solution to (7.1.1). Let $u = u(t, x)$ and $v = u(s, y)$ for $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N$. Then, for all $k, l \in \mathbb{R}$ and for all test functions $\varphi = \varphi(t, x, s, y)$ in $\mathcal{C}_c^1((\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N)^2; \mathbb{R}_+)$, we have

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(u - k) dt \varphi + (f(t, x, u) - f(t, x, k)) \nabla_x \varphi + (F(t, x, u) - \text{div} f(t, x, k)) \varphi \right] \\ & \qquad \qquad \qquad \times \text{sign}(u - k) dx dt \geq 0 \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

for all $(s, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N$, and

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(v - l) \partial_s \varphi + (f(s, y, v) - f(s, y, l)) \nabla_y \varphi + (F(s, y, v) - \text{div} f(s, y, l)) \varphi \right] \\ & \qquad \qquad \qquad \times \text{sign}(v - l) dy ds \geq 0 \end{aligned} \quad (7.4.13)$$

for all $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N$. Let $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$, $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$ and set

$$\varphi(t, x, s, y) = \Phi(t, x) \Psi(t - s, x - y). \quad (7.4.14)$$

Observe that $dt \varphi + \partial_s \varphi = \Psi dt \Phi$, $\nabla_x \varphi = \Psi \nabla_x \Phi + \Phi \nabla_x \Psi$, $\nabla_y \varphi = -\Phi \nabla_x \Psi$. Choose $k = v(s, y)$ in (7.4.12) and integrate with respect to (s, y) . Analogously, take $l = u(t, x)$ in (7.4.13) and integrate with respect to (t, x) . Summing the obtained inequalities, we obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \text{sign}(u - v) \left[(u - v) \Psi dt \Phi + (f(t, x, u) - f(t, x, v)) \cdot (\nabla \Phi) \Psi \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + (f(s, y, v) - f(s, y, u) - f(t, x, v) + f(t, x, u)) \cdot (\nabla \Psi) \Phi \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + (F(t, x, u) - F(s, y, v) + \text{div} f(s, y, u) - \text{div} f(t, x, v)) \varphi \right] dx dt dy ds \geq 0. \end{aligned} \quad (7.4.15)$$

Introduce a family of functions $\{Y_\vartheta\}_{\vartheta > 0}$ such that for any $\vartheta > 0$:

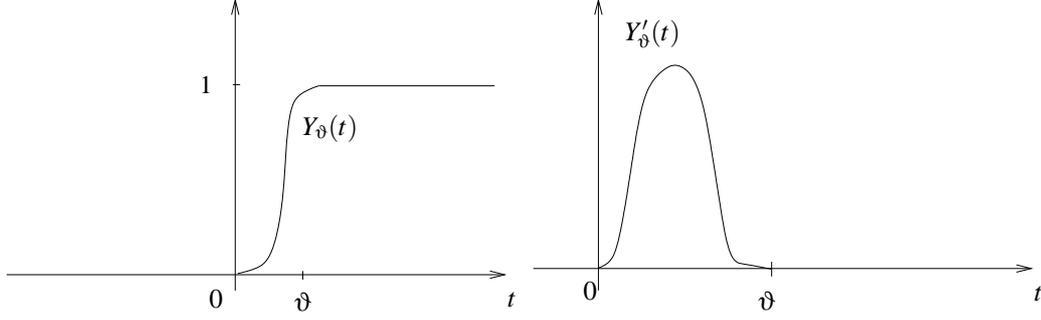


FIGURE 7.1 – Graphs of Y_θ , left, and of Y'_θ , right.

$$Y_\theta(t) = \int_{-\infty}^t Y'_\theta(s) ds, \quad Y'_\theta(t) = \frac{1}{\theta} Y' \left(\frac{t}{\theta} \right), \quad Y' \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \quad (7.4.16)$$

$$\text{Supp}(Y') \subset]0, 1[, \quad Y' \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} Y'(s) ds = 1.$$

Let $M = \|\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)}$ and define for $\varepsilon, \theta, T_0, R > 0, x_0 \in \mathbb{R}^N$, (see Figure 7.2) :

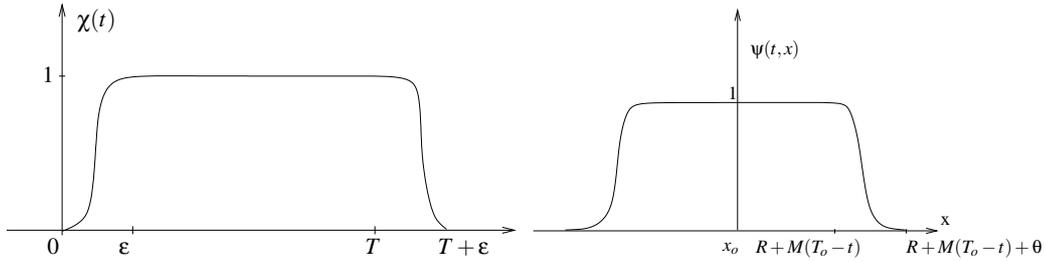


FIGURE 7.2 – Graphs of χ , left, and of ψ , right. Here $a = R + M(T_0 - t)$ and $b = R + M(T_0 - t) + \theta$.

$$\chi(t) = Y_\varepsilon(t) - Y_\varepsilon(t - T) \quad \text{and} \quad \psi(t, x) = 1 - Y_\theta(\|x - x_0\| - R - M(T_0 - t)) \geq 0, \quad (7.4.17)$$

where we also need the compatibility conditions $T_0 \geq T$ and $M\varepsilon \leq R + M(T_0 - T)$. Observe that $\chi \rightarrow \mathbf{1}_{[0, T]}$ and $\chi' \rightarrow \delta_0 - \delta_T$ as ε tends to 0. On χ and ψ we use the bounds

$$\chi \leq \mathbf{1}_{[0, T+\varepsilon]} \quad \text{and} \quad \mathbf{1}_{B(x_0, R+M(T_0-t))} \leq \psi \leq \mathbf{1}_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)}.$$

In (7.4.15), choose $\Phi(t, x) = \chi(t) \psi(t, x)$. With this choice, we have

$$dt \Phi = \chi' \psi - M \chi Y'_\theta \quad \text{and} \quad \nabla \Phi = -\chi Y'_\theta \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}. \quad (7.4.18)$$

Setting $B(t, x, u, v) = |u - v|M + \text{sign}(u - v) (f(t, x, u) - f(t, x, v)) \cdot \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$, the first line

in (7.4.15) becomes

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(u-v)\Psi \, dt \, \Phi + (f(t,x,u) - f(t,x,v)) (\nabla\Phi) \Psi \right] \text{sign}(u-v) \, dx \, dt \, dy \, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} (|u-v| \chi' \psi - B(t,x,u,v) \chi Y'_\theta) \Psi \, dx \, dt \, dy \, ds \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u-v| \chi' \psi \Psi \, dx \, dt \, dy \, ds,
\end{aligned}$$

since $B(t,x,u,v)$ is positive for all $(t,x,u,v) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Due to the above estimate and to (7.4.15), we have

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(u-v) \chi' \psi \Psi \right. \\
& \quad \left. + (f(s,y,v) - f(s,y,u) - f(t,x,v) + f(t,x,u)) \cdot (\nabla\Psi) \Phi \right. \\
& \quad \left. + (F(t,x,u) - F(s,y,v) - \text{div} f(t,x,v) + \text{div} f(s,y,u)) \varphi \right] \\
& \quad \times \text{sign}(u-v) \, dx \, dt \, dy \, ds \geq 0.
\end{aligned}$$

Now, we aim at bounds for each term of this sum. We introduce the following notation :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u-v| \chi' \psi \Psi \, dx \, dt \, dy \, ds, \\
J_x &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} (f(t,y,v) - f(t,y,u) + f(t,x,u) - f(t,x,v)) (\nabla\Psi) \Phi \\
& \quad \times \text{sign}(u-v) \, dx \, dt \, dy \, ds, \\
J_t &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} (f(s,y,v) - f(s,y,u) + f(t,y,u) - f(t,y,v)) (\nabla\Psi) \Phi \\
& \quad \times \text{sign}(u-v) \, dx \, dt \, dy \, ds, \\
L_x &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} (F(t,x,u) - F(t,y,v) - \text{div} f(t,x,v) + \text{div} f(t,y,u)) \varphi \\
& \quad \times \text{sign}(u-v) \, dx \, dt \, dy \, ds, \\
L_t &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} (F(t,y,v) - F(s,y,v) - \text{div} f(t,y,u) + \text{div} f(s,y,u)) \varphi \\
& \quad \times \text{sign}(u-v) \, dx \, dt \, dy \, ds.
\end{aligned}$$

Then the above inequality is rewritten as $I+J_x+J_t+L_x+L_t \geq 0$. Choose $\Psi(t,x) = \nu(t) \mu(x)$ where, for $\eta, \lambda > 0$, $\mu \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ satisfies (7.4.1)–(7.4.2) and

$$\nu(t) = \frac{1}{\eta} \nu_1 \left(\frac{t}{\eta} \right), \quad \int_{\mathbb{R}} \nu_1(s) \, ds = 1, \quad \nu_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+), \quad \text{Supp}(\nu_1) \subset]-1, 0[. \quad (7.4.19)$$

We have

$$\begin{aligned}
I &\leq I_1 + I_2 \quad \text{where} \\
I_1 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x) - u(t,y)| (Y'_\varepsilon(t) - Y'_\varepsilon(t-T)) \psi \Psi \, dx \, dt \, dy \, ds, \\
I_2 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t,y) - u(s,y)| (Y'_\varepsilon(t) + Y'_\varepsilon(t-T)) \psi \Psi \, dx \, dt \, dy \, ds
\end{aligned}$$

and we get

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x-x_0\| \leq R+MT_0+\theta} |u(0, x) - u(0, y)| \mu(x-y) dx dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-T)} |u(T, x) - u(T, y)| \mu(x-y) dx dy, \\ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 &\leq 2 \sup_{\substack{t \in \{0, T\}, \\ s \in]t, t+\eta[}} \int_{\|y-x_0\| \leq R+\lambda+M(T_0-t)+\theta} |u(t, y) - u(s, y)| dy. \end{aligned}$$

For J_x , we have that by **(H1)**, $f \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ and therefore

$$\begin{aligned} &\|f(t, y, v) - f(t, y, u) + f(t, x, u) - f(t, x, v)\| = \\ &= \left\| \int_u^v \int_0^1 \nabla \partial_u f(t, x(1-r) + ry, w) \cdot (y-x) dr dw \right\| \\ &\leq \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} \|x-y\| |u(s, y) - u(t, x)|. \end{aligned}$$

Then, using (7.4.5)

$$\begin{aligned} J_x &\leq \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \|x-y\| |u(t, x) - u(s, y)| \|\nabla \Psi\| \chi \psi dx dt dy ds \\ &\leq \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \|x-y\| [|u(t, y) - u(s, y)| + |u(t, x) - u(t, y)|] \\ &\quad \times \|\nabla \Psi\| \chi \psi dx dt dy ds \\ &\leq N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} (T+\varepsilon) \sup_{\substack{t \in [0, T+\varepsilon], \\ s \in]t, t+\eta[}} \int_{\|y-x_0\| \leq R+\lambda+M(T_0-t)+\theta} |u(t, y) - u(s, y)| dy \\ &\quad + \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^{T+\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)} \|x-y\| |u(t, x) - u(t, y)| \|\nabla \mu\| dx dy dt, \\ J_t &\leq \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left\| \int_s^t \int_v^u \partial_t \partial_u f(\tau, y, w) dw d\tau \right\| \|\nabla \Psi\| \Phi dx dt dy ds \\ &\leq \eta \|\partial_t \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t, x) - u(s, y)| \|\nabla \Psi\| \Phi dx dt dy ds. \end{aligned}$$

For L_x , we get

$$\begin{aligned} L_x &= L_1 + L_2 \quad \text{where} \\ L_1 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_v^u (\partial_u \operatorname{div} f(t, x, w) + \partial_u F(t, y, w)) dw \right] \varphi \operatorname{sign}(u-v) dx dt dy ds, \\ L_2 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_0^1 \nabla (F - \operatorname{div} f)(t, rx + (1-r)y, u) \cdot (x-y) dr \right] \varphi \\ &\quad \times \operatorname{sign}(u-v) dx dt dy ds. \end{aligned} \tag{7.4.20}$$

Then, recalling (7.4.14), the definitions $\Psi = \nu \mu$, $\Phi = \chi \psi$, (7.4.1), (7.4.19) and (7.4.17), we

obtain

$$\begin{aligned}
L_1 &\leq (N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty}) \\
&\quad \times \left[(T + \varepsilon) \sup_{\substack{t \in [0, T + \varepsilon], \\ s \in [t, t + \eta]}} \int_{\|y - x_0\| \leq R + \lambda + M(T_0 - t) + \theta} |u(t, y) - u(s, y)| \, dy \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{T + \varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x - x_0\| \leq R + M(T_0 - t) + \theta} |u(t, x) - u(t, y)| \mu(x - y) \, dx \, dy \, dt \right], \\
L_2 &\leq \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 \left\| \nabla (F - \operatorname{div} f)(t, y + r(x - y), u) \right\| \|x - y\| \chi \psi \mu \nu \, dr \, dx \, dt \, dy \, ds \\
&\leq \left(\int_0^{T + \varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} \left\| \nabla (F - \operatorname{div} f)(t, y, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \, dy \, dt \right) \int_{\mathbb{R}^N} \|x\| \mu(x) \, dx \\
&= \lambda M_1 \int_0^{T + \varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} \left\| \nabla (F - \operatorname{div} f)(t, y, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \, dy \, dt
\end{aligned}$$

where

$$M_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \|x\| \mu_1(\|x\|) \, dx. \quad (7.4.21)$$

For the final term L_t ,

$$L_t \leq \eta \omega_N (R + MT_0)^N (T + \varepsilon) (\|\partial_t \operatorname{div} f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_t F\|_{\mathbf{L}^\infty}).$$

Letting $\varepsilon, \eta, \theta \rightarrow 0$ we obtain

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon, \eta, \theta \rightarrow 0} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x - x_0\| \leq R + MT_0} |u(0, x) - u(0, y)| \mu(x - y) \, dx \, dy \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x - x_0\| \leq R + M(T_0 - T)} |u(T, x) - u(T, y)| \mu(x - y) \, dx \, dy, \\
\limsup_{\varepsilon, \eta, \theta \rightarrow 0} I_2 &= 0, \\
\limsup_{\varepsilon, \eta, \theta \rightarrow 0} J_x &\leq \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R + M(T_0 - t))} \|x - y\| |u(t, x) - u(t, y)| \\
&\quad \times \|\nabla \mu(x - y)\| \, dx \, dy \, dt, \\
\limsup_{\varepsilon, \eta, \theta \rightarrow 0} J_t &= 0, \\
\limsup_{\varepsilon, \eta, \theta \rightarrow 0} L_1 &\leq (N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty}) \\
&\quad \times \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x - x_0\| \leq R + M(T_0 - t)} |u(t, x) - u(t, y)| \mu(x - y) \, dx \, dy \, dt, \\
\limsup_{\varepsilon, \eta, \theta \rightarrow 0} L_2 &\leq \lambda M_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left\| \nabla (F - \operatorname{div} f)(t, y, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \, dy \, dt, \\
\limsup_{\varepsilon, \eta, \theta \rightarrow 0} L_t &= 0.
\end{aligned}$$

Collating all the obtained results and using the equality, $\|\nabla\mu(x)\| = -\frac{1}{\lambda^{N+1}}\mu'_1\left(\frac{\|x\|}{\lambda}\right)$

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x-x_0\|\leq R+M(T_0-T)} |u(T,x) - u(T,y)| \frac{1}{\lambda^N} \mu_1\left(\frac{\|x-y\|}{\lambda}\right) dx dy \\
\leq & \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x-x_0\|\leq R+M(T_0-T)} |u(0,x) - u(0,y)| \frac{1}{\lambda^N} \mu_1\left(\frac{\|x-y\|}{\lambda}\right) dx dy \\
& - \|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x-x_0\|\leq R+M(T_0-t)} |u(t,x) - u(t,y)| \\
& \quad \times \frac{1}{\lambda^{N+1}} \mu'_1\left(\frac{\|x-y\|}{\lambda}\right) \|x-y\| dx dy dt \\
& + (N\|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty}) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x-x_0\|\leq R+M(T_0-t)} |u(t,x) - u(t,y)| \\
& \quad \times \frac{1}{\lambda^N} \mu_1\left(\frac{\|x-y\|}{\lambda}\right) dx dy dt \\
& + \lambda M_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \operatorname{div} f)(t, y, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dy dt.
\end{aligned} \tag{7.4.22}$$

If $\|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} = \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty} = 0$ and under the present assumption that $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, using Proposition 7.4.3, (7.4.8) and (7.4.21), we directly obtain that

$$\operatorname{TV}(u(T)) \leq \operatorname{TV}(u_0) + \frac{M_1}{C_1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \operatorname{div} f)(t, y, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dy dt. \tag{7.4.23}$$

The same procedure at the end of this proof allows to extend (7.4.23) to more general initial data, providing an estimate of $\operatorname{TV}(u(t))$ in the situation studied in [21].

Now, it remains to treat the case when $\|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \neq 0$. A direct use of Gronwall type inequalities is apparently impossible, due to the term with $\nabla\mu$. However, we introduce the function

$$\mathcal{F}(T, \lambda) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x-x_0\|\leq R+M(T_0-t)} |u(t,x) - u(t,x-z)| \frac{1}{\lambda^N} \mu_1\left(\frac{\|z\|}{\lambda}\right) dx dz dt$$

so that

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda \mathcal{F} &= -\frac{N}{\lambda} \mathcal{F} \\
&\quad - \frac{1}{\lambda} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x-x_0\|\leq R+M(T_0-t)} |u(t,x) - u(t,x-z)| \frac{\mu'_1(\|z\|/\lambda)}{\lambda^{N+1}} \|z\| dx dz dt.
\end{aligned}$$

Denote $C(T) = M_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \operatorname{div} f)(t, y, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dy dt$ and integrate (7.4.22) on $[0, T']$ with respect to T for $T' \leq T_0$. This results in

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} \mathcal{F}(T', \lambda) &\leq \frac{T'}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x-x_0\|\leq R+MT_0} |u(0,x) - u(0,y)| \mu(x-y) dx dy \\
&\quad + T' \|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \partial_\lambda \mathcal{F}(T', \lambda) + \frac{T'}{\lambda} (2N\|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty}) \mathcal{F}(T', \lambda) \\
&\quad + T' C(T').
\end{aligned}$$

Denote $\alpha = \left(2N\|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty} - \frac{1}{T'}\right) (\|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty})^{-1}$, so that $\lim_{T' \rightarrow 0} \alpha = -\infty$. The previous inequality reads as, using (7.4.11) for u_0 ,

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \mathcal{F}(T', \lambda) + \alpha \frac{\mathcal{F}(T', \lambda)}{\lambda} &\geq - (M_1 \text{TV}(u_0) + C(T')) \frac{1}{\|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty}}, \\ \partial_\lambda (\lambda^\alpha \mathcal{F}(T', \lambda)) &\geq -\lambda^\alpha (M_1 \text{TV}(u_0) + C(T')) \frac{1}{\|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty}}. \end{aligned}$$

Finally, if T' is such that $\alpha < -1$, then we integrate in λ on $[\lambda, +\infty[$ and we obtain

$$\frac{1}{\lambda} \mathcal{F}(T', \lambda) \leq \frac{1}{-\alpha - 1} (M_1 \text{TV}(u_0) + C(T')) \frac{1}{\|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty}}. \quad (7.4.24)$$

Furthermore, by (7.4.1) and (7.4.2) there exists a constant $K > 0$ such that for all $z \in \mathbb{R}^N$

$$-\mu'_1(\|z\|) \leq K\mu_1\left(\frac{\|z\|}{2}\right). \quad (7.4.25)$$

Divide both sides in (7.4.22) by λ , rewrite them using (7.4.24), (7.4.25), apply (7.4.11) and obtain

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-T)} |u(T, x) - u(T, y)| \frac{1}{\lambda^N} \mu_1\left(\frac{\|x-y\|}{\lambda}\right) dx dy \\ &\leq M_1 \text{TV}(u_0) + \frac{\mathcal{F}(T, 2\lambda)}{2\lambda} 2^{N+2} K \|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \frac{\mathcal{F}(T, \lambda)}{\lambda} (2N\|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty}) \\ &\quad + M_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(t, y, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dy dt. \end{aligned}$$

An application of (7.4.24) yields an estimate of the type

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R+M(T_0-T))} |u(T, x) - u(T, x-z)| \mu(z) dx dz \leq \check{C}, \quad (7.4.26)$$

where the positive constant \check{C} is independent from R and λ . Applying Proposition 7.4.3 we obtain that $u(t) \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ for $t \in [0, 2T_1[$, where

$$T_1 = \frac{1}{2((1+2N)\|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty})}. \quad (7.4.27)$$

The next step is to obtain a general estimate of the TV norm. The starting point is (7.4.22). Recall the definitions (7.4.21) of M_1 and (7.4.27) of T_1 . Moreover, by (7.4.6),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|z\|^2 \mu'_1(\|z\|) dz = -(N+1)M_1.$$

Divide both terms in (7.4.22) by λ , apply (7.4.9) on the first term in the right hand side, apply (7.4.11) on the second and third terms and obtain for all $T \in [0, T_1]$ with $T_1 < T_0$

$$\begin{aligned} \text{TV}(u(T)) &\leq \text{TV}(u_0) + ((2N+1)\|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty}) \frac{M_1}{C_1} \int_0^T \text{TV}(u(t)) dt \\ &\quad + \frac{M_1}{C_1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt. \end{aligned}$$

An application of the Gronwall Lemma shows that $\text{TV}(u(t))$ is bounded on $[0, T_1]$. Indeed,

$$\text{TV}(u(t)) \leq e^{\kappa_0 t} \text{TV}(u_0) + \frac{M_1}{C_1} \int_0^t e^{\kappa_0(t-s)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(s, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx ds \quad (7.4.28)$$

for $t \in [0, T_1]$, M_1, C_1 as in (7.4.21), (7.4.8) and $\kappa_0 = [(2N+1)\|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty}] \frac{M_1}{C_1}$.

We now relax the assumption on the regularity of u_0 . Indeed, let $u_0 \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ and choose a sequence u_0^n of $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ functions such that $\text{TV}(u_0^n) \rightarrow \text{TV}(u_0)$, as in Theorem 7.4.2. Then, by Theorem 7.2.3, the solutions u^n to (7.1.1) with initial datum u_0^n satisfy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(t) = u(t) \text{ in } \mathbf{L}_{loc}^1 \quad \text{and} \quad \text{TV}(u(t)) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{TV}(u^n(t)),$$

where we used also the lower semicontinuity of the total variation. Note that (7.4.28), as well as the relations above, holds for all $t \in [0, T_1]$, T_1 being independent from the initial datum. Therefore, the bound (7.4.28) holds for all \mathbf{BV} initial data.

We remark that the bound (7.4.28) is additive in time, in the sense that applying it iteratively for times T_1 and t yields (7.4.28) for time $T_1 + t$:

$$\begin{aligned} & \text{TV}(u(T_1 + t)) \\ & \leq e^{\kappa_0 t} \text{TV}(u(T_1)) + \frac{M_1}{C_1} \int_{T_1}^{T_1+t} e^{\kappa_0(t-s)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(s, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx ds \\ & \leq e^{\kappa_0 t} \left[e^{\kappa_0 T_1} \text{TV}(u_0) + \frac{M_1}{C_1} \int_0^{T_1} e^{\kappa_0(T_1-s)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(s, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx ds \right] \\ & \quad + \frac{M_1}{C_1} \int_{T_1}^{T_1+t} e^{\kappa_0(T_1+t-s)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(s, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx ds \\ & = e^{\kappa_0(T_1+t)} \text{TV}(u_0) + \frac{M_1}{C_1} \int_0^{T_1+t} e^{\kappa_0(T_1+t-s)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(s, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx ds. \end{aligned}$$

The bound (7.4.28) can then be applied iteratively, due to the fact that T_1 is independent from the initial datum. An iteration argument allows to prove (7.2.5) for $t \in [0, T_0]$. The final bound (7.2.5) then follows by the arbitrariness of T_0 , due to (7.2.1). \square

7.5 Proof of Theorem 7.2.6.

The following proof relies on developing the techniques used in the proof of Theorem 7.2.5.

Proof of Theorem 7.2.6. Let $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$, $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$, and set $\varphi(t, x, s, y) = \Phi(t, x)\Psi(t-s, x-y)$ as in (7.4.14).

By Definition 7.2.1, we have $\forall l \in \mathbb{R}, \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(u-l) \partial_s \varphi + (f(s, y, u) - f(s, y, l)) \cdot \nabla_y \varphi + (F(s, y, u) - \text{div } f(s, y, l)) \varphi \right] \\ & \quad \times \text{sign}(u-l) dy ds \geq 0 \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

and $\forall k \in \mathbb{R}, \forall (s, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(v - k) \partial_t \varphi + (g(t, x, v) - g(t, x, k)) \cdot \nabla_x \varphi + (G(t, x, v) - \operatorname{div} g(t, x, k)) \varphi \right] \times \operatorname{sign}(v - k) dx dt \geq 0. \quad (7.5.2)$$

Choose $k = u(s, y)$ in (7.5.2) and integrate with respect to (s, y) . Analogously, take $l = v(t, x)$ in (7.5.1) and integrate with respect to (t, x) . By summing the obtained equations, we get, denoting $u = u(s, y)$ and $v = v(t, x)$:

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(u - v) \Psi dt \Phi + (g(t, x, u) - g(t, x, v)) \cdot (\nabla \Phi) \Psi \right. \\ \left. + (g(t, x, u) - g(t, x, v) - f(s, y, u) + f(s, y, v)) \cdot (\nabla \Psi) \Phi \right. \\ \left. + (F(s, y, u) - G(t, x, v) + \operatorname{div} g(t, x, u) - \operatorname{div} f(s, y, v)) \varphi \right] \times \operatorname{sign}(u - v) dx dt dy ds \geq 0. \quad (7.5.3)$$

We introduce a family of functions $\{Y_\theta\}_{\theta > 0}$ as in (7.4.16). Let $M = \|\partial_u g\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)}$ and define χ, ψ as in (7.4.17), for $\varepsilon, \theta, T_0, R > 0, x_0 \in \mathbb{R}^N$ (see also Figure 7.2). Note that with these choices, equalities (7.4.18) still hold. Note that here the definition of the test function φ is essentially the same as in the preceding proof; the only change is the definition of the constant M , which is now defined with reference to g . We also introduce as above the function $B(t, x, u, v) = M|u - v| + \operatorname{sign}(u - v) (g(t, x, u) - g(t, x, v)) \cdot \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$ that is positive for all $(t, x, u, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$, and we have :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(u - v) dt \Phi + (g(t, x, u) - g(t, x, v)) \cdot \nabla \Phi \right] \Psi \operatorname{sign}(u - v) dx dt dy ds \\ \leq \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} [|u - v| \chi' \psi - B(t, x, u, v) \chi Y_\theta'] \Psi dx dt dy ds \\ \leq \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u - v| \chi' \psi \Psi dx dt dy ds.$$

Due to the above estimate and (7.5.3), we obtain

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(u - v) \chi' \psi \Psi \right. \\ \left. + (g(t, x, u) - g(t, x, v) - f(s, y, u) + f(s, y, v)) \cdot (\nabla \Psi) \Phi \right. \\ \left. + (F(s, y, u) - G(t, x, v) + \operatorname{div} g(t, x, u) - \operatorname{div} f(s, y, v)) \varphi \right] \times \operatorname{sign}(u - v) dx dt dy ds \geq 0,$$

i.e. $I + J_x + J_t + K + L_x + L_t \geq 0$, where

$$I = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u - v| \chi' \psi \Psi \, dx \, dt \, dy \, ds, \quad (7.5.4)$$

$$J_x = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} (f(t, y, v) - f(t, y, u) + f(t, x, u) - f(t, x, v)) \cdot (\nabla \Psi) \Phi \\ \times \text{sign}(u - v) \, dx \, dt \, dy \, ds, \quad (7.5.5)$$

$$J_t = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} (f(s, y, v) - f(s, y, u) + f(t, y, u) - f(t, y, v)) \cdot (\nabla \Psi) \Phi \\ \times \text{sign}(u - v) \, dx \, dt \, dy \, ds,$$

$$K = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} ((g - f)(t, x, u) - (g - f)(t, x, v)) \cdot (\nabla \Psi) \Phi \\ \times \text{sign}(u - v) \, dx \, dt \, dy \, ds, \quad (7.5.6)$$

$$L_x = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} (F(t, y, u) - G(t, x, v) + \text{div } g(t, x, u) - \text{div } f(t, y, v)) \varphi \\ \times \text{sign}(u - v) \, dx \, dt \, dy \, ds, \quad (7.5.7)$$

$$L_t = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} (F(s, y, u) - F(t, y, u) + \text{div } f(t, y, v) - \text{div } f(s, y, v)) \varphi \\ \times \text{sign}(u - v) \, dx \, dt \, dy \, ds.$$

Now, we choose $\Psi(t, x) = \nu(t) \mu(x)$ as in (7.4.19), (7.4.1), (7.4.2). Thanks to Lemma 7.5.2, Lemma 7.5.3 and Lemma 7.5.4 we obtain

$$\limsup_{\varepsilon, \eta, \lambda \rightarrow 0} I \leq \int_{\|x-x_0\| \leq R+MT_0+\theta} |u(0, x) - v(0, x)| \, dx \\ - \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-T)} |u(T, x) - v(T, x)| \, dx, \quad (7.5.8)$$

$$\limsup_{\varepsilon, \eta, \lambda \rightarrow 0} J_x \leq N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^T \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)} |v(t, x) - u(t, x)| \, dx \, dt, \quad (7.5.9)$$

$$\limsup_{\varepsilon, \eta, \lambda \rightarrow 0} L_x \leq \int_0^T \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)} \left\| ((F - G) - \text{div}(f - g))(t, y, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \, dy \, dt \\ + \left(N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u(F - G)\|_{\mathbf{L}^\infty} \right) \\ \times \int_0^T \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)} |v(t, x) - u(t, x)| \, dx \, dt. \quad (7.5.10)$$

Additionally, we find that :

$$|J_t| \leq \eta \|\partial_t \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t, x) - u(s, y)| \|\nabla \Psi\| \Phi \, dx \, dt \, dy \, ds, \\ |L_t| \leq \eta \omega_N (R + MT_0)^N (T + \varepsilon) (\|\partial_t \text{div } f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_t F\|_{\mathbf{L}^\infty}),$$

so that

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0} |J_t| = \limsup_{\eta \rightarrow 0} |L_t| = 0. \quad (7.5.11)$$

In order to estimate K as given in (7.5.6), we introduce a regularisation of the y dependent functions. In fact, let $\rho_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha}\rho\left(\frac{z}{\alpha}\right)$ and $\sigma_\beta(y) = \frac{1}{\beta^N}\sigma\left(\frac{y}{\beta}\right)$, where $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ and $\sigma \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$ are such that $\|\rho\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})} = \|\sigma\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} = 1$ and $\text{Supp}(\rho) \subseteq]-1, 1[$, $\text{Supp}(\sigma) \subseteq B(0, 1)$. Then, we introduce

$$\begin{aligned} P(w) &= (g - f)(t, x, w), & s_\alpha &= \text{sign} *_u \rho_\alpha, \\ \Upsilon_\alpha^i(w) &= s_\alpha(w - v) (P_i(w) - P_i(v)), & u_\beta &= \sigma_\beta *_y u, \\ \Upsilon^i(w) &= \text{sign}(w - v) (P_i(w) - P_i(v)), \end{aligned}$$

so that we obtain

$$\begin{aligned} & \langle \Upsilon_\alpha^i(u_\beta) - \Upsilon_\alpha^i(u), \partial_{y_i} \varphi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(w) (\rho_\alpha(u_\beta - v - w) P_i(u_\beta) - \rho_\alpha(u - v - w) P_i(u)) \partial_{y_i} \varphi \, dw \, dy \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(w) (\rho_\alpha(u_\beta - v - w) - \rho_\alpha(u - v - w)) P_i(v) \partial_{y_i} \varphi \, dw \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}} \int_u^{u_\beta} \text{sign}(w) \rho'_\alpha(U - v - w) (P_i(U) - P_i(v)) \partial_{y_i} \varphi \, dU \, dw \, dy \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}} \int_u^{u_\beta} \text{sign}(w) \rho_\alpha(U - v - w) P'_i(U) \partial_{y_i} \varphi \, dU \, dw \, dy. \end{aligned}$$

Now, we use the relation $\partial_u s_\alpha(u) = \frac{2}{\alpha} \rho\left(\frac{u}{\alpha}\right)$ to obtain

$$\begin{aligned} & \left| \langle \Upsilon_\alpha^i(u_\beta) - \Upsilon_\alpha^i(u), \partial_{y_i} \varphi \rangle \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2}{\alpha} \sup_{U \in [u, u_\beta]} \left(\rho\left(\frac{U - v}{\alpha}\right) (P_i(U) - P_i(v)) \right) \min\{2\alpha, |u - u_\beta|\} \partial_{y_i} \varphi \, dy \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^N} \int_u^{u_\beta} |P'_i(U)| \partial_{y_i} \varphi \, dU \, dy. \end{aligned}$$

When α tends to 0, using the Dominated Convergence Theorem we obtain

$$\left| \langle \Upsilon^i(u_\beta) - \Upsilon^i(u), \partial_{y_i} \varphi \rangle \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u - u_\beta| \|P'_i\|_{\mathbf{L}^\infty} \partial_{y_i} \varphi \, dy.$$

Applying the Dominated Convergence Theorem again, we see that

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \langle \Upsilon_\alpha^i(u_\beta), \partial_{y_i} \varphi \rangle &= \langle \Upsilon^i(u), \partial_{y_i} \varphi \rangle, \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \langle \Upsilon_\alpha(u_\beta), \nabla_y \varphi \rangle &= \langle \Upsilon(u), \nabla_y \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Consequently, it is sufficient to find a bound independent of α and β on $K_{\alpha, \beta}$, where

$$K_{\alpha, \beta} = - \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \Upsilon_\alpha(u_\beta) \cdot \nabla_y \varphi \, dx \, dt \, dy \, ds.$$

Integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned}
K_{\alpha,\beta} &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{Div}_y \Upsilon_\alpha(u_\beta) \varphi \, dx \, dt \, dy \, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_u s_\alpha(u_\beta - v) \nabla u_\beta \cdot ((g - f)(t, x, u_\beta) - (g - f)(t, x, v)) \varphi \, dx \, dt \, dy \, ds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} s_\alpha(u_\beta - v) (\partial_u (g - f)(t, x, u_\beta) \cdot \nabla u_\beta) \varphi \, dx \, dt \, dy \, ds \\
&= K_1 + K_2.
\end{aligned}$$

We now search for a bound for each term of the sum above.

