



HAL
open science

Modèle multi-bulles pour cavitation. Equation d'évolution pour la pression

Mahamadou Adama Maiga

► **To cite this version:**

Mahamadou Adama Maiga. Modèle multi-bulles pour cavitation. Equation d'évolution pour la pression. Mécanique [physics.med-ph]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2008. Français. NNT: . tel-00453961

HAL Id: tel-00453961

<https://theses.hal.science/tel-00453961>

Submitted on 6 Feb 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 4219

THÈSE

présentée à

l'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MECANIQUE

par

M. ADAMA MAIGA

**MODELE MULTI-BULLES POUR LA CAVITATION. EQUATION D'EVOLUTION
POUR LA PRESSION**

Soutenue le 17 novembre 2008 devant le jury :

Président :	B. DESMET	LME, UVHC, Valenciennes
Rapporteurs :	R. FORTES-PATELLA B. STUTZ	LEGI I.N.P.G CETHIL I.N.S.A Lyon
Examineurs :	J.A. ASTOLFI O. COUTIER DELGOSHA	IRENav, Brest LML, ENSAM Lille
Directeur :	D. BUISINE	LML USTL

Laboratoire de Mécanique de Lille
L.M.L, UMR CNRS 8107

Table des matières

0	INTRODUCTION GENERALE	11
1	ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	13
1.1	INTRODUCTION	13
1.2	MODELES A 2-FLUIDES	13
1.2.1	INTRODUCTION	13
1.2.2	MODELES MULTIPHASIQUES	14
1.2.3	METHODES DE MODELISATION DE L'INTERFACE LIQUIDE- VAPEUR	14
1.2.3.1	LES METHODES VOF (VOLUME OF FLUID)	15
1.2.3.2	LA METHODE DES LIGNES DE NIVEAU “ Level Set Method”	17
1.2.3.3	LES METHODES DE PARTICULES	18
1.2.4	CONCLUSION	19
1.3	MODELES A 1-FLUIDES	19
1.3.1	INTRODUCTION	19
1.3.2	MODELES STATIONNAIRES AVEC POCHE DE CAVITATION	20
1.3.2.1	PRINCIPE DU MODELE	20
1.3.2.2	POINT DE DETACHEMENT	21
1.3.2.3	MODELES DE FERMETURE	22
1.3.2.4	QUELQUES MODELES STATIONNAIRES	23
1.3.2.5	CONCLUSION	23
1.3.3	MODELES INSTATIONNAIRES	23
1.3.3.1	INTRODUCTION	23
1.3.3.2	PRINCIPE	24
1.3.3.3	MODELES BAROTROPES	24
1.3.3.4	MODELES PRODUCTION/TRANSPORT DU TAUX DE VIDE	28
1.3.3.5	MODELES BASES SUR L'EVOLUTION DE BULLES	29
1.3.3.6	CONCLUSION	31

1.4	CONCLUSION	31
1.5	APPARITION DE LA CAVITATION	32
2	MODELE DE CAVITATION	35
2.1	INTRODUCTION	35
2.2	HYPOTHESES	36
2.3	MISE EN EQUATIONS	37
2.3.1	DYNAMIQUE DANS LE LIQUIDE	37
2.3.2	DYNAMIQUE DE L'INTERFACE	41
2.3.3	CONSERVATION DU VOLUME	42
2.3.4	EQUATION POUR LE RAYON	43
2.3.5	EVALUATION DE LA PRESSION AMBIANTE MOYENNE	44
2.3.6	SYSTEME D'EQUATIONS COMPACT	45
2.3.7	CONCLUSION	46
2.4	SCHEMA NUMERIQUE	47
2.4.1	CALCUL DE LA VITESSE INITIALE \dot{R}_{10} : ETUDE LINEAIRE	48
2.5	ETUDE NUMERIQUE D'UNE SEQUENCE	49
2.5.1	CALCUL SANS DIFFUSION DE GAZ ET PERTE D'ENERGIE	50
2.5.2	PRISE EN COMPTE DE LA DIFFUSION DES GAZ ET PERTE D'ENERGIE	52
2.5.3	CONCLUSION	54
2.6	ETUDE NUMERIQUE D'UNE SUITE DE SEQUENCES	55
2.6.1	CONDITION DE RACCORDEMENT DES SEQUENCES	56
2.6.2	INFLUENCE DU TEST D'ARRET	56
2.6.3	INFLUENCE DU RAPPORT DES RAYONS INITIAUX	57
2.6.4	INFLUENCE DU RAYON INITIAL R_{20}	57
2.6.5	RAYON CRITIQUE	58
2.6.6	CONCLUSION	59
2.7	CONTINUITE DE LA PRESSION	60
2.8	CONCLUSION	60
3	VALIDATION AVEC L'EXPERIENCE DE OHL	63
3.1	INTRODUCTION	63
3.2	DESCRIPTION DE L'EXPERIENCE DE OHL	63
3.3	LES HYPOTHESES	64
3.4	ESTIMATION DE L'EXPANSION DANS L'EXPERIENCE	65
3.4.1	L'EXPANSION DE LA PREMIERE EXPERIENCE	65

3.4.2	L'EXPANSION DE LA DEUXIEME EXPERIENCE	65
3.5	VALIDATION AVEC LES MESURES EXPERIMENTALES	66
3.5.1	VALIDATION PAR LE RAYON EXPERIMENTAL	66
3.5.1.1	CONCLUSION SUR LA VALIDATION PAR LE RAYON	66
3.5.2	VALIDATION PAR LA PRESSION	68
3.6	CONCLUSION	72
4	EQUATION D'EVOLUTION POUR LA PRESSION	75
4.1	INTRODUCTION	75
4.2	NATURE DU SYSTEME DIFFERENTIEL INITIAL. LINEARISATION	75
4.3	RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS	79
4.4	RESULTATS NUMERIQUES	80
4.4.1	VALIDATION DE L'EQUATION D'EVOLUTION POUR LA PRESSION	80
4.4.2	INFLUENCE DU SEQUENCEMENT	81
4.4.3	EXPERIENCE DE OHL	84
4.4.4	CONCLUSION	84
4.5	CONTRIBUTION DES DIFFERENTS TERMES DE L'EQUATION D'EVOLUTION	85
4.6	CONCLUSION	85
5	CONCLUSION GENERALE	87
6	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	89
7	ANNEXE 1	101
7.1	CALCUL DE LA DIVERGENCE POLYNOMIALE	101
8	ANNEXE 2	103
8.1	LES VALEURS DES PROPRIETES PHYSIQUES DE L'EAU	103

Table des figures

1	<i>Diagramme des états d'un corps et courbes de changement de phase (P,T)</i>	11
1.1	<i>Algorithmes de reconstruction SLIC</i>	16
1.2	<i>Algorithmes de reconstruction VOF</i>	17
1.3	<i>Algorithmes de reconstruction PLIC</i>	17
1.4	<i>Algorithmes de reconstruction MAC</i>	19
1.5	<i>Profil bidimensionnel partiellement cavitant</i>	20
1.6	<i>Différents types de modèles de fermeture</i>	22
1.7	<i>Evolution d'une bulle soumise à une pression extérieure sinusoïdale ($R_0 = 50\mu m$, $\sigma = 3$, $Cp = -5$. $Re = 350$, $We = 34.17$, $P_0 = 10^5 Pa$)</i>	27
1.8	<i>Loi barotrope</i>	27
2.1	<i>Nuage de bulle dans deux séquences successives</i>	36
2.2	<i>Positionnement de deux bulles sur leur ligne des centres \vec{ox}</i>	38
2.3	<i>Interface liquide-vapeur</i>	41
2.4	<i>Evolution des bulles 1 et 2 pour différentes pressions de gaz avec $R_{20} = 1\mu m$ et un rapport R_{10}/R_{20} de 0.7</i>	51
2.5	<i>Evolution des bulles 1 et 2 pour différentes pressions de gaz avec $R_{20} = 10\mu m$ et un rapport R_{10}/R_{20} de 0.7</i>	51
2.6	<i>Evolution des bulles 1 et 2 pour différents n_m^3 avec $R_{20} = 10\mu m$, $p_{g20} = 1000 Pa$ et un rapport R_{10}/R_{20} de 0.7</i>	55
2.7	<i>Evolution de la bulle 2 pour différents tests d'arrêt avec $R_{20} = 10\mu m$, un rapport R_{10}/R_{20} de 0.8, une expansion de $0.15 \cdot 10^{-5}$, une fonction constante comme divergence : $div \vec{U}(t) = 1507.70 s^{-1}$ et un volume de contrôle initiale de $0.125 mm^3$</i>	57
2.8	<i>Evolution de la bulle 2 pour différents rapports R_{10}/R_{20} avec $R_{20} = 10\mu m$, une expansion de $0.15 \cdot 10^{-5}$, une fonction constante : $div \vec{U}(t) = 1507.70 s^{-1}$ et un volume de contrôle initiale de $4.10 mm^3$</i>	58
2.9	<i>Evolution de la bulle 2 pour différents rapports R_{10}/R_{20} avec $R_{20} = 10\mu m$, une expansion de $0.15 \cdot 10^{-5}$, une fonction affine : $div \vec{U}(t) = 1507.70 s^{-1} (T - t) / T$, $T = 10\mu s$ et un volume de contrôle initiale de $0.125 mm^3$</i>	58

2.10	<i>Variation du rayon R_2 en fonction du temps, pour différents rayon initial R_{20} avec une divergence linéaire de pente 1507.70 s^{-2}, un volume de contrôle initial de $4.10 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$ et un rapport R_{10}/R_{20} de 0.3</i>	59
2.11	<i>Zoom des courbes de pression pour différentes hypothèses de raccordement, teste arrêt de 0.5, $R_{20} = 1 \mu\text{m}$ et un rapport R_{10}/R_{20} de 0.22. . .</i>	61
3.1	<i>La photographie des appareils de l'expérience de Ohl</i>	64
3.2	<i>Comparaison rayon expérimental et numérique pour une fonction affine décroissante : $\text{div}U(t) = 10051,33(3-t)/3$: de durée d'imposition $3\mu\text{s}$ et $\text{div}U(t) = \text{div}_0(4-t)/4$: de durée d'imposition $4\mu\text{s}$</i>	67
3.3	<i>Comparaison rayon expérimental et numérique pour une fonction linéaire $\text{div}U(t) = \text{div}_0 * t$: de durée d'imposition $3\mu\text{s}$ et $4\mu\text{s}$</i>	67
3.4	<i>Comparaison rayon expérimental et numérique pour des fonctions exponentielles $\text{div}U(t) = \text{div}_0(1 - \exp(-t/T))$: de durée d'imposition $3\mu\text{s}$ et $4\mu\text{s}$ avec $T = 0.1\mu\text{s}$</i>	68
3.5	<i>Comparaison rayon expérimental et numérique pour des fonctions polynômiales $\text{div}U(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$: de durée d'imposition $3\mu\text{s}$ et $4\mu\text{s}$</i>	68
3.6	<i>Evolution de la pression numérique pour les fonction linéaire et exponentielle : durée d'imposition $3\mu\text{s}$.</i>	69
3.7	<i>Evolution de la pression numériques pour une fonction polynômiale $\text{div}U(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$: de durée d'imposition $3\mu\text{s}$ et $4\mu\text{s}$.</i>	70
3.8	<i>Evolution de la pression numériques avec $R_{20} = 10 \mu\text{m}$ pour une fonction polynômiale $\text{div}U(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$: de durée d'imposition $3\mu\text{s}$</i>	70
3.9	<i>Evolution de la pression numériques avec une divergence polynômiale $\text{div}U(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$: de durée d'imposition $3\mu\text{s}$ pour différents T_V.</i>	71
3.10	<i>Evolution du rayon numérique pour une fonction polynômiale $\text{div}U(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$: de durée d'imposition $3\mu\text{s}$ avec $T_V = 3.4\mu\text{s}$.</i>	72
3.11	<i>Evolution du rayon numériques pour une divergence polynômiale $\text{div}U(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$ en deux phases avec des expansions de $2.5 \cdot 10^{-3}$ et $2 \cdot 10^{-2}$: de durée d'imposition $3\mu\text{s}$ avec $T_V = 0.1\mu\text{s}$.</i>	72
3.12	<i>Evolution de la pression numériques pour une divergence polynômiale $\text{div}U(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$ en deux phases avec des expansions de $2.5 \cdot 10^{-3}$ et $2 \cdot 10^{-2}$: de durée d'imposition $3\mu\text{s}$ avec $T_V = 0.1\mu\text{s}$.</i>	73
4.1	<i>Evolution des termes en $[\ddot{V}]$, $[\dot{V}]^2$ et $[\dot{V}]$ pour une fonction de divergence polynômiale avec une expansion de $1 \cdot 10^{-7}$: de durée d'imposition $10\mu\text{s}$.</i>	77
4.2	<i>Evolution des termes en $[\ddot{V}]$, $[\dot{V}]^2$ et $[\dot{V}]$ pour une fonction de divergence polynômiale avec une expansion de $1 \cdot 10^{-5}$: de durée d'imposition $10\mu\text{s}$</i>	77
4.3	<i>Evolution des termes en $[\ddot{V}]$, $[\dot{V}]^2$ et $[\dot{V}]$ pour une fonction de divergence polynômiale avec une expansion de $1 \cdot 10^{-3}$: de durée d'imposition $10\mu\text{s}$.</i>	78

4.4 Comparaison des résultats du problème en pression et ceux du problème en rayon, avec $q_0 = 0$: pour une fonction de divergence polynômiale $divU(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$: de durée d'imposition $3\mu s$ avec $T_V = 2\mu s$, et une fonction de divergence exponentielle $divU(t) = divU_0(1 - \exp(-t/T))$: de durée d'imposition $10\mu s$ avec $T = 1\mu s$ 81

4.5 Comparaison des résultats du problème en pression et ceux du problème en rayon, avec $q_0 \neq 0$ pour une fonction de divergence polynômiale $divU(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$: de durée d'imposition $3\mu s$ avec $T_V = 2\mu s$ 82

4.6 Evolution de la pression de l'équation d'évolution pour différents k : $R_{10} = k R_2$, pour une fonction de divergence polynômiale avec une expansion de $1. 10^{-3}$: de durée d'imposition $8\mu s$ 83

4.7 Evolution de la pression de l'équation d'évolution pour différents k : $R_{10} = k R_2$, pour une fonction de divergence polynômiale avec une expansion de $1. 10^{-3}$: de durée d'imposition $8\mu s$ 83

4.8 Evolution de la pression du modèle en pression pour une divergence polynômiale $divU(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$ en deux phases avec des expansions de 2.510^{-3} et $2. 10^{-2}$: de durée d'imposition $3\mu s$ 84

4.9 Evolution des termes en $[\ddot{q}_m, [\dot{q}_m, q_m^2$ et q_m pour le cas de la simulation de Ohl 85

7.1 Divergence polynômiale adimensionnée avec une durée d'imposition de $3\mu s$ 102

Résumé

Ce travail de thèse porte sur la modélisation de la cavitation, phénomène par lequel se forment des bulles quasi vide dans un liquide en dépression. L'étude de la cavitation a donné lieu dans la littérature à plusieurs modèles. La quasi totalité de ces modèles font abstraction des interactions entre les bulles et de l'augmentation de la pression qui en résulte dans certaines phases d'évolution de la cavitation, comme l'ont observé expérimentalement Franc et al. (1995) et de Ohl (2002).

Dans notre travail nous proposons un nouveau modèle d'évolution de la taille des bulles, dans lequel deux bulles non identiques sont localisées dans un volume en expansion contrôlée. La présence de deux bulles introduit une instabilité dans laquelle l'échange de vide apparaît comme un degré de liberté supplémentaire. Notre modèle inclut la possibilité pour de nombreuses petites bulles de disparaître ou non selon leur rayon. Selon ce modèle il peut y avoir de nombreux collapsés de petites bulles dès l'apparition de la cavitation, ce qui est conforme à l'observation expérimentale d'un bruit dans la zone d'apparition de la cavitation Buogo et al. (2002).

Le modèle révèle la pression comme une inconnue du problème pour laquelle nous avons pu mettre en évidence une équation d'évolution indépendante de celle de la masse volumique.

La comparaison de la taille des bulles et de la pression en fonction du temps obtenue avec le modèle est en bon accord avec les mesures effectuées en 2002 par Ohl.

Abstract

This thesis work concerns the modeling of cavitation, phenomenon by which bubbles quasi empty in a liquid in depression are formed. The cavitation study gave in the literature several models. Almost the whole of these models make abstraction of the interactions between the bubbles and the pressure increase which results in certain phases of evolution of cavitation, like observed in experiments by Franc et Al (1995) and Ohl (2002).

In our work we propose a new model of the bubble sizes evolution, in which two no identical bubbles are localized in a volume expanding controlled. The presence of two bubbles introduces an instability in which the exchange of vacuum seems a supplementary degree of freedom. Our model includes the possibility for many small bubbles to disappear or no according to whether their radius is lower or not with the critical radius. According to this model, there can be many collapsés of small bubbles to the cavitation appearance, which is in conformity with the experimental observation of a noise in the zone of cavitation appearance Buogo et al (2002). The model reveals the pressure as an unknown factor of the problem for which we could highlight an evolution equation independent of that of the mass flow.

The comparison of the bubble sizes and the pressure according to time obtained with the model is in concord with the measurements taken into 2002 by Ohl.

Nomenclature

SYMBOLES LATINS

\vec{e}_x	Base locale
x	Coordonnée spatiale
q	Débit volumique dimensionné
q_1	Débit de la bulle 1
q_2	Débit de la bulle 2
q_m	Débit dû à la divergence imposée
\dot{q}_1	derivée par rapport au temps du débit de la bulle 1
\dot{q}_2	derivée par rapport au temps du débit de la bulle 2
\dot{q}_m	derivée par rapport au temps du débit dû à la divergence imposée
V_{10}	Volume initial de la bulle 1
V_{20}	Volume initial de la bulle 2
V_{con}	Volume de contrôle initial de la bulle 1
V_{div}	Volume dû à la divergence imposée
V_{qm}	Volume dû à la divergence imposée
V	Volume d'échange
\dot{V}	débit d'échange
V_i	Vitesse de l'écoulement de la phase i
r	le rayon local
V_θ	Vitesse suivant l'angle θ
V_φ	Vitesse suivant l'angle φ
V_r	Vitesse radiale
F	Potentiel
p_c	Pression du milieu ambiant
p_{int}	Pression vapeur-gaz
p_{ext}	Pression fluide
p_v	Pression de vapeur saturante du fluide
p_1	Pression du fluide à l'interface de la bulle 1
p_2	Pression du fluide à l'interface de la bulle 2
p_g	Pression des gaz partiels
p_{g1}	Pression des gaz partiels de la bulle 1
p_{g2}	Pression des gaz partiels de la bulle 2
p_{g01}	Pression initiale des gaz partiels de la bulle 1
p_{g02}	Pression initiale des gaz partiels de la bulle 2
C_p	coefficient de pression

m_{g0}	Masse initiale du gaz de la bulle 2
m_g	Masse des gaz partiels
M_g	Masse des gaz partiels
r_c	Constante des gaz parfaits
T_g	Température des gaz
R	Rayon de la bulle
R_0	Rayon initial de la bulle
R_1	Rayon de la bulle 1
R_2	Rayon de la bulle 2
R_c	Rayon critique
\dot{R}_1	la vitesse de l'interface de la bulle 1
\dot{R}_2	la vitesse de l'interface de la bulle 2
R_{10}	Rayon initial de la bulle 1
R_{20}	Rayon initial de la bulle 2
$rap0$	rapport initial R_{10}/R_{20}
\dot{R}_{10}	la vitesse de l'interface initiale de la bulle 1
\dot{R}_{20}	la vitesse de l'interface initiale de la bulle 2
n_m^3	nombre maximum de fragments de bulles après fission
R_{min}	Rayon minimum après fission
S	Tension superficielle du fluide
S_s	Terme source
t	Temps
We	Nombre de Webber
Re	Nombre de Reynolds
N_{seq}	nombre de séquence

SYMBOLES GRECS

ϕ	Fonction distance
α	Taux de vide
σ	nombre de cavitation
ρ	Densité du fluide
ρ_l	Densité du liquide
ρ_g	Densité des gaz partiels
ρ_m	Densité moyenne du fluide
μ	Viscosité dynamique du fluide
δR	Déséquilibre entre les deux bulles
δR^*	Déséquilibre adimensionné entre les deux bulles

Chapitre 0

INTRODUCTION GENERALE

La cavitation peut se définir à l'échelle moléculaire comme une rupture des liaisons moléculaires d'un fluide soumis à des contraintes plus fortes que celle de van der Waals. C'est un phénomène par lequel se forment des bulles quasi vides dans un fluide en dépression au cours d'un processus isotherme. Ainsi ces bulles sont, à différencier avec des bulles de vapeur de l'ébullition produite par suite d'un apport de chaleur : voir figure 1. La dépression peut être d'origine hydrodynamique liée à un écoulement à forte vitesse, exemple au voisinage d'une pale dans une pompe ou encore sur une hélice de bateau ou de sous-marin, ou bien dans les circuits hydrauliques. Elle peut être aussi d'origine acoustique ou électrique.

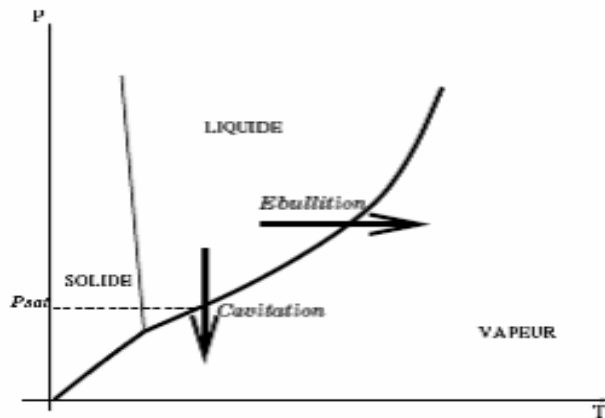


FIG. 1 – Diagramme des états d'un corps et courbes de changement de phase (P, T)

L'apparition de la cavitation est très influencée par plusieurs facteurs, dont le plus important sont les micro-inclusions gazeuses appelées germes de cavitation. Liu et al. (1993) ont mesuré leur population. La structure d'un écoulement cavitant est extrêmement complexe, les états physiques (masse volumique, pression, vitesse...) des deux phases sont très différents.

Les effets de la cavitation sont le plus souvent nuisibles (bruits, érosions, vibrations...). Une fois apparue, les bulles implosent violemment dans les zones où la pression est

supérieure à celle de la vapeur. Au cours de ce processus, la vitesse et la pression au voisinage immédiat des interfaces sont très grandes. Il se produit un micro-jet qui, au voisinage d'une paroi solide peut l'endommager en créant un micro-cratère. Dans ce sens Fortes-Patella et al. (2000) ont proposé une technique de mesure de dommages des matériaux dû à un écoulement cavitant en utilisant la profilométrie laser 3D.

Le phénomène de la cavitation a donné lieu à un grand nombre d'études dans la littérature. Astolfi (2003, pp-11) estime que ceci est dû à quatre facteurs. Le premier est la diversité des applications dans lesquelles elle se développe : machines hydrauliques (turbines, propulseurs...), le domaine biomedical... Le deuxième facteur est lié aux différentes formes qu'elle est susceptible de prendre : bulles, poches, tourbillons, nuages de vapeur, filaments de vapeur. Le troisième est lié aux comportements complexes que la cavitation peut adopter dans certaines situations : instationnarités, instabilités, interactions, couplages. Enfin, l'intérêt que l'on continue à lui porter réside dans les interrogations propres à l'hydrodynamique qu'elle soulève : l'influence des paramètres fondamentaux de l'hydrodynamique (la tension superficielle, la viscosité, la qualité de l'eau...).

Malgré tous ces champs d'applications dans lesquelles la cavitation se développe son étude est du domaine de la recherche fondamentale. Sa modélisation va continuer à susciter beaucoup d'intérêt. Notre travail se place dans ce contexte.

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres :

Le premier chapitre comprend une description des différents modèles et du phénomène au travers d'une étude bibliographique. Dans la première partie nous avons classé en deux groupes les modèles qui existent dans la littérature et nous avons fait une étude détaillée des leurs avantages et inconvénients. Nous terminons ce chapitre par une étude sur l'apparition de la cavitation, qui nous a conforté dans l'idée d'étudier l'évolution d'un nuage de bulles qui interagissent entre elles grâce à un échange de vide.

Notre nouveau modèle, où deux bulles non identiques, localisées dans un volume de contrôle en expansion contrôlée, échangent du volume au cours de leur évolution, est détaillé dans le deuxième chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à la validation avec l'étude expérimentale de Ohl (2002) où la taille des bulles et la pression sont mesurées en fonction du temps. Les résultats obtenus sont en bon accord avec l'expérience.

Le quatrième chapitre aborde l'objectif principal de cette thèse qui est l'équation d'évolution pour la pression. L'obtention de cette équation à été possible grâce à la résolution du système d'équations du modèle par la méthode de l'élimination différentielle. Ce Chapitre analyse la nécessité du calcul du rayon des bulles et propose une piste pour éviter ce calcul.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion générale, dans laquelle nous faisons une synthèse de tout notre travail et proposons quelques perspectives.

Chapitre 1

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 INTRODUCTION

La cavitation est l'un des phénomènes les plus complexes de la mécanique. Elle associe plusieurs aspects physiques : le diphasique, l'échange de masse et de chaleur entre phases, l'instationnarité, la vibration, l'acoustique... Cette complexité peut expliquer l'existence d'une multitude de modèles dans la littérature. La majorité de ces modèles ciblent un certain type de forme de cavitation avec des hypothèses simplificatrices. Beaucoup de ces modèles font abstraction de l'origine du problème et de certains des phénomènes qui se manifestent au cours de son apparition.

Les différents types de modèles peuvent se classer en gros en deux groupes : les modèles à 2-fluides et les modèles à 1-fluide. Il faut noter que, mis à part ces deux groupes de modèles, il existe quelques techniques semi-empiriques utilisées par les constructeurs d'appareils véhiculant du liquide, pour estimer les limites de cavitation des ces machines. Sauvage-Boutar & Desclaux (1991) pour déterminer le NPSE (Energie massique nette à l'aspiration "Net Positive Suction Energie") pour le prédimensionnement des inducteurs des moteurs de fusées. Dans cette étude bibliographique nous essayons de faire une étude détaillée des avantages mais surtout des inconvénients des différents modèles des deux groupes cités ci-dessus.

1.2 MODELES A 2-FLUIDES

1.2.1 INTRODUCTION

Les modèles de cavitation à deux-fluides dérivent de ceux des écoulements multifluides classiques. La modélisation des écoulements industriels multiphasiques nécessitent des modèles bien spécifiques et généralement validés dans le cadre des dites études. Les modèles traitent les phases en présence comme des fluides distincts.

Ainsi, les modèles de cavitation à deux-fluides considèrent la phase liquide et la phase vapeur non miscibles. On a principalement deux types d'approches dans ces modèles :

1.2.2 MODELES MULTIPHASIQUES

Les modèles multiphasiques sont basés sur la modélisation classique d'un écoulement multiphasique, avec l'utilisation des équations de continuité et de quantité de mouvements distinctes pour chaque phase. Une forme générale de ces équations a été proposée par Delhaye (1968) et Ishii (1975 pp. 183).

Ainsi, les équations de continuité pour les k phases sont :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_k \rho_k V_{k,i}) = \sum_{l=1, l \neq k}^{n_k} \Gamma_{kl}$$

n_k : le nombre de phases, $n_k = 1, 2$, dans le cas de la cavitation. De même les équations de quantité de mouvement pour les k phases sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k V_{k,i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_k \rho_k V_{k,i} V_{k,j}) = & -\alpha_k \frac{\partial p_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_k (\tau_{k,ij} + \tau_{k,ij}^t)) \\ & + \alpha_k \rho_k g_i + M_{k,i} + \sum_{l=1, l \neq k}^{n_k} V_{k,j} \Gamma_{kl}. \end{aligned}$$

Γ_{kl} : Représente le terme de transfert de masse entre la phase k et l .

$M_{k,i}$: Représente le terme de transfert de quantité de mouvement entre phases

(Grogger & Alajbegovic 1998; Alajbegovic et al. 2002; Kunz et al. 2003) ont choisi cette approche pour modéliser des écoulements cavitants. Pour modéliser le terme de transfert de masse entre les phases, Grogger & Alajbegovic (1998) ont utilisé une forme simplifiée de l'équation de Rayleigh-Plesset et une loi de la traînée d'une sphère pour modéliser le transfert de quantité de mouvement. Kunz et al. (1999) ont utilisé eux, une forme simplifiée du potentiel de Ginzburg-Landau Hohenberg & Halperin pour modéliser le transfert de masse, alors que celui de quantité de mouvement est nul, car ils font l'hypothèse d'une vitesse moyenne pour les deux phases, et d'une vitesse de glissement nulle entre les deux phases.

1.2.3 METHODES DE MODELISATION DE L'INTERFACE LIQUIDE-VAPEUR

Les approches qui utilisent les méthodes de l'interface liquide-vapeur sont basées sur des méthodes de suivi ou de capture d'interface. Elles font l'hypothèse d'un écoulement de deux fluides non miscibles et de l'existence d'une surface de discontinuité qui sépare les deux fluides, appelée surface libre. Les principales difficultés de ces méthodes sont la localisation et la définition de cette interface. La localisation et la définition de l'interface sont nécessaires pour modéliser les phénomènes physiques situés sur la surface libre.

Ces méthodes se différencient surtout par l'utilisation des méthodes de recherche d'interface. On a principalement les méthodes suivantes : Les méthodes VOF, les méthodes de particules et la méthode des lignes de niveau.

1.2.3.1 LES METHODES VOF (VOLUME OF FLUID)

Les méthodes VOF construisent la surface libre, à partir de la valeur de la fraction de volume. Il est important de préciser que l'appellation VOF " *Volume Of Fluid* " est une technique de reconstruction de surface libre bien précise, même si généralement elle est associée à toutes les méthodes qui utilisent les fractions de volume pour rechercher la surface libre.

La fraction de volume est une fonction, bornée entre 0 et 1. Elle fournit l'information sur le taux volumique occupé par l'un des deux fluides dans chaque cellule. La fraction de volume est égale à 1, si la cellule est remplie du fluide choisi. Elle est égale à 0, si la cellule ne contient pas le fluide. Elle prend une valeur entre 0 et 1, si la cellule est traversée par l'interface, c'est-à-dire si la cellule contient les deux fluides. La fraction de volume est transportée par les fluides. Ainsi, son évolution est gouvernée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha V_i) = 0$$

α : Fraction de volume.

Dans le cadre de la modélisation de la cavitation par cette approche, certains auteurs (Sauer & Schneer 2000 : modèle implementé dans le code commerciale Fluent 5) introduisent un terme source au niveau de l'équation de fraction de volume, contrairement aux modèles classiques où elle est sans terme source. Ce terme source modélise la vaporisation et la condensation du fluide, c'est-à-dire la création et la destruction du deuxième fluide qui est la vapeur.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha V_i) = S_s$$

S_s : Le terme source

Sauer & Schneer (2000) utilisent l'équation de Rayleigh-Plesset pour modéliser le terme source. Nous parlerons de cette équation plus en détail un peu plus loin.

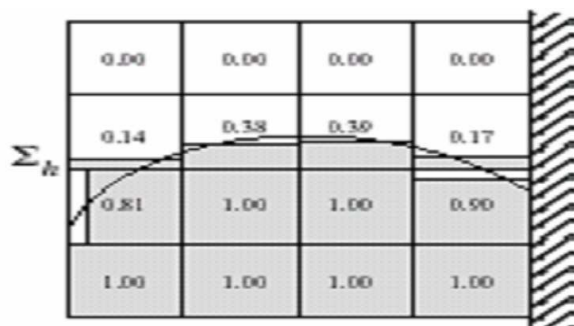
La densité et la viscosité du fluide moyen, qui sont fonction de la fraction de volume, sont déterminées par :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 \alpha + (1 - \alpha) \rho_2 \\ \mu &= \mu_1 \alpha + (1 - \alpha) \mu_2 \end{aligned}$$

Les méthodes VOF (*Volume Of Fluid*) se différencient aussi au niveau des techniques de reconstruction des interfaces.

Méthode SLIC

La méthode SLIC “*Simple Line Interface Calculation*” est une technique de reconstruction d’interface très élémentaire. La surface libre est représentée par des droites parallèles normales à la direction de transport des volumes de fluide. Comme on peut le voir sur la figure 1.1. C’est une méthode moins exigeante.



