



HAL
open science

Évaluation d'options "vanilles" et "digitales" dans le modèle de marché à intervalles

Stéphane Thiery

► **To cite this version:**

Stéphane Thiery. Évaluation d'options "vanilles" et "digitales" dans le modèle de marché à intervalles. Mathématiques [math]. Université Nice Sophia Antipolis, 2008. Français. NNT: . tel-00460176

HAL Id: tel-00460176

<https://theses.hal.science/tel-00460176>

Submitted on 26 Feb 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS

ECOLE DOCTORALE STIC

Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

THÈSE

Pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université de Nice - Sophia Antipolis

Mention : Automatique, Traitement du Signal et des Images (ATSI)

Présentée par

Stéphane THIERY

Équipe d'accueil : TOpModel (Techniques d'Optimisation et de Modelisation)

Laboratoire I3S - Université de Nice - Sophia Antipolis, CNRS

ÉVALUATION D'OPTIONS « VANILLES » ET « DIGITALES » DANS LE MODÈLE DE MARCHÉ À INTERVALLES

Thèse dirigée par Pr. Pierre BERNHARD

Rapporteurs :

<i>M^{me}</i>	Michèle BRETON	Professeur des Universités (HEC Montréal, Canada)
<i>M</i>	Marc QUINCAMPOIX	Professeur des Universités (Brest)
<i>M</i>	Patrick SAINT-PIERRE	Maître de conférences (Université Paris-Dauphine)

Jury presenti :

<i>M</i>	Marc QUINCAMPOIX	Professeur des Universités (Brest)	Rapporteur
<i>M</i>	Patrick SAINT-PIERRE	Maître de conférences (Université Paris-Dauphine)	Rapporteur
<i>M</i>	Geert Jan OLSDER	Professeur des Universités (Delft, The Netherlands)	Examinateur
<i>M</i>	Denis TALAY	Directeur de Recherche (INRIA Sophia Antipolis)	Examinateur
<i>M^{me}</i>	Francine DIENER	Professeur des Universités (Nice Sophia-Antipolis)	Examinateur
<i>M</i>	Stéphane CREPEY	Maître de conférences (Université d'Evry)	Examinateur
<i>M</i>	Pierre BERNHARD	Professeur des Universités (Nice Sophia-Antipolis)	Directeur de Thèse

Résumé

Au cours de cette thèse nous nous sommes intéressé à un jeu minimax différentiel \mathcal{G} et multi-étages \mathcal{G}^h à horizon fini T , motivé par un problème d'évaluation d'options européennes. Le jeu différentiel \mathcal{G} est en dimension 3 plus temps. Il comporte une commande à la fois continue et impulsionnelle et une commande bornée, ainsi qu'un coût terminal discontinu dans le cas d'une option « digitale » qui constitue le cœur de la thèse. Ce jeu résulte d'une approche par commande robuste sur l'ensemble des trajectoires de prix permises par l'hypothèse du modèle de marché à intervalles pour le cours de l'actif sur lequel est assise l'option.

Du point de vue des techniques financières, notre but est de développer en parallèle une théorie d'évaluation d'options en temps continu et en temps discret, en présence de coûts de transaction et à modèle de marché invariant. Nous obtenons la prime et la stratégie de transaction conseillées au cours du jeu. Notre théorie se veut donc une théorie normative (d'aide à la décision).

En ce qui concerne chaque jeu différentiel, nous utilisons une analyse géométrique des trajectoires extrémales et singulières du jeu qualitatif impulsionnel \mathcal{G} à cible unique à T , avec des outils géométriques de la théorie d'Isaacs-Breakwell. La solution obtenue s'avère riche en variétés singulières de codimension 2, à savoir qu'elle exhibe une dispersion, des variétés équivoques et une variété focale. Cette étude géométrique aboutit à une formule de représentation de la fonction Valeur. Nous complétons cette étude par une vérification analytique, plus classique, qui consiste à montrer que la fonction construite par la formule de représentation est solution de viscosité de l'équation d'Isaacs associée à un jeu différentiel standard \mathcal{J} sans commande impulsionnelle ayant la même valeur que le jeu initial \mathcal{G} .

Pour chaque jeu multi-étages, la résolution se fait par le biais d'un algorithme de programmation dynamique classique. Cet algorithme aboutit à une formule de représentation de la Valeur, dont la forme est assez similaire à celle de la solution du jeu différentiel \mathcal{G} . Il en découle un algorithme rapide applicable en pratique. Nous montrons également la convergence monotone décroissante de la solution du jeu multi-étages \mathcal{G}^h vers celle du jeu différentiel \mathcal{G} lorsque le pas de temps h tend vers 0, aussi bien pour une option « vanille » que « digitale », sans changer de modèle d'actif au fur et à mesure que l'on réduit le pas de temps. En conséquent, l'algorithme rapide en temps discret fournit une bonne approximation de la solution (prime et stratégie) en temps continu.

Nous terminons ce manuscrit par une analyse critique de la solution du point du vue financier avec en particulier une étude de la robustesse du modèle de marché et une comparaison avec la théorie de F.Black et M.Scholes. Nous insistons sur le fait qu'en aucun cas nous n'avons la prétention de proclamer une quelconque supériorité de notre théorie sur celle de F.Black et M.Scholes. Nous souhaitons seulement montrer qu'elle peut être une alternative en temps discret et/ou en présence de coûts de transaction significatifs, au détriment de la complétude du modèle de marché.

Mots clefs

➤ **Jeux dynamiques** : commande robuste, jeu différentiel, contrôle impulsionnel, jeu qualitatif, variétés singulières, jeu quantitatif, solution de viscosité.

➤ **Mathématiques financières** : évaluation d'option en temps continu et en temps discret, coûts de transaction, modèle de marché à intervalles, stratégie de couverture, marché incomplet.

Table des matières

Résumé	0
Notations	12
Introduction	15
Contexte	15
Contributions	16
Plan de la thèse	17
1 La modélisation	21
1.1 Le contexte : un problème d'évaluation d'options	21
1.1.1 Préliminaire : définition d'une option « vanille » et du problème d'évaluation d'options.	21
1.1.2 Bref historique et principes fondamentaux de l'évaluation d'options	23
1.2 Le « modèle de marché à intervalles »	30
1.2.1 Les hypothèses communes avec la théorie de F.Black et M.Scholes	30
1.2.2 L'hypothèse du modèle de marché à intervalles	31
1.2.3 Historique du modèle de marché à intervalles	31
1.2.4 Motivations à l'introduction du modèle de marché à intervalles	32
1.3 Modélisation du problème d'évaluation d'options en temps continu	33
1.3.1 Modèle de marché	33
1.3.2 Modèle de portefeuille	33
1.3.3 Dynamique de marché et de portefeuille	37
1.3.4 Stratégies non anticipatives	39
1.3.5 Coût terminal et condition de couverture	41
1.3.6 Prime de l'option comme solution d'un jeu « minimax » \mathcal{G}	44
1.4 Modélisation du problème en temps discret	45
1.4.1 Modèle de marché et de portefeuille (dynamique)	46
1.4.2 Prime de l'option comme solution du jeu minimax \mathcal{G}^h	48
1.5 Fonction Valeur	50
1.5.1 Fonction Valeur W du jeu minimax différentiel \mathcal{G}	50
1.5.2 Fonction Valeur W^h du jeu minimax multi-étages \mathcal{G}^h	50
1.6 Un résultat préliminaire : $v(t)$ est borné.	51
1.6.1 Le cas des options vanilles	51

1.6.2	Le cas des options digitales	53
1.7	Valeurs par défaut des différents paramètres	54
2	Outils de la théorie des jeux dynamiques à deux joueurs et à somme nulle	57
2.1	Jeux dynamiques à deux joueurs et à somme nulle	57
2.1.1	Définition	57
2.1.2	Origine des jeux différentiels à deux joueurs et à somme nulle	58
2.1.3	Jeu qualitatif (« game of kind ») et jeu quantitatif (« game of degree »)	59
2.1.4	Stratégies et Valeur du jeu	60
2.2	Résolution d'un jeu quantitatif à horizon fini : équation d'Isaacs et solution de viscosité	63
2.2.1	Equation d'Isaacs d'un jeu quantitatif	63
2.2.2	Solution de viscosité de l'équation d'Isaacs	66
2.2.3	Solution de viscosité discontinue de l'équation d'Isaacs	68
2.2.4	Le cas d'un jeu minimax multi-étages. Programmation dynamique	71
2.3	Jeu qualitatif : semi-perméabilité et barrières	72
2.4	Equivalence entre jeu quantitatif en dimension n et jeu qualitatif en dimension $n + 1$.	74
3	Le call vanille par la méthode du jeu qualitatif	81
3.1	En absence de coûts de transaction	81
3.1.1	Dynamique et fonction Valeur	81
3.1.2	Solution de viscosité	83
3.1.3	Application au call vanille	84
3.1.4	Stratégie	84
3.2	Approche du jeu qualitatif, pour le jeu impulsif \mathcal{G}	85
3.3	Equation qualitative d'Isaacs et contrôles optimaux	86
3.3.1	Normale semi-perméable et équation qualitative d'Isaacs	86
3.3.2	Contrôles optimaux τ^* et ξ^*	88
3.3.3	Les impulsions : des trajectoires particulières	89
3.3.4	Les équations adjointes	91
3.4	Intégration depuis la frontière de la cible à l'instant T	91
3.4.1	Frontière de la cible à l'instant T	91
3.4.2	Intégration en temps rétrograde aussi longtemps que $\xi^* = 0$	95
3.4.3	La nappe $\langle \tau^- \rangle$	96
3.4.4	La nappe $\langle \tau^+ \rangle$	99
3.4.5	Intersection des nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$, et barrière composite	101
3.4.6	Résumé, notations symétriques pour les pentes $-q$ et les domaines de validité des deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$	102
3.5	Projection dans le plan (u, t) , cas triviaux et région d'intérêt	104
3.5.1	Projection dans le plan (u, t)	104
3.5.2	Deux régions triviales dans le plan (t, u)	104
3.5.3	Région d'intérêt	107
3.5.4	Plan de l'analyse en dimension 4 dans la région d'intérêt Λ	108

3.6	La solution pour $t_M = \max\{t_+, t_-\} \leq t \leq T$ dans la région Λ	109
3.6.1	Conditions de couverture et fonction Valeur	109
3.6.2	Analyse des résultats obtenus pour $t_M \leq t \leq T$	111
3.7	Construction d'une variété équivoque \mathcal{E} pour notre jeu	113
3.7.1	Justification de l'apparition d'une variété équivoque dans notre jeu.	113
3.7.2	Méthode pour construire la variété équivoque	114
3.7.3	Application générale de la méthode à toute variété \mathcal{E} de notre jeu	116
3.8	Solution dans la région Λ pour $t \in [t_m, t_M]$	121
3.8.1	Pour $t_- \leq t \leq t_+$: une variété $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$	122
3.8.2	Pour $t_+ \leq t \leq t_-$: une variété $\mathcal{E}^- = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$	128
3.9	Solution dans la région $\Lambda \cap \{(u, t) \mid t \leq t_m\}$: une variété focale $\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$	133
3.9.1	Un système d'EDP couplé linéaire du premier ordre	133
3.9.2	Stratégies du trader $\xi^+ \geq 0$ et $\xi^- \leq 0$ le long de \mathcal{F}	135
3.9.3	Conditions au bord	136
3.9.4	Condition de semi-perméabilité de la variété \mathcal{F} - Équations adjointes généralisées	139
3.9.5	Vérification de la condition de semi-perméabilité	141
3.9.6	Vérification du signe de ξ^+ et de ξ^-	144
3.10	Synthèse de la solution et prime de l'option	144
3.10.1	Formule de représentation de la fonction Valeur	144
3.10.2	Prime de l'option et stratégie du trader au cours du jeu	146
3.11	Coûts de clôture : des cas particuliers	148
3.11.1	En absence de coûts de clôture : rien de particulier	148
3.11.2	Le cas où $c^- = C^-$ ou $c^+ = C^+$	149
3.11.3	Le cas particulier $c^\varepsilon = C^\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}$	149
3.12	Le put vanille avec paiement en nature	150
4	Le call digital par la méthode du jeu qualitatif	151
4.1	En absence de coûts de transaction	151
4.1.1	Approximation du paiement	152
4.1.2	Solution de viscosité du jeu \mathcal{G}_Δ	152
4.1.3	Valeur du jeu \mathcal{G}	153
4.1.4	Prime et stratégie	154
4.2	Quelques rappels utiles	155
4.3	Intégration depuis la frontière de la cible à T	157
4.3.1	Frontière de la cible et normales semi-perméables à $t = T$	157
4.3.2	Deux nappes régulières avec $\tau^* = \tau^-$: nappes $\langle \tau_g^- \rangle$ et $\langle \tau_d^- \rangle$	158
4.3.3	Une nappe singulière en τ : nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$	160
4.4	Projection dans le plan (u, t) , et cas simples	163
4.4.1	Projection des nappes $\langle \tau_g^- \rangle$, $\langle \tau_d^- \rangle$ et $\langle \mathcal{K} \rangle$ dans le plan (u, t)	163
4.4.2	Deux régions triviales dans l'espace (t, u)	165
4.5	Région d'intérêt pour un call digital et plan de l'analyse	167
4.5.1	Région d'intérêt	167

4.5.2	Les différentes variétés de dimension 2 $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ à caractériser et plan de l'analyse	167
4.6	La dispersion $\mathcal{D} = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle$	170
4.6.1	Les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur \mathcal{D}	170
4.6.2	Analyse des résultats dans la région comprenant \mathcal{D}	172
4.7	La variété équivoque $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle$	180
4.7.1	Dynamique	180
4.7.2	Conditions au bord	180
4.7.3	Formules explicites	181
4.7.4	Semi-perméabilité de \mathcal{E}^+ ($n^+ \geq 0$ sur \mathcal{E}^+)	182
4.8	La variété équivoque $\mathcal{E}^- = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$	182
4.8.1	Stratégie du trader et interprétation	183
4.8.2	Conditions au bord et solution explicite	184
4.8.3	Semi-perméabilité de \mathcal{E}^-	188
4.9	la variété focale $\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ et la variété équivoque $\mathcal{E}_3^- = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$	189
4.9.1	Conditions au bord	190
4.9.2	Semi-perméabilité de \mathcal{F}	190
4.9.3	Semi-perméabilité de \mathcal{E}_3^-	191
4.10	La variété \mathcal{C} : « $\langle \downarrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ » (région (4.40)) : une solution triviale	192
4.11	Résumé de la solution obtenue et stratégie du trader	195
4.11.1	Résumé	195
4.11.2	Discontinuité de la fonction Valeur le long de $u_g(t)$	195
4.11.3	Prime de l'option et stratégie du trader	196
4.11.4	Coûts de clôture : des cas particuliers	198
4.12	Le put digital	199
5	Formule de représentation et vérification à l'aide de la solution de viscosité	201
5.1	Système d'EDP satisfait par les variétés singulières	201
5.1.1	Notations	202
5.1.2	Les variétés \mathcal{D} , \mathcal{E}^+ , \mathcal{E}^- et \mathcal{F} , vérifient le système d'EDP (5.3)	203
5.1.3	Les régions « triviales »	207
5.2	Théorème de représentation de la fonction Valeur W	207
5.2.1	Conditions au bord pour le call vanille	208
5.2.2	Le cas du call digital	208
5.2.3	Une transition vers l'approche par solution de viscosité	211
5.3	Équation d'Isaacs d'un jeu \mathcal{J} de même Valeur que \mathcal{G}	211
5.3.1	L'équation d'Isaacs du jeu \mathcal{G} s'avère dégénérée.	211
5.3.2	La transformée de Josué : du jeu impulsionnel \mathcal{G} au jeu « standard » \mathcal{J}	212
5.3.3	Interprétation de l'équation d'Isaacs (5.24) du jeu \mathcal{J} , et condition de viscosité	216
5.4	Vérification à l'aide de solution de viscosité pour le call digital	217
5.4.1	Propriétés préliminaires et plan de la vérification	218
5.4.2	Régions régulières	219

5.4.3	Inventaire des différentes régions non régulières	222
5.4.4	Régions non régulières pour lesquelles W demeure continue	223
5.4.5	Régions non régulières avec discontinuité de la fonction valeur W	230
5.4.6	Le cas particulier où $t_+ = t_-$	234
5.5	Vérification à l'aide de solution de viscosité pour le call vanille avec paiement en nature	235
5.5.1	Préliminaires et structure de la vérification	236
5.5.2	Les régions régulières	236
5.5.3	Les régions comportant une discontinuité de gradient de W	237
5.6	Une propriété de la vérification par solution de viscosité	239
6	Jeu multi-étage \mathcal{G}^h et théorème de convergence	241
6.1	Programmation dynamique en deux étapes pour chaque pas de temps	241
6.1.1	Equation d'Isaacs discrète du jeu \mathcal{G}^h	241
6.1.2	Séparation de la minimisation en ξ et de la maximisation en τ	242
6.1.3	Des propriétés préliminaires (convexité, relation liant $W_k^h(u, v)$ à $W_{k+}^h(u, v)$ pour tout k)	243
6.1.4	Implémentation de l'algorithme de programmation dynamique (6.4).	246
6.2	Théorème de représentation et algorithme rapide	247
6.2.1	Tentative de dérouler à la main l'algorithme de programmation dynamique (6.4) pour le call digital	247
6.2.2	Formule de représentation et algorithme rapide dans le cas du call digital	251
6.2.3	Mise en évidence d'une singularité en τ pour le call digital	253
6.2.4	Formule de représentation et algorithme rapide pour le call vanille avec paiement en nature	255
6.2.5	Stratégie obtenue en temps discret et propriétés supplémentaires	256
6.3	Théorème de convergence	257
6.3.1	Énoncé du théorème de convergence et jeux utilisés au cours de la preuve	257
6.3.2	Preuve du théorème	259
6.3.3	Preuve du lemme 6.3.5	261
6.3.4	Quelques remarques complémentaires	267
	Conclusion générale sur le plan mathématique	269
7	Début d'un examen critique du point de vue applicatif	271
7.1	Préambule	271
7.1.1	Avertissements	271
7.1.2	Rappels du jeu de paramètres par défaut et paramètres supplémentaires pour l'implémentation.	272
7.2	Résultats numériques et comparaison avec ceux de la théorie de BS	272
7.2.1	Formules de BS	272
7.2.2	Courbes de primes obtenues avec notre théorie et comparaison avec BS	274
7.2.3	Un point sur la vérification numérique de la convergence	277

7.2.4	Des liens indirects entre le modèle de marché à intervalles et le modèle de diffusion géométrique	278
7.3	Forces et faiblesses de notre théorie. Comparaison avec la théorie de BS	280
7.3.1	Les limites majeures de chacune des deux théories, au plan strictement mathématique	280
7.3.2	Nos motivations pour l'introduction du modèle de marché à intervalles	282
7.4	Étude de la robustesse du modèle de marché à intervalles	282
7.4.1	Avec des intervalles plus larges munis d'une loi de probabilité	282
7.4.2	Avec des suites de cours réelles et simulées	286
Conclusion sur le plan des techniques financières		293
8	Quelques perspectives	295
8.1	Unicité de la solution de la DIQV (5.24)	295
8.2	Coûts de transaction affines	295
8.3	Modèle à intervalles avec un délai égal à un pas de temps	298
8.4	Des options plus complexes ... du point de vue mathématique	299
8.5	Options américaines	302
8.6	Calibration du modèle de marché à intervalles	304
Annexes		309
A	EDP « fondamentale »	310
A.1	Le problème	310
A.2	Les conditions au bord	310
A.3	Manipulations de l'EDP	311
A.4	Existence et unicité de la solution	313
A.5	Discontinuités du gradient	315
B	Vérification numérique de la conjecture $W_{k^+}^h(u, v)$ affine en deux morceaux	316
C	Les suites de cours utilisées pour l'étude de la robustesse	318

Table des figures

1.1	Paiement des options vanilles.	23
1.2	Paiement des options digitales	28
2.1	Notion de fonctions tests Φ_* et Φ^* dans le cas où la discontinuité de W est un simple saut.	69
3.1	Régionnement de la partie du plan $(u, v) \in \mathbb{R}^+ \times [0, u]$, suivant l'expression prise par $N(u, v)$ (formule (3.32)).	93
3.2	Coupes en $v = 0$ et $v = u$ de la frontière de la cible (3.32) et normales semi-perméables.	94
3.3	Projection des trajectoires des deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ dans le plan (u, t)	105
3.4	Région d'intérêt Λ dans le plan (u, t) pour un call vanille avec paiement en espèces.	107
3.5	Représentation dans l'espace (v, w) des nappes de dimension 3 $\langle \tau^- \rangle$ and $\langle \tau^+ \rangle$, de leur intersection (variété \mathcal{D} de dimension 2), ainsi que de l'ensemble des états capturables.	109
3.6	Conditions au bord d'intégration, pour la variété equivoque \mathcal{E}^+	124
3.7	Conditions au bord d'intégration, pour la variété equivoque \mathcal{E}^-	130
3.8	Les différentes variétés paramétrées en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$, suivant que $t_- < t_+$ ou $t_+ \leq t_-$	137
3.9	Graphe de la fonction Valeur W , dans le plan (v, w) à (t, u) fixés, à partir de la formule de représentation (3.147).	145
3.10	Un schéma en dimension 2 de la géométrie du jeu en dimension 4.	147
3.11	Les différentes variétés de dimension 2 dans les cas particuliers $c^+ = C^+$ (figure de gauche) et $c^- = C^-$ (figure de droite)	149
4.1	Approximation continue $M_\Delta(u)$ de la fonction de paiement $M(u)$ d'un call digital.	152
4.2	Nombre optimal de parts $\frac{v(t)}{u(t)}$ en fonction de $u(t)$ lorsque le paiement est $M_\Delta(u)$	155
4.3	Call digital : frontière de la cible à l'instant T et normales semi-perméables	158
4.4	Domaine de validité (4.16) de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ dans le plan (u, t)	164
4.5	Projection des trajectoires des trois nappes $\langle \tau_g^- \rangle$, $\langle \tau_d^- \rangle$, et $\langle \mathcal{K} \rangle$ dans le plan (u, t)	165
4.6	Region d'intérêt Λ dans le plan (u, t) pour un call digital.	167
4.7	Une vue dans le plan (u, t) des différentes variétés singulières de dimension 2 à caractériser.	169
4.8	Représentation dans l'espace (v, w) , des nappes de dimension 3 $\langle \mathcal{K} \rangle$ and $\langle \tau_g^- \rangle$, de leur intersection (variété \mathcal{D} de dimension 2), et de l'ensemble des états capturables.	170
4.9	Ensemble des états capturables : les différents cas dans la région (4.36), suivant le signe de $q^+(u)$	173

4.10	Portefeuille de couverture le meilleur marché $w^*(u)$ et investissement $v^*(u)$ correspondant sous la stratégie $\xi = 0$.	174
4.11	Les fonctions $(\check{v}(u), \check{w}(u))$ à l'instant $t = (t_M + T)/2 \in [t_M, T]$ fixé.	175
4.12	Ensemble des états capturables pour $u(t) = u_d(t) = Ke^{-\tau^-(T-t)}$ quand $t \in [t_-, T]$	176
4.13	Variation relative des contrôles optimaux en fonction de u et à t fixé, pour une période finale $[t, T]$ où $\xi^* = 0 \forall u$.	178
4.14	Illustration de la dispersion pour des trajectoires singulières et extrémales dans le plan (u, t) pour $t \in [t_M, T]$	180
4.15	Conditions au bord pour la variété équivoque \mathcal{E}^+ .	181
4.16	Les différentes variétés \mathcal{E}^- suivant les conditions au bord d'intégration.	185
4.17	Une coupe en (v, w) du graphe de la fonction Valeur W dans la région du plan (u, t) où \mathcal{E}_1^- ou \mathcal{E}_2^- existe.	188
4.18	Une coupe en (v, w) du graphe de la fonction Valeur $W(t, u_-, v)$ pour $t < t_-$.	194
4.19	Une vue dans le plan (u, t) des différentes variétés de dimension 2 lorsque $c^- = C^-$.	199
5.1	Schéma des ensembles $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ dans le plan (u, t) .	209
5.2	Les régions du plan (u, t) suivant l'expression prise par la fonction $q^+(t, u)$ (5.16).	210
5.3	La « transformée de Josué » : du plan (t, v) vers le plan (θ, v) .	214
5.4	Call digital : schéma des différentes régions régulières dans le plan (u, t) séparées suivant l'expression prise par les fonction q^- et q^+ .	220
5.5	Expressions de $q^+(t, u)$, $q^-(t)$ et propriété de \check{v} des deux côtés de la courbe $u(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$ dans le plan (u, t) .	230
5.6	Les différentes régions régulières dans le plan (u, t) et le cas particulier $t_- = t_+$	234
5.7	Call vanille : schéma des différentes régions régulières dans le plan (u, t) séparées suivant l'expression prise par les fonction q^- et q^+ , dans et en dehors de la région d'intérêt Λ .	237
6.1	Une illustration dans le plan (v, w) à (k, u) fixés, de l'inf-convolution et de $v_k^+(u)$.	244
6.2	Une illustration dans le plan (v, w) de la minimisation en ξ à (u, k) fixés dans l'algorithme de programmation dynamique (6.4).	245
6.3	Régions à distinguer lors des deux premiers pas de programmation dynamique	248
6.4	Configuration générale des régions du plan (u, k) pour h suffisamment petit.	255
7.1	Approximation d'un call digital à partir de $2n$ call vanille.	273
7.2	Call vanille : représentation des fonctions $\check{v}_k^h(u)$ et $W_k^h(u, 0)$ pour $t_k = \{0, 10, 20, 30, 40, 44\}$	274
7.3	Call digital : représentation des fonctions $\check{v}_k^h(u)$ et $W_k^h(u, 0)$ pour $t_k = \{0, 10, 20, 30, 40, 44\}$.	275
7.4	Comparaison avec la prime de BS pour le call vanille	276
7.5	Comparaison avec la prime obtenue par extension de BS pour le call digital	277
7.6	Call vanille et loi uniforme : comparaison entre la prime $P(u_0)$ et le coût total $Q_\Delta(u_0)$ pour différents valeurs du débordement Δ	284
7.7	Call vanille et loi triangulaire : comparaison entre la prime $P(u_0)$ et le coût total $Q_\Delta(u_0)$ pour différents valeurs du débordement Δ	285

7.8	La différence $P(K) - Q_{\Delta}(K)$ en fonction du débordement Δ	286
7.9	Call digital et loi uniforme : comparaison entre la prime $P(u_0)$ et le coût total $Q_{\Delta}(u_0)$ pour différents valeurs du débordement Δ	287
7.10	Call digital et loi triangulaire : comparaison entre la prime $P(u_0)$ et le coût total $Q_{\Delta}(u_0)$ pour différents valeurs du débordement Δ	288
7.11	La différence $P(0, 8K) - Q_{\Delta}(0, 8K)$ en fonction du débordement Δ	289
7.12	Prime et coût encouru en fonction de p . Suite du cours : action Air France entre le 18 août 1998 et le 20 octobre 1998 ($\sigma \simeq 0,031$).	290
7.13	Prime et coût encouru en fonction de p . Suite de cours : CAC 40 entre le 6 mars 1998 et le 8 mai 1998 ($\sigma \simeq 0,013$).	290
7.14	Prime et coût encouru en fonction de p . Suite de cours : log-normale ($\mu = 0$ et $\sigma \simeq 0,09$).	291
7.15	Prime et coût encouru en fonction de p . Suite de cours : log-normale ($\mu = 0$ et $\sigma \simeq 0,0103$).	291
8.1	Paiement de deux options à « trois menaces » pour le trader.	300
8.2	Une application destinée à montrer la perte du théorème de représentation 5.2.1.	302
8.3	Influence sur la prime d'un call vanille en $u_0 = K$, d'une translation (figure de gauche) et d'une contraction/dilatation (figure de droite) de l'intervalle.	306
8.4	Influence sur la prime d'un call digital en $u_0 = 0,8K$, d'une translation (figure de gauche) et d'une contraction/dilatation (figure de droite) de l'intervalle.	306
8.5	Vérification du caractère affine en v de $W_{k^+}^h(0,8K, v)$	317
8.6	Vérification du caractère affine en v de $W_{k^+}^h(0,9K, v)$	318
8.7	Vérification du caractère affine en v de $W_{k^+}^h(K, v)$	319
8.8	Une vue de la situation dans le plan (u, k)	319
8.9	Evolution du cours de l'action Air France entre le 18 août 1998 et le 20 octobre 1998 (figure de gauche) et du cours du CAC40 entre le 6 mars 1998 et le 8 mai 1998 (figure de droite).	321
8.10	Evolution du cours log-normal simulé (pour $\sigma = 0.1$ à gauche et $\sigma = 0.01$ à droite).	321

Liste des tableaux

3.1	Une synthèse des résultats relatifs aux valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ pour le call vanille. . .	146
4.1	Une synthèse des résultats relatifs aux valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ pour le call digital. . .	195
5.1	Rappels des différentes variétés \mathbb{V} identifiées.	203
5.2	Table des différentes régions régulières dans $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ suivant l'expression ①, ②, ③ prise par $q^\varepsilon(t, u)$	221
6.1	Situation inextricable au pas $\mathbb{K} - 2$ pour le call digital.	251
7.1	Rappel du jeu de paramètres par défaut.	272
8.1	Cours de l'action Air France entre le 18 août 1998 et le 20 octobre 1998 (à gauche) et cours du CAC40 entre le 6 mars 1998 et le 8 mai 1998 (à droite).	320
8.2	Cours log-normal simulé avec $\sigma = 0.1$ (à gauche) et $\sigma = 0.01$ (à droite)	322

Notations

Principales abréviations ou acronymes

BF	:	Boucle Fermée.
BO	:	Boucle Ouverte.
BS	:	F.Black et M.Scholes.
CRR	:	J.C.Cox, S.A.Ross, et M.Rubinstein.
DIQV	:	forme Différentiel d'une Inéquation Quasi-Variationnelle.
EDO	:	équation(s) différentielle(s) ordinaire(s).
EDP	:	équation(s) aux dérivées partielles.
HJB	:	Hamilton-Jacobi-Bellman.
HJBI	:	Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs.
IQV	:	Inéquation Quasi-Variationnelle.
s.c.s	:	semi(e)-continu(e) supérieurement.
s.c.i	:	semi(e)-continu(e) inférieurement.

Notation relatives à la finance

$S(t)$:	cours de l'actif sous-jacent (imprédictible).
ρ	:	taux d'intérêt des bons sans risque.
$R(t)$:	cours des bons sans risques.
$x(t)$:	nombre de parts d'actif sous-jacent dans le portefeuille de couverture.
$y(t)$:	nombre de parts de bons sans risques dans le portefeuille de couverture.
$u(t)$:	cours de l'actif sous-jacent actualisé (« underlying »).
$v(t)$:	montant actualisé investi en actif sous-jacent (« value of the investment »).
$w(t)$:	valeur du portefeuille actualisé (« worth »).
K	:	prix d'exercice de l'option (strike).
T	:	date d'exercice de l'option (échéance).
D	:	montant (gain fixe) du paiement des options digitales.
$M(u(T))$:	fonction de paiement ($M(u(T)) = M(S(T))$).
$N(u(T), v(T))$:	fonction de cours terminal ($M(u(T)) = M(S(T))$).
$\tilde{P}(S(0))$:	prime de l'option.
$P(u(0))$:	prime de l'option actualisée.

Notation principales relatives à notre théorie

$\tau(\cdot)$: taux de variation relatif instantané du cours de l'actif sous-jacent actualisé.
$\tau^- < 0$ et $\tau^+ > 0$: bornes sur les variations du cours de l'actif sous-jacent actualisé.
Ω	: ensemble des fonctions mesurables telle que $\tau(t) \in [\tau^-, \tau^+] \forall t \in [0, T]$.
Ψ	: ensemble des trajectoires de prix possible pour le cours $u(t)$.
$\xi(\cdot)$: commande de transaction du trader. $\xi(\cdot) = \xi_c(\cdot) + \sum_k \xi_k \delta(t - t_k)$.
$\Xi(\cdot)$: ensemble des commandes $\xi(\cdot)$ admissibles du trader.
t_k	: instant d'une transaction instantanée (saut).
ξ_k	: montant de la transaction (amplitude du saut) à $t = t_k$.
h	: pas de temps.
k	: indice relatif à l'instant d'échantillonnage $t_k = kh$ (avec $t_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}h = T$).
$\phi : \Psi \mapsto \Xi$: stratégie non anticipative.
Φ	: ensemble des stratégies non anticipatives.
$\varphi \in \Phi_f$: stratégie en rétroaction d'état générant une stratégie non anticipative admissible.
W	: Valeur du jeu minimax différentiel \mathcal{G} .
W^h	: Valeur du jeu minimax multi-étages \mathcal{G}^h avec h pour pas de temps.
$C^+ \geq 0$ ($C^- \leq 0$)	: taux des coûts de transaction à l'achat (à la vente) d'actif sous-jacent.
c^+ (c^-)	: taux des coûts de clôture à l'achat $0 \leq c^+ \leq C^+$ (à la vente $C^- \leq c^- \leq 0$).
vecteurs d'état	: $X = (u, v)^t$, $\bar{X} = (t, X)^t$, $Y = (u, v, w)^t$, $\bar{Y} = (t, Y)^t$.
\mathbb{C}_T	: cible du jeu qualitatif à l'instant T

Principales notations usuelles

A^t	: transposée du vecteur ou de la matrice A .
$ x $: valeur absolue du scalaire x ou norme L_2 pour un vecteur x .
$\langle A, B \rangle$: produit scalaire usuels entre les vecteurs A et B .
$\Upsilon(\cdot)$: fonction d'Heaviside.
$a \downarrow b$: a converge vers b de manière décroissante.
$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial X}$: gradient de f dans l'espace d'état X .

Nappes

On entend par « nappe » une hyper-surface semi-perméable candidate à faire partie de la barrière d'un jeu qualitatif.

$\nu = (n, p, q, 1)^t$: normale semi-perméable.
$\langle \mathcal{N} \rangle$: nappe régulière ou singulière, sans distinction.
$\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$: nappe de trajectoires extrémales $\xi = 0$ et $\tau = \tau^-$ (respectivement $\tau = \tau^+$).
$\langle \mathcal{K} \rangle$: nappe de trajectoires singulière en τ atteignant $u(T) = K$.
$\langle \uparrow \rangle$ et $\langle \downarrow \rangle$: nappe de saut positif (respectivement négatif).
$\langle \text{saut} \rangle$: nappe de saut, sans distinction c'est-à-dire $\langle \text{saut} \rangle = \langle \uparrow \rangle$ ou $\langle \text{saut} \rangle = \langle \downarrow \rangle$.

Variétés singulières de codimension 2, intersection de deux nappes

\mathcal{D} : dispersion (intersection de deux nappes régulières ou singulières).

\mathcal{E} : variété équivoque (toujours de la forme $\mathcal{E} = \langle \mathcal{N} \rangle \cap \langle \text{saut} \rangle$).

\mathcal{F} : variété focale. ($\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$).

\mathbb{V} : variété singulière sans distinction (\mathcal{D} , \mathcal{E} ou \mathcal{F}).

Ce sont des variétés de \mathbb{R}^4 paramétrées en $\{t, u, \check{v}(t, u), \check{w}(t, u)\}$. En outre, on introduit le vecteur $\check{V}(t, u) = (\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))^t$.

Introduction

Contexte du sujet de recherche

De nombreux jeux différentiels résultent de la volonté de modéliser et de résoudre un problème en particulier, suivant ainsi la tradition du fondateur de la théorie des jeux différentiels R. Isaacs qui appliquait à l'origine ces jeux différentiels à des problèmes dits de « poursuite-évasion ». Ainsi, nous trouvons des jeux différentiels ayant des cadres d'application très divers. Dans cette thèse nous sommes intéressés à la résolution d'un jeu « minimax » (différentiel \mathcal{G} et multi-étage \mathcal{G}^h) particulier à horizon fini T , introduit dans [Ber03, Ber05c] et ayant pour cadre une des problématiques principales des mathématiques financières, à savoir l'évaluation d'options ¹ européennes.

Une option européenne est un contrat assis sur le cours d'un actif boursier dont l'évolution est imprédictible. En première analyse, ce contrat est repéré par un paiement, fonction du cours à une date future T appelée l'échéance. Ce paiement est propre à l'option considérée (pour les options étudiées au cours de cette thèse, à savoir les options dites « vanilles » et « digitales », le paiement est respectivement convexe et discontinu) et caractérise le montant dû à l'échéance par l'opérateur boursier (appelé « trader ») au souscripteur de l'option. Le problème d'évaluation d'options consiste à déterminer le prix (la « prime ») que doit verser le souscripteur lors de la souscription de ce contrat.

Le « modèle de marché à intervalles » que nous utilisons pour décrire le cours de l'actif sur lequel est assise l'option est un modèle à variation bornée, mais incomplet (l'incomplétude du modèle est une faiblesse). Le jeu minimax étudié résulte, lui, d'une approche par commande robuste sur l'ensemble des trajectoires de prix permises par l'hypothèse du modèle de marché à intervalles. Notre modélisation et notre approche nous permettent de développer en parallèle une théorie d'évaluation d'options à la fois en temps continu (jeu différentiel minimax à résoudre) et en temps discret (jeu multi-étages minimax à résoudre) sans changer de modèle de marché en fonction du pas de temps, en présence de coûts de transaction (les coûts de transaction sont pris en compte directement dans l'équation dite d'autofinancement du portefeuille) et de coûts de clôture (ces derniers sont pris en compte dans le coût terminal du jeu). La résolution du jeu conduit à la prime de l'option, ainsi qu'à la stratégie préconisée pour le trader au cours du jeu. Du point de vue des techniques financières, notre théorie se veut être une théorie normative (c'est-à-dire d'aide à la décision).

Le jeu minimax différentiel étudié se déroule dans un espace de dimension 4 (dimension 3 plus temps) et comporte les caractéristiques principales suivantes :

¹Appelée également tarification d'options. Nous adoptons la dénomination « évaluation d'options » qui semble être la plus communément utilisée dans la littérature, en particulier dans [LL97].

- ➔ La commande du minimiseur (stratégie de transaction du trader) est la somme d'une fonction mesurable et d'un nombre fini d'impulsions, celle du maximiseur (représentant la variation du cours de l'actif boursier sur lequel est assis l'option) est une commande supposée bornée par l'hypothèse du « modèle de marché à intervalles ». Compte tenu de l'approche par commande robuste utilisée, la commande bornée du maximiseur peut être vue comme un aléa contre le lequel le minimiseur cherche à garantir une valeur.
- ➔ Le coût terminal (la cible) et le critère sont convexes ou discontinus selon que l'option étudiée est respectivement une option dite « vanille » ou « digitale ».

Comme dans tout jeu particulier, une des difficultés est de s'accommoder des hypothèses qui nous sont imposées par la nature même du jeu. Pour les options digitales dont l'étude constitue le cœur de la thèse, le jeu différentiel étudié cumule ainsi les difficultés puisque nous devons résoudre un jeu minimax à commande impulsionnelle et à critère discontinu.

En ce qui concerne le jeu en temps discret \mathcal{G}^h , il provient d'un échantillonnage exact du modèle de marché en temps continu avec une contrainte sur les transactions admissibles du trader (ces dernières ne peuvent intervenir qu'à des instants multiples du pas d'échantillonnage h que nous fixons).

L'accent de cette thèse sera davantage mis sur la résolution concrète de ce jeu particulier que sur la théorie financière, ou que sur une théorie mathématique générale des jeux différentiels à commande impulsionnelle et à critère discontinu.

Contributions

La contribution principale de cette thèse réside dans la résolution du jeu minimax différentiel \mathcal{G} en dimension 4, pour une option digitale, par une analyse géométrique des trajectoires extrémales et singulières de ce jeu qualitatif impulsionnel à cible unique à T (chapitre 4) à l'aide d'outils de la théorie d'Isaacs-Breakwell et du concept de solution de viscosité. La solution obtenue s'avère riche en variétés singulières de codimension 2 puisqu'elle exhibe une dispersion, des variétés équivoques, et une variété focale. La solution s'avère beaucoup plus riche en singularités dans le cas d'une option digitale (chapitre 4) que d'une option vanille (chapitre 3) en raison de la singularité d'une nappe émergente par rapport à la commande du cours de l'actif.

La résolution s'avère par ailleurs originale par la présence de différents raccordements, à savoir le raccordement d'une nappe de saut sur une nappe émergente (variété équivoque de dimension 2) ou l'intersection de deux nappes de saut entre elles (variété focale de dimension 2). Une généralisation de la construction d'une variété équivoque, pour notre jeu, est d'ailleurs développée dans le paragraphe 3.7. Pour chacun des deux types d'options étudiées, deux nappes émergentes différentes apparaissent dans la solution (liées chacune à une commande « optimale » différente du cours de l'actif). Dans le cas des options vanilles, les deux nappes émergentes sont régulières, alors que pour les options digitales, l'une d'elles se trouve singulière en la commande du marché. Notons que, à notre connaissance, ce jeu est le premier jeu différentiel exhibant une variété focale de dimension supérieure à 1 résolu dans la littérature. Cette application a d'ailleurs permis de mieux comprendre les variétés focales de dimension supérieure à 1, et a indirectement initié la généralisation de la théorie des variétés focales de dimension $n > 1$ développée dans [MB05].

Une autre contribution réside dans le théorème de convergence de la Valeur du jeu multi-étages \mathcal{G}^h vers celle du jeu différentiel \mathcal{G} , tant pour les options vanilles que digitales. Toutefois ce résultat est toutefois sous la conjecture de l'unicité de la solution de viscosité (discontinue dans le cas des options digitales) d'une inéquation quasi variationnelle dégénérée de type Isaacs associée au jeu \mathcal{G} .

Du point de vue des techniques financières, la résolution de notre jeu aboutit à une formule de représentation de la Valeur du jeu ainsi qu'à un algorithme rapide et applicable en pratique, donnant conjointement la prime et la stratégie de transaction préconisées, pour notre problème d'évaluation d'options en présence de coûts de transaction.

Plan de la thèse

Cette thèse s'organise autour de sept chapitres (sans compter le chapitre consacré aux perspectives).

Dans le **chapitre 1** nous commençons par dresser un bref historique du problème d'évaluation d'options afin de dégager les principes fondamentaux sur lesquels nous nous appuyerons pour modéliser ce même problème, à la fois en temps continu et en temps discret, avec le même modèle de marché à intervalles. Nous justifions et présentons ensuite la dynamique de marché et de portefeuille utilisée. Nous montrons enfin comment, en temps continu et en temps discret, une approche par commande robuste du problème d'évaluation d'options avec ce « modèle de marché à intervalles » conduit à un jeu minimax comprenant un contrôle impulsionnel et un coût terminal qui est convexe dans le cas des options « vanilles » et discontinu dans le cas des options « digitales ». Nous donnerons également un résultat préliminaire (paragraphe 1.6) et les valeurs par défauts des différents paramètres que nous utiliserons pour les applications et expériences numériques, sauf mentions contraires (paragraphe 1.7).

Le **chapitre 2** est consacré à la présentation des outils que nous utiliserons pour résoudre notre jeu minimax (c'est-à-dire déterminer sa Valeur et les stratégies optimales) modélisé dans le chapitre 1. Pour des raisons historiques, nous parlerons dans ce chapitre d'une classe plus générale de jeux, à savoir les jeux à deux joueurs et à somme nulle. Dans une première partie du chapitre, nous allons introduire les notions de base de jeu dynamique à deux joueurs et à somme nulle (définition, bref historique, notion de jeu qualitatif et quantitatif, stratégies des deux joueurs, Valeur du jeu). Nous introduirons dans une seconde partie différents outils de la théorie des jeux dynamiques à deux joueurs et à somme nulle (équation d'Isaacs, programmation dynamique, semi-perméabilité, solution de viscosité) que nous appliquerons dans les prochains chapitres à notre jeu minimax. Enfin, dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous rappelons un résultat d'équivalence entre un jeu quantitatif à horizon fini fixé en dimension n et un jeu qualitatif unique en dimension $n + 1$ caractérisant l'ensemble des états capturables pour une cible unique.

Pour la résolution du jeu différentiel \mathcal{G} , nous utilisons tout d'abord une analyse géométrique en dimension 4 des trajectoires extrémales et singulières par la méthode du jeu (impulsionnel \mathcal{G}) qualitatif à cible unique à T , avec des outils géométriques de la théorie d'Isaacs-Breakwell (jeu qualitatif, semi-perméabilité). Cette approche nous permet de gérer de manière directe et simple les sauts (impulsions), qui correspondent simplement à des trajectoires particulières. Cette étude est faite au **chapitre 3** pour

une option vanille et au **chapitre 4** pour une option digitale. Dans le cas d'une option digitale la discontinuité rend l'étude beaucoup plus délicate. La raison pour laquelle nous commençons par présenter la résolution pour une option vanille est que cette étude nous permet d'introduire un grand nombre de notations et de propriétés qui serviront à l'étude d'une option digitale par la méthode du jeu qualitatif, dans le chapitre 4 qui constitue le cœur de la thèse. L'étude d'une option digitale, qui s'avère plus délicate et plus riche en singularités pourra par ce biais être condensée. La solution conduira à de nombreuses singularités dans le champ des trajectoires et aboutira à une formule de représentation de la fonction Valeur. Dans ces deux chapitres, nous donnerons régulièrement des interprétations financières des résultats obtenus. Ces interprétations financières, qui prennent l'apparence de remarques, sont facultatives et peuvent donc être lues (ou non) à la guise du lecteur.

En raison de la richesse de la solution obtenue dans l'étude du jeu qualitatif (approche géométrique), il est difficile d'être convaincu qu'aucune région de l'espace d'état n'a été omise et qu'aucune difficulté n'a été négligée. C'est pourquoi nous utiliserons également dans le **chapitre 5** une vérification complémentaire, plus analytique et plus classique, qui consiste à exhiber à l'aide d'une formule de représentation une fonction Valeur candidate (celle trouvée par l'approche du jeu qualitatif) et à montrer qu'elle est solution de viscosité de l'équation d'Isaacs (en réalité de la forme différentielle d'une inégalité quasi-variationnelle (DIQV) compte tenu du contrôle impulsif [Ben82]). Cette étude n'est pas une seconde approche mais une vérification, car celle-ci utilise une conjecture ainsi qu'une propriété obtenue lors de l'approche géométrique du jeu qualitatif. La conjecture concerne l'unicité de la solution de viscosité qui n'a pu être prouvée en raison de l'absence d'un théorème de comparaison, même dans le cas des options vanilles où la Valeur reste convexe. A plus forte raison, l'unicité n'est pas prouvée pour les options digitales pour lesquelles la fonction Valeur est discontinue, puisqu'il nous manque en plus, d'un point de vue théorique, un théorème d'unicité dans le cas de solutions de viscosité discontinues.

Le **chapitre 6** sera consacré dans sa première partie à la résolution du jeu multi-étages \mathcal{G}^h par le biais d'un algorithme de programmation dynamique classique en temps rétrograde. Cet algorithme aboutit à une formule de représentation de la Valeur, dont la forme est assez similaire à celle de la solution du jeu différentiel \mathcal{G} (elle s'avère être une version discrète de la formule de représentation de la Valeur du jeu \mathcal{G} en temps continu). Toutefois, dans le cas d'une option digitale, la formule de représentation a été obtenue moyennant une conjecture vérifiée numériquement en annexe. Nous verrons qu'il découle de la formule de représentation un algorithme rapide applicable en pratique. Dans une seconde partie, nous montrerons un théorème de convergence de manière monotone décroissante de la Valeur du jeu \mathcal{G}^h vers celle du jeu problème en temps continu lorsque le pas de temps h tend vers 0, sans changer de modèle d'actif au fur et à mesure que l'on réduit le pas de temps. Cette convergence s'avérera uniforme sur tout compact dans le cas des options vanilles et seulement simple dans le cas des options digitales en raison de la discontinuité. Le caractère monotone décroissant s'explique par le fait que l'ensemble des commandes admissibles du minimiseur est de moins en moins restrictif lorsque le pas de temps diminue (nous considérerons une division dyadique de sorte que les instants d'échantillonnage soient un sur-ensemble d'un pas sur l'autre). Compte tenu du théorème de convergence, il en découle que l'algorithme rapide en temps discret fournit une bonne approximation de la solution (prime et stratégie) en temps continu.

Nous dresserons ensuite une **conclusion générale (sur le plan mathématique)**. Toutefois ce problème a pour origine un problème de mathématiques financières. Il nous apparaît alors naturel (tout comme il nous a paru naturel de donner des interprétations financières dans le corps du texte) de nous poser la question suivante : « Notre théorie est-elle applicable en pratique ? ».

Pour tenter d'apporter des éléments de réponse, nous développons dans le **chapitre 7** une analyse critique de la solution du point de vue financier, comprenant en particulier : une étude de la robustesse du modèle de marché à l'égard de son hypothèse (qui peut sembler non réaliste), une comparaison sur un plan mathématique avec la théorie de F.Black et M.Scholes, une présentation des motivations et limites de notre modèle. Nous profiterons de ce chapitre pour exposer des courbes de primes et constater qu'elles ressemblent à celles obtenues avec la théorie de F.Black et M.Scholes. Nous pourrions ainsi formuler une **conclusion sur le plan des techniques financières**.

Cette thèse laisse quelques questions ouvertes (conjectures) et élargit les perspectives d'études. Nous terminons celle-ci en amorçant **quelques perspectives (chapitre 8)** d'études sur l'aspect mathématique du jeu différentiel et multi-étages étudié (extension à des coûts de transaction affines, modèle avec un délai égal à un pas de temps, résolution du jeu pour des options encore plus complexes qu'une option digitale du point de vue mathématiques, extension aux options américaines), mais également des perspectives sur certains aspects des techniques financières (en particulier la calibration du modèle). Pour certaines de ces perspectives, nous donnons quelques ébauches d'études et nos intuitions.

Chapitre 1

La modélisation

Le but de cette thèse est de résoudre un jeu minimax à horizon fini, à commande impulsionnelle et à critère convexe ou discontinu, issu de l'une des principales problématiques des mathématiques financières, à savoir l'évaluation d'options européennes. Ce jeu ne présentant d'intérêt que par son origine dans un problème de finance, nous commençons par présenter dans ce chapitre la modélisation de ce dernier. Cette modélisation, qui utilise un nouveau modèle de marché appelé « modèle de marché à intervalles », présente la particularité d'abandonner les probabilités au profit d'une approche par commande robuste sur un ensemble de trajectoires de cours possibles. Nous allons dans un premier temps introduire le contexte financier et les principes fondamentaux d'un problème d'évaluation d'options. Nous définirons ensuite la dynamique de marché (le modèle à intervalles) et de portefeuille utilisée. Nous montrerons enfin comment une approche par commande robuste du problème d'évaluation d'options, avec ce « modèle de marché à intervalles », conduit à jeu minimax comprenant un contrôle impulsionnel et un coût terminal pouvant être soit convexe dans le cas des options dites « vanilles », soit discontinu dans le cas des options dites « digitales ». Cette modélisation pourra être faite à la fois en temps continu (jeu différentiel) et à la fois en temps discret (jeu multi-étages).

Il est à noter que cette modélisation du problème d'évaluation d'options en terme de solution d'un jeu minimax existait avant le commencement de cette thèse et a fait en partie l'objet de la publication [Ber05c].

1.1 Le contexte : un problème d'évaluation d'options

Dans ce paragraphe nous allons dresser brièvement un historique des options et du problème d'évaluation d'options, afin de dégager les principes fondamentaux sur lesquels nous nous appuyerons pour modéliser le problème d'évaluation d'options avec le modèle de marché à intervalles.

1.1.1 Préliminaire : définition d'une option « vanille » et du problème d'évaluation d'options.

Afin de comprendre plus facilement l'historique et les principes fondamentaux de l'évaluation d'options, nous donnons une première définition d'une option et du problème d'évaluation d'options, en

prenant pour exemple les options « européennes » de type « vanille », qui font encore à l'heure actuelle partie des produits financiers les plus utilisés.

Définition 1.1.1 Une option européenne de type « vanille » est un produit financier (un contrat) qui, moyennant le paiement d'une « prime » à l'instant initial, donne **le droit et non l'obligation** à son souscripteur d'acheter (s'il s'agit d'une « option d'achat » dite « call vanille ») ou de vendre (pour une « option de vente » dite « put vanille »), une part¹ d'un actif financier (qui peut être, par exemple, une action ou une obligation) à un cours K et à une date future T . Les deux paramètres K et T sont fixés à l'instant initial du contrat.

Le cours K est appelé « prix d'exercice » de l'option ou « strike », et la date de fin du contrat T est appelé « échéance » ou « date d'exercice ». L'actif financier sur lequel est assis le contrat est appelé « actif sous-jacent » ou « actif risqué », et son cours à l'instant $t \in [0, T]$ (où $t = 0$ est l'instant de souscription de l'option), noté $S(t)$, est supposé varier de manière imprédictible. Mentionnons que si cette même option peut être exercée à tout instant précédant l'échéance T (c'est-à-dire durant toute la durée de l'option), on parle d'« option américaine ». Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressé uniquement à l'évaluation d'options européennes².

Intéressons-nous au cas d'un call vanille. Il apparaît de manière évidente que si à l'échéance T le strike K est supérieur à la valeur réelle du cours du sous-jacent $S(T)$ (on dit que le cours finit « hors de la monnaie »), le souscripteur n'a aucun intérêt à exercer l'option, c'est-à-dire à acheter une part d'actif sous-jacent à un cours K supérieur à son cours réel. A l'inverse, si le cours réel $S(T)$ est supérieur au strike K (on dit que le cours finit « dans la monnaie »), l'exercice de l'option permet au souscripteur de réaliser une plus-value (un gain) de $S(T) - K$ (en revendant immédiatement l'action à son cours réel $S(T)$). Ainsi la plus-value réalisée par le souscripteur, mais également le paiement encouru par le vendeur du contrat (l'opérateur boursier appelé communément « trader »), en fonction du cours du sous-jacent $S(T)$ à l'échéance, est repérée par la quantité

$$M(S(T)) = \max\{0, S(T) - K\} . \quad (1.1)$$

Par un raisonnement similaire, mutatis mutandis, nous obtenons pour un « put vanille » (option de vente) le paiement

$$M(S(T)) = \max\{K - S(T), 0\} . \quad (1.2)$$

L'expression du paiement $M(S(T))$ est ainsi propre à l'option considérée. Les paiements respectifs du « call vanille » et du « put vanille » sont représentés sur la figure 1.1.

Propriété 1.1.2 Il est important, pour les études à venir, de remarquer que le paiement d'un call vanille (1.1) présente la propriété d'être convexe, et que celui d'un put vanille (1.2) est convexe et borné par K puisque le cours $S(t)$ de l'actif sous-jacent ne peut pas devenir négatif.

¹Sans perdre en généralité, une option peut être définie comme portant sur une part d'actif. Pour une option portant sur un nombre n de parts d'actif, il suffit de considérer n options identiques.

²Avec notre approche, cela consistera à ne résoudre que des jeux « minimax » à horizon fini fixé T .

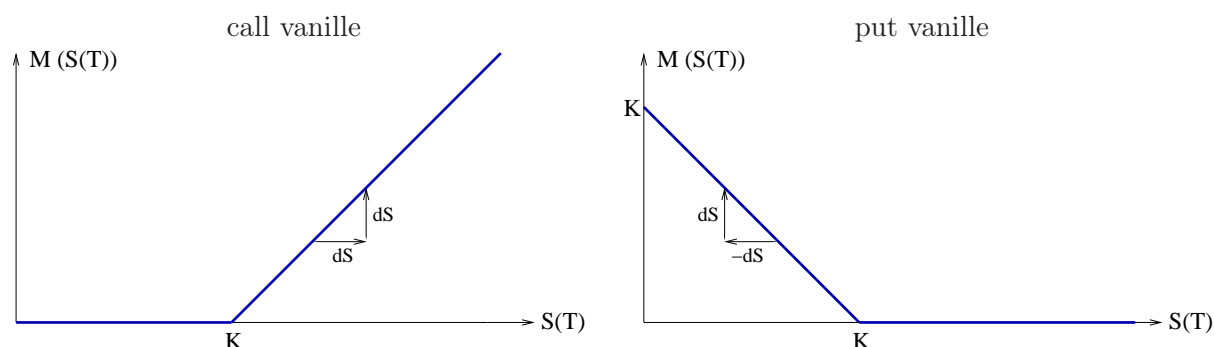


FIG. 1.1 – Paiement des options vanilles.

Puisqu'une option consiste en un droit et non une obligation pour son souscripteur, le paiement $M(S(T))$ présente la propriété d'être positif. C'est pourquoi la souscription d'une option a un prix pour son souscripteur ³.