- For K_1 , recall that $\partial_u s_\alpha(u) = \frac{2}{\alpha} \rho\left(\frac{u}{\alpha}\right)$. Hence, by the Dominated Convergence Theorem, we get that $K_1 \rightarrow 0$ when $\alpha \rightarrow 0$. Indeed,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{2}{\alpha} \rho\left(\frac{u_\beta - v}{\alpha}\right) \nabla u_\beta \cdot ((g - f)(t, x, u_\beta) - (g - f)(t, x, v)) \varphi \right| \\
&\leq \frac{2}{\alpha} \rho\left(\frac{u_\beta - v}{\alpha}\right) \varphi \|\nabla u_\beta(s, y)\| \int_v^{u_\beta} \|\partial_u (f - g)(t, x, w)\| \, dw \\
&\leq 2\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})} \|\nabla u_\beta(s, y)\| \|\partial_u (f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} \varphi \in \mathbf{L}^1\left((\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N)^2; \mathbb{R}\right).
\end{aligned}$$

- Concerning K_2 ,

$$\begin{aligned}
K_2 &\leq \|\partial_u (f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} \int_0^{T+\varepsilon+\eta} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u_\beta(s, y)\| \, dy \, ds \\
&\leq \|\partial_u (f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} \int_0^{T+\varepsilon+\eta} \operatorname{TV}(u_\beta(t)) \, dt.
\end{aligned}$$

Finally, letting $\alpha, \beta \rightarrow 0$ and $\varepsilon, \eta, \lambda \rightarrow 0$, due to [3, Proposition 3.7], we obtain

$$\limsup_{\varepsilon, \eta, \lambda \rightarrow 0} K \leq \|\partial_u (f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^T \operatorname{TV}(u(t)) \, dt. \quad (7.5.12)$$

Now, we collate the estimates obtained in (7.5.8), (7.5.9), (7.5.10), (7.5.11) and (7.5.12). Remark the order in which we pass to the various limits : first $\varepsilon, \eta, \theta \rightarrow 0$ and, after, $\lambda \rightarrow 0$. Therefore, we get

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x_0, R+M(T_0-T))} |u(T, x) - v(T, x)| \, dx \\
&\leq \int_{B(x_0, R+MT_0)} |u(0, x) - v(0, x)| \, dx \\
&\quad + \left[2N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u (F - G)\|_{\mathbf{L}^\infty} \right] \\
&\quad \times \int_0^T \int_{B(x_0, R+M(T_0-t))} |v(t, x) - u(t, x)| \, dx \, dt \\
&\quad + \left[\|\partial_u (f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^T \operatorname{TV}(u(t)) \, dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^T \int_{B(x_0, R+M(T_0-t))} \left\| ((F - G) - \operatorname{div}(f - g))(t, y, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \, dy \, dt \right]
\end{aligned}$$

or equivalently

$$A'(T) \leq A'(0) + \kappa A(T) + S(T), \quad (7.5.13)$$

where

$$\begin{aligned} A(T) &= \int_0^T \int_{B(x_0, R+M(T_0-t))} |v(t, x) - u(t, x)| \, dx \, dt, \\ \kappa &= 2N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u(F - G)\|_{\mathbf{L}^\infty}, \\ S(T) &= \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^T \text{TV}(u(t)) \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{B(x_0, R+M(T_0-t))} \left\| ((F - G) - \text{div}(f - g))(t, y, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \, dy \, dt. \end{aligned} \quad (7.5.14)$$

The bound (7.2.5) on $\text{TV}(u(t))$ gives :

$$S(T) \leq \frac{e^{\kappa_0 T} - 1}{\kappa_0} a + \int_0^T \frac{e^{\kappa_0(T-t)} - 1}{\kappa_0} b(t) \, dt + \int_0^T c(t) \, dt,$$

where κ_0 is defined in (7.2.4) and

$$\begin{aligned} a &= \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \text{TV}(u_0), \\ b(t) &= NW_N \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div} f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} \, dx, \\ c(t) &= \int_{B(x_0, R+M(T_0-t))} \left\| ((F - G) - \text{div}(f - g))(t, y, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \, dy, \end{aligned}$$

since $T \leq T_0$. Consequently

$$A'(T) \leq A'(0) + \kappa A(T) + \left(\frac{e^{\kappa_0 T} - 1}{\kappa_0} a + \int_0^T \frac{e^{\kappa_0(T-t)} - 1}{\kappa_0} b(t) \, dt + \int_0^T c(t) \, dt \right). \quad (7.5.15)$$

By a Gronwall type argument, if $\kappa_0 = \kappa$, we obtain

$$A'(T) \leq e^{\kappa T} A'(0) + T e^{\kappa T} a + \left(\int_0^T (T-t) e^{\kappa(T-t)} b(t) \, dt \right) \left(\int_0^T e^{\kappa(T-t)} c(t) \, dt \right),$$

yielding

$$\begin{aligned} &\int_{\|x-x_0\| \leq R} |u(T, x) - v(T, x)| \, dx \leq e^{\kappa T} \int_{\|x-x_0\| \leq R+MT} |u_0(x) - v_0(x)| \, dx \\ &+ T e^{\kappa T} \text{TV}(u_0) \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &+ NW_N \left(\int_0^T (T-t) e^{\kappa(T-t)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div} f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} \, dx \, dt \right) \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &+ \int_0^T e^{\kappa(T-t)} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T-t)} \left\| ((F - G) - \text{div}(f - g))(t, x, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (7.5.16)$$

while, in the case $\kappa_0 \neq \kappa$, we have

$$A'(T) \leq e^{\kappa T} A'(0) + \frac{e^{\kappa_0 T} - e^{\kappa T}}{\kappa_0 - \kappa} a + \int_0^T \frac{e^{\kappa_0(T-t)} - e^{\kappa(T-t)}}{\kappa_0 - \kappa} b(t) \, dt + \int_0^T e^{\kappa(T-t)} c(t) \, dt.$$

Taking $T = T_0$, we finally obtain the result. \square

Remark 7.5.1. Assuming that also (g, G) satisfies **(H2)** allows us to exchange the role of u and v in (7.5.14). Let

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_0 &= NW_N \left((2N+1) \|\nabla \partial_u g\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u G\|_{\mathbf{L}^\infty} \right), \\ \tilde{a} &= \|\partial_u(f-g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \text{TV}(v_0), \\ \tilde{b}(t) &= \|\partial_u(f-g)\|_{\mathbf{L}^\infty} NW_N \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(G - \text{div } g)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx, \\ \tilde{\kappa} &= 2N \|\nabla \partial_u g\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u G\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u(F-G)\|_{\mathbf{L}^\infty},\end{aligned}$$

and repeating the same computations as above, we obtain

$$A'(T) \leq A(0) + \tilde{\kappa} A(T) + \left(\frac{e^{\tilde{\kappa}_0 T} - 1}{\tilde{\kappa}_0} \tilde{a} + \int_0^T \frac{e^{\tilde{\kappa}_0(T-t)} - 1}{\tilde{\kappa}_0} \tilde{b}(t) dt + \int_0^T c(t) dt \right),$$

so that, finally,

$$\begin{aligned}A'(T) &\leq A'(0) + \min(\kappa, \tilde{\kappa}) A(T) + \max \left[\frac{e^{\kappa_0 T} - 1}{\kappa_0} a + \int_0^T \frac{e^{\kappa_0(T-t)} - 1}{\kappa_0} b(t) dt, \right. \\ &\quad \left. \frac{e^{\tilde{\kappa}_0 T} - 1}{\tilde{\kappa}_0} \tilde{a} + \int_0^T \frac{e^{\tilde{\kappa}_0(T-t)} - 1}{\tilde{\kappa}_0} \tilde{b}(t) dt \right] + \int_0^T c(t) dt.\end{aligned}$$

We collect below some lemmas that were used in the previous proof. The first one is similar to a part of the proof of [21, Theorem 2.1].

Lemma 7.5.2. *Let I be defined as in (7.5.4). Then,*

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I &\leq \int_{\|x-x_0\| \leq R+MT_0+\theta} |u(0, x) - v(0, x)| dx \\ &\quad - \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-T)} |u(T, x) - v(T, x)| dx + 2 \sup_{\tau \in \{0, T\}} \text{TV}(u(\tau)) \lambda \\ &\quad + 2 \sup_{\substack{t \in \{0, T\} \\ s \in]t, t+\eta[}} \int_{\|y-x_0\| \leq R+\lambda+M(T_0-t)+\theta} |u(t, y) - u(s, y)| dy.\end{aligned}$$

Proof. By the triangle inequality $I \leq I_1 + I_2 + I_3$, with

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t, x) - v(t, x)| \chi'(t) \psi(t, x) \Psi(t-s, x-y) dx dt dy ds, \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t, x) - u(t, y)| |\chi'(t)| \psi(t, x) \Psi(t-s, x-y) dx dt dy ds, \\ I_3 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t, y) - u(s, y)| |\chi'(t)| \psi(t, x) \Psi(t-s, x-y) dx dt dy ds,\end{aligned}$$

then we have

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t, x) - v(t, x)| (Y'_\varepsilon(t) - Y'_\varepsilon(t-T)) \psi(t, x) dx dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-t)+\theta} |u(t, x) - v(t, x)| Y'_\varepsilon(t) dx dt \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-t)} |u(t, x) - v(t, x)| Y'_\varepsilon(t-T) dx dt,\end{aligned}$$

and by the \mathbf{L}^1 right continuity of u and v in time, thanks to Theorem 7.2.3

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 &\leq \int_{\|x-x_0\| \leq R+MT_0+\theta} |u(0, x) - v(0, x)| dx \\ &\quad - \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-T)} |u(T, x) - v(T, x)| dx . \end{aligned}$$

For I_2 and I_3 , we have

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-t)+\theta} |u(t, x) - u(t, y)| (Y'_\varepsilon(t) + Y'_\varepsilon(t-T)) \mu dx dy dt , \\ I_3 &\leq \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\|y-x_0\| \leq R+\lambda+M(T_0-t)+\theta} |u(t, y) - u(s, y)| (Y'_\varepsilon(t) + Y'_\varepsilon(t-T)) \nu dy ds dt . \end{aligned}$$

As $\varepsilon \rightarrow 0$, we use on the one hand the \mathbf{L}^1 right continuity in time of u , thanks to Theorem 7.2.3, and on the other hand that $u(t) \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, thanks to Theorem 7.2.5. In particular, we can use (7.4.11) to obtain

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 &\leq \sum_{t=0, T} \sup_{\|h\| \leq \lambda} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-t)+\theta} |u(t, x) - u(t, x+h)| dx \\ &\leq 2 \sup_{\substack{\|h\| \leq \lambda \\ t \in \{0, T\}}} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-t)+\theta} |u(t, x) - u(t, x+h)| dx \\ &\leq 2 \sup_{t \in \{0, T\}} \mathbf{TV}(u(t)) \lambda , \\ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_3 &\leq \sum_{t=0, T} \sup_{s \in]t, t+\eta[} \int_{\|y-x_0\| \leq R+\lambda+M(T_0-t)+\theta} |u(t, y) - u(s, y)| dy \\ &\leq 2 \sup_{\substack{t \in \{0, T\} \\ s \in]t, t+\eta[}} \int_{\|y-x_0\| \leq R+\lambda+M(T_0-t)+\theta} |u(t, y) - u(s, y)| dy . \end{aligned}$$

□

Lemma 7.5.3. *Let J_x be defined as in (7.5.5). Then,*

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J_x &\leq N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^T \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)} |v(t, x) - u(t, x)| dx dt \\ &\quad + NT \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \sup_{\tau \in [0, T]} \mathbf{TV}(u(\tau)) \lambda \\ &\quad + NT \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ s \in]t, t+\eta[}} \int_{\|y-x_0\| \leq R+\lambda+M(T_0-t)+\theta} |u(t, y) - u(s, y)| dy . \end{aligned}$$

Proof. By assumptions **(H1)**, $f \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ and therefore

$$\begin{aligned} &\|f(t, y, v) - f(t, y, u) + f(t, x, u) - f(t, x, v)\| \\ &= \left\| \int_{u(s, y)}^{v(t, x)} \int_0^1 \nabla \partial_u f(t, x(1-r) + ry, w) \cdot (y-x) dr dw \right\| \\ &\leq \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \|x-y\| |v(t, x) - u(s, y)| . \end{aligned}$$

Then,

$$J_x \leq \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |v(t, x) - u(s, y)| \|x - y\| \|\nabla \mu\| \nu \chi \psi \, dx \, dt \, dy \, ds.$$

Similarly to the proof of Lemma 7.5.2, we apply the triangle inequality and we obtain $J_x \leq J_1 + J_2 + J_3$, where

$$J_1 = \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |v(t, x) - u(t, x)| \|x - y\| \|\nabla \mu\| \nu \chi \psi \, dx \, dt \, dy \, ds,$$

$$J_2 = \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t, x) - u(t, y)| \|x - y\| \|\nabla \mu\| \nu \chi \psi \, dx \, dt \, dy \, ds,$$

$$J_3 = \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t, y) - u(s, y)| \|x - y\| \|\nabla \mu\| \nu \chi \psi \, dx \, dt \, dy \, ds.$$

For J_1 , we have, thanks to (7.4.5)

$$J_1 \leq N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^{T+\varepsilon} \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)} |v(t, x) - u(t, x)| \, dx \, dt.$$

For J_2 , we have

$$\begin{aligned} J_2 &\leq N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^{T+\varepsilon} \sup_{\|h\| \leq \lambda} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-t)+\theta} |u(t, x) - u(t, x+h)| \, dx \, dt \\ &\leq N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} (T+\varepsilon) \sup_{\tau \in [0, T+\varepsilon]} \text{TV}(u(\tau)) \lambda, \end{aligned}$$

and for J_3

$$\begin{aligned} J_3 &\leq N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^{T+\varepsilon} \sup_{s \in]t, t+\eta[} \int_{\|x-x_0\| \leq R+\lambda+M(T_0-t)+\theta} |u(t, y) - u(s, y)| \, dy \, dt \\ &\leq N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} (T+\varepsilon) \sup_{\substack{t \in [0, T+\varepsilon] \\ s \in]t, t+\eta[}} \int_{\|y-x_0\| \leq R+\lambda+M(T_0-t)+\theta} |u(t, y) - u(s, y)| \, dy. \end{aligned}$$

In particular, letting $\lambda, \eta, \varepsilon, \theta \rightarrow 0$, we prove that $J_2, J_3 \rightarrow 0$ and

$$\limsup_{\lambda, \eta, \varepsilon, \theta \rightarrow 0} J_1 \leq N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^T \int_{B(x_0, R+M(T_0-t))} |v(t, x) - u(t, x)| \, dx \, dt,$$

completing the proof. \square

Lemma 7.5.4. *Let L_x be defined as in (7.5.7) and M_1 as in (7.4.21). Then*

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} L_x &\leq \int_0^T \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-t)+\theta} \left\| ((F-G) - \operatorname{div}(f-g))(t, x, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt \\ &\quad + \left(N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u(F-G)\|_{\mathbf{L}^\infty} \right) \\ &\quad \times \left[\int_0^T \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)} |v(t, x) - u(t, x)| dx dt \right. \\ &\quad \left. + T \sup_{\tau \in [0, T]} \operatorname{TV}(u(\tau)) \lambda \right. \\ &\quad \left. + T \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ s \in [t, t+\eta[}} \int_{\|y-x_0\| \leq R+\lambda+M(T_0-t)+\theta} |u(t, y) - u(s, y)| dy \right] \\ &\quad + \lambda M_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \operatorname{div} f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt. \end{aligned}$$

Proof. Let

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} ((F-G) - \operatorname{div}(f-g))(t, x, u) \varphi \operatorname{sign}(u-v) dx dt dy ds, \\ L_2 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} ((F-G)(t, x, v) - (F-G)(t, x, u)) \varphi \operatorname{sign}(u-v) dx dt dy ds, \\ L_3 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} (F(t, y, u) - F(t, y, v) + \operatorname{div} f(t, x, u) - \operatorname{div} f(t, x, v)) \varphi \\ &\quad \times \operatorname{sign}(u-v) dx dt dy ds, \\ L_4 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} ((F - \operatorname{div} f)(t, y, v) - (F - \operatorname{div} f)(t, x, v)) \varphi \operatorname{sign}(u-v) dx dt dy ds, \end{aligned}$$

so that $L_x = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$. Clearly,

$$L_1 \leq \int_0^{T+\varepsilon} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-t)+\theta} \left\| ((G-F) - \operatorname{div}(f-g))(t, x, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt.$$

For L_2 and L_3 , we have

$$\begin{aligned} L_2 &\leq \|\partial_u(F-G)\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u(s, y) - v(t, x)| \varphi dx dt dy ds, \\ L_3 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{sign}(u-v) \left(\int_v^u (\partial_u \operatorname{div} f(t, x, w) + \partial_u F(t, y, w)) dw \right) \varphi dx dt dy ds \\ &\leq (N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty}) \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |v(t, x) - u(s, y)| \varphi dx dt dy ds. \end{aligned}$$

Proceeding as for J_x , we find the following bound for $\iiint |v(t, x) - u(s, y)|\varphi$ in L_2, L_3 .

$$\begin{aligned} L_2 + L_3 \leq & \left(N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u(F - G)\|_{\mathbf{L}^\infty} \right) \\ & \times \left[\int_0^{T+\varepsilon} \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)} |v(t, x) - u(t, x)| dx dt + (T + \varepsilon) \sup_{\tau \in [0, T+\varepsilon]} \text{TV}(u(\tau)) \lambda \right. \\ & \left. + (T + \varepsilon) \sup_{\substack{t \in [0, T+\varepsilon] \\ s \in]t, t+\eta[}} \int_{\|y-x_0\| \leq R+\lambda+M(T_0-t)+\theta} |u(t, y) - u(s, y)| dy \right]. \end{aligned}$$

For L_4 we have

$$\begin{aligned} L_4 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_0^1 \nabla(F - \text{div } f)(t, rx + (1-r)y, v) \cdot (y - x) dr \right] \varphi \\ &\quad \times \text{sign}(u - v) dx dt dy ds \\ &\leq \lambda M_1 \int_0^{T+\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt. \end{aligned}$$

To complete the proof, it is sufficient to note that $L_x = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$. \square

Chapitre 8

Compléments

J. Dávila [47] a obtenu un résultat très proche de celui de la Proposition 7.4.3. Il prouve même plus puisqu'il affirme que la limite considérée est exactement la variation totale de u pour tout $u \in \mathbf{L}_{loc}^1$, résultat qu'on avait obtenu seulement dans le cas $u \in \mathcal{C}^1$. En améliorant le résultat de la Proposition 7.4.3, on peut alors éliminer la constante NW_N du κ_0 intervenant dans l'estimation de la variation totale (7.2.5).

8.1 Amélioration de la Proposition 7.4.3

En s'inspirant de l'article de J. Dávila [47], on améliore la Proposition 7.4.3 et on utilise cette amélioration afin de changer légèrement les conclusions des théorèmes 7.2.5 et 7.2.6.

Proposition 8.1.1. *Soit $\rho_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ avec $\text{Supp } \rho_1 \subset [-1, 1]$. Soit $u \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Pour tout $\lambda > 0$, on introduit ρ_λ tel que $\rho_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^N} \rho_1\left(\frac{\|x\|}{\lambda}\right)$. Supposons que u admet une constante \tilde{C} telle que pour tous λ, R positifs*

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R)} |u(x) - u(x - z)| \rho_\lambda(z) \, dx \, dz \leq \tilde{C}. \quad (8.1.1)$$

Alors $u \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ et

$$\text{TV}(u) = \frac{1}{C_0} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x) - u(x - z)| \rho_\lambda(z) \, dx \, dz, \quad (8.1.2)$$

où

$$C_0 = \int_{\mathbb{R}^N} |x_1| \rho_1(\|x\|) \, dx. \quad (8.1.3)$$

Preuve. On introduit une régularisation de u : $u_h = u * \mu_h$, avec $\mu_h(x) = \mu_1(\|x\|/h) / h^N$, où μ_1 est défini comme en (7.4.1). On remarque que $u_h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ et que u_h converge vers u dans \mathbf{L}_{loc}^1 lorsque $h \rightarrow 0$. De plus, pour R et h positifs, on obtient par changement de variable

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R)} |u_h(x) - u_h(x - \lambda z)| \rho_1(\|z\|) \, dx \, dz \\ & \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R+h)} |u(x) - u(x - \lambda z)| \rho_1(\|z\|) \, dx \, dz \\ & \leq \tilde{C} \end{aligned}$$

et

$$\frac{u_h(x) - u_h(x - \lambda z)}{\lambda} = \int_0^1 \nabla u_h(x - \lambda s z) \cdot z \, ds.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on a lorsque $\lambda \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R)} |\nabla u_h(x) \cdot z| \rho_1(\|z\|) \, dx \, dz \\ & \leq \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R+h)} |u(x) - u(x - z)| \rho_\lambda(z) \, dx \, dz \\ & \leq \tilde{C}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour $x \in B(x_0, R)$ fixé, lorsque $\nabla u_h(x) \neq 0$, le produit scalaire $\nabla u_h(x) \cdot z$ est positif (respectivement, négatif) lorsque z est dans le demi-plan H_x^+ (respectivement H_x^-). On peut alors écrire $z = \alpha \frac{\nabla u_h(x)}{\|\nabla u_h(x)\|} + w$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et w est un élément de l'hyperplan $H_x^o = \nabla u_h(x)^\perp$. D'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_h(x) \cdot z| \rho_1(\|z\|) \, dz &= \int_{H_x^+} \nabla u_h(x) \cdot z \rho_1(\|z\|) \, dz + \int_{H_x^-} \nabla u_h(x) \cdot (-z) \rho_1(\|z\|) \, dz \\ &= 2 \int_{H_x^+} \nabla u_h(x) \cdot z \rho_1(\|z\|) \, dz \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{H_x^o} \alpha \|\nabla u_h(x)\| \rho_1(\sqrt{\alpha^2 + \|w\|^2}) \, dw \, d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{H_x^o} |\alpha| \|\nabla u_h(x)\| \rho_1(\sqrt{\alpha^2 + \|w\|^2}) \, dw \, d\alpha \\ &= \|\nabla u_h(x)\| \int_{\mathbb{R}^N} |z_1| \rho_1(\|z\|) \, dz. \end{aligned}$$

Soit C_0 comme en (8.1.3). On obtient alors, pour tout $R > 0$,

$$\int_{B(x_0, R)} \|\nabla u_h(x)\| \, dx \leq \frac{1}{C_0} \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R+h)} |u(x) - u(x - z)| \rho_\lambda(z) \, dx \, dz. \quad (8.1.4)$$

Finalement, lorsque $R \rightarrow \infty$ on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u_h(x)\| \, dx \leq \frac{1}{C_0} \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R+h)} |u(x) - u(x - z)| \rho_\lambda(z) \, dx \, dz$$

et lorsque $h \rightarrow 0$, par le Théorème 7.4.2 on a également

$$\text{TV}(u) \leq \frac{1}{C_0} \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R+h)} |u(x) - u(x - z)| \rho_\lambda(z) \, dx \, dz \leq \frac{\tilde{C}}{C_0}, \quad (8.1.5)$$

ce qui conclut la preuve de la première affirmation.

Maintenant, soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ qui converge vers u dans \mathbf{L}_{loc}^1 et telle que $\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u_n(x)\| \, dx$ converge vers $\text{TV}(u)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Alors, en effectuant

le même calcul que ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R)} |u_n(x) - u_n(x - \lambda z)| \rho_1(\|z\|) dx dz \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R)} \int_0^1 |\nabla u_n(x - \lambda s z) \cdot z| \rho_1(\|z\|) ds dx dz \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 \int_{B(x_0, R+\lambda)} |\nabla u_n(x') \cdot z| \rho_1(\|z\|) dx' ds dz \\
& = \int_{B(x_0, R+\lambda)} \|\nabla u_n(x)\| C_0 dx \\
& \leq C_0 \text{TV}(u_n).
\end{aligned}$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, on a donc

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R)} |u(x) - u(x - \lambda z)| \rho_1(\|z\|) dx dz \leq C_0 \text{TV}(u).$$

On fait alors tendre R vers $+\infty$ et on prend la limite supérieure lorsque λ tend vers 0. On obtient

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x) - u(x - z)| \rho_\lambda(z) dx dz \leq C_0 \text{TV}(u). \quad (8.1.6)$$

On termine la preuve en regroupant (8.1.5) et (8.1.6). \square

8.2 Amélioration des Théorèmes 7.2.5 et 7.2.6

Grâce à la Proposition 8.1.1, on est désormais en mesure d'améliorer légèrement les Théorèmes 7.2.5 et 7.2.6. On garde les mêmes notations que dans le chapitre 7.

Théorème 8.2.1. *Supposons que (H1) et (H2) soient satisfaites. Soit $u_0 \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^\infty$. Alors la solution faible entropique u de (7.1.1) vérifie $u(t) \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ pour tout $t > 0$. De plus, si*

$$\kappa_1 = (2N + 1) \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R})} \quad (8.2.1)$$

alors pour tout $T > 0$, avec W_N comme en (7.2.1),

$$\text{TV}(u(T)) \leq \text{TV}(u_0) e^{\kappa_1 T} + N W_N \int_0^T e^{\kappa_1(T-t)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(t, x, u(t, \cdot))\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt. \quad (8.2.2)$$

Théorème 8.2.2. *Supposons que (f, F) , (g, G) satisfont (H1), (f, F) satisfait (H2) et $(f - g, F - G)$ vérifie (H3). Soit $u_0, v_0 \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^\infty$. On définit κ_1 comme en (8.2.1) et on introduit*

$$\kappa = 2N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R})} + \|\partial_u(F - G)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R})} \quad \text{et} \quad M = \|\partial_u g\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)}.$$

Alors, pour tout $T, R > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} & \int_{\|x-x_0\| \leq R} |u(T, x) - v(T, x)| dx \leq e^{\kappa T} \int_{\|x-x_0\| \leq R+MT} |u_0(x) - v_0(x)| dx \\ & + \frac{e^{\kappa_1 T} - e^{\kappa T}}{\kappa_1 - \kappa} \text{TV}(u_0) \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & + NW_N \left(\int_0^T \frac{e^{\kappa_1(T-t)} - e^{\kappa(T-t)}}{\kappa_1 - \kappa} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(t, x, u(t, \cdot))\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt \right) \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & + \int_0^T e^{\kappa(T-t)} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T-t)} \left\| ((F - G) - \text{div}(f - g))(t, x, u(t, \cdot)) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt. \end{aligned}$$

Preuve du Théorème 8.2.1. Tout d'abord, dans le Théorème 7.2.5 la constante NW_N au-devant du terme $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty}$ vient de l'estimation du terme L_2 défini en (7.4.20) :

$$\begin{aligned} L_2 & \leq \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |\nabla(F - \text{div } f)(t, x - \lambda(1-r)z, u) \cdot (\lambda z)| \\ & \quad \times \chi \psi \mu_1(\|z\|) \nu dr dx dt dz ds \\ & \leq \lambda \int_0^{T+\varepsilon} \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |\nabla(F - \text{div } f)(t, x - \lambda(1-r)z, u) \cdot (z)| \\ & \quad \times \mu_1(\|z\|) dr dz dx dt \\ & \leq \lambda \int_0^{T+\varepsilon} \int_0^1 \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta+\lambda)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(F - \text{div } f)(t, x', u(t, x' + \lambda(1-r)z)) \cdot z| \\ & \quad \times \mu_1(\|z\|) dz dx' dr dt \end{aligned}$$

Si $F - \text{div } f$ ne dépend pas de u , alors on est en mesure d'obtenir, avec les mêmes calculs que dans la preuve de la Proposition 8.1.1, en considérant $z \mapsto \nabla(F - \text{div } f)(t, x') \cdot z$ comme une application linéaire positive sur le demi-espace H_x^+ et négative sinon :

$$L_2 \leq \lambda \int_0^{T+\varepsilon} \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta+\lambda)} |\nabla(F - \text{div } f)(t, x')| dx' dt \int_{\mathbb{R}^N} |z_1| \mu_1(\|z\|) dz,$$

ce qui nous permet de nous débarrasser de la constante NW_N . Cependant, dans le cas général, en raison de la dépendance en u et en particulier de la dépendance de u en z , on est amené à prendre le supremum de u sur la variable d'espace. On obtient :

$$L_2 \leq \lambda \int_0^{T+\varepsilon} \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta+\lambda)} \int_{\mathbb{R}^N} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |\nabla(F - \text{div } f)(t, x', u(t, y)) \cdot z| \mu_1(\|z\|) dz dx' dt.$$

Désormais on ne peut alors plus faire les mêmes calculs que dans la preuve de la Proposition 8.1.1. En effet il ne nous est plus permis de permuter sup et $\int_{\mathbb{R}^N}$. Par conséquent, afin de séparer une fonction de la variable z des autres variables, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\begin{aligned} L_2 & \leq \lambda \int_0^{T+\varepsilon} \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta+\lambda)} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |\nabla(F - \text{div } f)(t, x', u(t, y))| dx' dt \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^N} \|z\| \mu_1(\|z\|) dz. \end{aligned}$$

La constante NW_N apparaît donc lorsqu'on divise par $C_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |z_1| \mu_1(\|z\|) dz$, puisque, par le Lemme 7.4.1, $\frac{1}{C_1} \int_{\mathbb{R}^N} \|z\| \mu_1(\|z\|) dz = NW_N$. C'est pourquoi, dans le cas général, il n'est pas possible d'éliminer complètement la constante NW_N du côté droit de (8.2.2)

La constante NW_N apparaît ensuite dans le κ_0 du Théorème 7.2.5. Elle provient de l'utilisation de la Proposition 7.4.3 qui nous donne une expression de la variation totale seulement si la fonction est assez régulière. Puisqu'on dispose désormais de la Proposition 8.1.1, on peut utiliser (8.1.2), non seulement pour les fonctions régulières mais aussi pour les fonctions qui sont seulement **BV**. Ainsi, lorsqu'on divise (7.4.22) par λ , au lieu de majorer le second terme de (7.4.22) de la façon suivante

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-t)} |u(t,x) - u(t,y)| \frac{1}{\lambda^{N+1}} \mu'_1 \left(\frac{\|x-y\|}{\lambda} \right) \|x-y\| dx dy dt \\ \leq & - \int_0^T \text{TV}(u(t)) dt \int_{\mathbb{R}^N} \|z\|^2 \mu_1(\|z\|) dz, \end{aligned}$$

on peut écrire, en appliquant la Proposition 8.1.1, avec ρ_1 tel que $\rho_1(x) = -x\mu'_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en utilisant les résultats du Lemme 7.4.1, on trouve

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-t)} |u(t,x) - u(t,y)| \frac{1}{\lambda^{N+1}} \mu'_1 \left(\frac{\|x-y\|}{\lambda} \right) \|x-y\| dx dy dt \\ \rightarrow_{\lambda \rightarrow 0} & - \int_{\mathbb{R}^N} |z_1| \|z\| \mu'_1(\|z\|) dz \int_0^T \text{TV}(u(t)) dt \\ & = - \frac{2}{N} \frac{\omega_{N-1}}{\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \|z\|^2 \mu'_1(\|z\|) dz \int_0^T \text{TV}(u(t)) dt \\ & = \frac{2}{N} \frac{\omega_{N-1}}{\omega_N} (N+1) \int_{\mathbb{R}^N} \|z\| \mu_1(\|z\|) dz \int_0^T \text{TV}(u(t)) dt \\ & = \frac{2}{N} \frac{\omega_{N-1}}{\omega_N} (N+1) \frac{N\omega_N}{2\omega_{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} |z_1| \mu_1(\|z\|) dz \int_0^T \text{TV}(u(t)) dt \\ & = (N+1)C_1 \int_0^T \text{TV}(u(t)) dt, \end{aligned}$$

où C_1 est défini comme en (7.4.8). En outre, on peut majorer de façon identique le troisième terme de (7.4.22) :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-t)} |u(t,x) - u(t,y)| \frac{1}{\lambda^N} \mu_1 \left(\frac{\|x-y\|}{\lambda} \right) \|x-y\| dx dy dt \\ \rightarrow_{\lambda \rightarrow 0} & C_1 \int_0^T \text{TV}(u(t)) dt. \end{aligned}$$

Avec ces nouvelles majorations pour les 2ème et 3ème termes du membre de droite de (7.4.22), on a

$$\begin{aligned} \text{TV}(u(T)) & \leq \text{TV}(u_0) + ((2N+1)\|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty}) \int_0^T \text{TV}(u(t)) dt \\ & \quad + \frac{M_1}{C_1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div } f)(t, x, u(t, \cdot))\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt. \end{aligned}$$

En notant $\kappa_1 = (2N + 1)\|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty}$, on obtient finalement

$$\mathrm{TV}(u(t)) \leq \mathrm{TV}(u_0)e^{\kappa_1 T} + NW_N \int_0^T e^{\kappa_1(T-t)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \operatorname{div} f)(t, x, u(t, \cdot))\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt . \quad (8.2.3)$$

□

On utilise désormais l'estimation du Théorème 8.2.1 pour montrer le Théorème 8.2.2.