(b) SLIC

FIG. 1.1 – Algorithmes de reconstruction SLIC

Méthode VOF

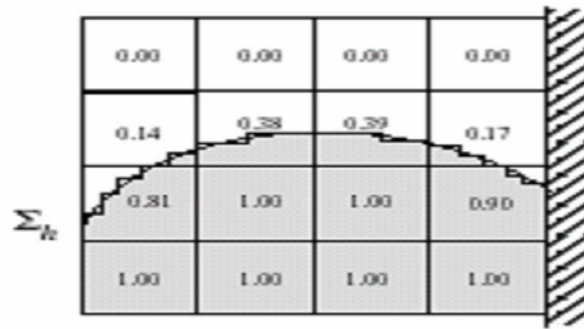
La méthode VOF a été proposée par Hirt et Nichols (1981). Elle construit l’interface par des segments parallèles aux axes de référence. Son grand avantage par rapport à celle de SLIC, est qu’elle permet surtout des changements de direction de segments des droites représentant la surface libre dans une cellule, ce qui donne une interface en forme d’escalier voir figure 1.2. Cette méthode est la plus utilisée dans le cas de la modélisation de la cavitation (Dieval 2000).

Méthode PLIC

La méthode PLIC “*Piecewise Linear Interface Connection*” connue aussi sous le nom de VOF CIAM “*Calcul d’Interface Affiné par Morceaux*” a été introduite par Youngs (1982). Cette méthode donne une plus grande précision. Elle est la plus utilisée dans le cadre de la modélisation des écoulements multifluides, même si elle est difficile à implémenter (voir figure 1.3).

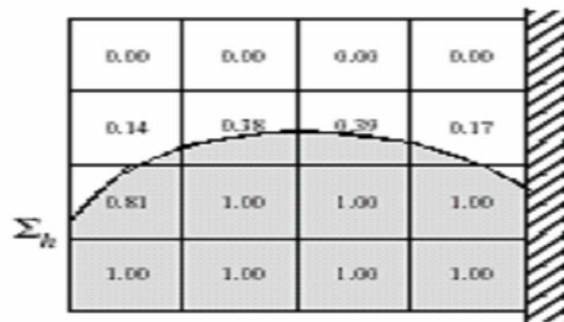
La méthode de VOF CIAM se décompose en trois étapes : la première étape consiste à construire la surface libre à partir de la fraction de volume, la deuxième, consiste à advecter l’interface par une méthode lagrangienne avec une vitesse déterminée par une interpolation linéaire, et la troisième à calculer la nouvelle fraction de volume.

Pour améliorer les résultats, certaines des méthodes VOF ont été adaptées. Ainsi, Puckett & Saltzman (1992) ont utilisé la méthode PLIC avec l’approche AMR “*Adaptive*



(c) VOF

FIG. 1.2 – Algorithmes de reconstruction VOF



(d) PLIC

FIG. 1.3 – Algorithmes de reconstruction PLIC

Mesh Refinement". Jeong & Yang (1998) ont utilisé la même approche, mais avec la méthode VOF.

1.2.3.2 LA METHODE DES LIGNES DE NIVEAU “Level Set Method”

Dans un écoulement multiphasique, les fluides ont des propriétés physiques différentes. Ces dernières sont alors des fonctions non continues à l'interface. Partant de ce fait, il existe des schémas de capture de choc, pour déterminer l'interface. Les méthodes numériques utilisées pour conserver la continuité à l'interface introduisent une diffusion numérique. C'est dans ce cadre que la méthode des lignes de niveau a été proposée par Sussman et al. (1994), pour pouvoir apporter une solution au problème de diffusion numérique, qui est un inconvénient dans la précision de la surface libre.

Il définit une fonction distance $\phi(t, x)$:

$$\phi(t, x) \begin{cases} < 0 & \text{dans le fluide 1,} \\ = 0 & \text{à l'interface,} \\ > 0 & \text{dans le fluide 2.} \end{cases}$$

Comme dans le cas des fractions de volume, la fonction distance suit les fluides dans leur mouvement respectif. Elle est advectée par l'écoulement. Ainsi, on a l'équation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V \cdot \nabla \phi = 0$$

La densité et la viscosité du fluide fonction de la fonction distance, sont déterminées par :

$$\begin{aligned} \rho(\phi) &= \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) H(\phi) \\ \mu(\phi) &= \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) H(\phi) \end{aligned}$$

Avec $H(\phi)$, fonction de Heaviside :

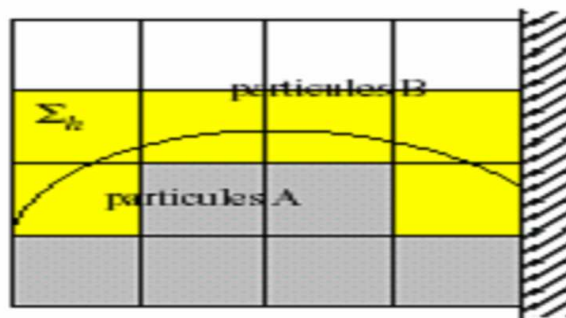
$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi < 0 \\ 1/2 & \phi = 0 \\ 1 & \phi > 0. \end{cases}$$

Cette méthode a été utilisée par Kawamura & Sakoda (2003) pour simuler la cavitation.

1.2.3.3 LES METHODES DE PARTICULES

Le principe des méthodes de particules est de définir chaque fluide par un ensemble de particules numériques. On peut citer la méthode MAC "Marker And Cell" (Harlow et Welch 1965) ou celle de PIC (Harlow 1988). L'interface est interpolée à partir des particules de fluides voisines (voir figure 1.4).

La répartition des particules peut être une source de problème, car on a une bonne précision dans les régions du domaine où on a une accumulation des particules et une perte de précision dans celles où elles sont mal représentées. Les méthodes de particules nécessitent une grande capacité de stockage. La grande quantité de particules à transporter en font une méthode coûteuse, mais elle nous permet d'obtenir une précision arbitrairement grande Dufour (1999, pp. 64).



(a) MAC

FIG. 1.4 – Algorithmes de reconstruction MAC.

1.2.4 CONCLUSION

Les modèles à 2-fluides sont surtout adaptés à des écoulements de phases bien séparées ou des écoulements bien ciblés. Par exemple Hirt & Nichols (1981) pour modéliser la dynamique d'une frontière libre. Lance & Bataille (1991); Mahjoub (1995) pour modéliser des bulles de gaz attachées à des corps en mouvement et Gregor et al. (2000) pour modéliser l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans un canal.

Et même si ces modèles ont donné des très bons résultats, dans certains cas d'écoulements cavitants (Dieval et al. 1998; Sauer & Schnerr 2000; Berntsen et al. 2001), ils ne sont pas toujours bien adaptés pour ces derniers, car la cavitation est un phénomène, où les deux phases sont très mélangées et extrêmement instables. En outre beaucoup de ces modèles ont besoin de plusieurs constantes empiriques et sont ainsi validés seulement pour un nombre limité de problèmes d'écoulements cavitants.

1.3 MODELES A 1-FLUIDES

1.3.1 INTRODUCTION

Contrairement aux modèles à 2-fluides, les modèles à 1-fluide reformulent les équations diphasiques pour que n'interviennent seulement que les équations d'un fluide équivalent aux propriétés physiques variables. Les modèles abandonnent la reconstruction explicite de l'interface au profit d'une représentation isovaleur des propriétés physiques du fluide moyen. Ils traitent les deux phases comme un seul fluide continu, homogénéisé, avec une masse volumique moyenne. Les modèles à 1-fluide sont les plus utilisés pour simuler la cavitation. Il y a une multitude d'approches avec principalement deux points antagonistes.

1.3.2 MODELES STATIONNAIRES AVEC POCHE DE CAVITATION

1.3.2.1 PRINCIPE DU MODELE

La plupart des modèles stationnaires sont basés sur la théorie des sillages. Ils ne s'intéressent qu'à la phase stationnaire moyenne de la cavitation et ne traitent que les poches de cavitation accrochées à des profils. Ils sont basés sur une capture de l'interface vapeur-fluide. Cette interface est représentée par une ligne de courant à pression constante $P = P_V$, avec P_V la pression de la vapeur saturante, qui est aussi celle de toute la poche. La partie arrière de cette dernière appelée sillage est modélisée d'une façon indépendante, mais tout en assurant la continuité de la poche. Ainsi, seule la partie externe de la poche est modélisée comme un écoulement non cavitant, avec des conditions aux limites non linéaire représentées par les hypothèses faites sur la poche (voir la figure 1.5). En résumé, ces modèles sont basés sur les hypothèses suivantes :

- la poche est limitée par une surface de courant
- le sillage est modélisé par une pression uniforme
- le profil initial est remplacé par un nouveau profil, qui prend en compte la forme de la poche. Ainsi, à chaque itération, un nouveau profil est déterminé d'une manière explicite en fonction de la pression, jusqu'à la convergence.

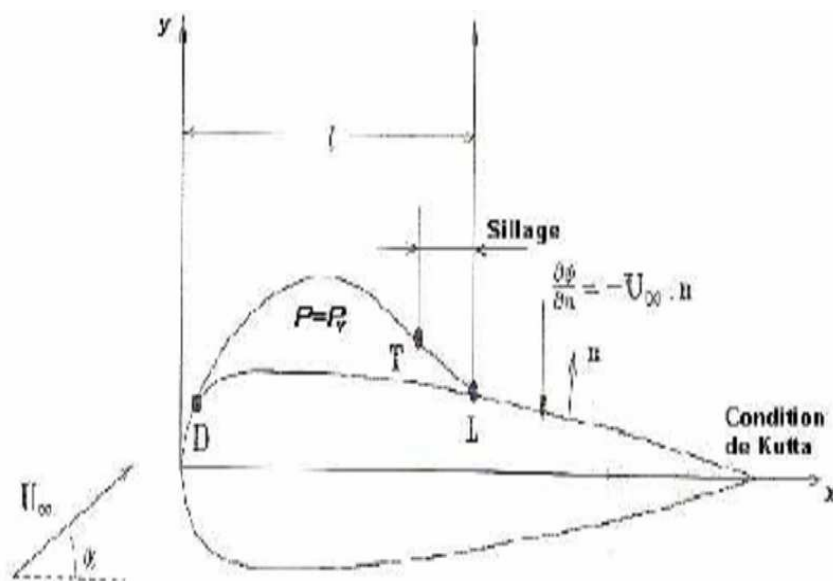


FIG. 1.5 – Profil bidimensionnel partiellement cavitant

Les difficultés majeures de ces méthodes sont le choix de la position du point de détachement de la poche et la modélisation de sa zone de fermeture, c'est-à-dire le

sillage. Ainsi, dans une étude de recherche expérimentale et de traitement numérique de la cavitation et de la couche limite, Franc & Michel (1985) résument la partie approche numérique, en affirmant que l'approche proposée est commode pour décrire toutes les caractéristiques d'un écoulement largement cavitant autour d'un corps mince. Mais elle doit être complétée par un examen prudent des influences de la fermeture et de la position du détachement de la poche. Kinnas & Fine (1989) affirment dans le même sens, que la forme et la longueur de la poche peuvent dépendre critiqueusement du modèle de fermeture et de la position du détachement.

1.3.2.2 POINT DE DETACHEMENT

Nous précisons que la position du point de détachement de la poche est différente de celle du décollement laminaire. Le point de détachement est un point très important dans une étude de modélisation numérique stationnaire. Elle permet de bien localiser et de bien définir la poche. La position du détachement de la poche a une importante influence sur l'aspect quantitatif de la forme de la poche Lemonnier et Rowe (1988). Auparavant dans une étude expérimentale, Franc & Michel (1985) confirment cette remarque, en affirmant que ce point peut avoir un effet significatif sur l'étendue et le volume de la poche.

La condition du détachement régulier (lisse), connue aussi sous le nom de condition de Brillouin-Villat, permet de déterminer la position du détachement de la poche. Cette condition impose certaines exigences :

- la pente de la poche au point du détachement est égale à celle de la surface du profil,
- la poche ne doit pas couper le profil au bord d'attaque,
- la pression sur le profil en amont de la poche est supérieure à celle de la poche,
- la pente de la distribution de la pression au bord d'attaque du profil est nulle.

Les observations expérimentales contredisent les résultats obtenus par la condition du détachement lisse. Ainsi Arakeri (1975) a affirmé que la position du détachement de la poche retrouvée expérimentalement se trouve considérablement en aval de celle prédite par la condition lisse. Ceci a été observée aussi par Franc & Michel (1985). L'une des exigences de la condition lisse, est que la pression sur le profil en amont de la poche est supérieure à celle de la poche. Cette exigence est en contradiction totale avec des études expérimentales (Arakeri 1973 ; Arakeri 1975 ; Franc & Michel 1985), car ces dernières montrent l'existence d'une zone entre la position du détachement laminaire et celle du détachement de la poche où la pression est inférieure à celle de la poche. C'est dans ce sens que Arakeri (1975) a développé un modèle semi-empirique qui, permet de déterminer la position du détachement de la poche, en connaissant celle du décollement laminaire dans les conditions non cavitant, sur des corps lisses possédant une couche limite laminaire. Cependant la formule est applicable seulement dans un intervalle de nombre de Reynolds. Par exemple pour un cylindre, le modèle donne des très bons

résultats comparés avec ceux de l'expériences à $Re = 10^4$, mais donne une différence de 10% à $Re = 10^5$. Franc & Michel (1985) ont dans le même sens proposé pour le cas d'un profil un nouveau critère du détachement, lequel prend en compte le lien entre le calcul d'écoulement potentiel cavitant et celui de la couche limite. Pour plus du détail sur le critère voir Franc et al. (1995, pp-150).

1.3.2.3 MODELES DE FERMETURE

Même dans le cas d'une poche de cavitation accrochée, l'arrière de cette dernière est une region diphasique, turbulente où la vaporisation et la condensation qui se fait à très grande vitesse gènèrent l'instationnarité et l'instabilité. L'une des difficultés des modélisations de la zone de fermeture de poche de cavitation, est d'annuler la vitesse constante sur la ligne de courant qui forme la poche au point de stagnation. Ce dernier point a été retrouvé expérimentalement par Meijer (1959).

Il existe plusieurs modèles de fermeture, dont une vaste revue a été faite par (Tulin 1964 ; Wu 1975), dont on peut voir quelques modèles sur la figure 1.6 suivante :

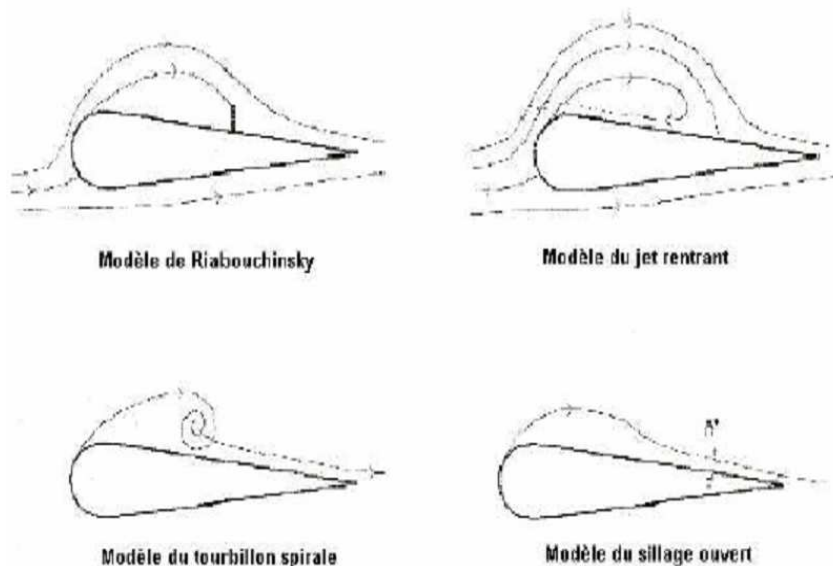


FIG. 1.6 – *Différents types de modèles de fermeture*

Parmi ces modèles, ceux de Riabouchinsky et du jet rentrant présentent une grande caractéristique, celle du point de stagnation à la fin de la poche. Dang & Kuiper (1998) ont utilisé le modèle de jet rentrant, pour étudier la cavitation par poche dans un écoulement autour d'un profil. Lemonnier et Rowe (1988) ont proposé un modèle de pression pour un profil cavitant, où la pression est autorisée à changer dans la zone de fermeture de la poche. Ce modèle a été modifié par Krishnaswany (2000, pp. 38) pour pouvoir incorporer un jet rentrant dans la solution finale.

1.3.2.4 QUELQUES MODELES STATIONNAIRES

Tulin (1953) a été l'un des premiers à proposer une méthode de singularités, pour étudier un écoulement cavitant bidimensionnel stationnaire autour d'un corps mince. Tulin (1964) a aussi proposé une théorie de petite perturbation, pour le cas d'un profil supercavitant. Geurst (1959) a introduit une théorie linéaire, pour modéliser la cavitation partielle. Juste après Geurst (1960) il a encore proposé une théorie linéaire, pour l'étude d'un profil supercavitant.

Wu (1962) a utilisé la méthode de la transformation conforme, pour résoudre la cavitation partielle sur un hydrofoil. Cooper (1967) lui a utilisé une méthode tridimensionnelle, pour modéliser les poches de cavitation qui se développent sur les aubages d'une pompe. La méthode est basée sur un calcul de type S1/S2, où S1 représente les surfaces axisymétriques aube-à-aube et S2 les surfaces méridiennes du moyeu au carter. Certains auteurs ont utilisé la méthode de singularités, pour traiter le problème de la supercavitation. Uhlman (1987) a aussi appliqué la méthode des singularités basée sur le tourbillon de surface. Lemonnier et Rewo (1988) eux ont appliqués la méthode des panneaux dans un souci de diminuer les erreurs de discrétisation.

Il a été constaté que beaucoup des modèles de cavitation partiels linéarisés autour d'un profil à bord d'attaque tranchant montre une sérieuse contradiction. Ils prédisent que le volume d'une poche augmente avec l'augmentation de l'épaisseur du profil, si les conditions de l'écoulement restent les mêmes. Alors que même l'étude expérimentale montre que l'augmentation du rayon du bord d'attaque retarde ou réduit la cavitation au niveau de ce dernier. Kinmas (1991) a corrigé cette contradiction en introduisant une correction du bord d'attaque qui prend en compte l'analyse de la solution linéaire de la poche proche du bord d'attaque tranchant.

La partie externe de la cavité étant seule modélisée, certains modèles stationnaires utilisent les techniques d'élément de frontière et de nos jours le développement informatique permet la prise en compte des effets non linéaires.

1.3.2.5 CONCLUSION

Les modèles stationnaires sont toujours d'actualité, ils donnent de très bons résultats dans les cas de cavitation par poche attachée. Ils sont utilisés par beaucoup d'auteurs (Chen & Heister 1994; Dang & Kuiper 1998; Maitre et al. 1998; Kai & Ikehata 1998; Krishnaswany 2000). Mais leurs très grands inconvénient c'est qu'ils ne permettent pas d'introduire les phénomènes diphasiques, alors que ces derniers sont très importants dans les écoulements cavitants. La non prise en compte de ces phénomènes limite leurs extensions pour les cas instationnaires.

1.3.3 MODELES INSTATIONNAIRES

1.3.3.1 INTRODUCTION

L'instationnarité du phénomène de la cavitation a été mise en évidence dans beaucoup d'expériences (Furness & Hutton 1975; Franc & Michel 1985; Franc & Michel 1988;

Kubota et al. 1989 ; Kubota et al. 1992 ; Stutz & Reboud 1997a). Les modèles instationnaires sont les mieux adaptés pour modéliser la cavitation, car ils tiennent compte de son comportement hautement transitoire. L'essor de ces modèles a été étroitement lié avec le développement des ordinateurs et des méthodes numériques mieux adaptées à restituer les phénomènes physiques, mais il est surtout dû aux développements des techniques expérimentales, qui ont permis une bonne compréhension du phénomène (Fortes-Patella 2000 ; Franc & Michel 1985 ; Reboud & Fortes-Patella 1999 ; Stutz & Reboud 1997b...) et la validation des nouveaux modèles par des résultats expérimentaux, comme l'a recommandé Kinnas (1998).

1.3.3.2 PRINCIPE

Les modèles instationnaires utilisent les équations classiques des écoulements compressibles ou pseudo-compressibles. Ils se différencient surtout par l'équation de fermeture du problème. Ainsi, en se basant sur cette différence les modèles instationnaires peuvent être classés en trois groupes : les modèles utilisant une loi barotrope, ceux utilisant une équation de production/transport du taux de vide, et ceux utilisant une équation sur l'évolution de bulles.

Nous essayerons de donner un développement chronologique de ces différents modèles, mais surtout de relever les incohérences de ces modèles avec les études expérimentales, pour voir les limites de validité de chacun d'eux.

1.3.3.3 MODELES BAROTROPES

Cette approche consiste à proposer une relation entre la densité et la pression. C'est-à-dire lier l'évolution de la densité en fonction de la pression pour fermer le problème physique, d'où l'appellation du modèle barotrope.

Les premiers modèles barotropes tentent d'estimer la vitesse du son en fonction du taux de vide. Ainsi, Jakobsen (1964) a proposé un modèle dynamique à évolution isentropique pour établir une relation entre la vitesse du son du liquide et de la vapeur, et le taux de vide. Cooper (1967), lui a proposé un modèle thermique pour définir une relation entre la vitesse du son du mélange diphasique, le taux de vide et la variation de la pression due à l'effet thermique du changement de phase. Wallis (1969) a proposé une équation qui est très proche de celle que Jakobsen (1964) a donné. Schmidt et al.(1999) et Dumont et al. (2001) en utilisant le modèle de Wallis (1969), ont proposé des fonctions logarithmiques très similaires, comme loi barotrope pour le mélange liquide-vapeur. Récemment Ahuja (2001) a proposé une autre relation entre la vitesse du son du mélange et le taux de vide de la forme :

$$d\rho_m = (\rho_g - \rho_l) d\phi_g + \frac{1}{c_\phi^2} dp$$

$$\frac{1}{c_\phi^2} = \frac{\phi_g}{c_g^2} + \frac{\phi_l}{c_l^2}$$

$$\rho_m = \rho_g \phi_g + \rho_l \phi_l$$

$$\phi_g + \phi_l = 1$$

ρ_m : densité moyenne du fluide

ρ_g : densité du gaz

ρ_l : densité du liquide

c_g : vitesse du son du gaz

c_l : vitesse du son du liquide

ϕ_g : fraction de volume pour la phase gazeuse

ϕ_l : fraction de volume pour la phase liquide

p : pression du fluide

Delannoy (1984) lui a proposé une loi barotrope sinusoidale à vitesse du son minimale réglable, pour modéliser le mélange diphasique. Cette loi détermine uniquement la densité du mélange liquide-vapeur, la densité du liquide et celle la vapeur sont considérées comme constantes. Ce modèle a été utilisé par beaucoup d'auteurs (Delannoy & Kueny 1990 ; Coutier 2001 ; Coutier et al. 2002 ; Coutier & Astolfi 2003). Song & He (1998) ont posé l'hypothèse, selon laquelle l'eau se vaporise ou se condense d'une façon réversible à la pression critique. Ils ont pris la pression critique comme étant celle de la vapeur saturante. Ainsi, ils ont proposé une loi barotrope polynômiale pour la phase gazeuse. Avec la même loi Song & Qin (2001) ont pu capter des ondes de choc de pression générées par le collapse du nuage de vapeur.

Coutier et al. (2002) en reprenant le modèle de Delannoy (1984) ont modélisé des écoulements cavitants instationnaires en utilisant pour la modélisation de la turbulence le modèle $k - \varepsilon$ *RNG* modifié proposé par Reboud et al. (1998) ou le modèle $k - \omega$ proposé par Wilcox (1998). Ce dernier est adapté aux écoulements compressibles. Dans leurs études ils ont constaté l'influence de la compressibilité du mélange diphasique sur la turbulence.

Iga et al. (2002) ont utilisé les équations d'un écoulement compressible, mais sans celle de l'énergie. Ils ont introduit une équation d'un scalaire passif, pour modéliser la fraction de masse. Cette dernière et la température ambiante du fluide prise comme constante sont utilisées pour établir une loi barotrope. Saito et al. (2003) ont repris les équations précédentes, mais en gardant aussi celle d'énergie et en plus ils ont introduit un terme source dans l'équation du scalaire passif. Cette modélisation leur on permis d'observer les ondes de pression causées par le jet re-entrant. En utilisant les équations d'un écoulement compressible d'Euler, Koop et al. (2006) ont très récemment proposé une fonction tangente hyperbolique comme modèle barotrope de la forme suivante :

$$\frac{\rho(p)}{\rho_l} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\rho_v}{\rho_l} + \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l} \right) \tanh \left(\frac{(C_p + \sigma) u_\infty^2}{1 - \frac{\rho_v}{\rho_l} a^2} \right) \right]$$

ρ : la densité du fluide moyen

p : la pression du fluide

ρ_v : la densité de la vapeur

ρ_l : la densité du liquide

C_p : le coefficient de pression

σ : le nombre de cavitation

$a = \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}\right) \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{min}$: un paramètre lié à la vitesse du son minimum

u_∞ : une vitesse de référence

Franc et al. (1995, pp. 410) ont mis en évidence l'augmentation de la pression, lors du développement de la cavitation à bulles, par des mesures de la pression instationnaire synchronisées avec des prises de photos rapides sur un profil. Ce même constat peut être observé dans l'expérience de Ohl (2002), où entre $4\mu s$ et $6\mu s$ on a une augmentation de la pression et un développement de la bulle. Ce fait peut être constaté sur des courbes données par Hsiao & Chahine (2004), ainsi que par Hsiao & Chahine (2005) lors des études numériques de prédiction de l'apparition de la cavitation dans un tourbillon de bout d'aile, où on a effectivement le rayon qui croît alors que la pression environnante continue à croître. De même comme on peut le voir sur la figure 1.7, où nous avons simulé avec l'équation de Gilmore l'évolution d'une bulle soumise à une pression extérieure sinusoïdale, dès que la pression a dépassé son minimum, la bulle elle, continue à croître. La cavitation se poursuit alors même que la pression augmente, comme cela a été constaté dans les travaux des auteurs ci-dessus.

Arakeri (1975) en étudiant les effets visqueux sur la position de la cavitation sur des corps lisses a trouvé une petite région en amont des zones d'apparition de la cavitation où la pression est inférieure à la pression de la vapeur. Arakeri (1973) a noté en étudiant aussi les effets visqueux sur l'apparition de la cavitation, que celle-ci n'a pas pris place dans la zone où de la pression est minimum. Ce fait a été également constaté par Franc & Michel (1985).

Certaines expériences ne sont pas compatibles avec les modèles barotropes. Le retard dynamique observé sur certaines expériences n'est pas accessible avec les modèles barotropes. L'exemple le plus évident de cette désaccord est une augmentation de la pression alors même que la cavitation du fluide se poursuit (Franc et al. (1995, pp. 410) et Ohl (2002)). Ce phénomène déjà observé la figure 1.7, où même sur les courbes numériques présentées par Hsiao & Chahine (2004). Ce dernier exemple montre que la pression n'est pas une fonction croissante de la densité dans l'évolution de la cavitation ce qui est contraire aux lois barotropes proposées dans la littérature, voir figure 1.8 : Delannoy (1984).

Après toutes ces remarques, nous pouvons tirer la conclusion selon laquelle, la modélisation par l'approche barotrope n'est réellement acceptable que dans le cas de la cavitation pleinement développée à grosses bulles contenant une fraction très importante de gaz partiels. Dans le cas où le gaz est pour l'essentiel une pure vapeur, ou même quand le taux de gaz non condensable est faible, ces modèles sont en contradiction avec les expériences. Ces contradictions peuvent être dues à la petite taille des bulles, comme c'est le cas de la cavitation à nuage qui contient de très petites bulles (Kubota et al. 1989; Maeda et al. 1991). Dans ce type de cavitation les effets de la tension superficielle jouent un rôle très important, même si nous savons que ceux de la viscosité et

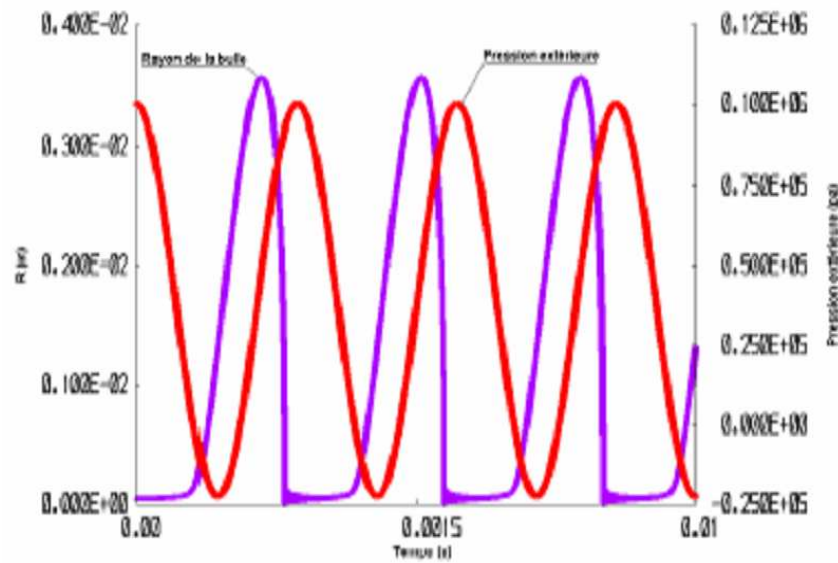


FIG. 1.7 – Evolution d'une bulle soumise à une pression extérieure sinusoïdale ($R_0 = 50\mu\text{m}$, $\sigma = 3$, $C_p = -5$. $Re = 350$, $We = 34.17$, $P_0 = 10^5\text{Pa}$)

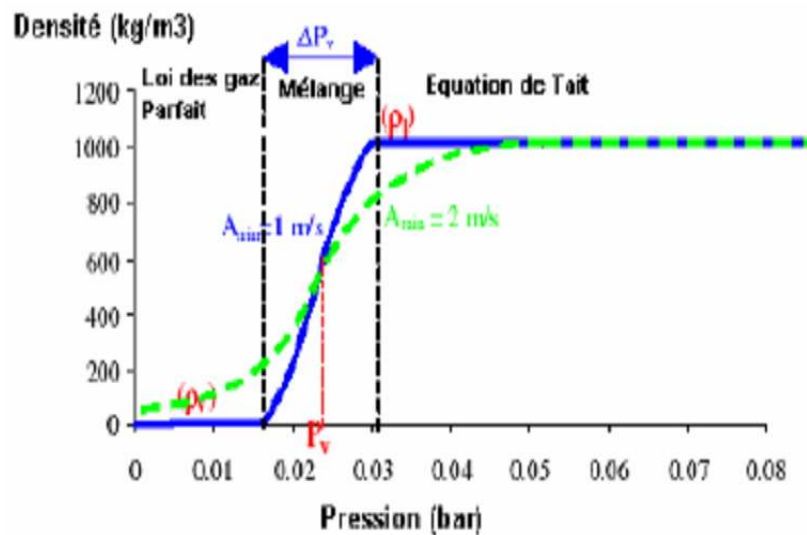


FIG. 1.8 – Loi barotrope.

de l'acoustique interviennent aussi dans l'atténuation de la dynamique des bulles de petite taille, comme l'ont indiqué Plesset & Prosperitti (1977) et confirmé par d'Agostino & Brennen (1989). L'évaluation des forces de tension de surface est primordiale dans les écoulements à surface libre. Vincent & Caltagirone (2003) ont affirmé que l'approximation de la force de tension est le principal défaut des modélisations numériques

eulériennes d'écoulements incompressibles à surface libre.

L'énergie potentielle due à la tension superficielle (l'énergie qu'il faut fournir pour créer une interface d'aire unité) est très importante dans les premiers instants de l'évolution d'une petite bulle. La dérivée de la surface par rapport au volume dans le cas d'une petite bulle est plus importante que celle de la grosse bulle, c'est-à-dire que la variation d'une grosse bulle soumise à une dépression est moins brutale que celle d'une petite soumise à la même dépression. Takahashi et al. (2003) dans leurs recommandations pour des nouvelles idées autour du mécanisme de l'apparition de la cavitation affirment que les forces de tension suppléantes au point de séparation peuvent être la cause de la création de l'apparition de la cavitation.

Les désaccord entre les lois barotropes et les études expérimentales prouvent que au moins au début de la cavitation l'évolution de la densité n'est pas seulement liée à la pression locale, elle l'est aussi avec l'évolution des bulles qui, elles mêmes sont causées par un changement du champ de pression. Comme l'ont affirmé d'Agostino & Brennen (1989), la dynamique de bulles est fortement couplée par les champs de vitesse et de pression et avec la dynamique globale de l'écoulement du nuage de bulles.

