



**ÉCOLE CENTRALE DES
ARTS
ET MANUFACTURES
ÉCOLE CENTRALE
PARIS**

Thèse présentée par

Pauline SOULOUMIAC

pour l'obtention du

GRADE DE DOCTEUR

Spécialité : Modélisation numérique et analogique, Géologie structurale

Laboratoire d'accueil : Mécanique des Sols, Structures et Matériaux

**SUJET : MÉCANISMES 3D DE RUINE
EN GÉOLOGIE STRUCTURALE :
APPROCHES NUMÉRIQUES ET ANALOGIQUES.**

Soutenue le : 17 juillet 2009

devant un jury composé de :

Mme. MODARESSI Arézou	Directrice de Thèse (Prof. Univ. École Centrale)
M. LEROY Yves	Directeur de Thèse (D. R. ENS)
M. CHARLIER Robert	Président (Prof. Univ. Liège 1)
M. GUITON Martin	Examineur (Ingénieur de recherche IFP)
M. HASSANI Riad	Rapporteur (Prof Univ. Nice - Sophia Antipolis)
M. VENDEVILLE Bruno	Rapporteur (Prof Univ. Lille 1)
M. MAILLOT Bertrand	Invité (Prof. Univ. Cergy-Pontoise)

2009ECAP2204

Abstract

The first objective of this thesis is to study sequences of thrusting in accretionary wedges and in fold-and-thrust belts by application of limit analysis. The method, inherited from civil engineering, is adapted here for structural geology problems with the objective to determine the dominant failure mode responsible for folding. Cubas et al. (2008) applied the external approach, analytically, to sequences of thrusting, predicting the position and the life span of a give thrust, and of course the least upper bound on the tectonic force. The complementary approach, the internal approach, provides the stress distribution at each step of the shortening of the structure as well as the best lower bound on the tectonic force. This optimization problems relies on a spatial discretization of the domain and the basic unknowns are the nodal stresses. The validation of the method is conducted with a rectangular block sliding over the décollement (Hafner, 1951) and provides two modes of failure : a complete activation of the décollement with no bulk failure or no activation of this décollement and bulk failure. The application to the fault-bend fold reveals the classical conjugate set of ramps and back thrusts and the regions of extension within the hanging wall, which were not recognized so far. A finite-element modeling of the initiation of the slip over the ramp provides the same distribution as the one obtained by optimization although for a larger computer time. The second objective of this thesis is to study the 3D geometry of the failure modes in accretionary wedges. The proposed method is numerical and based on the external approach, the virtual velocity field being interpolated over the discretized domain. The 2D validation consists in capturing the stability transition defined by Dahlen (1984). The 3D wedge geometry includes a lateral variation in the topographic slope such that the right and left cross section are sub-critical and super-critical. The deformation is localized in the sub-critical region and more diffuse as one moves towards the super-critical regions. The influence of the back wall and of the décollement friction is also studied. Two modes of failure could be selected depending on the friction angle on the back wall : a single ramp or a system ramp and back thrust. The friction on the lateral walls implies a vertical stretching of the bulk material over a width which is 1.5 times the wedge thickness. The third objective of this thesis is to study 3D effects in analogue experiments done in the laboratory by varying the geometry of the experimental set up and of the wedge. A narrow set up and a thick wedge at its toe implies a deformation which is controlled by the lateral wall friction. The evolution of the deformation is also analysed by monitoring the forces at the two ends to the experimental set up. The geometry of the set up and of the compressive device influences qualitatively the position of the failure mode within the wedge for the same wedge geometry.

Keywords : limit analysis, accretionary wedges, fold-and-thrust belts, finite elements, analogue experiments, 3D modeling.

Résumé

Le premier but de cette thèse est d'étudier les séquences de chevauchements dans les prismes d'accrétion et les chaînes plissées grâce au calcul à la rupture. La méthode, issue du génie civil, est adaptée ici à la géologie structurale dans l'objectif de détecter les modes de rupture au cours du plissement. Cubas et al. (2008) ont appliqué l'approche externe, de façon analytique, sur des séquences de chevauchements, prédisant ainsi la position des failles, l'évolution de la séquence et la borne supérieure à la force tectonique. L'approche complémentaire, l'approche interne, donne les distributions de contraintes à chaque pas de raccourcissement ainsi que la borne inférieure à la force tectonique. Ce problème d'optimisation est basé sur la discrétisation de la structure, dont les inconnues sont les contraintes nodales. La validation de cette méthode sur un bloc rectangulaire pouvant glisser sur un niveau de décollement (Hafner, 1951) permet d'identifier deux modes de rupture : activation totale du décollement sans rupture dans le matériau ou pas d'activation du décollement avec rupture dans le matériau. L'application sur un pli de rampe met en évidence les systèmes de failles conjuguées classiques : rampe - rétro-chevauchement, et les zones en extension au sommet de la couche qui étaient encore peu connues. Une modélisation par éléments finis de l'initiation d'un pli de rampe donne les mêmes contraintes que celles obtenues par optimisation, pour un coût de temps calcul plus important. Le deuxième objectif de cette thèse est d'étudier les mécanismes de ruine en 3D dans les prismes d'accrétion. La méthode proposée est basée sur l'approche externe numérique, le champ de vitesse virtuel étant construit sur la discrétisation de la structure. Une validation en 2D montre que ce schéma numérique permet de retrouver la criticalité du prisme au sens de Dalhén (1984). En 3D, la pente topographique d'un prisme triangulaire est choisi pour varier latéralement, d'un côté sous-critique et de l'autre super-critique. La déformation est localisée du côté sous-critique et diffuse du côté super-critique. L'influence de la friction sur le mur de poussée et sur les murs latéraux du prisme est également étudiée. Suivant la valeur de l'angle de friction sur le mur de poussée, il existe deux modes distincts de rupture : une rampe ou un système rampe - rétro-chevauchement. L'angle de friction sur le mur latéral du prisme entraîne une déformation verticale sur 1.5 fois l'épaisseur du prisme. Le troisième but de cette thèse est d'étudier les effets 3D en boîte de sable, en faisant varier la géométrie de la boîte et celle du prisme. Une boîte étroite et une épaisseur de sable importante implique une déformation contrôlée entièrement par les frottements sur les vitres latérales. L'évolution de cette déformation est observable sur l'enregistrement des forces de chaque côté de la boîte. La géométrie de la boîte et du système de compression influe de façon qualitative sur la position du mode de ruine dans la boîte pour une même géométrie de prisme.

Mots-clés : calcul à la rupture, prismes d'accrétion, chaînes plissées, éléments finis, expériences analogiques, modélisation 3D.

Je tiens à remercier en premier lieu mes deux directeurs de thèse, Arézou Modaressi et Yves Leroy, pour leur soutien tout au long de ce travail. Yves, avec qui j'ai principalement travaillé, a su orienter mes recherches en me faisant découvrir le domaine de la géologie structurale tout en tirant partie de ma formation d'ingénieur en géotechnique. Les longues discussions mêlant les points de vue de la mécanique des sols et de la géologie avec Arézou m'ont été très bénéfiques. Je remercie aussi très chaleureusement Bertrand Maillot qui m'a permis de connaître l'aspect analogique de la géologie structurale. Il a été très présent et de très bons conseils. Par le biais de ce travail expérimental et toujours grâce à Bertrand, j'ai pu faire connaissance avec les chercheurs et thésards du laboratoire de Cergy-Pontoise où j'ai été très bien accueillie.

Je remercie les rapporteurs de cette thèse, Bruno Vendeville et Riad Hassani, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail ainsi que Robert Charlier d'avoir présidé le jury. Enfin concernant les membres du jury, je remercie tout particulièrement Martin Guiton pour le travail minutieux de lecture qu'il a fait de mon manuscrit et pour les discussions préalables que nous avons pu avoir.

La rencontre avec Kristian Krabbenhøft, le chercheur australien fou d'optimisation "danoise", m'a été d'une aide précieuse pour la mise en place de l'approche numérique du calcul la rupture. Cette rencontre, qui est devenue une étroite collaboration scientifique, a été indispensable pour l'avancement de mon sujet. Mon amie Nadaya Cubas a également été d'un soutien très important durant ces années de thèse, aussi bien d'un point de vue scientifique que personnel. Je tiens à la remercier de m'avoir guidée dans ce domaine de recherche qui ne m'était pas familier au départ.

Je passe une spéciale dédicace à tous les étudiants, post-docs et techniciens du laboratoire de géologie de l'ENS, dans l'ordre alphabétique : Abdel, Alexandra, Arnaud, Aurore, Baptiste, Corentin, Damien, Fatima, Jérôme, Julien, Nathaniel, Nicolas, Nuno, Pier Paolo, Philippe, Sylvain, Victor, Vivien. Et une autre spéciale pour ceux du laboratoire MSSMat de l'École Centrale : Cristian, Elsa, Esteban, Ghizlane, Fernando, Nadège, Sofia, Rachele.

Pour leurs encouragements et leur soutien moral, je remercie ma famille et Richard qui a eu le "privilège" de subir en direct mes humeurs changeantes de ces quatre dernières années.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Les chaînes d'avant-pays et les prismes d'accrétion	7
1.1.1	Descriptions des structures et contexte géologique	7
1.1.2	Chaînes plissées : du paradoxe mécanique aux modèles actuels	10
1.2	Le calcul à la rupture : développements récents en géomécanique	15
1.2.1	Domaines de résistance	16
1.2.2	Approche interne	17
1.2.3	Approche externe	19
1.2.4	Lien avec la plasticité	23
1.3	Évolution des structures	24
2	Approche interne appliquée au pli de rampe et au prisme d'accrétion	29
	Predicting stress distributions in fold-and-thrust belts and accretionary wedges by optimization	29
	Résumé	29
2.1	Introduction	35
2.2	The EEM and its validation with Hafner's problem	37
2.2.1	The Equilibrium Element Method	39
2.2.2	Hafner's solution	42
2.2.3	The optimized solution	43
2.3	Stress in fault-bend folds	46
2.3.1	Folding without relief build up	48

2.3.2	Comparison with finite-difference predictions	52
2.3.3	Folding with relief build up	55
2.3.4	Stress histories and trajectories	57
2.4	Conclusion	59
2.5	Electronic supplement	61
2.5.1	Folding without relief build up	62
2.5.2	Folding with relief build up.	64
2.5.3	Application to Nankai accretionary wedge	64
2.5.4	The implementation of the Equilibrium Element Method	70
3	Approche externe appliquée au prisme d'accrétion	79
	Failure in accretionary wedges with the maximum strength theorem :	
	numerical algorithm and 2D validation.	79
	Résumé	79
3.1	Introduction	84
3.2	The maximum strength theorem with spatial discretization	86
3.2.1	Summary of the upper bound theorem of limit analysis	87
3.2.2	Discretisation of space and interpolation of the velocity field	91
3.2.3	The dual problem	95
3.2.4	Velocity discontinuities	97
3.3	Application to the 2D stability of accretionary wedges	99
3.3.1	The critical wedge theory	99
3.3.2	Influence of the friction on the back wall	105
3.3.3	Comparison with analogue experiments	111
3.4	Conclusion	112
3.5	Appendix A : Linear programming duality	113
3.6	Appendix B : Generalisation to 3D	114
3.7	Appendix C : Second-order cone programming	115

Failure in accretionary wedges with the maximum strength theorem :	
3D applications.	120
Résumé	120
3.8 Introduction	125
3.9 The maximum strength theorem and the numerical strategy	127
3.10 3D stability of accretionary wedges	131
3.11 Friction on side walls of laboratory experiments	138
3.11.1 Deformed wedge and virtual equivalent strain	139
3.11.2 Velocity field	142
3.11.3 Décollement activation	146
3.11.4 Comparison with analogue experiment	147
3.12 Conclusion	149
4 Effets de bords dans les modèles analogiques en sable	153
4.1 Introduction	153
4.2 Description des expériences	155
4.2.1 La boîte à sable	155
4.2.2 Le matériau analogue : le sable	158
4.2.3 Les prototypes expérimentaux	160
4.3 Effets de bords sur la position de la première rampe	162
4.3.1 Description des vues au travers des vitres latérales	162
4.3.2 Mesures des longueurs de décollement	166
4.3.3 Différences de structures entre les bords latéraux et le centre de la boîte	169
4.4 Effets de bords à l'état final	171
4.5 Mesures des forces sur les murs longitudinaux	171
4.5.1 Analyse des forces du côté du prisme et en bout de boîte	173
4.5.2 Équilibre des forces dans la direction de raccourcissement	177
4.6 Conclusion	179
5 Conclusions et perspectives	185

Annexes	188
A Construction de Mohr et application au prisme critique	189
A.1 Introduction	189
A.2 Cercle de Mohr	189
A.2.1 Définition et introduction du cercle de Mohr	189
A.2.2 Détermination des contraintes principales	192
A.2.3 Construction du pôle du cercle	193
A.3 Critère de Coulomb sur une faille et dans un milieu continu	194
A.3.1 Interprétation des failles dans le modèle d'Anderson	196
A.3.2 Orientation des failles par rapport à une facette de référence	197
A.4 Détermination du tenseur des contraintes	197
A.4.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle	198
A.4.2 Application	198
A.4.3 Calcul des contraintes actives et passives	199
A.5 Application à la criticalité du prisme	201
B Résultats complémentaires obtenus avec la Méthode des Éléments d'Équilibre	209
B.1 Unicité des champs de contraintes	209
B.2 Influence du maillage	211
C Approche externe du calcul à la rupture pour le problème d'Hafner	215
D Comparison between Finite Element Method and Equilibrium Element Method to predict stress field in fault-bend folds	219
D.1 Introduction	219
D.2 Description of the model of fold	220
D.3 Fault - bend fold with fast erosion treated by EEM	221
D.3.1 Formulation of the EEM	221
D.3.2 Applications	224

D.4	Fault - bend fold with fast erosion treated by FEM	226
D.5	Conclusion	229
E	Étude de la déformation au cours du plissement dans un modèle analogue avec la technique de corrélation d'image haute-résolution	231
	Bibliographie	239

Chapitre 1

Introduction

Ce premier chapitre donne une vision générale du contexte géologique dans lequel s'est inscrit ce travail de thèse ainsi qu'une description de la théorie sur laquelle est fondée la modélisation numérique des structures de plis. Les références de ce chapitre se trouvent dans la section des références générales en fin de manuscrit.

1.1 Les chaînes d'avant-pays et les prismes d'accrétion

1.1.1 Descriptions des structures et contexte géologique

Les objets géologiques auxquels nous nous intéressons se trouvent dans des régions où les couches sédimentaires sont en compression et accomodent un fort raccourcissement. Il s'agit de la formation des séquences de chevauchements dans les chaînes d'avant-pays et les prismes d'accrétion (Figure 1.1). Le contexte géologique de ces deux structures est évidemment différent. Cependant, d'un point de vue mécanique, les méthodes d'analyses sont les mêmes. La contraction horizontale de ces couches sédimentaires se fait au-dessus d'un niveau lithologique de faible résistance mécanique tel que des schistes, des marnes ou des évaporites. Ce niveau, au-dessus duquel se concentre le déplacement principal, correspond au décollement qui sert d'interface entre les couches comprimées et le socle. Le Jura représente typiquement un tel cas où le déplacement d'une couverture se fait au-dessus d'un socle non déformé le long d'un niveau de décollement de type salifère (Figure 1.2).

Une séquence de chevauchements se traduit par une succession de rampes (failles inverses à fort pendage dans les niveaux rigides) et de paliers (déplacement horizontal le long des niveaux ductiles) au sein de la couche sédimentaire (Rich, 1934). Chaque nouveau chevauchement se

1.1. Les chaînes d'avant-pays et les prismes d'accrétion

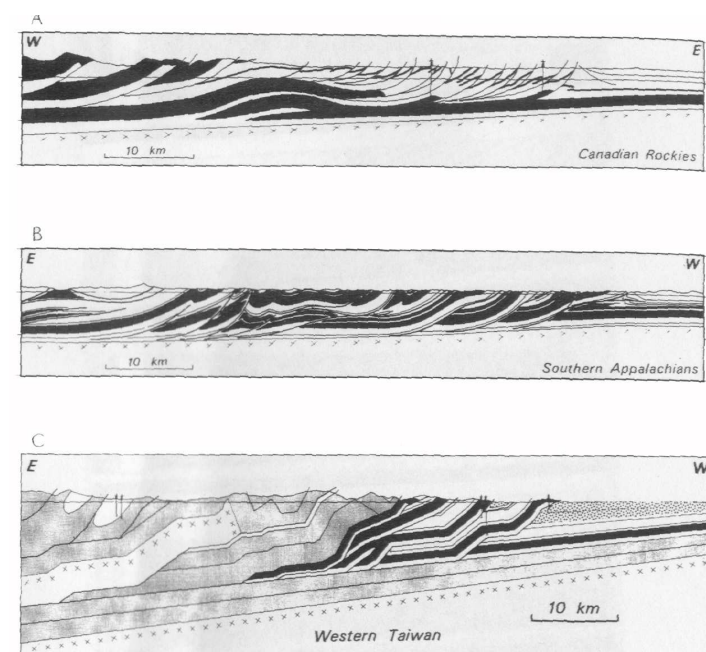


FIG. 1.1: Deux exemples de chaînes plissées : les Rocheuses canadiennes (A), les Appalaches (B), et un exemple de prisme d'accrétion : le prisme de Taïwan (coupes extraites de Davis et al., 1983).

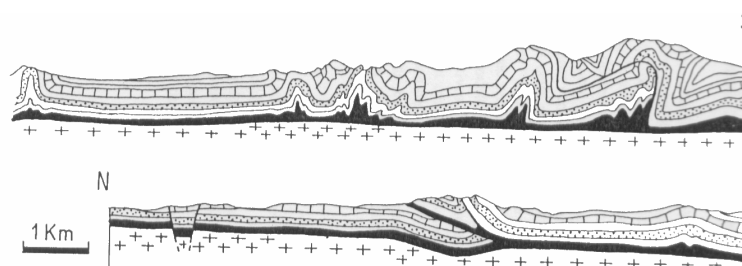


FIG. 1.2: Coupe du Jura montrant le décollement des séries sédimentaires sur le socle non-déformé (croix) grâce au Trias salifère ductile (Coupe extraite de Merle, 1994, d'après Buxtorf, 1916).

forme à l'avant de la structure pour une séquence normale. Si un chevauchement se forme à l'arrière des précédents, on dit que l'on est en hors séquence. Les ceintures de chevauchements des chaînes d'avant-pays possèdent une forme générale en biseau liée aux pendages opposés de la pente topographique et de la pente basale (au niveau du décollement). Le pendage de la pente topographique est dirigée vers l'avant-pays tandis que la pente basale est dirigée vers la zone interne de la chaîne. Le pendage de ces pentes est de quelques degrés seulement.

Les prismes d'accrétion sont des régions tectoniques où ces mécanismes de chevauchements peuvent se produire. Ces régions se situent à la frontière de deux plaques qui sont les zones de subduction. La distribution de ces zones de subduction sur la Terre est représentée à la Figure 1.3.

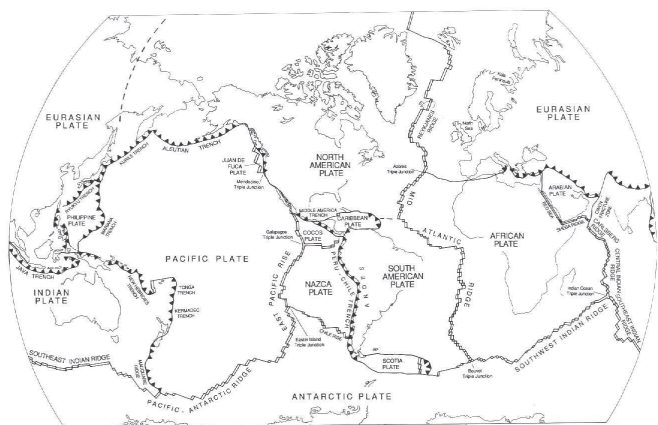


FIG. 1.3: Distribution des zones de subduction sur la Terre (Fowler, 1990).

Une coupe schématique représentant la subduction d'une plaque océanique sous une plaque continentale nous est proposée à la Figure 1.4. Nous nous intéressons à la région tampon qui

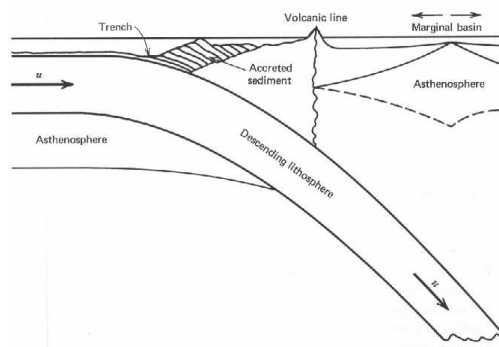


FIG. 1.4: Coupe schématique d'une zone de subduction (Turcotte and Schubert, 2002).

est hachurée sur la Figure 1.4. Cette région contient des matériaux de la plaque océanique qui ne sont pas entrés en subduction ainsi que de jeunes sédiments qui viennent de la plaque continentale. Ces matériaux sont en butée sur la plaque continentale, qui agit comme un mur rigide, et subissent le frottement compressif de la plaque en subduction. Comme pour les chaînes d'avant-pays, la pente des prismes d'accrétion est de quelques degrés. Leur forme est, entre

autres, influencée par la vitesse de convergence, les apports sédimentaires, la friction sur le décollement et la forme de la butée.

1.1.2 Chaînes plissées : du paradoxe mécanique aux modèles actuels

1.1.2.1 Vers la construction de la théorie du prisme critique

La mise en place des chevauchements dans les chaînes de montagnes constitue un problème tectonique majeur faisant l'objet de nombreuses recherches par les géologues structuralistes depuis le début du 19^e siècle. La principale question posée par le mécanicien Reade en 1908 est la suivante : comment expliquer le déplacement de nappes sur des centaines de kilomètres sur des pentes de pendage trop faible pour être justifié par un écoulement gravitaire ? Quelle est la nature des forces capables de tels déplacements ? C'est ce qu'on appelle le paradoxe mécanique des nappes et chevauchements. Retraçons quelques éléments clés dans la compréhension de ce phénomène. L'analyse de ces plissements a donc été entamée au 19^e siècle par Hall (1815) qui proposa l'idée d'une force horizontale compressive qui engendrerait le plissement. Ses hypothèses s'appuient sur des expériences analogiques et des observations de terrain. Puis, plus tard, lorsque le mécanisme de pli - faille fut compris, des géologues comme Callaway (1883) ou Peach et Horne (1884) ont mis en évidence, sur des cas de terrains, ces grands déplacements sur des contacts anormaux à faible pendage. Cette explication n'a pas été approuvée à l'époque par le reste de la communauté des géologues. Cadell (1887) a tenté de la convaincre en reproduisant en laboratoire ces grands charriages observés sur le terrain. Ses travaux confirment que c'est une poussée horizontale qui explique la formation des chevauchements. Il est d'ailleurs à l'origine du concept de prisme. C'est au début du 20^e siècle que cette idée de grands déplacements sous l'action d'une force horizontale entraînant la formation de séquences de chevauchements fut réellement acceptée. Mais encore fallait-il qu'elle le soit également par les mécaniciens. En effet, aucune preuve mécanique du paradoxe des déplacements des nappes n'avait encore été apportée. Pourtant Smoluchowski (1909) et Goguel (1948) avaient démontré la nécessité d'avoir une couche faiblement frictionnelle à la base d'un bloc rectangulaire pour que celui-ci puisse glisser. Ce sont dans les années 50 que de nombreuses théories ont été proposées. Hafner (1951) a utilisé la théorie de l'élasticité pour calculer l'état de contraintes dans un bloc rectangulaire pouvant glisser sur une surface plane régie par le critère de Coulomb sous l'action d'une force horizontale. Il a obtenu les trajectoires des contraintes principales et celles des failles inverses potentielles dans le bloc. Nous reviendrons sur ce travail dans le **chapitre 2**. Sur la base de l'article de Smoluchowski, Hubbert et Rubey (1959) démontrent qu'il est possible de déplacer, sur de grandes distances, une structure rectangulaire en introduisant une augmentation de

la pression des fluides à la base de cette structure. Cette augmentation de pression va faire diminuer la contrainte normale et la contrainte tangentielle sur le plan de rupture et donc va diminuer la résistance au glissement. Kelhe (1970) conteste cette hypothèse de pression de fluides qui impliquerait, suivant ses calculs, des valeurs de pression très importantes à la base de la structure. Il propose plutôt celle de la déformation visqueuse d'une couche ductile située à la base de cette unité qui glisse. On revient alors au concept de niveau de décollement où se concentre le déplacement principal. D'autres auteurs ont choisi d'abandonner l'analyse mécanique du bloc rectangulaire représentant une unité de chevauchement et ont préféré considérer toute la séquence de chevauchements. C'est ainsi que la théorie du prisme en biseau a été introduite. C'est Chapple (1978) qui a entrepris le premier ce changement d'échelle. Il se base sur les caractéristiques géométriques des chaînes d'avant-pays que nous avons évoquées dans la section précédente, c'est-à-dire les pendages opposés des pentes topographique et basale, la présence d'un niveau de décollement, l'augmentation dans la zone interne de la déformation. Son analogie est simple et très répandue encore aujourd'hui : si un bulldozer pousse un tas de neige sur une pente fixe, celui se déforme jusqu'à atteindre une pente critique et donc une géométrie critique en biseau qui permet au tas de glisser sur la pente basale sans se déformer. Le prisme se déplace alors de façon stable. C'est la théorie du prisme critique qui peut être transposée aux ceintures de chevauchements des chaînes d'avant-pays comme aux prismes d'accrétion.

1.1.2.2 Modèles actuels

Une série d'articles consacrée à cette théorie (Davis et al., 1983, Dahlen et al., 1984, Dahlen 1984, Lehner, 1986) reprend le travail de Chapple mais en abandonnant l'hypothèse d'une rhéologie parfaitement plastique et non frictionnelle. Les auteurs considèrent un comportement de type Mohr-Coulomb et ils imposent une pression des fluides à la base et dans le matériau constituant le prisme.

Le premier article de Davis et al. (1983) montre que les ceintures de chevauchements et les prismes d'accrétion suivent la même mécanique, celle du prisme critique (Figure 1.5). Ils établissent une relation linéaire entre la pente topographique et la pente basale pour un prisme non cohésif. Cette relation est fonction notamment de la friction basale. De plus, des expériences en laboratoire donnent des résultats très proches de la prédiction théorique : différentes pentes basales sont testées, le prisme se déforme jusqu'à la géométrie critique ce qui permet de mesurer l'angle de la pente topographique critique (Figure 1.6).

Les résultats sont aussi comparés à des cas naturels comme le prisme de Taïwan. Puis dans un deuxième article, Dahlen (1984) reprend l'essentiel de la théorie dans une version simplifiée

à l'étude des chaînes plissées est très utilisée. Nous donnerons un exemple d'application dans la section portant sur l'évolution des structures. Les auteurs comme Erickson et Jamison (1995), Erickson et al. (2001) étudient la mécanique d'un des plis spécifiques aux chaînes plissées : le pli de rampe et ils en déduisent le pendage du rétro-chevauchement. D'autres auteurs comme Strayer et al. (1997), Burbidge et Braun (2002), Buiter et al. (2006) modélisent les chaînes plissées avec les éléments finis. Outre le fait qu'on obtienne une solution mécanique complète (champs de déplacements, champs de contraintes et évolution de la structure plissée), l'application de cette méthode présente certaines difficultés. Il est difficile de localiser la déformation sur les failles majeures où s'accumulent de grandes discontinuités de déplacements. Cela exige la prise en compte de paramètres rhéologiques complexes à l'échelle des structures réelles. C'est pourquoi d'autres méthodes d'analyse mécanique ont été développées. Il s'agit par exemple de la minimisation par dissipation d'énergie appliquée à l'étude de la variation du pendage des rétro-chevauchements lors de la formation d'un pli de rampe (Maillot et Leroy, 2003) ou l'utilisation de la méthode des éléments distincts sur l'évolution d'un prisme théorique au cours du plissement (Naylor et al., 2005).

Une seconde direction de modélisation de ces plissements est basée sur une approche cinématique. Ces modèles sont purement géométriques et ne font pas intervenir de notion d'équilibre mécanique, de critère de rupture ou de rhéologie des matériaux. C'est dans ce contexte que s'inscrit le travail fondateur de Suppe (1983). Les règles de construction sont basées sur le respect des épaisseurs des couches lors du plissement et sur le fait que la déformation est traduit comme un cisaillement simple sur chaque discontinuité (Bally, 1966 ; Dalhstrom, 1969). En 2D, ces modèles géométriques sont très simples. Si les structures s'avèrent plus compliquées, il est possible de recourir à un outil informatique (Zoetemeijer et Sassi, 1992 ; Sciamanna et al., 2004). Bien que cette approche soit très répandue et ait connu un succès industriel certain, elle reste limitée, en particulier lorsqu'il s'agit de faire certains choix sur la mise en place de systèmes de failles. On peut alors se poser la question suivante : la mécanique peut-elle apporter un éclairage sur ce choix sans pour autant complexifier le problème ? C'est à partir de ce questionnement scientifique que nous avons adapté le calcul à la rupture à la géologie structurale, méthode développée dans les sections suivantes de ce manuscrit.

Ces modélisations sont développées en parallèle des modèles analogiques qui permettent de reproduire les plissements. Les modèles analogiques peuvent s'appuyer sur les expériences en boîte de sable, ce matériau étant un bon analogue des matériaux de la croûte supérieure (Hubert, 1951). Les principaux objectifs de ces expériences sont :

- valider une théorie comme celle du prisme critique de Davis et al. (1983),

- tester des paramètres rhéologiques ou géométriques comme l'étude de la friction basale ou de la pression des fluides,
- reproduire un cas naturel et comprendre sa formation.

Ces trois objectifs sont décrits dans les articles suivants. Dans son article de 1984, Malavieille valide la théorie du prisme critique. Mulugueta et al. (1996), Gutscher et al. (1996) étudient l'effet de la friction basale. Lohrmann et al., (2003) travaillent sur l'effet de la cohésion en utilisant des sables aux propriétés rhéologiques différentes. Mourgues et Cobbold (2003) présentent des expériences avec la prise en compte de la pression des fluides. D'autres auteurs travaillent plus sur la modélisation analogique d'un phénomène géologique spécifique comme le sous-placage (Gutscher, 1996) ou la subduction d'un relief (Lallemand et al., 1994). Mais de nombreux travaux en boîte de sable ont été réalisés et donc cette liste n'est évidemment pas exhaustive. Ces résultats expérimentaux sont complémentaires des résultats numériques ou analytiques obtenus avec les méthodes présentées précédemment. Ils sont interprétés en 2D. Aussi faut-il tenir compte des effets 3D induits dans ces boîtes de sable dûs aux frottements sur les murs de la boîte lorsque l'on désire modéliser les expériences. Ce problème d'effets de bords a notamment été soulevé par une discussion entre les auteurs Koyi et Cotton (2004) et Costa et Vendeville (2001). Il a été également mis en évidence lors de l'étude de dispersion des résultats expérimentaux réalisée par Schreurs et al. (2006). L'étude montre une disparité importante entre les expériences des différents laboratoires participant au projet, due au sable choisi, au matériel utilisé et à la configuration de la boîte. C'est en ce sens que Vendeville (2007) démontre qu'en changeant la friction latérale, celle du décollement et la configuration de la boîte, l'évolution du modèle diffère suivant les conditions et que donc le problème reste en 3D. Nous avons décrit la mise en évidence de ces effets 3D dans les modèles en boîte de sable au **chapitre 4**.

Nous venons donc de passer en revue les différentes approches : mécaniques, géométriques ou analogiques qui sont employées pour comprendre la mise en place, la formation et l'évolution des chaînes plissées, à l'échelle de la chaîne ou du chevauchement en tentant de présenter les avantages et inconvénients de ces méthodes. Nous avons choisi une nouvelle direction de recherche en appliquant le calcul à la rupture à ces structures géologiques. Cette stratégie est intermédiaire entre une méthode numérique complexe, comme les éléments finis, et une méthode géométrique simple à la Suppe (1983). Issue de la mécanique des sols et du génie civil, l'objectif du calcul à la rupture est classiquement de proposer l'encadrement de la charge extrême que peut supporter une structure. En géologie, la structure est soumise à une charge due à la poussée tectonique et le mécanisme de ruine correspond à l'activation d'un système de failles majeures. Le résultat du calcul à la rupture va permettre d'encadrer la force tectonique et de définir les attributs de ce mécanisme de ruine. L'application de cette théorie se fait, de façon symétrique, par deux

approches : l'approche interne ou statique et l'approche externe ou cinématique comme nous allons le décrire dans la section suivante.

1.2 Le calcul à la rupture : développements récents en géomécanique

En génie civil, le calcul à la rupture, comme proposé par Drucker (1951), est un outil puissant pour obtenir un encadrement de la charge extrême d'une large variété de structures (dimensionnement de semelles, de hauteurs de talus à excaver,...). C'est aussi un des rares exemples en mécanique où on a accès à l'erreur sur la quantité qui nous intéresse puisque les résultats obtenus sont des bornes. Les deux théorèmes qui composent le calcul à la rupture peuvent être appliqués analytiquement. Mais le plus souvent en génie civil, le développement est numérique et basé sur des formulations type éléments finis, c'est-à-dire que le problème d'optimisation part d'une discrétisation de l'espace. Ainsi ces formulations ont les avantages des éléments finis tout en restant applicables à des géométries et des chargements complexes, avec la possibilité d'introduire de grands déplacements sur les discontinuités. C'est Lysmer en 1970 qui a commencé à mettre en place l'utilisation des éléments finis et des programmes linéaires d'optimisation pour calculer rigoureusement une borne inférieure. L'optimisation se faisait alors avec des algorithmes de solution simplex. Le travail de Anderheggen et Knopfel (1972) et de Pastor (1978) a permis d'améliorer ces techniques aussi bien en approche interne qu'externe en développant la possibilité de modéliser un milieu semi-infini grâce au prolongement des conditions aux limites. Les travaux de Maier (1972) et de Bottero et al. (1980) sont spécifiques à la mise en place des techniques de borne supérieure qui sont d'ailleurs les plus utilisées car les plus simples à implémenter. Ensuite Sloan donne un essor considérable aux problèmes de calcul à la rupture grâce à l'introduction des critères de rupture non-linéaires, de discontinuités et l'utilisation des programmes linéaires d'optimisation (Sloan, 1989; Sloan and Kleeman, 1995; Krabbenhøft et al., 2005). Le défi de ces méthodes reste d'obtenir les meilleures bornes pour des temps de calcul très raisonnables et de rendre possible une extension en 3D. Nous avons décidé d'adapter ces méthodes utilisées généralement pour des calculs d'excavation, de dimensionnement de fondation et de rupture de pente à des structures géologiques. Notre travail est fondé sur la théorie du calcul à la rupture décrite élégamment par Salençon en 1974. Comme nous le verrons par la suite plus en détails, il substitue à la condition de plasticité parfaite la condition de résistance. Ainsi la détermination des chargements extrêmes ne fait appel qu'à la compatibilité entre les équations d'équilibre et les équations ou inéquations de résistance. Sur la base de ces hypothèses, Hassani

(2005) utilise un fluide Bingham (équivalent aux matériaux rigides parfaitement plastiques que nous utilisons) pour optimiser la forme de la région sollicitée à l'initiation d'un glissement de terrain. Il montre l'influence de la rhéologie, différente pour chaque couche d'une colonne de sol, sur la zone de rupture, particulièrement dans le cas d'un problème anti-plan stationnaire. Les sections qui suivent présentent les deux approches composant le calcul à la rupture appliquées à des modèles géologiques : le **chapitre 2** pour l'approche interne et le **chapitre 3** pour l'approche externe. Un exemple simple sur un échantillon en compression uniaxiale va aider à la compréhension de ces deux approches développées par Salençon (1974, 2002). Nous allons chercher un encadrement au chargement extrême que peut supporter l'échantillon avant l'instabilité.

1.2.1 Domaines de résistance

Dans les sections qui vont suivre, les vecteurs et les tenseurs seront écrits en caractères gras et les quantités virtuelles marquées d'un chapeau. Le domaine de résistance est un concept commun aux deux approches du calcul à la rupture. Il définit un espace de contraintes que peut supporter le matériau constituant la structure. Ce domaine dépend du critère de rupture noté f considéré pour le matériau ou les discontinuités. D'une manière générale, pour une interface, les critères très utilisés sont le critère de Tresca et le critère de Coulomb, illustrés sur la figure 1.7.

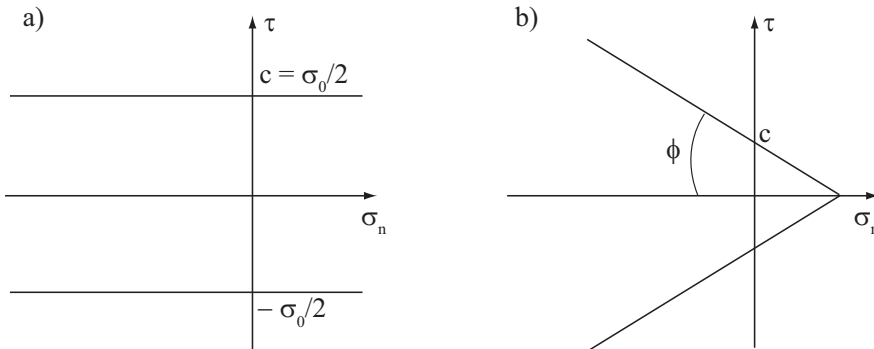


FIG. 1.7: Critère de Tresca a) et critère de Coulomb, b) pour une interface de normale $\mathbf{n}$ subissant un vecteur contrainte $\mathbf{T}$ tel que $\sigma_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ et $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T} - \sigma_n \cdot \mathbf{n}$, ϕ est l'angle de friction et c la cohésion.

Ces critères, pour une interface, sont définis en fonction de σ_n et de la norme de la composante tangentielle $|\boldsymbol{\tau}|$. Le critère de Tresca se définit comme suit :

$$f(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}) = \sup(|\boldsymbol{\tau}| - \frac{\sigma_0}{2}) \leq 0. \quad (1.2.1)$$

où σ_0 est la limite de résistance en traction (ou compression) simple. Un matériau cohésif et frictionnel obéit au critère de Coulomb :

$$f(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}) = |\boldsymbol{\tau}| + \tan \phi \sigma_n - c \leq 0. \quad (1.2.2)$$

Ces critères peuvent être évidemment généralisés afin d'obtenir les conditions de résistance pour un matériau ne contenant pas de faille ou d'interface pré-déterminées. De façon générale, le critère de rupture permet de définir le domaine de résistance G dans l'espace des contraintes appropriées. Ce domaine de résistance, pour une interface de normale $\mathbf{n}$ s'écrit :

$$G(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}) = \{\boldsymbol{\sigma} | f(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}) \leq 0\}. \quad (1.2.3)$$

1.2.2 Approche interne

Appliquons tout d'abord l'approche interne, sur le cas de l'échantillon en compression simple représenté en Figure 1.8. Le problème est en 2D, la dimension hors plan est considérée d'épaisseur unité pour les calculs.

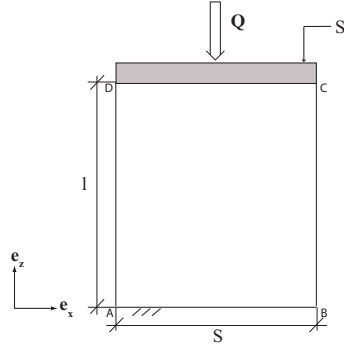


FIG. 1.8: Compression d'un cylindre de section S dont la base est fixe en e_z seulement. Les conditions aux limites sont : sur AB et CD, $T_x^d = T_y^d = 0$, sur AD et BC, $T^d = 0$.

Il faut imaginer un champ de contraintes statiquement admissible (S.A.) dans le mode de chargement imposé, ici la compression $\mathbf{Q}$, représentant les efforts uniformément répartis et exercés sur le plateau supérieur de section S_l . D'une manière générale, ce champ de contraintes sera S.A., s'il respecte les 3 conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{g} &= \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Lambda, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{T}^d, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_T. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

La première condition correspond à l'équilibre du système avec g la gravité. La seconde condition impose la continuité du vecteur contrainte à travers toute discontinuité Λ pouvant exister dans Ω ou à sa frontière. La troisième condition implique que le vecteur contrainte d'une facette orientée vers l'extérieur faisant partie de $\partial\Omega_T$ soit égale à la densité des efforts extérieurs. Ici, nous imposons la résultante $\int_{S_l} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{Q}$ sans spécifier la distribution $\mathbf{T}^d$. Pour que le système supporte le chargement $\mathbf{Q}$, il faut ajouter l'hypothèse suivante : le champ de contraintes doit appartenir au domaine de résistance G , défini à la section précédente. Si ces conditions sont respectées alors le chargement $\mathbf{Q}$ est dit potentiellement supportable (Salençon, 2002) et on désigne par κ l'ensemble de ces chargements :

$$\kappa = \{\mathbf{Q} \mid \boldsymbol{\sigma} \text{ S.A. avec } \mathbf{Q} \text{ et } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in G(\mathbf{x})\} \quad (1.2.5)$$

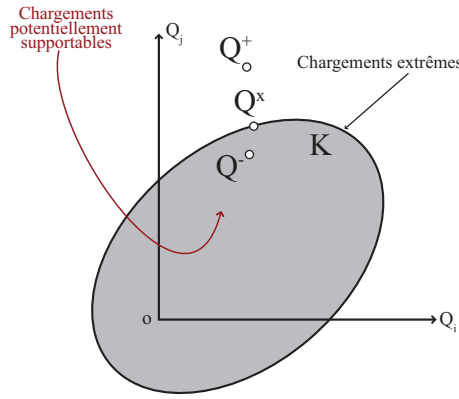


FIG. 1.9: Domaine κ : chargements potentiellements supportables (gris), chargements extrêmes $Q^\times$ et bornes au chargement extrême : borne inférieure Q^- et borne supérieure Q^+ . Les chargements Q_i sont suivant une direction de $\boldsymbol{\sigma}$ donnée. (D'après Salençon, 2002).

La figure 1.9 représente cet ensemble κ et permet d'illustrer les deux propriétés qu'il vérifie : κ est convexe et contient $\mathbf{Q} = 0$. Les chargements $\mathbf{Q}^\times$ situés sur la frontière de κ sont appelés chargements extrêmes du système (Figure 1.9). Les chargements qui dépassent la frontière de κ ($\mathbf{Q}^+$) entraînent inévitablement l'instabilité du système tandis que les chargements situés dans κ ($\mathbf{Q}^-$) permettent la stabilité du système. Pour le cas de l'échantillon en compression (Figure 1.8), nous proposons de travailler dans un sous espace de champs de contraintes S. A., en considérant le champ uniaxial homogène suivant :

$$\boldsymbol{\sigma} = -\sigma \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (1.2.6)$$

connu à un scalaire près, σ . Ce champ est S.A. pour les 3 conditions rappelées en 1.2.4 sachant que les effets de gravité sont négligés. La résistance du matériau est caractérisée par le critère de

Tresca pour un matériau : $f(\boldsymbol{\sigma}) = \sup(\sigma_i - \sigma_j - \sigma_0)$ en contraintes principales. Les contraintes principales sont $\sigma_I = \sigma_{II} = 0$ et $\sigma_{III} = -\sigma$. Il faut donc que le scalaire contrainte respecte $\sigma \leq \sigma_0$. En fonction du champ de contrainte S . A. proposée en 1.2.6, la force $\mathbf{Q}$ exercée sur le plateau supérieur est définie par :

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\sigma}) = \int_{S_l} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_z dS = -\sigma S \mathbf{e}_z, \quad (1.2.7)$$

car $S_l = S$, avec S la section de l'échantillon et S_l la section du plateau supérieur. Nous obtenons alors :

$$|\mathbf{Q}| = \sigma S \leq Q^- = \sigma_0 S \leq Q^\times, \quad (1.2.8)$$

où Q^- est une valeur approchée par défaut donc une borne inférieure au chargement extrême $Q^\times$. En effet, nous travaillons dans un sous-espace de contraintes et il se peut que l'on puisse trouver une meilleure estimation de la charge extrême. Nous avons utilisé cette méthode de recherche de borne inférieure, mais de façon systématique, dans le **chapitre 2**.

1.2.3 Approche externe

L'approche externe fournit une borne supérieure du chargement $Q^\times$. La première étape consiste à choisir un schéma cinématique à partir de la proposition d'un mécanisme de ruine. Les champs de vitesse virtuels choisis doivent être cinématiquement admissibles (C.A.) c'est-à-dire qu'ils respectent les conditions aux limites du problème définies en termes de vitesse. Le mode de rupture pour l'échantillon de surface S soumis à une compression $\mathbf{Q}$ est une interface de surface S_P orientée d'un angle α par rapport l'horizontale (Figure 1.10).

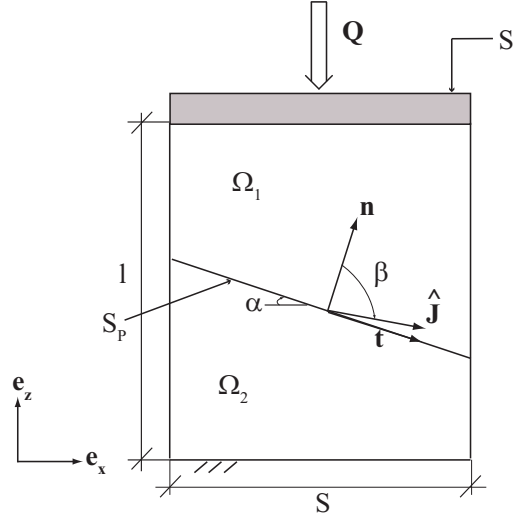


FIG. 1.10: Définition du champ de vitesse pour le bloc cylindrique de surface S dont la base est rigide.

Le champ de vitesse virtuel est le suivant : le bloc inférieur Ω_2 est immobile, donc la vitesse $\hat{\mathbf{U}}_2$ est nulle, et le bloc supérieur Ω_1 est translaté à la vitesse $\hat{\mathbf{U}}_1$ sous l'action de la force de compression Q . La discontinuité du champ de vitesse virtuel au niveau de l'interface est notée $\hat{\mathbf{J}}$, le saut de vitesse. Orienté de l'angle β par rapport au vecteur normal à l'interface de glissement ($\hat{\mathbf{J}} = \hat{J}(\cos \beta \mathbf{n} + \sin \beta \mathbf{t})$), le saut de vitesse est le résultat de la différence de vitesse entre le bloc Ω_2 et le bloc Ω_1 . Dans cet exemple, $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{U}}_1 - \hat{\mathbf{U}}_2$, et comme $\hat{\mathbf{U}}_2 = 0$, $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{U}}_1$. On fait l'hypothèse d'un mouvement de blocs rigides. Dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$, $\hat{\mathbf{J}}$ est défini en fonction des angles α et β :

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{U}_1(\sin(\beta - \alpha)\mathbf{e}_x + \cos(\beta - \alpha)\mathbf{e}_z). \quad (1.2.9)$$

Théorème des puissances virtuelles La deuxième étape de l'approche externe consiste à appliquer le théorème des puissances virtuelles qui stipule l'égalité de la puissance associée aux efforts internes à la puissance due aux efforts externes pour tout champ C.A. :

$$\mathcal{P}_i(\hat{\mathbf{U}}) = \mathcal{P}_e(\hat{\mathbf{U}}) \quad \forall \hat{\mathbf{U}} \text{ C.A.} \quad (1.2.10)$$

La puissance des efforts externes est due, dans le cas de l'échantillon, à la poussée Q appliquée sur le bloc Ω_2 (projection sur $\mathbf{e}_z$) :

$$\mathcal{P}_e(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{J}}) = Q\hat{J} \cos(\beta - \alpha). \quad (1.2.11)$$

Il n'y a pas de dissipation interne : $\mathbf{d}(\hat{\mathbf{U}}) = \mathbf{0}$, avec $\mathbf{d}$ le tenseur taux de déformation. La puissance interne correspond à la puissance du vecteur contrainte $\mathbf{T}$ agissant sur la surface S_P de l'interface :

$$\mathcal{P}_i(\hat{\mathbf{U}}) = \int_{S_P} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{J}}. \quad (1.2.12)$$

Théorème de la résistance maximale La troisième étape consiste à appliquer le théorème de la résistance maximale pour trouver l'expression du vecteur $\mathbf{T}$. Plutôt que de déterminer l'expression exacte de ce vecteur, nous allons en effet chercher à majorer le produit $\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{J}}$. La seule information que nous ayons est le critère de rupture du matériau constituant l'échantillon.

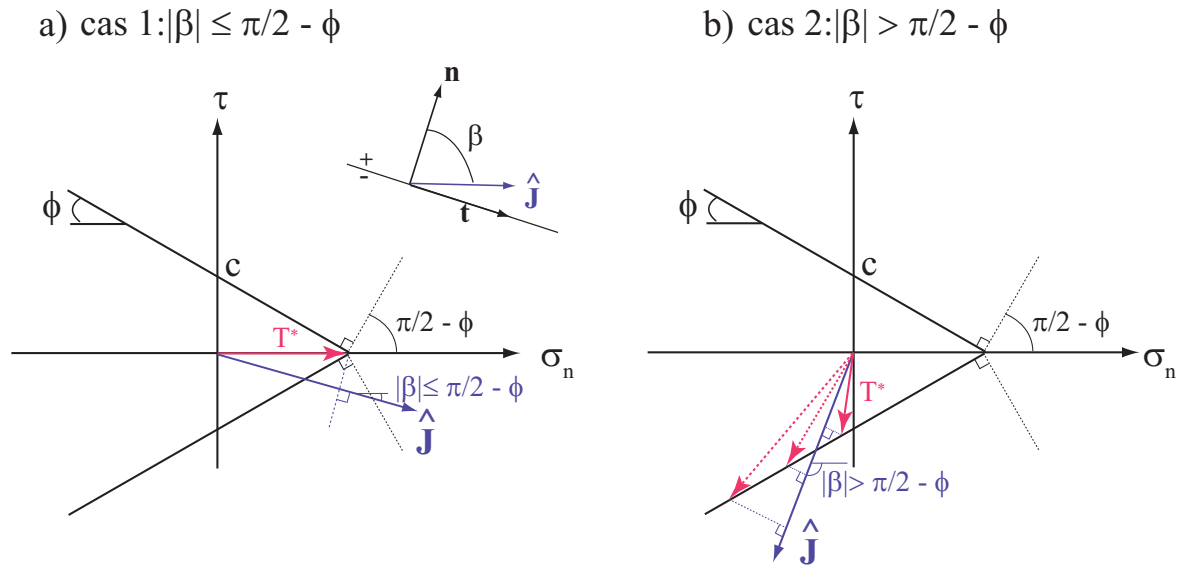


FIG. 1.11: Méthode graphique du calcul du produit scalaire $\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{J}}$ pour le **critère de Coulomb** : si $|\beta| \leq \frac{\pi}{2} - \phi$ alors le produit scalaire $\mathbf{T}^* \cdot \hat{\mathbf{J}}$ est le plus grand entre $\hat{\mathbf{J}}$ et tout vecteur contrainte vérifiant le critère de Coulomb, a), si $|\beta| > \frac{\pi}{2} - \phi$, le produit $\mathbf{T}^* \cdot \hat{\mathbf{J}}$ n'est pas borné, b).

La majoration du produit scalaire $\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{J}}$ se fait grâce à une méthode graphique illustrée sur la figure 1.11 pour le **critère de Coulomb**. On va orienter le saut de vitesse $\hat{\mathbf{J}}$ dans le plan du critère de rupture pour déterminer le vecteur $\mathbf{T}^*$ de G qui donnera le produit scalaire le plus grand entre $\hat{\mathbf{J}}$ et tout vecteur contrainte respectant le critère de rupture. On va ainsi déterminer la fonction support notée π . La même méthode graphique est utilisée pour le critère de Tresca. Pour le critère de Coulomb, la fonction support correspondante est :

$$\begin{aligned} \text{cas 1 : } \pi(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{J}}) &= \hat{J} c \cotan \phi \cos \beta \quad \text{si } |\beta| \leq \frac{\pi}{2} - \phi, \\ \text{cas 2 : } \pi(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{J}}) &= +\infty \quad \text{si } |\beta| > \frac{\pi}{2} - \phi. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Pour le critère de Tresca, la fonction support correspondante est :

$$\begin{aligned} \text{cas 1 : } \pi(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{J}}) &= \frac{\sigma_0}{2} |\hat{J}| \quad \text{si } \beta = \frac{\pi}{2}, \\ \text{cas 2 : } \pi(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{J}}) &= +\infty \quad \text{si } \beta \neq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Revenons au cas de l'échantillon. D'après l'équation 1.2.10 :

$$\int_{S_P} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{J}} = Q \hat{J} \cos(\beta - \alpha). \quad (1.2.15)$$

Si on applique le théorème de la résistance maximale :

$$\mathcal{P}_i(\hat{\mathbf{U}}) \leq \mathcal{P}_{\text{lim}}(\hat{\mathbf{U}}) = \int_{S_P} \mathbf{T}^* \cdot \hat{\mathbf{J}} = \int_{S_P} \pi(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{J}}), \quad (1.2.16)$$

avec $\mathbf{n}$ la normale à l'interface. D'après l'équation 1.2.14, l'angle β est égal à $\frac{\pi}{2}$ pour avoir une valeur de fonction support π finie, $\hat{\mathbf{J}}$ est alors orienté suivant le vecteur $\mathbf{t}$ tangent à l'interface. La puissance externe est égale à :

$$\mathcal{P}_e(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{U}}) = Q \hat{J} \sin \alpha. \quad (1.2.17)$$

Si on intègre l'expression de la fonction support définie en 1.2.14 sur la surface S_P de la discontinuité, le majorant de la puissance interne $\mathcal{P}_{\text{lim}}(\hat{\mathbf{U}})$ devient :

$$\mathcal{P}_{\text{lim}}(\hat{\mathbf{U}}) = \frac{\sigma_0 S \hat{J}}{2 \cos \alpha}, \quad (1.2.18)$$

où S est la section de l'échantillon. Les équations 1.2.17 et 1.2.18 permettent de trouver l'expression du majorant du chargement extrême $Q^\times$:

$$Q^\times \leq \frac{\sigma_0 S}{\sin 2\alpha}. \quad (1.2.19)$$

Il ne reste plus qu'à trouver la valeur de α qui va minorer ce majorant au chargement. Si $\alpha \geq \frac{\pi}{4}$ alors on obtient la borne supérieure de $Q^\times$ que l'on note Q^+ :

$$Q^\times \leq Q^+ = \sigma_0 S. \quad (1.2.20)$$

La comparaison des deux bornes en 1.2.8 et 1.2.20 permet de conclure que : $\sigma_0 S \leq Q^\times \leq \sigma_0 S$, nous avons donc trouvé la force exacte grâce au calcul à la rupture. Cette deuxième approche en vitesse va être développée, numériquement, en 2D puis étendue en 3D. Ce travail est présenté au **chapitre 3**.

1.2.4 Lien avec la plasticité

Comme nous venons de le voir pour l'échantillon en compression, la théorie du calcul à la rupture permet, principalement, d'examiner la rupture ou la tenue du système soumis à un chargement compte tenue de la résistance maximale du matériau qui le constitue. Ce concept de rupture peut être lié à des problèmes d'instabilité ou de fragilité. Aucune référence n'est faite à un problème d'évolution en terme de trajet de chargement. Par l'application de cette théorie, nous obtenons des résistances potentielles du système. Aussi pouvons-nous poser la question de la pertinence du résultat comme le cite Salençon (2002) dans son ouvrage : ” *Une réponse plus élaborée, permettant notamment de savoir si un chargement potentiellement supportable sera effectivement supporté, nécessiterait que soient connus la loi de comportement du matériau constitutif à l'intérieur du domaine de résistance et lorsque les limites de résistance sont atteintes ainsi que l'état d'autocontrainte initial du système et l'histoire du chargement qui lui est imposée. La réponse apportée par le calcul à la rupture est indépendante de la connaissance de ces éléments, pourvu que l'hypothèse des changements de géométrie négligeables demeure vérifiée.* ” D'après Salençon (2002), l'étude se poursuit par l'application de l'analyse limite définie pour un matériau élastique parfaitement plastique sur un trajet de chargement donné. Cette distinction entre *calcul à la rupture* et *analyse limite* n'est pas clairement identifiée pour d'autres auteurs. En d'autres termes, la prise en compte de la règle d'écoulement pour le calcul des charges limites reste controversée. C'est, en fait, l'hypothèse sur le champ de vitesse cinématiquement admissible qui diffère. Les auteurs comme Sloan (2005) impose qu'il vérifie l'associativité de la règle d'écoulement en plus des conditions aux limites. Cependant, il mentionne que cette hypothèse sur l'associativité de la règle d'écoulement pour les matériaux frictionnels est encore très débattue. Il précise que la règle d'écoulement aura une influence sur la charge limite surtout si le problème est très contraint au sens cinématique du terme (Davis, 1968) ce qui n'est pas le cas en géomécanique. Drescher et Detournay (1993) ont étudié les charges limites pour un sol assimilé à un matériau rigide parfaitement plastique caractérisé par une règle d'écoulement associée et non-associée. Ils ont suggéré que les charges limites pour la règle d'écoulement non associée pouvaient être correctement déterminées en utilisant une méthode de blocs rigides basée sur l'analyse limite avec des discontinuités dont les propriétés rhéologiques étaient fonctions de la friction et de la dilatance, c'est-à-dire que le calcul de la fonction support se fait avec des coefficients réduits (c^* , ϕ^*) qui tiennent compte de la dilatance. Pour revenir à la théorie de calcul à la rupture établie par Salençon (2002), l'approche externe consiste à trouver un champ de vitesse virtuel pertinent. Il entend par ”champ pertinent” qu'il respecte les conditions nécessaires à la détermination de la fonction support (1.2.13 pour le critère de Coulomb et 1.2.14 pour le critère de Tresca). Prenons l'exemple d'une interface

caractérisée par le critère de Coulomb, le saut de vitesse doit faire un angle inférieur ou égale à $\frac{\pi}{2} - \phi$ avec la normale à cette surface pour que la puissance interne maximale $\mathcal{P}_{\text{lim}}$ soit finie. Il conclut par la remarque suivante : "Ainsi les conditions de pertinence [...] n'ont aucun rapport (si ce n'est la similitude mathématique) avec quelque hypothèse relative au comportement du matériau lorsque sa condition de résistance est saturée (loi d'écoulement plastique, ou autre,...)."

1.3 Évolution des structures

En génie civil, l'objectif est d'appliquer les coefficients de sécurité adaptés que l'on obtient par l'estimation de la ruine du système. En géologie structurale, le but est de comprendre l'évolution de la structure, c'est-à-dire la formation d'une chaîne plissée à l'échelle de la chaîne ou d'un chevauchement. Cela peut s'appréhender avec les modèles purement géométriques de Suppe (1983), classiquement avec les éléments finis ou avec le calcul à la rupture.

Approche classique en éléments finis Prenons le cas simple d'un pli de rampe, le pendage de la rampe étant pré-défini. Cet exemple de modélisation 2D a été calculé avec le code d'éléments finis GEFDYN (Aubry et al., 1986, Aubry and Modaressi, 1996) de l'École Centrale Paris. Le critère utilisé est celui de Mohr-Coulomb élasto-plastique. Les éléments du maillage sont des éléments quadrilatères à 8 noeuds pour le pli et des éléments d'interface à 6 noeuds pour le décollement et la rampe. Ce travail est détaillé en **annexe D** et a fait l'objet d'une communication orale à la conférence IACMAG (Souloumiac and Modaressi, 2008). La figure 1.12 représente la distribution de la contrainte cisailante dans le pli au cours du raccourcissement. Si le déplacement total, imposé sur le mur arrière du pli, n'est que de 2.5 m, comme ça a été le cas pour ce projet, la distribution de σ_{xy} dans le pli montre qu'une zone de concentration de contraintes se développe à la base de la rampe au fur et à mesure du raccourcissement. Il s'agit du rétro-chevauchement. Ceci n'est qu'un exemple simple qui a été mis en place pour comparer d'un point de vue numérique et qualitatif les résultats obtenus par la méthode des éléments finis avec ceux obtenus avec le calcul à la rupture. C'est pour cela que le raccourcissement est très faible pour rester proche de l'initiation du plissement. D'autres auteurs, cités dans la section 1.1, se concentrent à développer ces évolutions de structures comme par exemple Erickson et al. (2001) (Figure 1.14). Ils étudient, dans cet article, la variation du taux de déformation cisailante au cours du raccourcissement pour un pli de rampe.

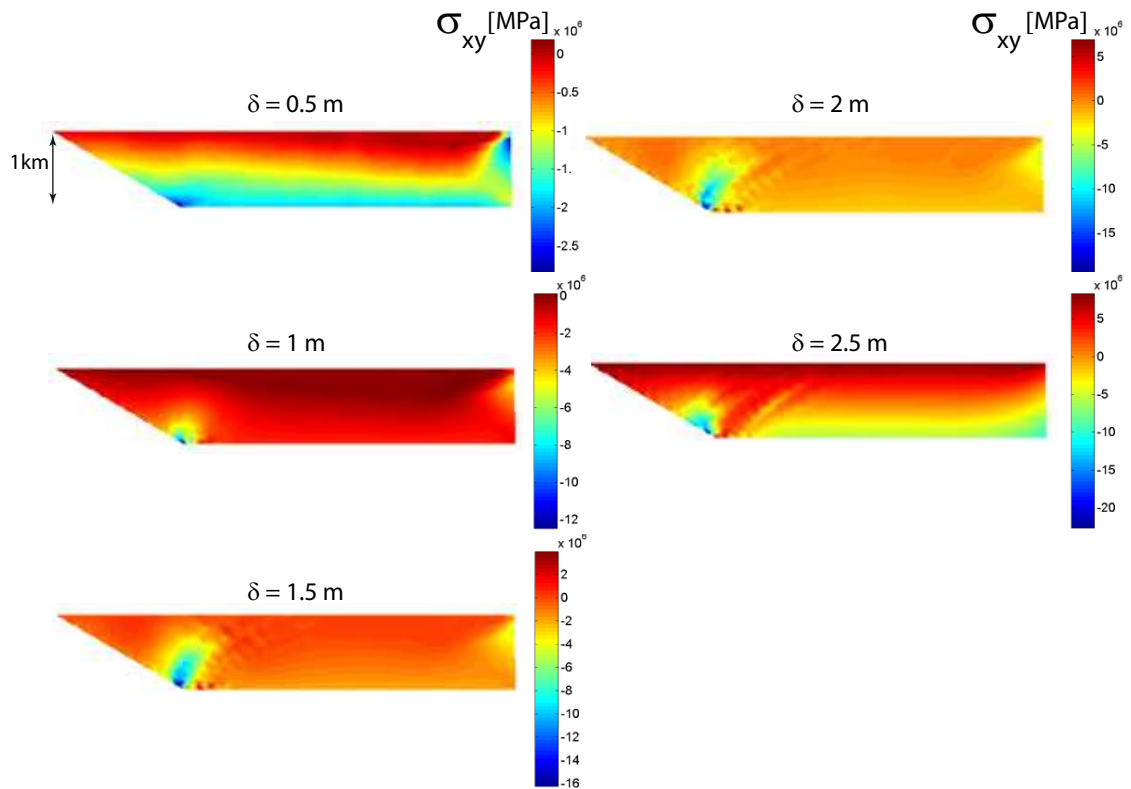


FIG. 1.12: Différentes étapes du raccourcissement δ pour un pli de rampe modélisé avec la méthode des éléments finis. Le coefficient de friction est de 15° sur la rampe sans cohésion, le coefficient de friction dans le matériau est de 30° sans cohésion, le coefficient de friction sur le décollement est de 5° , sans cohésion. L'angle de dilatance est de 30° .

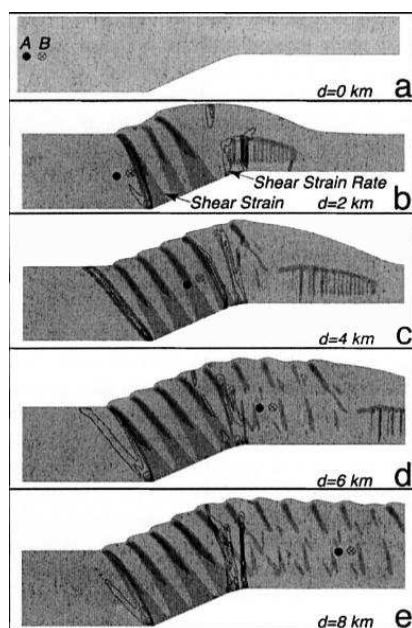


FIG. 1.13: Modèle d'un pli de rampe à quatre étapes de raccourcissement. Contours de déformation de cisaillement (zones grises) et contours du taux de déformation de cisaillement (lignes noires). Suivi de deux points A et B au cours du raccourcissement. (image extraite de Erickson et al. (2001)).

Une séquence de chevauchements avec le calcul à la rupture Une autre méthode, analytique cette fois, a été envisagée et validée par Cubas et al. (2008) pour obtenir l'évolution des structures. Elle a également été adoptée par Maillot et Leroy (2006) pour l'étude d'un pli en kink prédisant l'orientation des charnières à chaque étape du plissement. Le calcul d'une évolution de structure est l'originalité du calcul à la rupture appliquée à la géologie structurale. En géologie, la rupture correspond à l'activation des failles et au plissement. La démarche consiste à appliquer l'approche externe à chaque étape du raccourcissement (Figure 1.14). Elle a déjà permis de définir par optimisation la position de la première rampe et les pendages de la rampe et du rétro-chevauchement. Ensuite, les blocs continuent de glisser sur ces discontinuités majeures. A chaque incrément de raccourcissement, la force nécessaire à créer le relief est comparée à celle nécessaire à obtenir un nouveau système de failles en avant du premier. Si cette force s'avère moins importante alors le relief dû au premier système de faille ne se développe plus et un nouveau chevauchement se crée. Cette optimisation à chaque incrément permet d'avoir la durée de vie des failles. Elle est arrêtée lorsqu'un hors-séquence apparaît, c'est-à-dire la formation d'un système de failles à l'arrière de la structure.

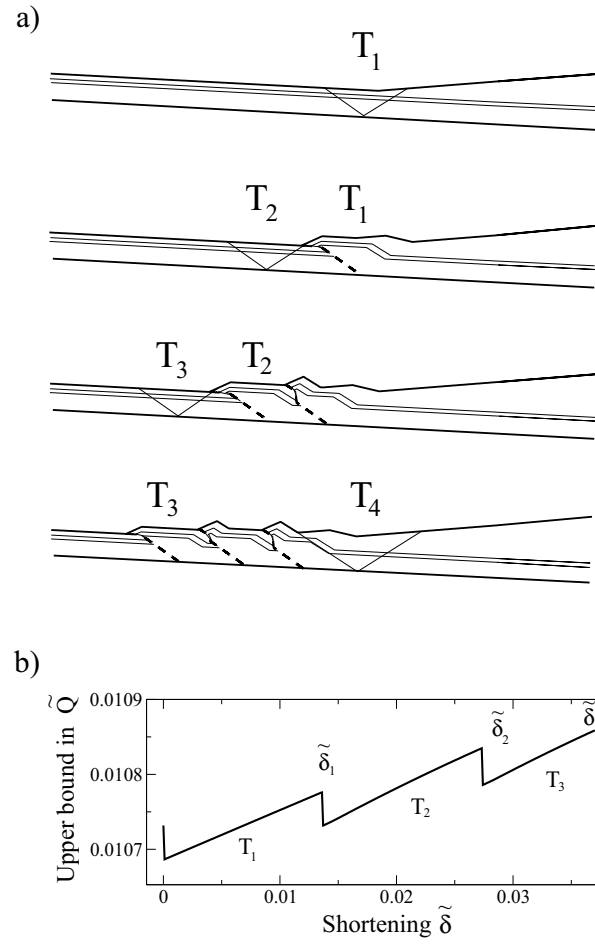


FIG. 1.14: Évolution d'une séquence de chevauchements a) les T_i indiquent la chronologie de la formation des chevauchements, T_4 correspondant à un chevauchement hors-séquence, Évolution de la force tectonique en fonction du raccourcissement b). Le coefficient de friction est de 5° sur le décollement, de 30° dans le matériau et l'adoucissement sur les rampes est de 15° (extraite de Cubas et al., 2008).

Nous allons donc voir, dans la suite de ce manuscrit, les applications du calcul à la rupture à l'étude des séquences de chevauchements : à l'initiation du plissement (en 2D et en 3D) et pendant l'évolution de la structure (en 2D, pour l'instant). Le deuxième chapitre présente l'approche interne appliquée à des modèles de plis de rampe et un cas naturel, le prisme de Nankai. Nous verrons que la méthode utilisée - Méthode des Éléments d'Équilibre - est basée sur une discrétisation de l'espace comme en éléments finis, à la différence près que les inconnues nodales sont les contraintes. Ce chapitre est constitué d'un article et d'un supplément électronique, sous forme d'annexe. Nous avons décidé ensuite d'étendre la méthode de Cubas et al. (2008) en 3D pour le début du plissement. Pour ce faire, nous avons favorisé une approche systématique où la géométrie du mécanisme de ruine n'est pas une donnée du problème mais plutôt un objectif. Cela implique que l'approche externe en 3D est numérique et basée sur une discrétisation de l'espace comme l'approche interne. Le troisième chapitre est donc constitué de deux articles portant sur l'approche externe. Le premier article est une validation en 2D de la méthode et le deuxième présente les résultats de modélisation en 3D. Nous avons étudié, dans ce chapitre, le prisme théorique critique (Dalhen, 1984) et modélisé les effets de bords qui sont induits dans les modèles analogiques en boîte de sable. Les références de ces trois chapitres sont répertoriées en fin de chaque article et en fin de manuscrit. Enfin à toute théorie numérique est jointe une validation expérimentale. C'est le sujet du quatrième chapitre qui concerne justement l'observation de ces effets de bords avec les modèles analogiques utilisant les boîtes de sable. Ces expériences ont été réalisées au département Géosciences et Environnement de l'Université de Cergy-Pontoise. Enfin, quatre annexes sont présentées. L'annexe A concerne l'étude du prisme critique avec la construction du cercle de Mohr (Lehner, 1986). L'annexe B met en évidence des résultats numériques complémentaires obtenus avec l'approche interne qui ont surtout un intérêt mathématique. L'annexe C est la démonstration de l'approche externe appliquée au problème d'Hafner (1951). L'annexe D porte sur une comparaison entre la méthode des éléments finis et l'approche interne pour un pli de rampe sans relief. Enfin l'annexe E présente un travail préliminaire sur l'analyse, avec un logiciel de Particule Image Velocimetry, des photos des expériences en boîte de sable réalisées pour l'étude des effets de bords, en collaboration avec le département de Géologie de l'Université d'Aachen. Toutes les références bibliographiques sont répertoriées en fin de manuscrit. D'autre part, chaque partie - chapitre ou annexe - peut être lue indépendamment. Ce travail se veut pluridisciplinaire puisqu'il est issu d'une collaboration entre le laboratoire de Mécanique des Sols, des Structures et des Matériaux de l'École Centrale Paris et le laboratoire de Géologie de l'École Normale Supérieure. Ce manuscrit s'adresse donc aux géologues comme aux mécaniciens.

Chapitre 2

Approche interne appliquée au pli de rampe et au prisme d'accrétion

Ce chapitre, consacré à l'approche interne ou statique du calcul à la rupture, est présenté sous forme d'un article (accepté au *Journal of Geophysical Research*). Ce travail a fait l'objet d'une validation de la méthode numérique par un exemple classique en géologie structurale : le problème d'Hafner (1951). Cette méthode numérique est une application de l'approche interne : la Méthode des Éléments d'Équilibre. Nous avons appliqué cette méthode sur différentes structures géologiques comme les plis de rampe. Les principaux résultats obtenus avec cette méthode sont la distribution des contraintes à une étape du plissement et la distance au critère de rupture. Cette distance met en évidence les zones proches de la rupture comme les rétro-chevauchements et les zones de failles normales. Ainsi une étude de l'influence des paramètres rhéologiques du matériau et des failles majeures est menée pour notamment observer le pendage des rétro-chevauchements, l'étendue des zones de failles normales et les variations de contraintes. Cet article contient également un supplément électronique avec une application à un cas naturel : le prisme d'accrétion de Nankai, au Sud du Japon. Il a été étudié à partir de l'interprétation de la section imagée par la sismique (ligne NT68 - 2) interprétée par Moore et al. (1991). Les détails de l'implémentation de la Méthode des Éléments d'Équilibre se trouvent en fin de supplément électronique.

Résumé de l'article : Predicting stress distributions in fold-and-thrust belts and accretionary wedges by optimization.

Cet article présente l'approche interne du calcul à la rupture appliquée à des structures géologiques. Ces structures géologiques se trouvent dans un contexte de ceintures de chevauchements dans les bassins d'avant-pays pour les plis de rampes et dans un contexte de subduction océanique - continentale pour les prismes d'accrétion. L'application numérique de l'approche interne conduit à la Méthode des Éléments d'Équilibre décrite dans cet article qui permet d'obtenir les distributions de contraintes et la borne inférieure à la force tectonique associée. Le critère de rupture utilisé est le critère de Coulomb dans le matériau et sur les grandes discontinuités comme les failles majeures et le décollement. La cohésion et l'angle de friction sont les deux paramètres rhéologiques à définir pour chaque matériau et discontinuité. La théorie est d'abord appliquée au problème classique d'Hafner (Hafner, 1951). Il s'agit d'un bloc rectangulaire qui peut glisser sur une couche plane rhéologiquement plus faible appelée le décollement (Figure 2.1), le but étant d'optimiser la force tectonique nécessaire à faire glisser ce bloc sans rupture dans le matériau. La résolution de ce problème fût une étape importante pour comprendre le paradoxe des nappes rocheuses se retrouvant à plusieurs kilomètres de leur origine, sur des pentes trop faibles pour expliquer un écoulement gravitaire. Ici, deux approches sont proposées : la solution analytique et l'optimisation numérique basée sur la Méthode des Éléments d'Équilibre. Les valeurs des forces analytique et numérique sont identiques et les deux modes de rupture sont bien identifiés. Ces derniers sont : l'activation totale du décollement sans rupture du matériau dans le bloc ou alors la rupture du matériau dans le bloc sans activation du décollement. La transition entre ces deux modes est contrôlée par une valeur critique de cohésion dans le matériau qui dépend de la cohésion et de la friction sur le décollement, du coefficient de Rankine et de la géométrie du bloc (figure 2.3 et figure 2.4).

La théorie est ensuite appliquée à un pli de rampe avec et sans relief. La géométrie de ce pli est donnée par des méthodes cinématiques comme l'approche externe du calcul à la rupture (Cubas et al., 2008). Par conséquent, les calculs sont réalisés d'abord à l'initiation du plissement et à une étape du raccourcissement avec création de relief. La rampe, le décollement et le matériau ont des paramètres rhéologiques spécifiques - cohésion et angle de friction - qui font l'objet d'une étude paramétrique.

A l'initiation du plissement, le mode de rupture observé (figure 2.6) est une zone triangulaire qui émane de la base de la rampe correspondant au rétro-chevauchement, faille conjuguée de la rampe. D'ailleurs, la distribution des contraintes met en évidence deux zones de concentrations de contraintes sous forme de deux lobes correspondant à la zone de la rampe et à celle du rétro-chevauchement. D'autre part, le choix de l'angle de friction sur la rampe contrôle en partie le mode de rupture. Si l'angle de friction de la rampe augmente alors le pendage du rétro-chevauchement diminue. Et si l'angle de friction sur la rampe devient trop fort alors la structure préfère abandonner ce rétro-chevauchement et créer une nouvelle rampe à l'arrière (figure 2.6) où la force est appliquée. Les valeurs des pendages du rétro-chevauchement et de la force tectonique sont comparées à celles obtenues avec l'approche externe et il s'avère qu'elles sont similaires (erreur relative de 1%), ce qui valide une nouvelle fois la méthode numérique. La zone de rupture qui apparaît en surface du pli entre la rampe et le rétro-chevauchement peut être assimilée à une zone de failles normales. En effet après analyse de la distribution des contraintes, cette zone est plutôt une zone de tension. Son étendue diminue avec l'augmentation de l'angle de friction sur la rampe. Si la cohésion dans le matériau augmente, la zone de rupture s'étend près du rétro-chevauchement en une zone de cisaillement et la zone de failles normales est aussi plus importante. Ceci est également visible sur la distribution de contraintes (figure 2.9). Enfin si la rampe est listrique alors la zone de rupture du rétro-chevauchement est plus diffuse.

La deuxième application au pli de rampe est réalisée avec la prise en compte du relief crée et la présence du mur de la couche. Le relief influe sur l'étendue de la zone de rupture correspondant au rétro-chevauchement, qui est plus large. De plus, cette zone subit une rotation en surface et non près de la base de la rampe. Le relief a donc moins d'influence à la base de la rampe qu'en son sommet. Les distributions de contraintes (figure 2.11) montrent que l'on retrouve les deux lobes qui émanent de la base de la rampe correspondant à la rampe et au rétro-chevauchement. On n'observe pas de concentrations de contraintes dans le mur sauf près de la base de la rampe ce qui indique que le mur ne ressent pas la présence de la rampe au cours du raccourcissement. Dans le toit, loin de la rampe, la distribution de contraintes est Andersonienne (les contraintes principales σ_I et σ_{II} étant horizontale et verticale). La présence de relief n'a donc pas non plus d'influence loin de la rampe.

Enfin la dernière analyse réalisée du pli de rampe porte sur la construction d'une histoire des contraintes au cours du plissement. Tout d'abord, plusieurs localisations dans le pli avec relief sont choisies. Elles sont situées à des pas réguliers parallèlement à la rampe (figure 2.12). La contrainte de cisaillement équivalente et la contrainte moyenne sont alors présentées comme fonctions du raccourcissement. Les valeurs de ces contraintes sont plus importantes près de la

base de la rampe qu'en son sommet proche de la surface. D'autre part, une trajectoire rectiligne parallèle au décollement puis à la rampe peut-être imaginée pour suivre les contraintes au passage du rétro-chevauchement (figure 2.13). Nous avons observé une diminution des contraintes le long du décollement puis une augmentation en pic dans la zone du rétro-chevauchement et enfin une diminution progressive jusqu'à la surface.

Cet article présente donc l'application de l'approche interne qui permet d'obtenir la distribution de contraintes et la borne inférieure à la force tectonique dans la plupart des modèles géologiques de plis, et ce avec un coût réduit en termes de temps de calcul.