Preuve du Théorème 8.2.2. On utilise notre nouvelle estimation (8.2.3) pour majorer

le terme $S(T)$ défini par (7.5.14). Pour ce faire, il faut essentiellement remplacer κ_0 par κ_1 . Un autre léger changement vient du terme $\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \operatorname{div} f)(t, x, u(t, \cdot))\|_{\mathbf{L}^\infty} dx$, qui remplace désormais le terme $\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \operatorname{div} f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx$. Cette légère amélioration du Théorème 7.2.5 change la définition de $b(t)$ défini en (7.5.15). Le même changement s'opère pour le terme $c(t)$ de (7.5.15), dont la majoration est donnée par le Lemme 8.2.3 qui est une petite amélioration du Lemme 7.5.4. On obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon, \eta, \lambda \rightarrow 0} L_x &\leq \int_0^T \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)} \left\| ((F - G) - \operatorname{div}(f - g))(t, y, u(t, \cdot)) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} dy dt \\ &\quad + \left(N\|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u(F - G)\|_{\mathbf{L}^\infty} \right) \\ &\quad \times \int_0^T \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)} |v(t, x) - u(t, x)| dx dt . \end{aligned}$$

Une fois que les définitions de κ_0 , $b(t)$ et $c(t)$ sont changées, les arguments sont exactement les mêmes que dans la preuve du Théorème 7.2.6 et on obtient ainsi l'estimation du Théorème 8.2.2.

Notons que, en introduisant $k = \|\partial_u(F - G)\|_{\mathbf{L}^\infty} - \|\nabla\partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty}$, on a

$$\frac{e^{\kappa_1 t} - e^{\kappa t}}{\kappa_1 - \kappa} = e^{\kappa_1 t} \frac{e^{kt} - 1}{k} .$$

□

Lemme 8.2.3. Soient L_x défini comme en (7.5.7) et M_1 comme en (7.4.21). Alors

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} L_x &\leq \int_0^T \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)} \left\| ((F-G) - \operatorname{div}(f-g))(t, x, u(t, \cdot)) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt \\
&\quad + \left\| \partial_u(F-G - \operatorname{div}(f-g)) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \left[T \sup_{\tau \in [0, T]} \operatorname{TV}(u(\tau)) \lambda \right. \\
&\quad \quad \left. + T \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ s \in]t, t+\eta[}} \int_{B(x_0, R+\lambda+M(T_0-t)+\theta)} |u(t, y) - u(s, y)| dy \right] \\
&\quad + \left(N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u(F-G)\|_{\mathbf{L}^\infty} \right) \\
&\quad \times \left[\int_0^T \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)} |v(t, x) - u(t, x)| dx dt \right. \\
&\quad \quad \left. + T \sup_{\tau \in [0, T]} \operatorname{TV}(u(\tau)) \lambda \right. \\
&\quad \quad \left. + T \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ s \in]t, t+\eta[}} \int_{\|y-x_0\| \leq R+\lambda+M(T_0-t)+\theta} |u(t, y) - u(s, y)| dy \right] \\
&\quad + \lambda M_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left\| \nabla(F - \operatorname{div} f)(t, x, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt.
\end{aligned}$$

Preuve. Soit

$$L_1 = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} ((F-G) - \operatorname{div}(f-g))(t, x, u(t, x)) \varphi \operatorname{sign}(u-v) dx dt dy ds,$$

$$\begin{aligned}
L'_1 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[((F-G) - \operatorname{div}(f-g))(t, x, u(s, y)) \right. \\
&\quad \left. - ((F-G) - \operatorname{div}(f-g))(t, x, u(t, x)) \right] \varphi \operatorname{sign}(u-v) dx dt dy ds,
\end{aligned}$$

$$L_2 = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} ((F-G)(t, x, v) - (F-G)(t, x, u)) \varphi \operatorname{sign}(u-v) dx dt dy ds,$$

$$\begin{aligned}
L_3 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} (F(t, y, u) - F(t, y, v) + \operatorname{div} f(t, x, u) - \operatorname{div} f(t, x, v)) \varphi \\
&\quad \times \operatorname{sign}(u-v) dx dt dy ds,
\end{aligned}$$

$$L_4 = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} ((F - \operatorname{div} f)(t, y, v) - (F - \operatorname{div} f)(t, x, v)) \varphi \operatorname{sign}(u-v) dx dt dy ds,$$

de sorte que $L_x = L_1 + L'_1 + L_2 + L_3 + L_4$. Clairement,

$$L_1 \leq \int_0^{T+\varepsilon} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T_0-t)+\theta} \left\| ((F-G) - \operatorname{div}(f-g))(t, x, u(t, \cdot)) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt.$$

Pour L'_1 ,

$$L'_1 \leq \left\| \partial_u(F-G - \operatorname{div}(f-g)) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u(s, y) - u(t, x)| \varphi dx dt dy ds.$$

Pour L_2 et L_3 , on a

$$L_2 \leq \|\partial_u(F - G)\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u(s, y) - v(t, x)| \varphi \, dx \, dt \, dy \, ds,$$

$$L_3 = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \text{sign}(u - v) \left(\int_v^u (\partial_u \text{div} f(t, x, w) + \partial_u F(t, y, w)) \, dw \right) \varphi \, dx \, dt \, dy \, ds$$

$$\leq (N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty}) \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} |v(t, x) - u(s, y)| \varphi \, dx \, dt \, dy \, ds.$$

En procédant comme pour J_x , on trouve la majoration suivante pour le terme de la forme $\iiint |v(t, x) - u(s, y)| \varphi$ dans L_2, L_3 .

$$L_2 + L_3 \leq \left(N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\partial_u(F - G)\|_{\mathbf{L}^\infty} \right)$$

$$\times \left[\int_0^{T+\varepsilon} \int_{B(x_0, R+M(T_0-t)+\theta)} |v(t, x) - u(t, x)| \, dx \, dt + (T + \varepsilon) \sup_{\tau \in [0, T+\varepsilon]} \text{TV}(u(\tau)) \lambda \right.$$

$$\left. + (T + \varepsilon) \sup_{\substack{t \in [0, T+\varepsilon] \\ s \in]t, t+\eta[}} \int_{\|y-x_0\| \leq R+\lambda+M(T_0-t)+\theta} |u(t, y) - u(s, y)| \, dy \right].$$

Pour L_4 on a

$$L_4 = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_0^1 \nabla(F - \text{div} f)(t, rx + (1-r)y, v) \cdot (y - x) \, dr \right] \varphi$$

$$\times \text{sign}(u - v) \, dx \, dt \, dy \, ds$$

$$\leq \lambda M_1 \int_0^{T+\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \text{div} f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} \, dx \, dt.$$

On conclut la preuve en remarquant que $L_x = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$. □

Chapitre 9

Contrôle de l'équation de continuité

Cet article [40], issu d'une collaboration avec R. M. Colombo et M. Herty, soumis à *ESAIM-COCV* en Février 2009, s'intéresse aux propriétés analytiques des solutions d'une équation de continuité avec flux non-local

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho V(\rho)) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \\ \rho(0, x) = \rho_0(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (9.0.1)$$

Ce genre d'équations comprend en particulier un modèle de chaîne de montage ou encore un modèle de trafic piéton. On prouve tout d'abord le caractère bien posé des solutions faibles entropiques d'une classe d'équations comprenant ces exemples. Ensuite, sous des hypothèses de régularité supplémentaires, on prouve la Gâteaux différentiabilité des solutions par rapport aux conditions initiales et on caractérise cette dérivée comme étant la solution de l'équation linéarisée

$$\begin{cases} \partial_t r + \operatorname{div}(rV(\rho) + \rho DV(\rho)(r)) = 0 & (t, x) \in I \times \mathbb{R}^N \\ r(0, x) = r_0(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (9.0.2)$$

Il s'ensuit finalement une condition nécessaire d'optimalité pour une fonctionnelle de coût bien choisie.

Au paragraphe 9.2, on énonce les principaux résultats. La différentiabilité au sens de Gâteaux est fournie par le Théorème 9.2.10 et elle est appliquée au contrôle des chaînes de montage par le Théorème 9.3.2. Les paragraphes 9.3 et 9.4 fournissent des exemples de modèles basés sur (9.0.1), et au paragraphe 9.5, on donne les détails techniques des preuves de nos résultats.

La suite est en anglais car c'est la reproduction de l'article [40].

9.1 Introduction

We consider the scalar continuity equation in N space dimensions (9.0.1) with a *non local* speed function V . This kind of equations appears in numerous examples, a first one being the supply chain model introduced in [4, 6], where $V(\rho) = v \left(\int_0^1 \rho(x) dx \right)$, see Section 9.3. Another example comes from pedestrian traffic, in which a reasonable model can be based on (9.0.1) with the functional $V(\rho) = v(\rho * \eta) \vec{v}(x)$, see Section 9.4. Throughout, our assumptions are modeled on these examples. Other analytically similar situations are found

in [13], where a kinetic model for pedestrians is presented, and in [109], which concerns the Keller–Segel model.

In the following we postulate assumptions on the function V which are satisfied in the cases of the supply chain model and of the pedestrian model, but not for general functions. In particular, we essentially require below that V is a *non local* function, see (9.2.1).

The first question we address is that of the well posedness of (9.0.1). Indeed, we show in Theorem 9.2.2 that (9.0.1) admits a unique local in time weak entropy solution on a time interval I . For all t in I , we call S_t the nonlinear local semigroup that associates to the initial condition ρ_0 the solution $S_t\rho_0$ of (9.0.1) at time t . As in the standard case, S_t turns out to be \mathbf{L}^1 -Lipschitz.

Then, we look for the Gâteaux differentiability of the map $\rho_0 \mapsto S_t\rho_0$, in any direction r_0 and for all $t \in I$. A weak Gâteaux differentiability of the semigroup generated by (9.0.1) is proved along any solution $\rho \in \mathcal{C}^0(I; (\mathbf{W}^{1,1} \cap \mathbf{W}^{1,\infty})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ and in any direction $r_0 \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Full differentiability follows under stronger assumptions. Moreover, the Gâteaux derivative of S_t at ρ_0 in the direction r_0 is uniquely characterized as weak entropy solution to the linear non-local Cauchy problem (9.0.2), where $\rho(t, x) = (S_t\rho_0)(x)$, that can be formally obtained by linearizing (9.0.1). Thus, also the well posedness of the nonlocal problem (9.0.2) needed to be proved, see Proposition 9.2.8. Remark that, in both (9.0.1) and (9.0.2), solutions are constructed in $\mathcal{C}^0(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$. Therefore, we mostly refer to Kružkov solutions, see [81, Definition 1]. Indeed, this definition of solutions is more demanding than that of weak solutions. Besides, it allows us to apply the results in [41], used in the subsequent part concerning the differentiability of solutions with respect to the initial datum. However, we note that in the case of the standard transport equation (9.5.2) and with the regularity conditions assumed below, the two notions of solution coincide, see Lemma 9.5.1.

We recall here the well known standard (i.e. local) situation : the semigroup generated by a conservation law is in general *not* differentiable in \mathbf{L}^1 , not even in the scalar 1D case, see [23, Section 1]. To cope with these issues, an entirely new differential structure was introduced in [23], and further developed in [16, 24], also addressing optimal control problems, see [25, 38]. However, the mere definition of the shift differential in the scalar 1D case takes alone about a page, see [38, p. 89–90]. We refer to [19, 20, 67, 136, 137] for further results and discussions about the scalar one-dimensional case.

Then, we introduce a cost function $\mathcal{J}: \mathcal{C}^0(I, \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{R}$ and, using the differentiability property given above, we find a *necessary condition* on the initial data ρ_0 in order to minimize \mathcal{J} along the solutions to (9.0.1) associated to ρ_0 . We stress that the present necessary conditions are obtained within the functional setting typical of scalar conservation laws, i.e. within \mathbf{L}^1 and \mathbf{L}^∞ . No reflexivity property is ever used.

The paper is organized as follows. In Section 9.2, we state the main results of this paper. The differentiability is proved in Theorem 9.2.10 and applied to a control in supply chain management in Theorem 9.3.2. The sections 9.3 and 9.4 provide examples of models based on (9.0.1), and in Section 9.5 we give the detailed proofs of our results.

9.2 Notation and Main Results

Denote $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ and by I , respectively I_{ex} , the interval $[0, T[$, respectively $[0, T_{\text{ex}}[$, for $T, T_{\text{ex}} > 0$. The open ball in \mathbb{R}^N centered at 0 with radius δ is

denoted by $B(0, \delta)$. Furthermore, we introduce the norms :

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathbf{L}^\infty} &= \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^N} \|v(x)\|, & \|v\|_{\mathbf{W}^{1,1}} &= \|v\|_{\mathbf{L}^1} + \|\nabla_x v\|_{\mathbf{L}^1}, \\ \|v\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} &= \|v\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\nabla_x v\|_{\mathbf{L}^\infty} + \left\| \nabla_x^2 v \right\|_{\mathbf{L}^\infty}, & \|v\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} &= \|v\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\nabla_x v\|_{\mathbf{L}^\infty}. \end{aligned}$$

9.2.1 Existence of a Weak Entropy Solution to (9.0.1)

Let $V: \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ be a functional, not necessarily linear. A straightforward extension of [81, Definition 1] yields the following definition of weak solutions for (9.0.1).

Definition 9.2.1. Fix $\rho_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. A weak entropy solution to (9.0.1) on I is a bounded measurable map $\rho \in \mathcal{C}^0(I; \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ which is a Kruřkov solution to

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho w(t, x)) = 0 \\ \rho(0, x) = \rho_0(x) \end{cases} \quad \text{where} \quad w(t, x) = \left(V(\rho(t)) \right) (x).$$

Here, differently from [81, Definition 1], we require the full continuity in time.

Introduce the spaces

$$\mathcal{X} = (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \quad \text{and} \quad \mathcal{X}_\alpha = (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; [0, \alpha]) \quad \text{for } \alpha > 0$$

both equipped with the \mathbf{L}^1 distance. Obviously, $\mathcal{X}_\alpha \subset \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ for all $\alpha > 0$.

We pose the following assumptions on V , all of which are satisfied in the examples on supply chain and pedestrian flow as shown in Section 9.3 and Section 9.4, respectively.

(V1) There exists a function $C \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ such that for all $\rho \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} V(\rho) &\in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), \\ \|\nabla_x V(\rho)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})} &\leq C(\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}), \\ \|\nabla_x V(\rho)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})} &\leq C(\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}), \\ \left\| \nabla_x^2 V(\rho) \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N \times N})} &\leq C(\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}). \end{aligned}$$

There exists a function $C \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ such that for all $\rho_1, \rho_2 \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|V(\rho_1) - V(\rho_2)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} &\leq C(\|\rho_1\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}) \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}, \quad (9.2.1) \\ \|\nabla_x V(\rho_1) - \nabla_x V(\rho_2)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})} &\leq C(\|\rho_1\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}) \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

(V2) There exists a function $C \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ such that for all $\rho \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$,

$$\left\| \nabla_x^2 V(\rho) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N \times N})} \leq C(\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}).$$

(V3) $V: \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ and there exists a function $C \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ such that for all $\rho \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$,

$$\left\| \nabla_x^3 V(\rho) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N \times N \times N})} \leq C(\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}).$$

Condition (9.2.1) essentially requires that V be a *non local* operator. Note that **(V3)** implies **(V2)**. Existence of a solution to (9.0.1) (at least locally in time) can be proved under only assumption **(V1)**, see Theorem 9.2.2. The stronger bounds on V ensure additional regularity of the solution which is required later to derive the differentiability properties, see Proposition 9.2.5.

Theorem 9.2.2. *Let **(V1)** hold. Then, for all $\alpha, \beta > 0$ with $\beta > \alpha$, there exists a time $T(\alpha, \beta) > 0$ such that for all $\rho_0 \in \mathcal{X}_\alpha$, problem (9.0.1) admits a unique weak entropy solution $\rho \in \mathcal{C}^0([0, T(\alpha, \beta)]; \mathcal{X}_\beta)$ in the sense of Definition 9.2.1. Moreover,*

1. $\|\rho(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \beta$ for all $t \in [0, T(\alpha, \beta)]$.
2. There exists a function $L \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ such that for all $\rho_{0,1}, \rho_{0,2}$ in \mathcal{X}_α , the corresponding solutions satisfy, for all $t \in [0, T(\alpha, \beta)]$,

$$\|\rho_1(t) - \rho_2(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq L(t) \|\rho_{0,1} - \rho_{0,2}\|_{\mathbf{L}^1}$$

3. There exists a constant $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\beta)$ such that for all $\rho_0 \in \mathcal{X}_\alpha$, the corresponding solution satisfies for all $t \in [0, T(\alpha, \beta)]$

$$\text{TV}(\rho(t)) \leq (\text{TV}(\rho_0) + \mathcal{L}t \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty}) e^{\mathcal{L}t} \quad \text{and} \quad \|\rho(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} e^{\mathcal{L}t}.$$

The above result is *local* in time. Indeed, as β grows, $\mathcal{L}(\beta)$ may well grow, even unboundedly. Hence, both the total variation and the \mathbf{L}^∞ norm of the solution may well blow up in finite time. To ensure global existence in time we need additional conditions on V :

(A) V is such that for all $\rho \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ and all $x \in \mathbb{R}^N$, $(\text{div } V(\rho))(x) \geq 0$.

(B) The function C in **(V1)** is bounded, i.e. $C \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$.

Note that in the supply chain model discussed in Section 9.3, condition **(A)** applies. On the contrary, in the case of the pedestrian model in Section 9.4, iterating Theorem 9.2.2, we obtain the existence of solution up to time $\sum_i T(\alpha_i, \alpha_{i+1})$. The latter turns out to be a convergent series, see Remark 9.5.5.

Lemma 9.2.3. *Assume all assumptions of Theorem 9.2.2. Let also **(A)** hold. Then, for all $\alpha > 0$, the set \mathcal{X}_α is invariant for (9.0.1), hence if the initial datum ρ_0 is such that $\|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq \alpha$, then $\|\rho(t)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq \alpha$ as long as the solution $\rho(t)$ exists.*

Condition **(B)**, although it does not guarantee the boundedness of the solution, does ensure the global existence of the solution to (9.0.1).

Theorem 9.2.4. *Let **(V1)** hold. Assume moreover that **(A)** or **(B)** hold. Then, there exists a unique semigroup $S: \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ with the following properties :*

- (S1) : For all $\rho_0 \in \mathcal{X}$, the orbit $t \mapsto S_t \rho_0$ is a weak entropy solution to (9.0.1).
- (S2) : S is \mathbf{L}^1 -continuous in time, i.e. for all $\rho_0 \in \mathcal{X}$, the map $t \mapsto S_t \rho_0$ is in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{X})$.
- (S3) : S is \mathbf{L}^1 -Lipschitz with respect to the initial datum, i.e. for a suitable positive $L \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, for all $t \in \mathbb{R}_+$ and all $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{X}$,

$$\|S_t \rho_1 - S_t \rho_2\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq L(t) \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}.$$

- (S4) : There exists a positive constant \mathcal{L} such that for all $\rho_0 \in \mathcal{X}$ and all $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\text{TV}(\rho(t)) \leq (\text{TV}(\rho_0) + \mathcal{L}t \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}) e^{\mathcal{L}t}.$$

Higher regularity of the solutions of (9.0.1) can be proved under stronger bounds on V .

Proposition 9.2.5. *Let (V1) and (V2) hold. With the same notations as introduced in Theorem 9.2.2, if $\rho_0 \in \mathcal{X}_\alpha$, then*

$$\begin{aligned} \rho_0 \in (\mathbf{W}^{1,1} \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) &\implies \forall t \in [0, T(\alpha, \beta)], \quad \rho(t) \in \mathbf{W}^{1,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), \\ \rho_0 \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) &\implies \forall t \in [0, T(\alpha, \beta)], \quad \rho(t) \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), \end{aligned}$$

and there exists a positive constant $C = C(\beta)$ such that

$$\|\rho(t)\|_{\mathbf{W}^{1,1}} \leq e^{2Ct} \|\rho_0\|_{\mathbf{W}^{1,1}} \quad \text{and} \quad \|\rho(t)\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} \leq e^{2Ct} \|\rho_0\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}}.$$

Furthermore, if V also satisfies (V3), then

$$\rho_0 \in (\mathbf{W}^{2,1} \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; [\alpha, \beta]) \implies \forall t \in [0, T(\alpha, \beta)], \quad \rho(t) \in \mathbf{W}^{2,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$$

and for a suitable non-negative constant $C = C(\beta)$, we have the estimate

$$\|\rho(t)\|_{\mathbf{W}^{2,1}} \leq e^{Ct} (2e^{Ct} - 1)^2 \|\rho_0\|_{\mathbf{W}^{2,1}}.$$

The proofs are deferred to Section 9.5.

9.2.2 Differentiability

This section is devoted to the differentiability of the semigroup S (defined in Theorem 9.2.2) with respect to the initial datum ρ_0 , according to the following notion. Recall first that a map $F: \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ is strongly \mathbf{L}^1 Gâteaux differentiable in any direction at $\rho_0 \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ if there exists a continuous linear map $DF(\rho_0): \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ such that for all $r_0 \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ and for any real sequence (h_n) with $h_n \rightarrow 0$,

$$\frac{F(\rho_0 + h_n r_0) - F(\rho_0)}{h_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} DF(\rho_0)(r_0) \quad \text{strongly in } \mathbf{L}^1.$$

Besides proving the differentiability of the semigroup, we also characterize the differential. Formally, a sort of first order expansion of (9.0.1) with respect to the initial datum can be obtained through a standard linearizing procedure, which yields (9.0.2). Now, we rigorously show that the derivative of the semigroup in the direction r_0 is indeed the solution to (9.0.2) with initial condition r_0 . To this aim, we need a forth and final condition on V .

(V4) There exists a function $K \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ such that for all $\rho \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$, for all $r \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \|V(\rho + r) - V(\rho) - DV(\rho)(r)\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} &\leq K (\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\rho + r\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|r\|_{\mathbf{L}^1}^2, \\ \|DV(\rho)(r)\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} &\leq K (\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|r\|_{\mathbf{L}^1}. \end{aligned}$$

Consider now system (9.0.2), where $\rho \in \mathcal{C}^0(I_{\text{ex}}, \mathcal{X})$ is a given function. We introduce a notion of solution for (9.0.2) and give conditions which guarantee the existence of a solution.

Definition 9.2.6. Fix $r_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. A function $r \in \mathcal{C}^0(I; \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+))$, bounded and measurable, is a *weak solution* to (9.0.2) if for any test function $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\overset{\circ}{I} \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} [r \partial_t \varphi + r a(t, x) \cdot \nabla_x \varphi - \text{div} b(t, x) \varphi] \, dx \, dt = 0 \quad \text{where} \quad \begin{aligned} a &= V(\rho) \\ b &= \rho DV(\rho)(r) \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

and $r(0) = r_0$ a.e. in \mathbb{R}^N .

We now extend the classical notion of Kružkov solution to the present non local setting.

Definition 9.2.7. Fix $r_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$. A function $r \in \mathcal{C}^0(I; \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+))$, bounded and measurable, is a *Kružkov solution to the nonlocal problem (9.0.2)* if it is a Kružkov solution to

$$\begin{cases} \partial_t r + \operatorname{div}(r a(t, x) + b(t, x)) = 0 \\ r(0, x) = r_0(x) \end{cases} \quad \text{where } a = V(\rho) \text{ and } b = \rho DV(\rho)(r).$$

In other words, r is a Kružkov solution to (9.0.2) if for all $k \in \mathbb{R}$ and for any test function $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left[(r - k) \partial_t \varphi + (r - k) V(\rho) \cdot \nabla_x \varphi - \operatorname{div}(kV(\rho) + \rho DV(\rho)(r)) \varphi \right] \operatorname{sgn}(r - k) \, dx \, dt \geq 0$$

and $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{B(0, \delta)} |r(t) - r_0| \, dx = 0$ for all $\delta > 0$.

Condition **(V4)** ensures that if $\rho \in \mathbf{W}^{1,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, then $DV(\rho)(r) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ and hence for all $t \geq 0$, the map $x \mapsto \rho(t, x) DV(\rho(t))(r(t, x))$ is in $\mathbf{W}^{1,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, so that the integral above is meaningful.

Proposition 9.2.8. Let **(V1)** and **(V4)** hold. Fix $\rho \in \mathcal{C}^0(I_{\text{ex}}; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ such that $\rho(t) \in (\mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{1,1})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ for all $t \in I_{\text{ex}}$. Then, for all $r_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ there exists a unique weak entropy solution to (9.0.2) in $\mathcal{C}^0(I_{\text{ex}}; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ and for all time $t \in I_{\text{ex}}$, with $C = C(\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})})$ as in **(V1)** and $K = K(\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})})$ as in **(V4)**

$$\begin{aligned} \|r(t)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq e^{Kt\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{W}^{1,1})}} e^{Ct} \|r_0\|_{\mathbf{L}^1} \\ \|r(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq e^{Ct} \|r_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + Kt e^{2Ct} e^{Kt\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{W}^{1,1})}} \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{W}^{1,\infty})} \|r_0\|_{\mathbf{L}^1}. \end{aligned}$$

If **(V2)** holds, $\rho \in \mathbf{L}^\infty(I_{\text{ex}}; (\mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{2,1})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ and $r_0 \in (\mathbf{W}^{1,1} \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, then for all $t \in I_{\text{ex}}$, $r(t) \in \mathbf{W}^{1,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ and

$$\|r(t)\|_{\mathbf{W}^{1,1}} \leq (1 + C't) e^{2C't} \|r_0\|_{\mathbf{W}^{1,1}} + Kt(1 + Ct) e^{4C't} \|r_0\|_{\mathbf{L}^1} \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{W}^{2,1})}.$$

where $C' = \max\{C, K\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I_{\text{ex}}; \mathbf{W}^{1,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))}\}$.

Under **(V1)** and **(V4)**, the following mild differentiability result can be proved.

Proposition 9.2.9. Let **(V1)** and **(V4)** hold. Let $\rho_0 \in (\mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{1,1})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ and $r_0 \in \mathcal{X}_1$. Then, there exist $h_* > 0$ and $T_* = T_*(\|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty})$, such that for all $h \in [0, h_*]$ the solution ρ to (9.0.1) and the solution ρ_h to

$$\begin{cases} \partial_t \rho_h + \operatorname{div}(\rho_h V(\rho_h)) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \\ \rho_h(0, x) = \rho_0(x) + h r_0(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (9.2.3)$$

are defined for all $t \in [0, T_*]$. Moreover, if there exists an $r \in \mathbf{L}^1([0, T_*] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ such that $(\rho_h - \rho)/h \xrightarrow{h \rightarrow 0} r$, then r is a distributional solution to (9.0.2), i.e. it satisfies (9.2.2).

Below, we consider the following stronger hypothesis, under which we derive a result of strong Gâteaux differentiability and uniqueness of the derivative.

(V5) There exists a function $K \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ such that for all $\rho, \tilde{\rho} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$

$$\left\| \operatorname{div} (V(\tilde{\rho}) - V(\rho) - DV(\rho)(\tilde{\rho} - \rho)) \right\|_{\mathbf{L}^1} \leq K (\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\tilde{\rho}\|_{\mathbf{L}^\infty}) (\|\tilde{\rho} - \rho\|_{\mathbf{L}^1})^2$$

and the map $r \rightarrow \operatorname{div} DV(\rho)(r)$ is a bounded linear operator on $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, i.e. for all $\rho, r \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$

$$\left\| \operatorname{div} (DV(\rho)(r)) \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq K (\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}) \|r\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}.$$

Theorem 9.2.10. *Let (V1), (V3), (V4) and (V5) hold. Let $\rho_0 \in (\mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{2,1})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, $r_0 \in (\mathbf{W}^{1,1} \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, and denote T_{ex} the time of existence of the solution of (9.0.1) with initial condition ρ_0 . Then, for all time $t \in I_{\text{ex}}$ the local semigroup defined in Theorem 9.2.2 is strongly \mathbf{L}^1 Gâteaux differentiable in the direction r_0 . The derivative $\operatorname{DS}_t(\rho_0)(r_0)$ of S_t at ρ_0 in the direction r_0 is*

$$\operatorname{DS}_t(\rho_0)(r_0) = \Sigma_t^{\rho_0}(r_0).$$

where Σ^{ρ_0} is the linear application generated by the Kružkov solution to (9.0.2), where $\rho = S_t \rho_0$, for all $t \in I_{\text{ex}}$.

9.2.3 Necessary Optimality Conditions for Problems Governed by (9.0.1)

Aiming at necessary optimality conditions for non linear functionals defined on the solutions to (9.0.1), we prove the following chain rule formula.

Proposition 9.2.11. *Let $T > 0$ and $I = [0, T[$. Assume that $f \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$, $\psi \in \mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ and that $S: I \times (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ is strongly \mathbf{L}^1 Gâteaux differentiable. For all $t \in I$, let*

$$J(\rho_0) = \int_{\mathbb{R}^N} f(S_t \rho_0) \psi(t, x) \, dx. \quad (9.2.4)$$

Then, J is strongly \mathbf{L}^∞ Gâteaux differentiable in any direction $r_0 \in (\mathbf{W}^{1,1} \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Moreover,

$$\operatorname{DJ}(\rho_0)(r_0) = \int_{\mathbb{R}^N} f'(S_t \rho_0) \Sigma_t^{\rho_0}(r_0) \psi(t, x) \, dx.$$

Proof. Since $|f(\rho_h) - f(\rho) - f'(\rho)(\rho_h - \rho)| \leq \mathbf{Lip}(f') |\rho_h - \rho|^2$, we have

$$\begin{aligned} & \left| \frac{J(\rho_0 + hr_0) - J(\rho_0)}{h} - \int_{\mathbb{R}^N} f'(S_t \rho_0) \operatorname{DS}_t(\rho_0)(r_0) \psi(t, x) \, dx \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f'(S_t \rho_0)| \left| \frac{S_t(\rho_0 + hr_0) - S_t(\rho_0)}{h} - \operatorname{DS}_t(\rho_0)(r_0) \right| |\psi(t, x)| \, dx \\ & \quad + \mathbf{Lip}(f') \frac{1}{|h|} \int_{\mathbb{R}^N} |S_t(\rho_0 + hr_0) - S_t(\rho_0)|^2 |\psi(t, x)| \, dx. \end{aligned}$$

The strong Gâteaux differentiability of S_t in \mathbf{L}^1 then yields

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f'(S_t \rho_0)| \left| \frac{S_t(\rho_0 + hr_0) - S_t(\rho_0)}{h} - \operatorname{DS}_t(\rho_0)(r_0) \right| |\psi(t, x)| \, dx = o(1) \quad \text{as } h \rightarrow 0$$

thanks to $S_t \rho_0 \in \mathbf{L}^\infty$ and to the local boundedness of f' . Furthermore,

$$\begin{aligned} S_t(\rho_0), S_t(\rho_0 + hr_0) &\in \mathbf{L}^\infty \\ \frac{1}{h} (S_t(\rho_0 + hr_0) - S_t(\rho_0)) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \text{D}S_t(\rho_0)(r_0) \text{ pointwise a.e.} \\ S_t(\rho_0 + hr_0) - S_t(\rho_0) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ pointwise a.e.} \end{aligned}$$

the Dominated Convergence Theorem ensures that the higher order term in the latter expansion tend to 0 as $h \rightarrow 0$. □

The above result can be easily extended. First, to more general (non linear) functionals $J(\rho_0) = \mathcal{J}(S_t \rho_0)$, with $\mathcal{J}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that for all $\rho \in \mathcal{X}$ there exists a continuous linear application $\text{D}\mathcal{J}(\rho): \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ such that for all $\rho, r \in \mathcal{X}$:

$$\left| \frac{\mathcal{J}(\rho + hr) - \mathcal{J}(\rho)}{h} - \text{D}\mathcal{J}(\rho)(r) \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Secondly, to functionals of the type

$$J(\rho_0) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} f(S_t \rho_0) \psi(t, x) \, dx \, dt \quad \text{or} \quad J(\rho_0) = \int_0^T \mathcal{J}(S_t \rho_0) \, dt .$$

This generalization, however, is immediate and we omit the details.

Once the differentiability result above is available, a necessary condition of optimality is straightforward.

Proposition 9.2.12. *Let $f \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ and $\psi \in \mathbf{L}^\infty(I_{\text{ex}} \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Assume that $S: I \times (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ is strongly \mathbf{L}^1 Gâteaux differentiable. Define J as in (9.2.4). If $\rho_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ solves the problem*

$$\text{find } \min_{\rho_0} \mathcal{J}(\rho) \text{ subject to } \{\rho \text{ is solution to (9.0.1)}\}.$$

then, for all $r_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f'(S_t \rho_0) \Sigma_t^{\rho_0} r_0 \psi(t, x) \, dx = 0. \tag{9.2.5}$$

9.3 Demand Tracking Problems for Supply Chains

Recently, D. Armbruster et al. [6], introduced a continuum model to simulate the average behavior of highly re-entrant production systems at an aggregate level appearing, for instance, in large volume semiconductor production line. The factory is described by the density of products $\rho(t, x)$ at stage x of the production at a time t . Typically, see [1, 6, 76], the production velocity V is a given smooth function of the total load $\int_0^1 \rho(t, x) \, dx$, for example

$$v(u) = v_{\text{max}}/(1 + u) \quad \text{and} \quad V(\rho) = v \left(\int_0^1 \rho(t, s) \, ds \right). \tag{9.3.1}$$

The full model, given by (9.0.1)–(9.3.1) with $N = 1$, fits in the present framework.

Proposition 9.3.1. *Let $v \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$. Then, the functional V defined as in (9.3.1) satisfies (A), (V1), (V2), (V3). Moreover, if $v \in \mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbb{R})$, then V satisfies also (V4) and (V5).*

The proof is deferred to Paragraph 9.5.4.