Définition 1.1.3 *Le problème d'évaluation d'options consiste à déterminer le tarif (appelé « prime » de l'option) auquel le trader peut proposer ce contrat sans perdre d'argent (c'est-à-dire en s'assurant de pouvoir honorer son paiement à l'instant T), tout en étant le plus compétitif possible.*

La prime représente ainsi le montant que doit verser le souscripteur à l'instant initial (à la souscription du contrat). Cette prime, notée $P(S(0))$, est fonction de la valeur du cours $S(0)$ à l'instant initial du contrat, mais également fonction du paiement $M(S(T))$ (donc fonction de l'option considérée), et par extension fonction des paramètres T et K .

1.1.2 Bref historique et principes fondamentaux de l'évaluation d'options

La littérature sur le problème d'évaluation d'options est très abondante. Nous nous inspirons ici des sources [CR85, LL97, Ber00] pour dresser un très bref historique, et dégager les principes fondamentaux de la théorie de l'évaluation d'options.

L'origine des options est très ancienne puisque la première trace relatée d'une option remonte au philosophe et mathématicien Thalès le Milésien (624-547 avant J.C). Le lecteur peut se reporter à [Ber00], p205–206 pour l'anecdote correspondante.

Les premiers courants de pensée sur la théorie financière quantitative moderne remontent, eux, à plus d'un siècle, lorsqu'en 1900 L.Bachelier utilise dans sa thèse [Bac00] le mouvement brownien pour modéliser la dynamique des cours de la bourse de Paris et évaluer la prime d'une option. Ce n'est toutefois qu'au début des années 1970, que la théorie de l'évaluation d'options et les activités de marchés connaissent simultanément un essor et un intérêt considérables.

Le commerce des options s'effectuait depuis des siècles de manière non structurée, ce qui avait pour effet d'engendrer des transactions coûteuses et très difficiles à arranger. La création de marchés d'échanges internationaux destinés au commerce des options a permis à partir de 1973, à des

³Contrairement aux contrats appelés « swap » qui consistent en une obligation pour leur souscripteur.

investisseurs (par exemple des banques, des compagnies d'assurances, des fonds de pension) de faire massivement le commerce des options sur un marché unique et « liquide ».

Définition 1.1.4 *On entend par marché « liquide » un marché dans lequel tout opérateur peut trouver facilement un autre opérateur ayant des intérêts opposés. Quand un opérateur veut acheter (respectivement vendre) un actif au « prix du marché », il trouve toujours un opérateur pour vendre (respectivement acheter). Dans un marché liquide, il n'y a donc pas de bénéfice à l'achat et à la vente (la concurrence y est parfaite), et les transactions y sont rapides et peu coûteuses.*

Dans [CR85], les auteurs expliquent qu'en avril 1973, le premier marché d'échange de titres nominatifs destiné au commerce des options est créé à Chicago : « The Chicago Board Options Exchange ». A l'origine, il permettait de faire le commerce d'options d'achat (« call vanille ») sur 16 actifs courants différents. Depuis cette date, les marchés et les activités de marché se sont alors multipliés, et en l'espace de dix ans le volume et le nombre d'actifs courants échangés a augmenté dans des proportions considérables (16 actifs en 1973 et environ 400 dix ans plus tard). De nouveaux produits financiers ont fait leur apparition sur les marchés, parmi lesquels les options de vente (« put vanille ») en 1977. En France, le MATIF (Marché À Terme International en France) puis le MONEP (Marché des Options Négociables de Paris) ont vu le jour, respectivement en 1985 et en 1987.

Les principes fondamentaux de la théorie d'évaluation d'options

En ce qui concerne la théorie de l'évaluation d'options moderne, les bases ont été mises en place, également en 1973, par F.Black et M.Scholes [BS73] et R.C.Merton [Mer73], lauréats du prix Nobel d'économie le 14 octobre 1997 (F.Black, décédé le 30 août 1995, est cité dans la décision). Pour définir la prime d'une option sur un base objective, le principe fondamental, dû à R.C.Merton [Mer73] (et donc appelé principe fondamental de Merton), s'appuie sur la gestion d'un portefeuille « *dynamique autofinancé* » avec lequel il est possible de « *répliquer l'option* » à l'échéance T , c'est-à-dire d'adopter une politique de transaction de sorte que le portefeuille soit de valeur égale au paiement $M(S(T))$ à l'échéance, et cela quelle que soit l'évolution du cours de l'actif sous-jacent durant la période de l'option. La prime de l'option $P(S(0))$ est alors définie comme la valeur initiale de création d'un tel portefeuille.

Définition 1.1.5 *Un portefeuille est dit « autofinancé » si chacune des transactions s'effectue sans ajout ni retrait de fonds dans le portefeuille. En présence de coûts de transaction, ceux-ci doivent être financés par la revente de certains actifs.*

Le principe fondamental de Merton dérive directement du principe « d'absence d'opportunité d'arbitrage », et permet ainsi d'obtenir une prime unique et cohérente ⁴. Ce principe doit être associé à un modèle de marché pour décrire le « quelle que soit l'évolution du cours de l'actif sous-jacent » sur lequel est assis l'option. Le portefeuille dynamique se compose classiquement à tout instant d'une quantité de deux actifs suivants :

⁴On remarque que toute prime supérieure permettrait au trader de gagner de l'argent à coup sûr (c'est-à-dire créerait une opportunité d'arbitrage), le montant de la différence entre les deux primes pouvant en effet être « mis de côté » en utilisant la même politique de transaction.

- ➔ L'actif sous-jacent sur lequel porte l'option (son cours est $S(t)$).
- ➔ Un actif non risqué déterministe de cours unitaire $R(t)$ (des bons sans risque par exemple), évoluant à un taux d'intérêt ρ strictement positif et fixe dans le temps. Sa variation est donnée par $dR(t) = \rho R(t)dt$.

La théorie de F.Black et M.Scholes utilise un modèle de marché continu et fait la fiction d'une politique de transaction en temps continu. Pour cela, il faut rajouter l'hypothèse (pas très réaliste) d'infinie divisibilité de l'actif sous-jacent pour pouvoir faire varier en temps continu la quantité de chacun des deux actifs, qui s'avère donc ne pas être un nombre entier, mais réel, de parts. Par ailleurs, l'hypothèse d'atomicité est supposée vérifiée.

Définition 1.1.6 *On appelle hypothèse d'atomicité l'hypothèse consistant à dire que le trader n'est pas un agent du cours, c'est-à-dire que ses décisions d'achat et de vente n'influencent pas sur les cours futurs de l'actif sous-jacent.*

L'hypothèse d'atomicité permet de garantir que le cours de l'actif sous-jacent est une variable exogène, donc complètement imprédictible.

Principe fondamental de Merton pour les marchés incomplets

Si la valeur finale du portefeuille est égale au paiement quels que soient les scénarios (les évolutions possibles du cours durant la période de l'option) on parle de « réplication (exacte) » de l'option, de « prix d'équilibre » pour la prime de l'option, et le modèle de marché est dit « complet ». Le principe fondamental de Merton, tel qu'il a été énoncé, suppose que la réplication exacte est possible et ne s'applique ainsi qu'aux marchés complets.

Dans le cas d'un « marché incomplet », il n'est pas possible de répliquer exactement l'option. Dans un problème d'évaluation d'options, on s'intéresse classiquement au point de vue du vendeur (le trader), qui souhaite proposer l'option au meilleur prix (dans un souci de compétitivité) tout en s'assurant de ne pas perdre d'argent, ce qui correspond à avoir à l'échéance T un portefeuille de valeur supérieure ou égale au paiement $M(S(T))$ quelle que soit l'évolution du cours. On parle dans ce cas de « super-réplication » ou de « couverture », et la politique de transaction correspondante est appelée stratégie de couverture. Le principe fondamental de Merton peut s'étendre au modèle de marché incomplet via la définition suivante.

Définition 1.1.7 *(Principe fondamental de Merton pour les marchés incomplets).*

*La prime $P(S(0))$ correspond à la valeur **minimale** de création d'un portefeuille dynamique initial, avec lequel il est possible pour le trader d'adopter une politique de transaction « autofinancée » de sorte qu'à l'échéance T ce portefeuille soit de valeur supérieure ou égale au paiement $M(S(T))$ (assurant ainsi une couverture pour le trader), et cela quelle que soit l'évolution du cours de l'actif sous-jacent durant la période de l'option.*

La prime de l'option obtenue est appelée « prix du vendeur » (en opposition au « prix d'équilibre » dans le cas d'un marché complet). Toutefois, la super-réplication n'est pas incohérente avec l'absence

d'opportunité d'arbitrage (elle signifie juste que le trader ne peut pas répliquer l'option pour tous les scénarios). En effet, il existe nécessairement des scénarios pour lesquels la valeur du portefeuille à l'échéance sera exactement égale au paiement de l'option ⁵, sinon la prime ne serait pas égale à la valeur minimale d'un portefeuille de couverture initial ce qui serait contradictoire avec le principe fondamental de Merton de la définition 1.1.7.

Le modèle de diffusion géométrique et la théorie de F.Black et M.Scholes (BS) [BS73]

F.Black et M.Scholes ont été les premiers à développer une théorie d'évaluation d'options (en temps continu) [BS73] aboutissant à une formule de représentation de la prime de l'option. Cette théorie a été appliquée sur les marchés boursiers dès 1973. La théorie et la formule de BS restent actuellement le paradigme de référence pour l'évaluation d'options. De plus, la théorie de BS est à la fois l'une des plus belles et des plus fécondes réussites scientifiques de la théorie économique, comme en attestent notamment l'article de E.Han Kim et al [HKMZ06] sur les contributions qui ont compté en économie depuis 1970, les différents manuels de théorie financière, et leur prix Nobel d'économie obtenu le 14 octobre 1997 (de manière posthume pour F.Black décédé le 30 août 1995). C'est également l'une des plus notables innovations de la théorie économique, comme le démontre son usage commun par les praticiens, ainsi que l'article de G.Faulhaber et W.Baumol [FB88] qui traite des « produits pratiques » issus de la recherche théorique. Comme le souligne P.Bernstein [Ber00](p231), « le mariage de la théorie et de la pratique a rarement été aussi productif dans le cas des options ». Il considère par ailleurs que l'option est « l'instrument financier universel ».

La théorie de BS [BS73] s'appuie sur le principe de Merton pour définir la prime de l'option de manière unique et cohérente. Pour modéliser les variations du cours de l'actif sous-jacent, la théorie de BS utilise un modèle de marché en temps continu appelé modèle de « diffusion géométrique » ou « modèle de Samuelson ». La valeur de l'actif risqué est la solution de l'équation différentielle stochastique suivante, au sens du calcul stochastique de Itô.

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)) . \quad (1.3)$$

Ce modèle de diffusion géométrique se décompose comme la somme d'une tendance (ou « dérive ») « exponentielle » μdt de variation de l'actif de moyenne μ , et d'un mouvement brownien $\sigma dW(t)$. L'amplitude σ du mouvement brownien est appelée la « volatilité » de l'actif et représente une mesure de la fluctuation de l'actif sous-jacent (de la tendance de l'actif à subir des variations plus ou moins brusques). Cette volatilité est supposée constante ⁶. L'hypothèse faite est donc celle d'une variation lognormale du cours.

Dans la théorie de BS, le modèle de marché utilisé pour modéliser le cours de l'actif sous-jacent est ainsi un modèle de marché probabiliste, qui suit le chemin initié par L.Bachelier. Ce modèle de marché présente la propriété d'être un marché complet conduisant donc à une réplification exacte de l'option.

Notons que les solutions de l'équation (1.3) sont (presque sûrement) à variation quadratique relative égale à $\sigma^2 t$, et non à variation bornée. Le calcul de Itô permet de donner un sens précis au membre de

⁵Donc tels que le trader ne gagne pas d'argent.

⁶Plus récemment des travaux font usage d'une volatilité stochastique ou d'une volatilité variable inconnue. Nous en parlerons très brièvement plus loin dans ce paragraphe.

droite de l'équation (1.3). Avec cette théorie de l'évaluation d'options (modèle de diffusion géométrique et principe fondamental de Merton), BS obtiennent en 1973 une formule permettant de représenter de façon explicite et simple ⁷ les prix des options comme fonction croissante de la volatilité σ [BS73]. Par contre la formule obtenue est indépendante de la dérive μ de l'actif [SSC95, LL97]. Cette formule est toujours celle utilisée communément depuis 1973 par les praticiens sur les marchés financiers. Une des limites de la théorie de BS est de proposer une théorie d'évaluation d'options seulement en temps continu avec un trading en temps continu, donc peu réaliste. Ainsi cette théorie ne permet pas de déterminer de couverture en temps discret.

Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein [CRR79, CR85]

Un modèle de marché non stochastique en temps discret a été proposé en 1979 par J.C.Cox, S.A.Ross, et M.Rubinstein (CRR). La dynamique de ce modèle (qui s'inspire d'un arbre binaire) peut s'écrire :

$$S_{n+1} = (1 + \tau_n)S_n, \quad (1.4)$$

où τ_n est une suite à valeurs dans $\{u - 1, d - 1\}$ avec $u > 1$ (« u » pour « up ») et $0 < d < 1$ (« d » pour « down »). Ce modèle fait ainsi l'hypothèse qu'à chaque pas de temps, le cours futur peut prendre seulement deux valeurs (une valeur à la hausse et une valeur à la baisse), ce qui est une hypothèse extrêmement simpliste et peu réaliste. Toutefois, ce modèle n'a aucune prétention à être réaliste (de résoudre un problème d'évaluation d'options et de déterminer le trading en temps discret). Cependant, c'est un modèle de « marché complet », qui permet des calculs explicites simples, et qui approxime le modèle à temps continu de la théorie de BS lorsque le pas de temps tend vers 0. C'est d'ailleurs ce dernier objectif qui a motivé CRR à introduire ce modèle en particulier. En effet, CRR ont utilisé élégamment la propriété pour un arbre binaire de converger vers un mouvement brownien si « le pas d'espace » (les deux pas $u - 1$ et $d - 1$ dans le cadre de ce modèle) converge vers 0 comme la racine carrée du pas de temps. La convergence (CRR→BS) s'établit sous la condition de changer de modèle d'actif chaque fois que l'on réduit le pas de temps. En effet, l'excursion de S permise par le modèle de CRR dans un intervalle de temps fixe croît au fur et à mesure que le pas de temps diminue, et tend vers $l'∞$ quand le pas tend vers 0. Ceci permet d'approximer les trajectoires à variation non bornée du modèle de Samuelson.

Quelques développements récents

Depuis 1973, le paysage financier n'a cessé d'évoluer avec l'apparition de nouveaux marchés et de nouveaux produits. Parmi les nouvelles options (européennes) apparues sur le marché, mentionnons :

➔ les options de type « straddle » qui correspondent à la réunion d'un call vanille et d'un put vanille portant sur le même actif sous-jacent de cours $S(t)$, avec les mêmes paramètres K , T , et généralement

⁷Pour preuve, cette formule qui fait intervenir la loi normale centrée réduite peut être calculée numériquement à l'aide d'un simple « tableau de type excel ».

$K = S(0)$. Le paiement d'une telle option est ainsi

$$M(S(T)) = \max\{K - S(T), S(T) - K\} .$$

Donc, dans le cas où $K = S(0)$, plus la variation relative du cours de l'actif entre le début et l'échéance de l'option est importante, plus cette option rapporte un gain important à son souscripteur.

→ les options « digitales » de type « cash or nothing », qui rapportent un gain fixe D à leur souscripteur lorsque le cours $S(T)$ de l'actif sous-jacent à l'échéance est, supérieur au seuil K pour un call et inférieur à K pour un put. Dans le cas contraire, cette option ne rapporte rien à son souscripteur. Ainsi, le paiement $M(S(T))$ d'une telle option est un échelon de seuil K et d'amplitude D , que l'on choisira s.c.s⁸, c'est-à-dire (en notant Υ la fonction d'Heaviside) :

$$M(S) = D \cdot \Upsilon(S - K) = \begin{cases} 0 & \text{si } S < K \\ D & \text{si } S \geq K \end{cases} \quad \text{pour un call digital,} \quad (1.5)$$

$$M(S) = D \cdot \Upsilon(K - S) = \begin{cases} D & \text{si } S \leq K \\ 0 & \text{si } S < K \end{cases} \quad \text{pour un put digital.} \quad (1.6)$$

Ces paiements sont représentés sur la figure 1.2. Par abus de langage nous appelons option digitale, une option digitale de type « cash or nothing ».

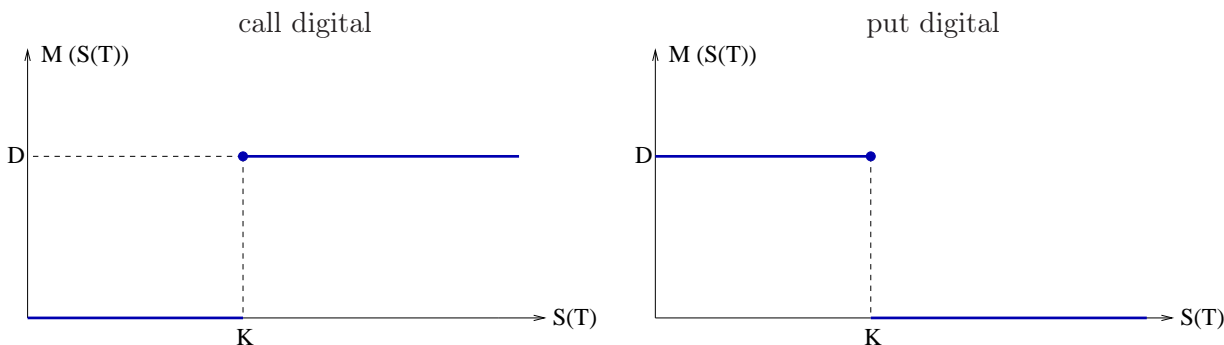


FIG. 1.2 – Paiement des options digitales

Propriété 1.1.8 *Il est important de remarquer que le paiement d'une option digitale ((1.5) pour un call et (1.6) pour un put) est discontinu en $S(T) = K$. Avec notre approche, la perte de la convexité d'une part, et la discontinuité d'autre part, vont rendre l'étude d'une option digitale (cœur de la thèse) beaucoup plus compliquée que celle d'une option vanille.*

Remarque 1.1.1 *On peut, sans perdre en généralité, normaliser l'étude d'une option digitale pour un gain $D = 1$ et multiplier ensuite la prime par D . Néanmoins nous préférons utiliser la quantité D afin*

⁸Ce choix sera expliqué bien ultérieurement, dans la propriété 4.3.1.

de nous rappeler qu'elle a une dimension (euro), la quantité sans dimension étant ici D/K .

➔ Les options « digitales » de type « asset or nothing » qui rapportent une action (c'est-à-dire un gain $S(T)$) à leur souscripteur lorsque le cours $S(T)$ de l'actif sous-jacent à l'échéance est supérieur au seuil K pour un call et inférieur à K pour un put. Dans le cas contraire, cette option ne rapporte rien. L'étude d'une telle option sera évoquée dans les perspectives (paragraphe 8.4).

➔ Les options « arc-en-ciel » qui sont simultanément assises sur plusieurs actifs sous-jacents.

➔ les options à barrières « scale-up » ou « scale-down », de type « knock-in-option » ou « knock-out-option », dont le paiement à l'échéance est effectif sous la condition que l'actif sous-jacent franchisse (dans le cas d'une option de type « knock-in-option ») ou ne franchisse pas (dans le cas d'une option de type « knock-out-option ») un certain seuil. Dans le cas contraire l'option est désactivée. Ce seuil est un seuil supérieur (respectivement inférieur) pour une option à barrière « scale-up » (respectivement « scale-down »).

➔ les options asiatiques dont le paiement découle du cours moyen de l'actif sous-jacent relevé à certaines dates fixées à l'avance pendant la durée de l'option.

Bien que certaines d'entre elles, comme les options digitales par exemple, ne consistent pas en un droit d'achat ou de vente pour son souscripteur, elles portent toutefois le nom d'options. On peut également mentionner qu'il existe même des options fondées sur des actifs non cotés en bourse, c'est-à-dire pour lesquels il n'y a pas de marché, comme par exemple les options climatiques ou les options réelles (les options réelles sont des options qui dépendent du chiffre d'affaires d'une société).

La finance quantitative a, elle aussi, continué à se développer et à se diversifier grâce notamment aux progrès technologiques et à une palette d'outils théoriques des mathématiques appliquées.

Parmi les études ayant pour point de départ un problème d'évaluation d'options, on peut mentionner les problèmes inverses que sont l'estimation et la calibration de modèle, qui sont proches des préoccupations des praticiens⁹. En ce qui concerne les extensions du modèle de diffusion géométrique (dynamique (1.3)), et par incidence de la théorie de BS, nous pouvons mentionner parmi les nombreux exemples :

➔ L'utilisation d'une volatilité stochastique (On peut se référer à la bibliographie dressée dans la thèse de N.Rousseau [Rou07], mais également aux références citées dans la thèse de S.Crepey [Cre00] (page 162)). De telles volatilités ont également été utilisées en temps discret dans les modèles GARCH [BHBM06].

➔ L'utilisation d'une volatilité variable $\sigma(t)$ qui présente la propriété de toujours préserver la complétude du marché (voir [Dup94]), ou d'une nappe de volatilité $\sigma(S, t)$ fonction du temps et de la valeur du cours (équation de Dupire [Dup94]).

⁹Le problème de calibration du « modèle de marché à intervalles » sera évoqué dans le paragraphe 8.6.

- ➔ L'utilisation d'une volatilité variable inconnue à l'intérieur d'un ensemble donnée de volatilités possibles (« uncertain volatility model » ou « worst case volatility »). L'approche utilisée est alors une approche du pire des cas.
- ➔ L'introduction de sauts dans la dynamique du cours déjà suggéré par R.C.Merton [Mer76] et envisagé par CRR [CRR79]. Cette extension a été abondamment étudiée par la suite.
- ➔ L'utilisation des processus de Levy qui sont des processus plus généraux incluant le mouvement brownien, mais également des processus chaotiques ou fractals.

1.2 Le « modèle de marché à intervalles »

Si l'on estime, à l'instar de la thèse développée par A. Rubinstein [Rub06] dans son adresse présidentielle à la société d'économétrie, que l'économiste théoricien a pour objectif de créer des modèles destinés à « raconter des fables », il nous semble permis d'imaginer une autre histoire (un autre modèle de marché), et de ce fait une nouvelle théorie d'évaluation d'options.

Dans ce paragraphe, nous allons présenter le nouveau modèle de marché utilisé, appelé « modèle de marché à intervalles », à partir duquel nous pourrions développer une théorie d'évaluation qui se veut complémentaire de celle de la théorie de BS, au sens où elle permet, au prix de certaines limites, de prendre en compte les coûts de transaction et de développer en parallèle une théorie d'évaluation d'options en temps discret et en temps continu sans changer de modèle de marché.

1.2.1 Les hypothèses communes avec la théorie de F.Black et M.Scholes

Notre approche suit la même logique (les mêmes principes fondamentaux) que la théorie de BS, associant à un modèle de marché le principe de Merton pour définir la prime comme la valeur initiale d'un portefeuille dynamique autofinancé. Tout comme dans la théorie de F.Black et M.Scholes, nous supposons que :

- ➔ Le marché est liquide (définition 1.1.4).
- ➔ L'hypothèse d'atomicité (définition 1.1.6) est vérifiée, afin de préserver le caractère imprédictible du cours de l'actif sous-jacent.
- ➔ Les actifs sont infiniment divisibles.
- ➔ Le portefeuille dynamique est composé de deux actifs, à savoir l'actif sous-jacent sur lequel porte l'option et un actif non risqué (bons sans risque), et la gestion du portefeuille se fait à l'aide d'une stratégie de transaction autofinancée (définition 1.1.5) en présence de coûts de transaction.
- ➔ La prime de l'option est définie en accord avec le principe fondamental de Merton, assurant ainsi la couverture et garantissant l'absence d'opportunité d'arbitrage. Cependant dans notre terminologie (portefeuille de couverture et stratégies, autofinancées), on ne pourra pas répliquer l'option mais seulement obtenir une super-réplication. Ainsi notre modèle de marché se trouvera être un modèle de marché incomplet, et le principe fondamental de Merton prend la forme de la définition 1.1.7.

1.2.2 L'hypothèse du modèle de marché à intervalles

La particularité du modèle de marché à intervalles consiste à décrire le modèle de marché comme un ensemble de trajectoires de prix $t \mapsto S(t)$ possibles. Plus précisément ce modèle fait l'hypothèse que le taux de variation relatif du cours de l'actif sous-jacent $t \mapsto \tilde{\tau}(t)$, bien qu'il soit imprédictible, est borné par deux bornes de variation relative $\tilde{\tau}^- < 0$ et $\tilde{\tau}^+ > 0$ connues et fixes dans le temps ¹⁰. Cela nous conduit à la définition suivante :

Définition 1.2.1 : *Un modèle de marché à intervalles est caractérisé par deux nombres $\tilde{\tau}^- < 0$ et $\tilde{\tau}^+ > 0$, comme l'ensemble $\tilde{\Psi}$ des trajectoires de prix $t \mapsto S(t)$ absolument continues suivant :*

$$\tilde{\Psi} = \left\{ S(\cdot) \mid \forall t_1, t_2 \in [0, T] \quad e^{\tilde{\tau}^-(t_2-t_1)} \leq \frac{S(t_2)}{S(t_1)} \leq e^{\tilde{\tau}^+(t_2-t_1)} \right\}. \quad (1.7)$$

Nous n'avons pas besoin de munir cet ensemble (1.7) d'une quelconque mesure de probabilité, en raison de l'approche que nous utiliserons, à savoir une approche par commande robuste sur l'ensemble des trajectoires de prix possibles (1.7).

Par ailleurs il découlera, de la définition 1.2.1, à la fois un énoncé (un modèle de marché) en temps continu et en temps discret, suivant que l'hypothèse (1.40) sera énoncée respectivement en terme d'équation différentielle (1.8) ou d'équation de récurrence (1.40).

1.2.3 Historique du modèle de marché à intervalles

Définition 1.2.2 *Nous entendons par « modèle de marché à intervalles » tout modèle décrivant le cours de l'actif sous-jacent comme un continuum de valeurs possibles entre deux bornes, qu'il soit stochastique ou non.*

Avant de dresser un historique du modèle de marché à intervalles, mentionnons que W.M.McEneaney [McE97] a été le premier, pour un problème d'évaluation d'options en temps continu, à remplacer l'approche stochastique par une approche par commande robuste, reformulant le problème d'évaluation d'options en terme de jeu différentiel déterministe, du type employé en commande robuste H_∞ . Il dérive alors la stratégie appelée « stop-loss » pour des trajectoires à variation bornée. Il retrouve la théorie de F.Black et M.Scholes, mais cela est fait au prix d'une modification artificielle du modèle de portefeuille, sans autre justification que de retrouver le calcul de Itô et l'EDP de la théorie de BS. Une approche similaire en terme de commande robuste (conduisant à un jeu minimax) a été développée par G.J.Olsder [Ols00], bien que il ne s'agisse que d'une analyse préliminaire exposée par l'auteur.

Le modèle de marché à intervalles a été introduit pratiquement simultanément par V.Kolokol'stov [Kol98], B.Roorda, J.Engwerda et H.Schumacher [RES05b, RES05a] à Tilburg, J.P.Aubin, D.Pujal et P.Saint-Pierre [Puj00, APSP05] à Paris Dauphine, et P.Bernhard [Ber03, Ber05c] à Sophia Antipolis. Les membres de l'équipe de Tilburg sont les inventeurs du nom « modèle à intervalles » que nous utilisons. Le modèle de marché à intervalles est un modèle de marché incomplet, menant à une

¹⁰Les différentes variables sont notées avec un « tilde » de manière à réserver la notation sans le « tilde » à une valeur actualisée (à venir).

couverture en terme de super-réplication, et à une gamme de prix dans le cas d'une approche stochastique [Kol98, Kol01, RES05b, RES05a], ou à un prix du vendeur ¹¹ dans le cas d'une approche non stochastique [Puj00, APSP05, BEFT06, Ber05c, Ber05b, Ber05a, BEFT07, TBO06]

V. Kolokol'tsov [Kol98, Kol01] utilise un modèle de marché probabiliste exclusivement en temps discret. Son but est de considérer des options « arc-en-ciel », c'est-à-dire portant sur plusieurs actifs sous-jacents et, comme dans la théorie de CRR, de faire tendre le pas d'espace vers 0 comme la racine carrée du pas de temps pour retrouver l'équivalent de la solution de la théorie de BS sur les options arc-en-ciel. Comme dans l'article [Ber03] de P. Bernhard, V. Kolokol'tsov [Kol98] note la coïncidence de la prime avec celle de CRR lorsque l'option est convexe (voir la propriété 6.1.4 dans ce manuscrit).

B. Roorda, J. Engwerda et H. Schumacher [RES05b, RES05a] partagent la même définition 1.2.1 concernant le modèle de marché, à savoir un ensemble de trajectoires de prix possibles. Le point de vue qu'ils utilisent est assez proche de la commande robuste. Mais à la différence de notre théorie, ils munissent cet ensemble d'une loi de probabilité.

Dans [Puj00, APSP05], les auteurs ont considéré un modèle de marché similaire au nôtre, avec les mêmes motivations, à savoir développer une théorie d'évaluation d'options. Leur modèle de marché est une version plus générale du nôtre puisqu'il couvre le cas des options « arc-en-ciel ». Ils adoptent également une approche par commande robuste (qu'ils appellent « approche tychastique »), et les outils utilisés par ces auteurs utilisent le concept de viabilité. Ces outils les obligent à développer une théorie exclusivement en temps continu. Bien que les outils utilisés soient différents des nôtres, la théorie en temps continu développée dans [Puj00, APSP05] est assez similaire à la nôtre. En particulier, P. Saint-Pierre [SP04] obtient un algorithme rapide approximant la solution du problème en temps continu, et présentant quelques similitudes avec notre algorithme rapide ¹² basé sur un théorème de représentation de la fonction Valeur. Cependant ces auteurs imposent une contrainte supplémentaire consistant à mettre une borne sur le débit des transactions, interdisant donc à la commande du trader de contenir des impulsions. Compte tenu de cette contrainte, ils obtiennent une prime supérieure à la nôtre en temps continu, et cette restriction rend toute comparaison difficile à faire. La raison de cette contrainte est purement technique. Elle leur permet d'obtenir l'existence et l'unicité de la solution de viscosité de l'équation d'Isaacs associée à leur jeu.

1.2.4 Motivations à l'introduction du modèle de marché à intervalles

Dans le chapitre 7 sera fait une discussion approfondie sur les motivations (paragraphe 7.3.2) et sur les limites (paragraphe 7.3.1) de notre théorie, ainsi que sur des liens indirects entre notre théorie d'évaluation d'options et la théorie de BS (paragraphe 7.2.4). Dans ce paragraphe, nous nous contentons d'informer le lecteur sur nos principales motivations. Comme nous l'avons annoncé au début du paragraphe 1.2, nos motivations consistent à chercher à :

- ➔ développer en parallèle une théorie d'évaluation d'options en temps continu et en temps discret, tout en conservant le même modèle de marché. Il en résultera notamment un théorème de

¹¹À savoir le plus bas prix auquel le trader peut proposer le contrat tout en s'assurant de ne pas subir de perte dans la mesure où la variation du cours ne viole pas l'hypothèse du modèle. Il est à noter que le prix du vendeur coïncide avec la borne supérieure de la gamme de prix obtenue avec une approche stochastique.

¹²Présenté dans le paragraphe 6.2.

convergence de la solution du problème en temps discret vers celle du problème en temps continu lorsque le pas de temps tend vers 0 (ce théorème de convergence fera l'objet du paragraphe 6.3).

⇒ développer une théorie en présence de coûts de transactions. Dans notre théorie, les coûts de transactions seront directement pris en compte dans l'équation dite d'« autofinancement » du portefeuille (l'équation (1.12) à venir).

1.3 Modélisation du problème d'évaluation d'options en temps continu

Dans le paragraphe 1.2, nous avons présenté le modèle de marché à partir duquel nous allons développer en parallèle une théorie d'évaluation d'options en temps continu et en temps discret. Dans ce paragraphe, nous allons présenter la modélisation du problème en temps continu avant de développer dans le paragraphe suivant celle en temps discret.

1.3.1 Modèle de marché

La particularité du modèle a été présentée dans le paragraphe 1.2.2 (définition 1.2.1). En temps continu, il découle de (1.7) que $t \mapsto S(t)$ est absolument continue, donc presque partout dérivable. Par conséquent, en temps continu, l'hypothèse (1.7) de la définition 1.2.1 peut s'énoncer en terme différentiel sous la forme (1.8) suivante :

Propriété 1.3.1 : *En temps continu, un modèle de marché à intervalles est caractérisé par deux nombres $\tilde{\tau}^- < 0$ et $\tilde{\tau}^+ > 0$, comme l'ensemble des trajectoires de prix $t \mapsto S(t)$ absolument continues qui, partout où elles sont dérivables (c'est-à-dire presque partout) satisfont la relation*

$$\tilde{\tau}^- \leq \tilde{\tau} = \frac{\dot{S}}{S} \leq \tilde{\tau}^+ \quad \text{avec } \tilde{\tau}^- < 0 \text{ et } \tilde{\tau}^+ > 0 . \quad (1.8)$$

Comme $t \mapsto S(t)$ est une fonction absolument continue, il en découle que le taux de variation $t \mapsto \tilde{\tau}(t)$ est une fonction mesurable. Nous noterons l'ensemble des taux de variation $t \mapsto \tilde{\tau}(t)$ admissibles sur $[0, T]$ par

$$\tilde{\Omega} = \{ \tilde{\tau}(\cdot) \text{ mesurables } \mid \forall t \in [0, T], \tilde{\tau}(t) \in [\tilde{\tau}^-, \tilde{\tau}^+] \}. \quad (1.9)$$

Nous avons mentionné que, pour un problème d'évaluation d'options, ce modèle de marché à intervalles fait abstraction de toute mesure de probabilité sur le cours de l'actif sous-jacent. L'approche utilisée sera une approche par commande robuste sur l'ensemble des trajectoires de prix $S(\cdot) \in \tilde{\Psi}$. La variable $\tilde{\tau}(\cdot) \in \tilde{\Omega}$ sera ainsi vue comme un aléa (une perturbation mesurable) sur $[0, T]$ qui représentera la commande du marché.

1.3.2 Modèle de portefeuille

Nous allons à présent constituer un portefeuille que nous allons gérer à l'aide d'une politique de transaction autofinancée en présence de coûts de transaction.

Constitution du portefeuille

On ne s'intéresse qu'à des options portant sur un seul actif sous-jacent. Ainsi comme dans la théorie de F.Black et M.Scholes [BS73], on construit un portefeuille à partir d'un seul actif sous-jacent et d'un actif non risqué déterministe appelé communément « bons sans risque ».

- Les bons sans risque de prix unitaire $R(t)$ évoluent à un taux d'intérêt ρ fixe et connu. On normalisera leur cours en choisissant $R(T) = 1$, et l'évolution du cours des bons sans risque est alors donnée par

$$R(t) = e^{\rho(t-T)}. \quad (1.10)$$

- L'actif sous-jacent est celui sur lequel porte l'option. Son cours $S(t)$ est donc supposé vérifier l'hypothèse (1.8).

On désigne respectivement par $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le nombre de parts d'actif sous-jacent et d'actif non risqué. Les quantités x et y peuvent être négatives, ce qui veut dire qu'il peut être possible (et préférable) de s'endetter en l'un des deux actifs. La valeur du portefeuille est donc, à tout instant $t \in [0, T]$,

$$\tilde{w}(t) = x(t)S(t) + y(t)R(t). \quad (1.11)$$

Autofinancement du portefeuille (définition 1.1.5)

Dans une politique de transaction ¹³ autofinancée (définition 1.1.5), le trader doit ici, pour acheter des parts d'actif sous-jacent (respectivement des bons sans risque), vendre des bons sans risque (respectivement des parts d'actif sous-jacent). En présence de coûts de transaction, toute transaction autofinancée engendre une perte en valeur du portefeuille égale aux coûts de transaction.

Supposons les coûts de transaction proportionnels au montant de la transaction et fixes dans le temps. On désigne par c_0 le taux des coûts de transaction sur les bons sans risque (à l'achat et à la vente) et c_1 celui sur l'actif sous-jacent. Ces taux sont positifs ou nuls et supposés petits (de l'ordre de quelques pour mille) avec généralement $c_0 \leq c_1$ et éventuellement $c_0 = 0$. Notons également par dx la variation du nombre de parts d'actif sous-jacent et dy la variation du nombre de part de bons sans risque. L'équation d'autofinancement du portefeuille s'écrit alors

$$dx(t)S(t) + c_1|dx(t)|S(t) + dy(t)R(t) + c_0|dy(t)|R(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.12)$$

où cette expression peut être prise au sens du calcul de Stieltjes ¹⁴.

Remarque 1.3.1

- a. Comme $c_0 < 1$ et $c_1 < 1$, les variations $dx(t)$ et $dy(t)$ sont de signes contraires, ou toutes les deux nulles en l'absence de transaction. Il est en effet nécessaire de vendre des parts d'un actif si l'on veut acheter des parts de l'autre actif. En l'absence de transaction ($dx = dy = 0$) l'équation d'autofinancement (1.12) devient l'équation triviale $0 = 0$, donc a fortiori satisfaite. C'est pourquoi nous avons pu écrire cette équation pour tout $t \in [0, T]$.

¹³Nous parlerons plus tard de stratégie de transaction.

¹⁴Nous sommes ainsi amené à faire l'hypothèse que x et y sont à variations bornées.

b. L'équation d'autofinancement (1.12) peut se réécrire

$$dx(t)S(t) + dy(t)R(t) = -(c_1|dx(t)|S(t) + c_0|dy(t)|R(t)) .$$

Le second membre de cette dernière équation est négatif ou nul (en l'absence de coûts de transaction $c_0 = c_1 = 0$) et représente la perte en valeur du portefeuille engendrée par "l'éventuelle" transaction à l'instant t .

c. L'équation d'autofinancement est indépendante du type de l'option considérée.

Portefeuille dynamique autofinancé

Définition 1.3.2 Un portefeuille dynamique autofinancé est représenté par une paire de fonctions $(x(\cdot), y(\cdot))$ à variations bornées de $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfaisant (1.12) au sens de Stieltjes. Sa valeur est donnée par la relation (1.11).

Introduisons la notation $\varepsilon = \text{signe}(dx)$, ainsi que les constantes

$$C^\varepsilon = \frac{1 + \varepsilon c_1}{1 - \varepsilon c_0} - 1 = \varepsilon \frac{c_0 + c_1}{1 - \varepsilon c_0} , \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\} . \quad (1.13)$$

Remarquons que puisque $0 \leq c_0 < 1$ et $0 \leq c_1 < 1$, il apparaît que

$$C^+ = \frac{c_0 + c_1}{1 - c_0} > 0 \quad \text{et} \quad C^- = \frac{-(c_0 + c_1)}{1 + c_0} < 0 ,$$

mais également que $|C^+| \geq |C^-|$.

Proposition 1.3.3 Un portefeuille autofinancé est entièrement défini par sa composition initiale $(x(0), y(0))$ et par la fonction du temps $x(\cdot)$ à variations bornées¹⁵. La fonction $y(\cdot)$ et la valeur du portefeuille $\tilde{w}(\cdot)$ peuvent être retrouvées en intégrant respectivement les relations différentielles

$$dy = -\frac{1 + \varepsilon c_1}{1 - \varepsilon c_0} \frac{S}{R} dx = -(1 + C^\varepsilon) \frac{S}{R} dx , \quad (1.14)$$

$$d\tilde{w} = \rho \tilde{w} dt + (\tilde{\tau} - \rho) x S dt - C^\varepsilon S dx . \quad (1.15)$$

Preuve de la proposition 1.3.3 Comme dx et dy sont de signes contraires (remarque 1.3.1.a) avec $\varepsilon = \text{signe}(dx)$, nous avons $|dx| = \varepsilon dx$ et $|dy| = -\varepsilon dy$. Ainsi l'équation d'autofinancement (1.12) devient

$$(1 + \varepsilon c_1) dx S + (1 - \varepsilon c_0) dy R = 0 ,$$

et conduit à la première forme de la relation (1.14). La seconde forme de la relation (1.14) se déduit

¹⁵Ou de manière équivalente par sa composition initiale $(x(0), y(0))$ et par les variations dx au cours du temps du nombre de parts $x(t)$ de sous-jacent.

directement de la notation (1.13). En différenciant les relations (1.8) et (1.10), on en déduit

$$xdS = \tilde{\tau}xSdt, \quad ydR = \rho yRdt = \rho(\tilde{w} - xS)dt.$$

La relation (1.15) s'obtient en remplaçant, dans la dérivée $d\tilde{w} = dxS + xdS + dyR + ydR$ de la valeur du portefeuille (1.11), les termes xdS et $y dR$ par les deux relations précédentes, et dy par la relation (1.14). ■

Remarque 1.3.2 *Le dernier terme $-C^\varepsilon Sdx$ de l'équation (1.15) est toujours négatif ou nul, et caractérise la perte en valeur du portefeuille engendrée par les coûts de transaction. Par ailleurs, en utilisant $\varepsilon = \text{signe}(dx)$ et l'expression (1.14), il est aisé de montrer que l'équation d'autofinancement (1.12) se réécrit naturellement*

$$dxS + dyR = -c_1\varepsilon dxS + c_0\varepsilon dyR = -C^\varepsilon dxS.$$

Commande de transactions $\tilde{\xi}$

Compte tenu de la proposition 1.3.3, la variable $x(\cdot)$ peut représenter la commande de transaction autofinancée du trader. Néanmoins puisqu'il y a des coûts liés à sa variation, nous sommes amenés à considérer sa variation $dx(\cdot)$ comme commande. Afin de travailler en termes de montant, on prendra plutôt comme commande du trader le « flux monétaire » (le débit) $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}$. Nous admettrons (fiction classique et nécessaire dans la théorie de F.Black et M.Scholes) que le trader peut acheter et vendre de l'actif sous-jacent en continu avec un certain débit $\tilde{\xi}$ ($\tilde{\xi} > 0$ pour un achat et $\tilde{\xi} < 0$ pour une vente). Ainsi le débit $\tilde{\xi}$ est donné par la relation

$$Sdx = \tilde{\xi}dt. \tag{1.16}$$

Il n'y a aucune raison de restreindre le débit d'achat ou de vente, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de borne sur $\tilde{\xi}$. Une difficulté apparaît dès lors que le trader pourrait avoir intérêt à utiliser à certains moments un débit de transaction arbitrairement grand. Le défaut de compacité de l'ensemble des $\tilde{\xi}$ autorisés pourrait ainsi nous priver d'un optimum. Pour contourner cette difficulté, nous autorisons la commande du trader à contenir une suite finie d'impulsions¹⁶ (sauts) d'amplitude finie $\{\tilde{\xi}_k\}$ (de signe $\varepsilon_k = +$ pour un achat et $\varepsilon_k = -$ pour une vente), à une suite croissante d'instantanés $\{t_k\}$, les deux suites $\{t_k\}$ et $\{\tilde{\xi}_k\}$ étant toutes deux choisies librement par le trader. Pour une impulsion, nous notons par $x(t_k^+) = \lim_{t \downarrow t_k} x(t)$ (respectivement $\tilde{w}(t_k^+) = \lim_{t \downarrow t_k} \tilde{w}(t)$) la limite à droite de $x(t)$ (respectivement $\tilde{w}(t)$) en $t = t_k$. Une impulsion en $\tilde{\xi}$ est ainsi un saut en (x, \tilde{w}) sans évolution du temps et du prix de

¹⁶Il est à noter que l'approche initiale utilisée dans [Ber03, Ber05c] n'autorisait pas les impulsions. Dans ces deux articles, il était supposé que $\tilde{\xi} \in [-X, X]$, puis on essayait de faire $X \rightarrow \infty$. Par conséquent, à partir de maintenant et jusqu'à la fin du manuscrit, le lecteur sera invité à se reporter aux publications [BEFT06, BEFT07, Ber05b, TBO06, BTD07], et en particulier pour ce chapitre à [BEFT07, Ber05b, BTD07], dans lesquelles la modélisation en présence d'impulsions est la plus détaillée.

l'actif sous-jacent S . Les impulsions sont alors données par les deux relations suivantes équivalentes

$$\begin{aligned} S \frac{dx}{dt} &= \tilde{\xi}_k \delta(t - t_k) \quad \text{au sens des distributions,} \\ x(t_k^+) S &= x(t_k) S + \tilde{\xi}_k \quad (\text{plus commode pour les sauts}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

En utilisant la formule (1.15), on obtient

$$\tilde{w}(t_k^+) = \tilde{w}(t_k) - C^{\varepsilon_k} \tilde{\xi}_k$$

où $\varepsilon_k = \text{signe}(x(t_k^+) - x(t_k)) = \text{signe}(\tilde{\xi}_k)$ étant donné que $\tilde{\xi}_k = (x(t_k^+) - x(t_k))S$ avec $S \geq 0$.

La commande de transaction du trader est donnée par la décision de faire un saut ou non, et par l'amplitude du saut ou le débit de transaction. Il est commode de définir l'ensemble des commandes de transaction admissibles sur $[0, T]$ par

$$\tilde{\Xi} = \left\{ \tilde{\xi}(\cdot) = \tilde{\xi}_c(\cdot) + \sum_k \tilde{\xi}_k \delta(t - t_k), \text{ somme d'une fonction mesurable } \tilde{\xi}_c(\cdot) \in \tilde{\Xi}_c \text{ et d'un nombre fini d'impulsions de Dirac d'amplitude finie } \tilde{\xi}_k \delta(t - t_k) \right\}. \quad (1.18)$$

La définition de l'ensemble des commandes admissibles du trader (1.18) n'autorise qu'un nombre fini de sauts. Ainsi, cette définition suppose que la commande optimale ne possède pas de points d'accumulation de sauts. L'existence d'un optimum dans cette classe de stratégies n'est pas démontrée a priori. Néanmoins, il nous sera possible de vérifier a posteriori¹⁷ que la commande optimale du trader ne possède pas de points d'accumulation de sauts. C'est pourquoi on a pu se permettre, sans perte de généralité, de poser cette contrainte dans l'ensemble des commandes admissibles du trader.

1.3.3 Dynamique de marché et de portefeuille

Actualisation à l'échéance T

Afin d'obtenir une dynamique de marché et de portefeuille indépendante de ρ (c'est-à-dire de se placer dans une économie sans taux d'intérêt), il est commode d'actualiser les différents paramètres à la valeur finale à l'échéance T avec le taux d'intérêt ρ . On pose alors :

$$\begin{aligned} u &= \frac{S}{R} \text{ (avec } u \geq 0), \quad v = \frac{xS}{R}, \quad w = \frac{\tilde{w}}{R}, \\ \tau &= \tilde{\tau} - \rho, \quad \tau^\varepsilon = \tilde{\tau}^\varepsilon - \rho \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}, \quad \xi = \frac{\tilde{\xi}}{R}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Compte tenu de ces relations et de celle sur la valeur du portefeuille (1.11), il est à noter que les variables (S, x, y) sont entièrement déterminées à partir des variables actualisées (u, v, w) à l'aide des relations

$$S = Ru, \quad x = \frac{v}{u}, \quad y = w - v.$$

Remarque 1.3.3

- a. On note que $\tau > 0$ équivaut à $\tilde{\tau} > \rho$. Ainsi en variables actualisées l'actif sous-jacent sera considéré comme croissant si son taux de variation τ est plus grand que le taux d'intérêt des bons

¹⁷Dans la partie stratégie du paragraphe 3.10.2 pour le call vanille, et dans le paragraphe 4.11.3 pour le call digital.

sans risque. En pratique, le taux d'intérêt ρ des bons sans risque est de l'ordre de quelques pour cent par an, tandis que les bornes sur le taux de variation $\tilde{\tau}$ du cours de l'actif sous-jacent sont de l'ordre de \pm quelques pour cent par jour. Par conséquent, on a $\tau \simeq \tilde{\tau}$.

- b. Comme $R(T) = 1$ (voir l'expression (1.10)), on a $u(T) = S(T)$. Ainsi, en variable actualisée le paiement final reste

$$M(u(T)) = M(S(T)) .$$

Remarquons toutefois que dans le cas d'une option américaine (qui ne sera pas étudiée dans le cadre de cette thèse), la fonction de paiement M devient dépendante de ρ , puisque l'exercice de l'option peut avoir lieu à tout instant $t \in [0, T]$.

Dynamique du jeu impulsionnel \mathcal{G}

Avec les variables actualisées (u, v, w) , par différenciation directe des différentes relations (1.19) et en utilisant en outre les relations (1.8), (1.15), et (1.17), la dynamique du marché et du portefeuille autofinancé peut être donnée par $\dot{t} = 1$ et le système d'Équations Différentielles Ordinaires (EDO) non linéaire suivant

$$\dot{u} = \tau u , \tag{1.20}$$

$$\dot{v} = \tau v + \xi_c \quad \text{ou} \quad v(t_k^+) = v(t_k) + \xi_k , \tag{1.21}$$

$$\dot{w} = \tau w - C^{\varepsilon_c} \xi_c \quad \text{ou} \quad w(t_k^+) = w(t_k) - C^{\varepsilon_k} \xi_k . \tag{1.22}$$

On obtient ainsi la dynamique d'un jeu¹⁸ impulsionnel noté \mathcal{G} , se déroulant dans l'intervalle de temps $[0, T]$ avec T un horizon fini fixé pour une option européenne, et dans un espace de dimension 3 plus temps (t, u, v, w) avec deux commandes τ et ξ . Les variables d'état actualisées (u, v, w) représentent respectivement le cours de l'actif sous-jacent u , le montant de l'investissement (la position du portefeuille) en actif sous-jacent v et la valeur totale du portefeuille w . Dans ces équations, t_k^+ désigne la valeurs des grandeurs concernées (v et w) juste après la transaction discrète (impulsion) d'amplitude (montant) ξ_k à l'instant t_k , sans modification du temps ni du cours de l'actif sous-jacent ($u(t_k^+) = u(t_k)$), comme le montre l'équation (1.20). Remarquons que, sans surprise, l'équation (1.22) montre que toute transaction (continue ou impulsionnelle) induit une perte en valeur du portefeuille égale au coût de la transaction. On retrouve ainsi dans cette équation la notion d'autofinancement du portefeuille. La commande $\tau \in \Omega$ qui représente la commande du marché est imprédictible mais par hypothèse bornée avec des bornes connues et fixes dans le temps, étant définie par un modèle de marché à intervalles (propriété 1.3.1).

En variables actualisées $(\tau(\cdot), u(\cdot))$, les ensembles (1.9) et (1.7) se transforment respectivement en

$$\Omega = \{ \tau(\cdot) \text{ mesurables} \mid \forall t \in [0, T], \tau(t) \in [\tau^-, \tau^+] \} , \tag{1.23}$$

et

$$\Psi = \{ u(\cdot) \mid \forall t_1, t_2 \in [0, T] \quad e^{\tau^-(t_2-t_1)} \leq \frac{u(t_2)}{u(t_1)} \leq e^{\tau^+(t_2-t_1)} \} . \tag{1.24}$$

¹⁸L'expression « jeu » prendra son sens au paragraphe 1.3.6.

Enfin la commande Ξ est la commande de transaction du trader qui est autorisée à contenir des impulsions. L'ensemble des stratégies admissibles Ξ correspond à l'ensemble (1.18) en ôtant les « tildes » (par simple passage d'une variable non actualisée à une variable actualisée)

$$\Xi = \left\{ \begin{array}{l} \xi(\cdot) = \xi_c(\cdot) + \sum_k \xi_k \delta(t - t_k) \text{ , somme d'une fonction mesurable } \xi_c(\cdot) \in \Xi_c \text{ et} \\ \text{d'un nombre fini d'impulsions de Dirac d'amplitude finie } \xi_k \delta(t - t_k) \end{array} \right\} . \quad (1.25)$$

Une généralisation de la dynamique du jeu \mathcal{G}

La dynamique (1.20), (1.21), (1.22), du jeu différentiel \mathcal{G} dans l'espace d'état (u, v, w) peut être généralisée à tout type de coûts de transaction caractérisés par une fonction $C(\xi)$, sous le système d'EDO non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{u} = \tau u & u : \text{prix de l'actif boursier,} \\ \dot{v} = \tau v + \xi_c \quad \text{ou} \quad v(t_k^+) = v(t_k^-) + \xi_k & v : \text{valeur de l'investissement en actif boursier,} \\ \dot{w} = \tau w - C(\xi_c) \quad \text{ou} \quad w(t_k^+) = w(t_k^-) - C(\xi_k) & w : \text{valeur du portefeuille de couverture.} \end{array} \right. \quad (1.26)$$

En effet, la dynamique en w montre que toute transaction (continue ou impulsionnelle) engendre une perte en valeur du portefeuille égale aux coûts de transactions $C(\xi)$, ce qui reste bien en accord avec l'autofinancement du portefeuille (la définition 1.1.5). Cependant, au cours de cette thèse, nous n'étudions que le cas où les coûts de transaction sont choisis proportionnels au montant de la transaction $\xi \in \Xi$ (continue ou impulsionnelle)¹⁹, et donc caractérisés par une fonction affine par morceaux

$$C(\xi(t)) = \begin{cases} C^- \xi(t) \text{ si } \xi(t) \leq 0 \text{ avec } C^- < 0 \\ C^+ \xi(t) \text{ si } \xi(t) \geq 0 \text{ avec } C^+ < 0 \end{cases} ,$$

soit

$$C(\xi) = C^\varepsilon \xi \text{ avec } \varepsilon = \text{signe}(\xi), \quad C^- < 0, \quad C^+ > 0 , \quad (1.27)$$

ce qui conduit, pour les variables (v, w) , à la dynamique précédente (1.21), (1.22).

1.3.4 Stratégies non anticipatives

Comme le trader n'a (et ne doit avoir) aucune information sur les cours futurs, nous élaborerons la commande du trader $\xi \in \Xi$ à l'aide d'une stratégie non anticipative $\phi(u(\cdot))$, appelée également V-R-E-K (Varaiya-Roxin-Elliott-Kalton) stratégie [Var67, VL69, Rox63, EK72] (Les V-R-E-K stratégies ont été introduites par E.Roxin et utilisées entre autres par P.Varaiya).

Définition 1.3.4 *Une stratégie non anticipative est une application $\phi : \Psi \mapsto \Xi$ telle que si les restrictions de $u_1(\cdot) \in \Psi$ et $u_2(\cdot) \in \Psi$ à $[0, t]$ coïncident, alors celles de $\phi(u_1)$ et $\phi(u_2)$ coïncident aussi :*

$$\forall (u_1(\cdot), u_2(\cdot)) \in \Psi \times \Psi \quad [u_1(\cdot)|_{(0,t)} = u_2(\cdot)|_{(0,t)}] \Rightarrow [\phi(u_1(\cdot))|_{[0,t]} = \phi(u_2(\cdot))|_{[0,t]}] ,$$

¹⁹Excepté dans le paragraphe 8.2 où nous mentionnerons une perspective portant sur des coûts de transactions affines.

étant convenu que la restriction d'une fonction d'impulsion $\delta(t - t_k)$ à un intervalle fermé ne contenant pas t_k est 0 et que sa restriction à un intervalle fermé contenant t_k est une impulsion.

Remarquons que compte tenu de la dynamique $\dot{u} = \tau u$ (1.20), on peut de manière équivalente définir une commande de transaction non anticipative comme une application $\phi(u(0), \tau(\cdot)) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \mapsto \Xi$ telle que

$$\forall (\tau_1(\cdot), \tau_2(\cdot), u) \in \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \quad [\tau_1(\cdot)|_{(0,t)} = \tau_2(\cdot)|_{(0,t)}] \Rightarrow [\phi(u, \tau_1(\cdot))|_{[0,t]} = \phi(u, \tau_2(\cdot))|_{[0,t]}] .$$

En pratique, nous trouvons les commandes du trader sous la forme d'un saut à l'instant initial suivi d'une loi de rétroaction d'état φ :

$$\varphi : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} : \xi(t) = \varphi(t, u(t), v(t)) . \quad (1.28)$$

Nous ne cherchons pas à décrire toutes les rétroactions d'état admissibles, mais nous nous contentons de vérifier que celle que nous exhibons conduit effectivement à une stratégie non anticipative admissible. Désignons par Φ l'ensemble des stratégies non anticipatives admissibles et par $\varphi \in \Phi_f$ une stratégie en rétroaction d'état qui génère une stratégie non anticipative admissible $\phi \in \Phi$. La transaction $\xi(\cdot)$ est donc donnée par une fonction de la valeur du cours et du montant investi en actif sous-jacent au même instant. Au même titre que les rétroactions d'état, les stratégies non anticipatives supposent que le trader agit avec une connaissance instantanée (c'est-à-dire sans retard) des informations passées, mais sans aucune information sur le futur. Par ce biais, nous évitons le problème du choix de l'ensemble Φ_f tel que les équations (1.21),(1.22) avec $\xi = \varphi(u, v)$ aient une solution, unique de surcroît, quel que soit $(u(0), \tau(\cdot)) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$, ou de manière équivalente quel que soit $u(\cdot) \in \Psi$ du fait de la dynamique $\dot{u} = \tau u$ (1.20).