Le supplément électronique de l'article présente les maillages utilisés pour chaque calcul ainsi qu'un complément de résultats paramétriques sur le pli de rampe. Il contient également une application à un cas naturel : le prisme d'accrétion de Nankai, au Sud du Japon. Ces calculs ont été réalisés à partir d'une section sismique (ligne NT68 - 2) interprétée par Moore et al. (1991). Les résultats confirment le fait que le décollement est rhéologiquement plus faible que le reste du matériau constituant le prisme. De plus, la faille active doit être nécessairement plus faible que le matériau. En effet, l'hypothèse d'homogénéité du matériau ne permet pas d'obtenir la zone de rupture correspondant à cette faille. Enfin le prisme est très proche de la criticalité puisque des changements de l'ordre d'un degré dans la friction du décollement conduit au déplacement de plusieurs mètres des zones de rupture.

**Predicting stress distributions
in fold-and-thrust belts and accretionary wedges
by optimization**

P. Souloumiac

Laboratoire MSS-Mat, CNRS,
Ecole Centrale Paris, Chatenay Malabry, France,

Y.M. Leroy

Laboratoire de Géologie, CNRS,
École Normale Supérieure, Paris, France,

B. Maillot

Département Géosciences Environnement,
Université de Cergy-Pontoise, Cergy-Pontoise, France

and

K. Krabbenhøft

Centre for Geotechnical and Materials Modelling,
University of Newcastle, NSW 2308, Australia.

Abstract

The objective is to demonstrate that the Equilibrium Element Method (EEM) provides the stress distribution in geometrical models of folds, relevant to fold-and-thrust belts as well as accretionary wedges. The core of the method, inherited from limit analysis, is the search for an optimum stress field that (i) is in equilibrium, (ii) remains everywhere below or equal to the maximum strength of the rock, (iii) balances the largest possible applied tectonic force. This force and the associated stress field are interpreted as those at the onset of rupture. The method makes no appeal to the rock rheology nor to its elasticity, except for its maximum strength described here with the Coulomb criterion. The stress fields are discretized by elements covering the whole domain and allowing for discontinuities.

The example chosen to illustrate the potential of the EEM and to validate our implementation is the thrusting of a rectangular sheet over a flat and weak décollement. The EEM reproduces the solution proposed by Hafner (1951) based on linear elasticity, as long as the strength limit is not reached in the bulk of the domain. The EEM shows in addition that failure in the bulk prevents the activation of the décollement. The EEM is then applied to two fault-bend folds, with known ramp and flat décollement, with and without relief build up. It is shown that the transition from the flat to the ramp hanging walls occurs through a narrow fan defining the back thrust. The predicted dip of this back thrust decreases with increase in the ramp friction angle, the relief build up, as well as the ramp curvature. A sharp increase and then a sharp decrease in the magnitudes of the equivalent shear stress and of the mean stress are observed as one moves from the lower flat, through the back thrust up the ramp. If the ramp friction angle is too large, or the relief too important, the EEM predicts the initiation of a new thrust rooting at the back wall, instead of activating the proposed ramp. The application to detect the incipient thrust system within the toe of Nankai's accretionary wedge, Southeast coast of Japan, is proposed in the electronic supplement.

2.1 Introduction

There are two drastically different approaches to capture the development of fault-bend folds in fold-and-thrust belts and accretionary prisms. The first line of study relies on numerical techniques, such as the finite-element method (FEM), enforcing mechanical equilibrium in a weak sense and accounting for complex rock rheologies (Erickson and Jamison, 1995; Erickson et al., 2001). This line of work is an active area of research, requiring benchmarking among experts (Buiter and al., 2006), because it meets several technical difficulties regarding the onset of discontinuities (Ortiz et al., 1987) and their development into ramps. Also, the details of the elastic-plastic constitutive relations control the strain localization conditions (Rudnicki and Rice, 1975), but are difficult to interpret based on field observations (Leroy and Triantafyllidis, 2000). The second approach to capture fault-bend folds is purely geometrical and relies on simple rules to construct the fold development, based essentially on the experience of the field geologist or the seismic interpreter (e.g., Suppe, 1983 for the fault-bend fold rules). The simplicity of the geometrical rules renders possible the systematic construction of complex structures which, completed by temperature predictions, have practical applications in the oil industry (Zoetemeijer and Sassi, 1992; Sciamanna et al., 2004). Furthermore, such geometrical modeling requires only a fraction of the computer time necessary for the FEM simulations. There is however no concrete and objective means to select between two possible geometrical models of folding in the absence of any account of material properties, mechanical equilibrium, or tectonic force. We propose to apply a classical approach used in soil mechanics and geotechnics to alleviate this deficiency.

In geotechnics, the critical load that will permanently damage a structure or a foundation is the prime objective. It can be determined by solving the full mechanical problem using the FEM, if the details of the constitutive rules of the materials are known. Alternatively, limit analysis provides bounds on the values of the critical load with few assumptions on the rheology (Salençon, 1974). It proceeds in two parts : in the kinematics approach, an upper bound to the critical load is determined by finding possible failure geometries. In the statics approach, a lower bound is derived by constructing possible stress fields which balance the load without exceeding the material strength. In both cases, an optimization is carried out to obtain bounds as close as possible to each other. Since we deal here with upper crustal structures, the Coulomb criterion is well adapted to detect the onset of rock failure. It produces conveniently a convex strength domain in the appropriate stress space, a property required by the upper and lower bound theorems. Our interpretation of these theorems is different from the classical limit analysis, as applied by Odé (1960), in that a complete theory for perfectly-plastic solids is not considered.

In particular, the concept of flow rule, essential to define the plastic strain rate is not necessary in this contribution. The Coulomb criterion is the only element of rheology which is assumed.

This work is part of a research effort to account for rock strength and mechanical equilibrium in geometrical models of fault-related folds by extension of the classical limit analysis. Among previous work, Maillot and Leroy (2006) proposed to extend the kinematics approach of classical limit analysis to the development of folds. The idea was further developed by Cubas et al. (2008) who studied a forward sequence of thrusting in an accretionary wedge. Note that the kinematics approach requires no rheology other than strength criteria (Coulomb again). It is based on velocity fields but the symmetric parts of their gradients are not related to any stress fields since no constitutive relations are postulated.

Here we present a numerical implementation of the statics approach of limit analysis : the Equilibrium Element Method (EEM). The idea of the statics approach is to search within the set of statically admissible (SA) stress fields, (i.e., stress fields satisfying local mechanical equilibrium including potential discontinuities and balancing forces applied at the boundaries of the domain), the optimum field which respects the rock strength limit at every point of the domain (Salençon, 2002). By optimum, we mean the stress field that balances the largest applied forces, which is a lower bound to the exact applied force at failure. Note that only stress is discussed with the statics approach and there is no attempt to deduce a velocity field, nor a displacement field, nor a displacement gradient or jump. The main difficulty of the statics approach is that analytical solutions for SA stress fields even in two dimensions are not easily constructed. One could consider polynomial expressions for an Airy stress function, as done typically for elasticity problems (Hafner, 1951), but the extension to complex geometries quickly becomes cumbersome. It is thus preferable to discretize the domain of interest, typically with triangular elements in a 2D setting. In contrast to the displacement-based finite-element method, the stress components are the nodal unknowns. The resulting Equilibrium Element Method (EEM) provides a set of equalities and inequalities for the nodal unknowns which correspond to the equilibrium conditions and the necessity to satisfy the rock strength limits, respectively.

Among the merits of the EEM, first, discontinuities are built in the mesh along the side of every triangle providing new results on the stress distribution of the studied structures. Second, the EEM requires only the knowledge of the material strength. For the Coulomb criterion the only parameters required to produce the stress field are the distribution of friction angle and cohesion over the structure. These two parameters are certainly more in line with the way of thinking of a field geologist than the complete set of parameters necessary to define an elastic-plastic material required for an FEM simulation. Third, the search for the optimum stress field

is not computer-intensive and is realized with a small fraction of the time necessary to produce an increment of deformation with a FEM code (Souloumiac and Modaressi, 2008). A clear limitation of the EEM is that it cannot predict substantial elastic or viscous deformations prior to failure since no elastic or viscous behaviour is assumed and with hardening/softening effect.

The paper contents are as follows. Section two contains a technical presentation of the EEM with the particular example of the sliding of a rectangular sheet over a flat horizontal décollement. Section three is devoted to the application of the EEM to two fault-bend folds. The first fold is permanently eroded and the second fold builds up relief. In both cases, it is shown that the transition from the flat region to the ramp hanging wall occurs with a failure mechanism having the shape of a narrow fan, referred to as the back thrust. The stress concentration due to the rooting of the ramp on the décollement and the presence of this back thrust determines the main characteristics of the stress field over the structure. A comparison of the EEM predictions to the finite-difference results of Gonzàles et al. (2008) is also proposed. The electronic supplement gives additional details on our predictions, and proposes an application to Nankai accretionary wedge, Southeast coast of Japan. It is shown that minute variations in the friction angle of the décollement and details of the topography largely control the position of the failure mechanism which could be composed of a single ramp with two parallel back thrusts or of two sub-parallel ramps.

2.2 The EEM and its validation with Hafner's problem

The objective of this section is to introduce the EEM and to validate our implementation with the example of a rectangular sheet sliding over a flat décollement, a problem suggested by Hafner (1951) in a seminal contribution on overthrusting. The geometry of the domain Ω and the loading are presented in Figure 2.1.

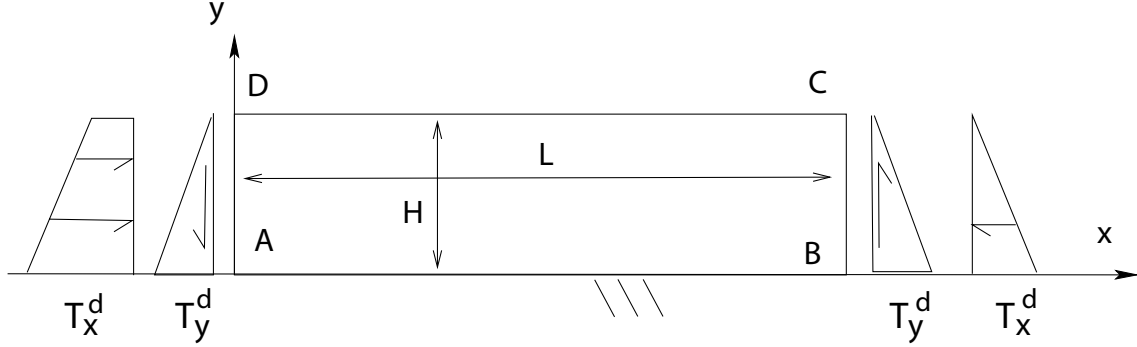


FIG. 2.1: The geometry and the loading of the problem studied by Hafner (1951). A 2D rectangular block Ω (ABCD) of length L and thickness H , set along AB the horizontal décollement, is subject to applied loads $\mathbf{T}^d$ at its vertical ends.

The loading over the left boundary AD has a normal and tangential component defined by

$$T_x^d = \rho g(H - y) + aL, \quad T_y^d = -a(H - y), \quad x = 0, \quad \forall y \in [0; H], \quad (2.2.1)$$

in which ρ, g are the material density, the gravity acceleration, acting in the y -direction and in the negative sense, respectively, and a a positive scalar (unit Pa/m). The total horizontal force acting on the left boundary is

$$F(a) \equiv \int_A^D T_x^d(y) dy = \frac{1}{2} \rho g H^2 + aLH. \quad (2.2.2)$$

Along the right boundary BC , the two components of the distributed applied force are

$$T_x^d = -\rho g(H - y), \quad T_y^d = a(H - y), \quad x = L, \quad \forall y \in [0; H], \quad (2.2.3)$$

resulting in the total horizontal force on the right boundary equal to $\frac{1}{2} \rho g H^2$. The upper surface CD is stress free

$$T_x^d = T_y^d = 0, \quad \forall x \in [0; L], \quad y = H. \quad (2.2.4)$$

The domain boundary $\partial\Omega_T$ where forces are prescribed, and identified by the superscript d (data), is thus composed of the top free surface and the two lateral boundaries only. The décollement, having specific properties, is described as a material discontinuity in the following. Hafner's problem consists in determining the exact tectonic force (2.2.2) which triggers slip on the décollement or bulk failure. In this respect, a is the unknown of the problem.

2.2.1 The Equilibrium Element Method

The statics approach does not provide the exact solution to Hafner's problem. Instead, it seeks to establish a lower bound to the exact applied force. It proceeds in several steps : first, a stress field is constructed, by any means (analytical or numerical), that must be in equilibrium, and respect everywhere the maximum strength of the rock. Second, compute by quadrature as in (2.2.2), the applied load balanced by this field. It is a lower bound to the exact solution. The third step consists in optimizing the stress field to balance the largest possible applied load. In other words, the method provides the largest lower bound to the exact, unknown applied force at failure, and the corresponding optimum stress field over the domain. The Equilibrium Element Method (EEM) follows this strategy, using a spatial discretization with elements to construct numerically the stress field, and dedicated algorithms to optimize it.

The optimum stress field is searched among the set of statically admissible (SA) stress fields. Each element of this set satisfies mechanical equilibrium, requiring three conditions to be met. First, at every point within the bulk

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = -\rho\mathbf{g}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.2.5)$$

in which $\boldsymbol{\sigma}$ is the stress tensor. Bold letters identify tensorial or vectorial quantities. Second, across any potential discontinuity Λ of normal $\mathbf{n}$ within the domain Ω , the stress vector, defined by $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, must be continuous

$$[[\boldsymbol{\sigma}]] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Lambda, \quad (2.2.6)$$

in which the double brackets denote the difference between the stress on the two sides of the discontinuity ($[[\boldsymbol{\sigma}]] = \boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^-$, the normal pointing to the $+$ region). Third, the boundary conditions over $\partial\Omega_T$ must be satisfied, requiring

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^d, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_T, \quad (2.2.7)$$

where $\mathbf{n}$ is the normal to the boundary at point $\mathbf{x}$. These boundary conditions are defined in (2.2.1), (2.2.3), and (2.2.4) for Hafner's problem.

The SA stress field must also be such as not to overcome the strength of the material. For any discontinuity or fault of known orientation, the specific strength domain (linear in stress) is based on the Coulomb criterion. More specifically, for the décollement (line AB, Figure 2.1, with normal $\mathbf{n}(0,1)$), the strength domain reads

$$\begin{aligned} G_D(\boldsymbol{\sigma}) &= \{\boldsymbol{\sigma} \mid \pm \tau + \sigma_n \tan \phi_D - c_D \leq 0\} \\ \text{with } \sigma_n &= \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}), \quad \tau = \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

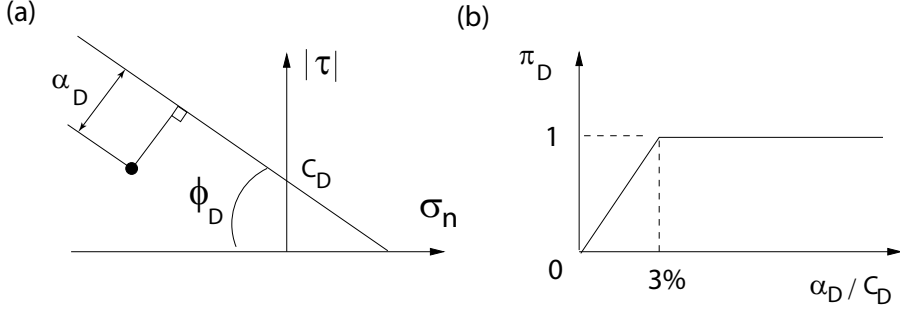


FIG. 2.2: The definition of the distance to the criterion, (a), and of the scaled distance to the criterion, (b) are illustrated for the case of the décollement strength domain.

in the space spanned by the normal stress σ_n and the resolved shear stress τ . The vector $\mathbf{m}(-1,0)$ is of unit norm and tangential to the décollement. The parameters ϕ_D and c_D introduced in (2.2.8) are the friction angle and the cohesion of the décollement, respectively. In the bulk, the orientation of the failure plane is not specified and the strength domain (non-linear in stress) is generalized to

$$G_B(\boldsymbol{\sigma}) = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \sigma_e + 2P \sin \phi_B - 2c_B \cos \phi_B \leq 0\}$$

with $\sigma_e = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$, $P = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$, (2.2.9)

in which ϕ_B and c_B are the friction angle and the cohesion of the bulk material, respectively. The stresses P and σ_e in (2.2.9) are referred to as the in-plane mean stress and the equivalent shear stress, respectively.

It will be important in what follows to estimate the distance of the stress state to the boundary of the strength domain, i.e., the distance to failure. This concept is illustrated in Figure 2.2a where the distance to failure is denoted α_D at a given point on the décollement. Normal and tangential stresses at that point are marked by the solid dot. The distance, with unit of stress, is defined by

$$\alpha_D = (c_D - |\tau| - \sigma_n \tan \phi_D)(1 + \tan^2 \phi_D)^{-1/2}, \quad (2.2.10)$$

for the décollement and by

$$\alpha_B = (2c_B \cos \phi_B - \sigma_e - 2P \sin \phi_B)(1 + 4 \sin^2 \phi_B)^{-1/2}, \quad (2.2.11)$$

for any point in the bulk material according to the two definitions (2.2.8) and (2.2.9), respectively. It will be convenient to scale that parameter to concentrate our attention to very

small distances to failure. For that purpose, the scaled distance to the criterion (Figure 2.2b) is proposed

$$\pi_b = \min(1, \frac{\alpha_b}{0.03 c_b}), (b = B, D), \quad (2.2.12)$$

the value of 3% being chosen arbitrary.

In summary, according to the statics approach, any SA stress field which satisfies point wise the constraint of the convex strength domain (2.2.8) and or (2.2.9) provides a lower bound to the exact tectonic force (2.2.2). However, the search within the set of SA stress fields for the optimum solution is difficult and the benefit of the EEM is to propose a systematic construction of SA stress fields by discretizing the domain. It is done in the spirit of the classical displacement-based finite-element method (FEM) and we choose linear, three-noded triangular elements. The main difference however with the FEM is that, within any element Ω^h , it is the stress which is interpolated linearly from the nodal values σ^i

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 N_i(\mathbf{x}) \sigma^i, \forall \mathbf{x} \in \Omega^h, \quad (2.2.13)$$

in which the superscript i is the local node number (1 to 3). The functions $N_i(\mathbf{x})$ are linear and take the value of one at node i and of zero at the other two nodes. Note that discontinuities, which equilibrium is presented by (2.2.6), are assumed to occur along the three sides of each triangle. The corresponding linear equilibrium equations, after discretization, are constructed elegantly by collapsing two triangular elements (zero surface) along each of theses three segments. The EEM construction is presented in more technical details in Krabbenhøft et al. (2007) as well as in the last part of the electronic supplement. It suffices to know that the final set of equations is of the type

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & (f)\{\sigma\}, \\ \text{Subject to} \quad & [A]\{\sigma\} = \{b\}, \\ \text{and} \quad & \sigma^i \in G_b, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

where $\{\sigma\}$, (f) are respectively the column vector containing all the nodal stress unknowns, and the line vector associated to the loading to be optimized. Thus, the product $(f)\{\sigma\}$ is a scalar defining the magnitude of the applied load, for example it is $F(a)$ in (2.2.2). $[A]$ is the matrix resulting from the three equilibrium conditions (2.2.5, 2.2.6, 2.2.7) with the discretization (2.2.13), constructed so that $[A]\{\sigma\}$ corresponds to the left hand sides of (2.2.5, 2.2.6, 2.2.7) and $\{b\}$, to the right hand sides of (2.2.5, 2.2.6, 2.2.7). The last equation in (2.2.14) stipulates

that each nodal stress must satisfy the relevant strength condition (2.2.8 or 2.2.9). It is this optimization problem which is set up with the standard finite-element code SARPP (2007) and solved with the commercial package Mosek (2008) throughout the rest of this contribution.

2.2.2 Hafner's solution

The solution of Hafner's problem which is now presented is the exact, analytical solution and it is used to validate the numerical implementation of the system (2.2.14) in the next subsection.

Equilibrium of external forces provides the two components of the total reaction force from the foundation along AB, Figure 2.1. The vertical component R_y is $\rho g H L$ and corresponds to the weight of the block Ω while the horizontal reaction R_x is $-a H L$ and results from the difference between the two horizontal forces on BC and AD, as can also be seen in Figure 2.1. The exact distribution of these two components of the reaction force over AB is not known but, if the décollement is fully activated, the resolved shear stress (assumed of same sign over the whole décollement) and the normal stress must satisfy point wise the Coulomb criterion (2.2.8). Consequently, the two force components must satisfy $-R_x - R_y \tan \phi_D = c_D L$, providing the expression for the maximum value of the basic unknown a

$$a_D = \frac{c_D}{H} + \rho g \tan \phi_D, \quad (2.2.15)$$

the subscript D marking the fact that the whole décollement is activated. This result is valid if the loading generated for that specific value of a_D does not lead to rupture within the pristine material. To check that possibility, it is necessary to construct the stress state within the block Ω . Following Hafner (1951), the simplest SA stress state is

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\rho g(H - y) - a(L - x), \\ \sigma_{yy} &= -\rho g(H - y), \\ \sigma_{xy} &= a(H - y). \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

This field satisfies equilibrium (2.2.5), there is no discontinuity relevant for (2.2.6) and the stress vectors $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ for the outward normal $\mathbf{n}$ to the left, right and top boundaries of the domain are indeed equal to the applied force density defined in (2.2.1), (2.2.3) and (2.2.4), respectively. One shows further that the strength domain boundary is first reached in the bulk at the corner D. There, σ_{xx} is the only non-zero stress and the maximum value of the loading unknown a is then

$$a_B = \frac{2c_B}{L}\sqrt{k_P}, \quad \text{where} \quad k_P = \frac{1 + \sin \phi_B}{1 - \sin \phi_B} \quad (2.2.17)$$

is the passive Rankine's coefficient. The subscript B attached to the scalar a in (2.2.17) is to emphasize that failure occurs in the bulk.

To capture the transition between the two modes of failure (décollement or bulk), it is proposed to define the critical bulk cohesion c_B^* for which $a_D = a_B$. This equality provides

$$c_B^* = \frac{1}{2\sqrt{k_P}}(c_D \frac{L}{H} + \rho g L \tan \phi_D). \quad (2.2.18)$$

It is expected that the EEM will select a_B in (2.2.17) or a_D in (2.2.15) for ratios c_B/c_B^* smaller and greater than one, respectively.

2.2.3 The optimized solution

The implementation of the EEM is now validated by comparing our predictions with the analytical solution. The values selected for the geometrical and material parameters are summarized in Table 2.1 (length and stress are scaled by L and $\rho g H$, respectively, in all numerical simulations). The mesh is composed of 30×20 regular rectangles, each composed of four crossed triangles.

Definition	Dim.	Value
Length L	km	0.5
Height H	km	0.2
Mass density ρ	kg/m^3	2300.
Gravity acceleration g	m/s^2	10.
Friction angle in the bulk ϕ_B	deg	30.
Cohesion in the bulk c_B	Pa	variable
Friction angle of the décollement ϕ_D	deg	15.
Cohesion of the décollement c_D	Pa	0

TAB. 2.1: The definition, the dimension and the value selected for the parameters of Hafner's problem.

The force predicted by the EEM is presented in Table 2.2 (column 3) and compared to the analytical expression (2.2.2) (column 2) with a set to a_D (2.2.15) if $c_B > c_B^*$, and to a_B

(2.2.17) otherwise (here, $c_B^* = 0.8895$ MPa). The conclusion is that the force is computed with an accuracy of six significant digits, validating partly our development. Figure 2.3 presents the distance to the criterion α_D , defined in (2.2.10), distributed over the décollement, for various values of the ratio c_B/c_B^* . The distance is zero and the whole décollement is indeed fully activated for $c_B/c_B^* = 1.12$. The transition to a partly activated décollement occurs for a ratio of one with an accuracy of five significant digits. For ratios smaller than one, the whole décollement is then deactivated. The patch closest to activation is at the coordinate $x = 0.3L$, inset of Figure 2.3.

c_B/c_B^*	Tectonic force (theory, GN)	Tectonic force (EEM, GN)
0.562	0.806410	0.806410
0.787	0.944974	0.944974
0.999	1.075917	1.075917
1.124	1.076288	1.076288

TAB. 2.2: The analytical and EEM values of the tectonic force, for different values of the bulk cohesion c_B normalized with $c_B^* = 0.8895$ MPa. The two values agree up to six significant digits.

The predicted stress distributions are presented in Figure 2.4a and 2.4b for bulk failure and décollement activation, respectively.

Although not visible in our Figures, bulk failure occurs at a single point, which is the top left corner of the domain, as predicted by Hafner. The σ_{xx} stress (top row) has a vertical gradient which is linear at the right boundary because of the imposed condition $\sigma_{xx} = -\rho g(H - y)$. The vertical gradient is also positive along any vertical axis crossing the section. This gradient varies with the x -coordinate nearly linearly, as can be seen by following the yellow series, especially for case b. It corresponds then, approximately, to the elasticity solution presented in (2.2.16). The distribution of the blue contours (-5 MPa and smaller) shows however that the EEM selects a solution more complex than Hafner’s for both bulk and décollement failure. The vertical stress distribution (middle row) is driven by the gravity gradient, found analytically in (2.2.16), in the central part of the sheet for the two cases considered. However, this gradient is modified close to the left boundary. The shear stress (bottom row) shows also a mainly vertical gradient in the central region but is affected with a horizontal gradient, especially along the left boundary if the décollement is activated. The intensity of the shear stress is very different in the left column (bulk failure) from the one in the right column (décollement activated). Note that the shear stress is nearly uniform on the décollement if activated. This is due to the uniform vertical stress and the requirement to satisfy Coulomb criterion in (2.2.8) over the whole décollement.

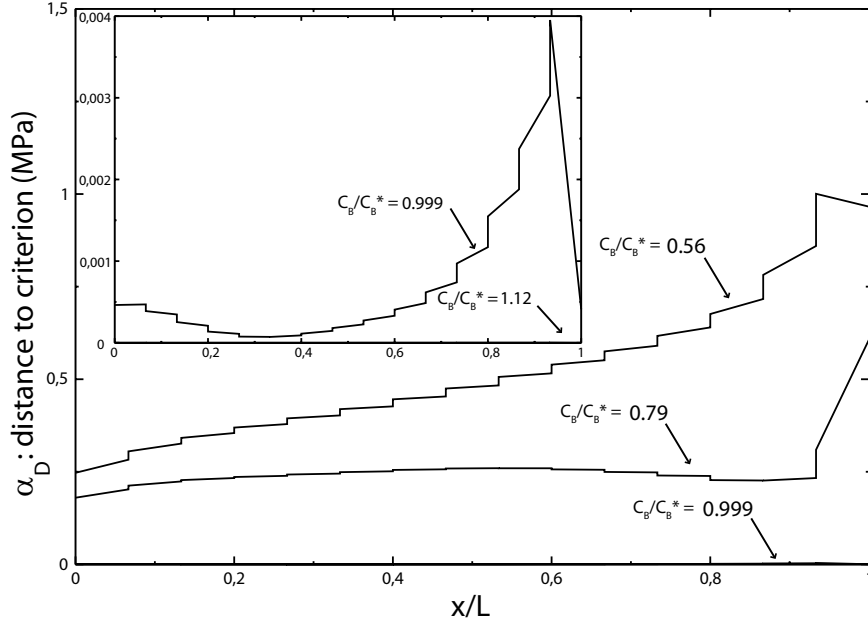


FIG. 2.3: Distance to the criterion α_D over the décollement for different values of the ratio c_B/c_B^* according to the EEM for Hafner's problem. Note that the décollement is nowhere activated for ratios less than one.

A few comments concerning the method are now in order. Discontinuities in shear stress are observed at plus and minus 31° , corresponding to the sides of the triangles in every cell. Some of those are artifacts of the method which are worth to be presented to remind the reader that the stress interpolation is simply linear over each element. There are also a few horizontal jumps in σ_{xx} (left top corner in the top left graph) and some vertical jumps in σ_{yy} (close to mid-depth of the left boundary of the two middle graphs). All those discontinuities are triggered by the EEM because the strong gradients are not resolved properly by the discretization. These results are a consequence of the discretization but not all discontinuities can be eliminated by refining the mesh and could be due to a discontinuity in the geometry or the loading, as in linear elasticity (Timoshenko and Goodier, 1934).

To conclude this section, the implementation of the EEM has been validated by comparing the predicted forces and stress distribution with an analytical solution. The method captures exactly the tectonic force required to slide the block over the décollement or to initiate failure in the bulk. In the former case, the stress distribution is very close to the solution proposed by Hafner (1951) although no assumptions concerning the elasticity of the bulk material are

2.3. Stress in fault-bend folds

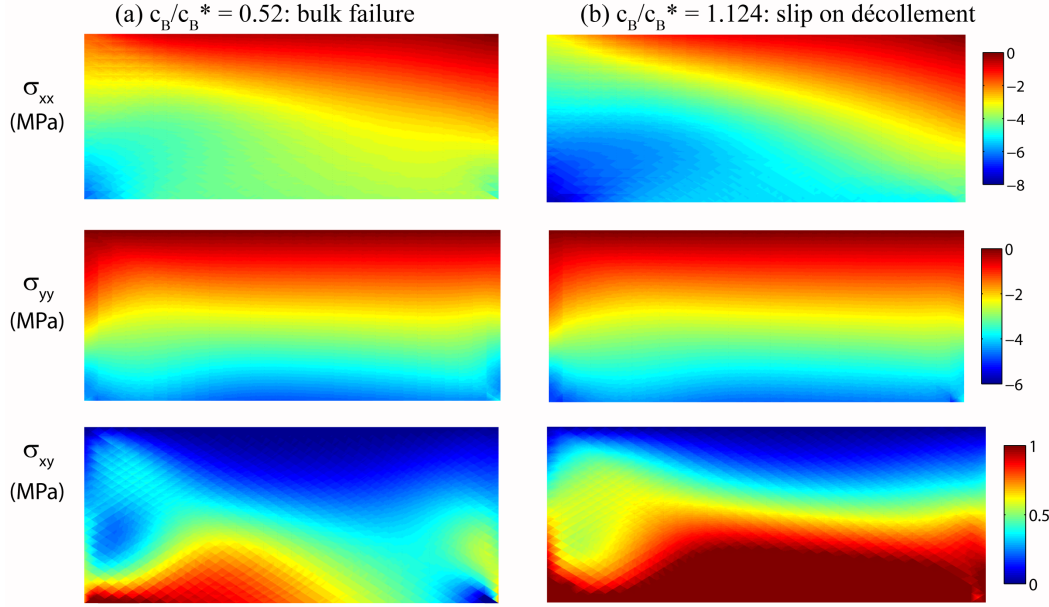


FIG. 2.4: The three stress components $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ predicted with the EEM for Hafner's problem, for two values of the bulk cohesion. In (a), failure occurs in the bulk at the top left corner. In (b), the whole décollement is activated. Only for $c_B = c_B^* = 0.8895$, does the two mechanisms get activated concurrently. Parameters are given in Table 2.1.

necessary for the EEM. The elasticity solution and the EEM solution are both statically admissible and lead to the same best lower bound. The existence of two solutions in stress for the same best lower bound is not surprising since there is no proof of uniqueness. Consequently, despite the plausible interpretation of the results presented in Figure 2.4, it cannot be claimed that there exists no other SA stress field leading to the same bound on the tectonic force. This lack of uniqueness is classical in limit analysis (Hill, 1950).

As a final remark, it should be noted that failure in the bulk and activation of the décollement are not two concomitant failure modes, except for $c_B = c_B^*$. Hafner (1951) assumed that the décollement was activated ($a = a_D$) and then used the stress field (2.2.16) to deduce the orientation of potential fractures in the bulk. This seems inconsistent since (i) $c_B = c_B^*$ is a restrictive case; (ii) onset of bulk failure is localized at the top left corner of the domain.

2.3 Stress in fault-bend folds

The objective is now to apply the EEM at different stages of the development of a fault-bend fold with or without erosion (Figure 2.5). The geometrical construction resulting in Figure 2.5b

is based on the ideas presented by Suppe (1983) and the exact method is commented at length by Cubas et al. (2008). It is not discussed here any further. We determine the optimum stress state at any stage of shortening δ , regardless of the history of the structure, considering the geometry as given. In particular, the upper flat, the décollement and the ramp are pre-defined and assumed to have specific properties. They are usually considered weaker than the bulk material. To the contrary, the back thrust is not introduced as a specific surface in the EEM simulations. One of our objectives is to analyze the transition between the hanging wall and the flat and to let the EEM define the nature of the back thrust. Note that the tectonic force is defined for the EEM by the distributed horizontal force T_x^d (Figure 2.5). The vertical linear gradient of T_x^d is the only unknown of the problem. The vertical component of the distributed force T_y^d is set to zero.

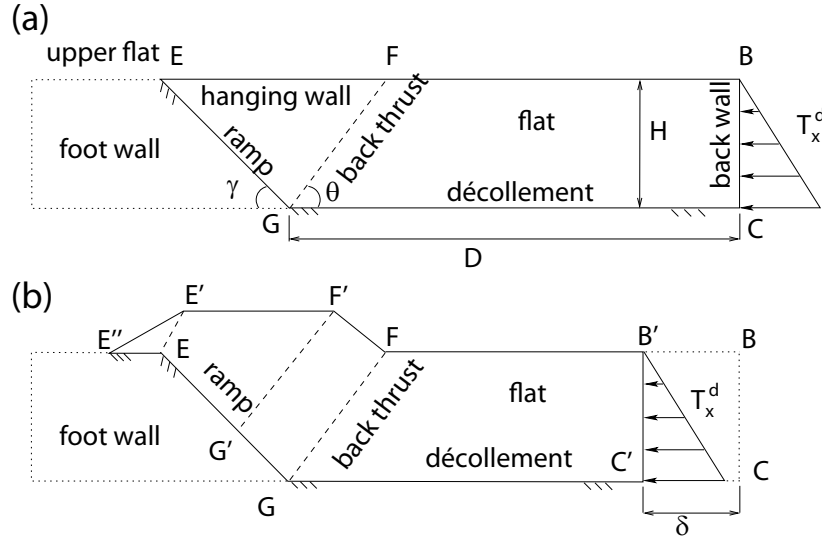


FIG. 2.5: Geometry and terminology of the fault-bend fold. The compression along the back wall results in slip of the flat on the décollement, by δ towards the left. Material points crossing the back thrust (dip θ) are transported parallel to the ramp (dip γ). When crossing the initial surface (EF), they are eroded (a), or build up relief (b). The tip of the hanging wall ($E''E'E$) is projected on the upper flat (EE'') assuming conservation of mass (i.e., area) and slips along it.

Material and geometrical parameters considered for those two examples are summarized in Table 4.1. Note that dimensionless length and stress are scaled by D and $\rho g D$, respectively (all simulations are based on dimensionless quantities identified with a superposed tilde, e.g., $\tilde{H} = H/D$). We first consider the foot wall as external to the studied domain. A comparison with the finite-difference results of González et al. (2008) is also proposed. In the last subsection,

2.3. Stress in fault-bend folds

the stress history in the foot wall and the stress trajectories in the flat and the hanging wall are presented.

Definition	Dim.	Value
Length D	km	4.25
Height H	km	1.
Mass density ρ	kg/m^3	2200.
Gravity acceleration g	m/s^2	9.81
Ramp dip γ	deg	30.
Bulk friction angle ϕ_B	deg	30.
Bulk cohesion c_B	MPa	1.
Friction angle of décollement ϕ_D	deg	5.
Cohesion of décollement c_D	MPa	0
Friction angle of ramp ϕ_R	deg	variable
Cohesion of ramp c_R	MPa	0
Friction angle of upper flat $\phi_U = \phi_R$	deg	variable
Cohesion of upper flat $c_U = c_R$	MPa	0

TAB. 2.3: The definition, the dimension and the value selected for the parameters of the fault-bend fold.

2.3.1 Folding without relief build up

The length of the flat is set to D in this example, corresponding to zero shortening ($\delta = 0$). The mesh is presented in Figure 2.14 of the electronic supplement and is composed of 7530 nodes and 9920 elements.

Maps of the distance to failure for different values of the friction angle ϕ_R over the ramp are presented in Figure 2.6. Regions of dark blue are exactly at failure. Two regions of failure in the bulk are found for $\phi_R = 5^\circ, 15^\circ$ and 20° , for which the whole décollement and the ramp are activated (see blue segments). The first region is the transition between the hanging wall and the flat, the back thrust. We observe that it is not a sharp discontinuity but a narrow fan. This shape is of course mesh sensitive but persists as the mesh is refined so that several elements are present within the blue region. The second main region of failure for $\phi_R = 5^\circ, 15^\circ$ and 20° is in the hanging wall. It is of smaller extent for larger ϕ_R . This region is, as it will be seen next, where the σ_{xx} stress component is close to zero. It thus corresponds to a region where failure

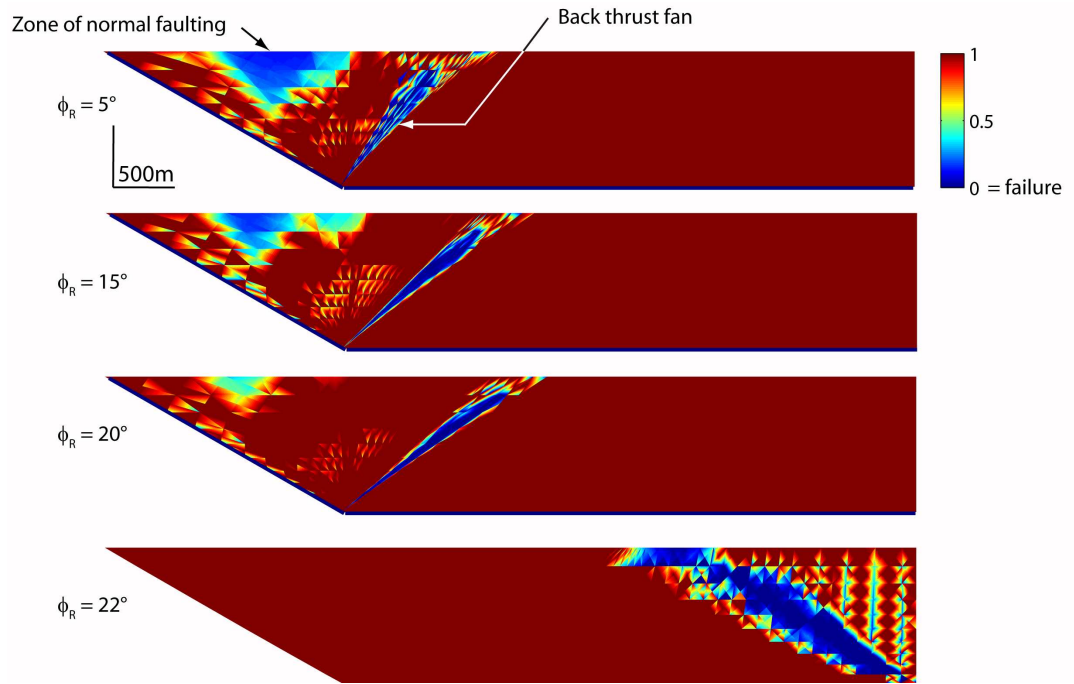


FIG. 2.6: Failure modes for the fault-bend fold without relief build up, for different values of the friction angle over the ramp ϕ_R , as revealed by the scaled distance to Coulomb's criterion π_B , defined in Figure 2.2 and equation (2.2.12). The blue lines along the ramp and décollement mark their activation.

2.3. Stress in fault-bend folds

is by normal faulting. Such failure mode was predicted by Yin (1993) using Hafner stress-type of construction. For $\phi_R = 22^\circ$ this region of extension does not exist. Furthermore, the ramp and the décollement are not activated and a new failure region occurs at the back, dipping at approximately 30° . This orientation is consistent with the $\pi/4 - \phi_B/2$ angle expected for failure under compression with $\phi_B = 30^\circ$. It is thus predicted that a new ramp is formed at the back of the flat, at the contact to the back wall. This transition, between $\phi_R = 20^\circ$ and 22° , is of course sensitive to the décollement friction angle set to 5° . The transition occurs for ϕ_R less than 15° if ϕ_D is set to 10° , as can be seen in Figure 2.15 in the electronic supplement.

The dips of the fans for $\phi_R = 5^\circ, 15^\circ$ and 20° , decrease with the ramp friction. This was predicted by Maillot and Leroy (2003) and in Cubas et al. (2008). A quantitative comparison is proposed in Figure 2.7b where it is seen that the difference between the EEM predictions and those of the kinematics approach are at most of 3° .

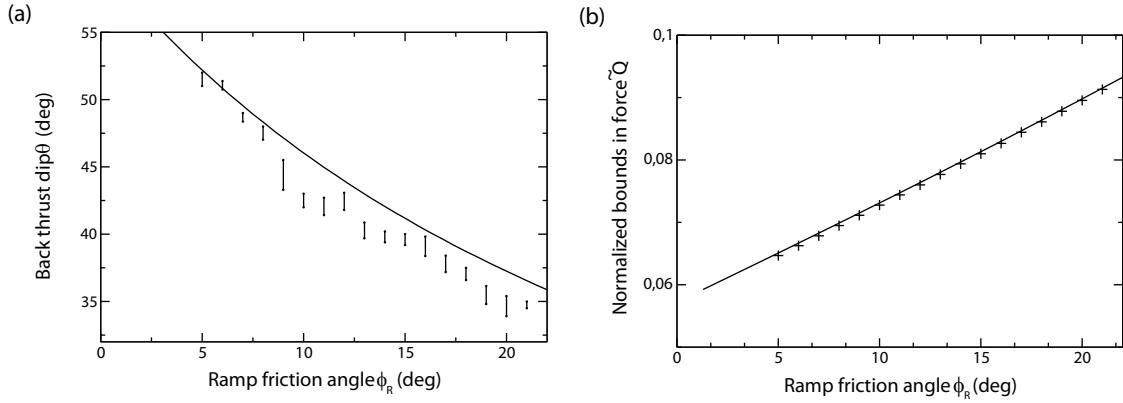


FIG. 2.7: Comparison of the tectonic force (a) and the dip of the back thrust (fan or discontinuity) (b) between the EEM (crosses) and the kinematics approach (continuous curves). The estimates of the average fan dip obtained with the EEM are indicated with error bars.

The EEM solution is presented there with an error bar since defining the central line through the fan is not accurate. This variation of the back thrust dip with the ramp friction angle was validated in the laboratory with sand box experiments (Maillot and Koyi, 2006) and the relevance of the predictions to interpret field observations further discussed by Koyi and Maillot (2007). The comparison of our results with the predictions of the kinematics approach of Cubas et al. (2008), central to the validation of our implementation of the EEM, is completed by presenting the predicted tectonic forces, normalized by $\rho g D^2$, as a function of the friction angle

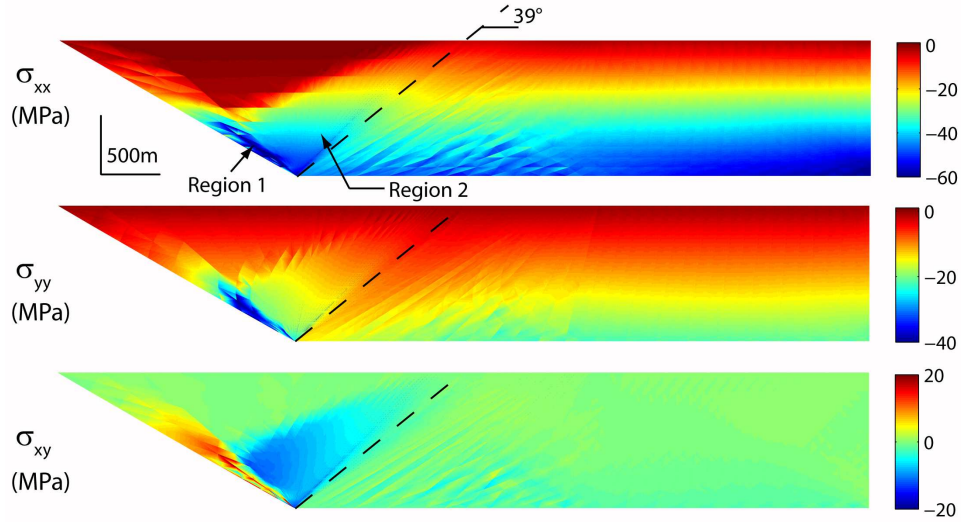


FIG. 2.8: Stress distribution over the hanging wall and the flat for the fully eroded fault-bend fold (unit : MPa). The ramp friction angle is $\phi_R = 15^\circ$. The dashed line shows the central direction of the back thrust defined by the failure fan in Figure 2.6.

over the ramp in Figure 2.7a. The upper bound of the kinematics approach differs from the lower bound of the EEM by less than 1%. Therefore, the exact tectonic force is determined by the limit analysis to within one per cent.

The stress distribution over the fault-bend fold without relief build up is presented in Figure 2.8. The largest stress values in highly localized regions are cut-off from the ranges of the colour bars. The σ_{xx} stress gradient with depth is linear at the back wall, consistent with the applied boundary conditions.

It is approximately three times the lithostatic gradient (21.6 MPa/km). In the hanging wall, the horizontal stress is much larger close to the base of the ramp. There are two regions of stress concentration. Region 1 has the shape of a thin lobe emanating from the ramp base and oriented at, approximately, 5° from the ramp. Region 2 is wider and terminates at the boundary of the back thrust. Another interesting feature of the horizontal stress in the hanging wall is that it is close to zero in a large triangular region (dark red) to the left of the root of the ramp and reaching the top surface. This is the region close to failure in extension discussed above. The vertical stress, in the second graph in Figure 2.8, has the expected lithostatic gradient over most of the flat. In the hanging wall, the maximum vertical stress is nearly twice as large as the lithostatic stress. The larger values are found again in the same two regions of concentration. The shear stress, third graph in Figure 2.8, is basically zero in most of the back stop in view of the low friction angle over the décollement. The stress state is thus approximately Andersonian

in that region (horizontal and vertical directions are principal stress directions). The shear stress has strong gradients in the hanging wall which are positioned again within the two regions of concentration defined for σ_{xx} . The sign of the stress in those regions are consistent with the direction of shear expected in the back thrust and along the ramp. The lobe of stress concentration dipping at 5° from the ramp indicate a potential secondary ramp, conjugate to the back thrust. This interpretation is confirmed by setting the ramp dip at 35° , exactly in the direction of this lobe. The failure mode (Figure 2.16 in electronic supplement) is then composed solely of the narrow fan defining the back thrust. The lobe oriented off the original ramp is not present. This remark is part of the wider problem on the activation of existing ramps versus creation of new thrusts, discussed by Maillot et al. (2007) analytically and experimentally. Here, the lobes are another expression of the capacity of the EEM to detect new potential thrusting.

As a final remark, it should be mentioned that the stress analysis above points to a large mean stress P (defined as $(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$ and interpreted from the two first graphs of Figure 2.8) close to the ramp and in the back thrust, and to low values in the hanging wall above the back thrust. Consequently, one should observe fluid flows from the flat towards the back thrust and within the hanging wall away from the two regions of stress concentrations. These flows, not accounted for in our modeling, could have consequences on the material rheology.

2.3.2 Comparison with finite-difference predictions

This first example of folding gives us the opportunity to compare the merits of the EEM with respect to the finite-difference method. This comparison is based on the study of Gonzàles et al. (2008) of the tensile discontinuities observed in the hanging wall of the Chuculay Fault System, northern Chile. Their numerical simulations are based on a prototype which is rather close to the one considered for this first fold example. The ramp is pre-defined as a weak zone of finite thickness (500 m) dipping at 50° and ours is discrete with a dip of 30° . The constitutive relations are similar in the two contributions since Coulomb materials are assumed although the zero dilatancy and the elasticity considered by Gonzàles et al. (2008) are not necessary for the EEM. We have kept our flat thickness of 1 km whereas Gonzàles et al. (2008) considered 3 and 6 km. We checked that the scaling from 1 to 3 km leads to the scaling of the extent of the zone of tensile failure in the same ratio. No relief is considered here and its consequence will be however discussed as well in the next subsection. Four comparisons are now considered with simulations M1, M5, M3 and M4 of Gonzàles et al. (2008), referred to as the comparison paper.

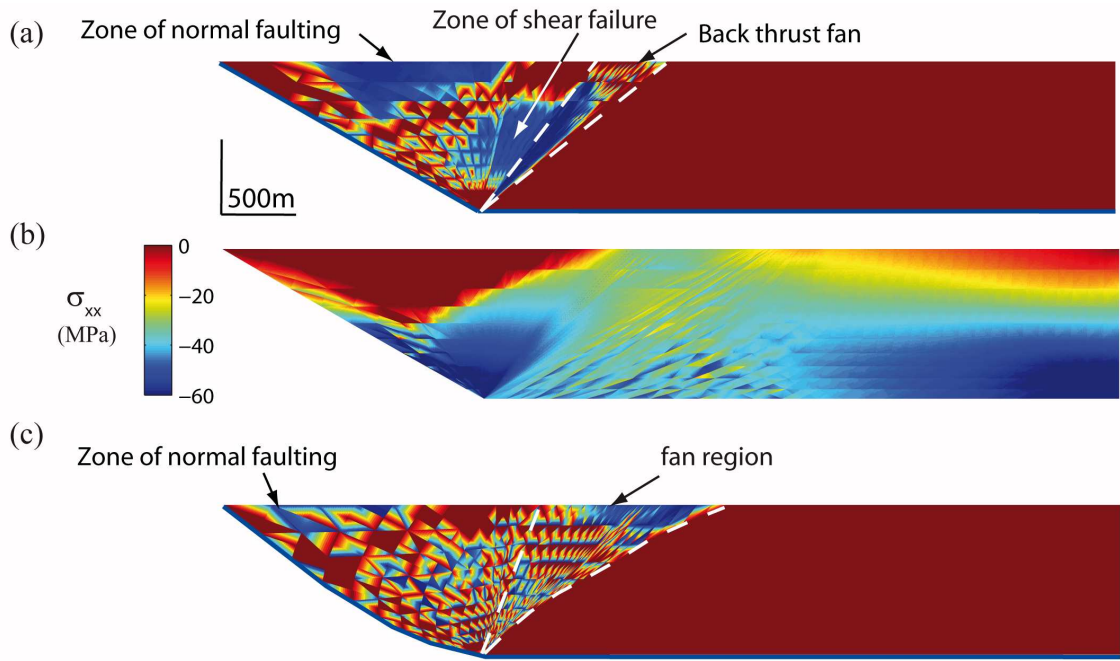


FIG. 2.9: The distribution of the scaled distance to the criterion a) and the distribution of σ_{xx} b) for a bulk cohesion c_B of 10 MPa. The distribution of the failure region is less localized and the fan boundary with the flat is also curvy in the presence of a curved ramp, for a bulk cohesion c_B of 1 MPa, c).

The results of their M1 simulation is comparable to the results in Figure 2.6 for $\phi_R = 5^\circ$ and $\phi_R = 15^\circ$ since their ϕ_R is set to 10° . The shape of the zone of low equivalent shear stress (their Figure 12c) does compare to our distribution of the stress in the hanging wall. The strain localization of their back thrust is not sufficiently resolved to be compared to the fan predicted here. There is however a major difference between these two sets of results : our ramp dips at 30° and their at 50° . It was shown above that increasing the ramp dip from 30° to 35° leads to more compression in the hanging wall and was sufficient to suppress the tensile zone of fracture. A dip of 50° produces the same results. Consequently, only the main difference between our prototype and simulation M1, the presence of a relief in the latter case, can explain the absence of tensile failure zone. It appears from Figure 12e of the comparison paper that the depth of the extension zone is approximately equal to the maximum topography (277 m). This zone is exactly next to the shear zone. In the absence of relief, it is believed that no extension would have been predicted by Gonzàles et al. (2008). The second comparison is with their M5 simulation in which c_B is set to 10 MPa (their Figure 16b). The same conditions have been considered to produce Figure 2.9a and b for a flat thickness of 1 km and a ramp dip of 30° . We still have a reasonable zone of normal faulting in view of the scaled distance to the criterion and of the distribution of σ_{xx} . Note that the σ_{xx} is much more compressive then in Figure 2.8 in the hanging wall close to the back thrust fan and across this fan, close to the surface. Furthermore, a new region of shear failure is clearly seen in Figure 2.9a next to the back thrust fan. These results are different from those of Gonzàles et al. (2008) who noticed a reduction in the extent of the normal failure zone, certainly due to the relief again. The third comparison is with their M3 simulation (their Figure 15b) which introduces a curvature in the ramp. The distribution of the distance to the criterion presented in Figure 2.9c identifies a small region of normal faulting also present in the comparison paper. Moreover, the back thrust fan is much wider in the presence of the curved ramp suggesting that the strain does not localize in that instance. Note that the boundary of the fan with the flat is also curvy. The same conclusions are reached by Gonzàles et al. (2008). The fourth comparison is with the M4 simulation for which ϕ_R is set to 25° . They observe no normal faulting within the hanging wall and we claim that their results correspond to the case presented in our Figure 2.6 for $\phi_R = 22^\circ$. The décollement and the pre-defined ramp are not activated and the deformation should take place close to the back wall.

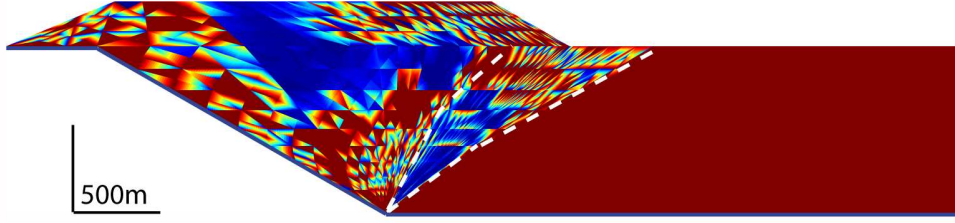


FIG. 2.10: Failure mode in the fault-bend fold with relief build up, revealed by the distribution of the scaled distance to the Coulomb's criterion π_B (2.2.12). The friction angle over the ramp is $\phi_R = 5^\circ$ and the shortening $\delta = 750m$. The color code is the same as in Figure 2.6 : dark blue regions tend to reach failure. The blue segments mark the activation of the interfaces.

2.3.3 Folding with relief build up

In this second example, relief builds up, Figure 2.5b. The shape of the relief was constructed for shortenings δ of 400 and 750 m, with the kinematics approach (Cubas et al., 2008) using the parameters in Table 4.1, with $\phi_R = 10^\circ$. We will determine the stress distribution within the fold, first for $\delta = 750$ m and $\phi_R = 5^\circ$, then for $\delta = 400$ m and $\phi_R = 7^\circ$. In the second case, we will also determine the stress distribution in the foot wall of the fold. The reason for choosing different values of the ramp friction angle will be explained at the end of the section. The mesh is composed to 8586 nodes and 11322 elements, as shown in Figure 2.18 of the electronic supplement.

The failure mode is presented in Figure 2.10 for $\delta = 750$ m. The two major regions of failure found in the absence of relief are still present. The first is the back thrust which has the shape of a fan wider than in the first example. Failure occurs approximately uniformly in the lower part of the fan close to the root to the ramp. In the upper part, failure is localized into a series of oblique rays that could indicate distributed faulting. Furthermore, the fan rotates from the lower to the upper part towards lesser dips. It is approximately 55° in the lower part, consistent with the 53° found in Figure 2.6 and 2.7b. It means that close to the root of the ramp, the influence of the relief is minor. To the contrary, in the upper part of the structure, failure is influenced by the relief. The second main region of failure is in the hanging wall. It corresponds to the zone of extension described for the first example and it now extends to the relief. Failure in extension occurs over more than 50 % of the hanging wall thickness measured from the free top surface to the root of the ramp. This distribution of failure has to be complemented, for larger ϕ_R 's (7° is considered in Figure 2.19 of the electronic supplement). In that case, near half of the flat, next to the back thrust, is also close to failure.

2.3. Stress in fault-bend folds

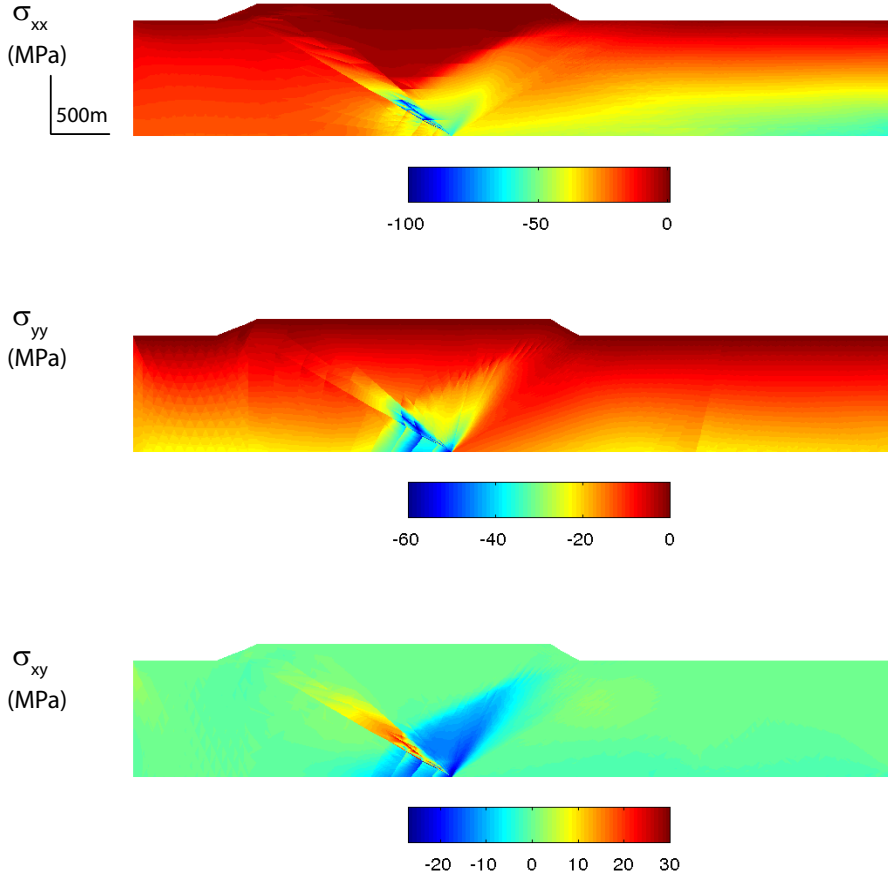


FIG. 2.11: Stress distribution over the whole fold including the foot wall (unit : MPa), for $\phi_R = 7^\circ$ and a shortening $\delta = 400$ m.

These results differ from those of Gonzàles et al. (2008) in at least two ways. First, the depth of the tensile fracture zone is deeper here because of the low dip of our ramp. Second, the bending of the topographic surface in the comparison paper is due essentially to the absence of thrusting over the upper flat because of the continuity assumption implied by the numerical scheme. The simplified geometrical construction of Cubas et al. (2008) has been helpful in relaxing this constraint and provides a partial collapse of the hanging wall over of the upper flat. The region of normal faulting is then found further away from the ramp closer to the point on the topography which is on top on the root of the ramp.

The last example is for a shortening $\delta = 400m$ and accounting for the foot wall. The stress distribution within the flat (Figure 2.11) is similar to the one obtained in the absence of relief, Figure 2.8. Note that the maxima are larger from those discussed earlier although the friction

on the ramp is less, because of the highly localized stress within the lobe pending at a few degrees from the ramp. Four comments are in order regarding the foot wall. First, there is no failure there. Second, the horizontal stress has a smaller gradient with depth than in the flat region. This decrease of the horizontal forces is explained by the overall equilibrium of the structure and the presence of the resisting shear over the whole décollement. Third, the vertical stress gradient in the foot wall is controlled by gravity and thus not affected by the ramp. The shear stress is in general small compared to the magnitude of the two other stresses so that Andersonian conditions prevail, approximately. Fourth, important stress concentrations are observed close to the root of the ramp despite the absence of any failure.

The EEM also predicts the maximum relief attainable prior to the transfer of activity from the pre-defined ramp to the back wall where the emergence of a new ramp takes place. This transfer is easily explained using the analogy with the influence of the ramp friction angle in the absence of relief : there is a maximum friction of 21° at which the proposed ramp is abandoned in favor of the new ramp, last graph in Figure 2.6. Similarly, with gradual relief build up, after a shortening of less than 750 m for $\phi_R = 10^\circ$, for example, the proposed ramp is abandoned and the new thrust initiates in the flat, at the back wall boundary. Since we were interested by the stress distribution around the fold, we set low enough ϕ_R 's.

2.3.4 Stress histories and trajectories

The computations reported so far are history independent. A chronology is only implicit through the amount of shortening imposed at the back wall. This succession of independent results is now used to study stress histories, thus shedding light on the evolution of the stress state during the kinematic sequence of thrusting determined in Cubas et al. (2008).

We first examine stress histories at fixed positions in the foot wall. The dimensionless equivalent shear and mean stresses (2.2.9), are presented as functions of the shortening at five locations indicated by solid dots (Figure 2.12). Point 5 is approximately at 100 m from the ramp and this distance decreases linearly with depth to be only of 10 m for point 1. The depth of points 1 to 5 are approximately 850, 650, 450, 250, and 50 m. The gradient in the equivalent shear stress is strong close to the root of the ramp with a ratio of four, approximately between the stress at points 1 and 2. The relief build up does not change significantly this ratio and the important parameter is thus the distance to the root of the ramp. The mean stress is also strongly dependent on this distance but its magnitude increases linearly with the shortening because of the added weight of the relief acting on the ramp. Note that Point 5 exhibits a larger increase in σ_e with shortening probably resulting from the sliding of the growing forelimb above

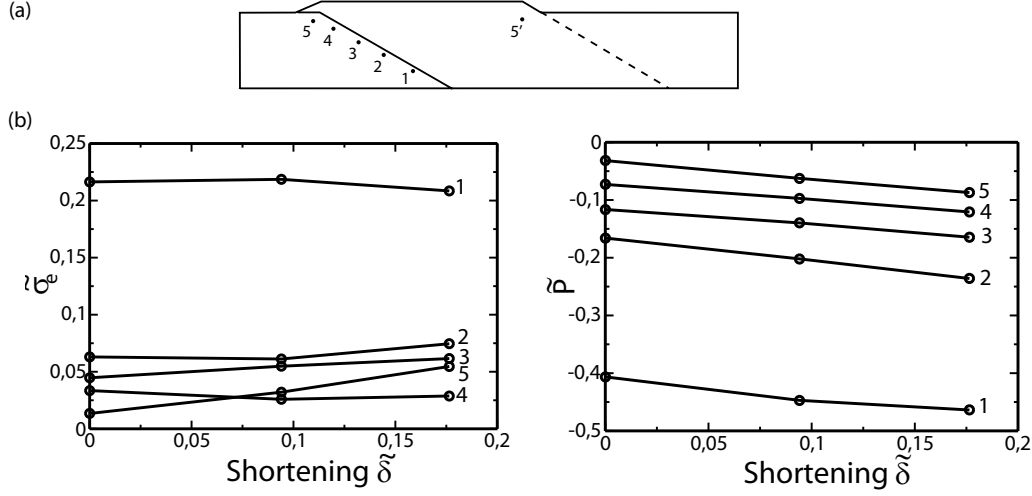


FIG. 2.12: The history of the dimensionless, equivalent shear stress $\tilde{\sigma}_e$ and mean stress $\tilde{P}$ in (b) at five different locations in the foot wall, defined in (a).

it. One could now imagine the evolution of the stress during a sequence of normal thrusting where the dashed line is the abandoned ramp and the new ramp the parallel, solid line, Figure (2.12a). Point 5' would first undergo the stresses just described for Point 5, followed by the extensional regime in the back wall, Figure(2.10).

Next, we examine the stress along material trajectories (ξ axis in Figure 2.13a). In view of the minor influence of the relief, we concentrate on the fold with erosion. The trajectories provide the stress histories of a convected material point. The point initially at the back wall ($\xi = 0$) is translated parallel to the décollement and changes direction at the crossing of the back thrust, idealized as a sharp discontinuity, to move up parallel to the ramp. It reaches the surface between $\xi = 4.7$ and 5.7 km, depending on the depth η of the trajectory, and is eroded away. The equivalent shear and mean stresses along those trajectories are presented in Figure 2.13b. The trajectory passes through various elements of the mesh and the stress at the node closest to the ξ -axis has been used to construct these two graphs, explaining the oscillations. Three depths are considered corresponding to 0.5, 0.75 and 0.85 times the height H . In most of the flat, the magnitude of the equivalent shear and mean stress decreases before arriving within the vicinity of the back thrust. Within the back thrust ($\xi \approx 4$ km), the equivalent shear stress first increases to a value close to the one found at the back wall before sustaining a sharp drop. The rest of the decrease during the uplift in the hanging wall is then marginal compared to that drop. The mean stress displays the same tendencies : the decrease in magnitude registered over the flat accelerates when arriving close to the back thrust. Sharp, opposite gradients of the

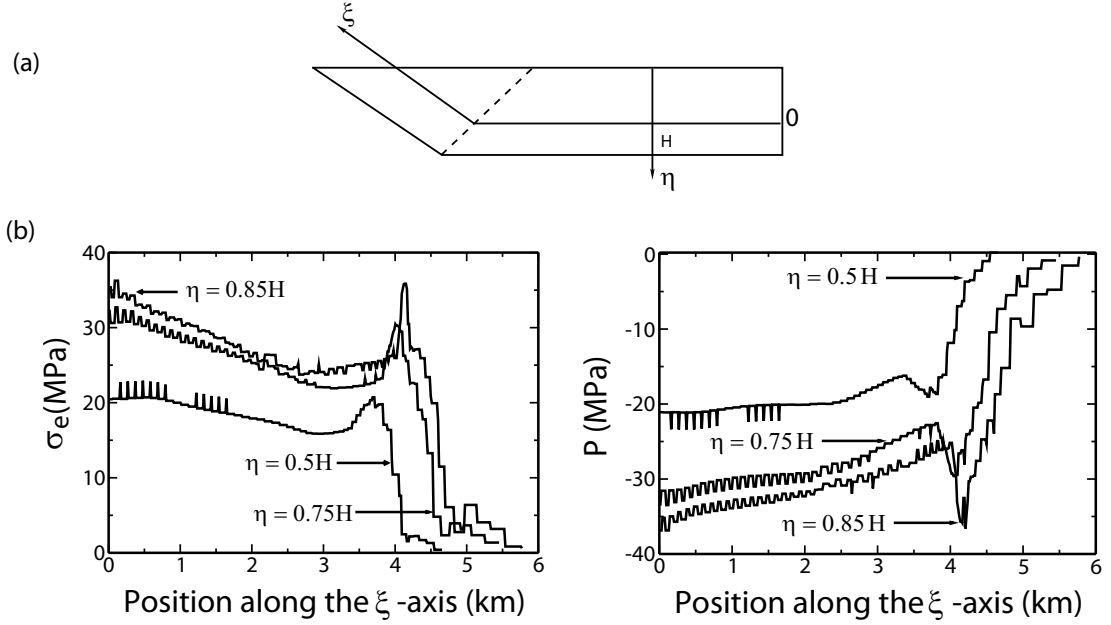


FIG. 2.13: The mean stress P and the equivalent shear stress σ_e (unit : MPa) in (b), along the trajectory ξ (unit : km) at depth η in the back stop, defined in (a), for $\phi_R = 15^\circ$.

magnitude are found inside the back thrust zone, followed by a linear decrease to zero towards the surface.

2.4 Conclusion

The objective of this paper was to demonstrate that the Equilibrium Element Method (EEM) provides estimates of the stress distribution, the tectonic force, the shape and the position of the failure mechanisms at any given stage in the development of a geological structure. It requires only the spatial distribution of the rock strength, defined in this paper by the Coulomb criterion, without any further assumptions on the rheology.

The EEM implementation is first validated with Hafner's problem. The tectonic force predicted with the EEM meets the analytical solution up to machine precision. Failure occurs by décollement slip or bulk failure, those two modes being concomitant only exceptionally. Consequently, we question the derivation of the local fracture orientation in the bulk from the stress state necessary to activate the décollement, as proposed by Hafner (1951). Indeed, the EEM predicts rather different stress states for bulk failure versus basal slip.

The EEM is then applied to two fault-bend folds, the first without relief build up and the second accounting for the formation of a relief. It predicts the formation of a back thrust in the form of a narrow fan rooted at the base of the ramp. The fan dip is controlled by the ramp and bulk frictions as predicted in Cubas et al. (2008), and varies with depth in the presence of a relief and the curvature of the ramp. For certain ramp friction and dip, a zone of normal faulting appears at the surface in the hanging wall. These results are partly in agreement with and provide a new interpretation of some of the finite-difference predictions of Gonzàles et al. (2008), who considered a complete elastic-plastic constitutive relation. No failure is detected in the foot wall for the two folds and for the range of parameters selected.

The optimum stress state for the two folds is mostly controlled by the concentration originating from the root of the ramp on the décollement and the presence of the back thrust. The in-plane mean stress and the equivalent shear stress sustain sharp variations prior to the entrance and at the exit of the back thrust, as one moves from the flat to the hanging wall.

Applied to Nankai accretionary wedge (in the electronic supplement), the EEM reveals the complexity of the potential failure mechanism, composed of two parallel back thrusts or two sub-parallel ramps. Its high sensitivity to variations in the décollement friction angle and to the details of the surface topography are consistent with a wedge close to criticality, as defined by Dahlen (1984) and Lehner (1986). It is also shown that the position of the currently active ramp cannot be selected as a failure mechanism with the assumption of uniform properties suggesting, as in Cubas et al. (2008), that the active ramp is weaker than the bulk material.

The EEM is complementary to the kinematics approach of limit analysis, central to Cubas et al. (2008), since the two methods provide respectively the largest lower bound and the least upper bound to the exact unknown tectonic force. The EEM, because of the systematic spatial discretization, leads to a large number of degrees of freedom whereas the kinematics approach is often restrained to a small number of degrees of freedom. This application of the EEM thus provides an error estimate on the tectonic force and validates the selection of the failure mechanisms done with the kinematics approach. The extension of limit analysis to evolving geological structures could be conducted asymmetrically : the kinematics approach applied to thrusting sequences (Cubas et al., 2008), is central to control the evolution problem whereas the statics approach, at the basis of the EEM, is only used to define the stress field at any stage of the fold development and to check the error in tectonic force. Also, since no rheology is used apart from the Coulomb criterion, the EEM cannot predict the geometry at failure for materials exhibiting large elastic or viscous deformation prior to failure.

The results of the EEM have merits on their own and two potential directions of future developments are now discussed. First, the computations presented in this contribution show clearly that there is a gradient in the mean stress in the presence of a ramp close to the back thrust. This gradient may be the driving force for fluid flow. Such fluid flows could be studied in the laboratory with appropriately scaled analogue materials (Mourgues and Cobbold, 2003) or could also be predicted by numerical means. In both instances, the fluid pressure distribution could be accounted for in the EEM by recourse to strength limit criteria based on effective stress measures. The combined approach, fluid flow and EEM, should be applied to accretionary wedges where the influence of the fluids on the deformation has been recognized (Le Pichon et al., 1993) to understand fault orientations and failure mechanisms. The second direction of developments concerns the study of the inter-seismic period. The EEM could provide the stress distribution during the re-strengthening of the ruptured faults. In particular, it could provide the stress distribution between en échelon rupture surfaces, as in Landers area, California (Peltzer et al., 1996; Olsen et al., 1997), avoiding the stress singularities typically predicted with the assumption of linear elasticity. Similarly, in fold-and-thrust belts with multiple fault systems, it is hoped that the EEM could predict the most likely fault to be active.

In summary, the EEM should provide new means to study stress distributions under static conditions, with a limited number of assumptions on the material properties, with a vast domain of applications, ranging from folding development in fold-and-thrust belts, accretionary wedges, sedimentary basins, to the inter-seismic fault recovery.

Acknowledgments : This paper benefited at different stages of its submission from comments of Dr. S. Buiter, Geological Survey of Norway, Trondheim, of Prof. M. Cooke, University of Massachusetts, Amherst and of an anonymous reviewer. They are all sincerely thanked for their advises which helped us in preparing the final version.

2.5 Electronic supplement

This electronic supplement contains EEM results which complement those presented in the main text. The first and the second sections are concerned with the fault-bend fold without and with relief build up, respectively. The third section is devoted to the application to Nankai accretionary wedge. The fourth section provides further information on the implementation of the EEM.

2.5.1 Folding without relief build up

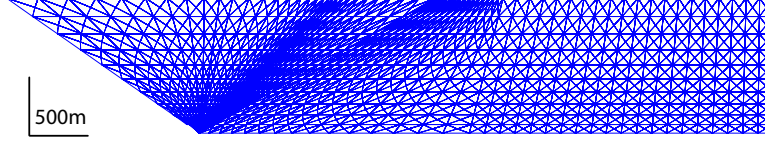


FIG. 2.14: The mesh used for the EEM simulations of the fault-bend fold without relief build up.

The mesh proposed to study the fault-bend fold without relief build up is presented in Figure 2.14. It is composed of 7530 nodes and 9920 elements. The mesh is designed to capture the stress concentration close to the root of the ramp as well as the failure mode in the back thrust region.

Results are based on the same geometrical parameters and material properties as given in Table 4.1 (main text) with $\phi_R = 15^\circ$, except for the ramp dip set to 35° or the original 30° . This angle was modified to test the interpretation done in the main text that the region of stress concentration dipping at 35° in the hanging wall is potentially a new ramp direction in the pristine material.



FIG. 2.15: The pre-defined ramp is not used for the fault-bend fold without relief build up for $\phi_R = 15^\circ$, as revealed by the scaled distance to the Coulomb's criterion ($\phi_D = 10^\circ, \gamma = 30^\circ$).

The first objective is to test the décollement friction angle ϕ_D set to 5° in the main text and to $\phi_D = 10^\circ$ here. The ramp dip is $\gamma = 30^\circ$ in the two analyses. The failure mode presented in Figure 2.15 shows that the décollement and the ramp are not activated and that a new ramp is created, rooting at the back wall. The transition from ramp activation to failure to the back for $\phi_D = 10^\circ$ occurs for ϕ_R less than 15° whereas the same transition was set to $\phi_R = 21^\circ$ for $\phi_D = 5^\circ$ in the main text.

The second objective is to test the influence of the ramp dip on the stress concentration regions and the failure regions in the hanging wall. The ramp dip is now $\gamma = 35^\circ$ and ϕ_R still



FIG. 2.16: The failure mode in the fault-bend fold without relief build up with a ramp dipping at $\gamma = 35^\circ$, $\phi_R = 15^\circ$, defined by the scaled distance to the criterion. The blue line marks the activation of the ramp and the décollement. Note the absence of any failure other than the back thrust in the bulk.

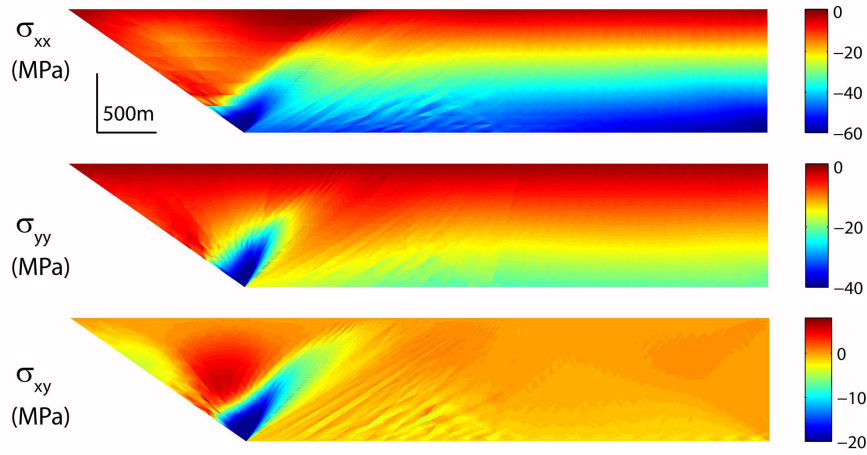


FIG. 2.17: The three stress components (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy}) for the fault-bend fold without relief build up. The ramp dip is 35° and its friction angle ϕ_R set to 15° .

set to 15° , with $\phi_D = 5^\circ$. The failure mode presented in Figure 2.16 shows that there is a single region of failure corresponding to the back thrust if the dip of the ramp is selected to match the direction of stress concentration found in the main text for $\gamma = 30^\circ$. The region of normal faulting in the hanging wall observed in the main text (Figure 2.7) is not found in this simulation.

The corresponding stress distributions are presented in Figure 2.17. The main difference between Figures 2.17 and 2.7 (main text) is that in the former there is no stress concentration in the hanging wall dipping at a few degrees from the ramp. This difference is used to claim that the concentration lobe found in Figure 2.9 defines a potential ramp direction in the pristine material.

2.5.2 Folding with relief build up.

One of the mesh used to study the fault-bend fold with relief build up is presented in Figure 2.18. It is composed of 8586 nodes and 11322 elements.

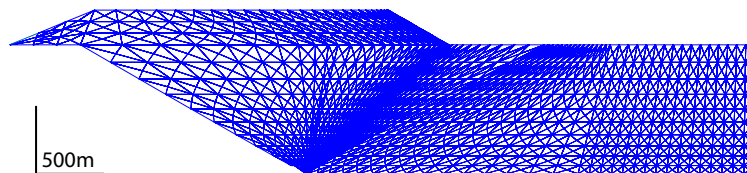


FIG. 2.18: The mesh for the EEM simulations of the fault-bend fold with relief build up ($\delta = 750$ m).

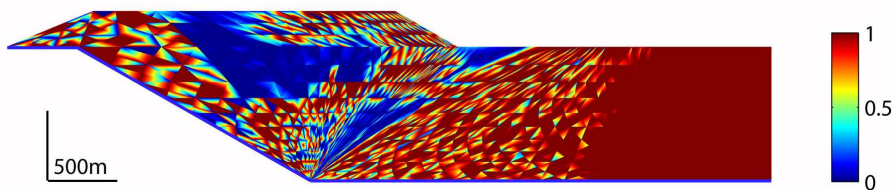


FIG. 2.19: The failure mode extends also to the flat, for the fault-bend fold with relief build up, with $\phi_R = 7^\circ$ ($\delta = 750$ m).

It is shown in Figure 2.19 that the failure mode is sensitive to the friction angle over the ramp. For $\phi_R = 7^\circ$, half of the flat is then close to failure. This is not the case for $\phi_R = 5^\circ$, results presented in the main text, Figure 2.10.

2.5.3 Application to Nankai accretionary wedge

The example selected is in the toe of Nankai accretionary wedge, Southeast coast of Japan. The 2D structure has been interpreted by Moore et al. (1991) from the seismic reflection line NT62-8. Morgan and Karig (1995) have convincing arguments that a transition of activity is taking place between a well formed thrust, and a new incipient thrust (respectively, thick line outcropping at point 2, and dashed line outcropping at point 3 in Figure 2.20a). The two parallel curved lines, cut by the first two thrusts, mark of a region of facies transition.