1.3.3.4 MODELES PRODUCTION/TRANSPORT DU TAUX DE VIDE

Les modèles production/transport ferment le problème physique, en proposant une équation de transport d'un scalaire passif avec un terme source pour le taux de vide. Une formulation mathématique du problème a été proposée par Ishii (1975 pp. 225), qui l'a appelée formulation du modèle de diffusion ou de mélange.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha V) = S_s$$

α : taux de vide ou fraction de volume

S_s : terme source

Le terme source modélise la vaporisation et la condensation du fluide. Il existe dans la littérature plusieurs modélisations du terme source. Certains auteurs comme Sauer & Schneer (2000), Frobenius et al. (2002) utilisent l'équation de Rayleigh-Plesset pour le modéliser. Senocak & Shyy (2002) appliquent l'équilibre de masse et de quantité de mouvement autour de l'interface et proposent un modèle d'interface. Saito et al. (2003) ont appliqué le modèle de transfert de masse dû à l'évaporation/condensation sur une surface plane, pour proposer un modèle. Certains auteurs, utilisent des termes empiriques (Chen & Heister 1994 ; Avva et al. 1995 ; Kunz et al. 2000 ; Wu et al. 2003).

Nous pouvons remarquer que, certaines modélisations du terme source dans le cas des modèles production/transport sont les mêmes que dans le cas de celles de VOF (Sauer & Schneer 2000) et (Frobenius et al. 2002). Ceci est tout à fait normal, car les modèles production/transport, ne sont qu'une forme simplifiée des modèles VOF. Les modèles production/transport, plutôt que de reconstruire la surface libre de façon explicite après calcul de la fraction de volume, comme c'est le cas pour ceux de VOF, se basent sur une représentation isovaleur du taux de vide pour présenter la surface.

Coutier (2001, pp. II-73) après comparaison des équations du modèle production/transport proposé par Reboud & Stutz (1995) et celles de la loi barotrope, ainsi que des résultats numériques obtenus de ces deux modèles, a conclu que ces deux modèles ont plus de similitudes que de différences fondamentales. Auparavant déjà Reboud et al. (1997) sont arrivés à la conclusion que les deux modèles donnent des résultats très proches.

1.3.3.5 MODELES BASES SUR L'EVOLUTION DE BULLES

Les modèles basés sur l'évolution de bulles ont été initiés par Rayleigh (1917) qui, le premier a proposé un modèle décrivant l'implosion du mouvement radial d'une bulle vide dans un liquide incompressible et dont l'équation obtenue porte son nom. Cette équation a été complétée par Plesset (1949) qui a introduit les effets de la viscosité et de la tension superficielle. De plus, il pose l'hypothèse d'une bulle remplie de vapeur et de gaz non condensable. Il a obtenu l'équation connue sous le nom de l'équation de Rayleigh-Plesset suivante :

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\rho} (p_{int} - p_{ext}) - \frac{2S}{\rho R} - 4 \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{R} \frac{dR}{dt}$$

Certains auteurs en utilisant les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement, de l'enthalpie et de la célérité locale du son (ces deux dernières équations sont obtenues en utilisant l'équation de comportement du liquide, ou de Tait (Knapp et al. 1970)), ont introduit les effets de la compressibilité du liquide qui a été constatée par Cole (1948) lors des explosions sous-marines, pour modéliser l'interface de la bulle. Les équations gouvernant la cinématique de l'écoulement ont été reprises et établies par Franc et al. (1995, page 98). Ainsi, Herring (1941) en négligeant les termes non linéaires et en gardant la vitesse du son constante, a proposé un modèle basé sur une approximation acoustique qui consiste à utiliser l'équation d'onde acoustique à l'interface de la bulle. Trilling (1951) a proposé une approximation quasi-acoustique, en prenant seulement l'hypothèse d'une célérité constante. Gilmore (1952) lui a utilisé l'approximation de Kirkwood-Bethe, pour établir l'équation qui porte son nom qui gouverne l'évolution de l'interface de la bulle :

$$RU \frac{dU}{dR} \left(1 - \frac{U}{C}\right) + \frac{3}{2} U^2 \left(1 - \frac{U}{3C}\right) = H \left(1 + \frac{U}{C}\right) + \left(1 - \frac{U}{C}\right) \frac{RU}{C} \frac{dH}{dR}$$

$U = \frac{dR}{dt}$: la vitesse de l'interface

H : l'enthalpie à l'interface

C : la vitesse du son

Keller & Miksis (1980) ont proposé une équation très similaire à celle de Gilmore, mais où la vitesse de translation du centre de la bulle est prise en compte. Toutes ces équations introduisent les effets de compressibilité dans les équations du mouvement de la bulle,

laissant certains doutes sur les termes de translation de la bulle. Doinikov (2005) a tenté de clarifier ce point en couplant l'équation radiale et celle de translation du mouvement d'une bulle dans un fluide compressible en utilisant une approche énergétique. Il obtient que la correction du terme de translation peut jouer un rôle dans certaines situations.

On trouve dans la littérature beaucoup de travaux qui utilisent l'équation de Rayleigh-Plesset ou de Gilmore pour modéliser une bulle unique ou un nuage de bulles (Hickling Plesset 1964; Chahine 1982; Chahine et al. 1992; Hsiao et al. 2001; Shen et al. 2001; Singhai et al. (2002)), composées de vapeur ou du mélange vapeur et gaz.

Les premiers auteurs n'utilisent l'équation de Rayleigh-Plesset que pour modéliser le collapse des bulles. Ainsi, van Wijngaarden (1968) a modélisé le mouvement d'un mélange liquide bulles de gaz, à très faible taux et une petite vitesse relative des bulles par rapport au liquide. Deux ans auparavant van Wijngaarden (1964) a étudié le champ de pression généré par le collapse collectif d'un grand nombre de bulles de gaz dans l'eau, alors que Chahine (1982) eux ont considéré des bulles de cavitation. D'Agostino & Brennen (1989) ont proposé une étude linéaire de la dynamique d'un écoulement instationnaire d'un nuage de bulles, en tenant compte des effets de dissipation de l'énergie due à la viscosité, du transfert de chaleur, de la compressibilité du fluide et du mouvement relatif des deux phases. Wang & Brennen (1994) ont repris l'étude précédente, en tenant compte des termes convectifs non-linéaires.

Kubota et al. (1992) ont été parmi les premiers à utiliser l'équation de Rayleigh pour modéliser un écoulement cavitant instationnaire. Chen & Heister (1994) ont utilisé aussi l'équation de Rayleigh-Plesset pour évaluer les effets non-équilibre d'un écoulement cavitant. Les équations obtenues par ces derniers auteurs ont été reprises par Bunnell & Heister (2000) pour modéliser un écoulement cavitant instationnaire tri-dimensionnelle dans les passages des injecteurs. Très récemment Hosangadi & Ahuja (2006) ont proposé un modèle de cavitation, où celle-ci est modélisée par un nuage de petites bulles gouvernées par l'équation de Rayleigh-Plesset qui n'interagissent pas entre elles. La somme des surfaces de l'ensemble de bulles considérée comme étant la surface du nuage est modélisée par une équation d'un scalaire passif avec un terme source. L'approche basée sur l'étude de l'évolution d'une bulle a permis à certains auteurs de modéliser l'apparition de la cavitation (Buogo & Cannelli 2002; Ohl 2002; Hsiao et al. 2003).

Comme cela a été mentionné un peu plus haut, certains auteurs utilisent ces équations pour modéliser les termes sources des modèles multiphasiques, VOF, et production/transport (Grogger & Alajbegovic 1998; Sauer & Schneer 2000; Frobenius et al. 2002).

Il est important de noter que les équations d'évolution d'une bulle ne sont valables que dans un milieu homogène composé de bulles sphériques n'interagissant pas entre elles. Ainsi, les modèles basés sur l'évolution d'une bulle ne prennent pas en compte l'interaction entre les bulles alors même que, des observations expérimentales incitent leurs prises en compte Ohl (2002). L'équation de Rayleigh-Plesset utilisée par la plus part de ces auteurs, donne une bulle en croissance infinie, ainsi ils sont obligés de limiter le taux de vapeur maximum comme par exemple, Kubota et al. (1992) le fixent à 0.95.

1.3.3.6 CONCLUSION

Parmi tous les modèles instationnaires de cavitation existants, l'approche basée sur les équations d'évolution d'une bulle (équation de Rayleigh-Plesset, équation de Gilmore...) gouvernant l'évolution des germes de cavitation, est sans aucun doute la mieux adaptée pour prendre en compte la structure microscopique du mélange diphasique des écoulements cavitants. Mais même si les modèles basés sur les équations d'évolution d'une bulle ont le mérite de tenir compte de l'aspect diphasique de la cavitation, ils présentent des inconvénients. La pression peut être considérée comme une donnée du problème alors que la dynamique de bulles est fortement couplée par les champs de vitesse et de pression et avec la dynamique globale de l'écoulement du nuage de bulles.

1.4 CONCLUSION

Comme nous venons de le voir dans cette étude bibliographique sur les différents modèles :

Si les modèles à 2-fluides sont les mieux à même de représenter les écoulements de phases bien séparées, ils sont peu adaptés aux écoulements cavitants, car les phases de ces derniers sont très mélangées. Ces modèles sont surtout adaptés aux écoulements diphasiques ou des écoulements bien ciblés. En outre beaucoup de ces modèles ont besoin de plusieurs constantes empiriques et sont ainsi validés seulement pour un nombre limité de problèmes d'écoulements cavitants.

De même nous avons vu que les modèles à 1-fluides stationnaires ne peuvent simuler que la cavitation par poche, alors que certains de ceux à 1-fluides instationnaires plus précisément les modèles qui font l'hypothèse d'une loi barotrope sont en contradiction avec l'expérience dans certaines phases de l'évolution du phénomène de cavitation. Le caractère monotone croissant des fonctions prises comme lois barotropes ne permet pas une augmentation de la pression au début de l'évolution de la cavitation. Nous pensons que ces modèles ne sont pas suffisants pour des études à caractère fondamental. Dufour (1999, pp-59) a affirmé à propos des méthodes qu'il a nommées pseudo-concentration (méthodes production/transport, les approches barotropes...), que le transport d'une fonction discontinue cause plusieurs problèmes numériques tels les oscillations non physiques et la diffusion de la zone de transition. De plus, si aucun post-traitement approprié n'est appliqué, la méthode ne conserve pas la matière.

Certains modèles à 1-fluides instationnaires qui tentent de modéliser la structure microscopique de la cavitation ne prennent pas en compte l'un des phénomènes le plus important de la cavitation qui est le transfert de masse ou de volume et négligent les effets des interactions des bulles sur la pression.

Ainsi, nous pensons que, dans toute analyse d'un phénomène physique, il est plus que nécessaire d'abandonner les études des phénomènes tels qu'ils nous apparaissent (par exemple dans le cas de la cavitation : poche de cavitation ou instationnarité de cette dernière), au profit d'une analyse des petits détails, pour pouvoir espérer comprendre et surtout espérer proposer une modélisation à ce phénomène physique. Pour cette raison, nous allons consacrer le sous chapitre suivant au phénomène d'apparition

de la cavitation, et voir quels sont les phénomènes primordiaux qui nous semble t-il accompagnent cette dernière.

1.5 APPARITION DE LA CAVITATION

De nos jours nous savons que toute singularité dans un écoulement de fluide peut être une source de cavitation. Takahashi et al. (2003) ont affirmé que la singularité du point de séparation peut être considérée comme la principale cause de la cavitation. Si nous savons que la cavitation se caractérise par un changement de phase liquide-vapeur sous l'effet de la diminution locale de la pression, son apparition reste très mal connue.

En s'appuyant sur une comparaison du champ de pression de l'écoulement subcavitant, avec la pression de vapeur saturante du fluide et en négligeant bien sûr le retard statique et thermique de la cavitation, on peut prédire théoriquement l'apparition de la cavitation dans un écoulement. Cette façon de procéder ne peut être acceptée que dans le cas d'une étude d'ingénierie.

La prévision expérimentale de l'apparition et surtout les phénomènes qui l'influencent ont été l'objet de beaucoup de publications. La dépression est créée au sein du fluide en mouvement autour d'un obstacle (Arakeri & Acosta 1973; Franc & Michel 1985; Leger et al. 1998; Astolfi et al. 2000a; Astolfi et al. 2000b), ou par une source sonore ou électrique dans un fluide au repos (Ohl 2002; Buogo & Cannelli 2002; Koch et al. 2003). Une étude rigoureuse de l'apparition ne peut être faite par une simple observation visuelle, car au moment de sa détection la cavitation a eu le temps de se développer. Pour cette raison certains auteurs utilisent des caméras à très haute vitesse (Ohl 2002, Takahashi et al. 2003) ou des système de mesures acoustiques (Astolfi et al. 2000a, Takahashi et al. 2006).

Dans leurs travaux Lindgren & Johnson (1966) ont montré que la cavitation n'apparaît pas dans les mêmes conditions thermodynamiques, sur un même type de corps géométriquement similaire dans des installations de tunnels différents. Beaucoup d'auteurs ont travaillé dans ce sens pour comprendre les facteurs les plus importants qui influencent l'apparition de la cavitation, dans le cas des écoulements autour d'un obstacle.

Ainsi, plusieurs travaux (Arakeri & Acosta 1973; Arakeri 1975; Arakeri et al. 1981; Huang 1981; Franc & Michel 1985; Leger & Ceccio 1998; Astolfi et al. 2000a) pour ne citer que ceux là, ont montré l'importance de la couche limite dans l'apparition et surtout son influence dans le type de cavitation qui se développe sur des surfaces portantes.

Mais les facteurs le plus importants qui influencent l'apparition de la cavitation, sont les impuretés et les micro-bulles que contient le fluide. Ces inclusions sont appelées germes de cavitation. De très petites poches peuvent aussi se former sur les parois solides par les défauts de mouillabilité dus à la rugosité des surfaces solides qui crée des petites anfractuosités qui sont autant de singularités potentielles. Plusieurs études, (Maeda et al. (1991); Liu et al. (1993); Franc et al (1995, pp. 55)) prouvent l'existence de ces germes de cavitation et arrivent à mesurer leur population par plusieurs méthodes : méthode holographique, méthode des phases, méthodes dynamiques... Dans leur rapport

final et recommandations du 23^{ème} ITTC, le comité des spécialistes sur la qualité de l'eau et de la cavitation Mehmet et al. (2002, vol-II pp. 452), recommandent le développement des nouvelles méthodes d'interpolation pour l'apparition de la cavitation prenant en considération les paramètres de la qualité de l'eau. Des travaux, Marschall et al. (2002), Leger & Ceccio (1998) montrent que, les germes de cavitation et les matériaux des profils sont d'autant plus influençables sur l'apparition de la cavitation s'ils sont hydrophobes que s'ils sont hydrophiles.

Des études font état du bruit émis lors de l'apparition de la cavitation (Astolfi et al. 2000a, Takahashi et al. 2006). Ainsi, Hsiao et al. (2003) en étudiant la prédiction de l'apparition de la cavitation dans un écoulement d'un tourbillon de bout d'aile, ont conclu que les sources d'émission acoustique de haute fréquence lors de l'explosion initiale de la bulle, sont plus importantes que celles émises lors de son implosion. Auparavant Buogo & Cannelli (2002) confirment par des mesures acoustiques, les émissions du son pendant l'explosion et l'implosion d'une bulle. Et ils affirment qu'un son de basse intensité pourrait être émis par des micro-bulles de l'ordre de $1mm$ ou moins, continuellement produites et réabsorbées pendant l'évolution de la bulle principale. L'une des méthodes de détection de l'apparition de la cavitation utilisée par Astolfi et al. (2000a), consiste à mesurer le niveau du bruit dans le sillage des corps, à tracer le niveau bruit mesuré en fonction du paramètre pour lequel on veut déterminer l'apparition. La courbe représentative de la fonction montre deux régions. Dans la première région l'intensité du bruit reste constante et dans la deuxième on a une brusque augmentation de l'intensité. Tous ces constats, prouvent qu'on a une émission du son à l'apparition de la cavitation, alors qu'il est admis que ce phénomène est surtout dû à l'implosion de bulle (Brennen 1997; Gu et al. 2001). Il est important de mentionner que, dans le cas de la cavitation due à une source sonore ou électrique, on a d'une part une émission acoustique de la source et d'autre part des émissions acoustiques secondaires dues à la bulle de cavitation. Ahyi (1997) a proposé un modèle théorique pour étudier l'influence des paramètres électriques de la source et des constantes mécaniques du milieu de propagation sur les caractéristiques de l'onde acoustique rayonnée et de la bulle de cavitation associée.

Takahashi et al. (2003) au cours d'une étude expérimentale sur l'apparition de la cavitation montrent que l'apparition vigoureuse de la cavitation est souvent accompagnée d'une émission de lumière visible à l'oeil nu. Alors que l'émission de la lumière d'une bulle est surtout observée lors du collapse très violent d'une bulle, connue sous le nom de la sonoluminescence Su et al. (2003).

Franc et al. (1995, pp. 409) mettent en évidence une augmentation de la pression statique au cours de l'explosion d'une bulle de cavitation, certains comme van Wijngaarden (1964) affirment que c'est le collapse des bulles qui provoque une augmentation de la pression.

Toutes ces remarques prouvent qu'on a des phénomènes qui ne se manifestent le plus souvent que lors des collapses des bulles : augmentation de pression, émission de son et de lumière.

Ainsi l'augmentation de la pression, mais surtout les émissions de son et de lumière lors de l'apparition ne peuvent être dues qu'aux disparitions rapides de certaines bulles aux profits des autres bulles. Ce qui explique l'augmentation de la pression et les émissions de son et de lumière.

De très nombreuses études numériques d'apparition de la cavitation sont faites sur la dynamique d'une bulle (Buogo & Cannelli 2002 ; Ohl 2002 ; Hsiao et al. 2003). Ohl (2002) après une étude expérimentale et numérique de l'apparition de la cavitation à la suite du passage d'une onde, affirme que parfois ce n'est pas seulement une seule bulle qui apparaît, mais c'est une multitude de bulles qui se coalescent. Ohl (2002) a conclu son étude en affirmant que, le scénario observé suggère que des interactions bulle-bulle doivent être prises en considération pour une modélisation numérique précise. Ainsi, une simple hypothèse utilisant un modèle d'une seule bulle n'est pas validé.

La conclusion principale que nous pouvons tirer de cette étude bibliographique est que, la quasi totalité des modèles de cavitation proposés dans la littérature, font abstraction des interactions entre les bulles, de l'augmentation de la pression dans certaines phases de l'évolution de la cavitation alors même que les expériences (Ohl 2002 ; Franc et al. 1995, pp. 410) les mettent en évidence. L'inconvénient principal des ces modèles de cavitation, c'est de vouloir considérer l'évolution de la pression comme une fonction de la masse volumique ou comme une donnée du problème.

Ces faits nous confortent dans l'idée d'étudier l'évolution d'un nuage de bulles qui interagissent entre elles, grâce à un échange de volume que par la suite on notera par échange de vide. Ceci afin de pouvoir proposer une loi d'évolution pour la pression indépendante de l'équation de la masse volumique. Cette loi apparaît comme une nouvelle équation d'évolution de la pression, pour la modélisation des écoulements cavitants.

Chapitre 2

MODELE DE CAVITATION

2.1 INTRODUCTION

La cavitation naissante est généralement formée de très petites bulles de vapeur. Aussi, une étude objective de celle-ci nécessite une bonne compréhension de la stabilité d'un nuage de bulles de vapeur.

Beaucoup d'études sur le nuage de bulles de cavitation ont surtout porté sur le collapse des bulles du nuage (Chahine 1982 ; Wang & Brennen 1994 ; ...). Ce phénomène est surtout connu pour être à la base des phénomènes de l'érosion, de vibration et de l'acoustique dûs à la cavitation. d'Agostino & Brennen (1988) ont fait une étude linéaire de la dynamique d'un nuage de bulles sphériques soumis à l'excitation d'un champ de pression harmonique. Les résultats ont été généralisés par une moyenne de synthèse de Fourier dans le cas d'une excitation d'un champ de pression arbitraire. d'Agostino & Brennen (1989) affirment aussi que, dans un nuage de bulles la dynamique de bulles est fortement couplée par les champs de vitesse et de pression et avec la dynamique globale de l'écoulement. Chahine & Duraiswami (1992) affirment que le comportement d'un nuage de bulles est très différent de celui d'une bulle isolée, en raison de l'interaction entre les bulles constituant le nuage.

Ainsi, pour modéliser les interactions mutuelles dans un nuage de cavitation naissante, nous proposons une nouvelle description et des nouvelles hypothèses.

L'étape la plus importante dans l'élaboration d'un modèle est le choix des hypothèses. Cela peut conduire à ne pas prendre en compte des phénomènes, ayant une grande influence sur le phénomène global. Vouloir tenir compte de tous les phénomènes peut aussi conduire à une accumulation de données non pertinentes. Il est très important d'exclure les phénomènes qui masquent l'essentiel, mais surtout de considérer ceux qui assurent la cohérence de l'ensemble. L'ultime étape consiste à valider le modèle pour en garantir la pertinence.

2.2 HYPOTHESES

Dans le nuage, toutes les bulles interagissent entre elles. Elles échangent du vide avec leurs voisines, les plus petites ayant tendance à dominer en pression du fait de la tension superficielle. L'échange de vide favorise les grosses bulles aux dépens des petites, ce qui a pour effet d'augmenter la pression locale dans le fluide au cours du développement des bulles.

L'idéal serait de faire une étude statistique de l'évolution de toutes les bulles ou couples de bulles qui échangent du volume au cours de leur évolution. Mais pour simplifier nous considérons, comme représenté sur la figure 2.1, deux bulles non identiques localisées dans un volume de contrôle, qui échangent du volume au cours de leur évolution. Les deux bulles en plus de leur débit d'échange sont soumises à une expansion imposée et caractérisée par l'expansion du milieu. C'est dans ce contexte que l'on va modéliser les bulles, leurs interactions mutuelles et le champ de pression. Nous partons de l'hypothèse d'une expansion positive. Si l'expansion n'est pas trop grande, et si la petite bulle est assez petite, la petite bulle 1 disparaît au profit de la grosse bulle voisine 2 au cours d'une séquence. Cette grosse bulle est alors prise comme nouvelle grosse bulle initiale associée à une nouvelle petite bulle introduite dans une séquence ultérieure répétée sur un volume de contrôle agrandi.

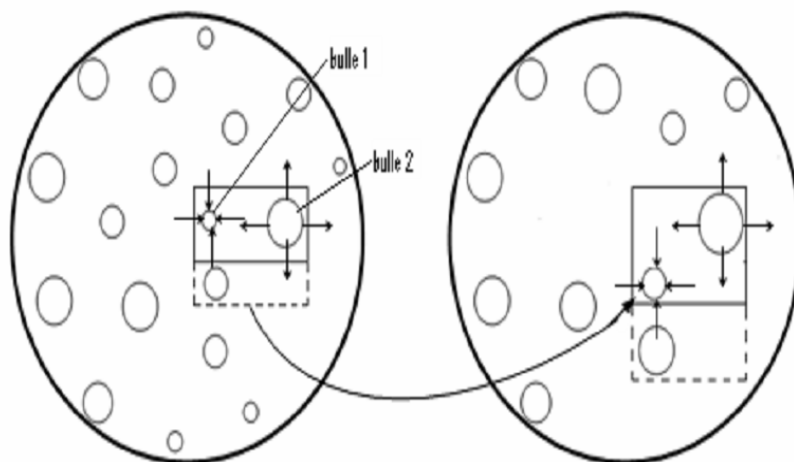


FIG. 2.1 – Nuage de bulle dans deux séquences successives.

Pour cette étude nous posons les hypothèses suivantes sur l'évolution des deux bulles :

- La distance entre les bulles est beaucoup plus grande que le rayon des bulles ;
- L'écoulement de la phase liquide est un écoulement potentiel purement radial et

visqueux. Ce type d'écoulement, a permis à Plesset & Chapman (1971) de modéliser le collapse d'une bulle de vapeur proche d'une frontière solide ;

-La petite bulle (1) qui peut croître ou décroître et la grosse bulle (2) qui croît sont assimilées à des sources de débits volumiques respectivement q_1 et q_2 ;

-Chaque bulle est soumise au gradient de pression induit par l'autre bulle, ce qui crée une force d'Archimède d'attraction entre les bulles. Nous supposons que dans le nuage de bulles réel, ces forces s'équilibrent et que l'effet d'archimède résultant est négligeable ;

-La déformation de la sphéricité d'une bulle due à la présence du champ induit par l'autre bulle est négligée. La condition de glissement n'est donc pas exactement respectée. Le potentiel du système est simplement la somme des potentiels séparés dus aux bulles.

La description et les hypothèses posées ci-dessus, peuvent nous permettre par des approches mathématiques d'établir l'équation qui gouverne l'évolution du nuage, en incluant dans le modèle la possibilité pour de nombreuses petites bulles de disparaître ou non selon l'expansion du milieu. Le modèle à une bulle est donc inclus dans notre étude et correspond à une expansion très forte. La présence de deux bulles introduit une instabilité dans laquelle l'échange de vide apparaît comme un degré de liberté supplémentaire autorisant une forme de "*brisure de symétrie*".

2.3 MISE EN EQUATIONS

2.3.1 DYNAMIQUE DANS LE LIQUIDE

L'écoulement du liquide est incompressible ceci implique que : $div \vec{V} = 0$ partout dans le fluide. L'écoulement étant aussi radial par hypothèse, nous avons : $V_\theta = 0$ et $V_\varphi = 0$, seule la vitesse radiale V_r est non nulle. Ainsi, nous avons :

$$div \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 V_r)}{\partial r} = 0. \quad (2.1)$$

L'élément de débit volumique dq qui traverse l'élément de surface sphérique dS est :

$$dq = V_r dS = V_r r^2 d\theta \sin \varphi d\varphi \text{ avec } 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi. \quad (2.2)$$

En tenant compte des équations (2.1) et (2.2) nous avons la vitesse d'un écoulement d'une source ou d'un puits qui est :

$$V_r = \frac{q}{4\pi r^2}. \quad (2.3)$$

Comme représenté sur la figure 2.2, nous avons sur l'axe \vec{ox} , le centre de la bulle 2 au point $+d$ et celle de la bulle 1 au point $-d$, avec les débits respectifs q_2 et q_1 , ce dernier pouvant être négatif

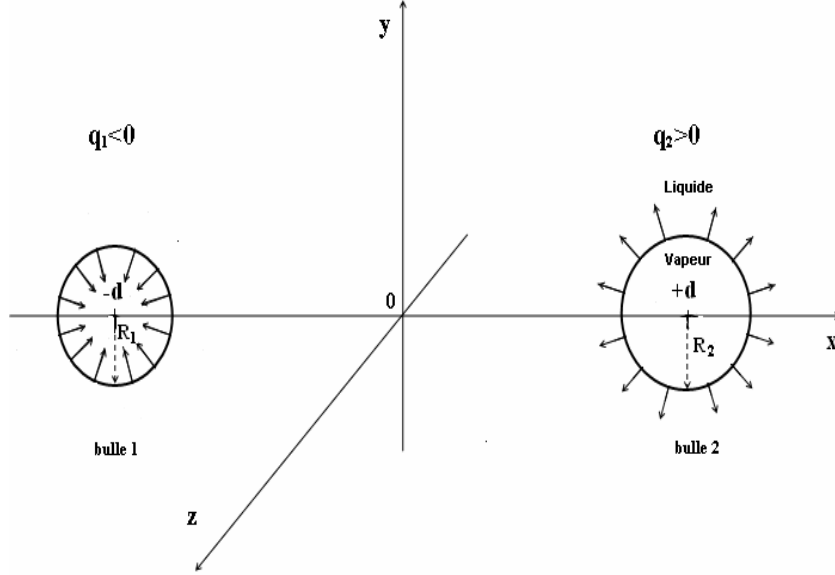


FIG. 2.2 – Positionnement de deux bulles sur leur ligne des centres \vec{ox} .

Le potentiel des vitesses s'écrit en un point quelconque de coordonnées (x, y, z) :

$$F(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{q_2}{|\vec{X}_F - \vec{X}_{q_2}|} + \frac{q_1}{|\vec{X}_F - \vec{X}_{q_1}|} \right)$$

Avec $\vec{X}_F = (x, y, z)$, $\vec{X}_{q_1} = (-d, 0, 0)$ et $\vec{X}_{q_2} = (d, 0, 0)$.

Nous nous plaçons sur l'axe \vec{ox} pour évaluer la vitesse et la pression, alors le potentiel du système se réduit à :

$$F(x, 0, 0) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{q_2}{|x - d|} + \frac{q_1}{|x + d|} \right) \quad (2.4)$$

Comme d est plus grand que x dans l'intervalle $[-d ; d]$, alors nous avons :

$$F(x, 0, 0) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{q_2}{(d - x)} + \frac{q_1}{(d + x)} \right) \quad (2.5)$$

nous savons que $\vec{V} = \vec{\nabla} F(x, y, z)$, alors le champ de vitesse du fluide sur l'axe ox est :

$$\vec{V}(x) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{q_1}{(d+x)^2} - \frac{q_2}{(d-x)^2} \right) \vec{e}_x \quad (2.6)$$

Avec $-d + R_1 < x < d - R_2$

Ayant le champ de vitesse du système, donné par l'équation (2.6), nous pouvons déterminer le champ de pression en résolvant l'équation de Navier-Stokes.

L'équation de Navier-Stokes unidimensionnelle est :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\text{div} \bar{\sigma} \right)_x \quad (2.7)$$

où V est la vitesse suivant l'axe x , qui est aussi la vitesse radiale pour la bulle 1 sur l'intervalle $]-d + R_1; d - R_2[$.

Le terme radial de la résultante des forces internes dues à la tension visqueuse pour une bulle en coordonnées sphérique est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\text{div} \bar{\sigma} \right)_r &= \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - 2V_r \right) \\ &= \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial (r^2 V_r)}{\partial r} \right) - 2r \frac{\partial V_r}{\partial r} - 4V_r \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

En tenant compte de l'équation (2.1) nous avons :

$$\frac{1}{\rho} \left(\text{div} \bar{\sigma} \right)_r = \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial (r^2 V_r)}{\partial r} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial (r^2 V_r)}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.9)$$

L'équation (2.9) montre que le terme de la tension visqueuse radiale est nul pour une bulle, il est donc nul aussi pour le système des deux bulles, ainsi l'équation (2.7) devient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0. \quad (2.10)$$

Nous obtenons avec l'équation (2.6) :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\dot{q}_1}{(x+d)^2} - \frac{\dot{q}_2}{(d-x)^2} \right) \quad (2.11)$$

Portant dans l'équation (2.10) les résultats des celles de (2.6) et (2.11), nous avons :

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\dot{q}_1}{(x+d)^2} - \frac{\dot{q}_2}{(d-x)^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{q_1}{(d+x)^2} - \frac{q_2}{(d-x)^2} \right)^2 + \frac{p}{\rho} \right) \quad (2.12)$$

En intégrant l'équation (2.12) sur l'intervalle $[x_1, x_2]$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\dot{q}_1}{(x+d)^2} - \frac{\dot{q}_2}{(d-x)^2} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{q_1}{(d+x)^2} - \frac{q_2}{(d-x)^2} \right)^2 + \frac{p}{\rho} \right) dx$$

soit en changeant les signes :

$$\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\dot{q}_1}{(x+d)} + \frac{\dot{q}_2}{(d-x)} \right]_{x_1}^{x_2} = \left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{q_1}{(d+x)^2} - \frac{q_2}{(d-x)^2} \right)^2 \right]_{x_1}^{x_2} \quad (2.13)$$

Avec $x_1 = -d + R_1$ et $x_2 = d - R_2$, soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{\dot{q}_1}{(2d-R_2)} + \frac{\dot{q}_2}{(R_2)} \right) - \left(\frac{\dot{q}_1}{(R_1)} + \frac{\dot{q}_2}{(2d-R_1)} \right) \right] &= \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \dots \\ \frac{1}{32\pi^2} \left[\left(\frac{q_1}{(2d-R_2)^2} - \frac{q_2}{(R_2)^2} \right)^2 - \left(\frac{q_1}{(R_1)^2} - \frac{q_2}{(2d-R_1)^2} \right)^2 \right] & \quad (2.14) \end{aligned}$$

L'hypothèse que la distance d entre les bulles est très grande par rapport aux rayons des bulles R_1 et R_2 , nous permet de négliger les termes en $\frac{1}{d}$ par rapport aux termes en $\frac{1}{R}$. Ainsi l'équation (2.14) devient :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\dot{q}_2}{R_2} - \frac{\dot{q}_1}{R_1} \right] - \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{q_2^2}{R_2^4} - \frac{q_1^2}{R_1^4} \right] \quad (2.15)$$

L'équation (2.15) permet de déterminer la différence de pression dans le liquide aux interfaces des bulles.