Propriété 1.3.5 *Dans les modèles probabilistes, pour éviter que le trader puisse inférer du passé une prédiction sur les cours futurs, ce qui serait susceptible de créer des opportunités d'arbitrage, on est amené à prendre pour modèle des cours un processus à accroissements indépendants, et donc nécessairement dont les réalisations sont presque sûrement à variation non bornée. Ici, l'absence de toute structure probabiliste interdit toute inférence, et les stratégies non anticipatives interdisent d'utiliser les cours futurs. C'est pourquoi nous pouvons prendre un modèle de cours à variation bornée sans créer d'opportunité d'arbitrage.*

En ce qui concerne la commande du marché $\tau(\cdot) \in \Omega$, celle-ci doit être une variable exogène dans l'ensemble Ω (être indépendante de la commande ξ du trader), afin de respecter l'hypothèse d'atomicité du cours (définition 1.1.6). La commande τ sera par conséquent choisie en boucle ouverte (BO). Au demeurant, nous serons amenés à chercher un « $\inf_\phi \sup_\tau$ ». Il découle d'une analyse classique en commande minimax que permettre de choisir $\tau(\cdot)$ en boucle fermée (BF) ne changerait rien à ce problème. Dans le paragraphe 2.1.4, nous reviendrons plus en détail sur cette propriété, sous le nom de « lemme de Berkovitz » [Ber71].

1.3.5 Coût terminal et condition de couverture

Dans ce paragraphe, nous allons définir le critère terminal (la dépense totale du trader) qui peut être différent du paiement si l'on considère l'existence de « coûts de clôture » liés au dénouement de la position du trader (transaction finale à l'échéance T). Nous définirons ensuite la condition de couverture (objectif du jeu pour le trader). En accord avec le principe de Merton (définition 1.1.7), nous allons déterminer la prime de l'option comme la valeur minimale d'un portefeuille de couverture initial, c'est-à-dire avec lequel il est possible d'adopter une stratégie de transaction $\phi \in \Phi$ assurant la couverture à l'échéance T . Nous montrerons ensuite qu'avec cette formalisation et une approche par commande robuste sur l'ensemble des variations possibles du cours de l'actif sous-jacent (1.23), il en découle une prime obtenue comme solution d'un jeu minimax.

Rappel : les options étudiées au cours de cette thèse, et leurs paiements respectifs

Comme nous l'avons mentionné dans le bref historique (paragraphe 1.1.2), il existe une gamme importante d'options européennes assises sur un actif sous-jacent. Cependant pour cette thèse nous nous sommes restreint à l'étude de certaines d'entre elles, à savoir les options européennes « vanilles » et « digitales »²⁰. On rappelle que les expressions de leurs paiements respectifs sont données par (1.1) pour un call vanille, (1.2) pour un put vanille, (1.5) pour un call digital et (1.6) pour un put digital. Ces paiements sont représentés sur la figure 1.1 (pour les deux options vanilles) et la figure 1.2 (pour les deux options digitales), et vérifient en outre les propriétés 1.1.2 (pour les options vanilles) et 1.1.8 (pour les options digitales).

Coût terminal

⇒ **Coût de clôture.** On considère que le trader doit clore son portefeuille à l'instant T , ce qui consiste pour lui à acheter ou vendre des actifs selon la nécessité de manière à respecter son contrat (son paiement). Il y a donc des coûts additionnels liés à cet ajustement du portefeuille à l'instant final. On considère que les coûts de clôture restent proportionnels au montant de la transaction mais avec un taux pouvant être inférieur à ceux des coûts de transaction en cours de contrat, car un effet de compensation pourrait les abaisser. En effet le trader peut, par exemple, se servir d'une partie ou de la totalité de l'actif sous-jacent restant à l'instant T pour construire ou approvisionner un autre portefeuille autofinancé destiné à « couvrir » une autre option portant sur le même actif sous-jacent. On note c^- le taux unitaire des coûts de pour une vente et c^+ celui pour un achat, avec

$$C^- \leq c^- \leq 0 \leq c^+ \leq C^+ . \quad (1.29)$$

Ainsi ce choix nous permet aussi de développer une théorie générale sans coûts de clôture si l'on choisit $c^- = c^+ = 0$. Par conséquent, en présence de coûts de clôture, le coût terminal pour le trader peut être différent du paiement²¹ $M(u(T))$ et devient dans ce cas dépendant de $v(T)$. Il sera donné par

²⁰Sous-entendu les options digitales de type « cash or nothing », par abus de langage.

²¹On manipule à présent des variables actualisées. Compte tenu de la remarque 1.3.3.b (la propriété $M(u(T)) = M(S(T))$), on désignera à partir de maintenant le paiement par $M(u(T))$.

$N(u(T), v(T))$ avec

$$N(u, v) = M(u) + m(u, v) , \quad (1.30)$$

où $m(u(T), v(T))$ représente les coûts de clôture qui sont fonction du type du paiement, à savoir « en espèce » ou « en nature » (en actif sous-jacent).

Remarque 1.3.4 *Par abus de langage (pour raccourcir le nom) nous avons appelé la quantité $M(S(T))$ paiement alors qu'il serait plus juste de l'appeler valeur monétaire du paiement, afin de tenir compte du cas où le paiement versé par le trader au souscripteur s'effectuerait en nature plutôt qu'en espèces.*

➔ **Paiement en espèces.** Dans ce cas le trader doit ramener l'investissement en actif sous-jacent à $v(T) = 0$. Ainsi si $v(T) \geq 0$ le trader doit vendre l'actif sous-jacent restant contenu dans son portefeuille, et si $v(T) \leq 0$ il doit combler sa dette en actif sous-jacent. Dans les deux cas, la fonction de coûts de clôture est indépendante de la valeur du cours $u(T)$ à l'instant final et peut s'écrire

$$m(v) = c^\varepsilon(-v) \quad \text{avec } \varepsilon = \text{signe}(-v). \quad (1.31)$$

Notons que pour les options digitales étudiées (sous entendu de type « cash or nothing »), seul un paiement en espèces est possible, étant donné que ces options ne consistent pas en un droit d'acheter ou de vendre pour son souscripteur, mais rapportent un gain fixe D à son souscripteur.

➔ **Paiement en nature.** Prenons l'exemple du call vanille²², dont la fonction de paiement est donnée par (1.1). En cas d'exercice par le souscripteur de l'option, le trader doit posséder dans son portefeuille final exactement une part d'actif sous-jacent qu'il va fournir au souscripteur moyennant la somme de K en espèces, occasionnant le paiement $M(u(T) = u(T) - K$. Ainsi la clôture revient pour le trader à ramener v à $v(T) = u(T)$, c'est-à-dire à effectuer une transaction finale $\xi(T) = u(T) - v(T)$. Cette transaction finale sera respectivement :

➔ un achat si $v(T) \leq u(T)$. Dans ce cas $m(u(T), v(T)) = c^+(u(T) - v(T))$.

➔ une vente si $v(T) \geq u(T)$. Dans ce cas $m(u(T), v(T)) = c^-(u(T) - v(T))$.

En utilisant la notation $\mu = \text{signe}(\xi) = \text{signe}(u - v)$, nous pouvons écrire les coûts de clôture sous une forme unique $m(u(T), v(T))$ avec

$$m(u, v) = c^\mu(u - v) \quad \text{où } \mu = \text{signe}(u - v).$$

Dans le cas où le trader décide de ne pas exercer l'option nous avons $M(u) = 0$, et le trader est contraint de ramener la composition de son portefeuille à $v(T) = 0$, occasionnant des coûts de clôture donnés par la relation (1.31). Ainsi afin de couvrir les deux cas (le souscripteur exerce ou non l'option), on prendra pour un call vanille avec paiement en nature le coût terminal du trader (1.30) sous la forme

$$N(u, v) = \max \{ c^\varepsilon(-v) , u - K + c^\mu(u - v) \} \quad \forall (u, v), \quad \text{avec } \varepsilon = \text{signe}(-v) \text{ et } \mu = \text{signe}(u - v) . \quad (1.32)$$

²²Nous prenons cet exemple, car l'étude d'une telle option (call vanille avec paiement en nature) sera traitée dans le chapitre 3.

Remarque 1.3.5 *En réalité l'investissement en actif sous-jacent pour un call vanille avec paiement en nature vérifiera $v \in [0, u]$, et par conséquent $\mu = +$ et $\varepsilon = -$. Cette propriété est énoncée et démontrée dans la proposition 1.6.1 à venir.*

Remarque 1.3.6 *Remarquons que dans la relation (1.32), les symboles ε et μ désignent chacun le signe de la quantité entre parenthèses qui suit le symbole. Nous utiliserons ce procédé de manière systématique.*

L'ensemble des expressions des coûts de clôture, en espèces et en nature, pour les options vanilles est donné dans l'article [Ber05b].

Propriété 1.3.6 *La fonction de coût terminal (1.30) est*

- \Rightarrow *dans le cas d'une option vanille : convexe en (u, v) en tant que « max » de deux fonctions convexes (caractérisant respectivement le coût terminal en cas d'exercice ou non de l'option), à l'instar de la fonction (1.32) dans le cas d'un call vanille avec paiement en nature.*
- \Rightarrow *dans le cas d'une option digitale : discontinue en $u = K$ (du fait de la discontinuité du paiement $M(u(T))$), mais toujours convexe en v (voir l'expression (1.31)).*

Condition de couverture

En accord avec le principe fondamental de Merton (définition 1.1.7), l'objectif du trader est d'obtenir un portefeuille de valeur final supérieure où égale au coût terminal (1.30) de sorte qu'il puisse, après s'être affranchi des coûts de clôture, honorer son paiement dû au souscripteur sans perdre d'argent. Dans une approche typique par commande robuste (appelée aussi approche en « valeur garantie »), cet objectif doit être réalisé quelle que soit l'évolution du cours $u(t) \in \Psi$ pour $t \in [0, T]$, c'est-à-dire

$$N(u(T), v(T)) - w(T) \leq 0, \forall u(\cdot) \in \Psi .$$

Notons que puisque le trader doit assurer cette condition quelles que soient les trajectoires de prix possibles de l'actif sous-jacent $u(\cdot) \in \Psi$, nous n'avons pas besoin de mesure de probabilités sur l'ensemble des trajectoires de prix possibles Ψ . Compte tenu de la dynamique $\dot{u} = \tau u$, il est important de remarquer que cette condition est équivalente à la condition suivante

$$N(u(T), v(T)) - w(T) \leq 0, \forall (u(0), \tau(\cdot)) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{1.33}$$

avec $\tau(\cdot) \in \Omega$ non probabilisé. La commande du marché $\tau(\cdot) \in \Omega$ choisie en BO peut ainsi être vue par le trader comme une perturbation mesurable bornée sur $[0, T]$ contre laquelle il cherche à se couvrir. On appellera la condition (1.33) « condition de couverture par commande robuste », et une stratégie $\xi(t) = \varphi(t, u(t), v(t))$ est dite une « stratégie de couverture » si elle permet de satisfaire (1.33).

Propriété 1.3.7 *Dans notre théorie d'évaluation d'options, compte tenu du modèle de marché et de l'approche par commande robuste utilisée, on peut se contenter de définir de manière imprécise :*

- ➔ une option par un coût terminal $N(u(T), v(T))$ pour le trader (qui est fonction du paiement $M(u(T))$ à l'échéance T , lui-même fonction du strike K)
- ➔ l'actif sous-jacent sur lequel est assise l'option par sa valeur initiale $u(0)$ et une variation $\tau(\cdot)$ imprédictible entre deux bornes τ^- et τ^+ pour tout $t \in [0, T]$.

1.3.6 Prime de l'option comme solution d'un jeu « minimax » \mathcal{G}

Comme w n'apparaît pas dans les membres de droite de la dynamique (1.22), la dynamique de w s'intègre sur l'intervalle $[0, T]$ (sur toute la durée de l'option) en

$$w(T) - w(0) = \int_0^T (\tau(s)v(s) - C^{\varepsilon_c} \xi_c(s)) ds - \sum_k C^{\varepsilon_k} \xi_k,$$

où le terme \int provient de la partie continue de la dynamique et le terme \sum de la partie impulsionnelle. Ainsi la condition de couverture par commande robuste (1.33) est satisfaite pour toute valeur initiale du cours $u(0) \in \mathbb{R}^+$ pourvu que

$$\forall \tau(\cdot) \in \Omega \quad w(0) \geq N(u(T), v(T)) - \int_0^T (\tau(s)v(s) - C^{\varepsilon_c} \xi_c(s)) ds + \sum_k C^{\varepsilon_k} \xi_k,$$

qui est clairement équivalent à

$$w(0) \geq \sup_{\tau(\cdot) \in \Omega} \left[N(u(T), v(T)) - \int_0^T (\tau(s)v(s) - C^{\varepsilon_c} \xi_c(s)) ds + \sum_k C^{\varepsilon_k} \xi_k \right]. \quad (1.34)$$

Pour chaque $u(0)$, la relation (1.34) fournit au trader la condition nécessaire sur la valeur initiale $w(0)$ du portefeuille, lui permettant d'assurer la couverture par commande robuste contre $\tau(\cdot) \in \Omega$ (1.33), pour une stratégie de transaction ξ fixée.

Définition 1.3.8 Une stratégie de transaction $\phi \in \Phi$ et un portefeuille initial $(v(0), w(0))$ constituent une couverture à $(t = 0, u(0))$ s'ils satisfont la condition (1.34). Dans ce cas, ϕ est appelée stratégie de couverture pour l'état initial $(u(0), v(0), w(0))$.

Notons $P(u(0))$, la prime de l'option (actualisée). En accord avec la définition 1.1.7, la prime $P(u(0))$ s'obtient comme la valeur minimale $w(0)$ d'un portefeuille initial de couverture, ce qui conduit à la définition suivante :

Définition 1.3.9

$$P(u(0)) = \inf_{\phi \in \Phi} \{ w(0) \mid \phi \text{ est une stratégie de couverture pour l'état initial } (u(0), 0, w(0)) \}.$$

Dans la définition 1.3.9, la condition $v(0) = 0$ provient du fait que le souscripteur est supposé verser la prime en bons sans risque. De ce fait, l'investissement v en actif sous-jacent est supposé nul à

l'instant initial du jeu. Compte tenu de la condition de couverture (1.34), il en résulte, à l'actualisation près, que nous recherchons la prime de l'option, pour un cours initial $u(0)$, comme

$$P(u(0)) = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\tau(\cdot) \in \Omega} \left[N(u(T), v(T)) - \int_0^T (\tau(s)v(s) - C^{\varepsilon_c} \xi_c(s)) ds + \sum_k C^{\varepsilon_k} \xi_k \right], \quad (1.35)$$

avec $v(0) = 0$. En tenant compte de l'actualisation, la prime recherchée est, en fonction de la valeur initiale du cours $S(0)$, donnée par

$$\tilde{P}(S(0)) = R(0)P(R(0)^{-1}S(0)) = e^{-\rho T}P(e^{\rho T}S(0)). \quad (1.36)$$

En conclusion, pour déterminer la prime d'une option par commande robuste, avec un modèle de marché à intervalles, il nous faut résoudre (1.35), c'est-à-dire un jeu différentiel minimax avec une commande impulsionnelle $\xi \in \Xi$ et avec un coût terminal $N(u(T), v(T))$ pouvant être convexe ou discontinu suivant le type de l'option considérée (propriété 1.3.6).

Remarque 1.3.7 *Dans ce jeu minimax, le « max » provient de l'approche par commande robuste sur l'ensemble des trajectoires $\tau(\cdot) \in \Omega$ du cours de l'actif sous-jacent. Ainsi dans le cadre de notre jeu minimax, il n'y a pas de notion d'optimalité de la part du maximiseur (le marché). Celui-ci ne cherche pas à jouer contre le trader. Sa « commande optimale » dans Ω représente la « pire variation » du cours de l'actif sous-jacent du point de vue du trader. Remarquons en outre qu'une notion d'optimalité de la part du marché aurait été contraire à l'hypothèse d'atomicité (définition 1.1.6).*

Il apparaît de manière assez évidente la propriété suivante sur la prime de ce jeu \mathcal{G} :

Proposition 1.3.10 *La prime (1.36) augmente si l'on élargit l'intervalle $[\tau^-, \tau^+]$.*

Preuve de la proposition 1.3.10 Soit deux ensembles Ω_1 et Ω_2 de commandes $\tau(\cdot)$ admissibles associés respectivement à des choix de bornes τ_1^-, τ_1^+ et τ_2^-, τ_2^+ telles que $[\tau_1^-, \tau_1^+] \subset [\tau_2^-, \tau_2^+]$. Alors $\Omega_1 \subset \Omega_2$, et donc de manière évidente on a dans (1.35)

$$\sup_{\tau(\cdot) \in \Omega_1} [\cdot] \leq \sup_{\tau(\cdot) \in \Omega_2} [\cdot].$$

Puisque « l'inf » est un opérateur croissant, nous on en déduisons pour les primes respectives

$$\tilde{P}_1(S(0)) \leq \tilde{P}_2(S(0)). \quad \blacksquare$$

1.4 Modélisation du problème en temps discret

Un des principaux avantages du modèle de marché à intervalles est la possibilité de développer en parallèle une théorie d'évaluation d'options en temps continu et en temps discret. La théorie en temps discret consiste en un échantillonnage (discrétisation exacte) du modèle de marché (pour les cours), avec des transactions ne pouvant intervenir qu'à des instants multiples du pas d'échantillonnage. Cette

modélisation en temps discret est plus réaliste que celle en temps continu, puisque le trader ne peut en pratique faire attention à son portefeuille qu'un nombre fini de fois par jour. Dans cette section, nous allons donner la dynamique de marché et de portefeuille ainsi que l'expression de la prime comme solution d'un jeu «minimax» en temps discret (jeu « multi-étages » noté \mathcal{G}^h).

1.4.1 Modèle de marché et de portefeuille (dynamique)

Nous désignons par h le pas de temps (le pas d'échantillonnage) qui sera choisi de telle sorte que $\mathbb{K} = T/h$ soit entier, et $k = \{0, 1, \dots, \mathbb{K}\}$ la suite des indices correspondant aux instants d'échantillonnage $t_k = kh \in \{0, h, \dots, T\}$. Afin d'alléger les notations, nous prenons comme convention de noter $S(t_k) = S_k$ le cours de l'actif sous-jacent à l'instant t_k , et de la même façon les autres variables à venir $R, x, y, u, v, \tilde{w}, w, \tilde{\xi}, \tilde{\tau}, \xi, \tau$.

Remarque 1.4.1 *Le modèle de marché en temps discret correspond à un échantillonnage du modèle de marché en temps continu avec un pas d'échantillonnage h . Par conséquent, l'ensemble des trajectoires de prix possibles pour l'actif sous-jacent est décrit par un modèle à intervalles, donc satisfait (1.7) indépendamment du pas de temps ou de manière équivalente $\tau(\cdot) \in \Omega$ où Ω est donné par (1.23) indépendamment du pas de temps.*

En prenant deux instants d'échantillonnages successifs $t_1 = kh$ et $t_2 = (k+1)h$, l'ensemble des trajectoires de prix admissibles (1.7) pour l'actif sous-jacent dans la théorie en temps discret, est donné par

$$\tilde{\Psi} = \{ \text{suites } \{S_k\}, k \in \{0, 1, \dots, T/h\} \mid e^{\tilde{\tau}^- h} \leq \frac{S_{k+1}}{S_k} \leq e^{\tilde{\tau}^+ h} \}. \quad (1.37)$$

Remarque 1.4.2 *Avec le modèle de marché à intervalles, nous avons un continuum de valeurs possibles à la fin de chaque pas de temps $S_{k+1} \in [e^{\tilde{\tau}^- h} S_k, e^{\tilde{\tau}^+ h} S_k]$ et non un arbre binaire $S_{k+1} \in \{e^{\tilde{\tau}^- h} S_k, e^{\tilde{\tau}^+ h} S_k\}$ comme dans le modèle en temps discret de J.C.Cox, S.A.Ross, et M.Rubinstein [CRR79].*

Nous choisissons de représenter la dynamique du cours de l'actif sous-jacent par

$$\tilde{\tau}_k = \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} \in [e^{\tilde{\tau}^- h} - 1, e^{\tilde{\tau}^+ h} - 1]. \quad (1.38)$$

Par commodité, nous introduisons la notation suivante pour le taux de variation relative par pas de temps h

$$\tilde{\tau}_h^\varepsilon = e^{\tilde{\tau}^\varepsilon h} - 1, \quad \varepsilon \in \{+, -\}. \quad (1.39)$$

Ainsi la dynamique du cours de l'actif sous-jacent s'écrit simplement

$$S_{k+1} = (1 + \tilde{\tau}_k) S_k \quad \text{avec} \quad \tilde{\tau}_k \in [\tilde{\tau}_h^-, \tilde{\tau}_h^+]. \quad (1.40)$$

Par analogie avec le cas continu, nous désignons par $\tilde{\Omega}$ l'ensemble des suites $\{\tilde{\tau}_k\}_{k=\{0,1,\dots,\mathbb{K}\}}$ vérifiant $\tilde{\tau}_k \in [\tilde{\tau}_h^-, \tilde{\tau}_h^+]$. A l'instar du modèle de marché en temps continu, l'évolution du cours de l'actif sous-

jacent est de manière équivalente repérée soit par la suite des cours $\{S_k\} \in \tilde{\Psi}$, soit par son cours initial $S_0 \in \mathbb{R}^+$ et la suite des variations de son cours $\{\tilde{\tau}_k\} \in \tilde{\Omega}$ entre deux pas de temps.

Remarque 1.4.3 *La suite des $\tilde{\tau}_k \in [\tilde{\tau}_h^-, \tilde{\tau}_h^+]$ (1.38) provient d'un échantillonnage (discrétisation exacte) de (1.7) et non d'un schéma de discrétisation par différences finies décentré de l'inégalité (1.8).*

Par échantillonnage de (1.10) aux instants $t = kh$, $k \in \{0, \dots, \mathbb{K}\}$, l'évolution des bons sans risque est donnée par

$$R_k = R(kh) = e^{\rho(kh-T)} = (e^{\rho h})^{(k-\mathbb{K})} .$$

En posant

$$e^{\rho h} = 1 + \rho_h , \quad (1.41)$$

on a donc $R_k = (1 + \rho_h)^{k-\mathbb{K}}$, et par conséquent

$$R_{k+1} = (1 + \rho_h)R_k . \quad (1.42)$$

Comme en temps continu, nous considérons un portefeuille dynamique $(\{x_k\}, \{y_k\})_{k \in \{0, 1, \dots, \mathbb{K}\}}$ constitué de x_k parts d'actif sous-jacent (sur lequel porte l'option) et de y_k parts de bons sans risque. La valeur de ce portefeuille aux instants t_k est repérée par (1.11). Nous gérons également ce portefeuille dynamique à l'aide d'une stratégie de transaction autofinancée en présence de coûts de transaction, où ces derniers sont choisis proportionnels au montant de la transaction. Le trader est cependant contraint uniquement à des transactions finies de la forme (1.17) (c'est-à-dire des impulsions), et ne pouvant par ailleurs intervenir qu'à des instants $t_k = kh$ multiples du pas de temps h , où $k \in \{0, 1, \dots, \mathbb{K}\}$ et $T = \mathbb{K}h$ (et avec $\tilde{\xi}_k = 0$ aux instants $t_k = kh$ où le trader décide de ne pas faire de transaction). Ainsi, dans ce jeu en temps discret obtenu par échantillonnage du jeu en temps continu, le trader est soumis pour les transactions, aux contraintes

$$\tilde{\xi}_c(t) = 0 , \quad t_k = kh . \quad (1.43)$$

A chaque pas de temps, l'équation d'autofinancement s'écrit toujours (1.12) avec $dx = x_{k+1} - x_k$, $dy = y_{k+1} - y_k$, et nous prendrons pour commande du trader la suite $\{\tilde{\xi}_k\}_{k \in \{0, 1, \dots, \mathbb{K}\}}$ des

$$\tilde{\xi}_k = (x_{k+1} - x_k)S_k . \quad (1.44)$$

Avec ces notations, x_k et x_{k+1} représentent respectivement le nombre de parts avant et après la transaction de montant $\tilde{\xi}_k$ à l'instant t_k . Par un raisonnement analogue à celui du cas continu, la contrainte d'autofinancement (1.12) impose la relation

$$(y_{k+1} - y_k)R_k = -(1 + C^{\varepsilon_k})\tilde{\xi}_k , \quad \text{avec } C^{\varepsilon_k} = \frac{1 + \varepsilon_k c_1}{1 - \varepsilon_k c_0} - 1 \text{ et } \varepsilon_k = \text{signe}(\tilde{\xi}_k) . \quad (1.45)$$

Dans l'expression de la valeur du portefeuille (1.11) à l'instant $t + h$ ($\tilde{w}_{k+1} = x_{k+1}S_{k+1} + y_{k+1}R_{k+1}$), en substituant les termes S_{k+1} , R_{k+1} , x_{k+1} et y_{k+1} par les relations (1.40), (1.44), (1.42) et (1.45), nous obtenons

$$\tilde{w}_{k+1} = (1 + \rho_h)(\tilde{w}_k - C^{\varepsilon_k}\tilde{\xi}_k) + (\tilde{\tau}_k - \rho_h)(S_k x_k + \tilde{\xi}_k) .$$

Comme dans le modèle en temps continu, on s'affranchit du taux d'intérêt ρ dans la dynamique en actualisant les variables (S, x, \tilde{w}) et les commandes $(\tilde{\xi}, \tilde{\tau}_k)$ à la valeur finale à l'échéance T avec le taux d'actualisation ρ . On pose

$$u_k = \frac{S_k}{R_k}, \quad v_k = \frac{x_k S_k}{R_k}, \quad w_k = \frac{\tilde{w}_k}{R_k}, \quad \xi_k = \frac{\tilde{\xi}_k}{R_k},$$

mais également

$$\tau_h^- = \frac{\tilde{\tau}_h^- - \rho h}{1 + \rho h} \leq \tau_k = \frac{\tilde{\tau}_k - \rho h}{1 + \rho h} \leq \tau_h^+ = \frac{\tilde{\tau}_k^+ - \rho h}{1 + \rho h}.$$

Avec ces nouvelles variables (u, v, w) et ces nouvelles commandes (ξ_k, τ_k) , la dynamique du jeu en temps discret (jeu « multi-étages » noté \mathcal{G}^h) s'écrit

$$\begin{cases} u_{k+1} &= (1 + \tau_k)u_k \\ v_{k+1} &= (1 + \tau_k)(v_k + \xi_k) \\ w_{k+1} &= w_k + \tau_k(v_k + \xi_k) - C^{\varepsilon_k} \xi_k \end{cases} \quad (1.46)$$

où la suite des $\{\tau_k\}_{k=\{0,1,\dots,\mathbb{K}\}} \in \Omega$ avec

$$\Omega = \{ \text{suites } \{\tau_k\}, k = \{0, 1, \dots, \mathbb{K}\} \mid \tau_k \in [\tau_h^-, \tau_h^+] \}, \dots$$

On désigne par $\Xi_D = \{ \text{suites } \{\xi_k\}, k = \{0, 1, \dots, \mathbb{K}\} \}$ l'ensemble des stratégies admissibles du trader. Celles-ci seront, à l'instar de la théorie en temps continu, cherchées dans l'ensemble des stratégies non anticipatives, noté Φ_D

$$\phi \in \Phi_D : \Psi \rightarrow \mathbb{R} \quad \xi_k = \phi_k(u_0, \dots, u_k), \quad (1.47)$$

et trouvées sous la forme d'un feedback d'état $\xi_k = \varphi_k(u_k, v_k)$ avec $v_0 = 0$. Il est à noter que $\Phi_D \subset \Phi$, compte tenu de la contrainte (1.43) sur les transactions, par rapport à la théorie en temps continu. Compte tenu de la dynamique $u_{k+1} = (1 + \tau_k)u_k$, l'évolution du cours peut être repérée soit par la suite $\{u_k\}_{k \in \{0,1,\dots,\mathbb{K}\}}$, soit par u_0 et la suite des variations $\{\tau_k\}_{k \in \{0,1,\dots,\mathbb{K}-1\}}$. Ainsi l'ensemble des stratégies non anticipatives (1.47) peut se réécrire (avec un léger abus de notation), sous la forme

$$\phi_k \in \Phi_D : \Psi \rightarrow \mathbb{R} \quad \xi_k = \phi_k(u_0, \dots, u_k) = \phi_k(u_0, \tau_0, \dots, \tau_{k-1})$$

(et non $\phi_k(u_0, \tau_0, \dots, \tau_k)$, car la connaissance de τ_k impliquerait la connaissance de u_{k+1} et donc une prédiction, ce qui est interdit).

Remarque 1.4.4 *La stratégie non anticipative (1.47) suppose juste que le trader peut réagir à la variation du cours dans un temps significativement inférieur à un pas de temps, mais en aucun cas qu'il puisse faire une éventuelle prédiction sur la valeur future du cours.*

1.4.2 Prime de l'option comme solution du jeu minimax \mathcal{G}^h

L'objectif du trader est, comme pour la théorie en temps continu, de pouvoir proposer l'option au tarif le plus compétitif sans perdre d'argent (c'est-à-dire en se garantissant une couverture à l'échéance

$T = \mathbb{K}h$). L'approche utilisée reste celle de la commande robuste sur l'ensemble des variations de prix $\{\tilde{\tau}_k\}_{k \in \{0,1,\dots,\mathbb{K}\}} \in \Omega$ décrites par le modèle de marché à intervalles. La condition de couverture par commande robuste (1.3.5) se réécrit en temps discret

$$w_{\mathbb{K}} \geq N(u_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}}) \quad \forall (u_0, \{\tau_k\}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega . \quad (1.48)$$

La valeur $w_{\mathbb{K}}$ du portefeuille à l'échéance, en fonction de sa valeur initiale w_0 (à $t = 0$), se déduit par sommation de (1.46) pour les indices k variant de 0 à $\mathbb{K} - 1$. Cette sommation conduit à la relation

$$w_{\mathbb{K}} = w_0 + \sum_{k=0}^{\mathbb{K}-1} (\tau_k(v_k + \xi_k) - C^{\varepsilon_k} \xi_k) .$$

Ainsi, pour une stratégie de transaction fixée, un portefeuille initial de valeur w_0 est un portefeuille de couverture pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^+$ (c'est-à-dire satisfait la condition (1.48)), si

$$w_0 \geq N(u_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}}) - \sum_{k=0}^{\mathbb{K}-1} (\tau_k(v_k + \xi_k) - C^{\varepsilon_k} \xi_k) \quad \forall \{\tau_k\} \in \Omega ,$$

ce qui est clairement équivalent à

$$w_0 \geq \sup_{\{\tau_k\} \in \Omega} \left[N(u_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}}) + \sum_{k=0}^{\mathbb{K}-1} (-\tau_k(v_k + \xi_k) + C^{\varepsilon_k} \xi_k) \right] .$$

En accord avec la définition 1.1.7, le trader cherche à déterminer la stratégie de transaction qui minimise la valeur du portefeuille initial de couverture, ce qui conduit à rechercher la prime (en variable actualisée) sous la forme :

$$P(u_0) = \min_{\varphi \in \Phi_D} \sup_{\{\tau_k\} \in \Omega} \left[N(u_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}}) + \sum_{k=0}^{\mathbb{K}-1} (-\tau_k(v_k + \xi_k) + C^{\varepsilon_k} \xi_k) \right] . \quad (1.49)$$

Remarque 1.4.5 À la différence de la théorie en temps continu, la stratégie qui minimise la valeur du portefeuille est toujours atteinte en temps discret. D'où le « \min_{φ} » dans l'équation (1.49).

La prime pour une valeur du cours initial non actualisé S_0 est alors donnée par

$$\tilde{P}(S_0) = R_0 P(R_0^{-1} S_0) = (1 + \rho_h)^{-\mathbb{K}} P((1 + \rho_h)^{\mathbb{K}} S_0) . \quad (1.50)$$

Propriété 1.4.1 Une division entière du pas d'échantillonnage induit des contraintes (1.43) moins restrictives sur la stratégie de transaction du minimiseur (le trader), sans toutefois augmenter les possibilités de τ (la commande τ est indépendante de ξ par l'hypothèse de non-atomicité (définition 1.1.6)). Il en découle que la prime obtenue par la théorie en temps discret est décroissante par division du pas de temps, et par ailleurs nécessairement supérieure à celle obtenue à l'aide de la théorie en temps continu, qui n'impose aucune contrainte sur la stratégie du minimiseur. On se servira de cette

propriété (dans la preuve de convergence paragraphe 6.3, en particulier pour le lemme 6.3.4) pour établir le caractère monotone décroissant de la prime par divisions dyadiques successives du pas de temps (par puissances de deux croissantes).

1.5 Fonction Valeur

Dans ce paragraphe, nous introduisons les fonctions Valeurs respectives du jeu différentiel \mathcal{G} et du jeu « multi-étage » \mathcal{G}^h . Les outils permettant de déterminer cette fonction Valeur seront décrits dans le chapitre 2.

1.5.1 Fonction Valeur W du jeu minimax différentiel \mathcal{G}

Revenons à notre jeu différentiel impulsif \mathcal{G} , dont la dynamique est donnée par le système d'EDO (1.20),(1.21),(1.22), et dont la valeur est donnée par (1.35). Nous introduisons la fonction Valeur W correspondant à la solution globale du jeu pour tout les états ou conditions initiales $(t, u(t), v(t))$ de l'équation (1.35).

$$\begin{cases} W(t, u(t), v(t)) &= \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\tau \in \Omega} \left[N(u(T), v(T)) - \int_t^T (\tau(s)v(s) - C^{\varepsilon_c} \xi_c(s)) ds + \sum_{k: t_k \geq t} C^{\varepsilon_k} \xi_k \right] \\ \text{avec } W(T, u, v) &= N(u, v) \quad \forall (u, v) \end{cases} \quad (1.51)$$

La prime (1.36) recherchée est alors, en tenant compte de l'actualisation et avec $v(0) = 0$ en accord avec la définition 1.3.9,

$$\tilde{P}(S(0)) = e^{-\rho T} W(0, e^{\rho T} S(0), 0) \quad (\text{on a } P(u(0)) = W(0, u(0), 0)). \quad (1.52)$$

1.5.2 Fonction Valeur W^h du jeu minimax multi-étages \mathcal{G}^h

Tout comme pour le jeu différentiel \mathcal{G} , on introduit à partir de la relation (1.49), caractérisant la prime de l'option, la fonction Valeur suivante pour le jeu « multi-étages » \mathcal{G}^h

$$W^h(k, u_k, v_k) = \min_{\varphi \in \Phi_D} \sup_{\{\tau_k\} \in \Omega} \left[N(u_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}}) + \sum_{l \geq k} (-\tau_l(v_l + \xi_l) + C^{\varepsilon_l} \xi_l) \right]. \quad (1.53)$$

La prime (1.50) recherchée, s'écrit en fonction de la valeur du cours initial non actualisé S_0 et pour l'état initial $v_0 = 0$, sous la forme

$$\tilde{P}(S_0) = (1 + \rho_h)^{-\mathbb{K}} W^h(0, u(0)(1 + \rho_h)^{\mathbb{K}}, 0) \quad (\text{on a } P(u(0)) = W^h(0, u(0), 0)), \quad (1.54)$$

où $R_0 = (1 + \rho_h)^{-\mathbb{K}}$ et W^h est définie par (1.53).

1.6 Un résultat préliminaire : $v(t)$ est borné.

Dans cette section nous allons démontrer, à partir d'arguments financiers élémentaires, que $v(t)$ est borné sur $[0, T]$ pour toute condition initiale $(0, u(0), 0)$, tant pour les options vanilles que pour les options digitales. Les bornes obtenues sont pour certaines fonctions de $u(t)$. Mais $u(t)$ est lui même borné pour toute condition initiale $u(0)$ par l'hypothèse du modèle de marché à intervalles (définition 1.2.1), à savoir

$$u(0)e^{\tau^-(t)} \leq u(t) \leq u(0)e^{\tau^+(t)} .$$

1.6.1 Le cas des options vanilles

Une analyse très simple sur le comportement de l'option (à partir des propriétés des paiements respectifs de chacune des options), conduit à la proposition suivante.

Proposition 1.6.1 *À tout instant $t \in [0, T]$, pour une politique de couverture rationnelle et toute condition initiale $(0, u(0), 0)$, l'investissement en actif sous-jacent v satisfait la propriété :*

$$\begin{array}{ll} v \in [0, u] & \text{pour un call vanille avec paiement en nature,} \\ v \in [0, \frac{u}{1+c^-}] & \text{pour un call vanille avec paiement en espèces,} \\ v \in [-u, 0] & \text{pour un put vanille avec paiement en nature,} \\ v \in [-\frac{u}{1+c^+}, 0] & \text{pour un put vanille avec paiement en espèces.} \end{array}$$

Preuve de la proposition 1.6.1 Nous allons démontrer cette proposition uniquement dans le cas d'un call (les deux premières assertions). Pour un put (les deux dernières assertions), la preuve est similaire mutatis mutandis.

Tout d'abord, l'investissement initial en actif sous-jacent est nul ($v(0) = 0$, voir la définition 1.3.9), et de ce fait, vérifie bien la proposition. La fonction de paiement d'un call, $M(u) = \max\{0, u - K\}$, présente la propriété d'être croissante en u , de pente 0 pour $u < K$ et 1 pour $u > K$.

La fonction de paiement $M(u)$ étant croissante en u , le trader n'a jamais intérêt à s'endetter en actif sous-jacent (à avoir un investissement $v(t) < 0$ à un instant t). En effet, si $v(t) < 0$ et $M(u)$ croissante en u , toute augmentation de la valeur du cours u engendre une diminution de la valeur du portefeuille w alors que le paiement ne diminue pas, rendant ainsi un investissement $v(t) < 0$ non rationnel pour une option à paiement croissant en u . Ainsi le montant $v(t)$ investi en actif sous-jacent est, à tout instant t , borné inférieurement par 0. Par ailleurs, avec $v = 0$ et $w = 0$, le trader réplique exactement l'option, pour les valeurs de u suffisamment faibles pour que $u(t) < K$ pour tout t futur, où $M(u(t))$ reste égal à 0. La borne inférieure $v = 0$ est ainsi atteinte pour de faibles valeurs de u .

Pour les valeurs du cours $u(t) > K$, où $M(u) = u - K$, toute augmentation du cours (c'est-à-dire tout contrôle du marché $\tau > 0$) d'une quantité du entraîne une augmentation du paiement égale à du . Ainsi, si $v = u$, la valeur du portefeuille augmente elle aussi de du . Autrement dit, si $v(t) = u(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, le trader réplique exactement l'option pour les valeurs de u suffisamment grandes pour que $u(t) \geq K \forall t \in [0, T]$. Par ailleurs, la pente en u de $M(u)$ étant bornée par 1, un investissement de $v = u$ suffit au trader pour se couvrir contre toute augmentation du cours quel que soit u . Tout investissement $v > u$ est non rationnel, car en cas de diminution du cours (c'est-à-dire d'une commande

$\tau < 0$ du marché), la couverture de ce risque nécessite alors un portefeuille de valeur plus grande qu'avec $v = u$. Par conséquent v est borné supérieurement par $v = u$, et cette borne est atteinte pour des valeurs du cours u suffisamment grandes pour que $u(t) \geq K \forall t$ futur.

La proposition 1.6.1 est ainsi prouvée dans le cas où $N(u, v) = M(u)$ c'est-à-dire en l'absence de coûts de clôture ($c^- = 0$).

En présence de coûts de clôture, la borne inférieure $v = 0$ n'est pas modifiée. En effet, pour des valeurs du cours u suffisamment faibles pour que $u(t) \geq K \forall t \in [0, T]$, le pire des cas pour le trader consiste toujours à ce que le souscripteur n'exerce pas l'option à T . Ainsi le trader doit avoir $v(T^+) = 0$, où l'on rappelle que l'instant T^+ représente l'échéance T , juste après l'ajustement final éventuel du portefeuille (transaction finie éventuelle, occasionnant des coûts de clôture). Par conséquent, avec $v = 0$ le trader réplique l'option pour les faibles valeurs de u et en outre, cet investissement n'occasionne aucun coût de clôture, ce qui ne modifie pas le coût terminal ($N(u, v) = M(u)$), et par conséquent ne modifie pas la borne $v = 0$.

La borne $v = u$ peut, elle, être légèrement modifiée en présence de coûts de clôture. Pour un paiement en nature, le trader doit à l'échéance avoir un investissement $v(T^+) = u(T)$ en cas d'exercice de l'option (qui représente toujours le pire des cas pour des valeurs de u suffisamment grandes). Il en découle qu'en cas d'exercice de l'option, il n'y a pas de coûts de clôture à payer si l'investissement est égal à la borne supérieure $v = u$, et ainsi cette borne supérieure ne se trouve pas modifiée pour un paiement en nature. Pour une clôture en espèces, la situation est légèrement différente. En effet le trader doit (quelque soit le choix du souscripteur d'exercer ou non l'option) vendre la totalité de l'actif sous-jacent restant dans son portefeuille, c'est-à-dire procéder à un ajustement final du portefeuille pour passer de $v(T) = u(T)$ à $v(T^+) = 0$, occasionnant des coûts de clôture d'un montant $-c^-u(T)$. Le coût final (à T) pour le trader est alors donné par l'expression

$$N((u, v)) = \max\{-c^-v, u - K - c^-v\} .$$

Pour les grandes valeurs de u , où le pire des cas est que le souscripteur exerce l'option, la fonction de coût du trader est $N(u, v) = u - K - c^-v$. Pour les u suffisamment grands, l'option est répliquée (c'est-à-dire $dN = dw$ où $dN = du - c^-dv$ et $dw = dv$), pour un investissement $v = \frac{u}{1+c^-}$, qui devient naturellement la borne supérieure dans la cas d'un call vanille avec paiement en espèces. ■

Remarque 1.6.1 *La valeur initiale du portefeuille $\tilde{w}(0)$ (la prime de l'option $P(S(0))$) est finie. Par ailleurs ce portefeuille est constitué d'actifs à variation finie, puisque les bons sans risque évoluent au taux d'intérêt ρ et l'actif sous-jacent, de cours $S(t)$, est supposé à variation bornée, étant défini par un modèle de marché à intervalles (hypothèse (1.8)). Par conséquent la valeur du portefeuille $\tilde{w}(t)$ est finie à tout instant $t \in [0, T]$. Compte tenu de la proposition 1.6.1, le nombre de parts $x = v/u$ d'actif sous-jacent est borné (par exemple $x \in [0, 1]$ dans le cas d'un call vanille avec paiement en espèces), mais également le nombre de parts (y) investi en bons sans risque, étant donné qu'à tout instant la valeur du portefeuille $\tilde{w}(t) = x(t)S(t) + y(t)R(t)$ est elle aussi finie. Il en est évidemment de même en variables actualisées où les quantités $P(u(0))$ et $w(t) = x(t)u(t) + y(t)$ pour tout t , sont finies.*

1.6.2 Le cas des options digitales

Nous notons $J(x(0), \varphi, \tau(\cdot)) = N(u(T), v(T)) + \int_t^T (-\tau v + C^\varepsilon \xi) ds$ (avec $\xi(t) = \varphi(t, u, v)$) le critère à mini-maximiser.

Proposition 1.6.2 *Pour une option digitale, avec une politique de couverture rationnelle, les quantités :*

$$\int_0^t \xi(s) ds, \quad v(t), \quad N(u(T), v(T)) = M(u(T)) + m(v(T)), \quad \int_0^t \tau(s) v(s) ds,$$

ainsi que le critère $J(x(0), \varphi, \tau(\cdot))$ sont uniformément bornés en $\tau(\cdot)$ pour tout $t \in [0, T]$ et toute condition initiale $x(0) = (t(0), u(0), v(0)) = (0, u_0, v_0)$.

Remarquons tout d'abord que $\sum_k |\xi_k|$ est par hypothèse fini, puisque l'on ne permet qu'un nombre fini de sauts (ensemble (1.25)), c'est-à-dire que l'on suppose qu'il n'y a pas de points d'accumulation de sauts. Pour démontrer la proposition 1.6.2, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.6.3 *Toute stratégie admissible $\varphi \in \Phi$ telle que $\sup_\tau J(x(0), \varphi, \tau(\cdot)) \geq D$ est dominée dans le cas d'une option digitale.*

Preuve du lemme 1.6.3 Intéressons nous à la stratégie φ_0 consistant pour le minimiseur à « ne rien faire » (jeu à un seul joueur sans minimiseur \mathbf{P}), c'est-à-dire $\varphi_0 = \{v(t) = v(0) = 0, \xi(t) = 0 \forall t \in [0, T]\}$. On a alors

$$\sup_\tau J((0, u_0, 0), \varphi_0, \tau(\cdot)) = \sup_\tau M(u(T)) = D,$$

ce qui conduit à

$$\inf_\varphi \sup_\tau J((0, u_0, 0), \varphi, \tau(\cdot)) \leq D.$$

Le fait que la fonction de paiement $M(u(T))$ d'une option digitale soit bornée par D nous a donc permis de prouver que toute stratégie qui engendre des coûts cumulés sur l'intervalle de temps $[0, T]$ (et donc à plus forte raison à chaque instant t) supérieurs à $\sup_\tau M(u(T)) = D$ est dominée par la stratégie φ_0 . ■

Ainsi les stratégies qui font moins bien que la stratégie φ_0 n'interviennent pas dans l' \inf_φ . On peut donc restreindre l'ensemble des stratégies admissibles Φ du minimiseur au sous-ensemble $\Phi_0 \subset \Phi$ des stratégies « qui font mieux que la stratégie ne rien faire » φ_0 ; c'est-à-dire à l'ensemble

$$\Phi_0 = \left\{ \varphi \in \Phi \mid \inf_\varphi \sup_\tau J((0, u_0, v_0), \varphi, \tau(\cdot)) \leq \sup_\tau J((0, 0, 0), \tau(\cdot)) \right\}.$$

Par la suite Φ désignera en fait le sous-ensemble Φ_0 puisque l'on a

$$\inf_{\varphi \in \Phi_0} \sup_\tau J((0, u_0, v_0), \varphi, \tau(\cdot)) = \inf_{\varphi \in \Phi} \sup_\tau J((0, u_0, v_0), \varphi, \tau(\cdot)).$$

Preuve de la proposition 1.6.2 Le lemme 1.6.3 montre qu'à chaque instant t et indépendamment de $\tau(\cdot)$, toute transaction (impulsion) $\xi(t)$ ayant produit des coûts des transaction cumulés $\int_0^t C^\varepsilon \xi dt > D$

est dominé par la stratégie consistant à ne pas faire de transaction, ce qui implique

$$\int_0^t \xi(s) ds \in \left[\frac{D}{C^-}, \frac{D}{C^+} \right]$$

uniformément en $\tau(\cdot)$ et en t . Par conséquent, pour toute condition initiale $x(0) = (t(0), u(0), v(0)) = (0, u_0, v_0)$, v est uniformément bornée en $\tau(\cdot)$ et en t par

$$v(t) \in \left[v_0 + \frac{D}{C^-}, v_0 + \frac{D}{C^+} \right].$$

Comme $v(t)$ est uniformément borné en $\tau(\cdot)$ et en t , on en déduit que $m(v(T))$, et par conséquent $N(u(T), v(T)) = M(u(T)) + m(v(T))$, le sont aussi. Par ailleurs, puisque $\tau(\cdot)$ est par hypothèse borné et v uniformément borné en $\tau(\cdot)$ et en t , on en déduit qu'il en est de même pour $\int_0^t \tau(s)v(s)ds$. On peut en conclure que le critère J est lui aussi uniformément borné en $\tau(\cdot)$ et en t pour toute condition initiale $x(0)$, ce qui prouve bien la proposition 1.6.2. ■

1.7 Valeurs par défaut des différents paramètres

Pour les différentes applications numériques ainsi que pour la plupart des expériences numériques, nous prendrons, sauf mention du contraire, le jeu de paramètres par défaut suivant :

- $K = 1$ pour le prix d'exercice (le strike) et $T = 44$ jours pour l'échéance de l'option, ce qui correspond à deux mois boursiers (jours ouvrés des places financières).
- Un gain fixe $D = 1$ (pour les options digitales).
- Une variation journalière comprise entre -5% et $+3\%$ pour le cours actualisé de l'actif sous-jacent, c'est-à-dire les bornes

$$\tilde{\tau}^- = -0,05 \quad \text{et} \quad \tilde{\tau}^+ = 0,03 \quad \text{avec le jour pour unité de temps.}$$

- Un taux d'intérêt annuel « continu » de $4,5\%$ par an pour les bons sans risque soit $\rho = 0,045$ par an.

Remarque 1.7.1 *En accord avec la formule (1.41), nous avons choisi un taux d'intérêt continu ρ , comme cela se fait dans la majeure partie de la théorie financière. Ces intérêts, étant versés en continu, engendrent alors des intérêts composés (« des intérêts sur les intérêts »), et ainsi l'intérêt annuel est en réalité légèrement supérieur à $\rho = 4,5\%$, et vaut $e^{0.045} - 1 = 0,046$ à 10^{-4} près.*

Pour calculer les bornes de variation journalière de l'actif sous-jacent actualisé, τ^ε , $\varepsilon \in \{+, -\}$, selon la relation (1.19), le taux d'intérêt ρ doit être ramené, à l'aide de la relation (1.41), à un taux d'intérêt continu, journalier, noté ρ_j . Nous obtenons

$$\rho_j = e^{0.045/365} - 1 \simeq 1,23 \times 10^{-4}, \quad (1.55)$$

et ainsi, les bornes de variation journalière actualisées τ^ε (1.19), sont

$$\tau^- = \tilde{\tau}^- - \rho_j \simeq -5,012 \times 10^{-2} \quad \text{et} \quad \tau^+ = \tilde{\tau}^+ - \rho_j \simeq 2,98810^{-2} .$$

Remarque 1.7.2 *La formule (1.55) suppose que, contrairement à l'actif sous-jacent, les bons sans risque « travaillent » les jours fériés et non ouvrés. La relation (1.19) $\tau^\varepsilon = \tilde{\tau}^\varepsilon - \rho_j$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, n'est alors pas homogène. Mais puisque $\rho \ll |\tilde{\tau}^\varepsilon|$, donc $\tau^\varepsilon \simeq \tilde{\tau}^\varepsilon$ (voir la remarque 1.3.3.a), la différence engendrée relève de l'ordre du détail. De même, la prise en compte dans les applications d'un taux d'intérêt $\rho \neq 0$ n'était pas essentielle.*

- ➔ Des coûts de transaction (proportionnels au montant de la transaction) avec un taux, à l'achat et à la vente, de 2 pour mille pour les bons sans risque et de 5 pour mille sur l'actif sous-jacent, c'est-à-dire

$$c_0 = 0,002 \quad \text{et} \quad c_1 = 0,005 .$$

Il en découle, par la relation (1.13), que

$$C^+ \simeq 7,014 \times 10^{-3} \quad \text{et} \quad C^- \simeq -6,986 \times 10^{-3} .$$

- ➔ Un ratio de 1/2 entre les coûts de clôture et les coûts de transaction, c'est-à-dire $c^\varepsilon/C^\varepsilon = 1/2 \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}$, ce qui entraîne

$$c^+ \simeq 3,507 \times 10^{-3} \quad \text{et} \quad c^- \simeq -3,493 \times 10^{-3} .$$

- ➔ Un pas d'échantillonnage $h = 1$, ce qui revient à contraindre le trader ²³ à la possibilité d'effectuer une transaction à une fréquence journalière.
- ➔ Lors de l'implémentation numérique, un pas d'espace en (u, v) , $du = dv = 0.01$.

²³Dans la théorie en temps discret, par rapport à celle en temps continu.

Chapitre 2

Outils de la théorie des jeux dynamiques à deux joueurs et à somme nulle

Le problème d'évaluation d'options modélisé dans le chapitre 1 conduit, aussi bien en temps continu qu'en temps discret, à un jeu « minimax » à deux joueurs et à horizon fini, que nous chercherons à résoudre (déterminer la Valeur de ce jeu ainsi que les stratégies optimales lorsque celles-ci existent) par différentes approches. Dans cette optique, nous allons dans ce chapitre nous intéresser à une catégorie de jeux dynamiques un peu plus générale¹, à savoir les jeux à deux joueurs et à somme nulle. Dans une première partie du chapitre, nous allons introduire les notions de base de jeu dynamique à deux joueurs et à somme nulle (définition, bref historique, notion de jeu qualitatif et quantitatif, stratégies des deux joueurs, Valeur du jeu). Nous introduirons dans une seconde partie différents outils de la théorie des jeux dynamiques à deux joueurs et à somme nulle (équation d'Isaacs, programmation dynamique, semi-perméabilité, solution de viscosité) que nous appliquerons dans les prochains chapitres à notre jeu « minimax ». Enfin, dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous montrerons un résultat d'équivalence entre un jeu quantitatif à horizon fini fixé en dimension n et un jeu qualitatif unique en dimension $n + 1$ caractérisant l'ensemble des états capturables pour une cible unique. Ce résultat nous permettra, dans les chapitres à venir, de résoudre notre jeu différentiel « minimax » (c'est-à-dire en temps continu) par deux approches distinctes et complémentaires.

2.1 Jeux dynamiques à deux joueurs et à somme nulle

2.1.1 Définition

Un jeu dynamique à deux joueurs est un problème de commande optimale où chacun des deux joueurs, appelés également agents, agit sur le même système (la même dynamique) en tentant chacun de maximiser son propre critère. Si le jeu dynamique se déroule en temps continu on parle de « *jeu différentiel* », et s'il se déroule en temps discret on parle de « *jeu multi-étages* ». Pour un jeu différentiel à deux joueurs procédant dans un espace d'état de dimension n plus temps, la dynamique est donnée

¹Pour des raisons historiques.

par un système d'EDO du 1^{er} ordre

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = f(t, X; \tau, \xi) \text{ avec l'état initial } X(t_0) = X_0$$

où $X \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $\tau \in \mathcal{U}$, $\xi \in \mathcal{V}$ sont, à t fixé, les commandes ² de chacun des deux joueurs avec \mathcal{U} et \mathcal{V} deux sous-ensembles fermés d'espaces euclidiens. Nous désignons par Ω et Ξ l'ensemble des fonctions mesurables $\Omega : [0, +\infty[\rightarrow \mathcal{U}$ et $\Xi : [0, +\infty[\rightarrow \mathcal{V}$. Par ailleurs, nous supposons que des hypothèses de régularité suffisantes sur la fonction f sont satisfaites (f Lipschitz continue en X et mesurable par rapport à τ et ξ) pour garantir l'existence d'une solution aux équations de la dynamique. Ces conditions de régularité garantissent l'existence d'une solution locale. On suppose en outre qu'une condition de croissance sur f est satisfaite, afin de garantir l'existence d'une solution globale (sinon la solution pourrait diverger).

Remarque 2.1.1 *On peut faire disparaître une éventuelle dépendance explicite des équations de la dynamique en temps en incluant le temps t comme variable d'état supplémentaire de dérivée unité. On obtient alors une dynamique de la forme $\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{f}(\bar{X}; \tau, \xi)$ avec $\bar{X} = (t, X)$ et $\bar{f} = (1, f)$. Les deux formes de la dynamique sont complètement équivalentes.*

Dans le cas d'un jeu « à somme nulle » [Isa65, Bre78, Ber76] les critères des deux joueurs sont opposés l'un à l'autre. Ainsi, on peut considérer un critère unique $J(t_0, X_0; \tau, \xi)$ que l'un des joueurs cherche à minimiser et l'autre à maximiser. La question des stratégies des deux joueurs sera réglée ultérieurement dans le paragraphe 2.1.4.

2.1.2 Origine des jeux différentiels à deux joueurs et à somme nulle

A l'origine, les jeux différentiels ³ à deux joueurs et à somme nulle ont été appliqués à l'étude de problèmes concrets dits de « poursuite-évasion » introduits par R.Isaacs ⁴ [Isa51, Isa65] et indépendamment en URSS par D.L.Kelendzheridze [Kel61], puis étudiés dans les deux courants respectifs, entre autres par J.V.Breakwell [Bre78] et N.Krassovski et A.Soubovtine [KS77]. Dans [Isa51, Isa65] (et ses successeurs) le minimiseur est appelé « Pursuer » (noté **P**) et le maximiseur est appelé « Evader » (noté **E**). Dans [Ber76](pages 257-304), les appellations en français des deux joueurs sont respectivement « Poursuivant » **P** et « Fugitif » **F**. Nous adopterons cette dernière appellation. Parmi les jeux de poursuite-évasion les plus connus, nous pouvons citer « Obstacle tag chase » [Isa65, Bre86], « Lady in the lake » [Isa65, Bre78], « Homicidal chauffeur » [Isa51, Isa65, Bre78, BM69, Mer71], « Isotropic rocket » [Isa51, Isa65, Ber70, Ber79], « Game of the two cars » [Isa65, Bre78].