The EEM provides the stress state within the prism. Important simplifications with respect to the real structure are proposed, for the sake of simplicity, for this first application of the EEM to a natural example. The material is assumed of uniform density ρ and strength (ϕ_B, c_B) , over a décollement of uniform strength (ϕ_D, c_D) . Therefore, lithologic variations and gradients in compaction are disregarded, as well as strength heterogeneities associated to existing ramps. The prism appears as a pristine uniform material above a dipping planar décollement with uniform friction. The only heterogeneity is the topography that we discretized from the profile of Moore et al. (1991). Values assigned to the material and to the geometrical parameters are found in Table 2.4. The central question is whether it is possible to detect the active and incipient thrusts despite our strong simplifications. In answering this question, we will consider various strengths of the décollement and the bulk.

Discretization of the studied domain is illustrated in Figure 2.21. The stress boundary conditions at the back of the mesh are of the same type as those considered for Hafner's problem : the horizontal (parallel to the décollement) and the vertical (perpendicular to the décollement) stresses are zero at the surface and have linear gradients with depth which are the two problem unknowns. No stress boundary conditions is specified at the front of the prism.

Definition	Dim.	Value
Mass density ρ	kg/m^3	2200.
Gravity acceleration g	m/s^2	9.81
Friction angle in the bulk ϕ_B	deg	26 to 32
Cohesion in the bulk c_B	MPa	1.
Friction angle of the décollement ϕ_D	deg.	5 to 10
Cohesion of the décollement c_D	MPa	0
Dip of the décollement β	deg	1.3

TAB. 2.4: The definition, the dimension and the values selected for the parameters considered for the study of the section through Nankai accretionary prism.

Setting $\phi_B = 30^\circ$, the results for various values of ϕ_D are reported in Figure 2.20b. Setting $\phi_D = 9^\circ$, the results for various values of ϕ_B are reported in Figure 2.22. In all these figures, the observer's horizon is set to the décollement. Figure 2.14b illustrates the variation of failure mechanics, revealed by the scaled distance to the criterion, with the décollement friction angle. For $\phi_D = 5^\circ$, the prism is super-critical and failure is to the front. For $\phi_D = 10^\circ$, the failure mechanism is at the back marking that the prism is then sub-critical. The middle cross-section ($\phi_D = 9^\circ$) shows a failure mode which is in good agreement with the seismic cross-section of

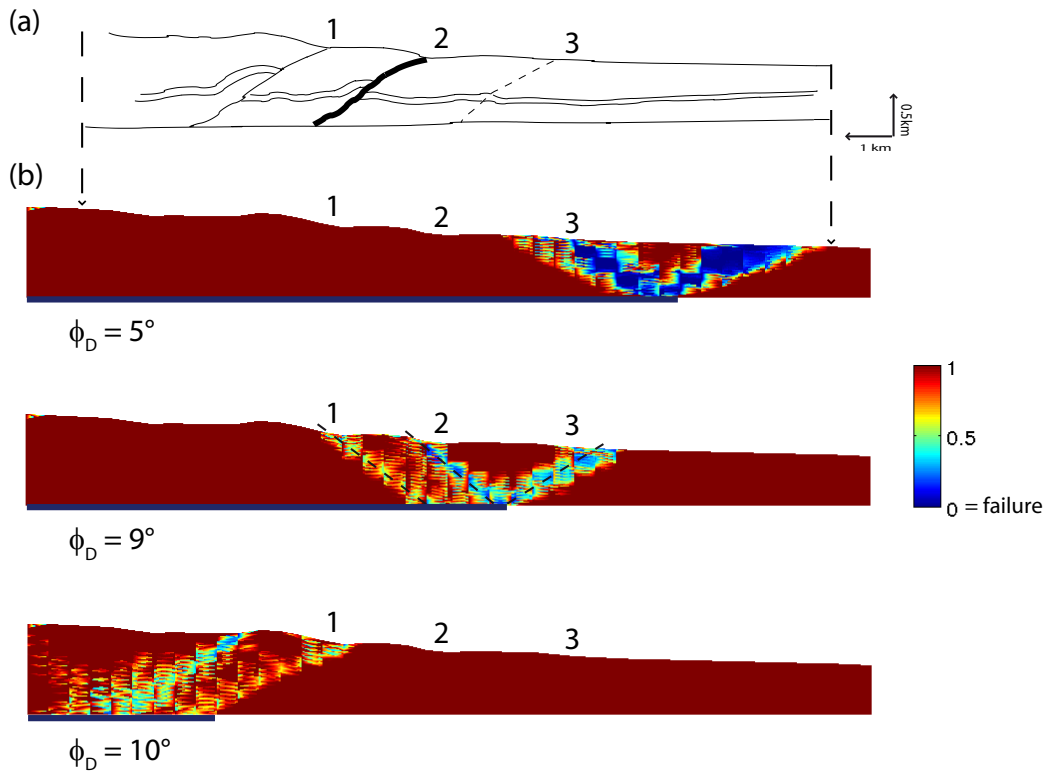


FIG. 2.20: The interpretation of the seismic section through Nankai's prism (a) (redrawn from Moore et al., 1991), and the distribution of the distance to the failure criterion, for three different values of the décollement friction angle, (b). The lengths of the activated décollement are marked by blue lines.

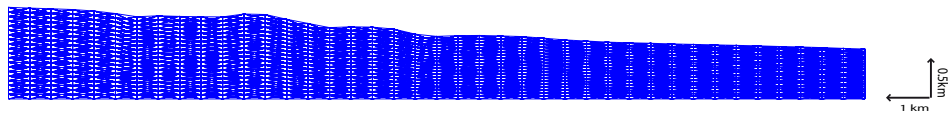


FIG. 2.21: The mesh considered for the analysis of Nankai is composed of 12720 elements and 9640 nodes. It is centered on the profile presented in Figure 2.20a (between the two vertical dashed segments), and extended to the front and to the back with two regions of constant surface slope (2°) and length (one km), to avoid the influence of the boundary conditions.

Figure 2.20a (dashed line outcropping at the most frontal topographic break, numbered 3). The incipient thrust is thus approximately where predicted by Morgan and Karig (1995) and in Cubas et al. (2008), although for $\phi_D = 11^\circ$ $\phi_B = 27.5^\circ$ in the latter contribution. The incipient ramp dips at 30° and the associated back thrust at 35° , as shown by the scaled distance to the criterion. This rather thick ramp combines two incipient failure systems (ramp and back thrust), the two back thrusts outcropping at the topographic breaks, numbered 1 and 2. This double back thrust is not obtained for $\phi_B = 32^\circ$ and the ramp is then much thinner (last graph of Figure 2.22). The influence of the bulk friction angle is presented in Figure 2.22. For ϕ_B less than 29° , the wedge is sub-critical¹ and failure occurs in the back. For ϕ_B larger than 32° , the wedge is super-critical and failure is to the front. For the intermediate range ($\phi_B \in [26^\circ, 32^\circ]$), failure occurs between topographic points 1 and 3, defining the conditions for the wedge to be critical. For $\phi_B = 30^\circ$, two back thrusts outcrops at point 1 and 2. The associated ramps form a large shear zone outcropping at point 3. This interpretation is confirmed with the results obtained for $\phi_B = 32^\circ$ characterized with a single back thrust felt at point 2 and a ramp coming to the surface ahead of point 3. Note that the predicted back thrusts and ramps appear as rather straight lines or fans because of the uniformity in mechanical properties and the absence of any pre-defined ramp. The waviness suggested in the interpretation of Moore and al. (1991), partly due to the finite displacement on the two first thrusts, cannot be addressed in this analysis. Our results show the strong influence of the surface topography on the details of the failure mechanism, as suggested also by the analysis of sensitivity to a small topographic perturbation presented in Cubas et al. (2008). This sensitivity is reminiscent of the findings of McTigue and Mei (1981) and Panian and Pilant (1990), who considered linear elasticity.

The last results presented in Figure 2.23 concern the distribution of equivalent shear stress σ_e and mean stress P for $\phi_D = 9^\circ$ and $\phi_B = 30^\circ$. Following the spatial fluctuations of the yellow contours in P and σ_e , one detects again the influence of the topography on the stress distribution at depth. The main difference with the stress distributions presented for the fault-bend folds in the previous section is the absence of stress concentrations because there is no pre-defined weak ramps within the bulk here, and because for these specific values of the friction angles, the prism is close to criticality, in the sense of Dahlen (1984) and Lehner (1986). Consequently, failure could occur anywhere and the position selected is sensitive to topographic perturbations, especially because we have assumed uniform mechanical properties. This interpretation is also consistent with the existence of the secondary back thrust since all failure systems (ramp, back

¹Stability is defined for the triangular wedge as follows. If the topographic slope α is less than the critical α_c , function of ϕ_B , β and ϕ_D , then the deformation occurs to the back of the wedge. If $\alpha > \alpha_c$ the deformation is at the toe and the whole décollement is activated. For $\alpha = \alpha_c$ failure can occur anywhere within the wedge.

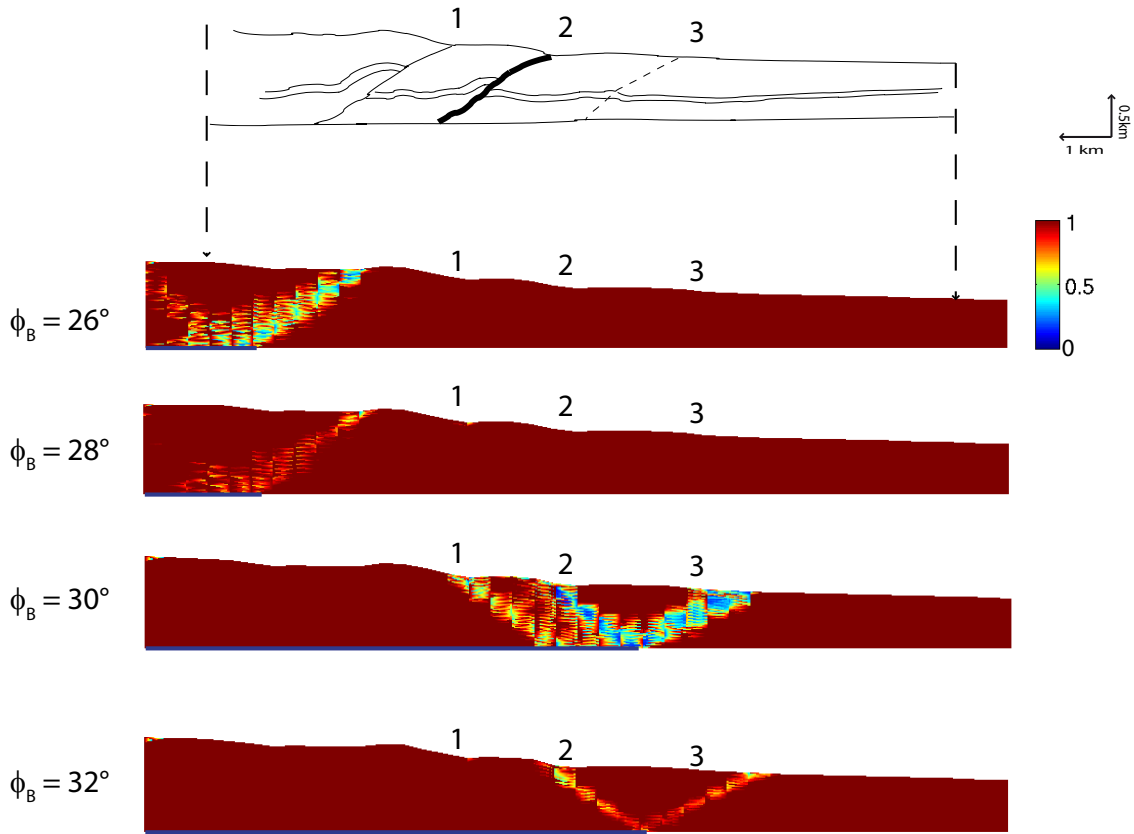


FIG. 2.22: The influence of the bulk friction angle ϕ_B on the failure mode for Nankai, with décollement friction angle ϕ_D set to 9° . The dark blue lines marks the extent of the décollement activity.

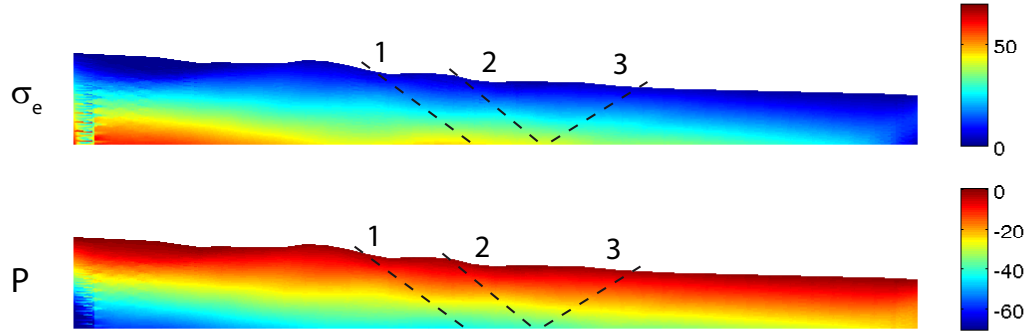


FIG. 2.23: Distribution of the equivalent stress σ_e and the mean stress P over Nankai's prism for a friction angle over the décollement $\phi_D = 9^\circ$.

thrust) are close to activity. This criticality occurs for a small range in friction angle values since the transfer of activity to the back occurs for ϕ_D larger by only one degree.

An important result is that for no values of ϕ_B in $[26^\circ, 32^\circ]$ and ϕ_D in $[5^\circ, 10^\circ]$, was the predicted ramp outcropping at the position of the observed active ramp (point 2). Therefore, to detect this active ramp, it seems necessary to postulate that it has a different friction angle value than the rest of the bulk material. This friction angle is likely to be less than in the pristine material in view of cataclasys, clay smearing along the ramp. This finding is consistent with the inverse analysis of Cubas et al. (2008), which concluded on the weaker friction of this ramp compared to the incipient one, for the two ramps to be active simultaneously, i.e., under the same stress distributions.

A final remark on the failure mode concerns the second graph in Figure 2.22 for $\phi_B = 28^\circ$. The ramp is extending the failure of the décollement to the surface and outcrops nearly two kilometers before point 1. At that point 1, there is a small region of failure which is not connected to the main failure system. It is an interesting idea to imagine that a zone of local failure close to an heterogeneity in material property or topography break, could be surrounded by an essentially elastic region and disconnected from the regional failure system.

2.5.4 The implementation of the Equilibrium Element Method

The objective of this last section is to provide the technical information on the implementation of the Equilibrium Element Method, which was used to produce the results in the main paper.

2.5.4.1 Interpolation

The 2D domain is discretized with three-noded triangular elements. A typical element is presented in Figure 2.24. The three vertices of this element have for position $\mathbf{X}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}_{i=1,3}$ in the basis $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. At any point $\mathbf{X}$ of the element covering the domain Ω^h , the column vector

containing the stress components $\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$ is interpolated by

$$\{\sigma\} = \sum_{i=1}^3 N_i \{\sigma_i\}, \quad (2.5.1)$$

in which $\{\sigma_i\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx_i} \\ \sigma_{yy_i} \\ \sigma_{xy_i} \end{Bmatrix}$ is the nodal unknowns column vector and N_i the interpolation functions.

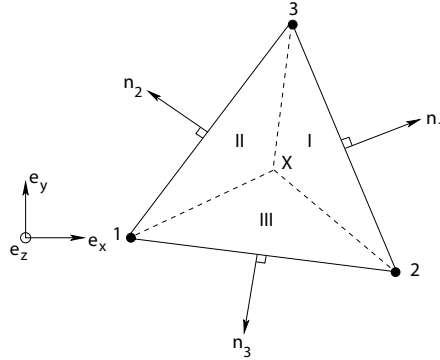


FIG. 2.24: Triangular element of surface A^h over the region Ω^h and definition of the three triangular surfaces which are used to construct the interpolation functions.

The three interpolation functions N_i are

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A^h} (\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2) \wedge (\mathbf{X} - \mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{e}_z, \\ N_2 &= \frac{1}{2A^h} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3) \wedge (\mathbf{X} - \mathbf{X}_3) \cdot \mathbf{e}_z, \\ N_3 &= \frac{1}{2A^h} (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \wedge (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1) \cdot \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

where $\mathbf{e}_z$ is the unit vector pointing out of the plane of study and A^h the surface of the element such $2A^h = (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \wedge (\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1) \cdot \mathbf{e}_z$. Each shape functions should thus be seen as the surface of the triangles I, II or III defined in Figure 2.24 divided by the surface covered by the whole element. The three N_i are linear and share the fundamental property $N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$ which means that the function takes for value one at the associated node and zero at the two others. This property is classical in most finite-element interpolation scheme.

The gradients of these functions are often necessary. Consider, for example, the first shape function N_1 . This function varies by $dN_1 = \frac{1}{2A^h} \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}$ if the point $\mathbf{X}$ is displaced by the infinitesimal amount $d\mathbf{X}$ according to (2.5.2a). Consequently, its gradient is

$$\nabla N_1 = \frac{1}{2A^h} \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2). \quad (2.5.3)$$

The geometrical interpretation of this gradient requires the introduction of the normal vector $\mathbf{n}_1$ to side (2, 3), pointing externally, and the length of this side l_1 . The gradient is then expressed as

$$\nabla N_1 = -\frac{1}{2A^h} \mathbf{n}_1 l_1 \quad (2.5.4)$$

More generally, the gradient of the interpolation function i is

$$\nabla N_i = -\frac{1}{2A^h} l_i \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.5.5)$$

with the generalization of the definitions given above for the gradient of the first shape function.

2.5.4.2 Equilibrium

The gradients in (2.5.5) is now used to express the discretized equilibrium equations over any triangular element. They read

$$\sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} l_i n_{ix} & 0 & l_i n_{iy} \\ 0 & l_i n_{iy} & l_i n_{ix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_i \\ \tau_i \end{Bmatrix} = 2A^h \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix}. \quad (2.5.6)$$

In a synthetic, matrix notation, these equations are equivalently written as

$$\left[A_{div} \right]^h \{ \sigma \}^h = \{ g \}^h. \quad (2.5.7)$$

where $\{\sigma\}^h$, $[A_{div}]^h$ and $\{g\}^h$ are the column vector of nine components containing the stress nodal values at the three nodes, the 2×9 matrix containing the interpolation function and the two-lines vector containing the contribution of the body forces, gravity in this geological setting.

2.5.4.3 Jump in stress across two triangular elements

Jumps in some stress components are often necessary in the presence of discontinuities in the geometry or in the loading (see Timoschenko et Goodier, 1934). It is thus necessary to construct statically admissible stress fields which have such properties. It is decided to use the sides of neighboring triangles to introduce such discontinuities which orientation is thus pre-defined. This introduction requires additional degrees of freedom, as it is shown in Krabbenhøft et al. (2007) and in more details next.

Two neighboring, triangular elements *I* and *II* are presented in Figure 2.25a. They share the spatial position of nodes which are the pairs $(2, 2')$ and $(3, 3')$, as indicated in a local numbering. The jump conditions in the stress vector, equation (2.2.6) in the main text, along this common boundary requires that $[[\underline{\sigma}]] \cdot \underline{n} = \underline{0}$. Consider now the elements with local node numbering

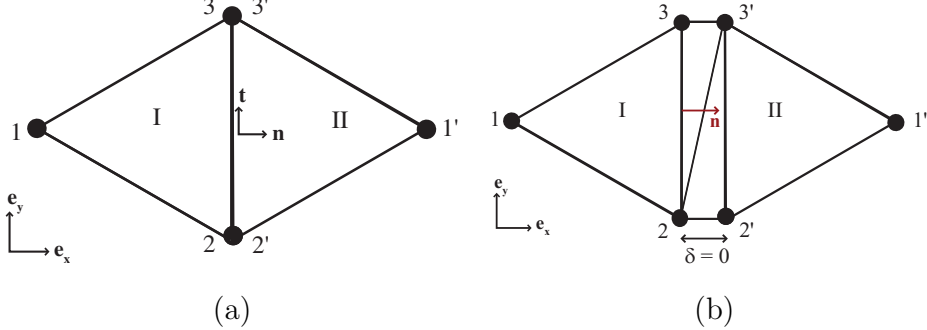
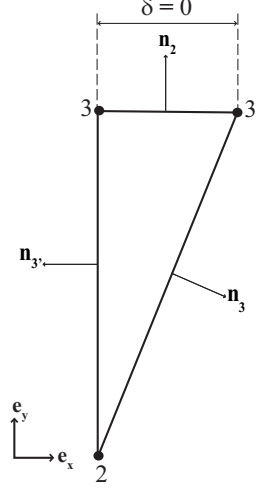


FIG. 2.25: Two elements of a mesh having a common side (a) and int (b)

$(2, 3', 3)$ and $(2, 2', 3')$ which are inserted between the elements I and II, as shown in Figure 2.25b. The objective is to show that the discretized equilibrium equations (2.5.7) leads to the jump condition (2.2.6), as the distance δ tends to zero. We start with element $(2, 3, 3')$ (Figure 2.26) within the band of zero thickness ($\delta = 0$). The mechanical equilibrium for this element requires

$$\begin{bmatrix} l_3 n_{x_3} & 0 & l_3 n_{y_3} & l_{3'} n_{x_{3'}} & 0 & l_{3'} n_{y_{3'}} & l_2 n_{x_2} & 0 & l_2 n_{y_2} \\ 0 & l_3 n_{y_3} & l_3 n_{x_3} & 0 & l_{3'} n_{y_{3'}} & l_{3'} n_{x_{3'}} & 0 & l_2 n_{y_2} & l_2 n_{x_2} \end{bmatrix} \quad (2.5.8)$$

$${}^t \left(\sigma_{x_3}, \sigma_{y_3}, \sigma_{xy_3}, \sigma_{x_{3'}}, \sigma_{y_{3'}}, \sigma_{xy_{3'}}, \sigma_{x_2}, \sigma_{y_2}, \sigma_{xy_2} \right) = 2A^h \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix}.$$


 FIG. 2.26: Element of vanishing surface as δ tends to 0

Since, for that particular element, $l_2 \mathbf{n}_2 = 0$, $A^h = 0$, $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_{3'} = \mathbf{n}$ and $l_3 = l_{3'} = l$ the system (2.5.8) simplifies to

$$\begin{bmatrix} ln_x & 0 & ln_y & -ln_x & 0 & -ln_y \\ 0 & ln_y & ln_x & 0 & -ln_y & -ln_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x3} \\ \sigma_{y3} \\ \sigma_{xy3} \\ \sigma_{x3'} \\ \sigma_{y3'} \\ \sigma_{xy3'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.5.9)$$

involving nodes 3 and 3' only. This relation is rewritten as

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x3} - \sigma_{x3'} \\ \sigma_{y3} - \sigma_{y3'} \\ \sigma_{xy3} - \sigma_{xy3'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.5.10)$$

which is exactly the expression obtained directly from the jump over that interface seen as a discontinuity : $(\boldsymbol{\sigma}_3 - \boldsymbol{\sigma}_{3'}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$. The same condition is reached for nodes 2 and 2', $(\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_{2'}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$, once the element $(2, 2', 3')$ is collapsed to reach also a zero thickness. Since the stress interpolation is linear between the two pairs of nodes $(2, 2')$ and $(3, 3')$, it is enforced point-wise along the element I and II common boundary. The jump conditions due to the two collapsed elements are written concisely as

$$[A_{jump}]^h \{\sigma^h\} = \{0\}, \quad (2.5.11)$$

in which $[A_{jump}]^h$ is the 2×9 matrix of the interpolation function for a triangular element of vanishing surface.

We thus have demonstrated that discontinuities can be accounted for with elements of zero surface since the discretized equilibrium equations are identical to the ones obtained by a direct discretization of the discontinuity. These elements do not need special attention and are thus identically used for the discretization of the bulk and the discontinuity.

Boundary conditions

Typical boundary conditions are such that

$$\sigma_n = q \quad \text{and} \quad \tau = t ,$$

where q and t are two constants. The boundary is oriented by the angle θ with respect to the axis $\mathbf{e}_x$ so that the normal and the tangential stress are

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + \sigma_{xy} \sin 2\theta , \\ \tau &= -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\theta + \sigma_{xy} \cos 2\theta . \end{aligned}$$

Combine these three equations to obtain, in a matrix notation,

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin 2\theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ t \end{Bmatrix} .$$

The boundary conditions for a node i of the mesh are thus

$$[A_{bc}]_i \{\sigma_i\} = \{T^d\}_i \tag{2.5.12}$$

where $[A_{bc}]_i$ is a 2×3 matrix and $\{T^d\}_i$ the column vector defining the boundary conditions of the problem.

Supplementary conditions at the boundary

The structure of the loading conditions, for example the linear gradients seen in Figure 2.1 and defined by equation (2.2.1) in the main part, deserves some special attention. Another example is the scalar a , unknown of Hafner's problem, which needs to be eliminated so that the final problem has the structure of a classical optimization problem.

Consider first the problem of the vertical, linear gradient in the horizontal component of the stress vector. Two consecutive nodes i and $i + 1$ on the boundary of interest $\partial\Omega_T$ should satisfy the following relation

$$T_{x_{i+1}}(H - y_i) - T_{x_i}(H - y_{i+1}) = 0. \quad (2.5.13)$$

If such additional equality is enforced by every pair of successive nodes on the prescribed boundary, then the prescribed gradient is indeed linear. Consider now the case where the force density on the wall has a constant value for the horizontal part plus the linear gradient described above and the vertical component has a linear gradient

$$T_x^d = \rho g(H - y) + aL, \quad T_y^d = -a(H - y), \quad (2.5.14)$$

where a is Hafner's problem unknown. Two consecutive nodes should respect

$$\begin{aligned} T_{x_{i+1}} - T_{x_i} &= \rho g(y_i - y_{i+1}), \\ T_{y_{i+1}}(H - y_i) - T_{y_i}(H - y_{i+1}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Furthermore, it is necessary to link the two stress distributions with, for example,

$$T_{x_j}H + T_{y_k}L = 0 \quad (2.5.16)$$

in which node j and k are the two nodes where $y_j = H$ and $y_k = 0$, respectively. Only one equality of this type is required to eliminate the a unknown from the optimization problem. These additional equalities due to the boundary conditions are added to the matrix of equalities set up for the optimization problem. The unknown a (Hafner, 1951) is thus not directly accounted for but will be implicitly maximized by the optimization program. Its value is easily extracted from the results of this program.

The objective function

The optimization problem resulting from the EEM has for objective to maximize the tectonic force F . This force is expressed by the vector $\{f\}$ which is referred to as the objective vector. It is based on the normal vectors found on the surface where the force is distributed. It is of course function of the stress at the nodes present on that surface which are part of the vector $\{\sigma\}$:

$$F = \{c\}^T \{\sigma\}. \quad (2.5.17)$$

For the thrusting problems, the nodes involved with this vector are those on the side BC of the domain (Figure 2.6b in the main text).

Bibliographie

- Buiter, S.J.H., A.Y. Babeyko, S. Ellis, T.V. Gerya, B.J.P. Kaus, A. Kellner, G. Schreurs and Y. Yamada (2006), The numerical sandbox : comparison of model results for a shortening and an extension experiment, in *Analogue and numerical modelling of crustal-scale processes*, edited by S.J.H. Buiter and G. Schreurs, 29–64, London Geol. Soc. Spec. Publ.
- Cubas, N., Y.M. Leroy and B. Maillot (2008), Prediction of thrusting sequences in accretionary wedges, *J. Geophys. Res.*, 113, B12412, doi :10.1029/2008JB005717.
- Dahlen, F.A. (1984), Noncohesive critical Coulomb wedges : an exact solution, *J. Geophys. Res.*, 89, B12, 10, 125–10, 133.
- Erickson, S.G. and W.R. Jamison (1995), Viscous-plastic finite-element models of fault-bend folds, *Journal of Structural Geology*, 17, 561–573.
- Erickson, S.G., L.M. Strayer and J. Suppe (2001), Initiation and reactivation of faults during movement over thrust-fault ramp : numerical mechanical models, *Journal of Structural Geology*, 23, 11–23.
- González, G., Gerbault M., Martinod, J., Cembrano J., Carrizo, D., Allmendinger, R. and J. Espina (2008), Crack formation on top of propagating reverse faults of the Chuculay Fault System, northern Chile : Insights from field data and numerical modelling, *Journal of Structural Geology*, 30, 791–808.
- Hafner, W. (1951), Stress distributions and faulting, *Bulletin of the Geological Society of America*, 62, 373–398.
- Hill, R. (1950), *The mathematical theory of plasticity*, Oxford University Press, Oxford.
- Koyi, H.A. and B. Maillot (2007), Tectonic thickening of hanging wall units over a ramp, *Journal of Structural Geology*, 29, 924–932.
- Krabbenhøft, K., A.V. Lyamin and S.W. Sloan (2007), Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs, *Int. J. Solids and Structures*, 44, 1533–1549.
- Le Pichon, X., P. Henry and S. Lallemant (1993), Accretion and erosion in subduction zones : the role of fluids, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 21, 307–331.
- Lehner, F.K. (1986), Comments on "Noncohesive Critical Coulomb Wedges : An Exact Solution", *J. Geophys. Res.*, 91, B1, 793–796.
- Leroy, Y.M. and N. Triantafyllidis N. (2000), Folding and localized faulting in a frictional, cohesive overburden resting over a viscous substratum, in *Aspects of Tectonic Faulting*, edited by F.K. Lehner and J.L. Urai, Springer-Verlag, Heidelberg, 109–139.
- Maillot, B. and Y.M. Leroy (2003), Optimal dip based on dissipation of back thrusts and hinges in fold-and-thrust belts, *J. Geophys. Res.*, 108, B6, 2320–2336.
- Maillot, B. and H. Koyi (2006), Thrust dip and thrust refraction in fault-bend folds : analogue models and theoretical predictions, *Journal of Structural Geology*, 28, 36–49.
- Maillot, B. and Y.M. Leroy (2006), Kink-fold onset and development based on the maximum strength theorem, *J. Mech. Phys. Solids*, 54, 2030–2059.
- Maillot B., C. Barnes, J.-M. Mengus, J.-M. Daniel (2007), Constraints on friction coefficients by an inverse analysis of sand box thrust dips, *Journal of Structural Geology*, 29, 117–128.
- McTigue, D.F. and C.C. Mei (1981), Gravity-induced stresses near topography of small slope, *J. Geophys. Res.*, 86, B10, 9268–9278.
- Mourgues, R. and P.R. Cobbold (2003), Some tectonic consequences of fluid overpressures and seepage forces as demonstrated by sandbox modelling, *Tectonophysics*, 376, 75–97.
- Moore, G.F., D.E. Karig, T.H. Shipley, A. Taira, P.L. Stoffa and W.T. Wood (1991), Structural framework of the ODP leg 131 area, Nankai trough, (1991), *Proceedings of the Ocean Drilling Program, Initial reports*, 131, 15–20.

- Moore, G.F., A. Taira, A. Klaus, L. Becker, B. Boeckel, B. A. Cragg, A. Dean, C.L. Ferguson, P. Henry, S. Hirano, T. Hisamitsu, S. Hunze, M. Kastner, A.J. Maltman, J.K. Morgan, Y. Murakami, M.D. Saffer, M. Sanchez-Gomez, E.J. Screaton, D.C. Smith, A.J. Spivack, J. Steurer, H.J. Tobin, K. Ujiie, M.B. Underwood and M. Wilson (2001) New insights into deformation and fluid flow processes in the Nankai Trough accretionary prism : results of ocean drilling program leg 190, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 2, 10.129/2001GC000166.
- Morgan, J.K. and D.E. Karig (1995), Kinematics and a balanced and restored cross-section across the toe of the eastern Nankai accretionary prism, *J. Struct. Geology*, 17, 31–45.
- MOSEK (2008), version 5, optimization software, <http://www.mosek.com>.
- Odé, H. (1960), Faulting as a velocity discontinuity in plastic deformation. In : Rock deformation, edited by D. Griggs and J. Handin, *Geol. Soc. Am. Memoire* 79, 293–321.
- Ortiz, M., Y. Leroy and A. Needleman (1987), A finite element method for localized failure analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61, 189–214.
- Olsen, K., R. Madariaga and R. Archuleta (1997), Three dimensional dynamic simulation of the 1992 Landers earthquake, *Science*, 278, 834–838.
- Panian, J. and W. Pilant (1990), A Possible Explanation for Foreland Thrust Propagation, *J. Geophys. Res.*, 95, B6, 8607–8615.
- Pastor, J. (1978), Limit analysis : numerical determination of complete statical solutions. Application to the vertical cut, (in French) *Journal de Mécanique appliquée*, 2, 168–196.
- Peltzer, G., P. Rosen, F. Rogez and K. Hudnut (1996), Postseismic rebound in fault step-overs caused by pore fluid flow, *Science*, 272, 1202–1204.
- Rudnicki, J.W. and J.R. Rice (1975), Condition for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 23, 371–394.
- Salençon, J. (1974), *Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols*, edited by Eyrolles, Paris, (English translation : *Applications of the theory of plasticity in soil mechanics*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1977).
- Salençon, J. (2002), *De l'élasto-plasticité au calcul à la rupture*, Editions École Polytechnique, Palaiseau, and Ellipses, Paris.
- SARPP (2007), Structural Analysis and Rock Physics Program, Ecole Normale Supérieure, Paris.
- Sciamanna, S., W. Sassi, R. Gambini, J.L. Rudkiewicz, F. Mosca and C. Nicolai (2004), Predicting hydrocarbon generation and expulsion in the Southern Apennines Thrust Belt by 2D Integrated Structural and Geochemical Modeling : Part I - Structural and thermal evolution, in *Deformation, fluid flow, and reservoir appraisal in foreland fold and thrust belts*, edited by R. Swennen, F. Roure, J.W. Granath, 51–67, A.A.P.G. Heldberg series, 1.
- Souloumiac, P. and A. Modaressi (2008), Comparison between Finite Element Method and Equilibrium Element Method to predict stress field in fault-bend folds, 12th International Conference of the International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG), Goa, India.
- Suppe, J. (1983), Geometry and kinematics of fault-bend folding, *Am. J. Sci.*, 283, 7, 684–721.
- Timoshenko, S.P. and J.N. Goodier (1934), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill.
- Yin, A. (1993), Mechanics of Wedge-Shaped Fault blocks 1. An Elastic Solution for Compressional Wedges, *J. Geophys. Res.*, 98, B8, 14, 245–14, 256.
- Zoetemeijer, R. and W. Sassi (1992), 2D reconstruction of thrust evolution using the fault-bend fold method, in *Thrust tectonics*, edited by K. McClay, 133–140, London Geol. Soc. Spec. Publ.

Chapitre 3

Approche externe appliquée au prisme d'accrétion

Ce troisième chapitre présente le second aspect du calcul à la rupture : l'approche externe. Cette approche basée sur l'équilibre mécanique et le domaine de résistance de la roche permet d'obtenir, à partir de champs de vitesse cinématiquement admissibles, la borne supérieure à la force tectonique. Ce chapitre est composée de deux articles qui vont être soumis au journal *Computational Geosciences* pour le premier et au journal *Geochemistry, Geophysics and Geosystems* (G3) pour le deuxième. L'approche externe a été abordée de manière analytique en 2D par Cubas et al. (2008) afin de prédire les séquences de chevauchements dans les chaînes d'avant-pays et les prismes d'accrétion. Ici, la théorie, numérique cette fois, est étendue aux modélisations en 3D. Le premier article porte sur le développement de la théorie et sur des applications de validation en 2D, en particulier la théorie du prisme critique de Dalhen (1984). Le deuxième article présente les modélisations 3D d'un prisme triangulaire glissant sur un décollement ainsi qu'un premier exemple de modélisation de modèle analogique en boîte de sable. Ces résultats permettent de mieux comprendre les modes de rupture à l'initiation du plissement. Nous verrons pourquoi il est complexe de développer l'évolution du plissement.

Résumé de l'article : Failure in accretionary wedges with the maximum strength theorem : numerical algorithm and 2D validation.

Cet premier article présente l'approche externe du calcul à la rupture par analyse numérique et donc l'obtention de la borne supérieure de la force tectonique. Cette méthode a été développée pour étendre l'approche analytique de l'approche externe mise en place par Cubas et al (2008) aux modélisations 3D. En effet, Cubas et al (2008) se sont intéressés à la prédiction analytique des modes de rupture en 2D dans les séquences de chevauchements (pendage, position des failles, durée de vie de ces failles) ainsi qu'à leur évolution au cours du plissement. Logiquement nous avons prolongé la réflexion par des modélisations en 3D, au moins pour l'initiation du plissement. Comme l'approche interne, l'approche externe est exclusivement basée sur la résistance maximale de la roche et sur l'équilibre mécanique de la structure. Il s'agit également d'un problème d'optimisation dont le résultat sera obtenu par minimisation. La difficulté est de prendre en compte le critère de rupture dans l'optimisation et en particulier de calculer la fonction support en fonction du tenseur des déformations virtuelles. Une démarche en trois étapes a été établie pour y parvenir. La première étape consiste à exprimer le schéma de minimisation classique en fonction des variables cinématiques. C'est le problème primal. L'idée est alors de linéariser le critère de rupture convexe avec une série d'hyper-plans. En une seconde étape, l'espace est discrétisé et les variables cinématiques sont interpolées. La discrétisation se fait avec des éléments triangulaires à 6 noeuds en 2D et des éléments tétraédriques à 10 noeuds en 3D. La troisième étape consiste à définir le dual du problème de minimisation. On obtient alors un problème de maximisation, dual. Les inconnues du problème à cette étape ont une dimension de contraintes, duales des variables cinématiques. Ces contraintes ne sont pas statiquement admissibles et ne correspondent donc pas aux contraintes de l'approche interne. L'intérêt de suivre ce schéma numérique pour arriver à la forme duale est double. D'une part cela permet d'éviter de calculer l'expression exacte de la fonction support grâce, notamment, à la linéarisation du critère de rupture et d'autre part, d'introduire aisément des discontinuités de vitesse cinématiquement admissibles. La première validation de cette théorie d'optimisation est faite sur le prisme de Coulomb théorique sans cohésion en 2D. Les paramètres imposés sont les paramètres rhéologiques sur le décollement et dans le matériau constituant le prisme. Les résultats obtenus sont les distributions du taux de déformations virtuelles et en particulier ses deux premiers invariants. Ils concernent spécifiquement l'initiation du plissement. Nous retrouvons les 3 états définis par Dalhen (1984).

- L'angle basal β est fixé par exemple à 3° , si l'angle topographique α est inférieur à une valeur critique α_c , un système de failles conjuguées se forme (rampe - rétro-chevauchement) et le décollement est activé seulement jusqu'à la base de ces failles, le prisme est sous-critique. La déformation est localisée à l'arrière du prisme sous forme de deux zones de concentrations de déformations correspondant aux failles. On observe également une dilatation du bloc glissant sur le décollement comme l'avait prédite Cubas et al. (2008).
- Si α est supérieur à α_c alors le décollement est complètement activé sans rupture dans le matériau, le prisme est super-critique.
- Si $\alpha = \alpha_c$, la rupture peut avoir lieu n'importe où dans le prisme, le décollement est activé, le prisme est critique. La déformation pour ce cas est très diffuse.

La deuxième application réalisée en 2D est l'étude de l'influence de la friction sur le mur arrière du prisme. En effet, cette étude paramétrique a de l'importance pour les modèles analogiques qui présentent des effets 3D évidents dûs aux frottements sur les bords de la boîte de sable. La variation de cet angle de friction influe sur le mode de rupture. Pour un angle de friction faible, une rampe se développe directement à partir de la base du mur arrière. Lorsque cet angle de friction augmente, le rétro-chevauchement se forme pour atteindre la surface du prisme pour une valeur de friction sur le mur arrière d'environ 15° . Deux expériences en boîte de sable permettent de retrouver ces deux modes de rupture. Pour diminuer l'angle de friction sur le mur arrière, on a placé une très fine couche de silicone, ce qui implique la formation d'une rampe au début du raccourcissement sans rétro-chevauchement associé. En revanche, si on ne met pas de silicone, on retrouve le système de failles conjuguées classiques : une rampe et un rétro-chevauchement. Enfin la construction du cercle de Mohr et l'application du pôle lié à une facette parallèle à la surface du prisme permet de retrouver l'angle de friction de transition entre les deux modes de rupture déterminé numériquement.

**Failure in accretionary wedges with the maximum strength
theorem : numerical algorithm and 2D validation.**

P. Souloumiac

Laboratoire MSS-Mat, CNRS,
Ecole Centrale Paris, Chatenay Malabry, France,

K. Krabbenhøft

Centre for Geotechnical and Materials Modelling,
University of Newcastle, NSW 2308, Australia,

Y.M. Leroy

Laboratoire de Géologie, CNRS,
École Normale Supérieure, Paris, France,

and

B. Maillot

Département Géosciences et Environnement,
Université de Cergy-Pontoise, France.

Abstract

The objective is to capture the 3D spatial variation in the failure mode occurring in accretionary wedges and their analogue experiments in the laboratory from the sole knowledge of the material strength. The proposed methodology relies on the maximum strength theorem which is inherited from the kinematics approach of the classical limit analysis. The virtual velocity field is constructed from the spatial discretization obtained with ten-noded tetrahedra in 3D and six-noded triangles in 2D. The resulting, discrete optimization problem is first presented emphasizing the dual formalism found most appropriate in the presence of non-linear strength criteria, such as the Drucker-Prager criterion used in all reported examples. The numerical scheme is first applied to a perfectly-triangular 2D wedge. It is known that failure occurs to the back, for topographic slope smaller than, and to the front for slope larger than, a critical slope, defining sub-critical and super-critical slope stability conditions, respectively. The failure mode is characterized by the activation of a ramp, its conjugate back thrust and the partial or complete activation of the décollement. It is shown that the critical slope is captured precisely by the proposed numerical scheme, the ramp and the back thrust corresponding to regions of localized virtual strain. The influence of the back-wall friction on this critical slope is explored. It is found that the failure mechanism is characterized by a thrust rooting at the base of the back wall and the absence of back thrust, for small enough values of the friction angle. This influence is well explained by the Mohr construction and further validated with experimental results with sand, considered as an analogue material. 3D examples are presented in a companion paper.

3.1 Introduction

The objective is to determine the 3D failure mode which characterizes the onset of thrusting or folding in fold-and-thrust belts and in accretionary wedges. The numerical method which is proposed has its root in the kinematics approach of limit analysis although only the knowledge of the material strength is required. The numerical algorithm and its 2D validation are presented in this contribution, the 3D applications in a companion paper (Souloumiac et al., 2009).

The kinematics of 2D folds and thrusts has been studied at length and is now well captured by geometrical constructions inspired by the seminal work of Suppe (1983). The absence of any concept of mechanics, such as material strength and mechanical equilibrium render however impossible the comparison between two geometrical constructions necessary to select the most relevant. The merit of these constructions is however clear in view of their simplicity and their potential application in the oil industry, once completed by the computation of the temperature evolution (Zoetemeijer and Sassi, 1992, Sciamanna et al., 2004).

The line of work which has been followed by the authors tries to take the most advantage of the 2D geometrical construction while accounting for material strength and mechanical equilibrium. The principle of minimum dissipation was applied by Maillot and Leroy (2003) in their study of a simple fault-bend fold, with either brittle or ductile material response, to find the optimum orientation of the back thrust. A more rigorous framework is now adopted, based on the maximum strength theorem for frictional and cohesive materials (Salençon, 1974, 2002). It was applied to the evolution of a kink-fold by Maillot and Leroy (2006) proposing that, at any stage of the structure development, its main geometrical attributes, such as the kink dip and width, could be found by minimizing the upper bound to the applied tectonic force. Cubas et al. (2008) have extended this argument to study sequences of thrusts within an accretionary wedge. Souloumiac et al. (2008) proved that the optimum stress state could be calculated at any step of the thrusting sequence development, based on the static approach of the limit analysis.

There is a definite desire to propose 3D constructions of folding and thrusting which is often inhibited by the lack of intuition for parameterizing simply the failure mechanism (e.g. ramp and back thrust system) at the onset and during the development of the fold. It is necessary to develop a systematic procedure to study the failure mode of 3D geological structures from their onset to their development. For the onset, the kinematics approach of limit analysis could provide a first insight on the failure mode. It is the subject of the present contribution and it is hoped that the results could help in constructing the kinematics of the evolving structures, especially in 3D.

The proposed method, referred to as the maximum strength theorem, is based on the external or kinematics approach of classical limit analysis. It is emphasized that a complete plasticity theory is not required and the provision for the cohesive and frictional rocks of interest of a strength domain, convex in the stress space, suffices to obtain an upper bound to the applied tectonic force. Over the years, a number of different numerical formulations of the maximum strength (or upper bound) theorem have been proposed. Early formulations, focusing on two-dimensional problems (Anderheggen and Knöpfel, 1972; Pastor, 1978; Bottero et al., 1980; Sloan, 1989), typically involved a linearization of the strength domain and made use of the simplex method or one of its derivatives to solve the resulting linear programs. Inspired by the progress in general convex programming, these linear programming formulations have recently been replaced by more general non-linear formulations avoiding the need to linearize (Lyamin and Sloan, 2002; Krabbenhøft and Damkilde, 2003). The most recent development on this front has been the applications of the so-called conic programming algorithms to solve typical limit analysis problems such as the ones considered here as well as a range of other plasticity problems (Krabbenhøft et al., 2007; Krabbenhøft et al., 2008). These algorithms are particularly suited for dealing with non-smooth strength domains such as those typically characterizing the strength of cohesive, frictional materials (Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, etc...).

In its primal form the maximum strength theorem is formulated in terms of kinematic variables, the virtual velocities. Their distribution is constructed by interpolation thanks to a space discretization. This primal form with discretization leads to a convex minimization problem. Alternatively, it is possible to work directly with the dual form of the theorem which leads to a maximization problem reminiscent of the internal or static formulation resulting in lower bounds to the tectonic force. The dual variables of the velocities (of its symmetric gradient to be more precise) in the sense of power are regarded as stresses after appropriate scaling, although they do not constitute statically admissible fields (these dual variables do not satisfy equilibrium). From a numerical point of view, this alternative, dual approach has a number of advantages. For example, it is possible to impose completely general strength criteria in a straightforward manner whereas a primal upper bound formulation would require the specification of the corresponding support function. This function defines the maximum power which could be provided for a given velocity and strength domain. Its analytical expression is certainly non-trivial to derive and the resulting constraints difficult to account for in a classical optimization code. Furthermore, following the approach proposed by (Krabbenhøft et al., 2005), the incorporation of kinematically admissible velocity discontinuities is straightforward and will be proposed in this paper for the general three-dimensional case for the first time.

The paper contents are as follows. The next section is devoted to the presentation of the numerical algorithm. The 2D setting is most suited for such presentation for sake of simplicity and the extension to 3D is postponed to Appendix B. The construction of the dual problem is highlighted with the help of the primal-dual algorithm of linear programming summarized in Appendix A. Appendix C presents the link between these strength domains, typical of soil mechanics, and the conic programming algorithms adopted in Mosek (2008), which is used for all examples reported here. Section 3 is concerned with 2D applications to accretionary wedges of perfect triangular shape. Failure in the bulk occurs either to the back or to the front, with the complete activation of the weak décollement at the base, depending on the topographic slope. The transition from sub-critical (failure to the back) to super-critical (failure to the front) is well captured, validating the numerical procedure. It is shown that the friction angle on the back wall influences the failure mode for sub-critical conditions. For small values of the friction angle, a single ramp roots to the base of the back wall whereas a ramp and back thrust occurs for larger values. The transition friction angle detected numerically is the one predicted by the Mohr's construction. It is also shown that these two modes of failure are reproduced in the laboratory experiments with sand by selecting the appropriate friction conditions at the back wall contact.

3.2 The maximum strength theorem with spatial discretization

The objective of this section is to present in three steps the theory applied in the next section for 2D wedges and for 3D examples in the companion paper. The first step is the presentation of the upper bound theorem of classical limit analysis, as it is found in Salençon (2002) and Maillot and Leroy (2006). It is proposed here to approximate the strength domain externally by a series of hyper-planes, in the appropriate stress space, to facilitate the set up of the optimization problem. The second step is the discretization of the space and the construction of interpolations for the virtual velocities as well as for the virtual scalars associated to the hyper-planes. The third step consists in the dualization of the upper bound problem after discretization, resulting in a maximization problem where the basic unknowns are scaled to have dimension of stress. This dual formulation is used in all examples but should not be seen as the lower bound approach (constructed with statically admissible stress fields) for reasons which are also discussed.

3.2.1 Summary of the upper bound theorem of limit analysis

The upper bound theorem of limit analysis is called here the maximum strength theorem to emphasize that only the concept of strength is required. This theorem is now presented in details.

The starting point is the theorem of virtual power which states the equality between the internal and the external powers for any kinematically admissible (KA) velocity field. The set $\mathcal{S}_u$ of KA fields comprises any field $\hat{\mathbf{U}}$ which is zero over part of the boundary $\partial\Omega_u$ where the displacements are prescribed. Elements of $\mathcal{S}_u$ are identified by a superposed hat. The external power, defined by

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{U}} dV + \alpha \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T}^o \cdot \hat{\mathbf{U}} dS, \quad (3.2.1)$$

is due to the power of the velocity over the body force $\mathbf{g}$, ρ is the material density, and of the force applied on part of the boundary $\partial\Omega_T$. The applied force is assumed to be known in distribution $\mathbf{T}^o$ but not in its intensity defined by the scalar α which is the unknown of the problem and for which we seek the best upper bound. Note that in (3.2.1) and in what follows, vectors and subsequently tensors, are identified with bold characters. The internal power is given by

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\hat{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}(\hat{\mathbf{U}}) dV, \quad (3.2.2)$$

where $\boldsymbol{\sigma}$ and $\mathbf{d}(\hat{\mathbf{U}})$ are the Cauchy stress tensor and the virtual rate of deformation tensor (also denoted $\hat{\mathbf{d}}$) based on $\hat{\mathbf{U}}$, respectively. The double dot product between these two tensors results in $\sigma_{ij}\hat{d}_{ji}$ in terms of their components in an orthonormal basis. The expression (3.2.2) for the internal power does not account for potential discontinuities in the velocity fields and bulk deformation is the only source of dissipation. Explicit account of discontinuities is typical of analytical developments but is not necessary in the numerical formulation considered in this paper. Pre-defined, physical discontinuities thus of known geometry are approached as infinitely narrow zones of bulk material. Their activation is marked by a localized deformation. The conventional finite-element formulations cannot adopt this approach because the limit of zero length in one direction for an element results in an ill-conditioning of the stiffness array (see e.g. Day and Potts, 1994). To the contrary, the formulation adopted in the following does not involve such complication. Indeed, as it will be discussed in the last part of this section, it is entirely possible to include patches of elements with a thickness identically set to zero. This approach was first suggested by Krabbenhøft et al. (2005) in the context of linear velocity elements and is extended here to quadratic velocity elements in 2D and further generalized to 3D.

3.2. The maximum strength theorem with spatial discretization

Coming back to the internal power (3.2.2), note that the stress field is unknown and its elimination is desired. For that purpose, we take advantage of the material maximum strength. The stress is required to remain within the strength domain denoted $G(\boldsymbol{\sigma})$. The strength of cohesive, frictional faults is usually described in terms of the Coulomb criterion and for pristine, bulk material the strength domain is

$$G(\boldsymbol{\sigma}) = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \sigma_I - \sigma_{III} + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \phi - 2C \cos \phi \leq 0\}, \quad (3.2.3)$$

where σ_I and σ_{III} are the minor and major principal stresses (continuum mechanics convention : tensile stresses are positive, $\sigma_I \geq \sigma_{III}$) and C and ϕ are the cohesion and the friction angle respectively. Failure is described in the 2D plane which is orthogonal to the intermediate stress direction. The principal stresses could be eliminated in favor of the stress components such that (3.2.3) reads in a 2D setting

$$G(\boldsymbol{\sigma}) = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \sigma_e + 2P \sin \phi - 2C \cos \phi \leq 0\} \\ \text{with } \sigma_e = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} / 2, \quad P = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2, \quad (3.2.4)$$

in which σ_e and P are referred to as the equivalent shear stress and the in-plane mean stress, respectively. The determination of the intermediate stress direction becomes a burden in 3D applications and it is more convenient to consider the strength domain bounded by the Drucker-Prager criterion :

$$G_{DP}(\boldsymbol{\sigma}) = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \alpha_{DP} I_1 + \sqrt{J_2} - C_{DP} \leq 0\}, \quad (3.2.5) \\ \text{with } I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \quad J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'), \quad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\delta},$$

in which I_1 and J_2 are the first invariant of the stress and the second invariant of the deviatoric stress, respectively. Note that $\boldsymbol{\sigma}'$ is the deviatoric stress and $\boldsymbol{\delta}$ the second-order identity tensor in (3.2.5). The two material parameters in (3.2.5) are the friction coefficient and the cohesion for the Drucker-Prager criterion and they are conveniently defined as

$$\alpha_{DP} = \frac{\tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}}, \quad C_{DP} = \frac{3C}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}}, \quad (3.2.6)$$

so that the domain boundaries described by (3.2.3) and (3.2.5) coincide for 2D plane-strain problems (see e.g. Davis and Selvadurai, 2002, for further details).

Most if not all strength domains considered in the literature are convex. Consequently, the maximum power $\boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}}$ is bounded and given for a given velocity $\hat{\mathbf{U}}$ by the support function $\pi(\hat{\mathbf{d}})$. It depends on the geometry of the strength domain boundary and of course on the velocity field. A graphical method to construct this function is presented in Figure 3.1 where

stress tensors are represented as vectors. The strength domain has an arbitrary, albeit convex, boundary in the stress space. Superpose in the stress space the virtual rate of deformation $\hat{\mathbf{d}}$ despite the difference in dimension. This virtual rate of deformation is normal to the hyper-plane represented with a dashed line. Translate this plane towards the strength domain, as illustrated by the dotted curve, and the point of contact, denoted $\boldsymbol{\sigma}^*$, is the stress providing the maximum power according to classical convex analysis. Consequently : $\pi(\hat{\mathbf{d}}) = \boldsymbol{\sigma}^* : \hat{\mathbf{d}}$ and the selection of $\boldsymbol{\sigma}^*$ is indeed a function of the orientation of $\hat{\mathbf{d}}$ and of the shape of the strength domain boundary.

The analysis of the 2D results in section 3 will be facilitated with the explicit expression of the support function. It reads

$$\begin{aligned} \text{case 1 : } \text{tr}(\hat{\mathbf{d}}) &> (|\hat{d}_1| + |\hat{d}_2|) \sin \phi, \quad \pi(\hat{\mathbf{d}}) = \frac{C}{\tan \phi} \text{tr}(\hat{\mathbf{d}}), \\ \text{case 2 : } \text{tr}(\hat{\mathbf{d}}) &= (|\hat{d}_1| + |\hat{d}_2|) \sin \phi, \quad \pi(\hat{\mathbf{d}}) = C \cos \phi (|\hat{d}_1| + |\hat{d}_2|), \\ \text{case 3 : } \text{tr}(\hat{\mathbf{d}}) &< (|\hat{d}_1| + |\hat{d}_2|) \sin \phi, \quad \pi(\hat{\mathbf{d}}) = +\infty, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

for bulk materials having the strength limit defined by the Coulomb criterion (3.2.3) in 2D (Salençon, 2002). In (3.2.7), $\hat{d}_1$ and $\hat{d}_2$ are the 2D principal values of the virtual rate of deformation tensor. This example reveals that the support function could be infinite for some orientations of the rate of deformation. More specifically, the trace of the virtual rate of deformation has to be positive, for the bound to be finite, implying a virtual dilation which we will not try to interpret physically. This is due to the infinite resistance in pure compression assumed for the Coulomb criterion.

It is found convenient for what follows to approximate externally the strength domain boundary with a series of n hyper-planes in the stress space. Each plane bounds a half-space defined by

$$\mathbf{A}_a : \boldsymbol{\sigma} - k_a \leq 0, \quad a = 1, \dots, n, \quad (3.2.8)$$

in which $\mathbf{A}_a$ and k_a are the normal (symmetric second-order tensor) to the hyper-plane and the reference stress (cohesion-like) for the a^{th} plane, respectively. Such an approximation is presented in Figure 3.1 with four hyper-planes, two dashed and two solid lines, the latter two labeled b and c . It is also convenient in what follows to introduce a new variable s_a ("slack" variable) which defines the distance between the stress point and the boundary of the linearized strength domain :

$$\mathbf{A}_a : \boldsymbol{\sigma} - k_a + s_a = 0 \quad \text{with} \quad s_a \geq 0. \quad (3.2.9)$$

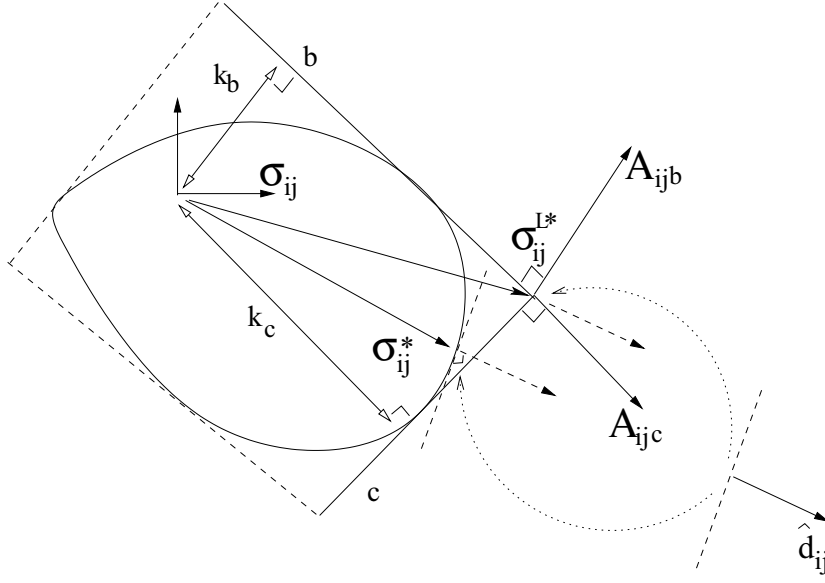


FIG. 3.1: The graphical method to construct the support function for a convex strength domain. The linearized strength domain bounds the support function externally and is represented by four hyper-planes (two dashed and two solid lines).

The same graphical method proposed above is used to construct the support function of the linearized strength domain, referred to as G_L . The translation of the hyper plane of normal $\hat{\mathbf{d}}$ towards G_L leads to the contact at the corner denoted σ^{L*} . It corresponds to the intersection of two hyper-planes of normal $\mathbf{A}_b$ and $\mathbf{A}_c$ in this specific illustration. The virtual rate of deformation tensor has to be oriented within the cone defined by these two normals. Consequently and more generally, the virtual rate of deformation is linearly related to the normals of the various hyper-planes defining the contact point

$$\mathbf{d}(\hat{\mathbf{U}}) = \sum_{a=1}^n \mathbf{A}_a \hat{\lambda}_a \quad \text{with} \quad \hat{\lambda}_a \geq 0, \quad (3.2.10)$$

where $\hat{\lambda}_a$ are the non-negative virtual deformation components. In the example of Figure 3.1, the $\hat{\lambda}_a$ associated to the dashed lines are zero and the only strictly positive scalars are related to the planes b and c . Furthermore, the support function of the linearized criterion has the following properties

$$\pi_L(\hat{\mathbf{d}}) = \sum_{a=1}^n \mathbf{A}_a \hat{\lambda}_a : \sigma^{L*} = \sum_{a=1}^n \hat{\lambda}_a k_a \geq \pi(\hat{\mathbf{d}}), \quad (3.2.11)$$

the second equality being a consequence of σ^{L*} belonging to each activated hyper-plane (non zero $\hat{\lambda}_a$) and on account of (3.2.8), which is then an equality.

The concept of support function is now used to derive the upper bound to the loading scalar α . The internal work defined in (3.2.2) is bounded by above with

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\hat{\mathbf{U}}) \leq \int_{\Omega} \pi_L(\hat{\mathbf{d}}) dV, \quad (3.2.12)$$

so that the theorem of virtual power provides

$$\alpha \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T}^o \cdot \hat{\mathbf{U}} dS \leq \int_{\Omega} \pi_L(\hat{\mathbf{d}}) dV - \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{U}} dV, \quad \forall \hat{\mathbf{U}} \in KA. \quad (3.2.13)$$

The right-hand side provides the upper bound α_U , after proper normalization in the left-hand side. The upper bound theorem, referred here as the maximum strength theorem, is thus summarized as the minimization problem with respect to the velocity fields

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \alpha_U = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{a=1}^n \hat{\lambda}_a k_a - \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{U}} \right\} dV \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{d}(\hat{\mathbf{U}}) = \sum_{a=1}^n \mathbf{A}_a \hat{\lambda}_a \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ & \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T}^o \cdot \hat{\mathbf{U}} dS = 1, \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

$$\hat{\lambda}_a \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\hat{\mathbf{U}} \in \mathcal{S}_u = \{ \hat{\mathbf{U}} | \hat{\mathbf{U}} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \}.$$

3.2.2 Discretisation of space and interpolation of the velocity field

The spatial discretization and the interpolation of the velocity field as well as of the virtual deformation components $\hat{\lambda}_a$ are now introduced.

The domain of interest Ω is approximated by the domain Ω^h where the boundary corresponds to a series of straight segments or planar surfaces, as illustrated for the 2D case in Figure 3.2a. The rest of this section presents the 2D element, the generalization to 3D is postponed to Appendix B. The interior of Ω^h is partitioned in q six-noded triangles ($q = 11$ in Figure 3.2b). Note that the mid-side nodes are at the same distance from the two nodes at the adjacent vertices. The virtual velocities within a six-noded triangle are interpolated in terms of the nodal virtual velocities.

The velocity interpolation over a 2D element is

$$\hat{\mathbf{U}}^h = \sum_{i=1}^3 \zeta_i (2\zeta_i - 1) \hat{\mathbf{U}}_i + 4[\zeta_1 \zeta_2 \hat{\mathbf{U}}_4 + \zeta_3 \zeta_2 \hat{\mathbf{U}}_5 + \zeta_1 \zeta_3 \hat{\mathbf{U}}_6], \quad (3.2.15)$$

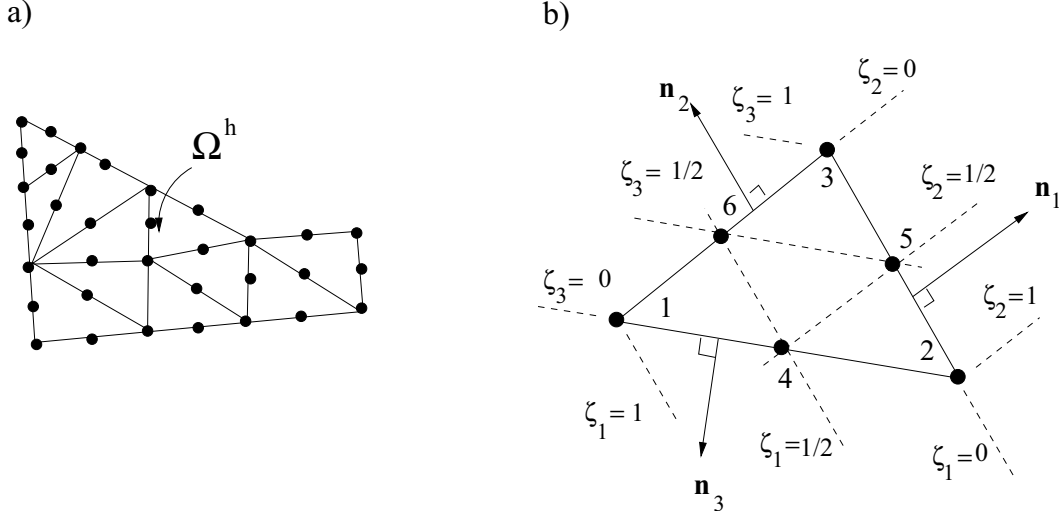


FIG. 3.2: Approximation of domain Ω by six-node triangles, a). The six-noded triangle local node numbering and the definition of the area-coordinates, b)

in terms of the area-coordinate ζ_i defined in Figure 3.2b and the six nodal velocities $\hat{\mathbf{U}}_i$. The interpolated fields, denoted with the letter h in upper-script, define a set of kinematically admissible fields

$$\mathcal{S}_u^h = \left\{ \hat{\mathbf{U}}^h | \hat{\mathbf{U}}_i = 0 \text{ if node } i \text{ on } \partial\Omega_u^h \right\} \subset \mathcal{S}_u, \quad (3.2.16)$$

which is a subset of $\mathcal{S}_u$. Consider that there are m degrees of freedom set to zero by the above boundary condition and define the equivalent, global linear system

$$[H]\{\hat{\mathbf{U}}\} = \{0\}_m, \quad (3.2.17)$$

in which $[H]$ is the $m \times p$ matrix with components set either to zero or one. The column vector $\{\hat{\mathbf{U}}\}$ in (3.2.17) is the global vector of nodal velocities which has, say, p components (twice the total number of nodes in 2D). The notation in the left-hand side of (3.2.17) implies a matrix multiplication resulting in a column vector of length m . Note also in the right hand-side of (3.2.17) that the subscript m defines the vector length, again for sake of clarity.

The element velocity interpolation is conveniently written in matrix notation as

$$\{\hat{\mathbf{U}}^h\} = [N_u]^e \{\hat{\mathbf{U}}\}^e, \quad (3.2.18)$$

in which $\{\hat{\mathbf{U}}\}^e$ is the column vector containing the local nodal velocities (length of 12) and $[N_u]^e$ is the 2×12 matrix of shape functions based on (3.2.15). The notation in (3.2.18) and in what follows for local array includes the letter e in superscript to avoid any confusion with the global arrays. The gradient of the area-coordinate are constant $\nabla\zeta_i = -\mathbf{n}_i l_i / A$ and oriented opposite

to the unit, external normal to the side opposite to node i , Figure 3.2b. Its norm is set by the length l_i of that side divided by the area A of the element. The gradient to the interpolated velocity (3.2.15) is thus

$$\begin{aligned} \nabla \hat{\mathbf{U}}^h &= - \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{A} (4\zeta_i - 1) \hat{\mathbf{U}}_i \otimes \mathbf{n}_i \\ &\quad - \frac{4}{A} [\hat{\mathbf{U}}_4 \otimes (\zeta_1 l_2 \mathbf{n}_2 + \zeta_2 l_1 \mathbf{n}_1) + \hat{\mathbf{U}}_5 \otimes (\zeta_2 l_3 \mathbf{n}_3 + \zeta_3 l_2 \mathbf{n}_2) + \hat{\mathbf{U}}_6 \otimes (\zeta_1 l_3 \mathbf{n}_3 + \zeta_3 l_1 \mathbf{n}_1)], \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

which is proportional to the area-coordinates (note that $\sum_i^3 \zeta_i = 1$). This gradient is used to construct the virtual rate of deformation tensor $\hat{\mathbf{d}}^h$ which is represented by the column vector $\{\hat{d}^h\}^e = {}^t(d_{11}^h, d_{22}^h, 2d_{12}^h)^e$ (note that a line vector is limited by parentheses and that the transpose of a column vector is a line vector). The virtual rate of deformation vector is then expressed in terms of the nodal velocities

$$\{\hat{d}^h\}^e = [B]_{3 \times 12}^e \{\hat{U}\}^e, \quad (3.2.20)$$

in which the local $[B]^e$ operator is the 3×12 matrix for each element constructed from (3.2.19).

Attention is now turned to the local interpolation of the virtual deformation components $\hat{\lambda}_a$ defined in (3.2.10). It is proposed that these n scalars be interpolated linearly

$$\{\hat{\lambda}^h\}_n^e = [N_\lambda]^e \{\hat{\lambda}\}_{3n}^e, \quad (3.2.21)$$

in terms of the vector of nodal values containing the $\hat{\lambda}_a$'s at the three vertices. The shape function N_λ of node i is thus simply the area coordinate ζ_i . This choice of interpolation implies that there is no continuity across the elements and the vector $\{\hat{\lambda}\}^e$ ($3n$ components) is indeed specific to each element. The local interpolation of the $\hat{\lambda}_a$'s is linear in the area-coordinates, as the interpolation of the virtual rate of deformation in (3.2.19) and (3.2.20). Consequently, the equality between the virtual rate of deformation and the linear combination of the stress normals in (3.2.10) is satisfied point-wise over each element by enforcing it at three specific points. The nodes at the vertices of each element are chosen for that purpose. The resulting system of equations reads

$$[\mathcal{B}]^e \{\hat{U}\}^e = [\mathcal{A}]_{9 \times 3n}^e \{\hat{\lambda}\}^e, \quad (3.2.22)$$

in which the 9×12 $[\mathcal{B}]^e$ and the $9 \times 3n$ $[\mathcal{A}]$ matrices are defined by

$$[\mathcal{B}]^e = \begin{bmatrix} B^e(\zeta_i = \delta_{i1}) \\ B^e(\zeta_i = \delta_{i2}) \\ B^e(\zeta_i = \delta_{i3}) \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{A}]^e = \begin{bmatrix} [A]^e & [0] & [0] \\ [0] & [A]^e & [0] \\ [0] & [0] & [A]^e \end{bmatrix} \quad \text{with} \quad [A]_{3 \times n}^e = \begin{bmatrix} A_{111} & \dots & A_{11n} \\ A_{221} & \dots & A_{22n} \\ 2A_{121} & \dots & 2A_{12n} \end{bmatrix}, \quad (3.2.23)$$

3.2. The maximum strength theorem with spatial discretization

in which δ_{ij} is the Kronecker delta and the A_{ija} are the ij -component of the normal $\mathbf{A}_a$ to the a^{th} hyper-plane.

To prepare the grounds for the discretization of the pre-defined discontinuities, it is convenient to multiply both sides of (3.2.22) by $\frac{1}{3}A$, a third of the element area. In addition, the new scaled variables $\{\bar{\lambda}\}^e \equiv \{\frac{1}{3}A\hat{\lambda}\}^e$ are introduced so that (3.2.22) is replaced by

$$[\bar{\mathcal{B}}]^e \{\hat{U}\}^e = [\mathcal{A}]^e \{\bar{\lambda}\}^e, \quad (3.2.24)$$

The matrix $[\bar{\mathcal{B}}]^e = \frac{1}{3}A[\mathcal{B}]^e$ is represented in closed form as

$$[\bar{\mathcal{B}}]_{9 \times 12}^e = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3P_1 & -P_2 & -P_3 & 4P_2 & 0 & 4P_3 \\ -P_1 & 3P_2 & -P_3 & 4P_1 & 4P_3 & 0 \\ -P_1 & -P_2 & 3P_3 & 0 & 4P_2 & 4P_1 \end{bmatrix}, \quad (3.2.25)$$

in terms of the 3×2 matrix

$$[P_i] = l_i \begin{bmatrix} n_1^i & 0 \\ 0 & n_2^i \\ n_2^i & n_1^i \end{bmatrix}, \quad (3.2.26)$$

with (n_1^i, n_2^i) being the two components of the unit outward normal to side i (opposite node i). Equations (3.2.25) and (3.2.26) are derived from (3.2.19). It is noted that $[\bar{\mathcal{B}}]^e$ is well defined regardless of the element area. This feature is of key importance in the incorporation of kinematically admissible velocity discontinuities as discussed at the end of this section.

Symbol	definition
q	number of elements
p	total number of velocity degrees of freedom
m	total number of velocity degrees of freedom set to zero (bound. cond.)
n	number of hyper-planes in stress space to bound the strength domain

TAB. 3.1: Various definitions related to the discretization, the different interpolations and the linearization of the strength domains.

In summary, the minimization problem (3.2.14), after discretization and interpolation, is written as

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && \alpha_U = {}^t\{k\}_{q3n}\{\bar{\lambda}\} - {}^t\{G\}_p\{\hat{U}\} \\
 & \text{subject to} && [\bar{\mathcal{B}}]_{9q \times p}\{\hat{U}\} = [\mathcal{A}]_{9q \times q3n}\{\bar{\lambda}\}, \\
 & && [H]_{m \times p}\{\hat{U}\} = \{0\}_m, \\
 & && {}^t\{T_0\}\{\hat{U}\} = 1, \\
 & && \{\bar{\lambda}\} \geq \{0\},
 \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

in which the size of the global vectors and matrices could be estimated with the definitions summarized in Table 3.1. Note that a vectorial inequality should be interpreted as a series of inequalities for the corresponding components on the two sides. The n successive components of the global $\{k\}$ vectors, for a given node in a given element, are the reference stresses k_a defined in (3.2.9), assumed to be constant over each element for sake of simplicity. The vector $\{G\}$ requires a global assembly (several elements contributes to the same degree of freedom), the contribution of a single element being ${}^t\{G\}^e = \rho A(0; 0; 0; 0; 0; 0; g_x/3; g_y/3; g_x/3; g_y/3; g_x/3; g_y/3)$, assuming a constant mass density and body force per element. The vector $\{T_0\}$ requires also a global assembly and its expression depends on the distribution of the applied force $\mathbf{T}_0$ on the boundary $\partial\Omega_T$

3.2.3 The dual problem

The objective is now to construct the dual problem to (3.2.27) following the classical argument known in Linear Programming and presented for sake of completeness in Appendix A. To comply with the structure of the primal problem presented there, decompose the vector of nodal velocities $\{\hat{U}\}$ into two vectors of unknowns $\{\hat{U}^+\}$ and $\{\hat{U}^-\}$ with the conditions :

$$\{\hat{U}\} = \{\hat{U}^+\} - \{\hat{U}^-\} \quad \text{with} \quad \{\hat{U}^+\} \geq \{0\} \quad \text{and} \quad \{\hat{U}^-\} \geq \{0\}. \tag{3.2.28}$$

The primal problem (3.2.27) then becomes

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} \quad \alpha_U = \left({}^t\{k\}; -{}^t\{G\}; {}^t\{G\} \right) \left\{ \begin{array}{c} \{\bar{\lambda}\} \\ \{\hat{U}^+\} \\ \{\hat{U}^-\} \end{array} \right\}, \\
 & \text{subject to} \quad \begin{bmatrix} [\mathcal{A}] & -[\bar{\mathcal{B}}] & [\bar{\mathcal{B}}] \\ [0] & [H] & -[H] \\ (0) & {}^t\{T_0\} & -{}^t\{T_0\} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \{\bar{\lambda}\} \\ \{\hat{U}^+\} \\ \{\hat{U}^-\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{0\}_{9q} \\ \{0\}_m \\ 1 \end{array} \right\}, \\
 & \quad \left({}^t\{\bar{\lambda}\}; {}^t\{\hat{U}^+\}; {}^t\{\hat{U}^-\} \right) \geq (0)_{3qn+2p}.
 \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

The dual problem, following the results presented in Appendix A reads

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize} \quad \alpha_U = \left((0)_{9q}; (0)_m; 1 \right) \left\{ \begin{array}{c} \{\tilde{\sigma}\} \\ \{\tilde{R}\} \\ \alpha_U \end{array} \right\}, \\
 & \text{subject to} \quad \begin{bmatrix} {}^t[\mathcal{A}] & [0] & \{0\} \\ -{}^t[\bar{\mathcal{B}}] & {}^t[H] & \{T_0\} \\ {}^t[\bar{\mathcal{B}}] & -{}^t[H] & -\{T_0\} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \{\tilde{\sigma}\} \\ \{\tilde{R}\} \\ \alpha_U \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \{\tilde{s}_\lambda\} \\ \{\tilde{s}^+\} \\ \{\tilde{s}^-\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{k\} \\ -\{G\} \\ \{G\} \end{array} \right\}, \\
 & \quad \left({}^t\{\tilde{s}_\lambda\}; {}^t\{\tilde{s}^+\}; {}^t\{\tilde{s}^-\} \right) \geq (0)_{3nq+2p},
 \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

in which $3nq+2p$ slack variables have been introduced. Those variables are eliminated to provide the equivalent optimization problem

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize} \quad \alpha_U \\
 & \text{subject to} \quad {}^t[\bar{\mathcal{B}}]\{\tilde{\sigma}\} = {}^t[H]\{\tilde{R}\} + \alpha_U\{T_0\} + \{G\}, \\
 & \quad {}^t[\mathcal{A}]\{\tilde{\sigma}\} \leq \{k\}.
 \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

A physical interpretation of the dual variables is now tentatively proposed. The $\tilde{\sigma}$ (3 components at each vertex) can be seen as stress-like quantities from the dimension point of view. The $\tilde{R}$ (1 component for each constrained velocity degree of freedom) are like reaction forces. The set

of equalities in (3.2.31) is then seen as an expression of the balance of the internal and external forces for the dual problem. It is for that reason that the matrix $[\tilde{\mathcal{B}}]$ is often referred to as the pseudo-equilibrium matrix. This interpretation is however limited in the sense that none of the above stress-like quantities are derived from a statically admissible stress field. We can only state that the dualization has provided a max-problem which is convenient to search for the upper bound to the tectonic force.

The set of inequalities in (3.2.31) is due to the linearized strength domains introduced in (3.2.8). The linearization of the strength domain tends to the original non-linear domain in the limit of an infinite number of hyper-planes. In this limit, the linearized strength domain can be replaced by the original non-linear domain so that (3.2.31) becomes

$$\begin{aligned}
 &\text{maximize} && \alpha_U \\
 &\text{subject to} && {}^t[\tilde{\mathcal{B}}]\{\tilde{\sigma}\} = {}^t[H]\{\tilde{R}\} + \alpha_U\{T_0\} + \{G\}, \\
 &&& G(\tilde{\sigma}_i) \leq 0 \text{ for } i = 1 \text{ to } 3, \text{ for each element in } \Omega^h.
 \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

It is this problem which is set up with SARPP (2008) and solved with MOSEK (2008) in 2D and 3D. The details of the 3D formulation are presented in Appendix B. Appendix C establishes the link with the conic programming algorithms adopted in MOSEK (2008). It is emphasized that although the final problem is reminiscent of a classical lower bound construction, it does in fact result in a rigorous upper bound. The procedure of (i) linearizing the strength domain, (ii) setting up a discrete upper bound problem, (iii) taking the dual, and finally (iv) replacing the linearized strength domain by the original non-linear domain provides a completely general approach to numerical upper bound limit analysis. In contrast, numerical formulations based on the primal form of the upper bound theorem are highly dependent on the particular expression of the strength domain.

3.2.4 Velocity discontinuities

The ability to incorporate kinematically admissible velocity discontinuities across surfaces of known geometry is often desired as for example in the 2D and 3D wedge problems considered next. The internal work for the continuum problem in (3.2.2) should then be amended to account for the virtual power $\mathbf{T} \cdot \llbracket \hat{\mathbf{U}} \rrbracket$ in which $\mathbf{T}$ is the stress vector dual to the jump in the virtual velocities. These surfaces have specific material properties reflected by a strength domain which would be represented in a stress space of reduced dimension. Typically this dimension

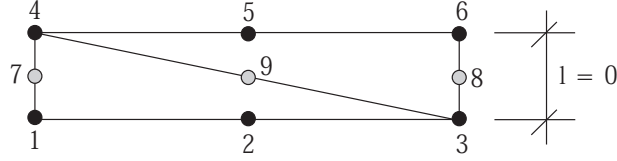


FIG. 3.3: Kinematically admissible velocity discontinuity comprised of two infinitely thin quadratic elements.

is two, corresponding to the resolved shear stress and the normal stress. The linearization of these strength domain, if necessary, would lead to additional non-negative virtual deformation components $\hat{\lambda}_j$ introduced to decompose the velocity jump, in the same way the rate of deformation was presented in (3.2.10). These extra variables would be included into the upper bound problem (3.2.14). The dualization of Section 2.3 would have been done along the same line of thoughts with additional dual variables corresponding to stress-like vector. Alternatively, we consider that a material discontinuity is simply an infinitely thin layer of material, likely of specific properties, but which is discretized similarly to the bulk region. The feasibility of this approach – and indeed, its equivalence to traditional kinematic formulation such as that of Sloan and Kleeman (1995) – was first demonstrated by Krabbenhoft et al. (2005) in the context of elements with a linear variation of the velocities.