2.3.2 DYNAMIQUE DE L'INTERFACE

Contrairement dans un fluide au repos, où le tenseur des contraintes est isotrope et normal et de plus égal à la pression statique, dans un fluide en mouvement, il peut être décomposé en deux parties : une partie due à la contribution de la pression et celle due à la viscosité.

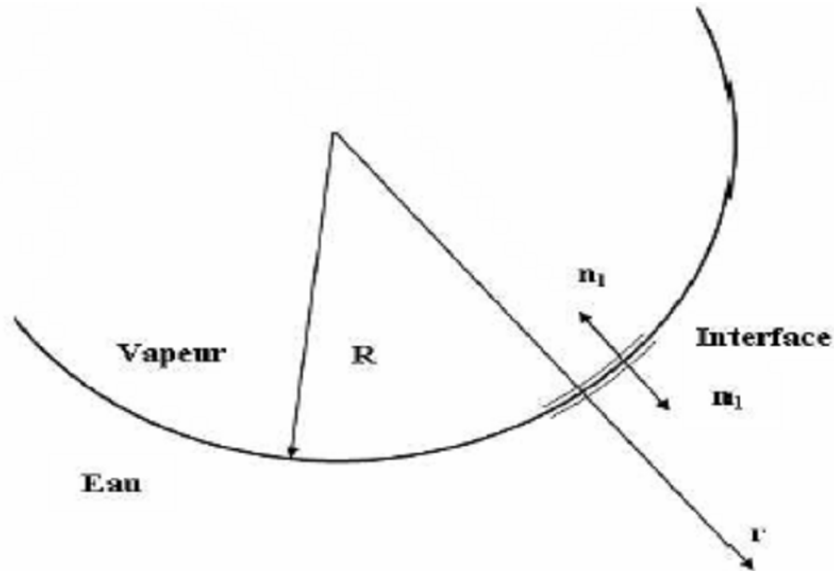


FIG. 2.3 – Interface liquide-vapeur.

Si nous considérons un élément de frontière interface fluide-vapeur comme représenté sur la figure 2.3, les forces par unité de surface sur la normale sont : p_{int} la pression de vapeur-gaz, p_{ext} la pression du fluide, $\mu \frac{\partial V_r}{\partial r}$ la contribution de la viscosité et celle de la tension superficielle S , cette dernière est une force locale tangentielle qui donne une résultante normale $2\frac{S}{R}$ due à la courbure.

L'équilibre de l'interface s'écrit sur la normale extérieure :

$$p_{int} - p_{ext} + 2\mu \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)_{r=R} - 2\frac{S}{R} = 0. \quad (2.16)$$

La conservation du débit dans le fluide donne :

$$4\pi r^2 V_r = 4\pi R^2 \dot{R} \quad (2.17)$$

soit :

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} \Big|_{r=R} = -2 \frac{\dot{R}}{R} \quad (2.18)$$

En tenant compte des équations (2.16) et (2.18), l'équation de l'équilibre des contraintes normales à l'interface d'une bulle est :

$$p_{int} - p_{ext} - 4\mu \frac{\dot{R}}{R} - 2 \frac{S}{R} = 0 \quad (2.19)$$

où

$$p_{int} = p_v + p_g \quad (2.20)$$

Avec p_v la pression de vapeur saturante, p_g la pression des gaz partiels non condensable, S la tension superficielle et μ la viscosité dynamique. L'équation (2.19) permet de calculer la pression p_{ext} à l'extérieur de la bulle.

2.3.3 CONSERVATION DU VOLUME

La conservation de volume doit être vérifiée sur le volume de contrôle. La somme des volumes de deux bulles est égale à celle des volumes des bulles initiales plus le volume de vide dû à l'expansion. Ainsi nous avons :

$$V_{10} + V_{20} + V_{div} = V_1 + V_2 \quad (2.21)$$

$$V_{10} = \frac{4}{3}\pi R_{10}^3, V_{20} = \frac{4}{3}\pi R_{20}^3, V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3, V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3$$

Avec, V_{10} , V_{20} les volumes initiaux des bulles 1 et 2, et V_{div} le volume dû à l'expansion.

En plus de leur débit d'échange, les deux bulles sont soumises à une expansion caractérisée par la divergence de la vitesse du milieu cavitant. Par la suite on suppose que q est le débit d'échange et q_m le débit partagé dû à l'expansion créée, qui se répartit d'une façon égale sur les bulles, alors nous avons :

$$q_1 = \frac{1}{2}q_m - q \quad (2.22)$$

$$q_2 = \frac{1}{2}q_m + q \quad (2.23)$$

d'où,

$$q_1 + q_2 = q_m \quad (2.24)$$

Si on appelle V_{con} le volume de contrôle qui ne contient que les deux bulles, alors on a le débit :

$$q_m = \text{div} \vec{U} \cdot V_{con}. \quad (2.25)$$

L'équation (2.24) peut être déduite à partir de l'équation (2.21), avec : $\dot{V}_{div} = q_m$, $\dot{V}_1 = q_1$ et $\dot{V}_2 = q_2$

Le volume dû à l'expansion est l'intégrale du débit volumique dû à l'expansion créée sur l'intervalle du temps sur lequel elle est imposée :

$$V_{div} = \int_0^t q_m(t) dt \quad (2.26)$$

On en déduit l'équation qui relie les rayons des bulles :

$$R_2^3 + R_1^3 = R_{20}^3 + R_{10}^3 + \frac{3}{4\pi} \int_0^t q_m(t) dt \quad (2.27)$$

Avec, R_{20} , R_{10} les rayons initiaux des bulles 1 et 2.

2.3.4 EQUATION POUR LE RAYON

Avec l'équation (2.19), la pression à l'interface de chaque bulles est :

$$p_v + p_{g1} - p_1 = \frac{2S}{R_1} + 4\mu \frac{\dot{R}_1}{R_1} \quad (2.28)$$

$$p_v + p_{g2} - p_2 = \frac{2S}{R_2} + 4\mu \frac{\dot{R}_2}{R_2} \quad (2.29)$$

Ainsi, la différence de pression des interfaces des bulles s'écrit :

$$p_2 - p_1 = 2S \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + 4\mu \left(\frac{\dot{R}_1}{R_1} - \frac{\dot{R}_2}{R_2} \right) + (p_{g2} - p_{g1}) \quad (2.30)$$

Cette différence de pression nous permet de déterminer l'équation différentielle qui gouverne l'évolution des rayons des bulles R_1 ou R_2 . Avec l'équation (2.15), la nouvelle équation (2.30) est :

$$\frac{2S}{\rho} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{4\mu}{\rho} \left(\frac{\dot{R}_1}{R_1} - \frac{\dot{R}_2}{R_2} \right) + \frac{1}{\rho} (p_{g2} - p_{g1}) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\dot{q}_2}{R_2} - \frac{\dot{q}_1}{R_1} \right] - \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{q_2^2}{R_2^4} - \frac{q_1^2}{R_1^4} \right] \quad (2.31)$$

En tenant compte de $q_1 = 4\pi R_1^2 \dot{R}_1$, de l'équation (2.24) et de sa dérivée l'équation (2.31) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{q}_2}{4\pi} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) + \frac{q_2^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{R_1^4} - \frac{1}{R_2^4} \right) + \frac{q_2\mu}{\pi\rho} \left(\frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3} \right) + 2\frac{S}{\rho} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) - \dots \\ & \frac{1}{4\pi} \frac{\dot{q}_m}{R_1} + \frac{1}{32\pi^2} \frac{q_m^2}{R_1^4} - q_m \left(\frac{\mu}{\pi\rho} \frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{16\pi^2} \frac{q_2}{R_1^4} \right) + \frac{1}{\rho} (p_{g1} - p_{g2}) = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

En remplaçant $q_2 = 4\pi R_2^2 \dot{R}_2$ et $\dot{q}_2 = 4\pi \left(R_2^2 \ddot{R}_2 + 2R_2 \dot{R}_2^2 \right)$ par leur expression dans l'équation (2.32), après quelques arrangements on aboutit à l'équation générale qui gouverne le rayon de la grosse bulle R_2 :

$$\begin{aligned} & R_2 \ddot{R}_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + \dot{R}_2^2 \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{R_2^3}{R_1^3} \right) \right] \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + \dots \\ & 4\frac{\mu}{\rho} \frac{\dot{R}_2}{R_2} \left(1 + \frac{R_2^3}{R_1^3} \right) + \frac{2S}{\rho} \frac{1}{R_2} \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) - \frac{1}{4\pi} \frac{\dot{q}_m}{R_1} + \frac{1}{32\pi^2} \frac{q_m^2}{R_1^4} - \dots \\ & \frac{q_m}{4\pi} \left(4\frac{\mu}{\rho} \frac{1}{R_1^3} + \frac{R_2^2 \dot{R}_2}{R_1^4} \right) + \frac{1}{\rho} (p_{g1} - p_{g2}) = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

On remarque que l'équation (2.33) ne dépend que de q_m le débit partagé dû à l'expansion créée, c'est-à-dire de la divergence de la vitesse du milieu cavitant.

2.3.5 EVALUATION DE LA PRESSION AMBIANTE MOYENNE

La pression ambiante moyenne du milieu notée p_c est estimée être la pression à mi distance des bulles. Elle peut être déterminée de deux façons complètement indépendantes. La première, à partir de la bulle 1 en intégrant l'équation (2.12) de x_1 à 0 et la deuxième en partant de la bulle 2, en intégrant toujours l'équation (2.12) de 0 à x_2 . Ainsi nous avons :

$$\frac{p_1 - p_c}{\rho} = \frac{1}{4\pi} \frac{\dot{q}_1}{R_1} - \frac{1}{32\pi^2} \frac{q_1^2}{R_1^4} \quad (2.34)$$

$$\frac{p_2 - p_c}{\rho} = \frac{1}{4\pi} \frac{\dot{q}_2}{R_2} - \frac{1}{32\pi^2} \frac{q_2^2}{R_2^4} \quad (2.35)$$

En tenant compte des équations (2.28) et (2.29) nous obtenons :

$$\frac{p_c}{\rho} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\dot{q}_1}{R_1} + \frac{1}{32\pi^2} \frac{q_1^2}{R_1^4} - \frac{\mu}{\rho\pi} \frac{q_1}{R_1^3} - \frac{2S}{\rho} \frac{1}{R_1} + \frac{p_{g1}}{\rho} + \frac{p_v}{\rho} \quad (2.36)$$

$$\frac{p_c}{\rho} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\dot{q}_2}{R_2} + \frac{1}{32\pi^2} \frac{q_2^2}{R_2^4} - \frac{\mu}{\rho\pi} \frac{q_2}{R_2^3} - \frac{2S}{\rho} \frac{1}{R_2} + \frac{p_{g2}}{\rho} + \frac{p_v}{\rho} \quad (2.37)$$

Les équations (2.36) ou (2.37) nous permettent de calculer la pression. Ainsi, la pression n'est plus une donnée du problème, c'est un résultat.

En résumé, l'équation (2.31) est une combinaison linéaire des équations (2.36) et (2.37). Ainsi, les équations (2.27), (2.32) et (2.36) ou (2.37) forment un système qui permet de déterminer les rayons R_1 et R_2 et la pression ambiante moyenne P_c .

2.3.6 SYSTEME D'EQUATIONS COMPACT

Le système d'équations (2.27), (2.33) et (2.36) ou (2.37) peut être réécrit avec la variable V volume d'échange entre les bulles 1 et 2. Pour cela nous utilisons le système d'équations équivalent (2.21), (2.31) et (2.36) ou (2.37).

En intégrant les équations (2.22) et (2.23) nous avons :

$$V_1 = \frac{1}{2} V_{qm} - V + V_{10} \quad (2.38)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} V_{qm} + V + V_{20} \quad (2.39)$$

$$\dot{V}, \dot{V}_2 = \frac{1}{2} \dot{V}_{qm} + \dot{V}, \ddot{V}_1 = \frac{1}{2} \ddot{V}_{qm} - \ddot{V} \text{ et } \ddot{V}_2 = \frac{1}{2} \ddot{V}_{qm} + \ddot{V}.$$

L'équation (2.21) est une combinaison linéaire des équations (2.37) et (2.39), ainsi en remplaçant ces deux dernières équations dans le système d'équations (2.31) et (2.36) ou (2.36) nous obtenons le système équivalent suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\ddot{V}}{4\pi} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) &= \frac{\dot{V}^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right) + \frac{\dot{V}\dot{V}_{q_m}}{32\pi^2} \left(\frac{1}{R_2^4} + \frac{1}{R_1^4} \right) - \frac{\dot{V}\mu}{\rho\pi} \left(\frac{1}{R_2^3} + \frac{1}{R_1^3} \right) + \dots \\
\frac{2S}{\rho} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\ddot{V}_{q_m}}{8\pi} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) &+ \frac{\dot{V}_{q_m}^2}{128\pi^2} \left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right) + \frac{\dot{V}_{q_m}\mu}{2\rho\pi} \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) + \dots \\
\frac{1}{\rho} (p_{g_2} - p_{g_1}) & \quad (2.40)
\end{aligned}$$

$$\frac{p_c}{\rho} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\frac{1}{2}\ddot{V}_{q_m} - \ddot{V}}{R_1} + \frac{1}{32\pi^2} \frac{\left(\frac{1}{2}\dot{V}_{q_m} - \dot{V} \right)^2}{R_1^4} - \frac{\mu}{\rho\pi} \frac{\frac{1}{2}\dot{V}_{q_m} - \dot{V}}{R_1^3} - \frac{2S}{\rho} \frac{1}{R_1} + \frac{p_v}{\rho} + \frac{p_{g_1}}{\rho} \quad (2.41)$$

ou encore l'équation suivante :

$$\frac{p_c}{\rho} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\frac{1}{2}\ddot{V}_{q_m} + \ddot{V}}{R_2} + \frac{1}{32\pi^2} \frac{\left(\frac{1}{2}\dot{V}_{q_m} + \dot{V} \right)^2}{R_2^4} - \frac{\mu}{\rho\pi} \frac{\frac{1}{2}\dot{V}_{q_m} + \dot{V}}{R_2^3} - \frac{2S}{\rho} \frac{1}{R_2} + \frac{p_v}{\rho} + \frac{p_{g_2}}{\rho} \quad (2.42)$$

$$R_1 = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{2}V_{q_m} - V + V_{10} \right)^{1/3} \quad (2.43)$$

$$R_2 = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{2}V_{q_m} + V + V_{20} \right)^{1/3} \quad (2.44)$$

Les équations (2.40) et (2.41) ou (2.42), car l'équation (2.39) est une combinaison linéaire de (2.41) et (2.42), forment un système d'équations plus compact pour déterminer le volume V et le débit \dot{V} d'échange entre les bulles 1 et 2 et la pression ambiante moyenne P_c .

2.3.7 CONCLUSION

La conclusion la plus importante qu'on peut tirer est que, contrairement à tous les modèles de cavitation, en autorisant deux bulles à évoluer différemment, nous n'avons plus besoin de la pression pour déterminer l'évolution de la cavitation. La pression n'est plus une donnée dans ce modèle, mais c'est un résultat. C'est cela qui fait l'originalité de notre modèle.

Dans notre modèle, la seule grandeur physique dont nous avons besoin est l'expansion créée par $\text{div} \vec{U}$, cette grandeur dépend du comportement global de l'écoulement, elle est donnée par la physique de l'écoulement. Ainsi, il suffit de donner la divergence de la vitesse \vec{U} du milieu qui, est plus accessible dans un écoulement cavitant pour déterminer le taux de vide et la pression.

Par la suite on considérera que la divergence $\text{div} \vec{U}$ comme fonction du temps sera connue ou "testable" sous contrainte d'expansion totale imposée.

2.4 SCHEMA NUMERIQUE

L'équation (2.40) est fortement non-linéaire, comme d'ailleurs beaucoup de phénomènes naturels. Ainsi, faute de l'existence d'une solution exacte, nous choisissons un schéma numérique d'ordre élevé, qui permet d'avoir une très bonne approximation tout au moins très proche de la solution exacte. Pour cela nous avons choisi le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4, dont on sait que ces caractéristiques de stabilité sont assez bonnes. Avec q le débit d'échange et l'équation (2.40), nous obtenons le système d'équation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\dot{V}^2 \left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right)}{8\pi \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)} + \frac{\dot{V} \dot{V}_{q_m} \left(\frac{1}{R_2^4} + \frac{1}{R_1^4} \right)}{8\pi \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)} - \frac{4\mu \dot{V} \left(\frac{1}{R_2^3} + \frac{1}{R_1^3} \right)}{\rho \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)} + \dots \\ \frac{8\pi S \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}{\rho \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)} - \frac{\ddot{V}_{q_m} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)}{2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)} + \frac{\dot{V}_{q_m}^2 \left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right)}{32\pi \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)} + \dots \\ \frac{2\mu \dot{V}_{q_m} \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right)}{\rho \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)} + \frac{\frac{1}{\rho} (p_{g_2} - p_{g_1})}{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)} \\ \dot{V} - q = 0 \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Les rayons R_1 et R_2 sont déterminés par les équations (2.42) et (2.44).

Le schéma de Runge-Kutta peut ainsi être appliqué au système d'équations (2.45). A l'état initial nous supposons que la valeur initiale du débit d'échange $q_0 = q_{20} = 4\pi \dot{R}_{20} R_{20}^2$. La vitesse initiale \dot{R}_{20} est calculée par l'équation suivante :

$$\dot{R}_{20} = \frac{1}{4\pi R_{20}^2} \left(q_{m0} - 4\pi R_1^2 \dot{R}_{10} \right) \quad (2.46)$$

créée et \dot{R}_{10} : la vitesse initiale de la bulle 1 estimée par sa valeur linéarisée. La vitesse radiale initiale des interfaces n'influent fortement que sur la durée d'une séquence, soit en fait sur le positionnement de l'origine temporelle du phénomène.

2.4.1 CALCUL DE LA VITESSE INITIALE \dot{R}_{10} : ETUDE LINEAIRE

Pour l'étude linéaire, nous posons l'hypothèse d'échange de vide entre deux bulles non soumises à une expansion, qui ne contiennent pas de gaz partiel et dont les rayons varient très lentement.

Soit $\frac{4\pi}{3}\delta R^3$ volume d'échange entre les bulles 1 et 2. Comme la variation du volume est très faible, avec R_0 le rayon initial des bulles, nous pouvons poser :

$$R_2 = R_0 + \delta R \quad (2.47)$$

$$R_1 = R_0 - \delta R \quad (2.48)$$

$$\ddot{R}_2 = \delta \ddot{R}, \quad \dot{R}_1 = -\delta \dot{R} \text{ et } \ddot{R}_1 = -\delta \ddot{R}.$$

Nous posons le changement de variable suivant :

$$\delta R^* = \frac{\delta R}{R_0} \ll 1 \quad (2.49)$$

En tenant compte des équations (2.47), (2.48) et (2.49), l'équation (2.33) sans les termes d'expansion et de la pression des gaz partiels devient :

$$\begin{aligned} & R_0 (1 + \delta R^*) \delta \ddot{R} \left(1 + \frac{(1 + \delta R^*)}{(1 - \delta R^*)} \right) + \frac{4\mu}{\rho R_0} \frac{\delta \dot{R}}{(1 + \delta R^*)} \left(1 + \frac{(1 + \delta R^*)^3}{(1 - \delta R^*)^3} \right) + \dots \\ & \delta \dot{R}^2 \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{(1 + \delta R^*)}{(1 - \delta R^*)} - \frac{(1 + \delta R^*)^2}{(1 - \delta R^*)^2} + \frac{(1 + \delta R^*)^3}{(1 - \delta R^*)^3} \right) \right] \left(1 + \frac{(1 + \delta R^*)}{(1 - \delta R^*)} \right) + \dots \\ & \frac{2S}{\rho R_0} \frac{1}{(1 + \delta R^*)} \left(1 - \frac{(1 + \delta R^*)}{(1 - \delta R^*)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Avec $\delta R^* \ll 1$ nous pouvons remplacer les termes $(1 \pm \delta R^*)^{-1}$ par leurs développements limités à l'ordre un. Ainsi, en négligeant tout les termes non linéaires en δR^* de l'équation (2.50), nous aboutissons à l'équation linéarisée suivante :

$$\delta \ddot{R} + \frac{4}{N_{Re}} \delta \dot{R} - \frac{2}{N_{We}} \delta R = 0 \quad (2.51)$$

$$\text{Avec } N_{Re} = \frac{\rho R_0^2}{\mu} \text{ et } N_{We} = \frac{\rho R_0^3}{S}.$$

Par analogie aux systèmes oscillants, nous pouvons faire les remarques suivantes : Le terme $-\frac{2}{N_{We}}$: représente une rigidité négative. Nous remarquons que plus ce nombre est petit plus l'instabilité est grande, ainsi les petites bulles ont tendance à favoriser l'échange de vide.

Le terme $\frac{4}{N_{Re}}$: représente l'amortissement. Nous constatons que plus ce nombre est petit, plus l'amortissement est grand. Ceci peut expliquer l'influence de la viscosité sur l'atténuation des oscillations des bulles de petite taille.

L'équation (2.51) admet une solution théorique. Avec les conditions initiales $\delta R(0) = \delta R_0$ et $\dot{\delta R}(0) = 0$, La solution générale est :

$$\delta R(t) = \frac{\omega_2 \delta R_0}{\omega_2 - \omega_1} \exp(\omega_1 t) + \frac{\omega_1 \delta R_0}{\omega_1 - \omega_2} \exp(\omega_2 t) \quad (2.52)$$

Avec $\omega_1 = -\frac{2}{N_{Re}} - \sqrt{\frac{4}{N_{Re}^2} + \frac{2}{N_{We}}}$ et $\omega_2 = -\frac{2}{N_{Re}} + \sqrt{\frac{4}{N_{Re}^2} + \frac{2}{N_{We}}}$. Et la vitesse linéarisée :

$$\dot{\delta R}(R_0, t) = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \delta R_0 \exp(\omega_1 t) + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \delta R_0 \exp(\omega_2 t) \quad (2.53)$$

ω_1 étant négatif, le terme lui correspondant tend vers zéro dans le temps, seul le terme en ω_2 gouverne l'évolution du phénomène.

Il s'ensuit la vitesse $\dot{R}_1 = -\dot{\delta R}$

$$\dot{R}_1 = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \delta R_0 \exp(\omega_2 t) \quad (2.54)$$

L'équation (2.54) nous permet d'initialiser la vitesse \dot{R}_1 en prenant un temps $t = 0.1 \mu s$

2.5 ETUDE NUMERIQUE D'UNE SEQUENCE

Dans cette première application nous considérons que les bulles 1 et 2 ne sont pas soumises à une expansion : $q_m = 0$. Ainsi, en tenant compte des équations (2.22) et (2.23) les deux bulles ont des débits égaux en valeur absolue, qui est le débit d'échange q .

Nous utiliserons cette étude numérique d'une séquence, au cours de laquelle une petite bulle 1 disparaît au profit d'une grosse bulle voisine 2, pour étudier l'influence de la présence d'un gaz partiel sur le comportement des deux bulles.

Dans le cas où les bulles ne contiennent pas de gaz partiel, comme il est impossible de faire numériquement disparaître complètement la petite bulle, le choix d'un test d'arrêt

s'impose. Ce test sera porté sur le rayon de la bulle 1 qui disparaît. Ainsi, si le rayon de la bulle 1 atteint la valeur fixée et même dans le cas où la bulle contient du gaz, on arrête la séquence. Dans cette étude elle est fixée à 10% de la valeur initiale de la bulle 1.

Si les bulles contiennent un gaz partiel, il restera une bulle résiduelle, dont des études expérimentales ont montré l'existence. Avec un gaz partiel, comme la pression de vapeur saturante est considérée constante, la variation de la pression intérieure est celle du gaz. L'évolution de la pression du gaz partiel peut être décrite par l'équation d'état des gaz parfaits. En plus des hypothèses : transformation isotherme et diffusion du gaz négligées, les équations qui gouvernent l'évolution des gaz partiels des bulles 1 et 2 sont :

$$p_{g1} = p_{g10} \left(\frac{R_{10}}{R_1} \right)^3 \quad (2.55)$$

$$p_{g2} = p_{g20} \left(\frac{R_{20}}{R_2} \right)^3 \quad (2.56)$$

En tenant compte des équations (2.55) et (2.56), l'équation (2.32) sans les termes de l'expansion devient :

$$\begin{aligned} R_2 \ddot{R}_2 + \dot{R}_2^2 \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{R_2^3}{R_1^3} \right) \right] + 4 \frac{\mu \dot{R}_2}{\rho R_2} \frac{(1 + \frac{R_2^3}{R_1^3})}{(1 + \frac{R_2}{R_1})} + \frac{2T}{\rho R_2} \frac{(1 - \frac{R_2}{R_1})}{(1 + \frac{R_2}{R_1})} + \dots \\ \frac{1}{\rho} \left(p_{g10} \left(\frac{R_{10}}{R_1} \right)^3 - p_{g20} \left(\frac{R_{20}}{R_2} \right)^3 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Nous rappelons que, le système est fermé par l'équation de conservation du volume (2.27), sans le terme de l'expansion.

2.5.1 CALCUL SANS DIFFUSION DE GAZ ET PERTE D'ENERGIE

Comme on peut le voir sur la figure 2.4, la présence du gaz n'a que peu d'influence sur les petites bulles de l'ordre de $1\mu m$. En tenant compte du critère de test d'arrêt fixé à 0.1, avec au moins 5000 Pa qui est une pression importante dans le cas de la pure cavitation, la bulle met à peu près la même durée pour disparaître que dans le cas où les gaz partiels sont nuls. Pour le cas où la pression des gaz partiels est très importante : exemple 0.1 Bar, le test d'arrêt n'est pas atteint, les bulles oscillent et leurs oscillations s'amortissent très rapidement. Même dans ce cas, la grosse bulle finale à presque la même taille que le cas des gaz partiels nuls.

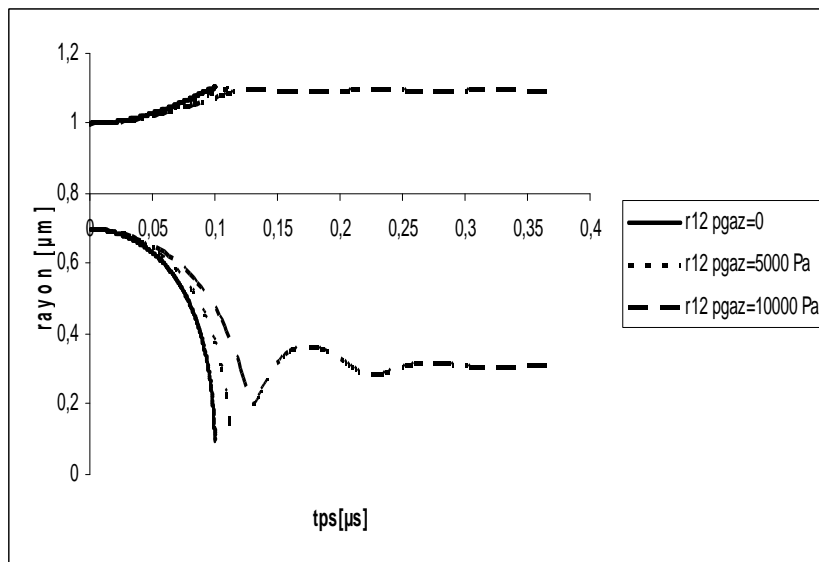


FIG. 2.4 – Evolution des bulles 1 et 2 pour différentes pressions de gaz avec $R_{20} = 1\mu m$ et un rapport R_{10}/R_{20} de 0.7.

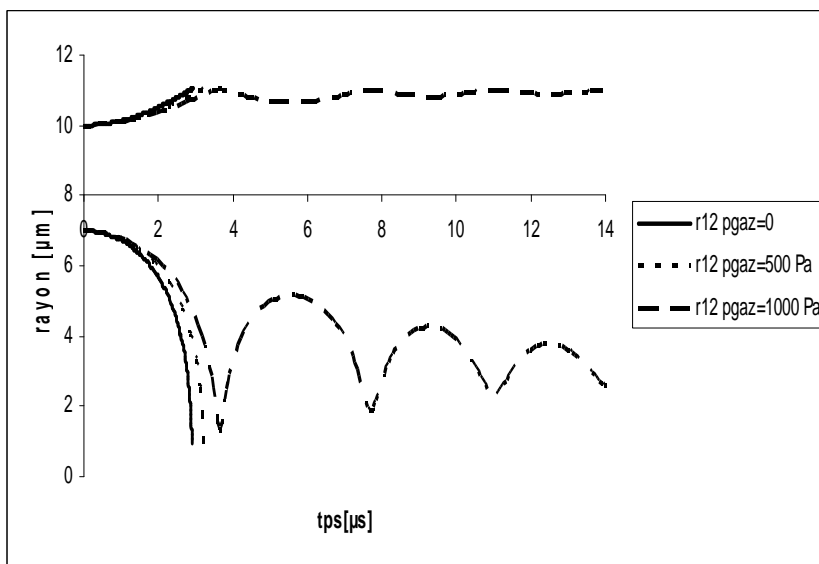


FIG. 2.5 – Evolution des bulles 1 et 2 pour différentes pressions de gaz avec $R_{20} = 10\mu m$ et un rapport R_{10}/R_{20} de 0.7.

Par contre comme on peut le voir sur la figure 2.5, avec un rayon de $10\mu m$ et une pression de $1000 Pa$, les bulles oscillent sur un long intervalle de temps. Au cours de ces oscillations une fois que le rayon de la bulle 1 atteint certaine taille, la pression des gaz partiels qui est proportionnelle à l'inverse du cube du rayon domine les autres termes,

ce qui provoque un renversement des rôles. La bulle 1 va commencer à grossir du fait de sa pression intérieure, au détriment de la bulle 2. Le phénomène va s'inverser à nouveau une fois que la pression des gaz partiels de la bulle 2 aussi atteint certaines valeurs.

Le phénomène d'amortissement rapide des germes de petit rayon est surtout dû à la viscosité. Les oscillations des bulles sont surtout dues à la non prise en compte de la diffusion des gaz et de la perte d'énergie.

2.5.2 PRISE EN COMPTE DE LA DIFFUSION DES GAZ ET PERTE D'ENERGIE

Dans ce paragraphe on introduit temporairement un amortissement afin d'en évaluer l'influence sur les résultats du modèle.

Beaucoup d'expériences montrent le processus du collapse d'une bulle (Ahyi (1997), Buogo & Cannelli (2002)). Toutes ces expériences montrent qu'on a effectivement une perte d'énergie. La bulle finit par disparaître ou laisser des traces après quelques rebonds.

Franc et al. (1995, page-59) font état d'un phénomène dit de diffusion rectifiée, où un germe est soumis à un champ oscillant de pression, ainsi dans la phase de l'explosion du germe, les gaz diffusent du liquide vers le germe et au cours de l'implosion, c'est l'inverse qui se produit. En utilisant le temps nécessaire au doublement de la taille du germe donné par Plesset & Hsieh (1960) lors d'une diffusion rectifiée, ils ont conclu que la diffusion rectifiée n'affecte probablement pas les écoulements industriels d'une manière significative. Ainsi, partant de cette conclusion nous négligeons la diffusion des gaz et nous ne tenons compte que de la perte d'énergie.

Lors du collapse d'une bulle, comme le fluide est compressible, la perte d'énergie est due aux effets visqueux, acoustiques, thermiques et par une déformation non sphérique de la bulle à certain stade du collapse. Cette déformation se traduit par une fission de la bulle en plusieurs petites bulles, ou par un jet rentrant qui pénètre la bulle. Ce phénomène de déformation non sphérique est observée expérimentalement par Frost & Sturtevant (1986), ils ont photographié et estimé n_m^3 un nombre maximum de fragments de bulles après fission avec $n_m \simeq 20$.

