



# Modélisation électromagnétique de structures périodiques et matériaux artificiels : application à la conception d'un radôme passe-bande

Samuel Nosal

## ► To cite this version:

Samuel Nosal. Modélisation électromagnétique de structures périodiques et matériaux artificiels : application à la conception d'un radôme passe-bande. Autre. Ecole Centrale Paris, 2009. Français. NNT : 2009ECAP0030 . tel-00453320

**HAL Id: tel-00453320**

**<https://theses.hal.science/tel-00453320>**

Submitted on 4 Feb 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée par

**Samuel NOSAL**

pour l'obtention du

**GRADE de DOCTEUR**

**Formation doctorale : Physique**

**Laboratoire d'accueil : Laboratoire d'Énergétique Moléculaire et Macroscopique,  
Combustion (EM2C) du CNRS et de l'ECP**

## **Modélisation électromagnétique de structures périodiques et matériaux artificiels Application à la conception d'un radôme passe-bande**

**Soutenue le 30 septembre 2009**

**Composition du jury :**

|     |                 |              |                             |
|-----|-----------------|--------------|-----------------------------|
| MM. | MAYSTRE         | Daniel       | <i>Président</i>            |
|     | BAIDA           | Fadi         | <i>Rapporteur</i>           |
|     | BENDALI         | Abderrahmane | <i>Rapporteur</i>           |
|     | GREFFET         | Jean-Jacques | <i>Directeur de thèse</i>   |
|     | SOUDAIS         | Paul         | <i>Codirecteur de thèse</i> |
|     | ABBOUD          | Toufic       | <i>Examineur</i>            |
| Mme | BONNET-BEN DHIA | Anne-Sophie  | <i>Invitée</i>              |
| M.  | MASCLET         | Philippe     | <i>Invité</i>               |



# Remerciements

Ces trois années de thèse me laisseront un excellent souvenir. Les personnes de grande qualité que j’ai eu l’honneur de côtoyer, y sont très certainement pour quelque chose...

Ainsi, je souhaite tout d’abord remercier très vivement Jean-Jacques Greffet et Paul Soudais, mes directeurs de thèse.

Paul Soudais m’a suivi quotidiennement, alors que je travaillais dans les locaux de Dassault Aviation, à Saint-Cloud. Il a été le témoin de ma vie de thésard : des périodes d’action, de motivation, de stress aussi, et enfin de doute. J’ai beaucoup appris à ses côtés ; c’est quelqu’un de grande qualité dont le pragmatisme a plus d’une fois permis de canaliser mes élans “lyriques”. Merci Paul !

Jean-Jacques Greffet a toujours suivi de près et avec beaucoup d’intérêt l’évolution de mes travaux. Ses conseils avisés, ainsi que sa (très) grande culture scientifique, ont, à bien des reprises, été précieux pour ma recherche. Je suis particulièrement honoré d’avoir été son thésard. Merci Jean-Jacques !

Fadi Baida et Abderrahmane Bendali m’ont fait l’honneur de rapporter sur ma thèse et je leur en suis très reconnaissant. Je remercie aussi Toufic Abboud, Daniel Maystre, Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Philippe Masclet d’avoir accepté de faire partie du jury. Enfin, merci à Juan Mosig d’avoir accepté de faire partie du jury, même si, pour des raisons d’agenda, sa venue n’a finalement pas été possible.

Je tiens aussi à remercier les personnes du département EMIR de Dassault Aviation, qui m’ont accueilli les bras ouverts. Ma gratitude va tout naturellement à Gérard Leflour et Jean-Claude Verneuil, chef et chef-adjoint, d’avoir accepté que je travaille au sein de leur équipe. Je remercie bien-sûr et tout particulièrement Quentin Carayol, Hervé Stève, Nicolas Vukadinovic, Olivier Calvo-Perez et Maguelone Justy : j’ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec vous.

Je pense aussi aux thésards que j’ai pu côtoyer au cours de ces trois années. Merci à Franciszka Dembinska, Jonathan Chetboun, Ludovic Martin, Pierre-Elie Normand et à tous les stagiaires que j’ai croisés. Les pauses café furent toujours un bon moment de l’après-midi, tout comme les repas et les séances d’escalade.

Je tiens aussi à remercier Marine Laroche et François Marquier pour l’aide qu’ils m’ont apportée lorsque j’en ai eu besoin.

Je remercie également Pascale Thiébaut pour la réflexion qu’elle m’a aidé à mener dans le cadre du “nouveau chapitre de la thèse”, proposé par l’Association Bernard Grégory.

L’équipe de l’Ecole Doctorale de l’Ecole Centrale mérite également que je les remercie. Leur efficacité toujours égale et leur bonne humeur constante rendent la vie si simple...

Pour finir, je tiens à remercier mes parents, ma famille et tous mes amis, sans qui je ne serais pas devenu ce que je suis, et pour les encouragements qu’ils m’ont apportés lors de ma thèse.



# Abstract

Frequency selective surfaces (FSS) for radar stealth or in optics have been widely studied. For more than two decades, artificial materials have been designed to highlight specific behaviour, like the existence of allowed or forbidden bands, negative refraction, ultra-refraction... Moreover, antennas based upon an array of radiating elements improve the compactness and integration of these features.

The problem of the diffraction of a plane wave by 3D bi-periodic scatterers can be solved by finite-elements methods (FEM) or bi-periodic boundary integral equations (BIE). It is often done by hybrid methods, that combine FEM and BIE.

We choose to develop a hybrid method that uses two variants of the BIE method. Semi-infinite outer domains are treated by bi-periodic integral equations (3D2D IE) and inner bounded domains are treated by 3D free-space integral equations (3D IE). Pseudoperiodic boundary conditions are enforced in the scattering bi-periodic structure. The numerical code is developed in the framework of Dassault Aviation's SPECTRE code, which is a general 3D code, in order to take advantage of the various models that have already been developed : arbitrary number of sub-domains of various shapes or materials, treatment of the different types of junctions between sub-domains, thin slabs.

The efficiency in terms of accuracy and computation time of the numerical code is validated by comparison of the results from other numerical simulations or measurements. All the test cases are representative of several of the main phenomena that can be observed in metamaterials : FSS, "extraordinary" transmission, high-impedance surfaces.

Finally, a bandpass radome which is independent to the angle of incidence is studied. The proposed numerical method is used. The chosen structure is based upon an array of coaxial cavities in a metallic slab. We explain the physical origin of resonances that appear and we suggest a geometrical evolution of the profile of the cavities, to favor a wideband behavior.

**Keywords :** bi-periodic structures, integral equations, metamaterials, frequency selective surfaces (FSS).



# Résumé

Les surfaces sélectives en fréquence (FSS) pour la furtivité radar ou l'optique ont été largement étudiées. Depuis plus de vingt ans, des matériaux artificiels ont été conçus, permettant d'obtenir des propriétés particulières, notamment l'existence de bandes permises ou interdites, réfraction négative, ultra-réfraction. Par ailleurs, des antennes basées sur la mise en réseau d'un élément rayonnant sont plus compactes et plus facilement intégrables.

Le problème de la diffraction d'une onde plane par des réseaux tridimensionnels bipériodiques peut être résolu par éléments finis ou par équations intégrales bipériodiques ; il l'est souvent par une méthode hybride combinant la méthode des éléments finis et la méthode aux équations intégrales.

Nous avons choisi de développer une méthode hybride utilisant deux variantes de la méthode aux équations intégrales. Les domaines semi-infinis (l'extérieur du réseau) sont traités par des équations intégrales bipériodiques (EI3D2D), et les domaines bornés (l'intérieur du réseau) sont traités par des équations intégrales tridimensionnelles (EI3D), auxquelles on impose des conditions aux limites de pseudopériodicité. Ce code numérique est développé dans le cadre du code SPECTRE de Dassault-Aviation, qui est un code généraliste 3D, afin de bénéficier de la richesse des modèles qui y ont déjà été développés (modèle composé d'un nombre quelconque de sous-domaines de formes et de matériaux quelconques, traitement des différents cas de jonctions entre sous-domaines, matériaux de faible épaisseur).

L'efficacité en termes de précision et en temps de calcul de la méthode numérique est validée par comparaison des résultats avec d'autres simulations numériques et également avec des résultats de mesures. Les cas testés sont représentatifs de plusieurs des principaux phénomènes liés aux métamatériaux : surfaces sélectives en fréquence, transmission « extraordinaire », surfaces à haute impédance.

Enfin, nous étudions un radôme passe-bande indépendant à l'angle d'incidence, à l'aide de la méthode numérique que nous proposons. La structure retenue se base sur un réseau de cavités coaxiales dans une couche métallique. Nous expliquons l'origine physique des résonances qui apparaissent et nous suggérons une évolution géométrique du profil des cavités, afin d'augmenter la largeur de bande passante.

**Mots-clefs :** structures bipériodiques, équations intégrales, métamatériaux, surfaces sélectives en fréquence (FSS).



# Table des matières

|                                                                                                 |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>                                                                             | <b>1</b>  |
| <b>1 Réseau bipériodique</b>                                                                    | <b>5</b>  |
| 1.1 Introduction . . . . .                                                                      | 6         |
| 1.2 Problème-type . . . . .                                                                     | 7         |
| 1.2.1 Réseau bipériodique . . . . .                                                             | 7         |
| 1.2.2 Problème pseudopériodique . . . . .                                                       | 11        |
| 1.3 Modes de réseau . . . . .                                                                   | 12        |
| 1.3.1 Décomposition du champ diffracté en somme de modes de Floquet-Bloch . . . . .             | 12        |
| 1.3.2 Modes montants, modes descendants . . . . .                                               | 13        |
| 1.3.3 Définition des modes de Floquet-Bloch . . . . .                                           | 15        |
| 1.3.4 Apparition des modes propagatifs . . . . .                                                | 17        |
| 1.3.5 Utilisation des modes de Floquet-Bloch pour caractériser un réseau bipériodique . . . . . | 18        |
| <b>2 Coefficients de réflexion et de transmission</b>                                           | <b>19</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .                                                                      | 20        |
| 2.2 Définition de la matrice de scattering . . . . .                                            | 20        |
| 2.2.1 Cas simple . . . . .                                                                      | 20        |
| 2.2.2 Cas général . . . . .                                                                     | 24        |
| 2.3 Empilement de matrices S . . . . .                                                          | 26        |
| 2.4 Calcul des coefficients de la matrice S . . . . .                                           | 27        |
| 2.5 Conservation de l'énergie . . . . .                                                         | 29        |
| 2.6 Conclusion . . . . .                                                                        | 33        |
| <b>3 État de l'art sur les méthodes numériques</b>                                              | <b>35</b> |
| 3.1 Introduction . . . . .                                                                      | 36        |
| 3.2 Méthodes modales . . . . .                                                                  | 36        |
| 3.3 Différences finies et éléments finis bipériodiques . . . . .                                | 39        |
| 3.3.1 La méthode des différences finies . . . . .                                               | 39        |
| 3.3.2 La méthode des éléments finis . . . . .                                                   | 40        |
| 3.4 Équations intégrales bipériodiques . . . . .                                                | 42        |
| 3.5 Méthodes hybrides . . . . .                                                                 | 44        |
| <b>4 Les équations intégrales bipériodiques</b>                                                 | <b>47</b> |
| 4.1 Introduction . . . . .                                                                      | 48        |
| 4.2 Formalisme intégral multidomaine en électromagnétisme . . . . .                             | 49        |

|          |                                                                                       |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.2.1    | Les équations intégrales EFIE et MFIE . . . . .                                       | 49        |
| 4.2.2    | La formulation multidomaine PMCHWT . . . . .                                          | 51        |
| 4.2.3    | Méthode des éléments finis de surface . . . . .                                       | 52        |
| 4.3      | La fonction de Green pseudopériodique . . . . .                                       | 55        |
| 4.3.1    | La transformation de Poisson . . . . .                                                | 57        |
| 4.3.2    | La transformation de Kummer . . . . .                                                 | 58        |
| 4.3.3    | La transformation non-linéaire de Shanks . . . . .                                    | 59        |
| 4.3.4    | La transformation d'Ewald . . . . .                                                   | 60        |
| 4.3.5    | Choix de la méthode appropriée . . . . .                                              | 61        |
| 4.4      | Calcul sur maillage structuré . . . . .                                               | 62        |
| 4.4.1    | Calcul analytique des contributions . . . . .                                         | 63        |
| 4.4.2    | Utilisation d'une transformée de Fourier discrète . . . . .                           | 65        |
| 4.4.3    | Arguments de symétrie . . . . .                                                       | 66        |
| 4.5      | Conclusion . . . . .                                                                  | 66        |
| <b>5</b> | <b>Méthode hybride EI 3D2D / EI 3D</b>                                                | <b>69</b> |
| 5.1      | Introduction . . . . .                                                                | 70        |
| 5.2      | Assemblage de la matrice . . . . .                                                    | 71        |
| 5.3      | Méthode hybride EI 3D2D / EI 3D . . . . .                                             | 73        |
| 5.3.1    | Problème interne borné . . . . .                                                      | 73        |
| 5.3.2    | Conditions de périodicité aux interfaces entre deux cellules de périodicité . . . . . | 74        |
| 5.3.3    | Opérateurs intégraux bipériodiques dans les domaines semi-infinis . . . . .           | 77        |
| 5.3.4    | Généralisation des conditions de pseudopériodicité . . . . .                          | 80        |
| 5.3.5    | Réduction du nombre d'évaluations de la fonction de Green bipériodique . . . . .      | 81        |
| 5.4      | Interfaces fictives . . . . .                                                         | 81        |
| 5.5      | Parallélisation du calcul . . . . .                                                   | 83        |
| 5.5.1    | Mémoire partagée : parallélisation de l'assemblage . . . . .                          | 83        |
| 5.5.2    | Mémoire distribuée : parallélisation en fréquence . . . . .                           | 84        |
| 5.6      | Conclusion . . . . .                                                                  | 85        |
| <b>6</b> | <b>Validation : étude de quelques structures d'intérêt</b>                            | <b>87</b> |
| 6.1      | Introduction . . . . .                                                                | 89        |
| 6.1.1    | Organisation des validations . . . . .                                                | 89        |
| 6.1.2    | Quelques mots sur les métamatériaux . . . . .                                         | 90        |
| 6.2      | Validations élémentaires . . . . .                                                    | 90        |
| 6.2.1    | Exemples . . . . .                                                                    | 90        |
| 6.2.2    | Transmission à travers une couche plane de matériau diélectrique . . . . .            | 91        |
| 6.3      | Surfaces sélectives en fréquence . . . . .                                            | 94        |
| 6.3.1    | Intérêt . . . . .                                                                     | 94        |
| 6.3.2    | Réseau de croix . . . . .                                                             | 94        |
| 6.3.3    | Cas de validation de <i>Spectre</i> . . . . .                                         | 98        |
| 6.4      | Réseaux de sphères diélectriques . . . . .                                            | 102       |
| 6.4.1    | Données du calcul . . . . .                                                           | 102       |
| 6.4.2    | Modélisation et temps de calcul . . . . .                                             | 102       |
| 6.4.3    | Résultats . . . . .                                                                   | 104       |
| 6.5      | Réseaux de pyramides, antireflet en infrarouge . . . . .                              | 104       |
| 6.5.1    | Principe . . . . .                                                                    | 104       |

|          |                                                                 |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------|------------|
| 6.5.2    | Réseau de pyramides antireflet . . . . .                        | 105        |
| 6.5.3    | Pyramide de silicium avec méplat . . . . .                      | 108        |
| 6.6      | Surfaces à haute impédance . . . . .                            | 110        |
| 6.6.1    | Substrat d'antenne . . . . .                                    | 110        |
| 6.6.2    | SHI à maille hexagonale . . . . .                               | 110        |
| 6.6.3    | Cas n°5 du workshop ISAE 2008 . . . . .                         | 112        |
| 6.7      | Conclusion . . . . .                                            | 117        |
| <b>7</b> | <b>Réseaux de cavités coaxiales</b>                             | <b>119</b> |
| 7.1      | Introduction . . . . .                                          | 120        |
| 7.1.1    | Matériaux artificiels périodiques . . . . .                     | 120        |
| 7.1.2    | Surfaces sélectives en fréquence, radômes passe-bande . . . . . | 123        |
| 7.2      | Réseau de cavités coaxiales cylindriques . . . . .              | 124        |
| 7.2.1    | En optique . . . . .                                            | 124        |
| 7.2.2    | Transposition aux hyperfréquences . . . . .                     | 128        |
| 7.2.3    | Synthèse : identification des résonances . . . . .              | 130        |
| 7.2.4    | Influence des paramètres géométriques majeurs . . . . .         | 136        |
| 7.3      | Réseaux de cavités coaxiales à profil évolutif . . . . .        | 144        |
| 7.3.1    | Analogie avec les FSS planes . . . . .                          | 144        |
| 7.3.2    | Élaboration et définition de la géométrie . . . . .             | 145        |
| 7.3.3    | Identification des modes . . . . .                              | 149        |
| 7.3.4    | Influence du rayon interne minimal . . . . .                    | 150        |
| 7.4      | Réseau de cavités coaxiales obliques . . . . .                  | 152        |
| 7.5      | Conclusion . . . . .                                            | 154        |
|          | <b>Conclusion générale</b>                                      | <b>155</b> |
|          | <b>Références</b>                                               | <b>159</b> |



# Introduction

Il y a encore une vingtaine d'années, de nombreuses technologies d'aujourd'hui auraient pu être le fruit de l'imagination de quelque scénariste hollywoodien ou dessinateur de mangas. Diffusé dans les années 1980, le dessin animé nippon *Ordy ou les grandes découvertes*, présentait aux enfants du monde les technologies du futur : un jour viendrait où l'on pourrait commander son repas grâce à un ordinateur, un jour viendrait où l'on pourrait concevoir de nouveaux matériaux intelligents... Les années ont passé. Beaucoup des gadgets de science-fiction qui étaient présentés font maintenant partie de nos vies.

Dans les domaines de l'électromagnétisme et de l'optique, des matériaux artificiels, aux propriétés très particulières, ont pu, depuis, être conçus, fabriqués et étudiés. Ces matériaux sont souvent structurés périodiquement, constitués en réseau d'un motif de base qui se répète suivant une, deux ou trois directions. Ils tirent leurs propriétés originales des résonances qui peuvent s'établir entre motifs répétés : matériaux à indice négatif, ultra-réfraction, matériaux absorbants, filtres,... Ces matériaux, qui peuvent parfois être appelés « métamatériaux » et « cristaux photoniques », permettent d'améliorer des technologies liées à des domaines très divers, notamment les cellules photovoltaïques, les télécommunications, les optiques des appareils photo, les antennes (et leur environnement), la furtivité radar et infrarouge des aéronefs.

Le travail de thèse présenté dans ce document a été effectué en partie au sein du service EMIR (ÉlectroMagnétisme et InfraRouge) de Dassault Aviation. Il avait été constaté que le code de calcul existant en interne ne suffisait plus à traiter des matériaux artificiels bipériodiques complexes : ce code ne permettait de caractériser que des empilements de couches de matériaux diélectriques séparées par des réseaux de feuillets métalliques sans épaisseur à maillage structuré. Or les progrès en terme de fabrication de micro- et nanostructures d'une part, et les propriétés prometteuses de structures basées sur un motif de périodicité tridimensionnel d'autre part, ont rendu nécessaire le développement d'une méthode plus générale, en particulier pour modéliser les structures périodiques servant à des applications aéronautiques : absorbants radar pour la furtivité, radômes (structure de protection et de camouflage d'antenne) ou substrats d'antenne (pour réduire l'encombrement et les couplages néfastes entre antennes). Par ailleurs, des logiciels commerciaux existants ont été testés, mais ils ne permettaient pas de traiter l'ensemble des problèmes qui se posaient.

Le premier objectif de la thèse était de définir et de proposer une méthode de calcul numérique à la fois efficace et générale, pour modéliser la diffraction d'une onde plane monochromatique par une structure bipériodique, puis de la mettre en œuvre sur des structures d'intérêt. Avant de commencer, il a fallu déterminer quels types de structures seraient modélisés en priorité : des structures dont le motif de base, tridimensionnel, comprend un nombre arbitraire de domaines diélectriques, avec ou sans pertes, des inclusions parfaite-

ment conductrices. Dans le domaine des hyperfréquences, il faudrait aussi pouvoir prendre en compte des conditions d'impédance localisées : composants électroniques ou couches de matériau posées sur une substrat parfaitement conducteur.

Pour des cas non périodiques, les méthodes numériques les plus précises sont les méthodes d'éléments finis et les méthodes des moments 3D (aussi appelées méthodes d'équations intégrales surfaciques). Les méthodes intégrales bipériodiques conduisent à un nombre d'inconnues minimal. Mais le calcul des coefficients du système linéaire nécessite l'évaluation de séries doubles lentement convergentes : l'enjeu principal est de parvenir à un calcul rapide et précis de ces coefficients, sans quoi la méthode perd tout son intérêt. Un cas particulier, pour lequel une méthode rapide et précise de calcul des coefficients a été trouvée, est le cas des feuillets métalliques plans sans épaisseur en maillage structuré.

Nous nous sommes attachés à mettre au point une formulation intégrale efficace, permettant de traiter un motif de périodicité 3D, et de valider ses apports en terme de précision et de temps de calcul en l'implémentant dans le code *Spectre*. Ce code numérique, développé chez Dassault Aviation, utilise une méthode des moments 3D, et a été mis à notre disposition, afin de bénéficier des apports logiciels en terme de pré- et post-traitement des données. Cela permet en outre de pérenniser les avancées de la thèse.

Le second objectif principal de la thèse était d'étudier une structure d'intérêt pour les applications aéronautiques : nous avons choisi d'étudier une structure sélective en fréquence, dont les propriétés sont peu sensibles à une modification de l'angle d'incidence, avec une largeur de bande assez importante, en hyperfréquences. Nous avons étudié une structure constituée d'un réseau de cavités coaxiales dans une plaque parfaitement conductrice ; nous avons examiné les phénomènes de résonance qui interviennent pour donner à cette structure ses propriétés intéressantes.

Ce document est structuré de manière similaire aux trois années de thèse, décrivant les phases consécutives de la mise au point d'une méthode de calcul numérique. Il peut être lu en quatre parties distinctes : position du problème, mise au point d'une méthode de calcul numérique, validation, mise en œuvre sur un cas concret.

Le sujet de cette thèse est pluridisciplinaire. La première partie fait appel à des concepts importants issus des mathématiques appliquées (modélisation numérique), mais elle fait également appel à des connaissances en physique (électromagnétisme et optique) pour la définition du cahier des charges de la méthode numérique ; la seconde partie, qui a permis de mettre en application la méthode développée, fait davantage appel à des connaissances issues de la physique des matériaux, de l'électromagnétisme et de l'optique de matériaux micro- et nanostructurés, en particulier des métamatériaux.

- Les deux premiers chapitres constituent le premier ensemble : y sont définis les notations et conventions que nous avons utilisées pour quantifier la réflexion et la transmission par un réseau, ainsi que quelques concepts très généraux liés aux problèmes périodiques. Le premier chapitre donne l'occasion de décrire d'une manière très générale la diffraction par une structure bipériodique, et que la solution au problème de diffraction peut être vue comme la somme de modes de Floquet-Bloch montants et descendants, propagatifs et évanescents. Le deuxième chapitre définit les matrices dites de *scattering* : ce sont des matrices qui contiennent les coefficients de réflexion et de transmission de la structure étudiée, qui caractérisent le comportement d'un matériau artificiel donné. Il est expliqué comment

sont calculés ces coefficients, et comment ils permettent d'étudier la conservation de l'énergie dans une structure, ou de calculer les propriétés d'un empilement de matériaux artificiels périodiques.

- Les chapitres trois à cinq constituent le cœur de la thèse : c'est là que la méthode numérique que nous avons développée est introduite puis décrite.

Le chapitre trois contient un état de l'art sur les méthodes numériques existantes pour traiter de la diffraction par des structures périodiques : méthodes modales, méthodes volumiques (différences finies et éléments finis), méthodes surfaciques (équations intégrales) et méthodes hybrides. Pour toutes ces méthodes, nous donnons leurs principaux avantages et inconvénients, ainsi que les utilisations qui en sont généralement faites.

Le chapitre quatre décrit le cadre théorique des équations intégrales bipériodiques dans lequel nous nous sommes placés. La formulation intégrale multidomaine que nous utilisons est donnée et les techniques de calcul de la fonction de Green bipériodique sont rappelées. L'algorithme permettant de traiter très efficacement les réseaux de feuillets plans en maillage structuré est également décrit.

Le chapitre cinq présente en détail la première contribution originale de ce travail : une méthode numérique hybride combinant équations intégrales bipériodiques dans les domaines externes semi-infinis et équations intégrales tridimensionnelles dans les domaines internes de la structure. Afin d'utiliser une formulation intégrale tridimensionnelle, nous expliquons qu'il faut borner les domaines internes de la structure et prendre en compte des conditions de pseudopériodicité sur les interfaces entre cellules voisines. Ainsi les seuls termes où interviennent les séries doubles associées à la fonction de Green bipériodique sont calculées très efficacement en utilisant l'invariance par translation du maillage, une intégration par partie avec les fonctions de base et une transformée de Fourier rapide. La cellule de périodicité est tridimensionnelle, comportant un nombre arbitraire de domaines diélectriques, avec ou sans pertes, et des conditions d'impédance localisées.

Afin de valider l'intérêt en terme de précision et d'efficacité de la formulation proposée, celle-ci a été implémentée dans le code de calcul *Spectre* de Dassault Aviation. Le chapitre cinq donne également quelques aspects pratiques d'implémentation, et les techniques utilisées pour réduire au maximum le temps de calcul : réduction du nombre d'évaluations de la fonction de Green bipériodique et parallélisation du calcul. Le temps de calcul pour un réseau bipériodique devient alors comparable à celui de la cellule seule, isolée dans l'espace, que l'on peut considérer comme optimal.

- Le chapitre six traite de la validation de la formulation hybride que nous avons proposée : les tests de validation, qui ont permis de trouver les erreurs d'implémentation (les "bugs") et les points durs pour la rapidité du calcul. Les cas de validation plus complexes qui sont présentés illustrent plusieurs types de matériaux artificiels bipériodiques et permettent d'évaluer les apports de la nouvelle méthode hybride, en terme de rapidité et de précision.
- Le chapitre sept décrit comment nous avons conçu une structure passe-bande à l'aide de la méthode numérique. Nous prenons comme point de départ une structure très intéressante dans le domaine de l'optique visible : un réseau de cavités coaxiales dans une plaque d'argent. Nous essayons de l'adapter aux hyperfréquences, dans une plaque parfaitement conductrice. La méthode numérique est mise en œuvre pour comprendre le fonctionnement de ce filtre passe-bande, en permettant notamment d'expliquer les résonances qui apparaissent, et d'établir des lois simples pour les fréquences de résonance en fonction de l'épaisseur du réseau, des rayons interne et externe des cavités coaxiales et de l'angle d'incidence. Une modification des paramètres géométriques est proposée afin d'améliorer les propriétés de transmission de la structure, en incidence oblique et polarisation TM.



# Chapitre 1

## Réseau bipériodique

### Table des matières

---

|            |                                                                                 |           |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Introduction</b>                                                             | <b>6</b>  |
| <b>1.2</b> | <b>Problème-type</b>                                                            | <b>7</b>  |
| 1.2.1      | Réseau bipériodique                                                             | 7         |
|            | Définition générale                                                             | 7         |
|            | Modélisation                                                                    | 7         |
| 1.2.2      | Problème pseudopériodique                                                       | 11        |
| <b>1.3</b> | <b>Modes de réseau</b>                                                          | <b>12</b> |
| 1.3.1      | Décomposition du champ diffracté en somme de modes de Floquet-Bloch             | 12        |
| 1.3.2      | Modes montants, modes descendants                                               | 13        |
|            | Cas d'un matériau sans pertes                                                   | 14        |
|            | Cas d'un matériau absorbant                                                     | 15        |
| 1.3.3      | Définition des modes de Floquet-Bloch                                           | 15        |
|            | Cas d'un matériau absorbant                                                     | 17        |
| 1.3.4      | Apparition des modes propagatifs                                                | 17        |
| 1.3.5      | Utilisation des modes de Floquet-Bloch pour caractériser un réseau bipériodique | 18        |

---

## 1.1 Introduction

Quel est le point commun entre un mouchoir de soie, une porte de four à micro-ondes et le nez d'un avion ? Tous trois peuvent filtrer les ondes électromagnétiques grâce à leur structuration périodique.

Mittra *et al.* [53] relatent un échange épistolaire entre l'essayiste et poète américain Francis Hopkinson et le physicien David Rittenhouse en 1786 : le premier a, par hasard, observé un lampadaire à travers les mailles de son mouchoir de soie. Il a remarqué d'étranges raies noires qu'il ne comprenait pas. Il en a fait part au second qui a étudié le phénomène plus attentivement : il a mis en évidence la diffraction d'une onde lumineuse par un réseau de fibres de soie, et les phénomènes de raies d'interférences constructives et destructives dépendant de l'espacement des fibres.

Le four à micro-ondes nous offre également un exemple d'utilisation d'un réseau périodique : il y a dans la porte vitrée une sorte de grillage, qui sert de filtre passe-haut. Il est en effet opaque pour les micro-ondes nocives pour l'homme mais transparent pour les ondes lumineuses (dont les fréquences sont bien plus élevées).

Enfin, le nez d'un avion de combat sert de protection à une antenne radar. C'est ce que l'on appelle un radôme (RAдар-DÔME) ; sa conception fait généralement appel à une structuration périodique des matériaux utilisés de façon à produire un filtrage passe-bande, qui, idéalement, laisse passer toute l'information radar nécessaire au fonctionnement de l'antenne, mais rien de ce qui pourrait provoquer des perturbations et gêner sa bonne marche.

Voilà trois exemples courants de réseaux bipériodiques, mais il en existe bien d'autres que nous aurons plus tard l'occasion de décrire.

Le plus souvent, nous nous intéressons à la diffraction d'une onde plane par une structure périodique. Plus généralement, nous introduisons la décomposition classique des champs électromagnétiques incidents et diffractés par une structure bipériodique sur la base fournie par les modes de Floquet-Bloch. Nous ne prétendons aucunement être exhaustif : nous adoptons d'ailleurs un point de vue adapté à la modélisation du problème par une méthode à base d'équations intégrales surfaciques.

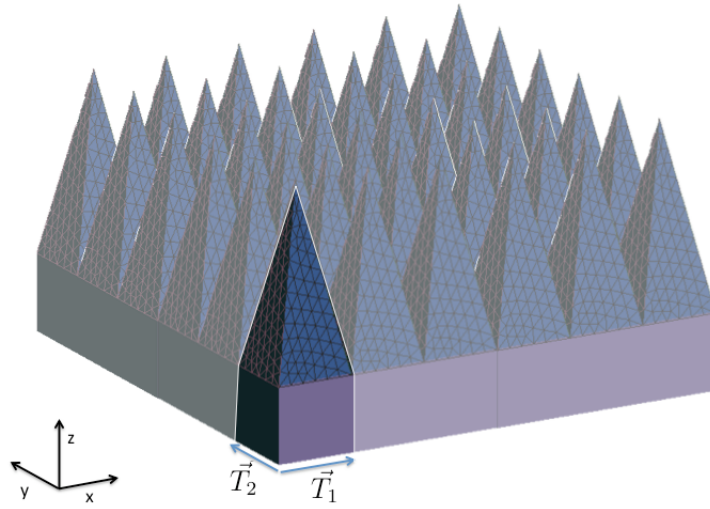
Nous décrivons d'abord l'objet physique qu'est un réseau bipériodique, nous rappelons les équations de Maxwell en régime harmonique, puis la base que nous utilisons pour décomposer les ondes : les modes de Floquet-Bloch. S'il souhaite approfondir le sujet, le lecteur pourra se référer à des cours de théorie électromagnétique des réseaux comme [63].

## 1.2 Problème-type

### 1.2.1 Réseau bipériodique

#### Définition générale

Nous appelons *réseau bipériodique* ou *structure bipériodique* ou encore *structure 3d2d* toute structure physique tridimensionnelle présentant deux directions de périodicité : un même motif se répète régulièrement et infiniment suivant deux vecteurs de périodicité pris dans le plan horizontal. Cette structure est d'épaisseur finie, limitée par deux demi-espaces homogènes situés au-dessus et en-dessous d'elle.



**FIGURE 1.1** – *Exemple de structure bipériodique : revêtement de chambre anéchoïque dont la cellule de périodicité est constituée d'une pyramide de mousse posée sur une couche de matériau absorbant.*

Dans ce travail, nous supposons que le plan du réseau est parallèle au plan  $Oxy$ . Sauf mention contraire, les deux vecteurs de translation sont orthogonaux :  $\vec{T}_1 = T_1\vec{x}$  et  $\vec{T}_2 = T_2\vec{y}$ . On définit  $z_{sup}$  et  $z_{inf}$  comme les cotes entre lesquelles la structure est placée.

Le motif élémentaire qui est répété est appelé *cellule de référence*. Une structure périodique peut être représentée par plusieurs cellules de référence, suivant le découpage choisi.

La figure 1.1 est un exemple (tronqué, bien-sûr) de structure bipériodique. Il faut imaginer que les pyramides se répètent infiniment suivant les axes  $Ox$  et  $Oy$ .

#### Modélisation

**Domaines** On appelle *domaine* une partie de  $\mathbb{R}^3$  (un volume) remplie d'un matériau donné et indexée par un unique numéro de domaine. Le matériau qui remplit un domaine peut être parfaitement conducteur (PEC, pour Parfaitement Électriquement Conducteur) ou diélectrique linéaire homogène et isotrope.

On appelle *matériau diélectrique linéaire homogène et isotrope* un matériau défini par sa permittivité électrique  $\varepsilon$  et sa perméabilité magnétique  $\mu$  complexes; il peut donc s'agir d'un matériau à pertes ou d'un matériau magnétique. Un métal est donc considéré comme un matériau diélectrique dans le domaine optique.

Nous étudierons des structures constituées d'un assemblage quelconque de domaines homogènes homogènes et isotropes. Nous excluons de cette étude des matériaux aux relations constitutives plus complexes : matériaux inhomogènes, anisotropes, non linéaires, ...

La structure bipériodique étudiée est placée entre deux domaines semi-infinis pouvant être soit parfaitement conducteurs soit diélectriques. Les interfaces entre les domaines semi-infinis et la structure périodique ne sont pas nécessairement planes. La figure 1.2 résume les conventions prises pour la numérotation des domaines.

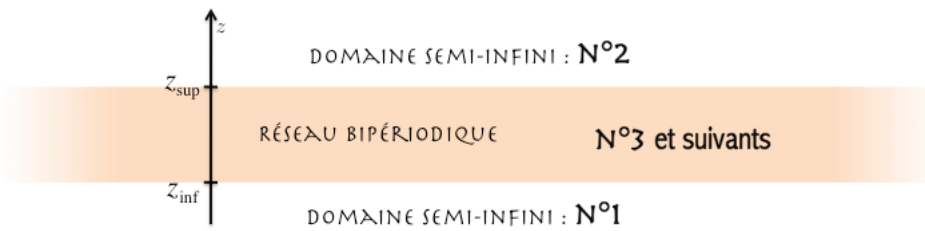


FIGURE 1.2 – Les conventions prises pour les numérotations de domaines.

**Onde incidente et polarisations** Nous supposons que le réseau bipériodique est éclairé par une onde plane monochromatique incidente de vecteur d'onde  $\vec{k}$  dans un des domaines semi-infinis supposé sans pertes – nous prendrons par exemple le domaine 1 –. C'est le cas le plus simple; nous verrons au chapitre 2 comment généraliser le problème à des sommes d'ondes planes et comment traiter des domaines semi-infinis absorbants. Nous nous plaçons en régime harmonique avec la convention en  $e^{+j\omega t}$ .

$$\vec{E}^i = -je^{-j\vec{k}^i \cdot \vec{r}} \vec{u}, \quad \text{dans le domaine 1,} \quad (1.1)$$

où  $\vec{k}^i$  est le vecteur d'onde incident et  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire qui dépend de la polarisation du champ incident.

Le vecteur d'onde incident  $\vec{k}^i$  a pour module  $k^i = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$  et son vecteur unitaire est défini par ses composantes réelles  $\frac{k_x^i}{k^i}$ ,  $\frac{k_y^i}{k^i}$  et le domaine de propagation. La composante  $\frac{k_z^i}{k^i}$  est déduite de ces informations :

$$\frac{k_z^i}{k^i} = +\sqrt{1 - \left(\frac{k_x^i}{k^i}\right)^2 - \left(\frac{k_y^i}{k^i}\right)^2}. \quad (1.2)$$

Le signe + est dû au domaine 1, inférieur (champ incident se propageant vers le haut). On

aurait eu un signe  $-$  dans le domaine 2, supérieur. Cela impose une condition sur  $\frac{k_x^i}{k}$  et  $\frac{k_y^i}{k}$  pour que l'onde incidente soit propagative :

$$\left(\frac{k_x^i}{k^i}\right)^2 + \left(\frac{k_y^i}{k^i}\right)^2 < 1 \quad (1.3)$$

On définit les vecteurs de polarisation de telle sorte que les vecteurs  $\vec{k}^i$ ,  $\vec{u}_H$  et  $\vec{u}_V$  forment un dièdre direct :

$$\vec{u}_H = \frac{\vec{k}^i \times \vec{z}}{\|\vec{k}^i \times \vec{z}\|} \quad (1.4)$$

$$\vec{u}_V = \frac{\vec{k}^i}{k^i} \times \vec{u}_H \quad (1.5)$$

On appelle *polarisation horizontale*<sup>1</sup> (ou  $H$ ) la polarisation pour laquelle on a :

$$\begin{aligned} \vec{E}_H^i &= E^i \vec{u}_H \\ \vec{H}_H^i &= H^i \vec{u}_V = \frac{E^i}{Z_{dom}} \vec{u}_V \quad \text{avec} \quad Z_{dom} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Et on appelle *polarisation verticale*<sup>2</sup> (ou  $V$ ) la polarisation pour laquelle on a :

$$\begin{aligned} \vec{E}_V^i &= E^i \vec{u}_V \\ \vec{H}_V^i &= -H^i \vec{u}_H = -\frac{E^i}{Z_{dom}} \vec{u}_H \quad \text{avec} \quad Z_{dom} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (1.7)$$

**Problème posé** Compte tenu de ce que nous avons défini jusqu'à présent – structure périodique dans deux domaines semi-infinis éclairée par une onde plane incidente –, nous voulons connaître le champ électromagnétique diffracté par la structure. La linéarité des équations de Maxwell et des relations constitutives nous permet alors d'écrire le champ électromagnétique total comme la somme du champ incident et du champ diffracté :

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}^i + \vec{E}^s \\ \vec{H} &= \vec{H}^i + \vec{H}^s \end{aligned} \right\} \quad \text{dans le domaine 1} \quad (1.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}^s \\ \vec{H} &= \vec{H}^s \end{aligned} \right\} \quad \text{dans les autres domaines, car alors} \quad \vec{E}^i = \vec{H}^i = 0. \quad (1.9)$$

---

1. Cette polarisation est aussi appelée polarisation  $TE$  ; le champ électrique étant transverse au plan d'incidence.

2. Cette polarisation est aussi appelée polarisation  $TM$  ; le champ magnétique étant transverse au plan d'incidence.

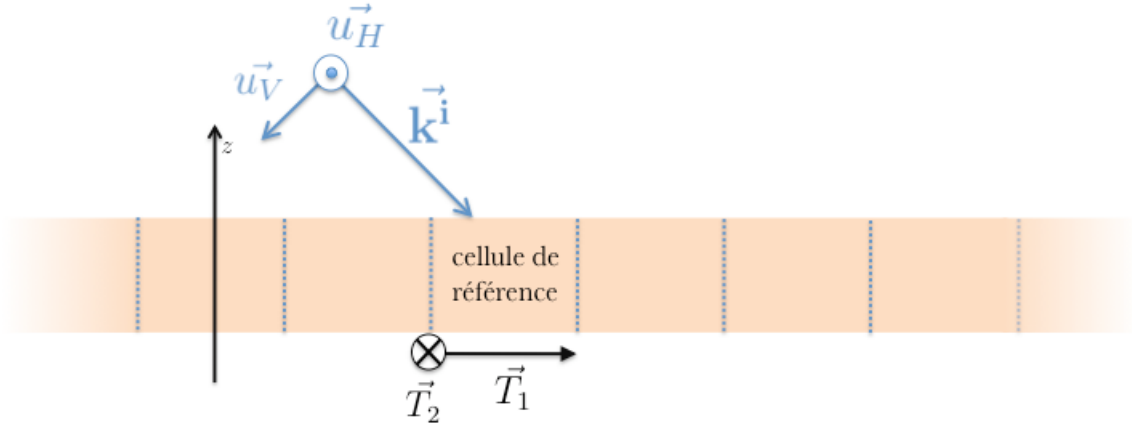


FIGURE 1.3 – Convention adoptée pour les repères-visées  $\vec{k}^i$ ,  $\vec{u}_H$  et  $\vec{u}_V$ .

**Equations de Maxwell, équation de Helmholtz** Nous nous plaçons dans le formalisme des équations de Maxwell en régime harmonique avec dépendance temporelle en  $e^{+j\omega t}$ , qui sont valables en tout point de l'espace :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -j\omega \vec{\mathbf{B}} \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = j\omega \vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{J}} \quad (1.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho \quad (1.12)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0. \quad (1.13)$$

Du fait que les matériaux considérés sont diélectriques, linéaires, homogènes, et isotropes, les lois constitutives suivantes s'appliquent :

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon' \vec{\mathbf{E}}, \quad \epsilon' \in \mathbb{C} \quad (1.14)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}, \quad \mu \in \mathbb{C} \quad (1.15)$$

Nous avons introduit une permittivité électrique et une perméabilité magnétique complexes afin de prendre en compte les pertes diélectriques, ohmiques ou magnétiques. Ce sont alors les parties imaginaires de  $\epsilon'$  et  $\mu$  qui caractérisent les phénomènes d'absorption dans les matériaux choisis ; elles sont négatives du fait de la convention prise en  $e^{+j\omega t}$ . On a notamment la loi de Joule ( $\vec{\mathbf{J}} = \sigma \vec{\mathbf{E}}$ ) pour les pertes ohmiques, d'où :

$$\vec{\mathbf{D}} + \frac{\vec{\mathbf{J}}}{j\omega} = \left( \epsilon' - j\frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{\mathbf{E}}, \quad \frac{\sigma}{\omega} \in \mathbb{R}.$$

On introduit alors :  $\epsilon = \epsilon' - j\frac{\sigma}{\omega}$ .

Nous pouvons alors écrire directement les équations de Maxwell (1.10) à (1.13) sous la

forme :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\vec{\mathbf{H}} \quad (1.16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon\vec{\mathbf{E}} \quad (1.17)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon\vec{\mathbf{E}} = 0 \quad (1.18)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mu\vec{\mathbf{H}} = 0 \quad (1.19)$$

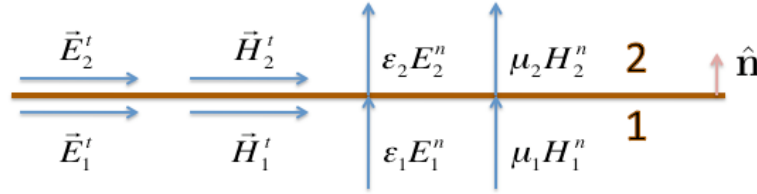
Les conditions de continuité des champs aux interfaces entre deux domaines 1 et 2 sont les suivantes. Elles sont résumées sur la figure 1.4 :

$$\hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}_1 = \hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}_2 \quad (1.20)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{H}}_1 = \hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{H}}_2 \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_1 = \varepsilon_2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 \quad (1.22)$$

$$\mu_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{H}}_1 = \mu_2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{H}}_2 \quad (1.23)$$



**FIGURE 1.4** – Continuité des champs tangents, condition de passage de la composante normale

Dans chaque domaine diélectrique de la structure périodique, permittivité  $\epsilon$  et perméabilité  $\mu$  sont éventuellement complexes et sont constantes pour une fréquence donnée. On peut donc écrire, pour le domaine d'observation, noté *obs*, l'équation de Helmholtz, vérifiée par le champ électrique :

$$\Delta \vec{\mathbf{E}}_{obs} + k_{obs}^2 \vec{\mathbf{E}}_{obs} = 0 \quad \text{avec} \quad k_{obs} = \sqrt{\varepsilon_{obs} \mu_{obs} \omega} \quad (1.24)$$

### 1.2.2 Problème pseudopériodique

Nous décrivons ici une propriété importante du champ diffracté : la pseudopériodicité. Cette propriété nous permettra en 1.3 d'écrire le champ diffracté comme une somme de solutions élémentaires des équations de Maxwell, les modes de Floquet-Bloch.

**Définition** Soit  $f(\vec{\mathbf{r}})$ ,  $\vec{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^3$  une grandeur scalaire ou vectorielle,  $\vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  et  $\vec{\kappa}$  un vecteur de  $\mathbb{C}^3$ ; on dit que  $f$  est pseudopériodique de périodes  $\vec{\chi}_1$  et  $\vec{\chi}_2$  et d'obliquité  $\vec{\kappa}$  si :

$$f(\vec{\mathbf{r}} + n\vec{\chi}_1 + m\vec{\chi}_2) = f(\vec{\mathbf{r}}) e^{-j(n\vec{\kappa} \cdot \vec{\chi}_1 + m\vec{\kappa} \cdot \vec{\chi}_2)} \quad (1.25)$$

Le champ incident vérifie une condition de pseudopériodicité :

$$\begin{aligned}
\vec{E}^i(\vec{r} + n\vec{T}_1 + m\vec{T}_2) &= -je^{-j\vec{k}^i \cdot (\vec{r} + n\vec{T}_1 + m\vec{T}_2)} \vec{u} \\
&= \vec{E}^i(\vec{r}) e^{-j\varphi(n,m)} \text{ avec } \vec{r}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,
\end{aligned} \tag{1.26}$$

où le terme de déphasage vaut :  $\varphi(n, m) = n\vec{k}^i \cdot \vec{T}_1 + m\vec{k}^i \cdot \vec{T}_2$ .

Si l'excitation  $\vec{E}^i$  a un vecteur d'onde tel que  $\frac{k_x^i}{k^i} = 0$  et  $\frac{k_y^i}{k^i} = 0$ , le problème est alors dit *bipériodique* et le champ est le même sur chaque cellule. Dans le cas contraire, chaque cellule verra l'onde incidente avec un déphasage  $\varphi(n, m)$  par rapport aux cellules voisines. Ce cas-là est alors dit *pseudopériodique*.

Cette pseudopériodicité du champ source, la périodicité du réseau ainsi que la linéarité des équations de Maxwell permet d'affirmer que le champ diffracté est également pseudopériodique (cf. [63]) :

$$\vec{E}^S(\vec{r} + n\vec{T}_1 + m\vec{T}_2) = \vec{E}^S(\vec{r}) e^{-j\varphi(n,m)} \tag{1.27}$$

Dans la suite de ce document, nous traiterons, en toute généralité, le cas pseudopériodique, que nous appellerons, par abus de langage, bipériodique.

Cette propriété de pseudopériodicité est très intéressante : la connaissance des champs pour  $\vec{r} \in [0, T_1] \times [0, T_2] \times \mathbb{R}$  permet d'en déduire les champs dans  $\mathbb{R}^3$  en entier. Ainsi, la méthode de calcul que nous présentons dans ce travail permet de se limiter au calcul des champs en ne considérant qu'une seule cellule de périodicité de référence.

## 1.3 Modes de réseau

Nous introduisons la décomposition classique de Rayleigh (cf. par exemple [63]) du champ total en somme de modes de Floquet-Bloch. Ces modes sont des solutions des équations de Maxwell homogènes et forment une base de l'espace des fonctions pseudopériodiques de périodes  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$  et d'obliquité  $\vec{k}$ . Nous verrons par la suite que les modes de Floquet-Bloch sont des ondes planes ou des ondes planes complexes.

### 1.3.1 Décomposition du champ diffracté en somme de modes de Floquet-Bloch

Considérons le champ suivant,  $\vec{E}$  étant un champ pseudopériodique :

$$\vec{F}(\vec{r}) = e^{j(k_x^i x + k_y^i y)} \vec{E}(\vec{r}) \tag{1.28}$$

$\vec{F}$  est une grandeur bipériodique de périodes  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$  car :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{F}}(\vec{r} + n\vec{T}_1 + m\vec{T}_2) &= e^{j(k_x^i x + k_y^i y)} e^{j(n\vec{k}^i \cdot \vec{T}_1 + m\vec{k}^i \cdot \vec{T}_2)} \vec{\mathbf{E}}^S(\vec{r} + n\vec{T}_1 + m\vec{T}_2) \\
&= e^{j(k_x^i x + k_y^i y)} e^{j(n\vec{k}^i \cdot \vec{T}_1 + m\vec{k}^i \cdot \vec{T}_2)} e^{-j(n\vec{k}^i \cdot \vec{T}_1 + m\vec{k}^i \cdot \vec{T}_2)} \vec{\mathbf{E}}^S(\vec{r}) \\
&= e^{j(k_x^i x + k_y^i y)} \vec{\mathbf{E}}^S(\vec{r}) = \vec{\mathbf{F}}(\vec{r}).
\end{aligned}$$

Le champ  $\vec{\mathbf{F}}(\vec{r})$  étant périodique et continu par morceaux (les discontinuités se situent aux interfaces entre domaines), il est décomposable en série de Fourier dans le plan  $Oxy$  :

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{r}) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \vec{\mathbf{E}}_{nm}(z) e^{-j\left(\frac{2\pi n}{T_1}x + \frac{2\pi m}{T_2}y\right)}. \quad (1.29)$$

Les coefficients vectoriels  $\vec{\mathbf{E}}_{nm}$  de la décomposition en série de Fourier ne dépendent que de la variable  $z$  :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{E}}_{nm}(z) &= \frac{1}{2\pi T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \vec{\mathbf{F}}(\vec{r}) e^{+j\left(\frac{2\pi n}{T_1}x + \frac{2\pi m}{T_2}y\right)} dx dy \\
&= \frac{1}{2\pi T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) e^{+j(\alpha_n x + \beta_m y)} dx dy.
\end{aligned} \quad (1.30)$$

Nous avons donc, pour le champ électrique total :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \vec{\mathbf{E}}_{nm}(z) e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y)} \quad (1.31)$$

avec  $\alpha_n = k_x^i + \frac{2\pi n}{T_1}$ ,  $\beta_m = k_y^i + \frac{2\pi m}{T_2}$  pour  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

Cette expression est valable à la fois dans les domaines semi-infinis et à l'intérieur du réseau lui-même. Nous l'utiliserons uniquement dans les domaines semi-infinis homogènes ; certaines méthodes l'utilisent dans des domaines inhomogènes ou homogènes par morceaux (par exemple la méthode RCWA, qui sera présentée au chapitre 3).

Le champ électrique  $\vec{\mathbf{E}}$  est la superposition linéaire de modes décrits au paragraphe suivant (1.3.2) dont l'amplitude ne dépend que de  $z$ .

### 1.3.2 Modes montants, modes descendants

Nous allons distinguer les modes se propageant vers le réseau, de ceux qui s'en éloignent. Les modes se propageant vers le réseau (respectivement s'éloignant du réseau) dans le demi-espace inférieur correspondent à des modes se propageant vers le haut (resp. vers le bas). Ceci permettra d'introduire les modes intervenant dans la décomposition des champs incidents et réfléchis. Le raisonnement est identique dans le demi-espace supérieur.

Plaçons-nous dans un domaine d'observation semi-infini sans sources, noté *obs*, diélectrique<sup>3</sup>. Nous savons que le champ électrique vérifie l'équation de Helmholtz (1.24). Nous pouvons donc y injecter la décomposition du champ électrique (1.31) :

$$\begin{aligned} \Delta \left( \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \vec{\mathbf{E}}_{nm}^S(z) e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y)} \right) + k_{obs}^2 \left( \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \vec{\mathbf{E}}_{nm}^S(z) e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y)} \right) &= 0 \\ \sum_{n,m} \left( \Delta \left( \vec{\mathbf{E}}_{nm}^S(z) e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y)} \right) + k_{obs}^2 \vec{\mathbf{E}}_{nm}^S(z) e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y)} \right) &= 0 \\ \sum_{n,m} e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y)} \left( \frac{d^2}{dz^2} \vec{\mathbf{E}}_{nm}^S(z) + \gamma_{nm}^2 \vec{\mathbf{E}}_{nm}^S(z) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\text{où} \quad \gamma_{nm}^2 = k_{obs}^2 - \alpha_n^2 - \beta_m^2 \quad (1.33)$$

Il faut se rappeler que c'est le vecteur d'onde incident qui intervient dans les définitions des  $\alpha_n$  et  $\beta_m$ , alors que dans la définition de  $\gamma_{nm}$ , c'est le nombre d'onde du domaine dans lequel on se place.

Ces équations sont valides pour tout  $z$  dans le domaine considéré et toutes coordonnées  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Il vient :

$$\forall \vec{r} = (x, y, z) \in \Omega, \quad \frac{d^2}{dz^2} \vec{\mathbf{E}}_{nm}^S(z) + \gamma_{nm}^2 \vec{\mathbf{E}}_{nm}^S(z) = 0 \quad (1.34)$$

Les solutions de cette équation sont une combinaison linéaire des modes de Floquet-Bloch descendants (D) et montants (U, pour "Up") :

$$\vec{\mathbf{E}}_{nm}^D e^{+j\gamma_{nm}z} \quad \text{et} \quad \vec{\mathbf{E}}_{nm}^U e^{-j\gamma_{nm}z} \quad (1.35)$$

### Cas d'un matériau sans pertes

Considérons d'abord le cas où le matériau constituant le domaine d'observation n'a pas de pertes. Dans ce cas,  $k_{obs}$  est réel positif (car alors  $\varepsilon \geq 1$  et  $\mu \geq 1$ ) et on choisit pour  $\gamma_{nm}$  la racine réelle positive ou la racine imaginaire pure de partie imaginaire négative :

$$\gamma_{nm} = \sqrt{k_{obs}^2 - \alpha_n^2 - \beta_m^2}, \quad \text{pour } k_{obs}^2 \geq \alpha_n^2 + \beta_m^2 \Rightarrow \Re(\gamma_{nm}) > 0 \quad (1.36)$$

$$\gamma_{nm} = -j\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2 - k_{obs}^2}, \quad \text{pour } k_{obs}^2 < \alpha_n^2 + \beta_m^2 \Rightarrow \Im(\gamma_{nm}) < 0 \quad (1.37)$$

L'onde diffractée  $\vec{\mathbf{E}}^S(\vec{r})$  vérifie des conditions de rayonnement à l'infini. Ses coefficients  $\vec{\mathbf{E}}_{nm}^S(z)$  dans la décomposition (1.31) les vérifient aussi. On a les conditions suivantes sur la combinaison linéaire (1.35) :

---

3. "homogène linéaire et isotrope", ce qui sera sous-entendu dans la suite du document.

1. si  $\gamma_{nm}$  est réel, l'onde diffractée s'éloigne du plan du réseau bipériodique (elle est montante pour  $z > z_{sup}$  et descendante pour  $z < z_{inf}$ ) et on dit qu'elle est *propagative* ;
2. si  $\gamma_{nm}$  est imaginaire, l'onde diffractée s'atténue au fur et à mesure qu'elle s'éloigne du plan du réseau et on dit qu'elle est *évanescence*.

Cela donne :

$$\vec{\mathbf{E}}_{nm}^S(z) = \vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,U} e^{-j\gamma_{nm}z}, \quad \text{pour } z > z_{sup} \quad (1.38)$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{nm}^S(z) = \vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,D} e^{+j\gamma_{nm}z}, \quad \text{pour } z < z_{inf}. \quad (1.39)$$

Le champ électrique diffracté se décompose ainsi :

$$\vec{\mathbf{E}}^S(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,U} e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y - \gamma_{nm} z)}, & \text{pour } z > z_{sup} \\ \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,D} e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y + \gamma_{nm} z)}, & \text{pour } z < z_{inf}. \end{cases} \quad (1.40)$$

### Cas d'un matériau absorbant

Supposons à présent que le matériau qui constitue le domaine d'observation est absorbant. Son nombre d'onde est alors complexe et est écrit de la façon suivante :

$$k_{obs}^2 = \omega^2 \varepsilon \mu = A - jB$$

Il n'est pas possible de faire une hypothèse sur le signe  $A$ . Il peut se trouver des matériaux pour lesquels par exemple  $A < 0$  (cf. [4]). À l'équilibre thermodynamique, hors d'un milieu à gain, on a en revanche  $B \geq 0$ , en conséquence du deuxième principe de la thermodynamique :  $B$  caractérise les pertes. C'est la raison pour laquelle nous avons distingué ce cas du cas sans pertes.

On choisit la racine carrée de  $\gamma_{nm}^2 = k_{obs}^2 - \alpha_n^2 - \beta_m^2$  de partie imaginaire négative ou, si celle-ci est nulle, celle de partie réelle positive.

L'onde diffractée (1.35) vérifie une condition de rayonnement : elle doit s'atténuer au fur et à mesure qu'elle s'éloigne du plan du réseau. Les équations (1.38) à (1.40) restent donc valables.

### 1.3.3 Définition des modes de Floquet-Bloch

L'équation (1.40) est une décomposition du champ électrique diffracté en somme d'ondes qui ont la forme suivante, où  $c$  désigne le côté de la structure bipériodique où l'on se place :

$$\vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,c}(\vec{r}) = \vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,c} e^{-j\vec{\mathbf{k}}_{nm}^c \cdot \vec{r}}, \quad (1.41)$$

$$\text{avec } c \in \{U, D\}, (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \vec{\mathbf{k}}_{nm}^U = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_m \\ \gamma_{nm} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{\mathbf{k}}_{nm}^D = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_m \\ -\gamma_{nm} \end{pmatrix}.$$

Le raisonnement des paragraphes 1.3.1 et 1.3.2 peut aussi être fait pour le champ magnétique :

$$\vec{\mathbf{H}}^S(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \vec{\mathbf{H}}_{nm}^{S,U} e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y - \gamma_{nm} z)}, & \text{pour } z > z_{sup} \\ \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \vec{\mathbf{H}}_{nm}^{S,D} e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y + \gamma_{nm} z)}, & \text{pour } z < z_{inf}. \end{cases} \quad (1.42)$$

Les champs  $\vec{\mathbf{E}}^S$  et  $\vec{\mathbf{H}}^S$  sont liés par les équations de Maxwell harmoniques. En injectant (1.40) et (1.42) dans (1.16) à (1.19) et en utilisant l'unicité de la décomposition en série de Fourier, on remarque que  $\vec{\mathbf{E}}_{nm}^S$  et  $\vec{\mathbf{H}}_{nm}^S$  vérifient également les équations de Maxwell harmoniques (1.16) à (1.19) et l'on a :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,c} = -j\vec{\mathbf{k}}_{nm}^c \times \vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,c} = -j\omega\mu\vec{\mathbf{H}}_{nm}^{S,c} \quad (1.43)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}}_{nm}^{S,c} = -j\vec{\mathbf{k}}_{nm}^c \times \vec{\mathbf{H}}_{nm}^{S,c} = j\omega\varepsilon\vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,c} \quad (1.44)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon\vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,c} = -j\varepsilon\vec{\mathbf{k}}_{nm}^c \cdot \vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,c} = 0 \quad (1.45)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mu\vec{\mathbf{H}}_{nm}^{S,c} = -j\mu\vec{\mathbf{k}}_{nm}^c \cdot \vec{\mathbf{H}}_{nm}^{S,c} = 0 \quad (1.46)$$

Il est alors immédiat que  $(\vec{\mathbf{k}}_{nm}^c, \vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,c}, \vec{\mathbf{H}}_{nm}^{S,c})$  est un trièdre direct. Le champ  $(\vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,c}, \vec{\mathbf{H}}_{nm}^{S,c})$  a une structure d'onde plane, ce qui justifie que l'on ne parle plus que du champ électrique par la suite, le champ magnétique se déduisant du champ électrique par :

$$\vec{\mathbf{H}}_{nm}^{S,c} = \frac{\vec{\mathbf{k}}_{nm}^c \times \vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,c}}{\omega\mu}, \quad \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \quad (1.47)$$

En définissant les deux vecteurs de polarisation  $\vec{u}_{nm}^{H,c} = \frac{\vec{\mathbf{k}}_{nm}^c \times \vec{z}}{\|\vec{\mathbf{k}}_{nm}^c \times \vec{z}\|}$  et  $\vec{u}_{nm}^{V,c} = \frac{\vec{\mathbf{k}}_{nm}^c}{k} \times \vec{u}_{nm}^{H,c}$ , on peut décomposer  $\vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,c}$  suivant les directions de polarisation :

$$\vec{\mathbf{E}}_{nm}^{S,c} = E_{nm}^{S,H,c} \vec{u}_{nm}^{H,c} + E_{nm}^{S,V,c} \vec{u}_{nm}^{V,c}. \quad (1.48)$$

Nous pouvons enfin donner une définition des modes de Floquet-Bloch : ce sont toutes les ondes, solutions des équations de Maxwell homogènes dans le domaine considéré, qui ont la forme suivante :

$$\vec{\psi}_{nm}^{p,c} = \vec{u}_{nm}^{p,c} e^{-j\vec{\mathbf{k}}_{nm}^c \cdot \vec{r}}, \quad p \in \{H, V\}, c \in \{D, U\}, (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \quad (1.49)$$

Ces solutions forment une base orthogonale de l'espace des champs pseudopériodiques de périodes  $\vec{\mathbf{T}}_1$  et  $\vec{\mathbf{T}}_2$  et d'obliquité  $\vec{\mathbf{k}}^i$  (cf. [63]) ; il est donc normal de les appeler "modes".

Ils sont toujours propagatifs en  $x$  et  $y$ . Suivant  $z$ , ils peuvent être propagatifs, lorsque  $\gamma_{nm} \in \mathbb{R}^+$  ; ou évanescents lorsque  $\gamma_{nm} \in j\mathbb{R}^-$  : ils sont alors exponentiellement atténués

en  $z$ . Les modes évanescents sont des ondes planes un peu particulières qui font partie des ondes appelées *ondes planes inhomogènes*. Ce sont des ondes planes dont la composante suivant  $z$  du vecteur d'onde est complexe : le front d'onde en phase est plan (ici, orthogonal à  $Oxy$ ), celui en amplitude aussi (ici, parallèle à  $Oxy$ ), mais ils ne sont pas confondus.

### Cas d'un matériau absorbant

Dans ce cas, il n'existe pas de distinction entre modes propagatifs ou évanescents. Tous les modes sont atténués en  $z$  et propagatifs dans le plan  $Oxy$ . Ce sont toujours des ondes planes inhomogènes.

#### 1.3.4 Apparition des modes propagatifs

Dans un domaine semi-infini diélectrique sans pertes, les modes propagatifs (en  $z$ ) sont toujours en nombre fini ; il y a en revanche une infinité de modes évanescents. Un mode  $(n, m)$  est propagatif à la condition suivante :

$$\frac{\alpha_n^2}{k_{obs}^2} + \frac{\beta_m^2}{k_{obs}^2} < 1$$

En notant  $n_{src}$  et  $n_{obs}$  les indices de réfraction (réels) dans les domaines source (où se trouve l'onde incidente) et d'observation, cette condition peut se réécrire :

$$\left( \frac{n_{src}}{n_{obs}} \hat{k}_x^{inc} + \frac{n}{T_1} \lambda_{obs} \right)^2 + \left( \frac{n_{src}}{n_{obs}} \hat{k}_y^{inc} + \frac{m}{T_2} \lambda_{obs} \right)^2 < 1$$

Lorsque  $\lambda_{obs} \rightarrow +\infty$ , seul le mode  $(0, 0)$  est propagatif. Lorsque  $\lambda_{obs}$  décroît, un nombre croissant de modes apparaît. La longueur d'onde d'apparition d'un mode de Floquet-Bloch propagatif correspond à ce que l'on appelle une anomalie de Rayleigh.

Il est intéressant de savoir à quelle longueur d'onde apparaît le premier mode de réseau autre que  $(0, 0)$  dans les cas de l'incidence normale et de l'incidence rasante.

**Cas de l'incidence normale** ( $\hat{k}_x^{inc} = \hat{k}_y^{inc} = 0$ ) :

$$\lambda_{obs}^{max} = \max_{(n,m) \neq (0,0)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{T_2}\right)^2}} \right\} \Rightarrow \lambda_{obs}^{max} = \max\{T_1, T_2\} \quad (1.50)$$

Ce sont les modes  $(\pm 1, 0)$  et  $(0, \pm 1)$  qui apparaissent les premiers.

**Cas de l'incidence rasante** ( $\frac{n_{src}}{n_{obs}} \hat{k}_x^{inc} = 1, \hat{k}_y^{inc} = 0$ ) et ici  $T_1 = T_2$ ) :

$$\lambda_{obs}^{max} = \max_{(n,m) \neq (0,0)} \left\{ \frac{-2n}{n^2 + m^2} T_1 \right\} \Rightarrow \lambda_{obs}^{max} = 2T_1 \quad (1.51)$$

### 1.3.5 Utilisation des modes de Floquet-Bloch pour caractériser un réseau bipériodique

Pour une structure donnée, éclairée par une onde incidente donnée, on a la décomposition du champ diffracté :

$$\vec{E}^S(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\}}} E_{nm}^{S,p,U} \vec{\psi}_{nm}^{p,U}, & \text{pour } z > z_{sup} \\ \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\}}} E_{nm}^{S,p,D} \vec{\psi}_{nm}^{p,D}, & \text{pour } z < z_{inf}. \end{cases} \quad (1.52)$$

Dans la pratique, nous imposerons d'autres références de phase que le point  $(0, 0, 0)$  dans les expressions des ondes incidents et diffractées. Nous imposons les références suivantes :  $\vec{r}_{0,U} = (0, 0, z_{sup})$  pour les ondes existant dans le domaine supérieur et  $\vec{r}_{0,D} = (0, 0, z_{inf})$  pour les ondes qui existent dans le domaine inférieur. Les modes de Floquet-Bloch prennent alors la forme suivante :

$$\vec{\psi}_{nm}^{p,c} = u_{nm}^{p,c} e^{-j\vec{k}_{nm}^c \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0,c})}, \quad \text{avec } c \in \{U, D\} \quad (1.53)$$

Le champ diffracté prend donc l'expression suivante :

$$\vec{E}^S(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\}}} E_{nm}^{S,p,U} \vec{\psi}_{nm}^{p,U}, & \text{pour } z > z_{sup} \\ \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\}}} E_{nm}^{S,p,D} \vec{\psi}_{nm}^{p,D}, & \text{pour } z < z_{inf}. \end{cases} \quad (1.54)$$

où  $E_{nm}^{S,p,c} = E_{nm}^{S,p,c} e^{-j\vec{k}_{nm}^c \cdot \vec{r}_{0,c}}$ ,  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $p \in \{H, V\}$  et  $c \in \{U, D\}$ .