In the present paper, elements with a quadratic variation of the velocities are used. The construction of the discontinuity with a zero-thickness patch of elements is possible thanks to the appropriate scaling with the element area, leading to the introduction of the matrix $[\bar{\mathcal{B}}]^e$ in (3.2.25). This matrix is well defined even for an element area identically set to zero. Therefore, as a direct extension of the linear velocity element we propose to construct discontinuities of known position and geometry as patches of two zero-thickness quadratic elements, as illustrated in Figure 3.3. The resulting velocity jumps are quadratic and should have relatively moderate influence on the accuracy of the limit load. It is of interest to reduce the number of variables associated with a given discontinuity. For this purpose, the internal discontinuity velocities (which are not attached to either of the jointed regions) are expressed in terms of the others (the nodes attached to either side) in the following way :

$$\hat{U}_7 = \frac{1}{2}(\hat{U}_1 + \hat{U}_4), \quad \hat{U}_8 = \frac{1}{2}(\hat{U}_3 + \hat{U}_6), \quad \hat{U}_9 = \frac{1}{2}(\hat{U}_2 + \hat{U}_5). \quad (3.2.33)$$

Other choices are of course possible, but numerical tests suggest that the above proposition is efficient, with only a marginal decrease in accuracy as compared to the case of a full quadratic discontinuity with three independent internal nodes Pastor (2006). It should be emphasized that this condensation restricts the velocities to vary linearly *across* a discontinuity. *Along* the

discontinuity, the velocity jump is still quadratic in the tangential direction, in contrast to more traditional kinematic formulations (e.g. Pastor et al., 2008).

3.3 Application to the 2D stability of accretionary wedges

The objective of this section is to validate the numerical development with the example of the 2D stability of accretionary wedges, and in particular of cohesionless triangular wedges. There is an analytical solution (Dahlen, 1984) for that particular case whose can also be obtained with the Mohr construction (Lehner, 1986).

The 3D wedge studied in the companion paper is presented in Figure 3.4a where the observer is seen exerting the force Q on the back wall. His horizon is set on the décollement so that gravity is acting at the angle β from the vertical direction. Of interest to this contribution is the wedge in the 2D central cross section ABC which angle is $\alpha + \beta$, Figure 3.4b. Geometrical and material parameters are provided in Table 3.2.

3.3.1 The critical wedge theory

Symbol	definition	value	unit
α	topographic slope angle	variable	deg
β	décollement angle	3	deg
D	total length of the décollement	50	km
δ	thickness of décollement and back wall	$10^{-6}D$	km
ϕ_{BW}	friction angle of the back wall	variable	deg
C_{BW}	cohesion of the back wall	0.	Pa
ϕ_D	friction angle of the décollement	15	deg
C_D	cohesion of the décollement	0.	Pa
ϕ_b	friction angle of the bulk material	30	deg
C_b	cohesion of the bulk material	0.	Pa
ρ	material density	2200.	kg/m^3
g	gravity acceleration	9.81	m/s^2

TAB. 3.2: Geometrical and material parameters for the 2D applications unless they vary from one simulation to the other. The critical slope $\alpha_c = 3.38^\circ$ for this data set.

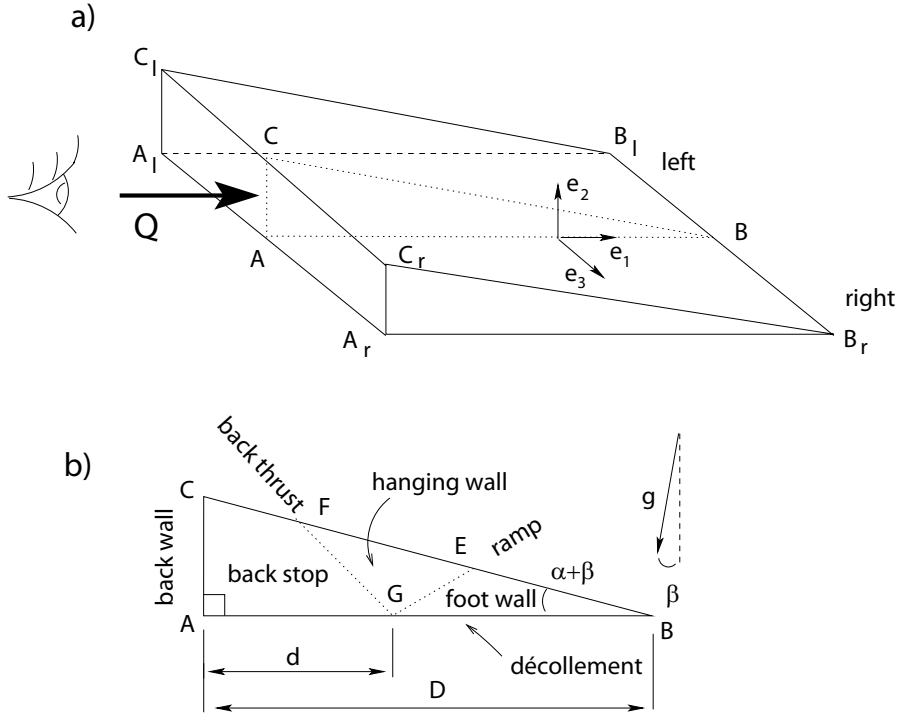


FIG. 3.4: The 3D geometry of the accretionary wedge a) and the central cross-section considered for the 2D analysis, b).

The theory of the critical, cohesionless wedge is summarized as follows considering the slope of the décollement β constant. For topographic angles α less than α_c , the deformation occurs at the back of the structure which is said to be sub-critical. The failure mode is typically composed of a ramp and a back thrust, as illustrated in Figure 3.4b for 2D problems by the segments GE and GF , respectively. They correspond ideally to velocity discontinuities (Cubas et al., 2008). Material in the back stop is displaced parallel to the décollement before taking a trajectory parallel to the ramp at the crossing of the back thrust. The material in the hanging wall is over thrusting the material in the foot wall which is at rest. For sub-critical slope conditions ($\alpha < \alpha_c$), the common root of the two discontinuities on the décollement is as much as possible to the back, so that point F is superposed on point C . Only part of the décollement is activated, segment AG . For slope angles larger than α_c , the deformation is to the front and the structure is said to be super-critical. In that instance, the failure mechanism (ramp, back thrust) collapses to a single point at the toe of the wedge, point B , and the whole décollement is activated. The transition occurs exactly for $\alpha = \alpha_c$ and is marked by the potential activation of faulting everywhere within the wedge. The distance of the root of the failure mechanism, denoted d , is

then undetermined. The analytical expression (Dahlen, 1984) for the critical slope angle is

$$\alpha_c + \arcsin\left(\frac{\sin \alpha_c}{\sin \phi_R}\right) = -2\beta + \arcsin\left(\frac{\sin \phi_D}{\sin \phi_R}\right) - \phi_D. \quad (3.3.1)$$

This interpretation of Dahlen's solution is in line with the results of Cubas and al. (2008) who applied the maximum strength theorem for the failure mechanism composed of a ramp and back thrust. Their minimization is in terms of three variables, the dips of the two velocity discontinuities and the position d of their common root on the décollement. These analytical results pinpoint exactly the transition. The objective is now to repeat this analysis with the proposed numerical scheme without postulating the shape nor the position of the failure modes.

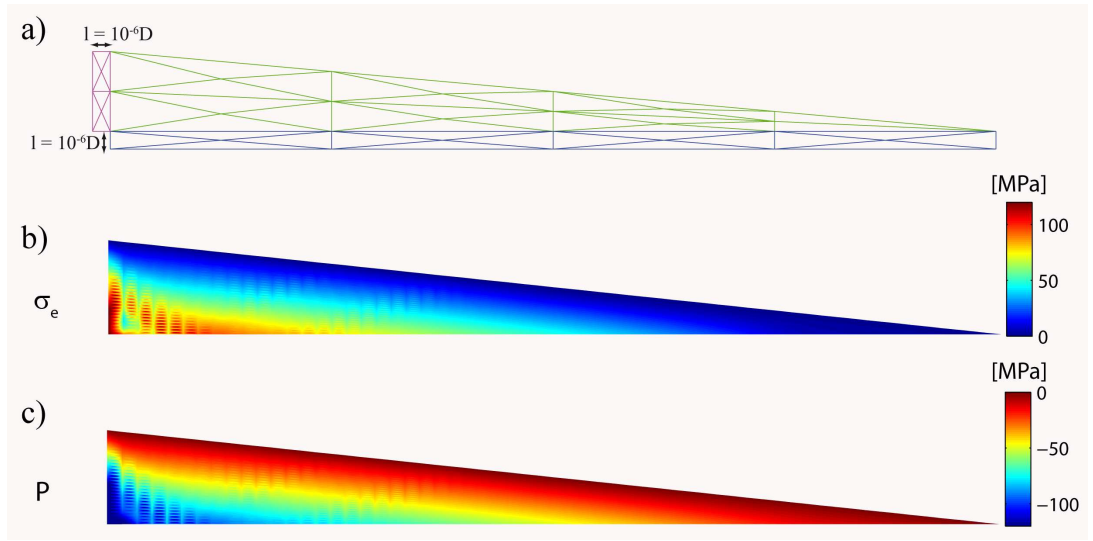


FIG. 3.5: The type of mesh over the wedge, including the collapsed elements for the interfaces, a). The two invariants of the stress-like results, the in-plane mean stress P b), and the equivalent stress σ_e for $\alpha = 3^\circ$, c), corresponding to sub-critical slope conditions. Units : MPa.

The mesh considered for that problem consists of 60×30 cells, each composed of four crossed triangles, except for the cells at the toe composed of a single triangular element. A coarse mesh is presented in Figure 3.5a for sake of illustration. The collapsed cells for friction on the back wall and the décollement are also presented. The thickness of these two layers is set to $\delta = 10^{-6}D$ corresponding to the physical thickness of 5 cm. There is a total of 7470 elements and 15123 nodes. The boundary conditions are as follows. The velocities on the lowest plane parallel to the décollement are prescribed to be zero (see equation 3.2.17). The horizontal component of the velocity at the rear of the back wall layer are set to one, leading to an algorithm slightly different from the general case presented in section 2 and discussed in Souloumiac (2008). The only material property not set in Table 3.2 is the back wall friction angle : $\phi_{BW} = 30^\circ$.

3.3. Application to the 2D stability of accretionary wedges

The fundamental problem unknowns are the three stress components (σ_{11} , σ_{22} and σ_{12}) defined at the three vertices of each triangle, in the basis attached to the observer, Figure 3.4a. Results of the dual problem are presented in Figure 3.5b and c in terms of the equivalent shear stress and the in-plane mean stress defined in (3.2.4). These results are obtained for $\alpha = 3^\circ$, corresponding to sub-critical conditions ($\alpha_c = 3.38^\circ$). It is tentatively proposed to interpret physically those stress fields although they are not statically admissible. The motivation for this proposition comes from the stress distribution which is mostly parallel to the topography. There is thus an invariance of the stress field with respect to the position along the free surface, the classical assumption in the critical wedge theory. This spatial dependence is altered close to the back wall for reasons which will be discussed in the next subsection. This variation occurs in a region of characteristic size less than the wedge height defined as $H = D \tan(\alpha + \beta)$.

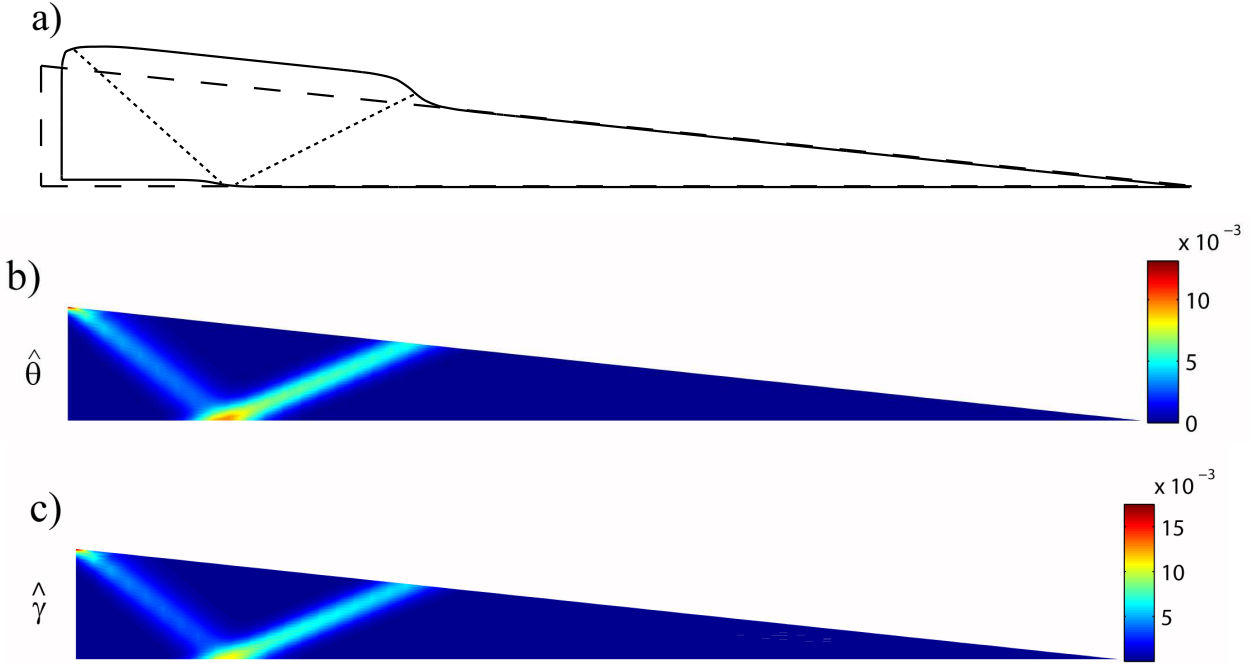


FIG. 3.6: Sub-critical slope conditions : $\alpha = 3^\circ < \alpha_c$. The deformed boundary of the mesh based on the nodal velocities at the six nodes of each triangle, superposed to the original mesh in dashed lines, a). The dotted segments mark the core of the zone of localized virtual deformation and could be interpreted as the back thrust and the ramp. Iso-contours of the virtual volumetric $\hat{\theta}$ and the virtual equivalent shear strain $\hat{\gamma}$ are presented in b) and c), respectively.

The primal variables are the nodal velocities and they are also computed by the optimization code MOSEK (2008). They are used in Figure 3.6a to construct the boundary of the deformed mesh considering the virtual velocity as the actual velocity and taking a time step of arbitrary

magnitude. The original domain boundaries correspond to the dashed lines. There is a forward motion of two triangular regions with boundaries delineated by dotted segments, which we propose to mark the ramp and the back thrust. The region most to the rear is the back stop and the other the hanging wall. Their boundaries are strips of localized deformation. The motion along the décollement ceases at the point where the ramp and the back are rooting. This interpretation of the failure mechanisms and more generally the analysis of the spatial gradient in the virtual rate of deformation tensor are facilitated with the introduction of the two invariants

$$\hat{\theta} = \text{tr}(\mathbf{d}(\hat{\mathbf{U}})), \quad \hat{\gamma} = \sqrt{\hat{\mathbf{d}}' : \hat{\mathbf{d}}'} \quad \text{with} \quad \hat{\mathbf{d}}' = \hat{\mathbf{d}} - \frac{\hat{\theta}}{3}\mathbf{\delta}, \quad (3.3.2)$$

in which $\hat{\mathbf{d}}'$ is the deviatoric, virtual rate of deformation tensor. The first invariant is the virtual volumetric strain and the second, the virtual equivalent shear strain. They are plotted in 3.6b and c over the original domain. One observes a strong virtual strain localization along the two directions at 23.5° and 40.5° corresponding to the expected dips of the ramp and the back thrust. The virtual dilation $\hat{\theta}$ is of course more difficult to interpret physically, in the absence of any plasticity constitutive response. In particular, the vertical displacement along the décollement which marks its activation extent, and seen in Figure 3.6a, will not be interpreted beyond the constraint due to the structure of the support function in equation 3.2.7. We know from Cubas et al. (2008) that the décollement is in condition (2) and the virtual velocity vector is at the angle ϕ_D from this surface, explaining the virtual opening necessary for the virtual sliding. This opening or dilation is necessary according to the definition of the support function. It is interesting to note that the dual problem leads to the same conclusion although the exact expression for the support function is not required.

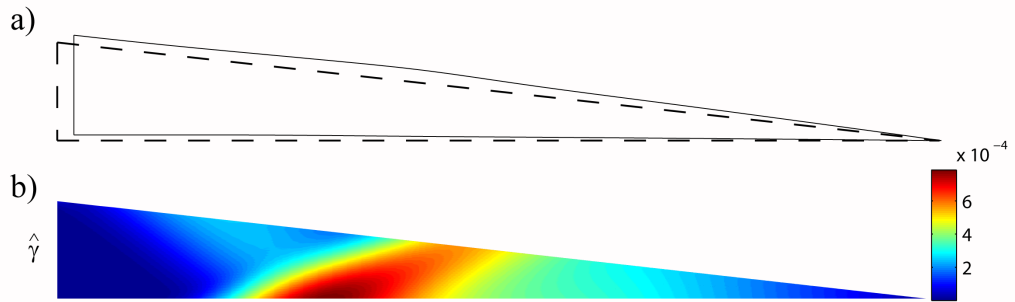


FIG. 3.7: Critical slope conditions : $\alpha = \alpha_c$. The boundary of the deformed mesh superposed to the original mesh, dashed lines, a) and the iso-contours of equivalent-shear virtual-strain $\hat{\gamma}$ in b). The whole décollement is activated and the deformation is rather diffuse.

3.3. Application to the 2D stability of accretionary wedges

Results for the topographic slope at criticality ($\alpha = \alpha_c$) are presented in Figure 3.7 and consist of the deformed mesh and the distribution of the virtual equivalent shear strain $\hat{\gamma}$. Most of the décollement appears to be activated and the virtual deformation in the bulk is mostly diffuse with a large ramp region which marks more the flexure of the domain than the tendency for the virtual strain to localize. Results for super-critical slope conditions are presented in Figure 3.8. The whole décollement is activated except at the toe where there are some mesh effects. The virtual deformation is zero in most of the wedge except in that specific region.

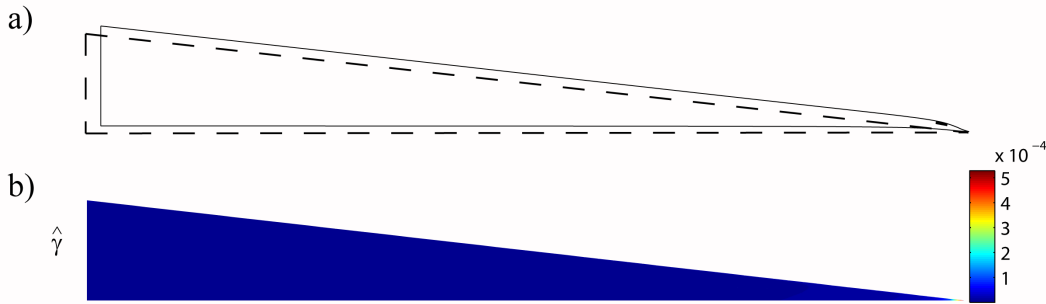


FIG. 3.8: Super-critical slope conditions : $\alpha = 3.5 > \alpha_c$. The boundary of the deformed mesh superposed to the original mesh, dashed lines, a) and the iso-contours of equivalent-shear virtual-strain $\hat{\gamma}$ in b).

The results presented in Figures 3.6 to 3.8 illustrate that our numerical implementation does capture the stability of the perfectly-triangular wedge. The mode of failure is indeed with a ramp and back thrust system defined numerically as localized zone of virtual shear and dilation. Such strips are well described by sharp velocity discontinuities in analytical work (Cubas and al. 2008). The dips of the numerical failure system coincide with the analytical predictions.

This quantitative validation is continued by plotting in Figure 3.9 the distance d , positioning the root of the failure mechanism on the décollement, as a function of the topographic slope α (back wall friction $\phi_{BW} = 30^\circ$). The dashed vertical line corresponds to Dahlen's critical slope of $\alpha_c = 3.38^\circ$. The numerical results are presented as open circles linked by the series of solid segments. For α less than α_c , d is as small as possible to let the back thrust outcrop on the top surface. It is equal to the whole décollement length, D , for values larger then α_c . The numerical transition occurs exactly for the analytical value of the critical slope, further validating the numerical development.

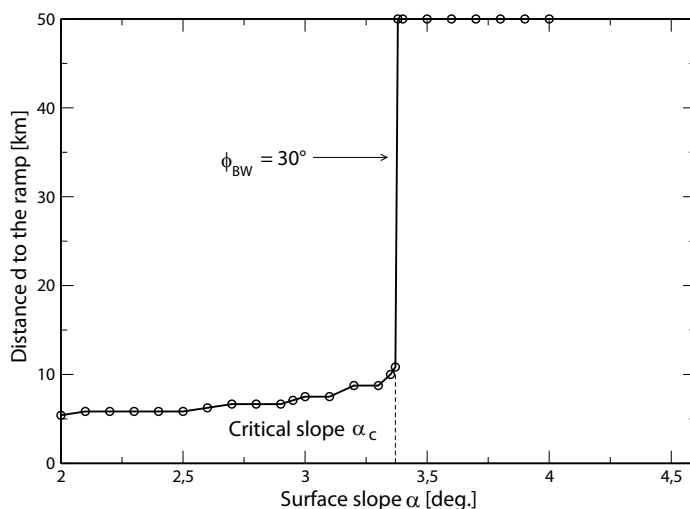


FIG. 3.9: The position of the root of the ramp and back thrust on the décollement as a function of the topographic slope. The dashed line marks the analytical solution of Dahlen (1984).

3.3.2 Influence of the friction on the back wall

The series of 2D results are completed with a regard on the influence of the back wall friction. This analysis is certainly of most interest to the practitioners of numerical modeling and physicists reproducing with analogue materials in the laboratory the work of nature, where the concept of boundary conditions remains difficult to grasp (Schreurs et al., 2006). The topographic slope is set to $\alpha = 3^\circ$, corresponding to sub-critical conditions so that failure should occur close to the back wall.

The upper bound in the tectonic force necessary to initiate failure is presented as a function of the back wall friction angle in Figure 3.10. The curve is approximately defined by two straight segments intersecting for the specific value $\phi_{BW}^* = 5.8^\circ$. This critical value of the back wall friction angle marks also a change in the failure modes which are illustrated in Figure 3.11 with isocontours of virtual equivalent shear strain. For the smallest value $\phi_{BW} = 3^\circ$, the failure mode is composed of a single ramp taking root on the décollement at the back wall contact. A triangular region is virtually moving up the ramp requiring shear along the back wall. For values of the friction angle close to ϕ_{BW}^* , a fraction of the décollement is activated and the back thrust is intersecting the back wall at depth. The failure system favors the activation of the décollement instead of sliding on the back wall. The transition to the straight ramp and back thrust takes place for ϕ_{BW} larger than ϕ_{BW}^* , as illustrated in Figure 3.11d and e, for 7° and 15° .

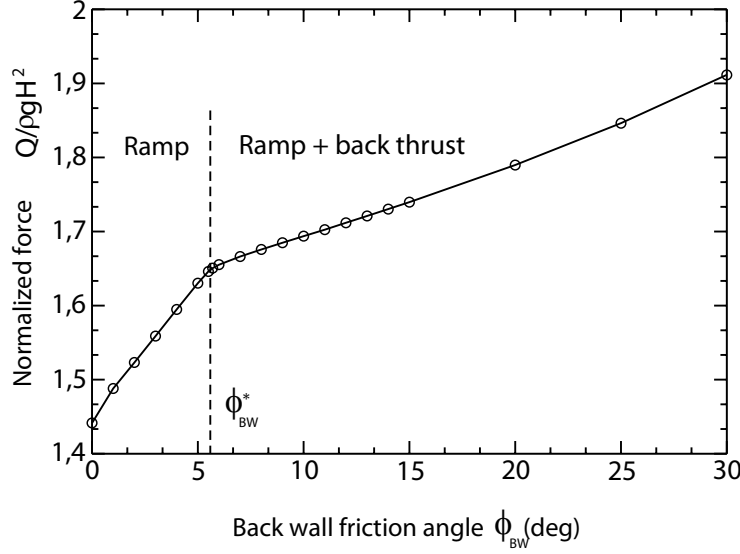


FIG. 3.10: The normalized upper bound to the tectonic force as a function to the friction angles on the back wall.

The dual stress field for the case of $\phi_{BW} = 5.7^\circ$ is presented in Figure 3.12 in terms of the two invariants σ_e and P , defined in (3.2.4). The main difference with the results obtained for $\phi_{BW} = 30^\circ$ in Figure 3.5 is the absence of stress concentration at the bottom left corner of the wedge. The stress state seems to be only function of the distance to the topographic surface, a classical stress state in soil mechanics and used by Dahlen (1984) and Lehner (1986). This statically admissible stress state is used next to explain further the influence of the back wall friction on the failure mode.

The stress state is assumed to be independent of the position along the topography (x-coordinate in Figure 3.13a) and thus reads $\sigma_{xz} = \rho g z \sin \beta$ and $\sigma_{zz} = -\rho g z \cos \beta$. The stress vector $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ acting on the facette no 1 along topography in Figure 3.13a has the component $(\tau = -\sin \beta, \sigma_n = -\cos \beta)$, once normalized by $\rho g z$, in the direct basis $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ shown in the same Figure. This stress vector corresponds to point T in the Mohr construction of Figure 3.13b where the normalized coordinates $\sigma_n/\rho g z$ and $-\tau/\rho g z$ are used to render consistent the stress sign convention and the use of the pole defined in what follows. The normalization in the absence of any cohesion for the Coulomb criterion renders the following construction applicable at any position within the wedge. The two Mohr circles which are presented are tangent to the Coulomb strength criterion. They represent the active and the passive stress state, respectively. We are interested by the passive circle defining the failure mode under compression at the back of the wedge. The pole P of this circle is defined by the remarkable property that any line oriented with

the physical dip of the facette of interest (not its normal) and passing through P also intersects the Mohr circle at the point defining the relevant stress vector (see Mandl, 2005). This is clearly the case of facette 1 which was used to construct the pole. It is also true of the décollement dipping at β which has the stress vector at point R'. The zoom in the region of points R' and T in Figure 3.13c shows that this point R' differs from point R which is the stress vector necessary to activate the décollement with friction angle ϕ_D . The point R' is below R and signals that the décollement friction is too large for being activated. Our choice of parameters does correspond to sub-critical conditions. The pole is further used to construct the stress vector of facette no 2, parallel to the back wall, which is at point S in the Mohr's construction. The value of the friction angle which would mark the activation of slip along the back wall is $\phi_{BW}^* \simeq 6^\circ$, within the accuracy of the measure with a protractor. This is certainly sufficient approximation of the 5.7° found numerically above.

If ϕ_{BW} is larger than ϕ_{BW}^* , slip is prevented to occur on the back wall and the back stop can only glide on the décollement. For ϕ_{BW} smaller than ϕ_{BW}^* , slip can occur on the back wall and the failure mechanism makes use of that property to initiate the ramp at the back wall. The back stop is then part of the hanging wall. For the critical value ϕ_{BW}^* , the numerical stress field coincides closely to the statically admissible field used in the Mohr's construction, see Figure 3.12.

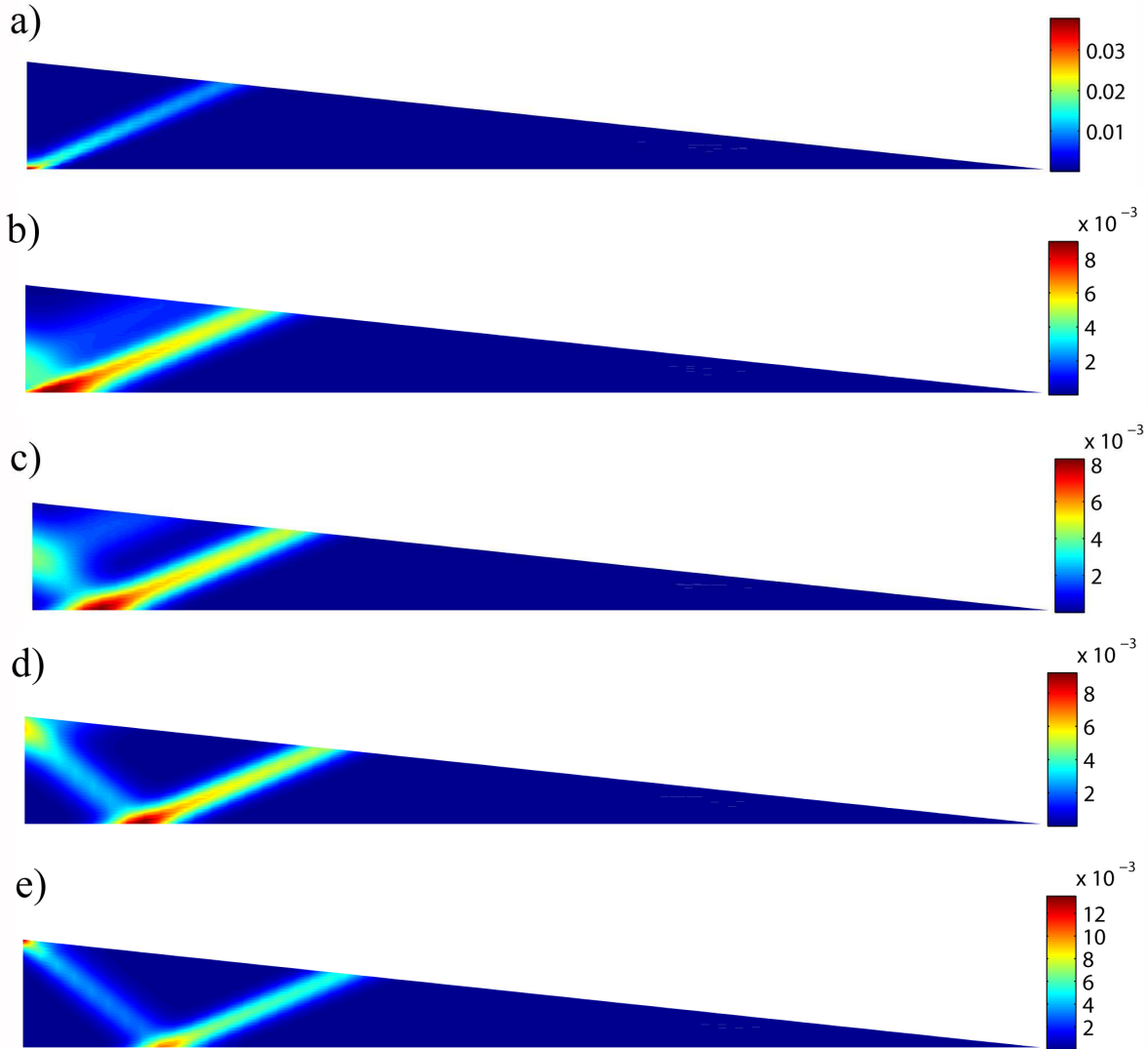


FIG. 3.11: The failure mode for sub-critical topographic slope conditions ($\alpha = 3^\circ < \alpha_c$) for five values of the back wall friction ϕ_{BW} set to 3° , 5.5° , 5.7° , 7° and 15° , in a) to e), respectively. Iso-contours of the virtual equivalent shear strain $\hat{\gamma}$.

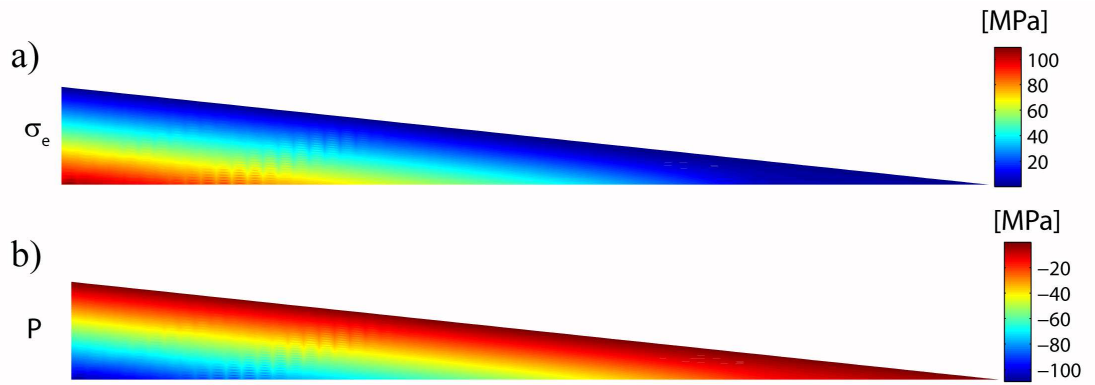


FIG. 3.12: The two stress invariants, the equivalent shear σ_e and the in-plane mean stress P in a) and b), respectively, for a back wall friction $\phi_{BW} = 5.7^\circ$

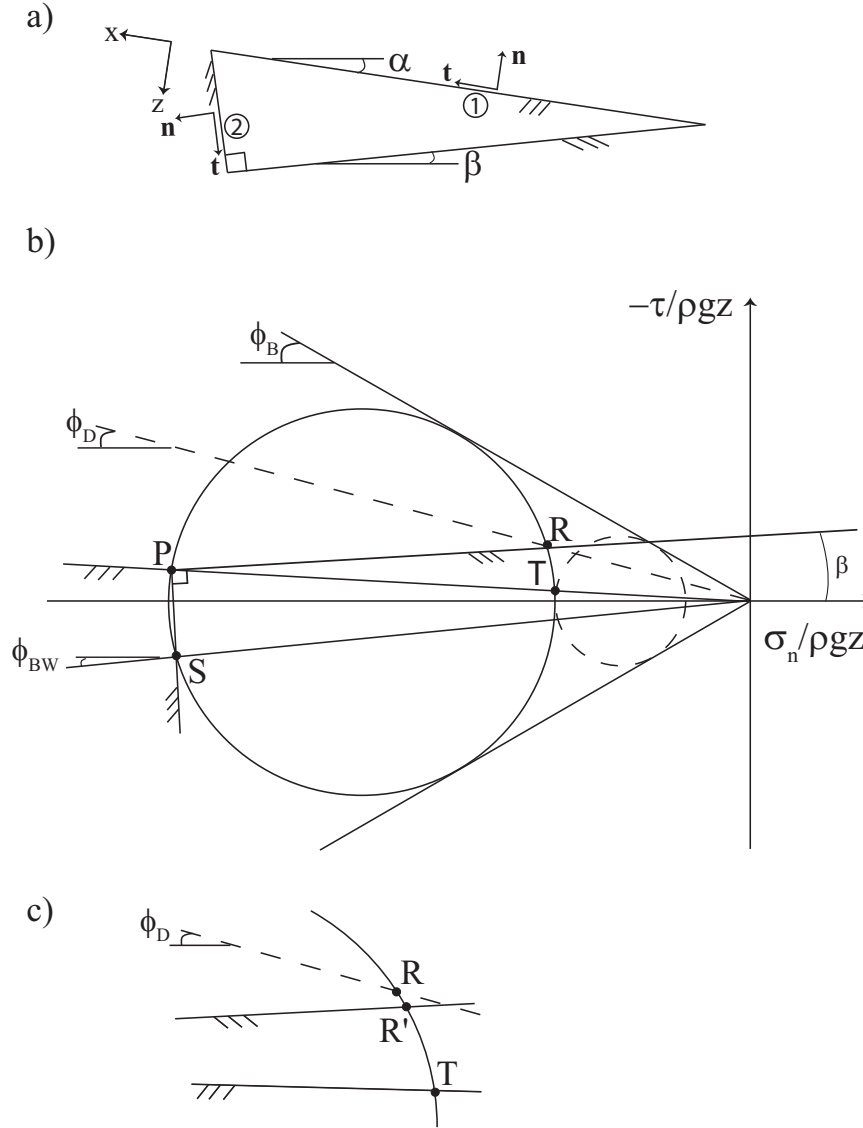


FIG. 3.13: The Mohr's construction for the triangular wedge in a). The stress vector on facette 1, parallel to the topography, defines point T as well as the position of the pole on the circle, point P, b). The segment PR is dipping at β and provides the stress acting on the décollement, point R'. The stress vector acting on facette 2 in a), is the point S in b). The zoom in c) of the region of points R and T in b), shows that the décollement is not activated since R' requires a friction angle on the décollement smaller than the value used for the construction.

3.3.3 Comparison with analogue experiments

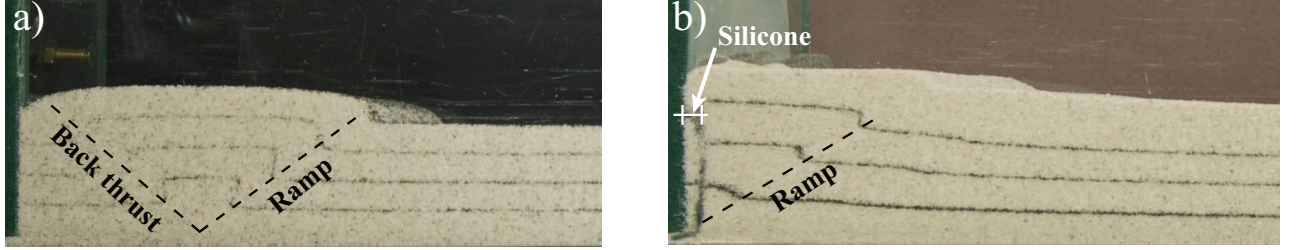


FIG. 3.14: Two pictures of the laboratory experiments from the side showing a ramp and back-thrust for failure mode a) and a ramp only in b) in the absence and the presence of a layer of silicone along the back wall, respectively.

It is now proposed to compare the failure modes predicted from the virtual velocity field with the results of laboratory experiments with sand. The box is composed of two parallel side glass walls, separated by the distance of 7 cm, clamped on a flat plate defining the plane of the décollement. The fourth plate corresponds to the back wall which exerts the force necessary to compress the granular, analogue material and can be displaced between the two lateral walls. The fifth plate is clamped on the décollement, and parallel to the back wall at a distance $D = 37\text{cm}$, initially. The internal region is filled with a well-sorted (good distribution in grain size) Fontainebleau quartz sand (median grain size of $250\ \mu\text{m}$). Its friction angle is of the order of 30° (Schreurs et al., 2006). The friction over the side glass and the bottom plate is close to 15° thanks to a proper treatment with chemical product. The friction over the back wall is much larger unless a thin layer of silicon putty (Dow Corning SGM 36) is inserted. This material has a viscosity of $\mu = 5 \times 10^4\text{Pas}$. The rate of compression is set to $8.3 \times 10^{-6}\text{m/s}$ and the ramp in the sand inclined at 30° , so that the hanging wall is moving up at $4.8 \times 10^{-6}\text{m/s}$. The silicone layer of thickness 2.5 mm, if assumed to sustain a simple shear deformation, is flowing at a strain rate of $\dot{\gamma} = 1.9 \times 10^{-3}\text{1/s}$. The shear stress on the back wall is then $\tau = \dot{\gamma}\mu = 96\text{Pa}$. The compressive force magnitude measured in the laboratory is of the order of 36 N/m (per unit width), so that the normal stress on the back wall is on average 1800Pa . The equivalent friction coefficient is then $\tau/\sigma_n = 5 \times 10^{-2}$ corresponding to the friction angle of 3° which is indeed below the critical value $\phi_{BW}^* = 6^\circ$ found above.

The initial set-up corresponds to a sand pack with $\alpha = \beta = 0$ and a layer thickness of 20 mm. The sand is deposited with a sand distributor, to ensure experimental reproducibility, by layers of up to 5 mm and separated by fine layers of colored sand acting as markers. The

complete description of the experimental set up and of the protocol is presented by Cubas and al. (2008b) and Souloumiac (2009). The results after shortening by 9 mm approximately are presented in Figure 3.14a and b in the absence and the presence of silicon putty on the back wall, respectively. The pictures are taken from the right side and present, through the side wall, the failure mode. It consists of a ramp and a back thrust, dashed segments, with a slight relief, Figure 3.14a. The back thrust is outcropping close to the back wall. In the presence of the silicone, a single discontinuity in the form of a ramp occurs rooting on the décollement at the back wall contact. Although many parameters are estimated to first order, these results validate the observation made in the previous section : the selection of the failure mode with or without back thrust is due to the friction over the back wall. The larger friction angles promote the presence of the back thrust. This interpretation will certainly contribute to the discussion initiated in the experimental benchmark of Schreurs et al. (2006).

3.4 Conclusion

The objective was to propose a methodology which could ultimately permit to study systematically the 3D variations of the failure mode within accretionary wedges.

It is not the primal problem, constructed directly from the kinematics approach of the limit analysis, but its dual version which is found most convenient in view of the complexity of most strength criteria and the difficulty to account properly of the constraints (inequalities) due to their support functions. The dual variables are stress-like quantities, once appropriately scaled, although their distribution is not a-priori statically admissible. It is shown nevertheless, in the case of the 2D triangular wedge, that the dual stress field corresponds to the expected theoretical solution which satisfies equilibrium and is independent of the position along the topography but function only of the distance to this flat surface. The primal variables provide the virtual velocity field which characterizes the failure mode of the structure. The ramp and back thrust system defining the 2D failure mode is expressed as narrow strips of localized virtual deformation. This localization of virtual strain as well as the activation of the décollement are dilatant. This fact is known from the primal problem since dilatancy is required for the support function to be finite. It is interesting to recognize that the solution of the dual problem comes to the same conclusion. The back stop and the hanging wall are regions sustaining virtual rigid motions. The position of the failure mechanism to the front (super-critical) or the rear (sub-critical) of the wedge depends on the topographic slope, the décollement friction and the bulk friction angle. The exact relation (Dahlen, 1984 ; Lehner 1986) defines the critical topographic slope α_c which is captured exactly by the numerical procedure. It is further shown that the failure mode

at the rear for sub-critical conditions ($\alpha < \alpha_c$) could collapse to a single ramp rooting at the intersection of the back wall and the décollement instead of a ramp and back thrust system. The back wall friction angle predicted by a Mohr construction is, within graphical error, equal to the angle found numerically at the transition between these two modes of failure. Laboratory experiments, with sand and with or without silicone along the back wall, validate this finding quantitatively.

Two 3D examples are presented in the companion paper (Souloumiac et al., 2009). The first of the two examples has for objective to shed light on the validity of the 2D stability criterion in the presence of a lateral topographic slope variation (perpendicular to the direction of compression). It is shown that a lateral variation by $\pm 0.5^\circ$ from the critical α_c , chosen in the central cross section, could prevent the deformation front to be at toe of the wedge in the 2D super-critical region. The 3D failure mechanism is then characterized by a ramp in the 2D sub-critical region which becomes diffuse with a decreasing dip as one move towards the 2D super-critical region. The second of the 3D examples is proposed to question the influence of the lateral wall friction on the failure mode produced typically in the laboratory. For a lateral wall friction of 15° and a box width to length ratio of one, 20 % of the width set up is affected by the lateral wall. The critical slope angle $\alpha_c = 3.38^\circ$ is increased by as much as 1.5° . It is indeed necessary to increase significantly the weight of the wedge before super-critical conditions are met. The 2D stability are of course questioned and a 3D criterion based on the percentage of the surface of décollement which is activated is tentatively proposed and compared with predictions obtained with sand in the laboratory.

3.5 Appendix A : Linear programming duality

The objective of this appendix is to present the dualisation argument, which is classical in linear programming, with a notation consistent with the development proposed in this paper. This material is certainly not new and proposed here only for sake of completeness.

The primal problem is the following minimization search

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && {}^t\{c\}\{x\} \\
 &\text{subject to} && [A]\{x\} = \{b\}, \\
 &&& \{x\} \geq \{0\},
 \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

in which the vector $\{x\}$ is the collection of m unknowns and where there are n equalities to be satisfied (the matrix $[A]$ is $n \times m$; the variables names differ from the ones defined in the main text). The dual problem is stated as

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} && {}^t\{b\}\{y\} \\ & \text{subject to} && {}^t[A]\{y\} + \{s\} = \{c\}, \\ & && \{s\} \geq \{0\}, \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

in terms of the n unknowns in the vector $\{y\}$ and the additional m slack variables in the vector $\{s\}$. The optimal solutions, in terms of the objective function, are the same for the two problems as it can be shown by computing the duality gap

$$\text{gap} \equiv {}^t\{c\}\{x\} - {}^t\{b\}\{y\} = {}^t\{s\}\{x\} \geq 0. \tag{3.5.3}$$

The gap is always positive or nul and only nul if the two systems of equalities in (3.5.1) and (3.5.2) are satisfied. In that instance, the orthogonality condition ${}^t\{s\}\{x\} = 0$ applies. It is the dual problem (3.5.2) which is used for all examples in section 3 whereas the primal problem (3.5.1) was set up in section 2 from the maximum strength theorem with a spatial discretisation for the velocities and the deformation components $\bar{\lambda}$.

3.6 Appendix B : Generalisation to 3D

The 3D discretization is now presented. It is constructed with ten-node tetrahedra, as illustrated in Figure 3.15. The mid-side nodes are located at equal distances between the vertex nodes and all sides are planar surfaces. The pseudo-equilibrium matrix analogous to (3.2.25) is given by

$$[\bar{\mathcal{B}}]^e = -\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 3P_1 & -P_2 & -P_3 & -P_4 & 4P_2 & 0 & 4P_3 & 4P_4 & 0 & 0 \\ -P_1 & 3P_2 & -P_3 & -P_4 & 4P_1 & 4P_3 & 0 & 0 & 4P_4 & 0 \\ -P_1 & -P_2 & 3P_3 & -P_4 & 0 & 4P_2 & 4P_1 & 0 & 0 & 4P_4 \\ -P_1 & -P_2 & -P_3 & 3P_4 & 0 & 0 & 0 & 4P_1 & 4P_2 & 4P_3 \end{bmatrix},$$

where

$${}^tP_i = 2A_i \begin{bmatrix} n_1^i & 0 & 0 & n_2^i & n_3^i & 0 \\ 0 & n_2^i & 0 & n_1^i & 0 & n_3^i \\ 0 & 0 & n_3^i & 0 & n_1^i & n_2^i \end{bmatrix}, \tag{3.6.1}$$

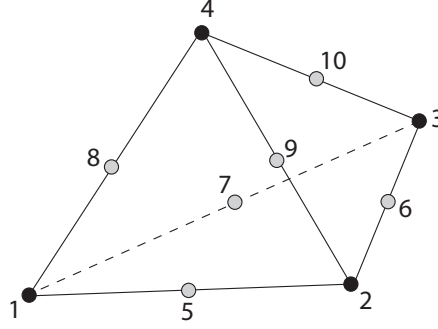


FIG. 3.15: Quadratic tetrahedron element for 3D upper bound analysis.

with (n_x^i, n_y^i, n_z^i) being the unit outward normal to face i (opposite node i) and A_i the area of that face.

The pre-defined discontinuities in 3D are constructed by patches of zero-thickness and composed of three tetrahedra, as shown in Figure 3.16. Again, this patch of tetrahedra is treated in the same way as the regular bulk elements and the fact that the element volume is equal to zero does not pose any difficulties. Also, similar to 2D discontinuities, the internal discontinuity nodes are eliminated by making appropriate assumptions about the variation of the velocities across the discontinuity.

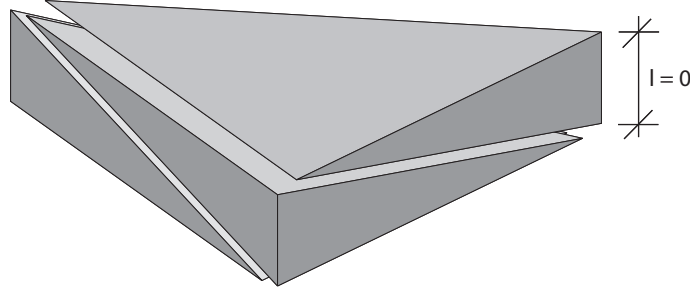


FIG. 3.16: Discontinuity patch consisting of three zero-thickness tetrahedra for constructing a discontinuity of known geometry and zero thickness in 3D.

3.7 Appendix C : Second-order cone programming

This last Appendix presents the conversion of the general non-linear upper bound limit analysis problem (3.2.32) into second-order cone programming (SOCP) format. The most common

3.7. Appendix C : Second-order cone programming

of these formats comes in the form of the following generalization of the primal LP problem (3.5.1) :

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && {}^t\{c\}\{x\} \\ & \text{subject to} && [A]\{x\} = \{b\}, \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

$$\{x\}_i \in \mathcal{K}_i, i = 1, \dots, n,$$

where the total solution vector $\{x\}$ is assumed to be partitioned into n subvectors $\{x\}_i$. For each of these subvectors a conic inequality constraint, given by the last line in 3.7.1, is imposed. The mathematical definitions of what constitutes a cone are relatively stringent and cannot easily be circumvented (see, e.g., Ben-Tal and Nemirovski 2001, for details). However, for the present application it suffices to know that the Drucker-Prager criterion, by a suitable transformation of variables, is cast in the following quadratic cone :

$$\mathcal{K} = \left\{ \{x\} \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_1 \geq \sqrt{\sum_{j=2}^{m+1} x_j^2} \right\}. \quad (3.7.2)$$

This transformation is achieved by introducing a new set of variables $\{\rho\}$:

$$\{\rho\} = [D]\{\sigma\} + \{d\} \quad (3.7.3)$$

where

$$[D] = \begin{bmatrix} -\alpha_{DP} & -\alpha_{DP} & -\alpha_{DP} & & & & \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & & & & & \\ & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & & & & \\ -1/\sqrt{6} & & 1/\sqrt{6} & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \end{bmatrix}, \quad \{d\} = \begin{bmatrix} C_{DP} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7.4)$$

The Drucker-Prager criterion (3.2.5) can then be written as

$$\mathcal{K}_{DP} = \left\{ \{\rho\} \in \mathbb{R}^7 \mid \rho_1 \geq \sqrt{\sum_{j=2}^7 \rho_j^2} \right\} \quad (3.7.5)$$

which is a quadratic cone. Hence, in the case where the yield criterion is of the Drucker-Prager type, the SOCP standard form of the general nonlinear upper bound limit analysis problem

(3.2.32) reads

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize} && \alpha_U \\
 & \text{subject to} && {}^t[\tilde{\mathcal{B}}]\{\tilde{\sigma}\} = {}^t[H]\{\tilde{R}\} + \alpha_U\{T_0\} + \{G\} \\
 & && \{\rho\} = [D]\{\tilde{\sigma}\} + \{d\} \\
 & && \{\rho\}_i \in \mathcal{K}_{DP} \quad \text{for } i = 1 \text{ to } 3, \text{ for each element in } \Omega^h .
 \end{aligned} \tag{3.7.6}$$

This problem is solved using the general purpose SOCP solver MOSEK (2008). In some cases it is possible to eliminate the physical stress variables $\{\tilde{\sigma}\}$ to end up with only problem unknowns $\{\rho\}$ and $\{\alpha_U\}$ (see Krabbenhoft et al., 2007 for details). This is exploited for problems where α_{DP} is non-zero which implies that ${}^t[D][D]$ is non-singular and the physical stress variables are expressed entirely in terms of $\{\rho\}$.

Bibliographie

Anderheggen, E., and H. Knöpfel (1972), Finite element limit analysis using linear programming, *International Journal of Solids and Structures*, 8, 1413–1431.

Ben-Tal, A. and Y. Nemirovski (2001), Lectures in Modern Convex Optimization : Analysis, Algorithms and Engineering Applications, MPS-SIAM Series on Optimization.

Bottero, A., Negre, R., Pastor, J. and S. Turge-man (1980), Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 22, 131–149.

Cubas, N., Y.M. Leroy, and B. Maillot (2008), Prediction of thrusting sequences in accretionary wedges, *J. Geophys. Res.*, *J. Geophys. Res.*, 113, B12412, doi :10.1029/2008JB005717.

Cubas, N., B. Maillot and C. Barnes (2008), Statistics of the experimental growth of a sand wedge, submitted for publication.

Davis, R. O. and Selvadurai, A. P. S., Selvadurai (2002), *Plasticity and Geomechanics*, Cambridge University Press, 287 p.

Dahlen, F.A. (1984), Noncohesive critical Coulomb wedges : an exact solution, *J. Geophys. Res.*, 89, B12, 10125–10133.

Day, R.A. and D.M. Potts (1994) Zero thickness interface elements - numerical stability and application, *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 18, 689–708.

Krabbenhøft, K., and L. Damkilde (2003), A general nonlinear optimization algorithm for lower bound limit analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, 165–184.

Krabbenhøft, K., A.V. Lyamin, M. Hjiaj, and S.W. Sloan (2005) A new discontinuous upper bound limit analysis formulation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 63, 1069–1088.

Krabbenhøft, K., Lyamin, A.V., and S. W. Sloan (2007), Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs, *International Journal of Solids and Structures*, 44, 1533–1549.

Krabbenhøft, K., Lyamin, A. V. and S. W. Sloan (2008) Three-dimensional Mohr-Coulomb limit analysis using semidefinite programming, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24, 1107–1119.

Krabbenhøft, K., A.V. Lyamin, M. Hjiaj, and S.W. Sloan (2005) A new discontinuous upper bound limit analysis formulation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 63, 1069–1088.

Krabbenhøft, K., A.V. Lyamin and S.W. Sloan (2007), Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs, *Int. J. Solids and Structures*, 44, 1533–1549.

Lehner, F.K. (1986), Comments on "Noncohesive Critical Coulomb Wedges : An Exact Solution", *J. Geophys. Res.*, 91, B1, 793–796.

Lyamin, A. V., and S. W. Sloan (2002), Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26, 181–216.

Maillot, B. and Y.M. Leroy (2003), Optimal dip based on dissipation of back thrusts and hinges in fold-and-thrust belts, *J. Geophys. Res.*, 108, B6, 2320–2336.

Maillot, B. and Y.M. Leroy (2006), Kink-fold onset and development based on the maximum strength theorem, *J. Mech. Phys. Solids*, 54, 2030–2059.

Mandl, G. (2005), *Rock joints, The mechanical genesis*, Springer.

MOSEK (2008), optimization software, <<http://www.mosek.com>>.

Pastor, J. (1978), Limit analysis : numerical determination of complete statical solutions. Application to the vertical cut, (in French) *Journal de Mécanique appliquée*, 2, 168–196.

Pastor, J. (2006), Personal communication.

- Pastor, F., Ph. Thore, E. Loute, J. Pastor, M. Trillat (2008), Convex optimization and limit analysis : Application to Gurson and porous Drucker-Prager materials, *Eng. Fracture Mech.*, 75, 1367–1383.
- Salençon, J. (1974), *Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols*, edited by Eyrolles, Paris, (English translation : *Applications of the theory of plasticity in soil mechanics*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1977).
- Salençon, J. (2002), *De l'élasto-plasticité au calcul à la rupture*, Editions École Polytechnique, Palaiseau, and Ellipses, Paris.
- SARPP (2008), Structural Analysis and Rock Physics Program, Finite-element and limit-analysis general program, Ecole Normale Supérieure, Paris.
- Schreurs, G., S.J.H. Buiter, D. Boutelier, G. Corti, E. Costa, A.R. Cruden, J.-M. Daniel, S. Hoth, H.A. Koyi, N. Kukowski, J. Lohrmann, A. Ravaglia, R.W. Schlishe, M. Oliver Withjack, Y. Yamada, C. Cavozzi, C. Delventisette, J.A. Elder Brady, A. Hoffmann-Rothe, J.M. Mengus, D. Montanari, F. Nilforoushan (2006), Analogue benchmarks of shortening and extension experiments, in *Analogue and numerical modelling of crustal-scale processes*, edited by S.J.H. Buiter and G. Schreurs, 1–27, London Geol. Soc. Spec. Publ.
- Sciamanna, S., W. Sassi, R. Gambini, J.L. Rudkiewicz, F. Mosca and C. Nicolai (2004), Predicting hydrocarbon generation and expulsion in the Southern Apennines Thrust Belt by 2D Integrated Structural and Geochemical Modeling : Part I - Structural and thermal evolution, in *Deformation, fluid flow, and reservoir appraisal in foreland fold and thrust belts*, edited by R. Swennen, F. Roure, J.W. Granath, p.51–67, A.A.P.G. Heldberg series, 1.
- Sloan, S. W. (1989), Upper bound Limit Analysis using Finite Elements and Linear Programming, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 13, 263–282.
- Sloan, S.W. and P.W. Kleeman (1995), Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 127, 293–314.
- Souloumiac, P., Y.M. Leroy, K. Krabbenhøft K. and B. Maillot (2007), Predicting stress in fault-bend fold by optimization, submitted for publication.
- Souloumiac, P., K. Krabbenhøft, Y.M. Leroy, B. Maillot (2009) Failure in accretionary wedges with the maximum strength theorem : 3D applications, in preparation.
- Zoetemeijer, R. and W. Sassi (1992) 2D reconstruction of thrust evolution using the fault-bend fold method, in *Thrust tectonics*, edited by K. McClay, 133–140, London Geol. Soc. Spec. Publ.

Résumé de l'article : Failure in accretionary wedges with the maximum strength theorem : 3D applications.

Cet article est le complément de l'article précédent. Il porte sur les modélisations 3D du prisme d'accrétion triangulaire théorique sans cohésion. La méthode numérique utilisée est l'approche externe du calcul à la rupture décrite dans le premier article. L'objectif est de mettre en évidence les variations spatiales des modes de rupture dans les prismes d'accrétion. Les causes géologiques de ces effets 3D sont expliquées dans la littérature par, entre autres, une variation de l'épaisseur de sédiments ou par l'influence de l'érosion. Les simulations numériques en 3D de ces structures sont réalisées avec les éléments finis (Braun, 1994) ou la méthode des éléments distincts (Imbert et al., 2007). L'application de l'approche externe à l'initiation du plissement des structures en 3D met en évidence les modes de rupture à partir de l'équilibre mécanique et des paramètres rhéologiques de cohésion et coefficients de friction. La première étude présentée est la modélisation du prisme théorique triangulaire et l'influence sur la criticalité d'une pente topographique. Cette pente latérale implique que d'un côté, le prisme est sous-critique et que de l'autre côté, il est sur-critique au sens de Dahlen (1984). La déformation se concentre en deux zones assimilées à la rampe et au rétro-chevauchement du côté sous-critique, ces zones sont assez diffuses. Cette déformation a une influence sur le côté sur-critique du prisme, c'est-à-dire que le décollement n'est pas complètement activé malgré le fait que l'angle topographique soit supérieure à la valeur critique. Si on augmente encore la pente latérale, la déformation influence encore sur la criticalité. Cela révèle, d'après les valeurs testées, qu'une variation des angles topographiques de $\pm 0.5^\circ$ par rapport à l'angle critique influence sur la déformation du prisme. En revanche, si la variation est de $\pm 0.25^\circ$ alors les solutions 2D ne sont pas perturbées c'est-à-dire que le décollement est complètement activé côté sur-critique et un système de failles se forme côté sous-critique. La deuxième étude menée dans cet article est l'influence de l'angle de friction des murs latéraux sur le mode de rupture. Ce problème d'effets de bords est souvent rencontré avec les modèles analogiques. La modélisation consiste en un prisme sous-critique ayant un côté avec un coefficient de friction de 15° (côté droit) et l'autre côté avec un coefficient de friction de 0° (côté gauche) symbolisant le milieu d'une boîte de sable. Il est observé que les effets 3D dus à cette variation de friction sont ressentis sur 1.5 fois la hauteur du prisme. Le décollement est d'ailleurs utilisé sur une distance moins importante du côté droit. Ces observations sont confirmées par l'analyse spécifique du champ de vitesse virtuel dans les 3 directions de l'espace. Cette analyse montre une concentration de vitesse importante du côté droit. Maintenant si l'angle topographique augmente et conduit à un prisme sur-critique, l'activité du décollement

reste perturbé même pour des angles supérieurs de 1.6° par rapport à la valeur critique. Ces derniers résultats sont comparables aux expériences réalisées en boîte de sable. En effet à partir d'une photo du dessus de la boîte, on observe qu'au début du raccourcissement la friction sur le mur latéral a une influence sur 25% de la largeur de la boîte. Cette influence se traduit par une courbure de la déformation en front de prisme. Les différents résultats présentés dans cet article concernent l'initiation au plissement. Le développement de l'évolution de la structure pourrait être ensuite envisagé mais cette généralisation ne semble pas simple au vu des modes de rupture diffus que nous observons en 3D.

**Failure in accretionary wedges with the maximum strength
theorem : 3D applications.**

P. Souloumiac

Laboratoire MSS-Mat, CNRS,
Ecole Centrale Paris, Chatenay Malabry, France,

K. Krabbenhøft

Centre for Geotechnical and Materials Modelling,
University of Newcastle, NSW 2308, Australia,

Y.M. Leroy

Laboratoire de Géologie, CNRS,
École Normale Supérieure, Paris, France,

and

B. Maillot

Département Géosciences et Environnement,
Université de Cergy-Pontoise, France.

Abstract

The 3D spatial variations in the failure mode occurring in accretionary wedges, and their analogue experiments in the laboratory, are captured from the sole knowledge of the material strength by application of the maximum strength theorem. The first of the two 3D problems considered concerns the classical triangular wedge with a lateral variation in its topographic slope so that it is sub-critical and super-critical to the right and to the left boundary, respectively, according to the 2D stability criterion. This criterion predicts failure by either the activation of a conjugate ramp and back thrust at the back of the structure or by the complete décollement activation, for sub-critical and super-critical conditions, respectively. It is shown that the localized deformation, associated to the ramp on the right side, is getting diffuse as one moves to the left side where more décollement is activated. The influence of the two boundaries is felt for wedge widths even greater than its length since the whole décollement is not activated despite the 2D stability conditions otherwise. The second 3D problem explores the influence of the side wall friction on the results of laboratory experiments. It is found that the deformation is diffuse close to the side wall with a vertical stretching and less décollement activated. The side wall has an influence on the rest of the wedge over a width of the order of 1.5 times the wedge thickness at the back, for realistic friction angles. Comparison with an analogue experiment shows the connection between the information extracted from the virtual 3D velocity field and the actual deformation.

3.8 Introduction

The objective of this contribution is to determine the 3D failure modes which characterize the onset of thrusting in accretionary wedges and fold-and-thrust belts, by application of the numerical method proposed in the companion paper (Souloumiac et al., 2009) based on the maximum strength theorem. This theorem has its root in the external approach of limit analysis and only the knowledge of the material strength and of the structure geometry is required.

The 3D character of fold-and-thrust belts is seen on the topography by the convex curving (salient) or the concave curving (recess) of the thrusts, the Appalachian mountains illustrating the two trends (Macedo and Marshak, 1999). There are various origins to these 3D effects such as the variation in the thickness of the sediments (Marshak and Wilkerson, 1992), the lateral variations in strength of the back stop formation, or of the décollement, the presence of inherited faults (Macedo and Marshak, 1999), the influence of erosion and of transport on the topography (Marques and Cobbold, 2006). One could also mention the rapid variation in the décollement dip (Barker et al., 2009) or the presence of a sea mount (Bell et al., 2009), the Hikurangi subduction thrust of New Zealand providing a typical example for these two features. The 3D geometry of the thrust controls the distribution of strain rates and, consequently, of the activated material deformation mechanisms, as shown by Wibberley (1997) from his study in the Moine thrust zone, north-west Scotland. Also, at the plate-scale, 3D effects in the mode of deformation could simply result from the relative rotation of the colliding plates.

There is a scarcity of constructions of 3D thrust related folds except for the so-called tri-shear model of the fault-propagation fold (Erslev, 1991 for 2D and Cristallini et al., 2004 for 3D), which volume conservation assumption in 3D is still debated (Cardozo, 2008). Finite-element simulations could provide an alternative approach with valuable information on the fault orientation and spacing (Braun, 1994) although the extension to include finite jumps in displacement over the ramps remains technically difficult. This difficulty is certainly alleviated with the distinct element approach (Imber et al., 2007) since neighbouring particles may not remain adjacent during the course of the transformation. The closest application of this numerical technique to the first of the 3D problems treated here is found in Strayer and Suppe (2002). An alternative, although yet restricted to 2D, is the family of geometrical constructions of rigid regions proposed by Maillot and Leroy (2006) for kink-folds and by Cubas et al. (2008) for sequence of thrusting in accretionary wedges. The evolution of the geometries relies on length- and surface-conservation rules, such as the one proposed by Suppe (1983), while accounting for mechanical equilibrium and the maximum rock-strength.

The generalization to 3D of the fold or the thrust construction, except for the systematic application of the finite-element, finite-difference and distinct element methods, is hindered by the lack of intuition to parameterize simply the failure mechanism either at the onset or during the structure development. It is thus necessary to develop a systematic procedure to study the failure mode of 3D geological structures. It is believed that such procedure, at least for the onset, could rely on the numerical method presented in the companion paper and based on the kinematics approach of limit analysis. It is hoped that the results obtained here for the onset of failure could contribute to the proposition of 3D kinematics for evolving structures.

There is a completely different although complementary approach to the modelling to folding and thrusting based on laboratory experiments with analogue materials. Since King Hubbert (1951) showed that granular cohesionless materials such as sand could reproduce the brittle deformation of the upper crustal rocks, innumerable experimental tests have been conducted to help in the interpretation of field data. The 3D effects are reproduced by an oblique plate convergence (Pubellier and Cobbold, 1996; Martinez et al., 2002), by perturbation in the topography of the wedge (Marques and Cobbold, 2002). In the laboratory, 3D effects are also due to the finite width of the experimental set-up. The presence or not of shear stresses exerted by the lateral walls could be responsible for the qualitatively different results discussed by Vendeville (2007), Costa and Vendeville (2006) and Cubas et al. (2009). Although the experimental protocols include proper dimensional analysis and the selection of appropriate chemical agents to reduce these effects, there is yet no mechanical predictions, as the ones provided in this contribution, to predict them quantitatively.

The paper contents are as follows. The next section is devoted to the summary of the numerical method presented and validated in the companion paper. Section 3 presents the first 3D accretionary wedge problem. The 3D effects are the consequence of the lateral variation of the topographic slope which is sub-critical to the right and super-critical to the left. It is shown how the ramp and back thrust system found in the sub-critical region evolves in a diffuse mode of failure in the central region and in the partial activation of the décollement in the super-critical part of the structure. The 2D stability criterion is nevertheless violated in the super-critical part, even for a lateral slope variation as small as 1° over a width equal to the wedge length. The second problem, in section 5, presents, for the first time to the authors knowledge, the influence of side wall friction on the failure mode. A comparison of the numerical predictions with the deformation observed in the laboratory for a super-critical wedge is proposed.

3.9 The maximum strength theorem and the numerical strategy

The objective of this section is to summarize the hypotheses necessary to construct the maximum strength theorem. Its application with a spatial discretization leads to the class of optimization problems presented in the companion paper (Souloumiac et al., 2009). This section is written such that the reader should be able to appreciate the numerical results presented next without reading this reference.

The maximum strength theorem has its roots in the kinematics or external approach of limit analysis for perfectly plastic materials. This theorem departs from this classical line of work by only postulating that the material has a maximum strength (Salençon, 1974, 2002). For a cohesive, frictional bulk material, failure by faulting will be prevented as long as the stress remains within the domain

$$G(\boldsymbol{\sigma}) = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \sigma_I - \sigma_{III} + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \phi - C \cos \phi \leq 0\}, \quad (3.9.1)$$

which is bounded by the Coulomb criterion. The stresses σ_I and σ_{III} are the minor and major principal stresses (continuum mechanics convention : tensile stresses are positive, $\sigma_I \geq \sigma_{III}$) and C and ϕ are the cohesion and the friction angle respectively. The 2D failure occurs in a plane which is orthogonal to the intermediate stress direction. The principal stresses are eliminated in favor of the stress components such that (3.9.1) reads equivalently

$$G(\boldsymbol{\sigma}) = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \sigma_e + 2P \sin \phi_B - 2C \cos \phi \leq 0\} \\ \text{with } \sigma_e = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}, \quad P = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2, \quad (3.9.2)$$

in a 2D plane containing the x and y axes. The intermediate stress direction is not easily determined in 3D applications and it is found more convenient in the examples considered next to apply the strength domain bounded by the Drucker-Prager criterion :

$$G_{DP}(\boldsymbol{\sigma}) = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \alpha_{DP} I_1 + \sqrt{J_2} - C_{DP} \leq 0\}, \quad (3.9.3) \\ \text{with } I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \quad J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'), \quad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\delta}.$$

The two material parameters

$$\alpha_{DP} = \frac{\tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}}, \quad C_{DP} = \frac{3C}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}}, \quad (3.9.4)$$

are selected so that the domain boundaries in (3.9.1) and (3.9.4) coincide for 2D plane-strain problems (see e.g. Davis and Selvadurai, 2002, for further explanation). The stress $\boldsymbol{\sigma}'$ in (3.9.3) is

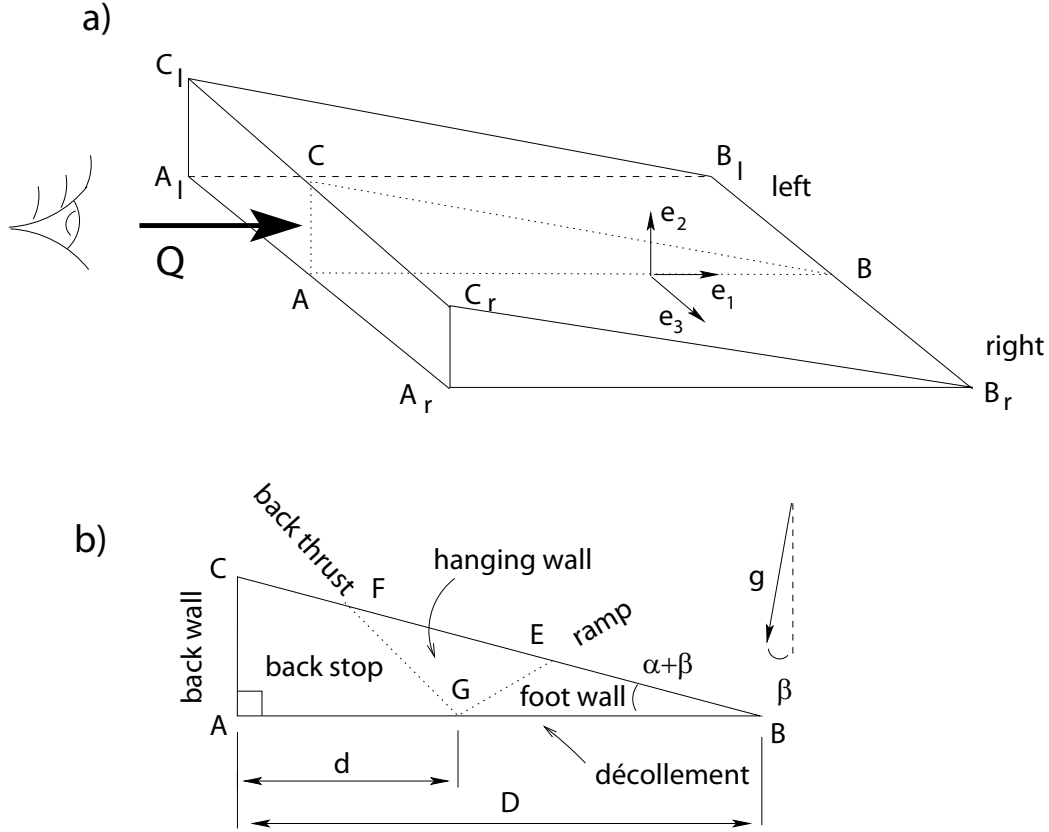


FIG. 3.17: The geometry of the 3D wedge, the observer attached to the back wall, a). The names of the various regions are defined over a cross section, b).

the deviatory stress and δ the second-order identity tensor. Note that tensors and subsequently vectors are identified by bold letters.

The maximum strength theorem aims to determine an upper bound to the tectonic force applied to the structure, the 3D wedge presented in Figure 3.17 providing a typical example. For the two examples considered here, the observer applies a force which is distributed on the back wall $A_l A_r C_r C_l$, the subscript r and l defining the right and the left. Such surfaces where force distributions are prescribed are denoted $\partial\Omega^T$ and the structure occupies the volume denoted Ω , in general. The force, in our particular example, is acting perpendicular to the back wall, parallel to the décollement. This latter plane will be referred to as the horizontal plane for the observer although gravity is acting at the angle β from what is than called the vertical direction. The upper bound is obtained by application of the theorem of virtual power which stipulates

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\hat{\mathbf{U}}) = \mathcal{P}_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{U}}) \quad \forall \hat{\mathbf{U}} \in KA, \quad (3.9.5)$$

the equality between the internal and the external virtual powers, respectively, for any kinematically admissible (KA) velocity field. Such fields are assumed regular over the domain and consistent with the displacement prescribed on the boundary. In our problems, the only constraint is that the velocities at the back wall contact have the same component, say $\hat{U}_{bw}$, parallel to the décollement. The theorem (3.9.5) makes use of any such virtual velocity field having these properties and not just the exact velocity field which remains unknown. The external virtual power is

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{U}} dV + \hat{U}_{bw} Q, \quad (3.9.6)$$

and is due to the external body force, the gravity acting on material of uniform density ρ , and the power of the force acting on the back wall. The internal power is defined by

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\hat{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}(\hat{\mathbf{U}}) dV, \quad (3.9.7)$$

in which $\boldsymbol{\sigma}$ is the stress field and $\mathbf{d}(\hat{\mathbf{U}})$, also denoted $\hat{\mathbf{d}}$, the virtual rate of deformation tensor, defined as the symmetric part of the gradient of the velocity field. The double dot introduced in (3.9.7) between two second-order tensors $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ results in $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ji}$ in terms of the tensors coordinates in a cartesian basis. The source of dissipation in (3.9.7) is not specified and is presented as diffuse in the bulk material. We shall see that this dissipation is often localized on the décollement and along planes defining the ramp and the back-thrust. The later two examples are not pre-defined in the analysis whereas the first region is known and will be described as a sub-domain having specific material properties. The extent of the activated décollement is of course an unknown of the problem.

It is difficult to apply the theorem of virtual power to determine the force Q without knowing the stress field. An upper bound can nevertheless be established since the dissipation $\boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}}$ is bounded. It is indeed shown in Salençon (2002), and presented in Mailliot and Leroy (2006), that for strength domains which are convex in their stress space, the dissipation is bounded by the support function $\pi(\hat{\mathbf{d}}) \geq \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}}$. For the Coulomb materials having their strength domain defined in (3.9.1), this function reads

$$\begin{aligned} \text{case 1 : } \text{tr}(\hat{\mathbf{d}}) &> (|\hat{d}_1| + |\hat{d}_2| + |\hat{d}_3|) \sin \phi, \quad \pi(\hat{\mathbf{d}}) = \frac{C}{\tan \phi} \text{tr}(\hat{\mathbf{d}}), \\ \text{case 2 : } \text{tr}(\hat{\mathbf{d}}) &= (|\hat{d}_1| + |\hat{d}_2| + |\hat{d}_3|) \sin \phi, \quad \pi(\hat{\mathbf{d}}) = C \cos \phi (|\hat{d}_1| + |\hat{d}_2| + |\hat{d}_3|), \\ \text{case 3 : } \text{tr}(\hat{\mathbf{d}}) &< (|\hat{d}_1| + |\hat{d}_2| + |\hat{d}_3|) \sin \phi, \quad \pi(\hat{\mathbf{d}}) = +\infty, \end{aligned} \quad (3.9.8)$$

in which $\text{tr}(\hat{\mathbf{d}})$ and $\hat{d}_i$ are the trace of the virtual rate of deformation tensor and the principal values of the same tensor, respectively. Note that for the bound to be of any interest, the support

function has to be finite. Consequently, the third case in (3.9.8) precludes virtual velocity fields which would be isochoric. A virtual dilatancy is required as it will be seen during the analysis of most of the results. Such virtual dilatancy, constrained by the frictional properties of the material according to (3.9.8), is difficult to justify on physical grounds in the context of a plasticity theory. Such an effort will not be considered here, explaining our interest to remain close to the concept of strength and justifying the adoption of the maximum strength theorem. Nevertheless, to facilitate the understanding of the virtual dilatancy, it is convenient to consider the support function for the Coulomb criterion on a fault oriented by its normal $\mathbf{n}$ and sustaining the virtual velocity jump $\mathbf{J}$ oriented by the angle β from the normal. The support function reads

$$\begin{aligned} \text{case 1 : } & 0 \leq |\beta| < \pi/2 - \phi_i, \pi(\hat{\mathbf{J}}) = \hat{J}C \cotan(\phi) \cos \beta, \\ \text{case 2 : } & |\beta| = \pi/2 - \phi_i, \pi(\hat{\mathbf{J}}) = \hat{J}C \cos \phi, \\ \text{case 3 : } & \pi/2 - \phi < |\beta| \leq \pi, \pi(\hat{\mathbf{J}}) = +\infty. \end{aligned} \quad (3.9.9)$$

As for the diffuse deformation function in (3.9.8), there is a range of orientation in the jump vector which is prohibited. The normal component has to be larger then $\tan(\phi)$ times the tangential part of the vector for the support function to be finite. There is thus indeed a virtual dilation of the fault upon virtual slip.