Brennen (2002) a évalué la dissipation de l'énergie au cours d'un collapse d'une bulle dû à la fission de celle-ci en plusieurs fragments. Il introduit l'analyse de l'instabilité de Rayleigh-Taylor et le mécanisme du micro-jet pour explorer le processus de la fission de la bulle. Il montre que l'énergie cinétique dissipée avec la fission est plus importante que celle détournée dans l'énergie supplémentaire de la surface libre. Cependant les deux énergies sont plus importantes que celles utilisées pour évaluer l'atténuation du collapse d'une bulle par les mécanismes classiques de la viscosité, thermique et acoustique. Ainsi, il conclut qu'il est nécessaire d'introduire un mécanisme de dissipation de l'énergie, associé au processus de fission dans la méthode de Rayleigh-Plesset du modèle d'évolution d'une bulle ou d'un nuage de bulles. Avec les hypothèses suivantes :

- la fission de la bulle se passe instantanément aux environs du rayon minimum de la bulle au cours du collapse,

- le nombre de fragments de la fission est donné,
- la pression des gaz partiels à l'intérieur de chaque fragments est la même que celle de la bulle minimum avant la fission.

Ainsi en considérant qu'on a conservation du volume pendant la fission, ce qui permet de déterminer R_f le rayon moyen de la bulle après la fission :

$$R_f = \frac{R_{min}}{n_m} \quad (2.58)$$

Avec n_m^3 le nombre de fragments de la fission et R_{min} rayon minimum de la bulle au cours du collapse.

En considérant aussi la continuité de la pression des gaz partiels, Delale & Tunç (2004) ont proposé un modèle, d'équation de Rayleigh-Plesset modifiée fonction du nombre de fragments issus de la fission, comme cela a été suggéré par Brennen :

$$\begin{aligned} R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} \dot{R}^{*2} + \frac{\sigma}{2} \left[1 - \left(\frac{R_f^*}{R_{min}^*} \right)^{3k} R^{*-3k} \right] + \frac{4}{Re} \frac{\dot{R}^*}{R^*} + \dots \\ \frac{2}{We} \left[R^{*-1} - \left(\frac{R_f^*}{R_{min}^*} \right)^{3k} R^{*-3k} \right] + \frac{1}{2} Cp = 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Juste après le rebond, l'équation de Rayleigh-Plesset classique est remplacée par l'équation (2.59). Cette équation modifiée gouverne l'évolution du rayon à $t \geq t_0$, avec t_0 le temps où on a le rayon minimum de la bulle. Où les conditions initiales sont $R(t_0) = R_f$ et $\dot{R} = 0$. D'après cette étude Delale & Tunç confirment que l'énergie dissipée due à la fission de la bulle dépasse de loin celle des mécanismes d'atténuations classiques.

En remplaçant R_f par sa valeur (2.58) dans (2.59) on a :

$$\begin{aligned} R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} \dot{R}^{*2} + \frac{\sigma}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{N_m^{1/3}} \right)^{3k} R^{*-3k} \right] + \frac{4}{Re} \frac{\dot{R}^*}{R^*} + \dots \\ \frac{2}{We} \left[R^{*-1} - \left(\frac{1}{N_m^{1/3}} \right)^{3k} R^{*-3k} \right] + \frac{1}{2} Cp = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Avec $N_m = n_m^3$ le nombre de fragments de la fission. Après quelques calculs nous avons abouti à l'équation de Rayleigh-Plesset modifiée en fonction du nombre de rebonds n_r :

$$\begin{aligned}
R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} \dot{R}^{*2} + \frac{\sigma}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{N_m^{1/3}} \right)^{3kn_r} R^{*-3k} \right] + \frac{4}{Re} \frac{\dot{R}^*}{R^*} + \dots \\
\frac{2}{We} \left[R^{*-1} - \left(\frac{1}{N_m^{1/3}} \right)^{3kn_r} R^{*-3k} \right] + \frac{1}{2} Cp = 0.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Comme on peut le voir dans l'équation (2.61) à laquelle nous avons abouti, l'effet de la fission n'intervient que, dans le terme de la pression des gaz partiels, même si par ailleurs, ils ont fait l'hypothèse d'une pression des gaz partiels à l'intérieur de chaque fragments identique à celle de la bulle minimum avant la fission. Cela apparaît comme si après chaque rebond la pression initiale des gaz partiels est divisée par le terme suivant $\left(N_m^{1/3} \right)^{3k}$.

Vu les calculs avec ou sans pression des gaz partiels, on peut constater que celle-ci est le principal moteur de ces rebonds indéfinis. Ainsi, Delale & Tunç (2004) ont d'une manière implicite amorti la pression initiale des gaz partiels dans le temps.

On sait que amortir une grandeur physique n'a de sens que si cet amortissement a été fait avec la dérivée de celle-ci. Ainsi, pour prendre en compte les pertes d'énergie, nous avons introduit dans les calculs de la pression un amortissement fonction de la dérivée de la pression après le premier rebond et durant toute la phase où la bulle petite croit à nouveau.

Ainsi, la pression de la petite bulle est calculée par l'équation (2.66) sauf pendant sa phase de croissance, ou elle est déterminée par l'équation suivante :

$$p_g = p_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - \frac{n_m R_0}{c} \frac{dp_g}{dt} \tag{2.62}$$

$\frac{n_m R_0}{c}$: coefficient d'amortissement. Avec c la vitesse de son du fluide et n_m^3 le nombre de fragments de la fission.

Comme on peut le voir sur la figure 2.6 page 55, la prise en compte de la perte d'énergie nous a permis d'atténuer les rebonds. Et plus n_m le nombre de fragments de la fission est élevé plus les rebonds sont atténués. Mais surtout pour $n_m = 20$ qui correspond à la valeur expérimentale de Frost & Sturtevant les rebonds sont atténués.

2.5.3 CONCLUSION

Dans cette étude numérique d'une séquence, les calculs sont arrêtés si le rayon de la petite bulle atteint 10% de sa valeur initiale. Nous avons constaté qu'avec la prise en compte du gaz partiel, si la pression du gaz partiel est faible ce qui est le cas de la cavitation pure, les petites bulles disparaissent ou convergent très vite vers leur valeur finale. Nous avons pu atténuer les rebonds grâce à un amortissement sur la pression

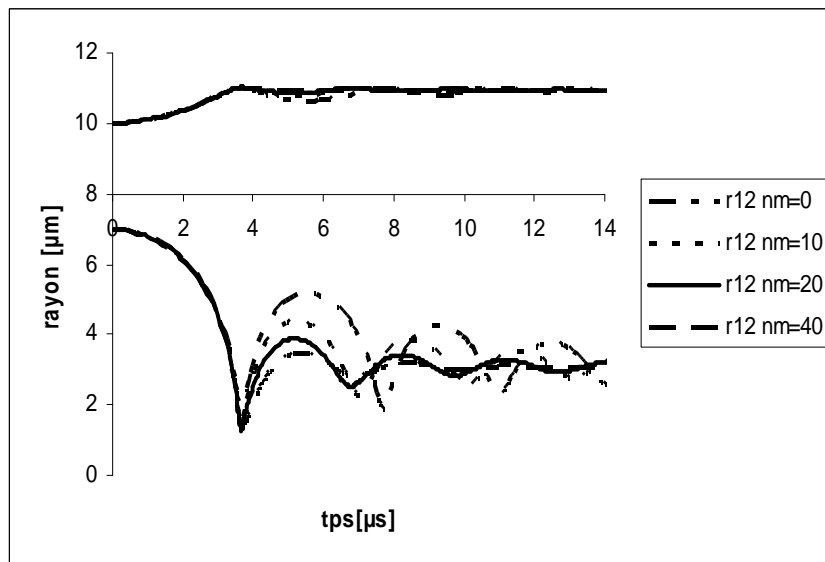


FIG. 2.6 – Evolution des bulles 1 et 2 pour différents n_m^3 avec $R_{20} = 10\mu m$, $p_{g20} = 1000 Pa$ et un rapport R_{10}/R_{20} de 0.7

du gaz avec le paramètre n_m^3 le nombre de fragments de la fission sensiblement égal à celui estimé dans l'expérience. Ainsi, en tenant compte du critère de test d'arrêt, nous pouvons négliger les gaz partiels ou même dans le cas de la prise en compte de ces derniers passer à la séquence suivante avant le premier rebond, ce qui limite grandement la portée du modèle d'amortissement. Par la suite on néglige la présence du gaz partiel et aussi l'amortissement.

2.6 ETUDE NUMERIQUE D'UNE SUITE DE SEQUENCES

Avec l'équation (2.27) de conservation du volume, on remarque que pendant une séquence, la bulle 1 va à plus ou moins brève échéance disparaître, la bulle 2 va voir son volume augmenter pour atteindre la somme du volume des bulles initiales et de celui dû à l'expansion. De ce fait, la bulle 2 peut ne pas atteindre au cours d'une séquence unique la taille caractéristique d'une bulle de cavitation réelle finale, d'où la nécessité d'enchaîner les séquences.

Dans cette étude nous prenons en compte l'expansion qui nous rappelle, est une grandeur qui dépend du comportement global de l'écoulement. Elle est donnée par la physique de l'écoulement. Dans cette partie nous étudions l'influence du rayon initial R_{20} . Les deux rayons initiaux sont reliés par un paramètre, défini comme le rapport des valeurs initiales de R_{10} et R_{20} de la toute première séquence. L'influence de ce rapport et du choix du test d'arrêt d'une séquence est étudié ici.

2.6.1 CONDITION DE RACCORDEMENT DES SEQUENCES

Il est très important de décrire l'évolution complète du modèle, c'est-à-dire d'une part l'évolution des grandeurs physiques au cours d'une séquence et d'autre part les conditions de passage d'une séquence à une autre.

L'équation gouvernant le phénomène étant du second ordre, à chaque séquence le rayon R_2 et la vitesse \dot{R}_2 doivent être initialisés. Pour le rayon, pour assurer la continuité de l'évolution de la grosse bulle, il est initialisé au rayon final de la séquence précédente. Pour la vitesse nous avons deux possibilités. La première est d'assurer la continuité avec la vitesse précédente et d'initialiser la vitesse avec celle de la séquence précédente. La deuxième possibilité c'est d'assurer la continuité de la pression. Dans l'étude de l'influence à long terme des rayons initiaux, nous considérons le cas où la continuité de la vitesse est assurée.

La petite bulle introduite dans chaque séquence de rayon R_{10} est initialisée à partir du rapport R_{10} et R_{20} donné. La divergence du milieu est une fonction continue, si la divergence est faible, alors le volume de contrôle peut être pris comme constant au cours d'une séquence et ré-initialisé en tenant compte de l'introduction de la petite bulle. Le test d'arrêt est suffisamment petit pour qu'on puisse négliger le volume de la petite bulle à la fin de la séquence. Le volume de contrôle augmenté du volume correspondant à la petite bulle à chaque changement de séquence est une fonction discontinue, en escalier qui varie comme une suite géométrique :

$$V_{con}(N_{seq}) = V_{con0} \cdot r^{(N_{seq}-1)} \quad (2.63)$$

Avec V_{con0} : Volume de contrôle initiale, $r = 1 + \left(\frac{R_{10}}{R_{20}}\right)^3$ la raison et N_{seq} le numéros de la séquence.

2.6.2 INFLUENCE DU TEST D'ARRET

Dans l'étude numérique d'une séquence, le choix du test d'arrêt a été totalement arbitraire. Aussi pour voir l'influence de ce choix sur l'évolution de la grosse bulle, nous avons comparé son évolution, dans les mêmes conditions, pour différents tests d'arrêt.

Les trois essais présentent respectivement (5, 8, 10) séquences. Comme on peut le voir sur la figure 2.7, le test d'arrêt n'a pas d'influence sur l'évolution de la bulle. Sauf que plus ce test d'arrêt est grand, plus nous avons de séquences, car à chaque séquence nous avons moins de volume d'échange.

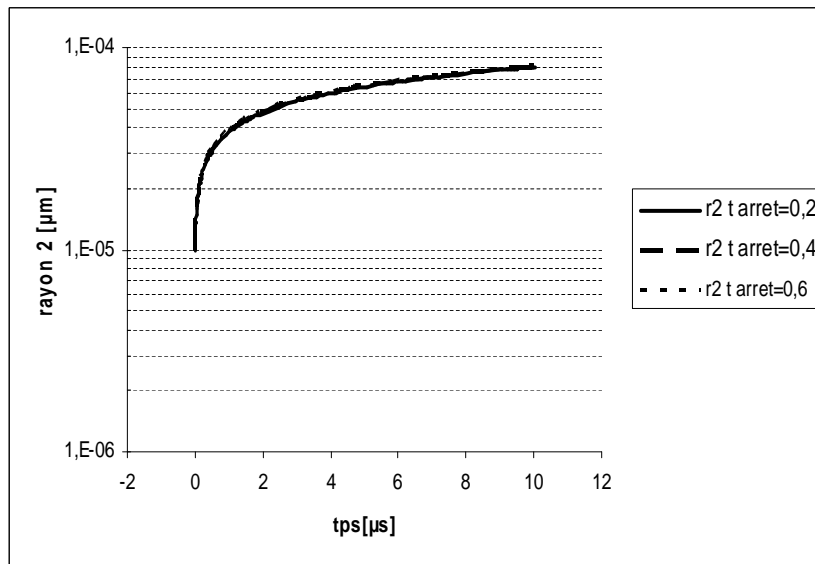


FIG. 2.7 – Evolution de la bulle 2 pour différents tests d'arrêt avec $R_{20} = 10\mu\text{m}$, un rapport R_{10}/R_{20} de 0.8, une expansion de $0.15 \cdot 10^{-5}$, une fonction constante comme divergence : $\text{div}\vec{U}(t) = 1507.70 \text{ s}^{-1}$ et un volume de contrôle initiale de 0.125 mm^3

2.6.3 INFLUENCE DU RAPPORT DES RAYONS INITIAUX

L'étude du rapport des rayons initiaux nous paraît indispensable et nécessaire. Nous rappelons qu'au cours d'une expérience, le rapport des rayons R_{10} et R_{20} reste constant. Pour cette étude, nous avons testé deux fonctions différentes comme divergence dépendant du temps. Une fonction constante de 1507.70 s^{-1} et une fonction affine décroissante de pente -150.77 s^{-2} .

Comme on peut le voir sur les figures 2.8 et 2.9, l'évolution de la grosse bulle pour les différents rapports reste quasiment identique. Ceci indique que le rapport des rayons initiaux n'a peu d'influence sur l'évolution de la grosse bulle.

Evidemment, plus le rapport est petit plus la petite bulle disparaît plus vite et plus nous avons de séquences.

2.6.4 INFLUENCE DU RAYON INITIAL R_{20}

Comme cela peut être constaté sur la figure 2.10, on remarque que le rayon initial n'a pas une grande influence sur l'évolution de la bulle, sauf dans les tous premiers instants de la croissance, où plus le rayon est petit plus la pente est raide.

L'étude de l'influence du rayon initial sur l'évolution de la pression sera étudiée dans le chapitre suivant.

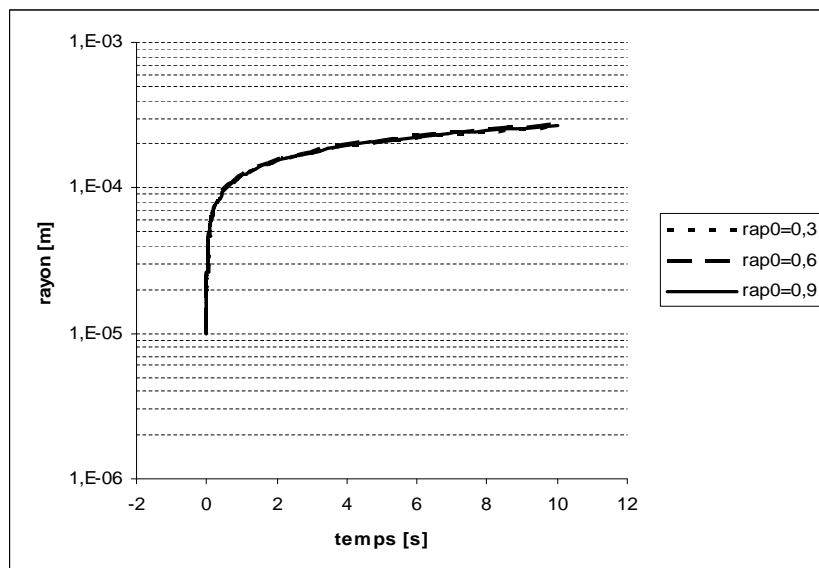


FIG. 2.8 – Evolution de la bulle 2 pour différents rapports R_{10}/R_{20} avec $R_{20} = 10\mu\text{m}$, une expansion de $0.15 \cdot 10^{-5}$, une fonction constante : $\text{div}\vec{U}(t) = 1507.70 \text{ s}^{-1}$ et un volume de contrôle initiale de 4.10 mm^3

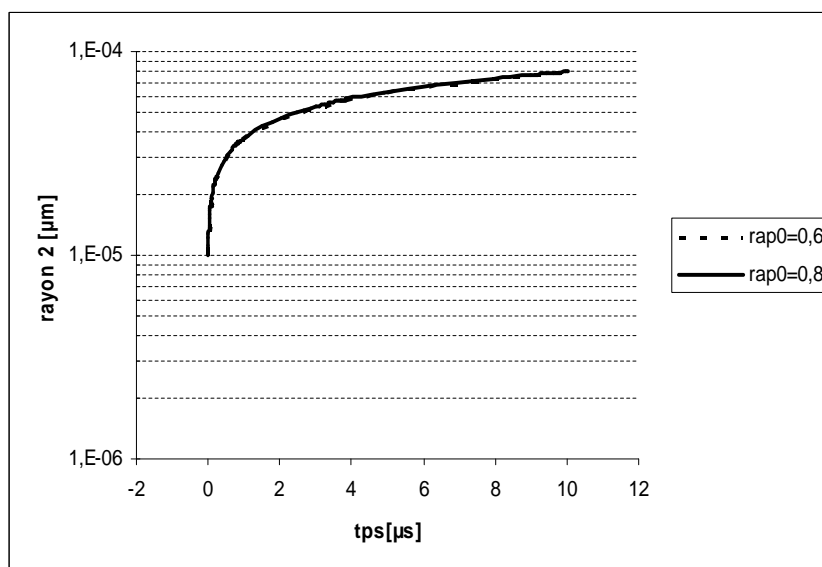


FIG. 2.9 – Evolution de la bulle 2 pour différents rapports R_{10}/R_{20} avec $R_{20} = 10\mu\text{m}$, une expansion de $0.15 \cdot 10^{-5}$, une fonction affine : $\text{div}\vec{U}(t) = 1507.70 \text{ s}^{-1} (T - t) / T$, $T = 10\mu\text{s}$ et un volume de contrôle initiale de 0.125 mm^3

2.6.5 RAYON CRITIQUE

Dans le sous chapitre ci-dessus, le rayon R_{10} a été choisi d'une façon arbitraire à travers le choix du rapport R_{10}/R_{20} . Pour une fonction de divergence sensiblement

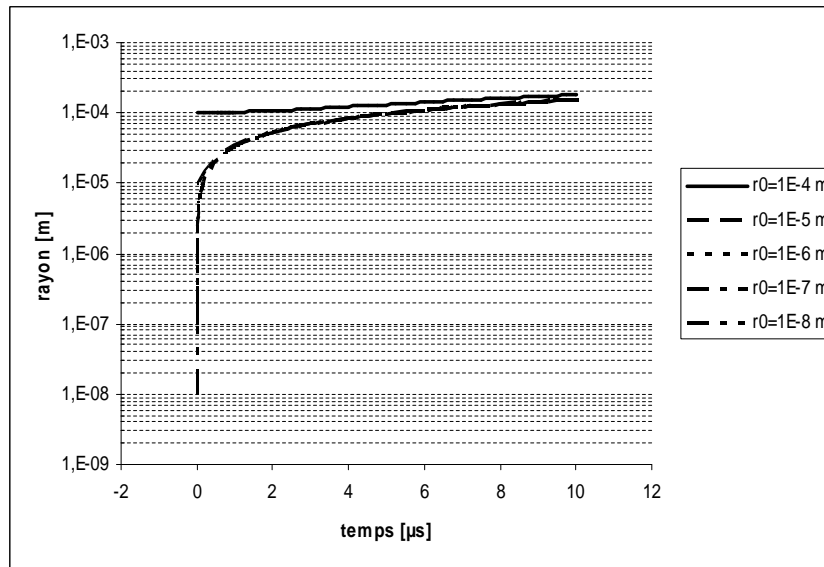


FIG. 2.10 – Variation du rayon R_2 en fonction du temps, pour différents rayon initial R_{20} avec une divergence linéaire de pente 1507.70 s^{-2} , un volume de contrôle initial de $4.10 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$ et un rapport R_{10}/R_{20} de 0.3

constante et un rayon R_{20} donnés, il existe pour la petite bulle un rayon R_c où toutes les petites bulles de rayon R_1 inférieur à R_c ne peuvent que décroître jusqu'à disparaître. Toutes les bulles de rayon R_1 supérieur à R_c vont croître puis décroître lorsque le rayon R_c croissant rapidement avec R_2 atteint la valeur R_1 . C'est ce rayon R_c que nous appelons "rayon critique".

2.6.6 CONCLUSION

Dans cette étude d'une suite de séquences, où la petite bulle disparaît, le volume de contrôle est réajusté pour introduire une nouvelle petite et continuer les calculs dans une nouvelle séquence. Au raccordement, le rayon R_2 est supposé continu. Le rayon R_{10} est ré-initialisé proportionnellement au rayon R_2 et la vitesse est considérée continue. Cette dernière hypothèse impose une discontinuité sur la pression et qu'on vérifiera par la suite. Cette étude numérique d'une suite de séquences nous a permis de voir que le rayon initial R_{20} de la grosse bulle, le rapport des rayons initiaux R_{10}/R_{20} et le test d'arrêt n'ont pas d'influence sur l'évolution de la grosse bulle.

Il existe un rayon critique R_c où toutes petites bulles de rayon R_{10} inférieur à R_c ne peuvent que décroître jusqu'à disparaître. Toutes bulles de rayon R_1 supérieur à R_c vont croître peut être décroître selon l'expansion.

2.7 CONTINUITÉ DE LA PRESSION

Dans le cas où la petite bulle disparaît, le volume de contrôle est réajusté pour introduire une nouvelle petite et continuer les calculs dans une nouvelle séquence. Au raccordement, le rayon R_2 est supposé continu. Le rayon R_{10} est ré-initialisé proportionnellement au rayon R_2 , avec $R_{10} = rap0 * R_2$. Concernant la vitesse on a deux possibilités. la première qui a été utilisée dans les études ci-dessus, est de considérer la vitesse continue, ainsi la vitesse après raccordement est égale à la vitesse finale avant raccordement. La deuxième possibilité qui fait l'objet de cette partie est de considérer la pression continue, ce qui détermine une vitesse nécessaire au respect de cette condition. La vitesse est donnée par le système d'équation suivant :

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\dot{q}_2^{n+1}}{R_2^{n+1}} - \frac{1}{32\pi^2} \frac{(q_2^{n+1})^2}{(R_2^{n+1})^4} + \frac{\mu}{\rho\pi} \frac{q_2^{n+1}}{(R_2^{n+1})^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{\dot{q}_2^n}{R_2} - \frac{1}{32\pi^2} \frac{(q_2^n)^2}{(R_2^{n+1})^4} + \frac{\mu}{\rho\pi} \frac{q_2^n}{(R_2^n)^3} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{q}_2^{n+1}}{4\pi} \left(\frac{1}{R_2^{n+1}} + \frac{1}{R_{10}^{n+1}} \right) + \frac{(q_2^{n+1})^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{(R_{10}^{n+1})^4} - \frac{1}{(R_2^{n+1})^4} \right) + \dots \\ & + q_2^{n+1} \left[\frac{\mu}{\pi\rho} \left(\frac{1}{(R_{10}^{n+1})^3} + \frac{1}{(R_2^{n+1})^3} \right) - \frac{1}{16\pi^2} \frac{q_m}{(R_{10}^{n+1})^4} \right] = 2 \frac{S}{\rho} \left(\frac{1}{R_{10}^{n+1}} - \frac{1}{R_2^{n+1}} \right) + \dots \\ & + \frac{1}{4\pi} \frac{\dot{q}_m}{R_{10}^{n+1}} - \frac{1}{32\pi^2} \frac{q_m^2}{(R_{10}^{n+1})^4} + \frac{\mu}{\pi\rho} \frac{q_m}{(R_{10}^{n+1})^3} + \frac{1}{\rho} (p_{g_2} - p_{g_1}) \end{aligned} \quad (2.65)$$

l'indice n indique les grandeurs finales de la séquence précédente et l'indice $n + 1$ celle des grandeurs initiales de la séquence suivante.

L'équation (2.64) est obtenue à partir de l'égalité entre les pressions avant et après raccordement. L'équation (2.65) est obtenue avec l'équation (2.32) qui est l'équation pour le rayon (2.31) écrite sous forme de débit.

Le système d'équations (2.64) et (2.65), avec \dot{q}_2^{n+1} et q_2^{n+1} comme inconnues, permet de déterminer q_2^{n+1} d'où on déduit la vitesse R_2^{n+1} nécessaire pour que la pression soit continue.

Sur la figure 2.11 qui est un Zoom au niveau du raccordement des courbes de pression dans l'hypothèse "vitesse continue", "pression continue" et sans raccordement, on peut voir qu'on a au raccordement un saut de pression dans le cas de la vitesse continue.

2.8 CONCLUSION

Dans cette étude nous avons proposé un nouveau modèle de cavitation, où deux bulles 1 et 2 échangent du vide et sont soumises à une expansion imposée caractérisée par la

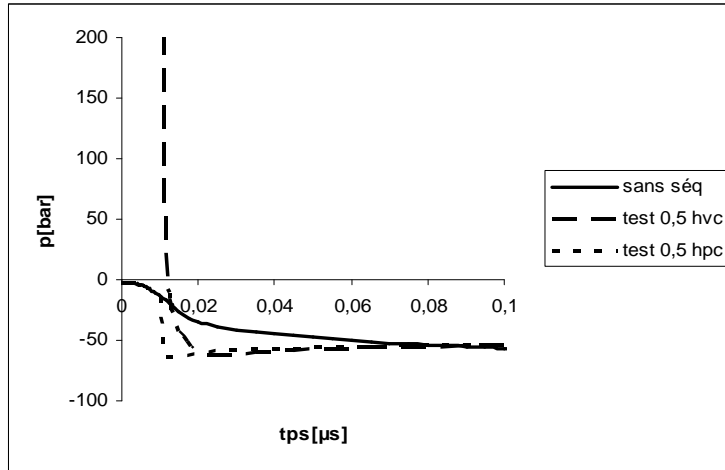


FIG. 2.11 – Zoom des courbes de pression pour différentes hypothèses de raccordement, teste arrêt de 0.5, $R_{20} = 1\mu\text{m}$ et un rapport R_{10}/R_{20} de 0.22.

divergence de la vitesse du milieu. Ce modèle offre la possibilité pour de nombreuses petites bulles de disparaître ou non selon l’expansion du milieu. Il permet surtout de déterminer la pression ambiante du milieu en fonction de l’expansion de l’écoulement.

L’étude numérique d’une ou de plusieurs séquences nous a permis de cerner les limites du modèle : Ainsi, nous avons montré que les gaz partiels, qui dans le cas d’une pure cavitation ont une pression très faible, n’ont pas d’influence sur l’évolution de la grosse bulle. Cette étude numérique nous a surtout permis de définir les conditions de raccordement des séquences et d’étudier l’influence des différents paramètres physiques. Nous avons vu que le test d’arrêt, le rapport des rayons initiaux R_{10} et R_{20} et le rayon initial de la bulle R_{20} n’ont que peu d’influence sur le phénomène.

Pour chaque séquence il existe un rayon critique R_c , en dessous duquel les bulles de rayon R_1 inférieur à R_c vont décroître jusqu’à disparaître. Et toutes bulles de rayon R_1 supérieur à R_c vont croître pour peut être décroître ensuite.

La principale conclusion qui est l’originalité de ce modèle est que contrairement à tous les modèles de cavitation, en autorisant deux bulles à évoluer différemment, la pression ambiante dans un écoulement cavitant n’est plus une donnée, c’est un résultat. Ainsi, il nous suffit de donner la divergence de la vitesse du milieu \vec{U} qui, est plus accessible dans un écoulement pour déterminer le taux de vide et surtout la pression.

Ceci dit il ne nous reste qu’à valider le modèle par une étude expérimentale.

Chapitre 3

VALIDATION AVEC L'EXPERIENCE DE OHL

3.1 INTRODUCTION

La validation est l'étape nécessaire pour garantir la pertinence du modèle. Elle confirme et assure la capacité du modèle à restituer les phénomènes physiques. Elle consiste à comparer les résultats issus du modèle avec des résultats numériques de références et des résultats expérimentaux réputés fiables.

La validation par une étude expérimentale est la plus décisive mais c'est aussi la plus complexe, car elle implique en même temps plusieurs aspects indissociables (modèle, méthode de résolution, essais de laboratoire ou en place...). Comme l'a recommandé Kinnas (1998), vu la complexité du phénomène de la cavitation, celle-ci exige qu'une validation de tout nouveau modèle soit réalisée avec des résultats expérimentaux.

Le problème qui se pose alors est qu'une validation n'a de sens que si on est sûr de traiter le même problème, de reproduire la même expérience et que les données physiques sont les mêmes dans les deux problèmes.

Pour la validation de notre modèle, nous avons choisi l'étude expérimentale de Ohl (2002). C'est l'une des rares études expérimentales où l'évolution du rayon des bulles de cavitation à l'apparition est mesuré en fonction du temps. Pour la comparaison avec la théorie, Ohl a utilisé la pression mesurée (avec un hydrophone à fibre optique FOPH-300) et modélisée par Staudenraus & Eisenmenger (1993). Il est très important de rappeler que *la pression est une donnée dans certains modèles de cavitation qui existe dans la littérature*, contrairement à notre modèle où c'est un résultat. Ainsi, la validation de notre modèle avec l'expérience sera faite par le rayon de la bulle mesuré d'une part et par la pression mesurée d'autre part.

3.2 DESCRIPTION DE L'EXPERIENCE DE OHL

Comme on peut le voir sur la figure 3.1, l'expérience de Ohl a été réalisée dans un réservoir en plexiglas à fond d'acier inoxydable rempli d'eau dégazée contenant $3mg O_2$

par litre. Une lampe flash est utilisée pour éclairer l'intérieur du réservoir.

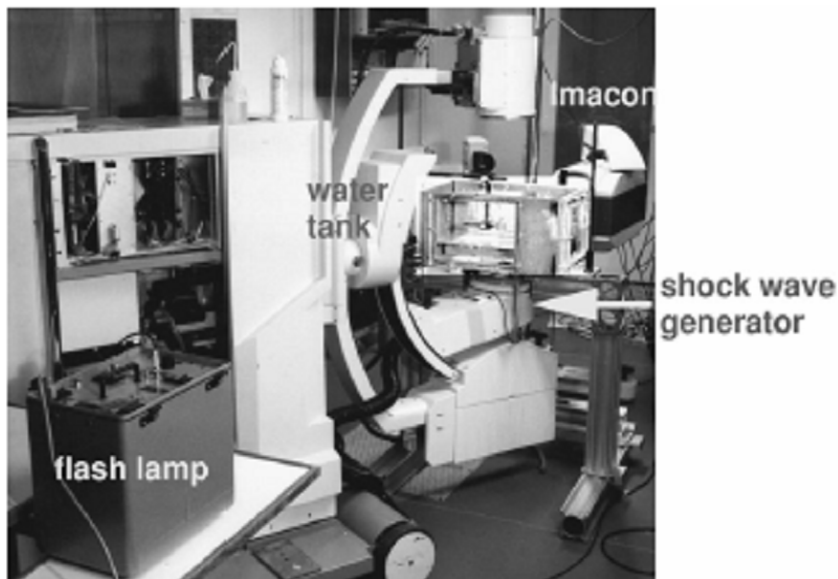


FIG. 3.1 – La photographie des appareils de l'expérience de Ohl

L'onde de choc qui est à l'origine de la dépression est engendrée dans l'eau par un générateur d'onde de choc électromagnétique placé au-dessous du réservoir. Un oscilloscope enregistre les ondes de pression.

Le passage de l'onde de choc et la dynamique des bulles sont enregistrés avec une caméra (Imacon) à grande vitesse équipée d'un microscope de fond (Questar 100). La caméra peut enregistrer jusqu'à 100 millions de photos par seconde.

Le rayon de bulles est mesuré par un traitement d'image numérique, avec une erreur de $\pm 5\mu m$. Pour une synchronisation précise de l'expérience, le générateur d'onde de choc électromagnétique, l'oscilloscope, la lampe flash, et la caméra sont déclenchés par un générateur à décalage.