The supply chain model with V given by (9.3.1) satisfies (V1) to (V5) and (A). Therefore, Theorem 9.2.4 applies and, in particular, the set $[0, 1]$ is invariant yielding global well posedness. By Theorem 9.2.10, the semigroup $S_t \rho_0$ is Gâteaux differentiable in any direction r_0 and the differential is given by the solution to (9.0.2).

Note that the velocity is constant across the entire system at any time. In fact, in a real world factory, all parts move through the factory with the same speed. While in a serial production line, speed through the factory is dependent on all items and machines downstream, in a highly re-entrant factory this is not the case. Since items must visit machines more than once, including machines at the beginning of the production process, their speed through factory is determined by the total number of parts both upstream and downstream from them. Such re-entrant production is characteristic for semiconductor production lines. Typically, the output of the whole factory over a longer timescale, e.g. following a seasonal demand pattern or ramping up or down a new product, can be controlled by prescribing the inflow density to a factory $\rho(t, x = 0) = \lambda(t)$. The influx should be chosen in order to achieve either of the following objective goals [6] :

- (1) Minimize the mismatch between the outflow and a demand rate target $d(t)$ over a fixed time period (demand tracking problem). This is modelled by the cost functional $\frac{1}{2} \int_0^T (d(t) - \rho(1, t))^2 dt$.
- (2) Minimize the mismatch between the total number of parts that have left the factory and the desired total number of parts over a fixed time period $d(t)$. The backlog of a production system at a given time t is defined as the total number of items that have been demanded minus the total number of items that have left the factory up to that time. Backlog can be negative or positive, with a negative backlog corresponding to overproduction and a positive backlog corresponding to a shortage. This problem is modeled by $\frac{1}{2} \int_0^T \left(\int_0^t d(\tau) u - \rho(1, \tau) d\tau \right)^2 dt$.

In both cases we are interested in the influx $\lambda(t)$. A numerical integration of this problem has been studied in [101]. In order to apply the previous calculus we reformulate the optimization problem for the influx density $\lambda(t) = \rho_0(-t)$ where ρ_0 is the solution to a minimization problem for

$$\begin{aligned} J_1(\rho_0) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (d(x) - S_T \rho_0(x))^2 dx \\ J_2(\rho_0) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^x (d(\xi) - S_T \rho_0(\xi)) d\xi \right)^2 dx, \end{aligned} \tag{9.3.2}$$

respectively, where $S_t \rho_0$ is the solution to (9.0.1) and (9.3.1). Clearly, J_1 and J_2 satisfy the assumptions imposed in the previous section. The assertions of Proposition 9.2.12 then state necessary optimality conditions, which we summarize in the theorem below.

Theorem 9.3.2. *Let $T > 0$ be given. Let the assumptions of Proposition 9.3.1 hold. Let $\rho_0 \in (\mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{2,1})(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ be a minimizer of J_1 as defined in (9.3.2), with S being the*

semigroup generated by (9.0.1)–(9.3.1). Then, for all $r_0 \in (\mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{2,1})(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ we have

$$\int_0^1 (d(x) - \rho(T, x)) r(T, x) dx = 0, \quad \text{where}$$

$$\partial_t r + \partial_x \left(v_{\max} \frac{\left(r \int_0^1 \rho dx + \rho \int_0^1 r dx \right)}{\left(1 + \int_0^1 \rho dx \right)^2} \right) = 0, \quad r(0, x) = r_0(x).$$

The latter Cauchy problem is in the form (9.0.2) and Proposition 9.2.8 proves its well posedness. The latter proof is deferred to Paragraph 9.5.4.

9.4 A Model for Pedestrian Flow

Macroscopic models for pedestrian movements are based on the continuity equation, see [26, 36, 43, 73], possibly together with a second equation, as in [44]. In these models, pedestrians are assumed to instantaneously adjust their (vector) speed according to the crowd density at their position. The analytical construction in Section 9.2 allows to consider the more realistic situation of pedestrian deciding their speed according to the local mean density at their position. We are thus led to consider (9.0.1) with

$$V(\rho) = v(\rho * \eta) \vec{v} \tag{9.4.1}$$

where

$$\eta \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^2; [0, 1]) \text{ has support } \text{Supp } \eta \subseteq B(0, 1) \text{ and } \|\eta\|_{\mathbf{L}^1} = 1, \tag{9.4.2}$$

so that $(\rho * \eta)(x)$ is an average of the values attained by ρ in $B(x, 1)$. Here, $\vec{v} = \vec{v}(x)$ is the given direction of the motion of the pedestrian at $x \in \mathbb{R}^2$. Then, the presence of boundaries, obstacles or other geometric constraint can be described through \vec{v} , see [36].

Note that condition **(A)** does not allow any increase in the crowd density. Hence, it may not hold when describing, say, the evacuation through a narrow exit. Therefore, in general, for this example we have only a local in time solution by Theorem 9.2.2.

As in the preceding example, first we state the hypotheses that guarantee assumptions **(V1)** to **(V5)**.

Proposition 9.4.1. *Let V be defined in (9.4.1) and η be as in (9.4.2).*

1. *If $v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ and $\vec{v} \in (\mathcal{C}^2 \cap \mathbf{W}^{2,1})(\mathbb{R}^2; \mathbb{S}^1)$, then V satisfies **(V1)** and **(V2)**.*
2. *If moreover $v \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $\vec{v} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ and $\eta \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ then V satisfies **(V3)**.*
3. *If moreover $v \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ and $\eta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, then V satisfies **(V4)** and **(V5)**.*

The proof is deferred to Paragraph 9.5.4.

A typical problem in the management of pedestrian flows consists in keeping the crowd density $\rho(t, x)$ below a given threshold, say $\hat{\rho}$, in particular in a sensible compact region Ω . To this aim, it is natural to introduce a cost functional of the type

$$J(\rho_0) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} f(S_t \rho_0(x)) \psi(t, x) dx dt \tag{9.4.3}$$

where

(f) $f \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$, $f(\rho) = 0$ for $\rho \in [0, \hat{\rho}]$, $f(\rho) > 0$ and $f'(\rho) > 0$ for $\rho > \hat{\rho}$.

(ψ) $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^N; [0, 1])$, with $\text{Supp } \psi(t) = \Omega$, is a smooth approximation of the characteristic function of the compact set Ω , with $\dot{\Omega} \neq \emptyset$.

Paragraph 9.2.3 then applies, yielding the following necessary condition for optimality.

Theorem 9.4.2. *Let $T > 0$ and the assumptions of 1.–3. in Proposition 9.4.1 hold, together with (f) and (ψ). Let $\rho_0 \in (\mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{2,1})(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ be a minimizer of J as defined in (9.4.3), with S being the semigroup generated by (9.0.1)–(9.4.1). Then, for all $r_0 \in (\mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{2,1})(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, ρ_0 satisfies (9.2.5).*

The proof is deferred to Paragraph 9.5.4.

Consider the problem of evacuating a meeting room. Then, the optimal ρ_0 corresponds to the best distribution of people during meetings, so that the room is evacuated in the minimal time in case of need.

9.5 Detailed Proofs

Below, we denote by W_N the Wallis integral

$$W_N = \int_0^{\pi/2} (\cos \alpha)^N d\alpha. \quad (9.5.1)$$

9.5.1 A Lemma on the Transport Equation

In what follows, a key role will be played by the transport equation

$$\begin{cases} \partial_t r + \text{div}(r w(t, x)) = R(t, x) \\ r(0, x) = r_0(x) \end{cases} \quad (9.5.2)$$

The next lemma is similar to other results in recent literature, see for instance [2]. It provides the existence and uniqueness of solutions to (9.5.2) with the present regularity conditions, showing also that the concepts of weak and Kružkov solution here coincide, see also [148].

Lemma 9.5.1. *Let $T > 0$, so that $I = [0, T[$, and w be such that*

$$\begin{aligned} w &\in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) & w(t) &\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \quad \forall t \in I \\ w &\in \mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) & \nabla_x w &\in \mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N}). \end{aligned} \quad (9.5.3)$$

Assume that $R \in \mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})) \cap \mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ and $r_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Then,

1. the function r defined by

$$\begin{aligned} r(t, x) &= r_0(X(0; t, x)) \exp\left(-\int_0^t \text{div } w(\tau, X(\tau; t, x)) d\tau\right) \\ &\quad + \int_0^t R(\tau, X(\tau; t, x)) \exp\left(-\int_\tau^t \text{div } w(u, X(u; t, x)) du\right) d\tau, \end{aligned} \quad (9.5.4)$$

where $t \mapsto X(t; t_0, x_0)$ is the solution to the Cauchy problem

$$\begin{cases} \frac{d\chi}{dt} = w(t, \chi) \\ \chi(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (9.5.5)$$

is such that $r \in \mathcal{C}^0(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$;

2. the function r , as defined by (9.5.4), is a Kružkov solution to (9.5.2);
3. any weak solution to (9.5.2) coincides with r as defined in (9.5.4).

Recall that, in the present case, [81, Definition 1] amounts to define *Kružkov solution* to (9.5.2) a function $r \in \mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$, continuous from the right in time, such that for all $k \in \mathbb{R}$, for all test function $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, T[\times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} [(r - k)(\partial_t \varphi + w \cdot \nabla_x \varphi) + (R - k \operatorname{div} w) \varphi] \operatorname{sgn}(r - k) \, dx \, dt \geq 0 \tag{9.5.6}$$

and such that for almost every $t \in [0, T]$, for any $\delta > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{B(0, \delta)} |r(t, x) - r_0(x)| \, dx = 0. \tag{9.5.7}$$

On the other hand, by *weak* solution to (9.5.3) we mean a map $r \in \mathcal{C}^0(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})) \cap \mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ that satisfies (9.5.3) in distributional sense. Remark that as an immediate corollary of Lemma 9.5.1, we obtain that any weak solution to (9.5.2) is also a Kružkov solution and is represented by (9.5.4).

Note that the expression (9.5.4) is formally justified integrating (9.5.2) along the characteristics (9.5.5) and obtaining

$$\frac{d}{dt} \left(r(t, \chi(t)) \right) + r(t, \chi(t)) \operatorname{div} w(t, \chi(t)) = R(t, \chi(t)).$$

Recall for later use that the flow $X = X(t; t_0, x_0)$ generated by (9.5.5) can be used to introduce the change of variable $y = X(0; t, x)$, so that $x = X(t; 0, y)$, due to standard properties of the Cauchy problem (9.5.5). Denote by $J(t, y) = \det(\nabla_y X(t; 0, y))$ the Jacobian of this change of variables. Then, J satisfies the equation

$$\frac{dJ(t, y)}{dt} = \operatorname{div} w(t, X(t; 0, y)) J(t, y) \tag{9.5.8}$$

with initial condition $J(0, y) = 1$. Hence $J(t, y) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div} w(\tau, X(\tau; 0, y)) \, d\tau\right)$ which, in particular, implies $J(t, y) > 0$ for all $t \in I, y \in \mathbb{R}^N$.

Proof of Lemma 9.5.1. 1. Let $R_n \in \mathbf{L}^\infty(I; \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ and $r_{0,n} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ approximate R and r_0 in the sense

$$\|R_n - R\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))} \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \|r_{0,n} - r_0\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Call r_n the corresponding quantity as given by (9.5.4). Then, by (9.5.4), also

$$\|r_n - r\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))} \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad n \rightarrow +\infty$$

so that $r \in \mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$. Concerning continuity in time, simply note that, by (9.5.4), $r_n \in \mathcal{C}^0(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ and r is the uniform limit of the r_n .

2. The boundedness requirement follows from (9.5.4) :

$$\|r(t)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq \left(\|r_0\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} + t \|R\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \right) e^{t \|\operatorname{div} w\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})}}. \tag{9.5.9}$$

Let $k \in \mathbb{R}$ and $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$. Then, according to [81, Definition 1], we prove (9.5.6) for r given as in (9.5.4). By (9.5.8), the semigroup property of X and denoting $\mathcal{R}(t, y) = \int_0^t R(\tau, X(\tau; 0, y)) J(\tau, y) d\tau$, so that \mathcal{R} is $\mathbf{W}^{1,1}$ in time, we get

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} [(r - k)(\partial_t \varphi + w \cdot \nabla_x \varphi) + (R - k \operatorname{div} w)\varphi] \operatorname{sgn}(r - k) dx dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\frac{r_0(y)}{J(t, y)} + \frac{\mathcal{R}(t, y)}{J(t, y)} - k \right) \right. \\
&\quad \times \left(\partial_t \varphi(t, X(t; 0, y)) + w(t, X(t; 0, y)) \cdot \nabla_x \varphi(t, X(t; 0, y)) \right) \\
&\quad \left. + \left(R(t, X(t; 0, y)) - k \operatorname{div} \left(w(t, X(t; 0, y)) \right) \right) \varphi(t, X(t; 0, y)) \right] \\
&\quad \times \operatorname{sgn} \left(\frac{r_0(y)}{J(t, y)} + \frac{\mathcal{R}(t, y)}{J(t, y)} - k \right) J(t, y) dy dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[r_0(y) \frac{d}{dt} \varphi(t, X(t; 0, y)) - k J(t, y) \frac{d}{dt} \varphi(t, X(t; 0, y)) \right. \\
&\quad \left. - k \varphi(t, X(t; 0, y)) \frac{d}{dt} J(t, y) + \frac{d}{dt} \left(\mathcal{R}(t, y) \varphi(t, X(t; 0, y)) \right) \right] \\
&\quad \times \operatorname{sgn} (r_0(y) + \mathcal{R}(t, y) - k J(t, y)) dy dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt} \left((r_0(y) + \mathcal{R}(t, y) - k J(t, y)) \varphi(t, X(t; 0, y)) \right) \\
&\quad \times \operatorname{sgn} (r_0(y) + \mathcal{R}(t, y) - k J(t, y)) dy dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt} \left(|r_0(y) + \mathcal{R}(t, y) - k J(t, y)| \varphi(t, X(t; 0, y)) \right) dy dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Finally, (9.5.7) holds by the continuity proved above.

3. Let r be a weak solution to (9.5.3). It is enough to consider the case $R = 0$ and $r_0 = 0$, thanks to the linearity of (9.5.3). Then, fix $\tau \in]0, T]$, choose any $\varphi \in \mathcal{C}^1(I; \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ and let $\beta_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ such that $\beta_\varepsilon(t) = 1$ for $t \in [\varepsilon, \tau - \varepsilon]$, $\beta'_\varepsilon(t) \in [0, 2/\varepsilon]$ for $t \in [0, \varepsilon]$, $\beta'_\varepsilon(t) \in [-2/\varepsilon, 0]$ for $t \in [\tau - \varepsilon, \tau]$ and $\beta(t) = 0$ for $t \in [\tau, T]$. By the definition of weak solution,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^N} (r \partial_t \varphi + r w \cdot \nabla \varphi) \beta_\varepsilon dx dt + \int_0^\varepsilon \beta'_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} r \varphi dx dt + \int_{\tau-\varepsilon}^\tau \int_{\mathbb{R}^N} r \varphi \beta'_\varepsilon dx dt \\
&= \int_0^\tau \beta_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} (r \partial_t \varphi + r w \cdot \nabla \varphi) dx dt + \int_0^1 \varepsilon \beta'_\varepsilon(\varepsilon t) \int_{\mathbb{R}^N} r(\varepsilon t, x) \varphi(\varepsilon t, x) dx dt \\
&\quad + \int_{\tau-\varepsilon}^\tau \beta'_\varepsilon(t) \int_{\mathbb{R}^N} r(t, x) \varphi(t, x) dx dt
\end{aligned}$$

Consider the three terms separately. As $\varepsilon \rightarrow 0$, the first summand above converges to $\int_{\mathbb{R}^N} \int_0^\tau r (\partial_t \varphi + w \cdot \nabla \varphi) dt dx$. Consider the second summand, by the Dominated Conver-

gence Theorem, it tends to 0, since $r_0 = 0$. Passing to the latter term, note that :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \beta'_\varepsilon(t) \int_{\mathbb{R}^N} r(t, x) \varphi(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} r(\tau, x) \varphi(\tau, x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \beta'_\varepsilon(t) \int_{\mathbb{R}^N} (r(t, x) \varphi(t, x) - r(\tau, x) \varphi(\tau, x)) dx dt \right| \\ &\rightarrow 0 \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

by the continuity of r in time and the smoothness of φ .

Therefore, choose any $\eta \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ and define φ as the backward solution to $\partial_t \varphi + w \cdot \nabla \varphi = 0$ with $\varphi(\tau) = \eta$. Then,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^\tau r (\partial_t \varphi + w \cdot \nabla \varphi) dt dx - \int_{\mathbb{R}^N} r(\tau, x) \varphi(\tau, x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} r(\tau, x) \varepsilon(x) dx \end{aligned}$$

proving that $r(\tau)$, and hence r , vanishes identically. \square

9.5.2 Proof of Theorem 9.2.2

Corollary 9.5.2. *In the same setting of Lemma 9.5.1, if $R = 0$ then :*

$$\begin{aligned} \rho_0 \geq 0 \text{ for a.e. } x &\Rightarrow \rho(t) \geq 0 \text{ for a.e. } x \text{ and for all } t \in I, \\ \operatorname{div} w \geq 0 \text{ for a.e. } (t, x) &\Rightarrow \|\rho(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \text{ for all } t \in I, \\ \|\rho(t)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} &\leq \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \exp\left(t \|\operatorname{div} w\|_{\mathbf{L}^\infty([0, t] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})}\right). \end{aligned} \quad (9.5.10)$$

The proof follows directly from Lemma 9.5.1 using in particular (9.5.4).

Lemma 9.5.3. *In the same setting of Lemma 9.5.1, if $R = 0$ and also*

$$\operatorname{div} w \in \mathbf{L}^\infty\left(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})\right) \quad \text{and} \quad \nabla_x \operatorname{div} w \in \mathbf{L}^\infty\left(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)\right) \quad (9.5.11)$$

then, setting

$$\kappa_0 = NW_N(2N + 1) \|\nabla_x w\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})} \quad \text{and} \quad \kappa = 2N \|\nabla_x w\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})}$$

we have the following bound on the total variation :

$$\begin{aligned} \operatorname{TV}(\rho(t)) &\leq \operatorname{TV}(\rho_0) e^{\kappa_0 t} \\ &\quad + NW_N \int_0^t e^{\kappa_0(t-s)} \int_{\mathbb{R}^N} e^{s \|\operatorname{div} w\|_{\mathbf{L}^\infty}} \|\nabla_x \operatorname{div} w(s, x)\| dx ds \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \end{aligned} \quad (9.5.12)$$

where $\|\nabla_x \operatorname{div} w(s, x)\|$ is the usual Euclidean norm of a vector in \mathbb{R}^N .

Let ρ_1, ρ_2 be the solutions of (9.5.2) associated to w_1, w_2 with $R_1 = R_2 = 0$ and with initial conditions $\rho_{1,0}, \rho_{2,0}$ in \mathcal{X} . Then

$$\begin{aligned}
& \|(\rho_1 - \rho_2)(t)\|_{\mathbf{L}^1} \\
& \leq e^{\kappa t} \|\rho_{1,0} - \rho_{2,0}\|_{\mathbf{L}^1} + \frac{e^{\kappa_0 t} - e^{\kappa t}}{\kappa_0 - \kappa} \text{TV}(\rho_{1,0}) \|w_1 - w_2\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
& \quad + NW_N \int_0^t \frac{e^{\kappa_0(t-s)} - e^{\kappa(t-s)}}{\kappa_0 - \kappa} \int_{\mathbb{R}^N} e^{s\|\text{div}w\|_{\mathbf{L}^\infty}} \|\nabla_x \text{div} w_1(s, x)\| \, dx \, ds \\
& \quad \quad \times \|\rho_{1,0}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|w_1 - w_2\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
& \quad + \int_0^t e^{\kappa(t-s)} e^{s\|\text{div}w\|_{\mathbf{L}^\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} |\text{div}(w_1 - w_2)(s, x)| \, dx \, ds \|\rho_{1,0}\|_{\mathbf{L}^\infty},
\end{aligned} \tag{9.5.13}$$

where

$$\kappa_0 = NW_N(2N + 1) \|\nabla_x w_1\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})} \quad \text{and} \quad \kappa = 2N \|\nabla_x w_1\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})}$$

Proof. The bound (9.5.12) follows from [41, Theorem 2.5], the hypotheses on w being satisfied thanks to (9.5.3) and (9.5.11). More precisely, we do not have here the \mathcal{C}^2 regularity in time as required in [41, Theorem 2.5], but going through the proof of this result, we can see that only the continuity in time of the flow function $f(t, x, r) = rw(t, x)$ is necessary. Indeed, time derivatives of f appear in the proof of [41, Theorem 2.5] when we bound the terms J_t and L_t , see [41, between (4.18) and (4.19)]. However, the use of the Dominated Convergence Theorem allows to prove that J_t and L_t converge to zero when η goes to 0 without any use of time derivatives. The continuity in times follows from [41, Remark 2.4], thanks to (9.5.11) of w and the bound on the total variation.

Similarly, the stability estimate (9.5.13) is based on [41, Theorem 2.6]. Indeed, we use once again a flow that is only \mathcal{C}^0 instead of \mathcal{C}^2 in time. Besides, in the proof of [41, Theorem 2.6], the \mathbf{L}^∞ bound into the integral term in [41, Theorem 2.6] can be taken only in space, keeping time fixed. With this provision, the proof of (9.5.13) is exactly the same as that in [41], so we do not reproduce it here. The same estimate is thus obtained, except that the \mathbf{L}^∞ bound of the integral term is taken only in space. \square

Lemma 9.5.4. *In the same setting of Lemma 9.5.1, if $R = 0$ and (9.5.11) holds, together with*

$$\left\| \nabla_x^2 w \right\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N \times N})} \leq C$$

for a suitable $C > 0$, where we assume that $C > \|\nabla_x w\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})}$, then

$$\begin{aligned}
\rho_0 \in \mathbf{W}^{1,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) & \Rightarrow \begin{cases} \rho(t) \in \mathbf{W}^{1,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) & \text{for all } t \in I \\ \|\rho(t)\|_{\mathbf{W}^{1,1}} \leq e^{2Ct} \|\rho_0\|_{\mathbf{W}^{1,1}}, \end{cases} \\
\rho_0 \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) & \Rightarrow \begin{cases} \rho(t) \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) & \text{for all } t \in I \\ \|\rho(t)\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} \leq e^{2Ct} \|\rho_0\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}}. \end{cases}
\end{aligned}$$

If moreover $\|\nabla_x^3 w\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N \times N \times N})} \leq C$ then $\rho_0 \in \mathbf{W}^{2,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ implies that $\rho(t) \in \mathbf{W}^{2,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ for all $t \in I$ and

$$\|\rho(t)\|_{\mathbf{W}^{2,1}} \leq (1 + Ct)^2 e^{3Ct} \|\rho_0\|_{\mathbf{W}^{2,1}}. \tag{9.5.14}$$

Proof. The $\mathbf{W}^{1,1}$ and $\mathbf{W}^{1,\infty}$ bounds follow from the representation (9.5.4) with $R = 0$, noting that $\|\nabla_x X\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq e^{Ct}$. Indeed,

$$\begin{aligned} \nabla_x X(t; 0, x) &= \mathbf{Id} + \int_0^t \nabla_x w(\tau; X(\tau; 0, x)) \nabla_x X(\tau; 0, x) \, d\tau, \text{ hence} \\ \|\nabla_x X(t; 0, x)\| &\leq 1 + \int_0^t \|\nabla_x w(\tau; X(\tau; 0, x))\| \|\nabla_x X(\tau; 0, x)\| \, d\tau \\ &\leq 1 + \int_0^t C \|\nabla_x X(\tau; 0, x)\| \, d\tau \end{aligned}$$

and a direct application of Gronwall Lemma gives the desired bound. Hence, we obtain

$$\|\nabla \rho(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq (e^{2Ct} - e^{Ct}) \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + e^{2Ct} \|\nabla \rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty}$$

and consequently

$$\|\rho(t)\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} \leq e^{2Ct} \|\rho_0\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}}.$$

Similarly, the $\mathbf{W}^{1,1}$ estimate also comes from (9.5.4).

To obtain the $\mathbf{W}^{2,1}$ bound (9.5.14), apply (9.5.4) and Gronwall Lemma to the second derivative to get $\|\nabla_x^2 X\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq e^{2Ct} - e^{Ct}$. Using the estimates above, together with

$$\|\nabla^2 \rho(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq (2e^{2Ct} - 3e^{Ct} + 1)e^{Ct} \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^1} + 3(e^{Ct} - 1)e^{2Ct} \|\nabla \rho_0\|_{\mathbf{L}^1} + e^{3Ct} \|\nabla^2 \rho_0\|_{\mathbf{L}^1},$$

we obtain $\|\rho(t)\|_{\mathbf{W}^{2,1}} \leq (2e^{Ct} - 1)^2 e^{Ct} \|\rho_0\|_{\mathbf{W}^{2,1}}$, concluding the proof. \square

We use now these tools in order to obtain the existence of a solution for (9.0.1).

Proof of Theorem 9.2.2. Fix $\alpha, \beta > 0$ with $\beta > \alpha$. Let $T(\alpha, \beta) = (\ln(\beta/\alpha)) / C(\beta)$, with C as in (V1). Define the map

$$\mathcal{Q} : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(I; \mathcal{X}_\beta) & \rightarrow & \mathcal{C}^0(I; \mathcal{X}_\beta) \\ \sigma & \mapsto & \rho \end{array}$$

where $I = [0, T(\alpha, \beta)[$ and ρ is the Kruřkov solution to

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho w) = 0 \\ \rho(0, x) = \rho_0(x) \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{array}{l} w = V(\sigma) \\ \rho_0 \in \mathcal{X}_\alpha. \end{array} \quad (9.5.15)$$

Assumptions (V1) imply the hypotheses on w necessary in Corollary 9.5.2 and Lemma 9.5.3. Therefore, a solution ρ to (9.5.15) exists, is unique and in \mathcal{X} . Note that by (9.5.10), by the choice of $T(\alpha, \beta)$ and by (V1), we have $\|\rho(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \beta$ and hence \mathcal{Q} is well defined.

Fix σ_1, σ_2 in $\mathcal{C}^0(I; \mathcal{X}_\beta)$. Call $w_i = V(\sigma_i)$ and ρ_i the corresponding solutions. With the same notations of [41, Theorem 2.6], we let

$$\kappa_0 = N W_N (2N + 1) \|\nabla_x w_1\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})}, \quad \kappa = 2N \|\nabla_x w_1\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})}.$$

Note that by (9.5.1)

$$\frac{\kappa_0}{\kappa} \geq \left(N + \frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{2}{\pi}x\right)^N dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2(N+1)}\right) \geq \frac{3\pi}{8} > 1$$

hence $\kappa_0 > \kappa$. Then, by **(V1)**, we obtain a bound on κ_0 . Indeed,

$$\|\nabla_x V(\sigma_1)\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})} \leq C \left(\|\sigma_1\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \right),$$

and since $\sigma_1 \in \mathcal{C}^0(I; \mathcal{X}_\beta)$, finally $\kappa_0 \leq NW_N(2N+1)C(\beta)$. Let us denote

$$C = C(\beta) \quad \text{and} \quad C' = NW_N(2N+1)C(\beta). \quad (9.5.16)$$

Again, **(V1)** implies the following uniform bounds on all $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{C}^0(I; \mathcal{X}_\beta)$:

$$\begin{aligned} \|\nabla_x^2 V(\sigma_1)\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N \times N}))} &\leq C, \\ \|V(\sigma_1) - V(\sigma_2)\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} &\leq C \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))}, \\ \|\operatorname{div}(V(\sigma_1) - V(\sigma_2))\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))} &\leq C \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))}. \end{aligned}$$

Thus, we can apply [41, Theorem 2.6]. We get, for all $t \in I$,

$$\begin{aligned} \|(\rho_1 - \rho_2)(t)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq Cte^{C't} \operatorname{TV}(\rho_0) \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{L}^\infty([0, t]; \mathbf{L}^1)} \\ &\quad + C^2 NW_N e^{Ct} \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{L}^\infty([0, t]; \mathbf{L}^1)} \int_0^t (t-s) e^{C'(t-s)} ds \\ &\quad + C e^{Ct} \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^t e^{C'(t-s)} \|(\sigma_1 - \sigma_2)(s)\|_{\mathbf{L}^1} ds. \end{aligned}$$

Therefore, we obtain the following Lipschitz estimate :

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{Q}(\sigma_1) - \mathcal{Q}(\sigma_2)\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} \\ &\leq CT e^{C'T} \left[\operatorname{TV}(\rho_0) + (NW_N CT + 1) e^{C'T} \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \right] \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)}. \end{aligned}$$

Here we introduce the strictly increasing function

$$f(T) = CT e^{C'T} \left[\operatorname{TV}(\rho_0) + (NW_N CT + 1) e^{C'T} \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \right]$$

and we remark that $f(T) \rightarrow 0$ when $T \rightarrow 0$. Choose now $T_1 > 0$ so that $f(T_1) = 1/2$. Banach Contraction Principle now ensures the existence and uniqueness of a solution ρ^* to (9.0.1) on $[0, \bar{T}]$ in the sense of Definition 9.2.1, with $\bar{T} = \min\{T(\alpha, \beta), T_1\}$. In fact, if $T_1 < T(\alpha, \beta)$, we can prolongate the solution until time $T(\alpha, \beta)$. Indeed, if we take $\rho^*(T_1)$ as initial condition, we remark that $\|\rho^*(T_1)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} e^{C(\beta)T_1}$. Consequently, the solution of (9.5.15) on $[T_1, T(\alpha, \beta)]$ instead of I satisfy, thanks to (9.5.10)

$$\|\rho(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|\rho^*(T_1)\|_{\mathbf{L}^\infty} e^{C(\beta)(t-T_1)} \leq \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} e^{C(\beta)T_1} e^{C(\beta)(t-T_1)} \leq \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} e^{C(\beta)T(\alpha, \beta)},$$

which is less than β thanks to the definition of $T(\alpha, \beta)$ and since $\rho_0 \in \mathcal{X}_\alpha$.

Now, we want to define a sequence (T_n) such that $T_n \geq T(\alpha, \beta)$ for n sufficiently large. Let assume that the sequence is constructed up to time T_n with $T_n < T(\alpha, \beta)$. For $T_{n+1} \in]T_n, T(\alpha, \beta)[$, we obtain the contraction estimate

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{Q}(\sigma_1) - \mathcal{Q}(\sigma_2)\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}]; \mathbf{L}^1)} \\ &\leq C(T_{n+1} - T_n) e^{C'(T_{n+1}-T_n)} \left[\operatorname{TV}(\rho(T_n)) + (NW_N C(T_{n+1} - T_n) + 1) e^{C'T_n} \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \right] \\ &\quad \times \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}]; \mathbf{L}^1)} \\ &\leq \left[\operatorname{TV}(\rho_0) e^{C'T_n} + C'T_n e^{C'T_n} + (NW_N C(T_{n+1} - T_n) + 1) e^{C'T_n} \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \right] \\ &\quad \times C'(T_{n+1} - T_n) e^{C'(T_{n+1}-T_n)} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}]; \mathbf{L}^1)} \end{aligned}$$

where we used the bounds on $\text{TV}(\rho(T_n))$ and $\|\rho(T_n)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}$ provided by Lemma 9.5.3 and Corollary 9.5.2 associated to **(V1)**. We may thus extend the solution up to time T_{n+1} , where we take $T_{n+1} > T_n$ such that

$$\left[\text{TV}(\rho_0) e^{C'T_n} + CT_n e^{C'T_n} + (NW_N C(T_{n+1} - T_n) + 1) e^{CT_n} \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \right] \times \\ \times C(T_{n+1} - T_n) e^{C'(T_{n+1} - T_n)} = \frac{1}{2}.$$

If $T_{n+1} > T(\alpha, \beta)$, then we are done.

If we assume that the sequence (T_n) defined by induction as above remains less than $T(\alpha, \beta)$, in particular it is bounded. Consequently the left hand side above tends to 0, whereas the right hand side is taken equal to $1/2 > 0$. Hence, the sequence (T_n) is unbounded. In particular, for n large enough, T_n is larger than $T(\alpha, \beta)$; thus the solution to (9.0.1) is defined on all I .

The Lipschitz estimate follows by applying the same procedure as above, in the case when the initial conditions are not the same. The \mathbf{L}^∞ and TV bounds follow from (9.5.10) and from Lemma 9.5.3. \square

The proof of Lemma 9.2.3 directly follows from Lemma 9.5.3.

Proof of Theorem 9.2.4. We consider the assumptions **(A)** and **(B)** separately.