Dans les jeux de poursuite-évasion, il existe plusieurs types de critères, comme le temps de capture ou la distance de la meilleure approche, que le poursuivant **P** cherche à minimiser et le fugitif **F** à maximiser. Nous allons voir que ces deux critères conduisent à distinguer la notion de jeu qualitatif et

²Appelées également contrôles, qu'il faut bien distinguer de la notion de stratégie qui dépend de la commande de l'autre joueur et plus globalement de l'information disponible à chacun des deux joueurs pour décider de leur commande.

³Nous omettons volontairement de parler des jeux statiques dont l'origine est antérieure aux jeux différentiels.

⁴Auteur en 1951 du tout premier article [Isa51] sur les jeux de poursuite-évasion.

jeu quantitatif, respectivement appelés « game of kind » et « game of degree » dans la terminologie de R.Isaacs [Isa65].

2.1.3 Jeu qualitatif (« game of kind ») et jeu quantitatif (« game of degree »)

Dans un jeu à deux joueurs et à somme nulle, on introduit un ensemble appelé « *ensemble de capture* » ou « *cible* » et noté

$$\mathbb{C} \subset [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n .$$

On définit l'instant final T pour la « *condition de capture* » par

$$T = \inf \{ t \mid (t, X(t)) \in \mathbb{C} \} .$$

Mentionnons deux cas particuliers intéressants de jeux, qui correspondent aux deux catégories de jeux étudiés au cours de cette thèse :

➔ Les jeux à horizon fini fixé T et état final libre :

$$\mathbb{C} = \{ \{T\} \times \mathbb{R}^n \} .$$

➔ Les jeux à instant final libre à état final dans une cible $C \subset \mathbb{R}^n$ indépendante de t :

$$\mathbb{C} = \{ [0, \infty[\times C \} .$$

Les jeux de poursuite-évasion appartiennent à cette dernière catégorie de jeux avec souvent

$$C = \{ X \mid d(\mathbf{P}, \mathbf{F}) \leq r \} ,$$

et le temps de capture pour critère. La quantité r représente « *le rayon létal* » appelé également « *kill distance* ».

On distingue deux grandes catégories de jeux à deux joueurs et à somme nulle :

➔ **Les jeux qualitatifs (« games of kind »).**

Dans un jeu qualitatif, l'enjeu est d'atteindre ou non une cible (l'atteindre pour \mathbf{P} et l'éviter pour \mathbf{F}). Résoudre un tel jeu consistera donc à déterminer une « *zone de capture* » (ou « *ensemble des états capturables* »), correspondant à l'ensemble des états initiaux $(t, X(t))$ depuis lesquels le poursuivant \mathbf{P} peut forcer la capture contre toute défense du fugitif \mathbf{F} .

➔ **Les jeux quantitatifs (« games of degree »).**

Dans un jeu quantitatif, l'enjeu est la valeur prise par un critère J que \mathbf{P} cherche à minimiser et \mathbf{F} cherche à maximiser. Il apparaît qu'un jeu quantitatif n'est intéressant que dans la zone de capture. Dans un jeu quantitatif à instant final T , le critère J est donné de manière classique par

[Isa65],[Ber76](pages 30-51)

$$J(t_0, X_0; \tau(\cdot), \xi(\cdot)) = N(X(T)) + \int_{t_0}^T L(t, X(t); \tau(t), \xi(t))dt \quad (2.1)$$

où $N(X(T))$ représente un critère terminal et $\int_{t_0}^T L(X(t); \tau(t), \xi(t))dt$ un critère intégral où L est appelé lagrangien. Le lagrangien L est supposé suffisamment régulier (mesurable) pour que l'intégrale de (2.1) existe. Mentionnons que dans un jeu de poursuite-évasion, si le critère considéré est le temps de capture, on est en présence d'un jeu quantitatif à instant final T libre où $N = 0$, $L = 1$ et ainsi $J = \int_{t_0}^T dt$.

Remarque 2.1.2 *Le critère est une fonction de la trajectoire $X(\cdot)$. Pour toute trajectoire $X(\cdot)$ qui ne rencontre jamais la cible, le critère (2.1) n'est plus défini et l'on prendra $J = +\infty$, c'est-à-dire que le minimiseur \mathbf{P} cherche à terminer le jeu à n'importe quel coût. Grâce à ce prolongement du critère en dehors de la zone de capture, où le fuyitif \mathbf{F} peut empêcher la capture, on est ramené à un jeu quantitatif à horizon fini procédant à l'intérieur de la zone de capture. En effet toute commande du minimiseur \mathbf{P} faisant quitter la zone de capture ne peut pas être optimale puisqu'elle engendre $J = +\infty$.*

Classiquement dans un jeu de poursuite évasion, on regarde d'abord le jeu qualitatif, à savoir : est-ce que la capture est possible ou non ? Ensuite, pour les états pour lesquels la capture est possible, on s'intéresse alors au jeu quantitatif. Par exemple, si le fuyitif \mathbf{F} sait qu'il va être capturé, il cherche alors à maximiser le temps de capture que \mathbf{P} cherche à minimiser.

2.1.4 Stratégies et Valeur du jeu

Une discussion importante dans le cadre d'un jeu à deux joueurs et à somme nulle concerne les ensembles des stratégies admissibles pour chacun des deux joueurs, ainsi que l'existence d'une « Valeur » (définie plus loin). En effet « la notion de minimisation et maximisation simultanée n'est pas une chose évidente » (extrait de [Ber76], page258).

Supposons la paire de stratégies (τ, ξ) choisie dans la classe des stratégies non anticipatives (définition 1.3.4), donc définie par une application vectorielle

$$\chi : \begin{array}{ccc} \Omega \times \Xi & \rightarrow & \Omega \times \Xi \\ \begin{pmatrix} \tau(\cdot) \\ \xi(\cdot) \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \psi(\xi(\cdot)) \\ \phi(\tau(\cdot)) \end{pmatrix} \end{array} .$$

On cherche à identifier la (ou les) fonction(s) de l'état initial (t_0, X_0) suivante(s) :

$$W^+(t_0, X_0) = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\psi \in \Psi} J(t_0, X_0, \psi(\xi), \phi(\tau)) \quad \text{et/ou} \quad W^-(t_0, X_0) = \sup_{\psi \in \Psi} \inf_{\phi \in \Phi} J(t_0, X_0, \psi(\xi), \phi(\tau)) , \quad (2.2)$$

Le critère J est de la forme (2.1), et les fonctions W^+ et W^- sont appelées respectivement Valeur supérieure et Valeur inférieure du jeu, avec la propriété $W^+(t_0, X_0) \geq W^-(t_0, X_0) \quad \forall (t_0, X_0)$.

Existence d'un point fixe pour une paire de stratégies

Une première difficulté concerne la cohérence du choix des stratégies. Il faut savoir si une paire de stratégies non anticipatives $(\phi, \psi) \in \Phi \times \Psi$ définit une paire unique de commandes

$$\xi^*(\cdot) = \phi(\tau^*(\cdot)), \tau^*(\cdot) = \psi(\xi^*(\cdot)) ,$$

« *point fixe* » de l'application $\chi : (\tau, \xi) \mapsto (\psi(\xi), \phi(\tau))$. Si c'est le cas, la paire de commandes (τ^*, ξ^*) engendre une trajectoire $X^*(\cdot)$ avec $X^*(t_0) = X_0$, grâce aux hypothèses de régularité et de croissance sur f mentionnées dans la section 2.1.1. La classe des paires de stratégies non anticipatives ne suffit pas à assurer l'existence d'un point fixe. Par exemple si la paire de stratégies non anticipatives choisie est $\xi(t) = \tau(t)$ et $\tau(t) = \xi(t) + 1$, un point fixe ne peut pas exister. P.Cardialaguet et M.Quincampoix [Car07, CQ08] règlent ce problème d'existence en introduisant un retard arbitrairement petit dans la stratégie de l'un des deux joueurs. En reprenant l'exemple précédent, l'introduction d'un retard ε dans la stratégie non anticipative du minimiseur c'est-à-dire $\xi(t) = \tau(t - \varepsilon)$ et $\tau(t) = \xi(t) + 1$ garantit à présent l'existence d'un point fixe pour la paire de stratégies non anticipatives. Une autre possibilité pour contourner le problème de l'existence du point fixe consiste à utiliser le « *lemme de Berkovitz* » [Ber71] . Ce lemme montre qu'il suffit respectivement de considérer des commandes en BO :

- ➔ pour le maximiseur dans le cas d'un “inf sup”,
- ➔ pour le minimiseur dans le cas d'un “sup inf” .

Autrement dit, sans perte de généralité, la Valeur inférieure et la Valeur supérieure du jeu (2.2) peuvent s'obtenir comme

$$W^+(t_0, X_0) = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\tau \in \Omega} J(t_0, X_0, \tau, \phi(\tau)) , \quad (2.3)$$

$$W^-(t_0, X_0) = \sup_{\psi \in \Psi} \inf_{\xi \in \Xi} J(t_0, X_0, \psi(\xi), \xi) . \quad (2.4)$$

Remarque 2.1.3 *Il est important de mentionner que l'ensemble des stratégies (τ, ξ) en BO est effectivement inclus dans l'ensemble des stratégies non anticipatives (ϕ, ψ) , comme stratégies non anticipatives indépendantes de la stratégie de l'autre joueur (application constante dans la commande de l'autre joueur) ⁵.*

Remarque 2.1.4 *Il est connu que le « principe du maximum de Pontriaguine » [PBG62] (pages 17-21) ne peut pas s'entendre d'un problème de contrôle optimal à un problème de jeux différentiels, en raison des stratégies non anticipatives qui utilisent l'information sur la commande de l'autre joueur et génèrent ainsi dans la dynamique des discontinuités à des états non prévus à l'avance. Par conséquent, dans notre cadre, la discussion sur le principe du maximum de Pontriaguine commence et se termine dans cette remarque.*

⁵Il est à noter que [Kel61] considérait à l'origine des stratégies en BO et que [KS77] à étendu le choix des commandes à l'ensemble des stratégies en feedback d'état.

Existence d'une Valeur pour un jeu à deux joueurs et à somme nulle

Un autre point important concerne l'existence d'une « Valeur du jeu » dans le cas où il nous faut examiner conjointement la Valeur supérieure W^+ et la Valeur inférieure W^- (2.2). On dit que le jeu à deux joueurs et à somme nulle possède une Valeur si l'égalité suivante est satisfaite :

$$W^+(t_0, X_0) = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\tau \in \Omega} J(t_0, X_0, \psi(\xi), \phi(\tau)) = \sup_{\xi \in \Xi} \inf_{\phi \in \Phi} J(t_0, X_0, \psi(\xi), \phi(\tau)) = W^-(t_0, X_0) ,$$

c'est-à-dire si la Valeur inférieure et la Valeur supérieure du jeu coïncident. On note cette Valeur $W = W^+ = W^-$.

Si l'inf et le sup sont atteints, c'est-à-dire si le min et le max existent, le couple de stratégies optimales (ψ^*, ϕ^*) associé à la Valeur du jeu caractérise un « point selle », vérifiant les inégalités de point selle

$$J(t_0, X_0, \phi^*, \psi) \leq J(t_0, X_0, \phi^*, \psi^*) \leq J(t_0, X_0, \phi, \psi^*) .$$

Dans ce cas, on peut s'affranchir de l'ordre des décisions et, pour chacun des deux joueurs, l'information disponible sur la commande de l'adversaire n'a pas d'importance [Ber76]. Les stratégies optimales (ψ^*, ϕ^*) peuvent ainsi être déterminées indépendamment. Si de plus la Valeur du jeu existe ($W = W^+ = W^-$), alors le lemme de Berkovitz signifie que la commande de l'un des joueurs au choix peut être prise en BO. Différents auteurs (W.H.Fleming [Fle64], P.P.Varaiya [Var67], A.Friedman [Fri71], N.Krassovski et A.Soubotine [KS77]) ont obtenu, dans des cadres stratégiques différents, des théorèmes d'existence de la Valeur d'un jeu différentiel. Tous ces théorèmes d'existence sont fondés sur « la condition d'Isaacs » à savoir que l'hamiltonien du jeu (défini plus loin) possède un point selle en (τ, ξ) . Dans [Var67] l'auteur utilise des stratégies non anticipatives, tandis que dans [Fle64, Fri71] les auteurs procèdent par un découpage du temps afin d'utiliser une commande en BO par morceaux sur chaque pas de temps, avec prise en compte de l'état à la fin de chaque pas. Ils font ensuite tendre ce pas de temps vers 0 pour obtenir le théorème d'existence. Pour les jeux qualitatifs, le « théorème de l'alternative » [KS77] est un équivalent du théorème d'existence de la Valeur. Dans [KS77, BGL69] les auteurs utilisent le théorème de l'alternative et la correspondance entre jeu qualitatif et jeu quantitatif (mentionnée dans la section 2.4) afin de procéder à l'étude de jeux quantitatifs et construire un théorème d'existence de la Valeur pour les jeux quantitatifs, avec un concept différent de stratégies en feedback d'état et une généralisation de la notion de solution d'une équation différentielle. Cependant ils perdent l'unicité de la trajectoire engendrée par une paire de commandes. Plus récemment, J.P.Aubin [Aub91] pour les problèmes de commande optimale, et M.Quincampoix (dans sa thèse) pour les jeux différentiels, ont utilisé des techniques analogues (mentionnées plus loin dans la remarque 2.4.3) pour obtenir un théorème de l'alternative.

Le cas de notre jeu minimax

Pour notre problème d'évaluation d'options, nous nous plaçons dans le cadre d'un problème classique de commande robuste en présence d'une perturbation supposée d'amplitude bornée avec $\mathcal{U} = [\tau^-, \tau^+]$ (voir l'hypothèse (1.8)) et $\mathcal{V} = \mathbb{R}$. Les ensembles des commandes des deux joueurs, $\tau(\cdot) \in \Omega$

(1.23) et $\xi(\cdot) \in \Xi$ (1.25), sont respectivement des applications $\Omega : [0, T] \rightarrow \mathcal{U}$ et $\Xi : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$. La finalité de notre jeu fait que l'on se restreint à l'étude d'un problème de « commande minimax » (la prime étant définie par l'équation (1.35)), c'est-à-dire que l'on cherche à identifier uniquement la Valeur supérieure (2.3). Ainsi la discussion sur l'existence de la Valeur du jeu ne nous concerne pas. Par ailleurs la commande du maximiseur $\tau(\cdot) \in \Omega$ est par nature indépendante de la commande du minimiseur puisqu'elle représente une perturbation aléatoire bornée ⁶. Elle a donc pu être choisie en BO, dans l'ensemble des fonctions mesurables (1.23). Par le lemme de Berkovitz on en déduit qu'il n'y a aucune perte de généralité à se limiter ainsi.

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que sous une certaine condition de régularité du critère J (critère J semi continu supérieurement (s.c.s) dans le cadre de notre jeu ⁷, le fait que la commande du maximiseur τ soit par hypothèse bornée implique, dans la formule (2.3), que le « sup » sur la commande est atteint, c'est-à-dire que le « max » existe. Ainsi si le critère J vérifie cette condition de régularité, la Valeur que l'on cherche à caractériser pour toute condition initiale $X(t_0) = X_0$ est

$$W^+(t_0, X_0) = \inf_{\phi \in \Phi} \max_{\tau \in \Omega} J(t_0, X_0, \tau, \xi) .$$

Nous constaterons au cours de la thèse que, dans certains cas, l' $\inf_{\phi \in \Phi}$ ne sera pas atteint, c'est-à-dire qu'il n'existera pas de stratégies de transaction optimale $\xi^*(\cdot) = \phi(\tau^*(\cdot))$. Nous pourrions toutefois l'approcher par une stratégie de transaction optimale en temps discret lorsque le pas de temps est suffisamment petit.

2.2 Résolution d'un jeu quantitatif à horizon fini : équation d'Isaacs et solution de viscosité

2.2.1 Equation d'Isaacs d'un jeu quantitatif

Conformément à notre problème d'évaluation d'options, nous allons nous intéresser uniquement au cas d'un jeu minimax à horizon fini. Toutefois ce que nous allons présenter dans ce paragraphe est similaire, mutatis mutandis, pour un problème de commande maximin à horizon fini T . Nous rappelons que, dans un jeu «quantitatif» à horizon fini T , le critère J est donné sous la forme (2.1), et qu'ainsi pour un jeu quantitatif minimax à horizon fini, on recherche la Valeur supérieure du jeu (2.3), s'écrivant pour l'état $(t_0, X(t_0)) = (t_0, X_0)$

$$W^+(t_0, X_0) = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\tau \in \Omega} \left[N(X(T)) + \int_{t_0}^T L(t, X(t); \tau(t), \xi(t)) dt \right] .$$

La commande du maximiseur $\tau(\cdot) \in \Omega$ est choisie en BO, et celle du minimiseur $\phi(\cdot) \in \Phi$ dans l'ensemble des stratégies non anticipatives. Il en découle immédiatement qu'à l'instant final T du jeu, la fonction Valeur correspond naturellement au critère (coût) terminal

$$W^+(T, X) = N(X) \forall X \in \mathbb{R}^n .$$

⁶Par ailleurs, une telle dépendance serait contraire à l'hypothèse d'atomicité (définition 1.1.6).

⁷Ce point fait l'objet de la propriété 4.3.1.

Remarque 2.2.1 Nous mentionnerons dans le paragraphe suivant 2.2.2, que la fonction $W^+(t_0, X_0)$ n'est généralement pas de classe C^1 , et qu'il est alors nécessaire d'avoir recours à un concept de solution faible de l'équation (2.6) à venir. Ainsi, dans la suite de ce paragraphe, le développement fait sous l'hypothèse que $W(t_0, X_0)$ est de classe C^1 s'avère uniquement heuristique.

Sous l'hypothèse que $W(t_0, X_0)$ est de classe C^1 , la Valeur supérieure s'obtient comme la solution de l'équation d'Isaacs ⁸ [Isa65],[Ber76](pages 30-51)

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{\xi \in \mathcal{V}} \sup_{\tau \in \mathcal{U}} \left[\frac{dW^+(t, X(t))}{dt} + L(t, X(t); \tau, \xi) \right] = 0, \\ \text{avec } W^+(T, X) = N(X) \forall X \in \mathbb{R}^n \text{ pour condition au bord.} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

L'équation d'Isaacs (2.5) est une conséquence directe du « *tenet of transition* » de R.Isaacs pour les jeux de poursuite-évasion [Isa51, Isa65], dont nous proposons la traduction suivante de la définition parue dans [Isa51] :

« Si le jeu minimax fait une transition d'un état à un second état et que la valeur W^+ est considérée comme connue au second état, alors la Valeur W^+ est déterminée au premier état en exigeant que les joueurs optimisent (c'est-à-dire minimaximisent) l'incrément de W^+ pendant la transition. »

L'énoncé du « *tenet of transition* » de R.Isaacs est ainsi un énoncé différentiel, en terme de transition. Plus tard, le principe du « *tenet of transition* » sera formalisé par R.Bellman [Bel57, BD62] sous une forme intégrée, connue sous le nom de « *principe d'optimalité* ». Le « *tenet of transition* » de R.Isaacs est en effet un principe d'optimalité incluant en particulier la « *cohérence intertemporelle des stratégies optimales* », à savoir que les joueurs conservent la même stratégie le long d'une trajectoire optimale (cette stratégie n'est pas modifiée si l'on se repose ultérieurement la question de la stratégie optimale). Ainsi les stratégies futures ne dépendent pas des commandes passées, mais seulement de l'état présent. On peut exploiter le « *tenet of transition* » pour déterminer la Valeur $W^+(t_0, X_0)$, solution de l'équation (2.5), par une forme continue d'un algorithme de type programmation dynamique dont l'idée de base est similaire au « *tenet of transition* » ⁹. En effet il découle du « *tenet of transition* » que la résolution de l'équation (2.5) consiste de manière heuristique à changer en temps continu la condition au bord de l'équation (2.5), où l'ensemble global des transitions en temps continu conduit de l'état (t_0, X_0) à l'état $(T, X(T))$.

Dans l'équation d'Isaacs (2.5) le terme $\frac{dW(t, X(t))}{dt}$ représente une dérivée lagrangienne, c'est-à-dire la dérivée le long d'une trajectoire $\frac{dX}{dt} = f(t, X; \tau, \xi)$. Il en résulte que

$$\frac{dW^+(t, X(t))}{dt} = \frac{\partial W^+(t, X(t))}{\partial t} + \frac{\partial W^+(t, X(t))}{\partial X} \frac{dX}{dt} = \frac{\partial W^+(t, X(t))}{\partial t} + \frac{\partial W^+(t, X(t))}{\partial X} f(t, X; \tau, \xi) .$$

Ainsi, en passant à l' "inf sup", l'équation d'HJBI (2.5) se réécrit sous la forme d'une équation aux

⁸Parfois appelée équation d'Hamilton-Jacobi-Isaacs-Bellman (HJBI), bien que le nom de Carathéodory [Car65] puisse naturellement s'insérer à l'intérieur de cette liste.

⁹Dans [Isa65], l'auteur a également étudié la forme discrète de l'équation d'Isaacs et sa résolution par un algorithme de programmation dynamique.

dérivées partielles (EDP) du 1^{er} ordre

$$\frac{\partial W^+(t, X(t))}{\partial t} + \inf_{\xi \in \mathcal{U}} \sup_{\tau \in \mathcal{V}} \left[\frac{\partial W^+(t, X(t))}{\partial X} f(t, X; \tau, \xi) + L(t, X; \tau, \xi) \right] = 0 \quad (2.6)$$

initialisée avec la condition au bord adéquate $W^+(T, X) = N(X) \forall X \in \mathbb{R}^n$. En incluant le temps comme variable d'état de dérivée unité, $\bar{X} = (t, X) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ et $\bar{f} = (1, f)$, l'équation d'Isaacs (2.6) se réécrit plus simplement

$$\inf_{\xi \in \mathcal{U}} \sup_{\tau \in \mathcal{V}} \left[\frac{\partial W^+}{\partial \bar{X}} \bar{f}(\bar{X}; \tau, \xi) + L(\bar{X}; \tau, \xi) \right] = 0 \quad \text{avec } W^+(T, X) = N(X) \forall X \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

Selon les auteurs, l'une des deux fonctions H suivantes est appelée l'*hamiltonien*, où p représente « l'adjoint » et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel :

$$\begin{aligned} H : ([0, T] \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{V} \times \mathcal{U} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\bar{X}, p; \tau, \xi) &\mapsto H(\bar{X}, p; \tau, \xi) = \langle p, \bar{f}(\bar{X}; \tau, \xi) \rangle + L(\bar{X}; \tau, \xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H : ([0, T] \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\bar{X}, p) &\mapsto H(\bar{X}, p) = \inf_{\xi \in \mathcal{U}} \sup_{\tau \in \mathcal{V}} [\langle p, \bar{f}(\bar{X}; \tau, \xi) \rangle + L(\bar{X}; \tau, \xi)]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Remarque 2.2.2 *Par un abus de notation, on utilise la même lettre H pour désigner les deux fonctions (2.8), le nombre d'arguments permettant de distinguer si la fonction H utilisée est la fonction minimaximisée ou non.*

L'équation d'Isaacs (2.7) se réécrit ainsi sous la forme simple

$$H(\bar{X}, \frac{\partial W^+}{\partial \bar{X}}) = 0 \quad \text{avec } W^+(T, X) = N(X) \forall X \in \mathbb{R}^n. \quad (2.9)$$

Pour un jeu quantitatif à horizon fini, on note que dans l'équation d'Isaacs (2.7) l'hamiltonien ne dépend de la fonction Valeur (supérieure) W^+ que par le biais son gradient $\frac{\partial W^+}{\partial \bar{X}}$.

Pour un problème de commande maximin, mutatis mutandis, la Valeur inférieure s'obtient comme solution de l'équation d'Isaacs

$$H_*(\bar{X}, \frac{\partial W^-}{\partial \bar{X}}) = \frac{\partial W^-(t, X(t))}{\partial t} + \sup_{\tau \in \mathcal{V}} \inf_{\xi \in \mathcal{U}} \left[\frac{\partial W^-(t, X(t))}{\partial X} f(t, X; \tau, \xi) + L(t, X; \tau, \xi) \right] = 0. \quad (2.10)$$

où H_* désigne l'hamiltonien $H(\bar{X}, p; \tau, \xi)$ « maximinimisé ».

Si l'hamiltonien a un point selle (sup et inf atteints) les équations (2.6) et (2.10) sont identiques (communes à la Valeur supérieure et inférieure). Cette condition est appelée l'hypothèse d'Isaacs. Si en plus il y a unicité de la solution de l'équation, alors cette solution est la Valeur du jeu $W = W^+ = W^-$.

La proposition ci-dessous illustre un cas où l'hypothèse d'Isaacs est trivialement vérifiée.

Proposition 2.2.1 *Si l'hamiltonien $H(\bar{X}, p; \tau, \xi)$ est séparé, alors l'hypothèse d'Isaacs est clairement*

satisfaite.

Preuve de la proposition 2.2.1 Supposons que l'hamiltonien $H(\bar{X}, p; \tau, \xi)$ soit séparé, c'est-à-dire compte tenu de la définition de l'hamiltonien (2.8), qu'à la fois la dynamique $\bar{f}(\bar{X}; \tau, \xi)$ et le lagrangien $L(\bar{X}; \tau, \xi)$ soient séparés. L'hamiltonien étant séparé, celui-ci peut se réécrire sous la forme

$$H(\bar{X}, p; \tau, \xi) = H_1(\bar{X}, p; \tau) + H_2(\bar{X}, p; \xi) .$$

On en déduit directement que la minimisation en τ et la maximisation en ξ peuvent s'effectuer séparément dans les équations (2.6) et (2.10) (ou de manière équivalente dans l'hamiltonien minimaximisé et maximinimisé). Par conséquent, les équations (2.6) et (2.10) sont identiques. ■

Bien que, dans le cadre de notre jeu minimax, on ne s'intéresse qu'à la Valeur supérieure, nous mentionnons toutefois que l'hamiltonien de notre jeu minimax est séparé (ce que l'on pourra constater dans l'équation qualitative d'Isaacs (3.17)). Ainsi la minimisation et la maximisation s'effectueront séparément, ce qui facilitera la résolution du jeu et la détermination des contrôles optimaux de chacun des deux joueurs (paragraphe 3.3.2 à venir) si ces contrôles optimaux existent (c'est-à-dire à condition que l'« \inf_ϕ » soit atteint dans le cas de notre jeu).

2.2.2 Solution de viscosité de l'équation d'Isaacs

Nous cherchons à déterminer la Valeur supérieure solution de l'équation d'Isaacs (2.6) qui se réécrit sous la forme (2.9). De manière générale, cette Valeur n'est pas de classe \mathcal{C}^1 et ainsi l'équation (2.9) n'a pas de solution régulière. On a alors recours à un concept de solution faible appelé solution de viscosité de l'équation (2.9), permettant de généraliser le concept de solution d'une EDP du 1^{er} ordre à des fonctions uniformément continues mais non \mathcal{C}^1 (c'est-à-dire présentant une ou des discontinuités de gradient). Ce concept a été introduit par W.H.Fleming [Fle64]¹⁰ et renouvelé par une approche utilisant des « fonctions tests » à partir de 1981 par M.Crandall et P.L.Lions [CL83], et étendu aux jeux différentiels par L.C.Evans et P.E.Souganidis [ES84], puis par « l'école italienne » dont nous citons, pour exemple, M.Bardi et I.Capuzzo-Dolcetta [BCD97].

Définition 2.2.2 Soit W une fonction continue dans l'espace d'état $\bar{X} = (t, X)$.

➤ W est dite sous-solution de l'équation d'Isaacs (2.9) si $\forall \bar{X}_1, \forall \Phi^*$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $(W - \Phi^*)$ à un maximum local en \bar{X}_1 alors

$$H(\bar{X}_1, \frac{\partial \Phi^*}{\partial \bar{X}}(\bar{X}_1)) \geq 0 \quad \text{et} \quad W(T, X) \leq N(X) .$$

➤ W est dite sur-solution de l'équation d'Isaacs (2.9) si $\forall \bar{X}_2, \forall \Phi_*$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $(W - \Phi_*)$

¹⁰W.H.Fleming perturbe l'équation d'Isaacs en rajoutant un terme de dérivée seconde garantissant l'existence d'une solution à cette équation d'Isaacs perturbée. Il fait ensuite tendre le terme de dérivée seconde vers 0 afin d'obtenir une solution faible de l'équation d'Isaacs.

à un minimum local en \bar{X}_2 alors

$$H(\bar{X}_2, \frac{\partial \Phi_*}{\partial \bar{X}}(\bar{X}_2)) \leq 0 \quad \text{et} \quad W(T, X) \geq N(X) .$$

➤ W est solution de viscosité de (2.9) si elle est à la fois sur-solution et sous-solution de viscosité de cette équation.

La définition 2.2.2 implique que dans tout ouvert où W est de classe \mathcal{C}^1 , la fonction W , solution de viscosité, vérifie l'équation (2.9).

Remarque 2.2.3 *Il est important de mentionner que dans la définition 2.2.2 nous avons adopté une convention de signe différente de celle de la littérature classique [Bar94, BCD97] sur les solutions de viscosité. En désignant par H l'hamiltonien (2.8) et en utilisant la définition classique [Bar94, BCD97] de solution de viscosité, nous recherchons en réalité une solution de viscosité de $-H(\bar{X}, \frac{\partial W^+}{\partial \bar{X}}) = 0$ qui diffère en général ¹¹ de celle de $H(\bar{X}, \frac{\partial W^+}{\partial \bar{X}}) = 0$.*

Remarque 2.2.4 *La définition 2.2.2 se restreint au cas d'un jeu quantitatif à horizon fini où l'hamiltonien H ne dépend de la Valeur W^+ que par son gradient (voir l'équation d'Isaacs (2.9)). Les fonctions tests Φ^* et Φ_* peuvent dans ce cas être librement translatées d'une constante compte tenu de l'indépendance de l'hamiltonien H par rapport à la fonction valeur.*

Dans la définition 2.2.2, le gradient $\frac{\partial \Phi^*}{\partial \bar{X}}$ appartient au « sur-différentiel » de la fonction W en X_1 , et $\frac{\partial \Phi_*}{\partial \bar{X}}$ appartient au « sous-différentiel » de W en X_2 . Par ailleurs, si le sur-différentiel est non vide, alors nécessairement le sous-différentiel est vide et réciproquement. Il en découle que seule une des deux conditions dans la définition 2.2.2 est à vérifier. En effet, l'ensemble des « fonctions tests » Φ (Φ^* ou Φ_*) est alors l'ensemble vide pour l'autre des conditions, qui s'avère ainsi automatiquement vérifiée. En conclusion, lorsque W n'est pas de classe \mathcal{C}^1 , il faut comprendre la géométrie du jeu pour savoir si l'on est en présence d'un minimum ou d'un maximum local et de ce fait savoir laquelle des deux premières conditions de la définition 2.2.2 est à vérifier. A cet effet on utilisera le test suivant :

Proposition 2.2.3 *Soit une discontinuité de gradient portée par une variété différentiable d'équation $S(\bar{X}) = 0$ et de gradient $\nabla S(\bar{X}) \neq 0$. Notons $\nabla W^+(\bar{X})$ (respectivement $\nabla W^-(\bar{X})$) le gradient de la fonction W en \bar{X} , dans le demi-espace $S(\bar{X}) > 0$ (respectivement $S(\bar{X}) < 0$). Pour toute direction transverse h telle que $\langle \nabla S, h \rangle > 0$, si le signe de $\langle \nabla W^+ - \nabla W^-, h \rangle$ est positif (respectivement négatif), alors la discontinuité de gradient correspond à un minimum local (respectivement un maximum local).*

Preuve de la proposition 2.2.3 Par un argument direct de géométrie différentielle, on a $\nabla W^+ - \nabla W^- = \lambda \nabla S$ avec $\lambda > 0$ (respectivement $\lambda < 0$) si la discontinuité de gradient correspond à un

¹¹Les deux équations possèdent plusieurs solutions faibles, et la solution de viscosité de $H = 0$ et $-H = 0$ sélectionne en général deux solutions différentes.

minimum local (respectivement un maximum local). Il en découle qu'un premier test, pour savoir si l'on est en présence d'un minimum local ou d'un maximum local, consiste à regarder le signe de

$$\langle \nabla W^+ - \nabla W^-, \nabla S \rangle = \lambda \|\nabla S\|^2$$

qui est celui de λ . Cependant on préfère utiliser le test énoncé dans la proposition. En effet, pour toute direction (vecteur) h transverse (plutôt que perpendiculaire dans le cas du test ci-dessus) telle que $\langle \nabla S, h \rangle > 0$ alors le signe de

$$\langle \nabla W^+ - \nabla W^-, h \rangle = \lambda \langle \nabla S, h \rangle$$

est également celui de λ , ce qui prouve la proposition. On pourra choisir adroitement une direction transverse de sorte que ce test soit dimensionnellement homogène (au sens de la physique). ■

Unicité de la solution de viscosité

Un des résultats forts du concept de solution de viscosité est le résultat d'existence et d'unicité de la solution de viscosité pour un hamiltonien continu. La preuve de ce résultat a été obtenue dans [CL83] et simplifiée dans [CEL84] pour un problème de commande optimale, puis étendue aux jeux différentiels dans [ES84]). Le résultat d'unicité utilise « le théorème de comparaison » [CL83] énonçant que toute sur-solution est nécessairement plus grande que toute sous-solution, pour en conclure que si une fonction W est à la fois sous-solution et sur-solution, alors elle est l'unique solution de viscosité de (2.7).

En effet, supposons que W_1 et W_2 sont deux solutions de viscosité. Chacune de ces deux solutions est à la fois sous-solution et sur-solution. En particulier W_1 est une sous-solution et W_2 est une sur-solution, ce qui conduit à $W_1 \leq W_2$ (puisque par le théorème de comparaison toute sur-solution est nécessairement plus grande que toute sous-solution). Réciproquement, W_1 est une sur-solution et W_2 est une sous-solution, et ainsi $W_1 \geq W_2$. Il en découle l'égalité $W_1 = W_2$ et donc l'unicité de la solution de viscosité.

2.2.3 Solution de viscosité discontinue de l'équation d'Isaacs

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressé au problème d'évaluation d'options digitales pour lesquelles le paiement est discontinu (voir la figure 1.2). Nous verrons que cette discontinuité se propage au sein de la fonction Valeur. Ainsi nous aurons besoin d'une extension de la notion de la solution de viscosité à des fonctions discontinues. En ce sens, nous suivrons la définition suivante de G.Barles [Bar94].

Notons W^* , N^* (respectivement W_* , N_* ,) les enveloppes s.c.s (respectivement s.c.i) de la fonction Valeur W et de la fonction de coût terminal N , par rapport à toutes les variables. Les enveloppes supérieures et inférieures de la fonction Valeur

$$W_*(\bar{X}) = \liminf_{\bar{X}_n \rightarrow \bar{X}} W(\bar{X}_n) \quad \text{et} \quad W^*(\bar{X}) = \limsup_{\bar{X}_n \rightarrow \bar{X}} W(\bar{X}_n)$$

ont pour conditions au bord respectives

$$W^*(T, X) = N^*(X) \text{ et } W_*(T, X) = N_*(X) \quad \forall X \in \mathbb{R}^n .$$

Définition 2.2.4 La fonction W est dite « **une** » solution de Viscosité discontinue de l'équation d'Isaacs $H(\bar{X}, p) = 0$ si W^* est une sous-solution et W_* est une sur-solution de cette équation, c'est-à-dire si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

➤ $\forall \bar{X}_1 \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $\forall \Phi^*$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $(W^* - \Phi^*)$ à un maximum local en \bar{X}_1 alors

$$H(\bar{X}_1, \frac{\partial \Phi^*}{\partial \bar{X}}(\bar{X}_1)) \geq 0 \text{ et } W_*(T, X) \leq N_*(X) .$$

➤ $\forall \bar{X}_2 \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $\forall \Phi_*$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $(W_* - \Phi_*)$ à un minimum local en \bar{X}_2 alors

$$H(\bar{X}_2, \frac{\partial \Phi_*}{\partial \bar{X}}(\bar{X}_2)) \leq 0 \text{ et } W_*(T, X) \geq N_*(X) .$$

La figure 2.1 illustre de manière basique la notion de fonctions tests Φ^* et Φ_* en présence d'une discontinuité de la fonction Valeur W correspondant à un simple saut.

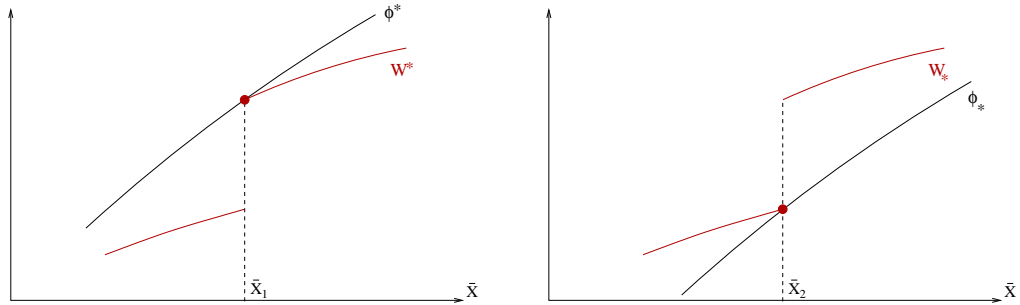


FIG. 2.1 – Notion de fonctions tests Φ_* et Φ^* dans le cas où la discontinuité de W est un simple saut.

On remarque que, dans la définition 2.2.4, une sous-solution de viscosité discontinue W^* est supérieure à une sur-solution de viscosité discontinue W_* . Ceci provient du fait que la sur-solution et la sous-solution n'ont pas la même condition au bord. Ainsi, le théorème de comparaison n'est pas valable dans le cas discontinu, et de ce fait l'unicité de la solution de viscosité dans le cas discontinu ne peut plus être fondée sur le théorème de comparaison. A ce jour, il manque un théorème d'unicité de la solution de viscosité discontinue pour notre jeu impulsif dans lequel, comme on le verra au paragraphe 5.3.1, l'infimum du coût des sauts est égal à 0.

Pour pouvoir vérifier qu'une fonction W est une solution de viscosité discontinue, on s'appuiera sur la proposition suivante pour construire les gradients des fonctions tests.

Proposition 2.2.5 Si la discontinuité est un simple saut porté par une variété différentiable d'équation $S(\bar{X}) = 0$ avec en outre W^* (respectivement W_*) de classe \mathcal{C}^1 dans le demi espace $S(\bar{X}) > 0$ (respectivement $S(\bar{X}) < 0$), alors l'ensemble des gradients des fonctions Φ_* et Φ^* , c'est-à-dire les éléments $\frac{\partial \Phi^*}{\partial \bar{X}}$ du sur-différentiel et les éléments $\frac{\partial \Phi_*}{\partial \bar{X}}$ du sous-différentiel, s'écrivent respectivement sous la

forme

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial W^*}{\partial \bar{X}} + \mu \frac{\partial S}{\partial \bar{X}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi_*}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial W_*}{\partial \bar{X}} + \nu \frac{\partial S}{\partial \bar{X}} \quad \text{avec } \mu > 0, \nu > 0, \quad (2.11)$$

où $\frac{\partial W^*}{\partial \bar{X}}$ (respectivement $\frac{\partial W_*}{\partial \bar{X}}$) sont les gradients dans le demi-espace où W^* (respectivement W_*) est continu.

Preuve de la proposition 2.2.5 Nous allons faire la preuve seulement pour les éléments du sur-différentiel. Pour les éléments du sous-différentiel la preuve est similaire mutatis-mutandis, ou tout simplement en passant à l'opposé en Φ, W, S .

Considérons que $W^* - \Phi^*$ a un maximum local égal à zero ¹² en \bar{X}_1 (voir la définition 2.2.4 et la figure 2.1) porté par une variété différentiable d'équation $S(\bar{X}) = 0$. Soit $\bar{X}(\theta) = \bar{X}_1 + \theta h$, où la direction h est choisie telle que $\langle \nabla S(\bar{X}_1), h \rangle > 0$. Pour θ petit l'état se dirige vers la région où $S(\bar{X}(\theta)) > 0$ compte tenu du signe du produit scalaire. Ainsi $W^*(\bar{X}(\theta))$ est de classe \mathcal{C}^1 par hypothèse (W^* de classe \mathcal{C}^1 dans le demi espace $S \geq 0$). Comme $W^* - \Phi^*$ a un maximum local égal à 0 en \bar{X}_1 , on a

$$(W^* - \Phi^*)(\bar{X}_1) = 0 \quad \text{et} \quad (W^* - \Phi^*)(\bar{X}(\theta)) \leq 0.$$

En outre, puisque chacune des fonctions W^* et Φ^* est de classe \mathcal{C}^1 dans le demi-espace $S(\bar{X}) > 0$, on obtient en $\theta = 0$ (en $\bar{X}(0) = \bar{X}_1$)

$$\frac{d}{d\theta} \Phi^*(\bar{X}(\theta)) \geq \frac{d}{d\theta} W^*(\bar{X}(\theta)).$$

Or en $\theta = 0$, $\frac{d}{d\theta} \Phi^*(\bar{X}(\theta)) = \langle \nabla \Phi^*, h \rangle$ et $\frac{d}{d\theta} W^*(\bar{X}(\theta)) = \langle \nabla W^*, h \rangle$, d'où

$$\langle \nabla \Phi^*, h \rangle \geq \langle \nabla W^*, h \rangle.$$

Par linéarité du produit scalaire, on vient ainsi de démontrer que

$$\forall h \text{ tel que } \langle \nabla S, h \rangle \geq 0 \text{ alors } \langle \nabla \Phi^* - \nabla W^*, h \rangle \geq 0.$$

Il en découle que $\nabla \Phi^* - \nabla W^*$ est colinéaire à ∇S avec un coefficient positif, et qu'ainsi le gradient de Φ^* est de la forme (2.11). Il n'est pas nécessaire de démontrer la réciproque :

$$\forall p \text{ de la forme } p = \frac{\partial W^*}{\partial \bar{X}} + \mu \frac{\partial S}{\partial \bar{X}} \quad \text{avec } \mu > 0, \exists \text{ une fonction } \Phi^* \text{ dont } p \text{ est le gradient,}$$

bien que celle-ci soit vraie ¹³. En effet, en présence d'une discontinuité de gradient portée par une variété d'équation $S(\bar{X}) = 0$, on vérifiera que la condition de viscosité (la première condition de la définition 2.2.4) est vraie quel que soit p de la forme ci-dessus (de manière équivalente, quelque soit $\mu > 0$), et donc a fortiori vraie pour l'ensemble des fonctions tests Φ^* . ■

¹²Par la remarque 2.2.4, on peut librement translater la fonction Φ^* d'une constante de manière à obtenir ce maximum égal à zero sans aucune perte de généralité.

¹³Il suffit de choisir $\Phi^*(\bar{X}) = \tilde{W}(\bar{X}) + \mu S(\bar{X})$ où \tilde{W} est un extension \mathcal{C}^1 de W dans le demi-espace $S(\bar{X}) > 0$.

2.2.4 Le cas d'un jeu minimax multi-étages. Programmation dynamique

Dans le cas d'un jeu minimax multi-étages la situation est beaucoup plus simple puisqu'il n'y a pas le problème d'existence d'une solution de classe C^1 à l'équation d'Isaacs. Un jeu multi-étages est a priori défini dans un espace d'état X où le temps est discret. Une trajectoire est donc une suite $\{X_k\}_{k=\{0,1,\dots,\mathbb{K}\}}$. Dans notre problème d'évaluation d'options, et de fait dans ce paragraphe, nous nous intéressons au cas où le jeu multi-étages (paragraphe 1.4) est construit à partir d'un problème en temps continu, par échantillonnage.

Soit h le pas de temps et $k = \{0, 1, \dots, \mathbb{K}\}$ la suite des indices correspondant aux instants d'échantillonnage $t_k = kh$ (avec $T = \mathbb{K}h$ l'instant final du jeu), et $X_k = X(t_k)$, $\tau_k = \tau(t_k)$, $\xi_k = \xi(t_k)$. Dans l'espace d'état X la dynamique d'un tel jeu s'écrit

$$X_{k+1} = f(k, X_k; \xi_k, \tau_k) ,$$

où les ensembles des commandes des deux joueurs à chaque instant t_k fixé sont notés $\tau_k \in \mathcal{U}$ et $\xi_k \in \mathcal{V}$. Les suites des stratégies des deux joueurs sont choisies, en BO pour le maximiseur avec $\{\tau_k\}_{k=0,1,\dots,\mathbb{K}} \in \Omega$, et parmi l'ensemble des stratégies non anticipatives pour le minimiseur avec

$$\{\xi_k\}_{k=0,1,\dots,\mathbb{K}} = \{\phi_k(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{k-1})\}_{k=0,1,\dots,\mathbb{K}} \in \Phi$$

(et non $\phi_k(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k)$, car cela impliquerait la connaissance de l'état futur X_{k+1} pour le minimiseur).

Remarque 2.2.5 *Dans le cadre étudié (un jeu multi-étages obtenu par échantillonnage d'un jeu différentiel), il est souvent considéré que les commandes du problème continu sont constantes sur chaque pas d'échantillonnage, ce qui n'est pas le cas dans notre jeu \mathcal{G}^h .*

Pour tout état (k, X) , la Valeur recherchée est la solution de

$$W^+(k, X) = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\tau \in \Omega} J(k, X, \xi, \tau) , \quad (2.12)$$

où le critère J est composé d'un critère terminal et d'un critère somme

$$J(k, X; \tau, \xi) = N(X_{\mathbb{K}}) + \sum_{\ell=k}^{\mathbb{K}} L(\ell, X_\ell; \xi_\ell, \tau_\ell) .$$

La Valeur (2.12) du jeu minimax s'obtient comme l'unique solution de l'équation d'Isaacs suivante

$$\begin{cases} W^+(k, X) &= \inf_{\xi \in \mathcal{V}} \sup_{\tau \in \mathcal{U}} [W^+(k+1, f(k, X; \xi, \tau) + L(k, X; \xi, \tau))] , \\ W^+(\mathbb{K}, X) &= N(X) \text{ condition terminale} . \end{cases} \quad (2.13)$$

La résolution de cette équation d'Isaacs (2.13) se fait à l'aide d'un algorithme de programmation dynamique classique, et les stratégies obtenues qui « minimaximisent » l'équation (2.13) sont des stratégies optimales sous la condition que l' $\inf_{\xi \in \mathcal{V}}$ et le $\sup_{\tau \in \mathcal{U}}$ soient atteints (c'est-à-dire que l' \inf et le \sup deviennent respectivement un \min et un \max).

2.3 Jeu qualitatif : semi-perméabilité et barrières

Nous donnons dans ce paragraphe quelques grandes lignes (notion de surface semi-perméable et de barrière) de la partie jeu qualitatif (ou « game of kind ») de la « théorie d'Isaacs-Breakwell ». Pour plus de généralités sur cette théorie, le lecteur peut se rapporter à [Ber76](chapitre 6).

Nous nous intéressons à présent au cas d'un jeu qualitatif minimax à instant final T dans l'espace d'état¹⁴ (t, Y) , consistant à caractériser les états pouvant être conduits par le trader \mathbf{P} à l'instant T dans une cible

$$\mathbb{C}_T(a) = \{ Y \mid \bar{N}(Y) \leq a \} \quad (2.14)$$

contre toute défense du fugitif \mathbf{F} . Si, dans l'espace d'état (t, Y) , la zone de capture $\mathbb{C}_t(a)$ est finie pour tout instant $t \in [0, T]$, sa frontière (l'hypersurface qui sépare les états capturables des états non capturables) présente la propriété dite de « semi-perméabilité » à savoir que ni \mathbf{P} ni \mathbf{F} ne peuvent forcer l'état à la traverser dans le sens qui lui est favorable. Soit ν une normale à cette hypersurface en chacun de ses points, et pointant du côté favorable à \mathbf{F} . Notons $\bar{g}(t, Y; \tau, \xi) = (1, g(t, Y; \tau, \xi))$ avec $g(t, Y, \tau, \xi) = \dot{Y}$, la dynamique du jeu qualitatif dans l'espace d'état (t, Y) . En désignant par $\langle \nu, \bar{g}(t, Y, \tau, \xi) \rangle$ le produit scalaire entre ν et la dynamique \bar{g} du jeu, la condition de semi-perméabilité s'écrit, :

$$\inf_{\xi \in \mathcal{V}} \sup_{\tau \in \mathcal{U}} \langle \nu, \bar{g}(t, Y, \tau, \xi) \rangle = \inf_{\xi \in \mathcal{V}} \sup_{\tau \in \mathcal{U}} (\nu^t \bar{g}(t, Y, \tau, \xi)) = 0 . \quad (2.15)$$

Cette relation donne la «*forme qualitative de l'équation d'Isaacs*» où le produit scalaire $H(t, Y, \nu, \tau, \xi) = \langle \nu, \bar{g}(t, Y, \tau, \xi) \rangle$ représente l'hamiltonien. L'équation (2.15) a une interprétation intuitive très claire basée sur une vision géométrique de la notion de semi-perméabilité et normales semi-perméables. Soit (t, Y) un état situé sur une surface semi-perméable de normale ν choisie pointée vers la direction favorable à \mathbf{F} . Alors, si le produit scalaire $\langle \nu, \bar{g}(t, Y; \tau, \xi) \rangle$ dans (2.15) est positif, l'état se dirige vers la zone favorable à \mathbf{F} , c'est-à-dire hors de la zone de capture. Au contraire, pour cette même orientation de la normale, si le produit scalaire est négatif, l'état se dirige vers la zone favorable à \mathbf{P} , c'est-à-dire dans la zone de capture. L'équation qualitative d'Isaacs (2.15) permet d'identifier les contrôles optimaux ξ^* et τ^* des deux joueurs (à condition que l'inf et le sup soient atteints). S'ils existent, ξ^* et τ^* sont instantanés, fonction de (t, Y) . De plus, le long d'une trajectoire optimale (ξ^*, τ^*) parcourant une partie C^1 de la barrière, la normale semi-perméable satisfait les équations dites « adjointes »

$$\dot{\nu}^t = \frac{d\nu^t}{dt} = -\nu^t \frac{\partial \bar{g}}{\partial Y}(t, Y; \tau^*, \xi^*) . \quad (2.16)$$

L'intégration en temps rétrograde de la dynamique et des équations adjointes (2.16) à partir d'une variété de dimension $n-2$ à l'instant T (la frontière de la « partie utile » de la cible \mathbb{C}_T à l'instant T) admettant en tout point une normale satisfaisant (2.15) (qui servira de condition terminale à (2.16)) permettra de construire une hypersurface joignant la variété frontière de la partie utile de la «*barrière naturelle*»¹⁵. On peut facilement montrer le caractère semi-perméable de cette hypersurface

¹⁴Nous distinguons le vecteur d'état Y du vecteur d'état X du jeu quantitatif car dans la section suivante nous mentionnerons un résultat d'équivalence entre un jeu quantitatif en dimension n et un jeu qualitatif en dimension $n+1$.

¹⁵On appelle barrière naturelle une surface semi-perméable construite en temps rétrograde à partir de la partie utile de la cible candidate naturelle à faire partie de la solution du jeu.

aussi longtemps qu'elle est de classe C^1 [Isa65], [Ber76](chapitre 6), [BEFT06]. Cette hypersurface est candidate naturelle à faire partie de la frontière de \mathbb{C}_t .

Cependant la normale semi-perméable (l'adjoint) ν peut subir des discontinuités le long des trajectoires optimales (ξ^*, τ^*) , et dans ce cas, la barrière n'est plus de classe C^1 , et les équations adjointes (2.16) ne sont plus définies. On verra (en particulier dans le paragraphe 3.7) que l'on peut les remplacer par des « équations adjointes généralisées », qui est un concept faible de l'adjoint, introduit par P.Bernhard [Ber77].

En présence d'une discontinuité de l'adjoint, la construction en temps retrograde se heurte à des singularités du champ de trajectoires extrémales, qui engendrent des variétés singulières dites « équivoques » et « focales » dans la terminologie d'Isaacs-Breakwell.

Notons que R.Isaacs a été le premier à identifier une variété équivoque dans [Isa65], tandis que J.V.breakwell et A.W.Merz ont été les premiers à trouver une variété focale (de dimension 1), apparaissant dans le problème « Homicidal chauffeur » [Mer71, BM69]. P.Bernhard [Ber77] a développé une théorie de construction des ces variétés équivoques et focales, par une technique de raccordement de barrière. Mentionnons également que dans [MB05], A.A.Melikyan et P.Bernhard ont réussi à développer une théorie générale sur les variétés focales de dimension supérieure ou égale à deux (définies comme solution d'un système de deux EDP couplées du premier ordre), prouvant ainsi une conjecture de A.A.Melikyan vieille de plus de vingt ans. E outre, c'est l'étude du jeu qualitatif développé dans cette thèse qui, à notre connaissance, a exhibé pour la première fois une variété focale de dimension supérieur (égale à deux)¹⁶, et qui a permis une meilleure compréhension des variétés focales d'ordre supérieure et, par extension, qui a initié la généralisation obtenue dans [MB05].

L'apparition de variétés singulières dites « équivoques » et « focales » est propre aux jeux différentiels. Dans un problème de commande optimale, une telle singularité ne peut pas se produire du fait de la « condition d'Erdmann Weierstrass » [Bol04](p38), qui énonce que les singularités se produisent à des endroits où l'adjoint ν reste continu. Cette condition sur l'adjoint, centrale dans l'énoncé du principe de Pontriaguine [PBG62](p17-21), fait que le principe de Pontriaguine ne peut pas s'appliquer aux jeux différentiels. Pour un jeu différentiel, P.Bernhard a obtenu dans sa thèse [Ber70] une condition appelée « condition d'indifférence », remplaçant la condition d'Erdmann Weierstrass. La barrière construite n'est plus C^1 , mais vérifie toujours la condition de semi-perméabilité, à savoir que chacun des joueurs peut empêcher l'autre joueur de franchir cette barrière dans le sens qui lui est favorable. La normale semi-perméable n'est cependant pas unique, et la condition de semi-perméabilité, consistant ici à vérifier le signe du produit scalaire $\langle \nu, \bar{g}(t, Y; \tau, \xi) \rangle$ pour toute combinaison convexe des normales de chaque partie C^1 de la barrière, est appelée condition pour que « le coin ne fuie pas ». Cette condition consiste à s'assurer que l'état se dirige vers le bon côté de la zone de capture.

Nous terminons ce paragraphe par un lien un peu brusque entre jeu quantitatif et surface semi-perméable (donc jeu qualitatif)¹⁷. Si la fonction Valeur (supérieure) W^+ du jeu quantitatif n'est pas de classe C^0 , la discontinuité ne peut être portée que par une surface semi-perméable. Par ailleurs dans ce cas, la condition de viscosité est équivalente à la « condition de semi-perméabilité » (appelée dans ce

¹⁶La construction de la variété focale de notre jeu se trouve dans le paragraphe 3.9.

¹⁷Dans le paragraphe suivant 2.4, nous montrerons (proposition 2.4.1, point \bullet) qu'il y a un résultat d'équivalence entre jeu quantitatif et jeu qualitatif; et également que l'équation qualitative d'Isaacs (2.15) peut (sous une certaine condition) se réécrire sous la forme de l'équation d'HJBI (2.6) d'un jeu quantitatif.

cas condition pour que « le coin ne fuie pas »). Par conséquent, une manière plus analytique d'étudier de telle singularités, consiste à introduire un jeu quantitatif équivalent et à vérifier la condition de viscosité en présence de discontinuité. Dans le cadre de notre jeu, cette vérification fera l'objet du paragraphe 5.4.

2.4 Equivalence entre jeu quantitatif en dimension n et jeu qualitatif en dimension $n + 1$

Dans le cadre des jeux à deux joueurs et à somme nulle¹⁸, il est classiquement connu [Isa65, BGL69, KS77] que tout jeu quantitatif en dimension n peut se ramener à une infinité de jeux qualitatifs en dimension $n + 1$. Une preuve en deux étapes consiste à montrer que :

- ① Tout jeu quantitatif dans un espace de dimension n peut se ramener à un jeu à critère purement terminal dans un espace de dimension $n + 1$.
- ② Tout jeu quantitatif à critère purement terminal se ramène à une infinité de jeux qualitatifs dans le même espace d'état.