3.3 LES HYPOTHESES

Dans le cas de l'étude expérimentale de Ohl, le temps est compté à partir du passage du front de l'onde de choc ou du celui de l'onde réfléchi. Pour nous l'une des principales hypothèses est que la date initiale est prise à l'instant où la bulle est pour la première fois observée. Avant cette date l'expansion est soit très faible ou nulle, ou même les germes de cavitations existant sont sous pression de la part du fluide et certains peuvent même disparaître.

Les prises des images de l'évolution des bulles expérimentales durent aux environs de $6\mu s$ et $4\mu s$, comme on peut le voir sur les figures 6 et 11 de l'étude expérimentale. Aussi

dans l'étude numérique l'expansion est imposée tout au plus pendant $6\mu s$. Au-delà elle est nulle.

Dans notre modèle nous avons besoin de la divergence. Dans l'étude expérimentale, la seule grandeur physique dont nous disposons est le taux de vide final, c'est-à-dire l'expansion finale, qui est égale au rapport du volume de la bulle finale et du volume de contrôle. Ce dernier est estimé d'après l'expérience de Ohl comme égal au produit de la surface des photos ($2.6mm \times 1.7mm$) et d'une profondeur de champs de $1mm$. Mais nous savons que l'expansion est égale à l'intégrale de la divergence sur l'intervalle du temps où elle a été imposée $\int div \vec{U} dt$. Ainsi, si nous connaissons l'expansion finale, ceci nous permet de proposer une répartition dans le temps de la divergence, dont on connaît l'intégrale sur l'intervalle du temps.

3.4 ESTIMATION DE L'EXPANSION DANS L'EXPERIENCE

Comme nous l'avons précisé, pour pouvoir comparer deux problèmes, on doit s'assurer que les données physiques sont concordantes dans les deux problèmes. La principale donnée que nous possédons est l'expansion finale, qui est égale au rapport du volume des bulles et du volume de contrôle. Ce dernier est estimé égale $4.42 \cdot 10^{-9} m^3$, ainsi en mesurant le rayons final des bulles, nous pouvons estimer l'expansion expérimentale.

3.4.1 L'EXPANSION DE LA PREMIERE EXPERIENCE

Dans cette première expérience, les bulles apparaissent suite au passage de l'onde. Ohl a porté sur la figure 6 de son étude les mesures de la bulle de trois expériences différentes. Le rayon moyen des bulles finales est égale à $2.51 \cdot 10^{-4} m$. Ainsi, l'expansion finale de cette première expérience est à peu près égale à $1.50 \cdot 10^{-2}$.

3.4.2 L'EXPANSION DE LA DEUXIEME EXPERIENCE

Dans la deuxième expérience, où deux bulles localisées notées a et b apparaissent suite au passage de l'onde réfléchi. Nous considérons l'expansion finale comme la somme des expansions des bulles a et b . Ceci donne une expansion de l'ordre de $4.17 \cdot 10^{-3}$.

Les expansions estimées, peuvent être prises avec plus ou moins des marges d'erreurs. Ainsi, comme nous possédons l'expansion dans les deux expériences, il ne nous reste qu'à proposer des fonctions temporelles pour la divergence et de comparer nos résultats numériques avec ceux de l'étude expérimentale.

3.5 VALIDATION AVEC LES MESURES EXPERIMENTALES

Dans l'étude expérimentale, nous n'avons la mesure du rayon et de la pression que pour le cas des bulles qui apparaissent suite au passage du front du choc de l'onde. Dans le cas de la réflexion de l'onde nous ne possédons pas de la pression. Ainsi, dans notre validation nous n'utiliserons que le cas du passage du front du choc de l'onde, car le modèle doit être validé par le rayon et par la pression.

3.5.1 VALIDATION PAR LE RAYON EXPERIMENTAL

L'eau utilisée par Ohl contient $3mg O_2$ par litre, soit $13.26 \cdot 10^{-6}mg O_2$ par volume de contrôle estimé. Ainsi, en tenant compte qu'un litre de di-oxygène pèse $1.3g$ et que cette masse se répartit en plusieurs petits germes de cavitation, mais surtout comme il y a une pic de surpression qui a tendance à faire dissoudre les germes dans les premiers instants, le rayon initial R_{20} peut être pris égale à $1 \mu m$. La vitesse initiale \dot{R}_{20} est donnée par l'équation (2.46).

Dans cette validation, nous avons essayé plusieurs types de $div \vec{U}$ comme fonction du temps, dont entre autres des fonctions constante, affine décroissante, linéaire, exponentielle et polynômial. Par ailleurs nous avons essayé plusieurs durées, durant lesquelles est maintenue constante l'aire $\int div \vec{U} dt$.

Certaines fonctions donnent une expansion très forte dans les premiers instants de l'apparition, comme c'est le cas des fonctions affines : voir figure 3.2.

Au contraire comme on peut le voir sur les figures III-3, III-4 et III-5, les résultats obtenus avec les fonctions linéaires, exponentielles et polynômiales eux concordent avec ceux de l'expérience.

Dans nos comparaisons nous avons constaté que les courbes dont les durées sont de $3\mu s$ et $4\mu s$ durant lesquelles les fonctions sont imposées correspondent les mieux aux résultats expérimentaux. Ceci est tout a fait cohérent, car en observant de près les mesures expérimentales, on constate que l'évolution des bulles ne dure qu'à peu près 3 à $4\mu s$.

3.5.1.1 CONCLUSION SUR LA VALIDATION PAR LE RAYON

La validation par le rayon expérimental montre qu'on peut trouver partant des données expérimentales, une loi de divergence qui appliquée au modèle donne des résultats très satisfaisants sur l'évolution des rayons des bulles au cours du temps. L'expansion totale et la durée de cette expansion sont les principaux paramètres issus de l'expérience.

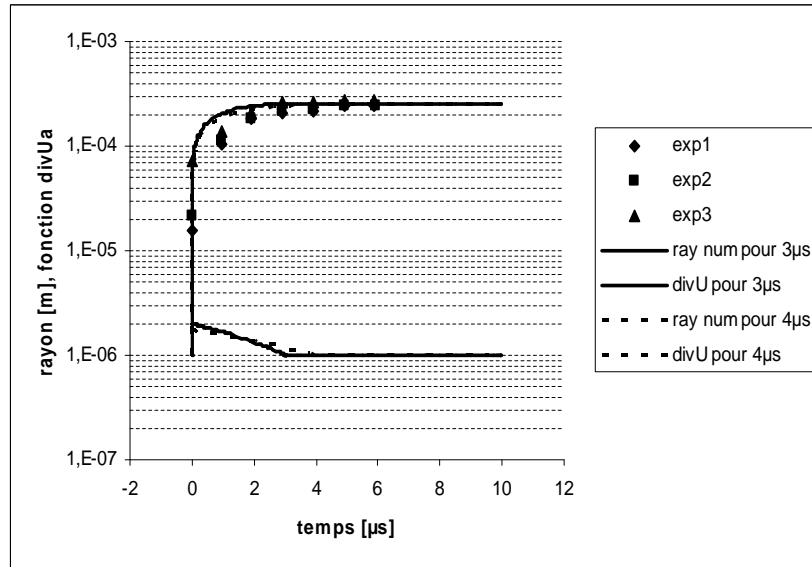


FIG. 3.2 – Comparaison rayon expérimental et numérique pour une fonction affine décroissante : $divU(t) = 10051,33(3 - t)/3$: de durée d'imposition $3\mu s$ et $divU(t) = div_0(4 - t)/4$: de durée d'imposition $4\mu s$

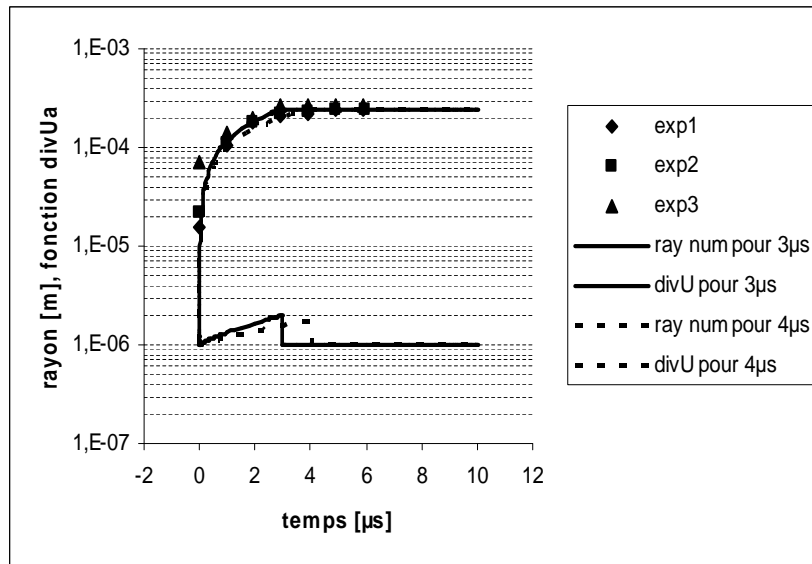


FIG. 3.3 – Comparaison rayon expérimental et numérique pour une fonction linéaire $divU(t) = div_0 * t$: de durée d'imposition $3\mu s$ et $4\mu s$

Pour ce qui est des fonctions de $div\vec{U}$ qui correspondent à celle de l'expérience, nous ne pouvons pas tirer une conclusion sur la seule validation du rayon expérimental. Ces fonctions doivent être validées par la pression.

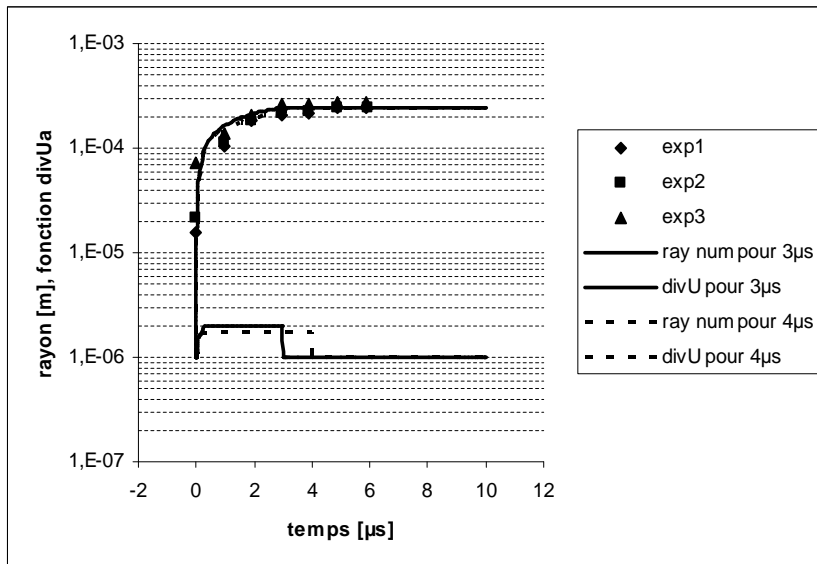


FIG. 3.4 – Comparaison rayon expérimental et numérique pour des fonctions exponentielles $divU(t) = div_0(1 - \exp(-t/T))$: de durée d'imposition $3\mu s$ et $4\mu s$ avec $T = 0.1\mu s$

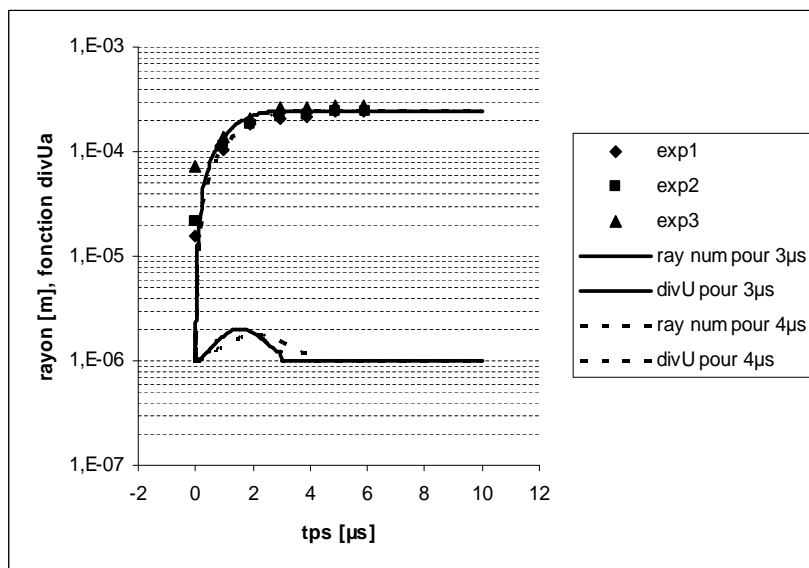


FIG. 3.5 – Comparaison rayon expérimental et numérique pour des fonctions polynômiales $divU(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$: de durée d'imposition $3\mu s$ et $4\mu s$

3.5.2 VALIDATION PAR LA PRESSION

Comme nous venons de le constater dans la validation avec le rayon mesuré, il existe au moins trois familles de fonctions de $div\vec{U}$ qui donnent des résultats satisfaisants avec

l'expérience. Si la divergence qui correspond à l'expérience de Ohl est parmi ces familles, alors sa pression résultante calculée doit concorder avec la pression expérimentale mesurée.

Ainsi, comme on peut le constater sur la figure 3.6, la courbe de la pression de la fonction linéaire n'a pas du tout la même allure que celle de l'expérience. Elle présente une très forte dépression, qui même en remontant reste toujours négative.

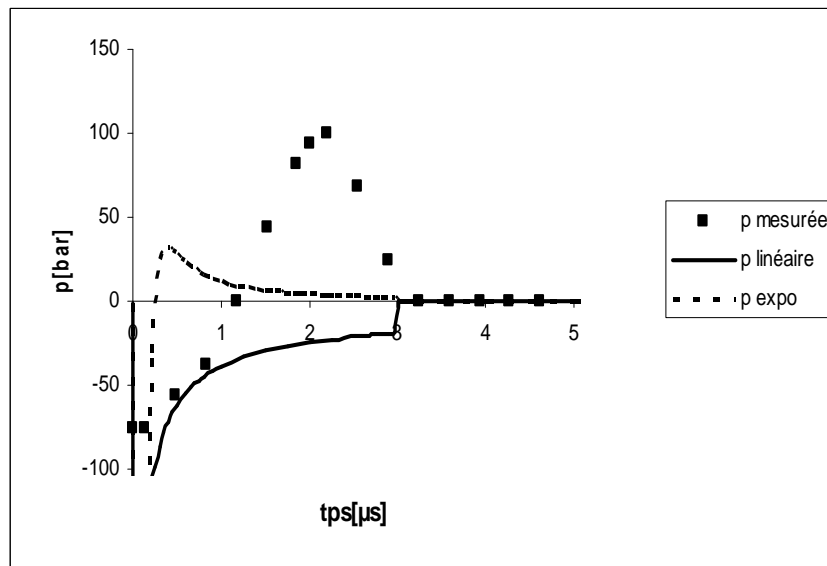


FIG. 3.6 – Evolution de la pression numérique pour les fonction linéaire et exponentielle : durée d'imposition $3\mu s$.

Dans le cas de la fonction exponentielle, comme on peut le voir sur la figure 3.6 aussi, la pression devient positive à de moins $0.5\mu s$, alors que la pression expérimentale mesurée ne devient positive qu'à près $1\mu s$, mais surtout la pression remonte très peu et s'atténue vers zéro très rapidement.

Par contre, comme on peut le voir sur la figure 3.7, les courbes de pression issues de la fonction polynômiale ont les même allures que celle mesurée, sauf que l'étalement de la partie convexe de la pression pour le cas où la durée d'imposition est égale à $4\mu s$ dépasse largement celle de l'expérience. Pour le cas de la durée d'imposition de $3\mu s$, les seuls inconvénients sont que, notre modèle donne une plus forte dépression que celle de l'expérience et que la remontée en pression est moins importante.

La forte dépression est due soit à la taille initiale des germes, car nous savons qu'elle a une influence sur la dépression nécessaire pour amorcer la cavitation, ou à une forte expansion dans les premiers instants. Mais comme on peut le voir sur la figure 3.8 avec un rayon initial $R_{20} = 10 \mu m$, la dépression est toujours forte. Ainsi, la forte dépression est due à une forte expansion dans les premiers instants. Pour palier à ce

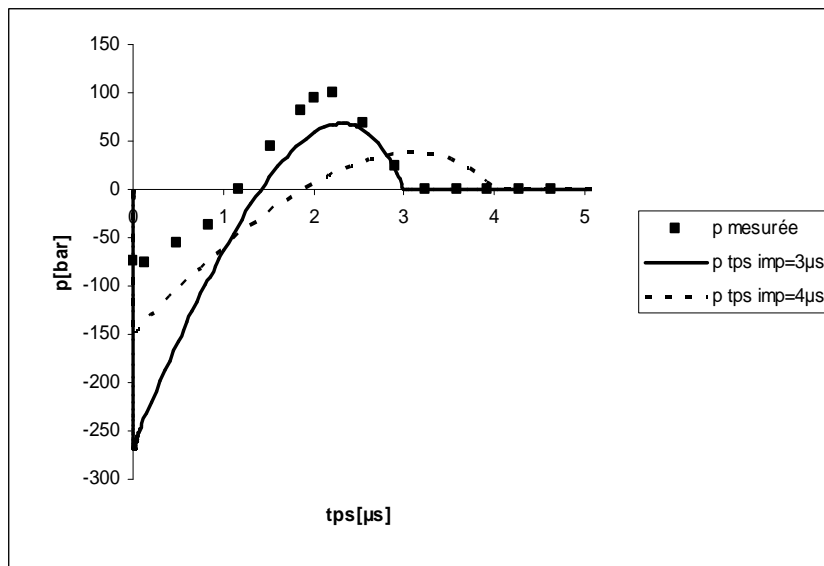


FIG. 3.7 – Evolution de la pression numériques pour une fonction polynômiale $\text{div}U(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$: de durée d'imposition $3\mu\text{s}$ et $4\mu\text{s}$.

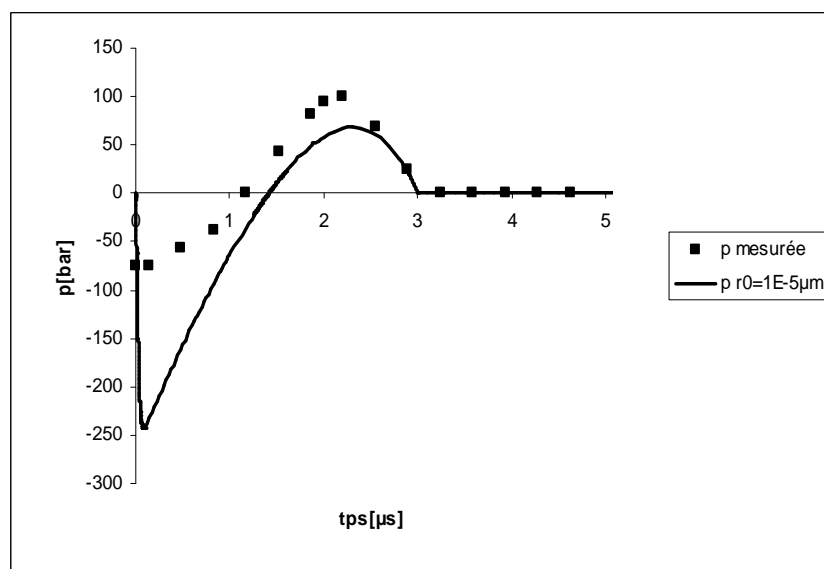


FIG. 3.8 – Evolution de la pression numériques avec $R_{20} = 10 \mu\text{m}$ pour une fonction polynômiale $\text{div}U(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$: de durée d'imposition $3\mu\text{s}$

problème nous avons multiplié le débit q_m dû à l'expansion créée par le terme de sous relaxation suivant :

$$q_{s-r} = 1 - \exp(-t/T_V) \quad (3.1)$$

t : le temps et T_V : une période donnée sur laquelle nous considérons que le phénomène à une influence.

Nous avons testé plusieurs valeurs de T_V pour voir lequel de ces temps caractéristiques nous donnent une dépression qui correspond à celle de l'expérience. Comme on peut le voir sur les figures III-9, c'est pour $T_V = 2$ et $3.4\mu s$ que nous avons la dépression qui correspond le mieux à celle de l'expérience.

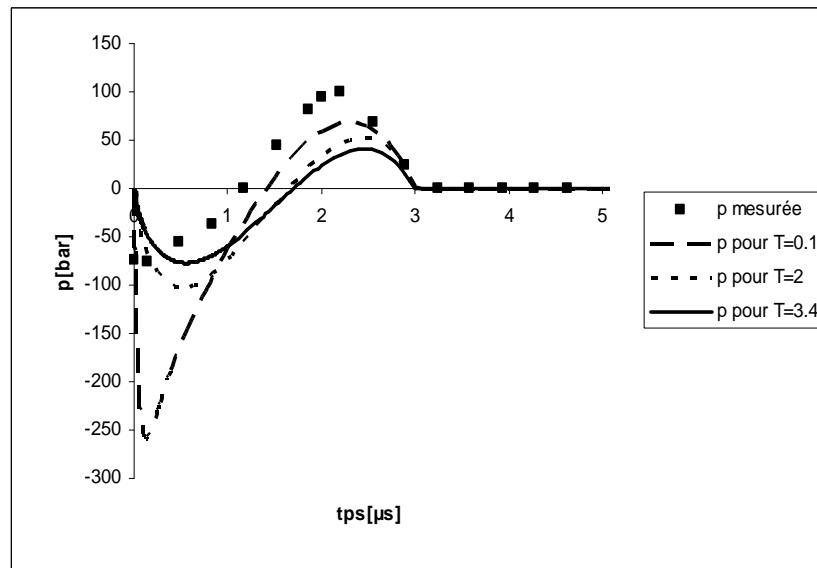


FIG. 3.9 – Evolution de la pression numériques avec une divergence polynômiale $divU(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$: de durée d'imposition $3\mu s$ pour différents T_V .

Cependant que pour $T_V = 3.4\mu s$ la partie dépression est étalée et la fonction donnée ne valide plus l'évolution du rayon : voir figure 3.10, donc n'est pas acceptable, cela nous paraît plus que excessif d'imposer une sous-relaxation pendant toute cette période pour un phénomène qui dure moins de $8\mu s$. Ainsi, nous avons fixé $T_V = 0.1\mu s$ et nous avons procédé par phase successive pour valider le modèle. Dans une première phase nous avons pris une expansion de $2.5 \cdot 10^{-3}$, que nous imposons jusqu'à $t = 0.85\mu s$. Après cette phase nous imposons une expansion de $2 \cdot 10^{-2}$.

Comme le montre les figures III-11 et III-12 nous avons une bonne concordance entre les résultats du modèle et les mesures de l'expérience. Le pic de la pression au tour de $t = 0.85\mu s$ est dû à la discontinuité de la fonction de divergence, il n'a rien de physique.

L'expansion finale de cette nouvelle fonction de divergence est de $1.60 \cdot 10^{-2}$, qui est presque égale à l'expansion expérimentale $1.50 \cdot 10^{-2}$ estimée. Dans la suite nous prenons $T_V = 0.1\mu s$.

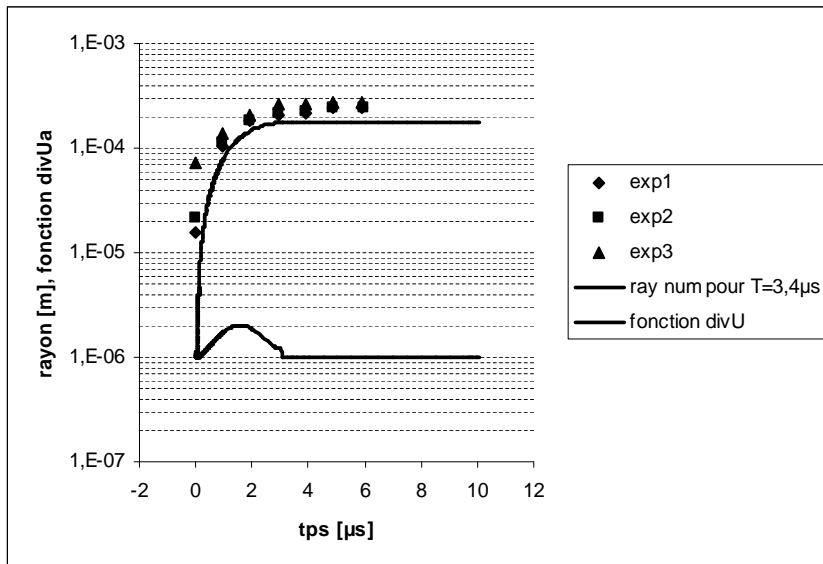


FIG. 3.10 – Evolution du rayon numérique pour une fonction polynômiale $divU(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$: de durée d'imposition $3\mu s$ avec $T_V = 3.4\mu s$.

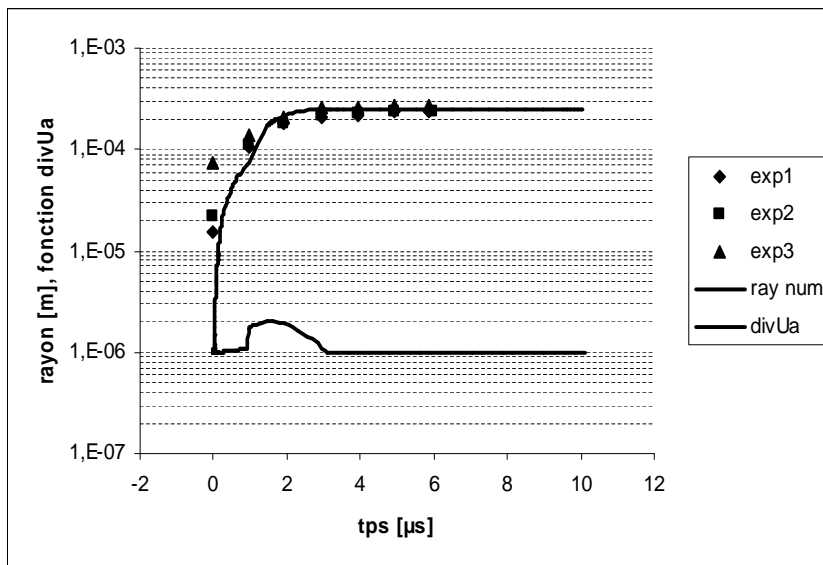


FIG. 3.11 – Evolution du rayons numériques pour une divergence polynômiale $divU(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$ en deux phases avec des expansions de $2.5 \cdot 10^{-3}$ et $2 \cdot 10^{-2}$: de durée d'imposition $3\mu s$ avec $T_V = 0.1\mu s$.

3.6 CONCLUSION

La validation est toujours nécessaire pour garantir la pertinence d'un modèle. Dans notre cas elle a été faite sur l'étude expérimentale de Ohl (2002), où l'évolution du

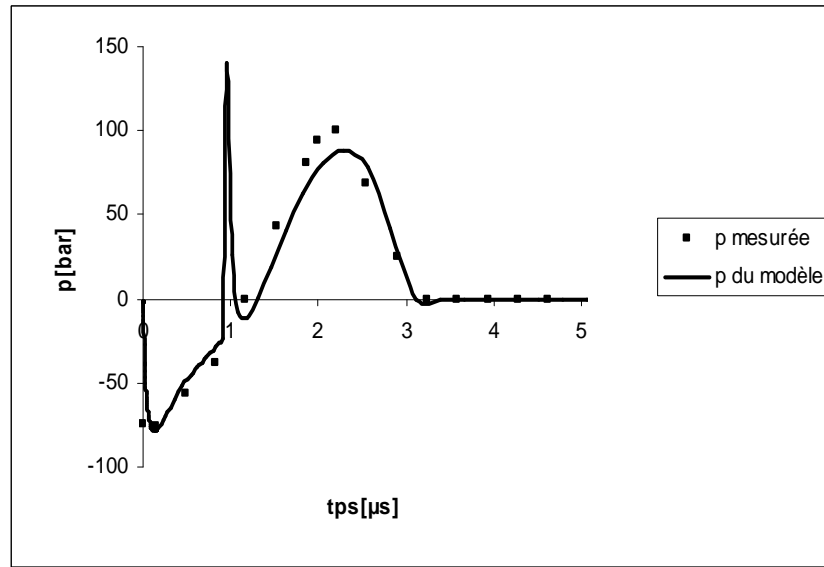


FIG. 3.12 – Evolution de la pression numériques pour une divergence polynômiale $divU(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$ en deux phases avec des expansions de $2.5 \cdot 10^{-3}$ et $2 \cdot 10^{-2}$: de durée d'imposition $3 \mu s$ avec $T_V = 0.1 \mu s$.

rayon et de la pression est mesurée. Cette étude expérimentale nous est apparue très importante, car notre modèle doit d'une part être validé sur le rayon et d'autre part sur la pression. Dans l'étude de Ohl nous ne possédons que de l'expansion finale, cette dernière est égale à l'intégrale de la divergence de la vitesse sur l'intervalle du temps où elle est imposée. Ceci nous a amené à proposer une répartition dans le temps de la divergence. Ainsi, les fonctions constantes et affines décroissantes n'ont pas été validées sur l'évolution du rayon. Par contre si les divergences linéaires et exponentielles ont donné des résultats satisfaisants sur l'évolution du rayon, la pression obtenue ne concorde pas du tout à la pression mesurée. Comme nous l'avons vu seules les fonctions polynômiales nous ont donné des résultats satisfaisants sur l'évolution des rayons et de la pression ceci grâce à une relaxation que nous avons imposée dans les premiers instants. Avec cette validation nous pouvons confirmer que, rien qu'en possédant la divergence de la vitesse d'un écoulement, ce qui est plus accessible, on peut déterminer l'évolution de la pression d'un écoulement cavitant.

Chapitre 4

EQUATION D'EVOLUTION POUR LA PRESSION

4.1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent nous avons validé notre modèle avec l'étude expérimentale de Ohl, mais nous avons surtout montré que la pression dans un écoulement cavitant est déterminée par la divergence de la vitesse. L'objectif de ce chapitre c'est de déterminer la pression d'une façon explicite, grâce une équation d'évolution pour la pression indépendante de celle de la masse volumique.

Cette équation d'évolution pour la pression est solution du système d'équations (2.40) et (2.41) ou (2.42) ou bien de (2.40) et (2.42). Pour des raisons de simplicité c'est ce dernier système que nous allons utiliser.

4.2 NATURE DU SYSTEME DIFFERENTIEL INITIAL. LINEARISATION

Nous rappelons les équations (2.41) et (2.42) qui gouvernent la pression ambiante du milieu p_c :

$$\begin{aligned} \frac{p_c}{\rho} = & -\frac{1}{4\pi R_1} \left(\frac{1}{2} \ddot{V}_{q_m} - \ddot{V} \right) + \frac{1}{32\pi^2 R_1^4} \left(\frac{1}{2} \dot{V}_{q_m} - \dot{V} \right)^2 - \frac{\mu}{\rho\pi R_1^3} \left(\frac{1}{2} \dot{V}_{q_m} - \dot{V} \right) - \\ & \frac{2S}{\rho} \frac{1}{R_1} + \frac{p_v}{\rho} + \frac{p_{g1}}{\rho} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_c}{\rho} = & -\frac{1}{4\pi R_2} \left(\frac{1}{2} \ddot{V}_{q_m} + \ddot{V} \right) + \frac{1}{32\pi^2 R_2^4} \left(\frac{1}{2} \dot{V}_{q_m} + \dot{V} \right)^2 - \frac{\mu}{\rho\pi R_2^3} \left(\frac{1}{2} \dot{V}_{q_m} + \dot{V} \right) - \dots \\ & \frac{2S}{\rho} \frac{1}{R_2} + \frac{p_v}{\rho} + \frac{p_{g2}}{\rho} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\text{Avec } R_1 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{2}V_{qm} - V + V_{10}\right)^{1/3}, \quad R_2 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{2}V_{qm} + V + V_{20}\right)^{1/3}.$$

V le volume et \dot{V} le débit d'échange entre les bulles 1 et 2.