Nous voulons connaître les coefficients de la décomposition du champ électrique diffracté en somme de modes de Floquet-Bloch avec ces références de phase :

$$E_{nm}^{S,p,c}, \quad \text{avec } (n, m) \in \mathbb{Z}^2, p \in \{H, V\}, c \in \{U, D\} \quad (1.55)$$

Ces inconnues seront présentées sous forme de matrices de scattering, outil que nous allons décrire au chapitre 2.

La décomposition suivant les modes de Floquet-Bloch montre qu'il existe des directions privilégiées dans lesquelles se propage l'onde diffractée. Ces directions sont données par les modes de Floquet-Bloch. En dehors de ces directions privilégiées, aucun signal n'est observable. Ces directions correspondent aux interférences constructives des ondes issues des différentes périodes du réseau.

# Chapitre 2

## Coefficients de réflexion et de transmission

### Table des matières

---

|            |                                                          |           |
|------------|----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Introduction . . . . .</b>                            | <b>20</b> |
| <b>2.2</b> | <b>Définition de la matrice de scattering . . . . .</b>  | <b>20</b> |
| 2.2.1      | Cas simple . . . . .                                     | 20        |
|            | Champ incident . . . . .                                 | 20        |
|            | Champ diffracté . . . . .                                | 21        |
|            | Matrice S . . . . .                                      | 22        |
|            | Exemples de matrices S . . . . .                         | 23        |
| 2.2.2      | Cas général . . . . .                                    | 24        |
|            | Champ incident . . . . .                                 | 24        |
|            | Champ diffracté . . . . .                                | 25        |
|            | Matrice S . . . . .                                      | 25        |
|            | Troncature du système . . . . .                          | 26        |
| <b>2.3</b> | <b>Empilement de matrices S . . . . .</b>                | <b>26</b> |
| <b>2.4</b> | <b>Calcul des coefficients de la matrice S . . . . .</b> | <b>27</b> |
| <b>2.5</b> | <b>Conservation de l'énergie . . . . .</b>               | <b>29</b> |
| <b>2.6</b> | <b>Conclusion . . . . .</b>                              | <b>33</b> |

---

## 2.1 Introduction

Le chapitre précédent nous a permis de décrire ce qu'il se passe d'une manière générale lorsqu'un réseau bipériodique est éclairé par une onde plane monochromatique incidente. Nous allons à présent voir comment les coefficients de réflexion et de transmission en champ permettent de caractériser entièrement la diffraction par un réseau bipériodique. Nous montrerons qu'une bonne façon de présenter ces coefficients de réflexion et de transmission est d'utiliser la matrice de scattering (ou *matrice S*) : elle permet d'exprimer la relation entre modes incidents sur la structure et modes diffractés par la structure.

Nous commencerons par présenter cette notion dans le cas le plus simple où il n'y a qu'un seul mode propagatif de part et d'autre du réseau bipériodique, puis nous l'étendrons au cas général où il y a plusieurs modes propagatifs et où les domaines semi-infinis peuvent être absorbants. Nous verrons que l'on peut lier la loi de conservation de l'énergie aux coefficients de la matrice S. Enfin, nous montrerons que les matrices S peuvent être utilisées pour le calcul d'empilements.

## 2.2 Définition de la matrice de scattering

### 2.2.1 Cas simple

Imaginons un cas simple : le réseau bipériodique est situé entre deux domaines semi-infinis contenant de l'air (assimilé au vide). Nous nous plaçons à une pulsation  $\omega$  et une obliquité  $\left(\frac{k_x^i}{k^i}, \frac{k_y^i}{k^i}\right)$  telles que l'on n'ait qu'un seul mode propagatif de chaque côté de la structure.

#### Champ incident

On éclaire la structure par un champ électrique incident propagatif en  $z$ -pseudopériodique de périodes  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$  et d'obliquité  $\vec{k}^i$ . Il peut s'écrire comme la somme de quatre ondes planes incidentes, qui sont les modes de Floquet-Bloch incidents propagatifs dans les domaines inférieur 1 et supérieur 2 :

$$\vec{E}^i(\vec{r}) = \begin{cases} E^{i,H,D} \vec{\psi}^{i,H,D} + E^{i,V,D} \vec{\psi}^{i,V,D}, & \text{pour } z > z_{sup} \quad \text{pour l'onde dans le domaine 2} \\ E^{i,H,U} \vec{\psi}^{i,H,U} + E^{i,V,U} \vec{\psi}^{i,V,U}, & \text{pour } z < z_{inf} \quad \text{pour l'onde dans le domaine 1.} \end{cases}$$

(2.1)

Nous prendrons leur référence de phase en  $z_{sup}$  et  $z_{inf}$  :

$$\vec{\psi}^{i,p,c} = \vec{u}^p e^{-j\vec{k}^{i,c} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0,c})}, \quad \text{avec } p \in \{H, V\}, c \in \{U, D\}. \quad (2.2)$$

On rappelle par ailleurs que le vecteur d'onde incident est entièrement déterminé par la connaissance de  $\frac{k_x^i}{k^i}$  et  $\frac{k_y^i}{k^i}$  (communs aux quatre modes) et du sens de propagation.

Chaque onde incidente est définie par les quatre coefficients  $E^{i,p,c} \in \mathbb{C}$  avec  $p \in \{H, V\}$ ,  $c \in \{U, D\}$ .

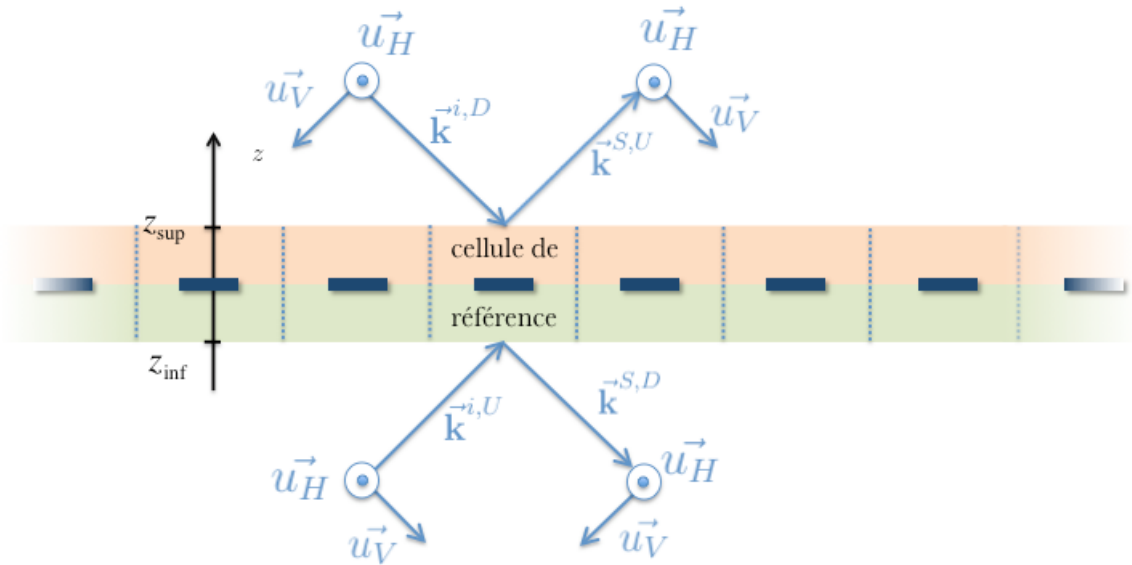
### Champ diffracté

Quand on observe le champ diffracté par le réseau à grande distance de celui-ci, il suffit de prendre en compte les modes propagatifs. Le champ électrique se résume alors à :

$$\vec{E}^S(\vec{r}) = \begin{cases} E_{00}^{S,H,U} \vec{\psi}_{00}^{S,H,U} + E_{00}^{S,V,U} \vec{\psi}_{00}^{S,V,U}, & \text{pour } z > z_{sup} \\ E_{00}^{S,H,D} \vec{\psi}_{00}^{S,H,D} + E_{00}^{S,V,D} \vec{\psi}_{00}^{S,V,D}, & \text{pour } z < z_{inf}. \end{cases} \quad (2.3)$$

L'onde diffractée se définit par les quatre coefficients  $E^{S,p,c} \in \mathbb{C}$  avec  $p \in \{H, V\}$ ,  $c \in \{U, D\}$ .

Le schéma 2.1 résume les conventions adoptées pour les ondes incidentes et diffractées.



**FIGURE 2.1** – Conventions adoptées pour les vecteurs d'ondes et polarisations incidents et diffractés.

## Matrice S

La matrice de scattering (ou matrice S) est une matrice complexe  $\mathcal{S}$  de taille  $4 \times 4$ , dépendant de  $\frac{k_x^i}{k}$ ,  $\frac{k_y^i}{k}$  et de la fréquence. Les coefficients de la matrice S s'obtiennent en calculant successivement les champs diffractés pour chacun des quatre modes incidents et normalisés par rapport à l'amplitude incidente. Chaque colonne contient les coefficients du champ diffracté, normalisés par rapport à l'amplitude du champ incident, lorsque le réseau est éclairé par les ondes incidentes telles que :  $(E^{i,H,D}, E^{i,V,D}, E^{i,H,U}, E^{i,V,U}) = (1, 0, 0, 0)$ , puis  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 0, 1)$ .

Ainsi, pour une onde incidente pseudopériodique définie par ses quatre coefficients  $E^{i,H,D}$ ,  $E^{i,V,D}$ ,  $E^{i,H,U}$  et  $E^{i,V,U}$ , le champ diffracté est :

$$\begin{pmatrix} E_{00}^{S,H,D} \\ E_{00}^{S,V,D} \\ E_{00}^{S,H,U} \\ E_{00}^{S,V,U} \end{pmatrix} = \mathcal{S} \begin{pmatrix} E^{i,H,U} \\ E^{i,V,U} \\ E^{i,H,D} \\ E^{i,V,D} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

La matrice S contient les coefficients de réflexion et de transmission “en champ” par le réseau bipériodique. Elle peut être réécrite :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

où  $\mathcal{S}_{11}$  (respectivement  $\mathcal{S}_{22}$ ) contient les coefficients de réflexion sur les interfaces inférieure (respectivement supérieure) en fonction de polarisations, comme l'illustre la figure 2.2. Les sous-matrices de  $\mathcal{S}$  contiennent :

$$\mathcal{S}_{11} = \begin{pmatrix} R_{11}^{HH} & R_{11}^{HV} \\ R_{11}^{VH} & R_{11}^{VV} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{22} = \begin{pmatrix} R_{22}^{HH} & R_{22}^{HV} \\ R_{22}^{VH} & R_{22}^{VV} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

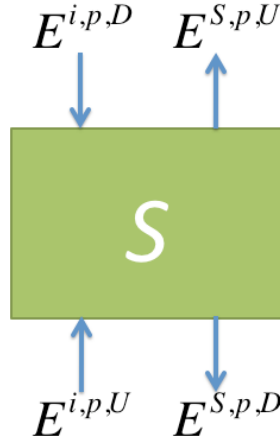
Et  $\mathcal{S}_{12}$  (respectivement  $\mathcal{S}_{21}$ ) contient les coefficients de transmission, du dessous au dessus (respectivement du dessus au dessous), toujours en fonction de polarisations :

$$\mathcal{S}_{12} = \begin{pmatrix} T_{12}^{HH} & T_{12}^{HV} \\ T_{12}^{VH} & T_{12}^{VV} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{21} = \begin{pmatrix} T_{21}^{HH} & T_{21}^{HV} \\ T_{21}^{VH} & T_{21}^{VV} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Le terme  $T_{12}^{HV}$ , par exemple, correspond au rapport de champ d'une onde incidente polarisée verticalement dans le domaine supérieur et d'une onde diffractée polarisée horizontalement dans le domaine inférieur.

Les valeurs des coefficients de la matrice S ne sont pas intrinsèques à une structure bipériodique donnée, mais ils dépendent du choix des références de phase, de la convention prise pour les vecteurs de polarisation et de la convention pour le régime harmonique.

Les coefficients de la matrice S s'obtiennent en calculant successivement les champs diffractés pour chacun des modes incidents normalisés par rapport à l'amplitude incidente.



**FIGURE 2.2** – La matrice  $\mathcal{S}$  permet d'exprimer les ondes sortantes ( $E^{S,p,D}$  et  $E^{S,p,U}$ ) en fonction des ondes entrantes ( $E^{i,p,D}$  et  $E^{i,p,U}$ ).

### Exemples de matrices $\mathcal{S}$

Deux exemples élémentaires illustrent particulièrement bien le concept de matrice  $\mathcal{S}$  : l'espace libre, "modélisé" par une couche d'air entre  $z_{sup}$  et  $z_{inf}$  située entre deux domaines semi-infinis remplis d'air ; et la réflexion sur un plan PEC.

**Couche fictive d'air** La couche fictive d'air n'introduit qu'un déphasage entre les champs situés des deux côtés : le champ diffracté d'un côté de la couche est donc le prolongement du champ incident existant de l'autre côté, avec une référence de phase différente :

$$E^{S,p,D}(\vec{r})|_{z < z_{inf}} = E^{i,p,D}(\vec{r})|_{z > z_{sup}} e^{-jk_z(z_{inf}-z_{sup})} \quad (2.8)$$

$$E^{S,p,U}(\vec{r})|_{z > z_{sup}} = E^{i,p,U}(\vec{r})|_{z < z_{sup}} e^{jk_z(z_{inf}-z_{sup})} \quad (2.9)$$

En notant  $k_z = \vec{\mathbf{k}}^{i,D} \cdot \vec{z}$  ( $= \vec{\mathbf{k}}^{i,U} \cdot \vec{z}$ ), et en tenant des conventions données sur le schéma 2.1, on a la matrice  $\mathcal{S}$  suivante :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-jk_z(z_{inf}-z_{sup})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-jk_z(z_{inf}-z_{sup})} \\ e^{+jk_z(z_{inf}-z_{sup})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{+jk_z(z_{inf}-z_{sup})} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

**Plan parfaitement conducteur** Compte tenu de la condition aux limites  $(\vec{\mathbf{E}}^i + \vec{\mathbf{E}}^S) \times \vec{z} = 0$  sur le plan conducteur, et de ce qu'aucune onde incidente ne peut provenir du domaine

inférieur, on a :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

**Changement de référence de phase :** Les changements de référence de phase sont toujours possibles. Il convient d'écrire les champs incidents et diffractés avec les nouvelles références de phase pour voir quel déphasage appliquer.

### 2.2.2 Cas général

Nous voulons à présent généraliser le problème : on éclaire toujours la structure bipériodique avec une onde incidente pseudopériodique. C'est la seule condition que l'on impose ; dans ce cas :

- les deux domaines semi-infinis peuvent être constitués de matériaux différents, éventuellement absorbants ;
- lorsque les matériaux des domaines semi-infinis ne sont pas absorbants, il y a un nombre indéfini (mais toujours fini !) de modes propagatifs ;
- on peut avoir à prendre en compte les modes évanescents ou atténués (dans le cas de matériau absorbant).

#### Champ incident

Le champ électrique incident est défini par les composantes dans le plan  $Oxy$  de son vecteur d'onde :  $k_x^i$  et  $k_y^i$  qui sont toujours réelles afin d'assurer la pseudopériodicité du champ. On définit les modes de Floquet-Bloch incidents de la même manière que les modes diffractés (cf. éq. (1.47) à (1.49)), par leurs vecteurs d'ondes  $\vec{k}_{nm}^{i,c}$  et leurs vecteurs de polarisation  $\vec{u}_{nm}^{i,H,c}$  et  $\vec{u}_{nm}^{i,V,c}$ , où  $c \in \{D, U\}$ .

$$\text{On a : } \begin{pmatrix} \vec{k}_{nm}^{i,c} \cdot \vec{x} \\ \vec{k}_{nm}^{i,c} \cdot \vec{y} \\ \vec{k}_{nm}^{i,c} \cdot \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{k}_{nm}^c \cdot \vec{x} \\ \vec{k}_{nm}^c \cdot \vec{y} \\ -\vec{k}_{nm}^c \cdot \vec{z} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_{nm}^{i,H,c} = \frac{\vec{k}_{nm}^c \times \vec{z}}{\|\vec{k}_{nm}^c \times \vec{z}\|} \text{ et } \vec{u}_{nm}^{i,V,c} = \frac{\vec{k}_{nm}^c}{k_{obs}^c} \times \vec{u}_{nm}^{H,c},$$

où le vecteur d'onde diffracté  $\vec{k}_{nm}^c$  est choisi d'après l'équation (1.41).

Les modes de Floquet-Bloch incidents ont alors la forme suivante, en tenant compte des références de phase :

$$\vec{\psi}_{nm}^{i,p,c} = u_{nm}^{i,p,c} e^{-j\vec{k}_{nm}^{i,c} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0^c)}, \quad \text{avec } c \in \{D, U\}. \quad (2.12)$$

Le champ incident s'écrit alors de la manière suivante :

$$\vec{\mathbf{E}}^i(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\}}} E_{nm}^{i,p,D} \vec{\psi}_{nm}^{i,p,D}, & \text{pour } z > z_{sup} \\ \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\}}} E_{nm}^{i,p,U} \vec{\psi}_{nm}^{i,p,U}, & \text{pour } z < z_{inf}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Les coefficients  $E_{nm}^{i,p,c}$  dans cette décomposition sont soit imposés (si l'on prend  $\vec{\mathbf{E}}^i(\vec{r}) = \vec{\psi}_{nm}^{i,p,c}$  par exemple), soit calculés par (1.31). Le plus souvent, nous prenons les modes de Floquet-Bloch incidents un par un, pour calculer la matrice S. La décomposition (2.13) est intéressante pour l'analogie avec la décomposition du champ diffracté et pour décomposer une onde incidente pseudopériodique quelconque sur les modes de Floquet-Bloch.

### Champ diffracté

Le champ diffracté a ici la forme la plus générale que l'on puisse adopter, celle de l'équation (1.54) :

$$\vec{\mathbf{E}}^S(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\}}} E_{nm}^{S,p,U} \vec{\psi}_{nm}^{S,p,U}, & \text{pour } z > z_{sup} \\ \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\}}} E_{nm}^{S,p,D} \vec{\psi}_{nm}^{S,p,D}, & \text{pour } z < z_{inf}. \end{cases} \quad (2.14)$$

### Matrice S

La linéarité des équations de Maxwell nous dit que la réponse à l'excitation due au champ incident est la somme des réponses aux excitations dues à chaque mode de Floquet-Bloch de la décomposition. On peut donc imaginer, formellement, une matrice ( $\mathcal{S}$ ) de taille infinie, telle que :

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ E_{nm}^{S,H,U} \\ E_{nm}^{S,V,U} \\ \vdots \\ E_{nm}^{S,H,D} \\ E_{nm}^{S,V,D} \\ \vdots \end{pmatrix} = (\mathcal{S}) \begin{pmatrix} \vdots \\ E_{nm}^{i,H,D} \\ E_{nm}^{i,V,D} \\ \vdots \\ E_{nm}^{i,H,U} \\ E_{nm}^{i,V,U} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Cette matrice ( $\mathcal{S}$ ) est appelée *matrice de scattering*.

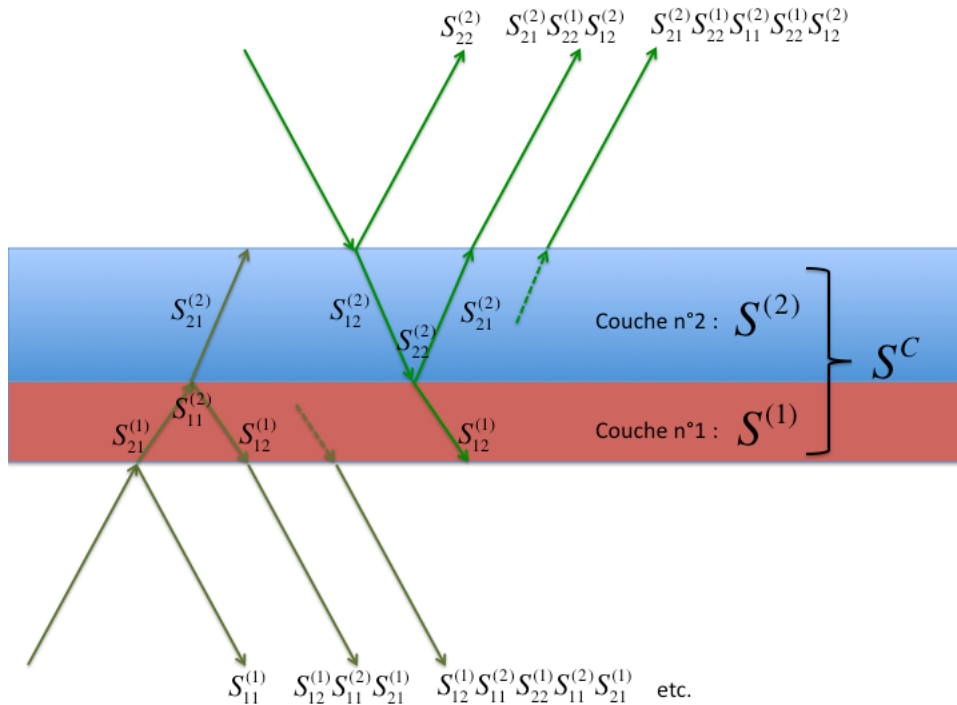
## Troncature du système

Le plus souvent, seuls quelques termes de la matrice de scattering nous intéressent.

On choisira souvent une onde incidente qui est la somme de modes uniquement propagatifs. Mais il peut être intéressant d'exciter le réseau bipériodique par une onde incidente dont certains termes dans la décomposition (2.13) sont évanescents ou atténués (si le matériau considéré est absorbant) : par exemple dans les cas où le calcul de la matrice  $S$  est un prélude à une étude d'empilements fortement couplés.

## 2.3 Empilement de matrices $S$

Les matrices  $S$  peuvent être utilisées pour calculer la diffraction d'une onde incidente par des empilements de couches, qui peuvent être homogènes ou périodiques. Nous décrivons très rapidement la technique de mise en cascade de matrices  $S$ , en s'appuyant sur l'exemple simple de deux structures mises l'une sur l'autre et de matrices  $S$  respectives  $S^{(1)}$  et  $S^{(2)}$ , et l'on supposera que seul le mode fondamental  $(0,0)$  est propagatif. L'algorithme de matrice  $S$  est itératif : on ajoute à chaque itération une matrice à l'empilement, en utilisant les formules données ci-dessous. Dans la mesure où nous n'avons pas directement utilisé cette technique dans cette thèse, nous ne développons pas davantage ; le lecteur peut se référer à l'une des références suivantes s'il souhaite approfondir le sujet : [20], [38] ou encore [53].



**FIGURE 2.3** – Quelques termes intervenant dans le calcul de la matrice  $S^C$  qui caractérise un empilement de deux couches, de matrice  $S^{(1)}$  et  $S^{(2)}$ .

Compte tenu du fait que les matrices  $S$  que nous calculons contiennent les informations de déphasage dues aux différentes références de phase, la matrice  $S^C$  de l'empilement est telle que :

$$S_{11}^C = S_{11}^{(1)} + S_{12}^{(1)} \left[ 1 - S_{11}^{(2)} S_{22}^{(1)} \right]^{-1} S_{11}^{(2)} S_{21}^{(1)} \quad (2.16)$$

$$S_{12}^C = S_{12}^{(1)} \left[ 1 - S_{11}^{(2)} S_{22}^{(1)} \right]^{-1} S_{12}^{(2)} \quad (2.17)$$

$$S_{21}^C = S_{21}^{(2)} \left[ 1 - S_{22}^{(1)} S_{11}^{(2)} \right]^{-1} S_{21}^{(1)} \quad (2.18)$$

$$S_{22}^C = S_{22}^{(2)} + S_{21}^{(2)} \left[ 1 - S_{22}^{(1)} S_{11}^{(2)} \right]^{-1} S_{22}^{(1)} S_{12}^{(2)} \quad (2.19)$$

où les termes  $\left[ 1 - S_{11}^{(2)} S_{22}^{(1)} \right]^{-1}$  et  $\left[ 1 - S_{22}^{(1)} S_{11}^{(2)} \right]^{-1}$  sont les termes de multi-réflexion entre les deux couches :

$$\left[ 1 - S_{11}^{(2)} S_{22}^{(1)} \right]^{-1} = 1 + S_{11}^{(2)} S_{22}^{(1)} + \left( S_{11}^{(2)} S_{22}^{(1)} \right)^2 + \left( S_{11}^{(2)} S_{22}^{(1)} \right)^3 + \dots$$

Cet algorithme de calculs d'empilements ("S-matrix algorithm") est numériquement stable et relativement facile à implémenter (cf. [38]). Il existe d'autres algorithmes plus simples : par exemple l'algorithme de la matrice  $T$ , qui exprime le champ d'un côté du réseau en fonction du champ de l'autre côté du réseau. Mais cet algorithme n'est pas numériquement stable, car il fait apparaître des produits d'exponentielles positives.

## 2.4 Calcul des coefficients de la matrice $S$

Nous verrons plus loin, au chapitre 4, que les inconnues de la méthode des équations intégrales sont les courants surfaciques électrique  $\vec{J} = \vec{n} \times \vec{H}$  et magnétique  $\vec{M} = \vec{E} \times \vec{n}$  où  $\vec{n}$  est la normale à une interface entre deux domaines différents.

Comme les champs incidents  $\vec{E}^i$  et  $\vec{H}^i$  sont connus, on en déduit les courants électrique  $\vec{J}^S$  et magnétique  $\vec{M}^S$  dus aux champs diffractés  $\vec{E}^S$  et  $\vec{H}^S$  :

$$\begin{aligned} \vec{J}^S &= \vec{J} - \vec{n} \times \vec{H}^i = \vec{n} \times \vec{H}^S \\ \vec{M}^S &= \vec{M} - \vec{E}^i \times \vec{n} = \vec{E}^S \times \vec{n} \end{aligned} \quad (2.20)$$

L'équation (2.14) décrit le champ électrique comme somme de modes de Floquet-Bloch. Par (1.42) et (1.47), on sait que le champ magnétique admet une décomposition de modes de Floquet-Bloch qui se déduit immédiatement du champ électrique par :

$$\vec{H}^S(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\}}} H_{nm}^{S,p,U} u_{nm}^{p,U} e^{-j\vec{k}_{nm}^U \cdot (\vec{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{u})}, & \text{pour } z > z_{sup} \\ \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\}}} H_{nm}^{S,p,D} u_{nm}^{p,D} e^{-j\vec{k}_{nm}^D \cdot (\vec{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{D})}, & \text{pour } z < z_{inf} \end{cases} \quad (2.21)$$

Avec, pour tout  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $p \in \{H, V\}$  et  $c \in \{D, U\}$  :

$$H_{nm}^{S,p,c} \vec{u}_{nm}^{p,c} = \frac{E_{nm}^{S,p,c}}{\omega \mu_c} \vec{k}_{nm}^c \times \vec{u}_{nm}^{p,c}, \quad (2.22)$$

où  $\mu_c$  désigne la perméabilité magnétique relative du domaine semi-infini dans lequel l'on se place ( $D$  pour le domaine inférieur et  $U$  pour le domaine supérieur).

Nous allons montrer que chaque coefficient du type  $E_{nm}^{S,p,U}$  (un raisonnement similaire pourra être écrit pour  $E_{nm}^{S,p,D}$ ) peut être calculé à partir d'une grandeur appelée *intégrale de réaction* : pour une onde d'observation donnée, de vecteur d'onde  $\vec{k}^{obs}$  et pour un vecteur de polarisation  $\vec{u} = \vec{u}_H$  ou  $\vec{u}_V$ , nous calculons la grandeur suivante, que l'on appellera *intégrale de réaction* :

$$\begin{aligned} IR(\vec{k}^{obs}, \vec{u}) &= \omega \mu \int_{\Gamma} e^{j\vec{k}^{obs} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0,U})} \left( \vec{J}^S(\vec{r}) \cdot \vec{u} \right) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} e^{j\vec{k}^{obs} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0,U})} \vec{M}^S(\vec{r}) \cdot (\vec{k}^{obs} \times \vec{u}) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.23)$$

où  $\Gamma$  est la frontière d'un domaine semi-infini restreinte à une cellule de périodicité.

La surface d'intégration  $\Gamma$  n'est *a priori* pas plane. Mais l'intégrale de réaction peut aussi se calculer sur une surface  $\Gamma'$  parallèle à  $Oxy$ , à la cote  $z = z_{sup}$  ou  $z = z_{inf}$  et orientée comme  $\Gamma$ , par application du principe de Huygens (cf. [33]) :

$$\begin{aligned} IR(\vec{k}^{obs}, \vec{u}) &= \omega \mu_c \int_{\Gamma'} e^{j\vec{k}^{obs} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0,U})} \left( \vec{J}^S(\vec{r}) \cdot \vec{u} \right) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma'} e^{j\vec{k}^{obs} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0,U})} \vec{M}^S(\vec{r}) \cdot (\vec{k}^{obs} \times \vec{u}) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.24)$$

A titre d'exemple, plaçons-nous dans le domaine  $U$  ("up", supérieur). Le cas inverse se traite de la même manière.

On se souvient de l'orthogonalité des modes de Floquet (cf. par exemple [84]) et du théorème de Stokes pour les surfaces ouvertes<sup>1</sup>, en tenant compte du fait que  $\vec{n} = \pm \vec{z}$  :

$$\int_{\Gamma} e^{j(\vec{k}_{nm}^U - \vec{k}_{n'm'}^U) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0,U})} \vec{n} d\Gamma = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \int_{\Gamma} \vec{n} d\Gamma = \delta_{nn'} \delta_{mm'} T_1 T_2 \hat{z}, \quad (2.25)$$

$\delta_{nn'}$  étant le symbole de Kronecker, valant 1 si  $n = n'$ , 0 sinon.

Par ailleurs, à partir de (2.21), on peut écrire que les courants se décomposent ainsi :

---

1.  $\iint_S \hat{n} dS = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times d\vec{l}$

$$\vec{J}^S(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\}}} E_{nm}^{S,p,U} \vec{n} \times \frac{\vec{k}_{nm}^U \times \vec{u}_{nm}^{p,U}}{\omega \mu_U} e^{-j\vec{k}_{nm}^U \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0,U})}, & \text{pour } z > z_{sup} \\ \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\}}} E_{nm}^{S,p,D} \vec{n} \times \frac{\vec{k}_{nm}^D \times \vec{u}_{nm}^{p,D}}{\omega \mu_D} e^{-j\vec{k}_{nm}^D \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0,D})}, & \text{pour } z < z_{inf} \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\vec{M}^S(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\}}} E_{nm}^{S,p,U} (\vec{u}_{nm}^{p,U} \times \vec{n}) e^{-j\vec{k}_{nm}^U \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0,U})}, & \text{pour } z > z_{sup} \\ \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\}}} E_{nm}^{S,p,D} (\vec{u}_{nm}^{p,D} \times \vec{n}) e^{-j\vec{k}_{nm}^D \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0,D})}, & \text{pour } z < z_{inf} \end{cases} \quad (2.27)$$

En prenant  $\vec{k}^{obs} = \vec{k}_{nm}^U$ , nous avons :

$$\begin{aligned} IR(\vec{k}_{nm}^U, \vec{u}) &= \sum_{n', m'} \int_{\Gamma} e^{j(\vec{k}_{nm}^U - \vec{k}_{n'm'}^U) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0,U})} E_{n'm'}^{p,U} \left[ \vec{n} \times (\vec{k}_{n'm'}^U \times \vec{u}_{n'm'}^{p,U}) \right] \cdot \vec{u} d\Gamma \\ &+ \sum_{n', m'} \int_{\Gamma} e^{j(\vec{k}_{nm}^U - \vec{k}_{n'm'}^U) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0,U})} E_{n'm'}^{p,U} (\vec{u}_{n'm'}^{p,U} \times \vec{n}) \cdot (\vec{k}_{nm}^U \times \vec{u}) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.28)$$

Avec quelques identités d'algèbre vectorielle et la relation d'orthogonalité (2.25), on obtient :

$$IR(\vec{k}_{nm}^+, \vec{u}^p) = -2E_{nm}^{p,U} \int_{\Gamma} (\vec{n} \cdot \vec{k}_{nm}^U) d\Gamma = -2E_{nm}^{p,U} T_1 T_2 \gamma_{nm}, \quad (2.29)$$

avec  $\gamma_{nm}$  défini par (1.33).

D'où :

$$E_{nm}^{p,U} = \frac{-IR(\vec{k}_{nm}^+, \vec{u}^p)}{2T_1 T_2 \gamma_{nm}} \quad (2.30)$$

## 2.5 Conservation de l'énergie

Effectuer un bilan d'énergie est une démarche classique : R. Petit [63] la présente dans le cas simple où le réseau n'est éclairé que par des ondes planes propagatives. R. Carminati et *al.* [16] présentent cette démarche dans le cas où l'objet diffractant est éclairé par des champs incidents scalaires, propagatifs et évanescents. Nous donnons ici les grandes lignes du bilan d'énergie correspondant à la diffraction d'une onde pseudopériodique par un réseau bipériodique : le champ est vectoriel et nous tenons compte des modes évanescents. Pour simplifier les calculs, nous nous plaçons dans le cas où aucun des deux domaines semi-infinis entourant la structure bipériodique n'est absorbant.

L'équation locale de conservation de l'énergie en régime harmonique s'écrit :

$$\left\langle -\vec{\mathbf{j}}_{ext} \cdot \vec{\mathbf{E}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial P_{abs}}{\partial V} \right\rangle + \vec{\nabla} \cdot \left\langle \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}} \right\rangle, \quad (2.31)$$

où  $\langle . \rangle$  représente la valeur moyenne sur une période temporelle et  $\vec{\mathbf{j}}_{ext}$  est un courant électrique imposé de l'extérieur sur le système.

Le terme  $\langle -\vec{\mathbf{j}}_{ext} \cdot \vec{\mathbf{E}} \rangle$  correspond à l'énergie fournie par les sources extérieures. Nous n'en avons pas :  $\langle -\vec{\mathbf{j}}_{ext} \cdot \vec{\mathbf{E}} \rangle = 0$ . Le terme  $\langle \frac{\partial P_{abs}}{\partial V} \rangle$  représente l'énergie absorbée par le système (les pertes) et  $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}} \rangle$  est l'énergie rayonnée par le système.

Nous pouvons intégrer cette équation sur un volume  $V = [0, T_1] \times [0, T_1] \times [z_1, z_2]$ , où  $z_1 \leq z_{inf}$  et  $z_2 \geq z_{sup}$ . Nous avons alors :

$$\int_V \left\langle \frac{\partial P_{abs}}{\partial V} \right\rangle dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot \left\langle \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}} \right\rangle dV = 0. \quad (2.32)$$

Travaillant en régime harmonique, nous pouvons écrire que  $\left\langle \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}} \right\rangle = \frac{1}{2} \Re e \left[ \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}^* \right]$ . Nous notons également  $\int_V \left\langle \frac{\partial P_{abs}}{\partial V} \right\rangle dV = P_{abs}^{tot}$

Par ailleurs, le théorème de la divergence donne :

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \left\langle \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}} \right\rangle dV = \oint_{\partial V} \left\langle \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}} \right\rangle \cdot \vec{n} ds$$

La pseudopériodicité du champ électromagnétique fait que les flux du vecteur de Poynting à travers les bords verticaux de  $\partial V$  se compensent entre eux. Il reste :

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \left\langle \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}} \right\rangle dV = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{2} \Re e \left[ \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}^* \right] \cdot (-\vec{z}) ds + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{2} \Re e \left[ \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}^* \right] \cdot \vec{z} ds, \quad (2.33)$$

où  $\Gamma_1 = [0, T_1] \times [0, T_2] \times \{z_1\}$  et  $\Gamma_2 = [0, T_1] \times [0, T_2] \times \{z_2\}$ .

Faire un bilan d'énergie pour les problèmes bipériodiques que nous étudions revient donc à examiner le flux du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi} = \frac{1}{2} \Re e \left[ \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}^* \right]$  à travers  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Nous connaissons les décompositions (2.13) et (2.14) des champs incidents et diffractés dans la base des modes de Floquet et le champ total est défini comme la somme du champ incident et du champ diffracté :  $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}^i + \vec{\mathbf{E}}^S$  et  $\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{H}}^i + \vec{\mathbf{H}}^S$ .

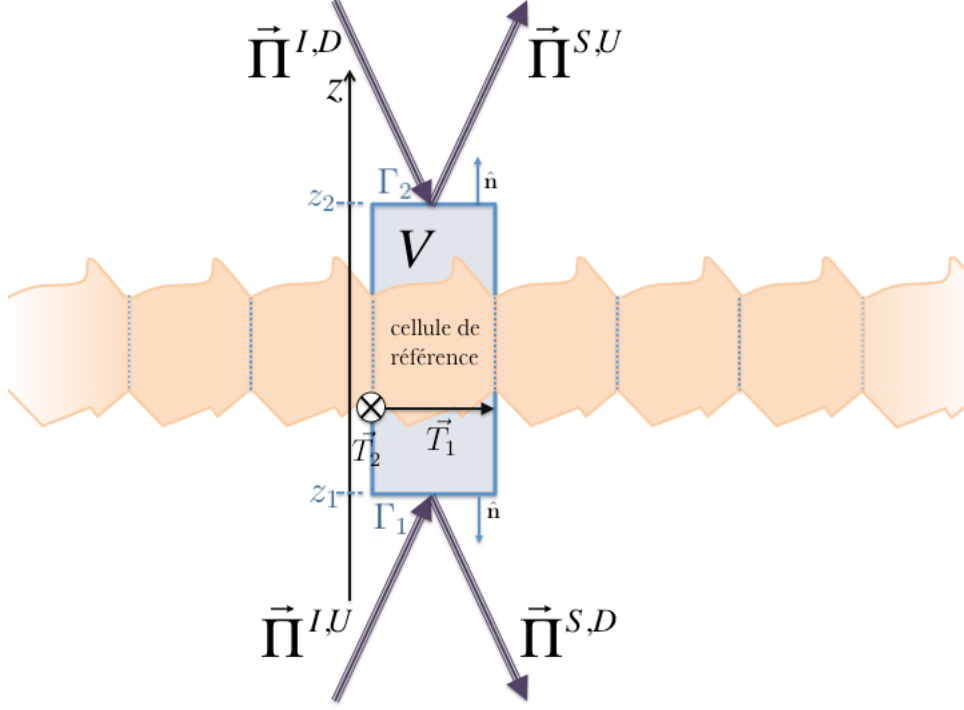


FIGURE 2.4 – Flux des vecteurs de Poynting à travers les surfaces  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Nous avons donc  $-P_{abs}^{tot} = e_i + e_s + e_{i,s} + e_{s,i}$ , où :

$$e_i = -\frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_1} \Re e \left( \vec{\mathbf{E}}^{i,U} \times \vec{\mathbf{H}}^{*,i,U} \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_2} \Re e \left( \vec{\mathbf{E}}^{i,D} \times \vec{\mathbf{H}}^{*,i,D} \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma \quad (2.34)$$

$$e_s = -\frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_1} \Re e \left( \vec{\mathbf{E}}^{S,D} \times \vec{\mathbf{H}}^{*,S,D} \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_2} \Re e \left( \vec{\mathbf{E}}^{S,U} \times \vec{\mathbf{H}}^{*,S,U} \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma \quad (2.35)$$

$$e_{is} = -\frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_1} \Re e \left( \vec{\mathbf{E}}^{i,U} \times \vec{\mathbf{H}}^{*,S,D} \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_2} \Re e \left( \vec{\mathbf{E}}^{i,D} \times \vec{\mathbf{H}}^{*,S,U} \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma \quad (2.36)$$

$$e_{si} = -\frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_1} \Re e \left( \vec{\mathbf{E}}^{S,D} \times \vec{\mathbf{H}}^{*,i,U} \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_2} \Re e \left( \vec{\mathbf{E}}^{S,U} \times \vec{\mathbf{H}}^{*,i,D} \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma \quad (2.37)$$

L'orthogonalité des modes de Floquet (2.25) permet de simplifier  $e_i$  et  $e_s$  :

$$\begin{aligned} e_i = & -\frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_1} \sum_{n,m} \Re e \left( \left( E_{n,m}^{i,p,U} \vec{\psi}_{nm}^{i,p,U} \right) \times \left( \frac{E_{nm}^{i,p,U}}{\omega \mu_D} \vec{\mathbf{k}}_{nm}^U \times \vec{\psi}_{nm}^{i,p,U} \right)^* \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma \\ & + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_2} \sum_{n,m} \Re e \left( \left( E_{n,m}^{i,p,D} \vec{\psi}_{nm}^{i,p,D} \right) \times \left( \frac{E_{nm}^{i,p,D}}{\omega \mu_U} \vec{\mathbf{k}}_{nm}^D \times \vec{\psi}_{nm}^{i,p,D} \right)^* \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} e_s = & -\frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_1} \sum_{n,m} \Re e \left( \left( E_{n,m}^{S,p,D} \vec{\psi}_{nm}^{S,p,D} \right) \times \left( \frac{E_{nm}^{S,p,D}}{\omega \mu_D} \vec{\mathbf{k}}_{nm}^D \times \vec{\psi}_{nm}^{i,p,D} \right)^* \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma \\ & + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_2} \sum_{n,m} \Re e \left( \left( E_{n,m}^{S,p,U} \vec{\psi}_{nm}^{S,p,U} \right) \times \left( \frac{E_{nm}^{S,p,U}}{\omega \mu_U} \vec{\mathbf{k}}_{nm}^U \times \vec{\psi}_{nm}^{i,p,U} \right)^* \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.39)$$

Les sommations ne se font en réalité que sur les modes  $(n, m)$  propagatifs : les modes évanescents (ou atténués) ne transportent pas d'énergie dans la direction  $\hat{\mathbf{z}}$ . En injectant (2.22) dans (2.38) et (2.39), on obtient :

$$e_i = -T_1 T_2 \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\} \\ c \in \{D, U\}}} \frac{|\gamma_{nm}^c|}{\omega \mu_c} |E_{nm}^{i,p,c}|^2 \quad (2.40)$$

$$e_s = T_1 T_2 \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\} \\ c \in \{D, U\}}} \frac{|\gamma_{nm}^c|}{\omega \mu_c} |E_{nm}^{S,p,c}|^2 \quad (2.41)$$

On appelle *efficacité de diffraction* dans le mode propagatif  $(n, m)$ , la quantité :

$$e_{nm,pp,cc} = \frac{|\gamma_{nm}^c|}{\omega \mu_c |e_i|} |E_{nm}^{S,p,c}|^2 \quad (2.42)$$

avec  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $pp \in \{HH, HV, VH, VV\}$ ,  $cc \in \{DD, DU, UD, UU\}$ .

Il nous faut à présent traiter les termes croisés  $e_{is}$  et  $e_{si}$  ; l'orthogonalité des modes de Floquet (2.25) s'applique encore et l'on a :

$$\begin{aligned} e_{is} + e_{si} = & - \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_1} \sum_{n,m} \Re e \left( \left( E_{n,m}^{i,p,U} \vec{\psi}_{nm}^{i,p,U} \right) \times \left( \frac{E_{nm}^{S,p,D}}{\omega \mu_D} \vec{\mathbf{k}}_{nm}^D \times \vec{\psi}_{nm}^{S,p,D} \right)^* \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma \\ & + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_2} \sum_{n,m} \Re e \left( \left( E_{n,m}^{i,p,D} \vec{\psi}_{nm}^{i,p,D} \right) \times \left( \frac{E_{nm}^{S,p,U}}{\omega \mu_U} \vec{\mathbf{k}}_{nm}^U \times \vec{\psi}_{nm}^{S,p,U} \right)^* \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma \\ & - \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_1} \sum_{n,m} \Re e \left( \left( E_{n,m}^{S,p,D} \vec{\psi}_{nm}^{S,p,D} \right) \times \left( \frac{E_{nm}^{i,p,U}}{\omega \mu_D} \vec{\mathbf{k}}_{nm}^U \times \vec{\psi}_{nm}^{i,p,U} \right)^* \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma \\ & + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_2} \sum_{n,m} \Re e \left( \left( E_{n,m}^{S,p,U} \vec{\psi}_{nm}^{S,p,U} \right) \times \left( \frac{E_{nm}^{i,p,D}}{\omega \mu_U} \vec{\mathbf{k}}_{nm}^D \times \vec{\psi}_{nm}^{i,p,D} \right)^* \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} d\Gamma \quad (2.43) \end{aligned}$$

On montre (en développant les calculs) que les sommations dans  $e_{is} + e_{si}$  ne se font que sur les modes évanescents de même polarisation. Cela donne :

$$e_{is} + e_{si} = T_1 T_2 \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ p \in \{H, V\} \\ c \in \{D, U\}}} |\Im \gamma_{nm}^c| \frac{\Im (E_{n,m}^{i,p,U} E_{n,m}^{*S,p,U})}{\omega \mu_c} \quad (2.44)$$

Lorsque le réseau est éclairé par une onde évanescente, un couplage transportant de l'énergie se fait entre l'onde incidente évanescence et l'onde réfléchie évanescence.

Cependant, dans la plupart des cas traités, le réseau bipériodique n'est éclairé par aucune onde incidente évanescence. L'expression de conservation de l'énergie se résume alors à :

$$1 - \frac{P_{abs}^{tot}}{|e_i|} = \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ pp \in \{HH, HV, VH, VV\} \\ c \in \{DD, DU, UD, UU\}}} \frac{|\gamma_{nm}^c|}{\omega \mu_c |e_i|} |E_{nm}^{S,p,c}|^2 = \left| \frac{e_s}{e_i} \right| \quad (2.45)$$

En notant  $E_i$  et  $E_s$  les vecteurs contenant les  $E_{nm}^{i,p,c}$  et les  $E_{nm}^{S,p,c}$  et  $K_z$  la matrice diagonale telle que les termes diagonaux soient les  $\frac{|\gamma_{nm}^c|}{\omega \mu_c}$ , et en notant  $A^\dagger$  la transposée-conjuguée de la matrice  $A$ , on a :

$$e_i = E_i^\dagger K_z E_i \quad (2.46)$$

$$e_s = E_s^\dagger K_z E_s = E_i^\dagger S^\dagger K_z S E_i \quad (2.47)$$

Le taux de conservation d'énergie vaut donc :

$$\left| \frac{e_s}{e_i} \right| = \frac{E_i^\dagger S^\dagger K_z S E_i}{E_i^\dagger K_z E_i} \quad (2.48)$$

**Utilité** Cette expression peut être utilisée pour étudier les propriétés absorbantes d'une structure bipériodique. Mais c'est également une façon de mesurer la précision des solutions fournies par la méthode numérique développée : dans le cas où aucun matériau absorbant n'est utilisé ( $P_{abs}^{tot} = 0$ ), on rappelle que l'on devrait obtenir  $\left| \frac{e_s}{e_i} \right| = 1$  en l'absence d'erreurs numériques.

## 2.6 Conclusion

A l'issue de ce chapitre 2, nous disposons d'un formalisme qui nous permet de décrire la diffraction d'une onde pseudopériodique par un réseau périodique : nous avons préféré une présentation des coefficients de réflexion et de transmission sous forme de matrice de *scattering* (ou de diffusion), dite matrice  $S$ , à l'utilisation d'autres types de matrices, comme la matrice  $T$ , pour des raisons de stabilité d'algorithme de calcul d'empilements. La taille de la matrice  $S$  est variable, en fonction du nombre de modes de Floquet-Bloch que l'on souhaite prendre en compte.

Les coefficients de la matrice  $S$  sont calculés facilement à partir des courants électriques et magnétiques sur les interfaces.

Nous avons enfin étudié la conservation de l'énergie : dans les cas habituels, seuls les modes de Floquet-Bloch propagatifs transportent de l'énergie à grande distance, mais si la structure pseudopériodique est éclairée par un mode évanescence  $\vec{E}_{nm}^{i,p,U}$  (resp.  $\vec{E}_{nm}^{i,p,D}$ ), le couplage avec le mode réfléchi  $\vec{E}_{nm}^{S,p,D}$  (resp.  $\vec{E}_{nm}^{S,p,U}$ ) transporte également de l'énergie.

Nous avons également vu que l'étude de la conservation de l'énergie est un bon indicateur de la précision du code numérique.

Jusqu'à présent, nous avons utilisé la structure bipériodique comme une boîte noire ; nous avons décrit les propriétés générales du champ diffracté. Les chapitres suivants (3, 4 et 5) présentent la méthode que nous avons développée pour calculer la diffraction par une structure bipériodique.

# Chapitre 3

## État de l'art sur les méthodes numériques

### Table des matières

---

|            |                                                                     |           |
|------------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3.1</b> | <b>Introduction . . . . .</b>                                       | <b>36</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Méthodes modales . . . . .</b>                                   | <b>36</b> |
| <b>3.3</b> | <b>Différences finies et éléments finis bipériodiques . . . . .</b> | <b>39</b> |
| 3.3.1      | La méthode des différences finies . . . . .                         | 39        |
| 3.3.2      | La méthode des éléments finis . . . . .                             | 40        |
| <b>3.4</b> | <b>Équations intégrales bipériodiques . . . . .</b>                 | <b>42</b> |
| <b>3.5</b> | <b>Méthodes hybrides . . . . .</b>                                  | <b>44</b> |

---

## 3.1 Introduction

Avant de décrire la méthode numérique que nous avons développée pour calculer la diffraction d'une onde électromagnétique par une structure bipériodique, nous avons jugé intéressant de faire un tour d'horizon des différents types de méthodes numériques qui ont déjà été proposées pour traiter le problème.

Les méthodes modales modélisent les structures physiques bipériodiques comme des empilements de couches homogènes en  $z$  et bipériodiques dans le plan  $Oxy$  : on calcule la matrice  $S$  de chaque couche et on procède au calcul de l'empilement.

Les méthodes de différences finies (DF) et d'éléments finis (EF) font partie des méthodes différentielles. Elles imposent une discrétisation des structures bipériodiques considérées à l'aide d'éléments volumiques : maillages cubiques dans le cas des différences finies ou maillages tétraédriques à densité variable dans le cas des éléments finis.

Les méthodes d'équations intégrales bipériodiques sont des méthodes surfaciques : elles utilisent des formulations par équations intégrales qui sont écrites sur les surfaces des domaines homogènes qui constituent l'objet.

Les méthodes hybrides combinent plusieurs méthodes dans l'espoir de profiter des avantages de chacune.

Nous décrivons dans ce chapitre les principales caractéristiques de quelques-unes de ces méthodes en essayant de donner pour chacune d'elles ses avantages et ses limitations.

## 3.2 Les méthodes modales

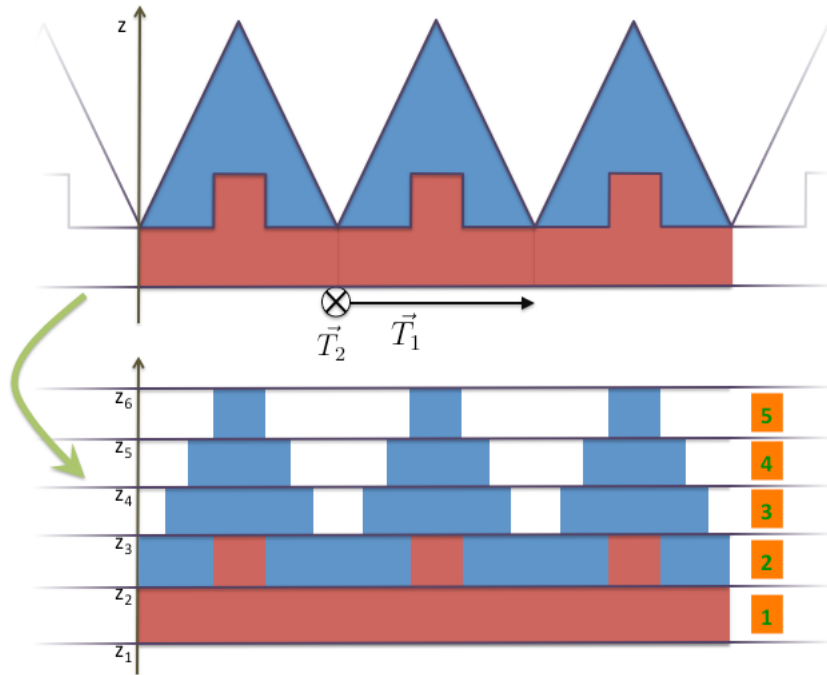
On trouve notamment dans cette catégorie la méthode dite « théorie rigoureuse des ondes couplées » (“méthode RCWA”, pour *Rigorous Coupled-Wave Analysis*) et une variante de celle-ci, la méthode modale de Fourier (FMM, pour *Fourier Modal Method*<sup>1</sup>). Cette méthode a été proposée par [54] et un algorithme a été donné par Chateau et Hugonin [18]. Ph. Lalanne et G. M. Morris en ont proposé une formulation rigoureuse [37]. La méthode FMM a principalement été étudiée par Lifeng Li, qui l'a, en particulier, adaptée au cas où les deux vecteurs de périodicité ne sont pas orthogonaux [39].

---

1. à ne pas confondre avec les méthodes multipôles, également surnommées FMM (pour *Fast Multipole Method*), qui font partie des méthodes intégrales, mais n'ont pas encore été développées, à notre connaissance, pour des problèmes bipériodiques

Nous présentons ici les grandes lignes de la méthode RCWA, que nous avons eu l'occasion d'utiliser et de comparer à la méthode que nous avons développée.

**Principe** La *théorie rigoureuse des ondes couplées* (RCWA, pour *Rigorous Coupled Wave Analysis*) procède par décomposition modale des champs dans des couches supposées homogènes dans la direction orthogonale au réseau : elle découpe la cellule de périodicité en  $N_C$  couches horizontales dans lesquelles la permittivité électrique  $\varepsilon$  est supposée invariante en  $z$  et bipériodique en  $(x, y)$ . Les matériaux utilisés sont supposés ici non-magnétiques ( $\mu = \mu_0$ ), mais une extension aux cas magnétiques est possible.



**FIGURE 3.1** – Exemple simplifié de modélisation d'une structure bipériodique par la méthode RCWA. Il y a trois matériaux différents (un par couleur) et cinq couches ( $N_C = 5$ ).

Connaissant la permittivité  $\varepsilon$  de la structure réelle, la description des matériaux dans la modélisation de la structure se fait grâce à l'écriture dans chaque couche de la permittivité électrique  $\varepsilon_p$ , qui est telle que, pour  $1 \leq p \leq N_C$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $z \in [z_p, z_{p+1}[$ , on ait :

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon(x, y, z_p) = \varepsilon_p(x, y) \quad (3.1)$$

Dans chaque couche  $p$ , on écrit la décomposition de Rayleigh (1.31) des fonctions pseudo-périodiques  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  (d'après 1.2.2) et également la décomposition en série de Fourier de la

fonction bipériodique  $\varepsilon_p$  :

$$\vec{E}_{(p)}(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \vec{E}_{(p),nm}(z) e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y)} \quad (3.2)$$

$$\vec{H}_{(p)}(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \vec{H}_{(p),nm}(z) e^{-j(\alpha_n x + \beta_m y)} \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_p(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{p,mn} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{T_x} x + \frac{2\pi n}{T_y} y\right)}, \quad (3.4)$$

où  $\vec{E}_{(p),nm}(z)$  dépendent de la polarisation que l'on a choisi d'étudier.

En injectant ces décompositions dans les équations de Maxwell harmoniques et en tenant compte des conditions de continuité aux interfaces, on obtient un système matriciel différentiel du premier ordre de taille infinie qui lie dérivées premières en  $z$  des coefficients des champs  $\vec{E}_{(p),nm}(z)$  aux coefficients de la permittivité  $\varepsilon_{p,mn}$  :

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{E}_{(p),nm}(z) \\ \vdots \\ \vec{H}_{(p),nm}(z) \\ \vdots \end{pmatrix} = (\mathcal{M}_p) \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{E}_{(p),nm}(z) \\ \vdots \\ \vec{H}_{(p),nm}(z) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Les coefficients de la permittivité  $\varepsilon_{p,mn}$  interviennent dans l'expression de la matrice  $(\mathcal{M}_p)$ .

Afin de pouvoir intégrer cette équation différentielle, il faut tronquer le système. On peut alors relier les champs de part et d'autre de la couche  $p$ . En tenant compte des conditions de continuité du champ aux interfaces entre les couches et en ayant obtenu une relation reliant les coefficients modaux des champs réfléchis et transmis à ceux des champs incidents, une technique de raccordement des solutions permet de résoudre le problème entier.

**Intérêts** Cette méthode présente plusieurs intérêts majeurs :

- Elle est relativement facile à programmer et à mettre en œuvre sur des géométries simples.
- Sa convergence est prouvée (cf. [37]) en fonction du nombre de couches prises en compte dans la modélisation et du nombre de modes de Floquet-Bloch.
- Les ressources informatiques nécessaires à un calcul sont en général réduites par rapport à des méthodes d'éléments finis ou d'équations intégrales.

### Limitations

- Lorsqu'il y a de forts contrastes d'indices entre les matériaux qui constituent la structure modélisée, il faut garder beaucoup de termes dans la décomposition de Fourier de la permittivité  $\varepsilon_p$  (ce qui revient à faire sa transformation de Fourier discrète sur un grand nombre de termes) car il faut prendre en compte correctement les fortes discontinuités aux interfaces entre matériaux. Il est alors difficile de savoir quel est le nombre minimum de

termes à garder dans la série de Fourier pour avoir une précision acceptable. D'autre part, garder un grand nombre de termes dans la série de Fourier peut être très handicapant en terme de ressources mémoire et de temps de calcul.

- Le calcul repose sur une discrétisation de la structure en  $N_C$  couches. La convergence du calcul impose de prendre un nombre de couches  $N_C$  suffisamment grand pour modéliser correctement la structure réelle. En contrepartie, plus les couches sont minces, plus les couplages entre modes évanescents sont élevés : cela impose de garder davantage de termes dans le système matriciel.
- Si la structure étudiée comprend des détails de taille caractéristique très inférieure au pas du réseau (comme des nanotubes de carbone, par exemple), la méthode RCWA est peu précise ou très coûteuse.
- La discrétisation en couches conduit à une discrétisation approchée par des pavés des surfaces ("effet Lego"). L'exemple de la pyramide ci-dessus le montre : il est impossible de modéliser une véritable pointe au sommet des pyramides, à moins de prendre en compte un grand nombre de couches  $N_C$ .

**Utilisation** La méthode RCWA est principalement utilisée dans les domaines de l'optique et de l'infrarouge. En effet, dans ces domaines, les structures fabricables ont des géométries relativement simples : réseaux de fentes, de trous, de pyramides,... et les matériaux sont quasiment tous diélectriques (il n'y a pas de conducteur parfait en optique et IR) et non-magnétiques. D'une manière générale, les conditions suivantes doivent être réunies : géométrie simple, indices optiques peu élevés, pas de matériaux parfaitement conducteurs. Ces critères peuvent être contournés si l'on accepte un temps de calcul important. Nous relatons deux exemples d'utilisation d'un code RCWA :

- François Marquier [46] utilise un code RCWA dans sa thèse pour étudier des phénomènes de transmission résonante à travers des réseaux de fentes ou de trous carrés dans des plaques d'argent ou de SiC : les géométries sont particulièrement simples, mais l'indice optique de l'argent est élevé.
- Des structures antiréfléchissantes en silicone, inspirées des yeux à facettes des mouches ont été modélisées à l'aide d'une méthode RCWA [77].

### 3.3 Les méthodes des différences finies (DF) et des éléments finis (EF) bipériodiques

Les méthodes des différences finies ou des éléments finis utilisées pour modéliser des problèmes bipériodiques sont des méthodes volumiques. Dans les deux cas, il faut introduire une condition aux limites approchée qui permet de borner le domaine de calcul.

#### 3.3.1 La méthode des différences finies

**Principe** La méthode des différences finies utilise une discrétisation des équations aux dérivées partielles : il s'agit généralement du schéma de Yee [87]. On impose des conditions de pseudopériodicité sur les bords de la cellule et des conditions aux limites absorbantes (de Mur [58] ou *PML* de Bérenger [12]) pour borner les domaines infinis.

La méthode des différences finies est le plus souvent utilisée dans le domaine temporel (FDTD, pour *Finite-difference time-domain*) ; les problèmes harmoniques sont alors traités en prenant comme source une onde harmonique ou par passage d'un signal large-bande dans le domaine fréquentiel.

Il existe des versions de la méthode des différences finies écrites pour le domaine fréquentiel (FDFD, pour *Finite-difference frequency domain*) mais il semble que ce soit moins efficace que les méthodes de type FDTD.

### Intérêts

- Un code numérique utilisant une méthode de différences finies de type FDTD est relativement simple à développer et à utiliser.
- Cette méthode demande peu de capacités de calcul.
- La méthode est utilisable à la fois dans les domaines temporel et fréquentiel.
- On peut modéliser des structures aux géométries complexes, dont les matériaux peuvent être anisotropes ou inhomogènes.

### Limitations

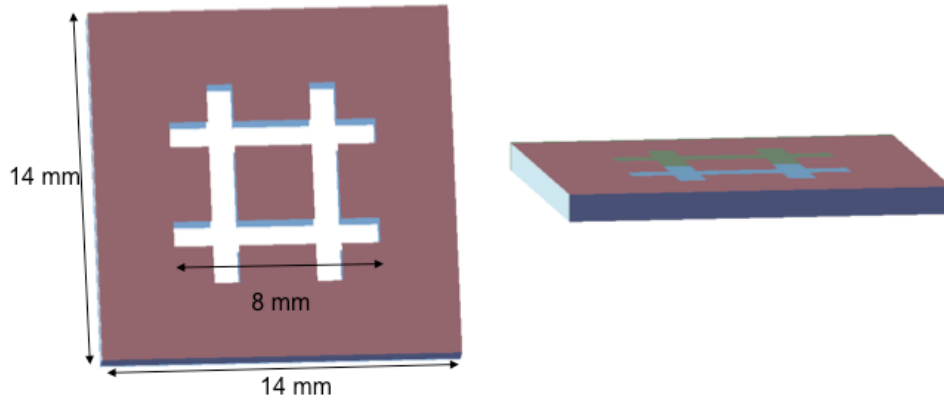
- Le schéma de Yee impose une discrétisation en mailles régulières : les surfaces qui ne s'inscrivent pas dans la grille sont approchées par des petits cubes.
- Cette méthode n'est pas adaptée à des géométries ayant des rapports de taille importants : il est certes possible de raffiner localement le maillage, mais cela peut poser éventuellement poser des problèmes de réflexions numériques au bord de la zone raffinée.
- Il faut des longueurs d'arêtes entre  $\lambda/16$  et  $\lambda/20$  pour avoir la convergence en maillage.
- Il est difficile de prendre en compte des matériaux dispersifs (i.e. dont la permittivité  $\varepsilon$  et la perméabilité  $\mu$  dépendent de la fréquence).
- Les conditions aux limites approchées introduisent une approximation, qui peut avoir une influence sur la précision du calcul.

**Exemples d'utilisation** Cette méthode est largement utilisée, principalement du fait de la facilité de développement et d'utilisation. Les structures étudiées sont toutefois relativement régulières, dont le maillage peut s'inscrire dans une grille régulière. Par ailleurs, il existe des logiciels commerciaux qui utilisent des méthodes de type FDTD, qui ne prennent pas en compte la bipériorité du problème : ils peuvent être appliquées à l'étude de réseaux bipériodiques tronqués.

Un exemple d'utilisation pertinente de cette méthode est présenté à la figure 3.2. Il s'agit d'un réseau de cavités parallélépipédiques remplies de matériau diélectrique dont les parois sont parfaitement conductrices et sur lesquelles ont été ménagées des ouvertures géométriques (cf. [42]). Les cavités sont remplies d'un matériau diélectrique.

### 3.3.2 La méthode des éléments finis

**Principe** La méthode des éléments finis (EF) projette le champ incident et la solution du problème sur une base de fonctions liée au maillage de la structure. Le maillage est



**FIGURE 3.2** – Cellule de périodicité d'un réseau de cavités parallélépipédiques remplies de matériau diélectrique. Les bords de la cavité sont métallisés à l'exception des ouvertures en forme de dièse.

également volumique, mais il est plus général qu'en méthode de différences finies : il peut utiliser des éléments tétraédriques et être à densité variable.

Dans le cas de problèmes bipériodiques, il faut imposer une condition de pseudopériodicité sur les bords de la cellule de périodicité et des conditions aux limites absorbantes (par exemple de type PML ou modales [41]) pour borner les domaines infinis.

### Intérêts

- Les domaines peuvent avoir des tailles très contrastées et des formes quelconques.
- Les matériaux utilisés peuvent être de nature très différentes : anisotropes, métaux, parfaitement conducteurs, etc.
- Les matériaux peuvent être dispersifs : leurs paramètres peuvent dépendre de la fréquence de calcul. C'est un avantage propre à toutes les méthodes harmoniques.

### Limitations

- Son implémentation est peu aisée et son utilisation demande des ressources de calcul importantes.
- L'obligation d'utiliser des conditions aux limites absorbantes rajoute non seulement des degrés de liberté au système mais également une approximation supplémentaire.

**Exemples d'utilisation** Cette méthode est décrite dans les cas monopériodique et bipériodique dans [23]. Il est possible de tenir compte des symétries du maillage pour améliorer le temps de calcul [41]. Cette méthode est également utilisée dans certains logiciels commerciaux. Le facteur limitant à l'utilisation de cette méthode est son important besoin en terme de ressources informatiques. On trouve également des méthodes des éléments finis dans le domaine temporel [62].

### 3.4 Les équations intégrales bipériodiques

**Principe** Les méthodes qui font appel aux équations intégrales bipériodiques (EI3D2D) sont souvent appelées *Méthode des moments* (MoM, cf. [34]) ou *Méthode des éléments de frontière* (BEM, pour *Boundary Element Method*).

Les équations intégrales bipériodiques sont des équations qui permettent d'exprimer le champ électromagnétique en tout point de l'espace en fonction des courants électrique et magnétique sur les interfaces entre domaines homogènes. Ces équations intégrales font intervenir la fonction de Green 3D-bipériodique, qui se présente sous forme d'une série double lentement convergente.

Une méthode d'éléments finis de surface est ensuite utilisée pour résoudre le problème : les courants sont décomposés sur une base de fonctions liée au maillage surfacique de la structure considérée.