Réciproquement, un jeu qualitatif peut se ramener à un jeu quantitatif « de meilleure approche ». Soit $\{X \mid N(X) \leq 0\}$ la cible du jeu qualitatif dans l'espace d'état $\bar{X} = (t, X)$. La frontière de la zone de capture est l'iso-valeur 0 du jeu à critère $\inf_{t>0} N(X(t))$. Ainsi la distinction entre jeu quantitatif et jeu qualitatif n'est pas essentielle. On peut passer de l'un à l'autre, respectivement en augmentant ou en diminuant la dimension de l'espace d'état de 1.

Dans la proposition qui suit, nous allons adapter cette méthode (les deux étapes ① et ②, page 74) à la finalité de notre jeu minimax¹⁹, pour montrer qu'un jeu quantitatif à horizon fini T et à critère terminal plus intégral (2.1) en dimension n peut se ramener à un jeu qualitatif unique en dimension $n + 1$ caractérisant l'ensemble des états initiaux capturables pour une cible unique.

Proposition 2.4.1

❶ *Tout jeu quantitatif à horizon fini T et à critère terminal plus intégral (2.1)*

$$J(t_0, X_0; \tau(\cdot), \xi(\cdot)) = N(X(T)) + \int_{t_0}^T L(t, X(t); \tau(t), \xi(t)) dt$$

dans un espace d'état (t, X) de dimension n , peut se ramener à un jeu qualitatif dans l'espace d'état $(t, Y) = (t, X, w)$ de dimension $n + 1$ (avec $w(t_0) = w_0$), dont le critère est donné par

$$J(t_0, X_0; \tau(\cdot), \xi(\cdot)) = N(X(T)) - w(T) + w_0 = \bar{N}(Y(T)) + w_0 . \quad (2.17)$$

¹⁸C'est également vrai dans le cadre des problèmes de contrôles optimaux.

¹⁹Voir le paragraphe 3.2 à venir.

② Tout jeu quantitatif à critère (2.17) dans l'espace d'état (t, Y) peut se ramener, dans le même espace d'état, à un jeu qualitatif unique avec pour cible unique à T

$$\mathbb{C}_T = \left\{ \left(\begin{array}{c} X \\ w \end{array} \right) \mid N(X) - w \leq 0 \right\} . \quad (2.18)$$

La frontière de la zone de capture de ce jeu qualitatif est le graph de la fonction Valeur du jeu quantitatif.

Remarque 2.4.1 Dans notre adaptation, « l'infinité » se trouve donc dans la condition initiale et non dans la cible. Cette variante était connue de R.Isaacs dès son article de 1951 [Isa51], duquel est extrait cette phrase : « Actually we consider not a simple game but a family obtained by considering all possible initial conditions », et également connue de R.Bellman [Bel57] sous le nom d' « invariant embedding ».

Le reste de ce paragraphe est principalement consacré à la **preuve de la proposition 2.4.1**.

Preuve de ①. Soit un jeu quantitatif dans l'espace d'état (t, X) de dimension n (dynamique $\dot{X} = f(t, X; \tau, \xi)$), ayant pour critère (2.1). Considérons l'espace d'état (t, Y) de dimension $n + 1$ avec

$$Y = \left(\begin{array}{c} X \\ w \end{array} \right) ,$$

où la variable d'état supplémentaire w est choisie telle que²⁰

$$\dot{w} = -L(t, \tau, \xi) \quad \text{et} \quad w(t_0) = w_0 .$$

Ainsi dans l'espace d'état (t, Y) , la dynamique obtenue est $\dot{t} = 1$ et

$$\dot{Y} = \left(\begin{array}{c} \dot{X} \\ \dot{w} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} f(t, X; \tau, \xi) \\ -L(t, X; \tau, \xi) \end{array} \right) = g(t, Y; \tau, \xi) . \quad (2.19)$$

En intégrant entre t_0 et T la dynamique en w , le critère J (2.1) se réécrit sous la forme du critère (2.17)

$$J(t_0, X_0; \tau(\cdot), \xi(\cdot)) = N(X(T)) - w(T) + w_0 = \bar{N}(Y(T)) + w_0 , \quad \forall (t_0, X_0; \tau(\cdot), \xi(\cdot)) .$$

Nous venons ainsi de démontrer que tout jeu quantitatif à horizon fini T , dans un espace d'état (t, X) de dimension n , peut se ramener à un jeu qualitatif dont le critère est (2.17) dans l'espace d'état (t, Y) de dimension supérieure $n + 1$. Par équivalence des critères, ces deux jeux ont la même Valeur. ■

Remarque 2.4.2 La preuve du point ① page 74 pouvait s'effectuer de manière identique à celle du

²⁰Ce choix de signe surprenant est destiné à faciliter l'application de cette technique à notre problème d'évaluation d'options, comme nous le ferons dans le paragraphe 3.3.

point ❶ de la proposition 2.4.1 , en choisissant la variable supplémentaire telle que

$$\dot{w} = -L(t, \tau, \xi) \quad \text{et} \quad w(t_0) = 0 .$$

Le critère (2.17) serait devenu le critère purement terminal $J(t_0, X_0; \tau(\cdot), \xi(\cdot)) = N(\bar{Y}(T))$.

Nous allons maintenant prouver le point ❷ de la proposition 2.4.1 par le biais de deux lemmes successifs, qui utilisent simultanément les deux jeux concernés, à savoir le jeu quantitatif ayant pour critère (2.17) dans l'espace d'état $(t, Y) = (t, X, w)$, et le jeu qualitatif dans le même espace d'état avec pour cible unique à T (2.18). Le jeu qualitatif consiste à caractériser les états initiaux $(t_0, Y_0) = (t_0, X_0, w_0)$ « capturables », c'est-à-dire pouvant être conduits par le minimiseur (le poursuivant **P** qui a pour stratégie $\xi(\cdot) = \phi(\tau(\cdot))$) dans la cible \mathbb{C}_T contre toute défense du maximiseur (le fugitif **F** qui a pour commande $\tau(\cdot)$). On désigne par \mathbb{C}_{t_0} l'ensemble des états (X_0, w_0) capturables (la zone de capture) à l'instant t_0 .

Lemme 2.4.2 *Les états capturables \mathbb{C}_{t_0} ont la forme d'un épigraphe*

$$\mathbb{C}_{t_0} = \left\{ \begin{pmatrix} X_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \mid w_0 \geq V(t_0, X_0) \right\} ,$$

où $V(t_0, X_0) = \inf \left\{ w \mid \begin{pmatrix} X_0 \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{t_0} \right\}$ désigne le "plancher" (la frontière inférieure en w) de la zone de capture à t_0 .

Ce lemme implique que $V(t_0, X_0)$ est une surface semi-perméable, comme frontière de la zone de capture d'un jeu qualitatif (voir paragraphe 2.3).

Preuve du lemme 2.4.2 Si l'on remplace w_0 par $w'_0 > w_0$ (dans \mathbb{C}_{t_0}) alors, pour les mêmes $(\xi(\cdot), \tau(\cdot))$, on a

$$w'(t) = w(t) + (w'_0 - w_0) \quad \forall t \in [0, T]$$

car l'écart $(w'_0 - w_0)$ est conservé le long d'une trajectoire. Ainsi à l'instant final T on aura $w'(T) > w(T)$. Compte tenu de la forme de la cible \mathbb{C}_T , il en découle que, si l'état (X_0, w_0) est capturable à l'instant t_0 , alors $\forall w'_0 > w_0$, l'état (X_0, w'_0) est a fortiori également capturable. ■

Lemme 2.4.3 $\forall (t_0, X_0)$, $V(t_0, X_0) = W(t_0, X_0)$, où $W(t_0, X_0) = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\tau \in \Omega} J(t_0, X_0, \tau, \xi)$ est la Valeur (supérieure) (2.3) du jeu quantitatif.

Le lemme 2.4.3 signifie que le graphe de la fonction Valeur W du jeu quantitatif avec critère (2.17) est une surface semi-perméable correspondant à la frontière $\partial\mathbb{C}_{t_0}$ de la zone de capture \mathbb{C}_{t_0} du jeu qualitatif avec cible \mathbb{C}_T :

$$\partial\mathbb{C}_{t_0} = \left\{ \begin{pmatrix} X_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \mid w_0 = W(t_0, X_0) \right\} . \quad (2.20)$$

Ainsi ce lemme montre qu'il suffit de résoudre le jeu qualitatif avec cible unique \mathbb{C}_T (de déterminer la zone de capture \mathbb{C}_{t_0}) pour connaître la Valeur W du jeu quantitatif. Ce lemme est par conséquent équivalent au point ② de la proposition 2.4.1.

Preuve du lemme 2.4.3 Nous allons prouver ce lemme par une double inégalité, en montrant que $w_0 > V(t_0, X_0)$ implique $w_0 \geq W(t_0, X_0)$ et réciproquement que $w_0 > W(t_0, X_0)$ implique $w_0 \geq V(t_0, X_0)$.

➔ Si $w_0 > V(t_0, X_0)$, alors $\begin{pmatrix} X_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{t_0}$, et donc il existe une stratégie du minimiseur permettant d'atteindre la cible \mathbb{C}_T (de forcer la capture à T) contre toute défense du minimiseur, ce qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{t_0} \Rightarrow \exists \phi \text{ tel que } \forall \tau(\cdot), N(X(T)) - w(T) \leq 0 .$$

Compte tenu du critère (2.17), $N(X(T)) - w(T) \leq 0$ équivaut à $J(t_0, X_0; \tau(\cdot), \phi(\tau)) \leq w_0$, et ainsi

$$\exists \phi \text{ tel que } \sup_{\tau(\cdot)} J(t_0, X_0; \tau(\cdot), \phi(\tau)) \leq w_0 ,$$

ce qui implique $\inf_{\phi} \sup_{\tau(\cdot)} J(t_0, X_0; \tau(\cdot), \phi(\tau)) \leq w_0$, c'est-à-dire $w_0 \geq W(t_0, X_0)$. On vient ainsi de montrer que $w_0 > V(t_0, X_0)$ implique $w_0 \geq W(t_0, X_0)$, ce qui conduit à la première inégalité

$$V(t_0, X_0) \geq W(t_0, X_0) .$$

➔ Si $w_0 > W(t_0, X_0)$, alors par définition de la fonction Valeur W (2.3) (l' « inf sup » du critère J) :

$$\exists \phi \text{ tel que } \sup_{\tau(\cdot)} J(t_0, X_0; \tau(\cdot), \xi(\cdot)) \leq w_0$$

ce qui implique que, pour cette stratégie ϕ ,

$$J(t_0, X_0; \tau(\cdot), \phi(\tau)) \leq w_0 \quad \forall \tau(\cdot) .$$

Par définition du critère J (2.17), il découle que $\forall \tau(\cdot), N(X(T)) - w(T) \leq 0$, et donc que $\begin{pmatrix} X_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{t_0}$.

Comme $V(t_0, X_0)$ est la frontière inférieure de la zone de capture \mathbb{C}_{t_0} , on en déduit que $w_0 \geq V(t_0, X_0)$. On vient donc de démontrer que $w_0 > W(t_0, X_0)$ implique $w_0 \geq V(t_0, X_0)$, ce qui nous donne la deuxième inégalité $W(t_0, X_0) \geq V(t_0, X_0)$. ■

Remarque 2.4.3 La preuve du point ② page 74 (tout jeu quantitatif à critère purement terminal se ramène à une infinité de jeux qualitatifs dans le même espace d'état $(t, Y) = (t, X, w)$), nous aurait montré que dans un jeu quantitatif à critère purement terminal $J = \bar{N}(Y(T))$, toutes les surfaces de

niveau (« isovaleurs ») de la fonction Valeur W

$$\{ (t_0, X_0) \mid W(t_0, X_0) = w_0, w_0 \in \mathbb{R} \}$$

sont des surfaces semi-perméables, comme frontières respectives de la zone de capture de différents jeux qualitatifs ²¹. Cependant la fonction Valeur $W(t_0, X_0)$ doit être suffisamment régulière pour garantir l'existence d'une normale à W et permettre d'écrire ainsi la forme qualitative de l'équation d'Isaacs (2.15). Dans [Aub91] J.P.Aubin généralise la notion de normale à des surfaces non régulières via le cône des normales proximales à la frontière d'un fermé. Puis à l'aide du « théorème de viabilité », il se sert du cône des normales proximales à la frontière d'un fermé pour caractériser des bassins de capture. La condition de viabilité permet d'étendre la forme qualitative d'Isaacs à des ensembles non lisses. Dans sa thèse M.Quincampoix applique ces outils aux jeux différentiels, dans le but d'obtenir un « théorème de l'alternative ».

Lorsque W n'est pas suffisamment régulière, il existe ainsi plusieurs méthodes distinctes pour décrire les gradients de la fonction W , soit en terme d'analyse via la notion de solution de viscosité, soit en terme géométrique via le cône des normales proximales. Toutefois l'étude des liens stricts entre ces deux approches dépasserait le cadre de la thèse.

Nous terminons ce paragraphe par une équivalence entre la forme qualitative d'Isaacs (2.15) et l'équation d'Isaacs (équation d'HJBI) (2.6).

Proposition 2.4.4 *Si l'on paramètre la surface semi-perméable W , frontière de la zone de capture \mathcal{C}_{t_0} du jeu qualitatif (équation (2.20)), à l'aide une fonction $\omega(t, Y)$ par $\omega(t, Y) = 0$, alors la condition de semi-perméabilité (l'équation qualitative d'Isaacs (2.15)) se réécrit sous la forme de l'équation d'HJBI (2.6).*

Preuve de la proposition 2.4.4 Compte tenu de l'équation (2.20) on introduit, dans l'espace d'état $(t, Y) = (t, X, w)$, la fonction

$$\omega(t, Y) = W(t, X) - w \tag{2.21}$$

qui permet de paramétrer la frontière de la zone de capture du jeu qualitatif par $\omega(t, Y) = 0$. Notons $\nu(t, Y)$ une normale semi-perméable à cette hyper-surface, frontière de la zone de capture. La normale semi-perméable correspond alors au gradient $\nabla\omega$ de la fonction ω , et les composantes de la normale semi-perméable ν peuvent alors s'interpréter comme

$$\nu = \frac{\partial\omega(t, Y)}{\partial(t, X, w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W(t, X(t))}{\partial t} \\ \frac{\partial W(t, X(t))}{\partial X} \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

²¹Si T était non fixé, c'est-à-dire pour un jeu à temps final libre dans une cible \mathcal{C} , il aurait fallu rajouter dans l'énoncé du point ② page 74, la contrainte d'état supplémentaire [Isa65, BGL69] $(t, Y(t)) \notin \mathcal{C} \quad \forall t < T$ consistant à dire que l'état ne doit pas pénétrer préalablement la cible à un endroit où $\bar{N}(Y(T)) > w_0$.

La dynamique du jeu qualitatif dans l'espace d'état (t, Y) étant donnée par $\dot{t} = 1$ et (2.19), l'équation qualitative d'Isaacs (2.15) $\min_{\xi \in \mathcal{U}} \max_{\tau \in \mathcal{V}} \langle \nu, g(t, Y; \tau, \xi) \rangle = 0$ se réécrit

$$\inf_{\xi \in \mathcal{U}} \sup_{\tau \in \mathcal{V}} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial W(t, X(t))}{\partial t} \\ \frac{\partial W(t, X(t))}{\partial X} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, X; \tau, \xi) \\ -L(t, X; \tau, \xi) \end{pmatrix} \right\rangle = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial W(t, X(t))}{\partial t} + \inf_{\xi \in \mathcal{U}} \sup_{\tau \in \mathcal{V}} \left[\frac{\partial W(t, X(t))}{\partial X} f(t, X; \tau, \xi) + L(t, X; \tau, \xi) \right] = 0 .$$

On retrouve la forme de l'équation d'HJBI (2.6) du jeu quantitatif dans l'espace d'état (t, X) . ■

Chapitre 3

Le call vanille par la méthode du jeu qualitatif

Dans ce chapitre nous allons appliquer les outils introduits dans les paragraphes 2.3 et 2.4, à l'étude de notre problème d'évaluation d'options modélisé dans le chapitre 1, par la méthode du jeu qualitatif à cible unique à $t = T$. Nous appliquons ces outils à l'étude d'un call vanille avec un paiement en nature ¹, qui servira de fil conducteur dans ce chapitre. Le choix de l'application à un call vanille avec paiement en nature, s'explique par le fait que cette option est, parmi toutes celles étudiées, celle qui a conduit à la solution la plus simple (par ses nombreuses symétries). De plus, cette étude nous permettra d'introduire un grand nombre de notations et de propriétés qui serviront également à l'étude d'une option digitale par la méthode du jeu qualitatif (dans le chapitre 4, qui est le cœur de la thèse). L'étude d'une option digitale, qui s'avère plus délicate et plus riche en singularités, en raison de la discontinuité des fonctions de paiement (1.5) et (1.6), pourra ainsi être condensée.

3.1 En absence de coûts de transaction

Avant de commencer l'étude générale du jeu minimax modélisé dans le chapitre 1 et conduisant à la fonction Valeur (1.51), nous allons dans un premier temps nous intéresser à un cas particulier simple, à savoir le même problème en l'absence de coûts de transaction [Ber05c, Ber05b].

3.1.1 Dynamique et fonction Valeur

En l'absence de coûts de transaction $C^+ = C^- = 0$ et par conséquent également de coûts de clôture $c^- = c^+ = 0$, puisque ceux-ci vérifient la propriété (1.29), la fonction de coût terminal du trader correspond simplement à la fonction de paiement $N(u, v) = M(u)$. Par ailleurs, puisqu'il n'y a aucun coût à effectuer une transaction c'est-à-dire un transfert d'actif sous-jacent vers les bons sans risques (vente) ou réciproquement (achat), il n'est pas nécessaire de garder comme variable d'état la variable v (montant de l'investissement en actif sous-jacent) qui évolue à présent sans coûts. Cette variable v peut être employée comme commande du trader (le minimiseur \mathbf{P}) à la place de ξ .

¹Pour un call vanille avec paiement en espèces l'étude complète a été publiée dans [BEFT06].

Par conséquent le jeu différentiel impulsif \mathcal{G} dans l'espace de dimension 3 plus temps se ramène à un jeu différentiel en dimension 2 plus temps dans l'espace d'état (u, w) . En se servant des équations (1.20) et (1.22) qui proviennent de la dynamique du jeu \mathcal{G} , la dynamique se transforme en l'absence de coûts de transaction en :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \tau u, \\ \dot{w} &= \tau v.\end{aligned}$$

La commande du maximiseur (la commande du marché) $\tau \in [\tau^-, \tau^+]$ est choisie en BO, $\tau(\cdot) \in \Omega$ où Ω est donné par (1.23), et la commande du minimiseur (du trader) $v \in \mathbb{R}$ est choisie dans l'ensemble des stratégies non anticipatives $v(t) = \phi(t, \tau(\cdot)) \in \Phi$ (voir le paragraphe 1.3.4). L'objectif est celui décrit dans le paragraphe 1.3.5, à savoir de trouver une stratégie de transaction ϕ minimisant $w(0)$ et permettant d'assurer la couverture (1.33) contre tout $\tau(\cdot)$, où de manière équivalente conduisant dans l'ensemble des états admissibles à $t = T$

$$\mathbb{C}_T = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \mid w \geq M(u) \right\}. \quad (3.1)$$

En intégrant la dynamique en w sur l'intervalle $[0, T]$ (T étant l'horizon du jeu) on obtient

$$w(T) = w(0) + \int_0^T \tau(t)v(t)dt.$$

L'analyse du paragraphe 1.3.6, conduisant à la prime (1.36) $\tilde{P}(S(0))$, se transforme en

$$\tilde{P}(S(0)) = e^{-\rho T} \min\{w(0) \in \mathbb{C}_0\} = e^{-\rho T} \inf_{\phi} \sup_{\tau} J(0, e^{\rho T} S(0); \tau(\cdot), \phi),$$

où le critère J est ici

$$J(t, u(t); \tau(\cdot), \phi) = \left[M(u(T)) - \int_t^T \tau(s)v(s)ds \right]. \quad (3.2)$$

Cela nous conduit à introduire la fonction Valeur

$$W(t, u(t)) = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\tau(\cdot) \in \Omega} J(t, u(t); \tau(\cdot), \phi) = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\tau(\cdot) \in \Omega} \left[M(u(T)) - \int_t^T \tau(s)\phi(s, \tau(\cdot))ds \right], \quad (3.3)$$

solution de ce jeu différentiel quantitatif à deux joueurs et à somme nulle restreint à un problème de commande minimax.

Remarque 3.1.1 *La Valeur recherchée est donc la Valeur supérieure W^+ d'un jeu minimax (se reporter au chapitre 2). Mais puisque nous ne cherchons pas à caractériser la Valeur inférieure (résoudre le problème maximin), nous utilisons tout au long de ce manuscrit un abus de langage et de notation (afin d'alléger la notation) consistant à appeler Valeur la fonction W^+ (sous entendu du jeu minimax) et à la noter simplement W .*

3.1.2 Solution de viscosité

Cette fonction Valeur $W(t, u)$ (3.3) est solution de l'équation d'Isaacs (2.6) qui s'écrit ici

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \min_v \sup_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau \left[\frac{\partial W}{\partial u} u - v \right] = 0 \quad \text{avec } W(T, u) = M(u(T)) . \quad (3.4)$$

Proposition 3.1.1 *Dans tout ouvert où $M(u)$ est de classe \mathcal{C}^1 , $W(t, u) = M(u) \forall t \in [0, T]$ vérifie l'équation d'Isaacs (3.4). La prime de l'option est alors donnée par $\tilde{P}(S(0)) = e^{-\rho T} M(e^{\rho T} S(0))$.*

Preuve de la proposition 3.1.1 Notons $\sigma = \frac{\partial W}{\partial u} u - v$ la fonction de commutation en τ de l'équation (3.4). Le terme $\sup_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} [\tau \sigma]$ est toujours positif ou nul étant donné que le maximum en τ atteint en $\tau^+ > 0$ ou en $\tau^- < 0$ suivant le signe de la fonction de commutation σ . La minimisation en v conduit alors au choix de la commande v telle que $\sigma = 0$. Ainsi dans le cas où la fonction W est de classe \mathcal{C}^1 , l'équation d'Isaacs (3.4) aboutit à

$$v = \frac{\partial W}{\partial u} u \quad (3.5)$$

et se réduit à

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0 . \quad (3.6)$$

L'équation (3.6) conduit à la fonction Valeur

$$W(t, u) = W(T, u) = M(u) \quad \forall t \in [0, T] ,$$

et la prime recherchée est par conséquent donnée par

$$\tilde{P}(S(0)) = e^{-\rho T} W(0, e^{\rho T} S(0)) = e^{-\rho T} M(e^{\rho T} S(0)) . \quad \blacksquare$$

Cependant $M(u)$ n'est pas de classe \mathcal{C}^1 . Là où la fonction Valeur candidate $W(t, u) = M(u)$ n'est pas de classe \mathcal{C}^1 , mais présente une discontinuité de gradient, on vérifie que W est bien la solution de viscosité de l'équation (3.4), en utilisant la condition de viscosité (définition 2.2.2).

Ici, la fonction Valeur W est lisse en t , et pour tout u où la fonction Valeur présente une discontinuité de gradient nous désignons par $\frac{\partial W_-}{\partial u} < \frac{\partial W_+}{\partial u}$ les gradients de W de part et d'autre de cette valeur de u . En présence d'une discontinuité de gradient en u correspondant à un minimum local (respectivement à un maximum local), les éléments du sous-différentiel (respectivement du sur-différentiel), notés $(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial u})$, sont obtenus avec la même composante en t , $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} = 0$ (compte tenu de l'équation 3.6), et en faisant varier la composante $\frac{\partial W}{\partial u}$ entre ses deux valeurs des deux côtés de la discontinuité, c'est-à-dire $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \in [\frac{\partial W_-}{\partial u}, \frac{\partial W_+}{\partial u}]$. En substituant n'importe quel élément du sous-différentiel (respectivement du sur-différentiel) au gradient de $W(t, u)$ dans l'équation d'Isaacs (3.4), la condition de viscosité s'écrit

$$\forall \frac{\partial \Phi}{\partial u} \in \left[\frac{\partial W_-}{\partial u}, \frac{\partial W_+}{\partial u} \right], \quad \begin{cases} \min_v \sup_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} u - v \right] \leq 0 & \text{(pour un sous-différentiel)} , \\ \min_v \sup_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} u - v \right] \geq 0 & \text{(pour un sur-différentiel)} . \end{cases} \quad (3.7)$$

Comme $\sup_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} u - v \right] \geq 0$, le \min_v est obtenu pour

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial u} u \in \left[\frac{\partial W_-}{\partial u} u, \frac{\partial W_+}{\partial u} u \right]. \quad (3.8)$$

Il en résulte que $\min_v \sup_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} u - v \right] = 0$, et donc que la condition de viscosité (3.7) est bien satisfaite, que l'on soit en présence d'un minimum ou d'un maximum local.

Nous venons ainsi de montrer que pour une option à paiement $M(u)$ continue, la fonction $W(t, u) = M(u)$ est la solution de viscosité de (3.4), à savoir $M(u) = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\tau(\cdot) \in \Omega} J(t, u(t); \tau(\cdot), \phi)$.

3.1.3 Application au call vanille

Prenons pour application le cas d'un call vanille ² dont le paiement, donné par $M(u) = \max\{0, u - K\}$, et de ce fait la fonction Valeur candidate $W(t, u) = M(u)$, sont non différentiables en $u = K$ avec

$$\frac{\partial W}{\partial u} = M'(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < K, \\ \text{non défini} & \text{si } u = K, \\ 1 & \text{si } u > K. \end{cases}$$

En $u = K$, la fonction Valeur présente une discontinuité de gradient en u correspondant à un minimum local. Par conséquent, le sur-différentiel est vide et les éléments du sous-différentiel sont donnés par

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} \in [0, 1].$$

La condition de viscosité pour un sous-différentiel (3.7) est satisfaite (par la vérification précédente), et le \min_v (3.8) est obtenu pour

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial u} u \in [0, u].$$

3.1.4 Stratégie

En pratique, il nous faut déterminer la prime, mais également la stratégie de transaction que doit employer le trader au cours du jeu. En désignant par M' la dérivée de la fonction de paiement, l'équation (3.5) permet d'identifier une stratégie de transaction du trader comme

$$v(t) = \phi(t, \tau(\cdot)) = M'(u(t))u(t) = M'(e^{\rho(T-t)}S(t))e^{\rho(T-t)}S(t).$$

Pour un call vanille, cette stratégie de transaction du trader est ainsi donnée par

$$v(t) = \phi(t, \tau(\cdot)) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < K, \\ u & \text{si } u > K. \end{cases} \quad (3.9)$$

Nous pouvons vérifier que la stratégie de transaction (3.9) est une stratégie de couverture.

²Dans ce chapitre, on a choisi pour application (fil conducteur) l'étude d'un call vanille avec paiement en espèces. Cependant, en l'absence de coûts de clôture, il n'y a pas de distinction entre les différents types de paiements (en espèces ou en nature).

Interprétation financière 3.1.2 *Pour tout u , la stratégie de transaction (3.9) obtenue est une « stratégie naïve » appelée « stop loss strategy » ou « bang bang strategy » (stratégie du tout ou rien en fonction du signe de $u - K$). Cependant, elle n'est pas satisfaisante du point de vue financier car elle manque de robustesse à l'égard des coûts de transaction. Notamment une « oscillation » du cours de l'actif sous-jacent autour du prix d'exercice $u = K$ induit des stratégies de grands achats et ventes de sous-jacent répétées qui ruinent la stratégie de transaction en présence de coûts de transaction. Ce résultat met ainsi l'accent sur une des faiblesses de notre modèle de marché à intervalles qui ne conduit pas à une stratégie satisfaisante en l'absence de coûts de transaction.*

3.2 Approche du jeu qualitatif, pour le jeu impulsif \mathcal{G}

Revenons à notre jeu différentiel impulsif minimax \mathcal{G} en présence de coûts de transaction, dont la prime de l'option (1.52) à l'instant $t = 0$, est obtenue à partir de la fonction Valeur du jeu \mathcal{G} (1.51). Nous pouvons voir la fonction Valeur (1.51) comme la solution d'un jeu différentiel quantitatif à deux joueurs et à somme nulle (restreint à un problème de commande minimax) dans un espace de dimension 2 plus temps ($\bar{X} = (t, X)$ où $X = (u, v)$) et se déroulant dans l'intervalle de temps $[0, T]$ (jeu à horizon fini T correspondant à l'échéance de l'option). Nous cherchons à caractériser la Valeur en $t = 0$

$$W(0, X_0) = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\tau \in \Omega} J(0, X_0, \tau(\cdot), \phi) \quad \text{où} \quad X_0 = (u(0), v(0)) = (u_0, 0) .$$

On rappelle que la commande du minimiseur $\xi \in \Xi$ (ensemble 1.25) est choisie dans l'ensemble des stratégies non anticipatives $\phi \in \Phi$ (et trouvée sous la forme d'un feedback d'état (1.28)), et que celle du maximiseur $\tau \in \Omega$ est choisie en BO dans l'ensemble Ω donné par (1.23). Le critère

$$J(0, X_0, \tau(\cdot), \phi) = \left[N(u(T), v(T)) - \int_0^T (\tau(t)v(t) - C^\varepsilon \xi_c(t)) dt + \sum_k C^{\varepsilon_k} \xi_k \right] \quad (3.10)$$

contient un « terme somme » provenant de la partie impulsif de la dynamique (plus précisément de la partie impulsif de la commande du minimiseur $\xi \in \Xi$). Autrement dit, le Lagrangien L du critère (2.1) à une forme particulière : il contient des impulsions de Dirac. Ce critère (3.10) représente le coût total pour le trader durant la période du jeu $[0, T]$, pour un état initial X_0 . Le coût total se compose, des pertes (ou gains) $\int_0^T \tau(t)v(t)$ provenant de la variation du cours de l'actif sous-jacent, des coûts de transaction $\int_0^T C^\varepsilon \xi_c(t) dt + \sum_k C^{\varepsilon_k} \xi_k$, et du coût terminal $N(u(T), v(T))$ (1.30) qui regroupe les coûts de clôture et le paiement.

Les deux approches utilisées pour résoudre ce jeu ont été évoquées dans l'introduction, et l'équivalence de ces deux approches a été prouvée dans la proposition 2.4.1. Dans ce chapitre, ainsi que dans le chapitre 4, nous utilisons la représentation en dimension 3 plus temps (1.20) (1.21), (1.22) dans l'espace d'état $\bar{Y} = (t, Y)$ avec $Y = (u, v, w)$, afin d'obtenir un jeu qualitatif unique à cible unique à

T . Cette cible \mathbb{C}_T s'écrit ici

$$\mathbb{C}_T = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mid w \geq N(u, v) \right\}. \quad (3.11)$$

Ce jeu qualitatif délimite ainsi les états pour lesquels le trader peut assurer la couverture (1.33) à l'instant final $t = T$ contre toute commande (défense) du marché $\tau \in \Omega$ (vue comme une perturbation d'amplitude bornée (1.23)). Par les corollaires 2.4.2 et 2.4.3, la frontière de la zone de capture \mathbb{C}_t dans l'espace d'état (t, Y) est une surface semi-perméable correspondant au graphe de la fonction Valeur W

$$\mathbb{C}_t = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mid w \geq W(t, u, v) \right\}. \quad (3.12)$$

Remarque 3.2.1 *La preuve du corollaire 2.4.2 utilisait le fait qu'à tout instant $t \in [0, T]$, si l'état $(t, u(t), v(t), w(t)) \in \mathbb{C}_t$ (c'est-à-dire si cet état est capturable) alors nécessairement pour tout $w'(t) > w(t)$ l'état $(t, u(t), v(t), w'(t)) \in \mathbb{C}_t$ (est capturable) car l'écart $(w'(t) - w(t))$ est conservé le long d'une trajectoire. Dans notre problème, la variable w représente la valeur du portefeuille. Il est évident que si il est possible d'assurer la couverture à l'instant T avec une valeur du portefeuille $w(t)$ à l'instant t , alors pour un portefeuille de valeur $w'(t) > w(t)$, la couverture est également assurée avec la même stratégie de transaction ξ pour le trader, en mettant de côté la différence $(w'(t) - w(t))$. Dans ce cas le trader serait assuré de gagner de l'argent, ce qui entraînerait une opportunité d'arbitrage et l'incohérence de la prime (en se référant au paragraphe 1.1.2) pour une valeur du portefeuille supérieure à $\inf \{ w \mid (u, v, w)^t \in \mathbb{C}_t \}$.*

3.3 Equation qualitative d'Isaacs et contrôles optimaux

Nous pouvons à présent appliquer les outils de la théorie d'Isaacs-Breakwell (semi-perméabilité, équation qualitative d'Isaacs) développés dans le paragraphe 2.3, afin d'effectuer par la suite l'étude minutieuse des champs de trajectoires extrémales et singulières de ce jeu qualitatif.

Il est à noter que la partie de l'analyse du jeu qualitatif en dimension 4 (dans l'espace d'état (t, u, v, w)) effectuée dans ce paragraphe 3.3 (équation qualitative d'Isaacs, équations adjointes, contrôles optimaux) est indépendante de l'option choisie et pourra donc être transposée à l'étude d'une option digitale par la méthode du jeu qualitatif (chapitre 4). L'option et le paiement choisis interviennent uniquement dans la fonction $N(u, v)$, c'est-à-dire dans la frontière de la cible \mathbb{C}_T (3.11) à l'échéance T , et par incidence dans la construction en temps rétrograde de la barrière du jeu.

3.3.1 Normale semi-perméable et équation qualitative d'Isaacs

La frontière de la zone de capture \mathbb{C}_t correspond à une « barrière du jeu » [Ber76]. C'est une hypersurface semi-perméable se raccordant sur la frontière de la cible $w = W(T, u, v) = N(u, v)$ à l'instant final (l'échéance) T . La proposition 2.4.4 a montré que si cette hypersurface est définie

à l'aide d'une fonction $\omega(t, Y)$ par $\omega(t, Y) = 0$, alors la condition de semi-perméabilité (l'équation qualitative d'Isaacs (2.15)) se réécrit sous la forme de l'équation d'HJBI (2.6) associé au jeu quantitatif \mathcal{G} . Par conséquent, posons

$$\omega(t, u, v, w) = w - W(t, u, v) . \quad (3.13)$$

Notons $\nu(x) = (n, p, q, 1)^t$ une normale à cette hypersurface. Nous avons pu choisir la quatrième composante r de la normale égale à 1, compte tenu du fait que w n'apparaît pas dans les membres de droite de la dynamique (1.20), (1.21), (1.22), de sorte que son équation adjointe est $\dot{r} = 0$. La normale semi-perméable correspond ainsi au gradient de la fonction ω

$$\begin{pmatrix} n \\ p \\ q \\ 1 \end{pmatrix} = \nabla \omega ,$$

et les composantes (n, p, q) de cette normale semi-perméables peuvent alors s'interpréter comme

$$(n, p, q) = \left(-\frac{\partial W}{\partial t}, -\frac{\partial W}{\partial u}, -\frac{\partial W}{\partial v} \right) . \quad (3.14)$$

Il est essentiel pour la suite de garder en mémoire que q s'interprète comme

$$q = -\frac{\partial W}{\partial v} . \quad (3.15)$$

Afin de suivre plus facilement l'analyse qui va suivre, il est utile de rappeler ci-dessous les équations de la dynamique (1.20), (1.21), (1.22) de notre jeu $\dot{Y} = f(Y, \tau, \xi)$ dans l'espace d'état $Y = (u, v, w)$

$$\begin{cases} \dot{u} = \tau u , \\ \dot{v} = \tau v + \xi_c & \text{ou} & v(t_k^+) = v(t_k) + \xi_k , \\ \dot{w} = \tau v - C^{\varepsilon_c} \xi_c & \text{ou} & w(t_k^+) = w(t_k) - C^{\varepsilon_k}(\xi_k) , \end{cases} \quad (3.16)$$

La condition de semi-perméabilité (2.15) $\min_{\xi \in \mathcal{U}} \max_{\tau \in \mathcal{V}} \langle \nu, f(t, Y, \tau, \xi) \rangle = 0$ conduit à la forme « forme qualitative de l'équation d'Isaacs »

$$n + \sup_{\xi \in \mathcal{V}} \inf_{\tau \in \mathcal{U}} \{ [pu + (q+1)v]\tau + (q - C^\varepsilon)\xi \} = 0 . \quad (3.17)$$

qui nous permettra d'identifier les commandes optimales des deux joueurs. Dans l'équation (3.17), les commandes des deux joueurs représentent des commandes instantanées. Nous avons cependant intentionnellement omis la dépendance en temps, afin d'alléger les notations. Les ensembles des commandes $\tau(\cdot) \in \Omega$ et $\xi(\cdot) \in \Xi$ sont respectivement donnés par les équations (1.23) et (1.25). Il est à noter que, dans l'équation (3.17), la permutation du min en max et du max en min, sans permutation de l'ordre d'intervention des variables, provient du choix de la normale semi-perméable choisie pointée vers l'intérieur de l'ensemble des états capturables \mathbb{C}_t , compte tenu du choix de la fonction ω (3.13) (plutôt que (2.21)).

Remarque 3.3.1 *Compte tenu de la proposition 2.4.4, la forme qualitative de l'équation d'Isaacs est équivalente à l'équation d'HJBI du jeu quantitatif dans l'espace (t, u, v) . En se servant de l'interprétation (3.14) des composantes de la normale semi-perméable, ainsi que de la propriété*

$$\sup_{\xi} \inf_{\tau} [-H] = - \inf_{\xi} \sup_{\tau} [H] ,$$

l'équation qualitative d'Isaacs (3.17) (la condition de semi-perméabilité) se réécrit sous la forme

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \sup_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \left\{ \left[\frac{\partial W}{\partial u} u + \left(\frac{\partial W}{\partial v} - 1 \right) v \right] \tau + \left(\frac{\partial W}{\partial v} + C^\varepsilon \xi \right) \right\} = 0 .$$

Notons que l'hamiltonien de cette équation d'Isaacs

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \min_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} H(t, u, v, w, n, p, q, \tau, \xi) = 0$$

est donné par

$$H(t, u, v, w, n, p, q, \tau, \xi) = n + \tau \sigma(u, v, p, q) + (q - C^\varepsilon) \xi \quad (3.18)$$

où $\sigma(u, v, p, q) = pu + (1 + q)v$ représente une fonction de commutation en τ .

3.3.2 Contrôles optimaux τ^* et ξ^*

Le caractère séparé de l'équation qualitative d'Isaacs (3.17) nous permet de séparer la minimisation en τ et la maximisation en ξ . Ainsi les contrôles optimaux sur les trajectoires de la barrière du jeu (notés τ^* et ξ^*) sont identifiés par

$$\tau^* = \arg \min_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} [pu + (q + 1)v] \tau \quad \text{et} \quad \xi^* = \arg \max_{\xi} (q - C^\varepsilon) \xi . \quad (3.19)$$

Remarque 3.3.2 *L'hamiltonien (3.18) de notre jeu \mathcal{G} étant séparé, il existe une Valeur pour notre jeu à deux joueurs et à somme nulle (proposition 2.2.1). Toutefois, puisque l'on ne s'intéresse qu'au jeu minimax, et de ce fait uniquement à la Valeur supérieure, cette remarque est quelque peu inutile.*

Contrôle optimal du marché τ^*

Le minimum en τ est atteint sur l'une des deux bornes de l'intervalle τ^- ou τ^+ suivant le signe de la fonction de commutation

$$\sigma = pu + (q + 1)v . \quad (3.20)$$

Pour $\sigma = 0$, nous aurons des trajectoires singulières où tout $\tau \in [\tau^-, \tau^+]$ peut être optimal. Ainsi

$$\tau^* = \begin{cases} \tau^- & \text{si } [pu + (q + 1)v] > 0 , \\ \tau^+ & \text{si } [pu + (q + 1)v] < 0 , \\ \text{indeterminé} & \text{si } [pu + (q + 1)v] = 0 . \end{cases} \quad (3.21)$$

Interprétation financière 3.3.3 *Le contrôle du marché τ^* représente le taux de variation de l'actif sous-jacent le plus dangereux (« le pire des cas ») pour le trader, compte tenu de l'approche par commande robuste utilisée par celui-ci, qui a conduit au jeu minimax. Nous nous servirons de cette remarque pour dresser au cours de l'analyse une « interprétation financière » des différentes commandes optimales τ^* et de la Valeur obtenue.*

Contrôle optimal du trader ξ^*

La maximisation en ξ dépend du signe des deux pentes de la fonction linéaire par morceaux en ξ

$$(q - C^\varepsilon)\xi = \begin{cases} (q - C^-)\xi & \text{avec } C^- \leq 0 \quad \text{si } \xi \leq 0, \\ (q - C^+)\xi & \text{avec } C^+ \geq 0 \quad \text{si } \xi \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi cette maximisation conduit à

$$\xi^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > C^+, \\ \geq 0 & \text{si } q = C^+, \\ 0 & \text{si } C^- < q < C^+, \\ \leq 0 & \text{si } q = C^-, \\ -\infty & \text{si } q < C^-. \end{cases} \quad (3.22)$$

On note que $\xi^* = +\infty$ (respectivement $\xi^* = -\infty$) signifie de manière heuristique un saut ξ_k positif (respectivement négatif) d'un montant à déterminer. Si $\xi^* > 0$ mais différent de $\xi^* = +\infty$ (respectivement $\xi^* < 0$ mais différent de $\xi^* = -\infty$), la stratégie de transaction du trader est un achat (respectivement une vente) continue ξ_c . Enfin,

$$C^- < q = -\frac{\partial W}{\partial v} < C^+ \quad (\xi^* = 0) \text{ signifie pas de transaction.} \quad (3.23)$$

En outre, lorsque $q \notin [C^-, C^+]$, l'équation d'Isaacs (3.17) ne peut pas être satisfaite puisque le $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} (q - C^\varepsilon)\xi$ serait égal à $+\infty$ quelque soit $\tau \in [\tau^-, \tau^+]$. Il en résulte que l'on aura nécessairement

$$q \in [C^-, C^+], \quad (3.24)$$

et qu'il nous est par ailleurs nécessaire de caractériser plus rigoureusement les impulsions (les trajectoires de saut).

3.3.3 Les impulsions : des trajectoires particulières

La partie impulsienne de la dynamique (rappelée dans l'équation (3.16)), nous montre que dans la représentation en dimension 4 (t, u, v, w) , les impulsions (trajectoires de saut) sont juste des trajectoires particulières orthogonales au plan (t, u) , et de pente $-q = -C^+$ (pour un saut positif correspondant à un achat instantané de sous-jacent) ou $-q = -C^-$ (pour un saut négatif correspondant à une vente instantanée de sous-jacent) dans le plan (v, w) . De manière classique les impulsions engendrent un

changement de dynamique (une dynamique séparée ³). Notons

$$\bar{Y}(t^+) = f^\varepsilon(\bar{Y}(t); \xi), \quad \varepsilon \in \{+, -\}$$

la dynamique de la partie impulsionnelle dans l'espace d'état $\bar{Y} = (t, u, v, w)$ (pour les impulsions, le cours de l'actif n'évolue pas, donc le marché n'a pas le temps d'appliquer pas sa commande τ). Cette dynamique est donnée par :

$$f^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -C^\varepsilon \end{pmatrix} \xi_k, \quad \varepsilon \in \{+, -\}. \quad (3.25)$$

On peut considérer en outre que les normales à une trajectoire de saut sont de la forme

$$\nu^\varepsilon = \begin{pmatrix} n \\ p \\ C^\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \text{signe}(\xi) \quad \text{et} \quad (n, p) \quad \text{quelconques.} \quad (3.26)$$

Il découle de (3.24) que la maximisation en ξ (3.22) peut se réduire à

$$\xi^* = \begin{cases} \geq 0 & \text{si} \quad q = C^+, \\ 0 & \text{si} \quad C^- < q < C^+, \\ \leq 0 & \text{si} \quad q = C^-. \end{cases} \quad (3.27)$$

Ainsi lorsque $q = C^+$, la stratégie de transaction du trader peut être un saut positif d'amplitude ξ_k (achat d'une quantité finie) si $\xi^* = +\infty$, ou un achat en continu ξ_c (achat d'une quantité infinitésimale) si $\xi^* \geq 0$ mais $\xi^* \neq +\infty$. Respectivement, lorsque $q = C^-$, on peut obtenir un saut négatif ou une vente en continu. Toutefois, la maximisation (3.27) ne nous renseigne pas sur l'amplitude des sauts. L'amplitude d'un saut sera déterminée par des arguments globaux.

Les trajectoires de saut sont donc des « arcs singuliers » ⁴ en ξ , caractérisées par $q = C^\varepsilon, \varepsilon \in \{+, -\}$. Des transactions continues non nulles apparaîtront dans les stratégies optimales sur des variétés de discontinuité du gradient de W , à savoir sur les variétés équivoques et les variétés focales à venir.

Propriété 3.3.1 *Les trajectoires de saut vérifient de manière triviale la condition de semi-perméabilité (l'équation qualitative d'Isaacs), puisque $\langle \nu, f^\varepsilon \rangle = 0$ quelque soit τ et ξ_k . Il en découle qu'une « nappe de saut », hypersurface formée de trajectoires de saut avec la singularité $q = C^\varepsilon$, est une hypersurface semi-perméable pour tout (n, p) . Les composantes restantes (n, p) de la normale semi-perméable à cette nappe seront fixées par la construction (la condition de raccordement sur la barrière). Un calcul simple montre que (n, p) sont constants le long d'une trajectoire de saut. Il en résulte que l'on a pas besoin de (n, p) , et par extension, que l'on a pas besoin d'équations adjointes pour les trajectoires de saut.*

³Comme par exemple dans l'article [CQSP07] concernant des jeux à deux joueurs et à somme nulle (jeux de poursuite évasion) où la dynamique peut être à la fois continue et impulsionnelle.

⁴On appelle communément arc singulier, une trajectoire le long de laquelle l'hamiltonien est singulier.

3.3.4 Les équations adjointes

Propriété 3.3.2 *La dynamique de notre jeu dans l'espace (t, u, v, w) (système d'équations (3.16) avec $\dot{t} = 1$) est affine en l'état, et également affine en chacune des commandes. Avec $\xi \in \Xi$ (c'est-à-dire ξ continu et impulsif), cette dynamique peut s'écrire sous la forme particulière*

$$\dot{x} = \tau Ax + b\xi + c, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -C^\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \text{et } c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les équations adjointes (2.16), avec $H = \langle \nu, \tau Ax + b\xi + c \rangle$ l'hamiltonien, sont donc de la forme

$$\dot{\nu} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\tau A^t \nu. \quad (3.28)$$

Ainsi, compte tenu du fait que la dynamique est affine en l'état, les équations adjointes (3.28) de notre jeu sont indépendantes de l'état, et peuvent par ailleurs « se lire » sur chacune des colonnes de la matrice A , au facteur multiplicatif $-\tau$ près.

Le long d'une trajectoire optimale (ξ^*, τ^*) parcourant une partie différentiable de la barrière, la normale semi-perméable $\nu = (n, p, q, 1)^t$ satisfait les équations adjointes (3.28) qui s'écrivent

$$\dot{n} = 0, \quad \dot{p} = -\tau p, \quad \dot{q} = -(1 + q)\tau. \quad (3.29)$$

Nous avons à présent tous les outils nécessaires à l'analyse géométrique dans l'espace d'état (t, u, v, w) des trajectoires extrémales et singulières du jeu qualitatif. Le reste de ce chapitre est consacré à cette analyse complète, en prenant pour application le cas d'un call vanille avec paiement en espèces, présentant la propriété d'être une option à paiement convexe (propriété 1.1.2).

3.4 Intégration depuis la frontière de la cible à l'instant T

Nous allons à présent intégrer en temps rétrograde la dynamique (1.20), (1.21), (1.22) et les équations adjointes (2.16) depuis la frontière de la partie utile de la frontière de la cible \mathbb{C}_T (3.11) du jeu à l'échéance T définie par $t = T$, $w = N(u, v)$ avec $u \in \mathbb{R}^+$ et v arbitraires (variété de dimension 2), afin de construire de manière classique la partie \mathcal{C}^1 de la barrière naturelle (hypersurface), frontière de la zone de capture \mathbb{C}_t faisant partie de la solution du jeu comme graphe de la fonction valeur (3.12). Cette construction, pour un call vanille en absence de coûts de clôture, a été publiée dans [BEFT06].

3.4.1 Frontière de la cible à l'instant T

La frontière de la cible \mathbb{C}_T (3.11) est le graphe de la fonction de coût terminal $N(u, v)$ (1.30). Ainsi cette frontière est propre à l'option étudiée et la suite de l'analyse dépend de l'option choisie. Nous allons

prendre pour application le cas d'un call vanille ⁵ en présence de coûts de clôture et avec un paiement en nature. Compte tenu de la proposition 1.6.1, nous pouvons restreindre l'analyse des trajectoires extrémales et singulières au domaine $v(t) \in [0, u]$ pour tout $t \in [0, T]$. Ainsi, dans l'expression de la fonction de coût terminal (1.32), nous avons $\varepsilon = \text{signe}(-v) = -$ et $\mu = \text{signe}(u - v) = +$, donc

$$N(u, v) = \max \{ -c^- v, u - K + c^+(u - v) \} = \max \{ -c^- v, (1 + c^+)u - K - c^+ v \} . \quad (3.30)$$

Cette fonction de coût terminal (3.30) est continue comme le maximum de deux fonctions continues, et par ailleurs croissante en u comme le maximum de deux fonctions croissantes en u . Introduisons la valeur suivante de $v \in [0, u]$ en $t = T$

$$\frac{(1 + c^+)u - K}{c^+ - c^-} =: \check{v}(T, u) , \quad (3.31)$$

pour laquelle nous avons $-c^- \check{v}(T, u) = u - K + c^+(u - \check{v}(T, u))$, c'est-à-dire l'égalité de deux termes du max dans (3.30). Par comparaison directe, entre les deux termes du max dans (3.30), nous obtenons

$$N(u, v) = \begin{cases} -c^- v & \text{si } u < \frac{K}{1+c^+} \text{ ou } \frac{K}{1+c^+} \leq u \leq \frac{K}{1+c^-} \text{ et } 0 \leq \check{v}(T, u) \leq v \leq u , \\ (1 + c^+)u - K - c^+ v & \text{si } u > \frac{K}{1+c^-} \text{ ou } \frac{K}{1+c^-} \leq u \leq \frac{K}{1+c^+} \text{ et } 0 \leq v \leq \check{v}(T, u) \leq u , \end{cases} \quad (3.32)$$

puisque $\check{v}(T, u)$ (3.31) est croissante en u avec

$$\check{v}(T, \frac{K}{1+c^+}) = 0 \quad \text{et} \quad \check{v}(T, \frac{K}{1+c^-}) = \frac{K}{1+c^-} = u . \quad (3.33)$$

Nous comprendrons ultérieurement ⁶ le rôle de la valeur particulière $\check{v}(T, u)$ dans la solution, et également pourquoi nous l'avons dotée de l'argument t (donc ici $t = T$). La figure 3.1 illustre, dans le plan (u, v) pour $(u, v) \in \mathbb{R}^+ \times [0, u]$, la forme prise par le coût terminal (3.32), ainsi que par la « séparatrice » $\check{v}(T, u)$ (3.31).

Il est intéressant de noter que puisque le taux des coûts de clôture est très petit (de l'ordre de quelques pour mille) avec $c^+ \geq 0$ et $c^- \leq 0$, l'intervalle $\frac{K}{1+c^+} \leq u \leq \frac{K}{1+c^-}$ est un intervalle très petit contenant $u = K$. En choisissant pour les coûts de clôture les valeurs par défaut données dans le paragraphe 1.7, on obtient à $K \times 10^{-5}$ près

$$\left[\frac{K}{1+c^+} , \frac{K}{1+c^-} \right] = [0,9965K , 1,0035K] .$$

Remarque 3.4.1 *Intéressons nous quelques instants au point de vue du souscripteur. Si le souscripteur souhaite garder l'action, il est judicieux pour lui d'exercer l'option à partir du moment où $u \geq \frac{K}{1+C^+}$, car il ne supporte pas les coûts de transaction C^+u correspondant à l'achat d'une part d'actif sous-jacent. Au contraire, si sa politique n'est pas de garder l'action (mais réaliser une plus value), le souscripteur a intérêt à exercer l'option seulement si $u \geq \frac{K}{1+C^-}$, puisque la revente de l'action lui*

⁵Son paiement $M(u(T))$, fonction du cours de l'actif sous-jacent actualisé à l'échéance, est donné par (1.1) compte tenu de la remarque 1.3.3.b ($M(u(T)) = M(S(T))$).

⁶Par exemple au debut de l'interprétation financière 3.6.3.

fera payer des coûts de transaction d'un montant $-C^-u$. Ainsi pour $\frac{K}{1+C^+} \leq u \leq \frac{K}{1+C^-}$ la décision la plus intéressante pour le souscripteur (entre exercer ou non), dépend de sa politique. Cependant, le point de vue du souscripteur est quelque peu inutile puisque, compte tenu du caractère incomplet de notre modèle de marché, nous considérons la prime comme un prix du vendeur, conduisant à une couverture en terme de super-réplication. Par ailleurs, compte tenu de l'expression du coût terminal (3.30), le trader va assurer la couverture contre les deux possibilités (exercice ou non de l'option), et de ce fait, le trader n'a pas besoin de connaître à l'avance la politique du souscripteur.

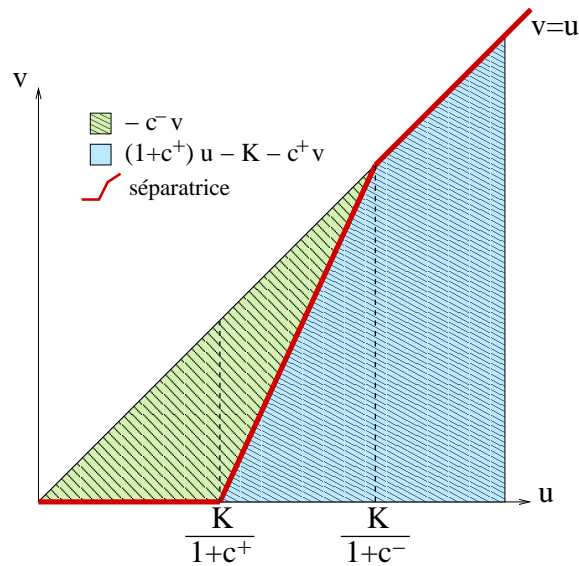


FIG. 3.1 – Régionnement de la partie du plan $(u, v) \in \mathbb{R}^+ \times [0, u]$, suivant l'expression prise par $N(u, v)$ (formule (3.32)).

La fonction de coût (3.32) (figure 3.1) montre que la partie \mathcal{C}^1 de la barrière naturelle joignant la frontière $W(T, u, v) = N(u, v)$ de la cible \mathcal{C}_T est composée de deux hyper-surfaces semi-perméables que l'on appelle « nappes ». En utilisant par ailleurs l'argument géométrique (3.14), on peut déterminer les composantes $p(T)$ et $q(T)$ de la normale semi-perméable à chacune des deux nappes, obtenues comme l'opposé des pentes de la fonction $N(u, v)$ en u et en v . On obtient ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l}
\textcircled{1} \text{ Une nappe arrivant sur la partie suivante de } \mathbb{C}_T : \\
\left\{ \begin{array}{l}
u(T) < \frac{K}{1+c^+} \text{ et } \frac{K}{1+c^+} \leq u(T) \leq \frac{K}{1+c^-} \text{ pour } 0 \leq \check{v}(u(T)) \leq v(T) \leq u(T), \\
w(T) = -c^- v(T).
\end{array} \right. \\
\text{Sa normale semi-perméable en } t = T \text{ est } \nu(T) = (n(T), 0, c^-, 1)^t . \\
\\
\textcircled{2} \text{ Une nappe arrivant sur la partie suivante de } \mathbb{C}_T : \\
\left\{ \begin{array}{l}
u(T) > \frac{K}{1+c^-} \text{ et } \frac{K}{1+c^+} \leq u(T) \leq \frac{K}{1+c^-} \text{ pour } 0 \leq v(T) \leq \check{v}(u(T)) \leq u, \\
w(T) = (1+c^+)u(T) - K - c^+ v(T).
\end{array} \right. \\
\text{Sa normale semi-perméable en } t = T \text{ est } \nu(T) = (n(T), -(1+c^+), c^+, 1)^t .
\end{array} \right. \quad (3.34)$$

La figure 3.2 illustre deux coupes de la frontière (3.32) de la cible à l'instant T , ainsi que les normales semi-perméables aux jonctions des deux nappes $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$ (voir l'équation (3.34)), à l'instant T . Ces coupes sont respectivement, en $v = 0$ dans le plan (u, w) (figure de gauche), et en $v = u$ dans le plan bissecteur $(u = v, w)$ (figure de droite).