(A) : Let $T > 0$, so that $I = [0, T[$, and fix a positive α . As in the proof of Theorem 9.2.2, we define the map

$$\mathcal{Q} : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(I; \mathcal{X}_\alpha) & \rightarrow & \mathcal{C}^0(I; \mathcal{X}_\alpha) \\ \sigma & \mapsto & \rho \end{array}$$

where ρ is the Kruřkov solution to (9.5.15) with $\rho_0 \in \mathcal{X}_\alpha$. The existence of a weak entropy solution for (9.5.15) in $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ is given by Lemma 9.5.1, the set of assumptions **(V1)** allowing to check the hypotheses on w necessary to apply Lemma 9.5.3. Note that furthermore **(A)**, thanks to Corollary 9.5.2, gives an \mathbf{L}^∞ bound on ρ , so that for all $t \in I$, $\rho(t) \in [0, \alpha]$, a.e. in x . Fix $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{C}^0(I; \mathcal{X}_\alpha)$, call $w_i = V(\sigma_i)$ and let ρ_1, ρ_2 be the associated solutions. With the same notations of [41, Theorem 2.6], we let as in the proof of Theorem 9.2.2,

$$\kappa_0 = N W_N (2N + 1) \|\nabla_x w_1\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})}, \quad \kappa = 2N \|\nabla_x w_1\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})}.$$

so that $\kappa_0 > \kappa$. Then, by **(V1)** we have :

$$\|\nabla_x V(\sigma_1)\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})} \leq C \left(\|\sigma_1\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})} \right),$$

and since $\sigma_1 \in \mathcal{C}^0(I; \mathcal{X}_\alpha)$, we have $\|\sigma_1\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \alpha$ so that $\kappa_0 \leq N W_N (2N + 1) C(\alpha)$. Denote

$$C' = N W_N (2N + 1) C(\alpha) \quad \text{and} \quad C = C(\alpha). \tag{9.5.17}$$

The following bounds are also available uniformly for all $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{X}_\alpha)$, by **(V1)** :

$$\begin{aligned} \left\| \nabla_x^2 V(\sigma_1) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N \times N}))} &\leq C, \\ \left\| V(\sigma_1) - V(\sigma_2) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})} &\leq C \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))}, \\ \left\| \text{div} (V(\sigma_1) - V(\sigma_2)) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))} &\leq C \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))}. \end{aligned}$$

Applying [41, Theorem 2.6], we get

$$\begin{aligned} \|(\rho_1 - \rho_2)(t)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq Cte^{C't} \text{TV}(\rho_0) \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t];\mathbf{L}^1)} \\ &\quad + C^2NW_N \int_0^t (t-s)e^{C'(t-s)} ds \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t];\mathbf{L}^1)} \\ &\quad + \int_0^t C e^{C'(t-s)} \|(\sigma_1 - \sigma_2)(s)\|_{\mathbf{L}^1} ds. \end{aligned}$$

So that

$$\|\mathcal{Q}(\sigma_1) - \mathcal{Q}(\sigma_2)\|_{\mathbf{L}^\infty(I;\mathbf{L}^1)} \leq CT e^{C'T} [\text{TV}(\rho_0) + NW_NCT + 1] \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{L}^\infty(I;\mathbf{L}^1)}.$$

Here we introduce the function $f(T) = CT e^{C'T} [\text{TV}(\rho_0) + NW_NCT + 1]$ and we remark that $f(T) \rightarrow 0$ when $T \rightarrow 0$. Choose now $T_1 > 0$ so that $f(T_1) = \frac{1}{2}$. Banach Contraction Principle now ensures the existence and uniqueness of a solution to (9.0.1) on $[0, T_1]$ in the sense of Definition 9.2.1.

Let assume that we have defined $T_1 < T_2 < \dots < T_n$. Let $T_{n+1} > T_n$, then

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{Q}(\sigma_1) - \mathcal{Q}(\sigma_2)\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}];\mathbf{L}^1)} \\ &\leq C(T_{n+1} - T_n) e^{C'(T_{n+1}-T_n)} \left[\text{TV}(\rho(T_n)) + NW_N C(T_{n+1} - T_n) + 1 \right] \\ &\quad \times \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}];\mathbf{L}^1)} \\ &\leq \left[\text{TV}(\rho_0) e^{C'T_n} + C'T_n e^{C'T_n} + NW_N C(T_{n+1} - T_n) + 1 \right] \\ &\quad \times C'(T_{n+1} - T_n) e^{C'(T_{n+1}-T_n)} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}];\mathbf{L}^1)} \end{aligned}$$

where we used the bounds on $\|\rho(T_n)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})}$ and $\text{TV}(\rho(T_n))$ provided by Corollary 9.5.2 and Lemma 9.5.3 associated to the conditions **(A)** and **(V1)**. We may thus extend the solution up to time T_{n+1} , that we define implicitly by

$$\left[\text{TV}(\rho_0) e^{C'T_n} + CT_n e^{C'T_n} + NW_N C(T_{n+1} - T_n) + 1 \right] C(T_{n+1} - T_n) e^{C'(T_{n+1}-T_n)} = \frac{1}{2}.$$

Note that this equation defines a unique T_{n+1} , the function

$$T \mapsto \left[\text{TV}(\rho_0) e^{C'T_n} + CT_n e^{C'T_n} + NW_N C(T - T_n) + 1 \right] C(T - T_n) e^{C'(T-T_n)},$$

being increasing, taking value 0 in $T = T_n$ and going to $+\infty$ when T goes to ∞ .

If the sequence (T_n) is bounded, then the left hand side above tends to 0, whereas the right hand side is taken equal to $1/2 > 0$. Hence, the sequence (T_n) is unbounded and the solution to (9.0.1) is defined on all \mathbb{R}_+ .

(S2) follows from Lemma 9.5.1 and **(V1)**. (S3) is proved as (S1). Note that the Lipschitz constant so obtained is dependent on time. The bound (S4) follows from Lemma 9.5.3, that gives

$$\text{TV}(\rho(t)) \leq \text{TV}(\rho_0) e^{C't} + NW_N C t e^{C't} \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty}.$$

(B) : Repeat the proof of Theorem 9.2.2 and, with the notation therein, note that if we find a sequence (α_n) such that $\sum_n T(\alpha_n, \alpha_{n+1}) = +\infty$ where $T(\alpha, \beta) = \left[\ln(\beta/\alpha) \right] / C(\beta)$,

then the solution is defined on the all \mathbb{R}_+ . It is immediate to check that **(B)** implies that

$$\sum_{n=1}^k T(\alpha_n, \alpha_{n+1}) \geq \left(\|C\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)} \right)^{-1} \ln \alpha_k \rightarrow +\infty \quad \text{as } k \rightarrow +\infty$$

completing the proof. \square

Proof of Proposition 9.2.5. The bounds on ρ in $\mathbf{W}^{1,\infty}$ and $\mathbf{W}^{1,1}$ follow from the first point in Lemma 9.5.4, thanks to **(V2)**. The $\mathbf{W}^{2,1}$ bound comes from (9.5.14) in Lemma 9.5.4, thanks to **(V3)**. \square

9.5.3 Gâteaux Differentiability

First of all, if $r_0 \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{L}^1)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ and $\rho \in \mathbf{L}^\infty \left(I_{\text{ex}}; (\mathbf{W}^{1,1} \cap \mathbf{W}^{1,\infty})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \right)$, we prove that the equation (9.0.2) admits a unique solution $r \in \mathcal{C}^0 \left(I_{\text{ex}}; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \right)$.

Proof of Proposition 9.2.8. We use here once again Lemma 9.5.1 in order to get an expression of the Kružkov solution for (9.5.2).

We assume now that $\rho \in \mathcal{C}^0 \left(I_{\text{ex}}; (\mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{1,1})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \right)$ and we define $w = V(\rho)$; we also set, for all $s \in \mathcal{C}^0 \left(I_{\text{ex}}; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \right)$, $R = \text{div}(\rho \text{D}V(\rho)(s))$. Thanks to the assumptions on ρ and **(V4)**, we obtain $R \in \mathbf{L}^\infty \left(I_{\text{ex}}; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \right) \cap \mathbf{L}^\infty(I_{\text{ex}} \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Let $\varepsilon \in \dot{I}_{\text{ex}}$. Then, on $[0, T_{\text{ex}} - \varepsilon]$ we can apply Lemma 9.5.1 giving the existence of a Kružkov solution to

$$\partial_t r + \text{div}(rw) = R, \quad r(x, 0) = r_0 \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{L}^1)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}).$$

Let $T \in [0, T_{\text{ex}} - \varepsilon]$ and $I = [0, T[$. We denote Q the application that associates to $s \in \mathcal{C}^0 \left(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \right)$ the Kružkov solution $r \in \mathcal{C}^0 \left(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \right)$ of (9.5.2) with initial condition $r_0 \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{L}^1)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, given by Lemma 9.5.1. That is to say

$$\begin{aligned} Q : \quad s \mapsto r(t, x) &= r_0(X(0; t, x)) \exp \left(- \int_0^t \text{div} V(\rho)(\tau, X(\tau; t, x)) \, d\tau \right) \\ &\quad - \int_0^t \text{div}(\rho \text{D}V(\rho)(s))(\tau, X(\tau; t, x)) \exp \left(- \int_\tau^t \text{div} V(\rho)(u, X(u; t, x)) \, du \right) \, d\tau. \end{aligned}$$

Let us give some bounds on r . The representation of the solution (9.5.4) allows indeed to derive a \mathbf{L}^∞ bound on r . For all $t \in I$, thanks to **(V1)** and **(V4)** we get, with $C = C \left(\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T_{\text{ex}} - \varepsilon] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \right)$,

$$\|r(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|r_0\|_{\mathbf{L}^\infty} e^{Ct} + t e^{Ct} \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty([0, t]; \mathbf{W}^{1,\infty})} \| \text{D}V(\rho) \|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} \|s\|_{\mathbf{L}^\infty([0, t], \mathbf{L}^1)}.$$

The same expression allows also to derive a \mathbf{L}^1 bound on $r(t)$

$$\|r(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|r_0\|_{\mathbf{L}^1} e^{Ct} + t e^{Ct} \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty([0, t]; \mathbf{W}^{1,1})} \| \text{D}V(\rho) \|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} \|s\|_{\mathbf{L}^\infty([0, t], \mathbf{L}^1)}.$$

Now, we want to show that Q is a contraction. We use once again the assumption **(V4)**. For all $s_1, s_2 \in \mathbf{L}^\infty\left(I; (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})\right)$ continuous from the right, we have

$$\left\| \operatorname{div}(\rho DV(\rho)(s_1 - s_2)) \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq C \|\rho\|_{\mathbf{W}^{1,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \|s_1 - s_2\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})}.$$

Thus, we get :

$$\begin{aligned} & \|Q(s_1) - Q(s_2)\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} \\ & \leq C \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{W}^{1,1})} \|s_1 - s_2\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} \int_0^T \exp\left((T - \tau) \|\operatorname{div} V(\rho)\|_{\mathbf{L}^\infty}\right) d\tau \\ & \leq (e^{CT} - 1) \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T_{\text{ex}} - \varepsilon]; \mathbf{W}^{1,1})} \|s_1 - s_2\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)}. \end{aligned}$$

Then, for T small enough, can apply the Fixed Point Theorem, that gives us the existence of a unique Kruřkov solution to the problem. Furthermore, as the time of existence does not depend on the initial condition, we can iterate this procedure to obtain existence on the interval $[0, T_{\text{ex}} - \varepsilon]$. Finally, as this is true for all $\varepsilon \in \dot{I}_{\text{ex}}$, we obtain the same result on the all interval I_{ex} .

The \mathbf{L}^1 bound follows from (9.5.4). Let $T \in I_{\text{ex}}$ and $t \in I$, then for a suitable $C = C\left(\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})}\right)$

$$\|r(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|r_0\|_{\mathbf{L}^1} e^{Ct} + \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{W}^{1,1})} \|\operatorname{div} DV(\rho)\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^t \|r(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} d\tau.$$

A use of **(V4)** and an application of Gronwall Lemma gives

$$\|r(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq e^{Ct} e^{K\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I, \mathbf{W}^{1,1})} t} \|r_0\|_{\mathbf{L}^1},$$

where $K = K\left(\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})}\right)$ is as in **(V4)**.

The \mathbf{L}^∞ bound comes from the same representation formula. Indeed, for $T \in I_{\text{ex}}$ and $t \in I$ we have

$$\|r(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq e^{Ct} \|r_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{W}^{1,\infty})} \|\operatorname{div} DV(\rho)\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^t \|r(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} d\tau.$$

Then, the last $\|r(\tau)\|_{\mathbf{L}^1}$ is bounded just as above. We get

$$\|r(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq e^{Ct} \|r_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + Kte^{2Ct} e^{K\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I, \mathbf{W}^{1,1})} t} \|r_0\|_{\mathbf{L}^1} \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I, \mathbf{W}^{1,\infty})}.$$

Finally, we get a $\mathbf{W}^{1,1}$ bound using the expression of the solution given by Lemma 9.5.1. Indeed, assuming in addition **(V2)** and **(V4)**, we get

$$\begin{aligned} \|\nabla r(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} & \leq e^{2Ct} \|\nabla r_0\|_{\mathbf{L}^1} + Cte^{2Ct} \|r_0\|_{\mathbf{L}^1} \\ & \quad + K(1 + Ct)e^{2Ct} \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{W}^{2,1})} \int_0^t \|r(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} d\tau \\ & \leq e^{2Ct} \|\nabla r_0\|_{\mathbf{L}^1} + Cte^{2Ct} \|r_0\|_{\mathbf{L}^1} \\ & \quad + Kt(1 + Ct)e^{3Ct} e^{K\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I, \mathbf{W}^{1,1})} t} \|r_0\|_{\mathbf{L}^1} \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{W}^{2,1})}. \end{aligned}$$

Hence, denoting $C' = \max\{C, K\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I, \mathbf{W}^{1,1})}\}$, we obtain

$$\|r(t)\|_{\mathbf{W}^{1,1}} \leq \|r_0\|_{\mathbf{W}^{1,1}} (1 + C't)e^{2C't} + Kt(1 + Ct)e^{4C't} \|r_0\|_{\mathbf{L}^1} \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{W}^{2,1})}$$

concluding the proof. \square

Now, we can address the weak Gâteaux differentiability of the semigroup generated by (9.0.1).

Proof of Proposition 9.2.9. Let $\alpha = \max\{\|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty}, 1\}$ and $\beta > \alpha$. Fix $h \in [0, h^*]$ with h^* small enough so that $\beta > \alpha(1 + h^*)$. Note that $\rho_0, r_0 \in \mathcal{X}_\alpha$. By Theorem 9.2.2, (9.0.1) admits the weak entropy solutions $\rho \in \mathcal{C}^0([0, T(\alpha, \beta)]; \mathcal{X}_\beta)$, and (9.2.3) admits the solution $\rho_h \in \mathcal{C}^0([0, T(\alpha(1 + h), \beta)]; \mathcal{X}_\beta)$. Note that

$$T(\alpha(1 + h), \beta) = \frac{\ln(\beta/(\alpha(1 + h)))}{C(\beta)} = T(\alpha, \beta) - \frac{\ln(1 + h)}{C(\beta)} \leq T(\alpha, \beta)$$

and $T(\alpha(1 + h), \beta)$ tends to $T(\alpha, \beta)$ as h goes to 0. In particular, both solutions are defined on the interval $[0, T_*]$, where $T_* = T(\alpha(1 + h^*), \beta)$.

Write now the definition of weak solution for ρ, ρ_h . Let $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T_*] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\rho \partial_t \varphi + (\rho V(\rho)) \cdot \nabla_x \varphi \right) dx dt &= 0, \\ \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\rho_h \partial_t \varphi + (\rho_h V(\rho_h)) \cdot \nabla_x \varphi \right) dx dt &= 0, \end{aligned}$$

use **(V4)** and write, for a suitable function $\varepsilon = \varepsilon(\rho, \rho_h)$, $V(\rho_h) = V(\rho) + DV(\rho)(\rho_h - \rho) + \varepsilon(\rho, \rho_h)$, with $\|\varepsilon(\rho, \rho_h)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq K(2\beta) \left(\|\rho_h - \rho\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \right)^2$. Then,

$$\rho V(\rho) - \rho_h V(\rho_h) = (\rho - \rho_h)V(\rho) + \rho DV(\rho)(\rho - \rho_h) + (\rho - \rho_h)DV(\rho)(\rho - \rho_h) - \rho_h \varepsilon(\rho, \rho_h).$$

Consequently,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{\rho - \rho_h}{h} \partial_t \varphi + \left(\frac{\rho - \rho_h}{h} V(\rho) + \rho DV(\rho) \left(\frac{\rho - \rho_h}{h} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\rho - \rho_h}{h} DV(\rho)(\rho - \rho_h) - \rho_h \frac{\varepsilon(\rho, \rho_h)}{h} \right) \cdot \nabla_x \varphi \right] dx dt = 0. \end{aligned}$$

Using **(V4)**, $\rho(t) \in \mathcal{X}_\beta$ and the estimate on ε we obtain for all $t \in [0, T_*]$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_x \varphi| \left| \frac{\rho - \rho_h}{h} DV(\rho)(\rho - \rho_h) - \rho_h \frac{\varepsilon(\rho, \rho_h)}{h} \right| dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^N} (C(\beta) |\rho - \rho_h| + \beta K(2\beta) \|\rho - \rho_h\|_{\mathbf{L}^1}) \left\| \frac{\rho - \rho_h}{h} \right\|_{\mathbf{L}^1} |\nabla_x \varphi| dx, \\ & \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

by the Dominated Convergence Theorem, since $\frac{\rho_h - \rho}{h}$ is bounded in $\mathbf{L}^1([0, T_*] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Then, if $(\rho_h - \rho)/h \xrightarrow{h \rightarrow 0} r$, we get

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} \left[r \partial_t \varphi + (rV(\rho) + \rho DV(\rho)(r)) \cdot \nabla_x \varphi \right] dx dt = 0.$$

That is to say, r is a distributional solution to (9.0.2). \square

As this is true for all h^* small enough, finally we obtain a solution on the all interval $[0, T(\alpha, \beta)[$. Hence, we observe that if $\rho \in \mathcal{C}^0(I_{\text{ex}} \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, then r is defined on all I_{ex} .

Assume now that **(V4)** and **(V5)** are satisfied by V . We want to show that with these hypotheses, we have now strong convergence in \mathbf{L}^1 to the Kruřkov solution of (9.0.2).

Proof of Theorem 9.2.10. Let $\alpha, \beta > 0$ with $\beta > \alpha$, and $h \in [0, h^*]$ with h^* small enough so that $\beta > \alpha(1 + h^*)$. Let us denote $T(h) = T(\alpha(1 + h), \beta)$ for $h \in [0, h^*]$ the time of existence of the solution of (9.0.1) given by Theorem 9.2.2.

Fix $\rho_0 \in (\mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{2,1})(\mathbb{R}^N; [0, \alpha])$, $r_0 \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{W}^{1,1})(\mathbb{R}^N; [0, \alpha])$. Let ρ , respectively ρ_h , be the weak entropy solutions of (9.0.1) given by Theorem 9.2.2 with initial condition ρ_0 , respectively $\rho_0 + hr_0$. Note that these both solutions are in $\mathcal{C}^0([0, T(h^*); \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$. Furthermore, under these hypotheses for ρ_0 and r_0 , we get thanks to Proposition 9.2.5 that the corresponding solutions ρ and ρ_h of (9.0.1) are in $\mathcal{C}^0([0, T(h^*); (\mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{2,1})(\mathbb{R}^N; [0, \beta])$, condition **(V3)** being satisfied. Hence, we can now introduce the Kruřkov solution $r \in \mathcal{C}^0([0, T(h^*); \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ of (9.0.2), whose existence is given in this case by Proposition 9.2.8. Note that, r_0 being in $\mathbf{W}^{1,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ and $\rho \in \mathbf{L}^\infty([0, T(h^*); \mathbf{W}^{2,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ and **(V2)**, **(V4)** being satisfied, $r(t)$ is also in $\mathbf{W}^{1,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ for all $t \in [0, T(h^*)[$ thanks to the $\mathbf{W}^{1,1}$ bound of Proposition 9.2.8.

Let us denote $z_h = \rho + hr$. We would like to compare ρ_h and z_h thanks to [41, Theorem 2.6]. A straightforward computation shows that z_h is the solution to the following problem,

$$\begin{cases} \partial_t z_h + \operatorname{div} \left(z_h (V(\rho) + h DV(\rho)(r)) \right) = h^2 \operatorname{div} (r DV(\rho)(r)) , \\ z_h(0) = \rho_0 + hr_0 \in \mathcal{X}_{\alpha(1+h)} . \end{cases}$$

Note that the source term being in $\mathcal{C}^0([0, T(h^*); \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$, and the flow being regular, we can apply to this equation Lemma 9.5.1 that gives existence of a Kruřkov solution.

As in the proof of Lemma 9.5.1, we make here the remark that [41, Theorem 2.6] can be used with the second source term in $\mathcal{C}^0([0, T(h^*); \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ and the flow \mathcal{C}^2 in space and only \mathcal{C}^0 in time. Besides, we also use the same *slight improvement* as in the proof of Lemma 9.5.3, taking the \mathbf{L}^∞ norm in the integral term only in space, keeping the time fixed. We get, with $\kappa_0 = NW_N(2N + 1) \|\nabla_x V(\rho_h)\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T(h^*)] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})}$ and $\kappa = 2N \|\nabla_x V(\rho_h)\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T(h^*)] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})}$, for some $T \in [0, T(h^*)]$ and with $I = [0, T]$,

$$\begin{aligned} & \|\rho_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} \\ \leq & T e^{\kappa_0 T} \operatorname{TV}(\rho_0 + hr_0) \|V(\rho_h) - V(\rho) - h DV(\rho)(r)\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T(h^*)] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} \\ & + NW_N \int_0^T (T-t) e^{\kappa_0(T-t)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\rho_h(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla_x \operatorname{div} V(\rho_h)\| \, dx \, dt \\ & \quad \times \|V(\rho_h) - V(\rho) - h DV(\rho)(r)\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T(h^*)] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} \\ & + h^2 \int_0^T e^{\kappa(T-t)} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \operatorname{div} (r DV(\rho)(r)) \right| \, dx \, dt \\ & + \int_0^T e^{\kappa(T-t)} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \operatorname{div} (V(\rho_h) - V(\rho) - h DV(\rho)(r)) \right| \, dx \, dt \\ & \quad \times \max_{t \in [0, T]} \left\{ \|\rho_h(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}, \|z_h(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \right\} . \end{aligned}$$

Then, setting $C = C(\beta)$ and $K = K(2\beta)$, we use :

- the bound of ρ and ρ_h in \mathbf{L}^∞ given by Corollary 9.5.2

$$\|\rho(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|\rho_0\|_{\mathbf{L}^\infty} e^{Ct} \leq \beta \quad \text{and} \quad \|\rho_h(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|\rho_0 + hr_0\|_{\mathbf{L}^\infty} e^{Ct} \leq \beta;$$

- the properties of V given in **(V1)** to get

$$\|\nabla_x \operatorname{div} V(\rho_h)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \leq C \quad \text{and} \quad \|\nabla_x \operatorname{div} V(\rho_h)\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))} \leq C;$$

- the property **(V4)**, respectively **(V5)**, to get

$$\begin{aligned} & \|V(\rho_h) - V(\rho) - h DV(\rho)(r)\|_{\mathbf{L}^\infty(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})} \\ & \leq K \left(\|\rho_h - \rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))}^2 + \|\rho_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))} \right), \quad \text{respectively} \\ & \left\| \operatorname{div} (V(\rho_h) - V(\rho) - h DV(\rho)(r)) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))} \\ & \leq K \left(\|\rho_h - \rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))}^2 + \|\rho_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))} \right); \end{aligned}$$

- the property **(V4)** to get

$$\left\| \operatorname{div} (r DV(\rho)(r)) \right\|_{\mathbf{L}^1} \leq K \|r\|_{\mathbf{W}^{1,1}} \|r\|_{\mathbf{L}^1}.$$

Gathering all these estimates, denoting $C' = NW_N(2N + 1)C$, we obtain

$$\begin{aligned} & \|\rho_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} \\ & \leq Te^{C'T} (\operatorname{TV}(\rho_0 + hr_0) + NW_N CT\beta) K \left(\|\rho_h - \rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)}^2 + \|\rho_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} \right) \\ & \quad + h^2 KTe^{C'T} \|r\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{W}^{1,1})} \|r\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} \\ & \quad + \left(\beta + h \sup_{t \in I} \|r(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \right) Te^{C'T} K \left(\|\rho_h - \rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)}^2 + \|\rho_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} \right). \end{aligned}$$

Then, dividing by h and introducing

$$F_h(T) = KTe^{C'T} \left[\operatorname{TV}(\rho_0) + h \operatorname{TV}(r_0) + NW_N CT\beta + \beta + h \|r(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \right],$$

we obtain

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\rho_h - z_h}{h} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} & \leq F_h(T) \left[\|\rho_h - \rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} \left\| \frac{\rho_h - \rho}{h} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} + \left\| \frac{\rho_h - z_h}{h} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} \right] \\ & \quad + h KTe^{C'T} \|r\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{W}^{1,1})} \|r\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)}. \end{aligned}$$

Note that F_h is a function that vanishes in $T = 0$ and that depends also on ρ_0 , r_0 and h . Hence, we can find $\bar{T} \leq T(h^*)$ small enough such that $F_{h^*}(\bar{T}) \leq 1/2$. Furthermore, for all $T \leq T(h^*)$, $h \mapsto F_h(T)$ is increasing and hence $h \leq h^*$ implies $F_h(T) \leq F_{h^*}(T)$. Noting moreover that $\left\| \frac{\rho_h - \rho}{h} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)}$ has a uniform bound M in h by 2. in Theorem 9.2.2, we get for $T \leq \bar{T}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \frac{\rho_h - \rho}{h} - r \right\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} & = \frac{1}{2} \left\| \frac{\rho_h - z_h}{h} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} \\ & \leq \frac{M}{2} \|\rho_h - \rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)} + h KTe^{C'T} \|r\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{W}^{1,1})} \|r\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{L}^1)}. \end{aligned}$$

The right side above goes to 0 when $h \rightarrow 0$, so we have proved the Gâteaux differentiability of the semigroup S for small time. Finally, we iterate like in the proof of Theorem 9.2.2 in order to have existence on the all interval $[0, T(h^*)]$. Let T_1 be such that $F_{h^*}(T_1) = 1/2$ and assume $T_1 < T(h^*)$. If we assume the Gâteaux differentiability is proved until time $T_n \leq T(h^*)$, we make the same estimate on $[T_n, T_{n+1}]$, T_{n+1} being to determine. We get

$$\begin{aligned} & \|\rho_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}]; \mathbf{L}^1)} \\ \leq & (T_{n+1} - T_n) e^{C'(T_{n+1} - T_n)} \left(\text{TV}(\rho_h(T_n)) + \text{NW}_N C(T_{n+1} - T_n) \beta \right) \\ & \times K \left(\|\rho_h - \rho\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}]; \mathbf{L}^1)}^2 + \|\rho_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}]; \mathbf{L}^1)} \right) \\ & + h^2 K(T_{n+1} - T_n) e^{C'(T_{n+1} - T_n)} \|r\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}]; \mathbf{W}^{1,1})} \|r\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}]; \mathbf{L}^1)} \\ & + \left(\beta + h \sup_{[T_n, T_{n+1}]} \|r(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \right) (T_{n+1} - T_n) e^{C'(T_{n+1} - T_n)} \\ & \times K \left(\|\rho_h - \rho\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}]; \mathbf{L}^1)}^2 + \|\rho_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}]; \mathbf{L}^1)} \right). \end{aligned}$$

Then, we divide by h and we introduce, for $T \geq T_n$

$$\begin{aligned} F_{h,n}(T) = & K(T - T_n) e^{C'(T - T_n)} \left[(\text{TV}(\rho_0) + h \text{TV}(r_0)) e^{CT_n} + \beta C' T_n e^{C'T_n} \right. \\ & \left. + \text{NW}_N C(T - T_n) \beta + \beta + h \sup_{[T_n, T_{n+1}]} \|r(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \right]. \end{aligned}$$

We define $T_{n+1} > T_n$ such that $F_{h,n}(T_{n+1}) = \frac{1}{2}$. This is possible since $F_{h,n}$ vanishes in $T = T_n$ and increases to infinity when $T \rightarrow \infty$. Hence, as long as $T_{n+1} \leq T(h^*)$, we get

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\rho_h - \rho}{h} - r \right\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}]; \mathbf{L}^1)} \\ \leq & KM \|\rho_h - \rho\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}]; \mathbf{L}^1)} \\ & + 2hK(T_{n+1} - T_n) e^{C'(T_{n+1} - T_n)} \|r\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}]; \mathbf{W}^{1,1})} \|r\|_{\mathbf{L}^\infty([T_n, T_{n+1}]; \mathbf{L}^1)}. \end{aligned}$$

The next question is to wonder if (T_n) goes up to $T(h^*)$. We assume that it is not the case : then necessarily, $F_{h,n}(T_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, since $T_{n+1} - T_n \rightarrow 0$. This is a contradiction to $F_{h,n}(T_{n+1}) = 1/2$.

Consequently, $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ and the Gâteaux differentiability is valid for all time $t \in [0, T(h^*)]$. Then, making h^* goes to 0, we obtain that the differentiability is valid on in the interval $[0, T(\alpha, \beta)[$.

It remains to check that the Gâteaux derivative is a bounded linear operator, for t and ρ_0 fixed. The linearity is immediate. Additionally, due to the \mathbf{L}^1 estimate on the solution r of the linearized equation (9.0.2) given by Proposition 9.2.8, we obtain

$$\|\text{DS}_t(\rho_0)(r_0)\|_{\mathbf{L}^1} = \|r(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq e^{Kt\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty(I; \mathbf{W}^{1,1})}} e^{Ct} \|r_0\|_{\mathbf{L}^1},$$

so that the Gâteaux derivative is bounded, at least for $t \leq T < T_{\text{ex}}$. \square

9.5.4 Proofs Related to Sections 9.3 and 9.4

Proof of Proposition 9.3.1. Note that $v(\rho)$ is constant in x , hence $\operatorname{div} V(\rho) = 0$, and **(A)** is satisfied. Besides, we easily obtain $\|\partial_x V(\rho)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})} = 0$, $\|\partial_x V(\rho)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})} = 0$, $\|\partial_x^2 V(\rho)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})} = 0$ and

$$\begin{aligned} \|V(\rho_1) - V(\rho_2)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})} &\leq \|v'\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})} \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})}, \\ \|\partial_x V(\rho_1) - \partial_x V(\rho_2)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})} &= 0, \end{aligned}$$

so that **(V1)** is satisfied. Similarly, $\partial_x^2 V(\rho) = 0$ and $\partial_x^3 V(\rho) = 0$ imply easily that **(V2)** and **(V3)** are satisfied.

We consider now **(V4)** : is v is \mathcal{C}^2 then, for all $A, B \in \mathbb{R}$,

$$v(B) = v(A) + v'(A)(B - A) + \int_0^1 v''(sB + (1-s)A) (1-s)(B - A)^2 ds.$$

Choosing $A = \int_0^1 \rho(\xi) d\xi$ and $B = \int_0^1 \tilde{\rho}(\xi) d\xi$, we get

$$\begin{aligned} &\left\| v\left(\int_0^1 \tilde{\rho}(\xi) d\xi\right) - v\left(\int_0^1 \rho(\xi) d\xi\right) - v'\left(\int_0^1 \rho(\xi) d\xi\right) \int_0^1 (\tilde{\rho} - \rho)(\xi) d\xi \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq \frac{1}{2} \|v''\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\tilde{\rho} - \rho\|_{\mathbf{L}^1}^2 \end{aligned}$$

and we choose $K = \frac{1}{2} \|v''\|_{\mathbf{L}^\infty}$, $DV(\rho)(r) = v'\left(\int_0^1 \rho(\xi) d\xi\right) \int_0^1 r(\xi) d\xi$. Condition **(V4)** is then satisfied since there is no x -dependence, so

$$\begin{aligned} \|V(\tilde{\rho}) - V(\rho) - DV(\rho)(\tilde{\rho} - \rho)\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} &= \|V(\tilde{\rho}) - V(\rho) - DV(\rho)(\tilde{\rho} - \rho)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq \frac{1}{2} \|v''\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\tilde{\rho} - \rho\|_{\mathbf{L}^1}^2. \end{aligned}$$

Similarly, $\|DV(\rho)(r)\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} = \|DV(\rho)(r)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|v'\|_{\mathbf{L}^\infty} \|r\|_{\mathbf{L}^1}$. Finally, consider **(V5)** :

$$\begin{aligned} \left\| \operatorname{div} \left[v\left(\int_0^1 \tilde{\rho}(\xi) d\xi\right) - v\left(\int_0^1 \rho(\xi) d\xi\right) - v'\left(\int_0^1 \rho(\xi) d\xi\right) \int_0^1 (\tilde{\rho} - \rho)(\xi) d\xi \right] \right\|_{\mathbf{L}^1} &= 0, \\ \left\| \operatorname{div} \left(v'\left(\int_0^1 \rho(\xi) d\xi\right) \int_0^1 r(\xi) d\xi \right) \right\|_{\mathbf{L}^1} &= 0. \end{aligned}$$

Concluding the proof. □

Proof of Proposition 9.4.1. The proof exploits the standard properties of the convolution.

Consider first **(V1)** :

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x V(\rho)\|_{\mathbf{L}^\infty} &= \|v'\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla_x \eta\|_{\mathbf{L}^1} \|\vec{v}\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|v\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla_x \vec{v}\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\leq C(\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty}), \\
\|\nabla_x V(\rho)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq \|v\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} \|\vec{v}\|_{\mathbf{W}^{1,1}} (1 + \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla_x \eta\|_{\mathbf{L}^1}), \\
\|\nabla_x^2 V(\rho)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq \|v\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} \|\vec{v}\|_{\mathbf{W}^{2,1}} \\
&\quad \times \left[1 + \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \|\nabla_x \eta\|_{\mathbf{L}^1}^2 + \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla_x^2 \eta\|_{\mathbf{L}^1} + 2\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla_x \eta\|_{\mathbf{L}^1} \right] \\
&\leq C(\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty}), \\
\|V(\rho_1) - V(\rho_2)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \|v'\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\vec{v}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\eta\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbf{L}^1}, \\
\|\nabla_x (V(\rho_1) - V(\rho_2))\|_{\mathbf{L}^1} &= \|v\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} \|\vec{v}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} \|\eta\|_{\mathbf{W}^{1,1}} (2 + \|\nabla_x \eta\|_{\mathbf{L}^1} \|\rho_1\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbf{L}^1}.
\end{aligned}$$

Then, we check **(V2)** :

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x^2 V(\rho)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq 2\|v\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} \|\vec{v}\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} \\
&\quad \times \left(1 + \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \|\nabla_x \eta\|_{\mathbf{L}^1}^2 + \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla_x^2 \eta\|_{\mathbf{L}^1} + \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla_x \eta\|_{\mathbf{L}^1} \right).
\end{aligned}$$

Entirely analogous computations allow to prove also **(V3)**.