Nous réécrivons le système d'équations (4.2) et (4.3) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} p_c &= -a_1 \ddot{V} + b_1 \dot{V}^2 - \left(b_1 \dot{V}_{qm} + c_1\right) \dot{V} + \frac{1}{2} a_1 \ddot{V}_{qm} + \dots \\ &\quad \frac{1}{4} b_1 \dot{V}_{qm}^2 + \frac{1}{2} c_1 \dot{V}_{qm} + d_1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} p_c &= a_2 \ddot{V} + b_2 \dot{V}^2 + \left(b_2 \dot{V}_{qm} + c_2\right) \dot{V} + \frac{1}{2} a_2 \ddot{V}_{qm} + \dots \\ &\quad \frac{1}{4} b_2 \dot{V}_{qm}^2 + \frac{1}{2} c_2 \dot{V}_{qm} + d_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\rho}{4\pi R_1}; & b_1 &= \frac{\rho}{32\pi^2 R_1^4}; & c_1 &= -\frac{\mu}{\pi R_1^3}; & d_1 &= p_v + p_{g_1} - \frac{2T}{R_1} \\ a_2 &= -\frac{\rho}{4\pi R_2}; & b_2 &= \frac{\rho}{32\pi^2 R_2^4}; & c_2 &= -\frac{\mu}{\pi R_2^3}; & d_2 &= p_v + p_{g_2} - \frac{2T}{R_2} \end{aligned}$$

Le système d'équations (4.3) et (4.4) est un système d'équations polynômiales différentielles en p_c , V , \dot{V} , (et \dot{V}^2) et \ddot{V} , V_{qm} étant donnés par ailleurs.

Les variables a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , d_1 et d_2 qui dépendent de V sont considérées comme des fonctions connues. Le problème revient à éliminer \ddot{V} et \dot{V} , ce qui nous amène à dériver une équation issue de (4.3) et (4.4) où serait déjà éliminée \ddot{V} ce qui est possible puisque a_1 et a_2 ont le même signe, $a_1 + a_2 \neq 0$. Ainsi, on obtient un système de trois équations non linéaires par la présence du termes en \dot{V}^2 initialement dans (4.3) et (4.4) et, en outre, réintroduit par la dérivation.

Dans un premier temps la contribution des différents termes des équations est évaluée en vue de préciser les bases de la linéarisation du système.

Ainsi, comme on peut le voir sur les figures IV-1, IV-2 et IV-3 où les valeurs absolues des termes en \ddot{V} , \dot{V}^2 et \dot{V} ont été comparées.

Pour une expansion inférieure à 10^{-5} (qu'on peut considérer comme fin de cavitation) les termes en \dot{V}^2 et \dot{V} sont du même ordre, mais très faibles par rapport à celui de \ddot{V} .

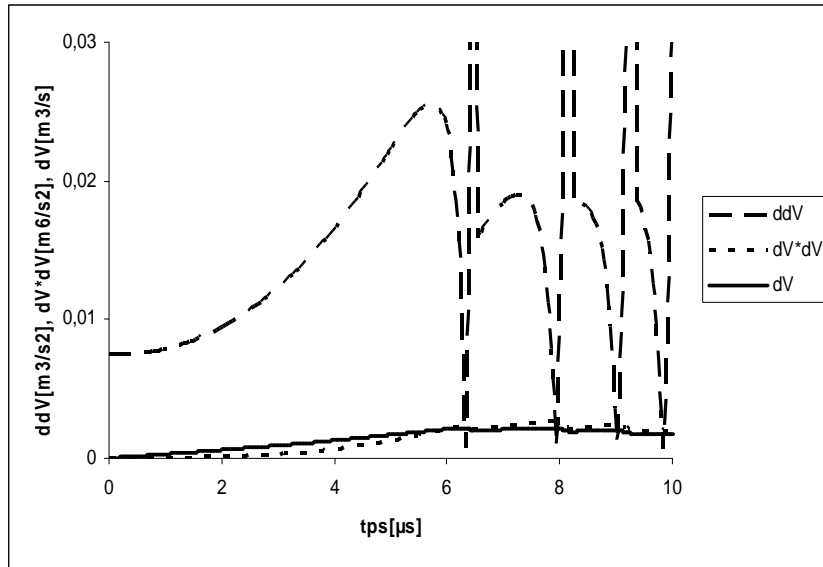


FIG. 4.1 – Evolution des termes en \ddot{V} , \dot{V}^2 et \dot{V} pour une fonction de divergence polynômiale avec une expansion de 1.10^{-7} : de durée d'imposition $10\mu s$.

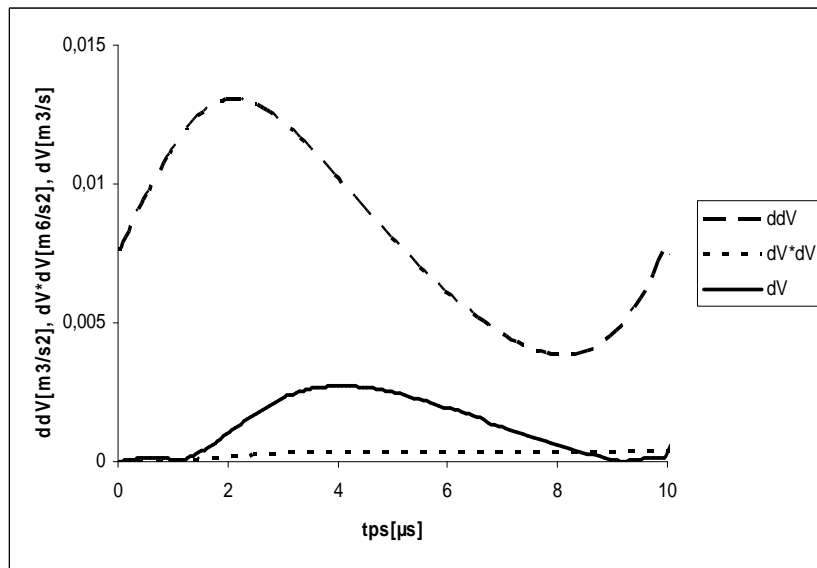


FIG. 4.2 – Evolution des termes en \ddot{V} , \dot{V}^2 et \dot{V} pour une fonction de divergence polynômiale avec une expansion de 1.10^{-5} : de durée d'imposition $10\mu s$

Les pics du terme en \ddot{V} correspondent aux disparitions de bulles. Et pour une expansion supérieure (qu'on peut considerer comme début de cavitation), les termes en \ddot{V} et \dot{V}^2

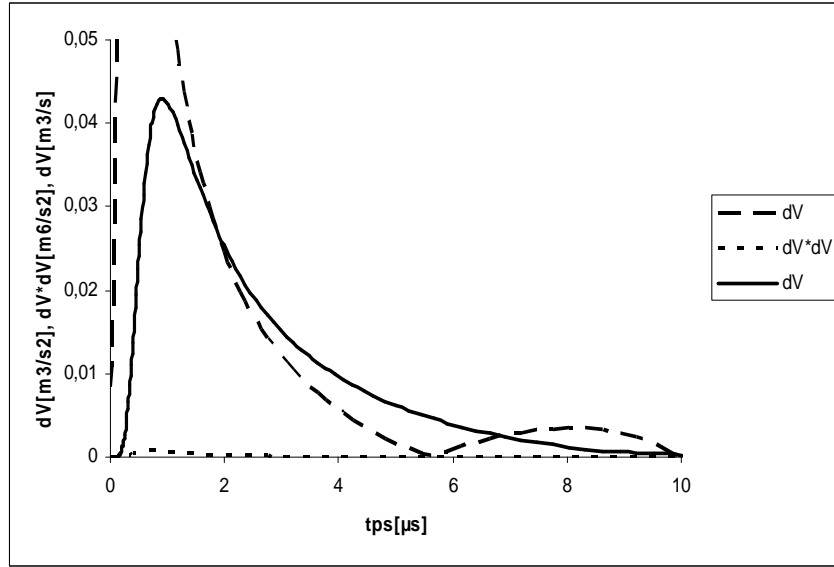


FIG. 4.3 – Evolution des termes en \ddot{V} , \dot{V}^2 et \dot{V} pour une fonction de divergence polynômiale avec une expansion de $1 \cdot 10^{-3}$: de durée d'imposition $10\mu s$.

sont prépondérant par rapport au terme en \dot{V}^2 .

Les contributions respectives évoluant au cours du temps, on est amené à conserver tous les termes et à linéariser le terme en \dot{V}^2 au voisinage de sa valeur instantanée notée q_0^2 en posant :

$$\dot{V}^2 = q^2 \simeq 2q_0q - q_0^2. \quad (4.5)$$

Avec cette linéarisation et en faisant apparaître le débit d'échange, le système différentiel (4.3) et (4.4) devient :

$$p_c = -a_1\dot{q} - (b_1q_m + c_1 - 2b_1q_0)q + \frac{1}{2}a_1\dot{q}_m + \frac{1}{4}b_1q_m^2 + \frac{1}{2}c_1q_m + d_1 - b_1q_0^2 \quad (4.6)$$

$$p_c = a_2\dot{q} + (b_2q_m + c_2 + 2b_2q_0)q + \frac{1}{2}a_2\dot{q}_m + \frac{1}{4}b_2q_m^2 + \frac{1}{2}c_2q_m + d_2 - b_2q_0^2 \quad (4.7)$$

En considérant les variables a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , d_1 , d_2 et q_0 comme des fonctions connues, seules les variables \dot{q} et q sont des inconnues. Le système d'équations (4.6) et (4.7) est un système de deux équations algébriques à deux inconnues \dot{q} et q . Ainsi, la condition suffisante de Rosenfeld (1959) est satisfaite : un système d'équations polynômiales différentielles admet un modèle différentiel s'il admet un modèle purement algébrique, alors le système d'équations différentielles (3.6) et (4.7) admet une solution.

4.3 RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

La méthode d'élimination différentielle est adaptée à notre problème. Nous rappelons que nous cherchons une équation d'évolution pour la pression. Nous réécrivons le système (3.6) et (4.7) sous la forme suivante :

$$p_c = -a_1\dot{q} - e_1q + \frac{1}{2}a_1\dot{q}_m + \frac{1}{4}b_1q_m^2 + \frac{1}{2}c_1q_m + d_1 - b_1q_0^2 \quad (4.8)$$

$$p_c = a_2\dot{q} + e_2q + \frac{1}{2}a_2\dot{q}_m + \frac{1}{4}b_2q_m^2 + \frac{1}{2}c_2q_m + d_2 - b_2q_0^2 \quad (4.9)$$

$$e_2 = b_2q_m + c_2 + 2b_2q_0.$$

En dérivant les équations (4.8) et (4.9), pour un cas général nous considérons q_0 temporairement constante mais réactualisée au cours de la résolution numérique nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{p}_c &= -a_1\ddot{q} - (\dot{a}_1 + e_1)\dot{q} - \dot{e}_1q + \frac{1}{2}a_1\ddot{q}_m + \frac{1}{2}(b_1q_m + \dot{a}_1 + c_1)\dot{q}_m + \dots \\ &\quad \frac{1}{4}\dot{b}_1q_m^2 + \frac{1}{2}\dot{c}_1q_m + \dot{d}_1 - \dot{b}_1q_0^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_c &= a_2\ddot{q} + (\dot{a}_2 + e_2)\dot{q} + \dot{e}_2q + \frac{1}{2}a_2\ddot{q}_m + \frac{1}{2}(b_2q_m + \dot{a}_2 + c_2)\dot{q}_m + \dots \\ &\quad \frac{1}{4}\dot{b}_2q_m^2 + \frac{1}{2}\dot{c}_2q_m + \dot{d}_2 - \dot{b}_2q_0^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Les équations (4.8), (4.9), (4.10) et (4.11) peuvent être considérées comme un système purement algébrique à quatre équations \ddot{q} , \dot{q} , q et la variable p_c ou \dot{p}_c .

En éliminant \ddot{q} : $a_1 * (3.11) + a_2 * (3.10)$, c'est qui suppose que $a_2 \neq 0$, nous avons :

$$(a_1 + a_2)\dot{p}_c = \beta_1\dot{q} + \beta_2q + a_1a_2\ddot{q}_m + \frac{1}{2}\beta_3\dot{q}_m + \frac{1}{4}\beta_4q_m^2 + \frac{1}{2}\beta_5q_m + \beta_6 \quad (4.12)$$

$$\text{Avec } \beta_1 = a_1(\dot{a}_2 + e_2) - a_2(\dot{a}_1 + e_1), \beta_2 = (a_1\dot{e}_2 - a_2\dot{e}_1),$$

$$\beta_3 = a_1(b_2q_m + \dot{a}_2 + c_2) + a_2(b_1q_m + \dot{a}_1 + c_1), \beta_4 = (a_1\dot{b}_2 + a_2\dot{b}_1),$$

$$\beta_5 = (a_1\dot{c}_2 + a_2\dot{c}_1), \beta_6 = a_1(\dot{d}_2 - \dot{b}_2q_0^2) + a_2(\dot{d}_1 - \dot{b}_1q_0^2).$$

Avec les équations (4.8), (4.9) et (4.12), nous éliminons \dot{q} : $a_1 * (3.12) + \beta_1 * (3.8)$ et $a_2 * (3.12) - \beta_1 * (3.9)$, avec $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$:

$$A_1 \dot{p}_c + \beta_1 p_c = B_1 q + a_1^2 a_2 \ddot{q}_m + \frac{1}{2} C_1 \dot{q}_m + \frac{1}{4} D_1 q_m^2 + \frac{1}{2} E_1 q_m + F_1 \quad (4.13)$$

$$A_2 \dot{p}_c - \beta_1 p_c = B_2 q + a_1 a_2^2 \ddot{q}_m + \frac{1}{2} C_2 \dot{q}_m + \frac{1}{4} D_2 q_m^2 + \frac{1}{2} E_2 q_m + F_2 \quad (4.14)$$

$$A_1 = a_1 (a_1 + a_2), \quad A_2 = a_2 (a_1 + a_2)$$

$$B_1 = (a_1 \beta_2 - e_1 \beta_1), \quad B_2 = (a_2 \beta_2 - e_2 \beta_1)$$

$$C_1 = (a_1 \beta_3 + a_1 \beta_1), \quad C_2 = (a_2 \beta_3 - a_2 \beta_1)$$

$$D_1 = (a_1 \beta_4 + b_1 \beta_1), \quad D_2 = (a_2 \beta_4 - b_2 \beta_1)$$

$$E_1 = (a_1 \beta_5 + c_1 \beta_1), \quad E_2 = (a_2 \beta_5 - c_2 \beta_1)$$

$$F_1 = a_1 \beta_6 + \beta_1 (d_1 - b_1 q_0^2), \quad F_2 = a_2 \beta_6 - \beta_1 (d_2 - b_2 q_0^2)$$

Et en éliminant q , avec $B_1 * (3.14) - B_2 * (3.13)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (A_2 B_1 - A_1 B_2) \dot{p}_c - \beta_1 (B_1 + B_2) p_c &= (a_1 a_2^2 B_1 - a_1^2 a_2 B_2) \ddot{q}_m + \frac{1}{2} (B_1 C_2 - B_2 C_1) \dot{q}_m + \dots \\ \frac{1}{4} (B_1 D_2 - B_2 D_1) q_m^2 + \frac{1}{2} (B_1 E_2 - B_2 E_1) q_m &+ (B_1 F_2 - B_2 F_1) \end{aligned} \quad (4.15)$$

L'équation (4.15), est une équation différentielle pour la pression, qui ne dépend que de q_m , le débit partagé dû à l'expansion imposée caractérisée par la divergence de la vitesse \vec{U} , et de ses dérivées dont le poids est à examiner. Les termes A_i, B_i, C_i, D_i, E_i et F_i avec ($i = 1, 2$) dépendent des variables $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ et q_0 qui sont considérées comme des fonctions connues.

Avant tout calcul, il faut qu'on s'assure que le terme $A_2 B_1 - A_1 B_2$ ne s'annule pas. Dans le cas où il s'annulerait, nous avons deux possibilités. La première, en calculant une vraie valeur de la pression après la racine zéro et recommençant nos calculs à partir de cet instant en ignorant tout ce qui précède. La deuxième possibilité, en utilisant un pas de temps un peu grand qui nous permet de franchir l'obstacle de la racine zéro. C'est cette deuxième possibilité que nous choisissons.

4.4 RESULTATS NUMERIQUES

4.4.1 VALIDATION DE L'EQUATION D'EVOLUTION POUR LA PRESSION

Pour la pertinence et la consistance de l'équation d'évolution pour la pression (4.15), dans un premier temps, les solutions de la résolution du problème en pression : équation

(4.15) et du problème en rayon : équation (4.1) ou (4.2), sont comparées afin de valider la démarche d'élimination algébrique et la linéarisation adaptée.

Pour cette comparaison, nous avons choisi des fonctions de divergence exponentielle et polynômiale. Comme on peut le voir sur la figure 4.4, les résultats sont quasiment identiques.

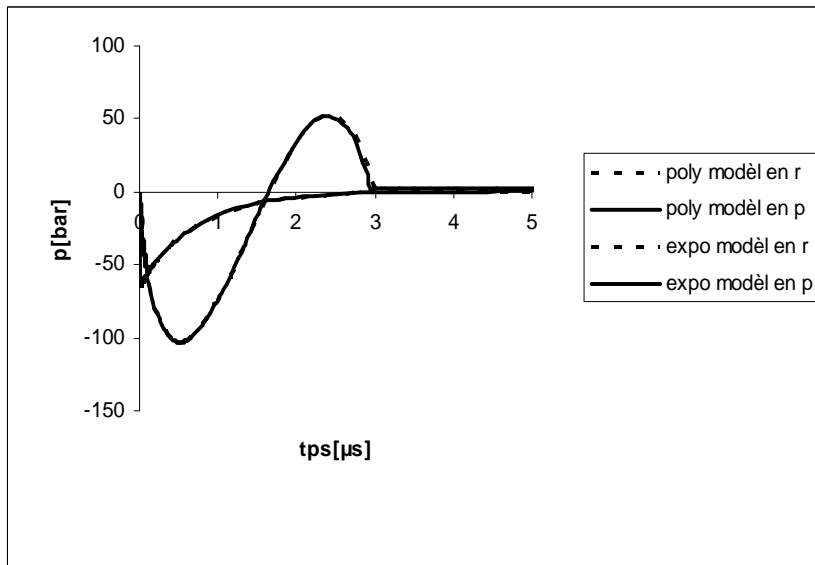


FIG. 4.4 – Comparaison des résultats du problème en pression et ceux du problème en rayon, avec $q_0 = 0$: pour une fonction de divergence polynômiale $divU(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$: de durée d'imposition $3\mu s$ avec $T_V = 2\mu s$, et une fonction de divergence exponentielle $divU(t) = divU_0 (1 - \exp(-t/T))$: de durée d'imposition $10\mu s$ avec $T = 1\mu s$

Dans ces calculs nous avons considéré q_0 constant. Mais, même dans le cas où q_0 est actualisé par la valeur précédente de q débit d'échange, les résultats sont pratiquement identiques : figure 4.4.

Ces comparaisons valident la démarche d'élimination algébrique et la linéarisation adoptée, mais elles confirment surtout que l'équation (4.15) est bien la solution du système d'équations (2.39) et (2.41) ou (2.42).

4.4.2 INFLUENCE DU SEQUENCEMENT

Nous rappelons que la variable volume d'échange V est dans l'équation (4.15). Ainsi, la résolution de l'équation d'évolution pour la pression (4.15) est couplée avec celle de l'équation pour le rayon (2.32) ou pour le volume (2.39). Notre objectif est de déterminer la pression d'une façon totalement indépendante de la résolution de l'équation pour le rayon. Dans un premier temps, nous allons étudier l'influence de l'initialisation du

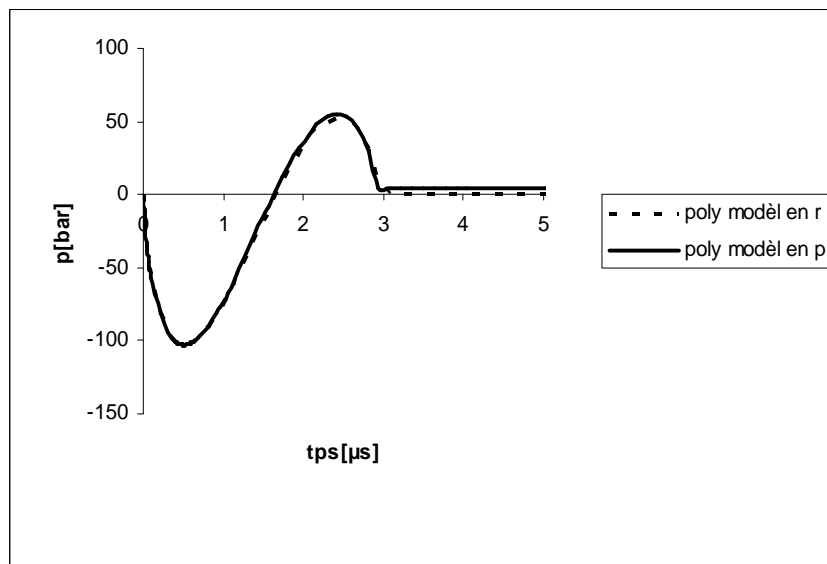


FIG. 4.5 – Comparaison des résultats du problème en pression et ceux du problème en rayon, avec $q_0 \neq 0$ pour une fonction de divergence polynômiale $divU(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$: de durée d'imposition $3\mu s$ avec $T_V = 2\mu s$.

rayon de la petite bulle R_1 . Pour cela nous allons réaliser des très courtes séquences, au terme desquelles la petite bulle qui selon l'expansion peut croître ou décroître sera automatiquement ré-initialisée à la séquence suivante par : $R_{10} = k R_2$, avec k une constante inférieure à 1.

Sur les figures 4.6 et 4.7, nous avons l'évolution de la pression du milieu calculée par l'équation (4.15) du modèle en pression avec des séquences chaque dix et cent pas de temps et pour différents k . Précisons que si avec $R_{10} = k R_2$ le taux de vide initial de la séquence est supérieur à l'expansion imposée, alors le rayon R_{10} est déterminé par la contrainte suivante :

$$(V_{10} + V_{20}) / V_{con} < \text{expand0}$$

Avec expand0 l'expansion imposée.

Avec ces conditions et une expansion de 10^{-3} , comme on peut le voir sur les figures 4.6 et 4.7 les pressions obtenues concordent avec la pression issue de la résolution de l'équation (4.15) sans séquence selon les cas. Et ceci même dans le cas où la petite bulle 1 décroît, comme cela a été constaté dans certaines phases de la résolution pour les différents k . Pour des séquences de courte durée on a une concordance avec des bulles 1 très petites, alors que pour des grandes durées ce sont les bulles 1 proches de la grosse bulle qui concordent les mieux.

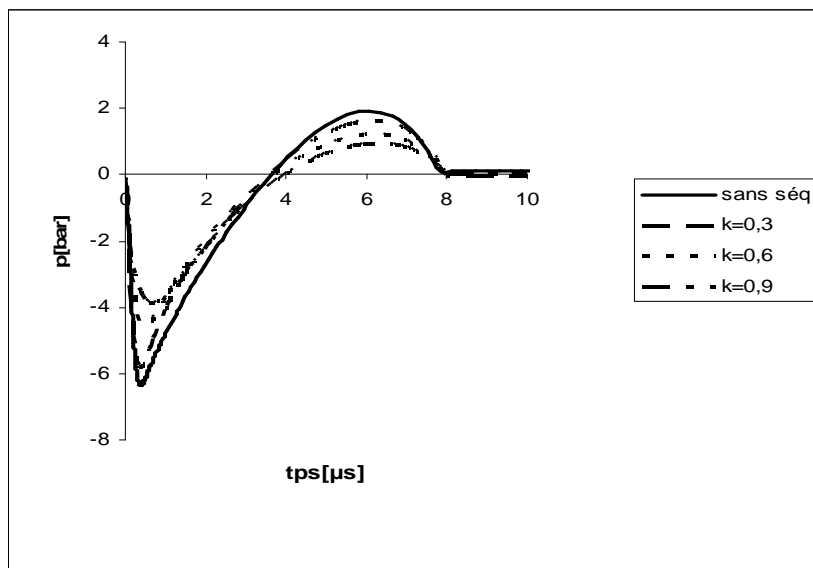


FIG. 4.6 – Evolution de la pression de l'équation d'évolution pour différents k : $R_{10} = k R_2$, pour une fonction de divergence polynômiale avec une expansion de $1. 10^{-3}$: de durée d'imposition $8\mu s$.

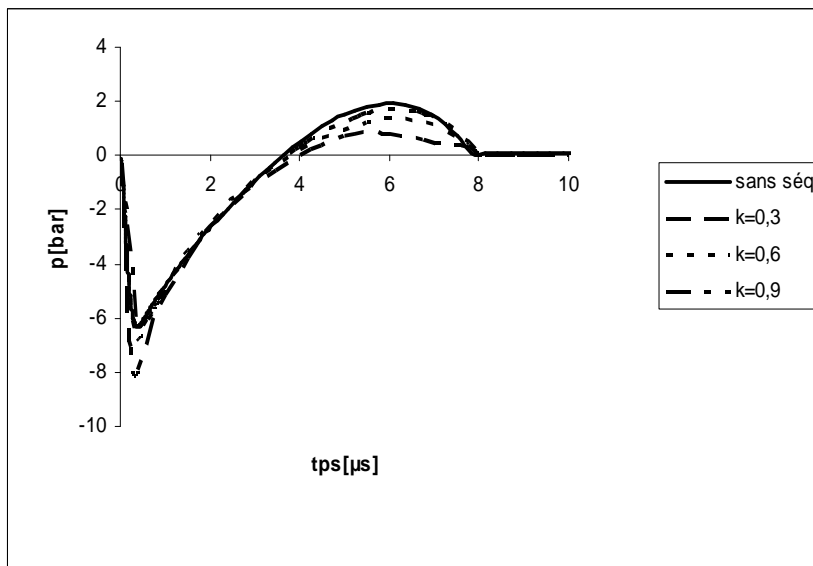


FIG. 4.7 – Evolution de la pression de l'équation d'évolution pour différents k : $R_{10} = k R_2$, pour une fonction de divergence polynômiale avec une expansion de $1. 10^{-3}$: de durée d'imposition $8\mu s$.

On a une bonne tendance, mais avec des écarts significatifs selon l'intensité de l'expansion. Cela est semblé t-il dû au fait qu'il n'y a que deux bulles dans notre modèle, ce

qui leur accorde une importance et une influence trop grandes. On peut espérer pouvoir se passer totalement du calcul de R_1 en considérant un plus grand nombre de bulles. Quant au calcul de R_2 il peut être directement lié à l'expansion instantanée.

4.4.3 EXPERIENCE DE OHL

Seule la validation avec l'expérience garantit la pertinence d'un modèle. Comme on peut le voir sur la figure 4.8, les résultats du modèle en pression concordent très bien avec les mesures de Ohl.

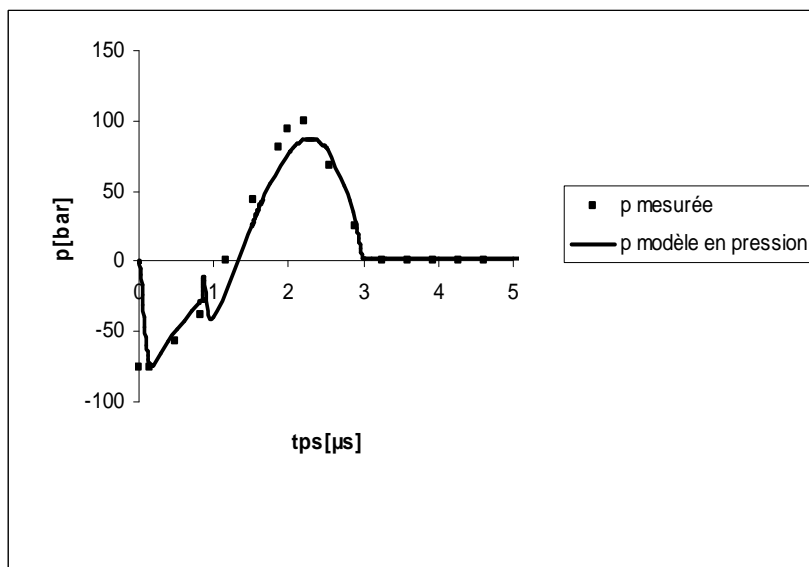


FIG. 4.8 – Evolution de la pression du modèle en pression pour une divergence polynômiale $divU(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$ en deux phases avec des expansions de $2.5 \cdot 10^{-3}$ et $2 \cdot 10^{-2}$: de durée d'imposition $3 \mu s$.

Cette comparaison avec l'expérience de Ohl valide définitivement la démarche d'élimination algébrique et la linéarisation adoptée, mais elles confirment surtout que l'équation (4.15) est bien la solution du système d'équations (2.40) et (2.41) ou (2.41).

4.4.4 CONCLUSION

Ainsi, la solution de notre équation d'évolution pour la pression (3.15) est bien la solution du système d'équations (4.1) et (3.2) ou (4.3). L'étude de l'influence du séquençage montre que la pression peut ne dépendre que du terme q_m et de ses dérivées bien que quelques améliorations seront encore nécessaires. Cela prouve quand on possédant la divergence de la vitesse on peut déterminer avec une précision correcte la pression dans un écoulement cavitant.

Dans le cas où les termes en p_c , \ddot{q}_m et \dot{q}_m sont nuls, l'équation d'évolution (4.15) apparaît comme une loi barotrope.

4.5 CONTRIBUTION DES DIFFERENTS TERMES DE L'EQUATION D'EVOLUTION

Dans cette partie, nous allons essayer de voir l'influence et la contribution des différents termes en q_m et de ses dérivées de l'équation d'évolution (3.17) dans la détermination de la pression, pour une fonction de divergence donnée. Comme on peut le voir sur la figure 4.9 où les termes en \ddot{q}_m , \dot{q}_m , q_m^2 et q_m normalisés par la valeur absolue du plus grande terme, sont donnés en fonction du temps dans le cas de la simulation de l'expérience de Ohl, on constate que dans certaines phases où la fonction de divergence n'est pas nulle, les termes sont du même ordre.

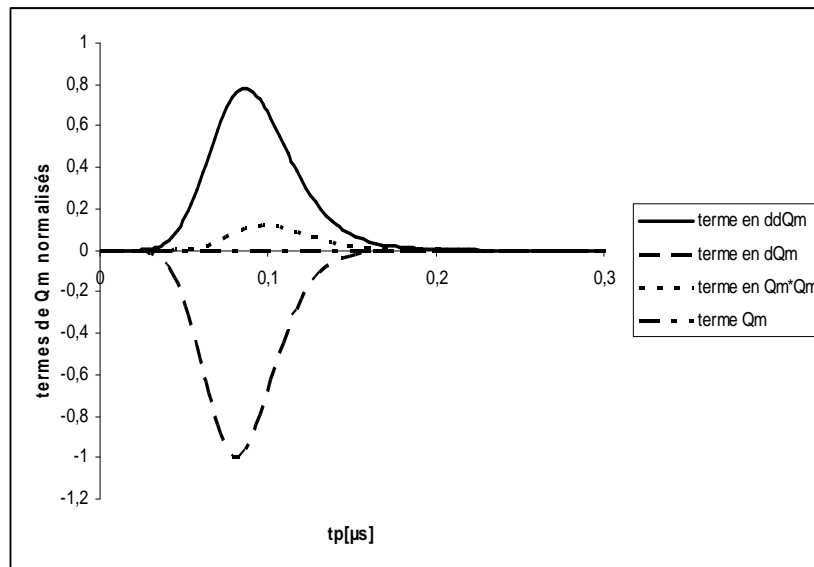


FIG. 4.9 – Evolution des termes en \ddot{q}_m , \dot{q}_m , q_m^2 et q_m pour le cas de la simulation de Ohl

Ainsi, vu que les différentes contributions évoluent au cours du temps, aucun termes ne doit être négligé.

4.6 CONCLUSION

Nous avons grâce à l'élimination différentielle pu résoudre le système d'équations (2.40) et (2.41) ou (2.42). L'étude de l'influence du séquençement a permis de prouver que l'équation (4.15) pourrait être résolue indépendamment de celle du rayon (2.40).

La comparaison avec l'expérience de Ohl valide la démarche d'élimination algébrique et la linéarisation adoptée, mais elles confirment surtout que l'équation (4.15) est bien la solution du système d'équations (2.40) et (2.41) ou (2.42). Cette équation différentielle obtenue apparaît comme une équation d'évolution pour la pression indépendante de celle de la masse volumique dans le système d'équation de modélisation des écoulements cavitants.

Pour une amélioration des résultats actuels cela implique la prise en compte d'un plus grand lot de bulles.

Chapitre 5

CONCLUSION GENERALE

Ce travail de thèse a porté sur la modélisation de la cavitation dans les liquides, phénomène par lequel se forment des bulles de quasi vide dans un fluide en dépression. Après une étude bibliographique où nous avons passé en revue presque tous les modèles qui existent dans la littérature, nous pouvons conclure que la modélisation de la cavitation n'est pas encore bien établie dans la communauté scientifique, sa prise en compte dans la simulation des écoulements est encore hasardeuse. Ainsi, Kinnas (1998) recommande la nécessité de valider par des résultats expérimentaux tout nouveau modèle. La quasi totalité des modèles de cavitation proposés dans la littérature font abstraction d'une augmentation de la pression dans certaines phases d'évolution de la cavitation ou des interactions entre les bulles alors même que les expériences de Franc et al. (1995, pp. 410) et de Ohl (2002) les mettent en évidence.