#### Intérêts

- Pour une structure donnée, modélisable grâce à plusieurs méthodes, c'est souvent la méthode qui demande le moins de degrés de liberté. Par rapport à un maillage volumique en tétraèdres, le maillage surfacique compte beaucoup moins de degrés de liberté.
- Il n'est pas nécessaire d'introduire de conditions aux limites approchées pour traiter les domaines non bornés : les seules approximations résultent donc de la discrétisation de la formulation.
- Cette méthode est très performante pour le calcul de la diffraction par des surfaces sélectives en fréquence sans épaisseur placées dans des empilements de couches diélectriques.
- Les matériaux peuvent être dispersifs : leurs paramètres peuvent dépendre de la fréquence de calcul.

#### Limitations

- En plus de ne pas être très facile à implémenter, le gros inconvénient de la méthode des moments est qu'elle impose une sommation sur toutes les cellules, à travers la fonction de Green bipériodique qui prend la forme d'une série double lentement convergente.
- L'utilisation de cette méthode est souvent limitée à des interfaces planes parallèles au plan Oxy.
- La matrice du système linéaire est pleine et donc difficile à inverser : à nombre égal de degrés de liberté, le temps de résolution est supérieur.
- On est limité à certains matériaux : linéaires homogènes isotropes et PEC.

**Exemples d'utilisation** La méthode des moments est très largement utilisée depuis les années 1980 pour les calculs de radôme. Ce sont des structures généralement faites d'empilement de matériaux diélectriques séparés par des feuillets métalliques plans sur lesquels sont gravés un réseau bipériodique de motifs (réseaux de croix, d'ouvertures,...). Les radômes sont utilisés pour protéger ou masquer les antennes, sur les aéronefs en particulier. Pour ce type de structures, une méthode efficace consiste à calculer la diffraction d'une onde électromagnétique par chaque feuillet métallique, sous forme de matrice  $S$ , et à calculer ensuite les propriétés de la structure complète à l'aide d'un algorithme d'empilement de matrices

S. Cette méthode est particulièrement rapide et précise : elle utilise un maillage plan par éléments rectangulaires  $H_{div}$  des feuillets métalliques pour donner une expression analytique des opérateurs intégraux. Les propriétés d'invariance par translation des opérateurs sur un maillage régulier permettent ensuite de ne calculer qu'une partie de contributions de ceux-ci. La principale contribution est due à Tom Cwik, Chi Hou Chan et Raj Mittra (cf. [20], puis [17] et [21]). Nous décrivons en détail cette méthode au chapitre 4.

Lorsque la structure bipériodique est constituée d'objets métalliques 3D de forme quelconque, une méthode intégrale peut aussi être utilisée. Dans ces cas-là, les équations intégrales sont écrites aux frontières de domaines parfaitement conducteurs (par ex. [76]). Le maillage n'ayant aucune propriété de régularité particulière, les opérateurs intégraux sont écrits sous une forme très générale et la pseudopériodicité est prise en compte au moyen de la fonction de Green bipériodique. La difficulté réside dans le calcul de cette fonction, qui se présente sous la forme d'une série double lentement convergente. De nombreux algorithmes d'accélération de convergence ont été mis en œuvre pour contourner cette difficulté : par exemple [36] ou [32].

La méthode présentée dans [66] traite le problème de la diffraction par un empilement de feuillets métalliques très proches. Les couplages par les modes évanescents sont alors trop importants pour qu'une méthode intégrale pour feuillets plans soit facile à mettre en œuvre : il faut prendre un grand nombre de modes évanescents pour que le calcul de l'empilement soit précis. Les auteurs proposent alors d'écrire les équations intégrales bipériodiques de chaque côté des feuillets plans, en séparant le traitement des domaines semi-infinis de celui des domaines diélectriques entre les feuillets métalliques. Ce n'est pas à proprement parler une méthode hybride, mais plutôt une méthode intégrale bipériodique multidomaine, comme la méthode que nous présentons au chapitre 4. Son inconvénient est le grand nombre d'évaluations de la fonction de Green bipériodique, qui augmente sensiblement le temps de calcul.

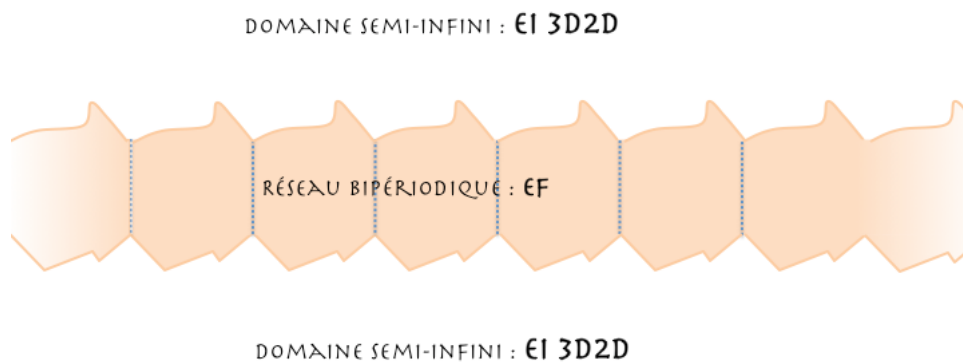
Certains auteurs [22] proposent une formulation multidomaine PMCHWT permettant d'inclure des domaines diélectriques dans la cellule de périodicité. Dans ce cas, afin que le calcul de la fonction de Green bipériodique ne soit pas rédhibitoire, il est proposé d'en effectuer une tabulation *a priori*, puis les valeurs nécessaires au calcul des opérateurs intégraux sont interpolées à partir de cette table.

Une évolution de cette méthode consiste à écrire une fonction de Green bipériodique multicouche correspondant à la propagation d'une onde émise par une source ponctuelle dans un empilement de matériaux diélectriques (cf. [56] et [52]). Ces fonctions de Green bipériodiques multicouches sont très efficaces pour traiter notamment des réseaux d'objets métalliques plongés dans un empilement de matériaux diélectriques. On peut aussi traiter le cas d'un réseau bipériodique d'ouvertures dans une plaque métallique d'épaisseur non nulle : [13] présente une méthode utilisée pour traiter des réseaux d'ouvertures sur des plaques métalliques épaisses. Cette méthode pourrait être assimilée à une méthode hybride EI 3D2D / EI 3D2D, où les cavités (ouvertures) sont traitées par des équations intégrales bipériodiques modifiées.

### 3.5 Les méthodes hybrides

Ces méthodes visent à combiner les avantages de plusieurs méthodes distinctes. Les interfaces des domaines infinis sont généralement traitées à l'aide d'équations intégrales. L'intérieur de la cellule de périodicité, que l'on a borné au moyen de conditions aux limites de pseudopériodicité, est traité par une autre méthode tridimensionnelle, avec conditions aux limites de pseudopériodicité, comme une méthode d'éléments finis : c'est pourquoi on parle de méthode hybride. Ce type de méthode permet de s'affranchir des conditions aux limites approchées pour borner les domaines semi-infinis inférieur et supérieur.

Généralement, l'intérieur de la cellule de périodicité est traité à l'aide d'une méthode d'éléments finis, comme schématisé sur la figure 3.3 : celle-ci permet d'utiliser des matériaux anisotropes. On trouve de nombreuses références sur les méthodes hybrides EI 3D2D / EF : par exemple [31], [50], [25], [1] ou [62].



**FIGURE 3.3** – Méthode hybride EI 3D2D / EF : les équations intégrales sont écrites sur les interfaces des domaines semi-infinis, tandis que les domaines internes sont traités par une méthode d'éléments finis.

Une autre technique est utilisable lorsque les cavités résonantes de la structure périodique présentent des géométries simples : le champ à l'intérieur des cavités est décomposé en somme de modes propres. Les équations intégrales bipériodiques écrites sur les frontières des domaines semi-infinis sont couplées à ces modes à l'aide de conditions de raccordement aux interfaces. Cette technique est par exemple utilisée dans [65].

On peut aussi utiliser une méthode d'équations intégrales bipériodiques pour traiter la cellule de périodicité. Il y a cependant peu d'auteurs qui ont publié sur des méthodes de ce type, une hypothèse plausible étant que l'extrême efficacité de la méthode des moments proposée dans [53] a beaucoup diminué l'attrait pour des méthodes plus générales, mais moins rapides.

Si l'on traite la cellule de périodicité à l'aide d'équations intégrales 3D (utilisant la fonction de Green de l'espace libre sans périodicité), on parle alors d'une méthode hybride EI 3D2D / EI 3D, qui présente deux avantages majeurs :

- Réduction du nombre de degrés de liberté par rapport à une méthode EI 3D2D / EF, permettant un important gain en temps de résolution du système linéaire.
- Réduction du nombre d'évaluations de la fonction de Green bipériodique, très coûteuse en temps de calcul, lors de l'assemblage de la matrice.

Un inconvénient de cette méthode est de ne pas pouvoir traiter de domaines constitués d'un matériau anisotrope.

Cette méthode nécessite d'utiliser des interfaces fictives sur le bord de la cellule de périodicité, ce qui rajoute des degrés de liberté. Mais la réduction du temps de l'assemblage est le plus souvent très largement supérieure à l'augmentation du temps de résolution du système linéaire.

Il existe au moins une référence [80] présentant une méthode que l'on peut considérer comme hybride EI 3D2D / EI 3D ; elle s'applique néanmoins à des cas moins généraux que celle nous avons développée. Les auteurs de cet article proposent de borner la cellule de périodicité et d'imposer des conditions de pseudopériodicité sur les interfaces fictives créées. En cela, cette méthode est proche de celle que nous présentons dans ce document. Il y a néanmoins des différences de taille : la formulation intégrale utilisée n'est pas une formulation PMCHWT, qui est pourtant reconnue pour être très précise. Cela rend d'autre part difficile une prise en compte simple des conditions aux limites de pseudopériodicité. Par ailleurs, les interfaces des domaines semi-infinis sont maillées d'un côté à l'aide de quadrangles et de l'autre à l'aide de triangles : il faut alors une condition de raccord sur les degrés de liberté.

Les méthodes hybrides EI 3D2D / EI 3D peuvent également être décrites comme des méthodes de sous-structuration : les équations sont écrites différemment dans chaque domaine. On décompose la structure en plusieurs domaines (les domaines bornés et les domaines semi-infinis) dans lesquels sont écrites des équations spécialisées, ayant la fonction de Green 3D ou 3D2D et comportant les conditions aux limites ou de rayonnement adaptées. Ainsi, la méthode que nous avons développée peut être "hybride" ou "de sous-structuration" suivant l'aspect que l'on souhaite mettre en exergue. Nous avons généralement préféré le terme "hybride", car il permet de rappeler que d'autres couplages de formulations sont envisageables, notamment avec des méthodes d'éléments finis, lorsqu'il y a des matériaux anisotropes. Le terme "sous-structuration" s'applique bien à la méthode décrite dans [80] où la résolution est faite en condensant successivement les domaines.



# Chapitre 4

## Les équations intégrales bipériodiques

### Table des matières

---

|            |                                                                      |           |
|------------|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4.1</b> | <b>Introduction . . . . .</b>                                        | <b>48</b> |
| <b>4.2</b> | <b>Formalisme intégral multidomaine en électromagnétisme . . . .</b> | <b>49</b> |
| 4.2.1      | Les équations intégrales EFIE et MFIE . . . . .                      | 49        |
| 4.2.2      | La formulation multidomaine PMCHWT . . . . .                         | 51        |
| 4.2.3      | Méthode des éléments finis de surface . . . . .                      | 52        |
|            | Formulation faible . . . . .                                         | 52        |
|            | Discrétisation . . . . .                                             | 53        |
|            | Système linéaire à résoudre . . . . .                                | 54        |
| <b>4.3</b> | <b>La fonction de Green pseudopériodique . . . . .</b>               | <b>55</b> |
| 4.3.1      | La transformation de Poisson . . . . .                               | 57        |
| 4.3.2      | La transformation de Kummer . . . . .                                | 58        |
|            | Forme spatiale . . . . .                                             | 58        |
|            | Forme spectrale . . . . .                                            | 59        |
| 4.3.3      | La transformation non-linéaire de Shanks . . . . .                   | 59        |
| 4.3.4      | La transformation d'Ewald . . . . .                                  | 60        |
| 4.3.5      | Choix de la méthode appropriée . . . . .                             | 61        |
| <b>4.4</b> | <b>Calcul sur maillage structuré . . . . .</b>                       | <b>62</b> |
| 4.4.1      | Calcul analytique des contributions . . . . .                        | 63        |
| 4.4.2      | Utilisation d'une transformée de Fourier discrète . . . . .          | 65        |
| 4.4.3      | Arguments de symétrie . . . . .                                      | 66        |
| <b>4.5</b> | <b>Conclusion . . . . .</b>                                          | <b>66</b> |

---

## 4.1 Introduction

Nous avons présenté au chapitre précédent (chap. 3) différentes méthodes qui permettent de traiter un problème de diffraction pseudopériodique. Nous avons décidé de fonder notre démarche sur une formulation intégrale multidomaine : ce type de méthode est très bien adapté aux géométries complexes que nous voulons étudier, avec matériaux diélectriques ou magnétiques, avec ou sans pertes, ou PEC (parfaitement électriquement conducteur). C'est également une des méthodes utilisées par le code de calcul *Spectre 90* de Dassault Aviation ; nous avons donc pu bénéficier des développements existants et assurer la pérennisation de ce travail.

Dans la première partie de ce chapitre, nous décrivons brièvement les équations intégrales utilisées et la méthode des éléments finis de surface que nous utilisons, dans le cas général tridimensionnel, sans périodicité.

Dans la deuxième partie du chapitre, nous voyons qu'il faut modifier la fonction de Green pour prendre en compte la périodicité du problème, mais que celle-là se présente sous la forme d'une série double lentement convergente. Nous donnons alors un aperçu des différentes méthodes d'accélération de convergence qui existent, que nous avons implémentées et testées, et qui permettent de calculer la somme de cette série double en un temps "raisonnable".

Nous disposons alors d'une première méthode de calcul "3D2D" pour le calcul d'un problème bipériodique à cellule de périodicité 3D. Cette première méthode est encore peu efficace dans le cas où le nombre d'éléments nécessitant le calcul d'équations intégrales bipériodiques est une fraction non négligeable du total des éléments.

Dans la troisième partie du chapitre, nous présentons une méthode très efficace qui peut être utilisée pour les empilements de structures planes. Nous appelons cette méthode « des feuillets plans à maillage structuré ». Celle-ci s'applique lorsque l'on utilise un maillage structuré dans un plan parallèle au plan  $Oxy$  : cette partie du maillage n'est composée que de quadrangles tous identiques. On peut alors tirer parti des invariances des opérateurs intégraux et des expressions analytiques des fonctions de base et fonctions-tests pour proposer un calcul très efficace des contributions des opérateurs intégraux sur ces interfaces. Cette méthode, dérivée d'une méthode existante destinée à des empilements de feuillets métalliques sans épaisseur, permet un gain en temps de calcul pouvant aller jusqu'à trois ordres de grandeurs (un facteur 1000!).

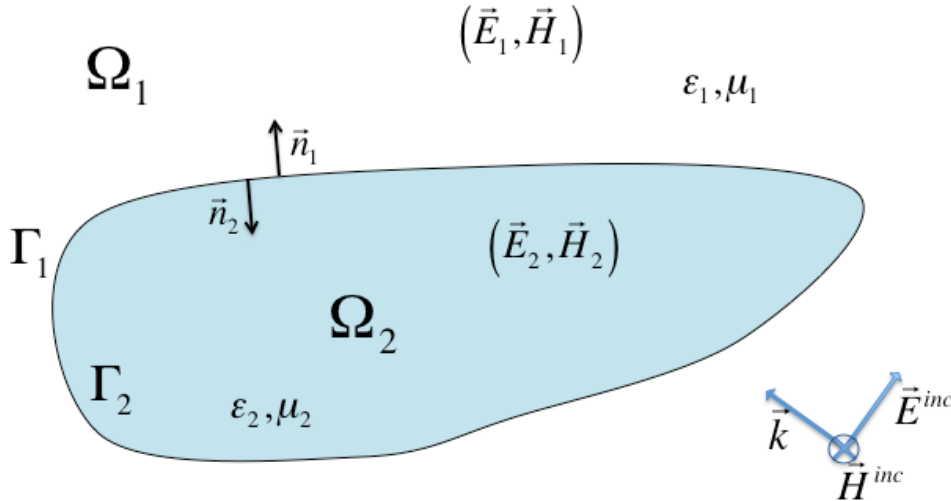
Nous présenterons au chapitre suivant (chap. 5) une nouvelle méthode qui combine très avantageusement la généralité des équations intégrales multidomaines et la rapidité de calcul des feuillets plans à maillage structuré.

## 4.2 Formalisme intégral multidomaine en électromagnétisme

Il a été montré [14] qu'il peut y avoir non-unicité de la solution au problème de la diffraction d'une onde plane scalaire monochromatique par un réseau périodique (suivant une direction), pour un ensemble discret de fréquences. Pour des réseaux bipériodiques d'objets parfaitement conducteurs, le résultat d'existence et d'unicité au problème harmonique, en dehors d'un ensemble discret de fréquences, a été établi par Felipe Starling [59] et rappelé par Anne Morelot [55]. Il faut, pour l'établir, un cadre fonctionnel adéquat et que nous ne décrivons pas ici. Le cas où les objets parfaitement conducteur sont inclus dans une couche de matériau diélectrique a été traité par Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et rappelé par Toufic Abboud [2].

### 4.2.1 Les équations intégrales EFIE et MFIE

Considérons un objet constitué d'un (unique, dans cet exemple) domaine diélectrique homogène  $\Omega_2$ , de frontière  $\Gamma_2$ , et plongé dans un domaine extérieur  $\Omega_1$ , de frontière  $\Gamma_1$  dans lequel existe l'onde incidente  $(\vec{E}^{inc}, \vec{H}^{inc})$ .



**FIGURE 4.1** – *Diffraction d'une onde incidence par un objet tridimensionnel : les conventions adoptées.*

On exprime le champ total sur la frontière de chaque domaine à l'aide d'équations intégrales appelées EFIE et MFIE (cf. [64]). Pour ce faire, on avait introduit à la section 2.4, les notions de courants électrique  $\vec{J}_i = \vec{n}_i \times \vec{E}_i$  et magnétique  $\vec{M}_i = \vec{H}_i \times \vec{n}_i$ ,  $i = 1$  ou  $2$ .

L'EFIE (*Electric Field Integral Equation*) s'applique au champ électrique :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\vec{\mathbf{E}}_1(\vec{r}) &= \vec{\mathbf{E}}^{inc}(\vec{r}) \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \left\{ j\omega\mu_1 \vec{\mathbf{J}}_1(\vec{r}') + \frac{j}{\omega\varepsilon_1} \nabla\nabla' \cdot \vec{\mathbf{J}}_1(\vec{r}') \right\} G_1(\vec{r} - \vec{r}') ds' \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \vec{\mathbf{M}}_1(\vec{r}') \times \nabla G_1(\vec{r} - \vec{r}') ds' \quad \text{pour } \vec{r} \in \Gamma
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\vec{\mathbf{E}}_2(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} \left\{ j\omega\mu_{int} \vec{\mathbf{J}}_2(\vec{r}') + \frac{j}{\omega\varepsilon_2} \nabla\nabla' \cdot \vec{\mathbf{J}}_2(\vec{r}') \right\} G_2(\vec{r} - \vec{r}') ds' \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} \vec{\mathbf{M}}_2(\vec{r}') \times \nabla G_2(\vec{r} - \vec{r}') ds' \quad \text{pour } \vec{r} \in \Gamma,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

où  $G(\vec{r} - \vec{r}')$  est la fonction de Green du problème considéré. Dans le cas tridimensionnel, sans périodicité, nous avons  $G_i(r) = \frac{e^{-jk_i r}}{r}$ ; nous verrons en 4.3 quelle est la fonction de Green correspondant aux problèmes bipériodiques.

La MFIE (*Magnetic Field Integral Equation*) s'applique au champ magnétique :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\vec{\mathbf{H}}_1(\vec{r}) &= \vec{\mathbf{H}}^{inc}(\vec{r}) \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \vec{\mathbf{J}}_1(\vec{r}') \times \nabla G_1(\vec{r} - \vec{r}') ds' \\
&- \frac{\mu_1}{4\pi\varepsilon_1} \int_{\Gamma_1} \left\{ j\omega\mu_1 \vec{\mathbf{M}}_1(\vec{r}') + \frac{j}{\omega\varepsilon_1} \nabla\nabla' \cdot \vec{\mathbf{M}}_1(\vec{r}') \right\} G_1(\vec{r} - \vec{r}') ds' \\
&\text{pour } \vec{r} \in \Gamma
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\vec{\mathbf{H}}_2(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} \vec{\mathbf{J}}_2(\vec{r}') \times \nabla G_2(\vec{r} - \vec{r}') ds' \\
&- \frac{\mu_2}{4\pi\varepsilon_2} \int_{\Gamma_2} \left\{ j\omega\mu_2 \vec{\mathbf{M}}_2(\vec{r}') + \frac{j}{\omega\varepsilon_2} \nabla\nabla' \cdot \vec{\mathbf{M}}_2(\vec{r}') \right\} G_2(\vec{r} - \vec{r}') ds' \\
&\text{pour } \vec{r} \in \Gamma
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Nous adoptons la notation formelle suivante :

$$\frac{1}{2}\vec{\mathbf{E}}_1(\vec{r}) = \vec{\mathbf{E}}^{inc}(\vec{r}) - (\mathcal{B} - \mathcal{S})_1 \vec{\mathbf{J}}_1 + \mathcal{Q}_1 \vec{\mathbf{M}}_1 \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\mathbf{E}}_2(\vec{r}) = -(\mathcal{B} - \mathcal{S})_2 \vec{\mathbf{J}}_2 + \mathcal{Q}_2 \vec{\mathbf{M}}_2 \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\mathbf{H}}_1(\vec{r}) = \vec{\mathbf{H}}^{inc}(\vec{r}) - \mathcal{Q}_1 \vec{\mathbf{J}}_1 - \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} (\mathcal{B} - \mathcal{S})_1 \vec{\mathbf{M}}_1 \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\mathbf{H}}_2(\vec{r}) = \mathcal{Q}_2 \vec{\mathbf{J}}_2 - \frac{\mu_2}{\varepsilon_2} (\mathcal{B} - \mathcal{S})_2 \vec{\mathbf{M}}_2, \quad (4.8)$$

où les opérateurs intégrro-différentiels linéaires, associant à une fonction vectorielle de  $\vec{r}'$  une fonction de  $\vec{r}$ , sont définis ainsi :

$$(\mathcal{B} - \mathcal{S})_i \vec{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} \left\{ j\omega\mu_i \vec{\mathbf{X}}_i(\vec{r}') + \frac{j}{\omega\varepsilon_i} \nabla \nabla' \cdot \vec{\mathbf{X}}_i(\vec{r}') \right\} G_i(\vec{r} - \vec{r}') ds' \quad (4.9)$$

$$\mathcal{Q}_i \vec{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} \vec{\mathbf{X}}_i(\vec{r}') \times \nabla G_i(\vec{r} - \vec{r}') ds' \quad (4.10)$$

Dans les cas plus élaborés comportant notamment des domaines parfaitement conducteurs ou des conditions d'impédance localisées, ces équations peuvent être généralisées. Par exemple, si  $\Omega_2$  avait été un domaine parfaitement conducteur, nous aurions eu  $(\vec{\mathbf{E}}_2, \vec{\mathbf{H}}_2) \equiv (0, 0)$  et  $\vec{\mathbf{M}}_1(\vec{r}) = 0$  sur  $\Gamma_1$ . D'autres possibilités sont décrites dans [51].

Ces équations restent valables lorsqu'il y a plusieurs domaines dans l'objet diffractant : on écrit les *EFIE* et *MFIE* à la frontière de chacun des domaines de l'objet diffractant.

### 4.2.2 La formulation multidomaine PMCHWT

Les conditions de continuité des composantes tangentielles des champs aux interfaces permettent d'écrire la formulation PMCHWT (pour Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai, cf. [64], [51] et [19]). Cette formulation peut aussi être déduite du principe de réaction de Rumsey (cf. [10] ou [11]). Nous avons sur  $\Gamma$  :

$$\vec{n}_1 \times (\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{E}}_2) \Big|_{tan} = 0 \quad (4.11)$$

$$\vec{n}_1 \times (\vec{\mathbf{H}}_1 - \vec{\mathbf{H}}_2) \Big|_{tan} = 0. \quad (4.12)$$

Soit encore  $\vec{\mathbf{J}}_1 = -\vec{\mathbf{J}}_2 = \vec{\mathbf{J}}$  et  $\vec{\mathbf{M}}_1 = -\vec{\mathbf{M}}_2 = \vec{\mathbf{M}}$ . Imposer (4.11) dans (4.1) et (4.2) d'une part, et (4.12) dans (4.3) et (4.4) d'autre part, conduit à :

$$\vec{\mathbf{E}}^{inc}(\vec{r}) \Big|_{tan} = ((\mathcal{B} - \mathcal{S})_1 + (\mathcal{B} - \mathcal{S})_2) \vec{\mathbf{J}}(\vec{r}) \Big|_{tan} - (\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2) \vec{\mathbf{M}}(\vec{r}) \Big|_{tan} \quad (4.13)$$

$$\vec{\mathbf{H}}^{inc}(\vec{r}) \Big|_{tan} = (\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2) \vec{\mathbf{J}}(\vec{r}) \Big|_{tan} + \left( \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} (\mathcal{B} - \mathcal{S})_1 + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2} (\mathcal{B} - \mathcal{S})_2 \right) \vec{\mathbf{M}}(\vec{r}) \Big|_{tan} \quad (4.14)$$

Lorsqu'il y a plus d'un domaine homogène dans l'objet diffractant, cette démarche se généralise dioptré par dioptré (interface entre deux domaines).

### 4.2.3 Méthode des éléments finis de surface

On résout ces équations à l'aide d'une méthode des éléments finis de surface, dont nous donnons les principales étapes dans cette section.

#### Formulation faible

Nous avons le problème variationnel suivant : trouver  $\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{J}} \\ \vec{\mathbf{M}} \end{pmatrix} \in \left(H_{div}^{-1/2}(\Gamma)\right)^2$  tel que, pour tout  $\psi \in H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$ , on ait :

$$\begin{aligned} \left\langle Z_1(\mathcal{B} - \mathcal{S}) \vec{\mathbf{J}}, \vec{\psi} \right\rangle_{\Gamma_1} + \left\langle Z_2(\mathcal{B} - \mathcal{S}) \vec{\mathbf{J}}, \vec{\psi} \right\rangle_{\Gamma_2} \\ + \left\langle \mathcal{Q}(j\vec{\mathbf{M}}), \vec{\psi} \right\rangle_{\Gamma_1} + \left\langle \mathcal{Q}(j\vec{\mathbf{M}}), \vec{\psi} \right\rangle_{\Gamma_2} = \left\langle I\vec{\mathbf{E}}^{inc}, \vec{\psi} \right\rangle_{\Gamma_1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{Q}\vec{\mathbf{J}}, \vec{\psi} \right\rangle_{\Gamma_1} + \left\langle \mathcal{Q}\vec{\mathbf{J}}, \vec{\psi} \right\rangle_{\Gamma_2} \\ + \left\langle \frac{1}{Z_1}(\mathcal{B} - \mathcal{S})(j\vec{\mathbf{M}}), \vec{\psi} \right\rangle_{\Gamma_1} + \left\langle \frac{1}{Z_2}(\mathcal{B} - \mathcal{S})(j\vec{\mathbf{M}}), \vec{\psi} \right\rangle_{\Gamma_2} = \left\langle jI\vec{\mathbf{H}}^{inc}, \vec{\psi} \right\rangle_{\Gamma_1} \end{aligned} \quad (4.16)$$

où les opérateurs intégraux  $\left\langle (\mathcal{B} - \mathcal{S}) \vec{\mathbf{A}}', \psi \right\rangle_{\Gamma_i}$ ,  $\left\langle \mathcal{Q}\vec{\mathbf{A}}', \psi \right\rangle_{\Gamma_i}$  et  $\left\langle I\vec{\mathbf{A}} \right\rangle_{\Gamma_i}$  sont définis ainsi :

$$\begin{aligned} \left\langle (\mathcal{B} - \mathcal{S}) \vec{\mathbf{A}}', \vec{\psi} \right\rangle_{\Gamma_i} = \frac{j}{4\pi} \iint_{\Gamma_i \times \Gamma_i} \left\{ k_i G_i(\vec{r} - \vec{r}') (\vec{\psi} \cdot \vec{\mathbf{A}}') \right. \\ \left. - \frac{1}{k_i} G_i(\vec{r} - \vec{r}') \left( (\nabla_s \cdot \vec{\psi}) (\nabla_s \cdot \vec{\mathbf{A}}') \right) \right\} ds ds' \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\left\langle \mathcal{Q}\vec{\mathbf{A}}', \vec{\psi} \right\rangle_{\Gamma_i} = -\frac{j}{4\pi} \iint_{\Gamma_i \times \Gamma_i} (\nabla' G_i(\vec{r} - \vec{r}')) \cdot (\vec{\psi} \times \vec{\mathbf{A}}') ds ds' \quad (4.18)$$

$$\left\langle I\vec{\mathbf{A}}, \vec{\psi} \right\rangle_{\Gamma_i} = \int_{\Gamma_i} \vec{\psi} \cdot \vec{\mathbf{A}} ds \quad (4.19)$$

## Discretisation

Les espaces  $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$  sont approchés sur les maillages surfaciques de triangles ou de quadrangles par les éléments de degré 1 : RWG (de *Rao-Wilton-Glisson*) sur les triangles et *rooftop* sur les quadrangles.

Une fonction de base  $\vec{f}_i$  de type RWG a pour support deux triangles  $K_i^+$  et  $K_i^-$  ayant une frontière commune de longueur  $l_i$ . Elle est alors définie suivant les conventions de la figure 4.2 et ce qui suit :

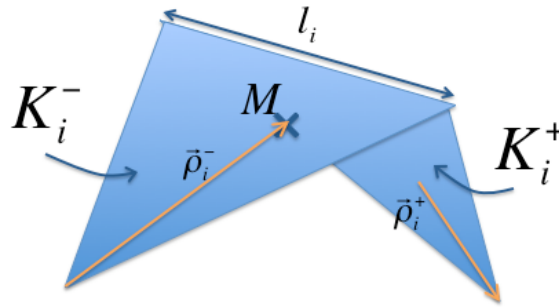


FIGURE 4.2 – Fonction de base RWG

$$\vec{f}_i = \begin{cases} \frac{1}{h_i^-} \vec{\rho}^- & \text{pour } M \in K_i^- \\ \frac{1}{h_i^+} \vec{\rho}^+ & \text{pour } M \in K_i^+ \\ 0 & \text{pour } M \notin K_i^\pm \end{cases}, \quad (4.20)$$

où  $h_i^\pm$  sont les hauteurs de chaque triangle issues de la frontière  $i$ .

Une fonction de base  $\vec{f}_i$  de type *rooftop* a pour support deux quadrangles  $K_i^+$  et  $K_i^-$  ayant une frontière commune de longueur  $l_i$ . Elle est alors définie suivant les conventions de la figure 4.3 et ce qui suit :

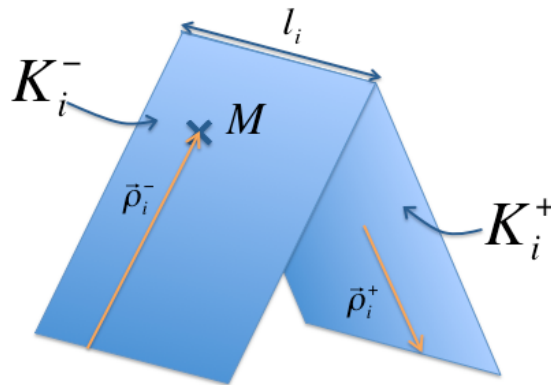


FIGURE 4.3 – Fonction de base de type rooftop

$$\vec{f}_i = \begin{cases} \frac{1}{h_i^-} \vec{\rho}^- & \text{pour } M \in K_i^- \\ \frac{1}{h_i^+} \vec{\rho}^+ & \text{pour } M \in K_i^+ \\ 0 & \text{pour } M \notin K_i^\pm \end{cases}, \quad (4.21)$$

où  $h_i^\pm$  sont les hauteurs de chaque quadrangle issues de la frontière  $i$ .

Ces deux types de fonctions de base peuvent être utilisés conjointement et l'on peut définir des fonctions de base dont le support est constitué d'un triangle et d'un quadrangle possédant une arête commune.

### Système linéaire à résoudre

Les fonctions de base que nous venons de donner décrivent une base d'un espace de dimension  $N$  qui permet d'approcher  $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$  : la solution approchée  $(\vec{\mathbf{J}}_{app}, \vec{\mathbf{M}}_{app})$  que nous cherchons est la projection de la solution exacte  $(\vec{\mathbf{J}}, \vec{\mathbf{M}})$  sur cet espace.

Les solutions approchées  $\vec{\mathbf{J}}_{app}$  et  $\vec{\mathbf{M}}_{app}$  sont donc décrites par les coefficients de leurs décompositions en somme de fonctions de base :

$$\vec{\mathbf{J}}_{app}(\vec{r}) = \sum_{p=1, \dots, N} J_p \vec{f}_p(\vec{r}) \quad \text{où} \quad J_p = \langle \vec{\mathbf{J}}, \vec{f}_p \rangle \quad (4.22)$$

$$\vec{\mathbf{M}}_{app}(\vec{r}) = \sum_{p=1, \dots, N} M_p \vec{f}_p(\vec{r}) \quad \text{où} \quad M_p = \langle \vec{\mathbf{M}}, \vec{f}_p \rangle. \quad (4.23)$$

En prenant pour fonctions-tests les fonctions de base (méthode de Galerkin), la formulation faible 4.15 et 4.16 devient un système linéaire qu'il suffit de résoudre :

$$\begin{pmatrix} Z_1(\mathbb{B} - \mathbb{S})_1 + Z_2(\mathbb{B} - \mathbb{S})_2 & j(\mathbb{Q}_1 + \mathbb{Q}_2) \\ (\mathbb{Q}_1 + \mathbb{Q}_2) & \frac{1}{Z_1}(\mathbb{B} - \mathbb{S})_1 + \frac{1}{Z_2}(\mathbb{B} - \mathbb{S})_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{app} \\ M_{app} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^{inc} \\ jH^{inc} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

où les matrices  $(\mathbb{B} - \mathbb{S})_i$ ,  $\mathbb{Q}_i$ ,  $i = 1, 2$ , sont de taille  $2N \times 2N$  et les vecteurs  $J_{app}$ ,  $M_{app}$ ,  $E^{inc}$  et  $H^{inc}$  sont de longueur  $N$ . Ces matrices et vecteurs sont définis ainsi :

$$(\mathbb{B} - \mathbb{S})_i(p, q) = \langle (\mathcal{B} - \mathcal{S}) \vec{f}_q, \vec{f}_p \rangle_{\Gamma_i}, \quad i = 1, 2 \quad (4.25)$$

$$\mathbb{Q}_i(p, q) = \langle \mathcal{Q} \vec{f}_q, \vec{f}_p \rangle_{\Gamma_i}, \quad i = 1, 2 \quad (4.26)$$

$$J_{app}(q) = J_q \quad (4.27)$$

$$M_{app}(q) = M_q \quad (4.28)$$

$$E^{inc}(p) = \langle I \vec{\mathbf{E}}^{inc}, \vec{f}_p \rangle_{\Gamma_1} \quad (4.29)$$

$$H^{inc}(p) = \langle I \vec{\mathbf{H}}^{inc}, \vec{f}_p \rangle_{\Gamma_1} \quad (4.30)$$

### 4.3 La fonction de Green pseudopériodique

Dans le cas général tridimensionnel, la fonction de Green  $G_{3D}(\vec{r})$  est la solution élémentaire de l'équation de Helmholtz scalaire, à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , pour laquelle le terme de source est une fonction de Dirac  $\delta(\vec{r})$ , représentant une source ponctuelle à l'origine :

$$(\nabla^2 + k^2) G_{3D}(\vec{r}) = 4\pi\delta(\vec{r}), \quad (4.31)$$

où  $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$  est le nombre d'onde du domaine considéré.

Pour un point source situé en  $M'$  et un point d'observation situé en  $M$  situés dans le même domaine, la fonction de Green vaut :

$$G_{3D}(\overrightarrow{MM'}) = \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad \text{avec } r = \|\overrightarrow{MM'}\|. \quad (4.32)$$

Pour obtenir la fonction de Green pseudopériodique, nous écrivons l'équation intégrale du cas tridimensionnel général (4.1) sur  $\Gamma = \bigcup_{n,m} \Gamma_{n,m}$ , un bord de réseau bipériodique, où  $\Gamma_{n,m}$  est la restriction du bord à la cellule de périodicité  $(n, m)$ . Le réseau est éclairé par une onde incidente pseudopériodique. Un raisonnement similaire s'applique à l'équation (4.3).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\vec{\mathbf{E}}_1(\vec{r}) &= \vec{\mathbf{E}}^{inc}(\vec{r}) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ j\omega\mu_1 \vec{\mathbf{J}}_1(\vec{r}') + \frac{j}{\omega\varepsilon_1} \nabla\nabla' \cdot \vec{\mathbf{J}}_1(\vec{r}') \right\} G_{3D}(\vec{r}' - \vec{r}) ds' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \vec{\mathbf{M}}_1(\vec{r}') \times \nabla G_{3D}(\vec{r}' - \vec{r}) ds' \\ &= \vec{\mathbf{E}}^{inc}(\vec{r}) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \sum_{n,m} \int_{\Gamma_{n,m}} \left\{ j\omega\mu_1 \vec{\mathbf{J}}_1(\vec{r}') + \frac{j}{\omega\varepsilon_1} \nabla\nabla' \cdot \vec{\mathbf{J}}_1(\vec{r}') \right\} G_{3D}(\vec{r}' - \vec{r}) ds' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \sum_{n,m} \int_{\Gamma_{n,m}} \vec{\mathbf{M}}_1(\vec{r}') \times \nabla G_{3D}(\vec{r}' - \vec{r}) ds' \end{aligned} \quad (4.33)$$

En échangeant les signes de sommes et d'intégrales et en réarrangeant les termes de cette

expression, on se ramène à une équation intégrale sur une seule cellule de périodicité :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\vec{\mathbf{E}}_1(\vec{r}) &= \vec{\mathbf{E}}^{inc}(\vec{r}) \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{0,0}} \sum_{n,m} \left\{ j\omega\mu_1 \vec{\mathbf{J}}_1(\vec{r}' + n\vec{T}_1 + m\vec{T}_2) + \frac{j}{\omega\varepsilon_1} \nabla\nabla' \cdot \vec{\mathbf{J}}_1(\vec{r}' + n\vec{T}_1 + m\vec{T}_2) \right\} \times \\
&\quad G_{3D}(\vec{r}' - \vec{r} + n\vec{T}_1 + m\vec{T}_2) ds' \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{0,0}} \sum_{n,m} \vec{\mathbf{M}}_1(\vec{r}' + n\vec{T}_1 + m\vec{T}_2) \times \nabla G_{3D}(\vec{r}' - \vec{r} + n\vec{T}_1 + m\vec{T}_2) ds' \quad (4.34)
\end{aligned}$$

La pseudopériodicité du champ incident assure la pseudopériodicité du champ total et donc des courants  $\vec{\mathbf{J}}_1$  et  $\vec{\mathbf{M}}_1$  (cf. section 1.2.2). On a donc  $\vec{\mathbf{J}}_1(\vec{r}' + n\vec{T}_1 + m\vec{T}_2) = \vec{\mathbf{J}}_1(\vec{r}') e^{-j(n\vec{\mathbf{k}}^i \cdot \vec{T}_1 + m\vec{\mathbf{k}}^i \cdot \vec{T}_2)}$  et  $\vec{\mathbf{M}}_1(\vec{r}' + n\vec{T}_1 + m\vec{T}_2) = \vec{\mathbf{M}}_1(\vec{r}') e^{-j(n\vec{\mathbf{k}}^i \cdot \vec{T}_1 + m\vec{\mathbf{k}}^i \cdot \vec{T}_2)}$ .

L'équation intégrale devient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\vec{\mathbf{E}}_1(\vec{r}) &= \vec{\mathbf{E}}^{inc}(\vec{r}) \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{0,0}} \left\{ j\omega\mu_1 \vec{\mathbf{J}}_1(\vec{r}') + \frac{j}{\omega\varepsilon_1} \nabla\nabla' \cdot \vec{\mathbf{J}}_1(\vec{r}') \right\} G(\vec{r}' - \vec{r}) ds' \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{0,0}} \vec{\mathbf{M}}_1(\vec{r}') \times \nabla G(\vec{r}' - \vec{r}) ds'. \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Ainsi, seuls les courants de la cellule (0,0) interviennent et  $G$  est appelée “fonction de Green pseudopériodique”, ou, par abus de langage, “fonction de Green bipériodique”. Son expression est :

$$G(\overrightarrow{MM'}) = \sum_n \sum_m \frac{e^{-jkr_{nm}}}{r_{nm}} e^{-j(n\vec{\mathbf{k}}^i \cdot \vec{T}_1 + m\vec{\mathbf{k}}^i \cdot \vec{T}_2)}, \quad (4.36)$$

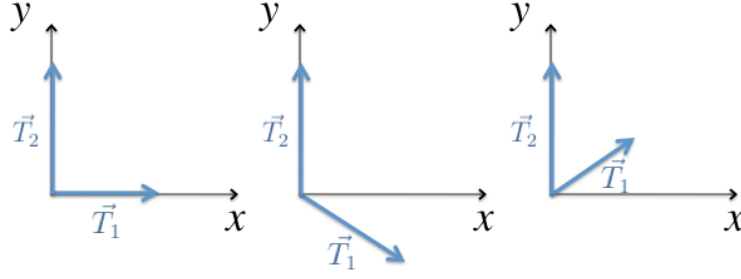
avec  $\overrightarrow{MM'} = (x, y, z)$ ,  $r_{nm} = \sqrt{(nT_1 + x)^2 + (mT_2 + y)^2 + z^2}$ , et  $\vec{\mathbf{k}}^i$  le vecteur d'onde de l'onde plane incidente.

Dans cette partie, nous traitons le cas où les deux vecteurs de périodicité ne sont pas nécessairement orthogonaux :  $\vec{T}_1$  est tel que  $\vec{T}_1 \cdot \hat{x} > 0$ ,  $\vec{T}_1 \cdot \hat{y} = 0$  quelconque et  $\vec{T}_1 \cdot \hat{z} = 0$ ;  $\vec{T}_2$  est tel que  $\vec{T}_2 \cdot \hat{x} = 0$ ,  $\vec{T}_2 \cdot \hat{y} > 0$  et  $\vec{T}_2 \cdot \hat{z} = 0$ . Cela est illustré par la figure 4.4.

La fonction de Green bipériodique s'écrit alors :

$$G(\overrightarrow{MM'}) = \sum_n \sum_m \frac{e^{-jkr_{nm}}}{r_{nm}} e^{-j(k_{T_1}^i nT_1 \sin\theta + k_{T_2}^i (mT_2 + nT_1 \cos\theta))} \quad (4.37)$$

$$\text{avec } r_{nm} = \sqrt{(nT_1 \sin\theta + x)^2 + (nT_1 \cos\theta + mT_2 + y)^2 + z^2}, \quad k_{T_1}^i = \frac{\vec{\mathbf{k}}^i \cdot \vec{T}_1}{\|\vec{T}_1\|}, \quad k_{T_2}^i = \frac{\vec{\mathbf{k}}^i \cdot \vec{T}_2}{\|\vec{T}_2\|}$$



**FIGURE 4.4** – Trois configurations possibles pour les vecteurs de périodicité.

Dans la suite, nous appelons l'expression (4.37) "forme spatiale" de la fonction de Green bipériodique. Bien que cette série soit sommable, elle n'en est pas moins lentement convergente. Cela rend son calcul par sommation directe très pénalisant.

Plusieurs techniques d'accélération de convergence existent pour contourner ce problème. Elles sont utilisées dans plusieurs références (par exemple [32] ou [55]), mais au moment où nous avons travaillé sur ce point, nous n'avons pas trouvé de comparaison de toutes ces méthodes entre elles. Depuis a paru une analyse et une comparaison numérique entre ces méthodes [81]. Nous avons donc testé ces méthodes d'accélération afin de choisir les méthodes les plus intéressantes pour nous. Nous commençons par décrire brièvement ces méthodes, puis nous donnons le critère de choix que nous avons retenu.

### 4.3.1 La transformation de Poisson

La transformation la plus simple est celle dite "de Poisson". Elle repose sur la propriété suivante : si  $S = \sum_n \sum_m f(n, m)$ , alors  $S = \sum_n \sum_m F(2n\pi, 2m\pi)$ , où  $F(\cdot, \cdot)$  est la transformée de Fourier spatiale de  $f(\cdot, \cdot)$ .

De cette manière, nous pouvons écrire une expression de la fonction de Green bipériodique qui est équivalente à (4.37) :

$$G(\overrightarrow{MM'}) = \frac{2\pi}{j \|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\|} \sum_n \sum_m \frac{e^{-j\gamma_{nm}|z|}}{\gamma_{nm}} e^{-j(\alpha_{nm}x + \beta_{nm}y)} \quad (4.38)$$

$$\text{avec } \alpha_{nm} = 2\pi \left( \frac{n}{T_1 \sin \theta} - \frac{m \cos \theta}{T_2 \sin \theta} \right) - k_{T_1}^i,$$

$$\beta_m = \frac{2m\pi}{T_2} - k_{T_2}^i \text{ et}$$

$$\gamma_{nm} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \alpha_{nm}^2 - \beta_m^2} & \text{si } k^2 - \alpha_{nm}^2 - \beta_m^2 \geq 0 \\ -j\sqrt{\alpha_{nm}^2 + \beta_m^2 - k^2} & \text{si } k^2 - \alpha_{nm}^2 - \beta_m^2 < 0 \end{cases}$$

Ce résultat à dû à H. Weyl [85]. On trouvera notamment la preuve dans [55]. Nous appelons cette expression "forme spectrale" de la fonction de Green bipériodique. Cependant, cette expression n'est utile que lorsque  $\gamma_{nm} \neq 0, \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$  et lorsque  $z \neq 0$ . La convergence peut alors être très rapide, et elle l'est d'autant plus que  $|z|$  est grand : la sommation sur les modes évanescents se fait sur des termes en exponentielle réelle négative.

### 4.3.2 La transformation de Kummer

La transformation de Kummer consiste à écrire une série double trop lentement convergente en une somme de deux séries plus rapidement convergentes. Considérons une série double lentement convergente  $\sum_{n,m} u_{nm}$  : il s'agit de retrancher au terme général  $u_{nm}$ , un terme  $\tilde{u}_{nm}$  qui lui est équivalent pour  $n$  ou  $m$  grands. On a donc :

$$\sum_{n,m} u_{nm} = \sum_{n,m} (u_{nm} - \tilde{u}_{nm}) + \sum_{n,m} \tilde{u}_{nm}.$$

Cette méthode est particulièrement intéressante lorsque la somme de la série de terme général  $\tilde{u}_{nm}$  est facilement calculable, soit analytiquement, soit à l'aide d'une autre méthode d'accélération de convergence (comme la transformation de Poisson).

#### Forme spatiale

On peut appliquer la transformation de Kummer à la “forme spatiale” (4.37) de la fonction de Green bipériodique. Le terme général de la fonction de Green est :

$$\frac{e^{-jk r_{nm}}}{r_{nm}} e^{-j(k_{T_1}^i n T_1 \sin \theta + k_{T_2}^i (m T_2 + n T_1 \cos \theta))}.$$

On choisit l'équivalent suivant du terme général lorsque  $n$  ou  $m$  est grand :

$$\tilde{u}_{nm} = \frac{e^{-jk \tilde{r}_{nm}}}{\tilde{r}_{nm}} e^{-j(k_{T_1}^i n T_1 \sin \theta + k_{T_2}^i (m T_2 + n T_1 \cos \theta))} \quad (4.39)$$

avec  $\tilde{r}_{nm} = \sqrt{(n T_1 \sin \theta + x)^2 + (n T_1 \cos \theta + m T_2 + y)^2 + \left(|z| + u \sqrt{\|\vec{\mathbf{T}}_1 \times \vec{\mathbf{T}}_2\|}\right)^2}$  où  $u$  est un paramètre réel strictement positif quelconque.

On a alors :  $G(\overrightarrow{MM'}) = G_1(\overrightarrow{MM'}) + G_2(\overrightarrow{MM'})$ , avec :

$$G_1(\overrightarrow{MM'}) = \sum_n \sum_m \left( \frac{e^{-jk r_{nm}}}{r_{nm}} - \frac{e^{-jk \tilde{r}_{nm}}}{\tilde{r}_{nm}} \right) e^{-j(k_{T_1}^i n T_1 \sin \theta + k_{T_2}^i (m T_2 + n T_1 \cos \theta))} \quad (4.40)$$

$$G_2(\overrightarrow{MM'}) = \sum_n \sum_m \frac{e^{-jk \tilde{r}_{nm}}}{\tilde{r}_{nm}} e^{-j(k_{T_1}^i n T_1 \sin \theta + k_{T_2}^i (m T_2 + n T_1 \cos \theta))} \quad (4.41)$$

On applique la transformation de Poisson à  $G_2(\overrightarrow{MM'})$  :

$$G_2(\overrightarrow{MM'}) = \frac{2\pi}{j \|\vec{\mathbf{T}}_1 \times \vec{\mathbf{T}}_2\|} \sum_n \sum_m \frac{e^{-j\gamma_{nm}(|z| + u \sqrt{\|\vec{\mathbf{T}}_1 \times \vec{\mathbf{T}}_2\|})}}{\gamma_{nm}} e^{-j(\alpha_{nm} x + \beta_{nm} y)} \quad (4.42)$$

Cette série est rapidement convergente, même lorsque  $|z| \rightarrow 0$ , puisque l'on a un terme général qui décroît exponentiellement grâce à la présence du terme  $u\sqrt{\|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\|}$

Nous appelons cette expression “forme Kummer spatiale” de la fonction de Green bipériodique.

### Forme spectrale

La même technique peut également être appliquée à la forme spectrale de la fonction de Green bipériodique. Le terme général de la fonction de Green est :

$$\frac{e^{-j\gamma_{nm}|z|}}{\gamma_{nm}} e^{-j(\alpha_{nm}x + \beta_{nm}y)}.$$

Nous choisissons l'équivalent suivant :

$$\frac{e^{-j\tilde{\gamma}_{nm}|z|}}{\tilde{\gamma}_{nm}} e^{-j(\alpha_{nm}x + \beta_{nm}y)} \quad (4.43)$$

avec  $\tilde{\gamma}_{nm} = -j\sqrt{\alpha_{nm}^2 + \beta_m^2 + \nu^2}$ , où  $\nu$  est un paramètre réel strictement positif quelconque.

On a alors :  $G(\overrightarrow{MM'}) = G_3(\overrightarrow{MM'}) + G_4(\overrightarrow{MM'})$ , avec :

$$G_3(\overrightarrow{MM'}) = \frac{2\pi}{j\|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\|} \sum_n \sum_m \left( \frac{e^{-j\gamma_{nm}|z|}}{\gamma_{nm}} - \frac{e^{-j\tilde{\gamma}_{nm}|z|}}{\tilde{\gamma}_{nm}} \right) e^{-j(\alpha_{nm}x + \beta_{nm}y)} \quad (4.44)$$

$$G_4(\overrightarrow{MM'}) = \sum_n \sum_m \frac{e^{-jk\nu r_{nm}}}{r_{nm}} e^{-j(k_{T_1}^i n T_1 \sin \theta + k_{T_2}^i (m T_2 + n T_1 \cos \theta))} \quad (4.45)$$

Nous appelons cette expression “forme Kummer spectrale” de la fonction de Green bipériodique.

### 4.3.3 La transformation non-linéaire de Shanks

Il s'agit d'une transformation qui permet d'estimer la valeur de la limite d'une suite alternée  $S_N$ . De façon imagée, c'est l'allure du graphe  $(N, S_N)$  qui permet d'estimer la constante  $c$  telle que  $|S_N - c| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ . Nous l'appliquons à la suite des sommes partielles d'une série :

$S_N = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N u_{nm}$ . La justification mathématique de cette transformation se trouve dans [69].

Ayant calculé les sommes  $S_0, \dots, S_N$ , on calcule les termes suivants de la transformée de Shanks :

$$\begin{aligned}
e_0(S_N) &= S_N, \quad e_1 = \frac{1}{e_0(S_N) - e_0(S_{N-1})} \\
e_p(S_{N-1}) &= e_{p-2}(S_N) + \frac{1}{e_{p-1}(S_N) - e_{p-1}(S_{N-1})}, \quad p = 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Seules les transformées d'ordre pair sont des approximations de  $S_N$  ; celles d'ordre impair sont des intermédiaires de calcul.

Cette transformation est utilisée en plus de la transformation de Shanks, pour calculer plus rapidement les sommes des séries  $G_1$  (4.40) et  $G_3$  (4.44).

#### 4.3.4 La transformation d'Ewald

La transformation d'Ewald [28] a été reprise dans [36] pour le calcul de la fonction de Green bipériodique. Elle est notamment utilisée par A. Morelot [55], T. Eibert et *al.* [25] ou encore I. Stevanović et *al.* [76]. Les justifications mathématiques rigoureuses se trouvent dans [36] et [55]. Nous donnons ici le principe général de la transformation d'Ewald.

Cette transformation utilise l'identité suivante :

$$\frac{e^{jkr}}{r} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-r^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}} ds, \tag{4.47}$$

où  $k$  a des parties réelle et imaginaire positives non nulles, et où l'on a choisi le chemin d'intégration dans le plan complexe de façon à assurer la convergence de l'intégrale et à permettre un changement de variable  $s' = 1/s$  (cf. figure 4.5) :

1.  $\text{Arg}(s) \in ]-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + \text{Arg}(k)[$  lorsque  $|s| \rightarrow 0$  ;
2.  $|\text{Arg}(s)| < \frac{\pi}{4}$  lorsque  $|s| \rightarrow +\infty$ .

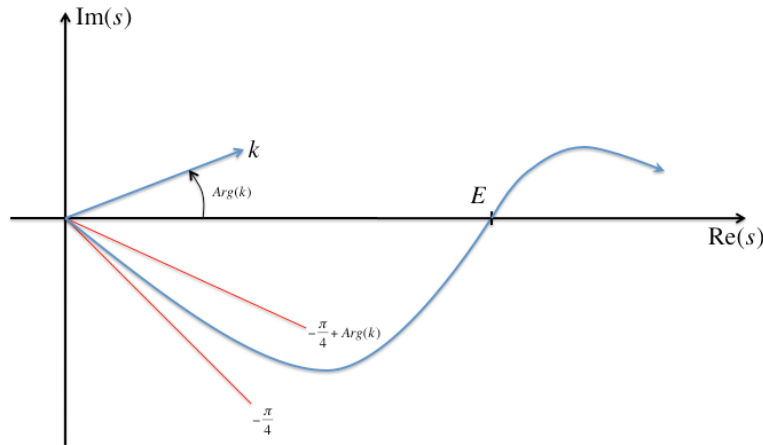


FIGURE 4.5 – Chemin d'intégration de l'identité (4.47).

L'intégrale de l'équation (4.47) peut être scindée en deux morceaux, en introduisant un paramètre réel  $E$  :

$$\frac{e^{jkr}}{r} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^E e^{-r^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}} ds + \int_E^\infty e^{-r^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}} ds \right), \quad (4.48)$$

En introduisant (4.48) dans (4.37), en tenant compte de la convention en  $e^{+j\omega t}$  pour le régime harmonique, et du fait que nous avons alors  $Re(k) > 0$  et  $Im(k) < 0$ , on obtient deux séries, que l'on peut réécrire de la façon suivante (cf. [25]) :

$G(\overrightarrow{MM'}) = G_5(\overrightarrow{MM'}) + G_6(\overrightarrow{MM'})$ , avec

$$G_5(\overrightarrow{MM'}) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \left[ \frac{1}{r_{nm}} e^{-j \left( k_{T_1}^i n T_1 \sin \theta + k_{T_2}^i (m T_2 + n T_1 \cos \theta) \right)} \right. \\ \left. \times \left( e^{+jkr_{nm}} \operatorname{erfc} \left( Er_{nm} + \frac{jk}{2E} \right) + e^{-jkr_{nm}} \operatorname{erfc} \left( Er_{nm} - \frac{jk}{2E} \right) \right) \right] \quad (4.49)$$

et

$$G_6(\overrightarrow{MM'}) = \frac{\pi}{\sqrt{\|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\|}} \sum_{n,m} \left[ \frac{e^{-j(\alpha_{nm}x + \beta_{nm}y)}}{j\gamma_{nm}} \right. \\ \left. \times \left( e^{j\Gamma_{nm}|z|} \operatorname{erfc} \left( \frac{j\gamma_{nm}}{2E} + |z| E \right) + e^{-j\Gamma_{nm}|z|} \operatorname{erfc} \left( \frac{j\gamma_{nm}}{2E} - |z| E \right) \right) \right], \quad (4.50)$$

où  $E = \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{\|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\|}}}$  et  $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-s^2} ds$  est la fonction complémentaire d'erreur (cf. [3]).

Les équations (4.49) et (4.50) permettent un calcul rapide de la fonction de Green bipériodique, y compris pour des cas avec  $z$  petit ou nul. L'accélération de convergence est également importante pour des matériaux sans pertes. En effet, la condition  $Im(k) \neq 0$  n'est plus nécessaire : les expressions (4.49) et (4.50) restent valables.

### 4.3.5 Choix de la méthode appropriée

Chronologiquement, nous avons d'abord implémenté les méthodes suivantes :

- Calcul direct
- Transformation de Poisson
- Transformation de Kummer + transformation de Shanks, forme spatiale
- Transformation de Kummer + transformation de Shanks, forme spectrale

Le premier critère de choix que nous avons adopté est celui proposé par Nicolas Guérin [32] : ce critère nous a paru efficace.

Une fois que la transformation d'Ewald a été implémentée dans le code de calcul, nous nous sommes rendu compte que le critère de choix d'Anne Morelot [55] permet un calcul plus rapide de la fonction de Green pseudopériodique : on utilise la transformation de Poisson lorsque  $\frac{|z-z'|}{\max(T_1, T_2)} > 0,6$ , et la transformation d'Ewald dans tous les autres cas.

Le même critère de choix est utilisé pour le calcul du gradient de la fonction de Green.

## 4.4 Calcul sur maillage structuré

Une méthode beaucoup utilisée pour les calculs sur les radômes et les surfaces sélectives en fréquence est celle proposée par Cwik, Chan et Mittra ([53] et [17]). Elle est très rapide et précise pour le calcul des matrices  $S$  de réseaux bipériodiques de feuillets métalliques plans. Une technique de calcul d'empilements permet ensuite d'obtenir la matrice  $S$  d'un empilement de feuillets métalliques plans séparés par des couches homogènes de matériaux diélectriques. Nous l'adaptions ici au formalisme dans lequel nous nous plaçons et nous l'appelons « algorithme des feuillets plans à maillage structuré ».

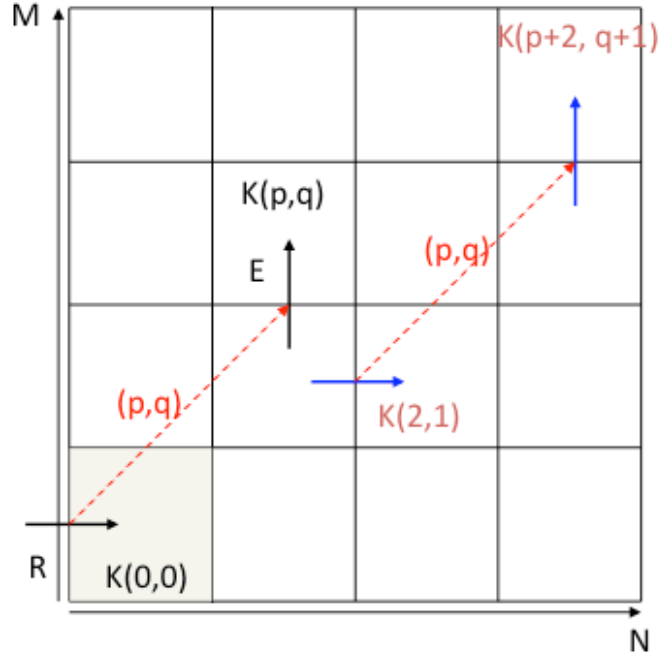
Même si nous disposons de techniques d'accélération de convergence pour calculer la somme de la fonction de Green bipériodique, ce calcul reste pénalisant. Il l'est d'autant plus qu'on doit le faire pour le calcul des contributions des opérateurs intégraux pour tous les couples de fonctions de base et fonctions-test du maillage. Or la contribution d'un opérateur intégral ne dépend que de la position relative du support de la fonction de base par rapport à celui de la fonction-test, comme le montre la figure 4.6. C'est là une propriété très intéressante à exploiter : éviter de calculer à plusieurs reprises des contributions qui ont la même valeur.

À partir de maintenant, on suppose que les vecteurs de périodicité sont orthogonaux. Une extension au cas où les vecteurs de périodicité ne sont pas orthogonaux est présentée dans [53].

Nous supposons ici que nous calculons les contributions des opérateurs intégraux sur un dioptré plan, parallèle à  $Oxy$ , dont les éléments s'inscrivent dans une grille régulière, dont les éléments quadrangulaires de dimensions  $\Delta x$  (suivant  $x$ ) et  $\Delta y$  (suivant  $y$ ) sont décrits par  $K(p, q) = [0, \Delta x] \times [0, \Delta y] + (p\Delta x, q\Delta y)$ .  $\Delta x$  et  $\Delta y$  doivent être choisis tels que  $\frac{T_1}{\Delta x} = N \in \mathbb{N}$  et  $\frac{T_2}{\Delta y} = M \in \mathbb{N}$ .

Dans ce cas, les contributions de l'opérateur  $\mathcal{Q}$  sont toujours nulles car celui-ci contient un produit mixte de trois vecteurs coplanaires. Nous ne devons donc calculer que les contributions de l'opérateur  $(\mathcal{B} - \mathcal{S})$  pour tous les couples fonction de base / fonction-test  $(\vec{f}_{j'}, \vec{f}_i)$  du dioptré considéré :

$$(\mathcal{B} - \mathcal{S})_{ij} = \frac{j}{4\pi} \iint_{\Gamma_i \times \Gamma_{j'}} \left\{ kG(\overrightarrow{MM'}) (\vec{f}_i \cdot \vec{f}_{j'}) - \frac{1}{k} G(\overrightarrow{MM'}) (\nabla \cdot \vec{f}_i) (\nabla \cdot \vec{f}_{j'}) \right\} ds ds' \quad (4.51)$$



**FIGURE 4.6** – Invariance par translation des opérateurs pour deux couples de fonction de base / fonction-test.

Il y a quatre cas à étudier :

- $\vec{f}_i$  et  $\vec{f}_{j'}$  toutes deux suivant  $x$ , de supports respectifs  $K(p-1, q) \cup K(p, q)$  et  $K(p'-1, q') \cup K(p', q')$  ;
- $\vec{f}_i$  et  $\vec{f}_{j'}$  toutes deux suivant  $y$ , de supports respectifs  $K(p, q-1) \cup K(p, q)$  et  $K(p', q'-1) \cup K(p', q')$  ;
- $\vec{f}_i$  suivant  $x$  et  $\vec{f}_{j'}$  suivant  $y$ , de supports respectifs  $K(p-1, q) \cup K(p, q)$  et  $K(p', q'-1) \cup K(p', q')$  ;
- $\vec{f}_i$  suivant  $y$  et  $\vec{f}_{j'}$  suivant  $x$ , de supports respectifs  $K(p, q-1) \cup K(p, q)$  et  $K(p'-1, q') \cup K(p', q')$ .

#### 4.4.1 Calcul analytique des contributions

Le premier avantage de cette méthode est qu'elle permet un calcul analytique des contributions de l'opérateur intégral  $(\mathcal{B} - \mathcal{S})$ , et il n'est plus besoin d'utiliser une technique d'intégration numérique par points de Gauss.

Pour toutes les contributions, on a quatre intégrales doubles à calculer : le support de chaque fonction est composé de deux quadrangles, sur lesquels les fonctions ont une expression connue (4.21).

**Pour  $\vec{f}_i$  et  $\vec{f}_{j'}$  suivant  $x$ , on a :**

$$(\mathcal{B} - \mathcal{S})_{ij}^{xx} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

où

$$I_1 = \frac{j}{4\pi} \iint_{K(p,q) \times K(p',q')} \left\{ kG(\vec{r}) (\vec{f}_i \cdot \vec{f}_{j'}) - \frac{1}{k} G(\vec{r}) (\nabla \cdot \vec{f}_i) (\nabla \cdot \vec{f}_{j'}) \right\} ds ds' \quad (4.52)$$

$$I_2 = \frac{j}{4\pi} \iint_{K(p-1,q) \times K(p',q')} \left\{ kG(\vec{r}) (\vec{f}_i \cdot \vec{f}_{j'}) - \frac{1}{k} G(\vec{r}) (\nabla \cdot \vec{f}_i) (\nabla \cdot \vec{f}_{j'}) \right\} ds ds' \quad (4.53)$$

$$I_3 = \frac{j}{4\pi} \iint_{K(p,q) \times K(p'-1,q')} \left\{ kG(\vec{r}) (\vec{f}_i \cdot \vec{f}_{j'}) - \frac{1}{k} G(\vec{r}) (\nabla \cdot \vec{f}_i) (\nabla \cdot \vec{f}_{j'}) \right\} ds ds' \quad (4.54)$$

$$I_4 = \frac{j}{4\pi} \iint_{K(p-1,q) \times K(p'-1,q')} \left\{ kG(\vec{r}) (\vec{f}_i \cdot \vec{f}_{j'}) - \frac{1}{k} G(\vec{r}) (\nabla \cdot \vec{f}_i) (\nabla \cdot \vec{f}_{j'}) \right\} ds ds' \quad (4.55)$$

$$(4.56)$$

Cela donne, une fois les calculs développés (cf. [17]), dans le cas particulier de quadrangles coplanaires et en utilisant la forme spectrale de la fonction de Green (4.38), à la limite  $z = 0$  :

$$(\mathcal{B} - \mathcal{S})_{ij}^{xx} = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2kT_x T_y} \sum_{nm} \left\{ e^{-j(\alpha_n(p'-p)\Delta x + \beta_m(q'-q)\Delta y)} \left[ \frac{\beta_m^2 + \gamma_{nm}^2}{\gamma_{nm}} \text{sinc}^4 \left( \frac{\alpha_n \Delta x}{2} \right) \text{sinc}^2 \left( \frac{\beta_m \Delta y}{2} \right) \right] \right\}, \quad (4.57)$$

où  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ .

**Pour  $\vec{f}_i$  et  $\vec{f}_{j'}$  suivant  $y$ , on a :**

$$(\mathcal{B} - \mathcal{S})_{ij}^{yy} = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2kT_x T_y} \sum_{nm} \left\{ e^{-j(\alpha_n(p'-p)\Delta x + \beta_m(q'-q)\Delta y)} \left[ \frac{\alpha_n^2 + \gamma_{nm}^2}{\gamma_{nm}} \text{sinc}^2 \left( \frac{\alpha_n \Delta x}{2} \right) \text{sinc}^4 \left( \frac{\beta_m \Delta y}{2} \right) \right] \right\} \quad (4.58)$$

**Pour  $\vec{f}_i$  suivant  $x$  et  $\vec{f}_{j'}$  suivant  $y$ , on a :**

$$(\mathcal{B} - \mathcal{S})_{ij}^{xy} = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2kT_x T_y} \sum_{nm} \left\{ e^{-j(\alpha_n(p'-p)\Delta x + \beta_m(q'-q)\Delta y)} e^{-j\left(\frac{k_x \Delta x}{2} - \frac{k_y \Delta y}{2}\right)} \left[ \frac{-\alpha_n \beta_m}{\gamma_{nm}} \text{sinc}^3 \left( \frac{\alpha_n \Delta x}{2} \right) \text{sinc}^3 \left( \frac{\beta_m \Delta y}{2} \right) \right] \right\} \quad (4.59)$$

**Pour  $\vec{f}_i$  suivant  $y$  et  $\vec{f}_{j'}$  suivant  $x$ , on a :**

$$(\mathcal{B} - \mathcal{S})_{ij}^{yx} = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2kT_x T_y} \sum_{nm} \left\{ e^{-j(\alpha_n(p'-p)\Delta x + \beta_m(q'-q)\Delta y)} e^{j\left(\frac{k_x \Delta x}{2} - \frac{k_y \Delta y}{2}\right)} \left[ \frac{-\alpha_n \beta_m}{\gamma_{nm}} \text{sinc}^3 \left( \frac{\alpha_n \Delta x}{2} \right) \text{sinc}^3 \left( \frac{\beta_m \Delta y}{2} \right) \right] \right\} \quad (4.60)$$

Les opérateurs se trouvent être des sommes de puissances de sinus cardinaux : ces séries sont rapidement convergentes.

#### 4.4.2 Utilisation d'une transformée de Fourier discrète

On fait même mieux en faisant apparaître dans ces sommes des transformées de Fourier discrètes (TFD). Cette idée est présentée dans [17] et [53], pour traiter la diffraction par des feuillets métalliques plans, séparés par des couches homogènes de matériaux diélectriques. Nous la reprenons ici dans un cas plus général.

Pour faire apparaître la TFD, on peut généraliser les expressions de opérateurs et écrire :

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{B} - \mathcal{S})_{\mathbf{ij}}^{xy} & (\mathcal{B} - \mathcal{S})_{\mathbf{ij}}^{xy} \\ (\mathcal{B} - \mathcal{S})_{\mathbf{ij}}^{yx} & (\mathcal{B} - \mathcal{S})_{\mathbf{ij}}^{yy} \end{pmatrix} = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2kT_x T_y} \sum_{nm} e^{-j(\alpha_n(p'-p)\Delta x + \beta_m(q'-q)\Delta y)} \times \begin{pmatrix} G_{xx}^{nm} & G_{xy}^{nm} \\ G_{yx}^{nm} & G_{yy}^{nm} \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

où :

$$G_{xx}^{nm} = \frac{\beta_m^2 + \gamma_{nm}^2}{\gamma_{nm}} \text{sinc}^4\left(\frac{\alpha_n \Delta x}{2}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\beta_m \Delta y}{2}\right) \quad (4.62)$$

$$G_{xy}^{nm} = -e^{-j\left(\frac{k_x \Delta x}{2} - \frac{k_y \Delta y}{2}\right)} \frac{\alpha_n \beta_m}{\gamma_{nm}} \text{sinc}^3\left(\frac{\alpha_n \Delta x}{2}\right) \text{sinc}^3\left(\frac{\beta_m \Delta y}{2}\right) \quad (4.63)$$

$$G_{yx}^{nm} = -e^{j\left(\frac{k_x \Delta x}{2} - \frac{k_y \Delta y}{2}\right)} \frac{\alpha_n \beta_m}{\gamma_{nm}} \text{sinc}^3\left(\frac{\alpha_n \Delta x}{2}\right) \text{sinc}^3\left(\frac{\beta_m \Delta y}{2}\right) \quad (4.64)$$

$$G_{yy}^{nm} = \frac{\alpha_n^2 + \gamma_{nm}^2}{\gamma_{nm}} \text{sinc}^2\left(\frac{\alpha_n \Delta x}{2}\right) \text{sinc}^4\left(\frac{\beta_m \Delta y}{2}\right). \quad (4.65)$$

L'équation (4.61) peut être réécrite en faisant apparaître les TFD :

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{B} - \mathcal{S})_{\mathbf{ij}}^{xy} & (\mathcal{B} - \mathcal{S})_{\mathbf{ij}}^{xy} \\ (\mathcal{B} - \mathcal{S})_{\mathbf{ij}}^{yx} & (\mathcal{B} - \mathcal{S})_{\mathbf{ij}}^{yy} \end{pmatrix} = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2kT_x T_y} e^{-j(k_x^i(p'-p)\Delta x + k_y^i(q'-q)\Delta y)} S(p' - p, q' - q), \quad (4.66)$$

où :

$$S(p' - p, q' - q) = \sum_{\substack{n'=0, \dots, N-1 \\ m'=0, \dots, M-1}} e^{-j\left(\frac{2\pi n'(p'-p)}{N} + \frac{2\pi m'(q'-q)}{M}\right)} \sum_{rs} \begin{pmatrix} G_{xx}^{n'+rN, m'+sM} & G_{xy}^{n'+rN, m'+sM} \\ G_{yx}^{n'+rN, m'+sM} & G_{yy}^{n'+rN, m'+sM} \end{pmatrix}.$$

La première somme double est une TFD. Il suffit donc de calculer, pour tous les couples de  $n' = 0, \dots, N-1$  et  $m' = 0, \dots, M-1$ , les termes de  $\sum_{rs} \begin{pmatrix} G_{xx}^{n'+rN, m'+sM} & G_{xy}^{n'+rN, m'+sM} \\ G_{yx}^{n'+rN, m'+sM} & G_{yy}^{n'+rN, m'+sM} \end{pmatrix}$ .

On n'a alors plus que  $N \times M$  sommes doubles à évaluer, qui ne dépendent pas de  $p' - p$  et  $q' - q$ , qui sont rapidement convergentes (ce qui permet une sommation directe).

Par ailleurs, nous avons calculé directement et analytiquement les contributions de l'opérateur, et non pas évalué les valeurs de la fonction de Gauss pour chaque couple de Gauss lorsque l'on fait une intégration numérique par points de Gauss.

Si l'on avait calculé les contributions de l'opérateur  $(\mathcal{B} - \mathcal{S})$  directement, à l'aide de la transformation d'Ewald, en utilisant les propriétés d'invariance par translation, nous aurions eu au moins 32 fois plus de sommes doubles à calculer : deux séries doubles et au minimum quatre points de Gauss par élément émetteur et élément récepteur.

### 4.4.3 Arguments de symétrie

Cette méthode permet de ne calculer qu'une «colonne» de l'opérateur  $(\mathcal{B} - \mathcal{S})$  : on fixe  $(p, q) = (0, 0)$  et calcule les contributions pour tous les  $(p', q') \in \{0, \dots, N_x - 1\} \times \{0, \dots, N_y - 1\}$ . Cela permet d'obtenir directement les valeurs pour :

$$(p' - p, q' - q) \in \{1 - N_x, \dots, N_x - 1\} \times \{1 - N_y, \dots, N_y - 1\},$$

en utilisant les propriétés de pseudopériodicité.

Si la fonction de base  $i$  est sur l'élément  $p$  et la fonction-test  $j$  sur l'élément  $q$ , alors :

$$(\mathcal{B} - \mathcal{S})_{i(\mathbf{p}), j(\mathbf{q})} = e^{-jk_x^i T_1} (\mathcal{B} - \mathcal{S})_{i(\mathbf{p}+\mathbf{N}), j(\mathbf{q})} \quad (4.67)$$

$$= e^{-jk_y^i T_2} (\mathcal{B} - \mathcal{S})_{i(\mathbf{p}), j(\mathbf{q}+\mathbf{M})} \quad (4.68)$$

$$= e^{-j(k_y^i T_2 + j k_y^i T_2)} (\mathcal{B} - \mathcal{S})_{i(\mathbf{p}+\mathbf{N}), j(\mathbf{q}+\mathbf{M})}. \quad (4.69)$$

## 4.5 Conclusion

Nous avons franchi la première étape du travail : intégrer les résultats et méthodes existants sur les équations intégrales bipériodiques dans un code de calcul.

À l'issue de ce chapitre, nous savons quelles sont les équations que nous voulons résoudre et quelle méthode de résolution nous utilisons : nous cherchons une solution approchée de la formulation intégrale PMCHWT à l'aide d'une méthode des éléments finis surfaciques. C'est une technique qui est bien maîtrisée dans le cas tridimensionnel sans périodicité, bien que non triviale ! Nous avons vu quelle est la principale difficulté qui se présente lorsque l'on passe aux cas bipériodiques : la fonction de Green prend la forme d'une série double lentement convergente dont le calcul rapide est un enjeu important de la méthode. Pour cela, nous avons essayé différentes méthodes et retenu un critère de choix.

Malgré l'optimisation du calcul de la fonction de Green bipériodique, le temps d'assemblage de la matrice reste très long par rapport au temps de résolution directe du système linéaire, et ce même pour des cas comptant plus de 10 000 inconnues.

Nous avons également présenté une méthode de calcul habituellement restreinte aux empilements de réseaux bipériodiques de feuillets métalliques séparés par des couches de matériaux diélectriques homogènes isotropes.

Dans ce cas, en revanche, le temps d'assemblage est très faible : il est même beaucoup plus rapide que pour un calcul 3D comportant le même nombre de degrés de liberté. Ce temps d'assemblage est aussi très petit devant le temps de résolution directe du système linéaire.

Nous sommes en mesure de traiter un grand nombre de cas bipériodiques, y compris ceux dont la cellule de périodicité est très générale. Le temps de calcul n'est cependant petit que dans le cas où l'on peut utiliser l'algorithme des feuillets plans à maillage structuré.

Nous verrons au chapitre suivant comment adapter cette méthode afin de traiter efficacement des cas dont la cellule de périodicité est très générale : il s'agira d'introduire une méthode hybride utilisant des équations intégrales bipériodiques sur les bords des domaines semi-infinis supérieur et inférieur et des équations intégrales 3D sur les bords des autres domaines. Nous en profiterons également pour donner quelques aspects de l'implémentation du code de calcul.



# Chapitre 5

## Méthode hybride EI 3D2D / EI 3D

### Table des matières

---

|            |                                                                                       |           |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5.1</b> | <b>Introduction . . . . .</b>                                                         | <b>70</b> |
| <b>5.2</b> | <b>Assemblage de la matrice . . . . .</b>                                             | <b>71</b> |
| <b>5.3</b> | <b>Méthode hybride EI 3D2D / EI 3D . . . . .</b>                                      | <b>73</b> |
| 5.3.1      | Problème interne borné . . . . .                                                      | 73        |
| 5.3.2      | Conditions de périodicité aux interfaces entre deux cellules de périodicité . . . . . | 74        |
| 5.3.3      | Opérateurs intégraux bipériodiques dans les domaines semi-infinis                     | 77        |
| 5.3.4      | Généralisation des conditions de pseudopériodicité . . . . .                          | 80        |
| 5.3.5      | Réduction du nombre d'évaluations de la fonction de Green bipériodique . . . . .      | 81        |
| <b>5.4</b> | <b>Interfaces fictives . . . . .</b>                                                  | <b>81</b> |
| <b>5.5</b> | <b>Parallélisation du calcul . . . . .</b>                                            | <b>83</b> |
| 5.5.1      | Mémoire partagée : parallélisation de l'assemblage . . . . .                          | 83        |
| 5.5.2      | Mémoire distribuée : parallélisation en fréquence . . . . .                           | 84        |
| <b>5.6</b> | <b>Conclusion . . . . .</b>                                                           | <b>85</b> |

---

## 5.1 Introduction

Au chapitre précédent, nous avons donné les grandes lignes de la méthode de résolution des équations intégrales bipériodiques (EI 3D2D) sur laquelle nous nous sommes appuyés. Nous avons vu qu'en l'état, cette méthode présente un inconvénient de poids : le temps de calcul dû aux nombreuses évaluations de la fonction de Green bipériodique. Deux voies majeures peuvent alors être explorées : celle d'un calcul plus efficace de la fonction de Green bipériodique ou celle d'une réduction drastique de son nombre d'évaluations.

Nous présentons dans ce chapitre comment nous avons utilisé la méthode EI 3D2D pour concevoir une méthode hybride EI 3D2D / EI 3D. Comme nous l'avons écrit en 3.5, il existe des méthodes hybridant la méthode EI 3D2D avec une autre méthode de calcul :

- calcul analytique d'empilements de matrices  $S$  de feuillets métalliques sans épaisseur et de couches diélectriques homogènes ([17] et [53]) ;
- méthode d'éléments finis ([50] et [25])
- méthode d'équations intégrales 3D.

L'hybridation avec une méthode d'équations intégrales 3D est proposée dans [80] : dans cet article, la formulation intégrale utilisée n'est pas la formulation PMCHWT, pourtant reconnue pour ses qualités de précision, ce qui empêche également de généraliser facilement la prise en compte des conditions de périodicité. Par ailleurs, les interfaces inférieure et supérieure sont traitées par des éléments triangulaires du côté du réseau bipériodique, et par des éléments quadrangulaires du côté des domaines semi-infinis ; il faut alors définir une condition de raccord entre ces deux types d'éléments.

La méthode hybride EI 3D2D / EI 3D, que nous présentons, utilise les équations intégrales 3D (EI 3D) dans les domaines internes. Ceux-ci sont bornés en créant une interface fictive séparant la cellule de périodicité, sur laquelle est effectué le calcul, de ses voisines. Nous verrons que cela introduit des conditions aux limites de pseudopériodicité sur les interfaces séparant deux cellules de périodicité voisines.

En revanche, ce sont les équations intégrales bipériodiques qui sont écrites dans les deux domaines semi-infinis inférieur et supérieur. Nous verrons que l'assemblage des opérateurs intégraux bipériodiques définis au chapitre précédent introduit naturellement des conditions de périodicité sur les bords de la cellule de périodicité.

Nous montrons que les conditions de périodicité pour les domaines bornés ou semi-infinis peuvent être généralisées et se traiter de la même façon.

La manière dont nous présentons le calcul des opérateurs permet d'assembler naturellement la matrice correspondant à une formulation PMCHWT sur toute la structure bipériodique.

De plus, il est impératif que la prise en compte des conditions de périodicité soit effectuée de façon adéquate.

A ce stade, nous avons réduit de moitié au moins le nombre d'évaluations de la fonction de Green bipériodique pour un calcul de problème bipériodique ; dans beaucoup de cas, le temps d'assemblage est divisé par deux ou plus.

Mais il est souvent possible de faire mieux : nous proposons une façon de modéliser une structure bipériodique qui réduit encore le temps d'assemblage des opérateurs intégraux : on maille une couche de matériau semi-infini de façon à ce que le maillage soit localement structuré sur les interfaces inférieure et supérieure de la structure considérée. L'opérateur intégral à assembler peut alors être calculé par l'algorithme des feuillets plans à maillage structuré [53], qui est très efficace, plus rapide que le calcul d'un opérateur intégral 3D non périodique. Cela suppose de disposer d'un calcul d'opérateurs intégraux permettant de combiner éléments triangulaires et rectangulaires, de manière quelconque, sans altérer la précision du calcul. Le gain sur le temps d'assemblage est souvent d'un facteur 100, voire davantage. Pour une structure bipériodique, le temps de calcul est alors similaire à celui d'un calcul 3D sans périodicité ayant le même nombre de degrés de liberté.

Un point fort de cette méthode est d'inclure naturellement l'algorithme des feuillets plans à maillage structuré [53], qui, lorsqu'elle peut être employée, est extrêmement rapide et permet en particulier des calculs d'optimisation.

Au cours de ce chapitre, nous décrivons quelques aspects de l'implémentation de la méthode numérique. Nous montrons notamment deux manières de paralléliser les calculs, en mémoire partagée ou en mémoire distribuée.

La méthode numérique présentée ici constitue à présent une fonctionnalité du code *Spectre* de Dassault Aviation ; ce logiciel comprend notamment une méthode de calcul par équations intégrales 3D. Nous nous sommes servis des outils existants pour développer la méthode hybride EI 3D2D / EI 3D, ce qui a permis de valider la pertinence de la formulation proposée. Ce fut une source de motivation pour nous et le service qui développe ce code ; bien entendu, cela a également imposé des contraintes, mais le code existant a pu servir de point de départ. De plus, une partie des post-traitements, le calcul précis des termes proches pour les quadrangles et les combinaisons triangles-quadrangles et la plus grande partie de la parallélisation n'a pas été faite par nous, car ces travaux ne s'inscrivaient pas dans le cadre de la thèse.

## 5.2 Assemblage de la matrice

On appelle « assemblage » le calcul des termes de la matrice du système linéaire obtenu par la méthode des éléments finis : il s'agit de calculer les contributions des opérateurs intégraux pour chaque couple de fonction de base et fonction-test.

Dans notre cas, la méthode numérique choisie influe sur l'assemblage. Nous avons vu que, dans le cas d'un maillage localement structuré, il suffit d'assembler une colonne de la matrice pour en obtenir tous les termes (cf. 4.4).

Mais nous verrons aussi à la section 5.3 que l'assemblage nous permet d'introduire de façon simple des conditions de pseudopériodicité dans le cas de la méthode hybride EI 3D2D /

EI 3D. C'est la raison pour laquelle il est important d'expliquer comment l'assemblage est effectué.

Par ailleurs, les opérateurs intégraux sont calculés numériquement à l'aide d'une méthode d'intégration par points de Gauss à distance de la singularité (i.e. loin de  $\vec{r} = 0$ ), et à l'aide d'une méthode semi-analytique à proximité de la singularité (en  $\vec{r} = 0$ ) : la partie singulière est intégrée analytiquement et la partie régulière l'est numériquement. C'est ce qui est fait dans le code *Spectre* de Dassault Aviation.

**Maillage** À chaque frontière d'un élément du maillage sont associées des fonctions de base, qui sont également fonctions-tests, et qui représentent le courant électrique et le courant magnétique. Les fonctions de base sont numérotées et associées à un unique degré de liberté; elles appartiennent à deux éléments (voire plus, aux jonctions entre plusieurs domaines). Par abus de langage, on dit que la restriction d'une fonction de base (ou fonction-test) à un seul élément est une demi-fonction de base (ou fonction-test).

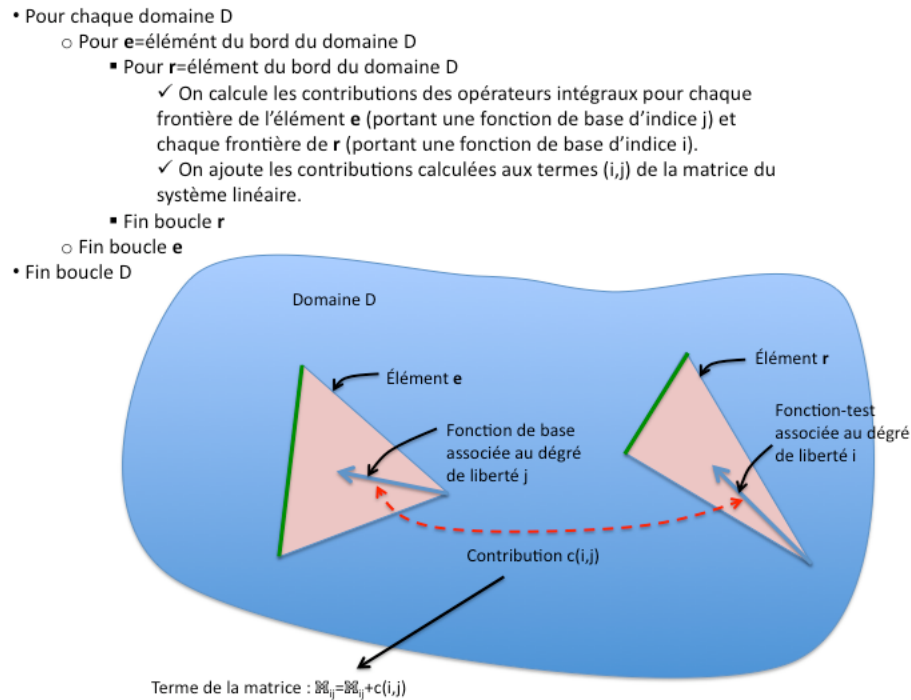


FIGURE 5.1 – Boucles imbriquées pour l'assemblage de la matrice du système linéaire.

**Assemblage** La manière la plus immédiate d'assembler la matrice serait d'effectuer une double boucle sur les fonctions de base et sur les fonctions-tests; pour chacune d'elles, on calcule alors toutes les contributions d'opérateurs intégraux possibles. Nous avons choisi, au contraire, de conserver l'assemblage tel qu'il est implémenté dans le méthode EI 3D du code *Spectre*, qui consiste en une double boucle sur les éléments, car il permet un gain sensible en temps d'assemblage. En effet, on ne calcule les fonctions de Green aux points de Gauss d'un élément qu'une seule fois. Avec une double boucle sur les fonctions de base et fonctions-tests, on aurait dû calculer les fonctions de Green aux points de Gauss sur le support des fonctions, or chaque élément appartient au support de plusieurs fonctions : on

aurait donc été amené à calculer à plusieurs reprises les fonctions de Green aux points de Gauss d'un même élément.

L'assemblage se fait par boucles imbriquées. La boucle la plus externe est une boucle sur les domaines : dans le domaine choisi, on effectue une double boucle sur les éléments qui constituent le bord du domaine. Pour chaque domaine et couple d'éléments, on calcule les contributions des opérateurs intégraux liés aux fonctions de base et fonctions-tests attachées aux frontières des éléments considérés. Les contributions calculées sont ajoutées aux termes correspondants dans la matrice du système linéaire. La figure 5.1 présente l'imbrication des boucles dans l'assemblage.

En procédant ainsi, la formulation PMCHWT est naturellement mise en œuvre : la boucle sur les domaines permet d'écrire les équations intégrales dans chaque domaine.

## 5.3 Méthode hybride EI 3D2D / EI 3D

Les méthodes hybrides séparent le traitement des domaines semi-infinis de celui des domaines internes à la structure bipériodique. On pourrait aussi parler de méthode de sous-structuration, surtout si la résolution est faite domaine par domaine, comme dans [80].

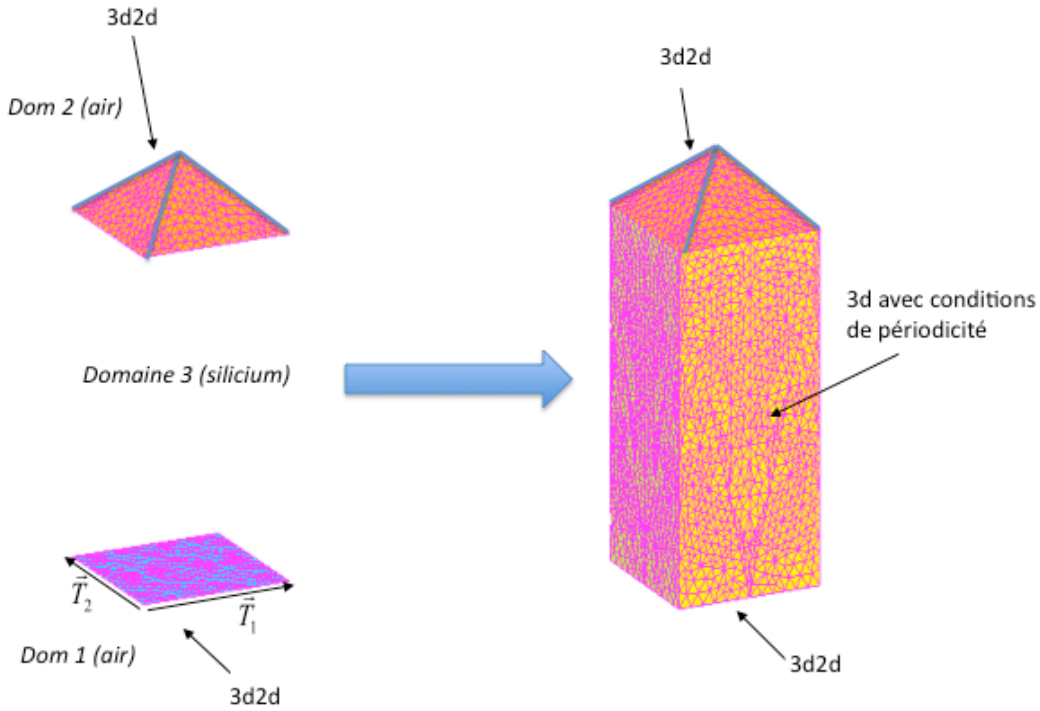
Dans la méthode que nous présentons, seuls les domaines semi-infinis inférieur et supérieur sont traités avec les équations intégrales bipériodiques. L'intérieur du réseau bipériodique est traité par les équations intégrales 3D sans périodicité : cela impose de borner les domaines internes et d'imposer des conditions aux limites de pseudopériodicité sur les bords de la cellule de périodicité. Les équations intégrales 3D utilisent la fonction de Green 3D, dont le coût de calcul est négligeable par rapport à celui de la fonction de Green bipériodique.

### 5.3.1 Problème interne borné

Dans le chapitre 4, nous n'avons pas parlé du caractère borné ou non des domaines qui constituent l'intérieur du réseau. Cela n'avait pas d'importance puisque la fonction de Green bipériodique était utilisée sur toutes les interfaces.

Nous voulons maintenant utiliser les équations intégrales des problèmes 3D sans périodicité dans le réseau pour limiter le nombre d'évaluations de la fonction de Green bipériodique. Cela ne peut se faire que sur des domaines bornés, dans lesquels la propagation des ondes électromagnétiques ne dépend pas du caractère bipériodique du problème ; celui-ci est imposé par la condition aux limites de pseudopériodicité sur les courants électrique et magnétique qui passent d'une cellule de périodicité à ses voisines.

Pour que les domaines internes de la cellule de périodicité soient bornés, nous créons des interfaces fictives entre deux cellules de périodicité voisines. Ces interfaces peuvent séparer deux domaines de matériaux identiques. La figure 5.2 donne l'exemple d'un réseau de pyramides gravées sur une plaque de silicium : on peut modéliser cette structure à l'aide de trois domaines non bornés (à gauche) ou de deux domaines non bornés et d'un domaine borné, en créant des interfaces fictives entre les cellules de périodicité (à droite).



**FIGURE 5.2** – *Passage d’une méthode d’équations intégrales bipériodiques à une méthode hybride : deux modélisations différentes d’un réseau de pyramides gravé sur une plaque de silicium.*

### 5.3.2 Conditions de périodicité aux interfaces entre deux cellules de périodicité

Les courants sur les frontières d’une cellule de périodicité avec ses voisins sont liés par une relation de pseudopériodicité : entre deux bords translatés de  $\vec{T}_1$  ou de  $\vec{T}_2$ , les courants sont les mêmes à un déphasage près, dû à l’onde incidente :

$$\vec{J}(\vec{r} + n\vec{T}_1 + m\vec{T}_2) = \vec{J}(\vec{r}) e^{-j\varphi(n,m)} \quad \text{avec} \quad \vec{r}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (5.1)$$

où le terme de déphasage vaut :  $\varphi(n, m) = n\vec{k}^i \cdot \vec{T}_1 + m\vec{k}^i \cdot \vec{T}_2$ .

Pour imposer fortement la condition aux limites de pseudopériodicité du problème, on élimine les degrés de liberté des cellules  $(n, m)$ ,  $n \neq 0$ ,  $m \neq 0$ , à l’aide de (5.1). En quelque sorte, cela revient à “recoller” l’un à l’autre des bords opposés de la cellule de périodicité. Cela est proposé, dans le cas des méthodes d’éléments finis hybrides, par [50] et repris par [62].

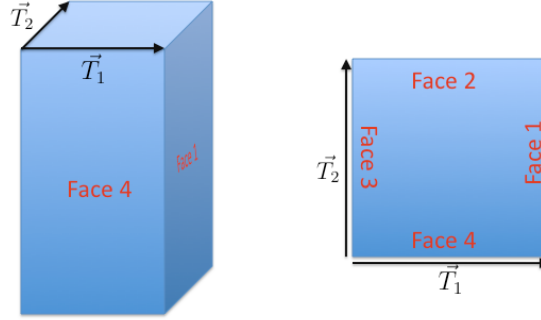
Nous montrons comment transposer cette idée à une méthode surfacique utilisant les équations intégrales 3D. Nous verrons qu’une bonne prise en compte de la périodicité est indispensable pour obtenir une formulation PMCHWT dans la cellule.

Dans les domaines bornés, des fonctions de base et fonctions-tests sont associées à toutes les frontières communes à au moins deux éléments. Pour l’instant, on compte un degré

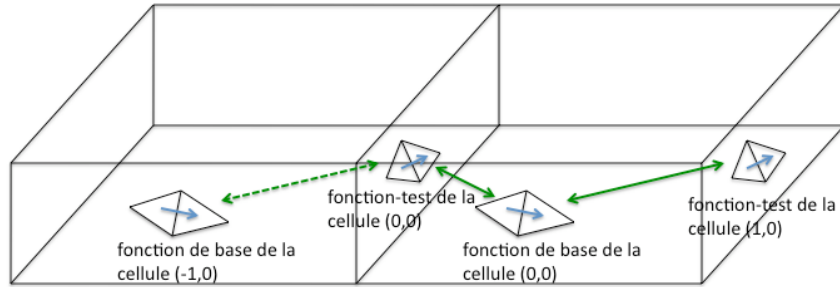
de liberté par fonction de base ; le nombre de degrés de liberté est en fait réduit par les conditions aux limites de pseudopériodicité, détaillées ci-après.

Par souci de clarté, nous nommons les bords “verticaux” de la cellule de périodicité, comme cela est donné sur la figure 5.3 :

- La face 1 est à la jonction entre la cellule (0,0) et la cellule (1,0).
- La face 2 est à la jonction entre la cellule (0,0) et la cellule (0,1).
- La face 3 est à la jonction entre la cellule (0,0) et la cellule (-1,0).
- La face 4 est à la jonction entre la cellule (0,0) et la cellule (0,-1).



**FIGURE 5.3** – À gauche, vue en perspective d’une cellule de périodicité. À droite, vue de dessus.



**FIGURE 5.4** – Déphasage dû aux fonctions-tests : l’interaction entre une fonction-test de la cellule (1,0), sur la face 1, et une fonction de base de la cellule (0,0) (flèche verte longue) permet de calculer l’interaction entre une fonction-test de la cellule (0,0), sur la face 3, et une fonction de base de la cellule (-1,0) (flèche verte pointillée).

**Déphasage dû aux fonctions de base** Les degrés de liberté sur les parois opposées étant portés par des fonctions de base distinctes,  $\vec{f}_{j'}$  (sur la face 3 ou 4) et  $\vec{f}_{j''}$  (sur la face 1 ou 2), on a :

$$J_{j'} = \langle \vec{J}, \vec{f}_{j'} \rangle = e^{+j\phi} \langle \vec{J}, \vec{f}_{j''} \rangle = e^{+j\phi} J_{j''}, \quad (5.2)$$

où  $\phi$  est le déphasage correspondant à la position de la fonction de base  $\vec{f}_{j''}$ . Le déphasage vaut :

- $\phi = \vec{k}^i \cdot \vec{T}_1$  si  $\vec{f}_{j''}$  est sur la face 1 ;
- $\phi = \vec{k}^i \cdot \vec{T}_2$  si  $\vec{f}_{j''}$  est sur la face 2 ;

- $\phi = \vec{k}^i \cdot \vec{T}_1 + \vec{k}^i \cdot \vec{T}_2$  si  $\vec{f}_{j''}$  est associée à une arête située à la fois sur les faces 1 et 2.

Cette équation (5.2) permet de réduire le nombre de degrés de liberté du problème en ne conservant que l'inconnue  $J_{j'}$ , ou plus généralement en ne conservant que les degrés de liberté des faces 3 ou 4.

En effet, on calcule les contributions  $(\mathbb{B} - \mathbb{S})(i, j')$  et  $(\mathbb{B} - \mathbb{S})_i(i, \tilde{j}')$  de l'opérateur  $(\mathcal{B} - \mathcal{S})$ , pour une fonction-test  $\vec{f}_i$  non située sur les bords de la cellule et les fonctions de base  $\vec{f}_{j'}$  et  $\vec{f}_{j''}$ . On peut alors remplacer  $e^{+j\phi} J_{j''}$  dans le produit matrice-vecteur et mettre en facteur commun le degré de liberté  $J_{j'}$ .

Si on procède de la même manière pour toutes les fonctions de base situées sur les faces 1 et 2, on obtient un nouveau système linéaire, de taille réduite, sans les degrés de liberté des faces 1 et 2. Le terme matriciel correspondant à l'opérateur  $(\mathbf{B} - \mathbf{S})$  est donc :

$$\mathbb{M}(i, j') = (\mathbb{B} - \mathbb{S})(i, j') + e^{-j\phi} (\mathbb{B} - \mathbb{S})_i(i, j''). \quad (5.3)$$

Comme on l'a vu plus haut (section 5.2), les contributions des opérateurs sont calculées par couples d'éléments : dans une boucle sur les frontières des éléments d'un domaine borné, le terme  $\mathbb{M}(i, j')$  est calculé normalement, en multipliant par le terme de déphasage dès qu'une frontière est sur une des faces 1 ou 2, ou sur la jonction entre les deux.

**Déphasage dû aux fonctions-tests** Lorsque l'on calcule une contribution d'un opérateur intégral pour laquelle la fonction-test est associée à une arête des faces 1 ou 2, une démarche similaire s'applique.

Soit  $\vec{f}_{j'}$  une fonction de base non située sur les bords de la cellule de périodicité et  $\vec{f}_i$  une fonction-test située sur la face 1 ou 2 ; l'interaction entre  $\vec{f}_i$  et  $\vec{f}_{j'}$  est identique à celle entre la fonction-test translatée sur la face 3 ou 4,  $\vec{f}_{i-} = \vec{f}_i - \vec{T}_1$ , et la fonction de base de la cellule  $(-1, 0)$   $\vec{f}_j = \vec{f}_{j'} - \vec{T}_1$ . Or les courants  $J_{j'}$  et  $J_j$ , portés par  $\vec{f}_{j'}$  et  $\vec{f}_j$ , sont déphasés :

$$J_{j'} = e^{-j\phi} J_j, \quad (5.4)$$

où  $\phi$  est le déphasage correspondant à la position de la fonction-test  $\vec{f}_i$  :

- $\phi = \vec{k}^i \cdot \vec{T}_1$  si  $\vec{f}_i$  est sur la face 1 ;
- $\phi = \vec{k}^i \cdot \vec{T}_2$  si  $\vec{f}_i$  est sur la face 2 ;
- $\phi = \vec{k}^i \cdot \vec{T}_1 + \vec{k}^i \cdot \vec{T}_2$  si  $\vec{f}_i$  est associée à une arête située à la fois sur les faces 1 et 2.

La contribution au terme matriciel vaut alors  $e^{+j\phi} (\mathbb{B} - \mathbb{S})(i, j')$ . Le terme matriciel est donc :

$$\mathbb{M}(i, j') = (\mathbb{B} - \mathbb{S})(i^-, j') + e^{+j\phi} (\mathbb{B} - \mathbb{S})(i, j'). \quad (5.5)$$

A nouveau, l'assemblage de la matrice par couples de frontières d'éléments permet d'imposer un déphasage dès que l'on rencontre une fonction-test associée à une frontière d'élément située sur la face 1 ou 2 ; c'est ce qu'illustre la figure 5.4.

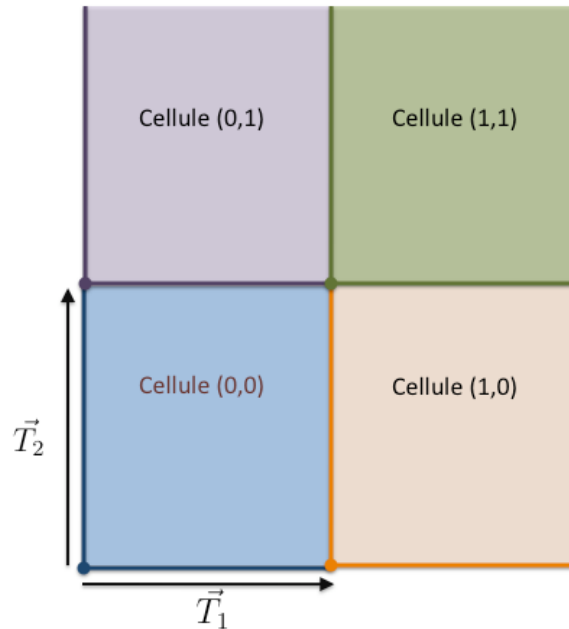
### 5.3.3 Opérateurs intégraux bipériodiques dans les domaines semi-infinis

Nous rappelons que les domaines semi-infinis inférieur et supérieur doivent être traités à l'aide des équations intégrales bipériodiques. Nous montrons ici que le calcul des contributions des opérateurs intégraux dans ces domaines introduit également des conditions de pseudopériodicité. Ces conditions de pseudopériodicité ne sont pas de même nature que celles que nous avons introduites dans les domaines bornés ; elles en ont cependant la même forme, permettant ainsi une généralisation de leur prise en compte.

**Prise en compte des courants aux jonctions entre cellules** La pseudopériodicité du problème permet de limiter le domaine de calcul à une seule cellule de périodicité (cf. 1.2.2) : les courants électrique et magnétique ne sont pas nécessairement nuls aux bords de la cellule de périodicité et vérifient l'équation (5.1).

La création des fonctions RWG et *rooftop* sur les frontières des domaines semi-infinis ne pose pas de problème pour les frontières qui ne sont pas sur les bords de la cellule de périodicité. Nous expliquons ici comment nous créons les fonctions de base RWG et *rooftop* sur les frontières situées sur les bords de la cellule de périodicité.

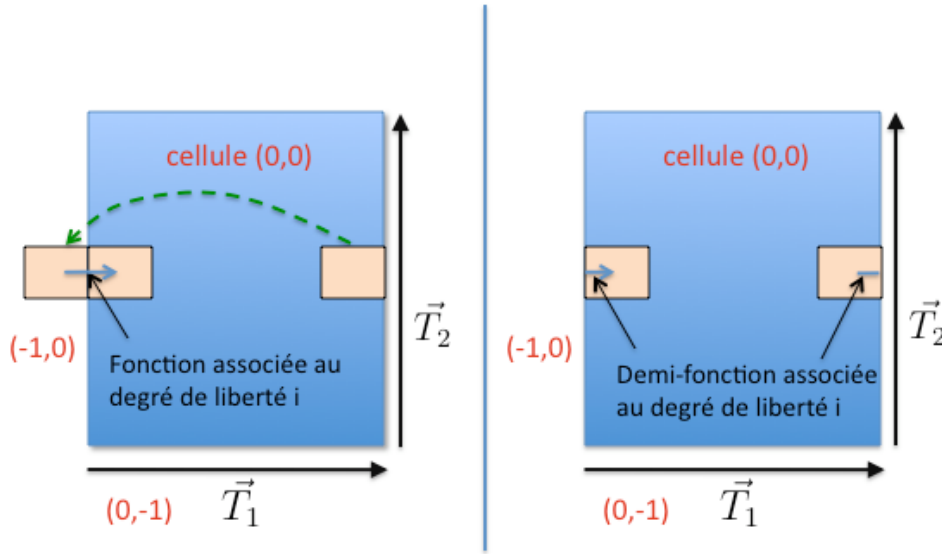
Nous décidons que les jonctions de la cellule de périodicité (0,0) avec les cellules voisines (-1,0) et (0,-1) appartiennent à la cellule de périodicité de référence (0,0). En revanche, les jonctions avec les cellules translatées (1,0) et (0,1) appartiennent respectivement aux cellules (1,0) et (0,1). Cela est illustré sur le schéma 5.5.



**FIGURE 5.5** – Délimitations de la cellule de périodicité de référence (0,0) et des cellules voisines (1,0), (0,1) et (1,1) : seuls les bords “de gauche” et “du bas” d’une cellule en font partie.

Il y a deux possibilités pour le placement des fonctions de base / fonctions-tests sur le maillage.

La première solution consiste à copier un élément de la cellule  $(0,0)$ , dont une des frontières appartient à une des cellules  $(1,0)$  ou  $(0,1)$ , sur la cellule  $(-1,0)$  ou  $(0,-1)$  avant de créer les fonctions de base et fonctions-tests. On n'associe alors des fonctions de base / fonctions-tests qu'aux frontières des éléments du maillage partagées par au moins deux éléments. La fonction RWG ou *rooftop* associée à la frontière de la cellule  $(0,0)$  a alors un support entier constitué de deux éléments contigus. C'est ce qui est montré sur la partie gauche du schéma 5.6. Cette technique est idéale lorsque l'on ne traite que des feuillets plans, car il n'y a alors aucune condition de pseudopériodicité à imposer : il n'y a aucune fonction de base au support incomplet, et aucune relation de déphasage entre deux degrés de liberté différents sur la cellule.



**FIGURE 5.6** – Placement des fonctions RWG ou rooftop (dans ce cas) sur une interface d'un domaine semi-infini : avec recopie d'élément et support connexe (à gauche) ou demi-fonctions de base sur deux bords opposé (à droite).

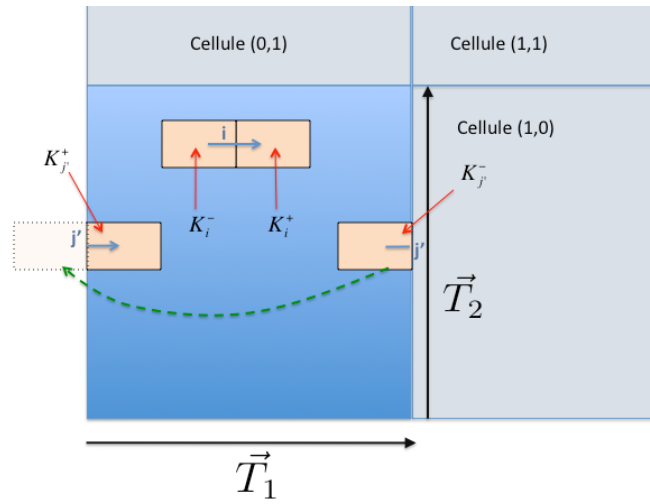
L'autre possibilité est de ne pas copier d'élément avant de créer les fonctions de base et fonctions-tests. On associe alors des fonctions de base et fonctions-tests à chaque frontière du maillage, en prenant soin d'associer les mêmes degrés de liberté à des frontières translatées de  $\vec{T}_1$  ou  $\vec{T}_2$ , i.e. appartenant d'une part à la cellule  $(0,0)$  et d'autre part à la cellule  $(1,0)$  ou  $(0,1)$ . Cela est schématisé sur la droite de la figure 5.6. Cette technique impose de bien prendre en compte le déphasage dû à la pseudopériodicité du problème sur les deux frontières translatées.

Nous avons opté pour la deuxième solution pour une raison principale : la compatibilité des inconnues des domaines bornés et des domaines semi-infinis. Les fonctions de base et fonctions-tests qui sont créées sur les interfaces entre les domaines semi-infinis et les domaines bornés sont utilisables de chaque côté, pour la discrétisation des équations intégrales bipériodiques et pour la discrétisation des équations intégrales tridimensionnelles.

Nous verrons plus loin (cf. 5.3.4) que la prise en compte de la pseudopériodicité peut être systématisée dans les domaines semi-infinis aussi bien que dans les domaines bornés internes, lors de l'assemblage de la matrice du problème et d'obtenir naturellement une formulation PMCHWT.

**Conditions de pseudopériodicité** Les fonctions de base et fonctions-tests situées aux frontières de la cellule de périodicité doivent avoir un support connexe, ce qui n'est *a priori* pas le cas à cause du choix fait en 5.3.3. Les calculs d'opérateurs sur les couples de “demi-fonctions de base” et “demi-fonctions-tests” doivent en tenir compte : les contributions doivent correspondre à celles qui auraient été obtenues si les supports avaient été connexes. Les conditions de pseudopériodicité résultent d'un changement de variable dans l'intégration des contributions d'opérateurs.

Nous présentons le cas du calcul de l'opérateur  $(\mathcal{B} - \mathcal{S})$  entre une fonction-test  $\vec{f}_i$  non située sur un bord de la cellule et une fonction de base  $\vec{f}_{j'}$  portée par deux éléments  $K_{j'}^+$  et  $K_{j'}^-$ , situés à des bords opposés de la cellule. Le schéma 5.7 résume cela.



**FIGURE 5.7** – Les demi-fonctions (ici, des fonctions rooftop) prises pour l'exemple de calcul de contribution.

En réalité, la fonction de base  $\vec{f}_{j'}$  a pour support  $K_{j'}^+ \cup (K_{j'}^- - \vec{T}_1)$ , mais le calcul numérique de l'opérateur se fait sur chaque élément  $K_{j'}^+$  et  $K_{j'}^-$  ; il faut donc savoir quel est le lien entre la contribution que l'on veut obtenir et celle qui est calculée numériquement. Cela revient simplement à imposer un déphasage dû à la pseudopériodicité de la fonction de Green bipériodique. Pour simplifier la démonstration, nous n'écrivons pas en entier l'opérateur  $(\mathcal{B} - \mathcal{S})$ , défini par (4.17) ; mais cela se généralise trivialement.

Nous rappelons que l'intégration se fait élément par élément : la contribution de l'opérateur est la somme de quatre termes, calculés pour les couples d'éléments pris dans  $\{K_i^+, K_i^-\} \times \{K_{j'}^+, K_{j'}^-\}$ .

Les termes qui nous intéressent sont ceux qui font intervenir  $K_{j'}^-$  et nous voulons en réalité effectuer l'intégration sur  $(K_{j'}^- - \vec{T}_1)$ .

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\iint_{K_i^\pm \times K_{j'}^-} kG(\vec{r} - \vec{r}') (\vec{f}_i \cdot \vec{f}_{j'}) ds ds' &= \iint_{K_i^\pm \times (K_{j'}^-, -\vec{T}_1)} kG(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{T}_1) (\vec{f}_i \cdot \vec{f}_{j'}) ds ds' \\
&= e^{+j\vec{k}^i \cdot \vec{T}_1} \iint_{K_i^\pm \times (K_{j'}^-, -\vec{T}_1)} kG(\vec{r} - \vec{r}') (\vec{f}_i \cdot \vec{f}_{j'}) ds ds'. \quad (5.6)
\end{aligned}$$

Il faut donc appliquer un déphasage  $e^{-j\vec{k}^i \cdot \vec{T}_1}$  aux contributions calculées sur l'élément  $K_{j'}^-$ , pour obtenir la contribution sur l'élément translaté. Dans le cas des fonctions-tests, c'est le déphasage inverse qu'il faut appliquer.

La table 5.1 donne tous les déphasages à appliquer suivant la position de l'élément sur lequel le calcul est effectué et suivant le type de fonction qu'il porte.

| Frontière avec la cellule n° | (1, 0)                            | (0, 1)                            | (1, 1)                                                          |
|------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Fonction de base             | $e^{-j\vec{k}^i \cdot \vec{T}_1}$ | $e^{-j\vec{k}^i \cdot \vec{T}_2}$ | $e^{-j(\vec{k}^i \cdot \vec{T}_1 + \vec{k}^i \cdot \vec{T}_2)}$ |
| Fonction-test                | $e^{+j\vec{k}^i \cdot \vec{T}_1}$ | $e^{+j\vec{k}^i \cdot \vec{T}_2}$ | $e^{+j(\vec{k}^i \cdot \vec{T}_1 + \vec{k}^i \cdot \vec{T}_2)}$ |

**TABLE 5.1** – Les déphasages à imposer aux contributions dues à des demi-fonctions de base et fonctions-tests.

### 5.3.4 Généralisation des conditions de pseudopériodicité

**Unification des déphasages** Nous avons présenté les différentes façons de prendre en compte la pseudopériodicité : dans les domaines bornés et dans les domaines semi-infinis (avec utilisation de la fonction de Green bipériodique), pour les fonctions de base et les fonctions-tests situées sur les bords de la cellule de périodicité. Nous avons fait en sorte que tout se passe de la même manière : il est possible de généraliser les conditions de périodicité à tous les cas de calcul de contribution d'opérateur intégral, bipériodique ou non.

Comme l'assemblage se fait par une boucle sur les couples de frontières d'éléments d'un domaine, la condition est très simple à prendre en compte : lorsque l'on rencontre une arête d'élément appartenant aux faces 1 ou 2, i.e. aux cellules (1,0), (0,1) ou (1,1), il convient d'appliquer un déphasage à la contribution que l'on calcule.

Il apparaît que les déphasages à appliquer sont toujours ceux donnés dans la table 5.1, quel que soit le domaine dans lequel on se place.

**Obtention d'une formulation PMCHWT** Cette stratégie permet d'obtenir l'équivalent d'une formulation PMCHWT sur toute la cellule de périodicité. Si l'on considère la cellule de périodicité telle qu'elle a été définie sur la figure 5.5, l'introduction des déphasages dans l'assemblage revient à avoir écrit les équations intégrales de part et d'autre des faces 3 et 4, c'est-à-dire de part et d'autre des interfaces entre la cellule de périodicité (0,0) et les cellules (-1,0) et (0,-1).

L'obtention d'une formulation PMCHWT sur toutes les interfaces de la cellule de périodicité n'était pas évidente au départ ; nous nous sommes posé la question de savoir quel type de formulation intégrale devait être utilisée à l'intérieur de la cellule de périodicité, dans les domaines bornés, avant de voir qu'une formulation PMCHWT était possible. Cela est un avantage pour la méthode de calcul hybride EI 3D2D / EI 3D, car c'est la formulation qui permet d'avoir le moins d'erreur numérique. Par ailleurs, en incidence normale, elle est symétrique : la résolution directe du système linéaire est alors plus rapide, par symétrie de la matrice, car la factorisation de la matrice du système linéaire nécessite un nombre d'opérations réduit de moitié par rapport à une matrice non symétrique.

### 5.3.5 Réduction du nombre d'évaluations de la fonction de Green bipériodique

La méthode hybride EI 3D2D / EI 3D permet de réduire très sensiblement le nombre d'évaluations de la fonction de Green bipériodique. Comme le coût de calcul de celle-ci est très largement supérieur à celui de la fonction de Green 3D, et largement supérieur à celui des intégrations numériques ou semi-analytiques des opérateurs, on peut considérer qu'une réduction de moitié du nombre d'évaluations de la fonction de Green bipériodique divise par deux le temps d'assemblage de la matrice du système linéaire.

Ainsi, pour une structure d'épaisseur non nulle, on n'évalue plus la fonction de Green bipériodique que sur les interfaces supérieure et inférieure de la structure bipériodique. Dans l'exemple de la figure 5.2, on réduit d'environ 2,5 fois le temps d'assemblage de la matrice.

Lorsque les maillages sur les interfaces supérieure et inférieure sont structurés, l'utilisation de la méthode de calcul présentée à la section 4.4 donne un temps d'assemblage de la matrice tout à fait similaire à celui d'une méthode intégrale 3D comptant le même nombre d'inconnues. Nous donnons en 6.4 un exemple significatif où l'on compare les temps de calcul entre méthode EI 3D2D "pure" et méthode hybride : un gain d'un facteur supérieur à 15 est observé.

En contrepartie d'un assemblage plus rapide, le fait de borner les domaines rajoute des inconnues au problème. Généralement, ce n'est pas handicapant puisque les cellules sont relativement petites : l'augmentation du temps de calcul due à la résolution d'un système linéaire plus gros est largement inférieure au gain en temps de calcul sur l'assemblage.

## 5.4 Interfaces fictives

L'utilisation de la méthode hybride que nous venons de présenter permet de traiter efficacement un grand nombre de problèmes, alors qu'une méthode EI 3D2D "pure" aurait été très coûteuse. Il reste cependant des cas dont le coût de traitement est important : ce sont les cas dans lesquels il faut évaluer un grand nombre de fois la fonction de Green bipériodique ou son gradient ; dans la mesure du possible, il faudrait toujours que le maillage des interfaces avec les domaines semi-infinis soit structuré afin de pouvoir utiliser la méthode de calcul rapide (cf. 4.4). Si on ne souhaite pas utiliser cette méthode, il faut alors s'efforcer de

limiter au maximum le nombre de degrés de liberté qui interviennent dans la discrétisation des équations intégrales bipériodiques.

Les cas qui demandent une attention particulière sont généralement les suivants :

- Ceux dont une interface avec un domaine semi-infini n'est pas plane : dans ces cas-là, un maillage localement structuré n'est pas réalisable et l'opérateur intégral  $\mathcal{Q}$  n'est pas nul.
- Ceux dont une interface avec un domaine semi-infini comprend des détails géométriques dont les formes ou tailles sont incompatibles avec l'obtention d'un maillage structuré : par exemple des ouvertures circulaires sur un plan métalliques sont difficilement représentables par un maillage structuré.

Nous proposons une solution simple permettant, dans tous les cas, d'avoir un maillage structuré aux interfaces avec les domaines semi-infinis du problème. Pour cela, nous avons besoin d'un critère de convergence en maillage.

**Critère de convergence en maillage** Ce critère permet de savoir si le maillage utilisé est suffisamment raffiné pour que le calcul par éléments finis de surface soit précis. Nous avons vu que les seules approximations de la méthode résultent de la discrétisation du domaine de calcul et de la troncature de la série double de la fonction de Green bipériodique. Les approximations sur la troncature des séries doubles sont traitées par un critère de stagnation des sommes.

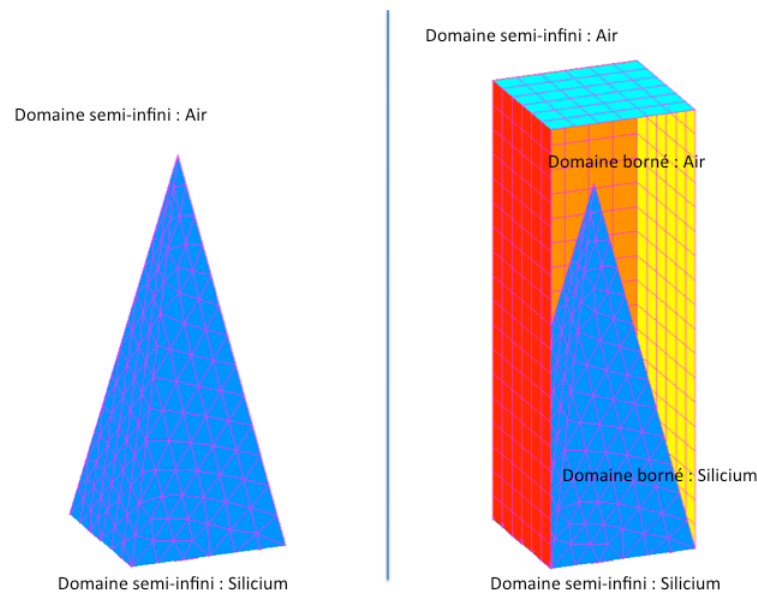
Le critère de convergence en maillage habituellement utilisé dans les méthodes d'éléments finis de surface en électromagnétisme est un critère empirique : si  $L$  est la plus petite longueur caractéristique du problème traité (longueur d'onde ou détail de la géométrie que l'on veut mailler), alors les longueurs d'arête du maillage doivent être au plus égales à  $\frac{L}{6}$  ; ce dernier critère est local et il est possible de raffiner localement le maillage pour le vérifier.

Quand la géométrie est suffisamment régulière, la longueur d'onde est la plus petite longueur caractéristique du problème ; le critère de convergence est alors le suivant : dans un domaine donné rempli d'un matériau isotrope d'indice optique  $n$ , à une fréquence  $f$  donnée, les longueurs d'arête du maillage doivent être au plus égales à  $\frac{\lambda}{6} = \frac{c}{6nf}$ .

Lorsque les matériaux de part et d'autre d'une interface avec un domaine semi-infini ont un fort contraste d'indice, il faut appliquer ce critère en fonction de l'indice de réfraction le plus fort. Cela impose une densité élevée du maillage dans le domaine d'indice le plus faible.

**Solution proposée** Nous préconisons d'inclure une couche du matériau semi-infini au maillage : on crée une interface fictive entre le domaine semi-infini et un nouveau domaine borné de même matériau. Cela a l'avantage de permettre de créer un maillage structuré sur les interfaces fictives, que l'on a choisies planes. On s'arrange alors pour que les côtés des quadrangles du maillage structuré satisfassent au critère de convergence que l'on vient de donner. L'épaisseur recommandée de la couche fictive est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde du problème. La figure 5.8 donne un exemple d'application simple.

En procédant de cette manière, les opérateurs à fonction de Green bipériodique sont calculés analytiquement par l'algorithme des feuillets plans à maillage structuré (cf. 4.4), ce qui constitue un gain de temps important pour l'assemblage de la matrice du système linéaire.



**FIGURE 5.8** – Réseau de pyramides gravées sur du silicium (d'épaisseur infinie) : à gauche, seule l'interface entre les domaines semi-infinis a été maillée ; à droite, on a créé deux domaines bornés, remplis d'air et de silicium, qui ont permis de créer des maillages localement structurés sur le dessus et le dessous du maillage.

Le temps d'assemblage est devenu équivalent, voire même souvent inférieur, à celui d'un problème 3D comptant le même nombre de degrés de liberté.

Le revers de la médaille est à nouveau un accroissement du nombre de degrés de liberté, qui conduit un temps de résolution du système linéaire plus important. Cette augmentation est souvent négligeable, par rapport à la réduction du temps de calcul due à l'utilisation de l'algorithme des feuillets plans à maillage structuré.

## 5.5 Parallélisation du calcul

Il existe deux manières de paralléliser un calcul sur plusieurs processeurs : en mémoire partagée ou en mémoire distribuée. Le code *Spectre* de Dassault Aviation utilise ces deux types de parallélisation des calculs. Nous montrons ici deux façons de paralléliser le calcul que nous avons utilisées, dont les avantages sont très différents et permettent une amélioration importante du temps de calcul dans de nombreux cas.

### 5.5.1 Mémoire partagée : parallélisation de l'assemblage

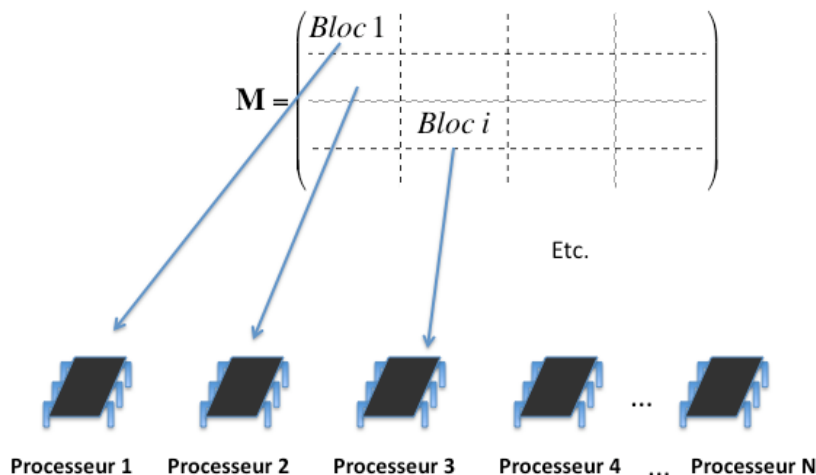
En mémoire partagée, les processeurs sur lesquels le calcul est effectué travaillent ensemble à la réalisation d'un objectif commun : on parle de mémoire partagée car les processeurs lisent et écrivent dans les mêmes variables. Dans *Spectre*, ce sont l'assemblage et la résolution du système linéaire qui sont parallélisés à l'aide de directives *OpenMP*.

La résolution du système linéaire n'est pas différente pour les méthodes 3D que pour notre méthode hybride EI 3D2D / EI 3D : elle utilise un solveur direct parallèle.

Lorsqu'il n'y a pas de maillage localement structuré, la parallélisation se fait aussi de la même manière que les méthodes 3D de *Spectre* : la matrice du système linéaire est découpée en blocs et chaque processeur assemble un ou plusieurs blocs (cf. figure 5.9). Les développements 3D2D ont donc bénéficié de ces développements existants.

Dans le cas où l'on a un maillage localement structuré, il faut rendre compatible le calcul sur maillage structuré, soit deux colonnes d'un opérateur local au maillage structuré, et l'assemblage par bloc du système linéaire : dans ce cas, les contributions possibles sont stockées dans une matrice auxiliaire, et chaque processeur récupère dans cette matrice les valeurs dont il a besoin pour assembler son bloc de la matrice du système linéaire. C'est un développement que nous avons dû réaliser.

La parallélisation OpenMP n'est utile que lorsque le cas de calcul est gros ; habituellement, nous l'avons utilisée sur des cas dépassant la dizaine de milliers de degrés de liberté.



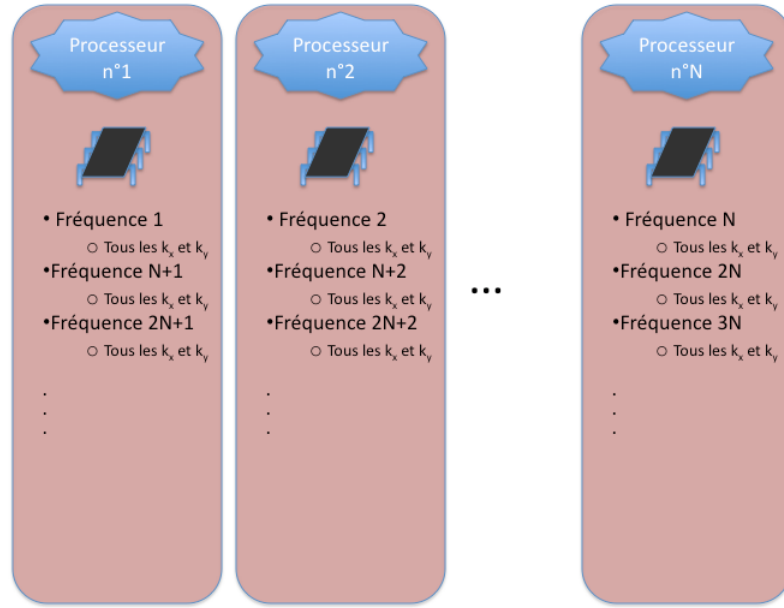
**FIGURE 5.9** – *Parallélisation OpenMP : découpage par blocs de la matrice du système linéaire et distribution des tâches à chaque processeur.*

### 5.5.2 Mémoire distribuée : parallélisation en fréquence

Une parallélisation en mémoire distribuée, à l'aide du langage *MPI*, donne à chaque processeur une tâche (*task*) à remplir. Chaque tâche sur un processeur est indépendante de celle traitée par un autre processeur, lequel dispose de sa propre mémoire.

Les cas de calcul bipériodiques présentent souvent plusieurs balayages : un balayage en fréquence, un balayage en  $k_x$  et un balayage en  $k_y$  (cf. 1.2.1). Le calcul est effectué par boucles imbriquées : pour chaque fréquence, on calcule la matrice *S* pour tous les  $k_x$  et  $k_y$  demandés.

La parallélisation en fréquence consiste à demander à chaque processeur de traiter un lot de fréquences. Cela est résumé à la figure 5.10. Cette parallélisation est particulièrement



**FIGURE 5.10** – *Parallélisation MPI : chaque processeur effectue ses propres calculs sur des fréquences déterminées.*

recommandée pour les cas dont le nombre de degrés de liberté est limité (en général inférieur à 3000).

Cette stratégie de parallélisation a été développée dans le service EMIR pendant la thèse, afin de disposer d'outils d'optimisation efficaces compatibles avec la méthode bipériodique que nous avons développée.

## 5.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une nouvelle méthode hybridant une méthode des moments bipériodique (EI 3D2D) à une méthode des moments 3D (EI 3D).

Il a fallu décider d'une manière d'imposer la condition de pseudopériodicité sur les courants aux jonctions entre deux cellules de périodicité voisines : sur les interfaces entre la structure bipériodique et les domaines semi-infinis, les courants qui passent d'une cellule à l'autre sont placés de part et d'autre de la cellule de périodicité.

À l'intérieur du réseau bipériodique, nous proposons de borner les domaines et d'introduire des conditions aux limites de pseudopériodicité. Ces conditions de périodicité nous ont permis d'écrire une formulation PMCHWT pseudopériodique, ce qui n'était pas évident *a priori*. Cela contribue à la précision de la méthode numérique obtenue.

Nous proposons d'utiliser des maillages structurés plans pour les interfaces avec les domaines non bornés, éventuellement au moyen d'interfaces fictives, pour réduire nettement le temps d'assemblage de la matrice, grâce à l'utilisation de l'algorithme des feuillets plans à maillage structuré. Une réduction de temps de calcul allant jusqu'à un facteur 300 sera présentée en 6.3.2.

Enfin, nous avons donné deux manières de paralléliser le code de calcul, issues du code de calcul *Spectre* de Dassault Aviation.

Ces aspects de l'implémentation du code numérique illustrent bien l'avantage de disposer d'un code industriel pour proposer une nouvelle formulation et la valider. L'apport de *Spectre* a été considérable. Les pré-traitements et les post-traitements, développés en *Fortran90* et en *Matlab*, étaient en grande partie utilisables directement. Seules quelques routines de ces pré- et post-traitement ont dû être modifiées en profondeur : c'est le cas notamment la création des inconnues sur un maillage de cellule de périodique. Nous avons ainsi pu nous concentrer sur les spécificités de la méthode hybride EI 3D2D / EI 3D (opérateurs intégraux, calcul des seconds membres et des matrices S) et les intégrer au cadre logiciel existant. Le code de calcul étant validé, cela assure la pérennité des développements effectués. La méthode développée ici constitue maintenant une fonctionnalité à part entière du code *Spectre* appelée *Spectre 3D2D*. Nous détaillons dans le chapitre 6, les cas qui ont spécifiquement servi à valider le code de calcul. Nous ne prétendons toutefois pas que le développement de cette méthode soit achevé : des fonctionnalités importantes restent à implémenter et à valider. Ce n'était pas l'objet de cette thèse.