Consider **(V4)**. First we look at the Fréchet derivative of $V(\rho) : v$ being \mathcal{C}^2 , we can write, for all $A, B \in \mathbb{R}$,

$$v(B) = v(A) + v'(A)(B - A) + \int_0^1 v''(sB + (1-s)A)(1-s)(B - A)^2 ds.$$

If we take $A = \rho * \eta$ and $B = \tilde{\rho} * \eta$, then we get, for $\rho, \tilde{\rho} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(v(\tilde{\rho} * \eta) - v(\rho * \eta) - v'(\rho * \eta)((\tilde{\rho} - \rho) * \eta) \right) \vec{v} \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\leq \frac{1}{2} \|v''\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\eta\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \|\tilde{\rho} - \rho\|_{\mathbf{L}^1}^2 \|\vec{v}\|_{\mathbf{L}^\infty};
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\left\| \nabla_x \left[\left(v(\tilde{\rho} * \eta) - v(\rho * \eta) - v'(\rho * \eta)((\tilde{\rho} - \rho) * \eta) \right) \vec{v} \right] \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\leq \frac{3}{2} \|v''\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\eta\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}}^2 \|\tilde{\rho} - \rho\|_{\mathbf{L}^1}^2 \|\vec{v}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \|v'''\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\eta\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla_x \eta\|_{\mathbf{L}^1} \|\tilde{\rho} - \rho\|_{\mathbf{L}^1}^2 \|\vec{v}\|_{\mathbf{L}^\infty}; \\
&\left\| \nabla_x^2 \left[\left(v(\tilde{\rho} * \eta) - v(\rho * \eta) - v'(\rho * \eta)((\tilde{\rho} - \rho) * \eta) \right) \vec{v} \right] \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\leq \|v^{(4)}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\tilde{\rho} - \rho\|_{\mathbf{L}^1}^2 \|\eta\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \|\nabla_x \eta\|_{\mathbf{L}^1}^2 (\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\tilde{\rho}\|_{\mathbf{L}^\infty})^2 \|\vec{v}\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\quad + 2\|v^{(3)}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\tilde{\rho} - \rho\|_{\mathbf{L}^1}^2 \|\eta\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}}^2 (\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\tilde{\rho}\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|\nabla \eta\|_{\mathbf{L}^1} \|\vec{v}\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\quad + \frac{1}{2} \|v^{(3)}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\tilde{\rho} - \rho\|_{\mathbf{L}^1}^2 \|\eta\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 (\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\eta\|_{\mathbf{W}^{2,1}} + 1) \|\vec{v}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} \\
&\quad + 6\|v''\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\tilde{\rho} - \rho\|_{\mathbf{L}^1}^2 \|\eta\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}}^2 \|\vec{v}\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}}.
\end{aligned}$$

Then, $DV(\rho)(r) = v'(\rho * \eta)r * \eta \vec{v}$. To satisfy **(V4)**, we have to check that the derivative is a bounded operator from \mathcal{C}^2 to \mathbf{L}^1 . We have,

$$\begin{aligned} \|DV(\rho)(r)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \|v'\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\eta\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\vec{v}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|r\|_{\mathbf{L}^1}, \\ \|\nabla_x DV(\rho)(r)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \|v\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} \|\vec{v}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} \|\eta\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} (2 + \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\eta\|_{\mathbf{W}^{1,1}}) \|r\|_{\mathbf{L}^1}, \\ \|\nabla_x^2 DV(\rho)(r)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \|v\|_{\mathbf{W}^{3,\infty}} \|\eta\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} \|\vec{v}\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} \\ &\quad \times \left(4 + 5\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\eta\|_{\mathbf{W}^{2,1}} + \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \|\nabla \eta\|_{\mathbf{L}^1}^2\right) \|r\|_{\mathbf{L}^1}. \end{aligned}$$

Finally, we check that also **(V5)** is satisfied :

$$\begin{aligned} &\left\| \operatorname{div} (V(\tilde{\rho}) - V(\rho) - DV(\rho)(\tilde{\rho} - \rho)) \right\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq \frac{1}{2} \|v\|_{\mathbf{W}^{3,\infty}} \|\tilde{\rho} - \rho\|_{\mathbf{L}^1}^2 \|\eta\|_{\mathbf{L}^1} \|\eta\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} \|\vec{v}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} (3 + \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\eta\|_{\mathbf{W}^{1,1}}), \\ &\quad \left\| \operatorname{div} DV(\rho)(r) \right\|_{\mathbf{L}^1} \\ &= \left\| \operatorname{div} (v'(\rho * \eta)r * \eta \vec{v}) \right\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq \|v\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} \|\eta\|_{\mathbf{W}^{1,1}} \|\vec{v}\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}} (2 + \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla_x \eta\|_{\mathbf{L}^1}) \|r\|_{\mathbf{L}^1} \end{aligned}$$

completing the proof. \square

Remark 9.5.5. The above proof shows that **(B)** is not satisfied by (9.4.1) : here C grows linearly, $C(\alpha) = 1 + \alpha$. Hence, with the notation in the proof of Theorem 9.2.4, for $\alpha_1 > 0$,

$$\sum_{k=1}^n T(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \alpha_{k+1}} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{1}{(1+t)t} dt \leq \int_{\alpha_1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t)t} dt$$

and the latter expression is bounded. This shows that, in the case of (9.4.1), the technique used in Theorem 9.2.4 does not apply.

Conclusion et perspectives

Ce travail, effectué sous la direction de Sylvie Benzoni-Gavage, m'a fait découvrir divers aspects des EDP hyperboliques à travers les différents modèles étudiés : la mécanique des fluides donne un exemple de système de lois de conservation quasi-linéaire multidimensionnel, le trafic routier fournit un système unidimensionnel, et finalement les modèles de trafic piéton ou de chaîne de montage sont des équations multidimensionnelles scalaires.

En mécanique des fluides, on a étudié le temps d'existence des solutions régulières et grâce à des estimations d'énergie et à un symétriseur adapté on a obtenu une extension au cas des gaz de Van der Waals d'un théorème de M. Grassin [63] donnant existence globale de solutions régulières.

On a également étudié le temps d'existence des solutions « ondes de choc », c'est-à-dire des solutions régulières de part et d'autre d'une discontinuité. Des calculs de Li Ta Tsien [88] donnent par exemple, pour des fluides isentropiques unidimensionnels, des cas d'existence globale, en se basant sur l'existence d'invariants de Riemann fort et le calcul le long des caractéristiques. On a réussi à adapter ces calculs dans le cas des symétries cylindriques et sphériques, pour lesquels le système admet une source, et on a ainsi obtenu une estimation du temps d'existence des ondes de choc possédant ces symétries.

On a de plus étudié une équation donnant le lieu de la discontinuité en suivant une approche « choc fort » due à Whitham [143].

Par la suite, on aimerait d'une part compléter l'étude de l'équation du lieu de la discontinuité; d'autre part, on voudrait améliorer les estimations d'existence dans le cadre des calculs de Li Ta Tsien dans le cas de la symétrie cylindrique ou sphérique.

Enfin, on pourrait étudier l'équation obtenue en suivant la méthode de Whitham en coordonnées sphériques, si la solutions n'est pas à symétrie sphérique, et aussi étudier la stabilité des solutions à symétrie sphériques obtenues.

Concernant le trafic routier, on a mis en place un modèle de jonction dans le but de modéliser un rond-point, et on a résolu le problème de Riemann associé, en étudiant en particulier la géométrie des ensembles de Hugoniot du système. Dans le cas de multiples discontinuités, on a obtenu en particulier un résultat d'existence locale et une minoration du temps d'existence. Cela a fait l'objet d'un article [104], publié dans *JMAA* en Février 2009.

Des simulations numériques effectuées, basées sur un schéma de Godunov, laissent de plus espérer une existence en temps long, bien que le solveur de Riemann soit « discontinu ».

Il reste désormais à étudier le problème de Cauchy en toute généralité, même si la méthode de front tracking nous a déjà permis de conclure à l'existence globale de solutions dans certains cas.

Finalement, dans le cadre d'un séjour « pré-doc » à Brescia, j'ai étudié, en collaboration avec Rinaldo M. Colombo les lois de conservations scalaires. Grâce à la méthode de doublement des variables de Kružkov et grâce à une définition adaptée de la variation totale, on a montré une estimation dans **BV** de la solution d'une loi de conservation scalaire dans le cas général où le flux et la source dépendent non seulement de u mais aussi de la variable de temps t et de la variable d'espace x . Ce résultat nous a alors permis de montrer la dépendance continue de la solution par rapport au flux et à la source en appliquant de nouveau la méthode de doublement des variables. Par la suite, on a pu utiliser l'estimation de dépendance par rapport au flux et à la source pour montrer existence et unicité d'une solution faible entropique pour un modèle simplifié de gaz radiatif. Ce modèle est constitué d'une équation scalaire, dont la particularité est d'avoir une source non-locale. En effet, par notre estimation, on a obtenu une estimation de contraction permettant d'appliquer le théorème de point fixe de Banach. Ces résultats sont exposés dans les articles [42, 41] publiés en 2009, d'une part aux *CRAS* et d'autre part à *Comm. in Math. Sc.*.

Enfin, on s'est intéressé à des lois de conservation avec flux non-local, comprenant en particulier un modèle de trafic piéton et un modèle de chaîne de montage. En utilisant de nouveau l'estimation de dépendance par rapport au flux et à la source et un point fixe de Banach, on a montré existence (locale) et unicité de solutions faibles entropiques pour ce type de problème, et on a donné une borne inférieure pour le temps d'existence. De même, on a montré existence et unicité de solutions faibles entropiques pour le problème linéarisé, et que le semi-groupe du problème initial, qui à une condition initiale associe la solution au temps t , est différentiable au sens de Gâteaux. La Gâteaux-dérivée est alors la solution du problème linéarisé. Ce résultat est en particulier utile pour trouver les extrema d'une fonctionnelle de coût bien choisie, représentant par exemple le temps mis pour sortir d'une pièce (dans le cas du trafic piéton). Ces résultats sont en cours de révision à *ESAIM-COCV* [40].

On peut poursuivre cette étude dans de nombreuses directions. Par exemple, on peut essayer d'améliorer l'estimation dans **BV** en cherchant une estimation locale en espace.

Pour le modèle de trafic piéton, on aimerait désormais dériver (au sens de Gâteaux) le semi-groupe par rapport au paramètre géométrique. De plus, on suppose que l'existence ne peut pas être globale dans certain cas. Il faudrait donc montrer que par exemple la norme infinie explose bien en temps fini. On peut également se demander si l'étude menée pour les modèles de trafic piéton et de chaîne de montage peut s'adapter à des modèles tels qu'un modèle cinétique de trafic routier [13] ou encore le modèle de Vlasov–Poisson.

Annexe A

Aide-mémoire thermodynamique

e	énergie interne spécifique (ou massique)	$de = -p dv + T ds$
p	pression	$p = - \left. \frac{\partial e}{\partial v} \right _s$
T	température	$T = \left. \frac{\partial e}{\partial s} \right _v$
s	entropie spécifique	
v	volume spécifique	
ρ	densité de masse	$\rho = \frac{1}{v}$

TABLE A.1 – Variables thermodynamiques

γ	Exposant adiabatique	$\gamma = -\frac{v}{p} \frac{\partial p}{\partial v} \Big _s$	$\gamma = \frac{v}{p} \frac{\partial^2 e}{\partial v^2}$
Γ	Coefficient de Grüneisen	$\Gamma = -\frac{v}{T} \frac{\partial T}{\partial v} \Big _s$	$\Gamma = -\frac{v}{T} \frac{\partial^2 e}{\partial s \partial v}$
δ		$\delta = \frac{pv}{T^2} \frac{\partial T}{\partial s} \Big _v$	$\delta = \frac{pv}{T^2} \frac{\partial^2 e}{\partial s^2}$
c_v	Capacité calorifique à volume constant	$c_v = \frac{\partial e}{\partial T} \Big _v$	$c_v = \frac{T}{\frac{\partial^2 e}{\partial s^2} \Big _v}$
c_p	Capacité calorifique à pression constante	$c_p = T \frac{\partial s}{\partial T} \Big _p$	$c_p = T \frac{\frac{\partial^2 e}{\partial v^2}}{\frac{\partial^2 e}{\partial s^2} \frac{\partial^2 e}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 e}{\partial s \partial v}\right)^2}$
\mathcal{G}	Coefficient d'ordre 3	$\mathcal{G} = -\frac{v}{2} \frac{\frac{\partial^3 e}{\partial v^3} \Big _s}{\frac{\partial^2 e}{\partial v^2} \Big _s}$	
c	Vitesse du son	$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big _s}$	$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$
γ_*	Rapport des capacités calorifiques	$\gamma_* = \frac{c_p}{c_v}$	$\gamma_* = \frac{\gamma \delta}{\gamma \delta - \Gamma^2}$

TABLE A.2 – Quantités adimensionnées en variables (v, s)

Relations entre les quantités adimensionnées :

$$\delta c_v = \frac{pv}{T}, \quad \mathcal{G} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\rho c)}{\partial \rho} \Big|_s = -\frac{v^2}{c} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{c}{v} \right) \Big|_s = -\frac{v^2}{2\gamma p} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\gamma p}{v} \right) \Big|_s.$$

Remarque A.0.6. Si $T > 0$, alors $(v, s) \mapsto (v, e)$ est un difféomorphisme local et on peut définir toutes les quantités précédentes en les variables (v, e) en remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial v} \Big|_s = \frac{\partial}{\partial v} \Big|_e - p \frac{\partial}{\partial e} \Big|_v, \quad \frac{\partial}{\partial s} \Big|_v = T \frac{\partial}{\partial e} \Big|_v.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{v}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial v} \Big|_e - p \frac{\partial p}{\partial e} \Big|_v \right), \\ \Gamma &= v \frac{\partial p}{\partial e} \Big|_v, \\ \mathcal{G} &= \frac{1}{2} \left[\gamma + 1 - \frac{v}{\gamma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial v} \Big|_e - p \frac{\partial \gamma}{\partial e} \Big|_v \right) \right]. \end{aligned}$$

	gaz parfait gén.	gaz parfait pol.	gaz de VdW	gaz raidis
Loi	$p = \mathfrak{R}T\rho$	$p = \mathfrak{R}T\rho$	$p = \frac{\mathfrak{R}T}{v-b}$	$p + p_0 = \mathfrak{R}T\rho$
c_v	$c_v(T)$	constante > 0	constante > 0	constante > 0
		$\gamma_0 = \frac{\mathfrak{R}}{c_v} + 1$		
e	$\mathcal{E}(v^{-\mathfrak{R}} \exp(s))$ $\mathcal{E} \in \mathcal{C}^\infty$, bornée inf	$\exp(\frac{s}{c_v})v^{-\gamma_0+1}$	$(v-b)^{-\gamma_0+1} \exp(\frac{s}{c_v})$	$\exp(\frac{s}{c_v})v^{-\gamma_0+1} + p_0 \frac{v}{\gamma_0}$
p		$(\gamma_0 - 1)\rho e$	$(\gamma_0 - 1)\frac{e}{v-b}$	$(\gamma_0 - 1)\frac{e}{v} - p_0$
T		$\frac{e}{c_v}$	$\frac{e}{c_v}$	$\frac{1}{c_v}(e - \frac{p_0 v}{\gamma_0})$
γ	$\mathfrak{R}(1 + \frac{\mathcal{E}''}{\mathcal{E}'} v^{-\mathfrak{R}} e^s) + 1$	γ_0	$\gamma_0 \frac{v}{v-b}$	$\gamma_0 + \frac{p_0}{p}$
Γ	$\gamma - 1$	$\gamma - 1$	$(\gamma_0 - 1)\frac{v}{v-b}$	$\gamma_0 - 1$
δ	$\gamma - 1 = \frac{\mathfrak{R}}{c_v}$	$\gamma - 1$	Γ	$(\gamma_0 - 1)\frac{\gamma_0 p}{\gamma_0 p + p_0}$
\mathcal{G}		$\frac{1+\gamma}{2}$	$\frac{v}{v-b}(\frac{\gamma_0+1}{2})$	$\frac{\gamma_0+1}{2}$
c		$\sqrt{\gamma(\gamma-1)}e$	$\frac{v}{v-b}\sqrt{\gamma_0(\gamma_0-1)}e$	$\sqrt{\gamma_0(\gamma_0-1)}(e - \frac{p_0 v}{\gamma_0})$
γ^*	γ	γ_0	γ_0	γ_0

TABLE A.4 – Variables thermodynamiques et quantités adimensionnées pour quelques lois d'état

	Cas général	Gaz de VdW
Forme conservative	$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e) + \partial_x((\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e + p)u) = 0. \end{cases}$	
Forme quasilinéaire	$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big _e & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial e} \Big _\rho \\ 0 & \frac{p}{\rho} & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ e \end{pmatrix} = 0$	
Loi de pression	$p = p(\rho, e)$	$p = (\gamma_0 - 1) \frac{\rho e}{1 - b\rho}$
Valeurs propres	$\lambda_1 = u - c, \lambda_2 = u, \lambda_3 = u + c$	
Vecteurs propres	$r_1 = \begin{pmatrix} -\rho \\ c \\ -p/\rho \end{pmatrix}, r_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial e} \\ 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \rho} \end{pmatrix}, r_3 = \begin{pmatrix} \rho \\ c \\ p/\rho \end{pmatrix}$	
Entropie Flux	$\begin{aligned} &\rho s \\ &\rho u s \end{aligned}$	
Invariants de Riemann	$z_1 = u + h(\rho, e), z_2 = u, z_3 = u - h(\rho, e)$ <p>où h est tel que $\frac{\partial h}{\partial p} \Big _s = \frac{1}{\rho c}$</p> <p>ou bien $z_1 = s, z_2 = p, z_3 = s$</p>	$h = 2\sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \left(\frac{\rho}{1 - b\rho} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2}} \times \exp\left(\frac{s}{2c_v}\right)$
Courbes de choc	<p>Pour les 1-chocs et les 3-chocs :</p> $[u] = -\sqrt{-[p][1/\rho]} \text{ et } [e] + \langle p \rangle [1/\rho] = 0$ <p>avec $[\rho] > 0$ pour les 1-chocs</p> <p>avec $[\rho] < 0$ pour les 3-chocs</p>	

TABLE A.5 – Dynamique des gaz complète en coordonnées eulériennes

	Cas général	Gaz de VdW
Forme conservative	$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0. \end{cases}$	
Forme quasilinéaire	$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{p'(\rho)}{\rho} & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = 0$	
Loi de pression	$p = p(\rho)$	$p = (\gamma_0 - 1) \left(\frac{\rho}{1 - b\rho} \right)^{\gamma_0}$
Valeurs propres	$\lambda_1 = u - c, \lambda_2 = u + c$	
Vecteurs propres	$r_1 = \begin{pmatrix} -\rho \\ c \end{pmatrix}, r_2 = \begin{pmatrix} \rho \\ c \end{pmatrix}$	
Entropie Flux	$\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e$ $u \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) + p$ <p>où $\frac{de}{d\rho} = \frac{p}{\rho^2}$</p>	
Invariants de Riemann	$z_1 = u + h(\rho), z_2 = u - h(\rho)$ <p>où $h = \int^\rho \frac{c(y)}{y} dy$</p>	$h = 2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \left(\frac{\rho}{1 - b\rho} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2}}$
Courbes de choc	<p>Pour les 1-chocs et les 2-chocs :</p> $[u] = -\sqrt{-[p][1/\rho]}$ <p>avec $[p] > 0$ pour les 1-chocs avec $[p] < 0$ pour les 2-chocs</p>	

TABLE A.6 – Dynamique des gaz isentropique en coordonnées eulériennes

	Cas général	Gaz de VdW
Forme conservative	$\begin{cases} \partial_t v - \partial_\xi u = 0, \\ \partial_t u + \partial_\xi P = 0, \\ \partial_t(\frac{1}{2}u^2 + e) + \partial_\xi(Pu) = 0. \end{cases}$	
Forme quasilinéaire	$\partial_t \begin{pmatrix} v \\ u \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial v} _e & 0 & \frac{\partial P}{\partial e} _v \\ 0 & P & 0 \end{pmatrix} \partial_\xi \begin{pmatrix} v \\ u \\ e \end{pmatrix} = 0$	
Loi de pression	$P = P(v, e)$	$P = (\gamma - 1)e/v$
Valeurs propres	$\lambda_1 = -C, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = C$ où $C^2 = -\frac{\partial P}{\partial v}$	
Vecteurs propres	$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ C \\ -P \end{pmatrix}, r_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial P}{\partial e} \\ 0 \\ \frac{\partial P}{\partial v} \end{pmatrix}, r_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ C \\ P \end{pmatrix}$	
Entropie Flux	S où $T dS = de + P dv$ 0	
Invariants de Riemann	$z_1 = u + H(v, e), z_2 = u, z_3 = u - H(v, e)$ où $\frac{\partial H}{\partial P} _s = \frac{1}{C}$ ou bien $z_1 = S, z_2 = P, z_3 = S$	
Courbes de choc	Pour les 1-chocs et les 3-chocs : $[u] = -\sqrt{-[P][v]}, [e] = -\langle P \rangle [v]$ avec $[v] < 0$ pour les 1-chocs avec $[v] > 0$ pour les 3-chocs	

TABLE A.7 – Dynamique des gaz complète en coordonnées lagrangiennes

	Cas général	Gaz de VdW
Forme conservative	$\begin{cases} \partial_t v - \partial_\xi u = 0, \\ \partial_t u + \partial_\xi P = 0. \end{cases}$	
Forme quasilinéaire	$\partial_t \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{dP}{dv} & 0 \end{pmatrix} \partial_\xi \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = 0$	
Loi de pression	$P = P(v)$	$P = (\gamma - 1)v^{-\gamma}$
Valeurs propres	$\lambda_1 = -C, \lambda_2 = C$	
Vecteurs propres	$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ C \end{pmatrix}, r_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ C \end{pmatrix}$	
Entropie Flux	$\begin{aligned} &1/2u^2 + e \\ &Pu \end{aligned}$	
Invariants de Riemann	$z_1 = u + H(v, e), z_2 = u, z_3 = u - H(v, e)$ $\text{où } H = \int^v C(y) dy$	
Courbes de choc	Pour les 1-chocs et les 3-chocs : $[u] = -\sqrt{-[P][v]}$ pour les 1-chocs $[v] < 0$ pour les 2-chocs $[v] > 0$	

TABLE A.8 – Dynamique des gaz isentropique en coordonnées lagrangiennes

Annexe B

Lemmes techniques

B.1 Inégalité de Gagliardo-Nirenberg et ses conséquences

Lemme B.1.1 (Gagliardo-Nirenberg). (*Voir [132, Prop. 3.5, p. 4]*) Soit $r > 0$, $i \in [0, r]$ et $z \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{H}^r)(\mathbb{R}^d)$. Alors $\partial^i z \in \mathbf{L}^{2r/i}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\left\| \partial^i z \right\|_{\mathbf{L}^{2r/i}} \leq C_{i,r} \|z\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1-i/r} \|D^r z\|_{\mathbf{L}^2}^{i/r}.$$

On déduit facilement du Lemme B.1.1 le résultat suivant.

Lemme B.1.2. Soit $z \in \mathbf{H}^m$ tel que $D^2 z \in \mathbf{L}^\infty$, alors pour tout $k \in [4, m]$, pour tout $i \in [2, k]$, on a $D^i z \in \mathbf{L}^q$ pour $q = 2\frac{k-3}{i-2}$ et

$$\left\| \partial^i z \right\|_{\mathbf{L}^q} \leq C \left\| D^2 z \right\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1-2/q} \left\| D^{k-1} z \right\|_{\mathbf{L}^2}^{2/q}.$$

Grâce à l'injection de Sobolev (cf. [132, p.4]) et au Lemme B.1.1 on montre également

Lemme B.1.3. Soit $\ell \in]0, d/2[$ et $1/q = 1/2 - \ell/d$. Il existe $C > 0$ dépendant de ℓ, q, d tel que pour tout $z \in \mathbf{H}^\ell(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|z\|_{\mathbf{L}^q} \leq C \left\| D^\ell z \right\|_{\mathbf{L}^2}.$$

Preuve. On munit $\mathbf{H}^\ell(\mathbb{R}^d)$ de la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2} + \left\| D^\ell \cdot \right\|_{\mathbf{L}^2}$. L'injection de Sobolev entre \mathbf{H}^ℓ et \mathbf{L}^q se lit alors, pour un certain $C > 0$,

$$\|z\|_{\mathbf{L}^q} \leq C(\|z\|_{\mathbf{L}^2} + \left\| D^\ell z \right\|_{\mathbf{L}^2}), \quad \text{pour tout } z \in \mathbf{H}^\ell. \quad (\text{B.1.1})$$

On définit alors, pour $z \in \mathbf{H}^\ell$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, la fonction $z_\lambda \in \mathbf{H}^\ell$ par $z_\lambda(x) = z(\lambda x)$. En appliquant (B.1.1) à z_λ , et en remarquant

$$\|z_\lambda\|_{\mathbf{L}^q} = \lambda^{-\frac{d}{q}} \|z\|_{\mathbf{L}^q}, \quad \left\| D^\ell z_\lambda \right\|_{\mathbf{L}^2} = \lambda^{\ell - \frac{d}{2}} \left\| D^\ell z \right\|_{\mathbf{L}^2}, \quad (\text{B.1.2})$$

on obtient

$$\|z\|_{\mathbf{L}^q} \leq C \lambda^{\frac{d}{q} - \frac{d}{2}} (\|z\|_{\mathbf{L}^2} + \lambda^\ell \left\| D^\ell z \right\|_{\mathbf{L}^2}),$$

où, par définition $\frac{d}{q} - \frac{d}{2} = -\ell$. Par conséquent, en prenant $\lambda = \left(\frac{\|z\|_{\mathbf{L}^2}}{\|D^\ell z\|_{\mathbf{L}^2}} \right)^{1/\ell}$, on a

$$\|z\|_{\mathbf{L}^q} \leq 2C \left\| D^\ell z \right\|_{\mathbf{L}^2}.$$

□

Et, de manière similaire,

Lemme B.1.4. *Soit $p > d/2$. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^d)$*

$$\|z\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \|z\|_{\mathbf{L}^2}^{1-\frac{d}{2p}} \|D^p z\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{d}{2p}}.$$

Preuve. On utilise désormais l'injection continue $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Il existe donc $C > 0$ tel que

$$\|z\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C(\|z\|_{\mathbf{L}^2} + \|D^p z\|_{\mathbf{L}^2}), \quad \text{pour tout } z \in \mathbf{H}^p.$$

En appliquant cette inégalité à $z_\lambda : x \mapsto z(\lambda x)$, on obtient, puisque z_λ vérifie $\|z_\lambda\|_{\mathbf{L}^\infty} = \|z\|_{\mathbf{L}^\infty}$ et (B.1.2),

$$\|z\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \lambda^{-\frac{d}{2}} (\|z\|_{\mathbf{L}^2} + \lambda^p \|D^p z\|_{\mathbf{L}^2}).$$

En prenant $\lambda = \left(\frac{\|z\|_{\mathbf{L}^2}}{\|D^p z\|_{\mathbf{L}^2}} \right)^{1/p}$, on obtient l'inégalité souhaitée. □

B.2 Lemmes d'estimation

Lemme B.2.1. *Soit $m > 1 + d/2$, $U \in \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)$, $r, a \in \mathbb{R}$ et Z la norme définie par (2.4.10) :*

$$Z(t) = \sum_{k=0}^m (1+t)^{g_k} \left\| D^k U(t) \right\|_{\mathbf{L}^2},$$

avec $g_k = k + r - a$. Alors on a

1. $\|U(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C(1+t)^{\beta+1} Z(t),$
2. $\|DU(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C(1+t)^\beta Z(t),$
3. si $m > 2 + d/2$, alors $\|D^2 U(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C(1+t)^{\beta-1} Z(t),$

avec $\beta = -g_1 - d/2$.

Preuve. 1. En appliquant le lemme B.1.4 à U , on obtient :

$$\|U\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \|U\|_{\mathbf{L}^2}^{1-\frac{d}{2m}} \|D^m U\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{d}{2m}}.$$

Or,

$$\|U\|_{\mathbf{L}^2} \leq (1+t)^{-g_0} Z, \quad \|D^m U\|_{\mathbf{L}^2} \leq (1+t)^{-g_m} Z,$$

par conséquent

$$\|U\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C(1+t)^s Z,$$

où $s = -g_0(1 - \frac{d}{2m}) - (g_0 + m)\frac{d}{2m} = -g_0 - \frac{d}{2} = \beta + 1$.

2. En appliquant le lemme B.1.4 à DU , avec $p = m - 1$, on obtient

$$\|DU\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \|DU\|_{\mathbf{L}^2}^{1 - \frac{d}{2(m-1)}} \|D^m U\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{d}{2(m-1)}}.$$

De même que précédemment, cela donne

$$\|DU\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C(1+t)^s Z$$

où

$$\begin{aligned} s &= -g_1(1 - \frac{d}{2(m-1)}) - (g_1 + m - 1)\frac{d}{2(m-1)} \\ &= -g_1 - \frac{d}{2} = \beta. \end{aligned}$$

3. On obtient de même la troisième inégalité en appliquant le lemme B.1.4 à $D^2 U$ avec $p = m - 2$, ce qui est possible puisqu'on a dans ce cas $m - 2 > d/2$. \square

Lemme B.2.2. Soient $f, \varphi \in \mathbf{H}^m \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = k \leq m$. Alors

$$\|\partial^\alpha(f\varphi)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C(\|f\|_{\mathbf{L}^\infty} \|D^k \varphi\|_{\mathbf{L}^2} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} \|D^k f\|_{\mathbf{L}^2}).$$

Lemme B.2.3. Soit $f \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{H}^m)(\mathbb{R}^d)$. Si $\nu \in \mathbb{N}$ et $\nu \geq 2$, ou bien $\nu \in \mathbb{R}$ et $\nu \in [m, +\infty[$, on a $f^\nu \in \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = k \leq m$, on a

$$\|\partial^\alpha f^\nu\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \|f\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \|D^k f\|_{\mathbf{L}^2}, \tag{B.2.1}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de f, α, ν .

Preuve. Pour $\nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 2$, on fait une récurrence sur ν en utilisant le Lemme B.2.2.

Pour $\nu \in [m, +\infty[$, on a

$$\partial^\alpha(f^\nu(x)) = \sum_{1 \leq j \leq k} \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_j = \alpha \\ |\beta_i| = b_i \geq 1}} c_{\alpha, \beta} f^{\nu-j} \partial^{\beta_1} f \dots \partial^{\beta_j} f.$$

On prend alors $\partial^{\beta_i} f \in \mathbf{L}^{2\frac{k}{b_i}}$. On applique l'inégalité de Hölder puis le Lemme B.1.1 :

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha(f^\nu)\|_{\mathbf{L}^2} &\leq C \sum_{j=1}^k \|f^{\nu-j}\|_{\mathbf{L}^\infty} \prod_{\substack{i=1 \\ \sum b_i=k}}^j \|\partial^{\beta_i} f\|_{\mathbf{L}^{2\frac{k}{b_i}}} \\ &\leq C \sum_{j=1}^k \|f^{\nu-j}\|_{\mathbf{L}^\infty} \prod_{\substack{i=1 \\ \sum b_i=k}}^j \|f\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1-b_i/k} \|D^k f\|_{\mathbf{L}^2}^{b_i/k} \\ &\leq C \|f\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \|D^k f\|_{\mathbf{L}^2}, \end{aligned}$$

en utilisant par ailleurs le fait que pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\|f^{\nu-j}\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-j}$ puisque $\nu - j \geq 0$. \square

B.3 Temps d'existence pour les EDO

Lemme B.3.1 (Principe du maximum pour les EDO.). Soient $a, b : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ des applications continues. Supposons que $w, z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des applications continues telles que $z(0) \geq w(0)$ et $w' = aw^2 + b$, $z' \geq az^2 + b$ dans $[0, T]$. Alors $z(t) \geq w(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Preuve. Par hypothèse,

$$(z - w)'(t) = z' - (a(t)w(t)^2 + b(t)) \geq a(t)(z(t)^2 - w(t)^2),$$

c'est-à-dire $(z - w)'(t) \geq a(t)(z(t) - w(t))(z(t) + w(t))$. Par suite,

$$\frac{d}{dt} \left((z - w)(t) e^{-\int_0^t a(s)(z+w)(s) ds} \right) \geq 0.$$

Donc $(z - w)(t) e^{-\int_0^t a(s)(z+w)(s) ds} \geq (z - w)(0) \geq 0$, pour tout $t \in [0, T]$. \square

Lemme B.3.2. Soient $T > 0$ et $a_0, a_1, a_2 \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathbb{R})$. Soit $a_0^+ = \max(a_0, 0)$ et K défini par

$$K = \int_0^T |a_2(t)| dt \exp \left(\int_0^T |a_1(t)| dt \right). \quad (\text{B.3.1})$$

Si $w_0 \geq 0$ et

$$\frac{1}{w_0 + K} > \int_0^T a_0^+(t) dt \exp \left(\int_0^T |a_1(t)| dt \right), \quad (\text{B.3.2})$$

$$\frac{1}{K} > \int_0^T |a_0(t)| dt \exp \left(\int_0^T |a_1(t)| dt \right), \quad (\text{B.3.3})$$

alors la solution maximale du problème de Cauchy

$$w' = a_0(t)w^2 + a_1(t)w + a_2(t), \quad w(0) = w_0, \quad (\text{B.3.4})$$

est définie au moins sur $[0, T]$ et vérifie

$$\frac{1}{w(T)} > \frac{1}{w_0 + K} - \int_0^T |a_0^+(t)| dt \exp \left(\int_0^T |a_1(t)| dt \right), \quad \text{si } w(T) \geq 0, \quad (\text{B.3.5})$$

$$\frac{1}{|w(T)|} > \frac{1}{K} - \int_0^T |a_0(t)| dt \exp \left(\int_0^T |a_1(t)| dt \right), \quad \text{si } w(T) < 0. \quad (\text{B.3.6})$$

Preuve. Tout d'abord, en posant $\tilde{w} = \exp \left(-\int_0^t a_1(s) ds \right) w$, $\tilde{a}_0 = \exp \left(\int_0^t a_1(s) ds \right) a_0$ et $\tilde{a}_2 = \exp \left(-\int_0^t a_1(s) ds \right) a_2$, on voit que l'équation (B.3.4) se ramène à l'EDO

$$\tilde{w}' = \tilde{a}_0(t)\tilde{w}^2 + \tilde{a}_2(t). \quad (\text{B.3.7})$$

et $\tilde{w}(0) = w(0)$. On peut donc supposer sans perte de généralité $a_1 \equiv 0$.