The knowledge of the support function in (3.9.8) combined with the theorem of virtual power (3.9.5) and the definition of the internal and external powers in (3.9.6) and (3.9.7) leads to the upper bound

$$Q \leq Q_{\text{upper}}(\tilde{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}(\tilde{\mathbf{U}}) dV - \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{U}} dV, \quad (3.9.10)$$

in which $\tilde{\mathbf{U}}$ is the virtual velocity field normalized by the normal component of the velocity at the back wall $\hat{U}_{bw}$. The best upper bound is the least since the closest to the exact, unknown solution. This least upper bound is found by minimizing Q_{upper} which is function of the virtual velocity field. This minimization is often conducted by constructing the distribution of the velocities. For example, in 2D, the failure mechanisms is typically one of a ramp and back thrust outcropping on the décollement. The velocity is chosen uniform in the hanging wall and back stop region (see definition in Figure 3.17) and discontinuous across the back thrust. The minimization is then conducted analytically and the results coincides exactly with the classical 2D stability condition of Dahlen (1984) (Cubas et al., 2008). The extension to 3D is the main objective of this paper and there is no simple kinematics, yet available, equivalent to the one just described. It is for this reason that a numerical strategy was proposed in the companion paper. The velocity fields is constructed by discretization of the structure of interest with 10-noded

tetrahedra, the primal variables being the nodal velocities. It is shown that the dual problem, in which the basic unknown are stress-like quantities, is much easier to solve because of the non-linearities of the support function such as in (3.9.8). It is the optimization code (Mosek, 2008) which find systematically the optimum velocity field and the dual stress field. Note that the contact region between the back stop and the wedge material as well as the décollement are considered as region of zero thickness using the same formalism as for the bulk material but assigning specific material properties. It is thus the support function (3.9.8) which is accounted for although the predictions are equivalent to the ones which would have been obtained with the function (3.9.9) valid for planar interfaces. The interested reader will find the complete information on the implementation of the method and its validation with 2D examples in the companion paper. The information found in this section should be sufficient to warrant a clear analysis of the two examples presented next.

3.10 3D stability of accretionary wedges

The first 3D example considered is presented in Figure 3.17, the data for the geometry and the material properties being provided in Table 3.3. The 3D effects results from the variation in the topography which is introduced by selecting a different angle α on the right and the left boundary sides : (α_r, α_l) . Two sets of angles are considered : $(3^\circ, 3.7^\circ)$ and $(2.9^\circ, 3.9^\circ)$ so that the slope in z -direction is 0.7° and 1.0° , respectively. These sets were chosen because the 2D critical slope is 3.38° for $\beta = 3^\circ$ which could correspond to the slope in the central section of the structure. The 3D wedge is thus sub-critical to the right and super-critical to the left, respectively, according to the 2D criterion, for the two cases considered. Note that the two side walls have a zero friction angles so that these two planes act as symmetry planes in the z -direction. The mesh is composed of 87 840 elements with a regular spacing in the z -direction

The deformed shape of the wedge where the displacement is taken to be proportional to the virtual velocity is presented in Figure 3.18 for the two set of angles. On these deformed shapes, we have plotted isocontours of the virtual equivalent shear strain. This scalar is defined by

$$\hat{\gamma} = \sqrt{\hat{\mathbf{d}}' : \hat{\mathbf{d}}'} \quad \text{with} \quad \hat{\mathbf{d}}' = \hat{\mathbf{d}} - \frac{\hat{\theta}}{3} \boldsymbol{\delta} \quad \text{with} \quad \hat{\theta} = \text{tr}(\mathbf{d}(\hat{\mathbf{U}})), \quad (3.10.1)$$

in which $\hat{\mathbf{d}}'$ is the deviatoric, virtual rate of deformation tensor and $\hat{\theta}$ the first invariant of $\hat{\mathbf{d}}$, the virtual volumetric strain. The distribution of the virtual equivalent deformation $\hat{\gamma}$ give us an insight on the failure mode. The white lines parallel to the sides walls are proposed to help in visualizing the 3D shape of the deformed wedge. The sub-critical 2D solution is observed on

Symbol	definition	value	unit
α	topographic slope angle	variable	deg
β	décollement angle	3	deg
D	total length of the décollement	50	km
δ	thickness of décollement and back wall	$10^{-6}D$	km
ϕ_{BW}	friction angle of the back wall	variable	deg
C_{BW}	cohesion of the back wall	0.	Pa
ϕ_D	friction angle of the décollement	15	deg
C_D	cohesion of the décollement	0.	Pa
ϕ_b	friction angle of the bulk material	30	deg
C_b	cohesion of the bulk material	0.	Pa
ρ	material density	2200.	kg/m^3
g	gravity acceleration	9.81	m/s^2

TAB. 3.3: Geometrical and material parameters for the 2D applications unless they vary from one simulation to the other. The critical slope $\alpha_c = 3.38^\circ$ for this data set.

the right wall. The ramp is the region of localized virtual equivalent deformation similar to the 2D results in the companion paper. The slight curvature in the ramp is not a consequence of a mesh artifact but simply due to the finite amplification of the displacement. This curvature was not presented in 2D since the distribution of equivalent strains were conducted on the reference configuration. The back thrust is the band in light blue rooting at the same point as the ramp on the décollement. The back thrust outcrops at the back wall contact. This mode varies in the z -direction as one moves towards the left wall. It becomes rather diffuse after $z = 20$ and seems also to decrease in dip. The back thrust is not apparent for z larger than 20. The difference between the two set of angles is that the diffuse ramp and the vanishing of the back thrust occurs earlier in z for the larger difference in α 's. Also, it appears that in that case, the rotation of the ramp towards a zero dip is more important as one can judge from the distribution of the light blue color over the topography and its curvature at the contact of the left wall.

The 3D effects on the décollement are further analyzed with the help of Figure 3.19 which presents the distribution in the norm of the virtual velocity vector for the two cases. The blue and dark red colors correspond to no and to full activation of the décollement, respectively. There is no major differences on the right side of the structure (bottom of each plot). The difference is to the left since the décollement is not activated at the wedge toe for case a)

corresponding to the lesser difference in α 's. It is thus concluded that 3D effects are major in that instance and the 2D stability criterion does not provide the appropriate verdict. For the larger difference in α 's, case b), the whole décollement is activated although the transition to fully activated is more diffuse than on the right side. The gradient occurs over a length six times larger in the x-direction on the left than on the right.

To test the sensitivity of the 3D effects on these gradients, the simulation with $(\alpha_r, \alpha_l) = (2.9^\circ, 3.9^\circ)$ was repeated with a domain twice as wide ($w = 100$ instead of 50 km). The slope in the z-direction is then reduced to 0.5° , which is lower than for the first simulation with $(\alpha_r, \alpha_l) = (3.^\circ, 3.7^\circ)$. The distribution of the virtual velocity norm on the décollement is presented in Figure 3.20. The gradient found there, between fully active and not activated, occurs over a length of 15 km in the x-direction. The gradient observed in Figure 3.19b is thus influenced by the set-up width. Since the décollement is fully activated after a distance $z = 90$ km in Figure 3.20, the influence of the width disappears for a box twice as large as before.

The final comment on this 3D example are made with Figure 3.21 which presents the four cross sections labeled A to D in Figure 3.18b for $(\alpha_r, \alpha_l) = (2.9^\circ, 3.9^\circ)$ and the width of 50 km. The first cross section is on the right wall, the second at 10 km, the third is the wedge central section and the fourth on the left wall. The cross section A has been commented above and is presented for comparison sake. At the distance of 10 km, the virtual strain localization has lost its intensity and the region acting as a ramp is rather diffuse. The root of this yellow region is extending from 10 to 15 km. A rotation of this ramp region is not easy to see, except for the end of the relief on the topography which is now more towards the toe compared to the previous cross-section. This effect is mainly due to the diffuse deformation. On the central section C, there is no tendency for localized deformation. The deformation is now diffuse with a relief changing from 25 to 35 km in the x-direction. The section D on the right wall shows no sign of deformation. The section is gliding rigidly over the décollement, as predicted with the 2D theory. Note the dilation of this décollement which was expected because of the structure of the support function in (3.9.9).

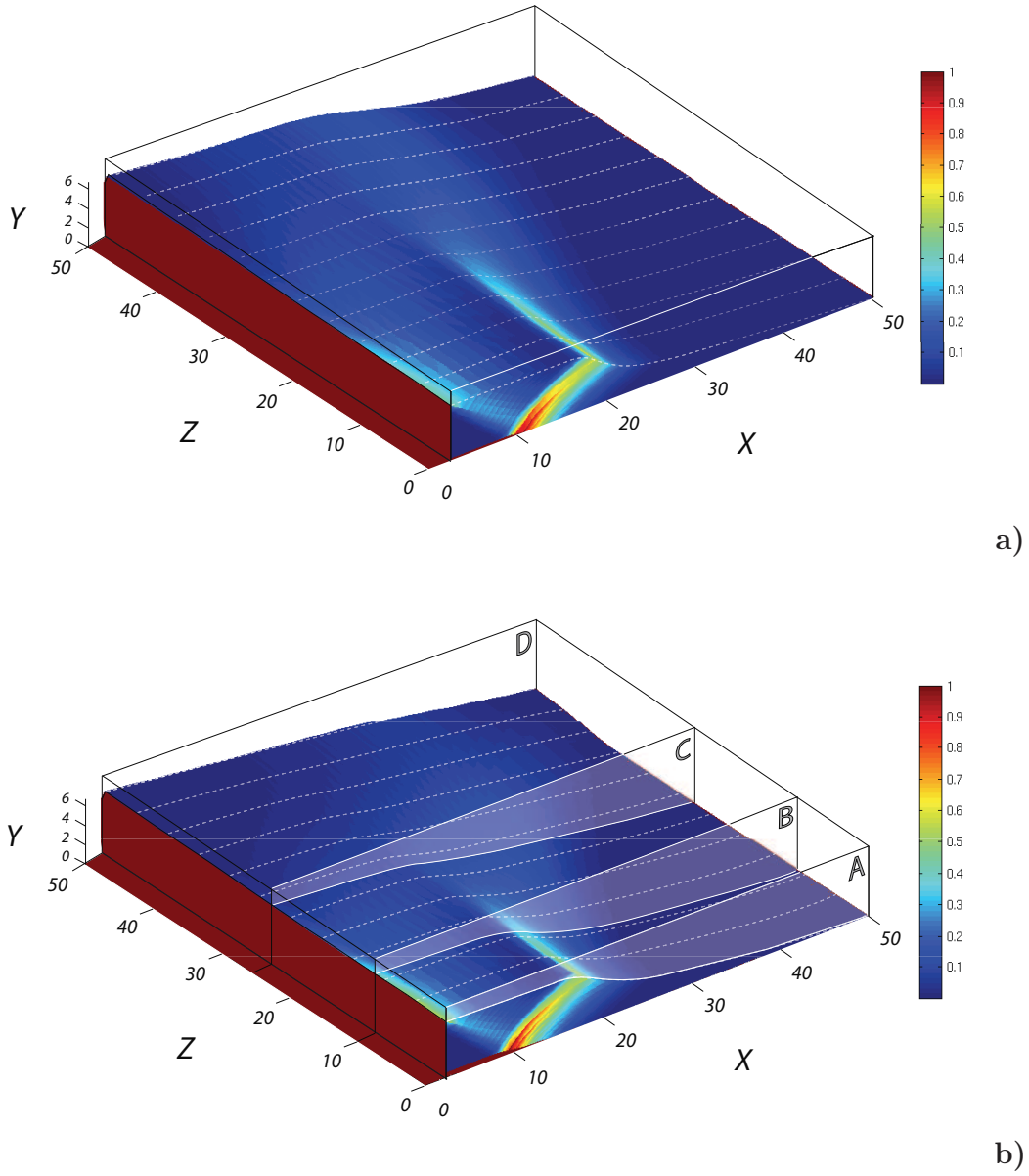


FIG. 3.18: The deformed 3D wedge and distribution of the virtual equivalent deformation for the two cases, $(\alpha_r, \alpha_l) = (3.^\circ, 3.7^\circ)$ and $(2.9^\circ, 3.9^\circ)$, in a) and b), respectively.

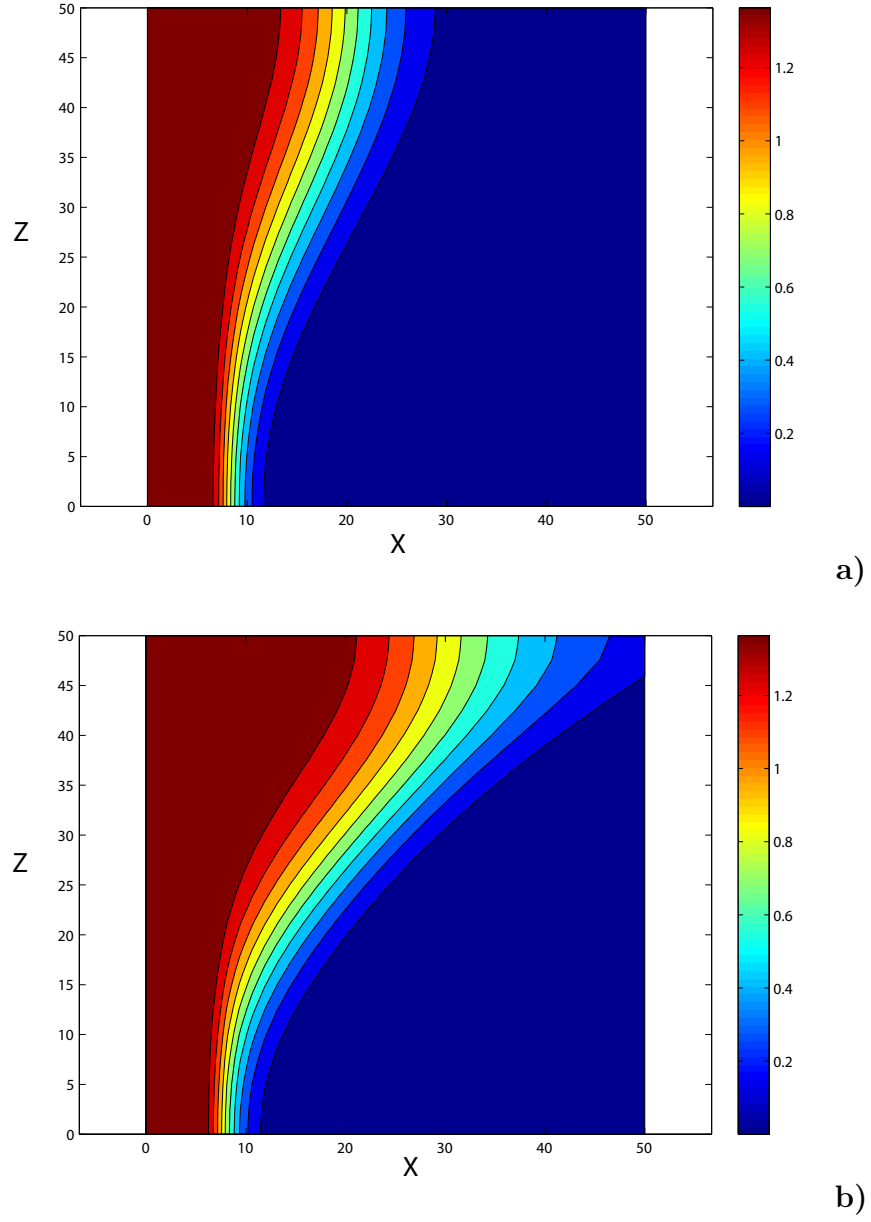


FIG. 3.19: Activation of the décollement from the distribution of the norm of the virtual velocity vector for $(\alpha_r, \alpha_l) = (3.^\circ, 3.7^\circ)$ and $(2.9^\circ, 3.9^\circ)$, in a) and b), respectively.

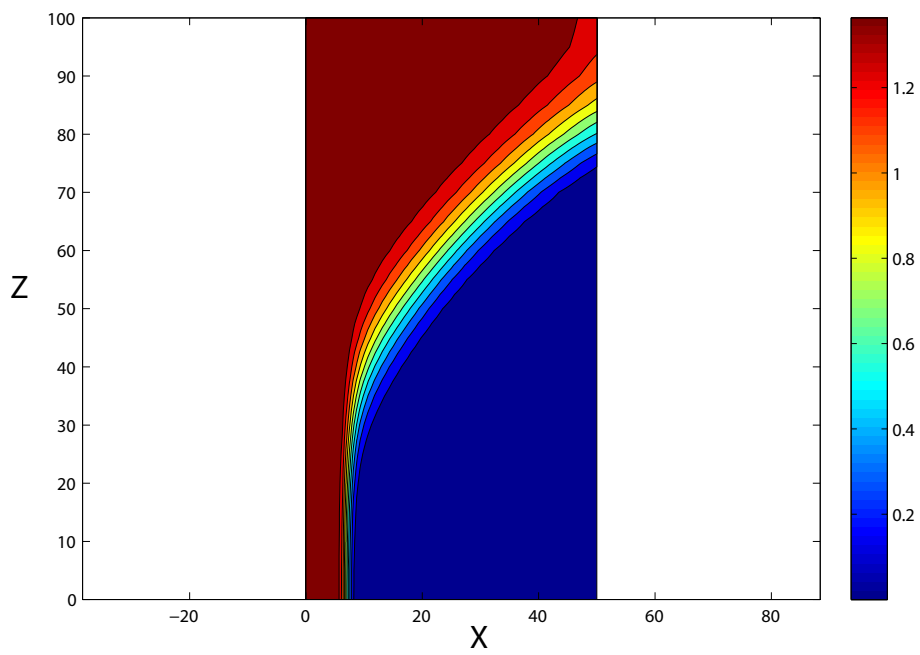


FIG. 3.20: Activation of the décollement for $(\alpha_r, \alpha_l) = (2.9^\circ, 3.9^\circ)$, with a wider domain set to 100 km.

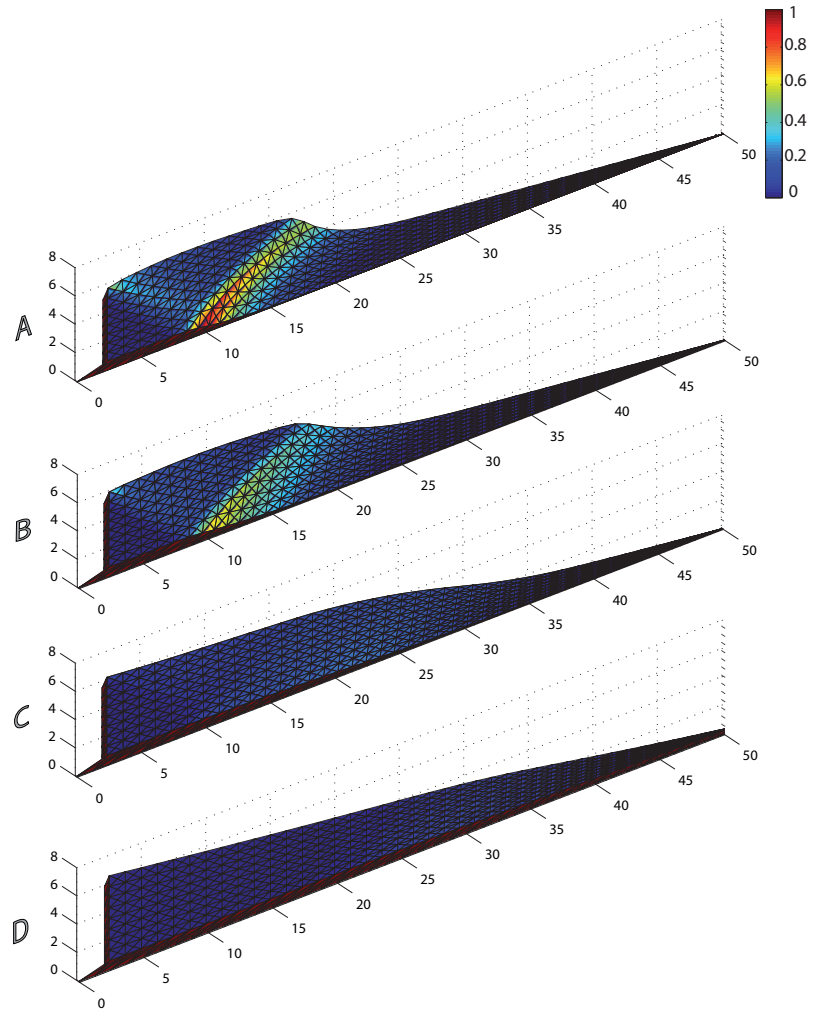


FIG. 3.21: Four cross-sections through the 3D wedge with a topographic slope in the z-direction (case b), labelled A to D in Figure 3.18. The distribution of the virtual equivalent strain is presented over the four sections.

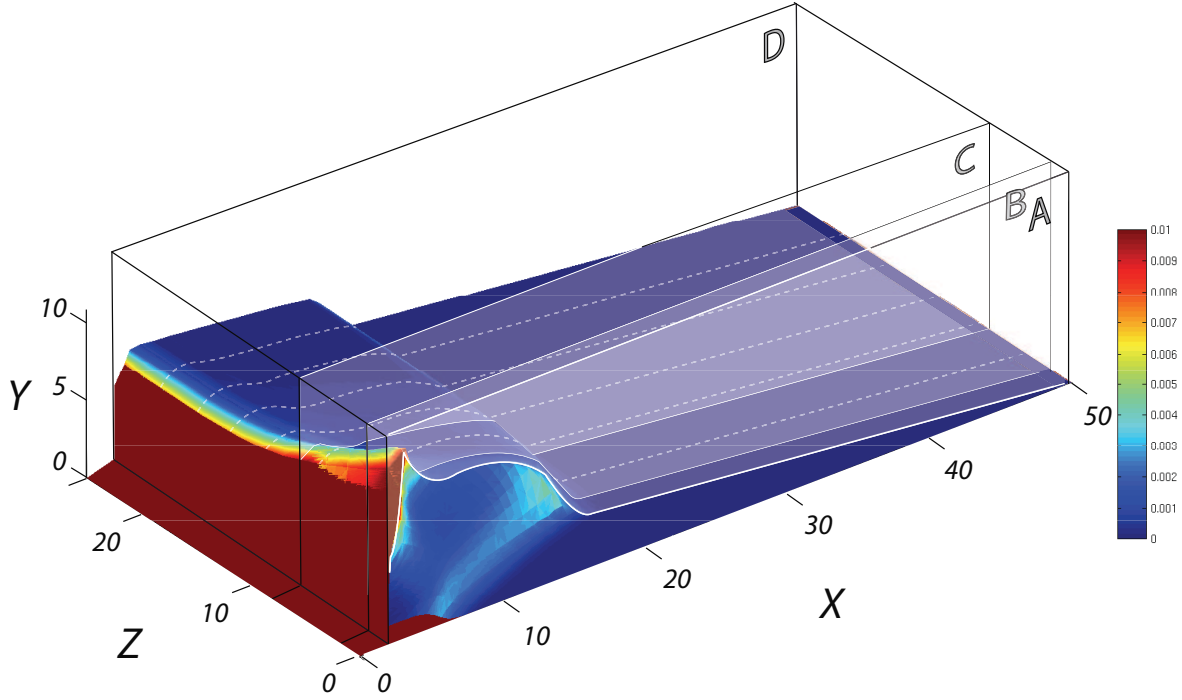


FIG. 3.22: The deformed wedge with friction $\phi_w = 15^\circ$ on the right lateral wall. The left wall has zero friction and acts as a symmetry plane. The iso-contours correspond to the intensity of the virtual equivalent strain.

3.11 Friction on side walls of laboratory experiments

The open question is the influence of the friction on the lateral wall on the final style of the deformed structure produced in laboratory experiments. This second 3D problem consists of a 3D wedge with a constant slope over the topography. The friction angle is still set to zero over the left wall which acts as a symmetry plane. The right wall has now a friction angle $\phi_w = 15^\circ$ which is typical of the experimental set-up. The half structure is only 25 cm wide and 50 cm long (width-length ratio of one) and a regular mesh in the z-direction is considered with a total to 30 456 elements. Results are presented in four subsections, the first is concerned with the distribution of the equivalent virtual strain and the second with the velocity field, both for 2D sub-critical conditions. The activation of the décollement is then studied for super-critical conditions before a comparison between these latter predictions with the results of a sand-box experiment is proposed.

3.11.1 Deformed wedge and virtual equivalent strain

The deformed wedge where the displacement is proportional to the virtual velocity is presented in Figure 3.22. Colored contours of virtual equivalent strain $\tilde{\gamma}$ are also presented. The dashed white lines are markers parallel in strike to the two lateral walls. This wedge is 2D sub-critical and the deformation occurs to the back of the structure. This is consistent with the observation of the relief, seen from the left wall, which is reminiscent of the one observed in the previous section as well for the 2D problems. The relief changes however at the back wall contact as one moves from the left to the right lateral wall. This variation is analyzed with the help of four parallel sections, labelled from A to D and found at $z = 0, 2, 8$ and 25 cm.

Figure 3.23 presents the distribution of $\tilde{\gamma}$ over each section, the same contouring levels being used in the four graphs. The deformed mesh is also presented to help in the interpretation. The central graph D is rather similar to the 2D solution with a ramp and a back thrust marked by localized deformation. The back thrust outcrops at the intersection of the back wall and the top surface. The back thrust is bounding by above the region next to the back wall which is sliding mainly as a rigid block over the décollement, and in a less important way on the back wall. As one moves towards the right wall, section C, the localized deformation of the ramp is still present and is now also associated with a vertical stretching of the material in the hanging wall. The relief is higher than the one observed in the central section, especially at the place where the back thrust is outcropping at the back wall. Section B, which is at 2 cm from the lateral wall, confirms this trend. The band defining the ramp is stretched vertically and its root on the décollement is closer to the back wall than on section C. The back thrust is triangular in shape with a large displacement at the back wall marking a region which is sliding over this boundary. Section A on the left wall is similar. The ramp is now also more triangular in shape with a larger dip of its central line. It is rooting even closer to the back wall than found in section B and C. Part of the hanging wall is sliding over the back stop as seen from the dark-red colored region.

In summary, the 3D effects due to the lateral wall friction are felt over a length of 1.5 times its height. These 3D effects correspond to the vertical stretching of the material in the hanging wall and to the rooting of the ramp closer to the back wall, marking most likely less activation of the décollement. The vertical stretching is a consequence of the virtual dilatancy due to the support function, provided in (3.9.8) for the bulk and in (3.9.8bis) for plane interfaces, and will be further commented next.

This information on the décollement activation can be inferred from Figure 3.24. The curvature of the contours which marks the reduction in décollement activation occurs close to the

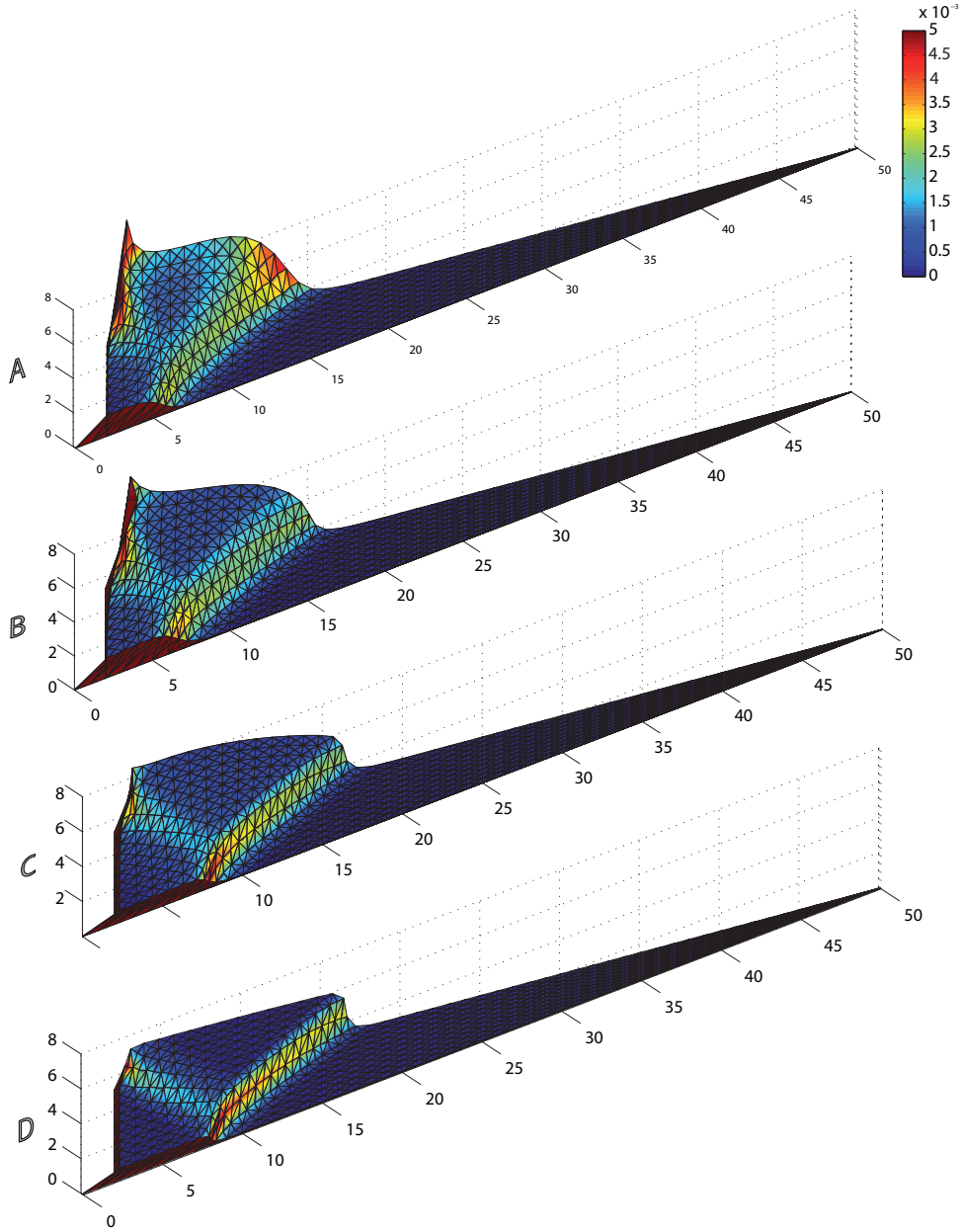


FIG. 3.23: Four cross sections, labelled A to D, through the 3D wedge with friction on the right lateral wall. They are located in Figure 3.22. The distribution of the virtual equivalent strain $\tilde{\gamma}$ is shown on each section.

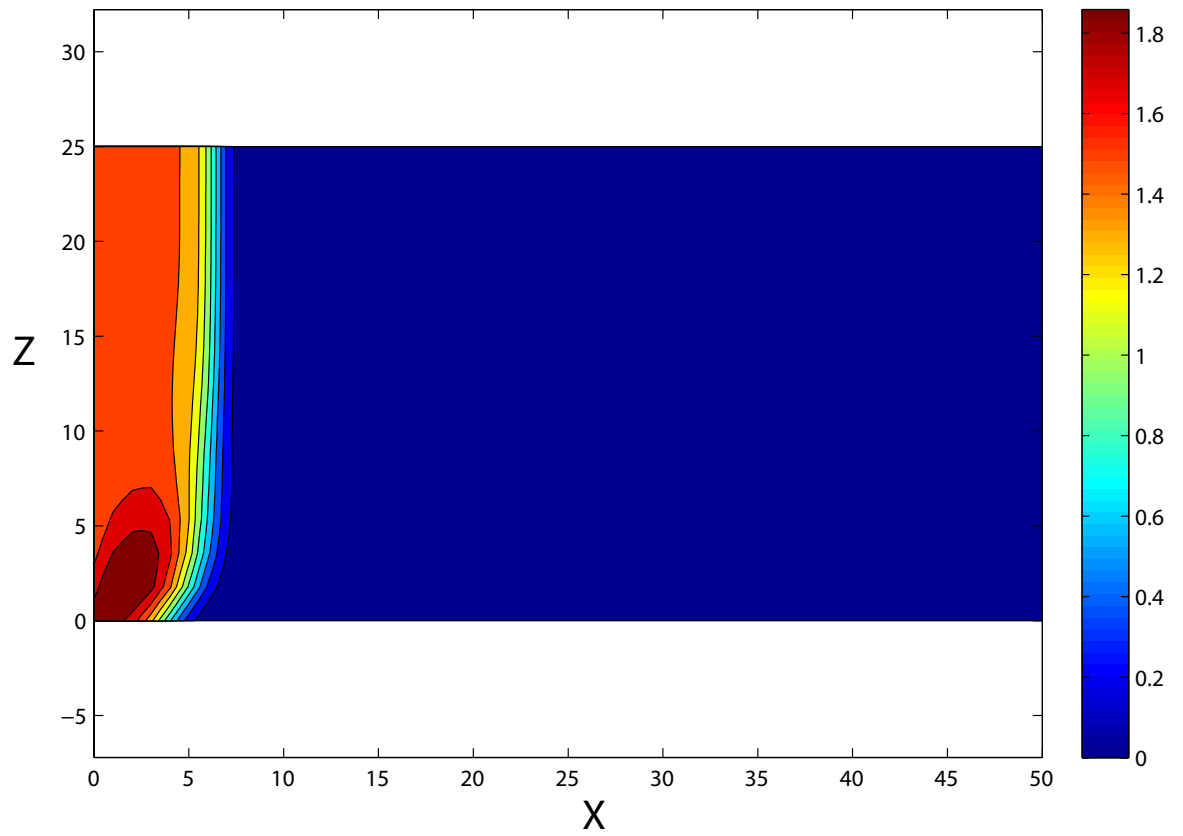


FIG. 3.24: Décollement activation for the 3D wedge with friction on the right lateral wall, from the norm of the velocity field.

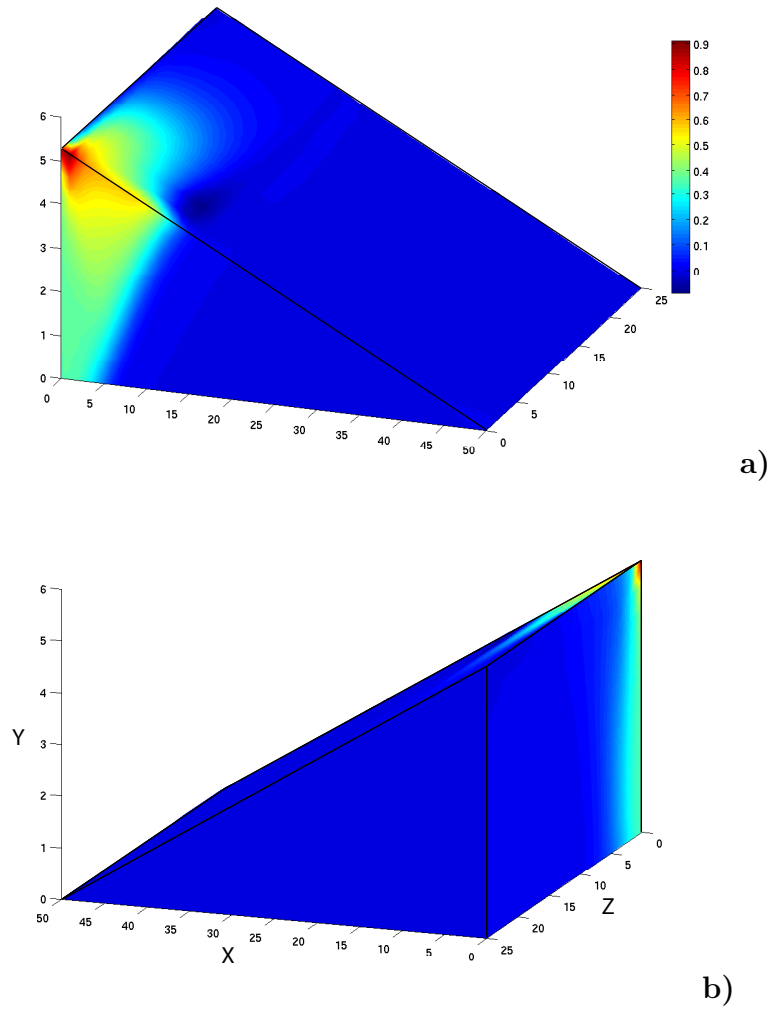


FIG. 3.25: Iso-contours of the z-component of the virtual velocity field, viewed from the right wall a), and from the central region, b).

right boundary. The intensity of the virtual velocity is also larger close to the right wall over a distance of the order of 5 cm. This is the region with most relief.

3.11.2 Velocity field

Further analysis of the failure mechanism is now proposed with a direct analysis of the virtual velocity field.

The z-component of the velocity field is presented with iso-contours on the boundary surfaces of the wedge in Figure 3.25 with two views, the first from the right wall and the second from the central region. The z-component is zero on the central section because that plane acts

as a symmetry plane. The z-component varies from zero to 0.9 on the right wall because the sliding over that surface does require a velocity component along its normal, according to the support function for Coulomb strength interfaces (3.9.9). Case 2 is most probable to minimize internal work according to our experience with analytical work (Cubas et al. 2008) so that the normal and tangential component of the virtual velocity are in the ratio of $\tan \phi_w$ (Maillot and Leroy, 2006), as discussed after (3.9.9). Again, the plane of failure has to open up for sliding to occur. The interesting new information, not seen on the previous set of figures is that the whole block bounded by the ramp and the back wall is sliding on the lateral, right wall, since the z-component of velocity is non zero. There is a strong gradient in this z-component as one moves upward along the right wall. Note the velocity concentration at the wedge back right corner.

The iso-contours of the y-component of the velocity field over the wedge external surfaces is presented in Figure 3.26, with the same two views as above. Looking at the central section, we observe three levels of blue, dark, light and turquoise. The dark color signals the absence of vertical motion at the toe of the wedge. The light blue region is the back thrust and the ramp. The turquoise color is over the hanging wall which has a larger vertical velocity than the rear block. The view from the right wall shows a rather different velocity distribution in the hanging wall. There is there a vertical gradient in this y-component, confirming the vertical bulk extension discussed above. This stretching which leads to relief build up which is also observed on the topographic surface.

The distribution of the x-component of the velocity field over the wedge external surfaces is presented in Figure 3.27 with still the same two views as above. The interpretation of view b from the central region is the same as for the y-component. Rigid block virtual motions are separated by the back thrust and the ramp and due to the sliding over part of the décollement. Consider now the surface in contact with the back wall. In the left part, close to the central wedge section, the velocity is uniform corresponding to the push of the back wall and a minor sliding over the back wall. There is a gradient in that x-component as one moves from there towards the top corner of the wedge at the right wall contact. The velocity is there twice as large compared to the bottom left corner. The large velocity is commensurate to the vertical velocity since the two components have to respect the constraint set by the Coulomb support function (equation 3.9.8). This vertical velocity on the back wall was not discussed with the previous Figure 3.26 because the y-component large intensity over the right wall was over-shadowing this gradient over the back wall. On the right wall, the same range in velocity is observed compared to the central section. However, the gradient is much smoother, in line with the interpretation of the diffuse deformation presented earlier.

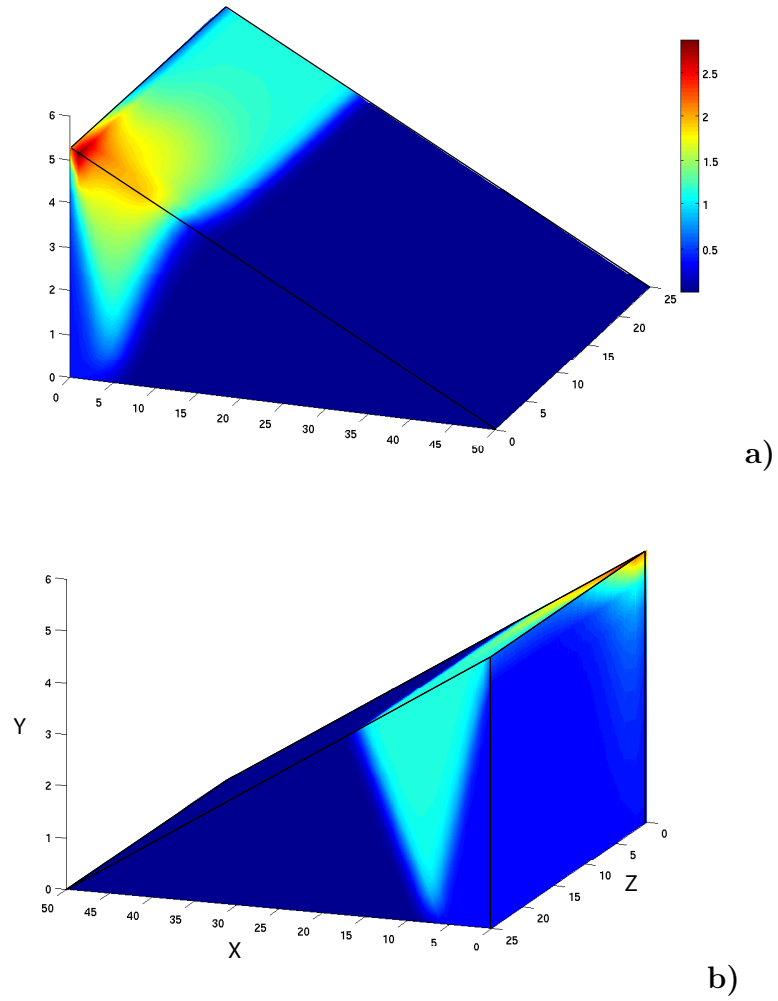


FIG. 3.26: Iso-contours of the y-component of the virtual velocity field, viewed from the right wall a), and from the central region, b).

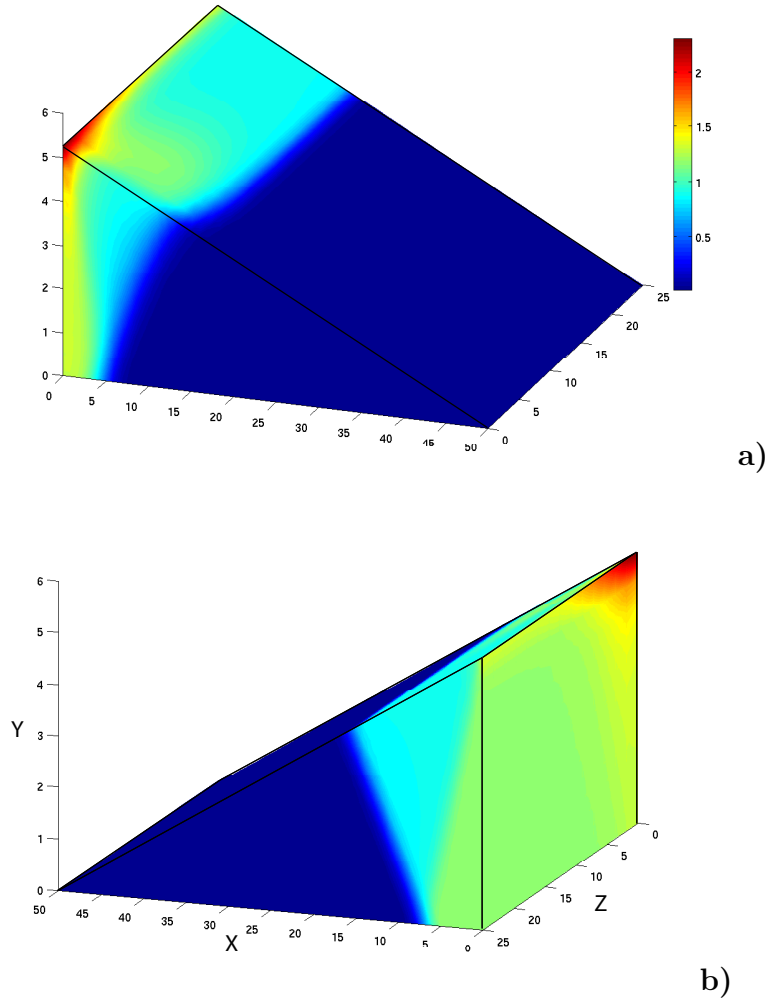


FIG. 3.27: Iso-contours of the x-component of the virtual velocity field, viewed from the right wall a) and viewed from the central region, b).

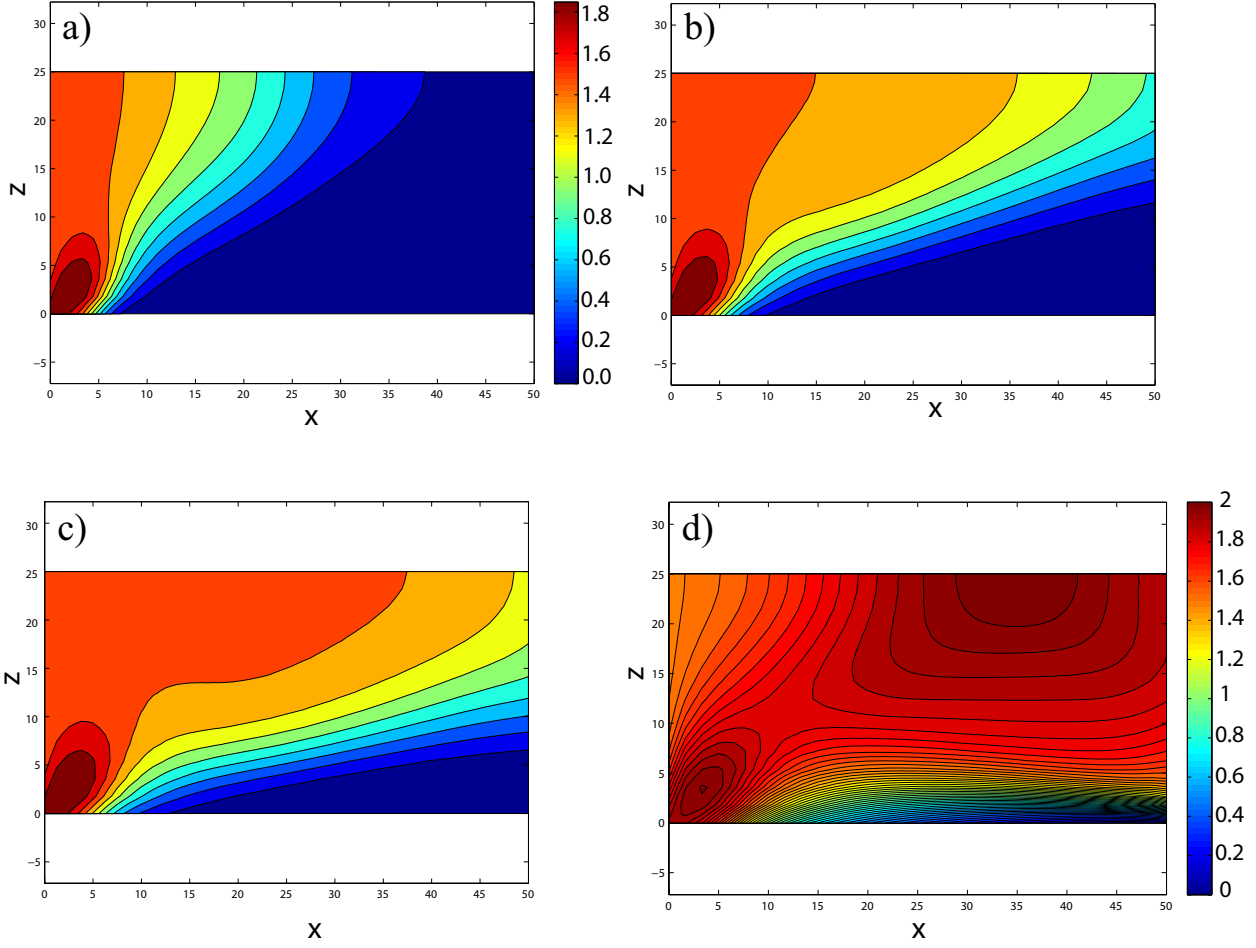


FIG. 3.28: Activation of the décollement for topographic slope α of 4, 4.5, 5°, and 7° in a) to d), respectively, revealed by iso-contours of norm of the virtual velocity.

3.11.3 Décollement activation

The activation of the décollement is presented in Figure 3.28 for four values of the topographic slope α of 4, 4.5, 5 and 7°. This activation is deduced from the iso-contours in the norm of the virtual velocity vector.

For $\alpha = 4^\circ$, the décollement activation close to the right wall ($z = 0$) is restricted to the region close to the back wall ($x = 0$). The influence of this wall is felt in the central region ($z = 25$) where the whole décollement is not activated despite the super-critical verdict of the 2D criterion ($\alpha_c = 4^\circ$). Note the spreading of the gradient in this activation over a length $\Delta x = 20$. For $\alpha = 4.5^\circ$, the décollement is fully activated in the central section although this

activation is still influenced by the lateral wall in view of the gradient in the velocity norm in the x-direction in the central region. This activation occurs over a width of $\Delta z = 10$, approximately. This width is twice as large for $\alpha = 5^\circ$. There is still a triangular region, dark blue region, which is still inactive despite the large topographic angle. It is necessary to increase the slope to 7° for the décollement to be activated over 80 % of its width.

The generalisation of the 2D stability criterion of Dahlen (1984) is thus not direct in 3D since the décollement is not completely activated even for large topographic slopes. One could however imagine a 3D criterion where the percentage of the activated surface could be used as the basis to define stability.

3.11.4 Comparison with analogue experiment

The final question raised in this section is how the above predictions could compare to the results of analogue experiments? The sand-box considered has a width to length ratio of one (28 cm) and the topographic slope is set to 5° for a décollement dip $\beta = 3^\circ$. The geometry is thus similar to the one considered for the predictions above. The map view at the end of the shortening by 42 mm is presented in Figure 3.29. The décollement is fully activated and the deformation front is at the toe of the wedge, on the right-hand side of the picture. This front is curvy close to the two lateral walls and rather straight in the central region of the box. The influence of the wall is over a length of 7 cm on each side corresponding to 25 % of the set-up width.

These results are recorded after a shortening of 15 % of the initial length and the comparison with the velocity field presented above valid at the onset of failure is only tentative. It is proposed to compare the deformation front of Figure 3.29 and the décollement activation predictions reported in Figure 3.28c corresponding to the same topographic slope. The lateral wall was predicted to prevent slip over 20 % of the box width. It is over approximately the same width that the deformation front is curvy in the sand box. The activation gradient in the z-direction close to the lateral wall is of the order of 30 % of the reference length. This is approximately the thickness of the deformation front in the same area of the sand box. It is difficult to go beyond these two first comparisons before a geometrical construction of the 3D wedge failure evolution with proper optimization is proposed.

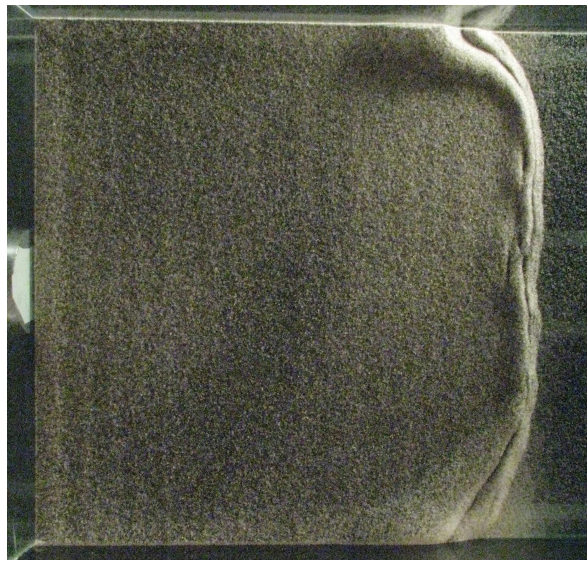


FIG. 3.29: Map view of the super-critical wedge in the laboratory after a shortening of 42 mm for an initial length of 28 cm (box width of 28 cm). The décollement is fully activated and deformation takes place at the toe (right-hand side). The curving of the deformation front shows the influence of the side wall friction.

3.12 Conclusion

The objective of this contribution was to propose a methodology to investigate systematically the 3D variations in the failure mode, within accretionary wedges, at their onset.

The first of the two 3D examples shed light on the validity of the 2D stability criterion in the presence of a lateral topographic slope variation. It is shown that a variation by $\pm 0.5^\circ$ from the critical α_c could stop the migration of the deformation front to the toe of the wedge. A variation of $\pm 0.25^\circ$ in lateral slope does not affect the 2D solution. The lateral variation in the failure mechanism is characterized by a ramp becoming diffuse with a decreasing dip. The second of the 3D examples was proposed to question the influence of the lateral wall friction on the failure mode produced typically in the laboratory. For a lateral friction of 15° and a box with a width to length ratio of one, 20 % of the width set up is affected by the lateral wall. The critical slope angles $\alpha_c = 3.38^\circ$ is increased by as much as 3.5° . It is indeed necessary to increase significantly the weight of the wedge before super-critical conditions are met.

It is hoped that these numerical procedure could help in understanding 3D effects in most geological structures and their prototypes built in the laboratory. A parametric analysis could for example provide the 3D generalization of the Dahlen (1984) 2D criterion. It is foreseen that the 3D stability criterion will have to rely on the percentage of activated décollement since the whole activation is not predicted even for large values of the topographic slope. It is also hoped that this technique could provide guidance in parameterizing simply the 3D failure mode which leads to an evolution of the accretionary wedge or of any fold-and-thrust belt. This step from the failure mode at the onset to an evolution mechanism is essential if simple constructions are thought to extend the Suppe-type of constructions in 3D. This task is certainly difficult in view of the diffuse mode of failure found in 3D instead of the localized 2D modes, which are reported in these two first 3D examples. The lack of intuition which had hindered most structural geologists to extend their work to 3D is certainly explained by this transition from 2D localized to 3D diffuse failure modes which is revealed by this numerical technique.

Bibliographie

Barker, D.H. L, Sutherland R., Henrys S., Bannister S. (2009), Geometry of the Hikurangi subduction thrust and upper plate, North Island, New Zealand, *G3*, v. 10, no.2 doi :10.1029/2008GC002153.

Bell, R., Sutherland R., Barker D., Henrys S., Bannister S., Wallace L., Beavan J. (2009) Seismic Reflection Character of the Hikurangi subduction interface, New Zealand, in the region of repeated Gisborne slow slip events, *Geophysical Journal International*, doi : GJI-09-0110.

Braun, J. (1994), Three dimensional simulation of crustal-scale wrenching using a non-linear fracture criterion, *Journal of Structural Geology*, v. 16, 1173–1186.

Cardozo, N. (2008), Topography as a major factor in the development of arcuate thrust belts : insights from sandbox experiments, *Journal of Structural Geology*, v. 30, 327–340.

Costa, E., and Vendeville, B. (2004), Experimental insights on the geometry and kinematics of fold-and-thrust belts above weak, viscous evaporitic décollement : reply to comments by Hemin Koyi and James Cotton, *Journal of Structural Geology*, v. 26, 2139–2143.

Cristallini, E. O., and R. W., Allmendinger (2001), Pseudo 3-D modeling of trishear fault-propagation folding, *Journal of Structural Geology*, v. 23, 1883–1899.

Cubas, N., Y.M. Leroy and B. Maillot (2008), Prediction of thrusting sequences in accretionary wedges, *J. Geophys. Res.*, 113, B12412, doi :10.1029/2008JB005717.

Cubas, N., B. Maillot and C. Barnes (2009), Statistics of the experimental growth of a sand wedge, submitted for publication.

Dahlen, F.A. (1984), Noncohesive critical Coulomb wedges : an exact solution, *J. Geophys. Res.*, 89, B12, 10125–10133.

Davis, R. O. and Selvadurai, A. P. S., Selvadurai (2002), *Plasticity and Geomechanics*, Cambridge University Press, 287 p.

Erslev, E. A. (1991), Trishear fault-propagation folding, *Geology*, 19, 617–620.

Hubbert, M. K. (1951), Mechanical basis for certain familiar geological structures, *Bull. Geol. Soc. Am.*, 62, 335–372.

Imber, J., G. W. Tuckwell, C., Childs, J. J., Walsh, T., Manzocchi, A. E., Heath, C.G., Bonson, and J., Stand (2004), Pseudo 3-D modeling of trishear fault-propagation folding, *Journal of Structural Geology*, v. 26, 1897–1911.

Marshak, S., and M. S. Wilkerson (1992), Effects of overburden thickness on thrust belt geometry development, *Tectonics*, v. 11, no. 3, 560–566.

Macedo, J., and Marshak, S. (1999), Controls on the geometry of fold-thrust belt salients, *GSA Bulletin*, v. 111, no. 12, p1808–1822.

Maillot, B. and Y.M. Leroy (2003), Optimal dip based on dissipation of back thrusts and hinges in fold-and-thrust belts, *J. Geophys. Res.*, 108, B6, 2320–2336.

Maillot, B. and Y.M. Leroy (2006), Kink-fold onset and development based on the maximum strength theorem, *J. Mech. Phys. Solids*, 54, 2030–2059.

Marques, F. O., and P.R. Cobbold (2002), Topography as a major factor in the development of arcuate thrust belts : insights from sandbox experiments, *Tectonophysics*, 448, 247–268.

Marques, F. O., and P.R. Cobbold (2006), Effects of topography on the curvature of fold-and-thrust belts during shortening of a 2-layer model of continental lithosphere, *Tectonophysics*, 415, 65–80.

Martinez, A., Malavielle, J., Lallemand, S., and Collot, J.Y. (2002), Strain partitioning in an accretionary wedge, in oblique convergence : analogue modelling Bulletin de la Société Géologique de France, 173, 17–24

MOSEK (2008), optimization software, <http://www.mosek.com>.

- Pubellier M. and Cobbold P.R. (1996), Analogue models for the tanspressional docking of volcanic arcs in the Western Pacific, *Tectonophysics* 253, 33–52
- Salençon, J. (1974), *Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols*, edited by Eyrolles, Paris, (English translation : *Applications of the theory of plasticity in soil mechanics*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1977).
- Salençon, J. (2002), *De l'élasto-plasticité au calcul à la rupture*, Editions École Polytechnique, Palaiseau, and Ellipses, Paris.
- Sciamanna, S., W. Sassi, R. Gambini, J.L. Rudkiewicz, F. Mosca and C. Nicolai (2004), Predicting hydrocarbon generation and expulsion in the Southern Apennines Thrust Belt by 2D Integrated Structural and Geochemical Modeling : Part I - Structural and thermal evolution, in *Deformation, fluid flow, and reservoir appraisal in foreland fold and thrust belts*, edited by R. Swennen, F. Roure, J.W. Granath, 51–67, A.A.P.G. Heldberg series, 1.
- Souloumiac, P., Y.M. Leroy, K. Krabbenhøft K. and B. Maillot (2007), Predicting stress in fault-bend fold by optimization, in press.
- Vendeville, B.C. (2007), The 3-D Nature of Stress Fields in Physical Experiments and its Impact on Models Overall Evolution. Solicited oral contribution, EGU General Assembly, Vienna, 15-20 April, 2007.
- Wibberley, C. A. J. (1997), Three-dimensional geometry, strain rates and basement deformation mechanisms of thrust-bend folding, *Journal of Structural Geology*, v. 19, no. 3–4, 535–550.

Chapitre 4

Effets de bords dans les modèles analogiques en sable

4.1 Introduction

Une des techniques pour étudier les structures tectoniques est l'utilisation des boîtes de sable qui permettent de suivre l'évolution du plissement de la structure. L'expérience consiste à appliquer un déplacement sur une série sédimentaire construite avec un matériau analogue pour atteindre à la fin du déplacement une structure plissée proche des structures réelles. Ces modèles analogiques sont utilisés pour étudier les mécanismes d'accrétion et la déformation des ceintures de chevauchements (Par exemple : Davis et al., 1983 ; Malavieille, 1984 ; Mulugeta, 1988 ; Mulugeta and Koyi, 1992 ; Lallemand et al., 1994 ; Gutscher et al., 1996). Le sable est un matériau analogue approprié car il a une faible cohésion et obéit au critère de rupture de Coulomb, adapté à la modélisation analogique de la déformation des 10 premiers kilomètres de la croûte. Différentes techniques ont été développées pour traiter les résultats obtenus à partir de ces expériences. Tout d'abord des prises de vues sont réalisées sur le côté de la structure. Dans ce cas, la boîte de sable est composée au moins d'un mur en plexiglass ou en verre. Ces photos sont prises au fur et à mesure du plissement ou alors en fin d'expérience. Les résultats présentés ensuite sont soit directement les photos soit des séries de schémas redessinés à partir de ces photos à travers la vitre (Marshak and Wilkerson, 1992 ; Koyi, 1997). D'autres techniques d'interprétation ont été développées utilisant par exemple la technique de "Particle Image Velocimetry" (Adam et al., 2005). Bernard et al. (2007) ont d'ailleurs développé des modèles cinématiques de déformation dans le sable en se basant sur des résultats issus de cette technique. Ces interprétations faites à partir des vues latérales de la structure plissées

ne tiennent pas compte des effets de frottement probables sur la vitre latérale. C'est pourquoi d'autres auteurs préfèrent présenter des coupes de la structure déformée finale (Cotton and Koyi, 2000) afin de montrer l'évolution du plissement dans le sens perpendiculaire au déplacement et ainsi insister particulièrement sur la partie centrale de la boîte. Cela permet de s'éloigner des bords de la boîte et donc d'éviter les déformations induites par la friction sur les vitres latérales de la boîte. Dans ce sens, Cubas et al. (soumis) ont montré que seules les 7 coupes centrales de chaque expérience réalisée pouvaient être considérées comme non affectées par les effets de bords (figure 3 de l'article) c'est-à-dire que dans leur cas, pour une épaisseur de sable uniforme de 9 mm, la première coupe utilisée est à 8 cm de la vitre latérale.

Ce problème d'effets de bords dans la boîte a soulevé une discussion entre les auteurs Koyi et Cotton (2004) et Costa et Vendeville (2004) : si la friction sur les murs latéraux est négligeable par rapport aux forces de cisaillement dues à la friction sur les autres parties de la boîte (en particulier le décollement c'est-à-dire le fond de la boîte) alors le fait de changer le mouvement relatif des murs latéraux ne doit pas avoir d'effets sur la déformation. Cette condition peut être respectée de deux manières : soit en réduisant la friction latérale soit en réduisant la surface latérale par rapport à la surface basale. Vendeville a également mis en évidence ce problème d'effets de bord lors d'une communication orale à l'E.G.U. en 2007. Il a montré que l'effet des murs latéraux était important et pouvait contrôler entièrement l'évolution d'une séquence de chevauchements, il a ainsi démontré que les modèles analogiques restaient des modèles en 3D et que les conditions de contraintes planes n'étaient pas forcément respectées. Le moyen utilisé pour réduire la friction latérale et obtenir la même déformation quelque soit le mouvement relatif des murs latéraux est d'appliquer un matériau visqueux sur la vitre comme de la silicone ou de l'alkor foil (Schreurs et al., 2006) mais cela rend impossible la prise de photos latérales au cours de la déformation. Schreurs et al. (2006) ont également mis en évidence les divergences qu'impliquent la présence de ces murs latéraux dans la boîte. Lors de cette étude, 10 expériences ont été menées dans 10 laboratoires différents. La structure de base était identique mais les résultats de la déformation ont montrés certains écarts entre les expériences, particulièrement parce que la géométrie de la boîte utilisée n'était pas la même. C'est ainsi que l'interprétation des vues de dessus et des coupes de plusieurs expériences a révélé que la largeur de la boîte avait certainement une influence sur la déformation. En effet, les effets de bords étaient plus importants dans une boîte étroite. Ces auteurs ont finalement suggéré de réaliser une seule et même expérience en ne faisant varier que les propriétés des murs latéraux.

Notre travail s'inscrit donc dans le contexte d'évaluation et de prise en compte des effets de bords induits par le frottement sur les murs latéraux. Le but est de réaliser une expérience très

simple d'un point de vue de la géométrie : un prisme sur une couche de sable uniforme et de changer seulement la largeur de la boîte et l'épaisseur de la couche uniforme sous le prisme. Cela permet de faire varier la surface latérale et donc la friction latérale. C'est à partir d'observations à travers les vitres latérales et au-dessus de la boîte et de mesures des forces que ces effets 3D sont mis en évidence.

La première partie de cet article décrit le matériel utilisé ainsi que le protocole suivi pour ces expériences. Dans la deuxième partie, nous allons comparer la position du premier système de failles conjuguées entre chaque expérience. Puis dans la partie suivante, nous verrons comment ces différences influent sur l'évolution du plissement. Et enfin dans la dernière partie, nous donnerons une interprétation mécanique des résultats obtenus par observations.

4.2 Description des expériences

Nos expériences consistent à faire glisser un prisme de sable initialement formé prolongé par une couche de sable d'une épaisseur constante et de surface plane sur un décollement rhéologiquement plus faible (figure 4.1a). Ce prisme va accommoder le raccourcissement imposé en se déformant et en créant des failles conjuguées : plusieurs systèmes de rampes et de chevauchements (figure 4.1b et c). Six prototypes d'expériences ont été réalisés et vont être décrits dans la suite de l'article. Cette partie est consacrée au matériel utilisé : la boîte et le matériau analogue : le sable.

Cubas (2009) a utilisé le même sable, la même boîte de 28cm et la même semeuse dans son travail de thèse. Donc pour certains détails, on pourra se reporter à son mémoire de thèse (Cubas, 2009).

4.2.1 La boîte à sable

La boîte est rectangulaire et composée de 7 plaques de verres qui sont décrites sur la figure 4.2.

Deux largeurs de boîte sont envisageables : 7 ou 28 cm, cette largeur est notée w . La longueur de la boîte peut aller jusqu'à 40 cm. Les plaques de verre composant la boîte font 10 mm d'épaisseur avec une précision de ± 0.05 mm. Le raccourcissement est exercé grâce à un arbre relié à un moteur à l'arrière de la boîte. La vitesse est variable et réglable grâce à un potentiomètre. Elle est fixée à 0.42 mm/s pour les expériences décrites dans cet article.

4.2. Description des expériences

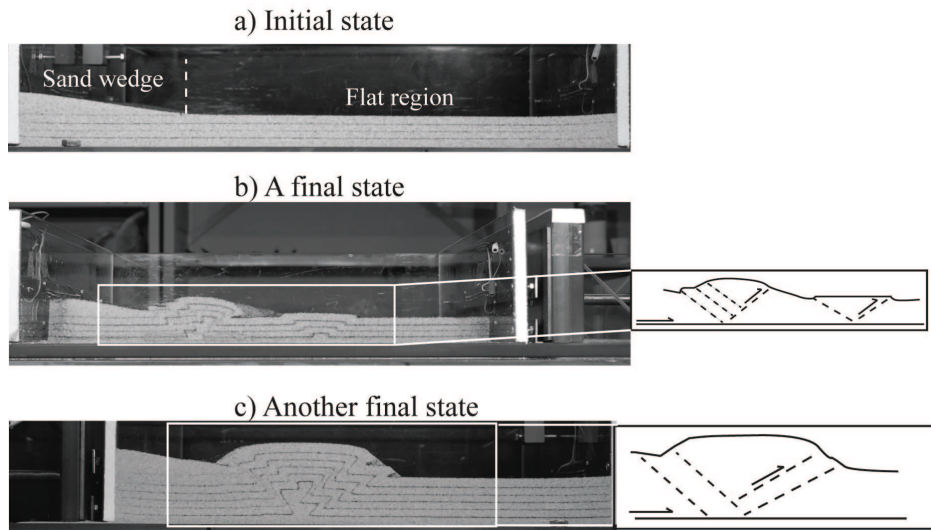


FIG. 4.1: Photos de l'état initial d'une expérience a), et deux états finaux après raccourcissement total b) et c). L'épaisseur de la couche plate prolongeant le prisme est différente dans les deux cas. Un deuxième système de failles conjuguées s'est formé en avant de prisme pour une épaisseur de 2cm b), alors que la déformation est concentrée à la base du prisme pour une épaisseur de 3cm, c). Noter les jauges de forces placées à l'arrière des murs longitudinaux permettant de mesurer la force absolue de compression à chaque extrémité de la boîte pendant le raccourcissement.

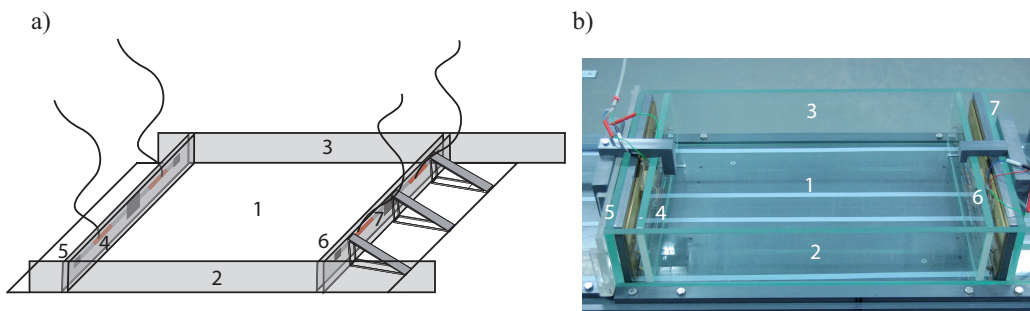


FIG. 4.2: Description de la boîte : elle est composée de 2 plaques latérales (2 et 3) maintenues par des cales en plexiglas, de 2 plaques longitudinales à chaque extrémité de la boîte (4,5 et 6,7). Entre ces deux couples de plaques se trouvent le dispositif de jauges pour mesurer les forces. Les câbles relient les jauges au scanner.

L'intérêt de cette boîte est de pouvoir être montée suivant deux configurations différentes : A ou B (Figure 4.3). Par conséquent, cette boîte est réversible et permet d'inverser le glisse-

ment relatif des murs latéraux. La configuration A (Figure 4.3a) correspond à un mouvement relatif du mur arrière (mur du côté du prisme) de la boîte solidaire des murs latéraux. C'est pourquoi le prisme est construit à l'opposé du mur poussé par le moteur. La configuration B (Figure 4.3b), laisse les murs latéraux immobiles et seul le mur arrière se déplace sous l'action du moteur. Le prisme est alors construit du côté du mur qui est translaté. Il est important de remarquer que ce sont les mouvements réels qui sont représentés sur la figure 4.3 et non les mouvements relatifs comme décrits précédemment. Dans la littérature, la configuration A correspond à une déformation "pull", typiquement les boîtes utilisant une "conveyor belt" tandis que la configuration B correspond à une déformation "push". Les photos du dessus de la boîte de la figure 4.3 montrent une courbure vers le prisme pour la configuration A et vers l'avant pour la configuration B. En effet, la courbure se crée dans le sens du mouvement. Cependant en configuration A, la déformation a tendance à être propagée vers l'avant alors qu'en configuration B, la déformation se concentre près du mur arrière.

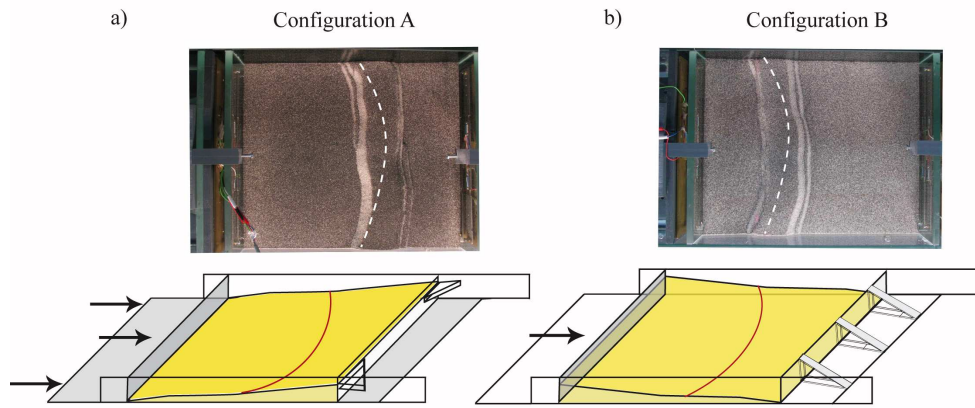


FIG. 4.3: Configurations de la boîte permettant d'inverser les frottements latéraux. Les plaques grisées sont les parties de la boîte en mouvement. Pour la configuration A, le prisme est à l'opposé du mur de poussée alors que pour la configuration B le prisme est du côté du moteur. Les photos sont des vues de dessus de la boîte à la fin du raccourcissement. Le trait pointillé blanc (photos) et le trait rouge plein (schéma) soulignent la courbure pour chaque configuration.

La plaque de verre du décollement et celles des murs latéraux sont traitées au Rain-X. Il s'agit d'un produit commercial qui réduit la valeur de l'angle de friction du sable sur le verre c'est-à-dire que $\phi = 9^\circ$ environ (Cubas, comm. pers.).

La seconde particularité de ce dispositif expérimental est l'enregistrement des forces de poussée au fur et à mesure du raccourcissement. En effet, des jauges de déformation sont placées sur des tiges métalliques fines. Ces tiges sont collées sur une plaque métallique elle-

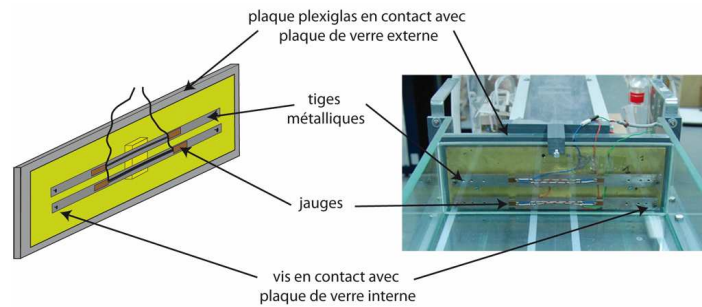


FIG. 4.4: Dispositif de mesure des résistivités dans la boîte (Figure extraite de Cubas, 2009.).

même fixée sur une plaque en plexiglas située sur les côtés longitudinaux de la boîte. Sur les tiges, des vis sont en contact direct avec les plaques de verres. Au cours du raccourcissement, la plaque avance, les tiges ainsi que les jauges se déforment. La résistivité des jauges est mesurée par un scanner à un taux de 10 mesures par seconde. Ensuite, par calibration, ces variations de résistivités, dont l'unité est spécifique au logiciel, sont transformées en grammes. Ces expériences de calibration ont été réalisées plusieurs fois au cours des expériences sans dérivation notable. Le dispositif de mesure des résistivités est visible sur la photo et le schéma de la figure 4.4. Les mouvements latéraux des plaques longitudinales sont empêchés par les plaques latérales. Notons également qu'un morceau de tissu ou de velours est placé sur les côtés des plaques longitudinales pour éviter les fuites de grains de sable pendant la déformation. Au début de chaque expérience, un raccourcissement est appliqué sur la boîte vide afin d'ajuster la position de chaque plaque constituant la boîte. Cet enregistrement des déformations à vide sert ensuite de signal de référence pour les déformations enregistrées lors de l'expérience avec le sable c'est-à-dire qu'une fois la boîte remplie de sable, la force enregistrée est la force additionnelle qui déforme le prisme. Nous verrons ensuite que la force est très sensible aux déformations dans la boîte et donc à la quantité de sable constituant le prisme.

4.2.2 Le matériau analogue : le sable

La boîte est remplie d'une épaisseur de sable uniforme h . Puis cette couche plane est recouverte d'un prisme triangulaire d'une hauteur maximale de $H_p = 17$ mm du côté du mur arrière. Les paramètres de la boîte et du prisme sont illustrés à la figure 4.5.

La boîte est remplie grâce à un distributeur de sable appelée la semeuse. Cette semeuse permet d'avoir une répartition du sable constante dans la boîte. Ce système, illustré à la figure 4.6, est décrit en détails par Cubas (2009).

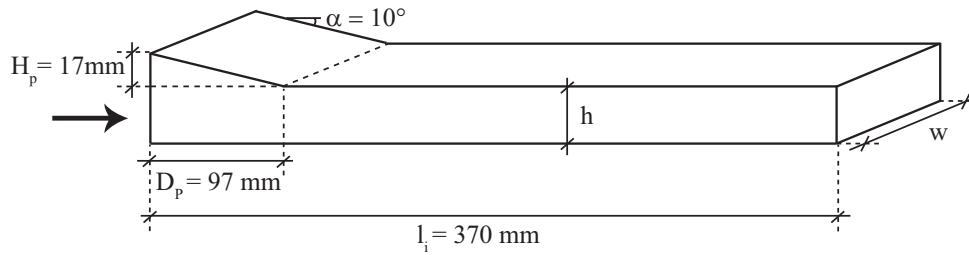


FIG. 4.5: Géométrie du modèle de prisme utilisée pour les expériences.

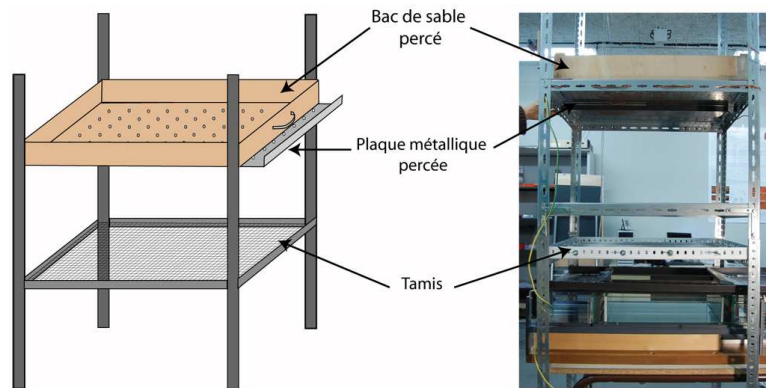


FIG. 4.6: La semeuse de sable est composée d'un bac au sommet dans lequel est versé le sable. Ce bac est percé de trous réguliers. Une plaque métallique également trouée est placée sous le bac. L'ouverture des trous du bac par le déplacement de cette plaque métallique permet au sable de s'écouler. Un tamis situé entre le bac et la boîte produit un flux de sable diffus et homogène (Figure extraite de Cubas, 2009.).

Le sable s'accumule au fond de la boîte à un taux de 0.3 mm/s. La couche plane de sable est construite par étapes de 5 mm. Par conséquent toutes les 15 secondes, la semeuse est arrêtée et une couche extrêmement fine de sable coloré à l'encre noire est répandue à la surface du sable blanc, ce sable noir faisant office de marqueur. Ces marqueurs présents tous les 5 mm permettent de mieux suivre la déformation au sein du pli lors du raccourcissement. Ensuite le prisme triangulaire est construit par couches de 2 mm à l'aide d'un cache au-dessus de la boîte qui est déplacé au fur et à mesure du remplissage. L'avantage de cette technique est donc de limiter la manipulation du sable au remplissage du réservoir de la semeuse. D'autre part, pour toutes les expériences, nous avons utilisé le même sable respectant les mêmes propriétés mécaniques. En effet, le choix du sable est important. Comme il a été souligné par l'étude de

Schreurs et al. (2006), le type de sable (composition chimique, granulométrie,...) joue un rôle considérable dans la déformation. Notamment, il a été montré dans la thèse de Cubas (2009) qu'un sable dont la taille des grains est assez homogène implique une déformation avec des failles irrégulières, plutôt courbes et se divisant en plusieurs branches alors qu'un sable plus hétérogène donne une déformation avec des failles uniques et régulières. Pour nos expériences, nous avons donc choisi un sable de Fontainebleau. Les détails rhéologiques du matériau sont donnés par Cubas et al. (soumis). Le sable a été analysé par Matthias Klinkmuller de l'Institut für Geologie de l'Université de Bern à l'aide d'un appareil "ring-shear tester" (anneau de cisaillement, Mandl et al., 1977 ; Panien et al., 2006). Les résultats de ces tests sont 3 angles de friction : une friction de pic de 33.7° (associée au pic de la contrainte cisailante), une friction dynamique de 30° (seuil stable après rupture) et une friction statique de 33° (pic après réactivation) pour des contraintes normales de 500 Pa à 2000 Pa. Mais comme il a été précisé dans la thèse de Cubas (2009), la valeur de la friction est sensible à la technique de remplissage (Krantz, 1991 ; Schellar, 2000 ; Lohrmann et al., 2003). Donc ces valeurs pourraient être un peu différentes dans la boîte de sable. Il aurait fallu remplir l'anneau avec la semeuse de la même manière que l'on remplit la boîte. Enfin, la température de la pièce où ont été réalisées les expériences était entre 18 et 22° , l'humidité était de 60 à 70%.