Dans notre travail nous avons proposé un nouveau modèle d'évolution de la taille des bulles, dans lequel, pour simuler les interactions nombreuses au sein d'un nuage de cavitation, deux bulles non identiques, sont localisées dans un volume de contrôle en expansion contrôlée. La présence de ce deux bulles introduit une instabilité dans laquelle l'échange de vide apparaît comme un degré de liberté supplémentaire. Dans ce modèle nous avons pris en compte une interaction qui est l'échange du volume. Les deux bulles en plus de leur débit d'échange sont soumises à une expansion imposée et caractérisée par la divergence de la vitesse $div \vec{U}$ du milieu. Selon les conditions, si le rayon de la petite bulle est inférieur au rayon critique, la petite bulle 1 disparaît au profit de la grosse bulle voisine 2. Cette grosse bulle est alors prise comme nouvelle grosse bulle initiale associée à une nouvelle petite bulle introduite dans une séquence ultérieure répétée sur un volume de contrôle modifié. Ainsi, il est inclus dans notre modèle la possibilité pour de nombreuses petites bulles de disparaître ou non selon que le rayon est inférieur ou pas au rayon critique. Dans ce modèle de cavitation, en autorisant deux bulles à évoluer différemment, nous n'avons plus besoin de la pression pour déterminer l'évolution de la cavitation.

La comparaison du volume de vide en fonction du temps obtenue avec le modèle est cohérent avec les mesures effectuées en 2002 par Ohl. Selon ce modèle il y a de nombreux collapses de petites bulles dès l'apparition de la cavitation, ce qui est conforme à l'observation expérimentale d'un bruit dans la zone d'apparition de la cavitation

Buogo et al. (2002). En outre, le modèle conduit à une pression en évolution croissante bien que le volume de vapeur augmente et que la masse volumique diminue. Avec l'élimination différentielle nous avons pu résoudre le système d'équations initial. Ainsi, l'équation différentielle obtenue apparaît comme une équation d'évolution pour la pression indépendante de celle de la masse volumique dans le système d'équations de modélisation des écoulements cavitants. L'étude de l'influence du séquençage montre que cette équation d'évolution pour la pression pourrait être découplée de celle du rayon. Au-final la pression ne dépend que du terme du débit dû à l'expansion imposée q_m et de ses dérivées.

Mais au vu des résultats actuels cela implique la prise en compte d'un plus grand lot de bulles.

La principale conclusion est que la présence de deux bulles introduit une instabilité dans laquelle l'échange de vide apparaît comme un degré de liberté supplémentaire autorisant une forme de "*brisure de symétrie*".

En outre, notre modèle révèle la pression comme un résultat, contrairement au modèle à une bulle qui considère la pression comme une donnée. L'équation de la pression ne dépend que de la divergence de la vitesse du milieu ambiant, qui est plus accessible dans l'écoulement cavitant. Cette équation apparaît comme une équation d'évolution pour la pression indépendante de celle de la masse volumique dans le système d'équations de la modélisation des écoulements cavitants.

En perspective, la plus immédiate amélioration serait de prendre en compte un plus grand lot de bulles, par exemple quatre bulles aux sommets d'un tétraèdre au mieux encore un échantillon statistique de bulles disposées sur un maillage donné.

Chapitre 6

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

L. D'Agostino, C. E. Brennen, *Linearized dynamics of spherical bubbly clouds*, Journal of fluid Mechanics. Vol 199, p. 155-176, 1989.

L. D'Agostino, C. E. Brennen et A. J. Acosta, *Linearized dynamics of two-dimensional bubbly and cavitating flows over slender surfaces*, Journal of fluid Mechanics. Vol 192, p. 485-509, 1988.

V. Ahuja, A. Hosangadi and S. Arunajatesan, *Simulations of cavitating flows using hybrid unstructured meshes*, Journal of fluids engineering, Vol. 123, p. 331-340, Juin 2001.

A. C. Ahyi, *Développement d'un système d'imagerie ultra-rapide. Application aux études de rayonnement et de diffusion acoustique*, Thèse lille1, Lille, 1997.

A. Alajbegovic, G. Meister, D. Greif and B. Basara, *Three phase cavitating flows in high-pressure swirl injectors*, Experimental Thermal and Fluid Science 26 p. 677-681, 2002.

V. H. Arakeri, *Viscous effects in inception and development of cavitation axisymmetric bodies*, California Institute of Technology. E-183, 1973.

V. H. Arakeri et A. J., Acosta., *Viscous Effects in the Inception of Cavitation on Axisymmetric Bodies*. Journal of Fluids Engineering, vol. 95, p. 519-527, 1973.

V. H. Arakeri, *Viscous effects on the position of cavitation separation from smooth bodies*, Journal of fluid mechanics, Vol. 68, Part. 4, p. 779-799, 1975.

V. H. Arakeri, J. A. Carroll et J. W. Holl, *A note on the effect of short and long laminar separation bubbles on desinent cavitation*, Journal of fluids engineering, Vol. 103, p. 28-32, 1981.

J. -A. Astolfi, P. Dorange, J. -Y. Billard et I. Cid Tomas, *An experimental investigation of cavitation inception and development on a two-dimensional eppler hydrofoil*, Journal of fluids engineering, Vol. 122, p. 164-173, , Mars 2000a.

J. -A. Astolfi, J. -B. Leroux, P. Dorange, J. -Y. Billard, F. Deniset and S. de La Fuente, *An experimental investigation of cavitation inception and development on a two-dimensional hydrofoil*, Journal of ship research, Vol. 44, No. 4, p. 259-269, 2000b.

J. -A. Astolfi, *Contribution à l'étude du phénomène de cavitation : Une approche expérimentale des conditions d'apparition et de développement de la cavitation*. HDR, IRENav, Brest, 6 janvier 2003.

R. K. Avva, A. Singhai and D. H. Gibson, *An enthalpy based model of cavitation*, ASME-FED Vol 226, 1995.

G. S. Berntsen, M. Kjeldsen and R. E. A. Arndt, *Numerical modeling of sheet and tip vortex cavitation with fluent 5*, The fourth international symposium on cavitation, Pasadena, California, Juin 20-24, 2001.

C. E. Brennen, *Some current advances in cavitation research*, The annual meeting of the fluids engineering division of the korean society of mechanical engineers, 52-70, 1997.

C. E. Brennen, *Fission of collapsing cavitation bubbles*, Journal of fluid Mechanics. Vol 472, p. 153-166, 2002.

R. A. Bunnell and S. D. Heister, *Three-dimensional unsteady simulation of cavitating flows in injector passages*, Journal of fluids engineering, Vol. 122, p. 791-797, 2000.

S. Buogo and G. B. Cannelli, *Implosion of an underwater spark-generated bubble and acoustic energy evaluation using the Rayleigh model*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 111, No. 6, p. 2594-2600, 2002.

G. L. Chahine, *Pressure field generated by the collective collapse of cavitation bubbles*, Operating problems of pump stations and Power plants symposium, Septembre 1982.

G. L. Chahine, and R. Duraiswami, *Bubble Damage Program Progress Review Dynaflow*, Inc. Technical Report 89001-09, 1992.

G. L. Chahine and S. Gupta, *Three-Dimensional Simulations Using Dynaflow's 3DynaFS Code Dynaflow*, Inc. Technical Report 92001-01, 1992.

Y. Chen and S. D. Heister, *Two-phase modeling of cavitated flows*, The ASME fluids engineering division summer meeting, Nevada, June 19-23, 1994, p 299-307, 1994.

Y. Chen and S. D. Heister, *Modeling hydrodynamics nonequilibrium in cavitating flows*, Journal of fluids engineering, Vol. 118, 172-178, 1996.

R. H Cole,. *Underwater Explosions*. Princeton University Press, 1948 .

P. Cooper, *Analysis of single and two-phase flows in turbopump inducers*, Journal of engineering for power, Translation of ASME, 1967.

O. Coutier-Delgosha, *Modélisation des écoulements cavitants : Etude des comportements instationnaires et application tridimensionnelle aux turbomachines*, Thèse de doctorat, INPG, Grenoble, 2001.

O. Coutier-Delgosha and J. A. Stolfi, *Numerical prediction of the cavitating flow on a two-dimensional symmetrical hydrofoil with a single fluid model*, CAV 2003, Osaka, Japan, Novembre 1-4, 2003.

O. Coutier-Delgosha, R. F. Patella and J. L. Reboud, *Simulation of unsteady cavitation with a two-equation turbulence model including compressibility effects*, Journal of turbulence 3 (2002) 001.

J. Dang and G. Kuiper, *Re-entrant jet modeling of partial cavity flow on two dimensional hydrofoils*, CAV 98, The third int. Symposium on cavitation, 7-10 avril 1998, Grenoble, France.

C. F. Delale and M. Tunç, *A bubble fission model for colapsing cavitation bubbles*, Physics of Fluids Vol. 16, N. 11, 2004.

Y. Delannoy, *Modélisation d'écoulements instationnaires et cavitants*, Thèse de doctorat, INPG, 17 juillet 1984.

Y. Delannoy and J. L. Kueny, *Two phase flow approach in unsteady cavitation modeling*, Cavitation and Multiphase flow forum, ASME-FED, Vol. 98, pp. 153-158, 1990.

J. M. Delhaye, *Sur les équations générales des systèmes diphasiques*, C. R ; Acad. Sc. Paris, Série A, t. 267, p. 660-663, 1968.

L. Dieval, M. Arnaud and R. Marcer, *Numerical modeling of unsteady cavitating flows by a VOF method*, CAV 98 the third Int. symposium on cavitation, 7-10 avril 1998, Gernoble, France.

L. Dieval, C. Pellone, J. P. Franc and M. Arnaud, *Une technique de suivi d'interface pour la modélisation de la cavitation par poche*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série II, p. 809-812, 2000.

A. Doinikov, *Equations of coupled radial and translational motions of a bubble in a weakly compressive liquid*, Physics of fluids 17, 128101, 2005.

S. Dufour, *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements multifluides*, Thèse de Doctorat, Université de Montréal, Août 1999.

N. Dumont, O. Simonin and C. Habchi, *Numerical simulation of cavitating flows in Diesel injectors by homogeneous equilibrium modeling approach*, The fourth international symposium on cavitation , Pasadena, Californie, Juin 20-24, 2001.

R. Fortes-Patella, J. L. Reboud and A. Archer, *Cavitation damage measurement by 3D laser profilometry*, Wear Vol 246, pp 59-67, 2000.

J. P. Franc and J. M. Michel, *Attached cavitation and the boundary layer : experimental investigation and numerical treatment*, Journal of fluid mechanics, Vol. 154, p. 63-90, 1985.

J. P. Franc, F. Avellan, B. Belahadji, J. Y. Billard, L. Briancon-Marjollet, D. Frechou, D. Fruman, A. Karimi, J. L. Kueny and J. M. Michel, *La cavitation mécanismes physiques et aspects industriels*, Presses Universitaires de Grenoble, 1995.

M. Frobenius, R. Schilling Friedrichs J and G. Kosyna *Numerical and experimental investigations of the cavitation flow in a centrifugal pump impeller*. Paper FEDSM2002-31006. In : Proceedings of FEDSM, Montreal 2002.

D. Frost and B. Sturtevant., *Effects of ambient pressure on the instability of a liquid boiling explosively at the superheat limit*. Trans. ASME C : J. Heat Transfer 108, p. 418-424, 1986.

R. A. Furness and S. P. Hutton, *Experimental and theoretical studies of two-dimensional fixed-type cavities*, Journal of fluid mechanics, Vol. 97, pp. 515-522 1975.

F. R. Gilmore, *The collapse and growth of a spherical bubble in a viscous compressible liquid*. Calif. Inst. of Tech. Hydrodynamics Lab. Rep. No. 26-4. (1952).

J. A Geurst, *Linearized Theory for Partially Cavitated Hydrofoils*. Int. shipbuilding Progress, Vol.6, No.60, pp.369-384, 1959.

J. A Geurst, *Linearized Theory for Fully Cavitated Hydrofoil*. Int. shipbuilding Progress, Vol.7, No.65, pp.17-27, 1960.

H. A. Grogger and A. Alajbegovic, *Calculation of the cavitating flow in venturi geometries using two fluid model*, Proceedings of ASME fluid engineering summer conference, Juin 21-25, Washington, D. C., 1998.

C. Gregor, P. Stojan and T. Iztok, *Upgrade of the VOF method for the simulation of the dispersed flow*, Proceedings of ASME fluid engineering summer conference, Juin 11-15, 2000, Bostan.

W. Gu, Y. He and T. Hu, *Transcritical patterns of cavitating flow and trends of acoustic level*, Journal of fluids engineering, Vol. 23, p. 850-856, 2001.

F. H. Harlow, *PIC and its Progeny*, Computer Phys. Com., Volume 48, pages 1-10 1988.

F. H. Harlow et Welch J. E., *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free surface*, Phys. Fluids, 8, p. 2182. 1965.

C. Herring., *Theory of the pulsations of the gas bubble produced by an underwater explosion*. O.S.R.D. Rep. No. 236. 1941.

R. Hickling et M. S. Plesset, *Collapse and rebound of spherical bubble in water*, The physics of fluids, Vol. 7, Number 1, p. 7-14, 1964.

C. W. Hirt. and B. D. Nichols., *Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries*. Journal of Computational Physics 39, 201, 1981.

A. Hosangadi et V. Ahuja, *A numerical study of cavitation in cryogenic fluids part II : new unsteady model for dense cloud formation*, The sixth international symposium on cavitation , Wageningen, Netherlands, Septembre 11-15, 2006.

C. T. Hsiao and G. L. Chahine, *numerical simulation of bubble dynamics in a vortex flow using Navier-Stokes computation and moving chimera grid scheme*, The fourth international symposium on cavitation , Pasadena, Californie, Juin 20-24, 2001.

C. T. Hsiao, G. L. Chahine et H. L. Liu, *Scaling effect on prediction of cavitation inception in a line vortex flow*, Journal of fluids engineering, Vol. 125, p. 53-60, 2003.

C. T. Hsiao, *Scaling of tip vortex cavitation inception noise with a bubble dynamics model accounting for nuclei size distribution*, Journal of fluids engineering, Vol. 127, p. 55-65, 2005.

C. T. Hsiao et G. Chahine, *Prediction of tip vortex cavitation inception using coupled spherical and non-spherical bubble models and Navier-Stokes computations*, J. Mar. Sci. Technol, p. 99-108, 2004.

T. T. Huang, *Cavitation Inception Observations on Six Axisymmetric Headforms*, Journal of Fluid Engineering, Vol. 103, pp. 273-279, 1981.

Y. Iga, M. Nohmi, A. Goto, B. R. Shin, T. Ikohagi, *Numerical Analysis of Unstable Phenomena of Cavitation in Cascade with Finite Blade Numbers*. Proc. 9th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, FD-ABS-128, 2002.

M. Ishii, *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow*, Collection de la direction des études et recherches d'électricité de France, Eyrolles, 1975.

J. k. Jakobsen, *On the mechanism of head breakdown in cavitating inducers*, Journal of basic engineering, Translations of the ASME, June, pp. 291-305, 1964.

J. H. Jeong, D. Y. Yang. *Finite element analysis of transient fluid flow with free surface using VOF (Volume-of-fluid) method and adaptative grid*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 26, p. 1127-1154, 1998.

S. kai et M. Ikehata, *Numerical simulation of cavitation on 3D wings and marine propeller by a surface vortex Lattice method*, CAV 98, the third Int. Symposium on Cavitation, 7-10 avril 1998, Grenoble, France.

T. kawamura et M. Sakoda, *Comparison of bubble and sheet cavitation models for simulations of cavitating flow over a hydrofoil*, CAV 2003, Osaka, Japan Novembre 1-4, 2003.

K. B. Keller et M. Miksis., *Bubble oscillations of large amplitude* J. Acoust. Soc. Am. 68, 628, 1980.

S. A. Kinnas, *The Prediction of Unsteady Sheet Cavitation*, CAV 1998, Third International Symposium on Cavitation, April 7-10, Grenoble, France.

S. Kinnas, *Leading-edge corrections to the linear theory of partially cavitating hydrofoils*, Journal of Ship Research, Vol. 35 No.1, pp.15-27. 1991.

S. A. Kinnas, et Fine, N.E., *Theoretical prediction of the midchord and face unsteady propeller sheet cavitation*, Proceedings Fifth International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, Hiroshima, Japon, Sept. 25-28, pp. 685-700, 1989.

R. T. Knapp, J. W. Dailly & F. G. Hammit Cavitation. McGraw-Hill, 1970.

P. Koch, D.Krefting, R. Mettin et W. Lauterborn, *Simulation of translational motion of few cavitation bubbles in an ultrasonic field*, 2003 IEEE ultrasonics symposium, 1475.

A. H. Koop, H. W. M. Hoeijmakers, *Design of twisted cavitating hydrofoil using a barotropic flow method*, The sixth international symposium on cavitation, Wageningen, Pays-bas, 11-15 Septembre 2006.

P. Krishnaswany, *Modelling for partially cavitating hydrofoils*, Technical University of Denmark, Department of Naval Architecture and offshore Engineering, PhD octobre 2000.

A. Kubota, H. Kato, H. Yamaguchi et M. Maeda, *Unsteady structure measurement of cloud cavitation on a foil section using conditional sampling technique*, Journal of fluid engineering, Vol. 111, p. 204-210, 1989.

A. Kubota, H. Kato et H. Yamaguchi, *A new modeling of cavitating flows : a numerical study of unsteady cavitation on a hydrofoi section*, Journal of fluid mechanics, Vol. 240, 59-96, 1992.

R. F. Kunz, D. A. Boger, D. R. Stinebring, T. S. Chyczewski, H. J. Gilbeling, S. Venkateswaran et T. R. Govindan, *A preconditioned Navier-Stokes method for two-phase flows with application to cavitation prediction*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 676-688, 1999.

R. F. Kunz, D.A Boger., D.R Stinebring., T.S Chyczewski., J.W Lindau., H.J Gilbeling., S Venkateswaran., and T.R. Govindan, *A preconditioned Navier-Stokes method for two-phase flows with application to cavitation predication*, Computers and Fluids, 29, pp. 849-875, 2000.

R. F. Kunz, J. W. Lindau, T. A. Kaday, and L. J. Peltier, *Unsteady Rans and Detached Eddy Simulations of Cavitating Flow Over a Hydrofoil*, Fifth International Symposium on Cavitation CAV2003 , Osaka, Japan, November 14, 2003.

M. Lance and J. Bataille, *Turbulence in the liquid phase of a uniform bubbly air-water flow*, Journal of fluid mechanics, Vol. 122, pp. 95-118, 1991.

T. A. Leger, et S. L. Ceccio, *Experimental Examination of the Flow Near the Leading Edge of an Attached Cavity : Part 1- Detachment of Two-Dimensional Cavities*, Journal of Fluid Mechanics, 376, p. 61-90 1998.

H. Lemonnier, A. Rowe, *Another approach in modeling cavitating flows*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 195, pp. 557-580, 1988.

H. Lindgren, and C.A. Johnsson, *Cavitation inception on headforms*, ITTC comparative experiments. Proc. 11th Int. Towing Tank Conf., Tokyo, pp. 219-232. 1966.

Z. Liu, K. Sato and C.E. Brennen, *Cavitation nuclei population dynamics in a water tunnel*. ASME Cavitation and Multiphase Flow Forum, 1993, FED-153, p. 119-125. 1993.

M. Maeda, H. Yamaguchi et H. kato, *Laser holography measurement of bubble population in cavitation cloud on a foil section*, FED-Vol. 116, Cavitation '91, ASME 1991, 67-76.

F. Mahjoub, *Modélisation diphasique du comportement transitoire d'interfaces liquide/gaz : application aux bulles attachées à des corps en mouvement*, Thèse de doctorat de l'INPG, Novembre 1995.

T. Maitre, C. Pellone et E. Collard, *Numerical simulation of 3D cavity behaviour*, CAV 98, the third Int. Symposium on Cavitation, 7-10 avril 1998, Grenoble, France.

H. B. Marshall, K. A. Morch, A. P; Keller et M. Kjeldsen, *Cavitation inception by almost spherical solid particles in water*, The fourth international symposium on cavitation , Pasadena, Californie, Juin 20-24, 2001.

M. Meijer, *Some Experiments on partly cavitating hydrofoils*, International Shipbuilding Progress. 6(60), 1956.

Mehmet et al. : The specialist committee on water quality and cavitation, *Final report and recommendations to the 23rd international towing tank conference*, Proceeding of the 23rd international towing tank conference – Volume II, Venise, Italie, 8-14 septembre 2002, pp 451-454.

C. D. Ohl, *Cavitation inception following shock wave passage*, Physics of fluids, Vol. 14, No 10, 3512-3521, 2002.

M. S. Plesset and Prosperitti A., *Bubble dynamics and cavitation*. Annual Review of Fluid Mechanics, 9, 145-185. 1977.

M. S. Plesset and R. S. Chapman, *Collapse of initially spherical vapor cavity in the neighborhood of a solid boundary*, Journal of fluid mechanics, Vol. 47, pp. 283-290, 1971.

M. S. Plesset and D. Y. Hsieh, *Theory of gas bubble dynamics in oscillating pressure fields*, Physics of Fluids, Vol 3 (6). pp. 882-892, 1960.

M. S. Plesset, *The dynamics of cavitation bubbles* ASME J. Appl. Mech. 16, 228-231, 1949.

E. G. Puckett and J. S. Saltzman, *A 3D Adaptive Mesh Refinement Algorithm for Multimaterial Gas Dynamics*, Physica D, 60 : pp. 84–104, 1992.

J. W. S. Rayleigh. *On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity*. Philos Mag 34, 9498, This is cited in the book titled Boiling Phenomena by S. Van Stralen, McGraw-Hill, 1979.

J. L. Reboud et B. Stutz, *Analyse de l'écoulement dans les poches de cavitation : modèle diphasique liquide-vapeur à deux fluides*, Rapport de synthèse, Convention CNES/LEGI, Marché 95/CNES/3171, décembre 1995.

J. L. Reboud, S. Eisenbach et B. Stutz, *Analyse et modélisation de la structure diphasique et du comportement instationnaire des écoulements cavitants*, Rapport de synthèse, Convention CNES/LEGI, Marché 96/CNES/3301, septembre 1997.

J. L. Reboud, B. Stutz et O. Coutier, *Two phase flow structure of cavitation : experiment and modeling of unsteady effects*, CAV 98, the third Int. Symposium on Cavitation, 7-10 avril 1998, Grenoble, France.

J. L. Reboud, R. Fortes-Patella, *Numerical and experimental investigations on the self-oscillating behavior of cloud cavitation - Part 2 : Dynamic pressures*, Proceedings of the 3rd ASME/JSME joint fluids engineering conference, Juillet 18-23, 1999, San Francisco, California.

A. Rosenfeld, *Specializations in differential algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. 90, 394-407, 1959.

Y. Saito, I. Nakamori et T. Ikehagi, *Numerical analysis of unsteady vaporous cavitation flow around a hydrofoil*, CAV 2003, Osaka, Japan, Novembre 1-4, 2003.

J. Sauer et G. H. Schnerr, *Unsteady cavitating flow – A new cavitation model based on a modified front capturing method and bubble dynamics*, Proceedings of ASME fluid engineering summer conference, Juin 11-15, 2000, Boston.

E. Sauvage-Boutar et J. Desclaux, *Prediction of cavitation performance and choking flow limit of inducers for cold water and fluids with thermodynamic effect*. IAAA Symposium, Montrey, 1991.

I. Senocak, and W Shyy., *A Pressure-based Method for Turbulent Cavitating Flow Computations*, J. Comp. Phys., vol. 176, pp. 363-383, 2002.

Y. Shen, G. Chahine, C. T. Hsiao et S. Jessup, *Effects of model size and free stream nuclei on tip vortex cavitation inception scaling*, The fourth international symposium on cavitation , Pasadena, California, Juin 20-24, 2001.

A. Singhai, M. M. Athavale, H. Li et Y. Jiang, *Mathematical basis and validation of the full cavitation model*, Journal of fluids engineering, Vol. 124, 617-624, 2002.

D. P. Schmidt, C. J. Rutland, M. L. Corradini, *Cavitation in Two-Dimensional Asymmetric Nozzles*, Engine Research Center, University of Wisconsin, Madison, 01-0518, 1999

C. C. S. Song, J. He, *Numerical simulation of cavitating flows by single-phase flow pumps*, CAV 98, the third Int. Symposium on Cavitation, 7-10 avril 1998, Grenoble, France.

C. C. S. Song, & Q. Qin, (2001) *Numerical Simulation of Unsteady Cavitation Flows*. CAV 2001 : Fourth International Symposium on Cavitation, June 20-23, 2001, California Institute of Technology, Pasadena, CA USA.

J. Staudenraus, W. Eisenmenger, *Fiber-optical hydrophone for ultrasonic and shock wave measurements in water*, Ultrasonics, Vol 31 (4), pp. 267-273, 1993.

B. Stutz and J. L. Reboud, *Experiments on unsteady cavitation*, Experiments in Fluids Vol. 22, pp. 191-198, 1997.

B. Stutz and J. L. Reboud, *Two-phase flow structure of sheet cavitation*, Physics of Fluids, 9 (12), pp. 3678-3686, 1997.

C. -K. Su, C. Camara, B. Kappus, et S. J. Putterman, *Cavitation luminescence in a water hammer : Upscaling sonoluminescence*, Physics of fluids, Vol. 15, No 6, 2003.

M. Sussman, P. Smereka, S. Osher, *A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow*. Journal of Computational Physics 114, pp. 146-159. 1994.

S. Takahashi et S. Washio, *Experimental study on cavitation starting at and flow characteristics close to the point of separation*, The fifth international symposium on cavitation , Osaka, Japan, Novembre 1-4, 2003.

S. Takahashi, S. Washio, S. Zhu et A. Okazaki, *Electrification and light emission in oil hydraulic cavitation*, The sixth international symposium on cavitation , Wageningen, Netherlands, Septembre 11-15, 2006.

L. Trilling, *The collapse and rebound of a gas bubble*. J. Appl. Phys., 23, 14–17. 1952.

M. P. Tulin, *Steady two-dimensional cavity flows about slender bodies*. David Taylor Model Basin Rep. 834, 1953.

M. P. Tulin, *Super-cavitating flows small perturbation theory*, Journal of ship Research 7, pp. 16-37, 1964.

J. S. Uhlman, *The surface singularity method applied to partially cavitating hydrofoils*. J. Ship Res., 31, No. 2, 107–124, 1987.

S. Vincent et J. P. Caltagirone, *Modélisation différentielles de la tension superficielle pour la simulation numérique directe d'écoulements incompressibles à surface libre*, 16^{ème} congrès français de mécanique, Nice, 1-5 septembre 2003.

G. B. Wallis, *One dimensional two-phase flow*, McGraw-Hill, 1969.

Y. C. Wang et C. E. Brennen, *Shock wave development in the collapse of a cloud of bubbles*, FED-Vol. 194, Cavitation and Multiphase Flow, 15-19, AMSE 1994.

L. van Wijngaarden, *On the collective collapse of a large number of gas bubbles in water*, 11th international congress on applied mechanics, Springer-Verlag, Berlin, pp. 854-861, 1964.

L. van Wijngaarden, *On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles*, Journal of fluid mechanics, Vol. 33, Part, 3, pp. 465-474, 1968.

D. C. Wilcox, *Turbulence modeling for CFD*, DCW industries inc., California, 1998.

J. Wu, Y. Utturkar et W. Shyy, *Assessment of modeling strategies for cavitating flow around a hydrofoil*, The fifth international symposium on cavitation , Osaka, Japan, Novembre 1-4, 2003.

T. Wu, *Cavity Flows and numerical methods*, First International conference ship hydrodynamics, Gaithersburg, Md, 1975.

T. Y. Wu, *A wake model for free streamline flow theory, Part 1. Fully and partially developed wake flows and cavity flows past an oblique flat plate*. J. Fluid Mech., 13, 161–181, 1962.

D. L. Youngs, *Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion*. In : Morton, K.W., Baines, M.J. (Eds.), *Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Academic Press, New York, pp. 273–285. 1982.

Chapitre 7

ANNEXE 1

7.1 CALCUL DE LA DIVERGENCE POLYNOMIALE

Dans le cas d'une divergence polynômiale, nous avons :

$$\text{div}U(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 \quad (7.1)$$

La divergence peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\text{div}U(t) = \phi_0 \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}(t_f + t_{\max})t^3 + \frac{1}{2}t_f t_{\max}t^2 \right) \quad (7.2)$$

avec $a = \frac{\phi_0}{4}$, $b = -\frac{\phi_0}{3}(t_f + t_{\max})$, $c = \frac{\phi_0}{2}t_f t_{\max}$,

comme représenté sur la figure 7.1, la divergence à un maximum $\text{div}U_{\max}$ à t_{\max} et un minimum $X_f \cdot \text{div}U_{\max}$ à t_f , avec t_f la durée sur laquelle la divergence est imposée, X_f et t_f sont des données. Ainsi, il nous reste à déterminer ϕ_0 et t_{\max} pour déterminer la divergence.

Nous savons que l'expansion finale Exp_0 est égale à l'intégrale de la divergence sur l'intervalle du temps où elle a été imposée $\int_0^{t_f} \text{div}\vec{U} dt = Exp_0$, ainsi on a :

$$\phi_0 = \frac{60Exp_0}{t_f^4 (5t_{\max} - 2t_f)} \quad (7.3)$$

A la date t_f on a :

$$\text{div}U(t_f) = \frac{\phi_0}{12}t_f^3 (2t_{\max} - t_f) = X_f \bullet \text{div}U_{\max} \quad (7.4)$$

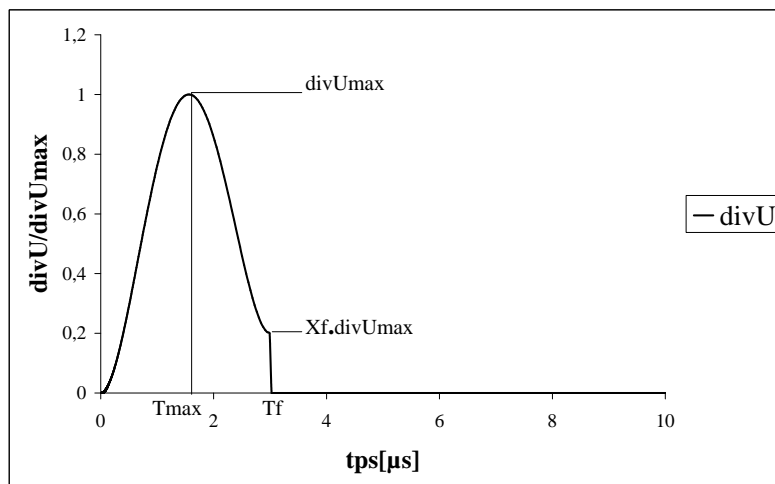


FIG. 7.1 – Divergence polynômiale adimensionnée avec une durée d'imposition de $3\mu\text{s}$

De même à la date t_{\max} on a :

$$\text{div}U(t_{\max}) = \frac{\phi_0}{12} t_{\max}^3 (2t_f - t_{\max}) = \text{div}U_{\max} \quad (7.5)$$

Avec l'équation (7.4) et (7.5) on a :

$$X_f = \frac{t_f^3 (2t_{\max} - t_f)}{t_{\max}^3 (2t_f - t_{\max})} \quad (7.6)$$

L'équation (7.6) permet de déterminer t_{\max} , il s'ensuit ϕ_0 avec l'équation (7.3). Avec t_{\max} et ϕ_0 on a déterminé notre divergence.

L'expansion finale Exp_0 est estimée dans l'expérience de Ohl égale à $1.5 \cdot 10^{-2}$. Dans nos calculs X_f est fixé à 0.2.

Chapitre 8

ANNEXE 2

8.1 LES VALEURS DES PROPRIETES PHYSIQUES DE L'EAU

$\rho_l = 1000 \text{kg/m}^3$:Densité

$\mu = 10^{-3} \text{Ns/m}^2$:Viscosité dynamique

$p_v = 2400 \text{Pa}$:Pression de vapeur saturante

$S = 0.0717 \text{N/m}$:Tension superficielle

$c = 1500 \text{m/s}$:Vitesse du son