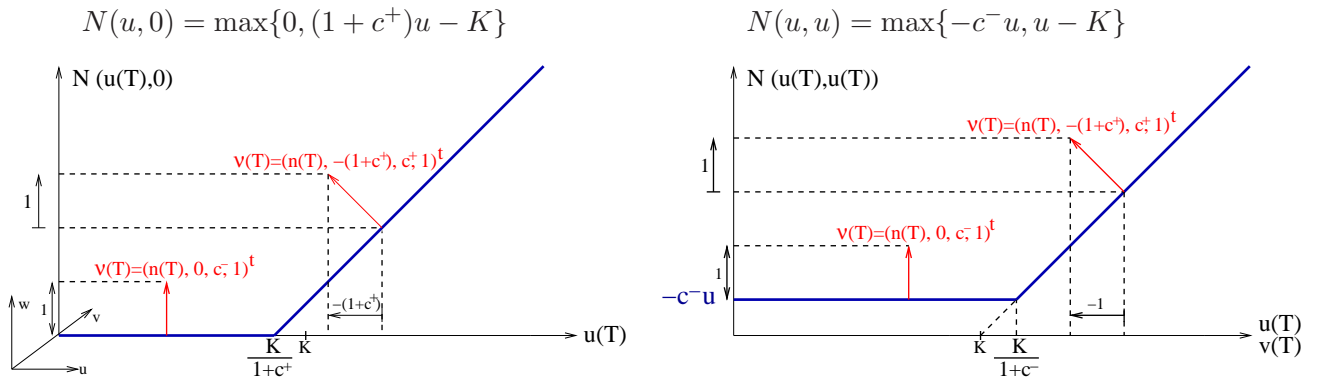


FIG. 3.2 – Coupes en $v = 0$ et $v = u$ de la frontière de la cible (3.32) et normales semi-perméables.

La frontière de la cible à l'instant T ne permet pas d'identifier directement la composante $n(t)$ (constante dans le temps du fait de l'équation adjointe $\dot{n} = 0$ ((3.29)) de la normale semi-perméable à la partie \mathcal{C}^1 de la barrière naturelle. Cette composante n est fixée par la condition de semi-perméabilité. Pour que les deux nappes $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$ de l'équation (3.34) soient bien des variétés semi-perméables, la composante n de leur normale respective doit être choisie de manière à ce que la condition de semi-perméabilité (l'équation qualitative d'Isaacs (3.17)) soit vérifiée. En utilisant les relations (3.19) nous pouvons exprimer, en fonction des contrôles optimaux τ^* et ξ^* , la composante n de la normale semi-perméable à toute surface et en tout instant $t \in [0, T]$ par

$$n = -[pu + (q+1)v]\tau^* - (q - C^\varepsilon)\xi^* \quad \text{où } \varepsilon = \text{signe}(\xi) . \quad (3.35)$$

Nous donnerons plus tard la composante n de la normales aux nappes $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$ de l'équation (3.34), après avoir déterminé les contrôles optimaux sur chacune de ces deux nappes.

Proposition 3.4.1 *Si $c^- \neq C^-$ ($C^- < c^- \leq 0$) et $c^+ \neq C^+$ ($0 \leq c^+ < C^+$), il existe une période finale (un voisinage à gauche de $t = T$) sans transaction, c'est-à-dire où la stratégie optimale du trader est $\xi^* = 0$.*

Preuve de la proposition 3.4.1 Compte tenu des coûts de clôture, les composantes $q(T)$ respectives de la normale semi-perméable à chacune des deux nappes de l'équation (3.34), à savoir respectivement $q(T) = c^-$ pour la nappe ① et $q(T) = c^+$ pour la nappe ②, appartiennent à l'intervalle $]C^-, C^+[$. Par continuité, il existe un voisinage à gauche de $t = T$ où $q(t) \in]C^-, C^+[$ pour chacune des deux nappes. En utilisant la propriété (3.23), la proposition est ainsi prouvée ⁷. ■

Interprétation financière 3.4.2 *On peut interpréter facilement la proposition 3.4.1. En effet, juste avant la fin du jeu (l'échéance), si les coûts de transaction sont les mêmes qu'à l'échéance T ($c^\varepsilon = C^\varepsilon \forall \varepsilon \in \{+, -\}$), le trader peut très bien ajuster une partie de son portefeuille (faire une transaction) sachant que de toute façon, il va devoir payer ces coûts à l'instant T . Mais si les coûts de clôture sont plus faibles que ceux d'une transaction, toute transaction avant l'instant T entraîne des sur-coûts de transaction. Il y a alors existence d'une période juste avant la fin du jeu pendant laquelle l'évolution du cours de l'actif ne suffit pas à compenser ces sur-coûts.*

Sous la stratégie $\xi^* = 0 \in \Xi$, les équations de la dynamique (3.16) deviennent

$$\begin{cases} \dot{u} = \tau u, \\ \dot{v} = \tau v, \\ \dot{w} = \tau v. \end{cases} \quad (3.36)$$

3.4.2 Intégration en temps rétrograde aussi longtemps que $\xi^* = 0$

La proposition signifie que dans le cas où $C^- < c^- \leq 0$ et $0 \leq c^+ < C^+$, la partie \mathcal{C}^1 de la barrière naturelle s'obtient par intégration en temps rétrograde de la dynamique (3.36) et des équations adjointes (3.29), aussi longtemps que $\xi^* = 0$. Ces équations étant intégrées depuis le raccordement des deux nappes ① et ② (équation (3.34)), à la frontière de la cible à l'instant T . Soit $m = T - t$ « la maturité » et $\theta = \int_t^T \tau(s) ds \in [\tau^- m, \tau^+ m]$ une variation possible de l'actif sous-jacent entre les instant t et T . L'intégration en temps rétrograde des équations (3.36) conduit à

$$\begin{aligned} t & & n(t) &= n(T) \\ u(t) &= u(T)e^{-\theta}, & p(t) &= p(T)e^\theta, \\ v(t) &= v(T)e^{-\theta}, & q(t) &= (1 + q(T))e^\theta - 1, \\ w(t) &= w(T) - (e^\theta - 1)v(t), & r(t) &= 1. \end{aligned} \quad (3.37)$$

⁷En l'absence de coûts de clôture la frontière de la cible devient $N(u, v) = M(u)$ c'est-à-dire indépendante de v . Les composantes $q(T)$ de la normale semi-perméable à chacune des deux nappes devient égale à 0 et la proposition reste ainsi valide (en présence de coûts de transaction).

Propriété 3.4.2

- a. Les équations (3.37) ne prennent pas encore en compte les conditions sur la frontière de la cible à l'instant T (les conditions $(u(T), v(T), w(T), n(T), p(T), q(T))$), qui dépendent de l'option choisie. Ainsi ces équations sont valables pour tout type d'option, sous la condition que $\xi^* = 0$, c'est-à-dire la propriété 3.4.1 soit vérifiée.
- b. Tant que les équations adjointes sont valides, c'est-à-dire aussi longtemps que $\xi^* = 0$, la fonction de commutation $\sigma(t) = p(t)u(t) + (q(t) + 1)v(t)$ reste constante le long de chaque trajectoire $\tau(\cdot)$ caractérisée par $(u(T), v(T))$, où le couple $(p(T), q(T))$ est fixé par l'option et la nappe. En effet, en utilisant (3.37) nous obtenons

$$p(t)u(t) + (q(t) - 1)v(t) = p(T)e^\theta u(T)e^{-\theta} + (1 + q(T))e^\theta v(T)e^{-\theta} = p(T)u(T) + (q(T) - 1)v(T) .$$

En conséquence, si $p(T)u(T) + (q(T) - 1)v(T)$ est différent de 0, le contrôle optimal τ^* reste constant et égal à l'une des bornes τ^- ou τ^+ (voir (3.21)). Dans le cas où $p(T)u(T) + (q(T) - 1)v(T)$ est égal à 0, la fonction de commutation reste nulle et par conséquent l'hamiltonien reste singulier en τ aussi longtemps que $\xi^* = 0$. Dans ce cas le contrôle optimal τ^* peut prendre toutes les valeurs $\tau \in [\tau^-, \tau^+]$ et par conséquent τ^* est susceptible de varier dans le temps.

- c. Aussi longtemps (en temps rétrograde) que $\xi^* = 0$ l'équation (3.35) nous montre que la composante n de la normale semi-perméable est donnée par

$$n = - \min_{\tau} \tau [pu + (q + 1)v] = - \min_{\tau} \tau \sigma . \quad (3.38)$$

Cette composante n est bien constante compte tenu de la propriété 3.4.2.b, et par ailleurs nécessairement positive ou nulle. Remarquons que dans le cas d'un hamiltonien singulier en τ , cette composante est $n(t) = 0$.

3.4.3 La nappe $\langle \tau^- \rangle$

Construisons la nappe ① de l'équation (3.34). C'est une hypersurface semi-perméable (variété régulière de dimension 3) candidate à faire partie de la barrière naturelle, que l'on va paramétrer avec $u(T) = \alpha \in \left[0, \frac{K}{1+c^-}\right]$ et $v(T) = \beta \in [0, \alpha]$ (compte tenu de la propriété $v \in [0, u]$ prouvée dans la proposition 1.6.1). On obtient en $t = T$:

$$\begin{aligned} u(T) &= \alpha , & p(T) &= 0 , \\ v(T) &= \beta , & q(T) &= c^- . \\ w(T) &= -c^- \beta , \end{aligned}$$

Comme $q(T) = c^- > -1$ et $v(T) = \beta \in [0, \alpha]$, nous obtenons

$$p(T)u(T) + (q(T) + 1)v(T) = (1 + c^-)\beta \geq 0 .$$

Nous distinguons ainsi deux cas, $v(T) = \beta > 0$ ($\beta \in]0, \alpha]$) et $\beta = 0$.

⇒ Si $v(T) = \beta > 0$, le contrôle optimal du marché (3.21) sur cette nappe est en $t = T$

$$\tau^* = \tau^- .$$

Par la remarque 3.4.2.b, ce contrôle optimal $\tau^* = \tau^-$ est constant aussi longtemps que $\xi^* = 0$ ce qui conduit, aussi longtemps que $\xi^* = 0$, aux équations suivantes ⁸ pour la nappe $\textcircled{1}$, que nous appellerons la nappe $\langle \tau^- \rangle$

$$\begin{aligned} u(t) &= \alpha e^{-\tau^-(T-t)} , & p(t) &= 0 , \\ v(t) &= \beta e^{-\tau^-(T-t)} , & q(t) &= (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1 . \\ w(t) &= \beta \left[e^{-\tau^-(T-t)} - (1 + c^-) \right] , \end{aligned} \quad (3.39)$$

Remarque 3.4.3 Pour $\beta < 0$, la nappe $\textcircled{1}$ de l'équation (3.34) devient une nappe avec $\tau^* = \tau^+$. Mais compte tenu de la propriété $v \in [0, u]$ on sait d'avance que cette nappe de trajectoires ne joue aucun rôle dans la solution. On peut donc se dispenser de son étude.

Nommons $q^-(t) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1$ la composante q de la normale à la nappe $\langle \tau^- \rangle$. Sur cette nappe, la fonction de commutation $\sigma^-(t) = p(t)u(t) + (q^-(t) + 1)v(t)$, constante dans le temps, s'écrit

$$\sigma^-(t) = (1 + q^-(t))v(t) = \beta(1 + c^-) . \quad (3.40)$$

Les équations (3.39) conduisent à l'équation suivante pour la nappe $\langle \tau^- \rangle$, dans l'espace d'état $\bar{Y} = (t, u, v, w)$,

$$\langle \tau^- \rangle : w = \left[1 - (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} \right] v = -q^-(t)v . \quad (3.41)$$

La nappe $\langle \tau^- \rangle$ étant une hypersurface semi-perméable, la condition de semi-perméabilité (3.17) pour tout point appartenant à la nappe $\langle \tau^- \rangle$ permet d'identifier la composante manquante de sa normale semi-perméable sous la forme (3.38)

$$n(t) = -\tau^- \sigma^-(t) = -\tau^- (1 + q^-(t))v(t) .$$

Ainsi la normale semi-perméable à la nappe $\langle \tau^- \rangle$ en (t, u, v, w) peut s'écrire en fonction de t, u, v et $q^-(t)$, comme

$$\langle \tau^- \rangle : \nu_{\tau^-} = \left(-\tau^- (1 + q^-(t))v , 0 , q^-(t) , 1 \right)^t . \quad (3.42)$$

Compte tenu de l'équation (3.41), nous remarquons que la quantité $q^-(t)$ représente l'opposée de la pente de la nappe $\langle \tau^- \rangle$ dans le plan (v, w) à l'instant t , ce qui est en accord avec l'interprétation (3.15) puisque cette nappe est candidate à faire partie du graphe de la fonction valeur. Comme $q(T) = c^- < 1$ la fonction $q^-(t)$ décroît quand t décroît. Ainsi, compte tenu de la maximisation en ξ (3.27), la stratégie $\xi^* = 0$ et la nappe $\langle \tau^- \rangle$ elle même restent valide jusqu'à ce que $q^-(t) = C^-$ soit atteint en temps rétrograde. Il en découle que la nappe $\langle \tau^- \rangle$ est valide sur la période finale du jeu $[t_-, T]$ où t_- est

⁸En utilisant l'intégration en temps rétrograde (3.37) des équations de la dynamique et des équations adjointes avec $\theta = \tau^-(T - t)$.

défini par $q^-(t_-) = C^-$ c'est-à-dire

$$T - t_- = \frac{1}{\tau^-} \ln \left(\frac{1 + C^-}{1 + c^-} \right). \quad (3.43)$$

Remarquons que dans le cas particulier où $c^- = C^-$, à savoir $q(T) = C^-$, la nappe $\langle \tau^- \rangle$ a une durée de validité nulle.

Pour $t \leq t_-$, si l'extension de la nappe $\langle \tau^- \rangle$ fait partie d'une barrière du jeu alors, du fait de (3.27), elle correspondra à une barrière (hypersurface semi-perméable) de saut négatif avec $q^- = C^-$. On adoptera par la suite la notation $\langle \downarrow \rangle$ pour désigner une nappe semi-perméable de saut négatif en v . Pour la suite, il est commode d'étendre de manière continue, la fonction $q^-(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, en

$$q^-(t) = \max\{(1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1, C^-\} = \begin{cases} (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1 & \text{si } t \geq t_- \\ C^- & \text{si } t \leq t_- \end{cases}. \quad (3.44)$$

⇒ Le cas où $\beta = 0$ constitue le cas particulier où

$$p(T)u(T) + (q(T) + 1)v(T) = (1 + c^-)\beta = 0,$$

c'est-à-dire où la fonction de commutation en τ reste nulle le long de tout intervalle $[t, T]$ sur lequel $\xi^* = 0$ (comme tenu de la remarque 3.4.2.b et de la formule (3.21)). Par conséquent nous obtenons un contrôle singulier τ puisque tout $\tau \in [\tau^-, \tau^+]$ vérifie la condition de semi-perméabilité. Ainsi

$$\theta = \int_t^T \tau(s)ds \in [\tau^-(T-t), \tau^+(T-t)]$$

et le contrôle optimal $\xi^* = 0$, c'est-à-dire l'intégration en temps rétrograde (3.37), est valide aussi longtemps que

$$C^- \leq q(t) = (1 + c^-)e^\theta - 1 \leq C^+$$

qui se réécrit

$$\ln \left(\frac{1 + C^-}{1 + c^-} \right) \leq \int_t^T \tau(\theta)d\theta \leq \ln \left(\frac{1 + C^+}{1 + c^-} \right).$$

Le long de ces trajectoires singulières

$$u(t) \in \left[\alpha \frac{1 + c^-}{1 + C^+}, \alpha \frac{1 + c^-}{1 + C^-} \right] \cap \left[\alpha e^{-\tau^+(T-t)}, \alpha e^{-\tau^-(T-t)} \right] \quad \text{et } v(t) = w(t) = 0.$$

Remarquons que puisque $0 \leq u(T) = \alpha \leq \frac{K}{1+c^-}$, de telles trajectoires singulières existent pour tout couple

$$\left\{ (t, u) \mid t \geq t_- \quad \text{et} \quad 0 \leq u(t) \leq \frac{K}{1 + c^-} e^{-\tau^-(T-t)} \right\}.$$

On obtient ainsi une variété singulière de codimension 2 dans l'espace d'état $(t, u, v, w) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ où les paramètres libres sont t et $\theta = \int_t^T \tau(s)ds$ (ou de manière équivalente t et u puisque

$\dot{u} = \tau u$), et avec $v = w = 0$, donc à fortiori $w = -q^-(t)v$. Par conséquent ces trajectoires singulières parcourent le bord de la nappe $\langle \tau^- \rangle$ en $v = 0$.

Interprétation financière 3.4.4 *On peut expliquer assez facilement l'apparition de ces trajectoires singulières sur le bord de la nappe $\langle \tau^- \rangle$ en $v = 0$. Si $v = 0$ la valeur du portefeuille ne varie pas quelque soit la variation du cours τ . Elle reste égale à $w = 0$ compte tenu de l'équation (3.41). Par ailleurs pour toutes les commandes τ se raccordant au bord de la nappe $\langle \tau^- \rangle$ en T et à $v = 0$, où le coût terminal reste égal à 0 (voir 3.32), un portefeuille de valeur nulle suffit au trader pour répliquer l'option. Ainsi toutes les variations τ conduisent indifféremment au même résultat pour le trader, à savoir qu'il peut exactement honorer son contrat (réplication exacte).*

3.4.4 La nappe $\langle \tau^+ \rangle$

Comme pour la nappe ① (la nappe $\langle \tau^- \rangle$), nous paramétrons la nappe ② de l'équation (3.34) avec $u(T) = \alpha \geq \frac{K}{1+c^+}$ et $v(T) = \beta \in [0, \alpha]$. On obtient

$$\begin{aligned} u(T) &= \alpha, & p(T) &= -(1 + c^+), \\ v(T) &= \beta, & q(T) &= c^+. \\ w(T) &= (1 + c^+)\alpha - K - c^+\beta, \end{aligned} \quad (3.45)$$

Puisque $\beta \in [0, \alpha]$ et $c^+ < 1$, nous obtenons

$$p(T)u(T) + (q(T) + 1)v(T) = (1 + c^+)(\beta - \alpha) \geq 0 .$$

En utilisant la relation (3.21), on obtient, si $u(T) = \alpha < v(T) = \beta$ une nappe régulière avec $\tau^* = \tau^+$ que l'on appelle la nappe $\langle \tau^+ \rangle$, et si $u(T) = v(T)$ une nappe de contrôle singulier en τ .

➤ Intéressons nous d'abord à la nappe régulière $\langle \tau^+ \rangle$ candidate à faire partie de la barrière du jeu. L'intégration en temps rétrograde avec $\xi^* = 0$ (formule (3.37)) et $\tau^* = \tau^+$ conduit aux équations suivantes pour la nappe $\langle \tau^+ \rangle$

$$\begin{aligned} u(t) &= \alpha e^{-\tau^+(T-t)}, & p(t) &= -(1 + c^+)e^{\tau^+(T-t)}, \\ v(t) &= \beta e^{-\tau^+(T-t)}, & q(t) &= (1 + c^+)e^{\tau^+(T-t)} - 1 . \\ w(t) &= (1 + c^+)(\alpha - \beta) - K + \beta e^{-\tau^+(T-t)}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

Remarque 3.4.5 *Pour $\beta > \alpha$, la nappe ② de l'équation (3.34) devient une nappe avec $\tau^* = \tau^-$. Mais compte tenu de la propriété $v \in [0, u]$, elle ne jouera aucun rôle dans la solution.*

Introduisons la notation $q^+(t) = (1 + c^+)e^{\tau^+(T-t)} - 1$ pour la composante q de la normale à la nappe $\langle \tau^+ \rangle$, qui correspond à l'opposé de la pente de la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ dans le plan (v, w) . En remarquant, dans l'équation (3.46), que $p(t) = -(1 + q^+(t))$, nous pouvons écrire la fonction de commutation constante dans le temps, $\sigma^+(t) = p(t)u(t) + (1 + q^+(t))v(t)$, sous la forme

$$\sigma^+(t) = (1 + q^+(t))(v(t) - u(t)) = (1 + c^+)(\beta - \alpha) . \quad (3.47)$$

Par ailleurs, les équations (3.46) conduisent à l'équation suivante pour la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ dans l'espace d'état (t, u, v, w)

$$\langle \tau^+ \rangle : w = u - K + q^+(t)(u - v) . \quad (3.48)$$

La composante manquante, n , de la normale semi-perméable à tout point de la nappe $\langle \tau^+ \rangle$, obtenue à partir de la condition de semi-perméabilité, est donnée par (3.38), c'est-à-dire

$$n(t) = -\tau^+ \sigma^+(t) = -\tau^+ [(1 + q^+(t))(v(t) - u(t))] .$$

Puisqu'en outre $p(t) = -(1 + q^+(t))$, la normale semi-perméable en (t, u, v, w) , peut s'écrire en fonction de t, u, v et $q^+(t)$, comme

$$\langle \tau^+ \rangle : \nu_{\tau^+} = \left(-\tau^+(1 + q^+(t))(v - u), -(1 + q^+(t)), q^+(t), 1 \right)^t . \quad (3.49)$$

Comme $q(T) = c^+ < 1$, la fonction $q^+(t)$ croît quand t décroît. La stratégie $\xi^* = 0$ et la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ elle-même restent valide jusqu'à ce que $q^+(t) = C^+$ soit atteint en temps rétrograde, en accord avec (3.27). Il en découle que la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ est valide sur la période finale du jeu $[t_+, T]$ où t_+ est défini par $q^+(t_+) = C^+$ c'est-à-dire

$$T - t_+ = \frac{1}{\tau^+} \ln \left(\frac{1 + C^+}{1 + c^+} \right) . \quad (3.50)$$

Dans le cas particulier où $c^+ = C^+$, la nappe τ^+ a une durée de validité nulle.

Pour $t < t_+$, si l'extension de la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ fait partie d'une barrière du jeu alors, en accord avec (3.27), elle correspondra à une barrière de saut positif avec $q^+ = C^+$. On notera $\langle \uparrow \rangle$ cette nappe semi-perméable de saut positif en v . Il est commode pour la suite d'étendre pour $t \leq t_+$ de manière continue la fonction $q^+(t)$ en $q^+(t) = C^+$. On pose donc

$$q^+(t) = \min\{(1 + c^+)e^{\tau^+(T-t)} - 1, C^+\} = \begin{cases} (1 + c^+)e^{\tau^+(T-t)} - 1 & \text{si } t > t_+ \\ C^+ & \text{si } t \leq t_+ \end{cases} . \quad (3.51)$$

➔ Dans le cas particulier $\beta = \alpha$ on obtient des trajectoires singulières où tout $\tau \in [\tau^-, \tau^+]$ vérifie la condition de semi-perméabilité, puisque la fonction de commutation en τ reste nulle le long de tout intervalle $[t, T]$ sur lequel $\xi^* = 0$. Ce contrôle $\xi^* = 0$ valide aussi longtemps que

$$C^- \leq q(t) = (1 + c^+)e^\theta - 1 \leq C^+ \text{ où } \theta = \int_t^T \tau(s)ds \in [\tau^-(T-t), \tau^+(T-t)]$$

c'est-à-dire tant que

$$\ln \left(\frac{1 + C^-}{1 + c^+} \right) \leq \int_t^T \tau(\theta)d\theta \leq \ln \left(\frac{1 + C^+}{1 + c^+} \right) .$$

Le long de ces trajectoires singulières on a

$$v(t) = u(t) \in \left[\alpha \frac{1 + c^+}{1 + C^+}, \alpha \frac{1 + c^+}{1 + C^-} \right] \cap \left[\alpha e^{-\tau^+(T-t)}, \alpha e^{-\tau^-(T-t)} \right] \text{ et }^9 w(t) = u(t) - K .$$

⁹En nous servant de (3.46) avec $\beta = \alpha$, et θ , en lieu et place de $\tau^+(T-t)$.

Comme $u(T) = \alpha \geq \frac{K}{1+c^+}$, ces trajectoires singulières existent pour tout couple

$$\left\{ (t, u) \mid t \geq t_+ \quad \text{et} \quad u(t) \geq \frac{K}{1+c^+} e^{-\tau^+(T-t)} \right\} .$$

On obtient ainsi les équations d'une variété singulière de codimension 2 dans l'espace d'état $(t, u, v, w) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ où les paramètres libres sont t et $\theta = \int_t^T \tau(s) ds$ et avec $u = v = w + K$. Ces trajectoires singulières vérifient donc $w = u - K + q^+(t)(u - K)$. Elles évoluent de ce fait sur le bord de la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ en $u = K$.

Interprétation financière 3.4.6 *On peut expliquer assez facilement l'apparition de ces trajectoires singulières sur le bord de la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ en $v = u$. Si $v = u$ la valeur du portefeuille (3.48) reste de la forme $w = u - K$ quelque soit la variation du cours τ (toute variation τ entraînant une variation d'un montant du du cours de l'actif, engendre également une variation du montant du de la valeur du portefeuille). Ainsi quelque soit τ , le trader réplique exactement l'option avec $v = u$ pour les variations du cours se raccordant à la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ en T où $N(u, v) = u - K$.*

3.4.5 Intersection des nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$, et barrière composite

Dans la région du plan (t, u) où les deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ coexistent¹⁰, celles-ci s'intersectent le long d'une variété de codimension 2 que l'on appellera la variété

$$\mathcal{D} = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \tau^- \rangle .$$

En utilisant les équations (3.41) et (3.48) des deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$, nous obtenons pour tout paramètres (t, u) où les deux nappes coexistent, la paramétrisation suivante en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ pour la variété \mathcal{D}

$$\mathcal{D} : \check{v}(t, u) = \frac{(1 + q^+(t))u - K}{q^+(t) - q^-(t)}, \quad \check{w}(t, u) = -q^-(t)\check{v}(t, u) . \quad (3.52)$$

Définition 3.4.3 *On appelle barrière composite, une barrière formée de plusieurs nappes semi-perméables \mathcal{C}^1 , mais globalement non \mathcal{C}^1 .*

Dans la zone où les deux nappes (3.41) et (3.48) coexistent, la barrière du jeu (la frontière de la zone de capture \mathbb{C}_t (3.12)) correspondant au graphe de la fonction Valeur W , est donnée comme le max en w des deux nappes (3.41) et (3.48), qui s'intersectent le long de la variété \mathcal{D} de dimension 2. La barrière obtenue est une barrière composite, puisque celle-ci possède une discontinuité de gradient le long de la variété \mathcal{D} . Sur cette variété \mathcal{D} , la valeur de $\check{w}(t, u)$ correspond à la restriction de la fonction Valeur en $v = \check{v}(t, u)$, c'est-à-dire $\check{w}(t, u) = W(t, u, \check{v}(t, u))$. De part et d'autre de $v = \check{v}(t, u)$, on a de manière classique la barrière naturelle (formée de $\langle \tau^- \rangle$ d'un côté de $v = \check{v}$ et de $\langle \tau^+ \rangle$ de l'autre côté).

¹⁰Nous reviendrons plus tard sur ce point (formule (3.60)). Il apparaît déjà que ces deux nappes ne peuvent coexister que dans la partie finale du jeu $[t_M, T]$ avec $t_M = \max\{t_-, t_+\}$ où t_- et t_+ sont respectivement donnés par (3.43) et (3.50).

3.4.6 Résumé, notations symétriques pour les pentes $-q$ et les domaines de validité des deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$

Quelques notations utiles

Afin de condenser les différentes équations obtenues, il est commode d'introduire à présent certaines notations.

➔ Le vecteur $V = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ et de même $\check{V}(t, u) = \begin{pmatrix} \check{v}(t, u) \\ \check{w}(t, u) \end{pmatrix}$.

➔ Les vecteurs $Q^\varepsilon(t) = (q^\varepsilon(t) \ 1)$ pour $\varepsilon \in \{+, -\}$.

➔ Le vecteur $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec ces notations, les équations respectives (3.41) et (3.48) des nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ (hyper-surfaces semi-perméables dans l'espace (t, u, v, w)), et leur normale semi-perméable respective (3.42) et (3.49), peuvent se réécrire sous la forme :

$$\langle \tau^- \rangle : Q^-(t)V = 0 \quad \text{et} \quad \nu_{\tau^-} = \left(-\tau^- Q^-(t)\mathbf{1}v, 0, q^-(t), 1 \right)^t. \quad (3.53)$$

$$\langle \tau^+ \rangle : Q^+(t)V = Q^+(t)\mathbf{1}u - K \quad \text{et} \quad \nu_{\tau^+} = \left(-\tau^+ Q^+(t)\mathbf{1}(v - u), -Q^+(t)\mathbf{1}, q^+(t), 1 \right)^t. \quad (3.54)$$

Sur la variété $\mathcal{D} = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$ de dimension 2, les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ données par (3.52), peuvent se regrouper sous la forme vectorielle

$$\check{V}(t, u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -q^-(t) \end{pmatrix} \frac{(1 + q^+(t))u - K}{q^+(t) - q^-(t)}. \quad (3.55)$$

Résumé et notations symétriques

Les deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ montrent que sur la période finale du jeu où $\xi^* = 0$, les contrôles optimaux du marché entre t et T (qui correspondent aux variations du cours les plus dangereuses pour le trader) sont des contrôles extrémaux, respectivement $\tau^* = \tau^-$ pour les trajectoires atteignant la partie de la cible où $N((u, v)) = -c^-v$ et $\tau^* = \tau^+$ pour les trajectoires atteignant la partie de la cible où $N(u, v) = u - K - c^-(u - v)$. Compte tenu de l'objectif (la couverture $w(T) \geq W(T, u, v) = N(u(T), v(T))$), ces deux nappes constituent les frontières de conditions de couverture sous la stratégie $\xi^* = 0$, respectivement contre $\tau^* = \tau^-$ et $\tau^* = \tau^+$. Au dessus de ces deux nappes (par rapport à l'axe w), le trader possède un portefeuille de valeur w suffisante pour assurer la couverture contre les valeurs extrémales de τ aussi longtemps qu'il applique la stratégie $\xi^* = 0$.

Remarquons l'apparition d'une relation directe entre les équations des nappes (3.41) et (3.48) et la partie de la frontière de la cible $N(u, v)$ (3.32) sur laquelle ces deux nappes se raccordent respectivement. En effet $q^-(T) = c^-$, $q^+(T) = c^+$, $u(T)$ et $v(T)$ sont maintenant remplacés respectivement par $q^-(t)$, $q^+(t)$, u et v . Par extension, il en résulte la même symétrie entre $\check{v}(T, u)$ (équation 3.31) et la

valeur $\check{v}(t, u)$ sur \mathcal{D} (équation 3.52), puisque $\check{v}(T, u)$ et $\check{v}(t, u)$ représentent respectivement, l'intersection des deux parties \mathcal{C}^1 de la frontière de la cible, et l'intersection des deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$.

On note par ailleurs une symétrie évidente entre les pentes $-q^-(t)$ (3.44) et $-q^+(t)$ (3.51) des deux nappes dans le plan (v, w) , ainsi qu'entre les domaines de validité respectifs (3.50) et (3.43). En utilisant la notation $\varepsilon \in \{+, -\}$, la nappe $\langle \tau^\varepsilon \rangle$ est valide sur la période finale $[t_\varepsilon, T]$ avec

$$T - t_\varepsilon = \frac{1}{\tau^\varepsilon} \ln \left(\frac{1 + C^\varepsilon}{1 + c^\varepsilon} \right), \quad (3.56)$$

et

$$q^\varepsilon(t) = \varepsilon \min \{ \varepsilon(1 + c^\varepsilon)e^{\tau^\varepsilon(T-t)} - 1, \varepsilon C^\varepsilon \} = \begin{cases} (1 + c^\varepsilon)e^{\tau^\varepsilon(T-t)} - 1 & \text{si } t > t_\varepsilon, \\ C^\varepsilon & \text{si } t \leq t_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.57)$$

Pour $t < t_\varepsilon$ la nappe semi-perméable $\langle \tau^\varepsilon \rangle$ sera remplacée par une nappe de saut semi-perméable, de pente $-q^\varepsilon = -C^\varepsilon$ dans le plan (v, w) (une nappe de saut positif $\langle \uparrow \rangle$ pour la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ et une nappe de saut négatif $\langle \downarrow \rangle$ pour la nappe $\langle \tau^- \rangle$). Nous donnerons plus loin une interprétation financière claire (interprétation financière 3.6.3) des fonctions $q^\varepsilon(t)$, justifiant également le choix l'extension pour $t \leq t_\varepsilon$. Remarquons que, comme $|c^\varepsilon|$ et $|C^\varepsilon|$ sont très petits (de l'ordre de quelques pour mille), on obtient (par un développement limité à l'ordre 1) l'approximation

$$T - t^\varepsilon \simeq \frac{C^\varepsilon - c^\varepsilon}{\tau^\varepsilon}.$$

Application numérique concernant la validité des nappes $\langle \tau^\varepsilon \rangle$, $\varepsilon \in \{+, -\}$

Avec les paramètres par défaut donnés dans le paragraphe 1.7, nous obtenons à 10^{-4} près les validités respectives (3.56) suivantes pour les nappes $\langle \tau^+ \rangle$ et $\langle \tau^- \rangle$:

$$T - t_+ = 0,1168 \quad \text{et} \quad T - t_- = 0,07. \quad (3.58)$$

L'unité de temps par défaut étant la journée, les durées de validité des nappes $\langle \tau^\varepsilon \rangle$ sont respectivement à la minute près, pour l'application (3.58), de 2h48mn pour la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ et de 1h41mn pour la nappe $\langle \tau^- \rangle$. Or les options vanilles sont des contrats ayant une échéance beaucoup plus importante, choisie par défaut, dans le paragraphe 1.7, égale à deux mois boursiers ($T = 44$). Ainsi les durées des nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ sont très faibles comparées à la durée du jeu (la durée de vie du contrat).

Remarque 3.4.7 *Il en découle qu'une bonne approximation (simplification) en pratique, consiste à considérer que la validité de ces nappes est nulle, ce qui revient à considérer que $q^\varepsilon = C^\varepsilon$ pour tout $t \in [0, T]$. Ainsi les nappes $\langle \tau^+ \rangle$ et $\langle \tau^- \rangle$ peuvent être remplacées respectivement par une nappe de saut positif $\langle \uparrow \rangle$ et négatif $\langle \downarrow \rangle$ de pentes respectives $-q = -C^+$ et $-q = -C^-$, constantes dans le plan (v, w) pendant toute la durée du jeu $t \in [0, T]$.*

Remarquons que pour les paramètres utilisés on obtient $t_+ < t_-$, mais le cas de figure $t_- < t_+$ est tout aussi réaliste. En effet, en changeant le choix des bornes de variation relative en $\tilde{\tau}^- = -0.03$ et

$\tilde{\tau}^+ = 0.05$, tout aussi réaliste, et en conservant les autres paramètres par défaut, nous obtenons à 10^{-4} près (et à la minute près) :

$$T - t_+ = 0,0699 (= 1\text{h}41\text{mn}) \quad \text{et} \quad T - t_- = 0,1166 (= 2\text{h}48\text{mn}) .$$

Par conséquent, pour que l'étude soit la plus complète possible, il sera important de traiter les deux cas $t_- < t_+$ et $t_+ < t_-$.

3.5 Projection dans le plan (u, t) , cas triviaux et région d'intérêt

3.5.1 Projection dans le plan (u, t)

L'analyse géométrique des trajectoires en dimension 4 n'est pas une chose aisée compte tenu du manque d'intuition qui en découle. Cependant, les résultats ¹¹ regroupés dans le paragraphe 3.4.6 font entrevoir une manière plus confortable de procéder à cette analyse. Elle consiste à raisonner en dimension 2 sur les états (t, u) à partir de la projection dans le plan (u, t) des différentes nappes, puis de raisonner dans le plan (v, w) pour chacun des états (t, u) . La figure 3.3 montre la projection des deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ dans le plan (u, t) dans les deux cas $t_- < t_+$ et $t_+ < t_-$, avec les paramètres utilisées dans le paragraphe 3.4.6. Afin de visualiser au mieux les deux nappes, la projection a été faite seulement sur la partie finale du jeu (c'est-à-dire pour une maturité faible) et sur un intervalle en u très restreint au voisinage de K . Posons $t_M = \max\{t_-, t_+\}$ et

$$u_g(t) = \frac{K}{1 + c^+} e^{-\tau^+(T-t)} = \frac{K}{1 + q^+(t)} \quad , \quad u_d(t) = \frac{K}{1 + c^-} e^{-\tau^-(T-t)} = \frac{K}{1 + q^-(t)} . \quad (3.59)$$

Les deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ coexistent dans la région du plan (t, u)

$$\left\{ (t, u) \mid t \in [t_M, T] \quad \text{et} \quad u \in [u_g(t), u_d(t)] \right\} . \quad (3.60)$$

Il est à noter que $q^\varepsilon(t_\varepsilon) = C^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, conduit à (voir (3.56)) :

$$e^{\tau^\varepsilon(T-t_\varepsilon)} = \frac{1 + C^\varepsilon}{1 + c^\varepsilon} , \quad \varepsilon \in \{+, -\} , \quad u_g(t_+) = \frac{K}{1 + C^+} \quad \text{et} \quad u_d(t_-) = \frac{K}{1 + C^-} . \quad (3.61)$$

3.5.2 Deux régions triviales dans le plan (t, u)

Nous pouvons identifier directement la fonction Valeur $W(t, u, v)$ sans faire l'étude détaillée des champs de trajectoires, dans les deux régions suivantes du plan (t, u)

Proposition 3.5.1

➔ Pour $u(t) < u_g(t)$ la fonction Valeur est

$$W(t, u, v) = -q^-(t)v(t) , \quad \text{où } q^-(t) \text{ est donnée par la relation (3.44)} . \quad (3.62)$$

¹¹La pente $-q^\varepsilon(t)$ des deux nappes dans le plan (v, w) est connue et fonction de t seulement. La validité des nappes est fonction de t . L'intersection $\mathcal{D} = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$ des deux nappes est paramétrée en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$.

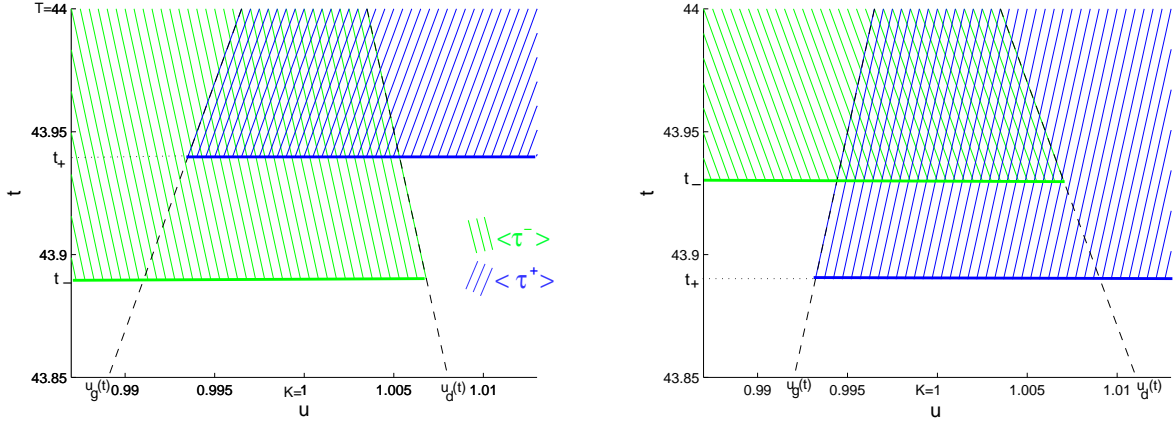


FIG. 3.3 – Projection des trajectoires des deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ dans le plan (u, t) .

⇒ Pour $u(t) > u_d(t)$

$$W(t, u, v) = u(t) - K + q^+(t)(u(t) - v(t)) , \text{ où } q^+(t) \text{ est donné par (3.51)}. \quad (3.63)$$

Preuve de la proposition 3.5.1. La région $u(t) < u_g(t)$ correspond à une région où la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ et son prolongement à une nappe de saut positif $\langle \uparrow \rangle$ n'existe pas (voir figure 3.3). En d'autres termes, il n'y a aucun dilemme pour le trader puisque le seul contrôle optimal du marché est $\tau^* = \tau^-$ dans cette région. Ainsi le graphe de la fonction Valeur, frontière de la zone de capture, correspond à la frontière de la condition de couverture $w(t) \geq -q^-(t)v(t)$ contre $\tau = \tau^-$, c'est-à-dire à la nappe $\langle \tau^- \rangle$ d'équation (3.41) pour $t \geq t_-$, et à son prolongement à une nappe de saut semi-perméable $\langle \downarrow \rangle$ avec $q = C^-$ pour $t \leq t_-$. Il en découle que l'expression de la fonction Valeur est donnée par (3.62) où $q^-(t)$ est donnée par la relation (3.44). La preuve est la même, mutatis mutandis, pour la région $u(t) > u_d(t)$, où le graphe de la fonction Valeur obtenue correspond, pour $t \leq t_+$ à la nappe $\langle \tau^+ \rangle$, et pour $t \geq t_+$ au prolongement de $\langle \tau^+ \rangle$ à une nappe de saut semi-perméable $\langle \uparrow \rangle$ avec $q = C^+$. ■

Par ailleurs l'interprétation financière suivante permet :

- ⇒ de déduire une composition optimale « triviale » (v, w) du portefeuille dans chacune des régions $u < u_g(t)$ et $u > u_d(t)$.
- ⇒ de retrouver les fonctions valeur (3.62) et (3.63).
- ⇒ de donner une interprétation financière claire des expressions respectives (3.44) et (3.51) des fonctions $q^-(t)$ et $q^+(t)$.

Interprétation financière 3.5.1

⇒ Dans la région $u(t) < u_g(t)$, même si le cours de l'actif sous-jacent croît avec le taux maximum $\tau = \tau^+$ jusqu'à T , celui-ci finira nécessairement en $u(T) < \frac{K}{1+c^+}$. Ainsi, le paiement sera de manière certaine $M(u) = 0$, et le coût terminal de $N(u, v) = m(v) = -c^-v$. Comme le trader doit clore

son portefeuille à l'instant T , consistant pour lui à vendre à un coût $-c^-v$ l'actif restant dans son portefeuille, il en résulte qu'un portefeuille vide

$$(v, w) = (0, 0) \quad (3.64)$$

est un portefeuille de couverture optimal. En effet, si $v = 0$, le trader ne paie pas de coûts de clôture ($m(v) = 0$), et il possède dans son portefeuille exactement le paiement du au souscripteur $M(u) = 0$. Par ailleurs si $v > 0$ toute baisse du cours engendre une perte en valeur du portefeuille, et de ce fait la valeur du portefeuille de couverture est bien minimisée avec $v = 0$.

Dans cette région, si $v(t) > 0$, le trader s'expose au risque que le cours baisse, avec $\tau(s) = \tau^- \forall s \in [t, T]$ le pire des cas. La stratégie la plus raisonnable pour le trader est donc de vendre « le plus tôt possible » l'actif sous-jacent restant dans son portefeuille. Le terme $q^-(t) = -(1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} + 1$ représente la perte relative entre l'instant t et T engendrée par l'évolution du cours la plus défavorable du cours $\tau(s) = \tau^- \forall s \in [t, T]$, augmentée des coûts de clôture $-c^-v$ à $t = T$. Deux cas sont à distinguer suivant que $t \geq t_-$ ou $t \leq t_-$.

Si $t \geq t_-$, la relation $-C^- > -q^-(t) = -(1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} + 1$ signifie que le coût encouru $-C^-v$ par une vente instantanée reste supérieur à la perte en valeur $-q^-v$ du portefeuille à ne pas être en (3.64) contre $\tau(s) = \tau^- \forall s \in [t, T]$. Ainsi si $t > t_-$ il n'est pas optimal pour le trader d'effectuer la vente avant la clôture (stratégie $\xi^* = 0$), et dans ce cas le coût encouru par le trader est de $-q^-(t)v$ (on retrouve l'équation de la nappe $\langle \tau^- \rangle$).

Si $t \leq t_-$, il devient optimal pour le trader, de ramener la composition de son portefeuille à $v = 0$ via une vente instantanée $\langle \downarrow \rangle$ à un coût $-C^-v$, afin de limiter la perte relative q^- à C^- .

Dans les deux cas, le coût correspond bien à la fonction Valeur (3.62), et l'on a par ailleurs interprété l'expression de la fonction q^- (3.44).

➔ Pour $u(t) > u_d(t)$, même si $\tau = \tau^-$ de t à T (décroissance maximum du cours), le cours de l'actif sous-jacent finira nécessairement en $u(T) > \frac{K}{1+c^-}$, ce qui signifie que le coût terminal encouru par le trader est $N(u, v) = u - K - c^+(u - v)$ (le paiement sera de $M(u) = u - K$ et les coûts de clôture de $m(u, v) = c^+(u - v)$). Par conséquent,

$$(v, w) = (u, u - K) \quad (3.65)$$

est un portefeuille de couverture optimal pour le trader. En effet, pour un investissement $v = u$, les coûts de clôture sont nuls, et ce portefeuille de valeur $w = u - K$ réplique exactement l'option, puisque si le cours u varie d'un montant du alors v , $M(u) = u - K$, et w , varient également du montant du. Par ailleurs, si $v < u$ (on rappelle que $v \in [0, u]$, par la proposition 1.6.1), le trader s'expose à une hausse du cours, avec $\tau(s) = \tau^+ \forall s \in [t, T]$ la pire des trajectoires, puisque, si $v < u$, toute augmentation du cours fait croître le paiement $M(u)$ plus vite que le portefeuille w .

Si $v < u$, la stratégie la plus raisonnable pour le trader est d'effectuer « le plus tôt possible » un achat instantané d'un montant $\xi = u - v$, à un coût $C^+(u - v)$. De manière similaire au cas précédent, cet achat est optimal à condition que $t < t_+$. Dans le cas $t \geq t_+$ où $q^+(t) = (1 + c^+)e^{\tau^+(T-t)} - 1 < C^+$, il est préférable pour le trader d'attendre la clôture ($\xi^* = 0$), puisque le coût encouru à ne pas être en $(v, w) = (u, u - K)$ suite à la trajectoire $\tau(s) = \tau^+ \forall s \in [t, T]$, augmenté des coûts de clôture, est

$q^+(t)(u - v) < C^+(u - v)$. Il en résulte que pour $u > u_d(t)$ le trader doit, pour assurer la couverture, posséder un portefeuille de valeur $w(t) \geq M(u) + q^+(t)(u - v)$ avec $q^+(t)$ de la forme (3.51). La frontière de cette condition de couverture est bien le graphe de la fonction Valeur (3.63).

Propriété 3.5.2 Les solutions (3.64) et (3.65) peuvent être étendues sur leurs frontières respectives $u = u_g(t)$ et $u = u_d(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. En effet, en $t = T$, le coût terminal (3.32) est continu, avec $\check{v}(T, u)$ vérifiant (3.33) (illustrée sur la figure 3.1 par la « séparatrice »). Il est ensuite aisé de se convaincre que les trajectoires $u_g(t)$ avec $(v, w) = (0, 0)$ et $u_d(t)$ avec $(v, w) = (u, u - K)$ atteignent le bord de la cible contre toute défense du marché (dans les deux cas, il y a réplication exacte du comportement de l'option le long de la trajectoire).

3.5.3 Région d'intérêt

Compte tenu des résultats donnés dans le paragraphe 3.5.2, il apparaît que la seule région du plan (t, u) pertinente (et restant à considérer) est

$$\Lambda = \{(t, u) \text{ tel que } u_g(t) \leq u(t) \leq u_d(t)\}, \quad (3.66)$$

où $u_g(t)$ et $u_d(t)$ sont donnés par l'équation (3.59). On appellera cette région Λ (3.66), la « région d'intérêt ». Cette région Λ est représentée sur la figure 3.3, et correspond à tous les couples (t, u) pour lesquels il existe un contrôle du marché τ telle que le cours de l'actif sous-jacent puisse atteindre l'intervalle $u(T) \in [\frac{K}{1+c^-}, \frac{K}{1+c^+}]$. Pour ces couples, il existe alors un dilemme pour le trader entre $\tau^* = \tau^+$ et $\tau^* = \tau^-$. C'est justement la région où les nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ (ou leurs prolongements respectifs) coexistent.

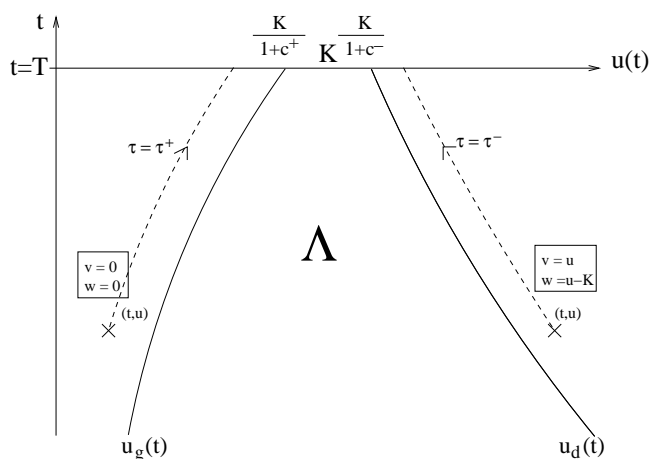


FIG. 3.4 – Région d'intérêt Λ dans le plan (u, t) pour un call vanille avec paiement en espèces.

3.5.4 Plan de l'analyse en dimension 4 dans la région d'intérêt Λ

Dans la région d'intérêt Λ , nous allons particulièrement nous intéresser à la détermination d'une variété de dimension 2, paramétrée en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$, correspondant à l'intersection de deux nappes (hyper-surfaces) semi-perméables de dimension 3 (l'intersection de la nappe $\langle \tau^- \rangle$ ou $\langle \downarrow \rangle$ avec la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ ou $\langle \uparrow \rangle$), et intervenant dans la construction de la barrière composite. La fonction Valeur pourra ensuite être identifiée pour tout $v \in [0, u]$ grâce à la connaissance des pentes $-q^\varepsilon(t)$, données par la relation (3.57), de chacune des nappes dans le plan (v, w) .

L'application numérique faite dans le paragraphe 3.4.6 au sujet de la durée de validité des deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ a montré que les deux cas de figure $t_- < t_+$ et $t_+ < t_-$ sont tous les deux aussi réalistes. Ainsi il apparaît important de faire l'étude de ces deux cas. Dans ce but, nous allons diviser l'étude minutieuse des trajectoires dans la région Λ en trois périodes sur $[0, T]$, dépendant de la position de t par rapport à $t_m = \min\{t_-, t_+\}$ et $t_M = \max\{t_-, t_+\}$:

- ➔ Tout d'abord l'intervalle $t \in [t_M, T]$, commun aux deux cas $t_- < t_+$ et $t_+ < t_-$. Dans les deux cas, cet intervalle correspond à la période finale où les deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ coexistent (la région (3.60)), c'est-à-dire à la période finale du jeu où le contrôle optimal du trader reste $\xi^* = 0$. L'intersection des deux nappes forme la variété $\mathcal{D} = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$ d'équation (3.52). La fonction Valeur pourra être obtenue comme le max en w des deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$.
- ➔ Puis l'intervalle $t \in [t_m, t_M]$, correspondant à l'intervalle de temps pendant lequel l'une des deux nappes régulières $\langle \tau^- \rangle$ ou $\langle \tau^+ \rangle$ continue d'exister, tandis que l'autre a cessé d'exister au profit d'une nappe de saut. Nous devons distinguer les intervalles de temps respectifs $t \in [t_-, t_+]$ (dans le cas $t_- \leq t_+$) et $t \in [t_+, t_-]$ (dans le cas $t_+ \leq t_-$) qui correspondent à deux périodes où une impulsion devient possible, mais ne pouvant être respectivement qu'un achat instantané (dans le cas $t_- \leq t_+$) et qu'une vente instantanée (dans le cas $t_+ \leq t_-$). Nous noterons respectivement $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$ (dans le cas $t_- \leq t_+$) et $\mathcal{E}^- = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ (dans le cas $t_+ \leq t_-$) les variétés de dimension 2, paramétrées en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$, formant l'intersection d'une nappe régulière et d'une nappe de saut.
- ➔ Enfin l'intervalle $[0, t_m]$, qui correspond à la période du jeu où les deux types d'impulsions sont possibles. Les deux nappes régulières $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ cessant d'exister, il y a coexistence d'une nappe de saut négatif et d'une nappe de saut positif de pentes respectives $-q = -C^-$ et $-q = -C^+$ dans le plan (v, w) . Nous noterons $\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ la variété de dimension 2, paramétrées en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$, formée par l'intersection des deux nappes de saut.

Remarque 3.5.2 *Pour rendre l'analyse qui va suivre plus intuitive (et mieux comprendre le plan de l'analyse), le lecteur peut dès maintenant, s'il le souhaite,*

- ➔ regarder la figure 3.8 qui regroupe les différentes variétés de dimension 2, paramétrées en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u) = W(t, u, \check{v}(t, u)))$, identifiées dans la région d'intérêt Λ (les variétés \mathcal{D} , \mathcal{E}^- , \mathcal{E}^+ , \mathcal{F}), ainsi que leur condition au bord d'intégration.

⇒ lire le paragraphe 3.10.1 qui résume la solution obtenue lors de l'analyse du call vanille avec paiement en nature. En lisant ces paragraphes, le lecteur pourra, en particulier, prendre connaissance de la formule de représentation (3.147) de la fonction Valeur, et visualiser la figure 3.9 qui illustre, dans le plan (v, w) , le graphe de la fonction Valeur $W(t, u, v)$ à (t, u) fixés, obtenue à partir de la formule de représentation (3.147). L'ordre des nappes dans les notations $\mathcal{D} = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$, $\mathcal{E}^- = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$, $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$, $\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ n'est ainsi pas anodin !

3.6 La solution pour $t_M = \max\{t_+, t_-\} \leq t \leq T$ dans la région Λ

3.6.1 Conditions de couverture et fonction Valeur

La région étudiée ici correspond à celle (3.60) où les deux nappes (les deux hypersurfaces semi-perméables candidates à faire partie de la barrière naturelle) $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ coexistent. Dans cette région (3.60), l'ensemble des états capturables \mathbb{C}_t (épigraphe de la fonction Valeur W), représenté sur la figure 3.5, est situé au dessus, par rapport l'axe w , des deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$, qui s'intersectent le long de la variété \mathcal{D} de dimension 2, paramétrée en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u) = W(t, u, \check{v}(t, u)))$, sous la forme (3.52).

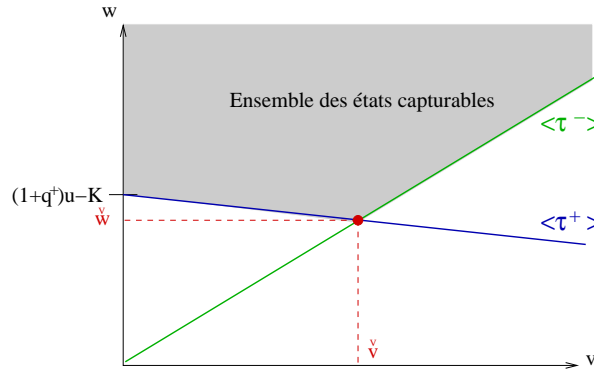


FIG. 3.5 – Représentation dans l'espace (v, w) des nappes de dimension 3 $\langle \tau^- \rangle$ and $\langle \tau^+ \rangle$, de leur intersection (variété \mathcal{D} de dimension 2), ainsi que de l'ensemble des états capturables.

Interprétation financière 3.6.1 Nous pouvons utiliser un argument direct pour caractériser le portefeuille de couverture le meilleur marché dans la région d'intérêt Λ quand $\xi^* = 0$. Cet argument consiste à assurer la couverture de valeur minimale contre chacun des taux de variation du cours (contrôles du marché τ) les plus dangereux pour le trader. En utilisant les équations (3.37) d'intégration en temps rétrograde sous la stratégie $\xi^* = 0$, la condition de couverture (1.33) contre $\theta = \int_t^T \tau(s) ds$ se réécrit pour tout instant $t \in [t_M, T]$

$$w(t) + (e^\theta - 1)v(t) \geq N(u(T), v(T)) \quad (3.67)$$

avec $N(u(T), v(T)) = -c^- v(T) = -c^- e^\theta v(t)$

ou $N(u(T), v(T)) = u(T) - K + c^+(u(T) - v(T)) = (1 + c^+)e^\theta u(t) - K - c^+ e^\theta v(t)$.