D'autres développements ont été inclus au code de calcul sans que nous ne les mentionnions en détail dans ce document : il y a en particulier la prise en compte de conditions d'impédance localisées sur les éléments du maillage.

Nous disposons à présent d'un outil qui permet de traiter une grande variété de problèmes physiques bipériodiques, comme ceux présentés au chapitre 6.

La méthode développée permet de traiter des cas dont les vecteurs de périodicité ne sont pas orthogonaux : on est en effet capable de calculer dans ces cas-là la fonction de Green bipériodique. Mais l'algorithme des feuillets plans à maillage structuré n'a pas été implémenté dans le cas où les vecteurs de périodicité ne sont pas orthogonaux.

On ne peut pas non plus traiter le cas où le réseau bipériodique contient un matériau anisotrope ou hétérogène ; il faut alors développer une méthode triplement hybride EI 3D2D / EI 3D / EF 3D, qui traite les domaines constitués de matériau anisotrope ou hétérogène à l'aide d'une méthode d'éléments finis. La compatibilité d'une méthode surfacique avec une méthode volumique est possible (cf. [73]), si la trace du maillage volumique correspond à une partie du maillage surfacique.

# Chapitre 6

## Validation : étude de quelques structures d'intérêt

### Table des matières

---

|            |                                                                  |            |
|------------|------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>6.1</b> | <b>Introduction</b>                                              | <b>89</b>  |
| 6.1.1      | Organisation des validations                                     | 89         |
| 6.1.2      | Quelques mots sur les métamatériaux                              | 90         |
| <b>6.2</b> | <b>Validations élémentaires</b>                                  | <b>90</b>  |
| 6.2.1      | Exemples                                                         | 90         |
| 6.2.2      | Transmission à travers une couche plane de matériau diélectrique | 91         |
|            | Données                                                          | 91         |
|            | Modélisations et fonctionnalités testées                         | 91         |
|            | Résultats                                                        | 92         |
| <b>6.3</b> | <b>Surfaces sélectives en fréquence</b>                          | <b>94</b>  |
| 6.3.1      | Intérêt                                                          | 94         |
| 6.3.2      | Réseau de croix                                                  | 94         |
|            | Description                                                      | 94         |
|            | Modélisation et fonctionnalités testées                          | 94         |
|            | Temps de calcul et résultats                                     | 94         |
| 6.3.3      | Cas de validation de <i>Spectre</i>                              | 98         |
|            | Description                                                      | 98         |
|            | Modélisation et fonctionnalités testées                          | 98         |
|            | Résultats et temps de calcul                                     | 99         |
| <b>6.4</b> | <b>Réseaux de sphères diélectriques</b>                          | <b>102</b> |
| 6.4.1      | Données du calcul                                                | 102        |
| 6.4.2      | Modélisation et temps de calcul                                  | 102        |
| 6.4.3      | Résultats                                                        | 104        |
| <b>6.5</b> | <b>Réseaux de pyramides, antireflet en infrarouge</b>            | <b>104</b> |
| 6.5.1      | Principe                                                         | 104        |
| 6.5.2      | Réseau de pyramides antireflet                                   | 105        |
|            | Description                                                      | 105        |
|            | Modélisation et fonctionnalité testée                            | 105        |
|            | Résultats et temps de calcul                                     | 106        |

|            |                                             |            |
|------------|---------------------------------------------|------------|
| 6.5.3      | Pyramide de silicium avec méplat . . . . .  | 108        |
|            | Description . . . . .                       | 108        |
|            | Modélisation . . . . .                      | 108        |
|            | Résultats et temps de calcul . . . . .      | 108        |
| <b>6.6</b> | <b>Surfaces à haute impédance . . . . .</b> | <b>110</b> |
| 6.6.1      | Substrat d'antenne . . . . .                | 110        |
| 6.6.2      | SHI à maille hexagonale . . . . .           | 110        |
|            | Description . . . . .                       | 110        |
|            | Modélisation . . . . .                      | 112        |
|            | Résultats et temps de calcul . . . . .      | 112        |
| 6.6.3      | Cas n°5 du workshop ISAE 2008 . . . . .     | 112        |
|            | Description . . . . .                       | 115        |
|            | Modélisation bipériodique . . . . .         | 115        |
|            | Résultats et temps de calcul . . . . .      | 116        |
| <b>6.7</b> | <b>Conclusion . . . . .</b>                 | <b>117</b> |

---

## 6.1 Introduction

À ce stade, nous disposons d'une méthode de calcul qui permet de caractériser la réflexion et la transmission de structures bipériodiques. Encore faut-il l'implémenter et vérifier sa bonne implémentation pour pouvoir juger de sa pertinence en terme de précision et de rapidité du calcul.

### 6.1.1 Organisation des validations

Chaque fonctionnalité du code de calcul a été validée l'une après l'autre. Ceci a permis de corriger et d'optimiser chacune des parties de la formulation. Les cas de validation présentés doivent donc suivre une progression logique dans leur difficulté.

Les cas les plus élémentaires sont les cas classiques des manuels d'optique et d'électromagnétisme : la réflexion d'une onde plane par un plan métallique parfaitement conducteur, la transmission à travers un dioptre air/air ou encore réflexion et transmission à travers une plaque de matériau diélectrique. Dans ces cas, nous avons la solution analytique du problème de diffraction, à laquelle nous pouvons nous comparer. Pour tous ces cas, le temps de calcul est très faible et la parallélisation du code n'est pas utilisée.

Le calcul de la fonction de Green bipériodique est validé par un cas sans interfaces fictives : un réseau de sphères diélectriques dans du vide, pour lequel nous disposons d'une solution analytique approchée.

Le calcul des opérateurs intégraux sur un maillage localement structuré est validé en empilant des feuillets parfaitement conducteurs sans épaisseur et des couches épaisses de matériaux diélectriques. Nous pouvons ensuite comparer les résultats à d'autres issus de code de calcul différents ou issus de publications.

Les autres fonctionnalités principales de la méthode hybride proposée peuvent généralement être testées sur les mêmes cas, mais dont le maillage est modifié pour introduire des interfaces fictives avec conditions de périodicité. Cela permet également de quantifier le gain en temps de calcul permis par l'introduction de la méthode hybride.

Ces vérifications effectuées, il faut se confronter à des cas complexes, qui sont, soit issus de la littérature, soit des cas pour lesquels nous disposons de résultats de mesures.

Enfin, dans le cadre des processus qualité imposés par la norme ISO 9001, il a fallu définir un cas-test complet de référence permettant de vérifier la non-altération de la méthode hybride par l'introduction de nouveaux développements dans le code *Spectre* de Dassault Aviation.

### 6.1.2 Quelques mots sur les métamatériaux

Nous avons décidé de profiter de cette étape importante qu'est la validation du code numérique pour nous intéresser aux métamatériaux : les cas de validation élaborés permettent à chaque fois d'illustrer une famille de métamatériaux.

Les métamatériaux constituent une classe de matériaux artificiels qui fait l'objet d'un fort engouement dans la communauté scientifique en optique et électromagnétisme. Un nouveau journal, *Metamaterials*, a été spécifiquement créé en 2007. Dans l'article introductif [72] sont données plusieurs définitions de ce que sont les métamatériaux. Ces définitions admettent que les métamatériaux sont des matériaux artificiels micro- ou nano-structurés qui ont des comportements macroscopiques particuliers : ceux-ci ne sont pas dus aux matériaux composant le métamatériau et ne peuvent être observés sur un matériau trouvé tel quel dans la nature.

Une autre définition, plus factuelle, est également donnée dans [72] :

- On appelle *métamatériau* une structure artificielle périodique dont les pas de réseau sont petits devant la longueur d'onde du champ incident.
- Cette définition enjoint à en donner une autre : on appelle *cristal photonique* une structure artificielle périodique dont les pas de réseau sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde du champ incident.

Les métamatériaux se situent donc dans ce que l'on appelle le régime d'homogénéisation : le matériau artificiel peut être décrit par ses propriétés macroscopiques, en particulier par une permittivité complexe  $\varepsilon$  et une perméabilité complexe  $\mu$  équivalentes, souvent anisotropes. Pour une couche de matériau artificiel posée sur un plan parfaitement conducteur, on peut aussi définir une impédance de surface équivalente, qui est le rapport entre le champ électrique tangent total et du champ magnétique total tangent sur la surface considérée. L'impédance de surface peut servir de condition aux limites dans une méthode numérique 3D, comme le code *Spectre*.

## 6.2 Validations élémentaires

### 6.2.1 Exemples

Il a fallu commencer par vérifier que la méthode développée permettait de retrouver des résultats classiques sur des cas élémentaires :

- Réflexion sur un plan parfaitement conducteur (miroir) avec un coefficient de réflexion égal à  $-1$  en polarisation H et égal à  $1$  en polarisation V.
- Transmission à travers une interface fictive séparant deux domaines vides semi-infinis, avec un coefficient de transmission toujours égal à  $1$ .
- Transmission à travers une couche plane de diélectrique : nous détaillons ce cas au paragraphe suivant (6.2.2).

Il aurait également été possible de traiter le cas d'un réseau à échelottes blazé : les propriétés de diffraction sont données analytiquement par le théorème de Maréchal et Stroke [44].

Pour le développeur, ces cas ont un avantage non négligeable : ils peuvent être traités à l'aide de maillages très petits (six éléments au plus), ce qui permet de suivre aisément le

déroulement du calcul dans un logiciel de “debuggage”. Cela permet de détecter les erreurs de programmation (les “bugs”) les plus grossières et les points durs pour le temps de calcul.

Les deux premiers cas n'utilisent que la transformation d'Ewald pour le calcul de la fonction de Green : ils constituent une validation de cette technique de calcul.

Le taux de conservation de l'énergie défini à la section 2.5 est un bon indicateur de la qualité du calcul : dans ces cas-là, un taux différent de 1 est la preuve d'un problème dans le code, car il n'y a pas de matériau absorbant.

### 6.2.2 Transmission à travers une couche plane de matériau diélectrique

Les coefficients de réflexion et de transmission par une couche de matériau diélectrique séparant deux domaines semi-infinis diélectriques se calculent analytiquement.

#### Données

On calcule le coefficient de transmission suivant les polarisations TE (ou H) et TM (ou V) pour le cas suivant :

- Réseau à maille carrée de pas arbitrairement choisi à  $T = 0,1 \mu m$ .
- Épaisseur :  $h = 1,25 \mu m$ , avec interface inférieure de la couche placée en  $z = 0$ .
- Longueurs d'onde incidente de  $3 \mu m$  à  $5 \mu m$ , par pas de  $0,025 \mu m$ .
- Incidences normale et oblique à  $61,045^\circ$ , par rapport à l'axe  $\hat{z}$  dans le plan  $Oxz$ , ce qui sera souvent sous-entendu dans la suite du document. Ici, on a  $k_x = 0$  puis  $k_x = 0,875$ .
- Milieu remplissant les domaines semi-infinis : vide, de permittivité  $\varepsilon_r = 1$  et perméabilité  $\mu_r = 1$ .
- Milieu constituant la couche : silicium cristallin, d'indice optique  $n = 3,42$  dans la plage de longueurs d'onde considérée, compte tenu de la permittivité relative  $\varepsilon_r = 11,70$  et de la perméabilité relative  $\mu_r = 1$  (cf. [60]).

Il y a une invariance par translation : le pas du réseau est donc quelconque. Nous le choisissons en fonction du critère de convergence en maillage, en cohérence avec la plage de longueurs d'onde que l'on souhaite tester : ici,  $T = \lambda/8,77$  dans le silicium.

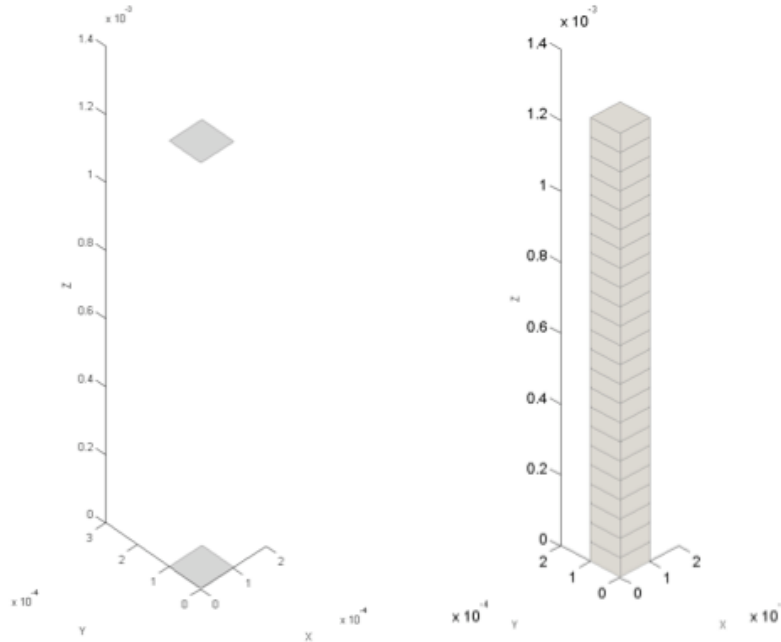
#### Modélisations et fonctionnalités testées

L'avantage de ce cas est qu'il peut être modélisé de différentes manières :

- Uniquement à l'aide d'équations intégrales bipériodiques en considérant que l'on a trois domaines non bornés.
- À l'aide de la méthode hybride EI 3D2D / EI 3D, en créant des interfaces fictives sur les bords de la cellule de périodicité : dans ce cas, il faut mailler finement dans l'épaisseur afin de bien prendre en compte les réflexions multiples à l'intérieur de la couche.

Dans le premier cas, le maillage peut être réduit à deux éléments et huit degrés de liberté (cf. gauche de la figure 6.1) et c'est alors le calcul de la fonction de Green bipériodique par les transformation d'Ewald et de Poisson ainsi que l'assemblage de l'opérateur  $(\mathcal{B} - \mathcal{S})$  qui sont validés.

Dans le second cas (cf. droite de la figure 6.1), on teste la bonne prise en compte des conditions de périodicité avec un maillage à 94 quadrangles et 142 degrés de liberté. Les bords de la cellule de périodicité comptent un élément en largeur et 23 en hauteur, équirépartis.



**FIGURE 6.1** – *Gauche* : maillage très simple d'une couche de matériau diélectrique, d'épaisseur  $1,25\ \mu\text{m}$ . Les éléments font  $1\ \mu\text{m}$  de côté. *Droite* : maillage utilisé pour la méthode hybride.

## Résultats

On compare les parties réelles et imaginaires des coefficients de réflexion obtenus avec les deux maillages présentés avec celles du résultat obtenu par un calcul analytique. Ces comparaisons sont montrées sur les figures 6.2 pour la polarisation TE et 6.3 pour la polarisation TM.

Les trois résultats obtenus sont très proches. Ils permettent de valider :

- Le calcul de la fonction de Green bipériodique à l'aide de la transformation d'Ewald.
- Le calcul de la fonction de Green bipériodique et de son gradient à l'aide de la transformation de Poisson.
- Le calcul des opérateurs intégraux sur des quadrangles.
- La prise en compte des conditions aux limites de pseudopériodicité sur les interfaces fictives.
- Le bon fonctionnement du cas pathologique où les interfaces fictives sont très proches les unes des autres : la qualité du résultat n'en est pas altérée.

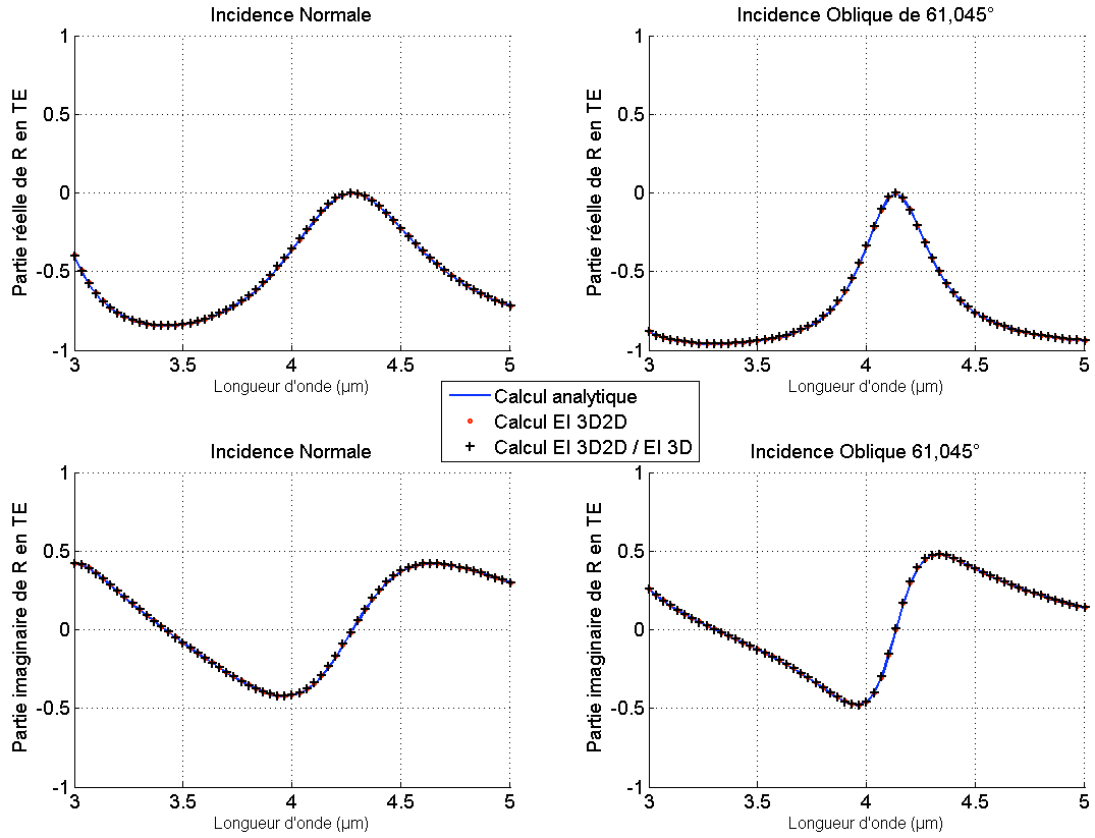


FIGURE 6.2 – Comparaison des coefficients de réflexion en polarisation TE.

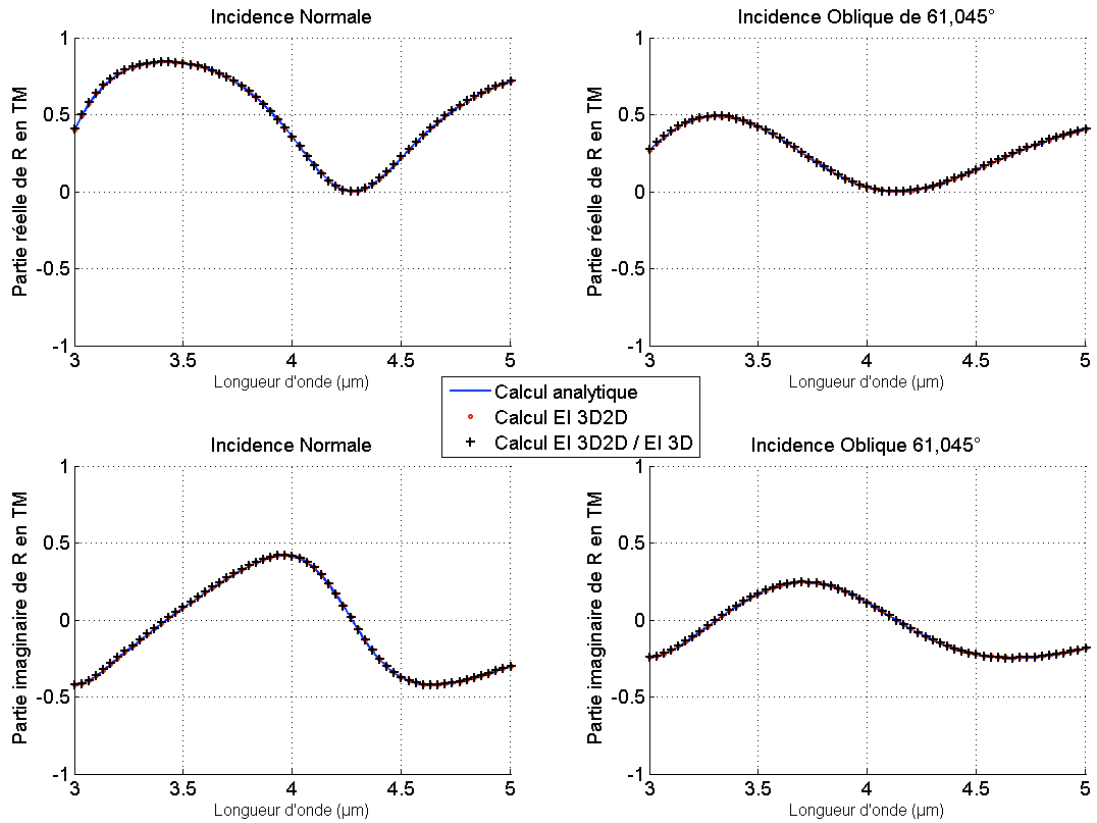


FIGURE 6.3 – Comparaison des coefficients de réflexion en polarisation TM.

## 6.3 Surfaces sélectives en fréquence

### 6.3.1 Intérêt

Les surfaces sélectives en fréquence (FSS, pour ‘*Frequency Selective Surfaces*’) sont des filtres électromagnétiques passe-bande : elles peuvent être opaques pour une grande partie du spectre, sauf dans une petite plage de fréquence pour laquelle elles sont quasiment transparentes (passe-bande). Pour un motif complémentaire, on obtient un filtre à bande interdite. Suivant l'utilisation que l'on veut faire des FSS, on souhaite une bande passante plus ou moins large, une indépendance à la polarisation ou à l'incidence.

Leur domaine d'application privilégié est la conception de radômes. Au cahier des charges en terme de filtrage s'ajoutent alors souvent des contraintes mécaniques et de discrétion.

Jusqu'à présent, les FSS les plus efficaces qui ont été utilisées sont constituées d'empilements de réseaux de feuillets plans parfaitement conducteurs séparés par des couches de matériaux diélectriques. Cela est en partie dû à l'existence de l'algorithme de calcul pour « feuillets plans à maillage structuré », à l'absence d'une méthode numérique adaptée à des structures 3D, et aux faibles coûts de fabrication de telles structures.

Les FSS ont été très largement étudiées par Ben A. Munk [57]. Une autre référence intéressante est le livre de T. K. Wu [86].

### 6.3.2 Réseau de croix

#### Description

Le premier cas de FSS que nous traitons est un réseau de croix parfaitement conductrices sans épaisseur noyé dans le vide, dont les caractéristiques géométriques sont données sur la figure 6.5. Le calcul est effectué dans les cas suivants :

- Maille carrée de périodicité  $T = 8\text{ mm}$ .
- Référence de phase prise en  $z = 0$ .
- Fréquences : de  $15\text{ GHz}$  à  $30\text{ GHz}$  par pas de  $100\text{ MHz}$ .
- Incidences normale,  $61^\circ$ ,  $32^\circ$  et  $3^\circ$ , par rapport à l'axe  $\hat{z}$  dans le plan  $Oxz$ .

#### Modélisation et fonctionnalités testées

Le maillage utilisé est structuré, constitué de 1200 quadrangles, pour 2288 degrés de liberté (pour le courant électrique). Les équations intégrales EI 3D2D sont utilisées et le calcul peut être effectué de deux manières différentes : par calcul direct des contributions des opérateurs, avec de nombreuses évaluations de la fonction de Green bipériodique ; ou par utilisation de l'algorithme des « feuillets plans à maillage structuré ».

#### Temps de calcul et résultats

Tous les calculs sont effectués sur un processeur *IBM Power4+* à  $1,5\text{ GHz}$ .

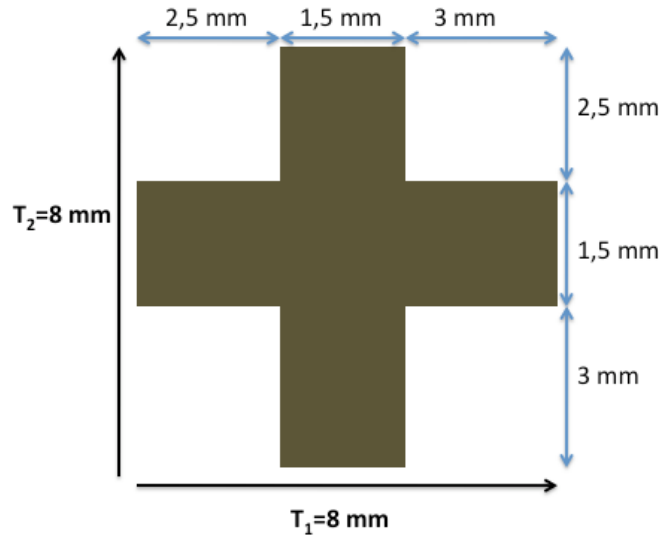


FIGURE 6.4 – Motif du réseau de croix : les paramètres géométriques choisis.

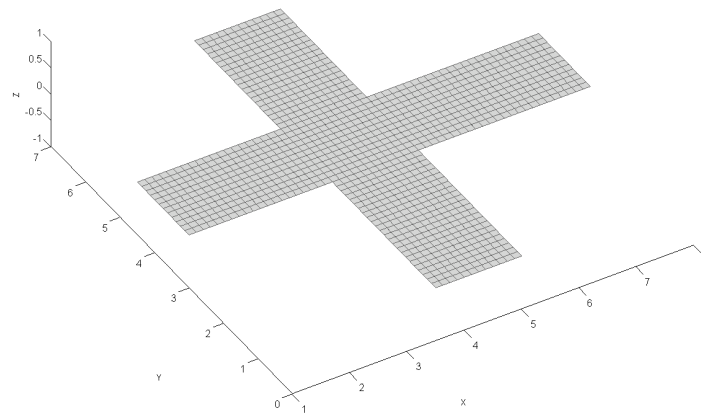


FIGURE 6.5 – Maillage utilisé pour l'utilisation de la méthode EI 3D2D de Spectre.

Pour une fréquence et une incidence, le calcul dure 30 mn pour la méthode imposant les nombreuses évaluations de la fonction de Green bipériodique par la transformation d'Ewald. Ce temps est réduit à 6 s avec l'utilisation de l'algorithme des « feuillets plans à maillage structuré », ce qui donne un gain d'environ 300 en temps de calcul.

Dès lors, considérant que le calcul des opérateurs intégraux a déjà été validé par le calcul sur une couche de matériau diélectrique (section 6.2.2), nous n'avons effectué que le calcul pour les 151 fréquences et les quatre incidence qu'en utilisant l'algorithme des « feuillets plans à maillage structuré », implémenté dans *Spectre*. Cet algorithme est également utilisé dans l'ancienne version du code *Spectre*, appelée *Spectre77* (car implémentée en *Fortran77*), qui a fait l'objet de validations poussées.

Ce sont les résultats issus de ces deux codes de calcul que nous comparons sur les figures 6.8 et 6.9. Les courbes des efficacités de réflexion et de la phase des coefficients de réflexion se superposent quasiment parfaitement, ce qui valide notre implémentation de la méthode des « feuillets plans à maillage structuré » [53] qui est incluse dans notre formulation (cf. chapitre 4).

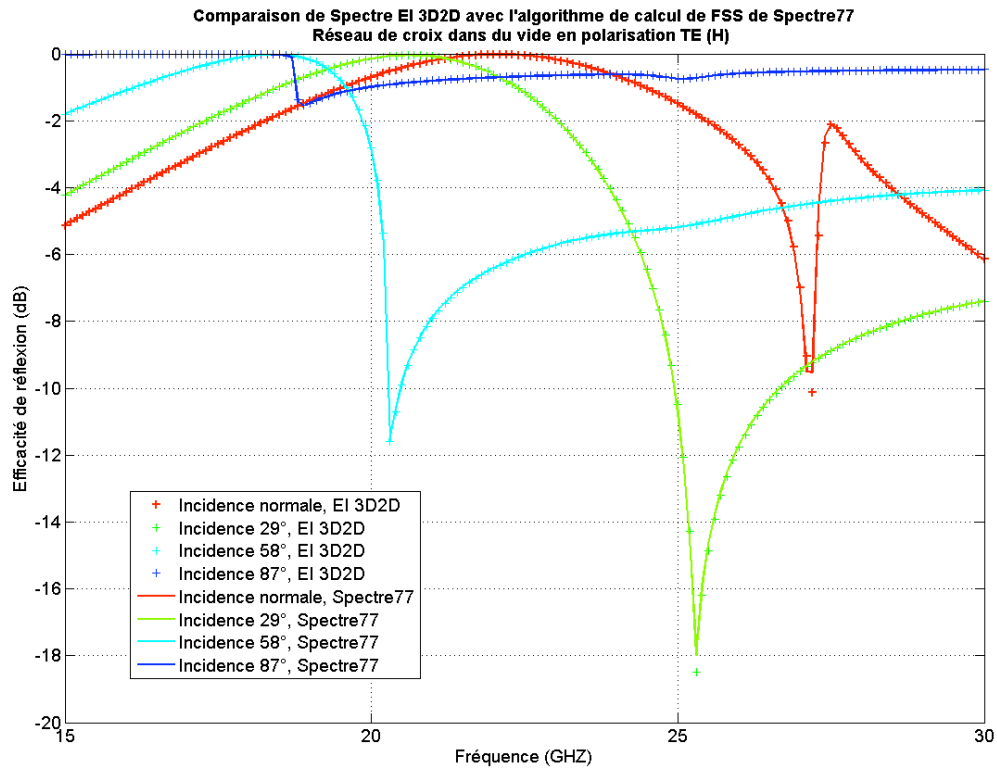


FIGURE 6.6 – Comparaison des efficacités de réflexion en polarisation H (TE), pour les incidences normale et obliques (à 61°, 32° et 3°).

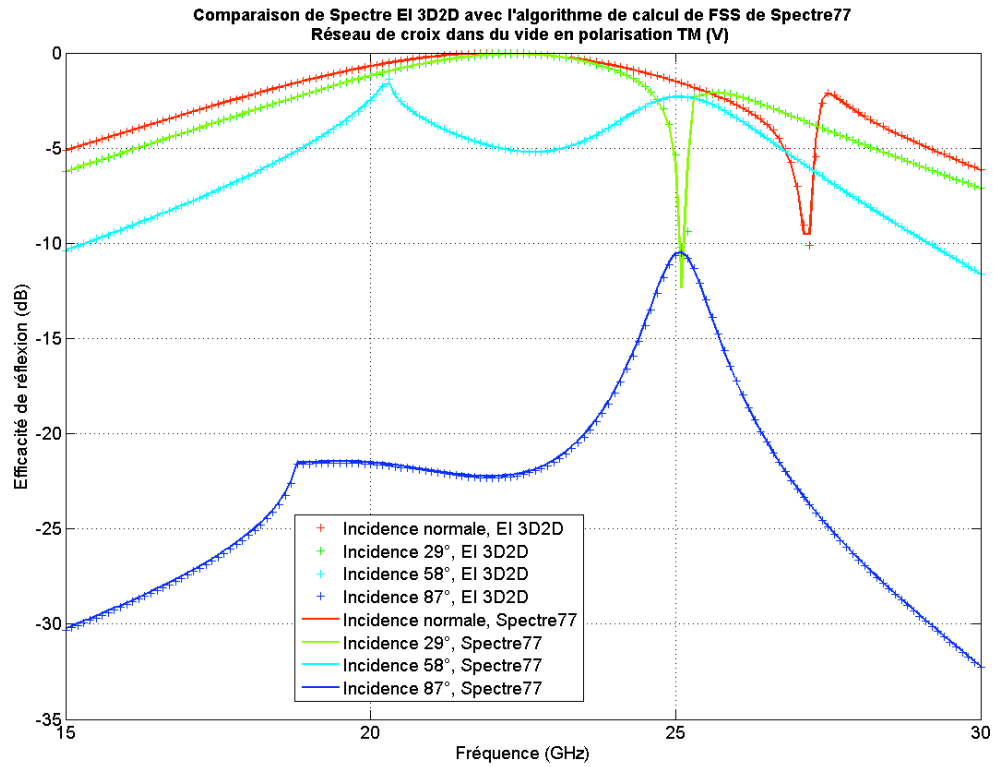
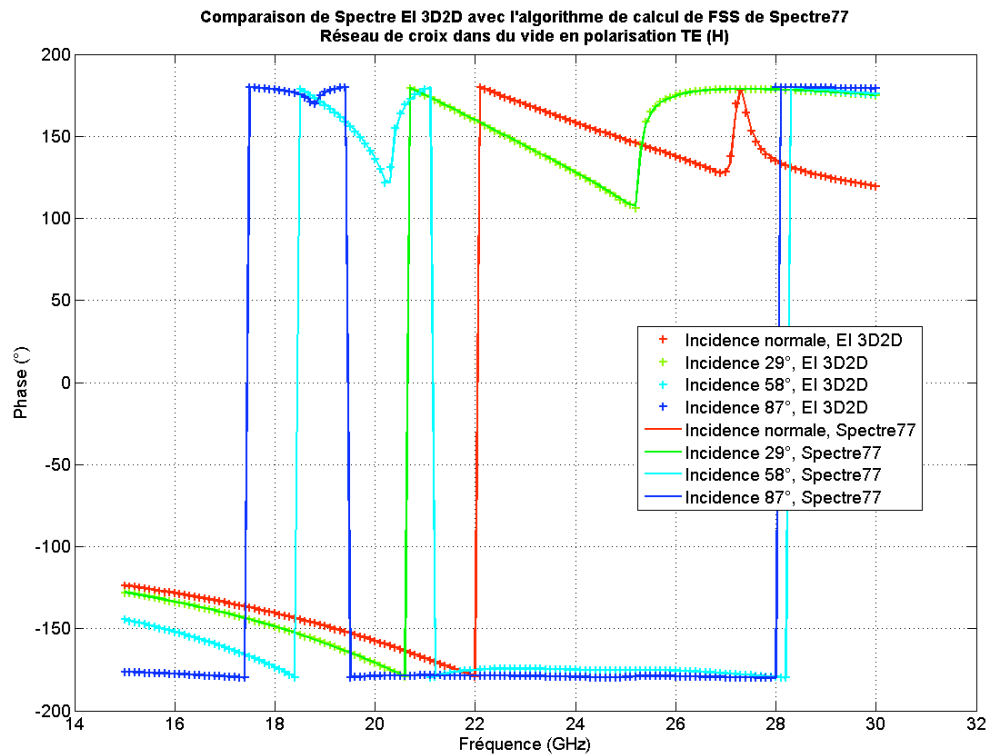
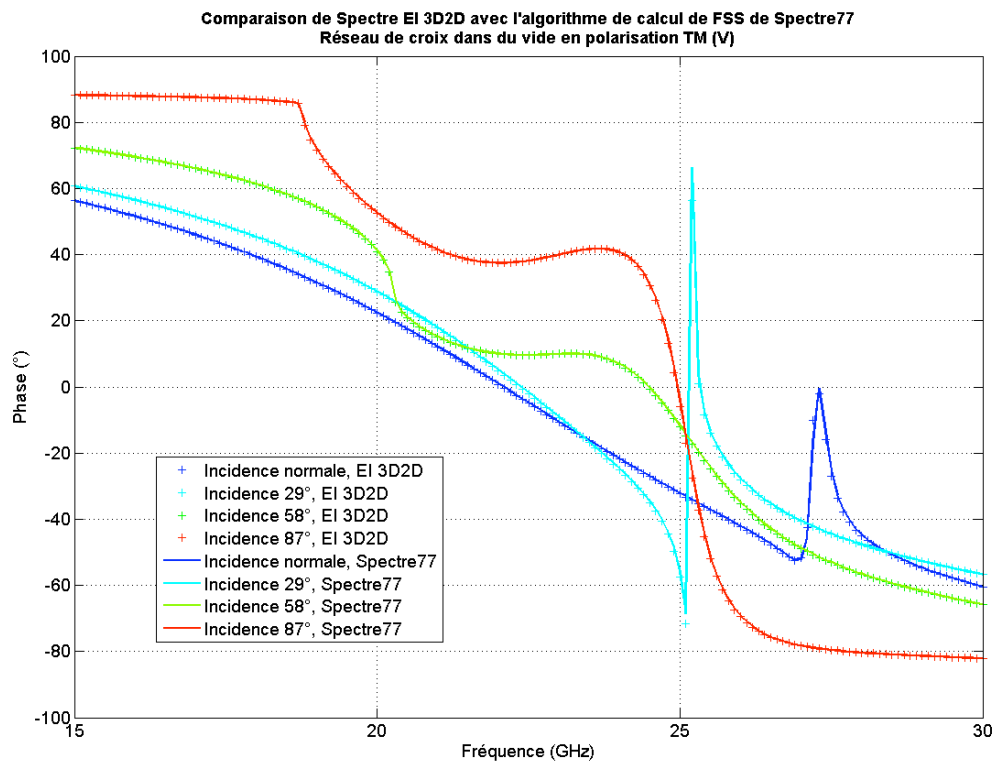


FIGURE 6.7 – Comparaison des efficacités de réflexion en polarisation V (TM), pour les incidences normale et obliques (à 61°, 32° et 3°).



**FIGURE 6.8** – Comparaison de la phase des coefficients de réflexion en polarisation  $H$  (TE), pour les incidences normale et obliques (à  $61^\circ$ ,  $32^\circ$  et  $3^\circ$ ).



**FIGURE 6.9** – Comparaison de la phase des coefficients de réflexion en polarisation  $V$  (TM), pour les incidences normale et obliques (à  $61^\circ$ ,  $32^\circ$  et  $3^\circ$ ).

### 6.3.3 Cas de validation de *Spectre*

Dans le cadre des processus de suivi qualité imposés par la norme ISO 9001, il faut prouver que les développements apportés au code *Spectre* n'altèrent pas son fonctionnement normal. C'est pourquoi il est défini un *corpus* de cas de validation qui permettent de tester le bon fonctionnement du code. Régulièrement, les cas de validation sont repassés pour vérifier que les résultats obtenus restent les mêmes.

Comme nous avons développé une nouvelle méthode au sein de ce logiciel, nous avons défini un nouveau cas de validation. Celui-ci ne peut pas tester toutes les fonctionnalités de la méthode EI 3D2D / EI 3D, mais au moins les principales, en particulier celles qui risquent le plus d'être affectées par des développements futurs.

#### Description

Il s'agit d'un réseau de patches rectangulaires parfaitement conducteurs et sans épaisseur placé au milieu d'une couche de matériau diélectrique (cf. figure 6.10). Les caractéristiques sont les suivantes :

- Maille carrée de périodicité :  $T = 10\text{ mm}$ .
- Patches de  $2,5\text{ mm}$  de côté suivant  $x$  et de  $5\text{ mm}$  de côté suivant  $y$ , placés en  $z = 0$  (référence de phase).
- Couches de matériau diélectrique de permittivité  $\varepsilon_r = 2$  de  $1\text{ mm}$  d'épaisseur placées de chaque côté du réseau de *patches*.

Le calcul est effectué en incidence normale et en incidence oblique à  $30^\circ$ , par rapport à l'axe  $\hat{z}$  dans le plan  $Oxz$ , pour des fréquences allant de  $6\text{ GHz}$  à  $24\text{ GHz}$ .

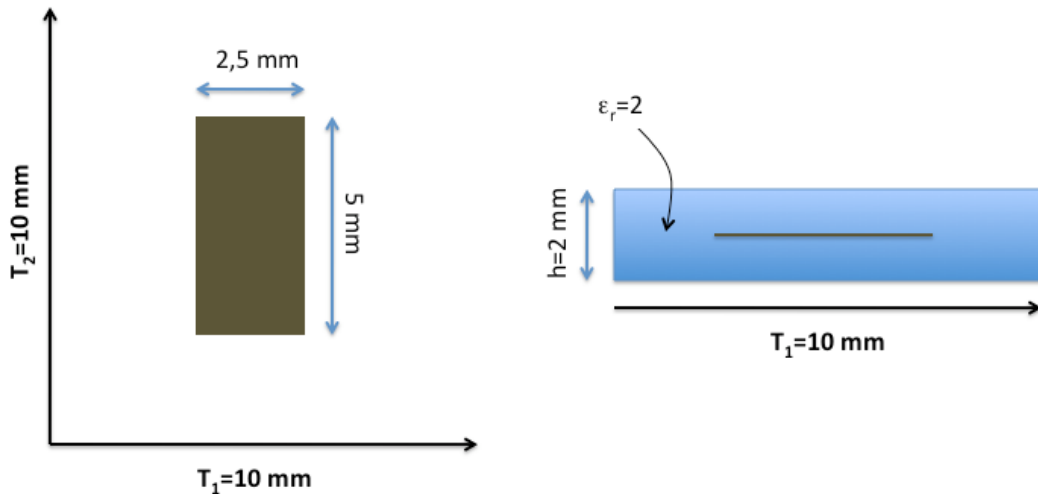


FIGURE 6.10 – Réseau de patches vu de dessus (à gauche) et vu en coupe dans le plan  $Oyz$  (à droite).

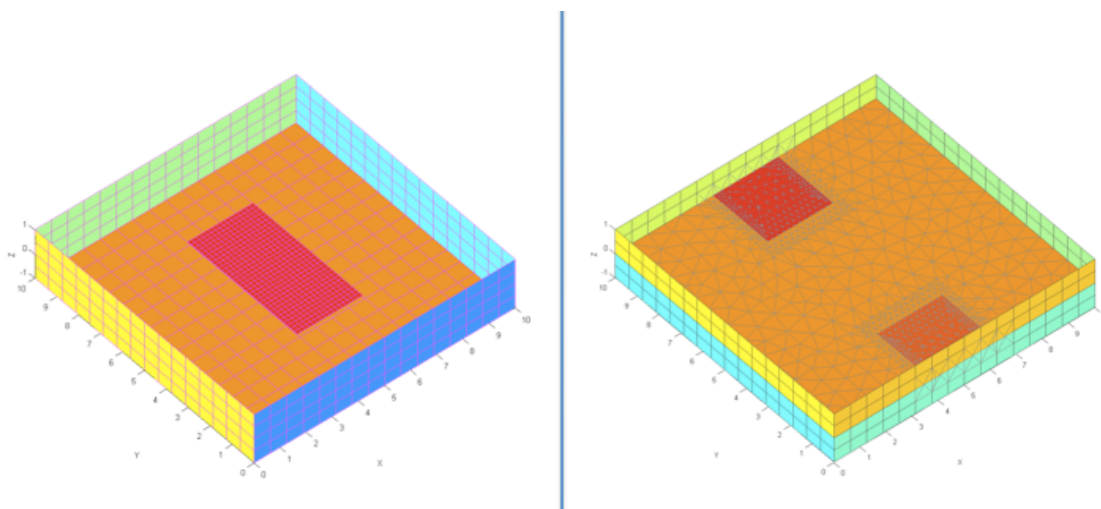
#### Modélisation et fonctionnalités testées

Ce cas peut être modélisé d'une manière très simple (cf. gauche de la figure 6.11) en plaçant le *patch* au milieu d'une "boîte" remplie du matériau diélectrique. Dans ce cas, le maillage

utilisé comprend 1280 quadrangles, pour 3464 degrés de liberté (2220 pour le courant électrique, 1244 pour le courant magnétique). Les longueurs d'arête moyenne et maximale dans le diélectrique à la plus haute fréquence de calcul sont de  $\lambda/21,3$  et  $\lambda/14,2$ . Ce cas ne pose pas de problème particulier ; il sert de référence pour le calcul utilisant le maillage plus compliqué.

Nous avons également conçu un maillage plus complexe (cf. droite de la figure 6.11) destiné à valider des fonctionnalités du code : la méthode EI 3D2D / EI 3D de manière générale et également le traitement d'une condition de conducteur parfait sur un dioptré et la bonne prise en compte des jonctions d'un tel dioptré sur les parois de la cellule de périodicité. En effet, dans ce maillage, on considère que l'on a deux couches de matériau diélectrique placées l'une sur l'autre, et que les *patches* sont placés entre elles. Par ailleurs, la cellule de périodicité de référence est choisie de telle sorte que les *patches* soient coupés en deux par une paroi de la cellule de périodicité.

Ce deuxième maillage compte 1630 triangles et 744 quadrangles pour 7050 inconnues (4506 pour le courant électrique et 2544 pour le courant magnétique). Les longueurs d'arête moyenne et maximale sont dans le diélectrique à la fréquence de calcul la plus haute, sont respectivement de  $\lambda/19,8$  et de  $\lambda/9,6$ .

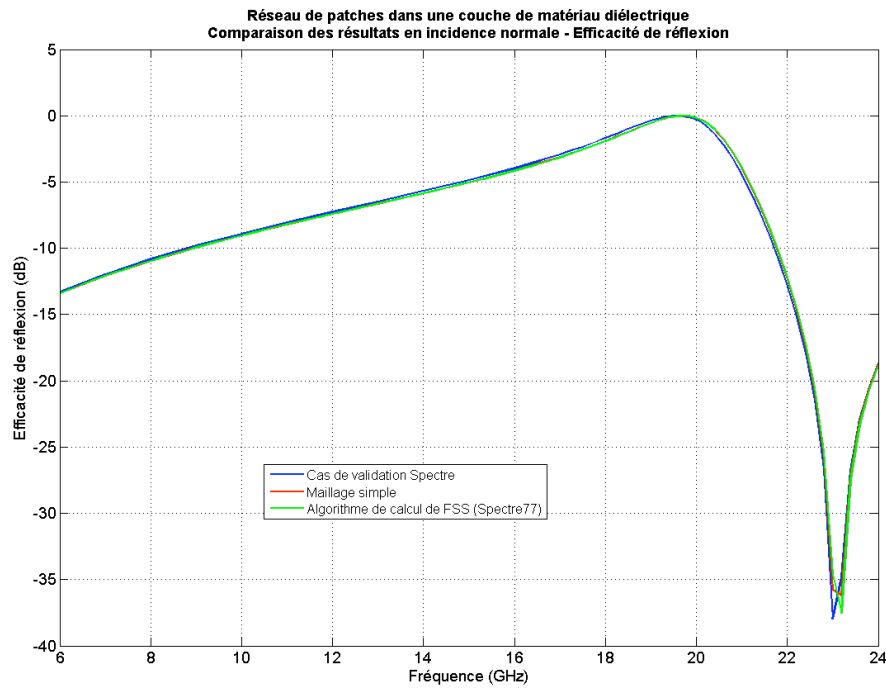


**FIGURE 6.11** — Les deux maillages utilisés pour modéliser le réseau de patches : patch au milieu d'une "boîte" diélectrique (à gauche) ou sur un dioptré séparant deux domaines diélectrique, et coupé en deux par une paroi de la cellule de périodicité (à droite).

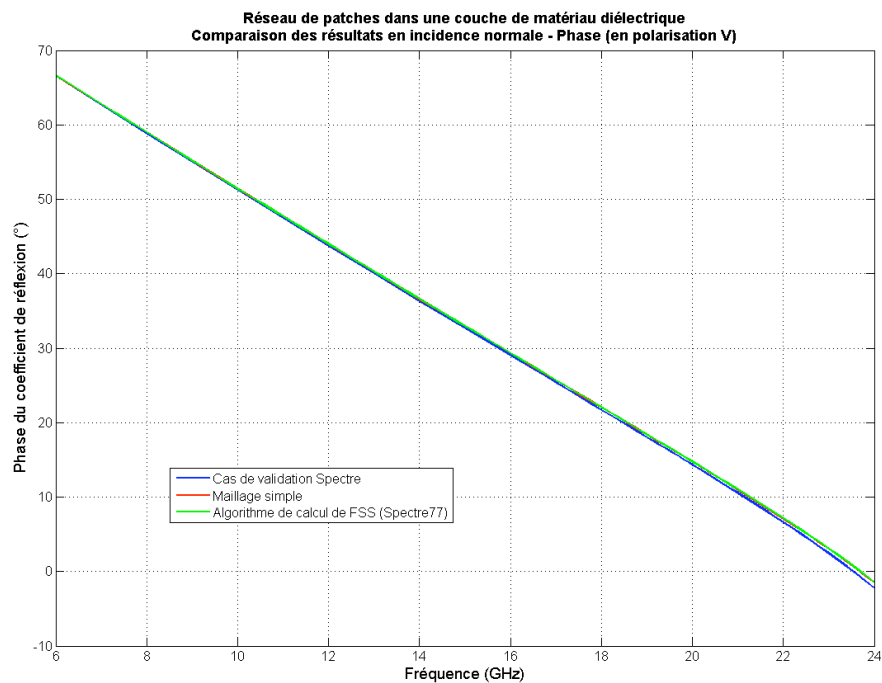
## Résultats et temps de calcul

Nous comparons les résultats issus de la méthode EI 3D2D / EI 3D pour les deux maillages avec les résultats obtenus directement avec l'algorithme des « feuillets plans à maillage structuré » utilisé conjointement avec une technique d'empilement de matrices S.

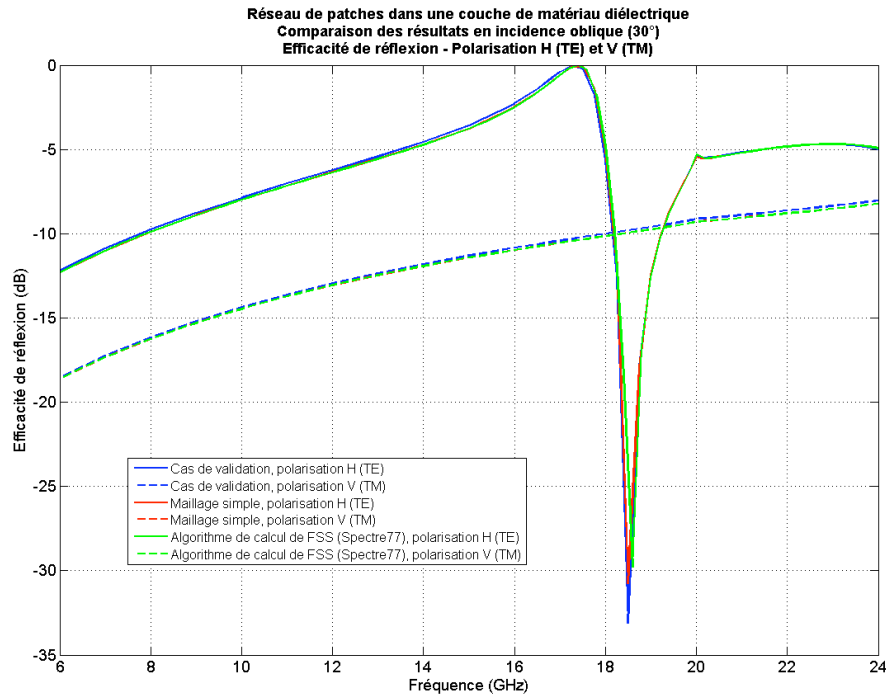
Le calcul sur le cas de validation a été effectué sur un nœud de 8 processeurs *Intel Itanium II* à  $1,4\text{ GHz}$  ; l'assemblage et la résolution directe ont été parallélisés. Par fréquence et par incidence, il faut compter 80 s. Les comparaisons se font sur les efficacités de réflexion et la phase des coefficients de réflexion, sur les figure 6.12 à 6.15.



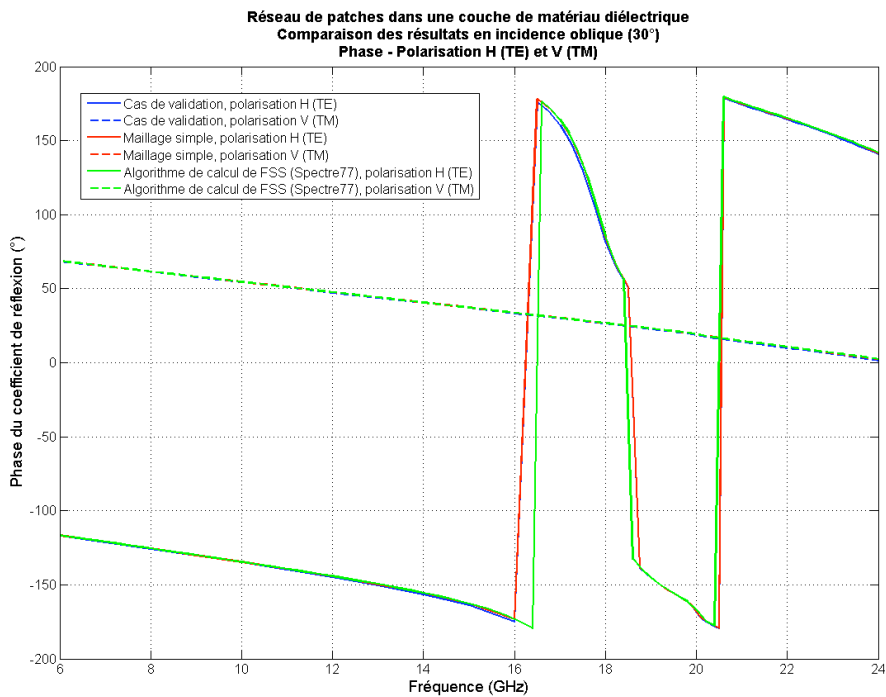
**FIGURE 6.12** — Réseau de patches dans une couche de matériau diélectrique : comparaison des efficacités de réflexion en incidence normale pour les trois calculs différents.



**FIGURE 6.13** — Réseau de patches dans une couche de matériau diélectrique : comparaison de la phase des coefficients de réflexion en incidence normale pour les trois calculs différents. On se place en polarisation V, pour éviter le déphasage de  $\pi$  de la polarisation H.



**FIGURE 6.14** – Réseau de patches dans une couche de matériau diélectrique : comparaison des efficacités de réflexion en incidence oblique pour les trois calculs différents, pour les deux polarisations  $H$  et  $V$ .

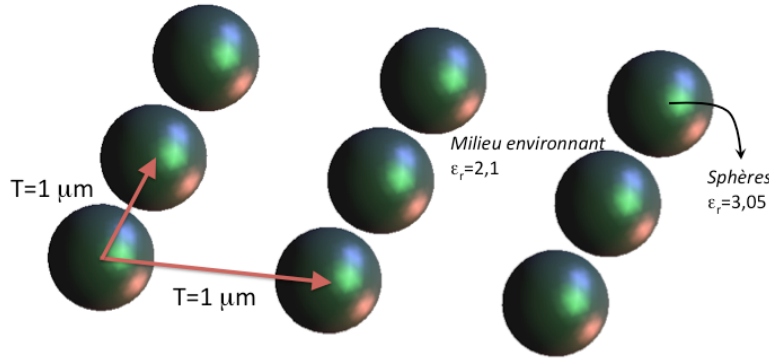


**FIGURE 6.15** – Réseau de patches dans une couche de matériau diélectrique : comparaison de la phase des coefficients de réflexion en incidence oblique pour les trois calculs différents, pour les deux polarisations  $H$  et  $V$ .

## 6.4 Réseaux de sphères diélectriques

Nous étudions à présent des cas de calculs plus gros. Nous avons vu que le calcul des opérateurs intégraux ne posait pas de problème sur des petites structures planes. Il faut vérifier que c'est toujours le cas sur des cas comportant bien plus d'inconnues. Cela nous permettra également de montrer par l'exemple l'avantage de la méthode hybride au niveau du temps de calcul.

Nous étudions ici un réseau de sphères diélectriques plongées dans un milieu infini diélectrique, comme illustré par la figure 6.16. Tatiana Teperik [78] propose un modèle analytique approché de calcul de la matrice  $S$  du réseau. Nous nous y comparons.



**FIGURE 6.16** – Réseau de sphères diélectriques. Seuls neuf motifs sont représentés, bien que le réseau soit infini.

### 6.4.1 Données du calcul

- Réseau à maille carrée de pas  $T = 1000 \text{ nm}$ .
- Rayon des sphères :  $a = 200 \text{ nm}$  (cas n°1) puis  $a = 230 \text{ nm}$  (cas n°2).
- Permittivité du milieu environnant les sphères :  $\varepsilon_r = 2,1$ .
- Permittivité du matériau constituant les sphères :  $\varepsilon_r = 3,05$ .
- Incidence normale.
- Longueurs d'onde incidente de  $1448 \text{ nm}$  à  $1460 \text{ nm}$ , par pas de  $0,1 \text{ nm}$ .

### 6.4.2 Modélisation et temps de calcul

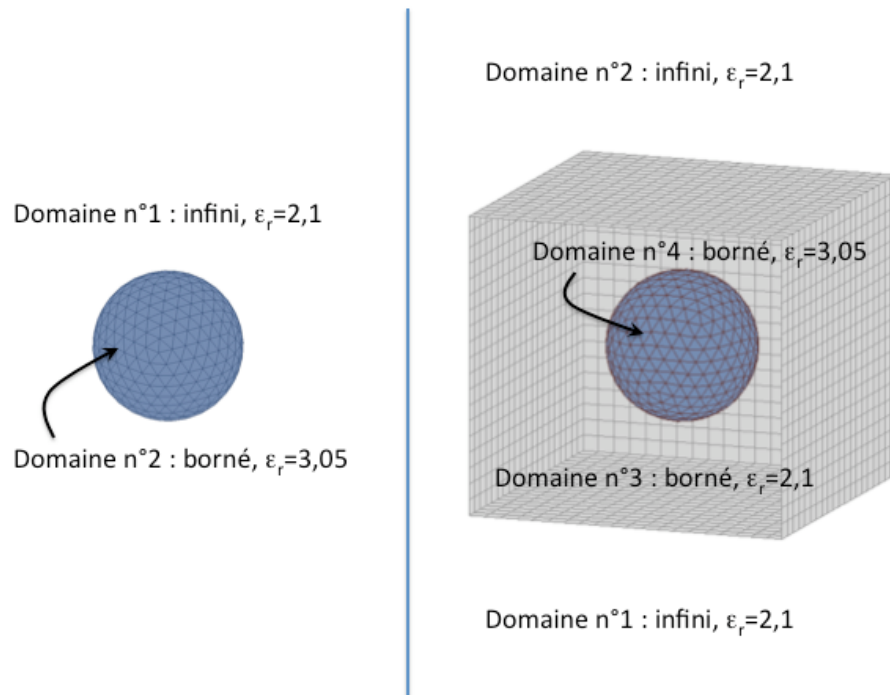
Ce cas a l'avantage d'être un réseau disjoint de particules. On peut donc le modéliser de deux manières différentes utilisant la méthode hybride que nous avons développée :

- Sans prise en compte d'interfaces de périodicité : la sphère constitue à elle-seule un domaine borné dans lequel on peut écrire les équations intégrales 3D. Les équations intégrales bipériodiques sont écrites à l'extérieur de la sphère. Le maillage n'étant pas structuré, les opérateurs intégraux bipériodiques sont calculés à l'aide de points de Gauss et la fonction de Green bipériodique doit être évaluée pour chaque couple de points de Gauss.

- En créant une “boîte” autour de la sphère, permettant d’imposer des conditions aux limites de pseudopériodicité et un maillage structuré aux interfaces des domaines semi-infinis, permettant de ne plus avoir à évaluer directement la fonction de Green bipériodique.

Pour la modélisation sans interfaces fictives (à gauche de la figure 6.18), le maillage est constitué de 720 triangles pour les deux rayons testés ( $a = 200\text{ nm}$  et  $a = 230\text{ nm}$ ), portant 2160 degrés de liberté (1080 ddl pour le courant électrique et 1080 ddl pour le courant magnétique). Pour la plus petite longueur d’onde du calcul, les longueurs d’arête moyenne et maximale sont respectivement de  $\lambda/21,7$  et  $\lambda/19,3$  dans le domaine infini et de  $\lambda/17,9$  et  $\lambda/16$  dans les sphères : on respecte largement le critère de convergence en maillage donné en 5.4.

Pour la modélisation avec interfaces fictives, le maillage des sphères reste le même. Les interfaces fictives, maillées en quadrangles, rajoutent des degrés de liberté : 5648 de plus, sur 2880 éléments supplémentaires. Cela fait un maillage, dans les deux cas, de 7808 degrés de liberté.



**FIGURE 6.17** – *Gauche* : le maillage d’une sphère de matériau  $\epsilon_r = 3,05$ , baignant dans un matériau  $\epsilon_r = 2,1$ . *Droite* : le même maillage, auquel on a rajouté des interfaces fictives permettant l’utilisation de la méthode hybride EI 3D2D / EI 3D avec calcul sur maillage structuré.

Les temps de calcul présentés dans le tableau 6.1 correspondent à des calculs sur un nœud de 8 processeurs *Intel Itanium II* à  $1,4\text{ GHz}$  : seul l’assemblage est parallélisé. La résolution directe du système linéaire se fait sur un seul processeur.

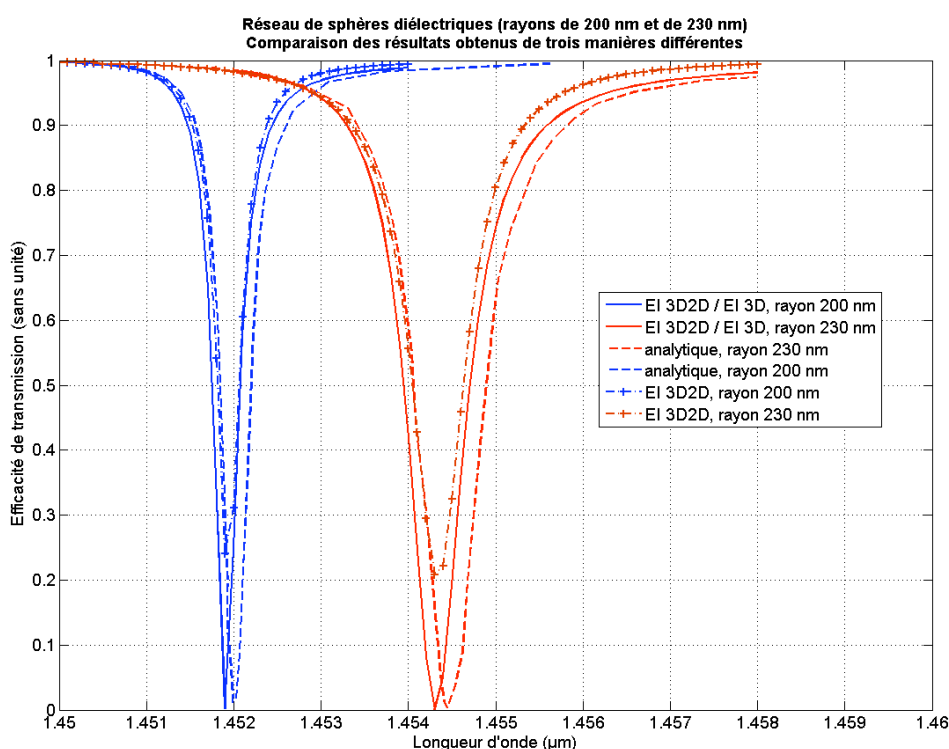
Le maillage avec interfaces fictives apporte un gain de temps de calcul de 15,7, bien que l’on ait 2,5 fois plus de degrés de liberté.

| Maillage utilisé         | Nombre de degrés de liberté | Temps de calcul par fréquence |
|--------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| Sans interfaces fictives | 2160                        | 0,44 h                        |
| Avec interfaces fictives | 5648                        | <b>0,028 h</b>                |

**TABLE 6.1** – Temps de calcul pour les deux modélisations utilisées pour le réseau de sphères diélectriques.

### 6.4.3 Résultats

Les courbes obtenues par le code *Spectre* et celle issu d'un calcul analytique se superposent correctement compte tenu de la très petite largeur de bande relative (d'environ  $\frac{0.25 \text{ nm}}{1452 \text{ nm}} = 1,72 \cdot 10^{-4}$ ) : les deux modélisations utilisées sont cohérentes entre elles, et cohérentes avec la solution analytique.



**FIGURE 6.18** – Comparaison des efficacités de transmission pour les réseaux de sphères, par l'utilisation de trois méthodes différentes.

## 6.5 Réseaux de pyramides, antireflet en infrarouge

### 6.5.1 Principe

Une application des réseaux est la conception de surfaces absorbantes ou antireflet. Ce type de revêtement est utilisé dans les chambres anéchoïques, en acoustique ou en électromagnétisme. Ce sont souvent des réseaux de pyramides en mousse qui réalisent un gradient d'indice en passant continûment de l'indice de réfraction de l'air à celui de la mousse, en évitant les réflexions parasites.

En infrarouge, des structures absorbantes ou antireflet constituées de pyramides gravées sur un substrat sont étudiées. Les cas présentés ci-après rentrent dans cette catégorie. Dans ce cas, un profil de pyramides optimisé est proposé dans [74].

## 6.5.2 Réseau de pyramides antireflet

### Description

Dans les exemples d'application de la thèse de Frédéric Lubrano-Lavaderci [41], on trouve des réseaux de pyramides gravées sur un demi-espace de verre ( $SiO_2$ ) ainsi que les courbes des efficacités de réflexion en fonction de la longueur d'onde. Ces réseaux sont étudiés dans le domaine infrarouge et servent d'antireflet.

Les pyramides ont les caractéristiques géométriques suivantes :

- Maille carrée de périodicité  $5\ \mu m$ .
- Pyramides de  $12\ \mu m$  de hauteur et  $5\ \mu m$  de côté.

Le domaine semi-infini incident est vide, d'indice optique  $n = 1$ .

Le calcul est effectué en incidence normale pour une plage de longueurs d'onde de  $11\ \mu m$  à  $17\ \mu m$ . À ces longueurs d'onde, le verre est un matériau diélectrique dispersif et absorbant : son indice optique généralisé est disponible dans [60].

### Modélisation et fonctionnalité testée

Le maillage utilisé pour la méthode EI 3D2D / EI 3D compte 1592 triangles et 1216 quadrangles, auxquels sont attachés 7438 degrés de liberté (3719 pour le courant électrique, 3719 pour le courant magnétique). Dans le verre, à la fréquence la plus haute, les longueurs d'arête moyenne et maximale sont respectivement de  $\lambda/5$  et de  $\lambda/3, 2$ , ce qui fait un maillage dit "pauvre". Avec un tel maillage, on ne peut pas s'attendre à un résultat de grande qualité ; cela permet de savoir si l'on peut retrouver l'allure d'une solution en n'ayant pas maillé assez finement.