4.2.3 Les prototypes expérimentaux

Vingt-six expériences ont été réalisées dont les caractéristiques géométriques ont été répertoriées dans le tableau 4.1. L'objectif de cette étude étant de mettre en évidence les effets de bords, on cherche à répéter une expérience en faisant varier le rapport des surfaces basale et latérale soit par w soit par h . Ainsi deux largeurs de boîte sont utilisées : $w = 7$ ou 28 cm et l'épaisseur de la couche plane sous le prisme triangulaire varie de 1, 2 ou 3 cm suivant les expériences. Les lettres 'A' ou 'B' font référence à la configuration choisie de la boîte. La figure 4.5 donne la signification des différents paramètres des prototypes expérimentaux.

Expériences	Paramètres				Résultats	
Numéros	h (cm)	w (cm)	config.	$\delta_T(cm)$	$d_{onset}(cm)$	$\theta(deg.)$
71	3	28	A	6	16.15	32
72	3	28	A	6	18.46	32.4
74	3	28	A	6	18.21	31.3
75	2	28	A	5	12.31	32.4
76	2	28	A	5	14.45	31.8
77	1	28	A	3	10.45	36.5
78	2	7	A	5	15.73	34.8
79	2	28	B	5	11.84	39
80	1	28	A	3	11.51	39
81	3	28	A	6	17.62	34.3
82	1	28	B	3	10.78	44
83	2	28	B	5	11.81	35
85	3	28	B	6	14.53	33
86	1	28	B	3	10.08	38
87	3	28	B	6	14.28	33.5
88	2	28	A	5	14.46	32.1
89	1	28	A	3	12.05	32.25
93	2	7	A	5	17.21	34.5
94	2	7	B	5	10.95	31.5
95	3	7	A	6	29.24	34.3
96	3	7	B	6	10.08	37
97	1	7	B	3	11.42	37
98	1	7	A	3	15.52	36
99	2	7	A	5	29.76	33.7
100	2	7	B	5	10.65	36.7
101	2	7	A	5	16.14	33.7

TAB. 4.1: Paramètres et résultats des expériences.

Le raccourcissement total est adapté suivant l'épaisseur de la couche plane c'est-à-dire que pour 1 cm, il est de 3 cm, pour 2 cm, il est de 5 cm alors que pour 3 cm d'épaisseur, il est de 6 cm. Le but est de limiter le nombre de systèmes rampes-rétro-chevauchements. Les deux mesures qui ont été prises pour chaque expérience sont représentées sur la figure 4.7. Il s'agit

4.3. Effets de bords sur la position de la première rampe

du pendage du rétro-chevauchement θ et de la distance du mur arrière à la base de la première rampe notée d_{onset} , mesure réalisée à travers la vitre latérale. Ces deux mesures sont reportées pour chaque expérience dans le tableau 4.1.

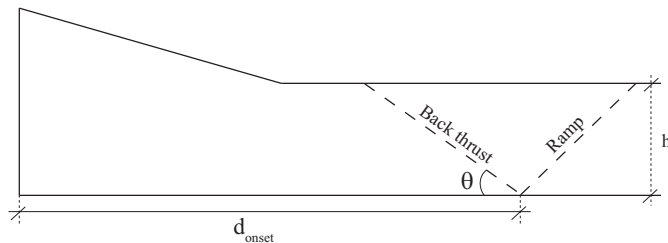


FIG. 4.7: Définition de la mesure de la position de la base de la première rampe notée : d_{onset} et du pendage du rétro-chevauchement : θ .

4.3 Effets de bords sur la position de la première rampe

Les effets de bords sont qualitativement observables dès le début du raccourcissement. Par conséquent, à l'initiation de la déformation, c'est-à-dire à l'apparition du premier système de failles conjuguées, les différentes expériences montrent déjà l'influence du frottement sur les murs. Nous nous attendons à une différence entre les deux configurations. En effet, cette différence s'explique par le fait qu'en configuration A, les murs latéraux accompagnent le mur arrière qui est poussé par le moteur. La déformation est donc propagée plus rapidement vers l'avant du prisme. Cependant, en configuration B, les murs latéraux résistent à la poussée du mur arrière et la déformation a tendance à se concentrer près de celui-ci.

4.3.1 Description des vues au travers des vitres latérales

Les premiers millimètres de raccourcissement produisent une déformation diffuse qui se localise graduellement sous forme d'un couple de failles inverses conjuguées : la rampe et le rétro-chevauchement. Ces deux premières failles deviennent visibles dans toutes les simulations après 11 mm de raccourcissement, déterminant une structure symétrique en pop-up. L'état du sable à ce stade, tel qu'on peut l'observer à travers les vitres latérales, est montré en figures 4.8 et 4.9 pour chaque expérience.

Les expériences de même configuration et de même géométrie (h et w identiques), comme par exemple les expériences numérotées 77, 80, 89 (boite de 28 cm, configuration A) sont réalisées

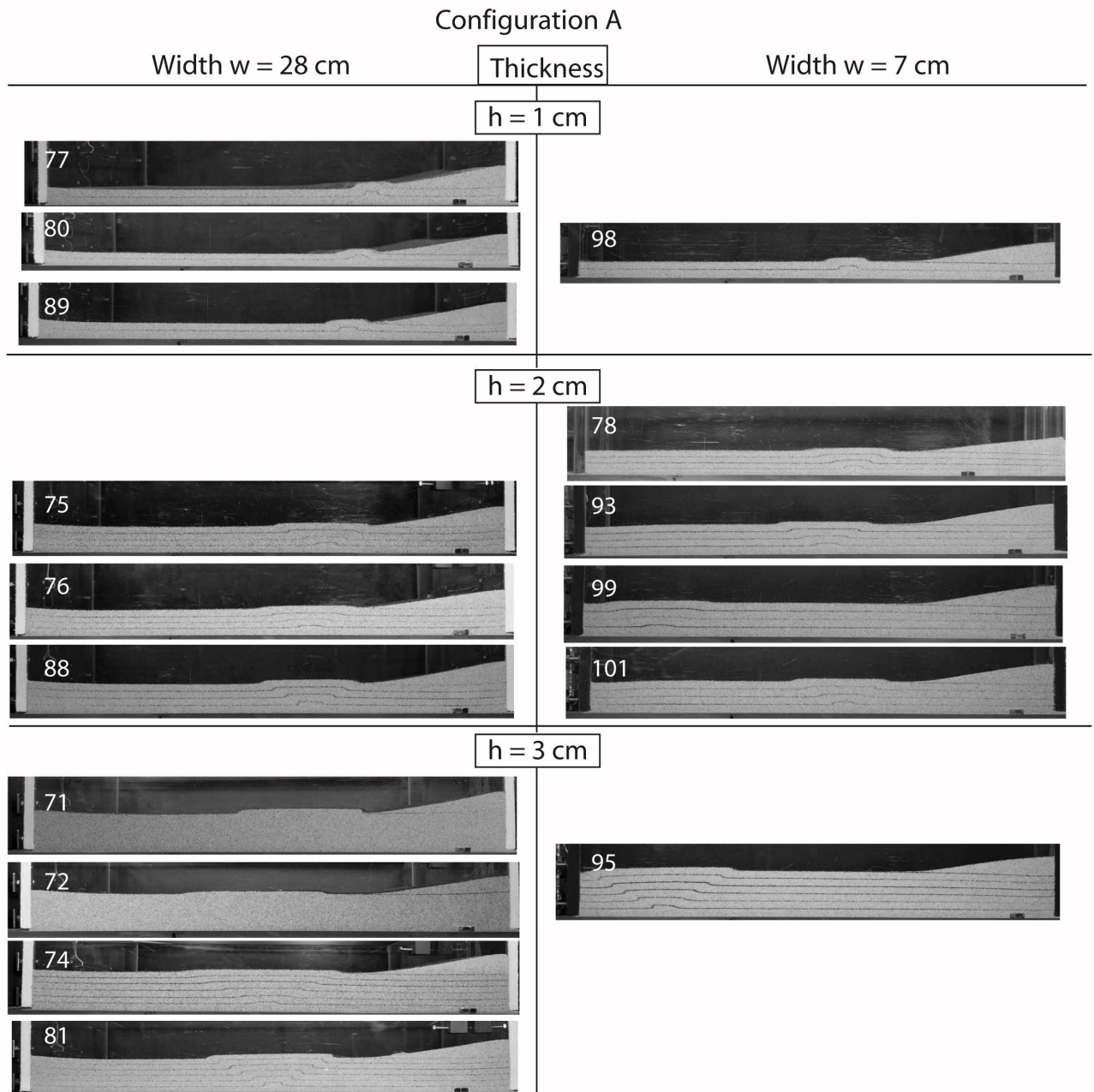


FIG. 4.8: Tableau récapitulatif des 16 expériences en configuration A après 11 mm de raccourcissement, pour les deux largeurs de boîte : 7 et 28 cm et pour les 3 épaisseurs de couche de sable sous le prisme : 1, 2 et 3 cm. Les photos sont prises à travers la vitre latérale de la boîte.

exactement dans les mêmes conditions. La quantité de raccourcissement étant la même, il est possible visuellement de comparer la localisation du premier système de failles conjuguées d'une part dans un même groupe d'expériences identiques et d'autre part entre chaque simulation.

4.3. Effets de bords sur la position de la première rampe

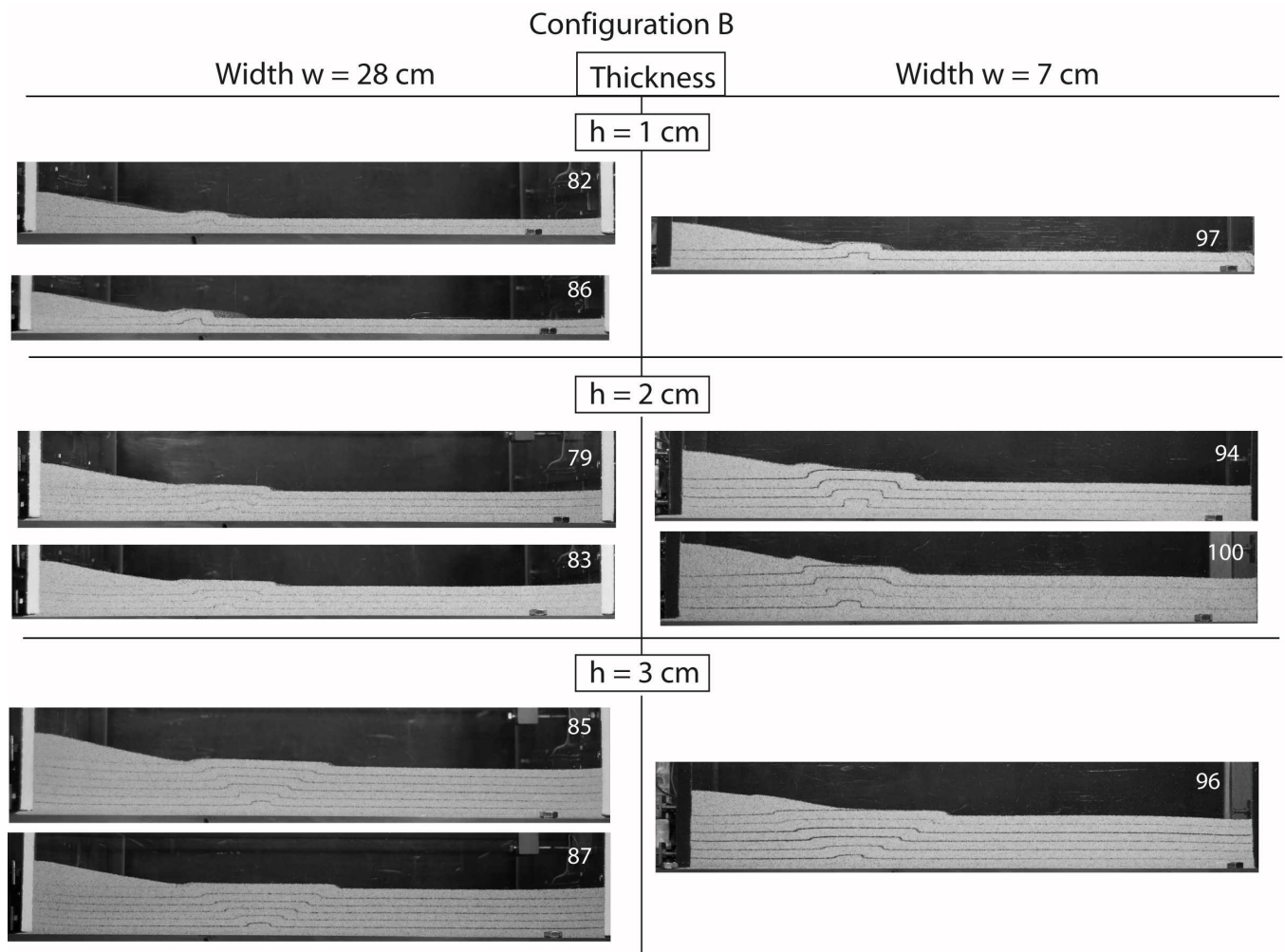


FIG. 4.9: Tableau récapitulatif des 10 expériences en configuration B après 11 mm de raccourcissement, pour les deux largeurs de boîte : 7 et 28 cm et pour les 3 épaisseurs de couche de sable sous le prisme : 1, 2 et 3 cm. Les photos sont prises à travers la vitre latérale de la boîte.

La première remarque, générale, est que les résultats pour des expériences répétées sont très proches les uns des autres, ce qui prouve une bonne reproductibilité pour $w = 28$ cm. Dans le cas particulier de la configuration A avec $w = 7$ cm et $h = 2$ cm (expériences 78, 93, 99, 101), l'expérience est, au contraire, difficilement reproductible. La position du premier système de faille varie fortement. Nous commenterons ces résultats particuliers ultérieurement.

Dans le premier groupe d'expériences ($h = 1$ cm et $w = 28$ cm), les résultats de la configuration A et de la configuration B sont qualitativement comparables : le "pop-up" contient la partie avant du prisme initial. Seule l'expérience (89) montre un pop-up légèrement en avant du prisme.

Pour $h = 1$ cm et $w = 7$ cm, les différences entre la configuration A et la configuration B sont beaucoup plus notables que pour une largeur de boîte de 28 cm. En effet, un déplacement substantiel du premier système de failles est observé pour la configuration A. En revanche, la localisation de la première rampe en configuration B pour $w = 7$ cm est proche de la localisation de la première rampe avec la boîte de 28 cm de large.

Pour $h = 2$ cm et $w = 28$ cm, les systèmes de failles développés en configuration A sont localisés juste en bout de prisme : le rétro-chevauchement émerge au bout du prisme. En configuration B, le sommet du rétro-chevauchement est compris dans le prisme.

Concernant les expériences avec $h = 2$ cm et $w = 7$ cm, la configuration B montre des résultats assez proches des résultats de la boîte plus large ($w = 28$ cm) bien que le rétro-chevauchement soit légèrement plus proche encore du mur arrière. En revanche, les résultats des expériences, en configuration A pour cette épaisseur de sable et $w = 7$ cm, sont très variables suivant l'expérience, correspondant à deux modes de déformation : un pop-up presque en bout de boîte (expérience 99) ou un pop-up dans la zone plate plus ou moins proche du prisme (expériences 93 et 101).

Pour $h = 3$ cm et $w = 28$ cm, le pop-up est situé en bout de prisme pour la configuration A et se situe très proche du mur arrière en configuration B.

Enfin pour $h = 3$ cm et $w = 7$ cm, la configuration B implique un pop-up très en arrière comprenant le prisme. Il faut noter que pour la configuration B, la formation du premier système de faille pour les deux largeurs de boîte est homothétique par rapport à l'augmentation de l'épaisseur de la couche de sable sous le prisme d'où cette position du sommet de la rampe de plus en plus proche du mur arrière. Pour la configuration A, l'expérience 96 donne un pop-up complètement en avant et donc en bout de boîte. Ce cas - $h = 3$ cm et $w = 7$ cm - est celui qui rend le plus compte des effets de bords liés au frottement sur les murs latéraux car les configurations A et B présentent des résultats très différents. Si la boîte avait été plus longue, le pop-up serait localisé probablement encore plus loin. Ici le poids supplémentaire induit par la présence du prisme n'a pas d'influence sur le mode de déformation, particulièrement à l'initiation de la déformation. Au contraire, ce cas peut être assimilé à un prisme critique à angle négatif c'est-à-dire que pour qu'il y ait glissement sans déformation l'angle topographique α devrait être négatif.

4.3.2 Mesures des longueurs de décollement

Afin de quantifier ces différences de position du pop-up formé après un raccourcissement de 11 mm, des mesures ont été réalisées à partir des prises de vues latérales récapitulées figures 4.8 et 4.9.

La mesure d_{onset} , décrite en figure 4.7 est donnée en tableau 4.1, colonne 6. La figure 4.10 montre les résultats de ces mesures pour chaque expérience en fonction du ratio de h sur w pour les deux largeurs de boîte : $w = 7$ et 28 cm. De plus, six mesures ont été rajoutées en configuration B et deux en configuration A. Il s'agit de mesures du groupe d'expériences de l'article de Schreurs et al (2006). La géométrie du prisme est identique aux expériences 71 à 101 de cet article. Mais le raccourcissement pour ces huit expériences est de 2 cm et h est de 3.5 cm. Ces mesures ont donc été remontées de 0.9mm.

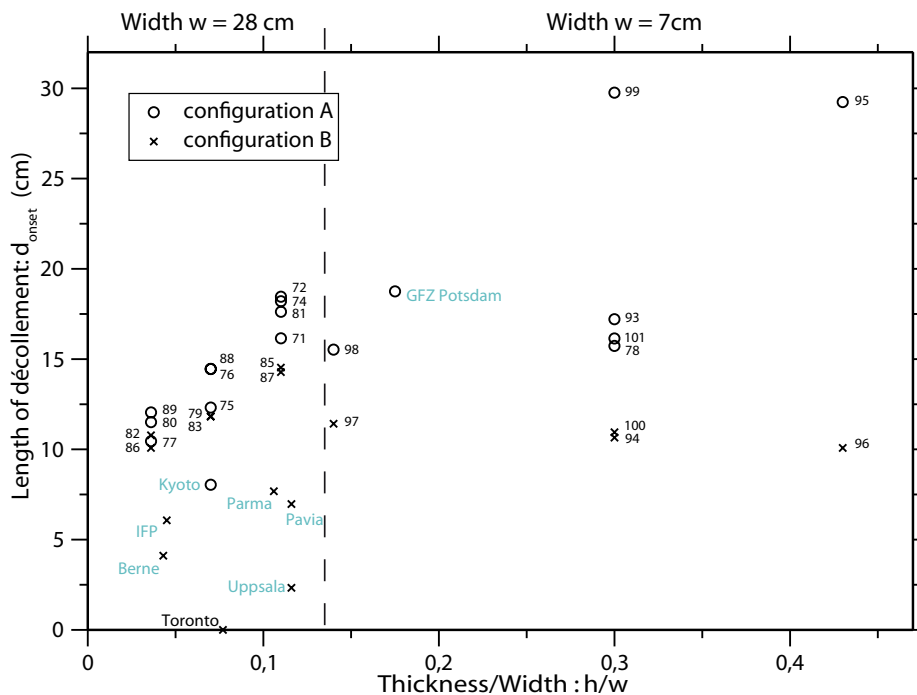


FIG. 4.10: Localisations de la base de la première rampe après un raccourcissement $\delta = 11$ mm pour les boîtes de largeur 7 cm et 28 cm, en configuration A (cercle) et en configuration B (croix) pour toutes les expériences et localisations de la base de la première rampe après un raccourcissement de 2 cm pour les expériences de l'article Schreurs et al. (2006)

D'une manière générale, les distances représentées figure 4.10 sont plus homogènes entre les deux configurations de boîte pour $w = 28$ cm que pour $w = 7$ cm. Pour $w = 28$ cm,

l'augmentation de d_{onset} est à peu près régulière ce qui n'est pas le cas pour $w = 7$ cm. Les effets de bords dûs à la friction latérale sont particulièrement visibles pour $h/w = 0.43$ ($h = 3$ cm et $w = 7$ cm, expériences 95 et 96). En effet, d_{onset} est égale à 10.1 cm pour l'expérience 96 et devient égale à 29.2 cm pour l'expérience 95. Cet écart diminue considérablement lorsque h n'est plus que de 1 cm, d_{onset} est égale à 11.4 cm pour l'expérience 97 et est égale à 15.5 cm pour l'expérience 98. Le cas où $h/w = 0.3$ ($h = 2$ cm et $w = 7$ cm) en configuration A est un état de transition. En effet, comme nous l'avons remarqué sur les photos latérales de la figure 4.8, le pop-up peut être localisé en bout de boîte comme proche du prisme. La valeur de d_{onset} est de 15.7 cm pour l'expérience 78 et de 29.7 cm pour l'expérience 99. Pour la configuration B, les deux expériences donnent une rampe pratiquement localisée au même endroit ($d_{onset} = 10.6$ pour l'expérience 100 et 10.9 pour l'expérience 94). D'ailleurs une lecture horizontale du graphe de la figure 4.10 met en évidence qu'en configuration B, pour $w = 7$ cm, la rampe se situe entre 10.1 cm (expérience 96) et 11.4 cm (expérience 97). Cela confirme la remarque faite sur les photos de ce cas d'expérience (expériences : 97, 94, 100 et 96 (Figure 4.9) dans la partie précédente, à savoir l'homothétie observée du système rampe - rétro-chevauchement en fonction de h .

Les expériences ajoutées au graphe sont les expériences des laboratoires de Berne, Uppsala, Toronto, Parme, Pavia et l'IFP pour la configuration B et des laboratoires de Kyoto et de Potsdam pour la configuration A (Schreurs et al., 2006). Le calcul du ratio de h sur w se fait avec les données géométriques des boîtes de chaque laboratoire données dans le tableau 2 de l'article. Ces coefficients h/w restent inférieurs à 0.14 sauf celui de la boîte utilisée à Potsdam ($h/w = 0.175$) dont les dimensions sont : $w = 20$ cm et $l_i = 340$ cm. Le résultat de Potsdam semble donc souffrir d'effets de bords car l'expérience se trouve au-delà d'un ratio h/w acceptable d'après nos expériences. Cette question a été soulevé par Schreurs et al. (2006) puisqu'ils ont déduits, en comparant les résultats de Kyoto et de Potsdam, qu'une boîte étroite augmentait les effets de bords. Ainsi ils insistaient sur le fait qu'il fallait porter attention à la géométrie de la boîte et notamment faire le compromis entre les boîtes étroites qui accentuent les frottements latéraux mais qui évitent les hétérogénéités dues à la mise en place du sable dans les boîtes plus larges. Ce problème d'hétérogénéité a été minimisé ici par l'utilisation de la semeuse qui diminue au maximum l'intervention de l'opérateur au moment de la construction du prisme. Les mesures de d_{onset} sont toutes plus faibles que les mesures de nos expériences sauf pour l'expérience de Potsdam avec $d_{onset} = 17$ cm. L'écart entre ces mesures et les nôtres vient notamment de l'utilisation de sables différents, de la couche de micro-billes utilisés dans les expériences de Schreurs et al. (2006) et de la friction basale qui doit être plus forte que la nôtre mais qui n'est pas précisée. La déformation obtenue avec l'expérience de Toronto donne

4.3. Effets de bords sur la position de la première rampe

une rampe dont la base émane directement du contact mur arrière - décollement c'est-à-dire que le rétro-chevauchement est vertical. Cela est dû à la friction sur le mur arrière. C'est une question qui a été soulevée par Buiter et al. (2006) et vérifiée par Souloumiac et al. (soumis). En effet, les simulations numériques du prisme triangulaire sous-critique ont montré qu'il existe deux modes de déformations : soit une rampe et un rétro-chevauchement ou seulement une rampe ce qui signifie que le rétro-chevauchement a un pendage vertical. Cela a également été retrouvé par les modèles analogiques (Souloumiac et al., en prep.).

Ces diverses observations quantitatives entre les configurations A et B sont bien représentées pour chaque catégorie d'expérience sur la figure 4.11, une catégorie d'expérience correspondant à une valeur du coefficient h/w . Cette figure représente l'écart entre $d_{onset(A)}$ et $d_{onset(B)}$ noté d_{AB} . Pour chaque catégorie, deux valeurs sont calculées : d_{ABmax} et d_{ABmin} . Par exemple, pour $h/w = 0.036$, $d_{ABmax} = d_{onset(A)}(89) - d_{onset(A)}(82)$ et $d_{ABmin} = d_{onset(A)}(77) - d_{onset(A)}(86)$.

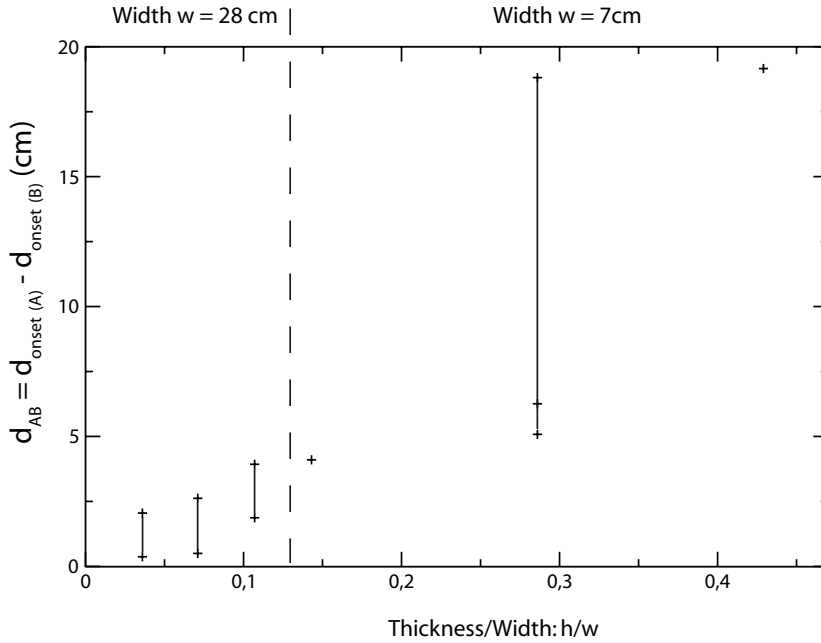


FIG. 4.11: Différence entre d_{onset} de la configuration A et d_{onset} de la configuration B, notée d_{AB} , après un raccourcissement $\delta = 11$ mm pour les boîtes de largeur 7 cm et 28 cm. Pour chaque catégorie d'expérience h/w , la différence est calculée entre la valeur maximale de la configuration A et celle de la configuration B puis la même différence est faite pour les valeurs minimales des deux configurations

La quantité d_{ABmin} pour $h/w = 0.036$ est pratiquement nulle donc une largeur de boîte plus importante pour une épaisseur de sable égale ou plus fine diminuerait encore ces effets. D'autre part, la différence entre d_{ABmax} et d_{ABmin} est d'environ 1.7 cm. Or Cubas et al. (2009) montrent que l'effet de la vitre latérale entraîne une différence de 3 cm entre les deux configurations pour $h = 9$ mm et $w = 28$ cm (Figure 3.15). Bien qu'il y ait un écart de 1.2 cm entre nos expériences et les leurs, l'explication pouvant venir des conditions d'expérience qui varient d'un opérateur à l'autre, il n'est pas non plus très important et difficilement observable sur les photos. Il faut aussi retenir que les mesures dans Cubas et al. (2009) sont faites à la fin du raccourcissement et que $h = 9$ mm. D'autre part pour $h/w = 0.3$, la différence entre d_{ABmax} et d_{ABmin} est très importante (environ 13.8 cm).

Toutes ces observations et mesures permettent de rendre compte des effets induits par le frottement des murs latéraux notamment de l'influence de la géométrie de la boîte. Ces résultats sont obtenus à partir des prises de vue latérales. La partie suivante présente des vues de dessus de chaque expérience et l'effet 3D qui est induit.

4.3.3 Différences de structures entre les bords latéraux et le centre de la boîte

Considérons maintenant les effets 3D qui se développent dans le sens de la largeur de la boîte. La figure 4.12 représente les tracés des premières rampes une fois formées, après 11 mm de raccourcissement pour les deux largeurs de boîte et les deux configurations. Pour faciliter la lecture, le prisme est du côté gauche pour les deux configurations. Pour $w = 28$ cm et $h = 1$ cm, les deux configurations donnent des résultats très proches comme il a été observé sur les photos latérales. Lorsque h augmente, la différence entre les deux configurations se fait sentir et la courbure est plus importante.

4.3. Effets de bords sur la position de la première rampe

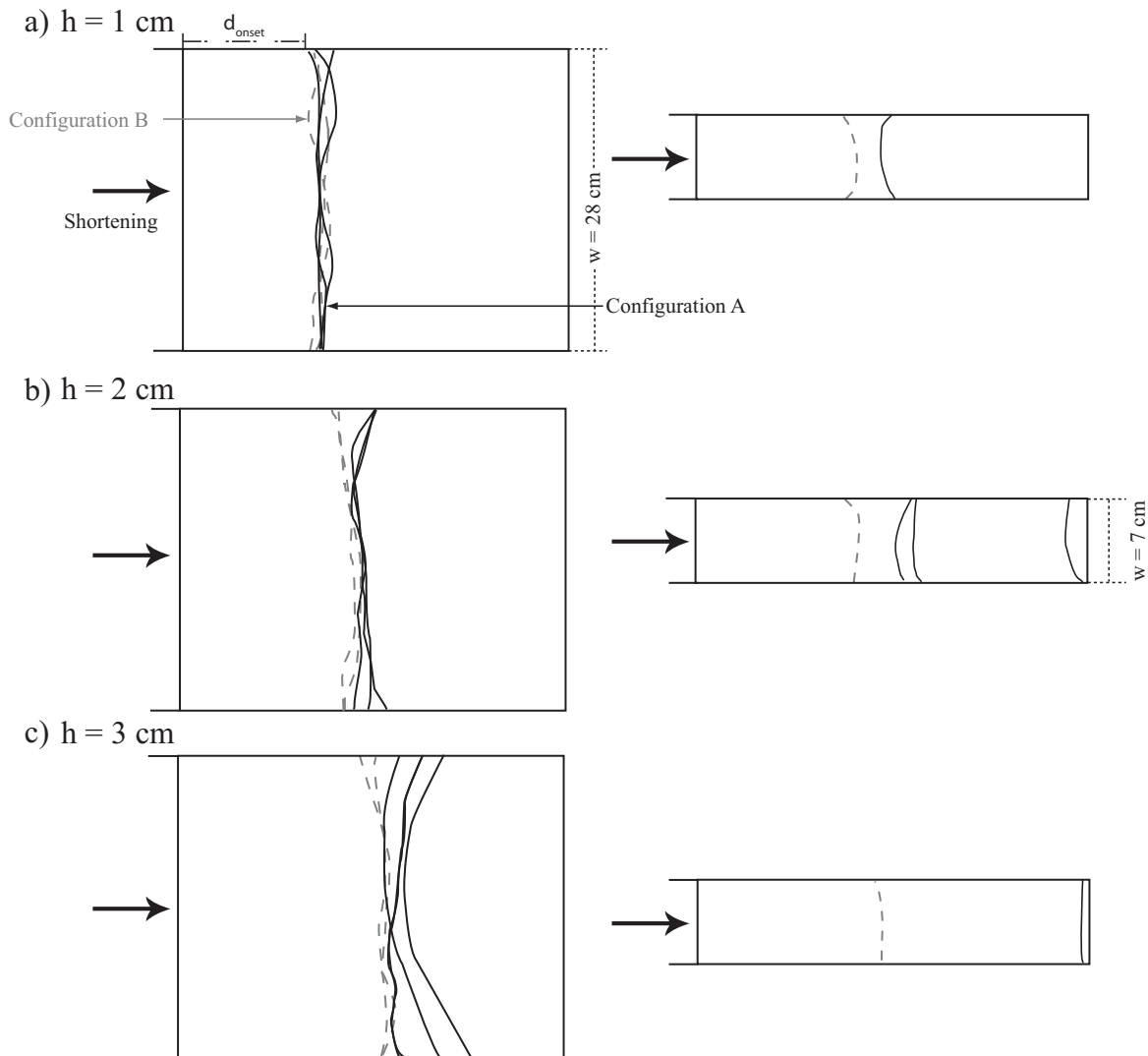


FIG. 4.12: Tracé de la première rampe vue du dessus de la boîte pour toutes les expériences pour les deux configurations (trait plein configuration A, trait pointillé configuration B) et pour chaque épaisseur de sable h .

Pour $w = 7$ cm, la courbure est nettement moins importante et la forme des tracés est régulière. Cela rejoint ce que Schreurs et al. (2006) avait évoqué concernant les hétérogénéités dans les boîtes plus larges. En revanche, les configurations A et B donnent des résultats très différents quelque soit l'épaisseur de sable h . Il semble donc que pour $w = 7$ cm, la déformation soit pratiquement plane alors qu'elle ne l'est dans une boîte de 28 cm de large. On peut alors se poser la question suivante : sommes-nous proches d'une expérience en 2D avec une boîte étroite telle que $w = 7$ cm ? La réponse est négative puisqu'on observe aisément que les effets

de friction latérale sont beaucoup plus grands dans la boîte étroite ($w = 7$ cm) que dans une boîte plus large ($w = 28$ cm). Cette partie porte particulièrement sur l'initiation du plissement et l'effet du frottement sur les murs latéraux, la partie suivante est une analyse des conséquences de l'influence de ces frottements latéraux sur l'état final.

4.4 Effets de bords à l'état final

Comme il a été observé précédemment, le premier système de failles conjuguées après 11 mm de raccourcissement est localisé à divers endroits dans la boîte suivant les expériences ce qui influe sur la suite de la déformation. Deux tableaux regroupent les photos de l'état final à travers les vitres latérales : la figure 4.13 pour la configuration A et la figure 4.14 pour la configuration B. Le raccourcissement final varie suivant les épaisseurs de sable sous le prisme (cinquième colonne du tableau 4.1).

Les expériences répétées comme les expériences 71, 72, 74, 81 présentent des séquences normales assez similaires, le nombre de rampes et de rétro-chevauchements variant d'une expérience à l'autre, excepté le cas où $h = 2$ cm et $w = 7$ cm où les différences sont importantes. Cela implique évidemment que l'état final n'est pas le même suivant les expériences, il est illustré par la figure 4.15 qui montre la chronologie des systèmes de failles pour les expériences 93, 99 et 100 au cours du raccourcissement. En général pour les autres expériences, la déformation finale présente un ou deux système de rampes - rétro-chevauchements. Pour $h = 3$ cm et $w = 28$ cm, la longueur de la boîte fait que la déformation est concentrée en un seul pop-up, ce qui n'est pas le cas si h est plus faible.

Pour $h = 1$ cm et $w = 28$ cm, les états finaux sont proches alors que pour $h = 3$ cm, $w = 7$ cm, les effets de bords sont prépondérants. C'est pourquoi il est nécessaire de porter attention aux dimensions de la boîte et du prisme à construire pour les modèles analogiques, en particulier lorsque l'analyse des résultats ne se fait qu'à travers la vitre latérale.

4.5 Mesures des forces sur les murs longitudinaux

Deux types d'analyse sont possibles avec ce dispositif expérimental : le premier à partir des prises de vue, le deuxième à partir des enregistrements de forces. Cette partie est donc consacrée à l'étude des effets de bords traduits par ces diagrammes de forces qui sont représentés par les figures 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20 et 4.21. Ces diagrammes de force sont fonction du déplacement. Les deux courbes correspondent respectivement à la force enregistrée près du prisme et à celle

4.5. Mesures des forces sur les murs longitudinaux

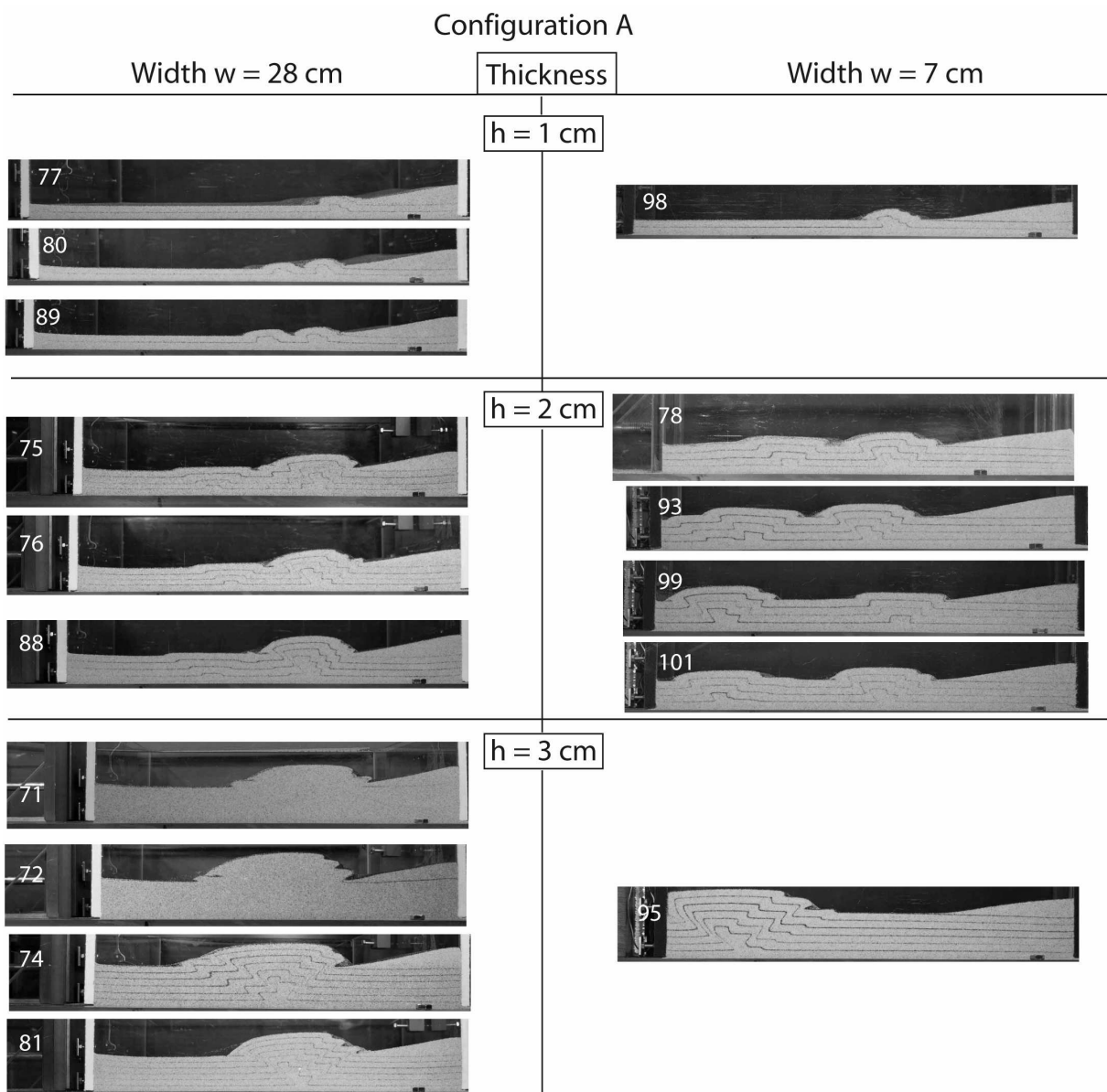


FIG. 4.13: Résultats de la déformation finale pour une épaisseur de sable $h = 1, 2$ et 3 cm en configuration A.

enregistrée de l'autre côté de la boîte. Elles sont notées F_P pour la force près du prisme et F_B pour la force à l'opposé du prisme. Les mesures sont exprimées en grammes. Les valeurs des forces représentées sont les valeurs corrigées de la moyenne des forces mesurées lorsque la boîte est vide. Les expériences choisies ont une épaisseur h supérieure à 1 cm. En effet les courbes de force pour $h = 1$ cm sont très bruitées et difficilement interprétables dans le détail.

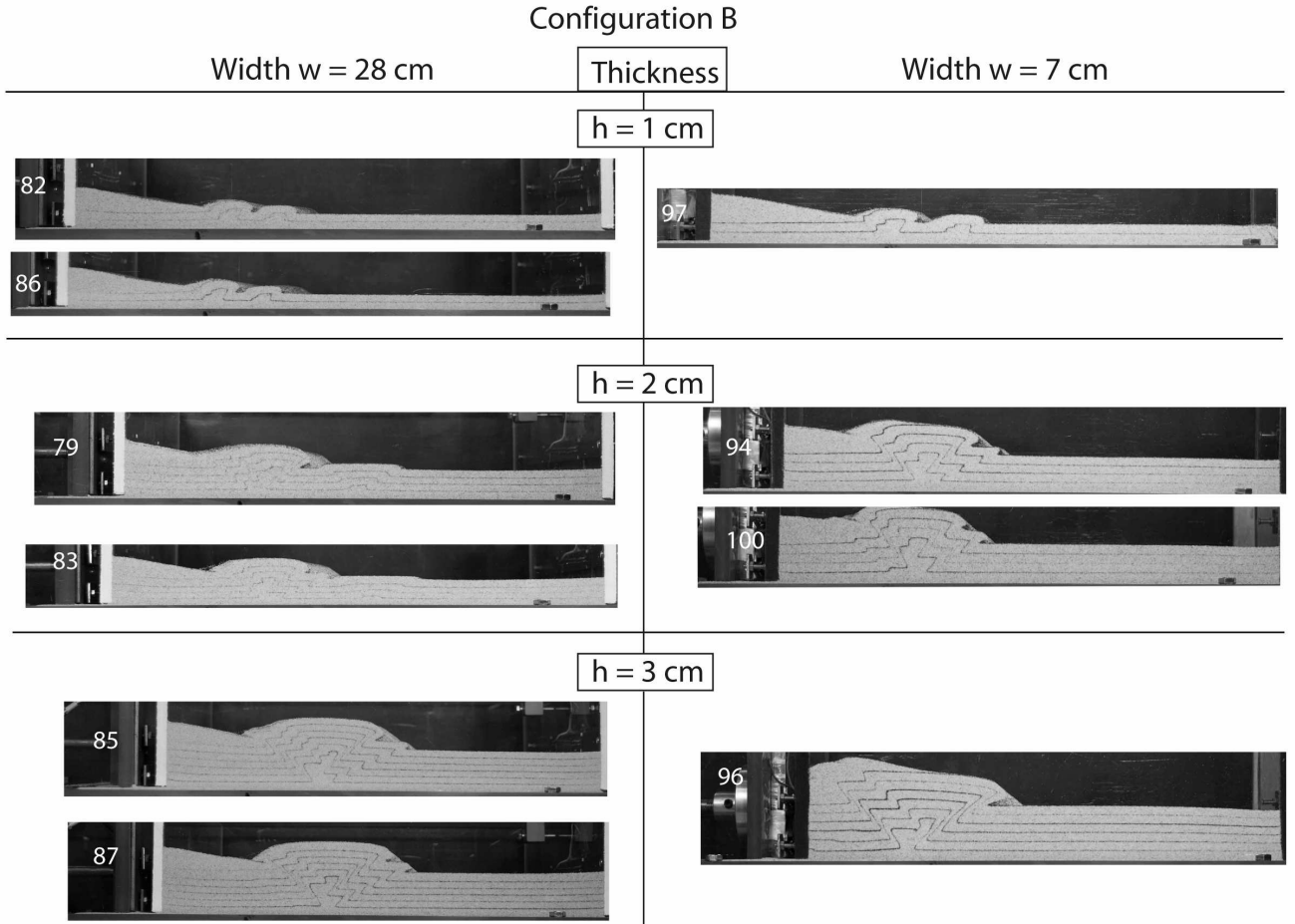


FIG. 4.14: Résultats de la déformation finale pour une épaisseur de sable $h = 1, 2$ et 3 cm en configuration B.

4.5.1 Analyse des forces du côté du prisme et en bout de boîte

La figure 4.16 présente les mesures des forces pour l'expérience 81 ainsi que des photos à travers la vitre latérale à chaque formation d'une nouvelle faille. Globalement les valeurs de F_P augmentent au cours du raccourcissement pour atteindre un maximum après un déplacement total de 60 mm. Chaque pic correspond à la naissance d'une faille puis lorsque cette faille joue, on observe un minimum de force avant la création d'une nouvelle faille. Sur les 3 premiers millimètres de raccourcissement, le pic correspond à la déformation élastique des jauges. Pour cette expérience, la plaque à l'opposé du prisme ressent la déformation puisque à chaque maximum de F_P correspond un nouveau palier pour F_B qui donc n'est pas constante pendant le raccourcissement. Si la boîte avait été plus longue, il y aurait eu moins d'influence sur F_B . En

4.5. Mesures des forces sur les murs longitudinaux

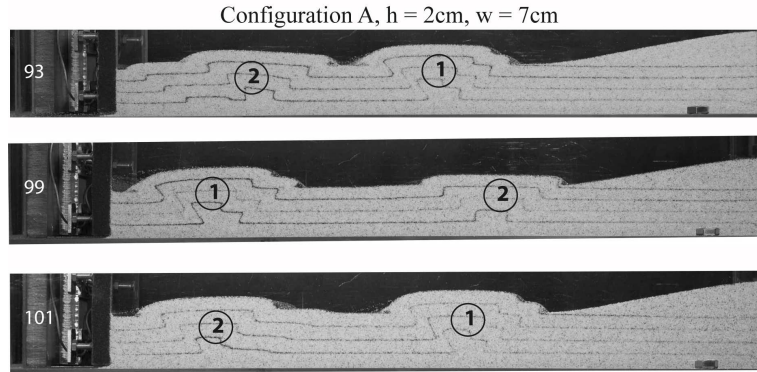


FIG. 4.15: Résultats de la déformation finale en configuration A après un raccourcissement $\delta = 50\text{mm}$ pour $h = 2\text{ cm}$. Les trois expériences sont identiques mais la première rampe peut apparaître au bout de la boîte comme au centre.

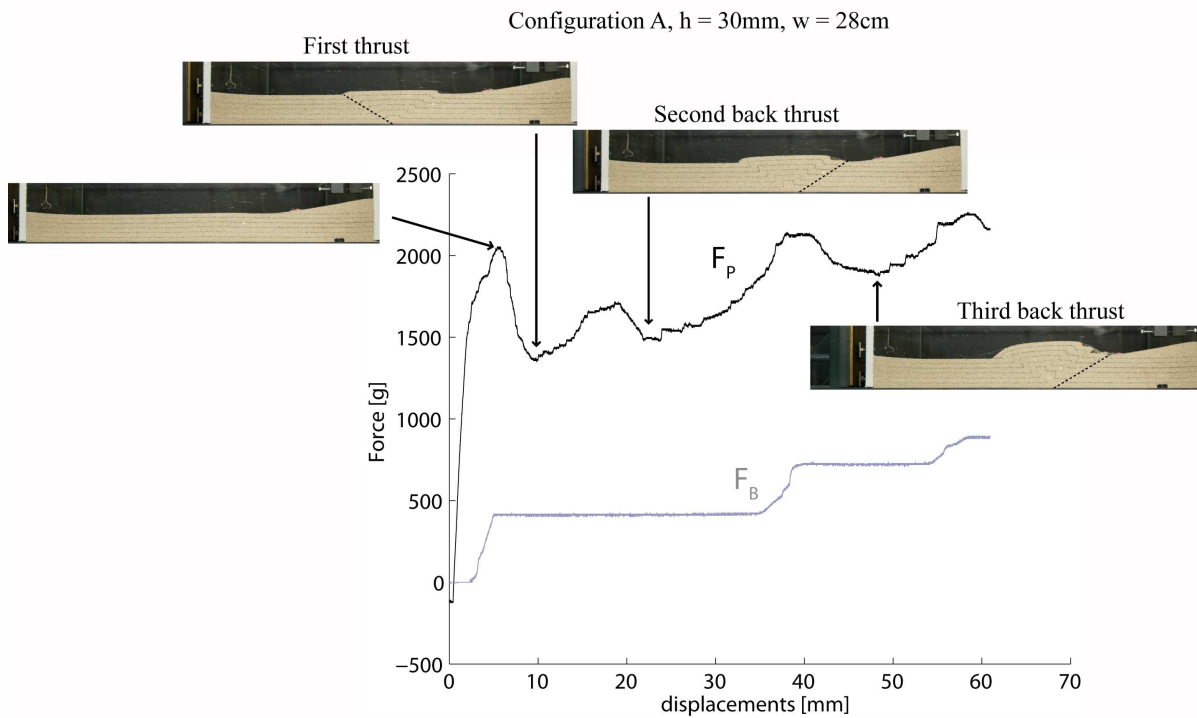


FIG. 4.16: Mesures des forces pour l'expérience 81

configuration B, pour l'expérience 87 (Figure 4.17), les mêmes variations de F_P sont observées, chaque minimum correspondant à une faille.

Pour $h = 3\text{ cm}$ et $w = 7\text{ cm}$, les courbes F_P des figures 4.18 et 4.19 dans les deux configurations sont plus bruitées que celles pour la boîte de 28 cm . En configuration B, le deuxième

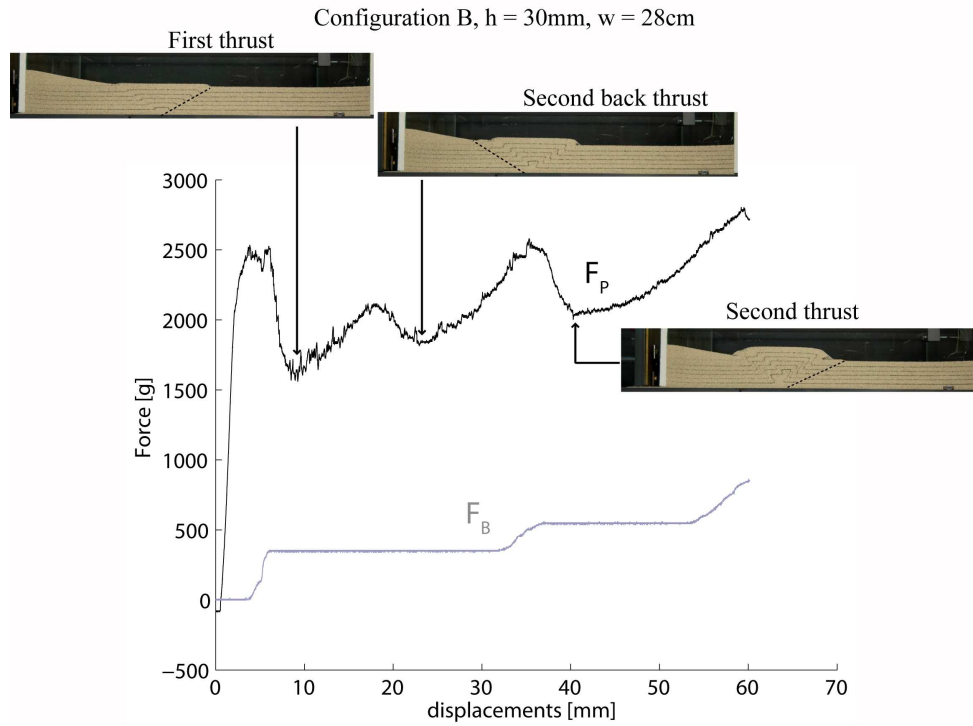


FIG. 4.17: Mesures des forces pour l'expérience 87

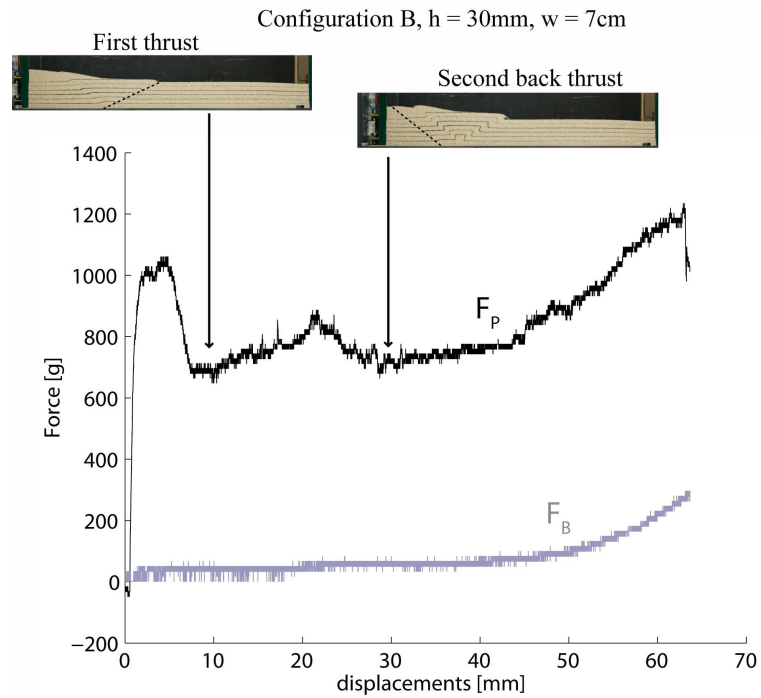


FIG. 4.18: Mesures des forces pour l'expérience 96

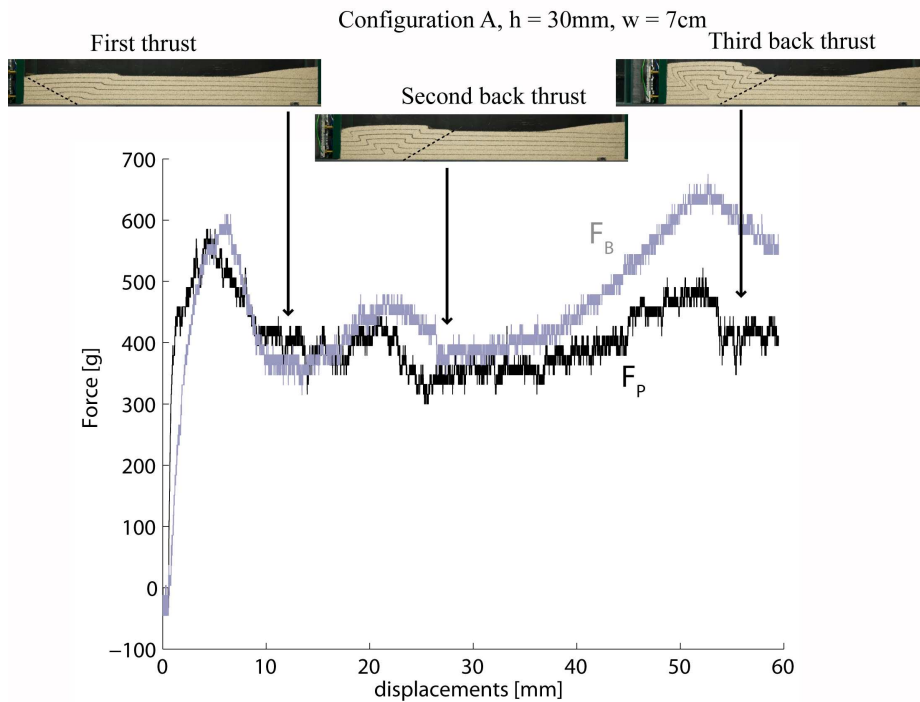


FIG. 4.19: Mesures des forces pour l'expérience 95

minimum de la courbe de F_P (expérience 96, Figure 4.18) correspondant au deuxième rétrochevauchement est moins marqué. Pour l'expérience 95 en configuration A (Figure 4.19), la valeur moyenne de F_P est de 450 g alors que pour l'expérience 96 en configuration B (Figure 4.18), la valeur moyenne de F_P est de 800 g. Ces différences viennent du fait qu'en configuration A ce sont les jauges en bout de boîte à l'opposé du prisme qui reprennent les effets de la déformation. La valeur moyenne de la courbe F_B pour l'expérience 95 est d'ailleurs très importante comparée aux valeurs moyennes des autres courbes F_B qui restent presque constantes ou qui augmentent légèrement par palier.

Les figures 4.20 et 4.21 représentent les courbes de force pour $h = 2$ cm et $w = 7$ cm correspondant aux expériences 100 (configuration B) et 99 (configuration A). Pour la configuration B, la force F_B est pratiquement constante tout au long du déplacement, la déformation étant concentrée dans la zone du prisme. Il n'y a pas d'augmentation à la fin du déplacement comme dans l'expérience 96. Pour la configuration A (expérience 99, figure 4.20), la courbe F_P est très bruitée et les minimas s'observent mieux sur l'autre courbe F_B . Ce cas correspond à l'état de transition où le premier système de failles conjuguées peut être localisé en bout de boîte (expérience 99) comme en bout de prisme (expérience 101) (Figure 4.15). Comme pour l'expérience 95 (figure 4.19), la déformation ayant lieu en bout de boîte, la plaque côté prisme ressent moins

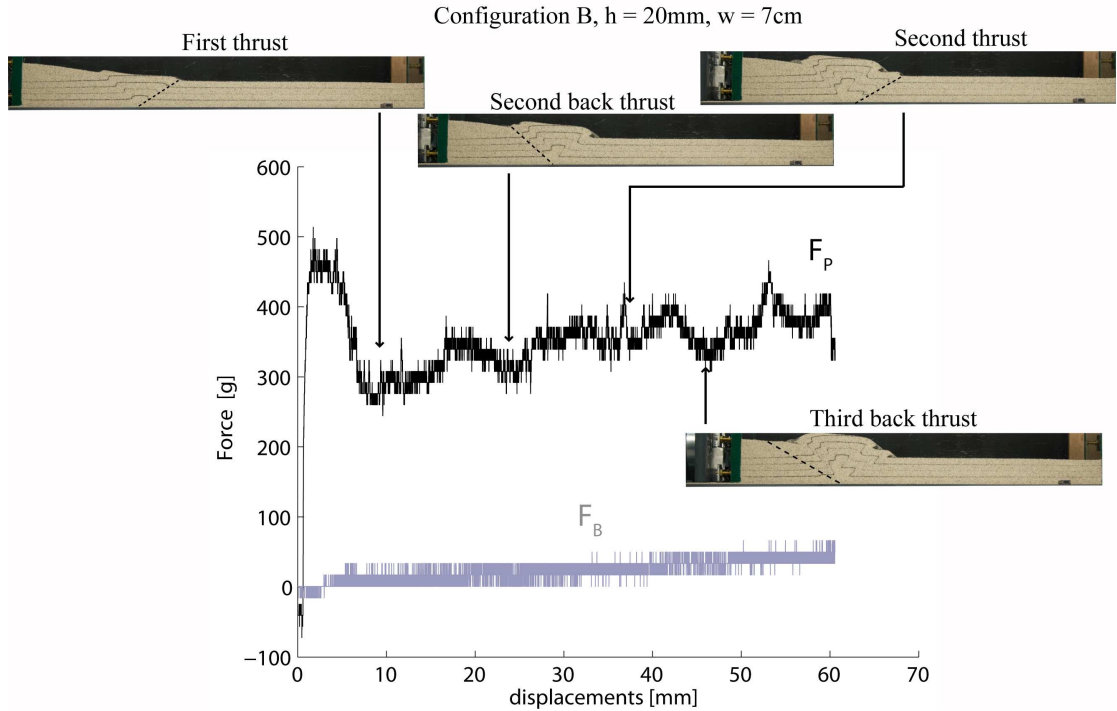


FIG. 4.20: Mesures des forces pour l'expérience 100

les effets de la déformation que la plaque de l'autre côté de la boîte. Donc les efforts repris par cette plaque à l'opposé du prisme se traduisent par le fait que F_B et F_P sont proches. En analysant ces différents enregistrements de forces, on remarque que la longueur finie de la boîte implique que la déformation est ressentie même à l'opposé du prisme car F_B n'est pas constant.

4.5.2 Équilibre des forces dans la direction de raccourcissement

La figure 4.22 représente la distribution des forces dans le sens de raccourcissement pour la configuration A et la configuration B.

4.5. Mesures des forces sur les murs longitudinaux

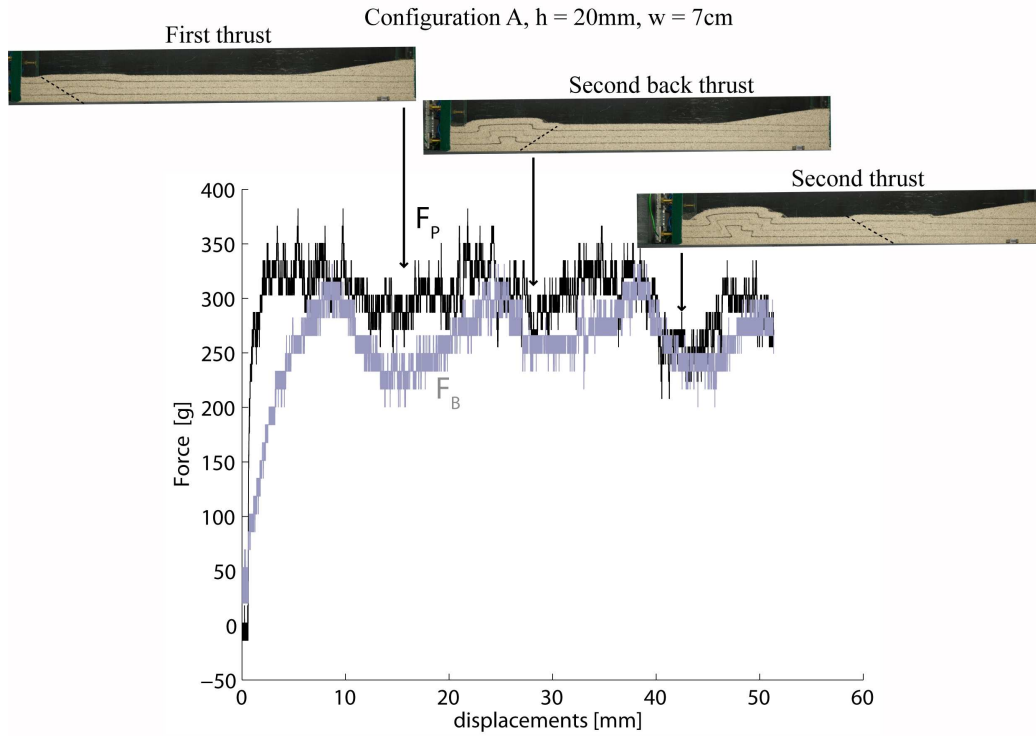


FIG. 4.21: Mesures des forces pour l'expérience 99

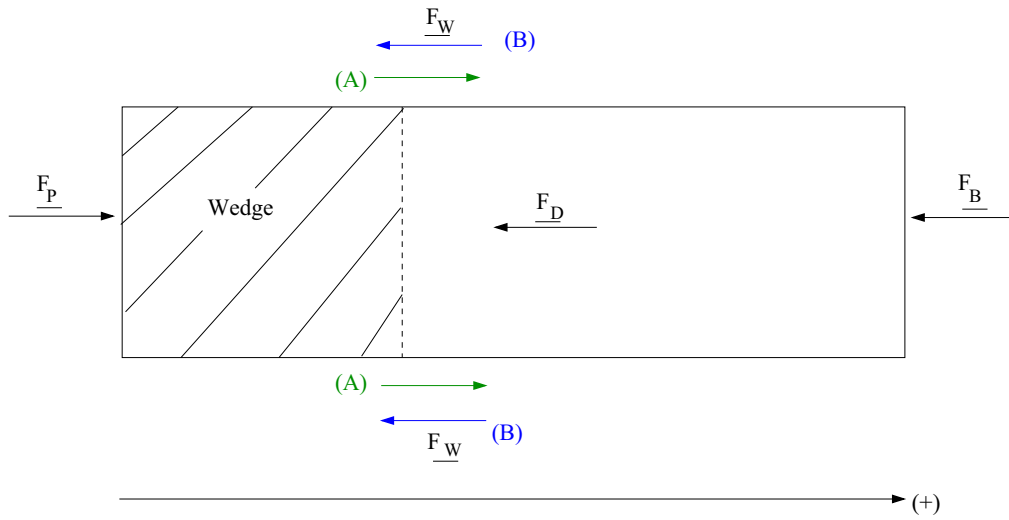


FIG. 4.22: Distribution de forces appliquées sur le sable pour les deux configurations de la boîte. F_P est la force de poussée côté prisme, F_B est la force de poussée à l'opposé du prisme, F_W est la résultante des forces s'appliquant sur les murs latéraux et F_D est la force exercée sur le sable au niveau de la base. Le sens positif de référence est indiqué par la flèche.

L'équilibre de ces forces s'écrit :

$$\underline{F_P} + \underline{F_B} + \underline{F_W} + \underline{F_D} = \underline{0}. \quad (4.5.1)$$

Si on projette cette équation sur l'axe de référence orienté, représenté sur la figure 4.21 alors on obtient la relation :

$$|\underline{F_P}| - |\underline{F_B}| = -(F_W + F_D). \quad (4.5.2)$$

Les termes $|\underline{F_P}|$ et $|\underline{F_B}|$ sont deux quantités mesurées dans les expériences et illustrées dans la partie précédente. Le terme $(F_W + F_D)$ représente l'ensemble des forces de frottement intégrées sur les surfaces des murs latéraux et du décollement. Plaçons nous dans les cas des expériences 81 (configuration A) ou 87 (configuration B) (Figures 4.16 et 4.17). Pour ces deux expériences, $|\underline{F_P}| > |\underline{F_B}|$. Cela implique que $F_W + F_D < 0$. Les murs latéraux et la base exercent donc une force totale vers le prisme et la déformation a lieu dans une zone côté prisme.

Maintenant, pour le cas de l'expérience 99 (configuration A), $|\underline{F_P}| \simeq |\underline{F_B}|$ ce qui implique que $F_W \simeq F_D$. La déformation peut avoir lieu n'importe où dans le prisme, elle n'est pas contrôlée par les murs latéraux ou la base (Figures 4.13 et 4.15).

Enfin le cas de l'expérience 95 (configuration A) (Figure 4.19) montre que $|\underline{F_P}| \preceq |\underline{F_B}|$ ce qui implique que $F_W + F_D \succeq 0$. La déformation a alors lieu à l'opposé du prisme. Ainsi avec cet aspect mécanique d'équilibre des forces dans la boîte, on a pu mettre en évidence que le signe des forces de friction du décollement et des murs latéraux donné par l'enregistrement des forces sur les murs longitudinaux pouvait renseigner sur la position des systèmes de failles. On a également montré mécaniquement l'existence de l'état de transition pour le cas où $h = 2$ cm, $w = 7$ cm en configuration A (expérience 99).

4.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des expériences en raccourcissement d'un prisme de sable prolongé par une couche plane d'une épaisseur constante. Après une première phase de raccourcissement diffus du prisme, la déformation se localise sous forme d'un système de failles conjuguées : une rampe et un rétro-chevauchement. Puis un relief se crée au fur et à mesure du raccourcissement. Ce relief est ensuite abandonné au profit du développement d'autres failles en avant de ce relief ou en pop-up. Alors suivant les cas d'expériences, on observe la création de plusieurs autres rétro-chevauchements ou d'autres rampes couplées aux rétro-chevauchements. Le but de cette étude était de mettre en évidence les effets de bords induits par les frottements

du sable sur les murs latéraux de la boîte lors du raccourcissement. C'est pourquoi nous sommes partis d'un prototype simple. Nous avons fait varier seulement la largeur de la boîte et l'épaisseur de la couche plane sous le prisme ce qui nous a permis de faire varier les surfaces latérale et basale et donc les forces de cisaillement latérale et basale. Le dispositif expérimental a été construit pour permettre : (i) un remplissage de la boîte uniforme avec limitation au maximum de l'intervention de l'opérateur ; (ii) une répétition des expériences en inversant le mouvement relatif des murs latéraux de la boîte pour justement observer leur influence sur la déformation ; (iii) une mesure des forces nécessaires au raccourcissement. Ainsi deux largeurs de boîte ont été utilisées : 7 et 28 cm et trois épaisseurs de sable ont été testées : 1, 2 et 3 cm. Plusieurs expériences ont été répétées ce qui représente un ensemble de 26 expériences analysées. Ces expériences ont également été comparées à l'ensemble des expériences de Schreurs et al. (2006).

Les principales conclusions de ces observations sont les suivantes :

- L'analyse des positions de premières failles a permis de montrer qu'il est important de porter attention à la géométrie de la boîte. En effet si la boîte est trop étroite, les hétérogénéités latérales sont minimisées. On se rapproche d'une déformation plane. Mais les effets de bords sont prépondérants. Et ceci est également vérifié par les vues de dessus de la boîte.
- La position variable du premier système de failles a une influence évidente sur l'évolution du plissement et en particulier pour l'état de transition dont les paramètres sont $h = 2$ cm, $w = 7$ cm en configuration A. L'expérience semble difficilement reproductible.
- L'analyse de l'enregistrement des forces nous a permis de mettre en évidence une chute de force à chaque développement d'une nouvelle faille. Cela signifie la présence d'adoucissement des failles et justifie l'hypothèse d'adoucissement de Cubas et al. (2008). D'autre part, le fait que la force F_B à l'opposé du prisme ne soit pas nulle révèle que la longueur de la boîte n'est pas suffisante car il y a un glissement global du sable vers l'avant. La longueur finie de la boîte a donc une influence sur la déformation et notamment le nombre et la positions des pop-up. Enfin le signe du terme $|\underline{F_P}| + |\underline{F_B}|$ détermine la position des failles. Le cas particulier dont les paramètres sont : configuration A, $h = 2$ cm, $w = 7$ cm montre que si $|\underline{F_P}| \simeq |\underline{F_B}|$ alors la position des pop-up était indéterminée, c'est le cas de transition.

En résumé, (i) si l'analyse de résultats de modèles analogiques se fait à travers la vitre latérale de la boîte, il est nécessaire d'être attentif à la largeur de la boîte même si on n'observe que le bord. La prédiction théorique qui suivra devra se faire en 3D ; (ii) si l'analyse des résultats analogiques se fait en plus au centre de la boîte, il ne faut pas que la configuration de la boîte (A

ou B) conditionne le résultat. Le respect de ces deux conditions permet de faire une prédiction théorique en 2D.

Bibliographie

Adam J., Urai J.L., Wieneke B., Oncken O., Pfeiffer K., Kukowski N., Lohrmann J., Hoth S., van der Zee W., Schmatz J. (2005), Shear localisation and strain distribution during tectonic faulting - new insights from granular-flow experiments and high-resolution optical image correlation techniques, *Jour. Struct. Geol.*, **27**, 2, 283–301.

Bernard S., Avouac J.-P., Dominguez S., Simoes M. (2007), Kinematics of fault-related folding derived from a sandbox experiment, *Jour. Geophys. Res.*, **112**, B3, DOI : 10.1029/2005JB004149.

Buiter S.J.H., Babeyko A.Y., Ellis S., Gerya T.V., Kaus, B.J.P., Kellner A., Schreurs G. and Yamada Y. (2006), The numerical sandbox : comparison of model results for a shortening and an extension experiment, in *Analogue and numerical modelling of crustal-scale processes*, Eds. Buiter S.J.H. and Schreurs G., Geological Society, London, Special publication, 253, 29–64.

Costa, E., and Vendeville, B. (2004), Experimental insights on the geometry and kinematics of fold-and-thrust belts above weak, viscous evaporitic décollement : reply to comments by Hemin Koyi and James Cotton. *Journal of Structural Geology*, **26**, 2139–2143.

Cotton, J., and Koyi, H. (2000), Modelling of thrusts fronts above ductile and frictionnal décollements ; Examples from the salt range and Potwar plateau, Pakistan.. Geological Society of American Bulletin v. 112, 3, 351–363.

Cubas, N. (2009), "Séquences de chevauchement, prédictions mécaniques, validation analogique et application à la chaîne de l'Agrio (Argentine)". Thèse de doctorat, Université Paris XI, 233 p.

Cubas, N., Maillot, B., Barnes, C. (2009), Statistics of the experimental growth of a sand wedge. *Submitted for publication* (soumis).

Davis, D., Suppe, J., Dahlen, F. A. (1983), Mechanics of Fold-and-Thrust Belts and Accretionary wedges, *Journal of Geophysical Research(B2)*, 1153–1172.

Gutscher, M.A., Kukowski, N., Malavieille, J., Lallemand, S., (1996), Cyclical behavior of thrust wedges ; insights from high basal friction sandbox experiments. *Geology*, **24**, 135–138.

Klinkmüller M., Rosenau M., Boutelier D., Kemnitz H., Schreurs G. (2008), Properties benchmark of granular and viscous analogue materials, extended abstract, Bollettino di Geofisica, Vol. 49, No. 2 supplement. GeoMod2008 extended abstracts, Firenze, 21–24 September 2008.

Koyi, H. (1997), Analogue modelling ; From a qualitative to a quantitative technique, a historical outline. *Journal of Petroleum Geology*, **20** (2), 223–238.

Koyi, H.A., Cotton, J. (2004), Experimental insights on the geometry and kinematics of fold-and-thrust belts above weak, viscous evaporitic décollement ; a discussion. *Journal of Structural Geology*, **26**, 2139–2143.

Krantz, R.W. (1991), Measurements of friction coefficients and cohesion for faulting and fault reactivation in laboratory models using sand and sand mixtures. *Tectonophysics* **188**, 203–207.

Lallemand, S.E., Schnuerle, P., Malavieille, J. (1994), Coulomb theory applied to accretionary and nonaccretionary wedges ; possible causes for tectonic erosion and/or frontal accretion. *Journal of Geophysical Research*, **99**, 12033–12055.

Lohrmann, J., N. Kukowski, J. Adam, O. Oncken (2003), The impact of analogue material properties on the geometry, kinematics, and dynamics of convergent sand wedges. *Journal of Structural Geology* **25**, 1691–1711.

Mandl, G., de Jong, L.N., Maltha, A. (1977), Shear zones in granular material, *Rocks Mechanics*, **9**, 8, 95–144.

Marshak, S., Wilkerson M. S. (1992), Effect of overburden thickness on thrust belt geometry and development. *Journal of Structural Geology*, **10**, 8, 847–859.

Mulugeta, G. (1988), Modelling the geometry of Coulomb thrust wedges. *Tectonics*, **11**, 3, 560–566.

- Mulugeta, G., Koyi H. (1988), Episodic accretion and strain partitioning in a model sand wedge. *Tectonophysics*, 202, 319–333.
- Panien M., Schreurs G., Pfiffner A. (2006), Mechanical behaviour of granular materials used in analogue modelling : insights from grain characterisation, ring-shear tests and analogue experiments. *Journal of Structural Geology*, 28, Issue 9, 1710–1724.
- Schreurs G., Buiter S.J.H. Boutelier D., Corti G., Costa E., Cruden A.R., Daniel J.-M., Hoth S., Koyi H.A., Kukowski N., Lohrmann J., Ravaglia A., Schlische R.W., Oliver Withjack M., Yamada Y., Cavozzi C., Delventisette C., Elder Brady J.A., Hoffmann-Rothe A., Mengus J.M., Montanari D., Nilforoushan F. (2006), Analogue benchmarks of shortening and extension experiments, in Analogue and numerical modelling of crustal-scale processes. Eds. Buiter S.J.H. and Schreurs G., Geological Society, London, Special publication 253, 1-27.
- Vendeville, B.C. (2007), The 3-D Nature of Stress Fields in Physical Experiments and its Impact on Models Overall Evolution. Solicited oral contribution, EGU General Assembly, Vienna, 15-20 April, 2007.

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

Ce travail de thèse s'inscrit dans une voie de recherche qui a pour objectif de comprendre d'un point de vue mécanique les structures géologiques telles que les séquences de chevauchements dans les prismes d'accrétion et les chaînes d'avant-pays. La théorie utilisée ici est le calcul à la rupture. Issue de l'ingénierie civile, elle permet de borner la charge extrême que peut supporter une structure. La recherche de ces bornes se fait grâce à deux approches : la borne supérieure est calculée avec l'approche externe ou cinématique et la borne inférieure avec l'approche interne ou statique. Nous avons adapté ces deux méthodes à la détermination des modes de ruine dans les séquences de chevauchements. Les études numériques sont menées à l'initiation du plissement, en 2D pour l'approche interne et en 3D pour l'approche externe. Ce travail s'est articulé en 3 étapes. La première étape, qui a fait l'objet d'une publication présentée au chapitre 2 de ce manuscrit, a consisté à développer numériquement l'approche interne appelée la Méthode des Éléments d'Équilibre (MEE). À chaque pas de raccourcissement d'un chevauchement, la géométrie du pli est donnée par l'approche externe (Cubas et al., 2008) et à partir de cette géométrie, la MEE donne la distribution des contraintes et la valeur de la borne inférieure à la force tectonique. Nous avons ainsi mis en évidence les zones de rupture dans le pli de rampe à différents taux de raccourcissement. Ces zones sont, d'une part, le rétro-chevauchement dont le pendage varie avec le coefficient de friction de la rampe et d'autre part, des zones en extension en surface qui ont été observées sur le terrain et que nous retrouvons ici numériquement. Ces prédictions sont intéressantes car elles sont obtenues sans imposer au départ l'emplacement des failles, excepté les deux discontinuités majeures : la rampe et le décollement. De plus, peu de paramètres mécaniques sont fixés au préalable : pour le critère de Coulomb, la cohésion et de l'angle de friction sur les discontinuités et dans le matériau constituant le pli suffisent à paramétrer le problème d'un point de vue rhéologique. Cela nous a permis de mener différentes études paramétriques et notamment deux comparaisons de

validation méthodologique : une première avec une modélisation aux éléments distincts et une seconde avec les éléments finis. Cette dernière comparaison avec la méthode des éléments finis est, d'ailleurs, certainement à étendre, notamment pour tenter d'apporter un éclairage au rôle de l'histoire dans l'état actuel des contraintes. Nous avons également appliqué cette théorie à un cas de terrain. Il s'agissait de déterminer les paramètres de friction du prisme de Nankai, avec la prise en compte de la topographie de surface. Nous avons mis en évidence qu'avec une très faible variation de l'angle de friction sur le décollement ou dans le matériau, les zones de failles pouvaient être localisées aussi bien en avant du prisme qu'en arrière. Le prisme est donc proche de la criticalité selon Dalhen (1984). Ce travail a révélé la nécessité d'introduire des hétérogénéités comme de l'adoucissement, notamment dans la zone de la rampe active et sur le décollement. Il serait aussi judicieux de prendre en compte la présence de fluides ce qui ajouterait des conditions à respecter dans le schéma d'optimisation. La MEE reste applicable en 2D et pourrait être généralisée en 3D. Les modélisations en 3D ont plutôt porté sur l'approche externe du calcul de la rupture. Cette extension du travail effectué en 2D par Cubas (2009) est présentée sous forme de deux articles regroupés dans le chapitre 3 de ce manuscrit. La démarche a consisté, tout d'abord, à valider cette méthode sur le cas du prisme théorique critique (Dalhen, 1984) en 2D. Les zones de déformation sont alors diffuses et on observe de la dilatation au niveau du décollement activé et du mur arrière du prisme. Suivant la valeur du coefficient de friction sur le mur arrière, il existe deux modes de rupture différents (rampe ou système rampe - rétro-chevauchement). Ce prisme critique a été modélisé en 3D. Nous avons d'abord étudié l'influence d'une variation de pente topographique sur la déformation. Si le prisme est critique d'un côté et super-critique de l'autre, la déformation en un système de failles conjuguées rampe - rétro-chevauchement se diffuse du côté super-critique. Nous nous sommes ensuite intéressés aux effets de bords qui entraînent des variations sur la déformation, observées particulièrement avec les essais en boîte de sable. En effet, le frottement sur le mur latéral de la boîte influe sur la déformation dans le prisme. L'analyse du champ de vitesse virtuel a permis de mettre en évidence que la déformation était affectée d'une dilatation verticale sur 1.5 fois l'épaisseur du prisme. Une étude plus poussée de ces modélisations d'essais analogiques permettrait de quantifier encore mieux ces effets de bords et comprendre en quoi une modélisation purement 2D de ces essais s'éloigne de la réalité qui ne respecte pas l'hypothèse de déformation plane. La quatrième étape de cette thèse est consacrée exclusivement à l'observation et l'interprétation qualitative de ces frottements latéraux observés en boîte de sable. Pour ce faire, une géométrie de prisme simple prolongée d'une couche de sable plane a été testée. Ainsi en faisant varier seulement la géométrie du prisme, celle de la boîte et celle du système de compression, nous avons montré qu'une boîte étroite permettait peut-être de minimiser les hétérogénéités latérales

mais rendait les effets de bords prépondérants. Si la largeur de la boîte augmente, les effets de bords se font moins ressentir sur la déformation mais les hétérogénéités latérales sont plus importantes. De plus, l'analyse de l'enregistrement des forces de chaque côté de la boîte de sable a permis d'envisager la position des systèmes de failles : dans la zone du prisme, à l'opposé ou selon un état de transition pour lequel la position des failles n'est plus contrôlée par les forces de frottement. Ces courbes de forces ont confirmé l'hypothèse d'adoucissement sur les failles. Cet adoucissement a aussi été observé grâce aux images traitées avec un logiciel de "PIV", mises en parallèle avec l'évolution des forces au cours du raccourcissement. En effet, cette technique permet de rendre clairement compte du lien entre la localisation de la déformation en bandes de cisaillement et des variations des forces. Ce projet n'est qu'un début d'analyse de la micro-mécanique de l'adoucissement qui mérite d'être poursuivi, notamment pour tenter de mieux comprendre les variations du champ de vitesse dans la zone proche des vitres latérales de la boîte.