On introduit la fonction croissante v définie par $v(t) = \int_0^t |\tilde{a}_2(s)| ds$. Soit y la solution maximale du problème de Cauchy

$$y' = \tilde{a}_0^+(t)(y + K)^2, \quad y(0) = w_0.$$

Alors y est croissante et puisque $w_0 + K > 0$, on a

$$\frac{1}{y(t) + K} = \frac{1}{w_0 + K} - \int_0^t \tilde{a}_0^+(s) ds.$$

Notons que le membre de droite ne s'annule pas pour $t \in [0, T]$, d'après (B.3.2). D'autre part, on a $(y + v)(0) = w_0$ et

$$\begin{aligned} (y + v)' &= \tilde{a}_0^+(t)(y + K)^2 + |\tilde{a}_2| \\ &\geq \tilde{a}_0^+(t)(y + v)^2 + \tilde{a}_2 \\ &\geq \tilde{a}_0(y + v)^2 + \tilde{a}_2. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le Lemme B.3.1, on a $w(t) \leq (y + v)(t) \leq y(t) + K$ pour tout $t \in [0, T]$ si w existe. En particulier, tant que $w(t) > 0$, on obtient

$$\frac{1}{w(t)} \geq \frac{1}{y(t) + K} = \frac{1}{w_0 + K} - \int_0^t \tilde{a}_0^+(s) ds = \frac{1}{w_0 + K} - \int_0^t a_0^+(\tau) e^{\int_0^\tau a_1(s) ds} d\tau,$$

d'où

$$\frac{1}{w(t)} \geq \frac{1}{w_0 + K} - \int_0^t a_0^+(\tau) d\tau e^{\int_0^t |a_1(s)| ds}. \quad (\text{B.3.8})$$

Supposons désormais que w s'annule et change de signe en $t_0 \in [0, T]$. On applique alors le même raisonnement à $W = -w$ en remplaçant w_0 par $W(t_0) = W_0 = 0$ et en commençant au temps t_0 . L'application W est alors solution de $W' = A_0 W^2 + a_1 W + A_2$, où $A_0 = -a_0$, $A_2 = -a_2$. En notant $A_0^+ = \max(-a_0, 0)$, on obtient alors, pour tout $t \geq t_0$ tel que $W(t) > 0$

$$\frac{1}{W(t)} \geq \frac{1}{K} - \int_{t_0}^t A_0^+(\tau) d\tau e^{\int_0^t |a_1(s)| ds},$$

d'où, pour tout t tel que $w(t) < 0$

$$\frac{1}{|w(t)|} \geq \frac{1}{K} - \int_0^t |a_0(\tau)| d\tau e^{\int_0^t |a_1(s)| ds}. \quad (\text{B.3.9})$$

Finalement, les inégalités (B.3.8)–(B.3.9) nous donnent des bornes sur w pour tout temps, que w soit positif ou négatif, qui ne peut donc pas tendre vers $-\infty$. Par conséquent, w existe jusqu'au temps T . En effet, on a ainsi montré qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R})$ telle que, si w est solution de (B.3.4), alors $|w(t)| \leq \varphi(t)$ tant qu'elle est définie, pour $t \in [0, T]$. Notons T_* le temps maximal d'existence de w . Si on avait $T_* < T$, alors w serait bornée sur $[0, T_*[$ par $\max_{[0, T]} \varphi$, et ceci contredit le théorème « des bouts », selon lequel w doit sortir de tout compact quand $t \rightarrow T_* < \infty$. \square

Annexe C

Calcul des invariants par les groupes de Lie.

C.1 Éléments théoriques

C.1.1 Quelques définitions

On donne d'abord quelques définitions concernant les groupes de Lie, qui seront utilisées ultérieurement pour trouver les groupes de symétrie d'un système d'équations différentielles. On introduit notamment les notions de *générateur f d'un groupe de Lie $G^1(f)$* et de *champ de vecteurs tangent au groupe de Lie $G^1(f)$* .

Définition C.1.1 (Groupe de Lie de transformations.). On appelle *groupe de Lie de transformations à un paramètre sur l'espace de Banach X* la famille de transformations locales à un paramètre $G^1(f) = f(I)$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , lorsque $f : V \times I \rightarrow X$ (avec $V \subset X$) vérifie les conditions :

1. $\forall x \in V, f(x, 0) = x$;
2. $\forall a, b \in I$ tels que $a + b \in I, \forall x \in V, f(f(x, a), b) = f(x, a + b)$;
3. si $a \in I$ et $\forall x \in V, f(x, a) = x$, alors $a = 0$;
4. $f \in \mathcal{C}^\infty(V \times I; X)$.

On dit alors que la transformation f *génère le groupe de Lie $G^1(f)$* .

Remarque C.1.2. On note parfois : $f_x(a) = f(x, a)$ pour $x \in V$ et $a \in I$.

Définition C.1.3 (Champ de vecteurs tangent au groupe $G^1(f)$.). Soit X un espace de Banach, $V \subset X$. On appelle *champ de vecteurs tangent au groupe $G^1(f)$* le champ de vecteurs $\zeta : V \rightarrow X$ qui vérifie, pour $x \in V$:

$$\zeta(x) = \partial_a f(x, 0),$$

et qui est un vecteurs tangent à l'orbite $f_x(I)$ au point x .

D'après la définition de ζ , en différentiant par rapport à b la relation $f(f(x, a), b) = f(x, a + b)$, on obtient la relation :

$$\partial_a f(x, a) = \zeta \circ f(x, a).$$

Associée à $f(x, 0) = x$, cette relation montre que f_x est solution d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire :

$$\begin{aligned}\partial_a y &= \zeta(y), \\ y(0) &= x,\end{aligned}\tag{C.1.1}$$

où $y : \mathbb{R} \rightarrow X$. L'équation (C.1.1) est alors appelée *équation de Lie*. On se pose alors la question de savoir si les solutions d'un tel problème donnent bien des transformations générant des groupes de Lie. On dispose pour cela d'un premier théorème, donné dans l'ouvrage d'Ovsiannikov [108].

Théorème C.1.4. *Soit X un espace de Banach, $V \subset X$. Soit $\zeta : V \rightarrow X$ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^∞ sur V avec $\zeta(x_0) \neq 0$, pour un $x_0 \in V$ donné. Si f est solution de (C.1.1), avec comme condition initiale x_0 , alors f génère un groupe de Lie pour lequel le champ de vecteurs tangent est ζ .*

On sait donc qu'un champ de vecteurs permet de générer un groupe de Lie. On aimerait alors savoir si il y a une bijection entre champs de vecteurs et groupe de Lie. Le théorème répondant à cette question est également exposé dans le livre d'Ovsiannikov [108].

Théorème C.1.5. *Soit X un espace de Banach, $V \subset X$. Un champ de vecteurs $\zeta : V \rightarrow X$ étant donné à un coefficient réel multiplicatif près, il y a bijection entre champs de vecteurs et groupes de Lie. On peut alors noter, de manière un peu abusive : $G^1(f) = G^1(\zeta)$, et on parle aussi de générateur de groupe de Lie en parlant de ζ .*

On voudrait désormais relier les groupe de Lie de transformations à un paramètre aux transformations laissant invariantes des variétés.

Définition C.1.6. Soient X, Y des espaces de Banach. On considère la carte $F : X \rightarrow Y$. Soit $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$, le générateur du groupe de Lie G^1 . On dit que F est un *invariant* du groupe de Lie G^1 , si $\forall (x, a) \in X \times \mathbb{R}$ on a la relation :

$$F(f(x, a)) = F(x).$$

C.1.2 Théorie de la continuation

Définition C.1.7 (Continuation kème d'espaces et de fonctions.). Soient X, Y des espaces de Banach, k un entier positif. On note Y_k l'espace des formes $\varphi : X^k \rightarrow Y$ k -linéaires sur X et symétriques. On introduit l'espace :

$$Z_k = X \times Y \times Y_1 \times \dots \times Y_k,$$

appelé *continuation kème de l'espace $Z = X \times Y$* .

La *continuation kème d'une fonction $u : X \rightarrow Y$, de classe \mathcal{C}^∞* , est le vecteur :

$$u(x) = (x, u(x), \partial_x u(x), \dots, \partial_x^k u(x)) \in Z_k.$$

La continuation kème permet donc de considérer en même temps une fonction et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k .

On introduit de même un opérateur de différentiation ∂ sur Z_k .

Définition C.1.8 (Continuation kème des opérateurs différentiels.). On introduit l'opérateur différentiel ∂ sur Z_k tel que :

$$\partial = (\partial_x, \partial_0, \partial_1, \dots, \partial_k),$$

où $\partial = \partial_0$. L'opérateur D_k :

$$D_k = \partial_x + y_1 \cdot \partial_0 + \dots + y_{k+1} \cdot \partial_k,$$

est alors appelé *opérateur de différentiation exacte, tronqué à l'ordre k*. Il coïncide en fait avec l'*opérateur de différentiation exacte D* (qui correspond à une somme infinie) pour des fonctions F à source dans Z_k .

On peut alors définir la *continuation kème du groupe de Lie* $G^1(f)$ par :

$$\overset{1}{G}_k(f) = G^1_k(h).$$

Si $\zeta = (\xi, \eta) \in Z = X \times Y$ est le champ de vecteurs tangent d'un groupe $G^1(f)$, on peut aussi définir la *continuation de l'opérateur* $\zeta \cdot \partial = \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y$ par :

$$\zeta \cdot \partial = \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y + \eta_1 \cdot \partial_1 + \dots + \eta_k \cdot \partial_k,$$

et on peut montrer (cf. Ovsianikov [108, chap. 1]) que cet opérateur concorde avec le champ de vecteur tangent du groupe $\overset{1}{G}_k(f)$.

C.1.3 Groupes d'invariance d'équations différentielles

On écrit un système d'équations différentielles E et on l'interprète comme une variété, dans un certain espace, dont on veut trouver les groupes d'invariances. Pour utiliser les résultats concernant les groupes de Lie, on doit d'abord se ramener à un système linéaire. On utilise pour cela la théorie de la continuation. Ainsi, si E est un système d'ordre k , de m fonctions inconnues $y = (y_1, \dots, y_m)$, dépendant de n variables indépendantes $x = (x_1, \dots, x_n)$, on pose :

$$z = (x, y) \in Z = X \times Y = \mathbb{R}^{n+m},$$

et on peut alors écrire E sous la forme :

$$F(z) = 0,$$

où $F : Z_k \rightarrow \mathbb{R}^s$. On peut alors chercher les continuations kème des opérateurs $\zeta \cdot \partial$ pour lesquels cette variété est invariante. En tronquant, on retrouvera $\zeta \cdot \partial$.

C.2 Application aux équations d'Euler.

C.2.1 Opérateur d'invariance

On considère le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_r(\rho u) + \frac{j \rho u}{r} = 0, \\ \partial_t u + u \partial_r u + \frac{\partial_r p}{\rho} = 0, \\ \partial_t p + u \partial_r p - c^2 (\partial_t \rho + u \partial_r \rho) = 0, \end{cases} \quad (\text{C.2.1})$$

où j vaut 1 en symétrie cylindrique et $j = 2$ en symétrie sphérique et où $c^2 = \frac{\gamma_0 p}{\rho(1-b\rho)}$. Pour ce problème, on a

- deux variables (indépendantes) : r et t ,
- trois inconnues (variables dépendantes) : u , p et ρ ,
- des dérivées d'ordres un : $(u_1, u_2, p_1, p_2, \rho_1, \rho_2)$, l'indice 1 signifiant ici une dérivée temporelle et l'indice 2 une dérivée spatiale.

Le système (C.2.1) s'écrit alors

$$\begin{cases} \rho_1 + u\rho_2 + \frac{j\rho u}{r} + \rho u_2 = 0, \\ u_1 + uu_2 + \frac{1}{\rho}p_2 = 0, \\ p_1 + up_2 - c^2(\rho_1 + u\rho_2) = 0. \end{cases} \quad (\text{C.2.2})$$

L'opérateur d'invariance s'écrit d'autre part

$$\zeta \cdot \partial = \xi \partial_t + \eta \partial_r + \sigma \partial_u + \tau \partial_p + \omega \partial_\rho. \quad (\text{C.2.3})$$

Le problème de l'invariance de (C.2.2) consiste à trouver ξ , η , σ , τ et ω tels que $(\zeta \cdot \partial)F(t, r) = 0$, F désignant le système (C.2.1). Pour cela, on écrit la continuation première de l'opérateur (C.2.3), ce qui permet de considérer les dérivées premières comme des variables indépendantes. La continuation première suffit ici puisque le système (C.2.1) est d'ordre un. On appliquera ensuite cet opérateur à chacune des équations du système (C.2.1).

Tout d'abord, pour simplifier un peu les notations, on introduit l'opérateur D_1 , dans lequel apparaissent les opérateurs de dérivation totale D_1 et D_2 , opérateurs qui jouent un rôle particulièrement important dans la théorie de la continuation :

$$D_1 = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \partial_u + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \partial_p + \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \partial_\rho.$$

D'après Ovsianikov [108, chap. 1], la continuation première de l'opérateur (C.2.3) s'écrit alors :

$$\zeta \cdot \partial_1 = \xi \partial_t + \eta \partial_r + \sigma \partial_u + \tau \partial_p + \omega \partial_\rho + \sigma_1 \partial_{u_1} + \sigma_2 \partial_{u_2} + \tau_1 \partial_{p_1} + \tau_2 \partial_{p_2} + \omega_1 \partial_{\rho_1} + \omega_2 \partial_{\rho_2},$$

où :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= D_1 \sigma - u_1 D_1 \xi - u_2 D_1 \eta, \\ \sigma_2 &= D_2 \sigma - u_1 D_2 \xi - u_2 D_2 \eta, \\ \tau_1 &= D_1 \tau - p_1 D_1 \xi - p_2 D_1 \eta, \\ \tau_2 &= D_2 \tau - p_1 D_2 \xi - p_2 D_2 \eta, \\ \omega_1 &= D_1 \omega - \rho_1 D_1 \xi - \rho_2 D_1 \eta, \\ \omega_2 &= D_2 \omega - \rho_1 D_2 \xi - \rho_2 D_2 \eta. \end{aligned} \quad (\text{C.2.4})$$

Si on applique $\zeta \cdot \partial_1$ au système (C.2.1), on obtient :

$$\begin{cases} \omega_1 + u\omega_2 + \rho_2 \sigma + \frac{j\omega u}{r} + \frac{j\rho\sigma}{r} - \frac{j\rho u \eta}{r^2} + \omega u_2 + \rho \sigma_2 = 0, \\ \sigma_1 + u\sigma_2 + \sigma u_2 + \frac{1}{\rho} \tau_2 - \frac{\omega}{\rho^2} p_2 = 0, \\ \tau_1 + u\tau_2 + \sigma p_2 - c^2(\omega_1 + u\omega_2 + \sigma \rho_2) \\ \quad - \gamma_0 \left(\frac{\tau}{\rho(1-b\rho)} - \frac{p\omega(1-2b\rho)}{\rho^2(1-b\rho)^2} \right) (\rho_1 + u\rho_2) = 0. \end{cases}$$

Il reste alors à développer tous les termes. De plus, parmi la première continuation des inconnues, on a trois variables libres : u_2 , p_2 et ρ_2 , et trois variables dépendantes : u_1 , p_1 et ρ_1 .

C.2.2 Développement de la première équation

On développe en éliminant les termes ρ_1, u_1, p_1 grâce au système (C.2.2) qui permet d'en déduire des expressions en fonction de ρ_2, u_2, p_2 . On obtient

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= D_2\sigma - u_1D_2\xi - u_2D_2\eta \\ &= \partial_r\sigma + u_2\partial_u\sigma + p_2\partial_p\sigma + \rho_2\partial_\rho\sigma + \frac{p_2}{\rho}(\partial_r\xi + u_2\partial_u\xi + p_2\partial_p\xi + \rho_2\partial_\rho\xi) \\ &\quad + u_2(\partial_r\eta + u_2\partial_u\eta + p_2\partial_p\eta + \rho_2\partial_\rho\eta).\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\omega_1 + u\omega_2 &= D_1\omega + uD_2\omega - \rho_1(D_1\xi + uD_2\xi) - \rho_2(D_1\eta - uD_2\eta) \\ &= \partial_t\omega + u\partial_r\omega + (u_1 + uu_2)\partial_u\omega + (p_1 + up_2)\partial_p\omega + (\rho_1 + u\rho_2)\partial_\rho\omega \\ &\quad - \rho_1(\partial_t\xi + u\partial_r\xi + (u_1 + uu_2)\partial_u\xi + (p_1 + up_2)\partial_p\xi + (\rho_1 + u\rho_2)\partial_\rho\xi) \\ &\quad - \rho_2(\partial_t\eta + u\partial_r\eta + (u_1 + uu_2)\partial_u\eta + (p_1 + up_2)\partial_p\eta + (\rho_1 + u\rho_2)\partial_\rho\eta) \\ &= \partial_t\omega + u\partial_r\omega + (u\rho_2 + \rho u_2 + \frac{j\rho u}{r})(\partial_t\xi + u\partial_r\xi) - \rho_2(\partial_t\eta + u\partial_r\eta) \\ &\quad - \frac{p_2}{\rho}(\partial_u\omega + (u\rho_2 + \rho u_2 + \frac{j\rho u}{r})\partial_u\xi - \rho_2\partial_u\eta) \\ &\quad - \frac{\gamma_0 p}{\rho(1-b\rho)}\left(\frac{j\rho u}{r} + \rho u_2\right)(\partial_p\omega + (u\rho_2 + \rho u_2 + \frac{j\rho u}{r})\partial_p\xi - \rho_2\partial_p\eta) \\ &\quad - \left(\rho u_2 + \frac{j\rho u}{r}\right)(\partial_\rho\omega + (u\rho_2 + \rho u_2 + \frac{j\rho u}{r})\partial_\rho\xi - \rho_2\partial_\rho\eta).\end{aligned}$$

Par conséquent, la première équation devient

$$\begin{aligned}0 &= \partial_t\omega + u\partial_r\omega + (u\rho_2 + \rho u_2 + \frac{j\rho u}{r})(\partial_t\xi + u\partial_r\xi) - \rho_2(\partial_t\eta + u\partial_r\eta) \\ &\quad - \frac{p_2}{\rho}(\partial_u\omega + (u\rho_2 + \rho u_2 + \frac{j\rho u}{r})\partial_u\xi - \rho_2\partial_u\eta) \\ &\quad - \frac{\gamma_0 p}{\rho(1-b\rho)}\left(\frac{j\rho u}{r} + \rho u_2\right)(\partial_p\omega + (u\rho_2 + \rho u_2 + \frac{j\rho u}{r})\partial_p\xi - \rho_2\partial_p\eta) \\ &\quad - \left(\rho u_2 + \frac{j\rho u}{r}\right)(\partial_\rho\omega + (u\rho_2 + \rho u_2 + \frac{j\rho u}{r})\partial_\rho\xi - \rho_2\partial_\rho\eta) \\ &\quad + \rho\left[\partial_r\sigma + u_2\partial_u\sigma + p_2\partial_p\sigma + \rho_2\partial_\rho\sigma + \frac{p_2}{\rho}(\partial_r\xi + u_2\partial_u\xi + p_2\partial_p\xi + \rho_2\partial_\rho\xi) \right. \\ &\quad \left. + u_2(\partial_r\eta + u_2\partial_u\eta + p_2\partial_p\eta + \rho_2\partial_\rho\eta)\right] \\ &\quad + \frac{j\omega u}{r} + \frac{j\rho\sigma}{r} - \frac{j\rho u\eta}{r^2}.\end{aligned}$$

On considère l'expression ci-dessus comme pour un polynôme de degré deux en ρ_2, u_2, p_2 . Par conséquent ce polynôme est nul si tous les coefficients s'annulent. On regarde tout

d'abord les coefficients des termes quadratiques. Ainsi le coefficient de p_2^2 donne : $\partial_p \xi = 0$.
On poursuit de même pour les autres coefficients. On obtient :

$$\begin{aligned}
u_2^2 &: -\rho u \partial_u \xi - \rho^2 \partial_\rho \xi + u \rho \partial_u \xi + \rho u \partial_u \xi - \rho \partial_u \eta = 0 \\
&\iff u \partial_u \xi - \rho \partial_\rho \xi - \partial_u \eta = 0, \\
u_2 p_2 &: -u^2 \partial_u \xi - u \rho \partial_\rho \xi - \rho u \partial_\rho \xi + u \partial_u \eta + c^2 \rho \partial_p \eta + \rho \partial_\rho \eta + u^2 \partial_u \xi + u \rho \partial_\rho \xi \\
&\quad - u \partial_u \eta + u \rho \partial_\rho \xi - \rho \partial_\rho \eta = 0 \\
&\iff \partial_p \eta = 0, \\
u_2 p_2 &: -\partial_u \xi + \partial_u \xi = 0, \\
p_2 p_2 &: -u \frac{1}{\rho} \partial_u \xi + \frac{1}{\rho} \partial_u \eta + \partial_\rho \xi = 0 \iff u \partial_u \xi - \rho \partial_\rho \xi - \partial_u \eta = 0, \\
\rho_2^2 &: -u^2 \partial_\rho \xi + u \partial_\rho \eta + u^2 \partial_\rho \xi - u \partial_\rho \eta = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi on a obtenu : $\boxed{\partial_p \xi = 0, \partial_p \eta = 0 \text{ et } u \partial_u \xi - \rho \partial_\rho \xi - \partial_u \eta = 0}$.

De même, on relève les coefficients d'ordre un et d'ordre zéro :

$$\begin{aligned}
u_2 &: -u \partial_u \omega - c^2 \rho \partial_p \omega - \rho \partial_\rho \omega + \rho \partial_t \xi - \frac{j \rho u}{r} u \partial_u \xi - \frac{j \rho u}{r} \rho \partial_\rho \xi - \frac{j \rho u}{r} \rho \partial_\rho \xi + \omega \\
&\quad + u \partial_u \omega + u \rho \partial_r \xi + \frac{j \rho u}{r} u \partial_u \xi + \rho \partial_u \sigma + \rho u \partial_r \xi - \rho \partial_r \eta = 0 \\
&\iff -c^2 \rho \partial_p \omega - \rho \partial_\rho \omega + \rho \partial_t \xi - 2 \frac{j \rho u}{r} \rho \partial_\rho \xi + \omega + 2u \rho \partial_r \xi + \rho \partial_u \sigma - \rho \partial_r \eta = 0, \\
p_2 &: -\frac{1}{\rho} \partial_u \omega - u \partial_p \omega - \frac{j u}{r} \partial_u \xi + u \partial_p \omega + \rho \partial_p \sigma + \partial_r \xi = 0 \\
&\iff -\frac{1}{\rho} \partial_u \omega - \frac{j u}{r} \partial_u \xi + \rho \partial_p \sigma + \partial_r \xi = 0, \\
\rho_2 &: -u \partial_\rho \omega + u \partial_t \xi - \frac{j \rho u}{r} u \partial_\rho \xi - \frac{j \rho u}{r} u \partial_\rho \xi - \partial_t \eta + \frac{j \rho u}{r} \partial_\rho \eta + \sigma + u \partial_\rho \omega + u^2 \partial_r \xi \\
&\quad + \frac{j \rho u}{r} u \partial_\rho \xi - u \partial_r \eta + \rho \partial_\rho \sigma = 0 \\
&\iff u \partial_t \xi - \frac{j \rho u}{r} u \partial_\rho \xi - \partial_t \eta + \frac{j \rho u}{r} \partial_\rho \eta + \sigma + u^2 \partial_r \xi - u \partial_r \eta + \rho \partial_\rho \sigma = 0, \\
0 &: \partial_t \omega - c^2 \frac{j \rho u}{r} \partial_p \omega - \frac{j \rho u}{r} \partial_\rho \omega + \frac{j \rho u}{r} \partial_t \xi - \left(\frac{j \rho u}{r}\right)^2 \partial_\rho \xi + \frac{j \omega u}{r} + \frac{j \rho \sigma}{r} - \frac{j \rho u}{r^2} \eta + u \partial_r \omega \\
&\quad + \frac{j \rho u}{r} u \partial_r \xi + \rho \partial_r \sigma = 0.
\end{aligned}$$

On procède de même pour les deux autres équations. On obtient finalement le système :

$$\partial_p \xi = \partial_\rho \xi = \partial_u \xi = 0, \quad \partial_p \eta = \partial_\rho \eta = \partial_u \eta = 0, \quad \partial_p \tau = 0, \quad (\text{C.2.5})$$

$$-c^2 \partial_p \omega - \partial_\rho \omega + \partial_t \xi + \frac{\omega}{\rho} + 2u \partial_r \xi + \partial_u \sigma - \partial_r \eta = 0, \quad (\text{C.2.6})$$

$$-\frac{1}{\rho} \partial_u \omega + \rho \partial_p \sigma + \partial_r \xi = 0, \quad (\text{C.2.7})$$

$$u \partial_t \xi - \partial_t \eta + \sigma + u^2 \partial_r \xi - u \partial_r \eta + \rho \partial_p \sigma = 0, \quad (\text{C.2.8})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \omega - c^2 \frac{j\rho u}{r} \partial_p \omega - \frac{j\rho u}{r} \partial_\rho \omega + \frac{j\rho u}{r} \partial_t \xi + \frac{j\omega u}{r} + \frac{j\rho \sigma}{r} \\ - \frac{j\rho u}{r^2} \eta + u \partial_r \omega + \frac{j\rho u}{r} u \partial_r \xi + \rho \partial_r \sigma = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.2.9})$$

$$\partial_t \sigma - c^2 \frac{j\rho u}{r} \partial_p \sigma - \frac{j\rho u}{r} \partial_\rho \sigma + u \partial_r \sigma + \frac{1}{\rho} \partial_r \tau + c^2 \frac{j u}{r} \partial_r \xi = 0, \quad (\text{C.2.10})$$

$$-c^2 \rho \partial_p \sigma - \rho \partial_\rho \sigma + u \partial_t \xi - \partial_t \eta + \sigma + u^2 \partial_r \xi - u \partial_r \eta + \frac{1}{\rho} \partial_u \tau + c^2 \partial_r \xi = 0, \quad (\text{C.2.11})$$

$$-\partial_u \sigma + \partial_t \xi - \frac{\omega}{\rho} + 2u \partial_r \xi + \partial_p \tau - \partial_r \eta = 0, \quad (\text{C.2.12})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tau - c^2 \frac{j\rho u}{r} \partial_p \tau + u \partial_r \tau - c^2 u \partial_r \omega - c^2 \partial_t \omega + c^4 \frac{j\rho u}{r} \partial_p \omega + c^2 \frac{j\rho u}{r} \partial_\rho \omega \\ + \frac{j\rho u}{r} \gamma_0 \left(\frac{\tau}{\rho(1-b\rho)} - \frac{p\omega(1-2b\rho)}{\rho^2(1-b\rho)^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.2.13})$$

$$-c^2 \rho \partial_p \tau + c^4 \rho \partial_p \omega + c^2 \rho \partial_\rho \omega + \rho \gamma_0 \left(\frac{\tau}{\rho(1-b\rho)} - \frac{p\omega(1-2b\rho)}{\rho^2(1-b\rho)^2} \right) = 0, \quad (\text{C.2.14})$$

$$-\frac{1}{\rho} \partial_u \tau + u \partial_t \xi - \partial_t \eta + \sigma + u^2 \partial_r \xi - u \partial_r \eta + c^2 \frac{1}{\rho} \partial_u \omega = 0, \quad (\text{C.2.15})$$

$$-\sigma - u^2 \partial_r \xi + u \partial_r \eta - u \partial_t \xi + \partial_t \eta = 0. \quad (\text{C.2.16})$$

On remplace (C.2.8) par (C.2.8)+(C.2.16), (C.2.15) par (C.2.15)+(C.2.16), (C.2.13) par (C.2.13)- $\frac{j\rho u}{r}$ (C.2.14), (C.2.6) par (C.2.6)+(C.2.12), et (C.2.11) par (C.2.11)+(C.2.16)+ c^2 (C.2.7). On obtient alors :

$$(C.2.8) \iff \partial_\rho \sigma = 0,$$

$$(C.2.15) \iff -\partial_u \tau + c^2 \partial_u \omega = 0,$$

$$(C.2.13) \iff \partial_t \tau + u \partial_r \tau - c^2 u \partial_r \omega - c^2 \partial_t \omega = 0,$$

$$(C.2.6) \iff -c^2 \partial_p \omega - \partial_\rho \omega + 2\partial_t \xi + 4u \partial_r \xi - 2\partial_r \eta + \partial_p \tau = 0,$$

$$(C.2.11) \iff \partial_r \xi = 0.$$

Le système est donc devenu :

$$\begin{aligned}
&\partial_r \xi = \partial_p \xi = \partial_\rho \xi = \partial_u \xi = 0, \quad \partial_p \eta = \partial_\rho \eta = \partial_u \eta = 0, \quad \partial_\rho \tau = 0, \quad \partial_\rho \sigma = 0, \\
&\partial_u \tau - c^2 \partial_u \omega = 0, \\
&\partial_t \tau + u \partial_r \tau - c^2 [\partial_t \omega + u \partial_r \omega] = 0, \\
&-c^2 \partial_p \omega - \partial_\rho \omega + 2 \partial_t \xi - 2 \partial_r \eta + \partial_p \tau = 0, \\
&\partial_u \omega - \rho^2 \partial_p \sigma = 0, \\
&\partial_p \tau - \partial_u \sigma + \partial_t \xi - \partial_r \eta = \frac{\omega}{\rho}, \\
&\partial_t \eta + u \partial_r \eta - u \partial_t \xi = \sigma, \\
&c^2 \partial_p \omega + \partial_\rho \omega - \partial_p \tau + \left(\frac{\tau}{p} - \frac{\omega(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)} \right) = 0, \\
&\partial_t \sigma + u \partial_r \sigma - c^2 \frac{j\rho u}{r} \partial_p \sigma + \frac{1}{\rho} \partial_r \tau = 0, \\
&\partial_t \omega + u \partial_r \omega + \rho \partial_r \sigma - c^2 \frac{j\rho u}{r} \partial_p \omega - \frac{j\rho u}{r} \partial_\rho \omega + \frac{j\rho u}{r} \partial_t \xi + \frac{j\omega u}{r} + \frac{j\rho \sigma}{r} - \frac{j\rho u}{r^2} \eta = 0.
\end{aligned}$$

C.2.3 Résolution du système

Quelques manipulations sur la 4ème, la 7ème et la 8ème équation du système précédent, donnent :

$$\begin{aligned}
\partial_r \eta - \partial_t \xi &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{p} - \frac{\omega(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)} \right), \\
\partial_t \eta &= \sigma - \frac{u}{2} \left(\frac{\tau}{p} - \frac{\omega(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)} \right).
\end{aligned}$$

Si on dérive alors ces deux équations par rapport à u , p et ρ , on obtient que le membre de gauche est nul, et donc :

$$\begin{aligned}
\partial_u \tau &= \partial_u \omega \frac{p(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)}, \\
\partial_p \tau - \frac{\tau}{p} &= \partial_p \omega \frac{p(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)}, \\
\partial_\rho \tau &= \partial_\rho \omega \frac{p(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)} - \omega \frac{(1-2b\rho)^2 + 2b\rho(1-b\rho)}{\rho^2(1-b\rho)^2} = 0,
\end{aligned}$$

et alors

$$\begin{aligned}
\partial_u \sigma &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{p} - \frac{\omega(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)} \right), \\
\partial_p \sigma &= 0.
\end{aligned}$$

Le système d'équation devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_r \xi = \partial_u \xi = \partial_p \xi = \partial_\rho \xi = 0 \\ \partial_u \eta = \partial_p \eta = \partial_\rho \eta = 0 \\ \partial_\rho \tau = \partial_u \tau = 0 \\ \partial_p \sigma = 0 \\ \partial_u \omega = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \eta = \sigma - \frac{u}{2} \left(\frac{\tau}{p} - \frac{\omega(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)} \right) \\ \partial_r \eta - \partial_t \xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{p} - \frac{\omega(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)} \right) \\ \partial_p \omega - \frac{b\rho}{p(1-2b\rho)} \omega = 0 \\ \partial_\rho \omega - \omega \frac{(1-2b\rho+2b^2\rho^2)}{\rho(1-2b\rho)(1-b\rho)} = 0 \\ c^2 \partial_p \omega + \partial_\rho \omega = \partial_p \omega \frac{p(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)} + \omega \frac{(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tau + u \partial_r \tau = c^2 (\partial_t \omega + u \partial_r \omega) \\ \partial_t \sigma + u \partial_r \sigma + \frac{1}{\rho} \partial_r \tau = 0 \\ \partial_p \tau - \frac{\tau}{p} = \partial_p \omega \frac{p(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)} \\ \partial_u \sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{p} - \frac{\omega(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)} \right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \partial_t \omega + u \partial_r \omega + \rho \partial_r \sigma - \frac{j\rho u}{r} (c^2 \partial_p \omega + \partial_\rho \omega) \\ + \frac{j\rho u}{r} \partial_t \xi + \frac{j\omega u}{r} + \frac{j\rho \sigma}{r} - \frac{j\rho u}{r^2} \eta = 0. \end{array}$$

En particulier, les trois équations en ω de la deuxième accolade, donnent :

$$\begin{aligned} \left(c^2 - \frac{p(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)} \right) \frac{b\rho}{p(1-2b\rho)} \omega + \omega \frac{(1-2b\rho+2b^2\rho^2)}{\rho(1-2b\rho)(1-b\rho)} &= \omega \frac{(1-2b\rho)}{\rho(1-b\rho)} \\ \iff (\gamma_0 - (1-2b\rho))b\rho \omega &= [(1-2b\rho)^2 - (1-2b\rho - 2b^2\rho^2)]\omega \\ &= 2b\rho(-1+b\rho)\omega. \end{aligned}$$

Donc : $b \neq 0 \implies \omega = 0$.