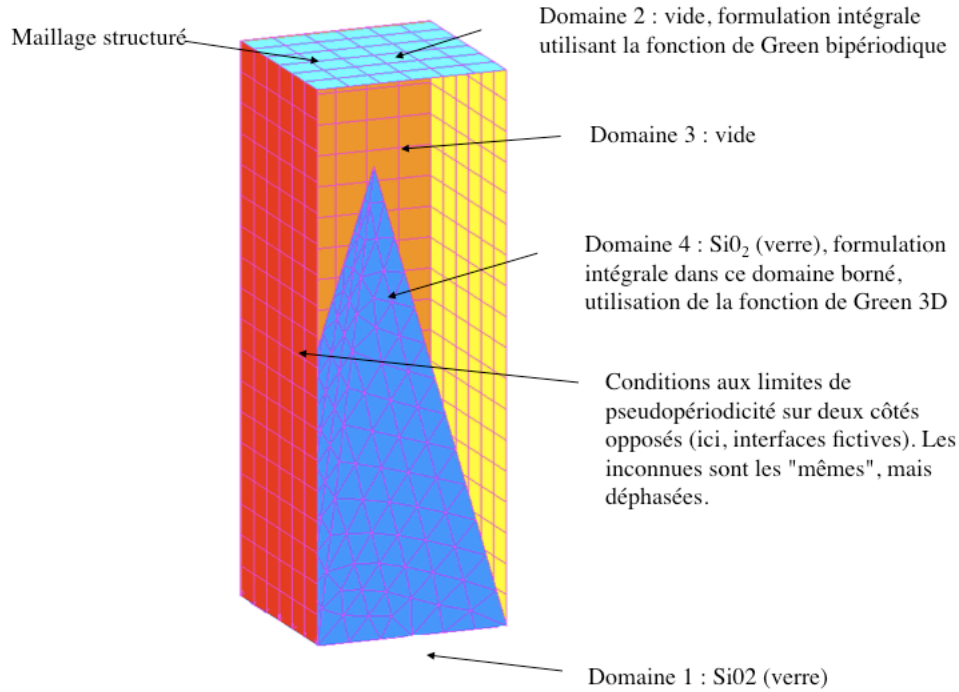
Nous avons également effectué les calculs sur un maillage plus dense de 4280 triangles et 2016 quadrangles : il comporte 17280 degrés de liberté, soit encore 8640 inconnues pour les courants électrique et magnétique. Les longueurs d'arête moyenne et maximale à la fréquence la plus élevée, et dans le verre, sont  $\lambda/11, 5$  et  $\lambda/8, 9$ . Cela permet de visualiser les effets de convergence en maillage.

Ces données sont résumées dans le tableau 6.2.

| Maillage utilisé | Nombre de degrés de liberté | Longueur d'arête moyenne dans le diélectrique | Longueur d'arête maximale dans le diélectrique |
|------------------|-----------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Léger            | 7438                        | $\lambda/5$                                   | $\lambda/3, 2$                                 |
| Dense            | 17280                       | $\lambda/11, 5$                               | $\lambda/8, 9$                                 |

**TABLE 6.2** – Longueurs d'arête moyennes et maximales des maillages utilisés.

Ce cas présente aussi l'intérêt de tester l'utilisation de matériaux absorbants, puisque nous avons souvent distingué les cas d'un nombre d'onde réel ou complexe dans les développements du code numérique.

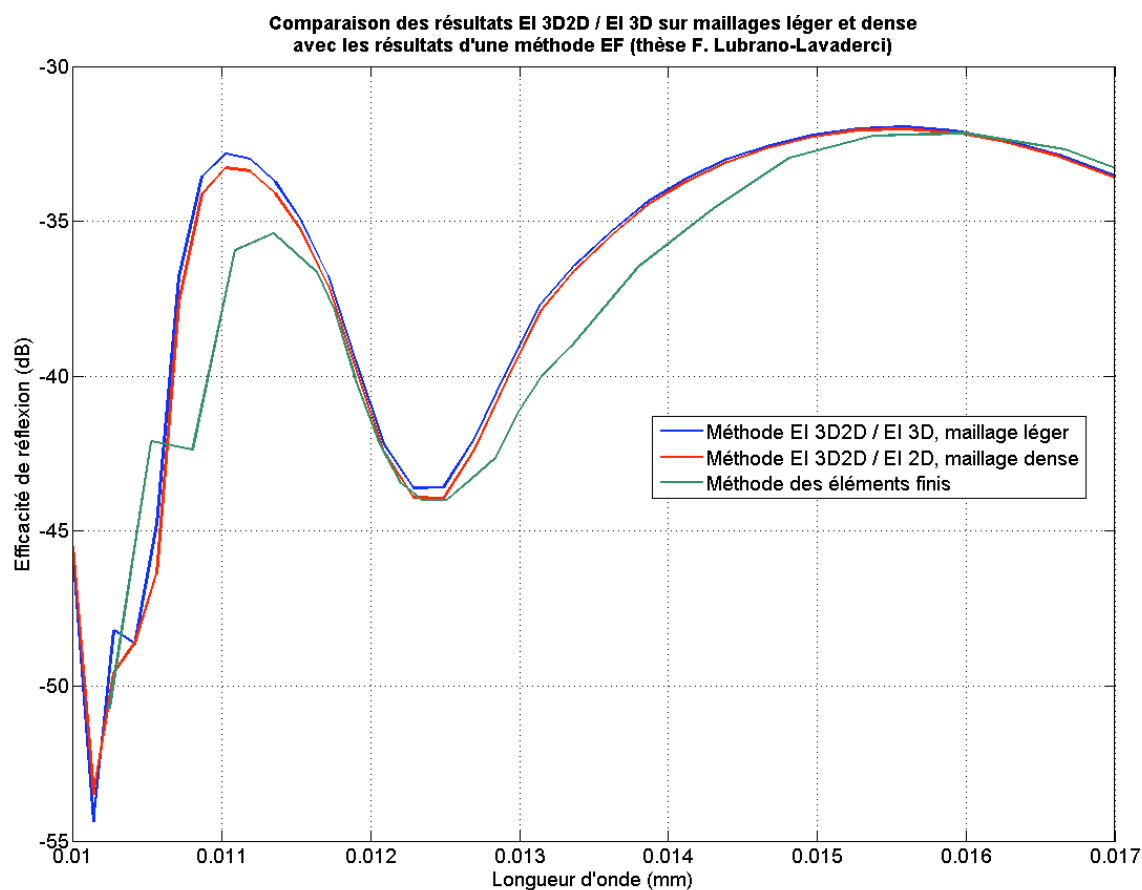


**FIGURE 6.19** – Le maillage utilisé pour modéliser le réseau de pyramides antireflet gravé sur un demi-espace de verre. On indique également quelles sont les équations intégrales utilisées dans chaque domaine.

## Résultats et temps de calcul

Nous comparons l'efficacité de transmission issue du code *Spectre* pour les deux maillages proposés, à celle publiée dans [41] et issue d'une méthode d'éléments finis. La courbe est présentée à la figure 6.20. Sur un nœud de huit processeurs *INTEL Itanium II* à 1,6 GHz, il faut compter environ 9 mn par fréquence en incidence normale.

Sur les courbes issues d'un calcul *Spectre*, on voit l'effet de convergence en maillage, mais il ne modifie pas considérablement l'aspect de la courbe de l'efficacité de réflexion. Ces deux courbes sont en revanche différentes de la courbe obtenue par une méthode d'éléments finis, sans que l'allure générale de la courbe et le niveau moyen de réflexion ne soient très éloignés.



**FIGURE 6.20** — *Comparaison de résultats issus de la méthode hybride EI 3D2D / EI 3D (code Spectre) pour deux maillages différents (un léger et un dense) et d'une méthode d'éléments finis (cf.[41]).*

### 6.5.3 Pyramide de silicium avec méplat

Dans le cadre d'une collaboration industrielle, nous avons été amenés à étudier une structure antireflet proposée par Thales Optronique et à comparer les résultats obtenus par la méthode EI 3D2D / EI 3D à ceux obtenus par le code de calcul RCWA disponible au laboratoire EM2C de l'École Centrale Paris, car ce cas se prête bien à une modélisation RCWA.

#### Description

Il s'agit d'un réseau de pyramides à base carrée, dont la pointe a été tronquée, qui est gravé sur un demi-espace de silicium cristallin ( $n = 3,42$ ). L'autre demi-espace est rempli d'air. Les caractéristiques géométriques de la structure sont les suivantes :

- Maille carrée de périodicité  $1,2\ \mu m$ .
- Côté de la pyramide :  $1,2\ \mu m$ .
- Hauteur de la structure :  $1,25\ \mu m$ .
- Côté du méplat :  $0,25\ \mu m$ .

Les calculs sont effectués pour des longueurs allant de  $3\ \mu m$  à  $5\ \mu m$ , pour des incidences de  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$ , par rapport à l'axe  $\hat{z}$  dans le plan  $Oxz$ .

#### Modélisation

Le maillage permet d'utiliser la méthode hybride EI 3D2D / EI 3D : la pyramide est maillée à l'aide de 664 triangles, et les interfaces fictives sont maillées par 760 quadrangles. Le maillage compte 1992 degrés de liberté : 996 pour le courant électrique et 996 pour le courant magnétique. Dans le silicium, les longueurs d'arête moyenne et maximale sont respectivement de  $\lambda/7,2$  et de  $\lambda/4,6$ . Le maillage est représenté sur la figure 6.21.

#### Résultats et temps de calcul

Les efficacités de réflexion obtenues à l'aide de la méthode hybride de *Spectre* et de la méthode RCWA sont comparées entre elles pour chaque polarisation TE et TM et pour chaque incidence. Le maillage utilisé pour la méthode hybride EI 3D2D / EI 3D n'est pas très riche : la longueur d'arête moyenne dans le silicium satisfait tout juste au critère de convergence en maillage à la plus petite longueur d'onde, et la longueur d'arête maximale est plus grande que  $\lambda/6$ .

Nous voyons que, dans chaque cas, on retrouve des courbes similaires, quoiqu'elles ne se superposent pas parfaitement : le maillage EI 3D2D / EI 3D est assez pauvre et la modélisation RCWA peut ne pas être suffisamment précise. Les courbes sont présentées sur les figures 6.22 et 6.23.

Sur un processeur *INTEL Itanium II* à  $1,6\ GHz$ , il faut compter environ 130 s par fréquence et par incidence.

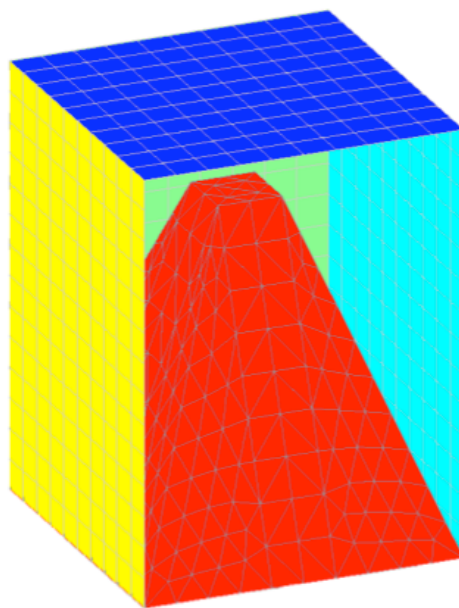


FIGURE 6.21 – Maillage de la pyramide à méplat. À chaque couleur correspond un dioptre différent.

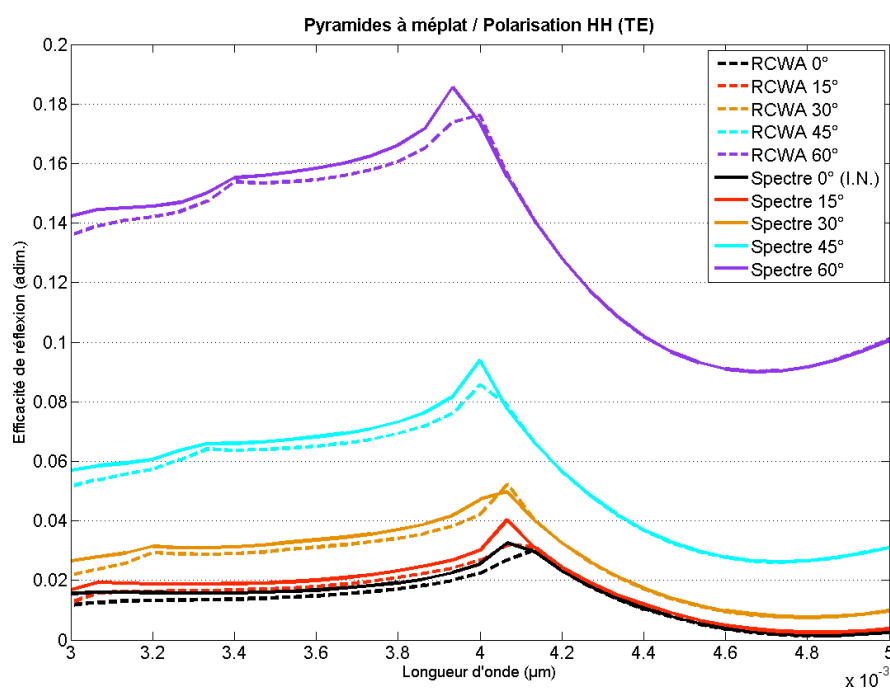


FIGURE 6.22 – Comparaison des résultats obtenus par Spectre et par un code RCWA en polarisation TE.

## 6.6 Surfaces à haute impédance

Les surfaces à haute impédance sont des matériaux périodiques qui peuvent servir avantageusement de substrat d'antenne : ils permettent d'améliorer le gain de l'antenne et de diminuer son encombrement. Elles ont été étudiées dans [70] et [71].

### 6.6.1 Substrat d'antenne

Un substrat d'antenne est un matériau sur lequel une antenne est placée. Sur un avion, cela peut être le fuselage ou l'empennage.

**Plan parfaitement conducteur** Si une antenne posée très près d'une surface parfaitement conductrice, son efficacité en émission est très sensiblement réduite. En effet, l'antenne émet directement dans le domaine semi-infini, mais également en direction du substrat parfaitement conducteur, lequel réfléchit l'onde de sorte que  $\vec{E} \times \vec{n} = 0$  sur la surface. Cela entraîne des interférences destructives et l'onde totale émise par l'antenne est quasiment nulle. Le schéma 6.24 résume ce phénomène.

Un plan parfaitement conducteur a une impédance nulle, étant le rapport  $\frac{\|\vec{E} \times \vec{n}\|}{\|\vec{H} \times \vec{n}\|}$ .

Ainsi, pour que les interférences entre l'onde réfléchie par le substrat et l'onde émise par l'antenne dans le domaine semi-infini soient constructives, il faut que l'antenne soit placée à une distance de  $\lambda/4$  du substrat,  $\lambda$  étant la longueur d'onde de fonctionnement de l'antenne. Cela impose un encombrement, que l'on peut réduire en posant l'antenne sur une couche de matériau diélectrique de fort indice.

**Surface à haute impédance (SHI)** Une surface à haute impédance est parfois appelée “parfaitement magnétiquement conductrice” pour souligner le fait que le champ magnétique tangent total à sa surface est quasiment nul. Il en résulte une impédance très élevée.

Ce type de surface présente un avantage d'importance : le champ électrique incident et le champ électrique réfléchi se somment constructivement. Ainsi, si l'antenne est placée à même le substrat, son gain est amélioré de  $3\text{ dB}$ . Il résulte également de cela une diminution de l'encombrement de l'antenne. Cela est résumé sur la figure 6.25.

### 6.6.2 SHI à maille hexagonale

Cette structure est proposée, fabriquée et mesurée dans [71].

#### Description

Nous avons modélisé la surface à haute impédance proposée dans [71]. Il s'agit d'un réseau hexagonal de patches hexagonaux parfaitement conducteurs sans épaisseur connectés par des vias (fils métalliques verticaux) à un plan parfaitement conducteur, comme illustré sur

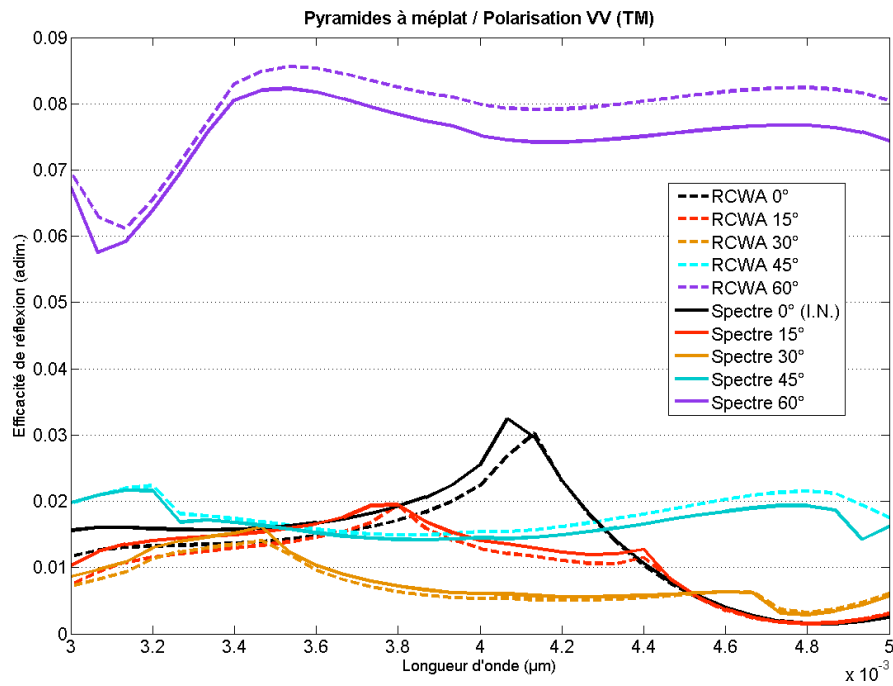


FIGURE 6.23 – Comparaison des résultats obtenus par Spectre et par un code RCWA en polarisation TM.

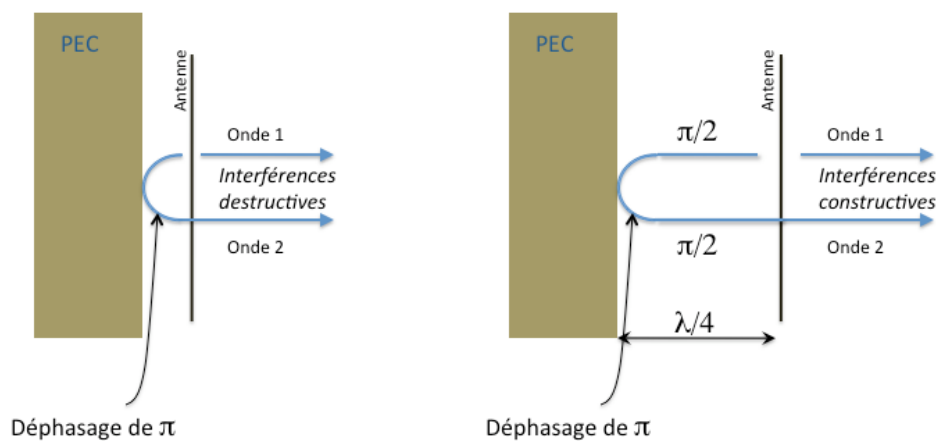


FIGURE 6.24 – Interférences destructives ou constructives pour des antennes posées à même un substrat parfaitement électriquement conducteur (PEC), ou à une distance de  $\lambda/4$ .

la figure 6.26. Ce type de structure est souvent surnommé « réseau de *mushrooms* » (pour “champignon”, en anglais).

Les caractéristiques géométriques de ce cas sont les suivantes :

- Patches hexagonaux sans épaisseur parfaitement conducteurs.
- Période spatiale :  $2,54\text{ mm}$ .
- Espace entre les patches :  $0,36\text{ mm}$ .
- Vias à section carrée de  $0,15\text{ mm}$  de côté.
- Distance entre les patches et le substrat parfaitement conducteur :  $1,55\text{ mm}$ .
- Matériau remplissant l'espace entre les “mushrooms” : diélectrique de permittivité  $\varepsilon_r = 2,2$ .

On calcule la phase du coefficient de réflexion pour la polarisation TM en incidence normale, pour une plage de fréquence allant de  $6\text{ GHz}$  à  $24\text{ GHz}$ .

## Modélisation

Nous avons effectué le calcul avant de disposer de l'algorithme de calcul sur des feuillets plans à maillage structuré. Ainsi, le maillage n'est pas structuré sur les interfaces avec le domaine semi-infini.

Le maillage utilisé compte 2568 triangles, 440 quadrangles. Il y a 7491 degrés de liberté (6161 pour le courant électrique et 1330 pour le courant magnétique), dont 4230 sur l'interface avec le domaine semi-infini (pour lesquels il faut utiliser la fonction de Green bipériodique). Les longueurs d'arête moyenne et maximale sont respectivement, à la plus haute fréquence de calcul et dans le matériau d'indice  $n = 1,48$ , de  $\lambda/51$  et de  $\lambda/20$ .

Le maillage est laissé visible sur la représentation de la charge, à la figure 6.28.

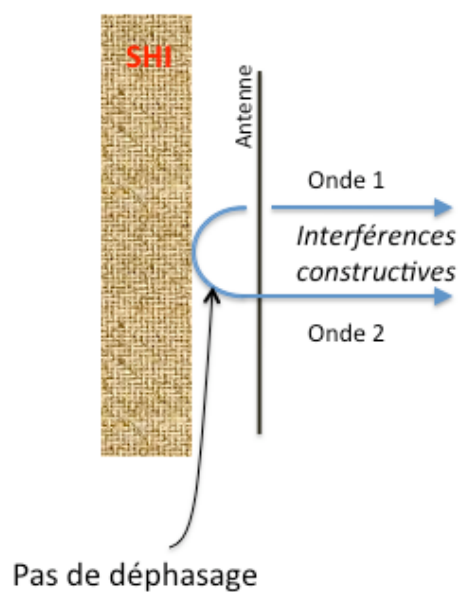
## Résultats et temps de calcul

Nous comparons la phase du coefficient de réflexion calculé numériquement à la mesure donnée dans [71]. Nous voyons que le résultat de calcul est tout-à-fait cohérent par rapport à la mesure.

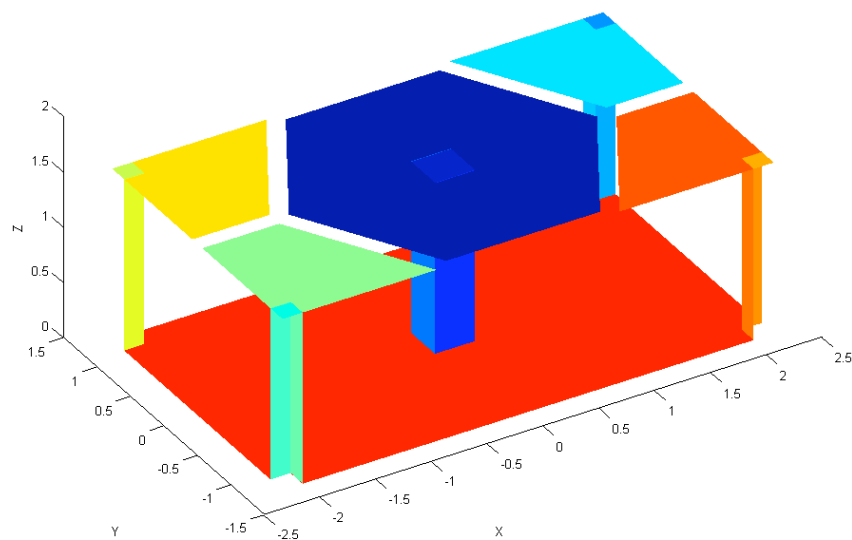
Le calcul a été effectué sur un seul processeur *IBM Power4+* à  $1,7\text{ GHz}$ . Pour 19 fréquences et une seule incidence, il a fallu 126 heures, soit 6 heures et 38 minutes par fréquence.

### 6.6.3 Cas n°5 du workshop ISAE 2008

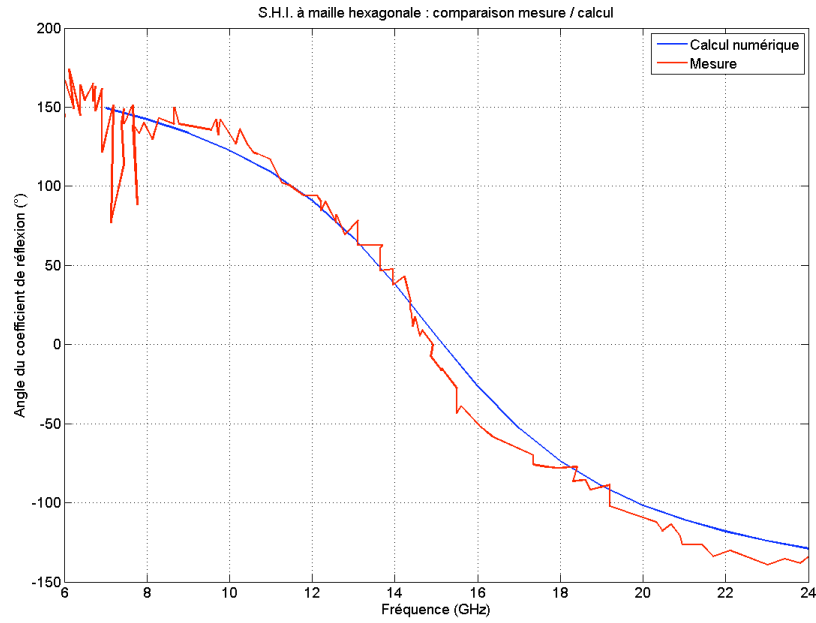
Le workshop ISAE (anciennement JINA) a lieu tous les deux ans et permet aux participants de comparer leurs moyens de calculs en électromagnétisme entre eux et également à des résultats de mesure. Le cas suivant a été proposé en octobre 2008 par Dassault-Aviation et Orange Labs. La CAO a été fournie par Orange Lab ainsi que l'échantillon. Les mesures ont été effectuées par Dassault-Aviation Argenteuil.



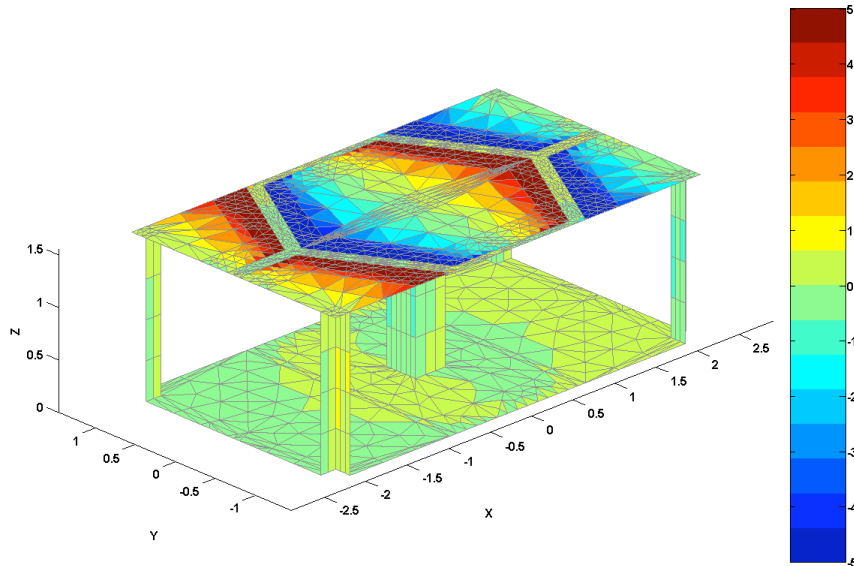
**FIGURE 6.25** – *Interférences constructives pour une antenne posée à même une surface à haute impédance.*



**FIGURE 6.26** – *Cellule de périodicité du réseau de “mushrooms” : elle contient un “mushroom” et quatre quarts de “mushroom” de façon à avoir un réseau orthogonal.*



**FIGURE 6.27** – Comparaison de la phase calculée à l'aide de Spectre et de la phase mesurée (d'après [71]). La référence de phase est prise à l'interface supérieure de la structure.



**FIGURE 6.28** – Charge  $\vec{E} \cdot \vec{n}$  à 16 GHz en polarisation TM. La palette de couleur a été saturée pour mieux faire apparaître les zones d'accumulation des charges aux bords des patches.

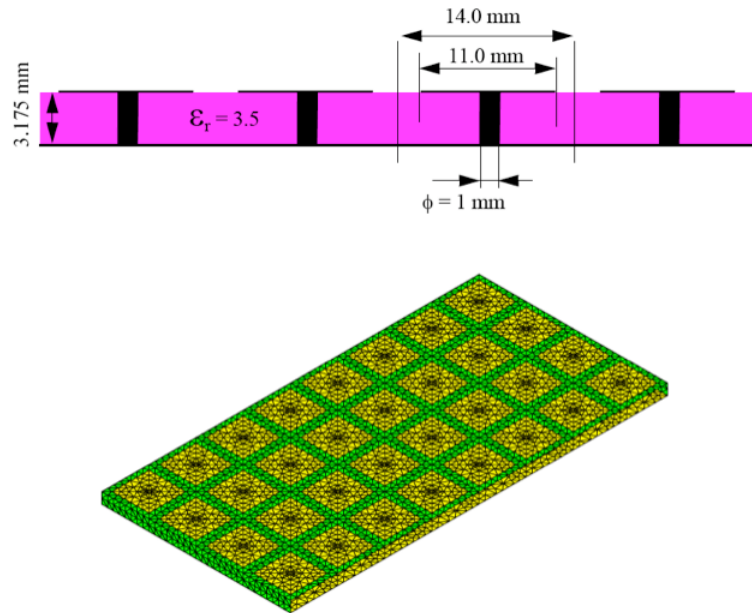
## Description

Il s'agit d'un réseau fini "mushrooms", de taille 8x8, de caractéristiques :

- Maille carrée de périodicité :  $T_1 = T_2 = 14\text{ mm}$ .
- Patch carré de  $11\text{ mm}$  de côté, posé sur un plot cylindrique de diamètre  $1\text{ mm}$  et de hauteur  $3,175\text{ mm}$ .
- Matériau remplissant le réseau : diélectrique de permittivité relative  $\varepsilon_r = 3,5$ .
- La référence de phase est prise en  $z = 0$  (le plan parfaitement conducteur est placé en  $z = -3,175\text{ mm}$ ).

On cherche la phase du coefficient de réflexion à l'interface supérieure dans chaque polarisation pour des fréquences de  $5$  à  $6\text{ GHz}$ , par pas de  $0,1\text{ GHz}$ , avec une incidence oblique de  $45^\circ$ , par rapport à l'axe  $\hat{z}$  dans le plan  $Oxz$ .

La structure étudiée est schématisée à la figure 6.29.



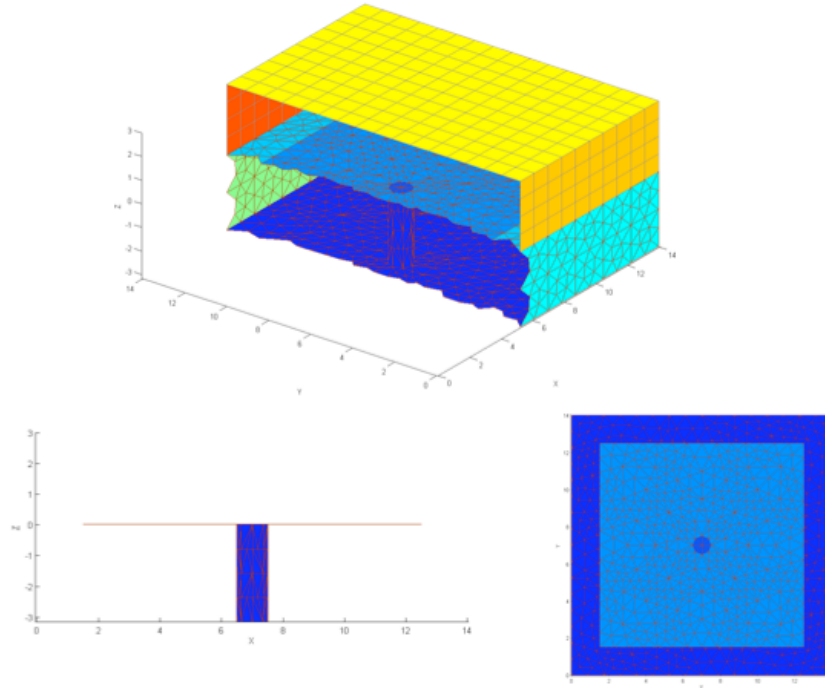
**FIGURE 6.29** – *En haut* : coupe dans le plan  $Oxz$  de la structure. *En bas* : Moitié du maillage proposé pour le réseau fini. (source : description du cas n°5, workshop ISAE 2008)

## Modélisation bipériodique

Le réseau fini a été modélisé tel quel, en tenant compte des moyens de mesure, par la méthode d'équations intégrales 3D du code *Spectre* de Dassault-Aviation. En complément, nous avons modélisé un réseau infini de même cellule de périodicité et vérifié la cohérence des résultats obtenus.

Le maillage utilisé (fig. 6.30) compte 3512 triangles et 512 quadrangles auxquels sont attachés 6500 inconnues pour le courant électrique et 1952 inconnues pour le courant magnétique. Dans le matériau diélectrique d'indice de réfraction  $n = 1,87$  et à la plus haute

fréquence de calcul, les longueurs d'arête moyenne et maximale du maillage sont respectivement de  $\lambda/32$  et  $\lambda/24$ . Il a fallu mailler plus finement que le critère habituel en  $\lambda/6$  à cause des détails géométriques, comme l'interstice entre deux patches, qui ne pouvaient pas être modélisé par deux uniques éléments.



**FIGURE 6.30** – Trois vues différentes du maillage d'une cellule de périodicité. En haut, coupe d'une cellule, laissant apparaître les interfaces fictives (dessus et côtés). En bas, à gauche, vue dans le plan  $Oxz$  d'un "mushroom". En bas, à droite, vue du dessus d'un "mushroom". Les couleurs correspondent chacune à un dioptré différent (interface entre deux domaines).

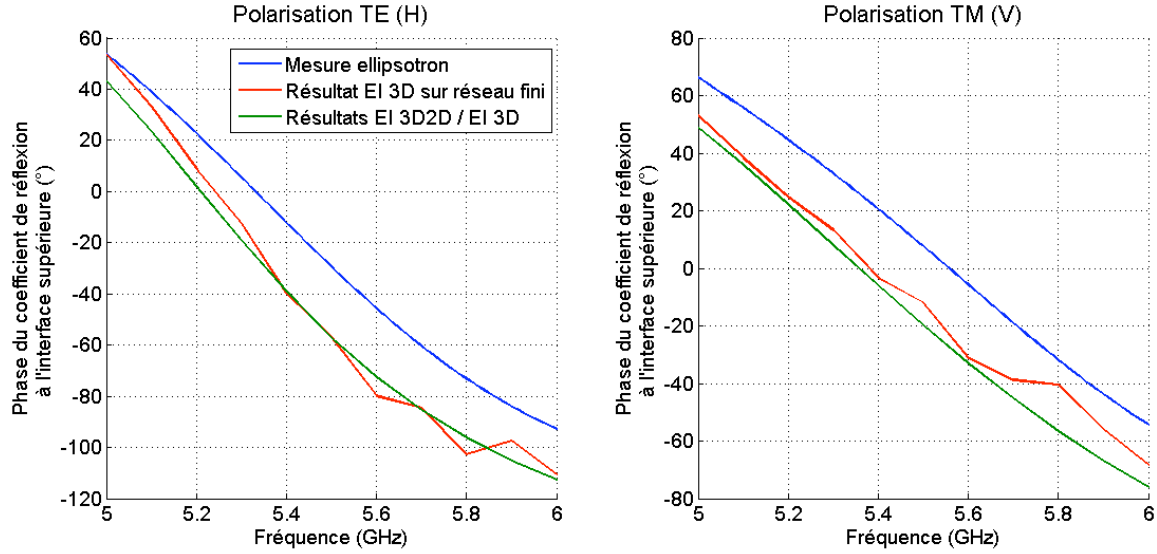
## Résultats et temps de calcul

Nous comparons, pour les deux polarisations TE et TM, les résultats de mesure sur réseau fini  $8 \times 8$  aux résultats de calculs numériques effectués à l'aide du code *Spectre*, sur réseau fini et sur réseau bipériodique infini (méthode hybride). Les courbes sont données à la figure 6.31.

Le fait que le réseau ne soit pas infini ne permet pas une excellente adéquation entre résultats de calculs et mesure. Nous pouvons néanmoins constater que l'allure des courbes est la même. La phase s'annule pour une fréquence proche de  $5,35\text{ GHz}$  en TE et de  $5,55\text{ GHz}$  en TM : c'est autour de ces fréquences que la structure est une SHI.

Le calcul bipériodique a été effectué sur un nœud de 8 processeurs IBM Power4+ à  $1,7\text{ GHz}$ . Pour deux incidences et 13 fréquences, il faut compter exactement une heure de calcul, soit  $2,3\text{ mn}$  par fréquence et incidence.

À titre de comparaison, le calcul 3D sur réseau fini a duré  $1,7\text{ h}$  par fréquence et incidence, sur un nœud de 16 processeurs IBM Power5 à  $1,9\text{ GHz}$ . Le maillage, pourtant moins dense,



**FIGURE 6.31** – *Comparaison des résultats de calcul et de mesure sur réseau fini avec le calcul EI 3D2D / EI 3D sur réseau bipériodique infini, pour les polarisation TE et TM.*

comprenait 85720 triangles pour 159620 degrés de liberté.

## 6.7 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif la validation de la précision et de l'efficacité de la méthode EI 3D2D / EI 3D. Cet objectif a été atteint comme le prouvent les différents cas présentés.

Les résultats présentés ont été comparés à des solutions analytiques sur des cas purement 1D (couche de matériau diélectrique), à des solutions analytiques approchées (réseau de sphères diélectriques), à des résultats obtenus par d'autres méthodes (algorithme des « feuillets plans à maillage structuré », méthode RCWA, méthode d'éléments finis) et enfin à des mesures.

Il a fallu comparer non seulement les efficacités de diffraction, mais également la phase des coefficients de la matrice S ; cela revient aussi à comparer parties réelle et imaginaire des coefficients de la matrice S. Lorsque cela était possible et pertinent, nous avons effectué ces comparaisons de coefficients complexes. Il a également fallu vérifier que les résultats étaient bons non seulement en incidence normale, mais aussi en incidence oblique ; non seulement pour des matériaux sans pertes, mais aussi pour des matériaux à pertes, ...

Les cas de validation ont été présentés par ordre de difficulté, de sorte que l'ordre correspond à une validation étape par étape du code. Bien entendu, nous n'avons pas repris toutes les validations que nous avons effectuées au cours de la thèse, et nous n'avons présenté que les plus significatives.

Le deuxième objectif de ce chapitre était de montrer le gain, en terme de temps de calcul, apporté par l'utilisation de la méthode EI 3D2D / EI 3D par rapport à une méthode sans interfaces fictives : nous avons présenté des cas représentatifs, où le temps de calcul était divisé par plusieurs ordres de grandeur.

Enfin, le troisième objectif était de profiter des validations nécessaires pour étudier et illustrer quelques grandes familles d'application des réseaux bipériodiques. Il existe une multitude d'autres structures très intéressantes, mais il est impossible d'être exhaustif dès que l'on aborde le sujet des métamatériaux. L'introduction du chapitre suivant (chap. 7) donne un court état de l'art sur les utilisations possibles des matériaux artificiels périodiques.

À présent, la méthode numérique développée peut être considérée comme validée ; le dernier chapitre de ce document est consacré à l'utilisation de la méthode EI 3D2D / EI 3D pour étudier et proposer des structures filtrantes en hyperfréquence. Nous en profiterons pour montrer que cette méthode s'applique même dans le cas de métaux réels, en optique, d'indices grands voire très grands.

# Chapitre 7

## Réseaux de cavités coaxiales

### Table des matières

---

|            |                                                                  |            |
|------------|------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>7.1</b> | <b>Introduction . . . . .</b>                                    | <b>120</b> |
| 7.1.1      | Matériaux artificiels périodiques . . . . .                      | 120        |
| 7.1.2      | Surfaces sélectives en fréquence, radômes passe-bande . . . . .  | 123        |
| <b>7.2</b> | <b>Réseau de cavités coaxiales cylindriques . . . . .</b>        | <b>124</b> |
| 7.2.1      | En optique . . . . .                                             | 124        |
|            | Description de la structure . . . . .                            | 125        |
|            | Modélisation de la propagation des ondes dans l'argent . . . . . | 125        |
|            | Résultats . . . . .                                              | 127        |
| 7.2.2      | Transposition aux hyperfréquences . . . . .                      | 128        |
|            | Calcul proposé . . . . .                                         | 128        |
|            | Modélisation et résultats . . . . .                              | 129        |
| 7.2.3      | Synthèse : identification des résonances . . . . .               | 130        |
|            | Résonance de réseau - Anomalie de Rayleigh . . . . .             | 130        |
|            | Modes de guide d'onde coaxial infini . . . . .                   | 131        |
|            | Placement des modes . . . . .                                    | 133        |
|            | Identification des modes . . . . .                               | 135        |
| 7.2.4      | Influence des paramètres géométriques majeurs . . . . .          | 136        |
|            | L'épaisseur du réseau . . . . .                                  | 137        |
|            | Les rayons interne et externe . . . . .                          | 140        |
|            | L'angle d'incidence . . . . .                                    | 141        |
|            | Élargissement de la largeur de bande . . . . .                   | 142        |
| <b>7.3</b> | <b>Réseaux de cavités coaxiales à profil évolutif . . . . .</b>  | <b>144</b> |
| 7.3.1      | Analogie avec les FSS planes . . . . .                           | 144        |
| 7.3.2      | Élaboration et définition de la géométrie . . . . .              | 145        |
|            | Description . . . . .                                            | 145        |
|            | Calcul . . . . .                                                 | 146        |
| 7.3.3      | Identification des modes . . . . .                               | 149        |
| 7.3.4      | Influence du rayon interne minimal . . . . .                     | 150        |
| <b>7.4</b> | <b>Réseau de cavités coaxiales obliques . . . . .</b>            | <b>152</b> |
| <b>7.5</b> | <b>Conclusion . . . . .</b>                                      | <b>154</b> |

---

## 7.1 Introduction

Les matériaux artificiels périodiques pour l'optique et l'électromagnétisme, en particulier les métamatériaux et les cristaux photoniques, font l'objet d'une littérature très abondante depuis quelques années, pour des applications très diverses. La méthode numérique que nous avons développée et validée permet de modéliser finement le comportement électromagnétique de ces matériaux.

Nous avons voulu en particulier montrer que la méthode est utilisable à la fois pour concevoir des matériaux nouveaux et aussi pour expliquer les phénomènes physiques à l'origine des propriétés particulières des matériaux étudiés.

Dans ce cadre, nous nous proposons de faire un rapide tour d'horizon des types de métamatériaux qui existent, pour finalement choisir une structure pour une application de radôme passe-bande en hyperfréquence.

### 7.1.1 Matériaux artificiels périodiques

Les métamatériaux et cristaux photoniques peuvent être classés suivant leurs fréquences de fonctionnement, leur géométrie ou leurs applications. Nous adoptons préférentiellement une classification suivant les applications des matériaux artificiels périodiques. Par ailleurs, nous ne prétendons aucunement à l'exhaustivité, mais nous voulons souligner la grande diversité des matériaux artificiels périodiques qui sont étudiés et leurs applications ; le lecteur trouvera d'excellents ouvrages ([79] par exemple) qui lui donneront plus de détails sur le sujet.

Dans l'introduction du chapitre précédent, nous avons donné la définition d'un métamatériau et d'un cristal photonique à bande interdite : on rappelle qu'un métamatériau fonctionne en régime d'homogénéisation et que le pas du réseau d'un cristal photonique est proche de sa longueur d'onde de fonctionnement.

**Matériaux antiréfléchissants et matériaux absorbants** Les matériaux antiréfléchissants sont utiles à nombreuses applications, que ce soit en optique, en infrarouge ou en hyperfréquences. Ils sont souvent constitués d'un matériau diélectrique sur lequel on grave un motif particulier (comme des pyramides, cf. [74]) censé améliorer l'adaptation d'impédance et pour que l'onde incidence passe continûment du milieu incident au matériau diélectrique qui constitue la structure.

Les matériaux artificiels absorbants peuvent être conçus suivant le même principe. Plus généralement, on crée des cavités résonantes dans un substrat absorbant, afin d'obtenir des champs localement très intenses et améliorer, de ce fait, l'absorption (cf. par exemple [15]). On peut aussi utiliser des réseaux d'inclusions résistives dans une matrice diélectrique. Les structures absorbantes peuvent servir, entre autres :

- d'antireflet pour la discrétion infrarouge et radar, où l'on peut vouloir que l'onde incidence ne soit pas réfléchi, en particulier dans les géométries donnant lieu à des réflexions multiples (entrées d'air sur avion de combat, par exemple).
- à améliorer le rendement des panneaux solaires, en emmagasinant un maximum d'énergie rayonnée par le Soleil.

**Cristaux photoniques** Les cristaux photoniques sont des structures périodiques n'utilisant généralement que des matériaux diélectriques afin de limiter les pertes. Dans de telles structures, on observe des bandes interdites : des fréquences et incidences pour lesquelles il n'existe pas de mode propagatif dans la structure.

Les principales applications des cristaux photoniques sont liées aux télécommunications, permettant notamment des fonctions de multiplexage (cf. par exemple [29]) ou de créer des guides d'onde optique avec très peu de pertes.

L'utilisation de cristaux photoniques permet aussi de miniaturiser des antennes [83].

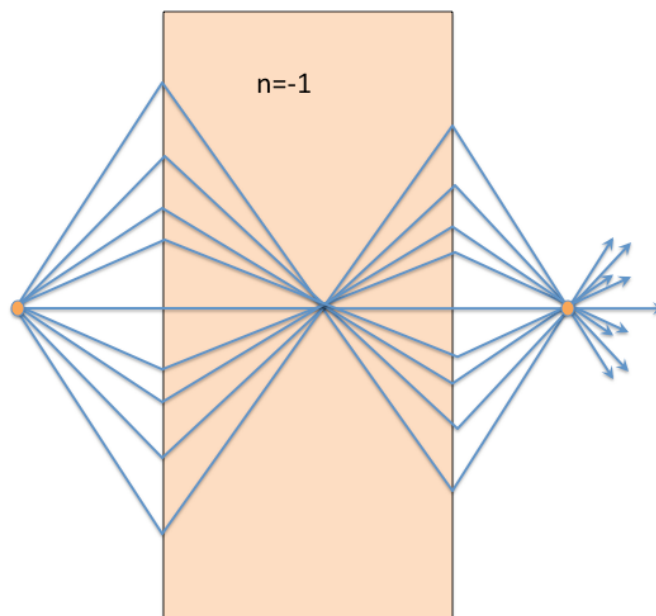
Par ailleurs, les matériaux à indice négatif ou à faible indice sont des cas particuliers de cristaux photoniques, car leur propriétés sont très localisées sur le diagramme de bande de la structure.

**Matériaux à indice négatif, lentilles parfaites** Ces matériaux sont appelés différemment suivant les communautés scientifiques qui en parlent : matériau de Veselago, matériau doublement négatif, matériau “gaucher” (*left-handed*) ou encore matériau à indice négatif. Ils font l'objet de très nombreuses publications, parmi les lesquelles [4] ou encore [26] et [35].

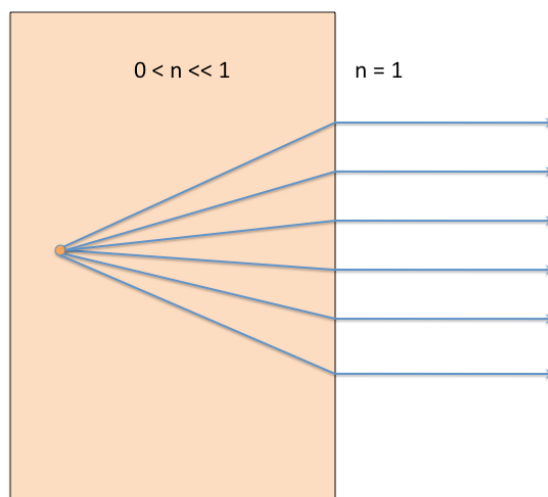
Ces matériaux à indice négatif ont suscité un grand intérêt auprès des chercheurs lorsqu'il a été proposé [61] une lentille parfaite faite d'une couche de matériau d'indice égal à  $-1$ . Si un tel matériau existe, alors il est possible d'obtenir une image parfaitement focalisée d'un point source donné, compte tenu de la seconde loi de Snell-Descartes, comme cela est schématisé à la figure 7.1.

Il a été démontré [48] qu'un tel matériau, ayant  $\varepsilon = -1$  et  $\mu = -1$ , ne peut être fabriqué. Plus récemment, ce résultat a été étendu [49] : il ne peut exister de matériau à indice négatif sans pertes et parfaitement homogène.

**Ultra-réfraction** Il existe également des matériaux dont l'indice optique est positif mais inférieur à 1. Il est montré ([32] et [27]) que de tels matériaux élargissent un faisceau incident et surtout permettent de concevoir des antennes très directives, si la source est placée dans le matériau, comme cela est illustré à la figure 7.2.



**FIGURE 7.1** – *Lentille parfaite utilisant une couche de matériau à indice négatif (ici,  $n = -1$ ).*



**FIGURE 7.2** – *Antenne directive utilisant le phénomène d'ultraréfraction.*

**Les surfaces à haute impédance** Nous avons déjà abordé ces matériaux en 6.6. Ces matériaux n'introduisent pas de phase à la réflexion et empêchent la propagation d'ondes de surface. Sur avion, ils sont utilisés en tant que substrats d'antenne, pour en réduire l'encombrement et surtout limiter les couplages entre antennes qui se font par des ondes de surface se propageant sur la peau de l'avion.

**Transmission exaltée** À la fin des années 1990, il a été mis en évidence [24] un phénomène intéressant : la transmission totale à travers un réseau de cavités cylindriques, de rayon inférieur à la longueur d'onde, dans une plaque métallique. Plus généralement, il concerne la transmission d'une onde électromagnétique à travers des ouvertures, dont une des tailles caractéristiques est inférieure à la longueur d'onde. Ce phénomène, appelé parfois "transmission extraordinaire" ou "transmission exaltée", a suscité de nombreux travaux de recherches ([30] est une revue de la littérature sur le sujet). Plusieurs interprétations du phénomène ont été avancées : étaient-elles dues aux plasmons de surface ? ou à un couplage entre les ondes évanescentes dans les cavités ? L'explication la plus probable revient à considérer qu'il y a un couplage entre les modes de cavités et les plasmons, les ondes de surface qui se propagent sur le métal (cf. [47]).

### 7.1.2 Surfaces sélectives en fréquence, radômes passe-bande

Dans la logique d'une application aéronautique de la méthode numérique que nous avons développée, nous avons choisi de nous intéresser plus particulièrement à des filtres passe-bande, utilisés comme radômes. Plusieurs caractéristiques sont particulièrement recherchées pour les radômes montés sur les aéronefs furtifs :

- Comportement identique suivant chaque polarisation.
- Indépendance à l'angle d'incidence.
- Large bande à  $-3dB$ , de l'ordre de 10%, et très forte sélectivité en dehors de la bande passante.

Traditionnellement, et pour des facilités de fabrication, on utilise des empilements de FSS (*Frequency Selective Surfaces*, surfaces sélectives en fréquence) planes. Ce sont des réseaux de feuillet métalliques plans sans épaisseurs, insérés dans un substrat diélectrique. Une très grande diversité de motifs peut être utilisée, en fonction des propriétés que l'on souhaite. Leur faible coût de fabrication dans le domaine des hyperfréquences les a rendues extrêmement populaires chez les radaristes et avionneurs (cf. [57]). Il y a encore aujourd'hui des publications présentant de nouveaux concepts de FSS, par exemple [9].

Obtenir un comportement identique pour chaque polarisation est difficile à satisfaire. Nous verrons que l'indépendance à l'angle incidence peut être satisfaite sur certaines structures bien choisies. Quant au dernier point, nous verrons que nous n'avons pas réussi à proposer une structure dont la largeur de bande ne change pas avec l'incidence. Mais nous obtenons des bandes passantes assez importantes en incidence rasante.

Les résonances de modes de cavités peuvent être utilisées pour favoriser de fortes transmissions : les *SIW* (pour *Substrate Integrated Waveguides*, guides d'onde intégrés au substrat) utilisent des cavités parallélépipédiques sur lesquelles des ouvertures bien choisies ont été aménagées, mises en réseau, pour exciter les modes de cavité à l'aide d'une onde plane incidente (cf. [42]).

Les réseaux de cavités cylindriques, telles que celles étudiées par T. Ebbesen dans [24], et qui interviennent dans la “transmission extraordinaire”, ont l’inconvénient de ne pas avoir de comportement constant en fonction de l’angle d’incidence. Les structures sur lesquelles nous avons fondé nos recherches sont des réseaux de cavités coaxiales dans une plaque métalliques. Celles-ci ont été proposées et étudiées dans [8], [82], [7] et [6]. Les structures proposées dans ces articles sont principalement utilisées dans le domaine optique et nous avons essayé de les transposer aux hyperfréquences.

Certains spécialistes des FSS, comme Ben Munk (cf. [57]) sont même sceptiques, quant à l’opportunité de développer des filtres à partir de cavités percées dans une plaque métallique. D’autres auteurs, comme T. K. Wu [86] ou Sören Poulsen [65], donnent des exemples de structures sélectives en fréquence épaisses ayant de bonnes propriétés de filtrage large-bande et d’indépendance à l’angle d’incidence.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation des réseaux de cavités coaxiales dans des plaques métalliques et des principaux phénomènes physiques qui y sont attachés, en optique et en hyperfréquences. Nous avons étudié ces structures à l’aide de la méthode numérique développée dans cette thèse.

Dans une deuxième partie, nous suggérons une évolution géométrique des cavités : passer d’un profil droit à un profil évolutif. Cette idée se voulait être la version continue des empilements de FSS planes. Nous verrons qu’elle présente des intérêts certains, en particulier celui d’augmenter la largeur de bande et d’avoir une bande de fréquences assez large pour lesquelles la transmission est quasiment totale, en polarisation TM et incidence oblique.

Dans une troisième partie, nous donnons quelques pistes qui pourraient être suivies pour proposer une surface sélective en fréquence qui serait large bande en incidence oblique et polarisation TE (H), à partir des concepts utilisés dans ce chapitre.

## 7.2 Réseau de cavités coaxiales cylindriques

### 7.2.1 En optique

L’invariance de comportement en transmission par rapport à l’angle d’incidence fait partie des principales propriétés recherchées des radômes. Cela est dû à deux raisons principales :

- les matériaux artificiels utilisés pour fabriquer le filtre sont souvent conformés à des surfaces non planes<sup>1</sup> ;
- les antennes placées sur l’avion n’émettent pas d’ondes planes mais des ondes sphériques qui attaquent le matériau filtrant avec un angle d’incidence dépendant de la position du matériau.

Dans le domaine optique, des réseaux de cavités coaxiales dans une plaque d’argent ont montré des propriétés d’invariance de l’efficacité de transmission par rapport à l’angle d’incidence [82]. Nous utilisons cette structure comme point de départ de notre démarche, dans le domaine des hyperfréquences.

---

1. Pour des raisons d’aérodynamique, il n’existe aucune surface plane à la surface d’un avion de combat.

### Description de la structure

Un réseau de cavités coaxiales cylindriques est percé dans une plaque d'argent. Les caractéristiques géométriques de la structure présentée sur la figure 7.3 sont les suivantes :

- Pas du réseau :  $T_x = 300 \text{ nm}$ ,  $T_y = 300 \text{ nm}$
- Épaisseur :  $h = 100 \text{ nm}$
- Rayon interne de la cavité coaxiale :  $R_{int} = 60 \text{ nm}$
- Rayon externe de la cavité coaxiale :  $R_{ext} = 84 \text{ nm}$

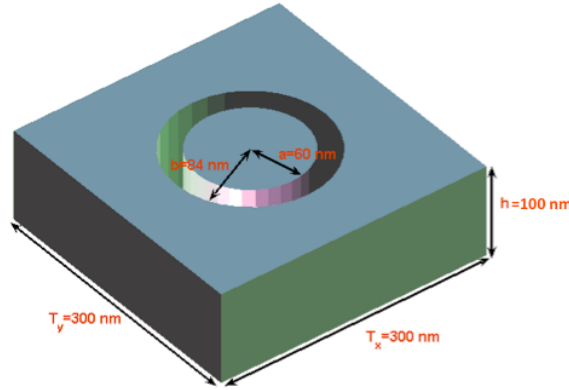


FIGURE 7.3 – Motif élémentaire du réseau de trous coaxiaux.

Le calcul est effectué pour des longueurs d'onde dans le vide allant de  $350 \text{ nm}$  à  $810 \text{ nm}$  et des incidences allant de  $0^\circ$  à  $88^\circ$  par pas de  $6^\circ$ , par rapport à l'axe  $\hat{z}$  dans le plan  $Oxz$ .

### Modélisation de la propagation des ondes dans l'argent

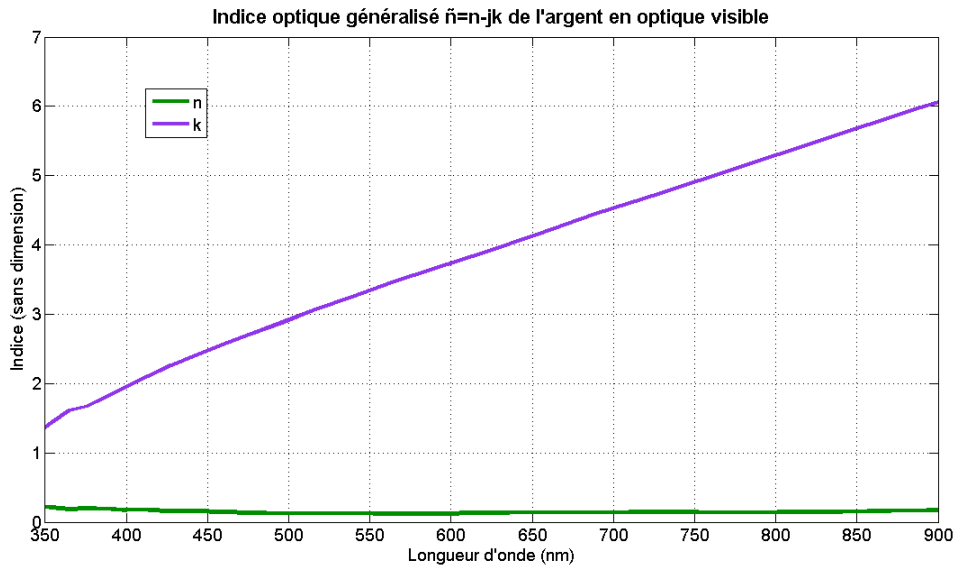


FIGURE 7.4 – Parties réelle et imaginaire de l'indice optique généralisé  $\tilde{n} = n - jk_{opt}$  de l'argent aux longueurs d'onde visibles dans le vide.

L'indice optique complexe  $\tilde{n}$  de l'argent est donné dans [60] : sa partie réelle  $n$  est inférieure

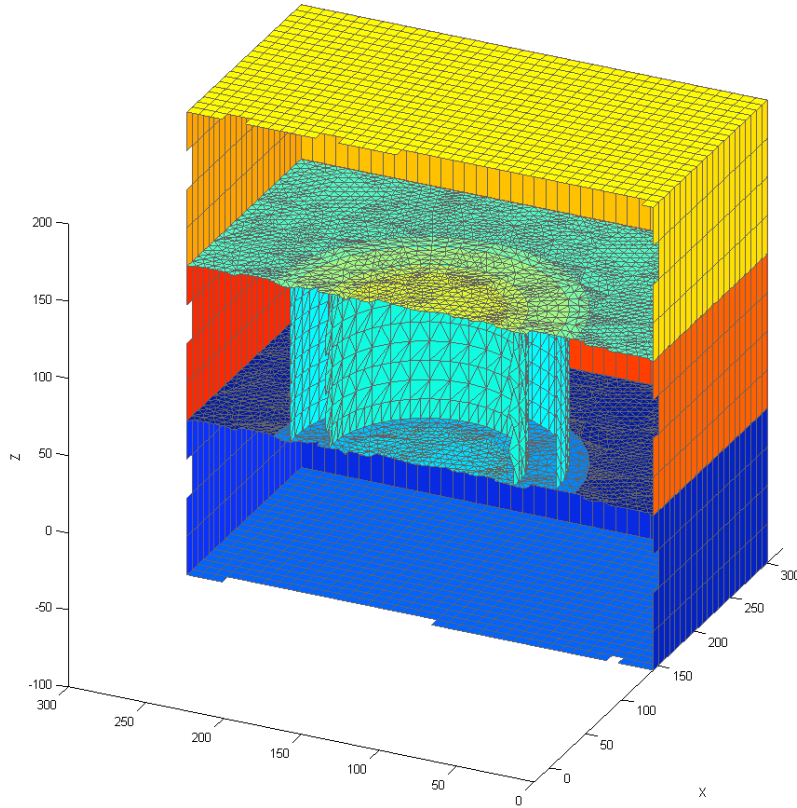
à 1 et  $k_{opt}$  n'est pas assez grand. On ne peut donc pas assimiler l'argent à un conducteur parfait dans le domaine de l'optique visible.

L'indice optique  $n$ , qui est compris entre 0,12 et 0,26 sur la plage de fréquences considérée, augmente la longueur d'onde dans l'argent : celle-ci est comprise entre  $1312\text{ nm}$  et  $5419\text{ nm}$ . Compte tenu de l'épaisseur du réseau ( $100\text{ nm}$ ), la phase varie très peu dans la couche d'argent.

En revanche, du fait des pertes dans l'argent, l'amplitude de l'onde décroît très rapidement dans le conducteur : l'épaisseur de peau  $\delta$  est la distance de propagation d'une onde dans un conducteur au bout de laquelle l'amplitude est divisée par la constante de Neper  $e$ . C'est aussi l'inverse de la partie imaginaire du nombre d'onde. On a  $\delta = \frac{c}{\omega k_{opt}}$ .

Dans le cas de l'argent, aux longueurs d'onde auxquelles on se place ici, l'épaisseur de peau prend des valeurs entre  $24\text{ nm}$  et  $48\text{ nm}$ . L'épaisseur de peau est de l'ordre de grandeur des longueurs caractéristiques de la structure étudiée : il n'est pas possible de modéliser l'argent comme un métal parfaitement conducteur à la surface duquel on impose des conditions d'impédance. Cela n'est avantageusement possible que dans les cas où l'épaisseur est négligeable devant toutes les autres longueurs caractéristiques.

La seule solution est de modéliser l'argent comme un matériau diélectrique défini par sa permittivité électrique complexe  $\varepsilon$  et sa perméabilité magnétique complexe  $\mu$ , déduites de l'indice optique généralisé et du fait que l'argent est un matériau non magnétique en optique.



**FIGURE 7.5** – Coupe dans le plan Oyz du maillage utilisé pour la modélisation du réseau de cavités coaxiales dans une plaque d'argent.

Le maillage doit être tel que ses longueurs d'arête respectent localement un critère de

convergence lié à  $\min(\delta) = 24\text{ nm}$ . Les longueurs d'arête sont données dans le tableau ci-dessous :

| Dioptre                                                             | Longueur d'arête<br>moyenne (ou minimale) | Longueur d'arête<br>maximale |
|---------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------|
| Interfaces fictives entre<br>cellules de périodicité voisines       | 7,5 nm (minimale)                         | 25 nm                        |
| Parois verticales<br>de la cavité coaxiale                          | 11,75 nm                                  | 12,5 nm                      |
| Interfaces supérieure et inférieure<br>de la structure bipériodique | 5,4 nm                                    | 7,5 nm                       |

Nous n'avons volontairement pas maillé en  $\min(\delta)/6$  sur les interfaces fictives entre cellules de périodicité voisines, considérant que l'atténuation de l'onde était suffisamment importante à la traversée de la couche. Nous n'avons pas non plus maillé très densément les parois verticales des cavités coaxiales : nous sommes à  $\min(\delta)/2$ . Nous avons maillé de façon plus dense les interfaces supérieure et inférieure du réseau car c'est là qu'ont lieu les échanges de flux d'énergie entre le milieu incident et les cavités et que se propagent les ondes de surface sur l'argent qui créent la résonance de réseau.

Le maillage utilisé est constitué de 2480 quadrangles et 4408 triangles pour 19374 degrés de liberté (9687 pour le courant électrique, 9687 pour le courant magnétique). Il est représenté en coupe à la figure 7.5.

Le calcul a été effectué sur un nœud de 16 processeurs *Intel Itanium II* à 1,6 GHz. L'assemblage de la matrice et la résolution directe ont été parallélisés. Pour 38 longueurs d'onde et 16 incidences, il a fallu 132 h de calcul, soit environ 13 mn par longueur d'onde et par incidence.

## Résultats

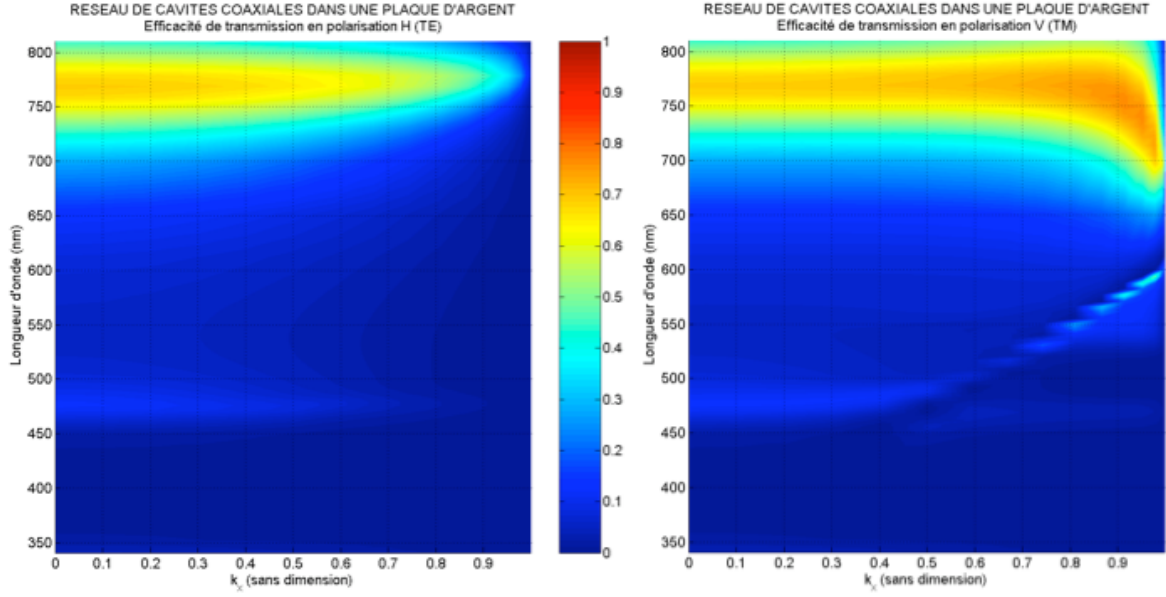
Les résultats sont présentés à la figure 7.6 et prennent la forme d'un diagramme de bande : une échelle de couleur donne le niveau de l'efficacité de transmission en fonction de l'incidence (ici, c'est  $k_x$ , composante suivant  $x$  du vecteur d'onde incident normalisé,  $k_y$  étant nul) et de la longueur d'onde incidente.