Dans la région d'intérêt Λ :

⇒ Contre $\tau(s) = \tau^- \forall s \in [t, T]$ (c'est-à-dire $e^\theta = e^{\tau^-(T-t)}$), où $N(u(T), v(T)) = -c^- e^\theta v(t)$, la condition de couverture (3.67) devient

$$w(t) + ((1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1)v(t) \geq 0 . \quad (3.68)$$

⇒ Contre $\tau = \tau^+$, (c'est-à-dire $e^\theta = e^{\tau^+(T-t)}$), où $N(u(T), v(T)) = (1 + c^+)e^\theta u(t) - K - c^+ e^\theta v(t)$, la relation (3.67) devient

$$w(t) + ((1 + c^+)e^{\tau^+(T-t)} - 1)v(t) \geq ((1 + c^+)e^{\tau^+(T-t)}u(t) - K) . \quad (3.69)$$

Par conséquent, si nous supposons les variables (t, u) fixes, nous obtenons pour tout (t, u) deux contraintes affines dans le plan (v, w) , (3.68) et (3.69), dont les frontières respectives sont les coupes à (t, u) fixés des variétés de dimension 3 $\langle \tau^- \rangle$ (d'équation (3.41) avec (3.44)) et $\langle \tau^+ \rangle$ (d'équation (3.48) avec (3.51)). Ces deux droites à (t, u) fixé s'intersectent au point

$$\begin{cases} \check{v}(t, u) = \frac{[(1+c^+)e^{\tau^+(T-t)}]u-K}{(1+c^+)e^{\tau^+(T-t)}-(1+c^-)e^{\tau^-(T-t)}} = \frac{(1+q^+(t))u-K}{q^+(t)-q^-(t)} , \\ \check{w}(t, u) = -\left[(1+c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1\right] \check{v}(t, u) = -q^-(t)\check{v}(t, u) . \end{cases}$$

Pour tout $u(t) \in \Lambda \cap \{(t, u) \mid t \in [t_M, T]\}$ (région (3.60)), ce point d'intersection décrit naturellement la variété \mathcal{D} (3.52) de dimension 2. On retrouve que l'ensemble des états capturables, situé au dessus de ces deux contraintes par rapport à l'axe des w , est bien celui représenté sur la figure 3.5.

Dans la région (3.60), le graphe de la fonction Valeur, frontière de la zone de capture \mathbb{C}_t , correspond aux max en w des deux hypersurfaces $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ d'équations respectives (3.41) et (3.48). Ainsi l'expression de la fonction Valeur est donnée par

$$W(t, u, v) = \max \left\{ -q^+(t)(u - v) - K , -q^-(t)v \right\} ,$$

c'est-à-dire

$$W(t, u, v) = \begin{cases} -q^+(t)(u - v) - K & \text{si } v \leq \check{v}(t, u) , \\ -q^-(t)v & \text{si } v \geq \check{v}(t, u) , \end{cases} \quad (3.70)$$

avec $q^\varepsilon(t) = (1 + c^\varepsilon)e^{\tau^\varepsilon(T-t)} - 1$ pour $\varepsilon \in \{+, -\}$ (voir (3.44) et (3.51) pour $t \in [t_M, T]$). Cette fonction Valeur présente une discontinuité de gradient en $v = \check{v}(t, u)$ correspondant à un minimum local. Ainsi le long de la barrière composite \mathcal{D} , la normale semi-perméable n'est plus définie de manière unique. La forme (3.70) est équivalente à la suivante

$$W(t, u, v) = \begin{cases} \check{w}(t, u) + q^+(t)(\check{v}(t, u) - v) & \text{si } v \leq \check{v}(t, u) , \\ \check{w}(t, u) + q^-(t)(\check{v}(t, u) - v) & \text{si } v \geq \check{v}(t, u) \end{cases} . \quad (3.71)$$

3.6.2 Analyse des résultats obtenus pour $t_M \leq t \leq T$

Formule de représentation unique de la fonction Valeur

Dans la région d'intérêt Λ pour $t \in [t_M, T]$ (région (3.60)), la fonction Valeur (3.71) peut se réécrire sous la forme

$$W(t, u, v) = \check{w}(t, u) + q^\varepsilon(t)(\check{v}(t, u) - v) = Q^\varepsilon(t)\check{V}(t, u) - q^\varepsilon(t)v, \quad \varepsilon = \text{signe}(\check{v} - v), \quad (3.72)$$

où $\check{V}(t, u) = (\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))^t$ est donné par (3.55), et $Q^\varepsilon(t) = (q^\varepsilon(t), 1) = ((1 + c^\varepsilon)e^{\tau^\varepsilon(T-t)} - 1, 1)$, sont donnés $\forall \varepsilon \in \{+, -\}$ par les relations (3.44) et (3.51).

Intéressons nous à l'expression prise par les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ pour $t \in [t_M, T]$ sur les deux bords de la région d'intérêt Λ

➔ Sur le bord gauche de la région d'intérêt $u_g(t) = \frac{K}{1+c^+}e^{-\tau^+(T-t)} = \frac{K}{1+q^+(t)}$, la relation (3.52) entraîne directement

$$(\check{v}(t, u_g(t)), \check{w}(t, u_g(t))) = (0, 0) \quad \text{pour } t \in [t_M, T]. \quad (3.73)$$

➔ Sur le bord droit de la région d'intérêt $u_d(t) = \frac{K}{1+c^-}e^{-\tau^-(T-t)} = \frac{K}{1+q^-(t)}$, en substituant K par $u_d(t)(1 + q^-(t))$ dans (3.52), on obtient

$$(\check{v}(t, u_d(t)), \check{w}(t, u_d(t))) = (u_d(t), u_d(t) - K) \quad \text{pour } t \in [t_M, T]. \quad (3.74)$$

Comme $\check{v}(t, u)$ et $\check{w}(t, u)$ (formule (3.52)) sont croissantes en u , nous obtenons $\check{v}(t, u) \in [0, u]$ et $\check{w}(t, u) \in [0, u - K]$ dans la région finale (3.60) $\Lambda \cap \{(u, t) \mid t \in [t_M, T]\}$.

Propriété 3.6.1 *Nous rappelons qu'en dehors de la région d'intérêt Λ , où $\check{V}(t, u)$ n'est pas défini (puisque une seule nappe existe), la fonction Valeur est donnée par la proposition 3.5.1.*

Comme $v(t) \in [0, u] \forall t$, et à fortiori $\check{v}(t, u) \in [0, u] \forall t$, il est adroit de se servir composition optimale du portefeuille de couverture (3.64) et (3.65) pour introduire pour tout $t \in [0, T]$, l'extension suivante de $\check{V}(t, u)$

$$(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u)) = (0, 0) \quad \text{pour } u(t) < u_g(t) = \frac{K}{1+c^+}e^{-\tau^+(T-t)}, \quad (3.75)$$

$$(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u)) = (u(t), u(t) - K) \quad \text{pour } u(t) > u_d(t) = \frac{K}{1+c^-}e^{-\tau^-(T-t)}, \quad (3.76)$$

où les fonctions $q^+(t)$ et $q^-(t)$ restent donnés par (3.44) et (3.51). Cette extension permet ainsi de conserver la formule de représentation de W (3.72) lorsque $(t, u) \notin \Lambda$.

Avec l'extension introduite dans la propriété 3.6.1, nous obtenons, pour $t \in [t_M, T]$, des valeurs

$(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ continues

$$\check{V}(t, u) = \begin{pmatrix} \check{v}(t, u) \\ \check{w}(t, u) \end{pmatrix} = \begin{cases} (0, 0)^t & \text{pour } u(t) < u_g(t), \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -q^-(t) \end{pmatrix} \frac{(1+q^+)u-K}{q^+(t)-q^-(t)} & \text{pour } u(t) \in \Lambda, \\ (u, u-K)^t & \text{pour } u(t) > u_d(t). \end{cases} \quad (3.77)$$

Remarque 3.6.2 Pour tout $u(T) \in \mathbb{R}^+$ la quantité $\check{v}(T, u(T))$ (formule (3.77) avec $t = T$) coïncide avec « la séparatrice » de la figure 3.1, ce qui montre que le caractère « naturel » de l'extension de $\check{v}(t, u)$ à $(t, u) \notin \Lambda$ introduite dans la propriété 3.6.1.

En conclusion pour $t \in [t_M, T]$ la fonction Valeur est donnée pour tout $u \in \mathbb{R}^+$ par (3.72) où $q^\varepsilon(t) = (1 + c^\varepsilon)e^{-\tau^\varepsilon(T-t)}$ sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 , et où $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ donnés par (3.77) pour $t \in [t_M, T]$ sont continus dedans, dehors, et sur les deux bords $u_g(t)$ et $u_d(t)$, de la région d'intérêt Λ . Ainsi pour $t \in [t_M, T]$ la fonction Valeur est continue.

Interprétation financière de $\check{v}(t, u)$ et de $q^\varepsilon(t, u)$, dans la région Λ

Interprétation financière 3.6.3 Au vue de la formule (3.72), dans la région d'intérêt Λ , où les commandes extrémales du marché (τ^ε , $\varepsilon \in \{+, -\}$) sont ses commandes optimales, l'investissement en actif sous-jacent $v = \check{v}(t, u)$ correspond au meilleur compromis permettant au trader de minimiser la valeur du portefeuille de couverture $\check{w}(t, u)$ contre tout $\tau(\cdot) \in \Omega$. La composante de la normale semi-perméable en v à la nappe $\langle \tau^\varepsilon \rangle$, $q^\varepsilon(t) = (1 + c^\varepsilon)e^{\tau^\varepsilon(T-t)} - 1$ avec $\varepsilon = \text{signe}(\check{v} - v)$, représente pour le trader la perte en valeur relative entre t et T à ne pas être en $v = \check{v}(t, u)$ (par analogie avec l'équation (3.72)). Cette perte relative est maximisée (par le marché) pour $\tau(t) = \tau^+$ si $v \leq \check{v}(t, u)$ et pour $\tau(t) = \tau^-$ si $v \geq \check{v}(t, u)$. Sur la période finale $t \in [\max\{t_-, t_+\}, T]$ du jeu, où la stratégie est toujours $\xi^* = 0$, les relations (3.44) et (3.51) entraînent $C^- < q^-(t) \leq 0$ (vraie pour $t > t_-$) et $0 < q^+(t) < C^+$ (vraie pour $t > t_+$). Ces inégalités signifient que la perte encourue entre t et T à ne pas être en $v = \check{v}$ suite à l'évolution la plus défavorable du cours pour le trader ($\theta = \int_0^T \tau^\varepsilon ds = \tau^\varepsilon(T-t)$ avec $\varepsilon = \text{signe}(\check{v} - v)$), suivi des coûts de clôture $-c^-v$ à $t = T$, reste toujours moins importante que celle encourue par la transaction en actif sous-jacent à l'instant t d'amplitude $\xi = (\check{v}(t, u) - v)$, qui permet au trader de passer d'un investissement v à \check{v} . Si $t > t_\varepsilon$ avec $\varepsilon = \text{signe}(\check{v} - v)$, une transaction avant la clôture n'est pas optimale pour le trader, d'où la stratégie $\xi^* = 0$ sur la période finale du jeu. Au contraire, pour $t \leq t_\varepsilon$, il devient optimal pour le trader d'effectuer la transaction d'amplitude $\xi = \check{v} - v$ (un saut du signe de ε), afin de limiter à $q^\varepsilon = C^\varepsilon$ la perte relative à ne pas être en $v = \check{v}$. En utilisant l'extension de $\check{v}(t, u)$ introduite dans la propriété 3.6.1, cette interprétation reste valide en dehors de la région d'intérêt (elle devient l'interprétation financière 3.5.1).

Nature de la variété \mathcal{D}

Proposition 3.6.2 Dans la région Λ pour $t \in [t_M, T]$ (région (3.60)), la variété $\mathcal{D}(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ donnée par (3.52) est une τ -ligne de dispersion au sens de [Isa65, Ber77].

Preuve de la proposition 3.6.2 Les états situés au dessus du graphe de W (c'est-à-dire avec $w(t) > W(t, u, v)$) sont capturables. Sur la restriction de la fonction Valeur à la variété \mathcal{D} , $\check{w}(t, u) = W(t, u, \check{v}(t, u))$, l'état se dirige sur ou au dessus de l'une des deux nappes régulières (sur la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ si $\tau = \tau^+$, sur la nappe $\langle \tau^- \rangle$ si $\tau = \tau^-$, et quitte les deux nappes si $\tau \neq \tau^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{+, -\}$), définissant ainsi une dispersion au sens de [Isa65, Ber77]. Il nous reste à vérifier que le « *le coin ne fuit pas* » [Bre78, Ber76] pour $(v, w) = (\check{v}(t, u), \check{w}(t, u)) \in \mathcal{D}$ et tout $\tau \neq \{\tau^-, \tau^+\}$. La variété \mathcal{D} est obtenue comme l'intersection des deux parties de la barrière $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$, qui mènent chacune à la couverture exacte $w(T) = N(u(T), v(T))$ pour le trader, contre les contrôles optimaux respectifs du marché, $\tau^* = \tau^-$ sur $\langle \tau^- \rangle$ et $\tau^* = \tau^+$ sur $\langle \tau^+ \rangle$. Sur ces deux parties de la barrière, le contrôle du trader (le minimiseur) est le même à savoir $\xi^* = 0$. Par conséquent, le coin ne fuit pas puisque le même contrôle du trader empêche l'état de traverser les deux parties de la barrière dans le sens $w(t) < W(t, u, v)$ contre toute commande optimale du marché (le maximiseur). ■

3.7 Construction d'une variété équivoque \mathcal{E} pour notre jeu

3.7.1 Justification de l'apparition d'une variété équivoque dans notre jeu.

Dans notre jeu, lorsque, soit $q^+ = C^+$ ou $q^- = C^-$ est atteint par intégration en temps rétrograde des équations adjointes avec $\xi^* = 0$, une des deux nappes semi-perméables (hyper-surfaces) $\langle \tau^+ \rangle$ ou $\langle \tau^- \rangle$ (dans le cas du call vanille) cesse d'exister. De plus, la nappe qui cesse d'exister ne peut pas être prolongée en temps rétrograde de manière \mathcal{C}^1 , car les équations adjointes (3.29) impliqueraient $|q^\varepsilon| > |C^\varepsilon|$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, ce qui est interdit par la contrainte (3.24). Il en découle qu'une partie de la barrière composite du jeu ne peut plus être de classe \mathcal{C}^1 .

Conformément à la théorie d'Isaacs-Breakwell-Bernhard, il nous faut alors, dans ce cas, construire un raccordement de trajectoires sur la barrière en s'assurant, toutefois, que l'état ne puisse pas traverser la barrière composite dans le sens défavorable au trader [Isa65, Ber77]¹². Dans l'équation qualitative d'Isaacs (3.17), l'hamiltonien est linéaire par morceau en ξ . Ainsi dans notre jeu, le domaine holographe [Isa65, Ber77] $f(t, Y; \mathcal{V}, \tau)$ (où $\mathcal{V} = \mathbb{R}$) n'est pas strictement convexe (mais linéaire par morceaux), et par conséquent, conformément à [Isa65, Ber77], le seul raccordement possible est une « jonction équivoque » [Isa65]. Pour que ce raccordement soit une jonction équivoque, la théorie d'Isaacs-Breakwell-Bernhard [Isa65, Ber77], énonce que l'une des deux nappes semi-perméable doit être singulière (ici en ξ)¹³

Dans notre jeu, la nappe qui cesse d'exister se trouve remplacée par une nappe de saut, qui la prolonge continûment avec $q = C^\varepsilon$, $\varepsilon = \text{signe}(\xi)$, engendrant la singularité en ξ nécessaire de la nappe de saut. La nappe de saut, qui est une hypersurface semi-perméable (propriété 3.3.1), se raccorde à la nappe régulière qui continue d'exister le long de la jonction équivoque (variété de codimension 2, donc

¹²Cette technique de raccordement est appelée « safe contact » dans la terminologie de R.Isaacs. Cependant, dans [Isa65], R.Isaacs a étudié des raccords sur une partie non utile de la cible. Pour un raccordement sur la barrière, le lecteur peut se reporter à la théorie de P.Bernhard développée dans [Ber77].

¹³Pour plus de détails sur la nécessité de cette singularité, le lecteur peut se reporter à la théorie développée dans [Ber75, Ber77, Ber79].

de dimension 2 dans le cadre de notre jeu). Nous désignons par $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ les valeurs de (v, w) sur cette jonction équivoque.

3.7.2 Méthode pour construire la variété équivoque

Afin d'expliquer comment nous construisons cette variété équivoque par une technique de raccordement de trajectoires sur la barrière, nous allons détailler pas à pas la méthode.

Notations

Pour pouvoir traiter simultanément les différents raccords équivoques qui vont intervenir dans notre jeu qualitatif, nous désignons par :

- $\langle \mathcal{N} \rangle$: la nappe régulière (ou singulière) qui continue d'exister. Dans l'étude du call vanille, la nappe semi-perméable $\langle \mathcal{N} \rangle$ est nécessairement régulière et correspond à la nappe $\langle \tau^- \rangle$ (nappe $\xi_N = 0, \tau_N = \tau^+$) ou à la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ (nappe $\xi_N = 0, \tau_N = \tau^-$). Toutefois, dans l'étude du call digital (chapitre 4), la nappe émergente $\langle \mathcal{N} \rangle$ se trouvera être une nappe singulière en τ . Dans l'optique de transposer la théorie développée dans ce paragraphe à l'étude du call digital, il est nécessaire de considérer également le cas où la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$ s'avère être une nappe singulière en τ . Nous adoptons l'appellation « nappe émergente » pour désigner cette hyper-surface semi-perméable $\langle \mathcal{N} \rangle$ qui fait partie de la barrière composite. Sur cette nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$, les commandes optimales des deux joueurs sont $\xi^* = \xi_N = 0$ et $\tau^* = \tau_N$, avec τ_N extrémal si $\langle \mathcal{N} \rangle$ est régulière, et $\tau_N \in [\tau^-, \tau^+]$ quelconque si $\langle \mathcal{N} \rangle$ est singulière. Nous notons $\nu^N = (n_N, p_N, q_N, 1)^t$ sa normale semi-perméable et $\sigma_N = p_N u + (q_N + 1)v$ sa fonction de commutation en τ . On rappelle que $\sigma_N(t)$ ainsi que la composante $n_N(t)$, sont constantes dans le temps le long de chaque trajectoire primaire $\tau = \tau_N$, avec $n_N(t) = -\tau_N \sigma_N(t)$ (voir la propriété 3.4.2.c).
- $\langle \text{saut} \rangle$: la nappe de saut qui remplace la nappe cessant d'exister. C'est une hyper-surface semi-perméable que nous appelons « nappe incidente ». Nous notons

$$\nu^s = (n^s, p^s, C^s, 1)^t \quad \text{avec} \quad s = \text{signe}(\text{saut}) \in \{+, -\},$$

sa normale semi-perméable (voir l'expression (3.26)), où les composantes n^s et p^s sont constantes le long d'une trajectoire de saut. Si $s = +$ (respectivement $s = -$), on utilisera la notation $\langle \text{saut} \rangle = \langle \uparrow \rangle$ (respectivement $\langle \text{saut} \rangle = \langle \downarrow \rangle$), pour désigner cette nappe $\langle \text{saut} \rangle$ formée de trajectoires de saut correspondant à un achat $\xi > 0$ (respectivement une vente, $\xi < 0$).

- $\mathcal{E} = \langle \mathcal{N} \rangle \cap \langle \text{saut} \rangle$ la variété équivoque, de codimension 2, formée du raccordement de la nappe incidente $\langle \text{saut} \rangle$ sur la nappe émergente $\langle \mathcal{N} \rangle$.

Conditions à respecter pour la construction de la variété équivoque \mathcal{E}

Le raccordement de la nappe incidente $\langle \text{saut} \rangle$ sur la nappe émergente $\langle \mathcal{N} \rangle$, doit s'effectuer le long de trajectoires qui garantissent que le minimiseur (le marché ayant pour commande τ) ne peut pas forcer l'état à traverser la barrière composite dans le sens défavorable au maximiseur (le trader ayant pour commande ξ). Autrement dit, le trader doit, en chacun des points de \mathcal{E} , trouver une stratégie

appropriée ξ lui permettant de maintenir l'état sur ou au-dessus (par rapport à l'axe w) de la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$ et de la nappe $\langle \text{saut} \rangle$, et cela quelque soit la commande $\tau \in \Omega$ du marché.

Les étapes de la méthode utilisée pour construire \mathcal{E}

Nous allons dessiner la jonction équivoque \mathcal{E} sur la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$. La méthode utilisée pour construire la variété \mathcal{E} se compose en cinq étapes suivantes :

1. On calcul la stratégie, notée $\xi^s(\tau)$, permettant au trader de maintenir l'état sur la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$ quelque soit τ , c'est-à-dire telle que

$$\langle \nu^N, f(t, Y; \xi^s(\tau), \tau) \rangle = 0 \quad \forall \tau .$$

Ce point fait l'objet de la proposition 3.7.1 à venir.

2. On vérifie a posteriori que $s = \text{signe}(\xi^s(\tau))$, pour s'assurer de la singularité en ξ du produit scalaire

$$\langle \nu^s, f(t, Y; \xi^s(\tau), \tau) \rangle .$$

3. Avec cette stratégie $\xi^s(\tau)$, « on devine » la commande τ (notée τ_E) qui minimise le produit scalaire $\langle \nu^s, f(t, Y; \xi^s(\tau), \tau) \rangle$. Mentionnons que ce produit scalaire ne dépend pas de la stratégie $\xi^s(\tau)$, du fait de la singularité $q^s = C^s$ avec $s = \text{signe}(\xi^s(\tau))$. La proposition 3.7.4 nous montrera que τ_E est extrémal et engendre, avec $\xi = \xi^s(\tau_E)$, des trajectoires transverses à celles de la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$.

4. On construit la variété équivoque \mathcal{E} par intégration en temps rétrograde des équations primales (les équations (3.16)), avec $C^\varepsilon = C^s$, le long du champ de trajectoires $(\tau_E, \xi^s(\tau_E))$ dessiné sur la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$. La dynamique obtenue pour la variété équivoque \mathcal{E} ainsi que la formule explicite résultant de l'intégration de cette dynamique, seront données à la fin du paragraphe 3.7.3 (formules (3.87), (3.88), et (3.89)). Les conditions au bord adéquates de l'intégration des équations (3.86), seront données sur une variété de dimension 1, notée $\partial\mathcal{E}$, propre à chaque jonction équivoque, et fonction de la géométrie du jeu pour les phases ultérieures. Ces conditions au bord seront choisies de façon à assurer la continuité de la barrière composite.

5. On vérifie a posteriori que τ_E minimise bien l'hamiltonien $\langle \nu^s, f(t, Y; \xi^s(\tau), \tau) \rangle$, ce qui assure la condition de semi-perméabilité

$$\min_{\tau} \langle \nu^s, f(t, Y; \xi^s(\tau), \tau) \rangle = 0 . \tag{3.78}$$

pour la nappe de saut $\langle \text{saut} \rangle$ sur la jonction équivoque \mathcal{E} . Nous expliquerons (en nous servant de l'équation (3.81) à venir) que, pour notre jeu, cette vérification est équivalente à vérifier que $n^s \geq 0$, où les composantes n^s et p^s de la normale semi-perméable $\nu^s = (n^s, p^s, C^s, 1)^t$ restent à déterminer¹⁴. Ces composantes n^s et p^s seront obtenues à l'aide des équations adjointes généralisées [Ber77] pour la jonction équivoque (les équations (3.82) à venir), et des conditions au

¹⁴De manière équivalente, cette vérification peut s'effectuer à l'aide de la condition de viscosité. L'approche par solution de viscosité sera utilisée dans le paragraphe 5.4.

bord $\partial\mathcal{E}$ (servant de condition au bord pour les équations adjointes généralisées). Plus précisément, n^s et p^s seront déterminées comme solution d'un système de deux équations scalaires qui exprime que la normale ν^s à $\langle \text{saut} \rangle$ est orthogonale, d'une part à la variété au bord $\partial\mathcal{E}$ (puisque $\partial\mathcal{E} \subset \mathcal{E} \subset \langle \text{saut} \rangle$), et d'autre part à la dynamique $f(\bar{Y}; \tau_E, \xi^s(\tau_E))$ (puisque cette dynamique est tangente aux trajectoires de \mathcal{E}).

Par la singularité en ξ des trajectoires de saut, la condition de semi-perméabilité

$$\min_{\tau} \langle \nu^s, f(t, Y; \xi^s(\tau), \tau) \rangle = 0$$

s'étend à toute la nappe $\langle \text{saut} \rangle$. La nécessité de la singularité en ξ de $\langle \text{saut} \rangle$ est cruciale pour garantir que la stratégie $\xi^s(\tau)$ ne permette en aucun cas au marché de forcer l'état à franchir $\langle \text{saut} \rangle$ dans le sens défavorable au trader ¹⁵.

3.7.3 Application générale de la méthode à toute variété \mathcal{E} de notre jeu

Stratégie $\xi^s(\tau)$ le long de \mathcal{E}

Proposition 3.7.1 *Sur la variété \mathcal{E} , la stratégie du trader, fonction de τ et notée $\xi^s(\tau)$, permettant de maintenir l'état sur la variété $\langle \mathcal{N} \rangle$ est donnée par*

$$\xi^s(\tau) = \frac{(\tau - \tau_N)\sigma_N(t)}{C^s - q_N(t)}, \quad (3.79)$$

avec $\sigma_N(t)$ constant le long des trajectoires primaires $\tau = \tau_N$. Nous devons vérifier a posteriori que cette stratégie $\xi^s(\tau)$ a le signe $s = \text{signe}(\text{saut})$.

Preuve de la proposition 3.7.1 Rester sur la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle \forall \tau$, revient à vérifier la condition d'orthogonalité

$$\langle \nu^N, f(t, Y, \xi, \tau) \rangle = 0 \quad \forall \tau .$$

La nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$, qu'elle soit régulière ou singulière, fait partie de la partie terminale de la barrière, et par conséquent elle est construite avec $\xi^* = 0$. Ainsi, sa normale semi-perméable $\nu^N = (n_N, p_N, q_N, 1)^t$ satisfait la propriété 3.4.2.c, que l'on réécrit sous la forme

$$n_N(t) = -\tau_N[p_N(t)u(t) + (q_N(t) + 1)v(t)] = -\tau_N\sigma_N(t) ,$$

où τ_N désigne la commande optimale du marché sur la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$ lorsque celle-ci est régulière. Dans le cas où la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$ est singulière en τ , la commande τ_N n'est pas définie de manière unique sur $[\tau^-, \tau^+]$ et $\sigma_N(t) = 0$, ce qui conduit à $n_N(t) = 0$ (propriété 3.4.2.c). En supposant que $\varepsilon = \text{signe}(\xi) = s$, ce que l'on vérifiera a posteriori, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \nu^N, f \rangle &= n_N(t) + \tau[p_N(t)u(t) + (q_N(t) + 1)v(t)] + (q_N(t) - C^s)\xi \\ &= -\tau_N\sigma_N(t) + \tau\sigma_N(t) + (q_N(t) - C^s)\xi . \end{aligned} \quad (3.80)$$

¹⁵Comme nous l'avons indiqué précédemment dans le paragraphe 3.7.1, le lecteur peut se reporter à [Ber75, Ber77, Ber79] pour plus de détails sur la nécessité de cette singularité.

Par conséquent la condition $\langle \nu^N, f(t, Y, \xi, \tau) \rangle = 0 \forall \tau$, fixe une stratégie du trader le long de la variété \mathcal{E} comme une fonction de τ , notée $\xi^s(\tau)$ (qui doit être de signe s , ce que l'on vérifiera a posteriori) :

$$\xi^s(\tau) = \frac{(\tau - \tau_N)\sigma_N(t)}{C^s - q_N(t)}. \quad \blacksquare$$

Remarque 3.7.1 Dans la formule (3.79), nous avons $\sigma_N(t) = p(t)u(t) + (1+q(t))v(t)$, où $(p(t), q(t))$ sont donnés par les équations (3.37). Dans les équations (3.37), $(p(T), q(T))$ dépendent de l'option étudiée, et plus précisément de la nappe émergente $\langle \mathcal{N} \rangle$ sur laquelle se raccorde la variété équivoque \mathcal{E} . Par contre, sur une même nappe régulière $\langle \mathcal{N} \rangle$, $(p(t), q(t))$ ne dépendent pas de $(u(T), v(T))$ puisque la dynamique est affine en l'état (voir la propriété 3.3.2). Dans le cas où $\langle \mathcal{N} \rangle$ est singulière, une dépendance en u apparaîtra pour $(p(t, u), q(t, u))$.

Propriété 3.7.2 Il est important de remarquer que la stratégie ξ^s (3.79) dépend de τ instantanément (le trader s'adapte instantanément à la commande du marché τ), et qu'ainsi la stratégie $\xi^s(\tau)$ n'est pas une stratégie non anticipative à proprement parler (pas strictement causale). En effet, connaître la variation du cours τ instantanément c'est connaître un futur proche. Cependant, grâce au théorème de convergence qui sera obtenu dans le paragraphe 6.3, cette stratégie $\xi^s(\tau)$ pourra être approchée par une stratégie (strictement) non-anticipative $\xi(\tau)$ en temps discret.

Propriété 3.7.3 La proposition 3.7.1 montre que dans le cas où la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$ est singulière en τ , donc avec une fonction σ de commutation en τ vérifiant $\sigma_N(t) = 0$ (ce qui implique $\langle \nu, f(t, Y, \xi^s(\tau), \tau) \rangle$ indépendant de τ), la stratégie du trader devient $\xi^s = 0$ a fortiori de signe $s = \text{signe}(\text{saut})$ et indépendante de τ . La proposition 3.7.1 montre également que si $\tau = \tau_N$, la stratégie correspondante est $\xi^s(\tau_N) = 0$, ce qui est conforme aux commandes optimales sur la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$ (nappe $\tau^* = \tau_N$, $\xi^* = 0$).

Le champ de trajectoires $(\tau, \xi^s(\tau))$

On construit la variété équivoque \mathcal{E} par intégration en temps rétrograde des équations primales (les équations (3.16)) le long du champ de trajectoires $(\tau_E, \xi^s(\tau_E))$ dessiné sur la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$. La commande τ_E choisie est celle minimisant $\langle \nu^s, f(t, Y, \xi^s(\tau), \tau) \rangle$, où $\nu^s = (n^s, p^s, C^s, 1)^t$, avec n^s, p^s à déterminer (propriété 3.3.1). La non-connaissance des composantes n^s, p^s de la normale semi-perméable à la nappe $\langle \text{saut} \rangle$ nous pose un problème évident pour étudier ce produit scalaire. La méthode que l'on va utiliser consiste alors à calculer n^s, p^s par le biais des équations adjointes généralisées, en même temps que l'on construit \mathcal{E} , et à vérifier a posteriori la condition de semi-perméabilité (3.78). Dès lors, une question se pose :

« Avec quel τ_E (c'est-à-dire le long de quelle trajectoire) construit t-on \mathcal{E} ? »

Proposition 3.7.4 Les trajectoires parcourant \mathcal{E} doivent être construites avec un τ extremal (à savoir $\tau_E = \tau^-$ ou $\tau_E = \tau^+$), engendrant des trajectoires transverses à celles de la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$.

Preuve de la proposition 3.7.4 La condition de semi-perméabilité (3.78) conduit à

$$\min_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \left\langle \begin{pmatrix} n^s \\ p^s \\ C^s \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \tau u \\ \tau v + \xi^s(\tau) \\ \tau v - C^s \xi^s(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle = 0 ,$$

c'est-à-dire à

$$n^s + \min_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} [\tau[p^s u + (C^s + 1)v]] = 0 . \quad (3.81)$$

Dans l'équation (3.81), la linéarité en τ de $\tau[p^s u + (C^s + 1)v]$ montre que les trajectoires parcourant \mathcal{E} doivent être construites avec un τ_E extremal (à savoir $\tau_E = \tau^-$ ou $\tau_E = \tau^+$). Par ailleurs puisque la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$ est construite avec $\tau = \tau_N$, il en découle que pour $\tau = \tau_N$, les trajectoires sont celles de la nappe émergente $\langle \mathcal{N} \rangle$, et de ce fait que des trajectoires avec $\tau = \tau_N$ ne permettrait pas de construire une jonction impliquant toutes les trajectoires émergentes. Il en résulte que les trajectoires parcourant \mathcal{E} doivent être construites avec un $\tau = \tau_E$ engendrant, avec $\tau^s(\tau_E)$, des trajectoires transverses à celles de la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$. ■

Si la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$ est régulière (donc avec un τ extremal $\tau_N = \tau^+$ ou $\tau_N = \tau^-$), la proposition 3.7.4 permet de deviner le τ_E à choisir, à savoir le τ extremal différent de τ_N . On construit alors la jonction \mathcal{E} à l'aide des trajectoires $(\tau_E, \xi^s(\tau_E))$ dessinées sur la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$. Il nous reste à vérifier a posteriori que $\tau = \tau_E$ fournit bien le minimum dans la condition de semi-perméabilité (3.78), à savoir que τ_E minimise bien l'hamiltonien $H = n^s + \tau[p^s u + (C^s + 1)v]$ dans l'équation (3.81). De manière équivalente, cela revient à vérifier $n^s \geq 0$. En effet, $n^s < 0$ impliquerait que $\tau_E[p^s u + (C^s + 1)v] > 0$, et donc que l'on s'est trompé de τ extremal (le minimum en τ étant nécessairement inférieur ou égal à 0).

Dans le cas où la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$ est singulière en τ , on choisit également l'un des τ_E extremal suivant les conditions au bord sur la variété $\partial\mathcal{E}$ de dimension 1, et on vérifie a posteriori que $\tau = \tau_E$ minimise l'hamiltonien $\langle \nu^s, f(t, Y, \xi^s(\tau), \tau) \rangle$, i.e. que $n^s \geq 0$.

Equations adjointes généralisées et condition de semi-perméabilité pour la nappe $\langle \text{saut} \rangle$

La méthode utilisée pour vérifier que $n^s \geq 0$ (étape 5 de la méthode, page 115) permet de s'assurer de la condition de semi-perméabilité pour la nappe $\langle \text{saut} \rangle$, et donc ¹⁶, de la semi-perméabilité de toute la surface composite à la jonction \mathcal{E} . Par un abus de langage, on appellera souvent $n^s \geq 0$ la condition de semi-perméabilité pour la jonction \mathcal{E} .

Pour effectuer cette vérification, nous allons nous servir des équations adjointes généralisées [Ber77] pour la jonction équivoque. Les équations adjointes généralisées permettent de construire de proche en proche la normale à la nappe incidente $\langle \text{saut} \rangle$ qui se raccorde sur la jonction équivoque ¹⁷ \mathcal{E} . En effet, la théorie générale [Ber75](paragraphe 3.2)[Ber79], énonce que le long de la jonction équivoque \mathcal{E} , les

¹⁶Puisque, en outre, le long de la jonction équivoque \mathcal{E} l'état reste sur la nappe émergente $\langle \mathcal{N} \rangle$, grâce au choix de la stratégie $\xi^s(\tau)$ (proposition 3.7.1).

¹⁷Elle pourront également être utilisées pour la jonction focale à venir (paragraphe 3.9).

équations adjointes généralisées (3.82) construisent une normale ν^s qui préservent l'orthogonalité avec toutes les tangentes à \mathcal{E} , et donc l'orthogonalité à \mathcal{E} elle-même¹⁸. Ces équations adjointes généralisées sont définies par

$$\dot{\nu}^s = - \left(\frac{\partial H(\bar{Y})}{\partial \bar{Y}} \right)^t + \alpha(t)(\nu^s - \nu^N), \quad (3.82)$$

avec $\bar{Y} = (t, Y) = (t, u, v, w)$ et $H(\bar{Y})$ l'hamiltonien minimaximisé, donc (voir l'équation (3.81))

$$H(\bar{Y}) = n^s + \tau_E [p^s u + (C^s + 1)v] \quad \text{et} \quad - \left(\frac{\partial H(\bar{Y})}{\partial \bar{Y}} \right)^t = -(\nu^s \frac{\partial f}{\partial \bar{Y}})^t = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau_E p^s \\ -(1 + C^s)\tau_E \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

Dans les équations adjointes généralisées (3.82) :

- ⇒ $\nu^s - \nu^N$ est une normale à la jonction \mathcal{E} .
- ⇒ $\alpha(t)$ sera déterminé par $\dot{q}^s = 0$, de sorte que la singularité $q^s = C^s$ de la nappe <saut> soit préservée, ce qui assure l'orthogonalité $\langle \nu^s, f^s \rangle = 0$, où f^s est la dynamique des trajectoires de saut, donnée par (3.25) avec $\varepsilon = s$.

Puisque $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ (jeu stationnaire), l'équation différentielle en n^s dans (3.82), est une équation affine du premier ordre, de la forme

$$\dot{n}^s = \alpha(t)n^s + \beta(t) \quad \text{avec} \quad \beta(t) = -\alpha(t)n^N.$$

On introduit $\phi(t, h) = e^{\int_h^t \alpha(\theta) d\theta} > 0$. L'intégration de l'équation différentielle en n^s sur l'intervalle $[t, t_f]$ (où t désigne l'instant courant et t_f l'instant final caractérisé par la condition au bord sur la variété $\partial\mathcal{E}$) conduit à

$$n^s(t) = - \int_t^{t_f} \phi(t, h)\beta(h)dh + \phi(t, t_f)n(t_f).$$

Comme $\phi(t, h) > 0 \forall h \in [t, t_f]$, il en résulte la propriété suivante

Propriété 3.7.5 *Si $\beta(h) \leq 0$ i.e. $\alpha(t)n^N \geq 0$ alors n^s ne change pas de signe sur $[t, t_f]$, et par conséquent, il suffit de s'assurer que $\beta(h) \leq 0$, et $n^s \geq 0$ sur la variété $\partial\mathcal{E}$, pour conclure à la semi-perméabilité de toute la jonction équivoque \mathcal{E} .*

Pour chacune des variétés équivoques intervenant dans le jeu, nous constaterons que $\beta(h) \geq 0$. Il nous restera ensuite à identifier la composante n^s sur $\partial\mathcal{E}$ (et à vérifier qu'elle a le bon signe), par le biais du système de deux équations scalaires indiqué dans l'étape 5 de la méthode (page 115).

Propriété 3.7.6 *Désignons par \check{v}_t et \check{v}_u les dérivées partielles respectives de $\check{v}(t, u)$ par rapport aux variables t et u , et de la même façon celles de $\check{w}(t, u)$. La jonction équivoque $\mathcal{E} = \langle \mathcal{N} \rangle \cap \langle \text{saut} \rangle$ de*

¹⁸Par ailleurs l'orthogonalité de ν^s avec les trajectoires de saut sera assurée par la manière de déterminer le paramètre $\alpha(t)$ de l'équation (3.82) à venir.

dimension 2, paramétrée en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$, admet deux tangentes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \check{v}_t \\ \check{w}_t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \check{v}_u \\ \check{w}_u \end{pmatrix}. \quad (3.84)$$

Puisque ces tangentes sont orthogonales à la normale $\nu^s = (n^s, p^s, C^s, 1)^t$ à la variété de saut $\langle \text{saut} \rangle$, il en résulte (en utilisant les notations $Q_f^s = (C^s - 1)$ et $\check{V} = \begin{pmatrix} \check{v} \\ \check{w} \end{pmatrix}$) les équations

$$\begin{cases} n^s + Q_f^s \check{V}_t = 0, \\ p^s + Q_f^s \check{V}_u = 0. \end{cases}$$

La première de ces équations nous montre que, sur la jonction $\mathcal{E} = \langle \mathcal{N} \rangle \cap \langle \text{saut} \rangle$, la condition de semi-perméabilité $n^s > 0$ pour la nappe $\langle \text{saut} \rangle$ (condition pour que le coin « ne fuie pas ») est équivalente à

$$Q_f^s \check{V}_t < 0 \quad \text{où} \quad s = \text{signe}(\text{saut}). \quad (3.85)$$

Dynamique et solution explicite pour \mathcal{E} dans le cas où $\langle \mathcal{N} \rangle$ est régulière

Pour procéder à la construction de la variété équivoque $\mathcal{E} = \langle \mathcal{N} \rangle \cap \langle \text{saut} \rangle$ (étape 4 de la méthode, page 115), il nous faut étudier la dynamique (3.16), avec $\tau = \tau_E$, $\xi = \xi^s(\tau_E)$ donné par (3.79) où $\sigma_N(t) = p_N(t)u(t) + (1 + q_N(t))v(t)$, et $C^\varepsilon = C^s$ ($s = \text{signe}(\xi^s(\tau_E))$). Par un calcul direct, la dynamique obtenue s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{u} = \tau_E u, \\ \dot{v} = \tau_E v + \xi^s(\tau_E) = \frac{\tau_E(1 + C^s) - \tau_N(1 + q_N(t))}{C^s - q_N(t)} v + \frac{(\tau_E - \tau_N)p_N(t)}{C^s - q_N(t)} u, \\ \dot{w} = \tau_E v - C^s \xi^s(\tau_E) = \frac{-\tau_E(1 + C^s)q_N(t) + \tau_N C^s(1 + q_N(t))}{C^s - q_N(t)} v - \frac{C^s(\tau_E - \tau_N)p_N(t)}{C^s - q_N(t)} u. \end{cases} \quad (3.86)$$

En utilisant la notation $V = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ (introduite au début du paragraphe 3.4.6), la dynamique en V dans l'équation 3.86, peut se réécrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\dot{V} = \frac{1}{C^s - q_N(t)} \left[\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -q_N(t) \end{pmatrix} \tau_E(1 + C^s) - \begin{pmatrix} 1 \\ -C^s \end{pmatrix} \tau_N(1 + q_N(t)) \right) v + \begin{pmatrix} 1 \\ -C^s \end{pmatrix} (\tau_E - \tau_N)p_N(t)u \right]. \quad (3.87)$$

Dans le cas où la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$ est une hyper-surface régulière, les équations (3.37) où $\theta = \tau_N(T - t)$ (par exemple les équations (3.41) pour la nappe $\langle \tau^- \rangle$ et (3.48) pour la nappe $\langle \tau^+ \rangle$), conduisent à

$$p_N(t) = p_N(T)e^{\tau_N(T-t)} \quad \text{et} \quad q_N(t) = (1 + q_N(T))e^{\tau_N(T-t)} - 1.$$

Ainsi le système d'EDO (3.86) peut se réécrire, en fonction des paramètres $p_N(T)$, $q_N(T)$ (qui dépendent de la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$ et de l'option) et des variables courantes $u(t)$, $v(t)$. L'intégration de ce système d'EDO depuis les conditions au bord $(t_0, u(t_0), v(t_0), w(t_0))$ données sur la variété $\partial \mathcal{E}$ de dimension 1, conduit aux formules suivantes

$$\begin{cases} u(t) = u(t_0)e^{\tau_E(t-t_0)}, \\ v(t) = e^{\tau_E(t-t_0)} \left[\left(\frac{C^s - q_N(t_0)}{C^s - q_N(t)} \right)^{\frac{\tau_E - \tau_N}{-\tau_N}} \left(v(t_0) + \frac{p_N(T)}{1 + q_N(T)} u(t_0) \right) - \frac{p_N(T)}{1 + q_N(T)} u(t_0) \right], \\ w(t) = w(t_0) - \int_t^{t_0} (\tau_E v(\theta) - C^s \xi^s(\tau_E)) d\theta. \end{cases} \quad (3.88)$$

En rappelant que $\dot{q}_N(t) = -(1 + q_N(t))\tau_N$ (équation adjointe (3.29) pour $\langle \mathcal{N} \rangle$), on peut vérifier par différentiation directe que la formule explicite (3.88) obtenue pour v satisfait bien le système d'EDO (3.86). En ce qui concerne w , l'intégrale dans (3.88) sera explicite dans certains cas.

En remplaçant les conditions au bord $(t_0, u(t_0), v(t_0), w(t_0))$ sur $\partial \mathcal{E}$ par leurs expressions, les formules (3.88) pour (v, w) se réécrivent en fonction de (t, u) , aboutissant ainsi aux valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur la variété équivoque $\mathcal{E} = \langle \mathcal{N} \rangle \cap \langle \text{saut} \rangle$. Notons que l'intégration de la dynamique en w doit aboutir, par appartenance la nappe $\langle \mathcal{N} \rangle$, à l'équation de celle-ci (à (3.41) si $\langle \mathcal{N} \rangle = \langle \tau^- \rangle$ et à (3.48) si $\langle \mathcal{N} \rangle = \langle \tau^+ \rangle$), comme relation directe liant \check{w} à (t, u, \check{v}) sur $\mathcal{E} = \langle \mathcal{N} \rangle \cap \langle \text{saut} \rangle$.

Dynamique et solution explicite pour \mathcal{E} dans le cas où $\langle \mathcal{N} \rangle$ est singulière

Dans ce cadre, la situation est beaucoup plus simple puisque $\xi^s = 0$ (voir la propriété 3.7.3), et par conséquent $\xi(t) = 0$ jusqu'à $t = T$. La dynamique obtenue est ainsi celle de l'équation (3.36), donc

$$\begin{cases} \dot{u} = \tau_E u \\ \dot{v} = \tau_E v \\ \dot{w} = \tau_E v \end{cases}, \text{ qui s'intègre en } \begin{cases} u(t) = u(t_0)e^{\tau_E(t-t_0)} \\ v(t) = v(t_0)e^{\tau_E(t-t_0)} \\ w(t) = w(t_0) - (e^{\tau_E(t_0-t)} - 1)v(t) \\ = w(t_0) - (1 - e^{\tau_E(t-t_0)})v(t_0) \end{cases}. \quad (3.89)$$

3.8 Solution dans la région Λ pour $t \in [t_m, t_M]$

Dans cette région, une des deux nappes régulières $\langle \tau^- \rangle$ ou $\langle \tau^+ \rangle$ de la barrière naturelle cesse d'exister au profit d'une nappe de saut. Pour $t \leq t_+$ (respectivement $t \leq t_-$), la nappe régulière $\langle \tau^+ \rangle$ (respectivement $\langle \tau^- \rangle$) cesse d'exister puisque son existence nécessiterait $q^+ > C^+$ (respectivement $q^+ < C^-$) conduisant à $\xi = +\infty$ (respectivement $\xi = -\infty$). Dans ce cas, l'équation d'Isaacs ne pourrait pas alors être satisfaite, ce qui a justifié la contrainte (3.24). Ainsi, la nappe régulière qui cesse d'exister se trouve remplacée par une nappe singulière (caractérisée par la singularité $q = C^\varepsilon$, avec $\varepsilon = \text{signe}(\text{saut})$), et correspondant à un saut positif $\langle \uparrow \rangle$ de pente $-q = -C^+$ dans le plan (v, w) (respectivement une nappe de saut négatif $\langle \downarrow \rangle$ de pente $-q = -C^-$). Les variétés de dimension 2 formant l'intersection d'une nappe régulière et d'une nappe de saut à identifier sont respectivement

des variétés équivoques notées :

$$\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau^- \rangle \quad (\text{pour } t \in [t_-, t_+]) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^- = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \downarrow \rangle \quad (\text{pour } t \in [t_+, t_-]).$$

On désigne par $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u) = W(t, u, \check{v}(t, u)))$ les valeurs de (v, w) sur cette jonction équivoque. La fonction Valeur reste décrite par la formule (3.72), mais maintenant avec $q^\varepsilon = C^\varepsilon$, $\varepsilon = \text{signe}(\text{saut})$, où $q^{-\varepsilon}(t)$ reste donné par (3.57).

3.8.1 Pour $t_- \leq t \leq t_+$: une variété $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$

Remarque 3.8.1 *Pour cette première jonction équivoque, nous allons détailler la construction en rappelant la méthode utilisée dans les paragraphes 3.7 et 3.7.3. Pour les autres variétés équivoques, la construction sera plus condensée.*

Stratégie du trader le long de \mathcal{E}^+

Pour $t_- \leq t \leq t_+$, la nappe de saut $\langle \uparrow \rangle$ de normale semi-perméable $\nu^+ = (n^+, p^+, C^+, 1)$, doit se raccorder sur la nappe régulière $\langle \tau^- \rangle$, le long de la variété \mathcal{E}^+ de dimension 2, dessinée sur la nappe $\langle \tau^- \rangle$, et telle que quelque soit $\tau(\cdot) \in \Omega$, le trader puisse maintenir l'état sur ou au-dessus (par rapport à l'axe w) de la la nappe $\langle \tau^- \rangle$ et de la nappe $\langle \uparrow \rangle$. On rappelle que la nappe $\langle \tau^- \rangle$ a pour équation (3.41) avec $q^-(t) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1 \geq C^-$ (équation (3.44)), et pour normale $\nu_{\tau^-} = (-\tau^-(1 + q^-(t))v(t), 0, q^-(t), 1)^t$ (équation (3.42)). Par ailleurs, sur la nappe $\langle \tau^- \rangle$, la fonction de commutation en τ a pour expression $\sigma^-(t) = (1 + q^-(t))v(t)$ (formule (3.40)).

La stratégie de transaction $\xi^+(\tau)$, permettant au trader de maintenir l'état sur la nappe $\langle \tau^- \rangle$ est donnée par l'équation (3.79), obtenue à partir de la condition $\langle \nu_{\tau^-}, f(t, Y) \rangle = 0$, qui se réécrit ici, avec $s = \text{signe}(\text{saut}) = +$:

$$\xi^+(\tau) = \frac{(\tau - \tau^-)\sigma^-(t)}{C^+ - q^-(t)} = \frac{(\tau - \tau^-)(1 + q^-(t))v(t)}{C^+ - q^-(t)}. \quad (3.90)$$

On doit vérifier que $\xi^+(\tau)$ est du signe du saut, c'est-à-dire $\xi^+(\tau) \geq 0$. Comme

$$\begin{cases} \tau - \tau^- \geq 0 \quad \forall \tau \in [\tau^-, \tau^+], \\ 1 + q^-(t) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} > 0, \\ v(t) \in [0, u] \\ C^+ - q^-(t) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(proposition 1.6.1),} \\ \text{(compte tenu de (3.24)),} \end{array} \quad (3.91)$$

il en découle immédiatement $\xi^+(\tau) \geq 0$, comme le produit de termes positifs.

La proposition 3.7.4 nous a montré que la construction de la jonction équivoque \mathcal{E}^+ doit s'effectuer avec un τ extremal engendrant des trajectoires transverses à la nappe $\langle \tau^- \rangle$ (nappe caractérisée par $\tau^* = \tau^-$, $\xi^* = 0$), donc a fortiori ici avec $\tau = \tau^+$. Il restera à vérifier que le coin « ne fuit pas », consistant ici à s'assurer de la condition de semi-perméabilité $\min_{\tau} \langle \nu^+, f(t, Y; \xi^+(\tau), \tau) \rangle = 0$ pour la nappe de saut $\langle \uparrow \rangle$ sur la jonction équivoque \mathcal{E}^+ ; autrement dit, que pour $\tau < \tau^+$ la trajectoire $(\tau, \xi^+(\tau))$ restant sur la variété $\langle \tau^- \rangle$ dérive du bon côté de la nappe $\langle \uparrow \rangle$ (dérive vers l'ensemble des états capturables \mathcal{C}_t). De manière équivalente, cela revient à vérifier que $\tau = \tau^+$ minimise l'hamiltonien

$\langle \nu^+, f(t, Y; \xi^+(\tau), \tau) \rangle$, qui prend la forme de l'équation (3.81), avec ici $s = +$. L'équation (3.81) nous a montré que cette vérification est elle-même équivalente à vérifier que $n^+ \geq 0$, par le biais des équations adjointes généralisées pour la jonction équivoque, intégrées en temps rétrograde depuis les conditions au bord adéquates, sur une variété $\partial\mathcal{E}^+$ de dimension 1. Il nous reste à dire comment on obtient ces conditions au bord.

Dynamique pour \mathcal{E}^+ , et formule explicite en fonction des conditions au bord

Nous allons maintenant procéder à la construction de la variété équivoque $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$. Nous vérifierons ensuite la condition de semi-perméabilité $n^+ \geq 0$.

On construit la jonction équivoque \mathcal{E}^+ , par intégration en temps rétrograde des équations primales (3.16) avec $C^\varepsilon = C^+$, le long du champ de trajectoires $(\tau^+, \xi^+(\tau^+))$ dessiné sur la nappe $\langle \tau^- \rangle$. Comme pour la nappe $\langle \tau^- \rangle$, on a $p^-(t) = 0$ (voir (3.39)), la dynamique (3.86) satisfaite par la jonction équivoque \mathcal{E}^+ est ici

$$\begin{cases} \dot{u} &= \tau^+ u, \\ \dot{v} &= \frac{\tau^+(1+C^+) - \tau^-(1+q^-(t))}{C^+ - q^-(t)} v, \\ \dot{w} &= \frac{-\tau^+(1+C^+)q^-(t) + \tau^-C^+(1+q^-(t))}{C^+ - q^-(t)} v. \end{cases} \quad (3.92)$$

La dynamique (3.92) en (v, w) peut se regrouper sous la forme vectorielle (3.87) suivante

$$\dot{V} = \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \frac{1}{C^+ - q^-(t)} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -q^-(t) \end{pmatrix} \tau^+(1+C^+) - \begin{pmatrix} 1 \\ -C^+ \end{pmatrix} \tau^-(1+q^-(t)) \right) v. \quad (3.93)$$

L'intégration en temps rétrograde de la dynamique (3.92), depuis les conditions au bord $(t_0, u(t_0)v(t_0), w(t_0))$ sur $\partial\mathcal{E}^+$, aboutit à la solution explicite suivante (pour v à la solution (3.88) avec ici $p^-(T) = 0$) :

$$\begin{cases} u(t) &= u(t_0)e^{\tau^+(t-t_0)}, \\ v(t) &= v(t_0)e^{\tau^+(t-t_0)} \left(\frac{C^+ - q^-(t_0)}{C^+ - q^-(t)} \right)^{\frac{\tau^+ - \tau^-}{-\tau^-}}, \\ w(t) &= -q^-(t)v(t) + w(t_0) + q^-(t_0)v(t_0). \end{cases} \quad (3.94)$$

Conditions au bord

Pour assurer la continuité de la barrière composite, les conditions au bord d'intégration le long des trajectoires $\tau = \tau^+$ (illustrées sur la figure 3.6) sont séparées en deux familles situées :

- ① Sur le bord de la dispersion \mathcal{D} en $t_0 = t_+$ pour tout $u(t_0) = u(t_+) \in \Lambda(t_+, u)$, et avec $(v(t_0), w(t_0))$ donnés par (3.52). On rappelle par ailleurs que $u_g(t_+) = \frac{K}{1+C^+}$ (équation (3.61)) et $q^+(t_+) = C^+$.

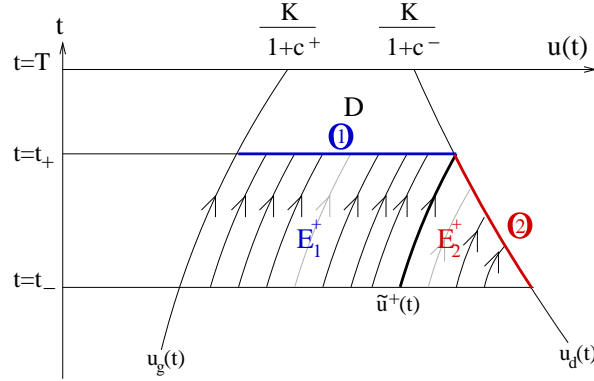


FIG. 3.6 – Conditions au bord d'intégration, pour la variété equivouque \mathcal{E}^+

On obtient alors les conditions au bord

$$\partial\mathcal{E}_1^+ : \begin{cases} t_0 = t_+ , \\ u(t_0) \in \left[\frac{K}{1+C^+}, \frac{K}{1+c^-} e^{-\tau^-(T-t_+)} \right] , \\ v(t_0) = \frac{(1+C^+)u(t_0) - K}{C^+ - q^-(t_0)} , \\ w(t_0) = -q^-(t_0)v(t_0) . \end{cases} \quad (3.95)$$

- ② Sur le bord droit de la région d'intérêt Λ : $u(t_0) = u_d(t_0) = K e^{-\tau^-(T-t_0)}$ pour tout $t_0 \in [t_-, t_+]$. Pour déterminer $(v(t_0), w(t_0))$ sur ce bord, il nous faut intégrer les équations primales le long du bord droit de la région d'intérêt $u_d(t)$ depuis $t = t_+$, où $v = \check{v}(t_+, u_d(t_+)) = u_d(t_+)$ et $w = \check{w}(t_+, u_d(t_+)) = u_d(t_+) - K$ (donnés par (3.74)). Comme l'intégration se fait le long de $u_d(t)$ c'est-à-dire le long d'une trajectoire $\tau = \tau^-$, avec ici $t > t_-$, il en découle que cette intégration s'effectue avec $\xi = 0$ (équations primales (3.36)). L'intégration des équations primales conduit à

$$\partial\mathcal{E}_2^+ : \begin{cases} t_0 = \frac{1}{\tau^+ - \tau^-} \left[\ln \left(\frac{K}{(1+c^-)u} \right) + \tau^+ t - \tau^- T \right] \in [t_+, t_-] , \\ u(t_0) = u_d(t_+) e^{-\tau^-(t_+ - t_0)} = u_d(t_0) , \\ v(t_0) = \check{v}(t_+, u_d(t_+)) e^{-\tau^-(t_+ - t_0)} = u_d(t_0) , \\ w(t_0) = \check{w}(t_+, u_d(t_+)) - (e^{\tau^-(t_+ - t_0)} - 1)v(t_0) \\ = u_d(t_+) - K - (u_d(t_+) - u_d(t_0)) = u_d(t_0) - K . \end{cases} \quad (3.96)$$

Propriété 3.8.1 Dans l'équation (3.96), les expressions $(v(t_0), w(t_0))$ représentent les valeurs de $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ le long $u_d(t)$ pour $t \in [t_-, t_+]$. Nous remarquons qu'elles coïncident avec celles de l'extension (3.76) à la région $u > u_d(t)$.