C.2.3.A Cas $b \neq 0$

Avec $\omega = 0$, le système se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tau + u \partial_r \tau = 0 \\ \partial_t \sigma + u \partial_r \sigma + \frac{1}{\rho} \partial_r \tau = 0 \\ \partial_p \tau = \frac{\tau}{p} \\ \partial_u \sigma = \frac{\tau}{2p} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \eta = \sigma - \frac{u\tau}{2p} \\ \partial_r \eta - \partial_t \xi = \frac{\tau}{2p} \\ \rho \partial_r \sigma + \frac{j\rho u}{r} \partial_t \xi + \frac{j\rho \sigma}{r} - \frac{j\rho u}{r^2} \eta = 0. \end{array} \right.$$

En dérivant la première équation par rapport à u , il vient : $\partial_r \tau = 0$, d'où $\partial_t \tau = 0$ et finalement τ ne dépend que de p . Or $\partial_p \tau = \frac{\tau}{p}$. Il existe donc une constante réelle a telle que $\tau = ap$. De même en dérivant la deuxième équation par rapport à u , il vient : $\partial_r \sigma = \partial_t \sigma = 0$. Alors, σ ne dépend que de u et $\partial_u \sigma = \frac{\tau}{2p} = \frac{a}{2}$ donne $\sigma = au/2 + b$, où b est une constante. Il reste alors à déterminer η et ξ . Les équations restantes permettent de trouver si $j \neq 0$: $b = 0$, $\eta = c.r$ et $\xi = (c - a/2)t + d$, tandis que $j = 0$ entraîne : $\eta = bt + \tilde{c}r + \tilde{d}$, $\xi = (\tilde{c} - a/2)t + \tilde{e}$.

C.2.3.B Cas $b = 0$

On obtient notamment : $\partial_p \omega = 0$ et $\partial_\rho \omega = \omega/\rho$. On dérive l'équation $\rho(\partial_t \sigma + u \partial_r \sigma) + \partial_r \tau = 0$ par rapport à τ . Cela donne : $\partial_r \tau = 0$. D'autre part, si on dérive $\partial_t \tau = c^2(\partial_t \omega + u \partial_r \omega)$ par rapport à u , on obtient aussi : $\partial_r \omega = 0$. Cela implique : $\partial_r \sigma = 0$, donc $\partial_t \sigma = 0$ itou, alors $\partial_t \tau = 0$ et $\partial_t \omega = 0$. Finalement ω ne dépend que de ρ et la forme de $\partial_\rho \omega$ implique : $\omega = A\rho$. De même on obtient : $\tau = Bp$. Et $\partial_u \sigma = 1/2(B - A)$ entraîne $\sigma = u/2(B - A) + C$. Il reste encore à déterminer η et ξ . Les dernières équations permettent d'obtenir, si $j \neq 0$:

$C = 0$, $\eta = Dr$ et $\xi = (D - (B - A)/2)t + E$; tandis que $j = 0$ implique $\eta = Ct + Fr + G$ et $\xi = (F - (B - A)/2)t + H$. On a donc bien obtenu :

$$\begin{array}{l} \text{si } \begin{array}{l} b \neq 0 \\ j \neq 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \xi = (c - a/2)t + d \\ \eta = c.r \\ \sigma = au/2 \\ \tau = ap \\ \omega = 0, \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{si } \begin{array}{l} b \neq 0 \\ j = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \xi = (\tilde{c} - a/2)t + \tilde{e} \\ \eta = bt + \tilde{c}r + \tilde{d} \\ \sigma = au/2 + b \\ \tau = ap \\ \omega = 0, \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{si } \begin{array}{l} b = 0 \\ j \neq 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \xi = (D - (B - A)/2)t + E \\ \eta = Dr \\ \sigma = u/2(B - A) \\ \tau = Bp \\ \omega = A\rho, \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{si } \begin{array}{l} b = 0 \\ j = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \xi = (F - (B - A)/2)t + H \\ \eta = Ct + Fr + G \\ \sigma = u/2(B - A) + C \\ \tau = Bp \\ \omega = A\rho. \end{array} \right. \end{array}$$

C.2.4 Conclusion

On obtient :

Proposition C.2.1 (Groupes de symétrie des équations d'Euler.). *Les groupes de symétrie du système (2.1.4), qui donne les mouvements à symétrie plane ($j=0$), cylindrique ($j=1$) ou sphérique ($j=2$), d'un gaz de Van der Waals de covolume b , à coefficients calorimétriques constants, sont donnés dans le tableau C.1.*

Générateurs	Transformations	Type
Cas $b \neq 0$ et $d \neq 1$:		
$\zeta_1 \cdot \partial = \partial_t$	$t \mapsto t + a$	1
$\zeta_2 \cdot \partial = t\partial_t + r\partial_r$	$(t, r) \mapsto (\lambda t, \lambda r)$	2
$\zeta_3 \cdot \partial = -t\partial_t + u\partial_u + 2p\partial_p$	$(t, u, p) \mapsto (\frac{t}{\lambda}, \lambda u, \lambda^2 p)$	2
Cas $b = 0$ et $d \neq 1$:		
$\zeta_1 \cdot \partial = \partial_t$	$t \mapsto t + a$	1
$\zeta_2 \cdot \partial = t\partial_t + r\partial_r$	$(t, r) \mapsto (\lambda t, \lambda r)$	2
$\zeta_3 \cdot \partial = -t\partial_t + u\partial_u + 2p\partial_p$	$(t, u, p) \mapsto (\frac{t}{\lambda}, \lambda u, \lambda^2 p)$	2
$\zeta_4 \cdot \partial = t\partial_t - u\partial_u + 2\rho\partial_\rho$	$(t, u, \rho) \mapsto (\lambda t, \frac{u}{\lambda}, \lambda^2 \rho)$	2
Cas $b \neq 0$ et $d = 1$:		
$\zeta_1 \cdot \partial = \partial_t$	$t \mapsto t + a$	1
$\zeta_2 \cdot \partial = t\partial_t + r\partial_r$	$(t, r) \mapsto (\lambda t, \lambda r)$	2
$\zeta_3 \cdot \partial = -t\partial_t + u\partial_u + 2p\partial_p$	$(t, u, p) \mapsto (\frac{t}{\lambda}, \lambda u, \lambda^2 p)$	2
$\zeta_4 \cdot \partial = t\partial_r + \partial_u$	$r \mapsto r + at, u \mapsto u + a$	3
$\zeta_5 \cdot \partial = \partial_r$	$r \mapsto r + a$	1
Cas $b = 0$ et $d = 1$:		
$\zeta_1 \cdot \partial = \partial_t$	$t \mapsto t + a$	1
$\zeta_2 \cdot \partial = t\partial_t + r\partial_r$	$(t, r) \mapsto (\lambda t, \lambda r)$	2
$\zeta_3 \cdot \partial = -t\partial_t + u\partial_u + 2p\partial_p$	$(t, u, p) \mapsto (\frac{t}{\lambda}, \lambda u, \lambda^2 p)$	2
$\zeta_4 \cdot \partial = t\partial_r + \partial_u$	$r \mapsto r + at, u \mapsto u + a$	3
$\zeta_5 \cdot \partial = \partial_r$	$r \mapsto r + a$	1
$\zeta_6 \cdot \partial = t\partial_t - u\partial_u + 2\rho\partial_\rho$	$(t, u, \rho) \mapsto (\lambda t, \frac{u}{\lambda}, \lambda^2 \rho)$	2

FIGURE C.1 – Groupes de symétrie des équations d'Euler pour un gaz de Van der Waals à coefficient calorifique c_v constant. Types : 1. translation, 2. changement d'échelle, 3. changement de référentiel galiléen.

Notations

$\llbracket 1, n \rrbracket$	$\{1, \dots, n\}$
$B(0, R)$	Boule de centre 0 et de rayon R .
$\text{Conv}(U)$	Enveloppe convexe de U
$\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$	Matrices carrées de taille d , à valeurs réelles.
$\mathcal{O}_d(\mathbb{R})$	Matrices carrées de taille d , à valeurs réelles, associées aux isométries (matrices normales).
$A^{\mathbf{T}}$	Transposée de A , pour $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$
Supp	Support d'une fonction
Spec	Spectre d'un endomorphisme
∂_t	Dérivée par rapport à t : $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$
∂^α	$\frac{\partial^k}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_d} x_d}$
div	Divergence. Pour $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $\text{div } u = \sum_{i=1}^n \partial_i u_i$
$D^k U$	Différentielle $k^{\text{ème}}$
∇u	Vecteur des dérivées premières
\mathcal{C}^k	Fonctions k fois dérivables
\mathcal{C}_c^k	Fonctions \mathcal{C}^k à support compact
\mathbf{L}^k	Espace de Lebesgue. Soit F un espace vectoriel normé, alors $\mathbf{L}^k(E; F) = \{u \text{ mesurable tel que } \int_E u ^k < \infty\}$
\mathbf{L}_{loc}^k	Espace de Lebesgue local. Soit F un espace vectoriel normé, on a alors $\mathbf{L}_{loc}^k(E; F) = \{u \text{ mesurable tel que } \int_U u ^k < \infty \text{ pour tout ouvert } U \subset E\}$
\mathbf{H}^k	Espace de Sobolev. Soit F un espace vectoriel normé, alors $\mathbf{H}^k(E; F) = \{u \text{ mesurable tel que } \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, D^j u \text{ est mesurable et } \int_E \sum_{j=0}^k D^j u ^2 < \infty\}$
\mathbf{H}_{loc}^k	Espace de Sobolev local. Soit F un espace vectoriel normé, $\mathbf{H}_{loc}^k(E; F) = \{u \text{ mesurable tel que } \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, D^j u \text{ est mesurable et } \int_U \sum_{j=0}^k D^j u ^2 < \infty \text{ pour tout ouvert } U \subset E\}$
\mathbf{H}_{ul}^k	Ensemble des $u \in \mathbf{H}_{loc}^k$ tels que, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, si $\varphi_x(y) = \varphi(x - y)$, on a $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \ \varphi_x u\ _{\mathbf{H}^k} < \infty$

- $\mathbf{W}^{k,p}$** Espace de Sobolev d'ordre p . Soit F un espace vectoriel normé, alors $\mathbf{W}^{k,p}(E; F) = \{u : E \rightarrow F \text{ mesurable tel que pour tout } j \in \{1, \dots, k\}, D^j u \text{ est mesurable et } \int_E \sum_{j=0}^k |D^j u|^p < \infty\}$
- X** Espace $\{z : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; dz \in \mathbf{L}^\infty, D^2 z \in \mathbf{H}^{m-1}\}$
- TV** Variation totale pour $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ $\text{TV}(u) = \sup\{\int_{\mathbb{R}^d} u \operatorname{div} \psi \, dx ; \psi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \text{ et } \|\psi\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)} \leq 1\}$.
- BV** Fonctions à variation bornée $\{u \in \mathbf{L}_{loc}^1; \text{TV}(u) < \infty\}$.
- \mathcal{X}_α** $\{u \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV} \cap \mathbf{L}^\infty \text{ tel que } \|u\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \alpha\}$

Bibliographie

- [1] C. E. Agnew. Dynamic modeling and control of congestion-prone systems. *Operations Res.*, 24(3) :400–419, 1976.
- [2] L. Ambrosio. Transport equation and Cauchy problem for non-smooth vector fields. In *Calculus of variations and nonlinear partial differential equations*, volume 1927 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–41. Springer, Berlin, 2008.
- [3] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.
- [4] D. Armbruster, P. Degond, and C. Ringhofer. A model for the dynamics of large queuing networks and supply chains. *SIAM J. Appl. Math.*, 66(3) :896–920 (electronic), 2006.
- [5] D. Armbruster, D. Marthaler, C. Ringhofer, K. Kempf, and T.-C. Jo. A continuum model for a re-entrant factory. *Operations Research*, 54(5) :933–950, 2006.
- [6] D. Armbruster, D. E. Marthaler, C. Ringhofer, K. Kempf, and T.-C. Jo. A continuum model for a re-entrant factory. *Oper. Res.*, 54(5) :933–950, 2006.
- [7] V. Arnol'd. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. “Mir”, Moscow, 1980. Translated from the Russian by Djilali Embarek.
- [8] R. Arora and V. D. Sharma. Convergence of strong shock in a Van der Waals gas. *SIAM J. Appl. Math.*, 66(5) :1825–1837 (electronic), 2006.
- [9] P. Baiti and A. Bressan. The semigroup generated by a Temple class system with large data. *Differential Integral Equations*, 10(3) :401–418, 1997.
- [10] C. Bardos, A. Y. le Roux, and J.-C. Nédélec. First order quasilinear equations with boundary conditions. *Comm. Partial Differential Equations*, 4(9) :1017–1034, 1979.
- [11] A. Benabdallah and D. Serre. Problèmes aux limites pour des systèmes hyperboliques non linéaires de deux équations à une dimension d’espace. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 305(15) :677–680, 1987.
- [12] S. Benzoni-Gavage and R. M. Colombo. An n -populations model for traffic flow. *European J. Appl. Math.*, 14(5) :587–612, 2003.
- [13] S. Benzoni-Gavage, R. M. Colombo, and P. Gwiazda. Measure valued solutions to conservation laws motivated by traffic modelling. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 462(2070) :1791–1803, 2006.
- [14] S. Benzoni-Gavage and D. Serre. *Multi-dimensional hyperbolic partial differential equations : First-order Systems and Applications*. Oxford Science publication, 2006.

- [15] H. A. Bethe. On the theory of shock waves for an arbitrary equation of state [Rep. No. 545, Serial No. NDRC-B-237, Office Sci. Res. Develop., U. S. Army Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, MD, 1942]. In *Classic papers in shock compression science*, High-press. Shock Compression Condens. Matter, pages 421–492. Springer, New York, 1998.
- [16] S. Bianchini. On the shift differentiability of the flow generated by a hyperbolic system of conservation laws. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 6(2) :329–350, 2000.
- [17] S. Bianchini and R. M. Colombo. On the stability of the standard Riemann semigroup. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(7) :1961–1973 (electronic), 2002.
- [18] J. R. Blake, editor. *Acoustic cavitation and sonoluminescence*. Royal Society, London, 1999. R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **357** (1999), no. 1751.
- [19] F. Bouchut and F. James. One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients. *Nonlinear Anal.*, 32 :891–933, 1998.
- [20] F. Bouchut and F. James. Differentiability with respect to initial data for a scalar conservation law. In *Hyperbolic problems : theory, numerics, applications*. Internat. Ser. Numer. Math, Birkhauser, Basel, 1999.
- [21] F. Bouchut and B. Perthame. Kruřkov’s estimates for scalar conservation laws revisited. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(7) :2847–2870, 1998.
- [22] A. Bressan. *Hyperbolic systems of conservation laws*, volume 20 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2000. The one-dimensional Cauchy problem.
- [23] A. Bressan and G. Guerra. Shift-differentiability of the flow generated by a conservation law. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 3(1) :35–58, 1997.
- [24] A. Bressan and M. Lewicka. Shift differentials of maps in BV spaces. In *Nonlinear theory of generalized functions (Vienna, 1997)*, volume 401 of *Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math.*, pages 47–61. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.
- [25] A. Bressan and W. Shen. Optimality conditions for solutions to hyperbolic balance laws. *Control methods in PDE-dynamical systems, Contemp. Math.*, 426 :129–152, 2007.
- [26] C. Canuto, F. Fagnani, and P. Tilli. A eulerian approach to the analysis of rendez-vous algorithms. In *Proceedings of the IFAC World Congress 2008*, 2008.
- [27] J.-Y. Chemin. Dynamique des gaz à masse totale finie. *Asymptotic Anal.*, 3(3) :215–220, 1990.
- [28] J.-Y. Chemin. Remarques sur l’apparition de singularités dans les écoulements eulériens compressibles. *Comm. Math. Phys.*, 133(2) :323–329, 1990.
- [29] G.-Q. Chen. Remarks on spherically symmetric solutions of the compressible Euler equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 127(2) :243–259, 1997.
- [30] G.-Q. Chen and K. H. Karlsen. Quasilinear anisotropic degenerate parabolic equations with time-space dependent diffusion coefficients. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 4(2) :241–266, 2005.
- [31] W. Chester. The quasi-cylindrical shock tube. *Phil. Mag. (7)*, 45 :1293–1301, 1954.
- [32] E. Chevallier and L. Leclerq. A macroscopic theory for unsignalized intersections. *Transportation Research part B*, 41 :1139–1150, 2007.

- [33] R. F. Chisnell. The motion of a shock wave in a channel, with applications to cylindrical and spherical shock waves. *J. Fluid Mech.*, 2 :286–298, 1957.
- [34] R. F. Chisnell. An analytic description of converging shock waves. *J. Fluid Mech.*, 354 :357–375, 1998.
- [35] R. M. Colombo. Wave front tracking in systems of conservation laws. *Applications of mathematics*, 49(6) :501–537, 2004.
- [36] R. M. Colombo, G. Facchi, G. Maternini, and M. D. Rosini. On the continuum modeling of crowds. In *Proceedings of Hyp2008 - the twelfth International Conference on Hyperbolic Problems held in the University of Maryland, College Park*, June 2008. To appear.
- [37] R. M. Colombo and P. Goatin. A well posed conservation law with a variable unilateral constraint. *J. Differential Equations*, 234(2) :654–675, 2007.
- [38] R. M. Colombo and A. Groli. On the optimization of the initial boundary value problem for a conservation law. *J. Math. Analysis Appl.*, 291(1) :82–99, 2004.
- [39] R. M. Colombo and G. Guerra. Hyperbolic balance laws with a non local source. *Communications in Partial Differential Equations*, 32(12) :1917–1939, 2007.
- [40] R. M. Colombo, M. Herty, and M. Mercier. Control of the continuity equation with a non-local flow. *Accepted to ESAIM Control Optim. Calc. Var.*
- [41] R. M. Colombo, M. Mercier, and M. D. Rosini. Stability and total variation estimates on general scalar balance laws. *Communications in Mathematical Sciences*, 7(1) :37–65, 2009.
- [42] R. M. Colombo, M. Mercier, and M. D. Rosini. Stability estimates on general scalar balance laws. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347 :45–48, 2009.
- [43] R. M. Colombo and M. D. Rosini. Pedestrian flows and non-classical shocks. *Math. Methods Appl. Sci.*, 28(13) :1553–1567, 2005.
- [44] V. Coscia and C. Canavesio. First-order macroscopic modelling of human crowd dynamics. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(suppl.) :1217–1247, 2008.
- [45] C. M. Dafermos. Polygonal approximations of solutions of the initial value problem for a conservation law. *J. Math. Anal. Appl.*, 38 :33–41, 1972.
- [46] C. M. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, volume 325 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2005.
- [47] J. Dávila. On an open question about functions of bounded variation. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 15(4) :519–527, 2002.
- [48] S. R. de Groot and P. Mazur. *Nonequilibrium thermodynamics*. Dover Publications Inc., New York, 1984. Reprint of the 1962 original.
- [49] M. Di Francesco. Initial value problem and relaxation limits of the Hamer model for radiating gases in several space variables. *NoDEA*, 13(5-6) :531–562, 2007.
- [50] F. Dubois and P. LeFloch. Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *J. Differential Equations*, 71(1) :93–122, 1988.
- [51] K. O. Friedrichs. Symmetric hyperbolic linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 7 :345–392, 1954.

- [52] M. Garavello and B. Piccoli. *Traffic flow on networks*, volume 1 of *AIMS Series on Applied Mathematics*. American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), Springfield, MO, 2006. Conservation laws models.
- [53] L. Gårding. Problème de Cauchy pour les systèmes quasi-linéaires d'ordre un strictement hyperboliques. In *Les Équations aux Dérivées Partielles (Paris, 1962)*, pages 33–40. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1963.
- [54] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [55] J. Glimm. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 :697–715, 1965.
- [56] P. Godin. Long time existence of a class of perturbations of planar shock fronts for second order hyperbolic conservation laws. *Duke Math. J.*, 60(2) :425–463, 1990.
- [57] P. Godin. Global shock waves in some domains for the isentropic irrotational potential flow equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 22(11-12) :1929–1997, 1997.
- [58] P. Godin. Ondes de choc globales dans certains domaines pour des écoulements isentropiques irrotationnels d'un fluide compressible. In *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1996–1997*, pages Exp. No. XXI, 12. École Polytech., Palaiseau, 1997.
- [59] P. Godin. The lifespan of a class of smooth spherically symmetric solutions of the compressible Euler equations with variable entropy in three space dimensions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 177(3) :479–511, 2005.
- [60] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [61] S. K. Godunov. A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics. *Math. Sb.*, 47(89) :271–306, 1959.
- [62] H. H. Goldstine and J. von Neumann. Blast wave calculation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 8 :327–353, 1955.
- [63] M. Grassin. Global smooth solutions to Euler equations for a perfect gas. *Indiana Univ. Math. J.*, 47(4) :1397–1432, 1998.
- [64] B. D. Greenshields, J. R. Bibbins, W. S. Channing, and H. H. Miller. A study of traffic capacity. *Transportation Research Board Business Office*, 14 :448–477, 1935.
- [65] W. Gretler and R. Regenfelder. Variable-energy blast waves generated by a piston moving in a dusty gas. *J. Engrg. Math.*, 52(4) :321–336, 2005.
- [66] G. Guderley. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse. *Luftfahrtforschung*, 19 :302–311, 1942.
- [67] M. Herty, M. Gugat, A. Klar, and G. Leugering. Conservation law constrained optimization based upon front-tracking. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 40 :939–960, 2006.
- [68] M. Herty, C. Kirchner, and S. Moutari. Multi-class traffic models on road networks. *Commun. Math. Sci.*, 4(3) :591–608, 2006.
- [69] M. Herty, S. Moutari, and M. Rascle. Optimization criteria for modelling intersections of vehicular traffic flow. *Netw. Heterog. Media*, 1(2) :275–294 (electronic), 2006.

- [70] D. Hoff. Invariant regions for systems of conservation laws. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 289(2) :591–610, 1985.
- [71] H. Holden and N. H. Risebro. *Front tracking for hyperbolic conservation laws*, volume 152 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [72] L. Hörmander. The lifespan of classical solutions of nonlinear hyperbolic equations. In *Pseudodifferential operators (Oberwolfach, 1986)*, volume 1256 of *Lecture Notes in Math.*, pages 214–280. Springer, Berlin, 1987.
- [73] R. L. Hughes. A continuum theory for the flow of pedestrians. *Transportation Research Part B*, 36 :507–535, 2002.
- [74] J. Jena and V. D. Sharma. Self-similar shocks in a dusty gas. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 34(2) :313–327, 1999.
- [75] K. H. Karlsen and N. H. Risebro. On the uniqueness and stability of entropy solutions of nonlinear degenerate parabolic equations with rough coefficients. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 9(5) :1081–1104, 2003.
- [76] U. Karmarkar. Capacity loading and release planning in work-in-progress (wip) and lead-times. *J. Mfg. Oper.Mgt.*, 2 :105–123, 1989.
- [77] T. Kato. The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 58(3) :181–205, 1975.
- [78] S. Kawashima and S. Nishibata. Cauchy problem for a model system of the radiating gas : weak solutions with a jump and classical solutions. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 9(1) :69–91, 1999.
- [79] S. Kawashima and S. Nishibata. Shock waves for a model system of the radiating gas. *SIAM J. Math. Anal.*, 30(1) :95–117 (electronic), 1999.
- [80] M. Keel, H. F. Smith, and C. D. Sogge. Almost global existence for quasilinear wave equations in three space dimensions. *J. Amer. Math. Soc.*, 17(1) :109–153 (electronic), 2004.
- [81] S. N. Kružkov. First order quasilinear equations with several independent variables. *Mat. Sb. (N.S.)*, 81 (123) :228–255, 1970.
- [82] L. D. Landau. Impact waves far from their source. *Appl. Math. Mech. [Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Mech.]*, 9 :286–292, 1945.
- [83] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Course of theoretical physics. Vol. 6*. Pergamon Press, Oxford, second edition, 1987. Fluid mechanics, Translated from the third Russian edition by J. B. Sykes and W. H. Reid.
- [84] C. Lattanzio and P. Marcati. Global well-posedness and relaxation limits of a model for radiating gas. *J. Differential Equations*, 190(2) :439–465, 2003.
- [85] P. D. Lax. Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations. *J. Mathematical Phys.*, 5 :611–613, 1964.
- [86] J. P. Lebacque and M. M. Khoshyaran. Modelling vehicular traffic flow on networks using macroscopic models. In *Finite volumes for complex applications II*, pages 551–558. Hermes Sci. Publ., Paris, 1999.
- [87] J. Leray. *Hyperbolic differential equations*. The Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., 1953 1955.
- [88] T. T. Li. *Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems*, volume 32 of *RAM : Research in Applied Mathematics*. Masson, Paris, 1994.

- [89] T. T. Li and W. C. Yu. *Boundary value problems for quasilinear hyperbolic systems*. Duke University Mathematics Series, V. Duke University Mathematics Department, Durham, NC, 1985.
- [90] M. J. Lighthill and G. B. Whitham. On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 229 :317–345, 1955.
- [91] C. Lin, J.-F. Coulombel, and T. Goudon. Shock profiles for non-equilibrium radiating gases. *Phys. D*, 218(1) :83–94, 2006.
- [92] H. Liu and E. Tadmor. Critical thresholds in a convolution model for nonlinear conservation laws. *SIAM J. Math. Anal.*, 33(4) :930–945 (electronic), 2001.
- [93] T. P. Liu. Development of singularities in the nonlinear waves for quasilinear hyperbolic partial differential equations. *J. Differential Equations*, 33(1) :92–111, 1979.
- [94] T. P. Liu. Nonlinear stability and instability of transonic flows through a nozzle. *Comm. Math. Phys.*, 83(2) :243–260, 1982.
- [95] Y. Liu and C. Zhu. Stationary solutions to Euler equations with spherical symmetry. *Nonlinear Anal.*, 61(1-2) :261–267, 2005.
- [96] B. J. Lucier. A moving mesh numerical method for hyperbolic conservation laws. *Math. Comp.*, 46(173) :59–69, 1986.
- [97] G. Madhumita and V. D. Sharma. Propagation of strong converging shock waves in a gas of variable density. *J. Engrg. Math.*, 46(1) :55–68, 2003.
- [98] A. Majda. The existence of multidimensional shock fronts. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 43(281) :v+93, 1983.
- [99] A. Majda. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, volume 53 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [100] T. Makino, S. Ukai, and S. Kawashima. Sur la solution à support compact de l'équations d'Euler compressible. *Japan J. Appl. Math.*, 3(2) :249–257, 1986.
- [101] M. Marca, D. Armbruster, M. Herty, and C. Ringhofer. Control of continuum models of production systems. *preprint*, 2008.
- [102] G. C. McVittie. Spherically symmetric solutions of the equations of gas dynamics. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 220 :339–355, 1953.
- [103] R. Menikoff and B. J. Plohr. The Riemann problem for fluid flow of real materials. *Rev. Modern Phys.*, 61(1) :75–130, 1989.
- [104] M. Mercier. Traffic flow modelling with junctions. *J. Math. Anal. Appl.*, 350(1) :369–383, 2009.
- [105] S. Moutari. *Modélisation mathématique et numérique du trafic automobile*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2007.
- [106] S. Murata. New exact solution of the blast wave problem in gas dynamics. *Chaos Solitons Fractals*, 28(2) :327–330, 2006.
- [107] P. J. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations*, volume 107 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1993.
- [108] L. V. Ovsiannikov. *Group analysis of differential equations*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1982. Translated from the Russian by Y. Chapovsky, Translation edited by William F. Ames.

- [109] B. Perthame and A.-L. Dalibard. Existence of solutions of the hyperbolic Keller-Segel model. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361(5) :2319–2335, 2009.
- [110] P. Prasad. *Nonlinear hyperbolic waves in multi-dimensions*, volume 121 of *Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.
- [111] R. Racke. *Lectures on nonlinear evolution equations*. Aspects of Mathematics, E19. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992. Initial value problems.
- [112] T. Raja Sekhar and V. D. Sharma. Similarity solutions for three dimensional Euler equations using Lie group analysis. *Appl. Math. Comput.*, 196(1) :147–157, 2008.
- [113] P. I. Richards. Shock waves on the highway. *Operations Res.*, 4 :42–51, 1956.
- [114] J. S. Rowlinson and B. Widom. *Molecular theory of capillarity*. Oxford University Press, 1982.
- [115] P. L. Sachdev, N. Gupta, and D. S. Ahluwalia. Global solutions describing the collapse of a spherical or cylindrical cavity. *Z. Angew. Math. Phys.*, 43(5) :856–874, 1992.
- [116] P. L. Sachdev, K. T. Joseph, and M. E. Haque. Exact solutions of compressible flow equations with spherical symmetry. *Stud. Appl. Math.*, 114(4) :325–342, 2005.
- [117] P. G. Saffman. On the stability of laminar flow of a dusty gas. *J. Fluid Mech.*, 13 :120–128, 1962.
- [118] A. Sakurai. Propagation of spherical shock waves in stars. *J. Fluid Mech.*, 1 :436–453, 1956.
- [119] L. I. Sedov. *Similarity and dimensional methods in mechanics*. Translation by Morris Friedman (translation edited by Maurice Holt). Academic Press, New York, 1959.
- [120] D. Serre. *Systèmes de lois de conservation. I. Fondations*. [Foundations]. Diderot Editeur, Paris, 1996. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc. [Hyperbolicity, entropies, shock waves].
- [121] D. Serre. *Systèmes de lois de conservation. II. Fondations*. [Foundations]. Diderot Editeur, Paris, 1996. Structures géométriques, oscillation et problèmes mixtes. [Geometric structures, oscillation and mixed problems].
- [122] D. Serre. Solutions classiques globales des équations d’Euler pour un fluide parfait compressible. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 47(1) :139–153, 1997.
- [123] D. Serre. L^1 -stability of constants in a model for radiating gases. *Commun. Math. Sci.*, 1(1) :197–205, 2003.
- [124] V. D. Sharma and R. Radha. Exact solutions of Euler equations of ideal gasdynamics via Lie group analysis. *Z. Angew. Math. Phys.*, 59(6) :1029–1038, 2008.
- [125] T. C. Sideris. Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids. *Comm. Math. Phys.*, 101(4) :475–485, 1985.
- [126] T. C. Sideris. Delayed singularity formation in 2D compressible flow. *Amer. J. Math.*, 119(2) :371–422, 1997.
- [127] H. Steiner and T. Hirschler. A self-similar solution of a shock propagation in a dusty gas. *Eur. J. Mech. B Fluids*, 21(3) :371–380, 2002.
- [128] R. S. Strichartz. *A guide to distribution theory and Fourier transforms*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2003. Reprint of the 1994 original [CRC, Boca Raton; MR1276724 (95f :42001)].

- [129] S. Takahashi. An existence theorem for the point source blast wave equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 34(1-3) :1–23, 2009.
- [130] G. I. Taylor. The air wave surrounding an expanding sphere. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 186 :273–292, 1946.
- [131] G. I. Taylor. The formation of a blast wave by a very intense explosion. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 201 :159–174, 175–186, 1950.
- [132] M. E. Taylor. *Partial differential equations. III*, volume 117 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1997. Nonlinear equations, Corrected reprint of the 1996 original.
- [133] B. Temple. Systems of conservation laws with invariant submanifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 280(2) :781–795, 1983.
- [134] N. Tsuge. Spherically symmetric flow of the compressible Euler equations—for the case including the origin. *J. Math. Kyoto Univ.*, 44(1) :129–171, 2004.
- [135] N. Tsuge. Global L^∞ solutions of the compressible Euler equations with spherical symmetry. *J. Math. Kyoto Univ.*, 46(3) :457–524, 2006.
- [136] S. Ulbrich. A sensitivity and adjoint calculus for discontinuous solutions of hyperbolic conservation laws with source terms. *SIAM J. Control Optim.*, 41 :740, 2002.
- [137] S. Ulbrich. Adjoint-based derivative computations for the optimal control of discontinuous solutions of hyperbolic conservation laws. *Systems & Control Letters*, 3 :309, 2003.
- [138] J. P. Vishwakarma and G. Nath. A self- similar solution of a shock propagation in a mixture of a non-ideal gas and small solid particles. 44(4) :239–254, 2009.
- [139] A. I. Vol’pert and S. I. Hudjaev. *Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics*, volume 8 of *Mechanics : Analysis*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1985.
- [140] J. von Neumann. Blast waves. *Los Alamos Sci. Lab. Tech. Series.*, 7, 1947.
- [141] E. Waxman and D. Shvarts. Second-type self-similar solutions to the strong explosion problem. *Phys. Fluids A*, 5(4) :1035–1046, 1993.
- [142] H. Weyl. Shock waves in arbitrary fluids [Commun. Pure Appl. Math. ii (1949), no. 2-3, 103–122]. In *Classic papers in shock compression science*, High-press. Shock Compression Condens. Matter, pages 497–519. Springer, New York, 1998.
- [143] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. Reprint of the 1974 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [144] C. C. Wu and P. H. Roberts. Structure and stability of a spherical shock wave in a van der Waals gas. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 49(4) :501–543, 1996.
- [145] T. Yang. A functional integral approach to shock wave solutions of Euler equations with spherical symmetry. *Comm. Math. Phys.*, 171(3) :607–638, 1995.
- [146] T. Yang, C. Zhu, and Y. Zheng. Existence of global smooth solutions for Euler equations with symmetry. II. *Nonlinear Anal.*, 41(1-2, Ser. A : Theory Methods) :187–203, 2000.
- [147] H. Yin and Q. Qiu. The blowup of solutions for 3-D axisymmetric compressible Euler equations. *Nagoya Math. J.*, 154 :157–169, 1999.

- [148] V. I. Yudovič. Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 3 :1032–1066, 1963.