Les diagrammes présentés font apparaître un phénomène intéressant : il existe une bande de longueurs d'onde, autour de 750 nm, pour lesquelles la transmission est meilleure qu'aux autres, et la position de ce pic de transmission est quasiment indépendante de la longueur d'onde. C'est ce résultat qui a fait l'objet de la publication [82]<sup>2</sup>, et cette structure est appelée à juste titre « surface sélective en fréquence indépendante à l'angle d'incidence dans le domaine optique ».

Il y a deux remarques importantes que l'on peut faire : la stabilité à l'angle d'incidence est meilleure en polarisation verticale (TM) qu'en polarisation horizontale (TE) et l'on n'atteint jamais la transmission totale, à cause des pertes importantes dans l'argent.

Les phénomènes observés sur ce cas ont été largement discutés dans les références suivantes : [82], [8], [6] et [7]. Le pic de transmission observé est dû à l'excitation du mode  $\text{TE}_{11}$  de

2. Dans cet article, les cavités utilisées sont à section carrée, et non circulaire.



**FIGURE 7.6** – Diagramme de bande du réseau de cavités coaxiales dans une plaque d'argent, pour les polarisation TE ( $H$ ) et TM ( $V$ ).

guide coaxial à sa fréquence de coupure. En obliquité, il est également possible d'exciter le mode TEM. Dans ce cas, le fait que l'argent ne soit pas parfaitement conducteur modifie le comportement du guide d'onde coaxial, en particulier les fréquences de coupure. Nous revenons en détail sur ces phénomènes de résonance à la section 7.2.3.

### 7.2.2 Transposition aux hyperfréquences

Un matériau au comportement similaire à celui des réseaux de cavités coaxiales dans une plaque d'argent en optique serait particulièrement intéressant pour des applications de radôme.

Faute d'éléments pour comprendre le fonctionnement et le comportement de telles structures en hyperfréquences, nous avons commencé par multiplier toutes les longueurs par  $10^4$ , de façon à se placer dans le domaine des ondes millimétriques. À ces longueurs d'onde, l'argent peut être considéré comme parfaitement conducteur.

Procédant ainsi, nous ne nous attendons bien entendu pas à transposer directement le comportement de FSS de l'optique aux hyperfréquences, notamment parce qu'il n'y a plus de pénétration d'onde dans le matériau conducteur et plus aucun matériau à pertes. Ann Roberts et Ross McPhedran ont proposé [67] une théorie permettant de décrire les propriétés d'un réseau de cavités coaxiales en considérant la propagation de modes de guides d'onde coaxiaux dans les cavités.

#### Calcul proposé

Un réseau de cavités coaxiales cylindriques est percé dans une plaque de métal parfaitement conducteur. Les caractéristiques géométriques de la structure présentée sur la figure 7.3

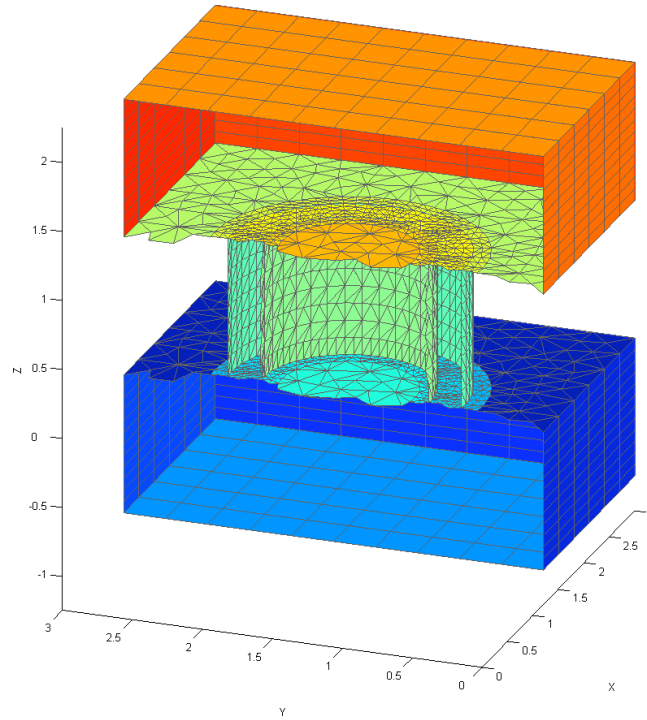
deviennent les suivantes :

- Pas du réseau :  $T_x = 3\text{ mm}$ ,  $T_y = 3\text{ mm}$
- Épaisseur :  $h = 1\text{ mm}$
- Rayon interne de la cavité coaxiale :  $R_{int} = 0,6\text{ mm}$
- Rayon externe de la cavité coaxiale :  $R_{ext} = 0,84\text{ mm}$

Cette fois, le calcul est effectué pour des longueurs d'onde de  $2,5\text{ mm}$  à  $9\text{ mm}$  dans le vide, et des incidences allant de  $0^\circ$  à  $88^\circ$  par pas de  $6^\circ$ , par rapport à l'axe  $\hat{z}$  dans le plan  $Oxz$ .

## Modélisation et résultats

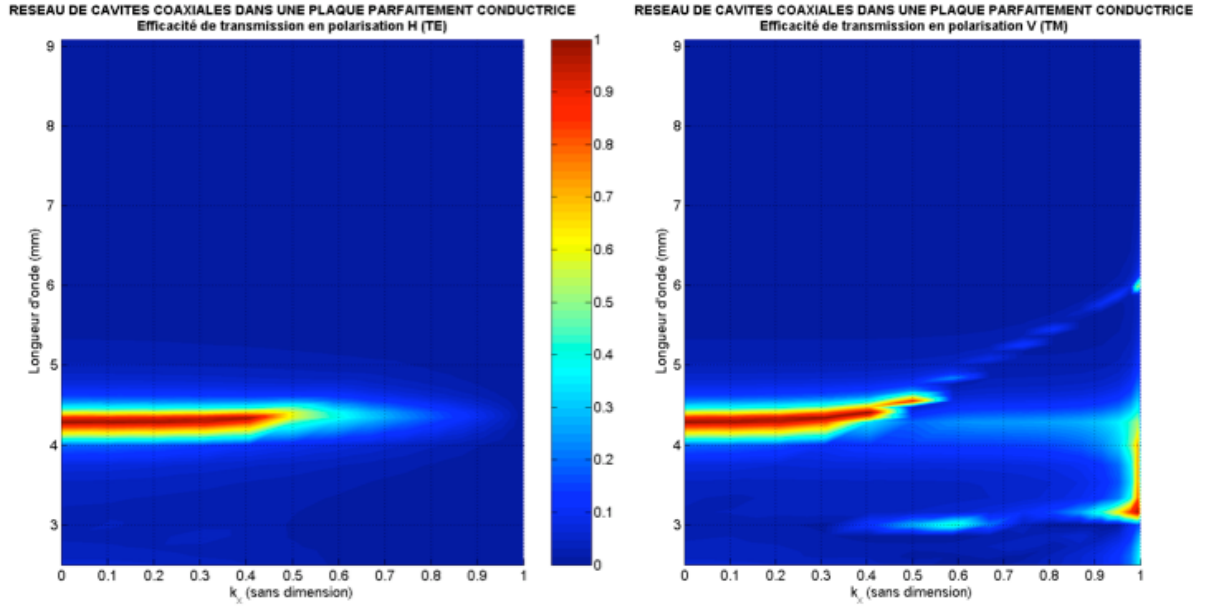
La présence du conducteur parfait permet de simplifier le maillage par rapport à celui que nous avons utilisé dans le cas optique. Il n'y a notamment plus besoin d'interfaces fictives entre cellules voisines dans le conducteur.



**FIGURE 7.7** — Coupe dans le plan  $Oyz$  du maillage utilisé pour la modélisation du réseau de cavités coaxiales dans une plaque parfaitement conductrice.

Le maillage (fig. 7.7) utilisé compte 5036 triangles et 1160 quadrangles, pour 11762 degrés de liberté (8722 pour le courant électrique et 3040 pour le courant magnétique). Sur l'ensemble du maillage, les longueurs d'arête moyenne et maximale sont respectivement de  $0,135\text{ mm}$  (soit  $\lambda_{min}/18,5$ ) et de  $0,340\text{ mm}$  (soit  $\lambda_{min}/7,3$ ) ; elles respectent le critère de convergence en longueur d'onde. Sur les bords de la cavité coaxiale, les longueurs d'arête moyenne et maximale sont respectivement de  $0,097\text{ mm}$  et de  $0,172\text{ mm}$  ; les éléments sont plus petits afin de mieux prendre en compte les variations locales des champs.

Sur les diagrammes de bande calculés (et présentés sur le figure 7.8), on constate que la bande passante du filtre est plus fine et que sa longueur d'onde centrale est réduite. En contrepartie, on atteint des niveaux de transmission proches de 1. En polarisation verticale



**FIGURE 7.8** – Diagramme de bande du réseau de cavités coaxiales dans une plaque parfaitement conductrice, pour les polarisations TE (H) et TM (V).

(TM), pour des valeurs d'incidence élevée, dans la bande passante, l'efficacité de transmission chute au croisement avec une résonance que l'on identifiera plus loin comme une anomalie de Rayleigh.

### 7.2.3 Synthèse : identification des résonances

Nous avons présenté les résultats obtenus pour deux réseaux, l'un en optique et l'autre en hyperfréquences. Les propriétés en transmission du réseau en optique sont intéressantes et nous aimerions les transposer aux hyperfréquences. Une transposition directe de la structure n'est pas envisageable : les résultats font apparaître des résonances que l'on peut interpréter, et qui font l'objet de plusieurs articles ([82], [7] et [6] par exemple).

#### Résonance de réseau - Anomalie de Rayleigh

Nous avons vu à la section 1.3.4 qu'une augmentation de la fréquence de calcul fait apparaître de plus en plus de modes propagatifs. Il se trouve qu'à la fréquence où un mode évanescent devient propagatif (lorsque le composante suivant  $z$  du vecteur d'onde du mode de réseau s'annule), un phénomène de résonance se produit, appelé « anomalie de Rayleigh ».

Sur un diagramme de bande en  $k_x$  (avec  $k_y = 0$ ) et  $\lambda$ , les anomalies de Rayleigh sont des droites. En effet, les modes d'ordre  $(p, 0)$  qui s'apprêtent à devenir propagatifs vérifient ;

$$(k_x^p)^2 = \left( k_x + \frac{p}{T_1} \lambda \right)^2 = 1 \quad (7.1)$$

$$\lambda = (\pm 1 - k_x) \frac{T_1}{p} \quad (7.2)$$

Les anomalies de Rayleigh apparaissent donc sur des droites qui dépendent uniquement de la périodicité du réseau. En fonction de la fréquence (ou longueur d'onde) de fonctionnement du filtre que l'on souhaite, il est souvent utile de choisir une périodicité du réseau qui permette de rejeter plus haut en fréquence les anomalies de Rayleigh.

### Modes de guide d'onde coaxial infini

Pour les guides d'onde coaxiaux dans un métal parfaitement conducteur de longueur infinie, on connaît par calcul analytique la structure des modes propagatifs (cf. [43]). Hormis le mode TEM, les modes de guide d'onde ne sont propagatifs qu'au-delà d'une fréquence appelée "fréquence de coupure", et pour laquelle la composante  $k_z$  du vecteur d'onde suivant l'axe de symétrie du guide est nulle.  $k_z$  augmente ensuite avec la fréquence.

Dans les filtres que nous étudions dans ce chapitre, les guides d'onde coaxiaux sont de longueur finie, et non infinie. En supposant que leur longueur est suffisante pour que puissent s'établir les modes dans la cavité, on peut espérer prédire les fréquences de coupure des modes de cavité, qui donnent lieu à une résonance.

Lorsque le mode est en régime établi, avec un  $k_z \neq 0$ , les multi-réflexions aux extrémités des cavités donnent lieu à des résonances de type Fabry-Pérot lorsque toutes les ondes réfléchies sont en phase.

**Mode TEM : résonances de Fabry-Pérot** Pour un guide d'onde coaxial parfaitement conducteur, le mode TEM n'a pas de fréquence de coupure et la composante  $k_z$  du vecteur d'onde suivant  $z$  est égale au nombre d'onde d'une onde plane dans le matériau diélectrique remplissant le guide :  $k_z = \omega/c$ . En coordonnées cylindriques, le mode a la structure suivante, illustrée à la figure 7.9 :

$$E_r = \frac{A}{r \ln \frac{b}{a}} e^{-jk_z z} \quad (7.3)$$

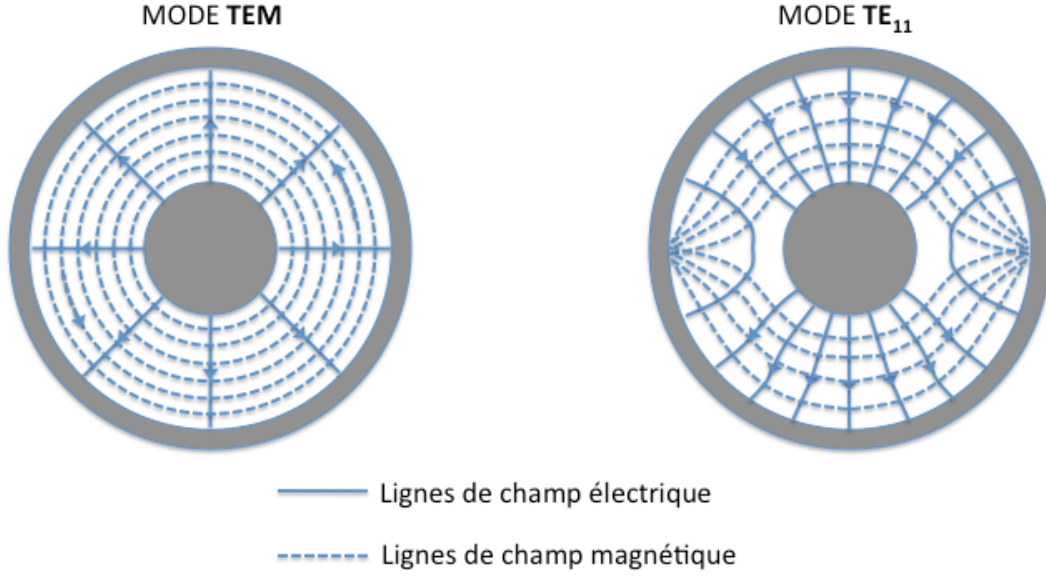
$$E_\varphi = E_z = 0 \quad (7.4)$$

$$H_\varphi = \frac{B}{2\pi r} e^{-jk_z z} \quad (7.5)$$

$$H_r = H_z = 0, \quad (7.6)$$

où  $A$  et  $B$  sont des coefficients complexes.

Le mode TEM est polarisé radialement et n'est donc pas excitable en incidence normale. F. Baida a montré dans [6] que seule une onde plane polarisée verticalement (TM), et en incidence ( $\theta \neq 0$ ), permet d'exciter le mode TEM.



**FIGURE 7.9** – Structures des modes  $TEM$  (à gauche) et  $TE_{11}$  (à droite) dans un plan orthogonal à l'axe du guide d'onde coaxial.

Le guide coaxial est de longueur finie : une partie de l'onde est réfléchiée aux extrémités de la cavité et donne lieu à des multiréflexions, à la manière d'un résonateur de Fabry-Pérot.

Lorsque toutes les ondes réfléchies sont en phase, on a un phénomène de résonance : lorsque  $k_z h = p\pi$ , où  $h$  est l'épaisseur du réseau et  $p$  un nombre entier.

Les résonances de type Fabry-Pérot dues au mode  $TEM$  ne dépendent que de l'épaisseur du réseau et ont lieu quand la longueur d'onde incidente sur le réseau vaut, en négligeant la phase du coefficient de réflexion à l'ouverture des cavités :

$$\lambda_{TEM-FP} = \frac{2h}{p}. \quad (7.7)$$

**Mode  $TE_{11}$**  Parmi les modes d'ordres plus élevés, le mode  $TE_{11}$  est celui qui a la fréquence de coupure la plus basse, ou la longueur d'onde de coupure la plus élevée.

Ce mode est polarisé linéairement et est excitable par toute onde plane incidente à une fréquence supérieure à la fréquence de coupure.

La structure de ce mode est donnée à la figure 7.9, et les formules analytiques sont disponibles dans [43]. On dispose d'une expression approchée de la longueur d'onde de coupure du mode  $TE_{11}$ .

$$\lambda_{TE_{11}}^c \simeq \pi (R_{ext} + R_{int}) \quad (7.8)$$

À la fréquence de coupure, on a  $k_z = 0$  et le mode ne transporte pas d'énergie. Quand les fréquences augmentent,  $k_z$  augmente pour atteindre en hautes fréquences  $k_z = \omega/c$ . Comme

dans le cas du mode TEM, des résonances de type Fabry-Pérot apparaissent pour  $k_z h = n\pi$ , où  $h$  est l'épaisseur du réseau.

Cette relation est notamment vérifiée pour  $k_z = 0$  et  $n = 0$ . La position de cette résonance dépend donc principalement des rayons interne et externe de la cavité coaxiale. En première approximation, l'épaisseur n'influe pas sur la position de la résonance.

Lorsque l'on se place autour de la fréquence de coupure du mode, on s'attend donc à avoir un pic de transmission, indépendant à l'angle d'incidence. Dans le cas du filtre hyperfréquences présenté en 7.2.2, la longueur d'onde de coupure théorique du mode  $TE_{11}$  en guide infini est de  $\pi \times (0,6 + 0,84) = 4,52 \text{ mm}$ . Nous voyons sur les diagrammes 7.8 que la longueur d'onde de résonance se situe autour de  $4,25 \text{ mm}$  : le décalage peut s'expliquer par le caractère fini des cavités coaxiales.

Dans le cas du filtre optique gravé dans une plaque d'argent, la longueur d'onde de résonance est bien plus élevée : l'argent n'est pas un métal parfait et la profondeur de pénétration des ondes agrandit les cavités.

Si le calcul permet de prédire avec succès la présence du pic de transmission, le phénomène physique n'est pas intuitif du tout : en effet, comment peut-on avoir 100 % de transmission alors que le mode  $TE_{11}$  ne transporte pas d'énergie à sa fréquence de coupure ?

Ce phénomène peut être compris en combinant les approches de Ph. Lalanne [40] et de N. Engheta [5].

- Ph. Lalanne donne une expression analytique de la transmission extraordinaire à travers un réseau de trous à section carrée dans une plaque métallique en optique : à partir des coefficients de réflexion et de transmission des modes de cavité et des plasmons, il écrit les équations données par les différents phénomènes de résonance et de couplage entre modes, pour prédire avec précision le diagramme de bande de la structure.
- N. Engheta décrit un phénomène contre-intuitif de transmission totale. Il place dans un guide d'onde  $G1$  de longueur infinie un autre guide d'onde  $G2$ , de longueur finie, dont il fait tendre la hauteur vers 0. À la fréquence de coupure du premier mode du guide  $G2$ , il observe une transmission totale, alors que le mode dans le guide a une constante de propagation  $k_z = 0$  ; on observe sur un guide unique un phénomène similaire à ce que nous avons sur le réseau de cavités coaxiales. L'énergie est alors transmise par couplage de modes évanescents (effet tunnel), de manière similaire à ce qui est décrit à l'équation (2.44). Par ailleurs, Nader Engheta *et al.* considèrent que ce phénomène simule un matériau d'indice optique proche de  $n = 0$  suivant l'axe  $\hat{z}$ , d'où l'appellation de matériau "ENZ" (*Epsilon Near-Zero*).

## Placement des modes

Les résonances que nous venons de décrire peuvent être placées sur un diagramme de bande  $(k_x, \lambda)$  de la structure périodique. Connaissant la période spatiale du réseau et les paramètres géométriques, on peut tracer un diagramme prédictif comme nous le faisons sur la figure 7.10.

Sur le résultat de calcul présenté à la figure 7.8, il est visible que la résonance due à l'apparition du mode  $TE_{11}$  coupe une anomalie de Rayleigh ; il en résulte un arrêt du phénomène résonant pour des incidences rasantes au-delà du croisement des résonances.

Il convient donc de choisir les paramètres de la structure de telle sorte que les résonances soient placées sur le diagramme de bande de manière à ne pas interférer entre elles.

Nous avons défini un réseau pour lequel les résonances ne se coupent pas. Pour toute la suite du chapitre, nous imposons une maille carrée de périodicité  $T_x = T_y = 8\text{ mm}$ . Afin de disposer d'une plus grande latitude dans le choix des paramètres géométriques du réseau, on choisit de remplir les cavités de Teflon, de permittivité électrique relative prise à  $\varepsilon_r = 2,5 - j10^{-3}$  et de perméabilité relative prise à  $\mu_r = 1$ , soit un indice optique d'environ  $n = 1,58$  et des pertes sont trop faibles pour être notables. L'indice élevé a pour effet d'élargir le guide d'onde : les paramètres géométriques de la cavité sont dilatés par rapport à une cavité remplie d'air.

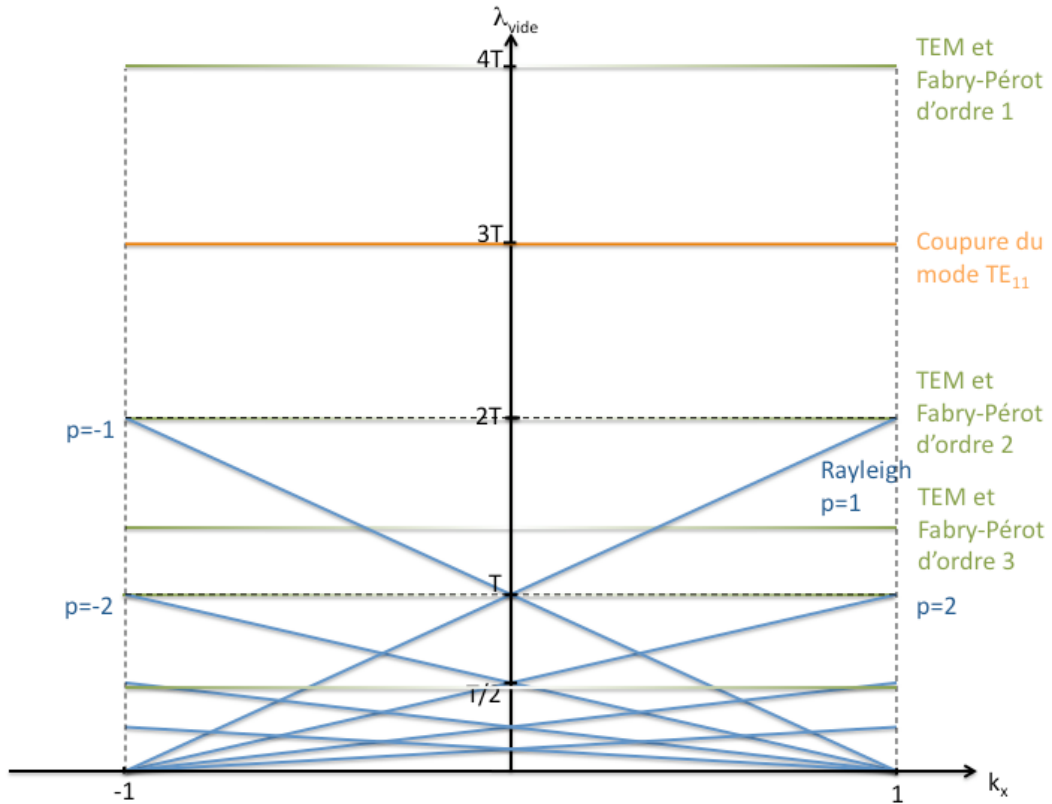
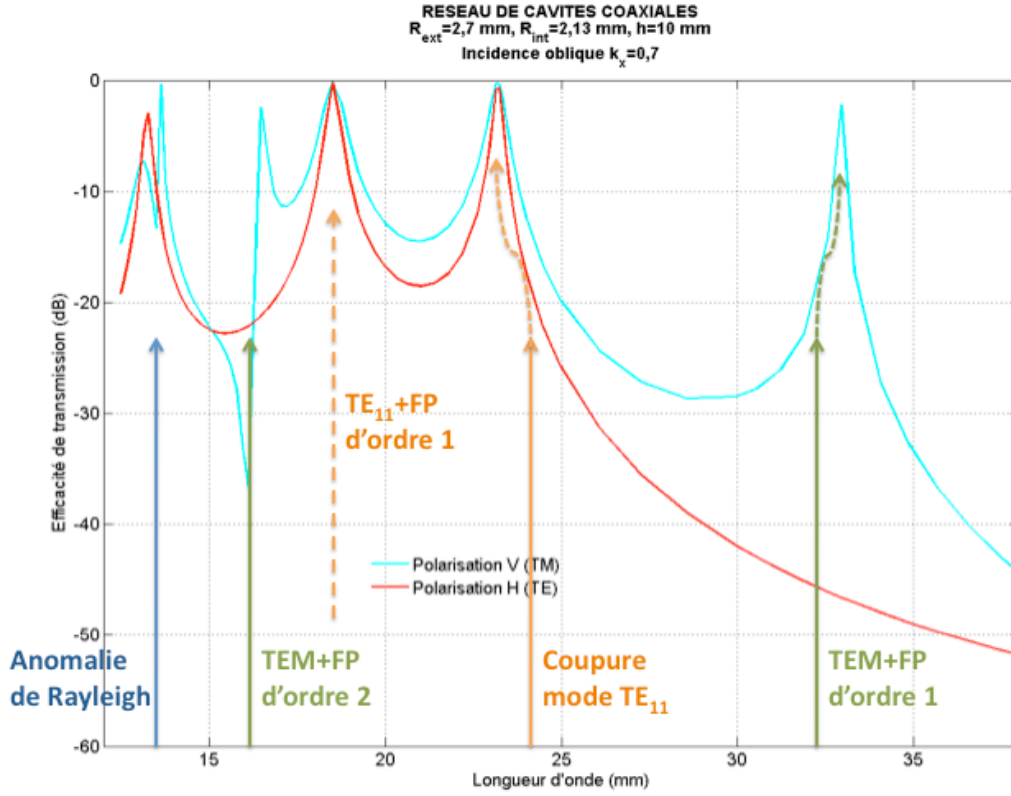


FIGURE 7.10 – Diagramme de bande pour le réseau de cavité coaxiales.

Dans ce cas, nous choisissons des rayons interne et externe de  $R_{\text{int}} = 2,13\text{ mm}$  et  $R_{\text{ext}} = 2,7\text{ mm}$  et une épaisseur de  $10\text{ mm}$ . On effectue le calcul en incidence oblique à  $k_x = 0,7$  ( $\theta \simeq 45^\circ$ ), pour des fréquences de  $7\text{ GHz}$  à  $24\text{ GHz}$ .

Le diagramme de la figure figure 7.10 montre que l'on a bien découplé les résonances de type Fabry-Pérot, d'ordres 1 à 4, dues au mode TEM de guide coaxial (en vert, mais qui n'existent qu'en polarisation TM et incidence oblique), ainsi que la résonance à la fréquence de coupure du mode  $TE_{11}$  (en orange), des anomalies de Rayleigh (en bleu). Ces longueurs d'onde de résonance ont été calculées pour une épaisseur finie en supposant que les modes dans les cavités ont les mêmes relations de dispersion que les modes théoriques dans des guides d'onde de longueur infinie. Les modes de Fabry-Pérot d'ordres, 1 ou plus, dus au mode  $TE_{11}$  de guide coaxial n'ont pas été placés.



**FIGURE 7.11** – Adéquation entre le diagramme théorique et les résonances réelles de la structure

La courbe commentée de la figure 7.11 met en évidence l'adéquation entre le diagramme théorique et les résonances réelles de la structure. Il s'agit de la courbe de l'efficacité de transmission à travers un réseau de cavités coaxiales dans une plaque parfaitement conductrice d'épaisseur  $h = 10\text{ mm}$  pour les polarisations TE (H) et TM (V). Les longueurs d'onde sont prises dans le vide. Les résonances prédites sont signalées par des flèches pleines, et les résonances observées par des flèches pointillées. On constate, sur ce cas, une bonne correspondance entre la prévision et le calcul.

### Identification des modes

Afin de valider l'implication des modes TEM et TE<sub>11</sub> dans les résonances, il convient d'examiner les variations de densité de charge ( $\vec{E} \cdot \vec{n}$ ) et de champ magnétique dans les cavités coaxiales. Nous effectuons ces vérifications aux fréquences de  $9,1\text{ GHz}$  et  $12,925\text{ GHz}$ .

Pour la résonance de type Fabry-Pérot d'ordre 1 due au mode TEM, les champs sont invariants lorsque l'on tourne autour de l'axe  $\vec{z}$ . Le champ électrique s'annule sur le plan  $z = 0$  (plan médian du réseau), et le champ magnétique est maximal : c'est une conséquence de la résonance de Fabry-Pérot d'ordre 1. La figure 7.12 donne la partie réelle de la densité de charge ( $\vec{E} \cdot \vec{n} = E_x n_x + E_y n_y$ ) et du champ magnétique tangent ( $J_z = H_x n_y - H_y n_x = H_\theta$ ) sur les parois de la cavité coaxiale (les normales s'éloignent de l'axe de la cavité).

Pour la résonance qui a lieu à la coupure du mode TE<sub>11</sub> de guide coaxial, les champs sont quasiment invariants en  $z$ . Les variations des champs correspondent à la structure du mode

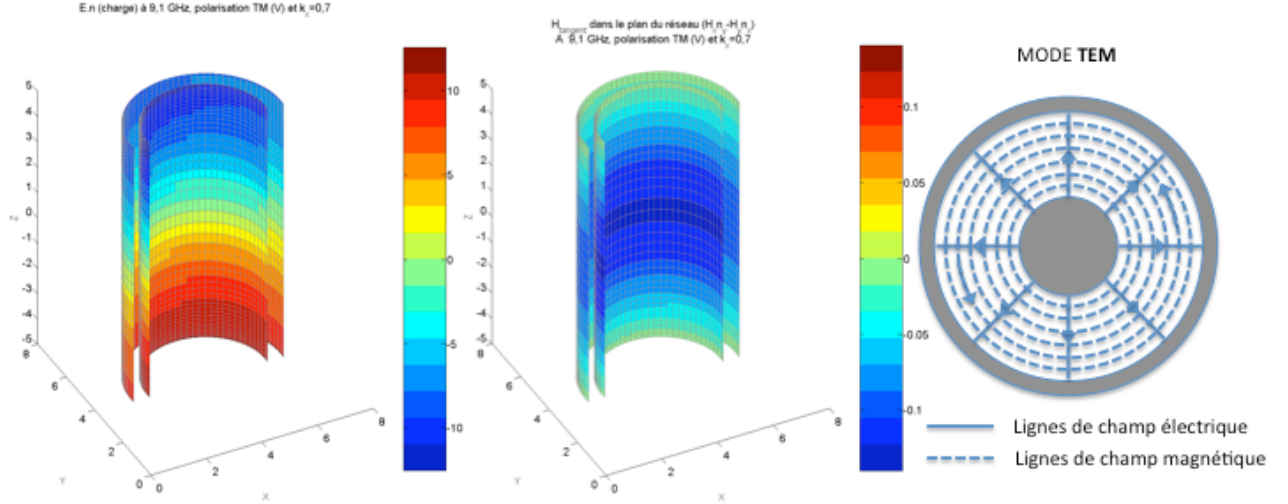


FIGURE 7.12 – Résonance de type Fabry-Pérot d'ordre 1 due au mode TEM.

$TE_{11}$  rappelée sur la droite de la figure 7.13. La figure 7.13 donne la partie réelle de la charge ( $\vec{E} \cdot \vec{n} = E_x n_x + E_y n_y$ ) et du champ magnétique tangent ( $J_z = H_x n_y - H_y n_x$ ) sur les parois de la cavité coaxiale (les normales s'éloignent de l'axe de la cavité).

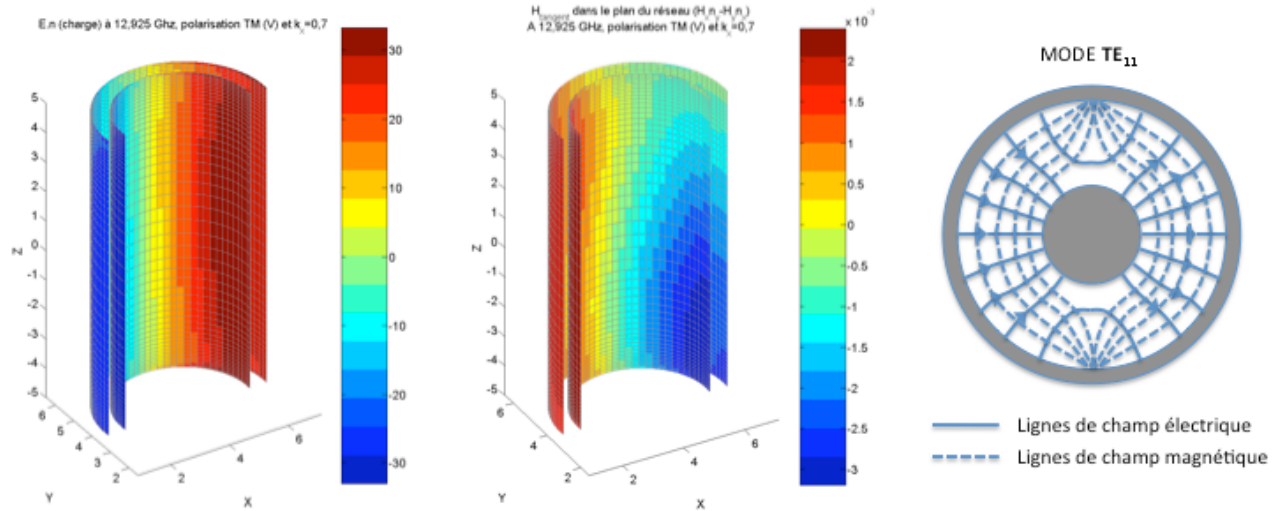


FIGURE 7.13 – Résonance à la coupure du mode  $TE_{11}$ .

Nous avons prouvé que les modes TEM et  $TE_{11}$  interviennent dans les propriétés du réseau de cavités coaxiales dans une plaque parfaitement conductrice. Ces résonances apparaissent à des fréquences que l'on peut estimer à partir des calculs analytiques sur un guide de longueur infinie.

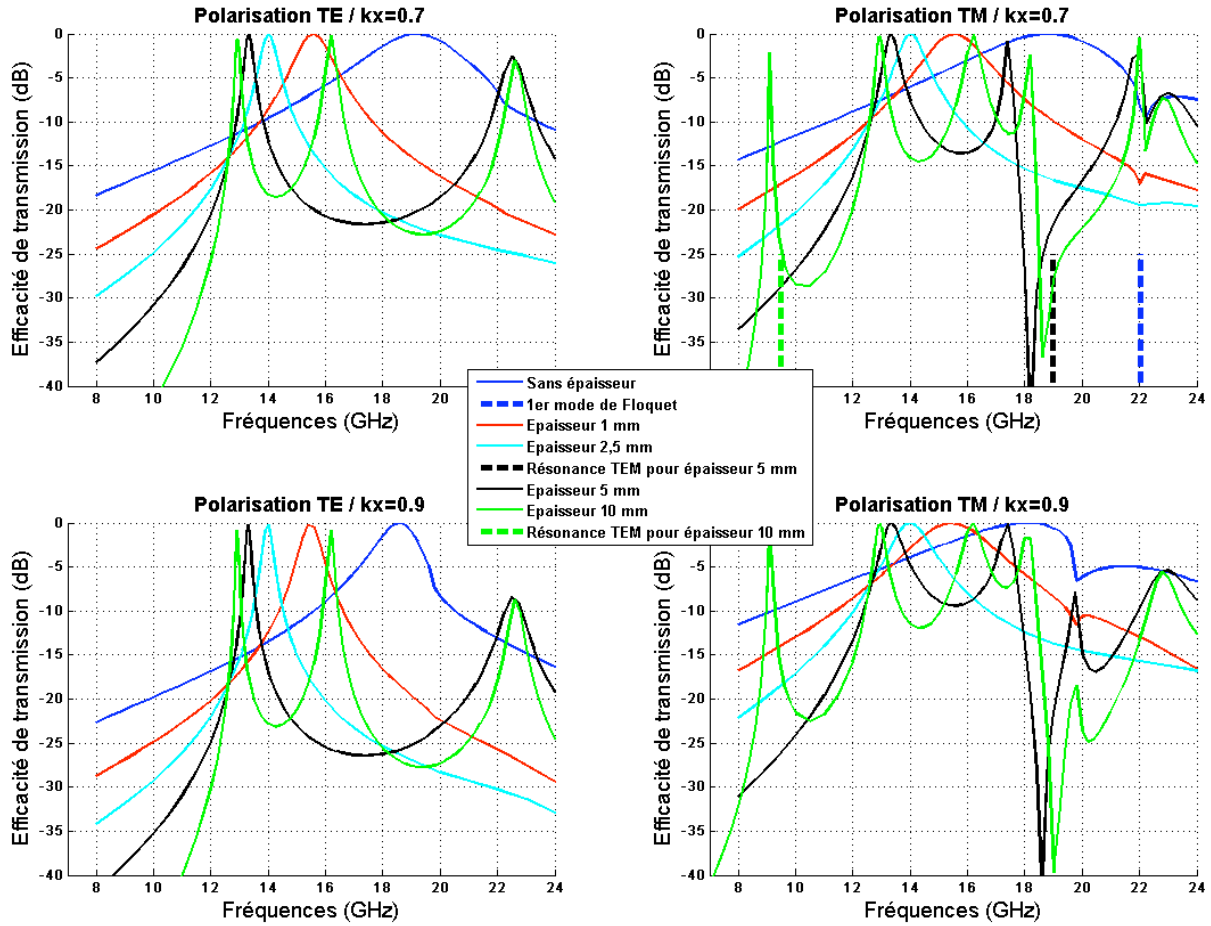
#### 7.2.4 Influence des paramètres géométriques majeurs

Nous devons continuer l'analyse des phénomènes physiques qui sont liés aux résonances du réseau : décalage des fréquences de résonance par rapport à la prédiction, évolution des

largeurs de bande en fonction des rayons interne et externe, de l'épaisseur du réseau et de l'angle d'incidence.

### L'épaisseur du réseau

On impose ici des rayons interne et externe de  $R_{int} = 2,13 \text{ mm}$  et  $R_{ext} = 2,7 \text{ mm}$  et on calcule les coefficients de transmission en polarisation TE (H) et TM (V), en incidence normale et en incidence oblique à  $k_x = 0,7$  et  $k_x = 0,9$ , pour  $k_y = 0$ . Les épaisseurs de réseau  $h$  choisies sont de  $1 \text{ mm}$ ,  $2,5 \text{ mm}$ ,  $5 \text{ mm}$  et  $10 \text{ mm}$ . Les résultats sont présentés sur la figure 7.14. Un calcul supplémentaire, sur un réseau métallique sans épaisseur, plongé dans un substrat de Teflon de  $0,2 \text{ mm}$  d'épaisseur, a été effectué. Ce cas est trop différent des autres pour que l'examen des fréquences de résonance et des largeurs de bande soit pertinent.

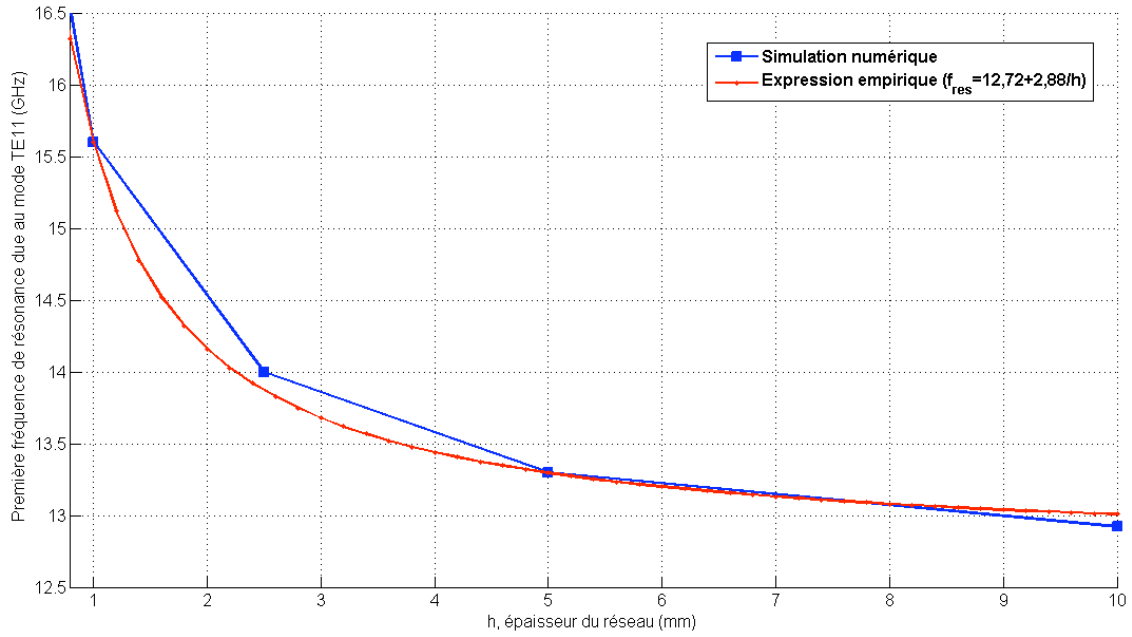


**FIGURE 7.14** – Comparaison des efficacités de transmission pour des réseaux de cavités coaxiales à parois droites, en fonction de l'épaisseur de la structure, pour deux incidences ( $k_x = 0,7$  et  $k_x = 0,9$ ) et les polarisations TE (H) et TM (V).

Modifier l'épaisseur du réseau agit beaucoup sur la position de la première résonance de type Fabry-Pérot due à au mode TEM. En revanche, ce n'est pas censé modifier la fréquence de coupure du mode  $TE_{11}$  de guide d'onde coaxial. Nous verrons néanmoins que la fréquence

de résonance et la largeur de bande varient en fonction de l'épaisseur de la structure, et que cette variation est explicable en tenant compte des pertes radiatives.

**Première résonance due au mode  $TE_{11}$**  Les valeurs calculées numériquement des fréquences de résonance et des largeurs de bande sont tracées en fonction de l'épaisseur du réseau. Les graphes sont présentés aux figures 7.15 et 7.16.



**FIGURE 7.15** – Evolution de la fréquence de résonance due au mode  $TE_{11}$  de guide coaxial et comparaison à l'expression empirique.

L'allure de ces courbes permet de conjecturer une expression empirique de la première fréquence de résonance due au mode  $TE_{11}$  et de largeur de bande de la résonance :

$$f_{TE_{11}} = 12,72 + \frac{2,88}{h} \quad (7.9)$$

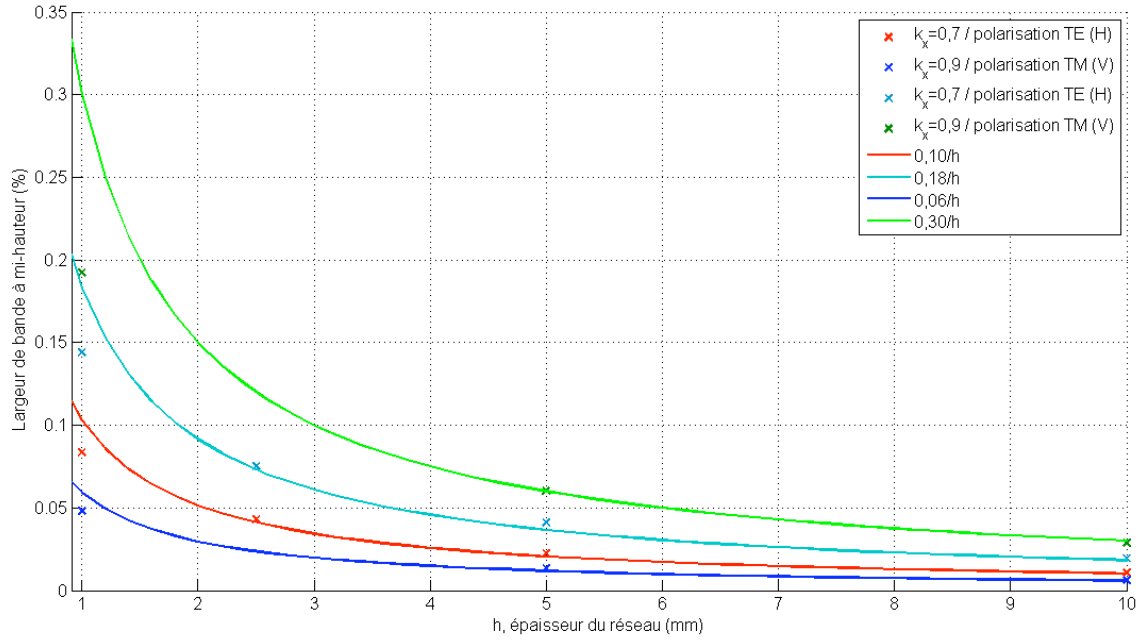
$$\frac{\Delta f}{f_{res}} = \frac{\alpha}{h}, \quad (7.10)$$

où  $\alpha$  dépend de la polarisation et de l'angle d'incidence.

Le facteur de qualité de la résonance peut être défini comme l'inverse de la largeur de bande à mi-hauteur de la résonance :

$$Q = \frac{\omega_{res}}{\Delta\omega} = \frac{f_{res}}{\Delta f}, \quad (7.11)$$

Le dépendance linéaire en  $h$  du facteur de qualité peut se retrouver par un raisonnement qualitatif.



**FIGURE 7.16** – Evolution de la largeur de bande de la résonance due au mode  $TE_{11}$  de guide coaxial et comparaison à l'expression empirique, pour deux incidences différentes ( $k_x = 0,7$  et  $k_x = 0,9$ ) et deux polarisations (TE et TM).

Le facteur de qualité peut également être défini comme le rapport de l'énergie totale stockée par le mode dans la cavité, par les pertes radiatives par radian (cf. [75]) :

$$Q = \frac{w_{cav}}{P_{rad}/\omega} \quad (7.12)$$

En faisant l'approximation que l'énergie électromagnétique par unité de volume  $\mathcal{E}$  est uniforme dans la cavité de volume  $V$ , alors on peut écrire :  $w_{cav} = \mathcal{E}V$ .

Nous avons un guide d'onde dans un métal parfaitement conducteur ; les pertes se limitent à des pertes radiatives. En faisant l'hypothèse que le flux rayonné est proportionnel à la surface  $S$ , on obtient :  $P_{rad}/\omega = \mathcal{P}S$ .

Le facteur de qualité  $Q$  dépend donc linéairement de l'épaisseur du réseau :

$$Q = \frac{\mathcal{E}V}{\mathcal{P}S} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{P}}h, \quad (7.13)$$

ce qui explique la dépendance en  $1/h$  de la largeur de bande à mi-hauteur.

Les pertes radiatives expliquent aussi l'expression de la fréquence de résonance comme fonction affine de l'inverse de l'épaisseur du réseau. L'ajout de pertes à un système sans pertes résonant à la pulsation  $\omega_0$  donne une largeur de bande non nulle et décale également la fréquence de résonance, d'un facteur dépendant linéairement des pertes. Puisque les pertes sont inversement proportionnelles à l'épaisseur  $h$ , on comprend le décalage en  $\frac{\alpha}{h}$  de la fréquence de résonance. Le coefficient  $\alpha$  dépend de l'angle d'incidence et de la polarisation.

**Résonance de type Fabry-Pérot d'ordre 1 due au mode TEM** Compte-tenu des épaisseurs que nous avons testées, l'effet principal que l'on observe sur la variation de la fréquence de résonance due au mode TEM est inversement proportionnel à l'épaisseur du réseau. La modification du comportement est due au caractère fini des cavités coaxiales.

D'après l'équation (7.7), on peut prédire les fréquences de résonance dues au mode TEM de guide coaxial :

$$f_{TEM-FP} = \frac{c}{2h n_{Teflon}}, \quad (7.14)$$

où  $n_{Teflon}$  est l'indice de réfraction du Teflon aux longueurs d'onde considérées ( $n_{Teflon} = 1,58$ ).

Ces fréquences de résonances correspondent au cas où les modes de guide d'onde observés sont ceux d'un guide infini, dans un réseau d'épaisseur finie, sans modification de la phase à la réflexion sur les ouvertures des cavités. On peut néanmoins les comparer aux fréquences de résonance observées, quand elles se situent dans la plage de fréquences que nous avons calculées, dans la table suivante :

| Épaisseur du réseau | $f_{TEM-FP}$ théorique | $f_{TEM-FP}$ observée  |
|---------------------|------------------------|------------------------|
| 1 mm                | 94,9 GHz               | /                      |
| 2,5 mm              | 37,9 GHz               | /                      |
| 5 mm                | 19 GHz                 | 17,5 GHz (8% plus bas) |
| 10 mm               | 9,5 GHz                | 9,1 GHz (5% plus bas)  |

Pour les épaisseurs de 5 mm et 10 mm, les fréquences de résonance théoriques et observées sont du même ordre de grandeur ; les fréquences de résonances observées étant légèrement plus basses. Ce phénomène est cohérent, car la constante de propagation du mode TEM dans un guide de longueur finie est nécessairement inférieure à celle du mode TEM dans un guide de longueur infinie ( $k_z = \omega/c$ ).

### Les rayons interne et externe

Au paragraphe précédent, nous avons étudié l'effet de l'épaisseur du réseau sur les résonances : nous modifions le volume des cavités, pour des interfaces avec les domaines semi-infinis de surface constante.

En modifiant les rayons interne et externe des cavités, on modifie à la fois le volume de la cavité et la surface des interfaces d'échange avec les domaines semi-infinis, mais on ne modifie pas le rapport  $V/S = h$ . La résonance qui est modifiée en premier lieu est celle qui est due à au mode  $TE_{11}$ . La résonance due au mode TEM dépend toutefois aussi de ces rayons, puisqu'ils peuvent d'augmenter ou diminuer les pertes radiatives.

Nous n'avons pas eu le temps d'effectuer des calculs détaillés. Nous pouvons néanmoins vérifier que le même type de raisonnement s'applique.

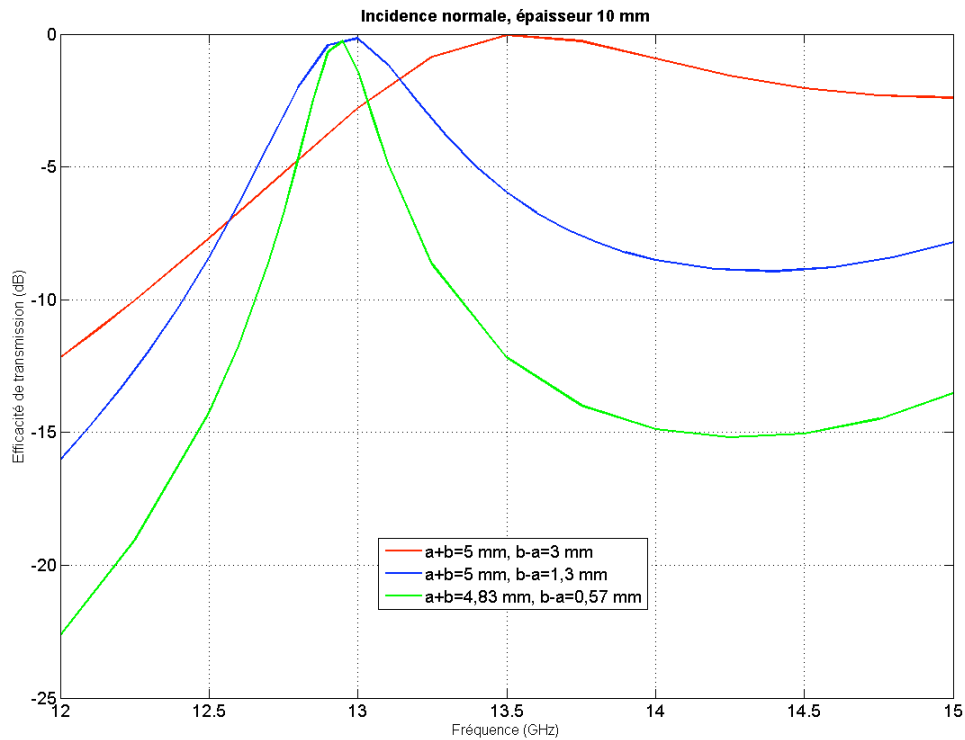
L'équation (7.8) donne la longueur d'onde de coupure du mode  $TE_{11}$  dans un guide d'onde de longueur infinie. Comme nous raisonnons en terme de fréquences, cela donne une fré-

quence de résonance à :

$$f_{TE_{11}} \simeq \frac{c}{\pi n_{Teflon} (R_{int} + R_{ext})}. \quad (7.15)$$

On a vu que les pertes radiatives augmentaient la fréquence de résonance et la bande passante de la structure. Cependant, en travaillant à  $R_{ext} + R_{int}$  constant, et en augmentant la largeur des cavités coaxiales ( $R_{ext} - R_{int}$ ), on ne modifie pas le rapport de la surface des ouvertures par le volume des cavité, qui est de  $1/h$ . On conjecture néanmoins que l'augmentation de la surface de l'ouverture sur les domaines semi-infinis augmente les pertes radiatives, et donc la fréquence de résonance due au mode  $TE_{11}$  et sa bande passante.

La figure 7.17 donne, pour trois couples de rayons ( $R_{int}, R_{ext}$ ) tels que  $R_{ext} + R_{int} \simeq 5 \text{ mm}$ , les efficacités de transmission en incidence normale. Le comportement en fréquence attendu est confirmé : plus la cavité est ouverte sur l'extérieur, plus les pertes sont importantes. Fréquence de résonance et largeur de bande sont augmentées.



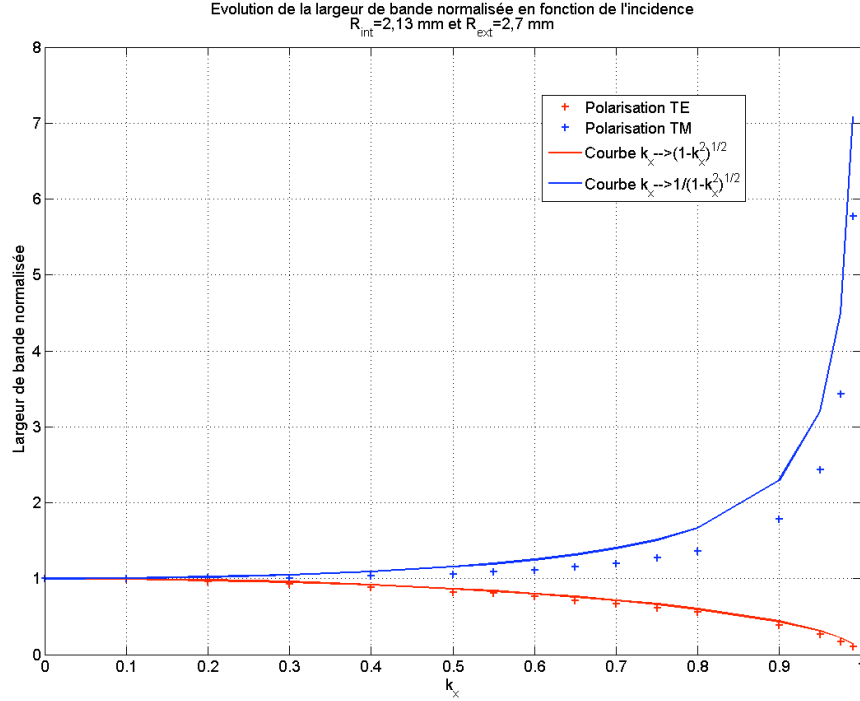
**FIGURE 7.17** – Evolution de la largeur de bande de la résonance due au mode  $TE_{11}$  de guide coaxial en fonction de l'ouverture des cavités.

Pour la résonance due au mode TEM, on peut supposer que le même raisonnement s'applique, mais il faudrait davantage de résultats pour le vérifier.

### L'angle d'incidence

Sur les FSS, lorsque l'angle d'incidence augmente, on observe généralement un phénomène de rétrécissement de la bande passante en polarisation TE (on parle de “pincement”) et d'élargissement en polarisation TM (on parle “d'évasement”).

Sur les réseaux de cavités coaxiales que nous étudions ici, on observe également un rétrécissement de la bande passante en polarisation TE et un élargissement en polarisation TM. La figure 7.18 donne l'évolution de la largeur de bande à mi-hauteur, normalisée par rapport à l'incidence normale, en fonction de l'incidence ( $k_x$ ), à  $k_y = 0$ . Sur cette figure, nous avons également tracé les courbes  $k_x \mapsto \sqrt{1 - k_x^2}$  et  $k_x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - k_x^2}}$  qui semblent être une bonne approximation de l'évolution de la largeur de bande.



**FIGURE 7.18** — Evolution de la largeur de bande de la résonance due au mode  $TE_{11}$  de guide coaxial en fonction de l'incidence. La largeur de bande est normalisée par rapport à l'incidence normale :  $\frac{\Delta f(k_x)}{\Delta f(k_x=0)}$ . Les courbes  $k_x \mapsto \sqrt{1 - k_x^2}$  et  $k_x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - k_x^2}}$  ont également été tracées.

### Élargissement de la largeur de bande

L'objectif de ce chapitre est de proposer une structure dont la bande passante est la plus large possible. S'il est possible de bénéficier, en incidence oblique, des efficacités de transmission importantes dues aux deux types de résonances dues aux modes TEM et  $TE_{11}$ , on peut espérer élargir la bande passante.

Pour ce faire, nous avons tenté d'exciter les deux premières résonances à la même fréquence, en jouant sur le paramètre géométrique qu'est l'épaisseur. D'après l'équation (7.7) et l'expression empirique (7.9), l'épaisseur à tester est  $h = 7,23 \text{ mm}$ , pour une résonance à  $13,1 \text{ GHz}$ .

Les figures 7.19 et 7.20 donnent les efficacités de transmission pour deux incidences ( $k_x = 0,7$  et  $k_x = 0,9$ ) pour les polarisations TE et TM. Comme l'on pouvait s'y attendre, la résonance due au mode TEM a lieu avant la résonance due au mode  $TE_{11}$ . En incidence

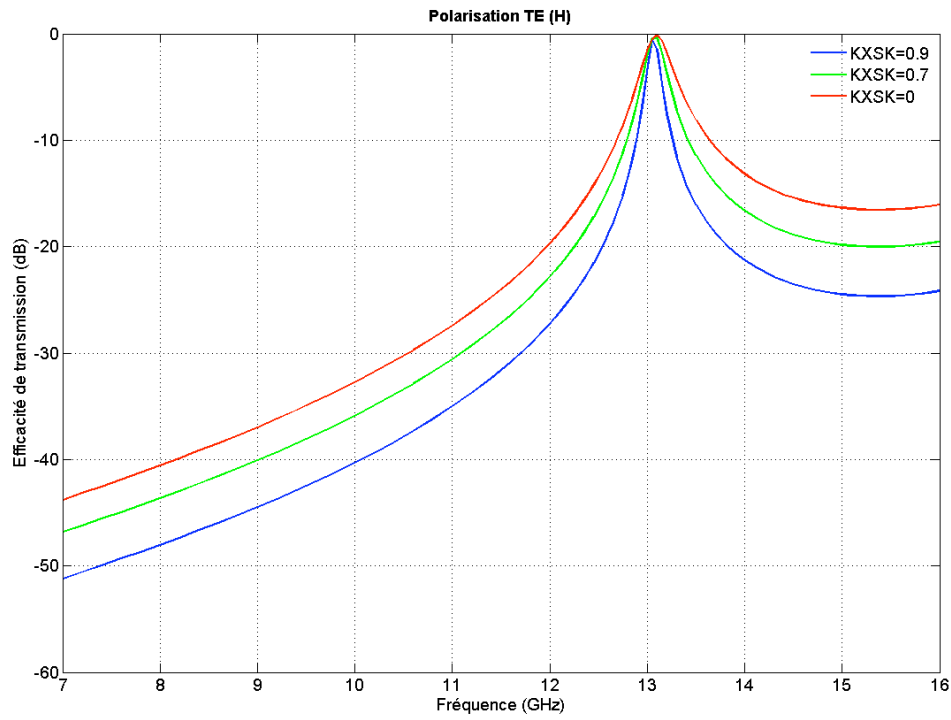


FIGURE 7.19 – Efficacité de transmission en incidence oblique ( $k_x = 0,7$  et  $k_x = 0,9$ ) en polarisation TE (H) pour le réseau de cavités coaxiales dans une plaque parfaitement conductrice d'épaisseur 7,23 mm.

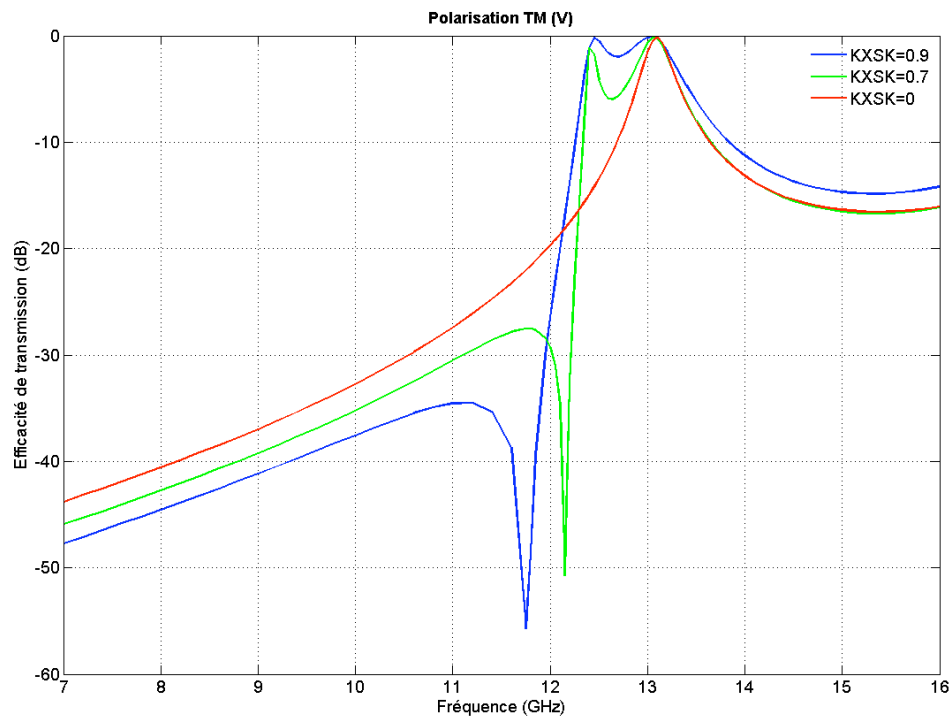


FIGURE 7.20 – Efficacité de transmission en incidence oblique ( $k_x = 0,7$  et  $k_x = 0,9$ ) en polarisation TM (V) pour le réseau de cavités coaxiales dans une plaque parfaitement conductrice d'épaisseur 7,23 mm.

rasante, la bande passante apparaît élargie ; est-ce dû à une superposition des modes dans la structure où à l'apparition de modes couplés ?

Pour répondre à cette question, il faut tracer les courbes des fréquences de résonance pour les modes TEM et  $TE_{11}$  en fonction de l'épaisseur et vérifier si ces évolutions sont perturbées (et non plus des fonctions affines de l'épaisseur) lorsque les fréquences de résonance sont proches.

*A posteriori*, ces courbes permettent de corroborer les expressions empiriques que nous avons données aux figures 7.15 et 7.16. La fréquence de résonance due au mode  $TE_{11}$  est de  $13,1\text{ GHz}$ , et celle due au mode TEM est d'environ  $12,45\text{ GHz}$ , soit inférieure de 5% à la valeur "théorique".

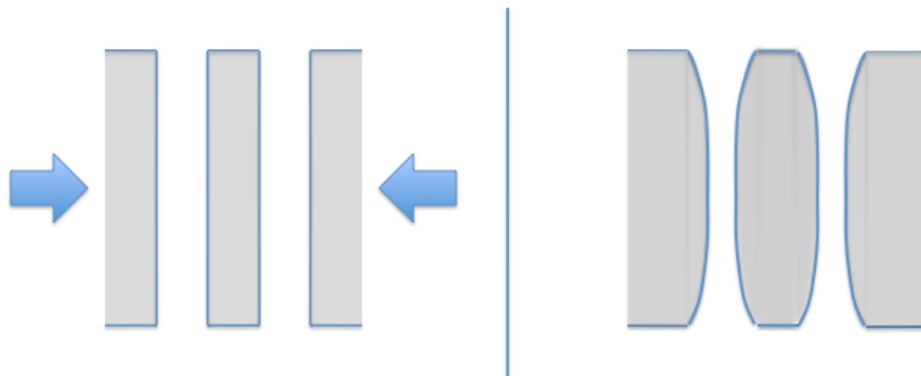
## 7.3 Réseaux de cavités coaxiales à profil évolutif

### 7.3.1 Analogie avec les FSS planes

Si l'on souhaite réaliser un radôme large bande, très sélectif en dehors de la bande passante, à partir de FSS planes, il est souvent recommandé d'empiler plusieurs FSS, en plaçant la plus sélective au centre de l'empilement.

Nous avons vu que l'on pouvait modifier la sélectivité (bande passante plus étroite) des réseaux de cavités coaxiales à profil droit dans une plaque parfaitement conductrice en jouant sur les rayons interne et externe : une fente plus fine ( $R_{ext} - R_{int}$  petit) donne une forte sélectivité, tandis qu'une fente large donne une très large bande passante, mais aussi des niveaux de transmission assez élevés en dehors de la bande.

Nous avons pensé qu'un parallèle était possible entre les empilements de FSS planes et les réseaux de cavités coaxiales : les premiers ayant un profil discret, et les seconds un profil continu. Ainsi, on pourrait voir les réseaux de cavités coaxiales comme un empilement de réseaux de cavités coaxiales droites de différents profils. Et dans ce cadre, nous avons émis l'hypothèse que l'on pouvait améliorer les propriétés de filtrage des réseaux de cavités coaxiales en proposant un profil évolutif, où la fente serait plus étroite au niveau du plan médian de la structure périodique, comme illustré à la figure 7.21.