Cette thèse constitue un premier travail sur l'application numérique du calcul à la rupture en géologie structurale. Elle ouvre de nombreuses perspectives pour enrichir ces modélisations et les comparaisons aux modèles analogiques. D'un point de vue technique, une automatisation, liant l'approche interne et l'approche externe en 2D, serait nécessaire pour obtenir de façon systématique la géométrie, les contraintes et les bornes de la force tectonique à chaque étape du raccourcissement. D'autre part, pour poursuivre le développement de l'approche externe en 3D, il faudrait comprendre comment prendre en compte la dilatation de la structure induite à l'initiation du plissement afin d'entreprendre l'évolution de la structure. Cela implique une meilleure interprétation du champ de vitesse virtuel tridimensionnel. Cette méthode serait alors applicable aux structures réelles ainsi qu'aux modèles analogiques en boîte de sable. D'un point de vue plus géologique cette fois, une ouverture possible concerne le prisme de Nankai. En effet l'application de l'approche interne sur la zone en arrière de la "Splay fault" permettrait de mettre en évidence les zones d'extension et ainsi d'éclaircir peut-être la chronologie de formation des failles normales. Enfin une autre perspective que nous avons mentionnée au début du manuscrit serait d'appliquer cette méthode à des failles sismogènes.

Ce travail a donc permis de mettre en évidence l'interdisciplinarité entre la mécanique des sols et la géologie structurale. Si les applications présentées ici sont satisfaisantes, elles restent encore simples. Le développement de cette théorie vers des structures plus complexes d'un point de vue géométriques ou mécaniques permettra des ouvertures vers des cas réels de terrain .

Annexe A

Construction de Mohr et application au prisme critique

A.1 Introduction

Cette annexe a été écrite en collaboration avec Yves M. Leroy et est à la base d'un cours enseigné à l'École Polytechnique. L'objectif est de donner l'ensemble des informations nécessaires à la construction de Mohr afin de prédire l'orientation des failles par rapport aux contraintes principales. Il est alors possible d'aborder le concept de stabilité d'un prisme par la méthode graphique présentée par Lehner (1986).

A.2 Cercle de Mohr

Les essais mécaniques en laboratoire révèlent que la formation de failles se fait toujours dans un plan perpendiculaire au plan contenant les contraintes principales majeure et mineure. La contrainte principale intermédiaire a un rôle négligeable. En conséquence, nous allons travailler dans un plan, défini par les deux vecteurs de base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$, et qui contient ces deux directions principales. L'azimut des failles qui nous intéressent est donc toujours à 90° du plan d'analyse.

A.2.1 Définition et introduction du cercle de Mohr

Une facette au point matériel M , correspondant à un élément de surface dans ce plan, est donc représentée par un segment qui est orienté par la normale unitaire, en fonction de l'angle θ , Figure A.1 :

$$\underline{n} = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2, \quad (\text{A.2.1})$$

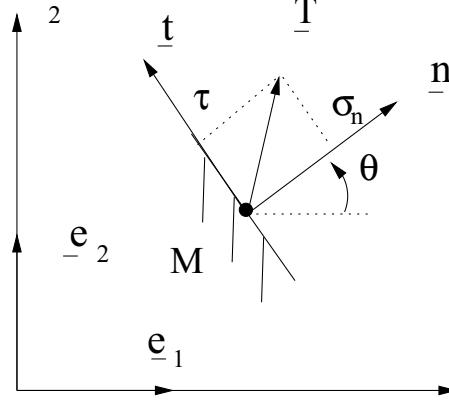


FIG. A.1: Orientation de la faille représentée par une facette au point M.

Le vecteur tangent à la facette dans le plan d'étude est alors :

$$\underline{t} = -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2, \quad (\text{A.2.2})$$

son orientation étant choisie de telle façon que la base $\{\underline{n}, \underline{t}\}$ est directe. Notons que le pendage de la faille sur la Figure A.1 est de $\theta - \pi/2$ car l'axe 2 est vertical. Le matériau qui juxtapose cette faille est représenté par une série de traits en barbule.

Le tenseur de contrainte de Cauchy est noté $\underline{\underline{\sigma}}$ avec la convention de signe de la mécanique des milieux continus, positif en tension. Le vecteur contrainte $\underline{T}$ en M, agissant sur la facette orientée, est défini par la relation de Cauchy :

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}. \quad (\text{A.2.3})$$

Ce vecteur correspond à l'action en M de la partie du milieu pointé par la normale sur cette facette. Le vecteur contrainte a pour composantes dans la base $\{\underline{n}, \underline{t}\}$:

$$\underline{T} = \sigma_n \underline{n} + \tau \underline{t}, \quad (\text{A.2.4})$$

où σ_n et τ sont la contrainte normale et la contrainte cisailante (ou tangente, ou encore résolue sur la facette), respectivement. Notons que le signe positif de τ est selon l'orientation du vecteur tangent, Figure A.1. La contrainte normale et la contrainte cisailante ont pour expression :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta, \\ \tau &= -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

en terme des composantes du tenseur de contrainte. La contrainte tangente est nulle pour une orientation θ^* vérifiant :

$$\tan 2\theta^* = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \quad \text{avec} \quad \theta^* \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \quad (\text{A.2.6})$$

Il y a deux solutions pour cette direction qui sont les deux directions principales dans le plan d'étude. Ces contraintes principales sont données par :

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\theta_I + \sigma_{12} \sin 2\theta_I, \\ \sigma_{II} &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\theta_I - \sigma_{12} \sin 2\theta_I, \end{aligned} \quad (\text{A.2.7})$$

en fonction de l'angle θ_I orientant la contrainte principale mineure ¹

$$\theta_I = \theta^* + k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.2.8})$$

L'entier k est choisi tel que $\sin 2\theta_I$ et σ_{12} sont de même signe. Cette convention permet d'écrire :

$$\sin 2\theta_I = \frac{2\sigma_{12}}{\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2\right]^{1/2}} \quad \text{et} \quad \cos 2\theta_I = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2\right]^{1/2}}, \quad (\text{A.2.9})$$

et de vérifier alors que $\sigma_I > \sigma_{II}$.

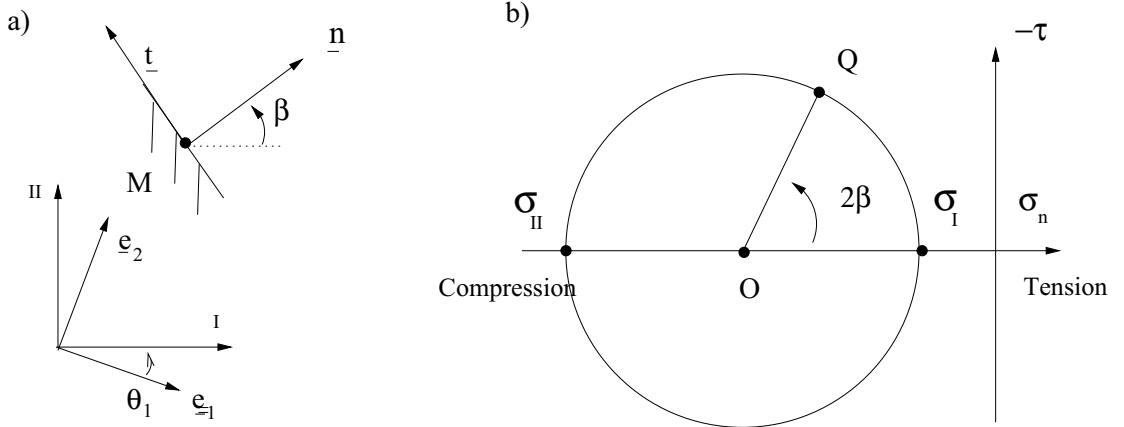


FIG. A.2: Orientation de la facette matérielle par rapport à la direction principale mineure, a) et Cercle de Mohr, b).

En orientant la normale à une facette par rapport à la direction principale I par l'angle β , les composantes du vecteur contrainte sont alors :

¹Deux remarques s'imposent : σ_I est mineure en intensité dans un système compressif naturel mais c'est bien la contrainte maximale en raison de la convention de signe. La numérotation des contraintes principales est I et II , bien que la contrainte intermédiaire soit comprise entre les deux.

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II}) + \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) \cos 2\beta, \\ -\tau &= \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) \sin 2\beta.\end{aligned}\tag{A.2.10}$$

Dans le plan $\{\sigma_n, -\tau\}$, le vecteur contrainte est représenté par le point Q dont les coordonnées sont données par (A.2.10). L'ensemble des points Q se situe sur le cercle de Mohr de centre $(\frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II}), 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$:

$$\left(\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II})\right)^2 + \tau^2 = \frac{1}{4}(\sigma_I - \sigma_{II})^2.\tag{A.2.11}$$

Le choix de travailler avec $\{\sigma_n, -\tau\}$ permet de conserver une convention utilisée par les géologues qui est expliquée sur la Figure A.2. Si la normale est orientée par l'angle β par rapport à la direction de la contrainte σ_I (positif dans le sens trigonométrique), alors le point Q se situe sur le cercle de Mohr à un angle 2β par rapport à la direction σ_n .

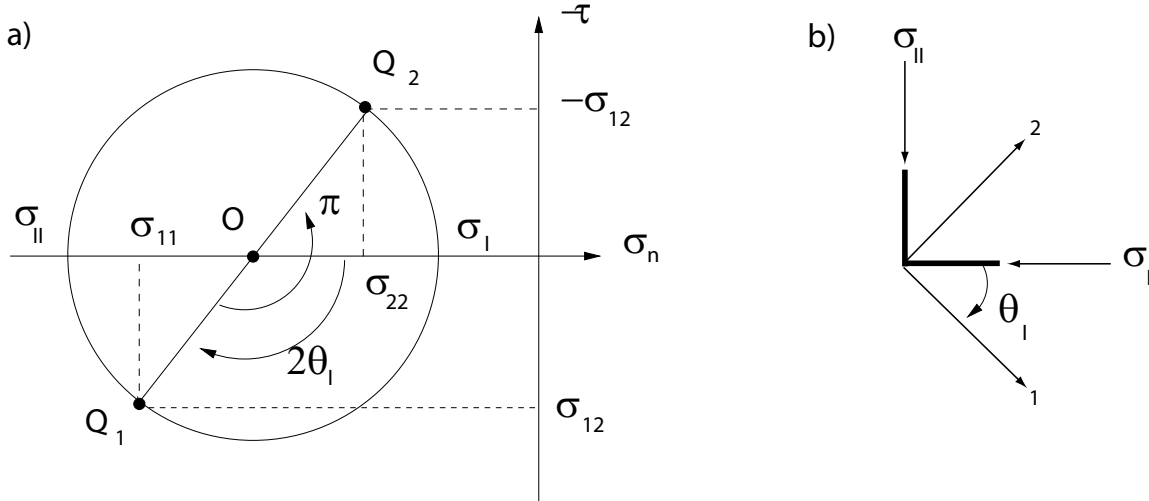


FIG. A.3: Détermination graphique des contraintes principales.

A.2.2 Détermination des contraintes principales

Cherchons maintenant à construire les contraintes principales à partir de la connaissance des vecteurs contraintes sur les facettes de normale $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$. Le premier vecteur a pour composante $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$ et le deuxième $(\sigma_{22}, -\sigma_{12})$ dans la base $(\underline{n}, \underline{t}) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ et $(\underline{e}_1, -\underline{e}_2)$ respectivement. Ces deux vecteurs définissent les points Q_1 et Q_2 de la Figure A.3a. Ces deux facettes ont des orientations qui diffèrent de $\pi/2$, les points Q_1 et Q_2 sont donc sur la même droite passant par

le centre du cercle de Mohr. Il est alors possible de tracer ce centre et de construire le cercle de Mohr. Les intersections du cercle avec l'axe horizontal donnent les deux contraintes principales. La mesure de l'angle entre l'axe σ_n et le segment OQ_1 est alors $2\theta_I$, c'est-à-dire deux fois l'angle θ_I qui oriente la direction principale I par rapport à l'axe $\underline{e}_1$, Figure A.3b.

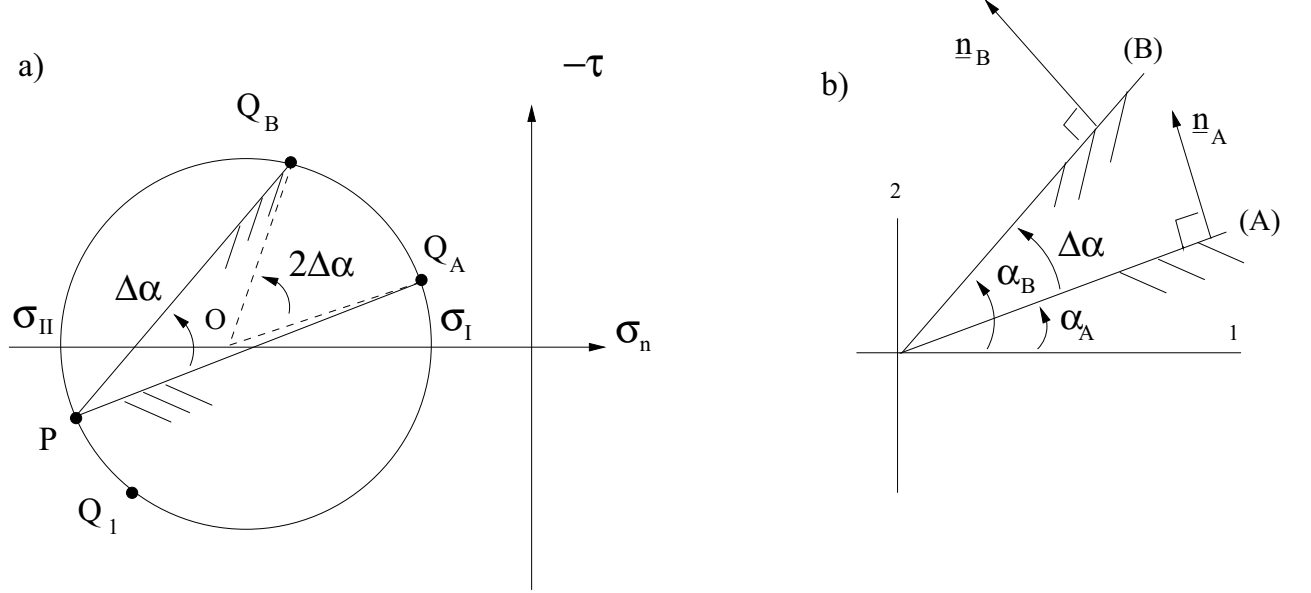


FIG. A.4: Construction du pôle du cercle de Mohr P en a), à partir de la connaissance des vecteurs contraintes sur deux failles définies en b).

A.2.3 Construction du pôle du cercle

Il existe un point unique du cercle de Mohr, appelé le pôle P , telle que la droite, de pendage (physique) α passant par ce point, intersecte aussi le cercle au point portant le vecteur contrainte de la facette ayant ce même pendage.

La mise en évidence de ce pôle se fait de façon graphique. Considérons deux facettes de pendage α_A et α_B , Figure A.4b, portant les vecteurs contrainte définissant les points Q_A et Q_B sur la cercle de la Figure A.4a. La différence de pendage $\Delta\alpha = \alpha_B - \alpha_A$ se traduit par l'angle $\widehat{Q_A O Q_B} = 2\Delta\alpha$, segments pointillés sur la Figure A.4a.

Traçons dans le plan de contrainte du cercle de Mohr, l'orientation de la facette A malgré la différence des interprétations physiques (droite avec barbeles). Le point d'intersection avec le cercle est le pôle P . Les propriétés du cercle font que l'angle $\widehat{Q_A P Q_B}$ vaut $\Delta\alpha$. La droite PQ_B est donc de pendage α_B et passe bien par le point Q_B qui porte le vecteur contrainte de la facette B .

A.3 Critère de Coulomb sur une faille et dans un milieu continu

L'objectif est maintenant de définir le critère de résistance d'une faille ou d'une interface. L'expérience présente sur la Figure A.5b donne une idée intuitive de ce critère.

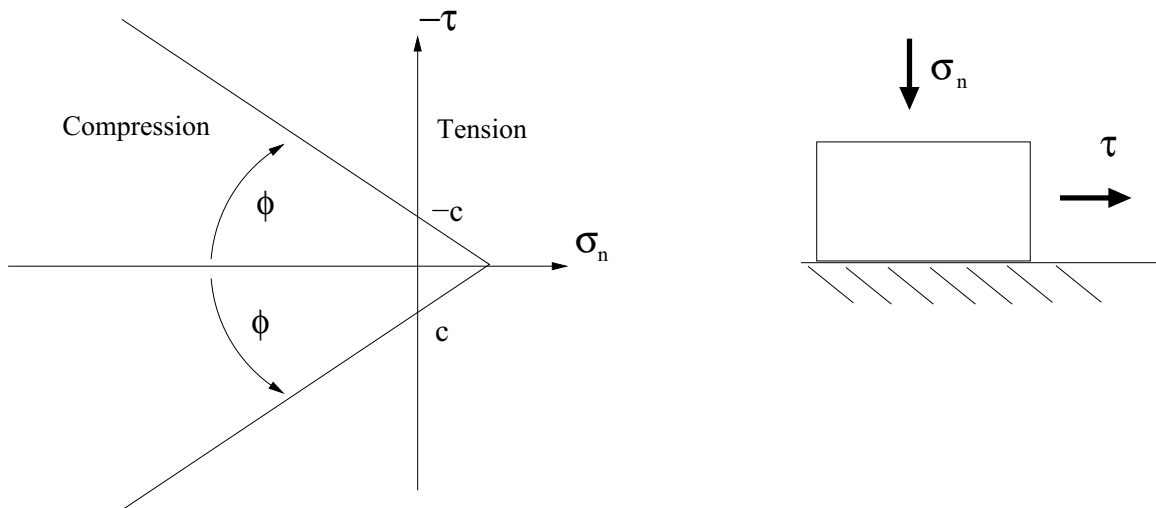


FIG. A.5: Critère de Coulomb sur une faille a) et analogie avec le frottement d'un bloc sur un demi-espace b).

On imagine un bloc rigide, mais de masse négligeable, en équilibre sur une fondation rigide. C'est l'interface entre les deux solides dont on teste la résistance. La force tangentielle τ nécessaire pour initier le glissement est une fonction croissante de la force normale σ_n que l'on applique sur le sommet du bloc. Une relation linéaire entre les deux efforts est certainement la première solution que l'on puisse proposer afin de décrire l'initiation d'un glissement. Le coefficient de proportionnalité est appelé coefficient de friction et il est souvent défini comme $\tan \phi$ en terme de l'angle de friction ϕ . Cette relation linéaire nécessite de se poser la question de la valeur de la force tangentielle lorsque la composante normale est nulle. Dans ce cas, on peut imaginer que le glissement est libre à moins qu'un contact trop prolongé dans le temps conduise à une adhésion du bloc sur sa fondation. La force tangentielle requise pour briser ce lien est appelée la cohésion C de l'interface. Le critère de **Coulomb** que nous venons de définir peut alors s'écrire comme :

$$|\tau| + \tan \phi \sigma_n \leq C, \quad (\text{A.3.1})$$

pour toute faille de normale $\underline{n}$ et avec les définitions (A.2.10) pour la contrainte tangentielle et la contrainte normale. Il définit un domaine de contraintes admissibles dans le cône présenté sur la Figure A.5a. La cohésion définit bien l'intersection du cône avec l'axe vertical et l'angle du cône vaut deux fois l'angle de friction.

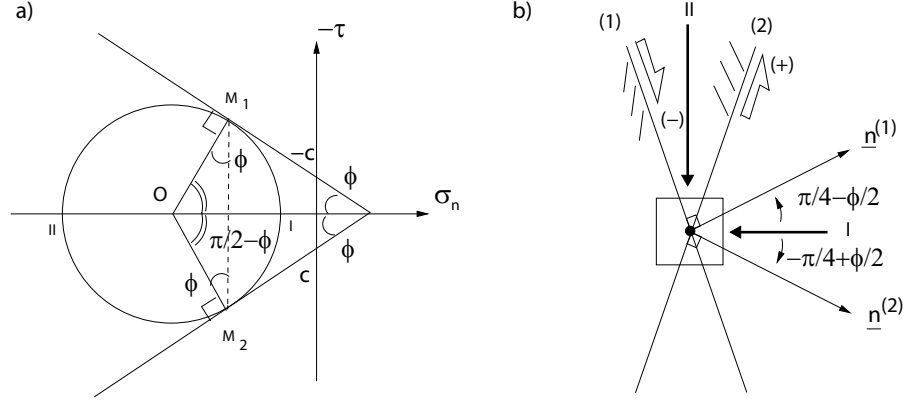


FIG. A.6: Cercle de Mohr admissible à la rupture et orientation des failles par rapport aux contraintes principales.

Ce critère de résistance pour une orientation particulière est maintenant utilisé afin de définir le critère de résistance d'un matériau pouvant voir apparaître une faille dans une direction quelconque. Pour cela, traçons le cercle de Mohr dans le domaine admissible des contraintes pour le critère de Coulomb, Figure A.6a. Parmi tous les cercles, nous avons choisi celui qui conduit pour deux orientations (points M_1 et M_2) à la rupture selon le critère de Coulomb. Les coordonnées de ces points sont définies par :

$$|\tau| = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) \cos \phi, \quad \sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II}) + \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) \sin \phi, \quad (\text{A.3.2})$$

en fonction des contraintes principales. Elles sont maintenant utilisées dans le critère de rupture (A.3.1) pour obtenir

$$\sigma_I(1 + \sin \phi) - \sigma_{II}(1 - \sin \phi) \leq 2C \cos \phi. \quad (\text{A.3.3})$$

Ce même critère en fonction des composants du tenseur de contrainte s'écrit

$$2\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} + (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin \phi \leq 2C \cos \phi, \quad (\text{A.3.4})$$

généralisant ainsi le critère de Coulomb à un matériau frictionnel et cohésif sans faille pré-existante.

Il est maintenant possible de déterminer l'orientation des failles naissantes par rapport aux directions des contraintes principales. En effet, l'angle avec l'axe σ_n des segments OM_1 et OM_2

sur la Figure A.6a est $\pm(\pi/2 - \phi)$. L'orientation des normales aux facettes portant les failles est donc de $\pm(\pi/4 - \phi/2)$ par rapport à σ_I . Le pendage des failles est donc de $\pm(\pi/4 + \phi/2)$ par rapport à la contrainte principale mineure σ_I , Figure A.6b.

A.3.1 Interprétation des failles dans le modèle d'Anderson

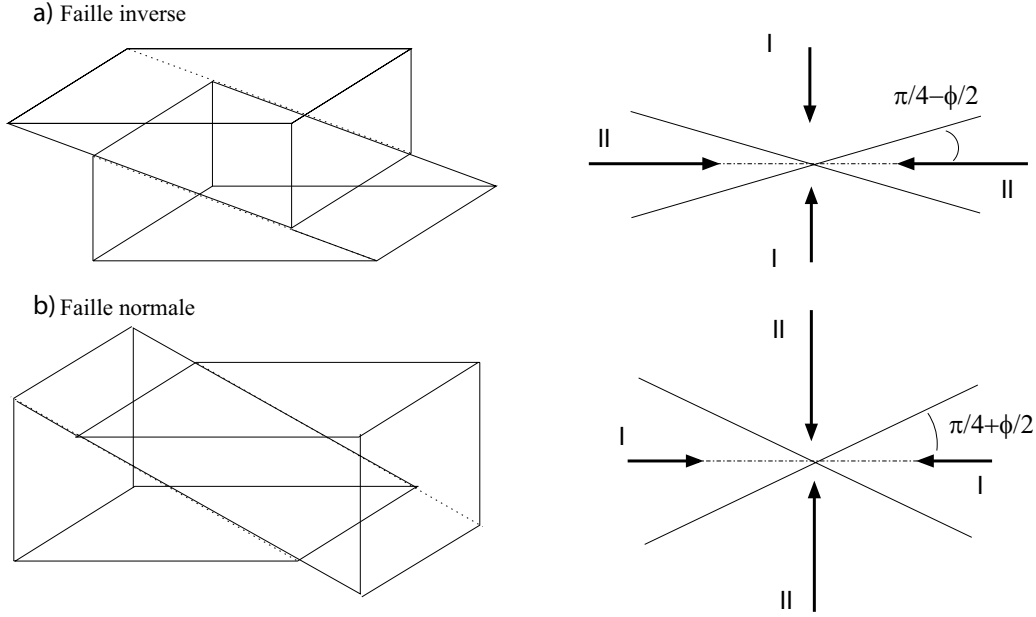


FIG. A.7: Interprétation des failles dans le modèle d'Anderson. Pour une faille inverse, la contrainte majeure est horizontale a), et verticale pour une faille normale, b).

Une hypothèse souvent faite sur la répartition des contraintes dans la croûte supérieure est qu'une des contraintes principales, due à la charge lithostatique, est verticale (Anderson, 1909). Les deux autres contraintes principales sont donc dans le plan horizontal. Il est alors possible d'orienter les failles par rapport à ces directions principales, Figure A.7. L'azimut de la faille, dans tous les cas, correspond à la direction de la contrainte principale intermédiaire (σ_{III}). La question est alors de déterminer la direction des contraintes principales mineures et majeures. Dans le cas d'une faille inverse, la contrainte dans le plan horizontal, perpendiculaire à la direction intermédiaire est majeure. Dans le cas d'une faille normale, la contrainte majeure est verticale. Le pendage de la faille est de $\pi/4 - \phi/2$ et de $\pi/4 + \phi/2$ pour la faille normale et inverse, respectivement. L'hypothèse d'Anderson et cette interprétation permet au géologue structuraliste d'orienter les contraintes principales sur le terrain en fonction de l'orientation et du type de faille observée.

A.3.2 Orientation des failles par rapport à une facette de référence

Il est maintenant possible d'orienter des failles actives par rapport à une facette de référence de pendage α dont on connaît le vecteur contrainte, point Q sur la Figure A.8.

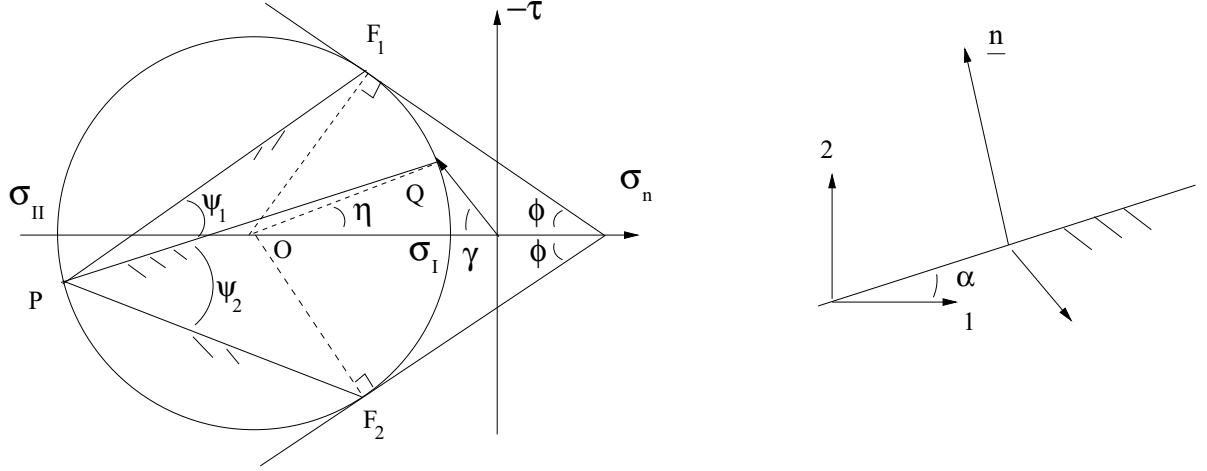


FIG. A.8: Orientation des failles par rapport à une facette de référence.

Les contraintes principales sont connues si les failles sont bien actives. L'angle γ a pour tangente $-\tau/\sigma_n$. Il est donc déterminé, ainsi que l'angle η :

$$\frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) \sin \eta = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau^2} \sin \gamma.$$

L'angle interne au cercle de Mohr, $\widehat{F_1 O Q}$ vaut $\pi/2 - \phi - \eta$ et l'angle $\widehat{F_2 O Q}$, $\pi/2 - \phi + \eta$. Le pôle, point P sur la Figure A.8, est placé en prenant le pendage α à partir du point Q. Les angles $\widehat{F_1 P Q}$ et $\widehat{F_2 P Q}$ sont ψ_1 et ψ_2 permettant donc d'orienter les failles actives par rapport à la facette de référence de pendage α . En effet, les orientations de la faille 1 et de la faille 2 par rapport la facette de référence sont donc, respectivement, $\psi_1 = (\pi/2 - \phi - \eta)/2$ et $\psi_2 = (\pi/2 - \phi + \eta)/2$.

A.4 Détermination du tenseur des contraintes

L'objectif est maintenant de déterminer le tenseur des contraintes dans un matériau cohésif et frictionnel à l'initiation des failles. Un préliminaire est nécessaire avant de faire cette construction.

A.4.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Il faut en effet définir la puissance d'un point par rapport à un cercle (www.cabri.net). Considérons donc un point M et un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R . La puissance du point par rapport au cercle est définie par :

$$P_{\mathcal{C}}(M) = MO^2 - R^2. \quad (\text{A.4.1})$$

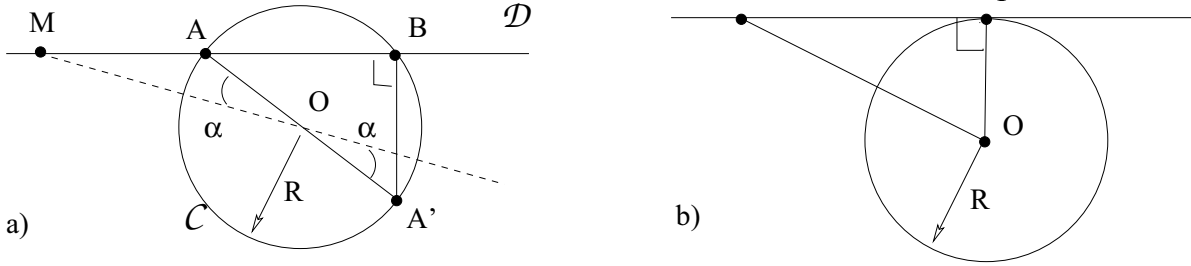


FIG. A.9: Puissance d'un point par rapport à un cercle

Considérons une droite $\mathcal{D}$ passant par le point M et coupant le cercle aux deux points A et B , Figure A.9a. On démontre alors² que :

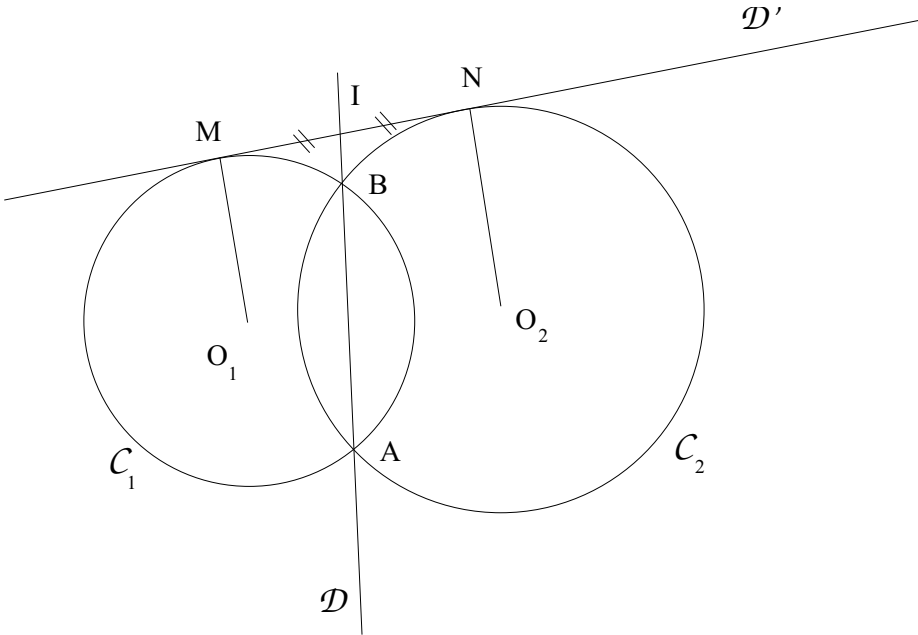
$$P_{\mathcal{C}}(M) = \underline{MA} \cdot \underline{MB}. \quad (\text{A.4.2})$$

La puissance du point par rapport au cercle est donc identique pour tout cercle passant par les deux points A et B . Traçons finalement la droite passant par M qui est tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point T , Figure A.9b. La puissance $P_{\mathcal{C}}(M)$ vaut également MT^2 par Pythagore.

A.4.2 Application

Ces définitions nous permettent maintenant de construire deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tangents à une même droite $\mathcal{D}'$ et ayant deux points d'intersection connus A et B , Figure A.10. Les deux points A et B sont sur la droite $\mathcal{D}$ qui coupe la droite $\mathcal{D}'$ au point I . La puissance du point I par rapport au cercle recherché $\mathcal{C}_1$ vaut $P_{\mathcal{C}_1}(I) = IM^2$ en fonction du point M tangent à ce premier cercle. De même, pour le deuxième cercle, $P_{\mathcal{C}_2}(I) = IN^2$, en fonction du point inconnu N . Les deux cercles passent par les points A et B et donc les deux puissances peuvent également

²Soit le point A' sur le cercle tel que BA' soit orthogonal à AB . Les points A et A' sont sur le même diamètre. On a alors $\underline{MA} \cdot \underline{MB} = (\underline{MO} + \underline{OA}) \cdot (\underline{MO} + \underline{OA'}) = \underline{MO} \cdot \underline{MO} + \underline{MO} \cdot (\underline{OA'} + \underline{OA}) + \underline{OA'} \cdot \underline{OA} = MO^2 - R^2$.



d'intersection connus.

s'exprimer comme $\underline{IA} \cdot \underline{IB}$ et sont donc bien identiques. Les deux distances IM et IN sont égales et valent $\sqrt{\underline{IA} \cdot \underline{IB}}$. Connaissant I , A et B , on détermine M et N . Et connaissant trois points sur chaque cercle, il est alors possible de trouver leurs centres et leurs rayons. Les deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont alors déterminés.

A.4.3 Calcul des contraintes actives et passives

Nous sommes maintenant prêt pour trouver les états de contrainte permettant l'activation de deux failles conjuguées au sens de Coulomb. Soit une facette de pendage α dont le vecteur de contrainte $\underline{T}$ est connu, Figure A.11. Le pendage est parallèle à la surface libre de contrainte qui est inclinée. On montrera que l'équilibre mécanique permet de trouver le vecteur $\underline{T}$ pour toute facette parallèle à cette surface. Le point Q définit la position de ce vecteur dans le plan $(\sigma_n, -\tau)$. Par symétrie, le point Q' , correspondant à la facette orientée à π près, correspond au même tenseur de contrainte. Introduisons maintenant le critère de Coulomb qui conduit à tracer les deux droites d'angle ϕ et $-\phi$ pour une cohésion C .

Nous cherchons les états de contrainte qui permettent l'activation des failles selon ce critère de Coulomb. L'application précédente de la notion de la puissance d'un point par rapport au cercle nous conduit à la construction de deux solutions correspondant aux deux cercles de la

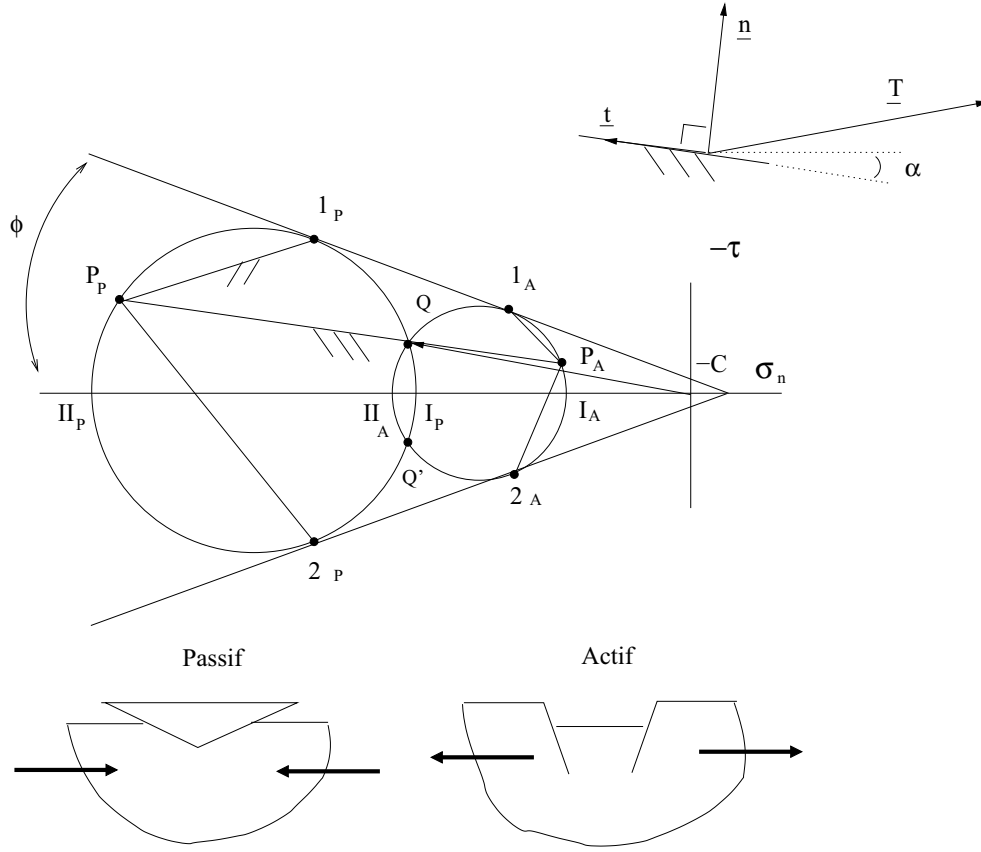


FIG. A.11: Construction des contraintes actives et passives

Figure A.11 que nous appelons $\mathcal{C}_P$ et $\mathcal{C}_A$. Les contraintes principales sont σ_{IA} et σ_{IIA} pour le cercle de diamètre le plus petit et σ_{IP} et σ_{IIP} pour l'autre. Traçons en passant par le point Q le pendage physique de la facette de référence. Cette droite intersecte les deux cercles aux points P_A et P_P qui sont les deux pôles des cercles. Il est alors possible de mesurer le pendage de chacune des failles des deux jeux $(1_P, 2_P)$ et $(1_A, 2_A)$ qui caractérisent l'activation du critère en utilisant l'analyse de la section A.4.2. .

L'interprétation physique de ces deux solutions est classique en mécanique des sols. Le petit cercle $\mathcal{C}_A$ correspond à un état de contrainte actif. Le grand cercle $\mathcal{C}_P$ définit l'état passif. Ces deux états sont illustrés sur la Figure A.11. L'état passif correspond à une compression forte horizontale. L'état actif est typique d'une extension. Ces deux états peuvent co-exister en différents endroits d'une même structure en pente comme indiqué sur la Figure A.12. Typiquement, nous retrouvons l'état passif en bas de pente et l'état actif vers le haut. Les orientations des failles générées en ces deux endroits sont très différentes. Cependant, il est possible d'imaginer une enveloppe (trait pointillé) qui est tangente à une des failles du haut et à une des failles

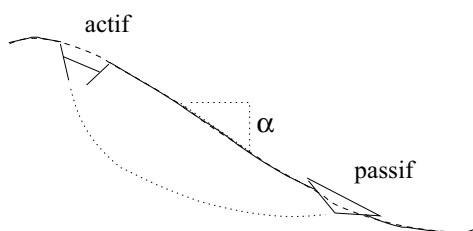


FIG. A.12: Application des contraintes actives et passives à l'analyse de la stabilité d'une pente et à la définition du mécanisme de ruine ou loupe de glissement.

du bas. Nous proposons ainsi un mécanisme de ruine, ou loupe de glissement, dont l'activation détermine la stabilité de la pente. Ceci est vrai pour les sols du génie civil mais également pour les prismes d'accrétion.

A.5 Application à la criticalité du prisme

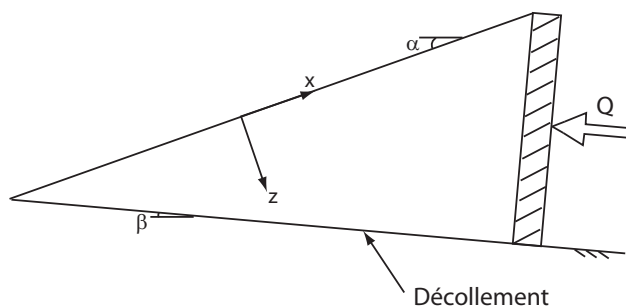


FIG. A.13: Prototype classique pour étudier le prisme théorique critique de Coulomb.

Un prototype classique afin d'étudier les prismes d'accrétion est représenté Figure A.13. L'observateur est fixé par rapport à la plaque plongeante dont le pendage est β (quelques degrés). La poussée vient du mur arrière qui représente le continent. Le matériau occupe la zone triangulaire dont la surface libre a pour pendage α . La structure a deux solutions pour se déformer. La première consiste à glisser de façon rigide sur le décollement, qui est à l'interface avec la plaque plongeante. Ce décollement a des propriétés frictionnelles faibles. Si l'angle β est constant, ce mode de déformation se produit pour un angle α plus grand qu'une valeur critique α_c . Nous dirons que le prisme est super-critique. Le deuxième mode de déformation consiste à déformer le prisme à l'arrière en utilisant la longueur minimum de décollement possible. L'angle α est plus faible que α_c et le prisme est dit sous-critique. Si le prisme est critique c'est-à-dire

A.5. Application à la criticalité du prisme

que $\alpha = \alpha_c$ alors la déformation peut avoir lieu n'importe où dans le prisme. La déformation se traduit par des systèmes de failles conjuguées : une rampe et un rétro-chevauchement. Des essais en boîte de sable réalisés au laboratoire de l'Université de Cergy-Pontoise nous illustre ce concept à la figure A.14.

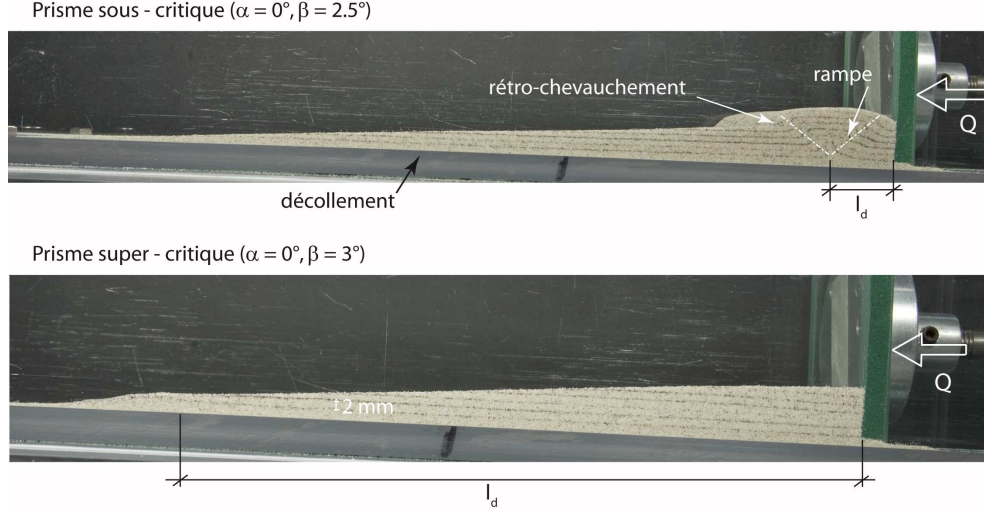


FIG. A.14: Essais en boîte de sable pour étudier la criticalité des prismes d'accrétion, l_d représente la longueur de décollement qui est activée. Le prisme est sous-critique, un système de failles conjuguées se forme dans le prisme, a), le prisme est super-critique, il glisse sur tout le décollement et la rupture apparaît tout au bout du prisme, b).

Ce raisonnement repose donc sur l'existence d'un angle critique α_c que nous nous proposons de calculer en utilisant la construction de Mohr pour un matériau et un décollement frictionnel et sans cohésion. Nous suivrons pour cela la démarche de Lehner (1986) qui apporte l'éclairage connu en mécanique des sols aux prismes d'accrétion et à la solution analytique de Dahlen (1984). La démarche a déjà été entamée dans le second article "Failure in accretionary wedges with the maximum strength theorem : numerical algorithm and 2D validation" du chapitre 3. Attention, ici les conventions d'axes ne sont pas les mêmes que dans l'article cité ci-dessus.

Tout d'abord, nous allons déterminer la solution en contrainte dans le prisme qui est fonction de la profondeur z mais indépendante de la position latérale x (Figure A.13 pour la définition des axes). L'expression de l'équilibre statique exprimé dans les coordonnées définies à la figure A.13 est la suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} - \rho g \sin \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g \cos \alpha = 0, \quad (\text{A.5.1})$$

où g représente la gravité. L'hypothèse d'indépendance par rapport à la position latérale et l'équilibre impliquent :

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho g \sin \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\rho g \cos \alpha. \quad (\text{A.5.2})$$

On obtient alors les expressions pour les composantes σ_{xz} et σ_{zz} du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \rho g z \sin \alpha + a, \\ \sigma_{zz} &= -\rho g z \cos \alpha + b, \end{aligned} \quad (\text{A.5.3})$$

où a et b sont des constantes. Les conditions aux limites en surface du prisme sont :

$$\sigma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{zz} = 0. \quad (\text{A.5.4})$$

Donc les constantes a et b sont nulles. D'autre part, σ_{xx} reste indéterminée. Mais il est possible de le trouver sachant que l'état de contrainte est critique en tout point dans le domaine (equation A.3.4). L'expression du tenseur des contraintes dans le prisme est la suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho g z \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{xx}(z) & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.5})$$

où $\tilde{\sigma}_{xx}$ est égale à σ_{xx} , normalisée par $\rho g z$.

Considérons une facette dont la normale $\underline{n}$ fait un angle θ avec l'axe z et le vecteur tangentiel $\underline{t}$ fait un angle θ avec l'axe x :

$$\underline{n} = \sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_z \quad \text{et} \quad \underline{t} = \cos \theta \underline{e}_x - \sin \theta \underline{e}_z. \quad (\text{A.5.6})$$

Le vecteur contrainte est :

$$\underline{T} = \rho g z [(\tilde{\sigma}_{xx} \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta) \underline{e}_x + (\sin \alpha \sin \theta - \cos \alpha \cos \theta) \underline{e}_z]. \quad (\text{A.5.7})$$

dont les composantes sont :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \rho g z (\tilde{\sigma}_{xx} \sin^2 \theta - \cos \alpha \cos^2 \theta + 2 \sin \alpha \cos \theta \sin \theta), \\ \tau &= \rho g z (\tilde{\sigma}_{xx} \sin^2 \theta + \sin \alpha (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \cos \alpha \sin \theta \cos \theta). \end{aligned} \quad (\text{A.5.8})$$

A partir de l'expression des composantes du vecteur contrainte définies par les équations A.5.8, on peut appliquer le critère de Coulomb : $|\tau| + \tan \sigma_n = 0$. Considérons maintenant une facette parallèle à la topographie du prisme c'est-à-dire faisant un angle α avec l'horizontale. La normale de cette facette est dirigée vers l'extérieur du matériau, suivant $-\underline{e}_z$. L'angle θ est donc égal à π . D'après les composantes du vecteur contrainte pour une facette d'orientation θ quelconque

A.5. Application à la criticalité du prisme

définies à l'équation A.5.8, si $\theta = \pi$ les composantes normalisées du vecteur contrainte sont alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_n &= -\cos \alpha, \\ \tilde{\tau} &= \sin \alpha.\end{aligned}\tag{A.5.9}$$

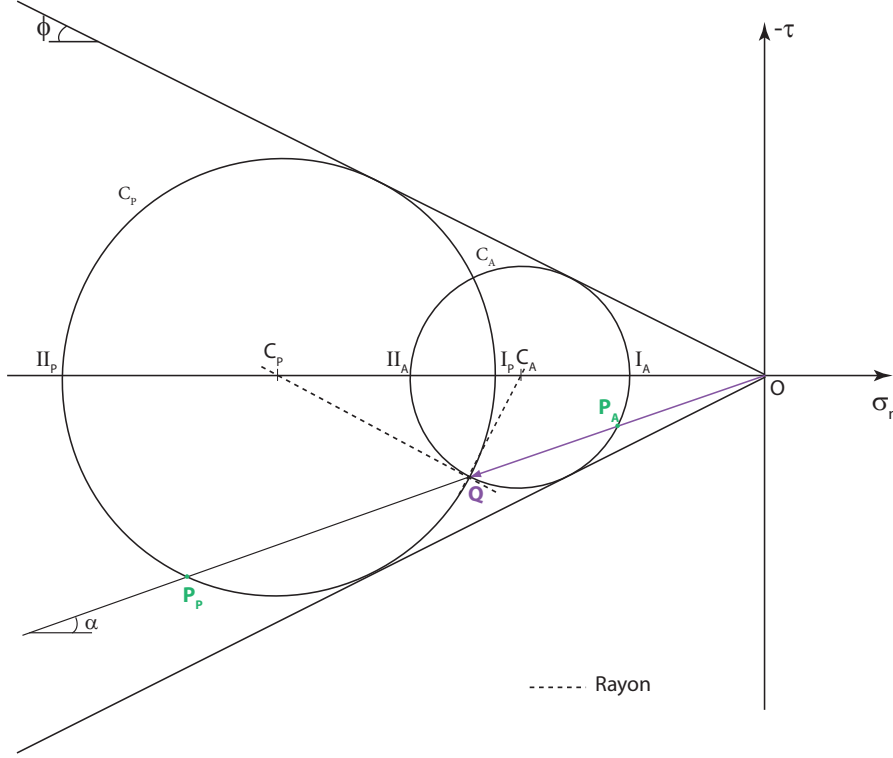


FIG. A.15: Vecteur contrainte Q de coordonnées $(-\cos \alpha, -\sin \alpha)$ dans le plan de Mohr-Coulomb ainsi que les cercles actif $\mathcal{C}_A$ et passif $\mathcal{C}_P$ associés à cet état de contraintes. La droite parallèle à la topographie donne les deux pôles P_A et P_P .

Il est possible, à partir de cet état de contraintes, de tracer le vecteur contrainte dans le plan de Mohr (le point Q de coordonnées $((-\cos \alpha, -\sin \alpha)$ dans le plan $(\tilde{\sigma}_n, -\tilde{\tau})$) et les deux cercles $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_P$, de centre C_A et C_P respectivement (Figure A.15). Le résultat de cette construction des deux cercles est décrite précédemment à la figure A.10. De plus, si l'on trace la droite parallèle à la topographie dans le plan de Mohr, on trouve les deux pôles actif et passif : P_A et P_P . Les droites rejoignant les pôles des points tangents à l'enveloppe de Mohr donnent l'actuelle orientation dans l'espace des failles qui sont associées aux deux états de contraintes passif et actif : 2 lignes pour le pôle P_A et 2 lignes pour le pôle P_P (Figure A.16, Figure A.11 pour la

méthode). On a également les directions des contraintes principales dans l'espace physique qui sont obtenues en connectant les pôles aux points de contrainte principale (Dans un souci de clarté, nous avons représenté ces directions seulement pour le cercle passif sur la figure A.11). On obtient enfin le pendage des failles défini à la figure A.7. Cet angle est noté θ dans l'article de Lehner et sur la figure A.16 ($\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$).

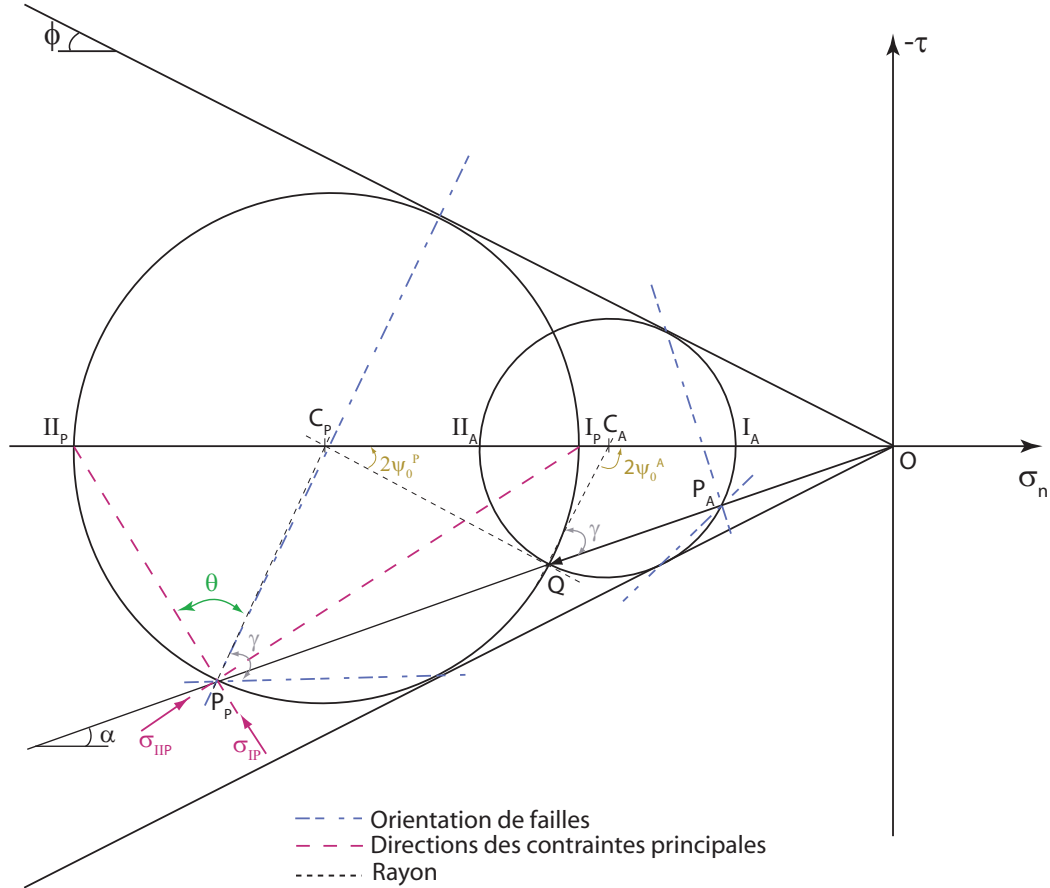


FIG. A.16: Représentation avec les cercles de Mohr des états de contraintes actif et passif pour une facette de pendage α et l'ensemble des orientations des failles associées ; A : pôle actif, P : pôle passif.

Considérons maintenant l'angle ψ_0 qui est l'angle entre le pendage α et la direction de contrainte principale majeure σ_{II} et qui est représenté à la figure A.17.

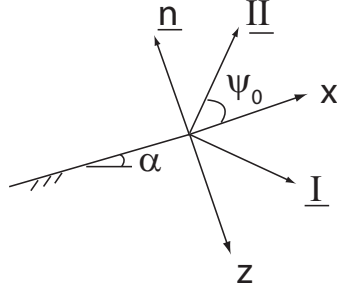


FIG. A.17: Représentation de l'angle ψ_0 dans le repère des directions principales.

Afin de calculer cet angle, définissons d'abord l'angle γ qui est l'angle $\widehat{OQC_A}$. Si r_A est le rayon du cercle actif, la règle des sinus nous donne alors :

$$\sin \alpha OC_A = r_A \sin \gamma. \quad (\text{A.5.10})$$

Or $\sin \phi = r_A / OC_A$, donc :

$$\gamma = \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \phi} \right). \quad (\text{A.5.11})$$

D'après le théorème de Thalès, l'angle $\widehat{C_P P_P Q}$ et l'angle $\widehat{C_A Q P_A}$ sont égaux à γ . Le triangle $(P_P C_P Q)$ est isocèle donc l'angle $\widehat{P_P Q C_P}$ est égale à γ . Ainsi l'angle $\widehat{C_P Q C_A}$ est égale à $\pi - 2\gamma$. Considérons le triangle $(C_A Q C_P)$. La somme des angles dans ce triangle donne :

$$\begin{aligned} 2\psi_0^P + \pi - 2\gamma + \pi - 2\psi_0^A &= \pi, \\ \Rightarrow \psi_0^A - \psi_0^P &= \frac{\pi}{2} - \gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.5.12})$$

Considérons maintenant le triangle $(OC_A Q)$. La somme des angles dans ce triangle donne :

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma + 2\psi_0^A &= \pi, \\ \Rightarrow \psi_0^A + \psi_0^P &= \frac{\pi}{2} - \alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.5.13})$$

On en déduit alors les expressions des deux angles ψ_0 :

$$\begin{aligned} \psi_0^A &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \phi} \right) - \frac{1}{2} \alpha, \\ \psi_0^P &= \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \phi} \right) - \frac{1}{2} \alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.5.14})$$

Supposons maintenant que l'on connaisse l'angle de friction sur le décollement tel que $\tau = \tan \phi_D \sigma_n$. On peut alors tracer les droites dans le plan de Mohr correspondant à ce plan de

faiblesse (Figure A.18). Les lignes qui rejoignent les pôles P_A et P_P aux points d'intersection des cercles et des droites de Mohr d'angle ϕ_D représentent les orientations potentielles du décollement en profondeur. Il y a quatre possibilités pour le cercle actif et quatre pour le cercle passif. On a choisi de ne représenter que l'ensemble des orientations pour le cercle passif afin d'alléger la figure A.18. L'angle entre le pendage de ces failles potentielles et l'horizontale devrait être égale à β , le pendage du décollement. Il faut donc faire varier la valeur de ϕ_D pour retrouver β dans cette figure A.18.

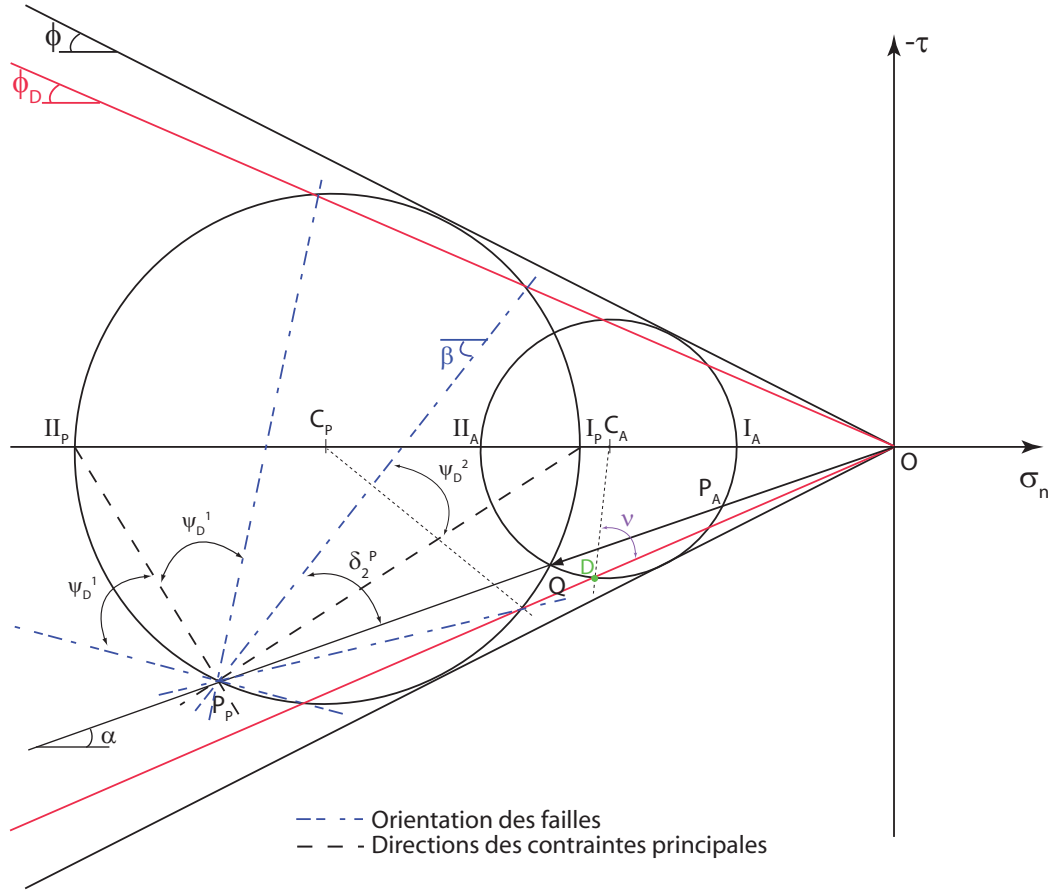


FIG. A.18: Solution graphique du problème du prisme critique conduisant à 8 lignes de glissement possibles. Seules les 4 lignes de glissement du cercle passif sont dessinées.

Afin de trouver les conditions critiques, définissons l'angle ν qui est l'angle $\widehat{ODC_A}$. Avec le même raisonnement qu'à l'équation A.5.11, on obtient l'expression de l'angle ν :

$$\nu = \arcsin \left(\frac{\sin \phi_D}{\sin \phi} \right) \quad (\text{A.5.15})$$

Les angles entre les directions principales et les failles potentielles de pendage physique β sont exprimées en fonction de ϕ_D et ϕ :

$$\psi_D^{2(1)} = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\sin \phi_D}{\sin \phi} \right) \pm \frac{1}{2} \phi_D \quad (\text{A.5.16})$$

sachant que ce sont les mêmes angles pour le cercle passif et le cercle actif. Notons δ_i^ξ l'angle entre les failles potentielles du décollement et le pendage physique de la topographie avec $\xi = A$ ou P distinguant le cercle actif du passif et $i = 1$ ou 2 pour la direction de contraintes majeure ou mineure :

$$\begin{aligned} \delta_1^\xi &= \frac{\pi}{2} + \psi_0^\xi \pm \psi_D^1, \\ \delta_2^\xi &= \psi_0^\xi \pm \psi_D^2. \end{aligned} \quad (\text{A.5.17})$$

Mais δ_i^ξ peut aussi être exprimé en fonction des deux angles physiques α et β . Suivant le signe de β , on obtient quatre expressions possibles qui sont définies à l'équation (13) de l'article de Lehner. Si nous reprenons l'exemple donné par Lehner à l'équation (15) :

$$\alpha + \beta = \psi_D^2 - \psi_0^P, \quad (\text{A.5.18})$$

ce qui équivaut à :

$$\alpha + \arcsin(\sin \alpha / \sin \phi) = \arcsin(\sin \phi_D / \sin \phi) - 2\beta - \phi_D. \quad (\text{A.5.19})$$

Cette expression correspond à l'angle critique α_c défini par Dalhen (1984) et construit graphiquement par Lehner (1986).

Annexe B

Résultats complémentaires obtenus avec la Méthode des Éléments d'Équilibre

Cette annexe présente deux aspects qui n'ont pas été abordés dans l'article "Predicting stress distributions in fold-and-thrust belts and accretionary wedges by optimization" du chapitre 2. Il s'agit d'une étude paramétrique sur le problème d'Hafner (1951) qui permet de rendre compte d'une part de la non unicité des contraintes optimisées avec la Méthode des Éléments d'Équilibre (MEE) et d'autre part d'un résultat numérique qui n'est pas interprétable d'un point de vue géologique. Le deuxième aspect est l'étude de l'influence du raffinement du maillage pour cette méthode.

B.1 Unicité des champs de contraintes

Nous discutons dans cette partie de l'unicité du champ de contraintes obtenu avec l'optimisation par la Méthode des Éléments d'Équilibre. Pour cela, reprenons le problème d'Hafner posé dans le deuxième chapitre du manuscrit. Le seul paramètre à optimiser dans ce problème est l'inconnue a qui détermine le chargement en gradient linéaire. Les autres paramètres sont connus et récapitulés dans le tableau B.1.

Prenons une cohésion c_B dans le matériau de $10MPa$, qui supérieure à $c_{B*} = 0.8895MPa$. Le décollement est donc activé sans rupture dans le matériau. La solution théorique en $\underline{\underline{\sigma}}$ est donc indépendante de c_B , si celle-ci est plus grande que c_{B*} . La valeur de la force pour $c_B = 10MPa$ est de $1.076171GN$. C'est presque celle prédite par la théorie, à 4 chiffres significatifs près,

Definition	Dim.	Valeur
Longueur L	km	0.5
Hauteur H	km	0.2
Masse volumique ρ	kg/m^3	2300.
Gravité g	m/s^2	10.
Angle de friction dans le matériau ϕ_B	deg.	30.
Cohésion dans le matériau c_B	MPa	variable
Angle de friction sur le décollement ϕ_D	deg.	15.
Cohésion sur le décollement c_D	MPa	0

TAB. B.1: Définitions, dimensions et valeurs définies pour les paramètres du problème d'Hafner.

puisque, d'après le tableau 2 du deuxième chapitre, la valeur théorique de la force tectonique est de $1.076288GN$ pour $c_B = 1MPa$. La Figure B.1 représente la distribution des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} pour un ratio $c_B/c_B^* = 1.124$ ($c_B = 1MPa$) sur la colonne de gauche et pour un ratio $c_B/c_B^* = 11.24$ ($c_B = 10MPa$) sur la colonne de droite. Nous allons surtout commenter les résultats de la colonne de droite puisque ceux de la colonne de gauche sont commentés dans le deuxième chapitre. On observe que les distributions de contraintes diffèrent selon la cohésion dans le matériau. La distribution σ_{xx} à droite est maximale aux deux coins bas du bloc. En revanche au milieu du décollement, les valeurs diminuent par rapport au bloc de gauche. La contrainte verticale pour le bloc de droite n'est pas indépendante de la coordonnée horizontale bien que la tendance soit approximativement un gradient vertical. Une courbure nette se forme si on suit par exemple l'iso-contour jaune. Le cisaillement du bloc de droite varie aussi horizontalement et est différent du cisaillement obtenu pour une cohésion $c_B/c_B^* = 1.124$. Par conséquent, même si la valeur de la force est égale pour différentes valeurs de cohésion dans le matériau et que le mode de rupture est identique (ici activation totale du décollement), il existe plusieurs champs de contraintes SA possibles pour de tels paramètres.

Étudions maintenant le cas du problème d'Hafner pour une cohésion dans le matériau de $100MPa$. Cette valeur est supérieure à c_B^* et donc tout le décollement est activé. La valeur de la force tectonique est de $1.076382GN$, elle est donc proche à 4 chiffres significatifs près de la valeur théorique. La figure B.2 représente la distribution des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} pour cette valeur de c_B . Le résultat n'est pas interprétable géologiquement. Cependant, un motif est observable à l'échelle de chaque élément pour chaque direction. En effet, sur chaque élément, le gradient de contraintes est très important (entre -60 et $60MPa$ pour σ_{yy} par exemple). On observe également que ce motif est modifié sur une épaisseur de la taille

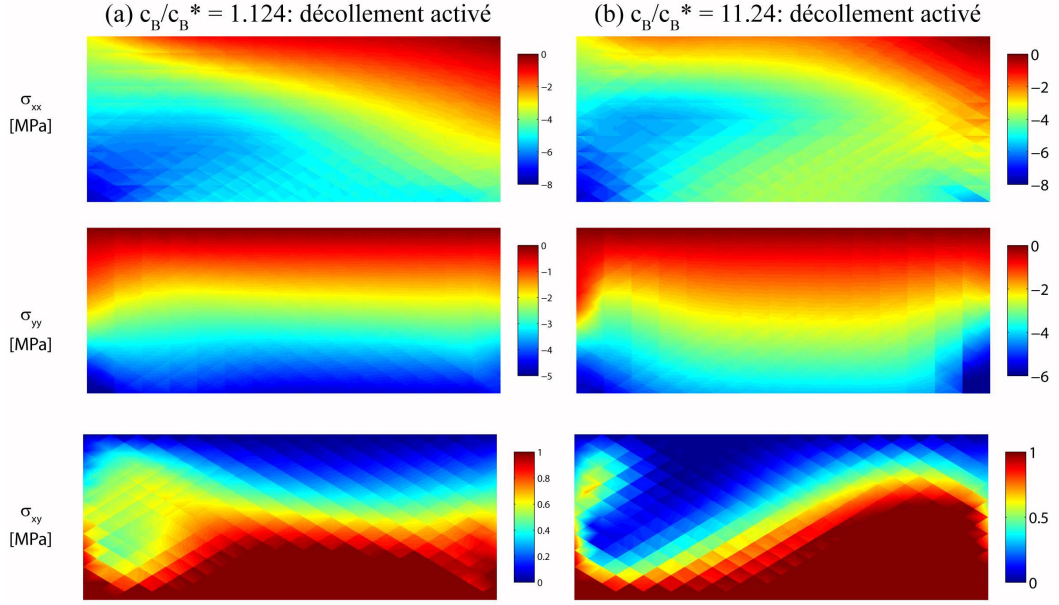


FIG. B.1: Composantes $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ prédites par la MEE pour le problème d'Hafner pour $c_B/c_B^* = 1.124$ sur la colonne de gauche et pour $c_B/c_B^* = 11.24$ pour la colonne de droite. Le décollement est activé pour les deux cas.

d'une demi-maille aux bords droit et gauche du maillage. Ce résultat est issu de l'optimisation numérique, il est acceptable mathématiquement puisque la valeur de force est correcte mais il n'est pas interprétable pour une structure géologique. De nouveau on illustre la non-unicité de la solution d'optimisation. Ce type de motif nous rappelle l'optimisation micro-structurale des poly-cristaux à potentiel contraint (Chanchiah and Bhattacharya, 2005). Il devrait intéresser la communauté des mathématiciens.

B.2 Influence du maillage

L'application de la MEE est basée sur une discrétisation du domaine. La question se pose alors de l'influence du maillage sur le résultat optimisé. Les discontinuités spatiales sont orientées par rapport aux éléments triangulaires constituant le maillage. Suivant le raffinement du maillage, elles influent sur le résultat de l'optimisation. Pour illustrer cette remarque, nous reprenons l'exemple du pli de rampe étudié dans la partie principale avec les mêmes paramètres rappelés dans le tableau B.2.

Le maillage présenté en Figure B.3a est composé de 150 éléments triangulaires. Une cellule est composée de 4 éléments triangulaires reliés chacun par des éléments d'épaisseur nulle décrits

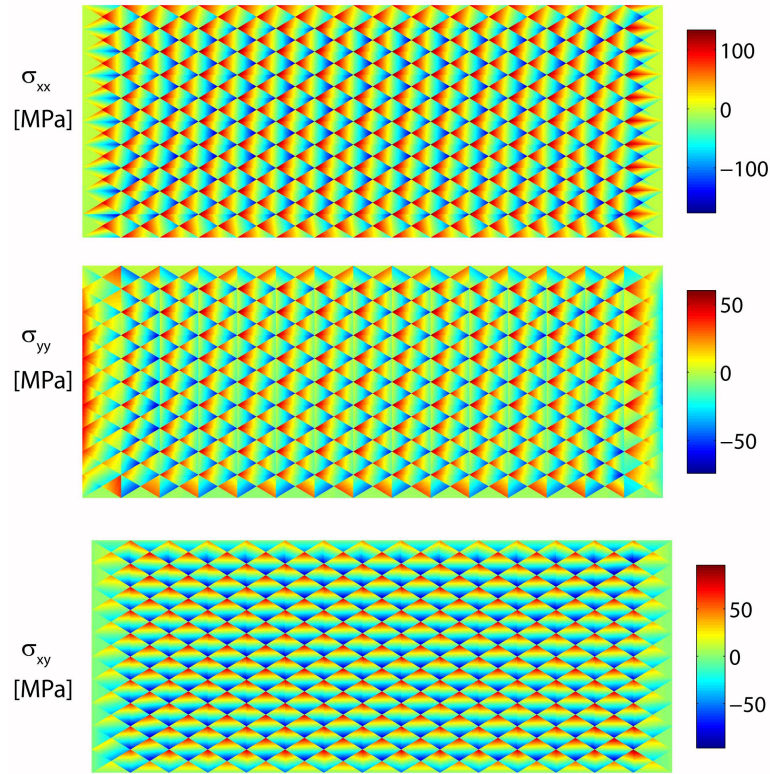


FIG. B.2: Composantes $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ prédites par la MEE pour le problème d'Hafner pour $c_B = 100MPa$

Definition	Dim.	Valeurs
Longueur D	km	4.25
Hauteur H	km	1
Masse volumique ρ	kg/m^3	2200.
Gravité g	m/s^2	9.81
Angle de la rampe γ	deg.	30.
Angle de friction dans le matériau ϕ_B	deg.	30.
Cohésion dans le matériau c_B	MPa	1.
Angle de friction sur le décollement ϕ_D	deg.	5.
Cohésion sur le décollement c_D	MPa	0
Angle de friction de la rampe ϕ_R	deg.	15.
Cohésion de la rampe c_R	MPa	0

TAB. B.2: Définitions, dimensions et valeurs des paramètres considérées pour le pli de rampe.

dans le supplément électronique du deuxième chapitre. La figure B.3(b) présente la distance au critère de Coulomb dans le matériau pour $\phi_R = 15^\circ$. Il s'agit de la distance π définie dans le deuxième chapitre (équation 2.2.12). On observe ici que le matériau atteint le critère de Coulomb sur une région importante du pli située jusqu'à la surface du toit. Le rétro-chevauchement est grossier et suit les discontinuités spatiales. Le raffinement du maillage semble indispensable.

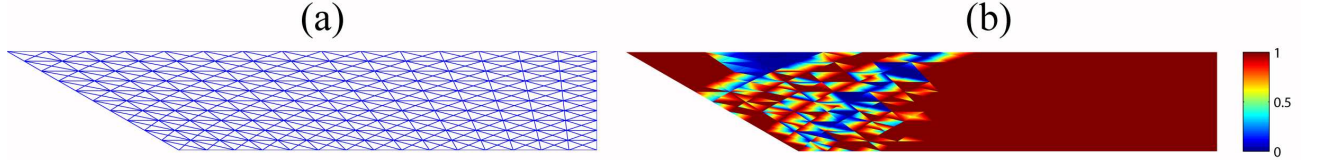


FIG. B.3: Maillage du pli de rampe (a), Distance au critère de Coulomb dans le matériau pour $\phi_R = 15^\circ$. La distance décrite dans la partie principale en équation (9) varie linéairement de 0 à 1 (b).

La Figure B.5a présente un maillage plus fin pour la même géométrie de pli. Pour ce cas, nous avons introduit un "éventail" partant de la base de la rampe et couvrant la zone du toit et une épaisseur d'environ $2km$ du bloc arrière du pli. Les éléments de la base "en éventail" sont également triangulaires et comportent des éléments d'épaisseur nulle sur les côtés mais ils forment des cellules triangulaires afin de respecter au mieux la forme géométrique du pli. La Figure B.4 représente une cellule composée de trois éléments triangulaires et de 4 éléments triangulaires d'épaisseur nulle.

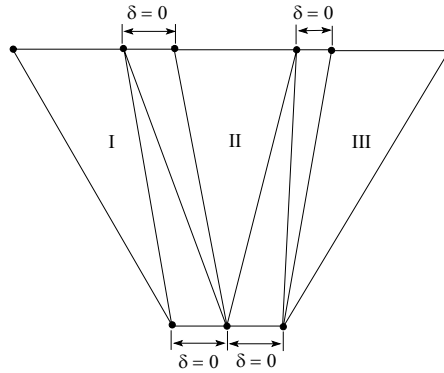


FIG. B.4: Schéma d'une cellule de 3 éléments triangulaires utilisés pour le maillage de l'éventail

La distance au critère de Coulomb dans le matériau illustré sur la Figure B.5b est la même que celle de la figure 2.6 du chapitre 2 et montre l'existence d'un rétro-chevauchement démarrant à la base de la rampe ainsi qu'une zone de failles normales. Le raffinement du maillage permet donc d'affiner la forme des zones de rupture dans le matériau. Le maillage grossier de la figure

B.3 permet déjà d'avoir une zone de rupture mais cette zone est très étendue. Le maillage de plus en plus fin va permettre d'obtenir le rétro-chevauchement attendu par l'approche externe et les modèles analogiques. Si le maillage est encore plus fin, le rétro-chevauchement serait également encore plus fin.