**FIGURE 7.21** – Des cavités coaxiales à profil droit (à gauche) aux cavités coaxiales à profil évolutif (à droite).

### 7.3.2 Élaboration et définition de la géométrie

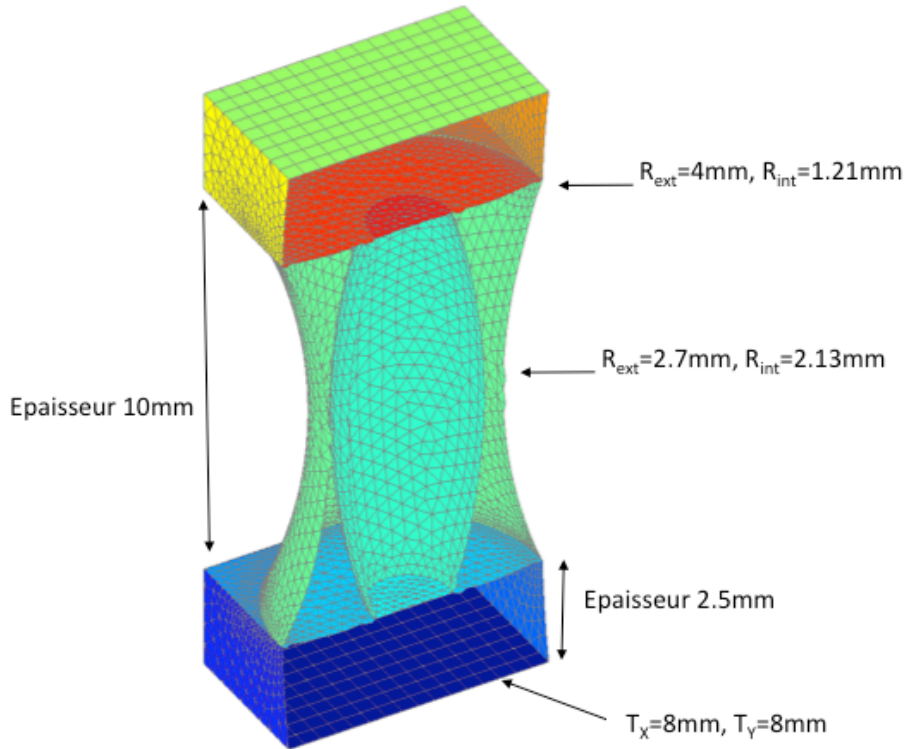
#### Description

Nous avons voulu tester une structure dont le profil ressemble à ce qui est présenté à la figure 7.21. Il faut pour cela définir des rayons internes et externes minimaux et maximaux, et décider comment l'on fait évoluer le profil des cavités suivant la coordonnée  $z$ .

Nous avons choisi d'emblée d'imposer une épaisseur de  $10\text{ mm}$  et des rayons interne et externe au milieu de la structure de  $R_{ext,min} = 2,7\text{ mm}$  et  $R_{int,max} = 2,13\text{ mm}$ . Sur un réseau de cavités coaxiales à profil droit d'épaisseur  $10\text{ mm}$ , cela donne une résonance due au mode  $TE_{11}$  à  $12,95\text{ GHz}$ .

Les rayons interne  $R_{int,min}$  et externe  $R_{ext,max}$  aux interfaces avec les domaines semi-infinis sont déterminés de sorte à ce qu'un réseau de cavités coaxiales à profil droit avec ces rayons ait une résonance due au mode  $TE_{11}$  à environ  $12,95\text{ GHz}$ . Comme nous n'avons pu établir de loi fiable entre cette fréquence de résonance et les rayons internes et externes, nous avons effectué plusieurs calculs sur des structures proches, en faisant varier les paramètres : nous proposons alors de prendre  $R_{int,min} = 1,21\text{ mm}$  et  $R_{ext,max} = 4\text{ mm}$ . L'évolution des rayons en fonction de  $z$  se fait suivant une équation de cercle.

La figure 7.22 résume les paramètres géométriques choisis.



**FIGURE 7.22** – Paramètres géométriques des cavités à profil évolutif. Elles sont remplies de Teflon et les profils des rayons interne et externe sont des arcs de cercle.

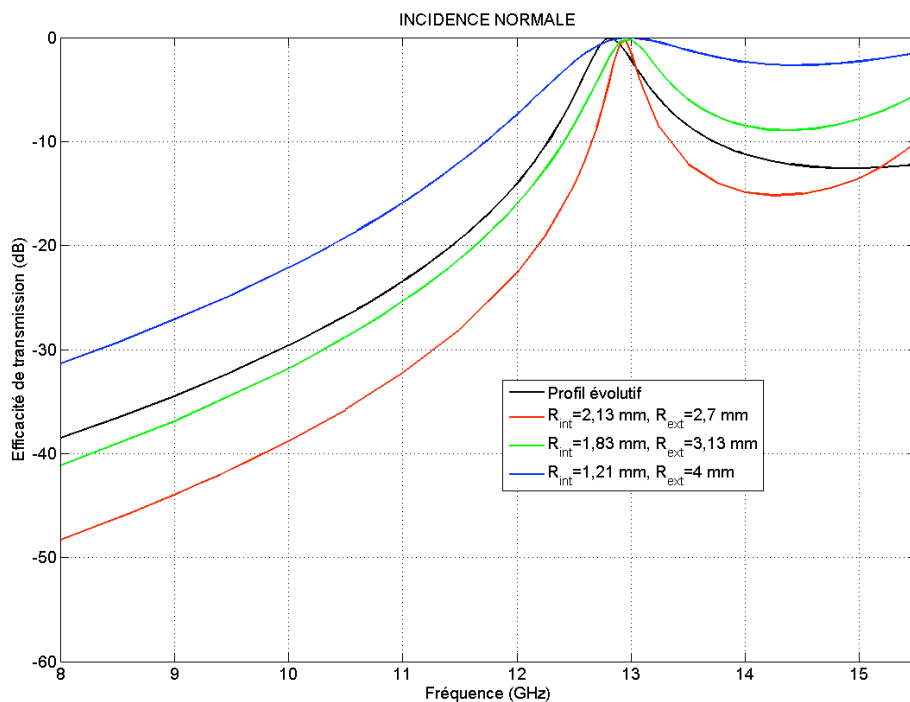
On effectue le calcul pour des fréquences de  $8\text{ GHz}$  à  $15,5\text{ GHz}$ , en incidence normale et également en obliquité ( $k_x = 0,7$  et  $k_x = 0,9$ ).

## Calcul

Le maillage de cette structure compte 16488 triangles et 512 quadrangles, portant un total de 31552 degrés de liberté (22658 pour le courant électrique et 8894 pour le courant magnétique). Les longueurs d'arête sont toutes inférieures à  $\lambda/21$  à la fréquence de calcul la plus élevée, y compris dans le Teflon.

Sur un nœud de 8 processeurs *Intel Itanium II* à  $1,4\text{ GHz}$ , il faut compter  $1,3\text{ h}$  de calcul par fréquence et par incidence.

Afin de mesurer l'apport de la structure évolutive par rapport aux structures à profil droit, on compare, sur les figures 7.23 à 7.27, les résultats en transmission avec ceux obtenus pour des réseaux de cavités coaxiales à profil droit, ayant les rayons extrémaux et médians ( $R_{int} = 1,83\text{ mm}$  et  $R_{ext} = 3,13\text{ mm}$ ).



**FIGURE 7.23** — Comparaison des efficacités de transmission du réseau de cavités coaxiales à profil évolutif et à profil droit (fentes minimale, médiane et maximale).

On constate qu'en polarisation TE (H) ou en incidence normale, le comportement de la structure en transmission est similaire à celui des réseaux de cavités coaxiales à profil droit. Les bandes passantes pour les profils évolutif ou droit à rayons médians sont très proches.

L'intérêt de la structure est visible en polarisation TM (V) et en incidence oblique : la résonance due au mode TEM n'apparaît plus à la fréquence prévue (autour de  $9\text{ GHz}$ ), mais se rapproche de la résonance due au mode  $\text{TE}_{11}$ , pour donner une bande passante large, dans laquelle la transmission est proche de 1, et en-dehors de laquelle les niveaux de transmission sont bas.

Pour expliquer ce phénomène, on avance l'hypothèse d'un couplage entre les résonances dues aux modes TEM et  $\text{TE}_{11}$  dans la cavité : on a la même largeur de bande que le cas droit, mais un "flat top", 100% de transmission entre les deux fréquences de résonance !

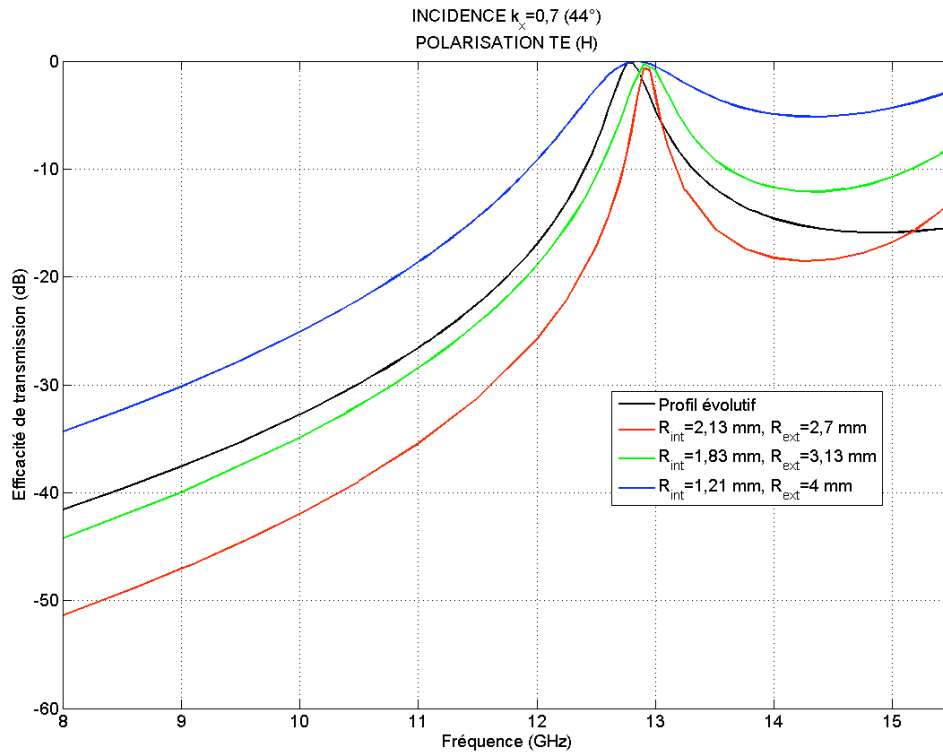


FIGURE 7.24 – Comparaison, en polarisation TE et incidence  $k_x = 0,7$  ( $44^\circ$ ), des efficacités de transmission du réseau de cavités coaxiales à profil évolutif et à profil droit (fentes minimale, médiane et maximale).

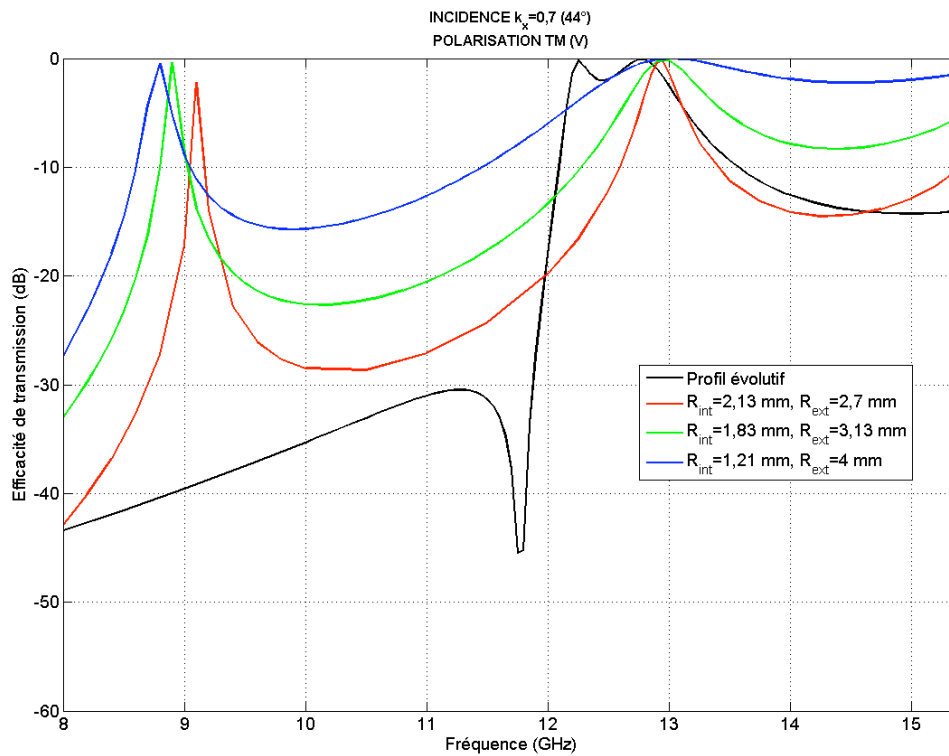


FIGURE 7.25 – Comparaison, en polarisation TM et incidence  $k_x = 0,7$  ( $44^\circ$ ), des efficacités de transmission du réseau de cavités coaxiales à profil évolutif et à profil droit (fentes minimale, médiane et maximale).

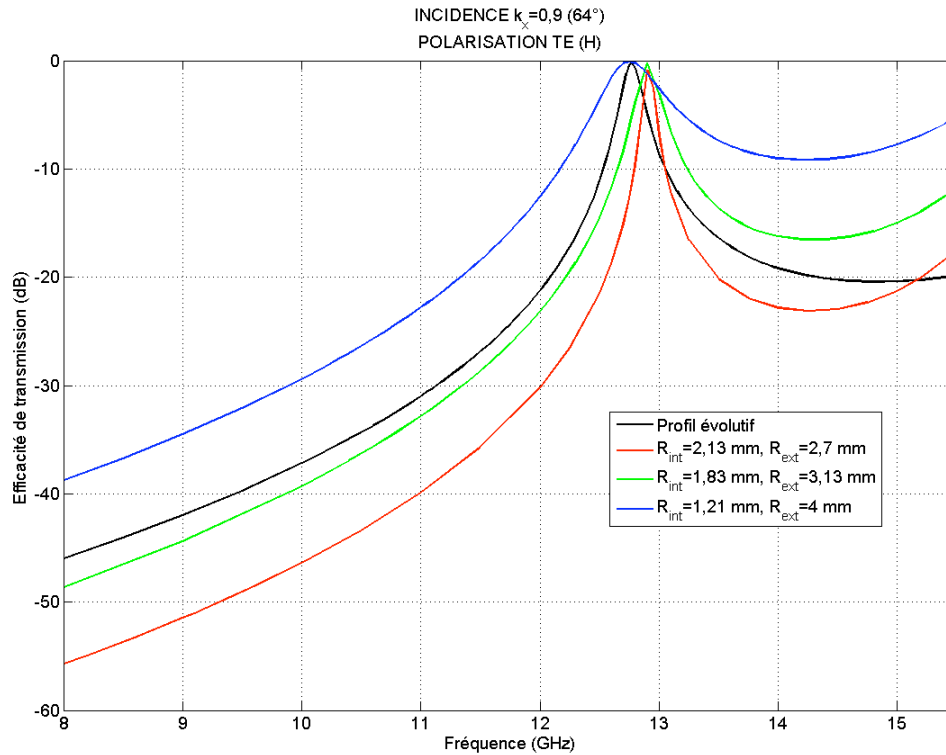


FIGURE 7.26 – Comparaison, en polarisation TE et incidence  $k_x = 0,9$  ( $64^\circ$ ), des efficacités de transmission du réseau de cavités coaxiales à profil évolutif et à profil droit (fentes minimale, médiane et maximale).

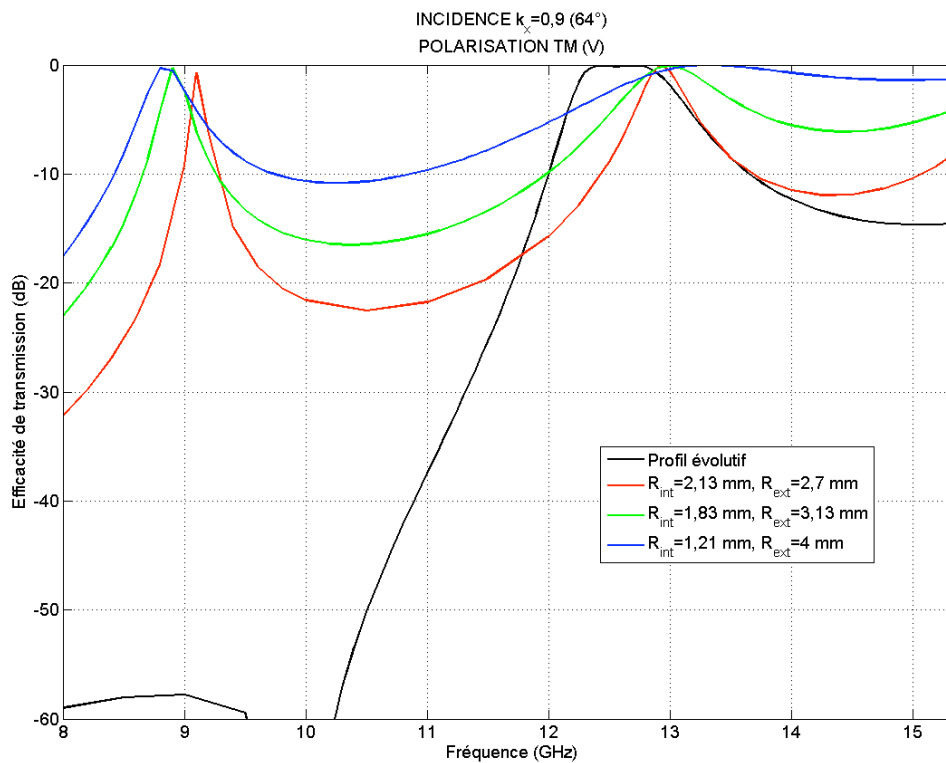
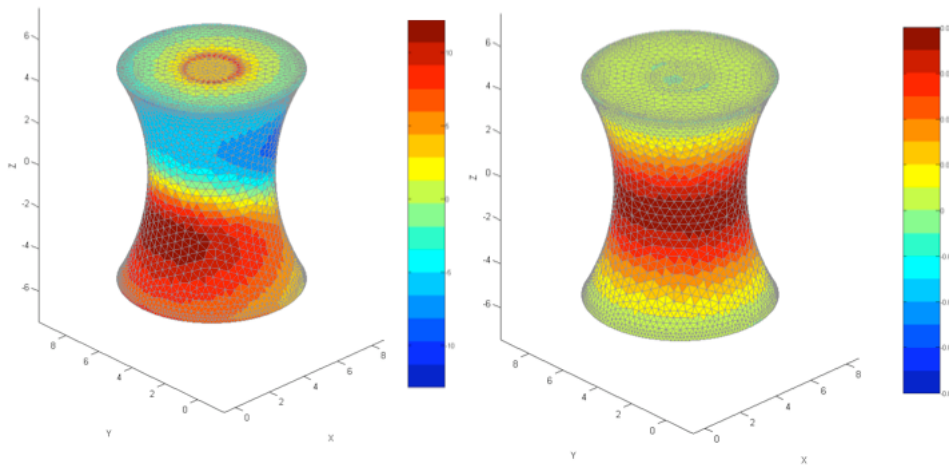


FIGURE 7.27 – Comparaison, en polarisation TM et incidence  $k_x = 0,9$  ( $64^\circ$ ), des efficacités de transmission du réseau de cavités coaxiales à profil évolutif et à profil droit (fentes minimale, médiane et maximale).

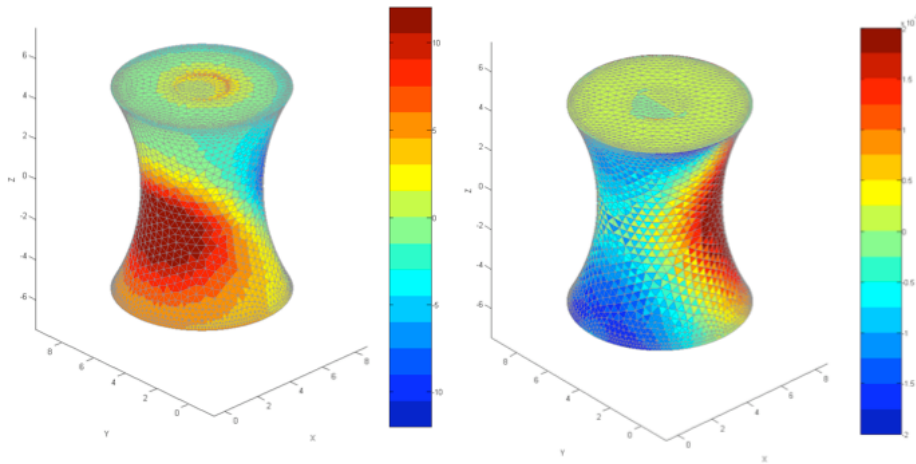
### 7.3.3 Identification des modes

Nous revenons ici à la structure qui a été définie à la figure 7.22. Les figures 7.28 à 7.30 représentent les densités de charges ( $\vec{E} \cdot \vec{n}$ ) et le champ magnétique tangent ( $J_z = H_x n_y - H_y n_x$ ) aux deux pics de résonance à  $12,25\text{ GHz}$  et à  $12,78\text{ GHz}$ , ainsi qu'à une fréquence intermédiaire, à  $12,51\text{ GHz}$ .

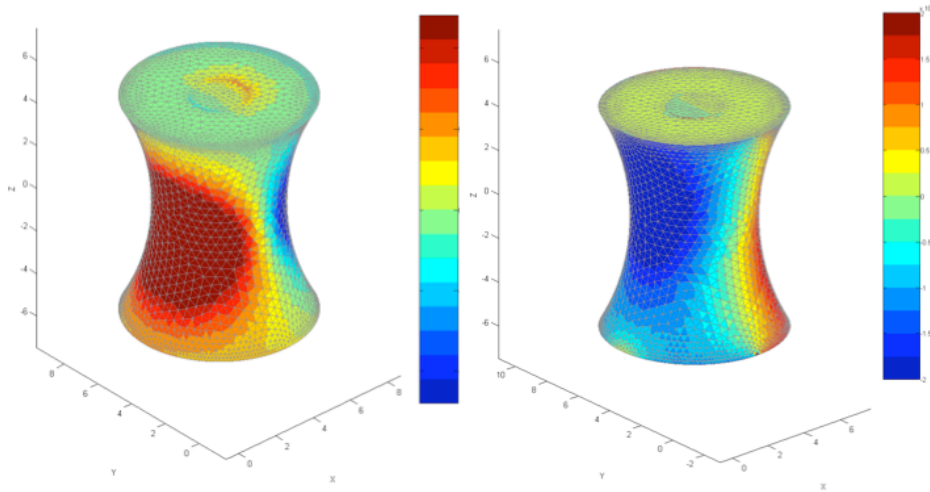
Les structures des champs sont à comparer avec celles présentées à la section 7.2.3 : on a effectivement une résonance due à un mode de type TEM à  $12,25\text{ GHz}$  et une résonance due à un mode de type  $\text{TE}_{11}$  à  $12,78\text{ GHz}$ . Entre les deux, à  $12,51\text{ GHz}$ , la structure des champs a des caractéristiques des modes TEM et  $\text{TE}_{11}$  : on a une superposition de deux types de modes différents.



**FIGURE 7.28** – Densité de charge ( $\vec{E} \cdot \vec{n}$ ) et courant magnétique dans le plan normal à  $\hat{z}$ , pour une incidence  $k_x = 0,7$ , à la fréquence de  $12,25\text{ GHz}$ , sur un réseau de cavités coaxiales à profil évolutif.

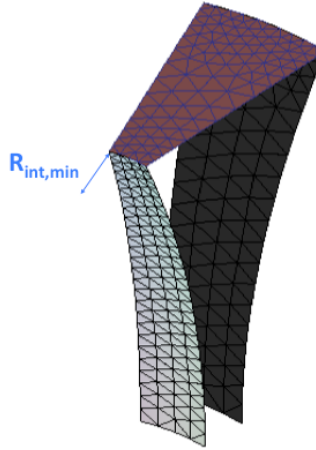


**FIGURE 7.29** – Densité de charge ( $\vec{E} \cdot \vec{n}$ ) et courant magnétique dans le plan normal à  $\hat{z}$ , pour une incidence  $k_x = 0,7$ , à la fréquence de  $12,51\text{ GHz}$ , sur un réseau de cavités coaxiales à profil évolutif.



**FIGURE 7.30** – Densité de charge ( $\vec{E} \cdot \vec{n}$ ) et courant magnétique dans le plan normal à  $\hat{z}$ , pour une incidence  $k_x = 0,7$ , à la fréquence de  $12,78\text{ GHz}$ , sur un réseau de cavités coaxiales à profil évolutif.

#### 7.3.4 Influence du rayon interne minimal



**FIGURE 7.31** – Section élémentaire du calcul 3D avec symétrie cyclique d'ordre 16 et symétrie plane en  $z = 0$  : on fait varier  $R_{int,min}$  de  $0,2\text{ mm}$  à  $2\text{ mm}$ .

Afin d'étudier les éventuels couplages entre les résonances dues aux modes TEM ou  $TE_{11}$ , nous avons effectué des calculs 3D en faisant varier le rayon interne minimal  $R_{int,min}$  de  $0,2\text{ mm}$  à  $2\text{ mm}$  par pas de  $0,1\text{ mm}$ , comme illustré à la figure 7.31. Les calculs sont effectués sur une cavité unique dans une plaque parfaitement conductrice, pour des fréquences allant de  $8\text{ GHz}$  à  $20\text{ GHz}$ , et des angles d'incidence de  $34^\circ$ ,  $44^\circ$ ,  $54^\circ$  et  $64^\circ$ . Les effets dus à la mise en réseau des cavités ne sont pas observés ici.

Dans chaque cas, nous notons les fréquences de résonance dues aux modes TEM ou  $TE_{11}$  ; celles-ci sont indépendantes de l'angle d'incidence. Le graphe de la figure 7.32 donne l'évolution de ces fréquences en fonction du rayon interne minimal : ce sont deux droites qui se coupent en  $R_{int,min} \simeq 0,37\text{ mm}$ . Les droites ne sont pas perturbées à proximité du croisement : il n'y a pas de couplage entre les résonances sur une unique cavité.

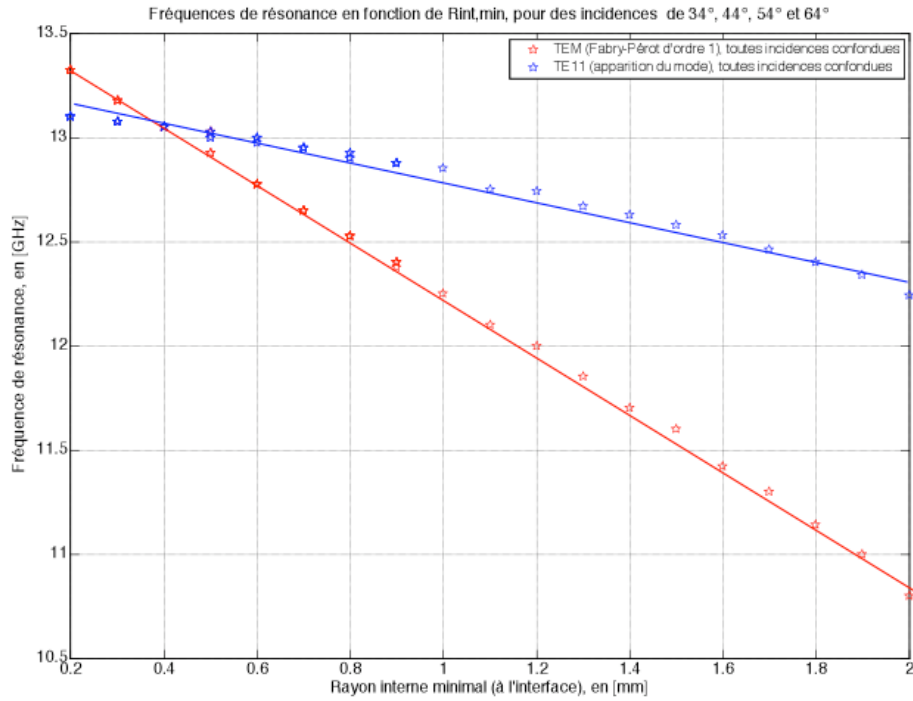


FIGURE 7.32 – Fréquences de résonances dues aux modes TEM et  $TE_{11}$  pour une cavité unique dans une plaque parfaitement conductrice.

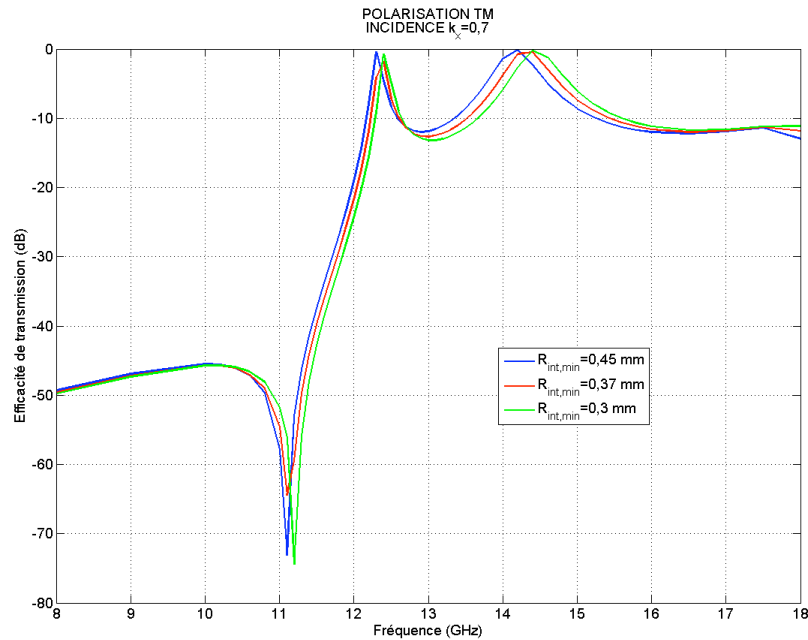


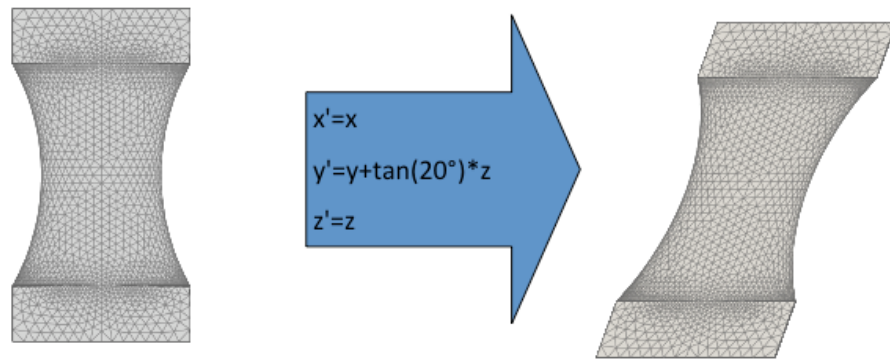
FIGURE 7.33 – Efficacités de transmission en polarisation TM, pour une incidence  $k_x = 0,7$ , d'un réseau de cavités coaxiales à profil évolutif.

Afin de savoir si les résonances se couplent à proximité de ce point de croisement, nous avons effectué trois calculs sur un réseau de cavités coaxiales, pour des rayons internes minimaux de  $0,3\text{ mm}$ ,  $0,37\text{ mm}$  et  $0,45\text{ mm}$  : les courbes des efficacités de transmission sont données à la figure 7.33. Ces courbes ne montrent pas de changement flagrant du profil de transmission lorsque l'on passe d'un côté ou de l'autre du croisement des résonances de la figure 7.33. Cela laisse supposer qu'il y a effectivement un couplage entre les résonances. La confirmation de cette hypothèse est possible soit en effectuant des calculs bipériodiques pour davantage de rayons internes minimaux ; soit en examinant les champs dans les cavités à la résonance.

## 7.4 Réseau de cavités coaxiales obliques

Nous avons vu que les réseaux de cavités coaxiales, à profil droit ou évolutif, permettent d'obtenir une large bande passante en incidence oblique et en polarisation TM. Dans certains, il est souhaitable d'avoir une large bande passante également en incidence normale : une idée simple consiste à utiliser des cavités coaxiales obliques par rapport à l'axe  $\hat{z}$ . L'onde incidente en incidence normale voit alors le réseau "en obliquité", suivant une polarisation. Nous présentons ici un seul calcul, qui laisse entrevoir des améliorations possibles de la structure proposée.

Nous avons pris la structure définie à la figure 7.22, dont le plan médian est en  $z = 0$  et nous lui avons appliqué la transformation géométrique suivante (cisaillement) décrite à la figure 7.34.



**FIGURE 7.34** – Transformation géométrique appliquée à une cavité coaxiale à profil évolutif.

La même transformation a été effectuée sur une cavité coaxiale à profil droit, d'épaisseur  $10\text{ mm}$  et de rayons  $R_{int} = 1,83\text{ mm}$  et  $R_{ext} = 3,13\text{ mm}$ .

Les efficacités de transmission en incidence normale pour les deux polarisations (appelées abusivement TE et TM), sont présentées aux figures 7.35 et 7.36.

Sur le réseau de cavités à profil évolutif, les résonances sont loin l'une de l'autre et semblent se repousser. En revanche, avec le réseau de cavités coaxiales à profil droit obliques, on arrive à tirer parti des résonances dues à la fois au mode TEM et au mode  $TE_{11}$ , bien qu'il y faille encore modifier la structure pour rapprocher les résonances suffisamment et harmoniser les

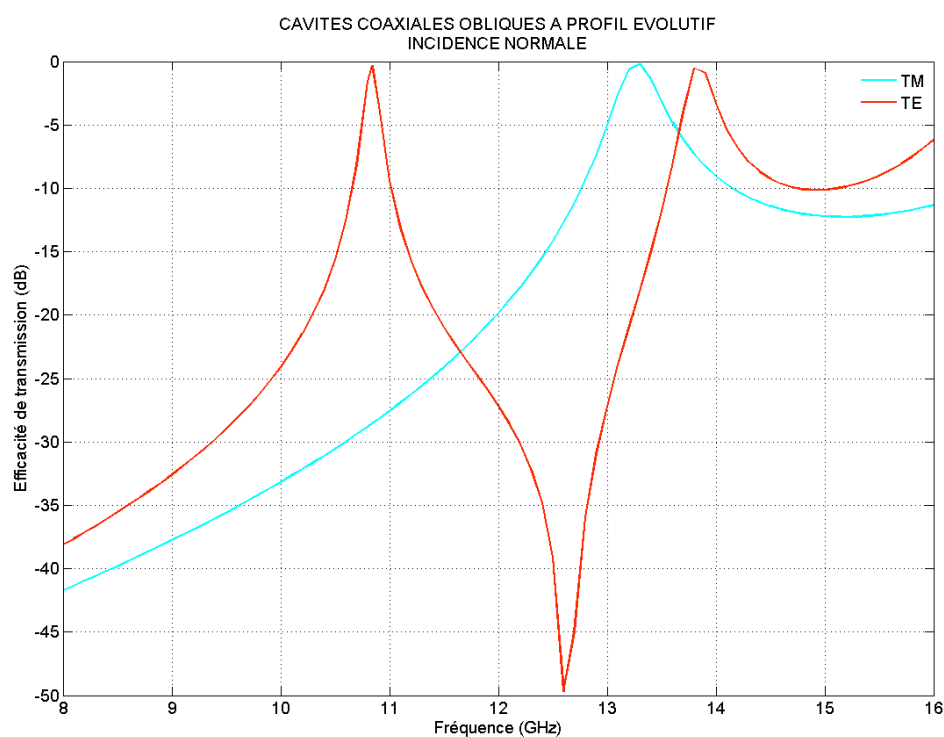


FIGURE 7.35 – *Effacité de transmission en incidence normale pour un réseau de cavité coaxiales à profil évolutif obliques.*

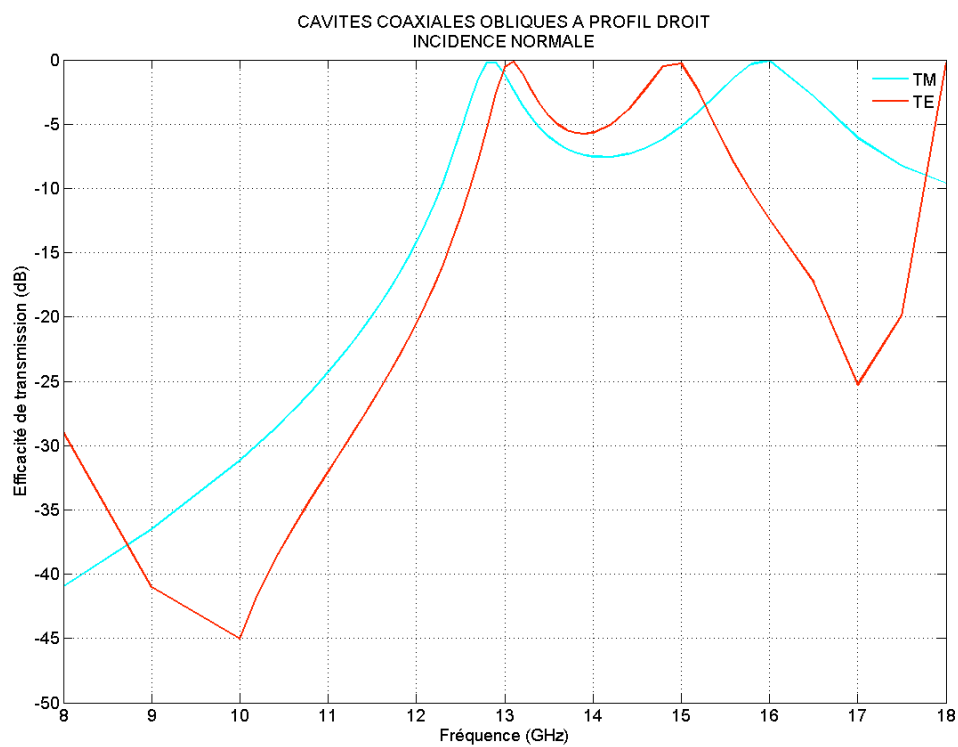


FIGURE 7.36 – *Effacité de transmission en incidence normale pour un réseau de cavité coaxiales à profil droit obliques.*

fréquences de résonance pour les deux polarisations. On peut néanmoins espérer concevoir un filtre large-bande monopolarisation à partir de cette idée. En effet, cette approche peut également permettre d'ajuster le comportement du filtre à une polarisation et une incidence données.

## 7.5 Conclusion

Dans ce dernier chapitre de la thèse, nous avons commencé par donner quelques exemples concrets dans lesquels les matériaux artificiels périodiques jouent un rôle important, puis nous avons justifié le choix d'étudier des filtres passe-bande dans le domaine des hyperfréquences.

Nous avons, pour ce faire, étudié des filtres passe-bande conçus à partir de réseaux de cavités coaxiales dans une plaque métallique. En optique, ces réseaux sont particulièrement intéressants pour leur largeur de bande et leur propriété d'invariance par rapport à l'angle d'incidence.

La transposition de ces structures aux hyperfréquences en modifie légèrement le comportement, puisque les métaux réels deviennent des conducteurs parfaits. Plusieurs types de résonances permettent d'expliquer les phénomènes de résonance observés sur ces structures : il est intéressant de pouvoir prédire ces résonances pour proposer une structure optimisée.

Nous avons donc effectué des études paramétriques et proposé une explication physique au comportement observé : les variations des fréquences de résonance et des largeurs de bande en fonction des paramètres géométriques de la structure sont dues à la modification du facteur de pertes radiatives aux ouvertures des cavités. Nous avons ainsi pu proposer une épaisseur de réseau optimal, permettant une bonne largeur de bande en obliquité.

Une autre approche a été tentée : faire l'analogie entre les empilements de FSS planes et les réseaux de cavités coaxiales. Les empilements de FSS planes sont souvent conçus de telle sorte que la FSS la plus sélective soit au centre de la cavité : nous suggérons de voir un réseau de cavités coaxiales comme la version continue de ces empilements discrets. Afin d'avoir une meilleure sélectivité au centre de la cavité, nous avons réduit l'ouverture sur le plan médian de la structure en proposant un profil évolutif en  $z$ .

La structure à guide évolutif a des propriétés améliorées par rapport à une structure à guide droit en terme de largeur de bande en incidence oblique et polarisation TM et nous avons essayé de comprendre quels sont les modes de cavité qui créent la résonance : les modes TEM et  $TE_{11}$ . Nous avons également modifié un paramètre géométrique de la structure, le rayon interne minimal et observé la modification des fréquences de résonance sur une cavité unique dans une plaque parfaitement conductrice, et tenté de comprendre si les modes se couplent entre eux ou non. Il semble que, contrairement au cas des guides droits, il puisse y avoir couplage entre modes  $TE_{11}$  et TEM sur le réseau de cavités coaxiales évolutives. Ce phénomène permet d'obtenir une meilleure bande passante en polarisation TM.

Enfin, pour obtenir de larges bandes passantes suivant une polarisation en incidence normale, on suggère une transformation géométrique sur les structures étudiées, pour les rendre obliques. On peut ainsi exciter un mode TEM même en incidence normale et tirer parti du couplage entre modes  $TE_{11}$  et TEM, pour améliorer la largeur de bande.

# Conclusion générale

Nous avons proposé une formulation intégrale adaptée au problème de la diffraction d'une onde plane par un réseau bipériodique. La méthode numérique, basée sur cette formulation, est dite hybride, car elle utilise deux types de fonctions de Green : la fonction de Green bipériodique, dont le calcul est coûteux en temps, et la fonction de Green des problèmes 3D, qui ne peut être utilisée qu'en espace libre en l'absence de périodicité ou dans des domaines homogènes isotropes bornés. Pour pouvoir utiliser cette dernière fonction de Green, il faut borner les domaines internes de la cellule de périodicité, à l'aide d'interfaces fictives, sur lesquelles des conditions aux limites de pseudopériodicité sont imposées.

La formulation intégrale multidomaine que nous proposons est basée sur la formulation PMCHWT, qui est connue pour sa précision, notamment dans le cas 3D. C'est un apport important en termes d'efficacité et de précision de calcul. Cela constitue, à notre connaissance, la première adaptation au cas bipériodique de cette formulation utilisant des interfaces fictives et une fonction de Green 3D. Les conditions de pseudopériodicité sont prises en compte fortement dans la formulation. L'écriture de cette formulation fait intervenir des termes provenant de domaines contigus à la cellule de périodicité de référence. Nous avons montré, grâce aux conditions de pseudopériodicité, que ces termes peuvent être calculés à partir de la cellule de référence. Dans ces domaines bornés, nous utilisons la fonction de Green des problèmes tridimensionnels, dont le coût de calcul est négligeable.

Sur les bords des domaines semi-infinis inférieur et supérieur entre lesquels la structure est placée, c'est la fonction de Green bipériodique qui est utilisée. Son coût étant prohibitif, nous devons mettre en œuvre des techniques d'accélération de convergence.

Les opérateurs intégraux et la discrétisation que nous avons utilisés permettent de modéliser les structures à l'aide de maillages constitués à la fois de triangles et de quadrangles. Nous avons bénéficié pour cela des apports du code *Spectre*, où les traitements des interactions entre deux éléments proches de même nature d'une part, et entre un triangle et un quadrangle d'autre part, sont effectués de façon précise. La possibilité d'utiliser des maillages faits de triangles et de quadrangles permet une grande souplesse dans la modélisation des formes géométriques complexes ; elle permet de mailler les interfaces entre la structure bipériodique et les domaines semi-infinis de manière localement structurée, en quadrangles tous identiques : on peut alors utiliser presque directement l'algorithme de calcul de la diffraction par des réseaux de feuillets métalliques plans sans épaisseur pour calculer les contributions des opérateurs intégraux bipériodiques sur ces interfaces. C'est à notre connaissance la première utilisation de cette méthode pour traiter les bords des domaines non bornés dans le cadre d'une formulation multidomaine PMCHWT. Elle permet de calculer la partie bipériodique des opérateurs intégraux en un temps encore inférieur à la partie utilisant la fonction de Green 3D, et donc d'avoir une méthode dont le temps de calcul global est comparable

à celui du calcul 3D de la cellule de périodicité seule. Remarquons au passage que pour les feuillets plans à maillage structuré, la méthode se réduit à l'algorithme classique pour ces feuillets.

La méthode présentée a été implémentée au sein du code *Spectre* et les apports en termes de précision et de temps de calcul ont été vérifiés. Le code de calcul pour les problèmes de diffraction d'une onde électromagnétique plane monochromatique par une structure bipériodique, qui est disponible chez Dassault Aviation, est le fruit de ce travail. Nous avons pour cela bénéficié du concours d'ingénieurs développant le code *Spectre* afin que cette implémentation n'empiète pas trop sur le travail de thèse. La méthode a été validée à l'aide de cas illustrant plusieurs grandes catégories de problèmes bipériodiques. La pérennité de cet outil développé est assurée et il est plutôt gratifiant de voir que ce travail de thèse est utilisé par des concepteurs d'antennes et de radômes, car c'est la méthode la plus complète qu'ils aient à leur disposition pour évaluer les performances des structures qu'ils conçoivent.

Dans une dernière partie, nous avons utilisé cet outil numérique, et montré par l'exemple qu'il était efficace pour concevoir des structures bipériodiques, et pour mettre en évidence et expliquer des phénomènes physiques liés aux réseaux. Nous avons étudié les phénomènes résonants que nous avons observés sur les réseaux de cavités coaxiales dans une plaque parfaitement conductrice, et proposé des lois simples permettant de prédire et de quantifier les performances de la structure en termes de niveau de transmission, en fonction des paramètres géométriques de la structure et de l'angle d'incidence. L'examen de ces phénomènes de résonance nous a permis de modifier les paramètres géométriques des structures étudiées afin d'en améliorer les propriétés, en termes de filtrage large bande. Le premier paramètre optimisé est l'épaisseur du réseau : en la choisissant de telle sorte que les résonances dues aux modes TEM et  $TE_{11}$  apparaissent à des fréquences proches, on améliore la largeur de bande passante. Nous avons aussi proposé des réseaux de cavités coaxiales à profil évolutif : celles-ci permettent un couplage entre les modes TEM et  $TE_{11}$  et ont de très bonnes propriétés en incidence et en polarisation TM. Enfin, on propose d'examiner des réseaux de cavités coaxiales obliques permettant d'exciter le mode TEM en incidence normale : des bons choix des paramètres géométriques devraient permettre d'obtenir une structure à large bande passante en incidence normale ou même en incidence oblique et polarisation TE.

Bien que la formulation intégrale et la méthode numérique présentées aient fait la preuve de leur efficacité, il est néanmoins possible d'aller plus loin et d'en proposer des améliorations. L'étude du filtre passe-bande que nous avons menée dans la dernière partie du document doit également être approfondie. Nous donnons ici quelques pistes de travaux qui peuvent constituer une suite à cette thèse.

La méthode numérique présentée rend obligatoire l'utilisation de matériaux, soit parfaitement conducteurs, soit diélectriques (absorbants ou non, dispersifs ou non). Il n'est pas possible, en l'état actuel des choses, d'inclure des matériaux aux relations constitutives plus complexes, en particulier des matériaux anisotropes. Pour ce faire, il faudrait combiner une formulation volumique, avec discrétisation par éléments finis, à la formulation surfacique par équations intégrales. Ceci a déjà été fait dans le cas non périodique.

Nous n'avons pas non plus pris le temps d'adapter aux cas où les vecteurs de périodicité ne sont pas orthogonaux, l'algorithme des feuillets plans à maillage structuré. Sur un maillage constitué de parallélogrammes tous identiques, cela doit être possible, à relativement peu

de frais.

Les matériaux artificiels bipériodiques sont rarement utilisés sur des surfaces planes : ils sont généralement utilisés pour recouvrir des surfaces courbes. Adapter les formulations aux cas de matériaux artificiels conformés à des surfaces non planes est loin d'être trivial. Dans ce cas, la stratégie probablement la plus efficace consisterait plutôt à développer des conditions d'impédance d'ordre élevé, qui pourraient être calculées à partir des matrices de *scattering*, et utilisées comme conditions aux limites d'un calcul tridimensionnel sans périodicité (un avion, par exemple). Il est déjà possible d'utiliser des conditions d'impédance d'ordre 0 (Léontovitch, en particulier), mais leur domaine de validité est rapidement limité dès que l'angle d'incidence est trop important.

Il est très opportun d'utiliser la méthode numérique conjointement à des algorithmes d'optimisation de forme ou de matériaux. Dans des cas simples, nous savons utiliser des algorithmes triviaux, de type *carpet bombing*, ou moins simples comme par exemple le *particle swarm optimization* (PSO), disponible chez Dassault Aviation, afin d'obtenir des courbes d'évolution d'une grandeur physique (une fréquence de résonance, par exemple), en fonction d'un paramètre géométrique donné (le rayon interne minimal des cavités coaxiales à profil évolutif, par exemple). Pour des cas plus complexes, d'autres stratégies doivent être étudiées, afin que le temps de calcul lié aux évaluations des structures ne soit pas rédhibitoire. C'est une partie du sujet de la période postdoctorale à l'École Polytechnique Fédérale de Zurich, qui fait suite à cette thèse.

Enfin, pour améliorer les filtres passe-bande que nous avons proposés, plusieurs pistes peuvent être suivies. Il est possible d'introduire des asymétries dans la géométrie des cavités, afin de coupler des modes différents entre eux, et élargir la bande passante. Sur les cavités obliques par rapport à l'axe  $\hat{z}$ , il faudrait également pouvoir proposer des paramètres géométriques qui permettent d'obtenir des fréquences de résonance identiques dans chaque polarisation.



# Bibliographie

- [1] Toufic ABBOUD : *Étude mathématique et numérique de quelques problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 1991.
- [2] Toufic ABBOUD : Electromagnetic waves in periodic media. In Ralph KLEINMAN et Thomas ANGELL, éditeurs : *Second International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 1–9, Philadelphie, 1993. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [3] Milton ABRAMOVITZ et Irene A. STEGUN, éditeurs. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, Inc., New York, 1965.
- [4] A. ALÛ, Nader ENGHETA, A. ERENTOK et R. W. ZIOLKOWSKI : Single-Negative, Double-Negative, and Low-Index Metamaterials and their Electromagnetic Applications. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 49(1):23–36, Février 2007.
- [5] Andrea ALÛ et Nader ENGHETA : Light squeezing through arbitrarily shaped plasmonic channels and sharp bends. *Physical Review B*, 78, Juillet 2008.
- [6] Fadi I. BAIDA : Enhanced transmission through subwavelength metallic coaxial apertures by excitation of the TEM mode. *Applied Physics B*, 89:145–149, 2007.
- [7] Fadi I. BAIDA, A. BELKHIR, Daniel VAN LABEKE et O. LAMROUS : Subwavelength metallic coaxial waveguides in the optical range : Role of the plasmonic modes. *Physical Review B*, 2006.
- [8] Fadi I. BAIDA, Daniel VAN LABEKE, G. GRANET, A. MOREAU et A. BELKHIR : Origin of the super-enhanced light transmission through a 2-D metallic annular aperture array : a study of photonic bands. *Applied Physics B*, 79:1–8, 2004.
- [9] Nader BEHDAD, Mudar AL-JOUMAYLY et Mohsen SALEHI : A Low-Profile Third-Order Bandpass Frequency Selective Surface. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 57(2):460–466, Février 2009.
- [10] Abderrahmane BENDALI : *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques*. Thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, Janvier 1984.
- [11] Abderrahmane BENDALI et C. DEVYS : Calcul numérique du rayonnement de cornets électromagnétiques dont l'ouverture est partiellement remplie par un diélectrique. *L'Onde Électrique*, 66(1):77–81, Janvier 1986.
- [12] J. BÉRENGER : A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114:185–200, 1994.
- [13] Katarina BLAGOVIĆ : *Numerical modeling of planar periodic structures in electromagnetics*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Faculté des

- sciences et techniques de l'ingénieur, Laboratoire d'électromagnétisme et acoustique ; Section de génie électrique et électronique, Décembre 2006.
- [14] Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA et Felipe STARLING : Guided waves by electromagnetic gratings and non-uniqueness examples for the diffraction problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 17(5):305–338, 1994.
  - [15] Nicolas BONOD, Gérard TAYEB, Daniel MAYSTRE, Stefan ENOCH et Evgeny POPOV : Total absorption of light by lamellar metallic gratings. *Optics Express*, 16(20), Septembre 2008.
  - [16] R. CARMINATI, J. J. SÁENZ, J.-J. GREFFET et M. NIETO-VESPERINAS : Reciprocity, unitarity, and time-reversal symmetry of the S matrix of fields containing evanescent components. *Physical Review A*, 62, 2000.
  - [17] Chi Hou CHAN et Raj MITTRA : On the Analysis of Frequency-Selective Surfaces Using Subdomain Basis Functions. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 38(1):40–50, Janvier 1990.
  - [18] Nicolas CHATEAU et Jean-Paul HUGONIN : Algorithm for the rigorous coupled-wave analysis of grating diffraction. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(4):1321–1331, Avril 1994.
  - [19] Weng Cho CHEW, Jian-Ming JIN, Eric MICHIELSEN et Jiming SONG, éditeurs. *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*. Artech House, Norwood, Massachussets, 2001.
  - [20] Thomas R. CWIK et Raj MITTRA : Scattering from general periodic screens. Technical report, Electromagnetic Communication Laboratory, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Illinois, Urbana, IL 61801, Décembre 1986.
  - [21] Thomas R. CWIK et Raj MITTRA : Scattering from a Periodic Array of Free-Standing Arbitrarily Shaped Perfectly Conducting or Resistive Patches. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, AP-35(11):1226–1234, Novembre 1987.
  - [22] Xavier DARDENNE et Christophe CRAEYE : Method of Moments Simulation of Infinitely Periodic Structures Combining Metal With Connected Dielectric Objects. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 56(8):2372–2380, Août 2008.
  - [23] T. DELORT et D. MAYSTRE : Finite-element method for gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(12):2592–2601, Décembre 1993.
  - [24] T. W. EBBESEN, H. J. LEZEC, H. F. GHAEMI, T. THIO et P. A. WOLFF : Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays. *Nature*, 391:667–669, Février 1998.
  - [25] Thomas F. EIBERT, John L. VOLAKIS, Donald R. WILTON et David R. JACKSON : Hybrid FE/BI Modeling of 3-D Doubly Periodic Structures Utilizing Triangular Prismatic Elements and an MPIE Formulation Accelerated by the Ewald Transformation. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 47(5):843–850, Mai 1999.
  - [26] George V. ELEFThERIADES, éditeur. *Negative-refraction Metamaterials*. John Wiley & Sons, 2005.
  - [27] Stefan ENOCH, Gérard TAYEB et Daniel MAYSTRE : Numerical evidence of ultrarefractive optics in photonic crystals. *Optics Communication*, 161:171–176, 1999.
  - [28] P. P. EWALD : Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale. *Ann. Phys.*, 64:253–287, 1921.
  - [29] Anne-Laure FEHREMBACH : *Réseaux résonnants à Bande Interdite Photonique, nouveaux filtres pour le D.W.D.M.* Thèse de doctorat, Université de droit, d'économie et

- des sciences d'Aix-Marseille, Institut Fresnel, équipe C.L.A.R.T.E., École Doctorale Physique et Sciences de la Matière, 2003.
- [30] F. J. Garcíá de ABAJO : Colloquium : Light scattering by particle and hole arrays. *Reviews of Modern Physics*, 79:1267–1290, Octobre-décembre 2007.
- [31] Stephen D. GEDNEY et Raj MITTRA : Analysis of the Electromagnetic Scattering by Thick Gratings Using a Combined FEM/MM Solution. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 39(11):1605–1614, Novembre 1991.
- [32] Nicolas GUÉRIN : *Étude théorique et numérique de la diffraction par des réseaux bipériodiques en électromagnétisme. Application aux cristaux photoniques et aux antennes directives compactes*. Thèse de doctorat, Université de droit, d'économie et des sciences d'Aix-Marseille III, Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme, Septembre 2003.
- [33] Roger F. HARRINGTON : *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. McGraw-Hill, 1961.
- [34] Roger F. HARRINGTON : *Field Computation by Moment Methods*. Robert E. Krieger Publishing Co., Malabar, Florida, 1968.
- [35] Ashwin K. IYER et George V. ELEFThERIADES : A Multilayer Negative-Refractive-Index Transmission-Line (NRI-TL) Metamaterial Free-Space Lens at X-Band. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 55(10):2746–2743, 2007.
- [36] K. E. JORDAN, G. R. RICHTER et P. SHENG : An efficient numerical evaluation of the Green's function for the Helmholtz operator on periodic structures. *Journal of Computational Physics*, 63:222–235, 1986.
- [37] Philippe LALANNE et G. Michael MORRIS : Highly improved convergence of the coupled-wave method for TM polarization. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(4):779–784, 1996.
- [38] Lifeng LI : Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(5):1024–1035, Mai 1996.
- [39] Lifeng LI : New formulation of the Fourier modal method for crossed surface-relief gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(10):2758–2767, Octobre 1997.
- [40] Haitao LIU et Philippe LALANNE : Microscopic theory of the extraordinary optical transmission. *Nature*, 452:728–731, Avril 2008.
- [41] Frédéric LUBRANO LAVADERCI : *Sur la diffraction électromagnétique par des réseaux bipériodiques. Applications au contrôle des propriétés de réflexion d'un matériau*. Thèse de doctorat, École doctorale de Physique, Université de Bordeaux I, 1996.
- [42] Guo Qing LUO, Wei HONG, Zhang-Cheng HAO, Bing LIU, Wei Dong LI, Ji Xin CHEN, Hou Xing ZHOU et Ke WU : Theory and Experiment of novel Frequency Selective Surface Based on Substrate Integrated Waveguide Technology. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 53:4035–4043, Décembre 2005.
- [43] Nathan MARCUVITZ : *Waveguide Handbook*, volume 21 de *IET Electromagnetic Waves Series*. The Institution of Engineering and Technology, Londres, 3ème édition, 2009.
- [44] A. MARÉCHAL et G. W. STROKE : Sur l'origine des effets de polarisation et de diffraction dans les réseaux optiques. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences B*, 1959.
- [45] Philippe MARESCHAL : *Étude de la diffraction électromagnétique par des géométries bidimensionnelles infinies*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, Avril 1996.

- [46] François MARQUIER : *Interaction des ondes de surface avec des microstructures périodiques. Émission thermique cohérente et transmission résonante*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, Laboratoire d'Énergétique Moléculaire et Macroscopique, Combustion (EM2C), Octobre 2004.
- [47] François MARQUIER et Jean-Jacques GREFFET : Resonant transmission through a metallic film due to coupled modes. *Optics Express*, 13(1), Janvier 2004.
- [48] Daniel MAYSTRE et Stefan ENOCH : Perfect lenses made with left-handed materials : Alice's mirror? *J. Opt. Soc. Am. A*, 21(1):122–131, Janvier 2004.
- [49] Daniel MAYSTRE, Stefan ENOCH et Ross MCPHEDRAN : Why a harmonic solution for lossless, perfectly homogeneous, left-handed material cannot exist. *J. Opt. Soc. Am. A*, 25(8):1937–1943, Juillet 2008.
- [50] D. T. MCGRATH et V. P. PYATI : Phased array antenna analysis with the hybrid finite element method. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 42, 1994.
- [51] L. N. MEDGYESI-MITSCHANG, J. M. PUTNAM et M. B. GEDERA : Generalized method of moments for three-dimensional penetrable scatterers. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(4):1383–1398, Avril 1994.
- [52] K. A. MICHALSKI et Juan R. MOSIG : Multilayered media Green's functions in integral equation formulations. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 45:508–519, 1997.
- [53] Raj MITTRA, Chi Hou CHAN et Tom C'WIK : Techniques for Analyzing Frequency Selective Surfaces—A Review. *Proceedings of the IEEE*, 76(12):1593–1615, Décembre 1988.
- [54] M. G. MOHARAM et T. K. GAYLORD : Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction. *J. Opt. Soc. Am. A*, 71(7):811–818, 1981.
- [55] Anne MORELOT : *Étude d'une méthode numérique de simulation de la diffraction d'une onde électromagnétique par un réseau bi-périodique*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, Avril 1992.
- [56] Juan R. MOSIG : Arbitrarily shaped microstrip structures and their analysis with a mixed potential integral equation. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, 36:314–323, 1988.
- [57] Ben A. MUNK : *Frequency Selective Surfaces, Theory and Design*. John Wiley & Sons, 2000.
- [58] G. MUR : Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations. *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, 23:377–382, 1981.
- [59] Jean-Claude NEDELEC et Felipe STARLING : Integral equation methods in a quasi-periodic diffraction problem for the time-harmonic Maxwell's equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 22(6):1679–1701, Novembre 1991.
- [60] E.D. PALIK : *Handbook of Optical Constants of Solids*. Academic Press, Orlando, 1985.
- [61] J. B. PENDRY : Negative Refraction Makes a Perfect Lens. *Physical Review Letters*, 85(18):3966–3971, Octobre 2000.
- [62] L. E. Rickard PETERSSON et Jian-Ming JIN : A Three-Dimensional Time-Domain Finite-Element Formulation for Periodic Structures. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 54(1):12–19, Janvier 2006.

- [63] Roger PETIT, éditeur. *Electromagnetic Theory of Gratings*. Topics in Current Physics. Springer-Verlag, Heidelberg, 1980.
- [64] A. J. POGGIO et E. K. MILLER : Integral equation solutions of three-dimensional scattering problems. In Raj MITTRA, éditeur : *Computer Techniques for Electromagnetics*, pages 159–264. Pergamon Press, New York, 1973. 2ème édition, Hemisphere, New York, 1987.
- [65] Sören POULSEN : *Stealth radomes*. Thèse de doctorat, Département de Génie Électrique, Université de Lund, Suède, 2006.
- [66] Rafael POUS et David M. POZAR : A Frequency-Selective Surface Using Aperture-Coupled Microstrip Patches. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 39(12):1763–1769, Décembre 1991.
- [67] Ann ROBERTS et Ross MCPHEDRAN : Bandpass grids with annular apertures. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 36(5):607–611, Mai 1988.
- [68] Anne SENTENAC : *Étude de la diffusion des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses. Application à la conception de surfaces sélectives*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, Laboratoire d'Énergétique Moléculaire et Macroscopique, Combustion (EM2C), Avril 1993.
- [69] Avram SIDI : *Practical extrapolation methods : theory and applications*. Numéro 10 de Cambridge monographs on applied and computational mathematics. Cambridge University Press, 2003.
- [70] Daniel Frederic SIEVENPIPER : *High-Impedance Electromagnetic Surfaces*. Thèse de doctorat, University of California, Los Angeles, 1999.
- [71] Daniel Frederic SIEVENPIPER, Lijun ZHANG, Romulo F. JIMENEZ BROAS, Nicholas G. ALEXÓPOLOUS et Eli YABLONOVITCH : High-Impedance Electromagnetic Surfaces with a Forbidden Frequency Band. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, 47(11):2059–2074, Novembre 1999.
- [72] Ari SIHVOLA : Metamaterials in electromagnetics. *Metamaterials*, 1(1):2–11, 2007.
- [73] Paul SOUDAIS, Hervé STÈVE et Fabrice DUBOIS : Scattering from several test-objects computed by 3-D hybrid IE/PDE methods. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 47:646–653, Avril 1999.
- [74] William H. SOUTHWELL : Pyramid-array surface-relief structures producing antireflection index matching on optical surfaces. *J. Opt. Soc. Am. A*, 8(3):549–553, Mars 1991.
- [75] David H. STEALIN, Ann W. MORGENTHALER et Jin Au KONG : *Electromagnetic Waves*, chapitre 8 : Resonators, pages 336–401. Prentice Hall, 1994.
- [76] Ivica STEVANOVIĆ, Pedro CRESPO-VALERO, Katarina BLAGOVIĆ, Frédéric BONGARD et Juan R. MOSIG : Integral-Equation Analysis of 3-D Metallic Objects Arranged in 2-D Lattices Using the Ewald Transformation. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, 54(10):3688–3697, Octobre 2006.
- [77] Chih-Hung SUN, Peng JIANG et Bin JIANG : Broadband moth-eye antireflection coatings on silicon. *Appl. Phys. Lett.*, 92, 2008.
- [78] T. V. TEPERIK, R. SAINIDOU et F. J. Garcíá de ABAJO : Electronic mode trapping for giant optical field enhancement. Soumission en cours, 2008.

- [79] Sergei TRETYAKOV : *Analytical Modeling in Applied Electromagnetics*. Artech House, Norwood, Massachussets, 2003.
- [80] Luiz Cezar TRINTINALIA et Hao LING : Integral Equation Modeling of Multilayered Doubly-Periodic Lossy Structures Using Periodic Boundary Condition and a Connection Scheme. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 52(9):2253–2261, Septembre 2004.
- [81] Guido VALERIO, Paolo BACCARELLI, Paolo BURGHIGNOLI et Alessandro GALLI : Comparative Analysis of Acceleration Techniques for 2-D and 3-D Green's Functions in Periodic Structures Along One and Two Directions. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 55(6): 1630–1643, Juin 2007.
- [82] Daniel VAN LABEKE, Davy GÉRARD, Brahim GUIZAL, Fadi I. BAIDA et Lifeng LI : An angle-independent Frequency Selective Surface in the optical range. *Optics Express*, 14(25), Décembre 2006.
- [83] John L. VOLAKIS, Gokhan MUMCU, Kubilay SERTEL, Chi-Chih CHEN, Ming LEE, B. KRAMER, D. PSYCHOUDAKIS et G. KIZILTAS : Antenna Miniaturization Using Magnetic-Photonic and Degenerate Band-Edge Crystals. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 48(5):12–27, Octobre 2006.
- [84] Johnson Jenn-Hwa WANG : *Generalized Moment Methods in Electromagnetics*. John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [85] Hermann WEYL : Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenem Leiter. *Ann. d. Physik*, 60:481, 1919.
- [86] T. K. WU, éditeur. *Frequency Selective Surface ans Grid Array*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [87] Kane YEE : Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 14:302–307, 1966.