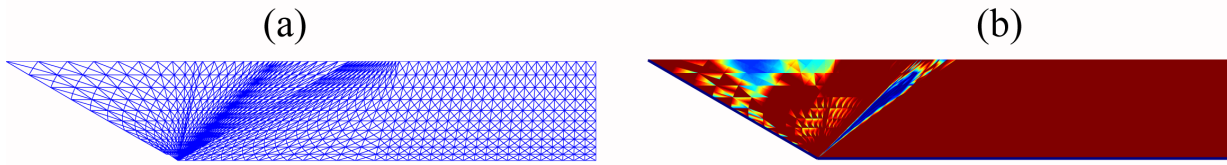


FIG. B.5: Maillage plus fin avec introduction d'un "éventail" (a), Distance au critère de Coulomb dans le matériau pour $\phi_R = 15$ (b)

Annexe C

Approche externe du calcul à la rupture pour le problème d'Hafner

Cette annexe présente la résolution du problème d'Hafner par l'approche externe du calcul à la rupture. Le problème d'Hafner (1951) a été abordé dans le deuxième chapitre avec l'approche interne du calcul la rupture qui a permis de mettre en évidence deux modes de rupture distincts : l'activation totale du décollement ou la rupture dans le matériau. Pour appliquer l'approche externe, on va considérer le mode où le décollement est totalement activé. L'objectif est de construire un champ de vitesse cinématiquement admissible (CA) et d'obtenir une borne supérieure à la force tectonique. Les données du problème sont rappelées dans la Figure C.1 sachant que le vecteur $\hat{\mathbf{J}}$ désigne le saut de vitesse sur toute discontinuité orientée par l'angle β par rapport à la normale $\mathbf{n}$. L'angle β est négatif dans cette étude.

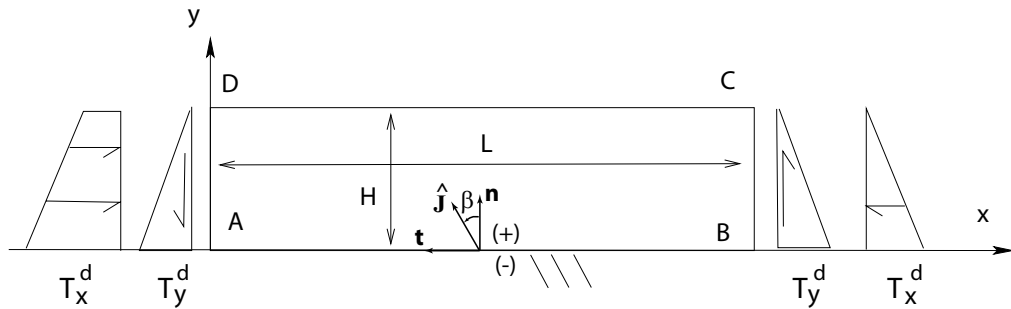


FIG. C.1: Géométrie et chargement pour le problème d'Hafner (1951).

En orientant le saut de vitesse entre le bloc $ABCD$ et le décollement, le champ de vitesse CA constant est :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{U}}^+ &= \hat{J}(\cos \beta \mathbf{n} + \sin \beta \mathbf{t}) = \hat{J}(-\sin \beta \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y), \\ \hat{\mathbf{U}}^- &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{C.0.1}$$

Il n'y a pas de dissipation d'énergie interne car la vitesse est constante. Pour le problème d'Hafner, la discontinuité majeure est le décollement. Donc la puissance des efforts intérieurs est :

$$\mathcal{P}_i(\hat{\mathbf{U}}) = \int_A^B \hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{T} dS.\tag{C.0.2}$$

La puissance des efforts extérieurs est due à la force de gravité et à la partie constante du chargement à gauche :

$$\mathcal{P}_e(\hat{\mathbf{U}}) = -\rho g \cos \beta LH \hat{J} - a \sin \beta LH \hat{J}.\tag{C.0.3}$$

D'après le théorème des puissances virtuelles, la puissance interne est égale à la puissance externe pour tout champ de vitesse CA :

$$\mathcal{P}_e(\hat{\mathbf{U}}) = \mathcal{P}_i(\hat{\mathbf{U}}) \Leftrightarrow -\rho g \cos \beta LH \hat{J} - a \sin \beta LH \hat{J} = \int_A^B \hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{T} dS.\tag{C.0.4}$$

Notons que la principale difficulté pour résoudre (C.0.4) est que le vecteur contrainte $\mathbf{T}$ n'est pas connu à priori. On a démontré au chapitre 1 que l'on pouvait obtenir un majorant à cette puissance interne avec la détermination graphique de la fonction support. Si on applique cette méthode graphique au critère de Coulomb, on trouve les 3 solutions suivantes :

$$\begin{aligned}\text{case (1A) and (1C)} : 0 \leq |\beta| < \pi/2 - \phi_D, \quad \pi(\hat{\mathbf{J}}) &= \hat{J} c_D \cotan(\phi_D) \cos \beta, \\ \text{case (2A) and (2C)} : |\beta| = \pi/2 - \phi_D, \quad \pi(\hat{\mathbf{J}}) &= \hat{J} c_D \cos \phi_D, \\ \text{case (3A) and (3C)} : \pi/2 - \phi_D < |\beta| \leq \pi, \quad \pi(\hat{\mathbf{J}}) &= +\infty.\end{aligned}\tag{C.0.5}$$

Les lettres A (anti-horaire) et C (horaire) correspondent aux cas où l'angle β est positif et négatif, respectivement.

Supposons que, pour le problème d'Hafner, l'angle β soit compris entre 0 et $-\pi/2 + \phi_D$ alors la fonction support est définie par : $\pi(\hat{\mathbf{J}}) = \hat{J} c_D \cotan(\phi_D) \cos \beta$. La puissance des efforts intérieurs est donc majorée par :

$$\mathcal{P}_i(\hat{\mathbf{J}}) \leq \int_A^B \pi(\hat{\mathbf{J}}) ds = \hat{J} c_D \cotan(\phi_D) \cos \beta L.\tag{C.0.6}$$

En reprenant les équations (C.0.4) et (C.0.6), on obtient l'expression du majorant de l'inconnue de chargement a :

$$a \leq \rho g \cos \beta H + \cos \beta \cotan \phi_D c_D.\tag{C.0.7}$$

Il faut alors choisir β pour obtenir le plus petit des majorants et donc la borne supérieure au gradient a ainsi qu'à la force tectonique. Le plus petit des majorants sachant que $\beta < 0$ est : $\beta = -\frac{\pi}{2} + \phi_D$. Donc l'expression du majorant de a devient :

$$a = \frac{c_D}{H} + \rho g \tan \phi_D, \quad (\text{C.0.8})$$

On retrouve exactement l'expression de a_D (2.2.15) du deuxième chapitre. Nous avons donc résolu, dans cette annexe, le problème d'Hafner avec l'approche externe du calcul la rupture avec l'hypothèse du décollement activé. La force à optimiser ne dépend que du paramètre a comme pour l'approche interne. Il s'avère que l'expression de ce paramètre est la même que celle trouvée avec l'approche interne lorsque le décollement est entièrement activé. Il s'agit donc d'une solution exacte. Il resterait à faire un dernier calcul pour trouver le coefficient a correspondant à la ruine dans le matériau. Connaissant les résultats numériques (détaillés au chapitre 2), on peut imaginer, comme l'illustre la figure C.2, qu'une discontinuité, faisant un angle α avec l'horizontale, apparaisse dans le matériau sachant que le bloc ne glisse plus sur le décollement. Cette discontinuité est à une hauteur h qui est une inconnue du problème. De ce fait, avec l'hypothèse de mouvements de blocs rigides, le champ de vitesse virtuel serait le suivant : le bloc Ω_1 est à la vitesse nulle $\hat{\mathbf{U}}_1$ et le bloc au-dessus de la faille Ω_2 glisse sur la discontinuité à la vitesse $\hat{\mathbf{U}}_2$. Le saut de vitesse $\hat{\mathbf{J}}$ est donc égale à cette vitesse $\hat{\mathbf{U}}_2$. Il est orienté d'un angle β par rapport à la normale $\mathbf{n}$ à la discontinuité. L'optimisation va donc se faire sur α et h . Le résultat de l'optimisation va tendre vers une valeur de h nulle.

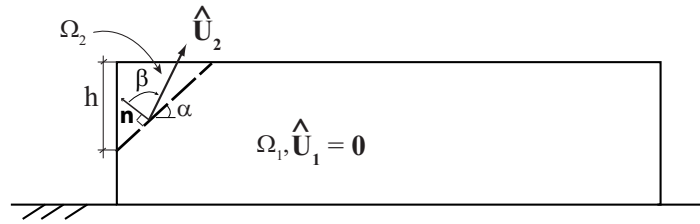


FIG. C.2: Géométrie et chargement pour le problème d'Hafner (1951).

Annexe D

Comparison between Finite Element Method and Equilibrium Element Method to predict stress field in fault-bend folds¹

Abstract

The objective is to compare the merits of the Equilibrium Element Method (EEM), based on the internal approach of limit analysis, and the Finite-Element Method (FEM) for elastic perfectly plastic materials, in predicting the stress field in geological structures such as fault-bend folds. The two methods predict the same failure mode although the discontinuities in the stress fields constructed with the EEM lead to a sharper spatial resolution due to the density of the discretization used for the mesh. The FEM has the advantage to give an insight on the whole stress history and the development of the failure mechanics but at a computational cost which remains orders of magnitude larger than the one required for the EEM.

D.1 Introduction

This research is part of an effort to account for mechanical equilibrium and material strength in geometrical models of folds. Cubas et al. (2008) have shown that the external approach of limit analysis (Salençon, 2002) could be applied to thrusting providing the means to assess the life time of a thrust fold and to construct sequences of folds while keeping the geometrical simplicity of the constructions proposed in the seminal work of Suppe (1983). The next objective

¹Proceeding of the 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG) 1-6 October, 2008 Goa, India .

was to construct statically admissible stress fields on these structures. The EEM, which is a direct application of the internal approach of limit analysis, has been shown by Souloumiac et al. (2008), to be applicable to these geological structures. The stress field obtained by numerical means, following the implementation of Krabbenhøft et al. (2005), is statically admissible and respects the maximum strength (yield limit) point wise. The objective is now to compare the application of the EEM with results obtained with the FEM for elastic-perfectly plastic materials. The latter requires the introduction of a non-associated flow rule which is incompatible with bounding theorems. Putting aside this endless debate (Sloan, 2005), this paper concentrates on the comparison of the predicted stress and the potential of the two approaches.

D.2 Description of the model of fold

This first part describes the model of fault-bend fold used for the numerical approaches : a domain Ω bounded by active faults or surfaces where the tectonic force T_x^d is distributed as shown on Figure D.1. The domain Ω is the back stop and the hangingwall bounded by T_x^d . Two discontinuities are also represented. First, the back stop is sliding over a flat décollement of initial length D . Secondly, the ramp which is known roots at point G . The dip of the ramp is defined by the angle Γ . The part MIEG of the soil layer - the footwall - doesn't move during the evolution of the fold. The back wall is displaced by δ and the material found in the hanging wall moves up parallel to the ramp resulting into a relief (Suppe, 1983). This evolution is indicated by the dotted arrows. The external approach of limit analysis (Cubas et al., 2008) allows for the existence of another discontinuity, the back thrust, with a dip defined by the angle θ and the upper bound on the tectonic force.

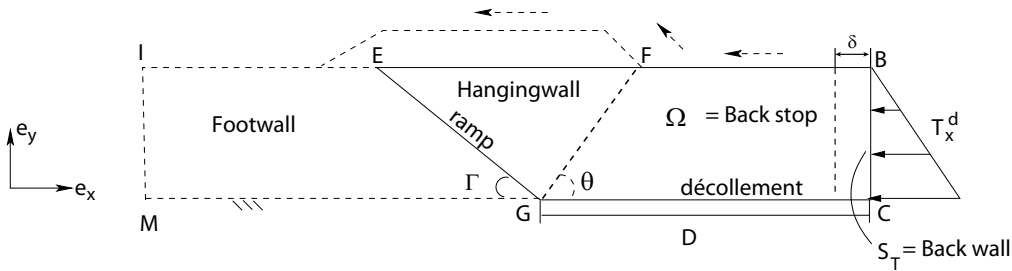


FIG. D.1: Geometry of a fault - bend fold in presence of fast erosion.

Material and geometrical parameters considered for this model are summarized in Table 1.

Definition	Dim.	Value
Length CG	km	4.25
Height BC	km	1.
Angle Γ	deg	30
Bulk friction angle ϕ_B	deg	30.
Bulk cohesion c_B	MPa	1.
Friction angle of décollement ϕ_D	deg	5.
Cohesion of décollement c_D	MPa	0
Friction angle of ramp ϕ_R	deg	variable
Cohesion of ramp c_R	MPa	0
Friction angle of upper flat $\phi_U = \phi_R$	deg	variable

TAB. D.1: Parameters for fault-bend-fold..

D.3 Fault - bend fold with fast erosion treated by EEM

The EEM allows to obtain the lower bound on the tectonic force and optimal stress distribution for a particular folding event during the sequence of thrusting. It is complementary to the kinematics approach. This part presents the formulation on the EEM (Sloan, 2005) and secondly the results obtained with the model of fault-bend fold in presence of fast erosion.

D.3.1 Formulation of the EEM

Each stress component is interpolated linearly from the nodal values σ_I in which the subscript I is the local nodal number (I = 1 to 3) according to the relations :

$$\sigma_{ij} = \sum_{I=1}^3 N^I \sigma_{ij}^I \quad (\text{D.3.1})$$

The optimal stress field is within a set of statically admissible (SA) stress fields which satisfies the three following conditions (Salençon, 2002). First, each element of the discretized domain Ω must respect mechanical equilibrium :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \gamma_x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \gamma_y = 0, \quad (\text{D.3.2})$$

where γ_i is the vector of body forces per unit volume. The second condition concerns discontinuities which cannot be captured with the continuous interpolation. Indeed, the domain Ω is discretized with triangular elements accepting discontinuities on their boundaries (Sloan, 2005).

These discontinuities are composed by two collapsed triangular elements as shown on Figure D.2.

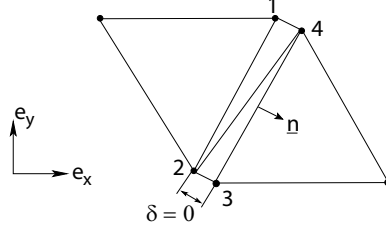


FIG. D.2: Illustration of two collapsed triangular elements.

Krabbenhøft et al. (2005) have shown that the equilibrium conditions for these two collapsed elements are equal to write the jump conditions :

$$\underline{\underline{\sigma}}^3 - \underline{\underline{\sigma}}^2 \cdot \underline{n} = \underline{0} \quad \text{and} \quad \underline{\underline{\sigma}}^4 - \underline{\underline{\sigma}}^1 \cdot \underline{n} = \underline{0} \quad (\text{D.3.3})$$

Thus each pair of nodes on this discontinuity with the apparent distance d is equal to zero imposes two equilibrium equality constraints on the associated nodal stresses. The third equilibrium condition concerns the boundary conditions and is satisfied over every triangular element sharing a side with the boundary ($\partial\Omega$) like the top EB of the fold or the back wall S_T . The relations are given for some node I on $\partial\Omega$ (Sloan, 2005) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n^I \\ \tau^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_x^d(I) \\ T_y^d(I) \end{Bmatrix} \quad (\text{D.3.4})$$

For example, the loading represented on Figure D.1 is zero at the top of the surface and has a linear gradient. Note that the vertical component of the distributed force T_y^d is set to zero in this case. Furthermore, the top at the surface EB is free of stresses implying also a set of constraints. The SA stress field must also remain in the strength convex domain at every point of the domain Ω and along major discontinuities like the ramp or the décollement. The yield condition denoted $G(\underline{\underline{\sigma}})$ must be satisfied at every point inside an element. Thus, the SA stress field does not overcome the strength of the material $G(\underline{\underline{\sigma}})$. Typically, in 2-D, for cohesive and frictional rocks, the Mohr Coulomb criterion is used defined by :

$$G(\underline{\underline{\sigma}}) = \{\underline{\underline{\sigma}} \mid \sigma_e + 2P \sin \phi_B - 2c_B \cos \phi_B \leq 0\}$$

with $\sigma_e = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$, $P = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$. (D.3.5)

in which ϕ_B and c_B are the friction angle and the cohesion of the bulk material, respectively. The main discontinuities like the décollement or the ramp, with a normal vector , have specific properties defined by a particular strength domain :

$$G(\underline{\underline{\sigma}}) = \{ \underline{\underline{\sigma}} \mid \pm \tau + \sigma_n \tan \phi_D - c_D \leq 0 \}.$$

in which ϕ_D and c_D are the friction angle and the cohesion of the discontinuity, respectively. The equilibrium and boundary conditions mentioned above are assembled for the total mesh and thus lead to a set of linear equations for the nodal stresses of the mesh denoted by the equation : $[A] \cdot \{\sigma\}$. The limitation of the strength domain provides a set of linear and non-linear constraints. The objective function of this optimization problem corresponds to the force which is to be maximised. We consider that the resultant force $\underline{Q}$ is defined by :

$$\underline{Q} = \int_S \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \quad (D.3.6)$$

It can be computed using normal and tangential stresses on the edge of an element as shown on Figure D.3. The expression of resultant normal force related to the element E, distributed between the two nodes 1 and 2 becomes :

$$Q_n^E = \frac{L}{2}(\sigma_n^1 + \sigma_n^2) \iff Q_n^E = \{c\}^T \cdot \{\sigma^1 + \sigma^2\} \quad \text{with} \quad \{\sigma^I\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^I \\ \sigma_{yy}^I \\ \sigma_{xy}^I \end{Bmatrix}, I = 1, 2 \quad (D.3.7)$$

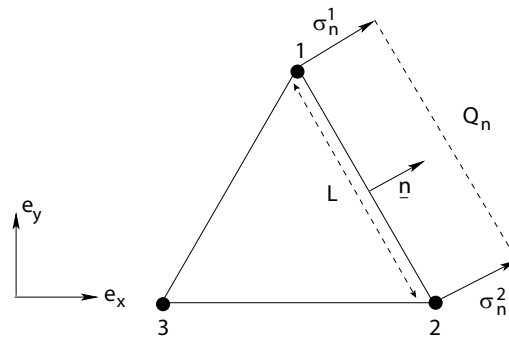


FIG. D.3: Illustration of the objective force for one triangular element.

Consequently, the tectonic force vector is obtained by assembling the objective functions of all elements : $Q = \{c\}^T \cdot \{\sigma\}$ where the vector $\{\sigma\}$ contains all the nodal unknowns and takes into account the element lengths and orientation. Thus the lower bound approach is given by

the following form :

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad Q = \{c\}^T \cdot \{\sigma\} \\
 & \text{subject to} \quad [A] \cdot \{\sigma\} \\
 & \text{and} \quad (G(\sigma) \leq 0, G'(\sigma) \leq 0) .
 \end{aligned} \tag{D.3.8}$$

It is that optimization problem which is set up with the standard finite-element code SARPP (2007) and solved with the commercial package Mosek (2007) throughout the rest of this contribution. The next part presents the results obtained by this optimization method.

D.3.2 Applications

The objective is now to apply the EEM on an example of fault-bend fold having the geometrical parameters presented in Figure D.1 and Table D.1 in presence of fast erosion so the shortening δ is equal to zero. Figure D.4 shows the mesh of the back stop and the hanging wall, with triangular elements described in Figure D.2. This mesh is refined in the area GEF of the hanging wall. The foot wall is considered as external to the studied domain. As mentioned in the first part, each element has a discontinuity on each side. The calculation takes few seconds with the optimization software MOSEK (2007) on a personal computer.

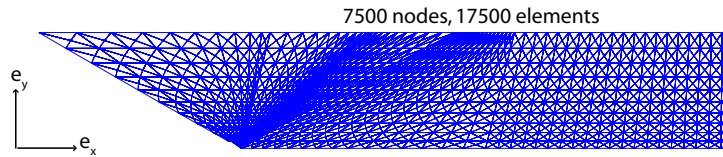


FIG. D.4: Mesh with triangular elements used for the EEM.

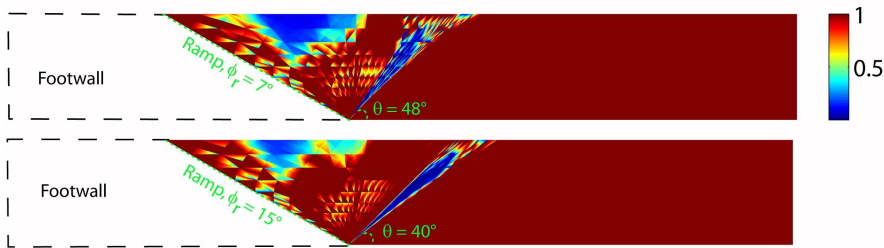


FIG. D.5: Distance to the Coulomb criterion for two values of the ramp friction angle.

The first result presented in Figure D.5 is the failure mode for two values of the ramp friction angle $\phi_r = 7^\circ$ and $\phi_r = 15^\circ$. It is analyzed with the distance to the Coulomb's criterion the scale of which varies from zero to one. If the stress state satisfies exactly the criterion, the scaled distance is equal to zero (blue color). The observed failure mode is a narrow fan called the back thrust, the whole ramp and décollement are fully activated. The dip θ of the back thrust varies with the value of the friction angle of the ramp. The shape of this structure is mesh sensitive but this trend was expected with the kinematics approach (Maillot and Leroy, 2003). The second result presented in Figure D.6 concerns the distribution of principal stresses in the fold. The EEM allows to obtain directly the values of optimal stresses at each node of the mesh. Indeed, the unknowns in this optimal problem are the nodal stresses. The optimal stress field is presented for a ramp friction angle of $\phi_r = 15^\circ$. The principal observation is the region in two lobes emanating from the ramp base. High values of stresses are concentrated in this region.

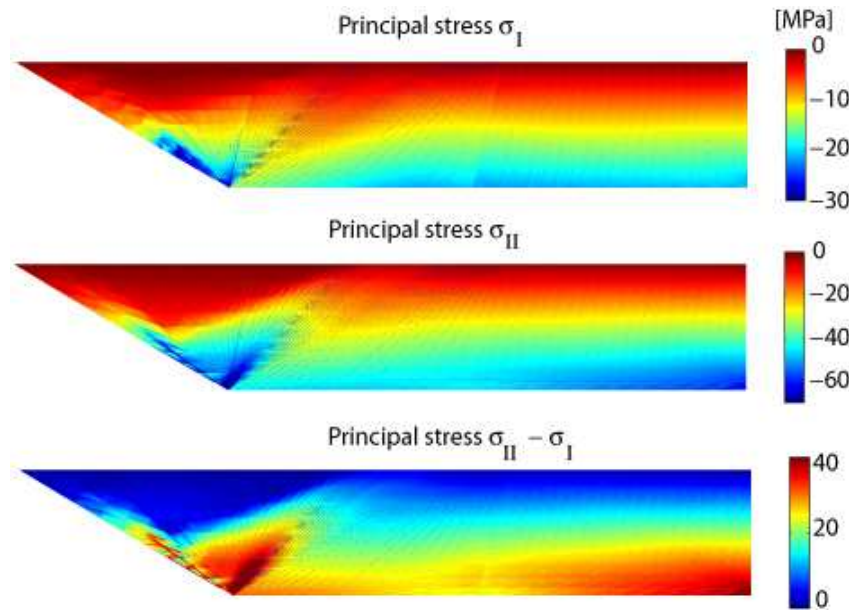


FIG. D.6: Distribution of principal stresses for a ramp friction angle of $\phi_r = 15^\circ$.

Finally the EEM predictions have been compared with the external approach (Cubas et al, 2008) in terms of tectonic force : the value of the upper bound differs from the lower bound by less of one per cent. So the EEM is an efficient method (in terms of computational time) to provide the stress distribution, the shape of the bulk failure and the lower bound on the tectonic force at a step of the folding.

D.4 Fault - bend fold with fast erosion treated by FEM

This part presents the same geometrical problem of the initiation of the fault-bend fold but the numerical method is the FEM. Thus a 2D finite element modeling with GEFDYN (Aubry et al., 1986, Aubry and Modaressi, 1996) is carried out using a classical elasto-plastic Mohr Coulomb model. Figure D.7 shows the two meshes of the fault-bend fold used in this approach.

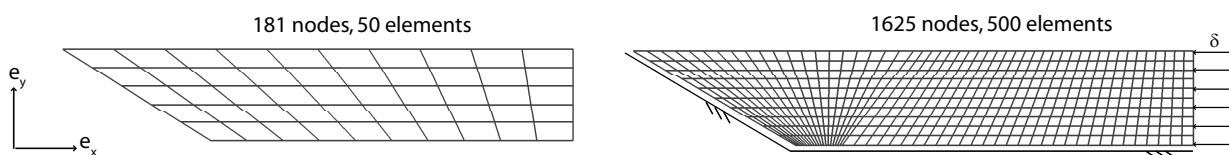


FIG. D.7: Two meshes of the fault-bend fold used for the FEM.

These two meshes are composed by eight-node quadrilateral elements (4 integration points) in the bulk and six-node interface elements on the ramp and the décollement. The interface elements have no thickness. In this first approach, homogeneous displacements are imposed on the back wall S_T . The total displacement is equal to 2 m not to exceed the initiation of the fault-bend fold and to remain in small straining hypothesis. The additional parameter concerns the dilatancy angle (ψ). The results presented in Figure D.8 concern the plasticity in the bulk (red color) similar with the distance to the Coulomb criterion presented in Figure D.5. In each case, the trend of the failure mode is the same as for the previous numerical approach : a region rooting at the base of the ramp. The shape of this back thrust is not a fan but of course it depends on the refinement of the mesh. Consequently, the dip does not change clearly with the ramp friction angle and it remains difficult to measure. Furthermore, in the case of the associated flow rule ($\phi = \psi = 30^\circ$), the bulk failure region is extended close to the surface.

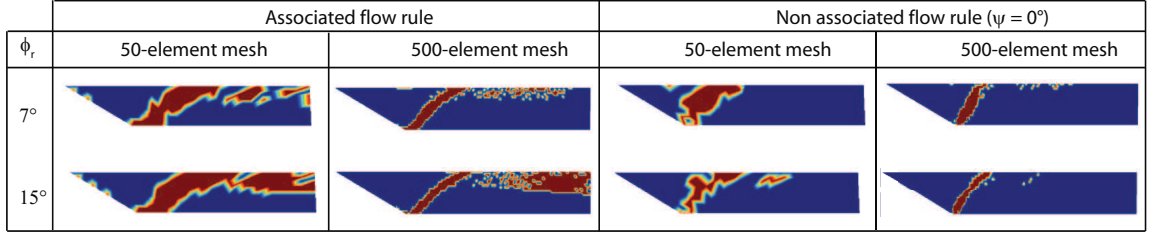


FIG. D.8: Distance to the Coulomb criterion for two meshes and two values of ϕ_r .

Figure D.9 shows the normal stresses on the back wall at the end of the displacement for the fine mesh, with an associated and a non associated flow rule compared to the normal stresses obtained with the EEM, for two cases : $\phi_r = 7^\circ$ and $\phi_r = 15^\circ$.

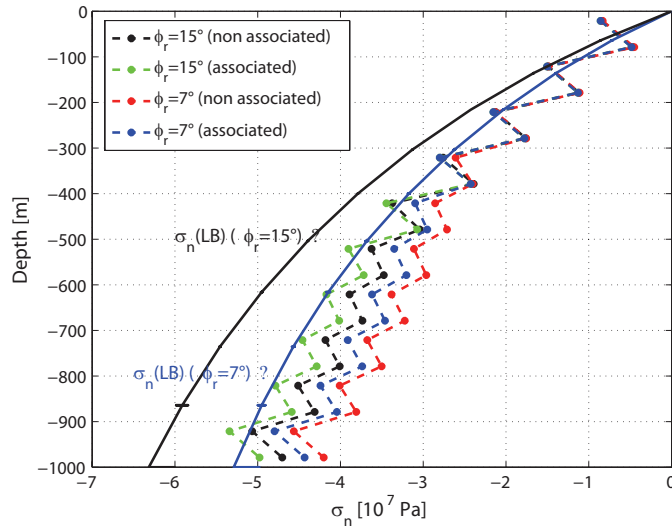


FIG. D.9: Distribution of the normal stress on the back wall.

The values obtained by the FEM are calculated at integration points. The values for an associated flow rule are more important than for a non associated rule. This figure represents also the numerical result of the EEM normal stress distribution. It is not a linear gradient as supposed in the model shown on Figure D.1 but it is equal to zero at the top surface. And globally the FEM values are less important than the EEM values. The principal stress distribution over the fault-bent fold with fast erosion is presented as a third comparative result in Figure D.10. High principal stress values are concentrated in a zone between the décollement and the base of the ramp as observed with the limit analysis. In particular for the third component

$\sigma_{II} - \sigma_I$ with a non associated flow rule, a beginning of two lobes emanating from the ramp base is observed. This distribution is also mesh sensitive. The 500-element mesh allows to approach the EEM distribution shown in Figure D.6 but a refinement would be necessary. Moreover, the computational would be further increased whereas it is already important (several hours on a personal computer).

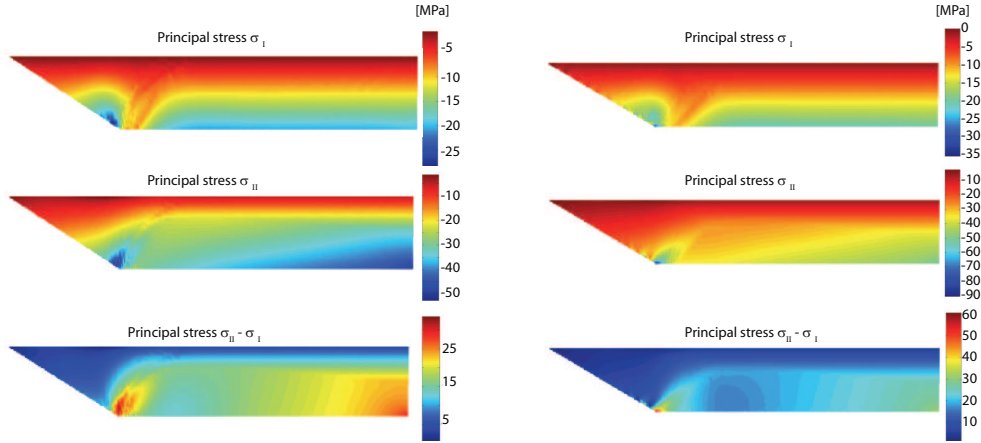


FIG. D.10: Distribution of principal stress (a) with a non associated flow rule, (b) with an associated flow rule for a ramp friction angle : $\phi_r = 15^\circ$ and the 500-element mesh.

The last result presented in Figure D.11 in this part is the variation of the resultant horizontal force on the back wall with the lower bound values obtained by the EEM. These results concern the two meshes with an associated and a non associated flow rule for four values of ramp friction angle : 7° , 10° , 15° and 20° . The FEM results are higher than those obtained by the EEM for an associated flow rule and for ϕ_r from 7° to 15° . The difference varies from 1% to 15%. These variations are due to the mesh and the flow rule. The smaller differences are obtained for a non associated flow rule, approximatively between 1% and 7%. This trend was expected as Salençon (1979) shows it in the example of bearing capacity. No specific trend can be highlighted.

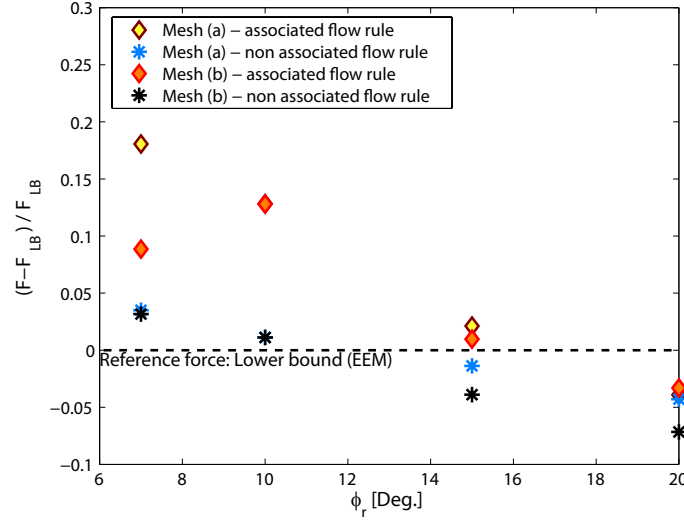


FIG. D.11: Resultant forces values obtained with FEM compared to the lower bound chosen as a reference, for a range of ramp friction angles.

Thus this approach allows to study the initiation of the fault-bend fold in small straining hypothesis. The trend of principal stress distribution and plasticity zone is the same as that obtained with the EEM.

D.5 Conclusion

The objective of this paper is to compare two numerical methods on the development of a fault-bend fold in presence of fast erosion. The internal approach of the limit analysis, named the Equilibrium Element Method, can model complex geometries with major discontinuities like the ramp and the décollement and is a powerful tool for assessing the load carrying capacity in short calculation times. This method is also efficient to obtain the distribution of stresses at nodes directly. This optimal stress field is valid for a step of folding. The evolution of the system is predicted by the kinematic approach (Cubas et al, 2008). In parallel, the finite-element model of the fault-bend fold allows to appreciate the evolution of folding but in computing times much higher. The trend of stress field and plastic zone expected with EEM is validated with the FEM. The influence of the dilatancy coefficient which is not considered in constraints of the EEM is studied with the FEM. This influence is especially important on the value of the tectonic. Moreover, this calculations remain very mesh sensitive. The next calculation will be

D.5. Conclusion

made by imposing tectonic loading in the finite-element models to improve the comparison of two methods.

Annexe E

Étude de la déformation au cours du plissement dans un modèle analogue avec la technique de corrélation d'image haute-résolution

Une des techniques récentes pour analyser les modèles en boîtes de sable est l'utilisation de la méthode de corrélation d'image haute-résolution (Particle Image Velocimetry (PIV)). J'ai testé l'intérêt de cette approche pendant ma thèse lors d'une semaine de travail au laboratoire Geologie-Endogene Dynamik RWTH de Aachen avec Janos Urai. Cette technique requiert des photos de haute résolution de la zone à analyser prises à intervalle de déplacement constant. J'ai donc pu analyser avec le logiciel de PIV les expériences présentées au chapitre 4. Cependant j'ai choisi ici de ne présenter que l'expérience 81. En effet pour cette expérience, l'épaisseur de sable sous le prisme est de 3 cm, elle est donc assez importante pour que les résultats ne soient pas trop bruités. D'autre part, la durée de ce projet n'a pas été assez longue pour mettre en place une démarche scientifique plus poussée. Il s'agissait surtout d'une étude de faisabilité afin de maîtriser le logiciel.

Les expériences sont analysées avec le logiciel DaVis 6.2, produit par LaVision GmgH, Göttingen. Le PIV permet de détecter des mouvements à l'échelle granulaire (Figure E.1a). Les photos sont subdivisées en champs d'investigation (ce qu'on définit comme "la fenêtre d'interrogation" équivalente à une case de la figure E.1a). Ensuite, le logiciel identifie les positions de ces cellules d'investigations sur chaque photo successive grâce à des algorithmes de corrélation statistique ("cross correlation"). Chaque mouvement de grain d'une image à l'autre est un indi-

cateur. Ainsi, la vitesse de chaque particule peut être calculée à partir de la position de chaque cellule à un certain temps t (Figure E.1b). Les rotations sont corrélées à partir des rotations de ces cellules. La taille de la cellule d'investigation communément utilisée est d'environ 20 grains de sable (Nübel, 2002). La résolution spatiale du champ de déplacement dépend de la résolution de l'appareil photo utilisé au cours des expériences et de la précision de l'algorithme de corrélation (Adam, 2005). À partir du champ de vitesse, on peut obtenir également les composantes du tenseur taux de déformation que l'on notera E_{xx} , E_{yy} et E_{xy} . La direction x est parallèle à la direction de raccourcissement et la direction y est perpendiculaire à la direction de raccourcissement.

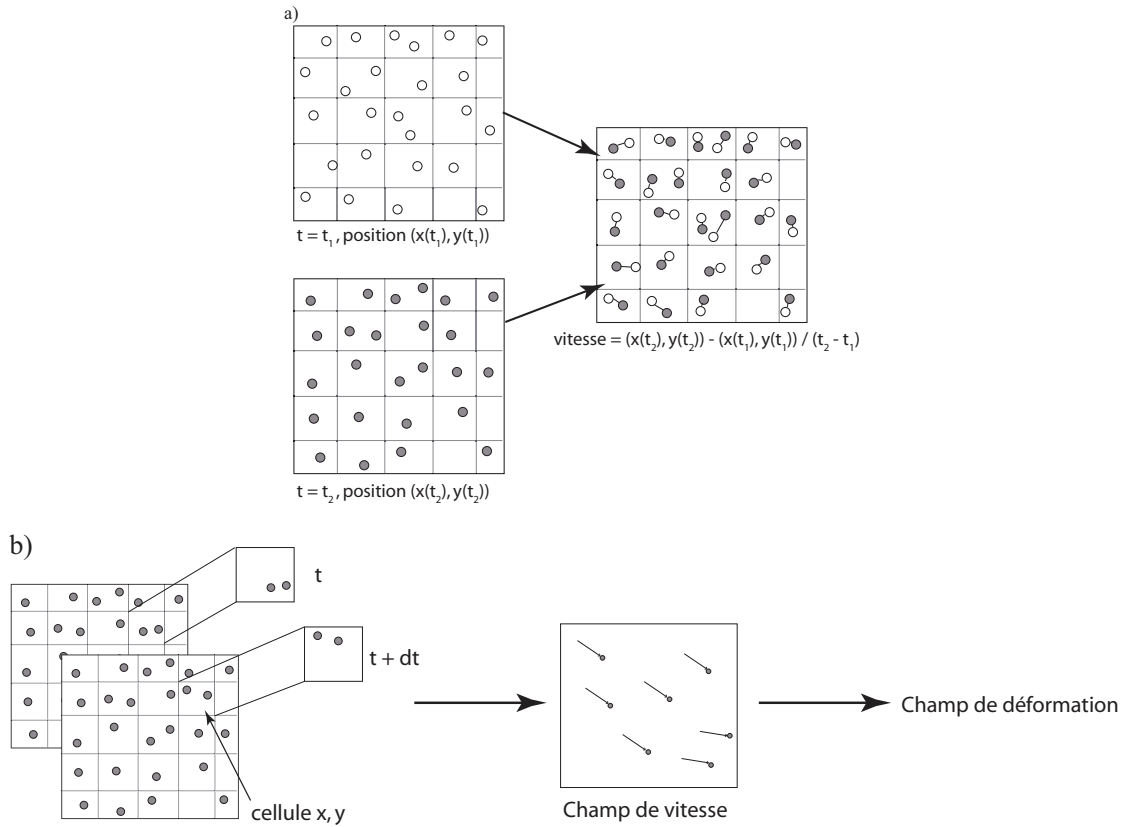


FIG. E.1: Principe de base du Particle Image Velocimetry pour obtenir les champs de vitesse (a) et les champs de taux de déformation (b).

Reprenons la figure 16 du chapitre 4 sur l'enregistrement des forces de l'expérience 81 (Figure E.3).

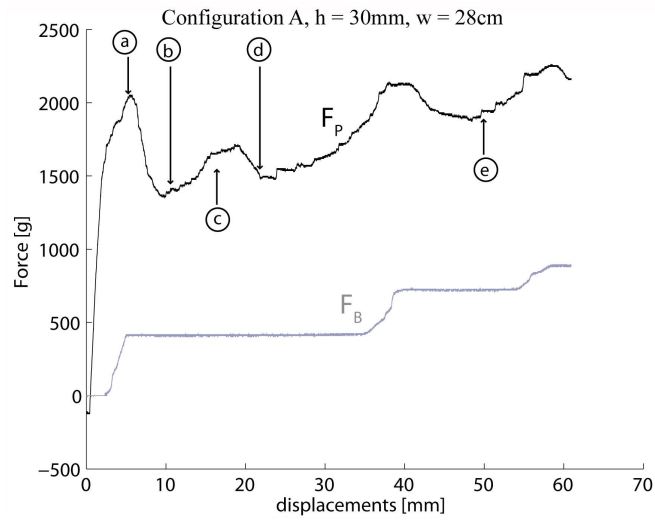


FIG. E.2: Enregistrement des forces pour l'expérience 81.

Les points a, b, c, d et e correspondent à différentes étapes du plissement.

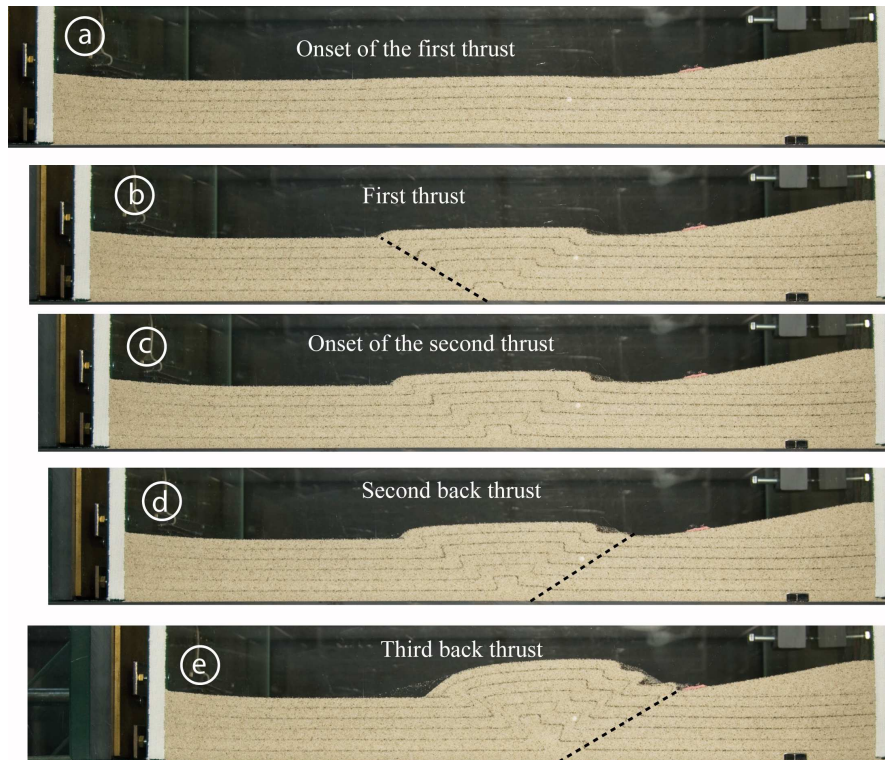


FIG. E.3: Photos latérales des 4 étapes repérées sur l'enregistrement de la force.

La figure E.3 représente une photo de l'expérience à chaque étape. L'étape a correspond au début de la formation du premier système de failles conjuguées pour finir à l'étape b . Un deuxième rétro-chevauchement commence à apparaître à l'étape c. L'activité majeure sur ce deuxième rétro-chevauchement va s'arrêter à l'étape d et un troisième rétro-chevauchement va apparaître, visible à l'étape e. Les maxima de la force enregistrée sur le mur à l'arrière du prisme (F_P) indiquent donc les formations des nouvelles failles tandis que les minimums indiquent la fin de leur formation et le début de la formation de la faille suivante. Les analyses avec le PIV pour ces cinq étapes de raccourcissement sont présentées sur les figures E.4, E.5, E.6, E.7, E.8. Ces figures montrent les composantes du tenseur de déformation notées E_{xx} , E_{yy} et E_{xy} et la partie anti-symétrique du tenseur taux de déformation noté Rot_z . Les composantes E_i sont les valeurs absolues c'est-à-dire que ce sont les valeurs cumulées depuis le début du raccourcissement alors que la quantité Rot_z est relative à chaque pas de raccourcissement.

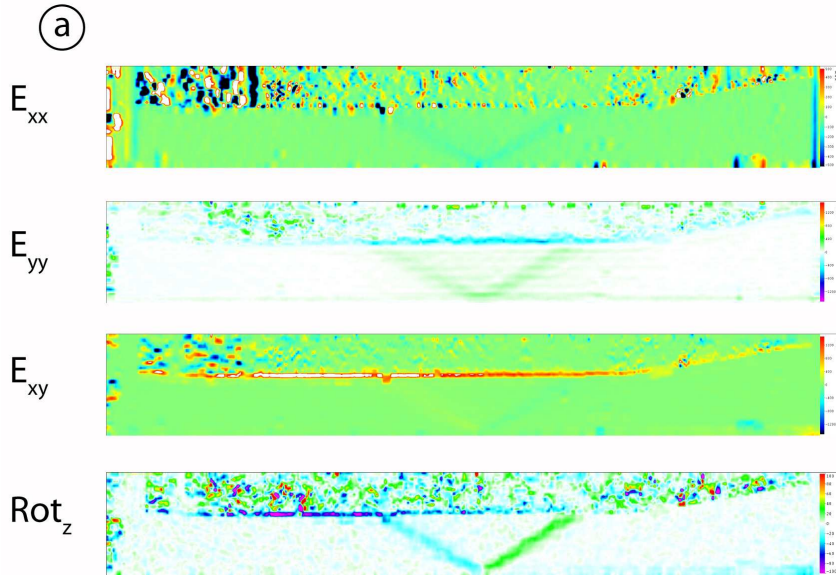


FIG. E.4: Résultats obtenus avec le PIV pour un raccourcissement de 5 mm (point a de la figure E.3).

Au début de l'expérience, à l'étape a, le premier système de faille se localise après un raccourcissement de 5 mm (Figure E.4). Cette localisation est surtout visible sur la rotation. La déformation reste encore diffuse. Cela révèle également que sur les premiers millimètres de raccourcissement (2 à 3 mm), l'augmentation de F_P traduit la déformation élastique des jauges de déformations de la boîte et non la formation de la première faille.

Puis les déformations s'accumulent au fur et à mesure du raccourcissement et sont localisées au niveau des failles formées. A l'étape b (Figure E.5), le premier système de failles s'observe

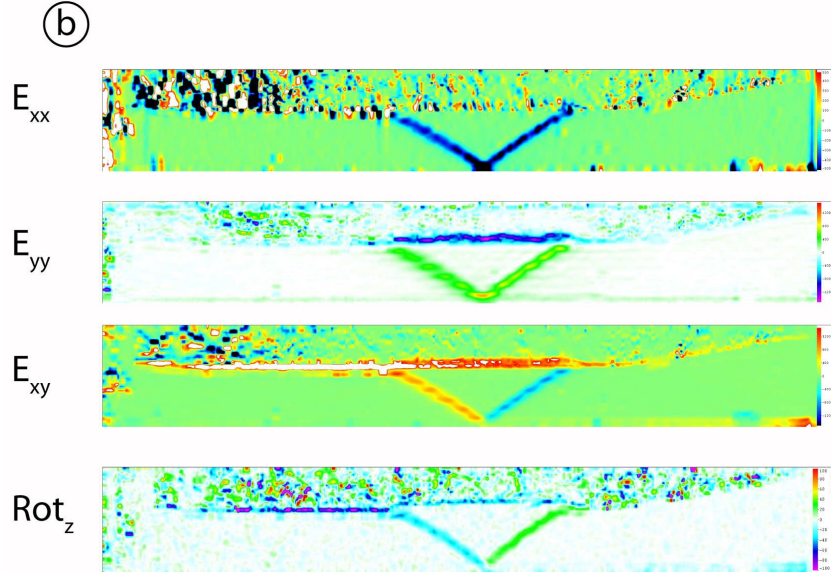


FIG. E.5: Résultats obtenus avec le PIV pour un raccourcissement de 11 mm (point b de la figure E.3).

clairement sur les 3 composantes E_i et sur la composante Rot_z . Les valeurs importantes de déformations et de rotation à la surface du sable et sur toute la partie supérieure des images ne sont pas interprétables. Il s'agit en fait de bruit dû à un biais expérimental. En effet, le résultat aurait été meilleur si nous n'avions pas pris en compte la partie supérieure de la photo qui correspond à la partie supérieure de la boîte, au-dessus du prisme.

A l'étape c (Figure E.6), la rampe est toujours active et le deuxième rétro-chevauchement commence à se localiser. On observe encore très légèrement le premier rétro-chevauchement sur la composante Rot_z , qui a été translaté le long de la rampe.

Enfin les deux dernières figures (Figures E.7 et E.8) correspondant aux étapes d et e représentent les déformations après le deuxième et le troisième rétro-chevauchement. Les concentrations de déformations au niveau du décollement à droite, sous le prisme sont également, comme en surface, assimilables à du bruit.

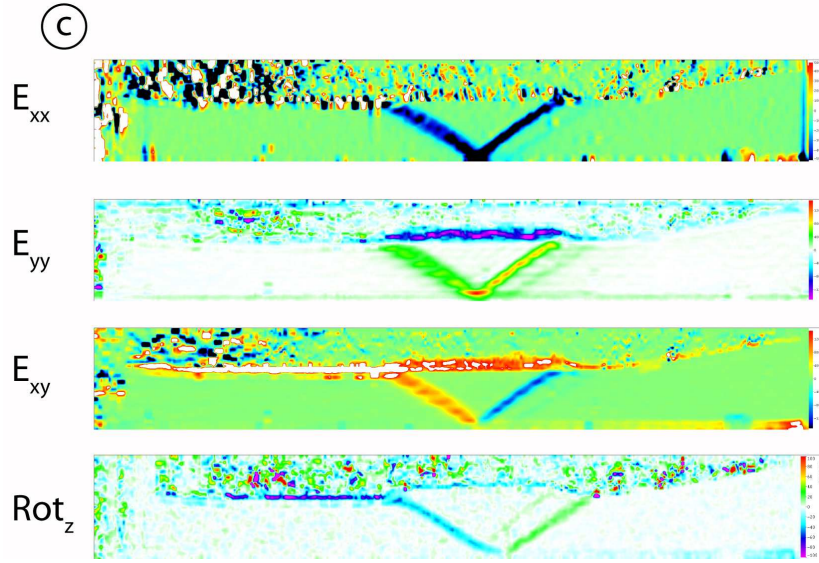


FIG. E.6: Résultats obtenus avec le PIV pour un raccourcissement de 16 mm (point c de la figure E.3).

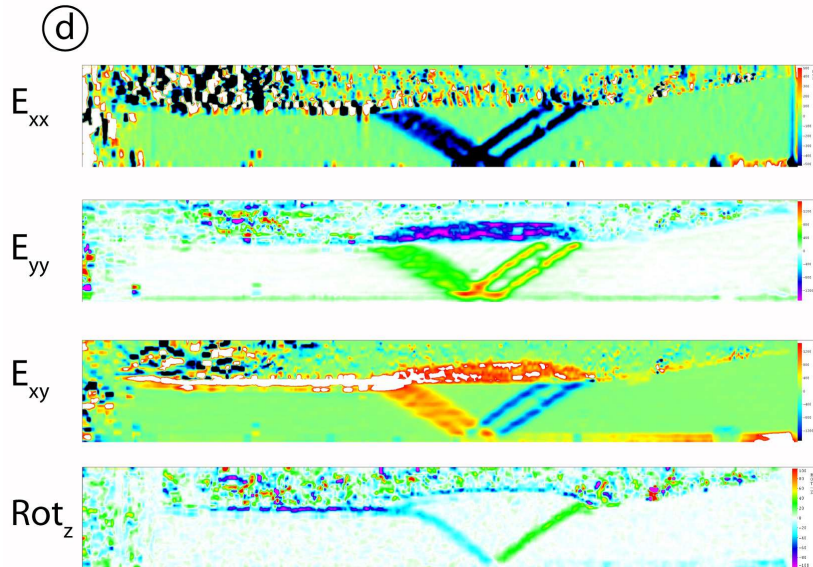


FIG. E.7: Résultats obtenus avec le PIV pour un raccourcissement de 22 mm (point d de la figure E.3).

Avec cette rapide analyse des résultats obtenus avec le PIV comparé à l'évolution de la force enregistrée pendant le raccourcissement, nous avons pu comprendre chaque étape du plissement. On voit très clairement le lien entre la localisation de la déformation en bandes de cisaillement et les variations de la force de poussée. Les perspectives de ce projet sont les suivantes :

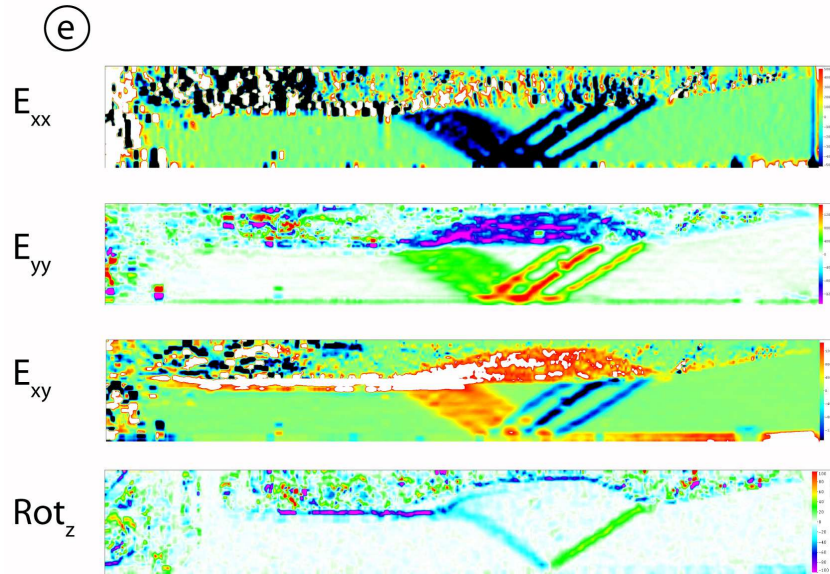


FIG. E.8: Résultats obtenus avec le PIV pour un raccourcissement de 50 mm (point c de la figure E.3).

- Il serait possible de coupler ces résultats avec les distributions de contraintes obtenues avec l'approche interne du calcul à la rupture et obtenir ainsi les lois rhéologiques du matériau analogue. Cependant il faut garder à l'esprit que ces analyses se font à travers la vitre latérale de la boîte de sable où les effets de bords sont importants comme nous l'avons démontré au chapitre 4.
- Une autre perspective serait d'appliquer le PIV avec des photos prises du dessous de la boîte pour avoir les détails mécaniques des transitions de chevauchements lorsque, par exemple, la friction du décollement change latéralement. Il faudrait alors travailler avec une boîte très large pour éviter les effets de bords dus aux frottements sur les murs longitudinaux.

Bibliographie

- Adam J., Urai J.L., Wieneke B., Oncken O., Pfeiffer K., Kukowski N., Lohrmann J., Hoth S., van der Zee W., Schmatz J. (2005), Shear localisation and strain distribution during tectonic faulting - new insights from granular-flow experiments and high-resolution optical image correlation techniques, *Jour. Struct. Geol.*, 27, 2, 283-301.
- Anderheggen, E., and H. Knöpfel (1972), Finite element limit analysis using linear programming, *International Journal of Solids and Structures*, 8, 1413-1431.
- Aubry, D., D. Chouvet, A. Modaressi and H. Modaressi (1986), GEFDYN : Logiciel d'Analyse de Comportement Mécanique des Sols par Eléments Finis avec Prise en Compte du Couplage Sol-Eau-Air, Manuel scientifique, École Centrale Paris, LMSS-Mat.
- Aubry, D., A. Modaressi (1996), GEFDYN, Manuel scientifique. École Centrale Paris : LMSS-Mat.
- Bally A., Gordy P., Stewart G. (1966), Structure, seismic data and orogenic evolution of southern Canadian Rocky Mountains, *Bull. of Can. Petroleum Geol.*, 14, 337-381.
- Barker, D.H. L, Sutherland R., Henrys S., Bannister S. (2009), Geometry of the Hikurangi subduction thrust and upper plate, North Island, New Zealand, *G3*, v. 10, no.2 doi :10.1029/2008GC002153.
- Bell, R., Sutherland R., Barker D., Henrys S., Bannister S., Wallace L., Beavan J. (2009) Seismic Reflection Character of the Hikurangi subduction interface, New Zealand, in the region of repeated Gisborne slow slip events, *Geophysical Journal International*, doi : GJI-09-0110.
- Ben-Tal, A. and Y. Nemirovski (2001), Lectures in Modern Convex Optimization : Analysis, Algorithms and Engineering Applications, MPS-SIAM Series on Optimization.
- Bernard S., Avouac J.-P. Dominguez S., Simoes M. (2007), Kinematics of fault-related folding derived from a sandbox experiment, *Jour. Geophys. Res.*, 112, B3, DOI : 10.1029/2005JB004149.
- Bottero A., Negre R., Pastor J., Turgeman S. (1980), Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 22, 131-140.
- Braun, J. (1994), Three dimensional simulation of crustal-scale wrenching using a non-linear fracture criterion, *Journal of Structural Geology*, v. 16, 1173-1186.
- Burbridge, D. R., Braun, J. (2002), Numerical models of the evolution of accretionary wedges and fold-and-thrust belts using the distinct element method, *Geophysical Journ. Int.*, 148, 542-561.
- Buiter, S.J.H., A.Y. Babeyko, S. Ellis, T.V. Gerya, B.J.P. Kaus, A. Kellner, G. Schreurs and Y. Yamada (2006), The numerical sandbox : comparison of model results for a shortening and an extension experiment, in *Analogue and numerical modelling of crustal-scale processes*, edited by S.J.H. Buiter and G. Schreurs, 29-64, London Geol. Soc. Spec. Publ.

- Buxtorf, A.. (1916), Prognosen und Befunden beim hauensteinbasis und Grenchenbergtunnel und die Bedeutung der letztern für die Geologie des Juragebirges. verhandl. Naturforsch. Gesell. basel XXVII.
- Cadell, H. M. (1888), Experimental researches in mountain building, *Royal Soc. Edinburgh Transactions*, 35, 337-360.
- Callaway, C. (1883), The age of newer gneissic rocks of the northern highlands, *Quat. Journ. Geol. Soc.*, 39, 355-414.
- Cardozo, N. (2008), Topography as a major factor in the development of arcuate thrust belts : insights from sandbox experiments, *Journal of Structural Geology*, v. 30, 327–340.
- Chapple, W.M. (1978), Mechanics of thin-skinned fold-and-thrust belts. *Geol. Soc. Am. Bull.*, 89, 1189-1198.
- Chenchiah, I.V., and K. Bhattacharya (2005), Examples of nonlinear homogenization involving degenerate energies. I. Plane strain, *Proc. R. Soc. A.*, 461, 3681-3703, doi :10.1098/rspa.2005.1515.
- Costa, E., and B.C. Vendeville (2004), Experimental insights on the geometry and kinematics of fold-and-thrust belts above weak, viscous evaporitic décollement : Reply to comments by H. Koyi and James Cotton. *J. Struct. Geol.*, 26, 2139-2143. doi : 10.1016/j.jsg.2004.04.002.
- Cotton, J., and H. Koyi (2000), Modelling of thrusts fronts above ductile and frictional décollements; Examples from the salt range and Potwar plateau, Pakistan.. Geological Society of American Bulletin v. 112, 3, 351–363.
- Coulomb de C. (1773), Mémoire de Mathématiques et de Physique Présentés à l'Académie Royale des Sciences par Divers savants et lus dans les Assemblées, L'imprimerie Royale, 373.
- Cristallini, E. O., and R. W. Allmendinger (2001), Pseudo 3-D modeling of trishear fault-propagation folding, *Journal of Structural Geology*, v. 23, 1883–1899.
- Cubas, N., Y.M. Leroy and B. Maillot (2008), Prediction of thrusting sequences in accretionary wedges, *J. Geophys. Res.*, 113, B12412, doi :10.1029/2008JB005717.
- Cubas, N., B. Maillot and C. Barnes (2008), Statistics of the experimental growth of a sand wedge, submitted for publication.
- Cubas, N. (2009), "Séquences de chevauchement, prédictions mécaniques, validation analogique et application à la chaîne de l'Agrio (Argentine)". Thèse de doctorat, Université Paris XI, 233 p.
- Dahlen, F.A. (1984), Noncohesive critical Coulomb wedges : an exact solution, *J. Geophys. Res.*, 89, B12, 10125-10133.
- Dahlstrom C.D.A. (1969), Balanced cross-sections, *Canadian Journ. of Earth Sci.*, 6, 743-757.
- Davis E.H. (1968), Theories of Plasticity and Failure of Soil Masses In I.K. Lee (ed.), *Soil Mechanics Selected Topics*, Elsevier : New York (USA), 341-354.
- Davis, D., J. Suppe and F.A. Dahlen (1983), Mechanics of Fold-and-Thrust Belts and Accretionary Wedges, *J. Geophys. Res.*, 88, B2, 1153-1172.
- Davis, R. O. and Selvadurai, A. P. S., Selvadurai (2002), *Plasticity and Geomechanics*, Cambridge University Press, 287 p.
- Day, R.A. and D.M. Potts (1994) Zero thickness interface elements - numerical stability and application, *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 18, 689–708.
- Drescher, A., and Detournay E. (1993), Limit load in translational failure mechanisms for associative and non-associative materials, *Géotechnique*, 43, 3, 443-456.
- Drucker, D.C. (1951), A more fundamental approach to stress-strain relations, *Proceedings, 1st US National Congress of Applied Mechanics*, p. 487
- Egholm D.L. (2007), A new strategy for discrete element numerical models : 1. Theory, *Journal of Geophysical Research*, 112, B05203.

- Ellis S., G. Schreurs, M. Panien (2004), Comparisons between analogue and numerical models of thrust wedge development. *Journal of Structural Geology*, 26, 9, 1659-1675.
- Erickson, S.G., and W.R. Jamison (1995), Viscous-plastic finite-element models of fault-bend folds, *J. Struct. Geol.*, 17, 561-573.
- Erickson, S.G., L.M. Strayer and J. Suppe (2001), Initiation and reactivation of faults during movement over thrust-fault ramp : numerical mechanical models, *J. Struct. Geol.*, 23, 11-23.
- Erslev E.A. (1991), Trishear fault-propagation folding, *Geology*, 19, 617-620.
- Fowler J., (1992), *The solid earth - An introduction to global geophysics*, Cambridge University Press, 472 p.
- Goguel, J., (1948), Introduction à l'étude mécanique des déformations de l'écorce terrestre, *Mem. Expl. Carte. Geol. Fr.*, 530 p.
- González, G., Gerbault M., Martinod, J., Cembrano J., Carrizo, D., Allmendinger, R. and J. Espina (2008), Crack formation on top of propagating reverse faults of the Chuculay Fault System, northern Chile : Insights from field data and numerical modelling, *Journal of Structural Geology*, 30, 791-808.
- Gutscher, M. A., N. Kukowski, J. Malavieille and S. Lallemand (1996), Cyclical behavior of thrust wedges : Insights from high basal friction sandbox experiments, *Geology*, 24, 135-138.
- Gutscher, M. A., N. Kukowski, J. Malavieille and S. Lallemand (1998), Episodic imbricated thrusting and underthrusting : Analog experiments and mechanical analysis applied to the Alaskan Accretionary Wedge, *J. Geophys. Res.*, B5, 10, 161-10, 176.
- Hafner, W., (1951), Stress distributions and faulting, *Bulletin of the Geological Society of America*, 62, 373-398.
- Hall J. (1815), On the vertical position and convolution of certain strata, and their relation with granite, *Transactions of the Royal Society*, London, 7, 79-108.
- Hassani, R., I.R. Ionescu and T. Lachand-Robert (2005), Shape Optimization and Supremal Minimization Approaches in Landslides Modeling, *Appl. Math. Optim.*, doi :10.1007/s00245-005-0830-5.
- Hill, R. (1950), *The mathematical theory of plasticity*, Oxford University Press, Oxford.
- Hubert, M. (1951), Mechanical basis for certain familiar geologic structures. *Bulletin of the Geological Society of America*, 62, 355-372.
- Hubbert M.K., Rubey W.W. (1959), Role of fluid pressure in mechanisms of overthrust faulting, I. mechanisms of fluid-filled porous solids and its application to overthrust faulting, *Geol. Soc. Am. Bull.*, 70, 115-166.
- Imber, J., G. W. Tuckwell, C., Childs, J. J., Walsh, T., Manzocchi, A. E., Heath, C.G., Bonson, and J., Stand (2004), Pseudo 3-D modeling of trishear fault-propagation folding, *Journal of Structural Geology*, v. 26, 1897-1911.
- Kelhe, R.O. (1970), Analysis of gravity sliding and orogenic translation, *Bull. Geol. Soc. Am.*, 81, 1641-1664.
- Klinkmüller M., Rosenau M., Boutelier D., Kemnitz H., Schreurs G. (2008), Properties benchmark of granular and viscous analogue materials, extended abstract, *Bollettino di Geofisica*, 49, No. 2 supplement. GeoMod2008 extended abstracts, Firenze, 21-24 September 2008.
- Koyi, H. (1997), Analogue modelling ; From a qualitative to a quantitative technique, a historical outline. *Journal of Petroleum Geology*, 20 (2), 223-238.
- Koyi, H.A., Cotton, J. (2004), Experimental insights on the geometry and kinematics of fold-and-thrust belts above weak, viscous evaporitic décollement ; a discussion, *Journal of Structural Geology*, 26, 2139-2143.
- Koyi, H.A. and B. Maillot (2007), Tectonic thickening of hanging wall units over a ramp, *J. Struct. Geol.*, 29, 924-932.
- Krabbenhøft, K., and L. Damkilde (2003), A general nonlinear optimization algorithm for lower bound

limit analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, 165–184.

Krabbenhøft, K., A.V. Lyamin, M. Hjiaj, and S.W. Sloan (2005) A new discontinuous upper bound limit analysis formulation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 63, 1069–1088.

Krabbenhøft, K., Lyamin, A.V., and S. W. Sloan (2007), Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs, *International Journal of Solids and Structures*, 44, 1533–1549.

Krabbenhøft, K., Lyamin, A. V. and S. W. Sloan (2008) Three-dimensional Mohr-Coulomb limit analysis using semidefinite programming, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24, 1107–1119.

Krantz, R.W. (1991), Measurements of friction coefficients and cohesion for faulting and fault reactivation in laboratory models using sand and sand mixtures, *Tectonophysics*, 188, 203–207.

Lallemant, S.E., P. Schnürle and J. Malavieille (1994), Coulomb theory applied to accretionary and nonaccretionary wedges : Possible causes for tectonic erosion and/or frontal accretion, *J. Geophys. Res.*, 99, B6, 12, 033–12, 055.

Lehner, F.K. (1986), Comments on "Noncohesive Critical Coulomb Wedges : An Exact Solution", *J. Geophys. Res.*, 91, B1, 793–796.

Leroy, Y.M. and N. Triantafyllidis N. (2000), Folding and localized faulting in a frictional, cohesive overburden resting over a viscous substratum, in *Aspects of Tectonic Faulting*, edited by F.K. Lehner and J.L. Urai, Springer-Verlag, Heidelberg, p. 109–139.

Le Pichon, X., P. Henry and S. Lallemant (1993), Accretion and erosion in subduction zones : the role of fluids, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 21, 307–331.

Lohrmann, J., N. Kukowski, J. Adam and O. Oncken (2003), The impact of analogue material properties on the geometry, kinematics, and dynamics of convergent sand wedges, *J. Struct. Geology*, 25, 1691–1711.

Lyamin, A. V., and S. W. Sloan (2002), Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26, 181–216.

Lysmer J. (1970), Limit analysis of plane problems in solid mechanics, *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 96, 1311–1334.

McTigue, D.F. and C.C. Mei (1981), Gravity-induced stresses near topography of small slope, *J. Geophys. Res.*, 86, B10, 9268–9278.

Macedo, J., and Marshak, S. (1999), Controls on the geometry of fold-thrust belt salients, *GSA Bulletin*, v. 111, no. 12, p1808–1822.

Maier G., Zavelani-Rossi A., Benedetti D. (1972), A finite element approach to optimal design of plastic structures in plane stress, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4, 455–473.

Maillot, B. (2009), Sand distributor, in prep.

Maillot, B. and Y.M. Leroy (2003), Optimal dip based on dissipation of back thrusts and hinges in fold-and-thrust belts, *J. Geophys. Res.*, 108, B6, 2320–2336.

Maillot, B. and H. Koyi (2006), Thrust dip and thrust refraction in fault-bend folds : analogue models and theoretical predictions, *J. Struct. Geology*, 28, 36–49.

Maillot, B. and Y.M. Leroy (2006), Kink-fold onset and development based on the maximum strength theorem, *J. Mech. Phys. Solids*, 54, 2030–2059.

Maillot, B., C. Barnes, J.-M. Mengus and J.-M. Daniel (2007), Constraints on friction coefficients by an inverse analysis of sand box thrust dips, *J. Struct. Geology*, 29, 117–128.

Malavieille J (1984), Modélisation expérimentale des chevauchements imbriqués ; application aux chaînes de montagnes, *Bull. Soc. Géol. Fr.*, 26, 129–138.

Mandl, G., de Jong, L.N., Maltha, A. (1977), Shear zones in granular material, *Rock Mechanics*, 9, 95–144.

- Marques, F. O., and P.R. Cobbold (2002), Topography as a major factor in the development of arcuate thrust belts : insights from sandbox experiments, *Tectonophysics*, 448, 247–268.
- Marquez F.O., Cobbold P.R. (2006), Effects of topography on the curvature of fold-and-thrust belts during shortening of a 2-layer model of continental lithosphere, *Tectonophysics*, 415, 65–80.
- Marshak, S., and M. S. Wilkerson (1992), Effects of overburden thickness on thrust belt geometry development, *Tectonics*, v. 11, no. 3, 560–566.
- Martinez, A., Malavielle, J., Lallemand, S., and Collot, J.Y. (2002), Strain partitioning in an accretionary wedge, in oblique convergence : analogue modelling Bulletin de la Société Géologique de France, 173, 17–24
- Mercier J. , Vergely P. et Auboin J. (1992), *Tectonique*, Dunod.
- Merle, O., and N. Abidi (1995), Approche expérimentale du fonctionnement des rampes émergentes. Bulletin de la Socit géologique de France 166, 5, 439–450.
- Moore, G.F., D.E. Karig, T.H. Shipley, A. Taira, P.L. Stoffa and W.T. Wood (1991), Strutural framework of the ODP leg 131 area, Nankai through, (1991), *Proceedings of the Ocean Drilling Program, Initial reports*, 131, 15–20.
- Moore, G.F., A. Taira , A. Klaus, L. Becker, B. Boeckel, B. A. Cragg, A. Dean, C.L. Ferguson, P. Henry, S. Hirano, T. Hisamitsu, S. Hunze, M. Kastner, A.J. Maltman, J.K. Morgan, Y. Murakami, M.D. Saffer, M. Sanchez-Gomez, E.J. Screaton, D.C. Smith, A.J. Spivack, J. Steurer, H.J. Tobin, K. Ujiie, M.B. Underwood and M. Wilson (2001) New insights into deformation and fluid flow processes in the Nankai Trough accretionary prism : results of ocean drilling program leg 190, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 2, 10.129/2001GC000166.
- Morgan, J.K., and D.E. Karig (1994), Kinematics and a balanced and restored cross-subsection across the toe of the eastern Nankai accretionary prism, *J. Struct. Geology*, 17, 31–45.
- MOSEK (2008), version 5, optimization software, <<http://www.mosek.com>>.
- Mourgues, R., and P.R. Cobbold (2003), Some tectonic consequences of fluid overpressures and seepage forces as demonstrated by sandbox modelling, *Tectonophysics*, 376, 75–97.
- Mulugeta, G. (1988), Modelling the geometry of Coulomb thrust wedges, *J. Struct. Geology*, 10, 847–859.
- Mulugeta, G. and H. Koyi (1992), Episodic accretion and strain partitioning in a model sand wedge, *Tectonophysics*, 202, 319–333.
- Naylor, M., H.D. Sinclair, S. Willett and P.A. Cowie (2005), A discrete element model for orogenesis and accretionary wedges growth, *J. Geophys. Res.*, 110, B12403, doi :10.1029/2003JB002940.
- Nübel K., Weitbrecht V., (2002), Visualization of Localization in Grain Skeletons with Particle Image Velocimetry, ASTM, *Journal of Testing and Evaluation*, 30, 4, 322–328
- Odé, H. (1960), Faulting as a velocity discontinuity in plastic deformation. In : Rock deformation, edited by D. Griggs and j. Handin, *Geol. Soc. Am. Memoire* 79, 293–321.
- Ortiz, M., Y. Leroy and A. Needleman (1987), A finite element method for localized failure analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61, 189–214.
- Olsen, K., R. Madariaga and R. Archuleta (1997), Three dimensional dynamic simulation of the 1992 Landers earthquake, *Science*, 278, 834–838.
- Panian, J. and W. Pilant (1990), A Possible Explanation for Foreland Thrust Propagation, *J. Geophys. Res.*, 95, B6, 8607–8615.
- Panien M., Schreurs G., Pfiffner A. (2006), Mechanical behaviour of granular materials used in analogue modelling : insights from grain characterisation,

ring-shear tests and analogue experiments. *Journal of Structural Geology*, 28, Issue 9, 1710–1724.

Pastor, J. (1978), Limit analysis : numerical determination of complete statical solutions. Application to the vertical cut, (in French) *Journal de Mécanique appliquée*, 2, 168–196.

Pastor, J. (2006), Personal communication.

Pastor, F., Ph. Thore, E. Loute, J. Pastor, M. Trillat (2008), Convex optimization and limit analysis : Application to Gurson and porous Drucker-Prager materials, *Eng. Fracture Mech.*, 75, 1367–1383.

Peach, B. N. et Horne, J. (1884), Report on the geology of the north-west of Scotland. *Nature*, London 31, 31–35.

Peltzer, G., P. Rosen, F. Rogez and K. Hudnut (1996), Postseismic rebound in fault step-overs caused by pore fluid flow, *Science*, 272, 1202–1204.

Pubellier M. and Cobbold P.R. (1996), Analogue models for the tanspressional docking of volcanic arcs in the Western Pacific, *Tectonophysics* 253, 33–52

Reade, T.M. (1908), The mechanics of overthrusts, *Geol. Mag.*, 5, 518.

Rich J.L. (1934), Mechanics of low-angle overthrust faulting illustrated by Cumberland thrust block, Virginia, Kentucky and Tennessee, *The american association of petroleum geologists bulletin*, 18, 12, 1584–1596.

Rudnicki, J.W. and J.R. Rice (1975), Condition for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 23, 371–394.

Salençon, J. (1974), *Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols*, edited by Eyrolles, Paris, (English translation : *Applications of the theory of plasticity in soil mechanics*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1977).

Salençon, J. (2002), *De l'élasto-plasticité au calcul à la rupture*, Editions École Polytechnique, Palaiseau, and Ellipses, Paris.

Saltzer S.D. (1992), Boundary-conditions in sand-box models of crustal extension - an analysis using distinct elements. *Tectonophysics*, 215, 3–4, 349–362.

SARPP (2007), Structural Analysis and Rock Physics Program, Ecole Normale Supérieure, Paris.

Sciamanna, S., W. Sassi, R. Gambini, J.L. Rudkiewicz, F. Mosca and C. Nicolai (2004), Predicting hydrocarbon generation and expulsion in the Southern Apennines Thrust Belt by 2D Integrated Structural and Geochemical Modeling : Part I - Structural and thermal evolution, in *Deformation, fluid flow, and reservoir appraisal in foreland fold and thrust belts*, edited by R. Swennen, F. Roure, J.W. Granath, 51–67, A.A.P.G. Heldberg series, 1.

Schreurs, G., S.J.H. Buiter, D. Boutelier, G. Corti, E. Costa, A.R. Cruden, J.-M. Daniel, S. Hoth, H.A. Koyi, N. Kukowski, J. Lohrmann, A. Ravaglia, R.W. Schlische, M. Oliver Withjack, Y. Yamada, C. Cavozzi, C. Delventisette, J.A. Elder Brady, A. Hoffmann-Rothe, J.M. Mengus, D. Montanari, F. Nilforoushan (2006), Analogue benchmarks of shortening and extension experiments, in *Analogue and numerical modelling of crustal-scale processes*, edited by S.J.H. Buiter and G. Schreurs, 1–27, London Geol. Soc. Spec. Publ.

Sloan, S. W. (1989), Upper bound Limit Analysis using Finite Elements and Linear Programming, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 13, 263–282.

Sloan, S.W. and P.W. Kleeman (1995), Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 127, p. 293–314.

Sloan S.W. 2005. Finite element limit analysis in geomechanics, *Proc. 9th Int. Conf. of IACMAG*, Torino (Italia), 141–160.

Smolukowsky, M. S. (1909), Some remarks on the mechanics of overthrusts, *Geological Magazine*, 6, 203–205.

Souloumiac, P. and A. Modaressi (2008), Comparison between Finite Element Method and Equilibrium Element Method to predict stress field in fault-bend

folds, 12th International Conference of the International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG), Goa, India.

Souloumiac, P., Y.M. Leroy, K. Krabbenhøft K. et B. Maillot (2009), Predicting stress in fold-and-thrust belt and in accretionary wedges by optimization, in press.

Souloumiac P, K. Krabbenhøft K., Y.M. Leroy et B. Maillot (2009), Failure in accretionary wedges with the maximum strength theorem : numerical algorithm and 2D validation., in prep.

Souloumiac P, K. Krabbenhøft K., Y.M. Leroy et B. Maillot (2009), Failure in accretionary wedges with the maximum strength theorem : 3D applications, in prep.

Souloumiac, P. (2009), Mécanismes 3D de ruine en géologie structurale : applications numérique et analogique, *Thèse de Doctorat*, École Centrale de Paris, en préparation.

Strayer L.M., Hudleston P.J. (1997), Numerical modelling of fold initiation at thrust ramp, *Journ. Struct. Geol.*, 19, 551-566.

Suppe, J. (1983), Geometry and kinematics of fault-bend folding, *Am. J. Sci.*, 283, 7, 684-721.

Timoshenko, S.P. and J.N. Goodier (1934), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill.

Turcotte D. L. et Schubert G. (2002), *Geodynamics*, Cambridge University Press.

Vendeville, B.C. (2007), The 3-D Nature of Stress Fields in Physical Experiments and its Impact on Models Overall Evolution. Solicited oral contribution, EGU General Assembly, Vienna, 15-20 April, 2007.

Wibberley, C. A. J. (1997), Three-dimensional geometry, strain rates and basement deformation mechanisms of thrust-bend folding, *Journal of Structural Geology*, v. 19, no. 3-4, 535-550.

Yin, A. (1993), Mechanics of Wedge-Shaped Fault blocks 1. An Elastic Solution for Compressional Wedges, *J. Geophys. Res.*, 98, B8, 14, 245-14, 256.

Zoetemeijer, R. and W. Sassi (1992), 2D reconstruction of thrust evolution using the fault-bend fold method, in *Thrust tectonics*, edited by K. McClay, 133-140, London Geol. Soc. Spec. Publ.

www.cabri.net (pour la puissance d'un point par rapport à un cercle).