Dans (3.96), l'expression de t_0 , qui dépend de la paire (t, u) , s'obtient en écrivant que depuis une paire (t, u) , l'intégration le long de la trajectoire $\tau = \tau^+$ parcourant \mathcal{E}^+ , se raccorde sur $\partial\mathcal{E}_2^+$ en

$(t_0, u_d(t_0))$, c'est-à-dire :

$$u(t_0) = ue^{\tau^+(t_0-t)} \quad \text{avec} \quad u(t_0) = u_d(t_0) = \frac{K}{1+c^-} e^{-\tau^-(T-t_0)} .$$

La trajectoire $\tau = \tau^+$ qui joint dans le plan (t, u) le point de coordonnées $(t_+, u_d(t_+))$ a pour équation

$$\tilde{u}^+(t) = u_d(t_+) e^{-\tau^+(t_+-t)} = \frac{K}{1+c^-} e^{(\tau^+-\tau^-)(T-t_+)} e^{-\tau^+(T-t)} . \quad (3.97)$$

Les conditions au bord (3.95) spécifient \mathcal{E}^+ dans la région $\Lambda \cap \{(t, u) \mid t \in [t_-, t_+] \text{ et } u \leq \tilde{u}^+(t)\}$. Nous nommons \mathcal{E}_1^+ la jonction équivoque générée par ces conditions au bord. De même, les conditions au bord (3.96) spécifient \mathcal{E}^+ dans la région $\Lambda \cap \{(t, u) \mid t \in [t_-, t_+] \text{ et } u \geq \tilde{u}^+(t)\}$, et nous nommons \mathcal{E}_2^+ la jonction équivoque générée. La trajectoire $\tilde{u}^+(t)$ est susceptible de porter une discontinuité de gradient de la fonction valeur W .

Formules explicites de $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur \mathcal{E}_1^+ et \mathcal{E}_2^+

En remplaçant les conditions au bord (3.95) et (3.96) dans la solution explicite (3.94), nous obtenons les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ suivantes le long des jonctions équivoques \mathcal{E}_1^+ et \mathcal{E}_2^+

$$\mathcal{E}_1^+ : \begin{cases} \check{v}(t, u) &= \left[(1+C^+)u - Ke^{\tau^+(t-t_+)} \right] (C^+ - q^-(t_+))^{\frac{\tau^+}{-\tau^-}} (C^+ - q^-(t))^{\frac{\tau^+-\tau^-}{\tau^-}} , \\ \check{w}(t, u) &= -q^-(t)\check{v}(t, u) , \end{cases} \quad (3.98)$$

$$\mathcal{E}_2^+ : \begin{cases} \check{v}(t, u) &= u \left(\frac{C^+ - q^-(t_0)}{C^+ - q^-(t)} \right)^{\frac{\tau^+-\tau^-}{-\tau^-}} \quad \text{avec } t_0 = \frac{1}{\tau^+ - \tau^-} \left[\ln \left(\frac{K}{(1+c^-)u} \right) + \tau^+t - \tau^-T \right] , \\ \check{w}(t, u) &= -q^-(t)\check{v}(t, u) . \end{cases} \quad (3.99)$$

Remarque 3.8.2 Pour établir très simplement l'expression de $\check{w}(t, u)$ sur \mathcal{E}_2^+ (3.99), on peut utiliser la relation $(1+q^-(t_0))u_d(t_0) = K$ (voir les formules (3.59)). Les conditions au bord (3.96), $v(t_0) = u_d(t_0)$ et $w(t_0) = u_d(t_0) - K$, conduisent alors, dans la forme explicite (3.94), à

$$w(t_0) + q^-(t_0)v(t_0) = (1+q^-(t_0))u_d(t_0) - K = 0 .$$

Les équations (3.98) et (3.99) montrent que $\check{w}(t, u) = -q^-(t)\check{v}(t, u)$ le long de toute la variété équivoque $\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}_1^+ \cup \mathcal{E}_2^+$, ce qui est normal, puisque la jonction $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$ appartient à la nappe $\langle \tau^- \rangle$ d'équation $w = -q^-(t)v$ (3.41).

Remarquons également que le long de $u_g(t) = \frac{K}{1+c^+} e^{-\tau^+(T-t)}$, la propriété $e^{\tau^+(T-t_+)} = \frac{1+C^+}{1+c^+}$ (voir les relations (3.61)) nous montre que

$$(1+C^+)u_g(t) - Ke^{\tau^+(t-t_+)} = 0 .$$

L'équation (3.98) conduit ainsi à

$$(\check{v}(t, u_g(t)), \check{w}(t, u_g(t))) = (0, 0) . \quad (3.100)$$

Par conséquent, sur la partie du bord de la région d'intérêt $u_g(t)$ pour $t \in [t_-, t_+]$, les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sont une nouvelle fois continues avec celles de l'extension (3.75) pour $u < u_g(t)$.

Équations adjointes généralisées pour la jonction équivoque \mathcal{E}^+

Sous la condition que $\tau = \tau^+$ minimise l'hamiltonien, celui-ci, une fois minimisé, s'écrit (voir l'équation (3.83))

$$H = n^+ + \tau^+[p^+u + (1 + C^+)v] , \quad \text{et donc} \quad -\frac{\partial H}{\partial Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p^+\tau^+ \\ -(1 + C^+)\tau^+ \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Les équations adjointes généralisées (3.82) pour la jonction équivoque \mathcal{E}^+ , où $v = \check{v}(t, u)$ et $\nu^+ = (n^+, p^+, C^+, 1)^t$, s'écrivent :

$$\dot{\nu}^+ = \begin{pmatrix} \dot{n}^+ \\ \dot{p}^+ \\ \dot{q}^+ \\ \dot{r}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p^+\tau^+ \\ -\tau^+(1 + C^+) \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \left[\begin{pmatrix} n^+ \\ p^+ \\ C^+ \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\tau^-(1 + q^-)\check{v} \\ 0 \\ q^- \\ 1 \end{pmatrix} \right] ,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{n}^+ &= \alpha(n^+ + \tau^-(1 + q^-)\check{v}) , \\ \dot{p}^+ &= (-\tau^+ + \alpha)p^+ , \\ \dot{q}^+ &= -\tau^+(1 + C^+) + \alpha(C^+ - q^-) , \\ \dot{r}^+ &= 0 . \end{cases} \quad (3.101)$$

La quantité $\alpha(t)$ doit être choisie de sorte que la singularité $q^+ = C^+$ de la nappe de saut $\langle \uparrow \rangle$ soit préservée, donc telle que $\dot{q}^+ = 0$. Il en découle

$$\alpha(t) = \frac{\tau^+(1 + C^+)}{C^+ - q^-(t)} > 0 . \quad (3.102)$$

Ce terme est positif compte tenu des inégalités (3.91). L'équation différentielle en n^+ dans (3.101), est une équation affine du premier ordre $\dot{n}^+ = \alpha(t)n^+ + \beta(t)$, avec ici $\alpha(t) > 0$ donné par (3.102), et $\beta(t) = \alpha(t)\tau^-(1 + q^-)\check{v} \leq 0$ (puisque τ^- est le seul terme strictement négatif). Ainsi, compte tenu de la propriété 3.7.5, il suffit de s'assurer que $n^+ \geq 0$ sur les bords (variétés de dimension 1) respectifs $\partial\mathcal{E}_1^+$ (3.95) et $\partial\mathcal{E}_2^+$ (3.96) servant de condition au bord $n^+(t_f)$ pour les équations adjointes généralisées, pour conclure à la semi-perméabilité de toute la jonction équivoque (de \mathcal{E}_1^+ et \mathcal{E}_2^+ respectivement).

Condition de semi-perméabilité pour la jonction équivoque \mathcal{E}_1^+ ($n^+ \geq 0$ sur $\partial\mathcal{E}_1^+$)

Procédons à cette vérification en déterminant n^+ et p^+ sur la $\partial\mathcal{E}_1^+$ à l'aide des deux équations mentionnées dans l'étape 5 de la méthode (page 115).

Compte tenu des expressions $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ obtenues pour les valeurs en (v, w) sur la variété \mathcal{D} (équations (3.55) avec $q^+(t_+) = C^+$ et $q^-(t_+) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t_+)}$), la variété $\partial\mathcal{E}_1^+$ de dimension 1 (servant de condition au bord pour \mathcal{E}_1^+) et sa tangente sont données par

$$\partial\mathcal{E}_1^+ : \begin{pmatrix} t_+ \\ u \\ \check{v}(t_+, u) = \frac{(1+C^+)u-K}{C^+-q^-(t_+)} \\ \check{w}(t_+, u) = -q^-(t_+)\check{v}(t_+, u) \end{pmatrix}, \quad \text{tangente} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \check{v}_u = \frac{(1+C^+)}{C^+-q^-(t_+)} \\ \check{w}_u = -q^-(t_+)\check{v}_u \end{pmatrix}, \quad (3.103)$$

où l'on rappelle que la notation $(\check{v}_u, \check{w}_u)$ désigne les dérivées partielles de $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ par rapport à la variable u . La tangente à $\partial\mathcal{E}_1^+$ doit être orthogonale à la normale $\nu^+ = (n^+, p^+, C^+, 1)^t$ à la nappe de saut $\langle \uparrow \rangle$. Il en résulte la première équation :

$$p^+ + C^+\check{v}_u + \check{w}_u = 0, \quad \text{qui conduit à } p^+ = -(1 + C^+) < 0. \quad (3.104)$$

La deuxième équation exprime que ν^+ doit être orthogonale à la dynamique $f(\bar{Y}; \tau^+, \xi^+(\tau^+))$ obtenue sur \mathcal{E}^+ (donnée par le système d'EDO (3.92)), donc à fortiori sur \mathcal{E}_1^+ et \mathcal{E}_2^+ . Il est commode d'utiliser ici la notation vectorielle $V = (v, w)^t$, qui permet d'écrire cette équation sous la forme

$$n^+ + p^+\tau^+u + (C^+ - 1)\dot{V} = 0.$$

En se servant de la forme différentielle (3.93) pour la dynamique en $V = (v, w)$, cette dernière équation conduit alors à

$$n^+ = -\tau^+(1 + C^+)v - p^+\tau^+u. \quad (3.105)$$

En substituant p^+ par son expression (3.104) dans l'équation (3.105), il en résulte

$$n^+ = (1 + C^+)\tau^+(u - v) \geq 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{E}_1^+,$$

comme le produit de trois termes positifs, à savoir le signe qu'il fallait obtenir pour s'assurer de la semi-perméabilité de la jonction équivoque \mathcal{E}_1^+ .

Condition de semi-perméabilité pour la jonction équivoque \mathcal{E}_2^+ ($n^+ \geq 0$ sur $\partial\mathcal{E}_2^+$)

Pour conclure à la semi-perméabilité de la nappe de saut $\langle \uparrow \rangle$ sur la partie de la jonction équivoque \mathcal{E}_2^+ , il nous suffit de montrer que $n^+ \geq 0$ sur la variété $\partial\mathcal{E}_2^+$ de dimension 1 (servant de condition au bord pour \mathcal{E}_2^+). Le long de la trajectoire $\partial\mathcal{E}_2^+$, nous avons $\tau = \tau^-$ et de ce fait $\xi = 0$ puisque $t \geq t_-$. En outre, le long de $\partial\mathcal{E}_2^+$, l'équation (3.96) nous montre que $(v, w) = (u, u - K)$. La dynamique (3.16),

avec $\tau = \tau^-$, $\xi = 0$ et $(v, w) = (u, u - K)$, fournit une tangente à $\partial\mathcal{E}_2^+$, qui s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tau^- u \\ \tau^- u \\ \tau^- u \end{pmatrix}. \quad (3.106)$$

La tangente (3.106) doit être orthogonale à ν^+ , ce qui conduit à la première équation :

$$n^+ + (p^+ + C^+ + 1)\tau^- u = 0. \quad (3.107)$$

Par ailleurs, le long de la jonction $\mathcal{E}_2^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$, la seconde équation (3.105) doit être vérifiée, avec ici $v = u$. Il en résulte que

$$n^+ + (p^+ + C^+ + 1)\tau^+ u = 0. \quad (3.108)$$

Par soustraction, les deux équations (3.107) et (3.108) impliquent $(\tau^+ - \tau^-)u(1 + C^+ + p^+) = 0$, donc $p^+ = -(1 + C^+)$. En reportant l'expression de p^+ obtenue dans l'équation (3.107) ou l'équation (3.108), on obtient finalement

$$n^+ = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{E}_2^+.$$

3.8.2 Pour $t_+ \leq t \leq t_-$: une variété $\mathcal{E}^- = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$

Dans la région $\Lambda \cap \{(u, t) \mid t \in [t_-, t_+]\}$, la nappe $\langle \tau^- \rangle$ a cessé d'exister, au profit d'une nappe de saut $\langle \downarrow \rangle$, c'est-à-dire des trajectoires dans le plan (v, w) ayant pour pente $-q^- = -C^-$. Par contre la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ continue d'exister puisque pour $t > t_+$, la fonction $q^+(t)$ donnée par (3.51) vérifie $q^+(t) < C^+$. On rappelle que pour la nappe $\langle \tau^+ \rangle$:

➤ La fonction de commutation en τ est donnée par l'équation (3.47)

$$\sigma^+(t) = (1 + q^+(t))(v(t) - u(t)).$$

➤ La normale semi-perméable à cette nappe est de la forme (équation 3.49)

$$\nu_{\tau^+} = \left(-\tau^+(1 + q^+(t))(v - u), -(1 + q^+(t)), q^+(t), 1 \right)^t.$$

Stratégie du trader le long de \mathcal{E}^- et dynamique

La stratégie du trader $\xi^-(\tau)$, permettant de maintenir l'état sur $\langle \tau^+ \rangle$, $\forall \tau \in \Omega$, est donnée par l'équation (3.79), qui se réécrit ici, avec $s = \text{signe}(\text{saut}) = -$:

$$\xi^-(\tau) = \frac{(\tau - \tau^+)(1 + q^+(t))(v(t) - u(t))}{C^- - q^+(t)}.$$

Comme

$$\begin{cases} \tau - \tau^+ \leq 0 \quad \forall \tau \in [\tau^-, \tau^+] , \\ 1 + q^+(t) = (1 + c^+)e^{\tau^+(T-t)} > 0 , \\ v(t) - u(t) \leq 0 \\ C^- - q^+(t) \leq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(proposition 1.6.1),} \\ \text{(compte tenu de (3.24)) ,} \end{array} \quad (3.109)$$

il en découle immédiatement que $\xi^-(\tau) \leq 0$ est bien négatif.

La construction de la jonction équivoque \mathcal{E}^- doit (proposition 3.7.4) s'effectuer avec un τ extremal engendrant des trajectoires transverses à la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ (nappe caractérisée par $\tau^* = \tau^+$, $\xi^* = 0$), donc a fortiori ici avec $\tau = \tau^-$. Le long des trajectoires ($\tau = \tau^-$, $\xi = \xi^-(\tau^-)$), la dynamique (3.86) obtenue pour \mathcal{E}^- (avec $C^\varepsilon = C^-$, et $p(t) = -(1 + q^+(t))$) est :

$$\begin{cases} \dot{u} = \tau^- u , \\ \dot{V} = \frac{1}{q^+ - C^-} \left[\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -q^+ \end{pmatrix} (-\tau^-)(1 + C^-) + \begin{pmatrix} 1 \\ -C^- \end{pmatrix} \tau^+(1 + q^+) \right) v - \begin{pmatrix} 1 \\ -C^- \end{pmatrix} (\tau^+ - \tau^-)(1 + q^+) u \right] . \end{cases} \quad (3.110)$$

La formule (3.88), avec ici $\frac{p^+(T)}{1+q^+(T)} = -1$ (voir (3.45)), nous donne les formules explicites (pour u et v seulement) suivantes sur \mathcal{E}^- , en fonction des conditions au bord $(t_0, u(t_0), v(t_0), w(t_0))$ sur $\partial\mathcal{E}^-$:

$$\begin{cases} u(t) = u(t_0)e^{\tau^-(t-t_0)} , \\ v(t) = \left(\frac{q^+(t_0) - C^-}{q^+(t) - C^-} \right)^{\frac{\tau^+ - \tau^-}{\tau^+}} \left(v(t_0)e^{\tau^-(t-t_0)} - u(t) \right) + u(t) . \end{cases} \quad (3.111)$$

Pour w , nous n'avons pas réussi à obtenir de formule explicite (nous devons procéder à une intégration numérique). Toutefois l'intégration de la dynamique en w dans (3.110), depuis les conditions au bord $(t_0, u(t_0), v(t_0), w(t_0))$, doit aboutir à l'équation (3.48) de la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ puisque $\mathcal{E}^- = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \downarrow \rangle \subset \langle \tau^+ \rangle$.

Conditions au bord

Les conditions au bord d'intégration le long des trajectoires $\tau = \tau^-$, pour la jonction équivoque \mathcal{E}^- , sont représentées sur la figure 3.7.

Ces conditions au bord sont situées :

- ① Sur le bord gauche $u_g(t_0)$ de la région d'intérêt pour $t_0 \in [t_+, t_-]$, noté $\partial\mathcal{E}_1^-$. Pour obtenir $(v(t_0), w(t_0))$, il nous faut intégrer les équations primales le long de $u_g(t)$ depuis $t = t_-$, $u = u_g(t_-)$, $v = \check{v}(t_-, u_g(t_-)) = 0$ et $w = \check{w}(t_-, u(t_-)) = 0$ (donnés par (3.74)). Comme l'intégration se fait le d'une trajectoire $\tau = \tau^+$ (le long de $u_g(t)$) pour $t > t_+$, elle s'effectue avec $\xi = 0$, et ainsi les équations primales à intégrer sont (3.36). Cette intégration conduit à

$$(v(t_0), w(t_0)) = (0, 0) . \quad (3.112)$$

Propriété 3.8.2 *Les valeurs ci-dessus, qui correspondent à $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ le long $u_g(t)$ pour $t \in [t_+, t_-]$, coïncident avec celles de l'extension (3.75) à la région $u < u_g(t)$.*

Toutefois l'expression de $\check{w}(t, u)$ sur \mathcal{E}_1^- et \mathcal{E}_2^- n'a pas été obtenue explicitement mais déduite, par construction, de l'équation (3.48) de la nappe $\langle \tau^+ \rangle$, étant donné que $\mathcal{E}^- \subset \langle \tau^+ \rangle$.

Remarquons que le long de $u_d(t) = \frac{K}{1+c^-} e^{-\tau^-(T-t)}$ la propriété $e^{\tau^+(T-t_-)} = \frac{1+C^-}{1+c^-}$ (voir les relations (3.61)) nous montre que

$$(1 + C^-)u_d(t) - Ke^{\tau^-(t-t_-)} = 0 .$$

L'équation (3.115) conduit ainsi à

$$(\check{v}(t, u_d(t)), \check{w}(t, u_d(t)))^t = (u_d(t), u_d(t) - K) . \quad (3.116)$$

Par conséquent, sur la partie du bord de la région d'intérêt $u_d(t)$ pour $t \in [t_+, t_-]$, les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sont une nouvelle fois continues avec celles de l'extension (3.76) pour $u > u_d(t)$.

Il nous reste à vérifier la condition de semi-perméabilité pour la nappe de saut $\langle \downarrow \rangle$ sur la jonction équivoque \mathcal{E}^- , ce qui est équivalent à vérifier $n^- \geq 0$ par le biais des équations adjointes généralisées.

Équations adjointes généralisées pour \mathcal{E}^-

Sur le même principe que pour la jonction équivoque \mathcal{E}^+ (voir le paragraphe 3.8.1), les équations adjointes généralisées (3.82) pour \mathcal{E}^- s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \dot{n}^- \\ \dot{p}^- \\ \dot{q}^- \\ \dot{r}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p^- \tau^- \\ -\tau^-(1 + C^-) \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \left[\begin{pmatrix} n^- \\ p^- \\ C^- \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\tau^+(1 + q^+)(\check{v} - u) \\ -(1 + q^+) \\ q^+ \\ 1 \end{pmatrix} \right] .$$

La composante $\alpha(t)$ doit être telle $\dot{q} = 0$, afin de préserver la singularité $q^- = C^-$ depuis $t = t_-$ (en temps rétrograde). Cela conduit à

$$\alpha(t) = \frac{\tau^-(1 + C^-)}{C^- - q^+(t)} . \quad (3.117)$$

Ce terme $\alpha(t)$ est positif compte tenu des inégalités (3.109). L'équation différentiel pour la composante n^- donne :

$$\dot{n}^- = \alpha(t)(n^- + \tau^+(1 + q^+(t))(v(t) - u(t))) = \alpha(t)n^- + \beta(t)$$

avec $\beta(t) = \alpha(t)\tau^+(1 + q^+(t))(v(t) - u(t)) \leq 0$. Par la propriété 3.7.5, il en résulte qu'il suffit de s'assurer que $n^- \geq 0$ au bord de l'intégration, i.e. sur les variétés $\partial\mathcal{E}_1^-$ et $\partial\mathcal{E}_2^-$ de dimension 1, pour conclure à la semi-perméabilité sur \mathcal{E}^- . Pour faire cette vérification, on s'appuie sur l'étape 5 de la méthode du paragraphe 3.7 (page 115).

Condition de semi-perméabilité pour \mathcal{E}_2^- ($n^- \geq 0$ sur $\partial\mathcal{E}_2^-$)

Compte tenu des valeurs ($\check{v}(t, u), \check{w}(t, u) = -q^-(t)\check{v}(t, u)$) sur la variété \mathcal{D} (équations (3.52) où $q^-(t_-) = C^-$), la variété $\partial\mathcal{E}_2$ et sa tangente sont données par

$$\partial\mathcal{E}_2^- : \begin{pmatrix} t_- \\ u \\ \check{v}(t_-, u) = \frac{(1+q^+(t_-))u-K}{q^+(t_-)-C^-} \\ \check{w}(t_-, u) = -C^-\check{v}(t_-, u) \end{pmatrix} \text{ tangente : } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \check{v}_u \\ -C^-\check{v}_u \end{pmatrix}. \quad (3.118)$$

L'orthogonalité de la tangente à $\partial\mathcal{E}_2^-$ avec la normale $\nu^- = (n^-, p^-, C^-, 1)$ à la nappe de saut $\langle \downarrow \rangle$, conduit à la première équation

$$p^- = 0. \quad (3.119)$$

La deuxième équation $\langle \nu^-, f(\bar{Y}; \tau^-, \xi^-(\tau^-)) \rangle = 0$ le long de la jonction $\mathcal{E}_2^- = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$, conduit à

$$n^- + p^-\dot{u} + (C^- - 1)\dot{V} = 0,$$

avec (\dot{u}, \dot{V}) donnés par (3.110). Il en résulte

$$n^- + p^-\tau^-u + \tau^-(1 + C^-)v = 0. \quad (3.120)$$

Propriété 3.8.3 *En se servant (au lieu de (3.110)) de la dynamique générale (3.86) obtenue sur toute variété équivoque de notre jeu, avec ici $\tau_E = \tau^-$ et $s = -$, on constate que l'équation (3.120) présente la propriété d'être indépendante de la stratégie $\xi^-(\tau^-)$.*

Des deux équations (3.119) et (3.120), on déduit finalement que

$$n^- = -\tau^-(1 + C^-)v \geq 0.$$

Condition de semi-perméabilité pour \mathcal{E}_1^- ($n^- \geq 0$ sur $\partial\mathcal{E}_1^-$)

La dynamique (3.16), avec $\tau = \tau^+$, $\xi = 0$ (puisque $t \geq t_+$) fournit une tangente à la variété $\partial\mathcal{E}_1^-$ de dimension 1 (servant de condition au bord d'intégration pour \mathcal{E}_1^-). Cette tangente s'écrit donc

$$\partial\mathcal{E}_1^- : \text{ tangente} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tau^+u \\ \tau^+v \\ \tau^+v \end{pmatrix}. \quad (3.121)$$

La tangente (3.121) doit être orthogonale à $\nu^- = (n^-, p^-, C^-, 1)^t$, ce qui conduit à l'équation :

$$n^- + p^-\tau^+u + (1 + C^-)\tau^+v = 0. \quad (3.122)$$

Par ailleurs, la seconde équation (3.120) doit être vérifiée. Par soustraction, les deux équations (3.122) et (3.120) impliquent $[p^-u + (1 + C^-)v](\tau^+ - \tau^-)u = 0$, donc $p^-u + (1 + C^-)v = 0$, et par conséquent

$$n^- = 0 \quad \text{le long de } \partial\mathcal{E}_1^- .$$

Remarque 3.8.3 *Nous aurions pu utiliser la connaissance de $v = 0$ sur $\partial\mathcal{E}_1^-$ pour simplifier légèrement cette vérification.*

3.9 Solution dans la région $\Lambda \cap \{(u, t) \mid t \leq t_m\}$: une variété focale $\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$

Étudions à présent la région $\Lambda \cap \{(u, t) \mid t \leq t_m\}$. Dans cette région à la fois $q^- = C^-$ et $q^+ = C^+$ sont atteints en temps rétrograde puisque $t \leq t_m = \min\{t_-, t_+\}$. Par conséquent, ni la nappe $\langle \tau^- \rangle$ (hyper-surface $\xi^* = 0$, $\tau^* = \tau^-$), ni la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ (hyper-surface $\xi^* = 0$, $\tau^* = \tau^+$) n'existent pour construire une jonction équivoque sur une nappe émergente. Les deux nappes émergentes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ sont à présent remplacées par deux nappes de saut (hyper-surfaces) $\langle \downarrow \rangle$ et $\langle \uparrow \rangle$, une de chaque signe, se joignant sur une variété focale, notée $\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$, de codimension 2 et donc de dimension 2, sur laquelle le gradient de la fonction Valeur W est discontinu.

3.9.1 Un système d'EDP couplé linéaire du premier ordre

Dans notre jeu, nous pouvons noter que cette variété focale \mathcal{F} doit être parcourue à la fois par des trajectoires avec $\tau = \tau^-$ et $\tau = \tau^+$, donc par deux champs de trajectoires non colinéaires, conformément à la théorie de A.A.Melikyan [Mel98, MB05].

Proposition 3.9.1 *Les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur \mathcal{F} s'obtiennent comme solution du système d'EDP linéaire couplé du premier ordre (3.133) à venir¹⁹.*

Preuve de la proposition 3.9.1 Désignons par $\xi^+ > 0$ et $\xi^- < 0$ les stratégies optimales jouées par le trader pour que l'état reste sur la variété focale \mathcal{F} , respectivement contre $\tau = \tau^-$ et $\tau = \tau^+$. Nous vérifierons ultérieurement (dans le paragraphe 3.9.6) qu'elles ont bien le signe annoncé, ce qui constitue la condition nécessaire pour assurer la singularité en ξ des deux nappes de saut²⁰ $\langle \uparrow \rangle$ et $\langle \downarrow \rangle$, et de la variété focale.

Le fait que la variété focale \mathcal{F} doit être parcourue par des trajectoires $\tau = \tau^-$ indique qu'il nous faut étudier la dynamique (3.16) avec $\tau = \tau^-$, $\xi = \xi^- < 0$, et donc $C^e = C^-$. En se servant des relations

$$\begin{cases} \frac{d\check{v}}{dt} = \frac{\partial\check{v}}{\partial t} + \frac{\partial\check{v}}{\partial u} \frac{du}{dt} \\ \frac{d\check{w}}{dt} = \frac{\partial\check{w}}{\partial t} + \frac{\partial\check{w}}{\partial u} \frac{du}{dt} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} \dot{\check{v}} = \check{v}_t + \check{v}_u \dot{u} \\ \dot{\check{w}} = \check{w}_t + \check{w}_u \dot{u} \end{cases} ,$$

¹⁹Une construction plus ancienne et plus compliquée est détaillée dans [BEFT06].

²⁰De manière analogue à l'étape 2 de la méthode (page 114) développée pour la construction d'une variété équivoque.

la dynamique (3.16) s'écrit

$$\begin{cases} \check{v}_t + \check{v}_u \tau^- u = \tau^- \check{v} + \xi^- & (\times C^-) \\ \check{w}_t + \check{w}_u \tau^- u = \tau^- \check{v} - C^- \xi^- & (\times 1) \end{cases} . \quad (3.123)$$

En multipliant par C^- la première équation, et en l'ajoutant à la seconde, il en résulte l'EDP

$$C^- \check{v}_t + \check{w}_t + \tau^- [(C^- \check{v}_u + \check{w}_u)u - (C^- + 1)\check{v}] = 0 . \quad (3.124)$$

De même, pour les trajectoires $\tau = \tau^+$ parcourant \mathcal{F} , nous devons étudier la dynamique (3.16) avec $\tau = \tau^+$, $\xi = \xi^+ > 0$, $C^\varepsilon = C^+$, qui s'écrit :

$$\begin{cases} \check{v}_t + \check{v}_u \tau^+ u = \tau^+ \check{v} + \xi^+ , & (\times C^+) \\ \check{w}_t + \check{w}_u \tau^+ u = \tau^+ \check{v} - C^+ \xi^+ . & (\times 1) \end{cases}$$

En multipliant la première équation par C^+ , et en l'ajoutant à la seconde, nous obtenons une deuxième EDP

$$C^+ \check{v}_t + \check{w}_t + \tau^+ [(C^+ \check{v}_u + \check{w}_u)u - (C^+ + 1)\check{v}] = 0 . \quad (3.125)$$

Par conséquent, les fonctions $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ décrivant la variété focale \mathcal{F} doivent satisfaire le système d'EDP couplé linéaire du premier ordre formé par les équations (3.124) et (3.125).

Introduisons certaines notations (dont certaines ont déjà été introduites dans le paragraphe 3.4.6), destinées à réécrire sous une forme « plus élégante » le système d'EDP obtenu. Ces notations sont :

➔ Le vecteur colonne $\check{V}(t, u) = \begin{pmatrix} \check{v}(t, u) \\ \check{w}(t, u) \end{pmatrix}$, et ses dérivées partielles par rapport à t et à u notées

$$\check{V}_t = \begin{pmatrix} \check{v}_t \\ \check{w}_t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \check{V}_u = \begin{pmatrix} \check{v}_u \\ \check{w}_u \end{pmatrix} .$$

➔ Le vecteur ligne $Q_f^\varepsilon = (C^\varepsilon \quad 1)$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, ainsi que la matrice carrée 2×2 inversible

$$Q_f = \begin{pmatrix} Q_f^+ \\ Q_f^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^+ & 1 \\ C^- & 1 \end{pmatrix} \quad \text{qui s'inverse en} \quad Q_f^{-1} = \frac{1}{C^+ - C^-} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -C^- & C^+ \end{pmatrix} . \quad (3.126)$$

➔ La matrice carrée 2×2 inversible

$$\mathcal{T}_f = \frac{1}{C^+ - C^-} \begin{pmatrix} \tau^+ C^+ - \tau^- C^- & \tau^+ - \tau^- \\ -(\tau^+ - \tau^-) C^+ C^- & \tau^- C^+ - \tau^+ C^- \end{pmatrix} = Q_f^{-1} \begin{pmatrix} \tau^+ & 0 \\ 0 & \tau^- \end{pmatrix} Q_f . \quad (3.127)$$

Ainsi Q_f^+ et Q_f^- sont les vecteurs propres gauches de la matrice \mathcal{T}_f avec $\tau^+ > 0$ et $\tau^- < 0$ les valeurs propres respectives. Il en découle la propriété

$$Q_f^\varepsilon \mathcal{T}_f = \tau^\varepsilon Q_f^\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\} . \quad (3.128)$$

⇒ La matrice carrée $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur colonne $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a besoin de remarquer que l'on a les relations

$$\mathbf{1}\check{v} = \mathcal{S}\check{V}, \quad \mathcal{S}\mathbf{1} = \mathbf{1} \quad (3.129)$$

ainsi que la propriété

$$Q_f^\varepsilon \mathbf{1} = (1 + C^\varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}. \quad (3.130)$$

Avec ces notations, les EDP (3.124) et (3.125) peuvent se réécrire

$$Q_f^\varepsilon \check{V}_t + \tau^\varepsilon Q_f^\varepsilon [\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}] = 0 \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}, \quad (3.131)$$

et le système d'EDP couplé formé par ces deux équations se réécrit sous la forme

$$Q_f \check{V}_t + \begin{pmatrix} \tau^+ & 0 \\ 0 & \tau^- \end{pmatrix} Q_f [\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.132)$$

La matrice Q_f étant inversible, le système d'EDP (3.132) est équivalent (en multipliant à gauche par Q_f^{-1}) au système d'EDP

$$\check{V}_t + \mathcal{T}_f(\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.133)$$

qui faisait l'objet la preuve de la proposition 3.9.1. Notons que le système d'EDP (3.133) a la forme d'une équation d'évolution. L'existence et l'unicité de la solution du système d'EDP (3.133) pour les différentes conditions au bord qui se présentent au cours de l'étude, est établie dans l'annexe A.4. ■

Propriété 3.9.2 *Il est important de noter, pour l'étude d'une option digitale à venir (chapitre 4), que le système d'EDP (3.133) satisfait par la variété focale \mathcal{F} est par construction indépendant de l'option considérée, et pourra ainsi être transposé à toute option. La seule différence réside dans les conditions au bord d'intégration.*

La propriété 3.9.2, obtenue dans le cadre de cette application, a contribué à une meilleure compréhension des variétés focales, ayant initié au développement dans [MB05] d'une théorie générale sur les variétés focales de dimension supérieure à un. Dans [MB05], il est prouvé que toute hypersurface focale de dimension n peut s'obtenir comme solution d'un système de deux EDP couplées du premier ordre à n variables, avec les conditions au bord adéquates.

3.9.2 Stratégies du trader $\xi^+ \geq 0$ et $\xi^- \leq 0$ le long de \mathcal{F}

Nous remarquons que les stratégies optimales du trader $\xi^- < 0$ et $\xi^+ > 0$, permettant respectivement de maintenir l'état sur \mathcal{F} contre $\tau = \tau^-$ et $\tau = \tau^+$, n'interviennent pas dans le système d'EDP (3.133). Toutefois nous pouvons déterminer simplement leurs expressions respectives. En ef-

fet, les trajectoires de la variété \mathcal{F} , doivent être pour $\tau = \tau^-$ et $\tau = \tau^+$ orthogonales aux normales semi-perméables de chacune des nappes de saut, à savoir respectivement à $\nu^+ = (n^+, p^+, C^+, 1)^t$ et $\nu^- = (n^-, p^-, C^-, 1)^t$. On obtient ainsi les quatres équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \nu^+, f(\bar{Y}; \tau^+, \xi^+) \rangle = 0 \\ \langle \nu^+, f(\bar{Y}; \tau^-, \xi^-) \rangle = 0 \\ \langle \nu^-, f(\bar{Y}; \tau^+, \xi^+) \rangle = 0 \\ \langle \nu^-, f(\bar{Y}; \tau^-, \xi^-) \rangle = 0 \end{array} \right. \text{ i.e. } \left\{ \begin{array}{l} n^+ + \tau^+(p^+u + (1 + C^+)v) + \xi^+(C^+ - C^+) = 0 \\ n^+ + \tau^-(p^+u + (1 + C^+)v) + \xi^-(C^+ - C^-) = 0 \\ n^- + \tau^+(p^-u + (1 + C^-)v) + \xi^+(C^- - C^+) = 0 \\ n^- + \tau^-(p^-u + (1 + C^-)v) + \xi^-(C^- - C^-) = 0 \end{array} \right. , \quad (3.134)$$

desquelles on en déduit

$$\xi^+ = \frac{(\tau^+ - \tau^-)[p^-u + (1 + C^-)v]}{C^+ - C^-} \quad \text{et} \quad \xi^- = \frac{(\tau^+ - \tau^-)[p^+u + (1 + C^+)v]}{C^+ - C^-} . \quad (3.135)$$

On pourra ensuite vérifier que $\xi^+ \geq 0$ et $\xi^- \leq 0$ une fois les composantes p^+ et p^- déterminées (cette vérification fait l'objet du paragraphe 3.9.6). Il reste également à vérifier la semi-perméabilité de \mathcal{F} (vérifier que le coin ne fuie pas pour les valeurs de τ intermédiaires).

Remarque 3.9.1 *En introduisant la fonction de commutation en τ , $\sigma^\varepsilon = p^\varepsilon u + (1 + C^\varepsilon)v$, sur chacune des nappes de saut, nous retrouvons pour les stratégies du trader (3.135) une forme semblable à celles (3.79) obtenues le long d'une variété équivoque .*

Notons $\nu^f = \nu^+ - \nu^-$, qui représente une normale à la jonction focale \mathcal{F} . Nous remarquons qu'il découle également des quatres équations ci dessus que

$$\langle \nu^f, f(\bar{Y}; \tau^\varepsilon, \xi^\varepsilon) \rangle = 0 \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\} ,$$

ce qui montre le caractère singulier de la focale \mathcal{F} .

3.9.3 Conditions au bord

Notons $\partial\mathcal{F}$ les différentes variétés de dimension 1 servant de condition au bord d'intégration, pour la variété focale \mathcal{F} de dimension 2. La figure 3.8 montre que les conditions au bord sont situées (on rappelle la notation $t_m = \min\{t_-, t_+\}$) :

➔ Sur le bord de la variété équivoque en $t = t_m$: $\partial\mathcal{F} = \Lambda \cap \{(t_m, u)\}$.

Dans le cas où $t_m = t_-$ ($t_- < t_+$), nous avons

$$\partial\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{ll} \partial\mathcal{E}_1^+ & \text{pour } u \leq \tilde{u}^+(t_-) \\ \partial\mathcal{E}_2^+ & \text{pour } u \geq \tilde{u}^+(t_-) \end{array} \right. , \text{ avec } \tilde{u}^+(t_-) \text{ donné par la relation (3.97).}$$

Les conditions au bord sont alors :

$$\begin{cases} t_0 = t_- , \\ u(t_0) \in [u_g(t_-), u_d(t_-)] = [\frac{K}{1+c^+} e^{-\tau^+(T-t_-)}, \frac{K}{1+c^-}] , \\ (v(t_0), w(t_0)) \begin{cases} \text{donnés par (3.98) pour } u \leq \tilde{u}^+(t_-) & (\partial\mathcal{F} = \partial\mathcal{E}_1^+) , \\ \text{donnés par (3.99) pour } u \geq \tilde{u}^+(t_-) & (\partial\mathcal{F} = \partial\mathcal{E}_2^+) . \end{cases} \end{cases}$$

Dans le cas où $t_m = t_+$ ($t_+ < t_-$), nous obtenons de manière similaire les conditions au bord

$$\begin{cases} t_0 = t_+ , \\ u(t_0) \in [u_g(t_+), u_d(t_+)] = [\frac{K}{1+c^+}, \frac{K}{1+c^-} e^{-\tau^-(T-t_+)}] , \\ (v(t_0), w(t_0)) \begin{cases} \text{donnés par (3.114) pour } u \leq \tilde{u}^-(t_+) = u_g(t_+) e^{-\tau^-(t_- - t_+)} & (\partial\mathcal{F} = \partial\mathcal{E}_1^-) , \\ \text{donnés par (3.115) pour } u \geq \tilde{u}^-(t_+) & (\partial\mathcal{F} = \partial\mathcal{E}_2^-) . \end{cases} \end{cases}$$

- ➔ Sur le bord gauche de la région d'intérêt pour $t \leq t_m$: $\partial\mathcal{F} = \{ (u, t) \mid t \in [0, t_-] \text{ et } u = u_g(t) \}$.
Donc $t_0 \in [0, t_m]$, $u(t_0) = u_g(t_0)$, et $(v(t_0), w(t_0)) = (0, 0)$ (par la proposition 3.9.3 à venir).
- ➔ Sur le bord droit de la région d'intérêt pour $t \leq t_m$: $\partial\mathcal{F} = \{ (u, t) \mid t \in [0, t_-] \text{ et } u = u_d(t) \}$.
Donc $t_0 \in [0, t_m]$, $u(t_0) = u_d(t_0)$ et $(v(t_0), w(t_0)) = (u_d(t_0), u_d(t_0) - K)$ (par la proposition 3.9.3 à venir).

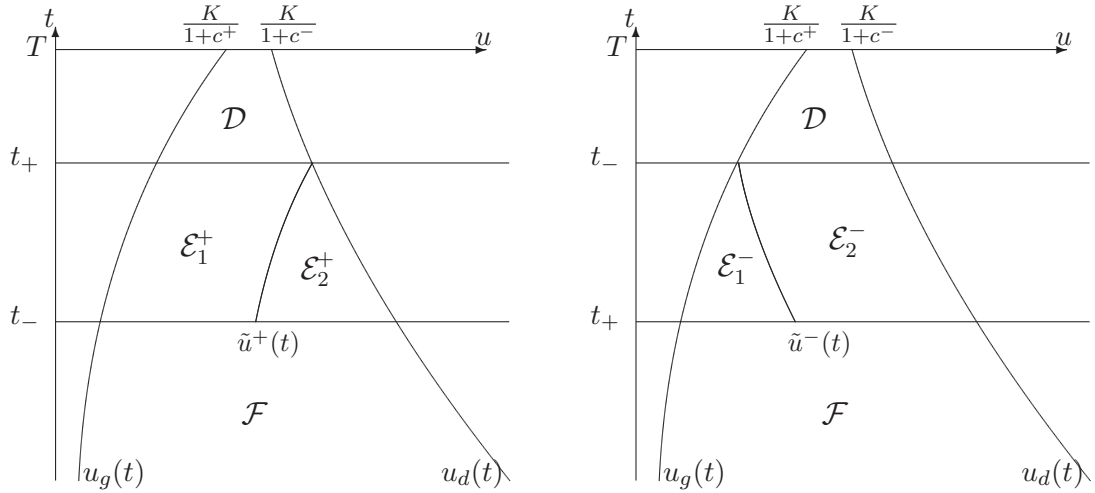


FIG. 3.8 – Les différentes variétés paramétrées en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$, suivant que $t_- < t_+$ ou $t_+ \leq t_-$.

Proposition 3.9.3 *Pour tout $t \leq t_m$, nous avons (comme pour $t \in [t_-, T]$) :*

$$(\check{v}(t, u_g(t)), \check{w}(t, u_g(t))) = (0, 0) \quad \text{et} \quad (\check{v}(t, u_d(t)), \check{w}(t, u_d(t))) = (u_d(t), u_d(t) - K) .$$

Preuve de la proposition 3.9.3 Sur le bord gauche $u_g(t)$ de la région d'intérêt Λ , si à un instant donné $\tau(t) \neq \tau^+$, alors l'état se dirige en dehors de Λ , et le trader n'est plus menacé par la variation $\tau(s) = \tau^+ \forall s \in [t, T]$ (il est seulement menacé par une baisse du cours). Pour $t \leq t_- \leq t_m$, en accord avec l'interprétation financière 3.5.1, la stratégie optimale pour le trader consiste à vendre l'actif sous-jacent restant, à un coût $-C^-v$, puis de ne rien faire par la suite. Pour que cette stratégie soit une stratégie de couverture (i.e. conduise l'état dans la zone de capture \mathbb{C}_t), il est nécessaire que $w + C^-v = Q^-V \geq 0$. Cette condition doit être maintenue le long de $u_g(t)$ (où $\tau = \tau^+$), et doit permettre à l'état d'atteindre la variété équivoque \mathcal{E} en $t = t_m$. Par conséquent, pour $t \leq t_m$, la trajectoire limite est choisie pour assurer $Q^-V = 0$, afin de minimiser la valeur du portefeuille de couverture. En dérivant, par rapport au temps cette dernière relation, il en résulte le long de la variété $(\check{v}(t, u_g(t)), \check{w}(t, u_g(t)))$, l'égalité

$$0 = \frac{d\check{v}}{dt}C^- + \frac{d\check{w}}{dt} = C^-(\tau^+\check{v} + \xi^+) + \tau^+\check{v} - C^+\xi^+ ,$$

et donc, que la stratégie

$$\xi^+ = \frac{(1 + C^-)\tau^+\check{v}}{C^+ - C^-} \geq 0 , \quad (3.136)$$

permet de maintenir $Q^-V(t, u_g(t))$ constant. Cette trajectoire se raccorde continûment à \mathcal{E} en $(t_m, u_g(t_m))$, où $(\check{v}, \check{w}) = (0, 0)$ et à fortiori $Q^-V = 0$ (voir l'équation (3.100) si $t_m = t_-$ et l'équation (3.112) si $t_m = t_+$). Par conséquent, la commande ξ^+ permet effectivement d'assurer $Q^-V(t, u_g(t)) = 0 \forall t \leq t_m$.

Avec la stratégie ξ^+ , la dynamique $\dot{v} = \tau^+\check{v} + \xi^+$ satisfaite par le raccordement est de la forme

$$\dot{v} = \alpha\check{v} .$$

Puisque l'on intègre depuis $t = t_m$ où $\check{v} = 0$, il en résulte que $\check{v}(t, u_g(t)) = 0$ avec $Q^-V(t, u_g(t)) = 0$, et donc que

$$(\check{v}(t, u_g(t)), \check{w}(t, u_g(t))) = (0, 0) .$$

De manière similaire, sur $u = u_d(t)$, si à un instant donné $\tau(t) \neq \tau^-$, alors l'état quitte Λ , et le trader n'est plus menacé par la variation $\tau(s) = \tau^- \forall s \in [t, T]$. Le paiement étant $M(u) = u - K$ de manière certaine, la stratégie optimale du trader pour $t \leq t_+ \leq t_m$, en accord avec l'interprétation financière 3.5.1, consiste à amener la composition du portefeuille à $v = u$ via un achat instantané du montant $\xi = u - v$, à un coût $C^+(u - v)$, puis de ne rien faire par la suite. Pour que cette stratégie soit une stratégie de couverture, il est nécessaire que $\check{w} + C^+(u - \check{v}) \geq u - K$ i.e. $Q^+V \geq Q^+\mathbf{1}u - K$. On choisit d'assurer $Q^+V - Q^+\mathbf{1}u - K = 0$, afin de minimiser la valeur du portefeuille de couverture. En différenciant cette relation il en résulte le long de la variété $(\check{v}(t, u_d(t)), \check{w}(t, u_d(t)))$,

$$0 = \frac{d\check{v}}{dt}C^+ + \frac{d\check{w}}{dt} - (1 + C^+)\frac{du}{dt} = C^+(\tau^-\check{v} + \xi^-) + \tau^+\check{v} - C^-\xi^- - (1 + C^+)\tau^-u$$

et donc que la stratégie

$$\xi^- = \frac{(1 + C^+)\tau^-(u - \check{v})}{C^+ - C^-} \leq 0 ,$$

permet de maintenir $Q_f^+ \check{V} - Q^+ \mathbf{1}u - K$ constant le long de $u_d(t)$. Cette trajectoire se raccorde continûment à \mathcal{E} , en $(t_m, u_d(t_m))$, où $(\check{v}, \check{w}) = (u_d(t), u_d(t) - K)$ et à fortiori $Q^+ \check{V} = Q^+ \mathbf{1}u - K$ (voir les équations (3.96) si $t_m = t_-$ et l'équation (3.116) si $t_m = t_+$). Par conséquent, la commande ξ^- permet effectivement d'assurer

$$Q_f^+ \check{V} = Q^+ \mathbf{1}u - K \quad \forall t \leq t_m .$$

Avec la stratégie ξ^- , la dynamique $\frac{d(u-\check{v})}{dt} = \tau^- u + \tau^- v + \xi^-$ est de la forme

$$\frac{d(u-\check{v})}{dt} = \alpha(u-\check{v}).$$

Puisque l'on intègre depuis $t = t_m$ où $\check{v} = u$, il en résulte que $\check{v}(t, u_d(t)) = u_d(t)$ avec $Q^+ \check{V}(t, u_d(t)) = Q^+ \mathbf{1}u_d(t) - K$, et donc que

$$(\check{v}(t, u_d(t)), \check{w}(t, u_d(t))) = (u_d(t), u_d(t) - K) . \quad \blacksquare$$

3.9.4 Condition de semi-perméabilité de la variété \mathcal{F} - Équations adjointes généralisées

Sous la condition que τ^ε minimise l'hamiltonien, celui-ci, une fois minimisé, s'écrit sous la forme

$$H = n^\varepsilon + \tau^\varepsilon [p^\varepsilon u + (1 + C^\varepsilon)v] \quad \varepsilon \in \{+, -\}.$$

Pour s'assurer que les commandes τ^+ et τ^- utilisées dans la construction de la variété focale \mathcal{F} minimisent bien l'hamiltonien correspondant (ce qui assure la condition de semi-perméabilité sur \mathcal{F}), il reste à vérifier que les composantes n^+ et n^- de la normale à chacune des nappes de saut $\nu^\varepsilon = (n^\varepsilon, p^\varepsilon, C^\varepsilon, 1)^t$, $\varepsilon \in \{+, -\}$ ainsi calculées ont non négatives. On va effectuer à présent cette vérification à l'aide des équations adjointes généralisées pour la variété focale \mathcal{F} .

Propriété 3.9.4 *De manière identique à la propriété 3.7.6, la variété focale $\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ de dimension 2 admet deux tangentes données par (3.84), qui sont orthogonales à la normale respective $\nu^\varepsilon = (n^\varepsilon, p^\varepsilon, C^\varepsilon, 1)^t$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, à chacune des deux nappes de saut $\langle \uparrow \rangle$ et $\langle \downarrow \rangle$. Il en résulte quatre équations*

$$\begin{cases} n^\varepsilon + Q_f^\varepsilon \check{V}_t = 0 & \forall \varepsilon \in \{+, -\} , \\ p^\varepsilon + Q_f^\varepsilon \check{V}_u = 0 & \forall \varepsilon \in \{+, -\} . \end{cases}$$

Les conditions de semi-perméabilité $n^\varepsilon \geq 0$ sur \mathcal{F} sont donc équivalentes à

$$Q_f^\varepsilon \check{V}_t \leq 0 \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\} , \text{ sur } \mathcal{F} .$$

Équations adjointes généralisées pour \mathcal{F}

Nous introduisons $\bar{\varepsilon}$ pour désigner le signe opposé à celui de $\varepsilon \in \{+, -\}$. Les composantes en temps et en v (les composantes n et q) des équations adjointes généralisées (3.82)

$$\dot{v}^\varepsilon = -\frac{\partial H}{\partial Y} + \alpha^\varepsilon(v^\varepsilon - v^{\bar{\varepsilon}}), \quad \varepsilon \in \{+, -\}$$

conduisent pour $\varepsilon \in \{+, -\}$ à

$$\begin{aligned} \dot{n}^\varepsilon &= \alpha^\varepsilon(n^\varepsilon - n^{\bar{\varepsilon}}), \\ \dot{q}^\varepsilon &= -\tau^\varepsilon(1 + C^\varepsilon) + \alpha^\varepsilon(C^\varepsilon - C^{\bar{\varepsilon}}). \end{aligned} \quad (3.137)$$

De la condition $\dot{q}^\varepsilon = 0$, pour conserver la singularité $q^\varepsilon = C^\varepsilon$, on en déduit

$$\alpha^\varepsilon = \varepsilon \tau^\varepsilon \frac{1 + C^\varepsilon}{C^+ - C^-} > 0 \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\} \quad \text{puisque } \text{signe}(\tau^\varepsilon) = \varepsilon. \quad (3.138)$$

Les équations différentielles (3.137) pour n^+ and n^- doivent être conjointement intégrées en temps rétrograde, mais pas sur la même trajectoire, à savoir sur des trajectoires $\tau = \tau^-$ pour n^- et $\tau = \tau^+$ pour n^+ . Notons respectivement $(t, Y) \mapsto Y^-(s) = \mathbb{Y}^-(t, Y; s)$ et $(t, Y) \mapsto Y^+(s) = \mathbb{Y}^+(t, Y; s)$, l'intégration en temps positif le long de trajectoires $\tau = \tau^-$ et $\tau = \tau^+$ à partir de (t, Y) et jusqu'aux instants respectifs t_f^- et t_f^+ sur $\partial\mathcal{F}$. Posons également

$$\phi^\varepsilon(t_1, t_2) = e^{\int_{t_2}^{t_1} \alpha^\varepsilon(s) ds} \quad \varepsilon \in \{+, -\}.$$

Les equations adjointes généralisées conjointes pour n^+ et n^- (les équations (3.137) pour $\varepsilon \in \{+, -\}$) conduisent à

$$\begin{cases} n^-(t, Y) &= \phi^-(t, t_f^-) n^-(t_f^-) + \int_{t_f^-}^t \phi^-(t, s) \alpha^-(s) n^+(s, \mathbb{Y}^-(t, Y, s)) ds \\ n^+(t, Y) &= \phi^+(t, t_f^+) n^+(t_f^+) + \int_t^{t_f^+} \phi^+(t, s) \alpha^+(s) n^-(s, \mathbb{Y}^+(t, Y, s)) ds \end{cases}. \quad (3.139)$$

Existence et unicité de la solution du système (3.139)

Proposition 3.9.5 *Si les conditions au bord sont $n^-(t_f^-) = 0$ et $n^+(t_f^+) = 0$, alors la solution du système (3.139) est unique et correspond à la solution triviale $n^\varepsilon(t, Y) = 0 \forall \varepsilon \in \{+, -\}$.*

Preuve de la proposition 3.9.5 Avec les conditions au bord $n^-(t_f^-) = 0$ et $n^+(t_f^+) = 0$, le système (3.139) devient un système d'équations intégrales linéaires

$$\begin{cases} n^-(t, Y) &= \int_{t_f^-}^t \phi^-(t, s) \alpha^-(s) n^+(s, \mathbb{Y}^+(t, Y, s)) ds \\ n^+(t, Y) &= \int_t^{t_f^+} \phi^+(t, s) \alpha^+(s) n^-(s, \mathbb{Y}^+(t, Y, s)) ds \end{cases},$$

qui ressemble à une inégalité de Gronwall. Intéressons nous à n^+ et n^- dans un fermé borné Ω , aussi

grand que l'on voudra. Les composantes n^+ et n^- sont bornées dans Ω , et l'on note

$$|n^\varepsilon(t, Y)| \leq \mathcal{N}, \quad \varepsilon \in \{+, -\} \text{ dans } \Omega.$$

Comme $\phi^\varepsilon(t, s) = e^{\int_s^t \alpha^\varepsilon(\sigma) d\sigma}$ avec $s > t$ et $\alpha^\varepsilon > 0$ (voir l'équation (3.138)), il en découle que

$$\phi^\varepsilon(t, s) < 1.$$

En outre, posons $a = \max\{\alpha^+, \alpha^-\}$ où α^ε sont donnés par les relations (3.138) $\forall \varepsilon \in \{+, -\}$.

On obtient alors la majoration suivante pour tout $\varepsilon \in \{+, -\}$ (et tout $\bar{\varepsilon} = -\text{signe}(\varepsilon) \in \{-, +\}$) :

$$|n^\varepsilon(t, Y)| \leq \int_t^{t_f^\varepsilon} |\alpha^\varepsilon \phi^\varepsilon(t, s) n^{\bar{\varepsilon}}(t, Y)| ds \leq \int_t^{t_f^\varepsilon} a \mathcal{N} ds = a(t_f^\varepsilon - t) \mathcal{N}.$$

En itérant cette majoration, on obtient une nouvelle majoration :

$$|n^\varepsilon(t, Y)| \leq \int_t^{t_f^\varepsilon} a^2 |\phi^\varepsilon(t, s) (t_f^\varepsilon - t) \mathcal{N}| ds \leq \int_t^{t_f^\varepsilon} a^2 (t_f^\varepsilon - s) \mathcal{N} ds = \frac{a^2}{2} (t_f^\varepsilon - t)^2 \mathcal{N}.$$

En réitérant, on obtient au pas k :

$$|n^\varepsilon(t, Y)| \leq \frac{a^k}{k!} (t_f^\varepsilon - t)^k \mathcal{N} \rightarrow 0 \text{ lorsque } k \rightarrow \infty,$$

et ainsi

$$|n^\varepsilon(t, Y)| = 0 \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}. \quad \blacksquare$$

Compte tenu de la proposition 3.9.5, l'unicité de la solution du système (3.139) pour des conditions au bord données quelconques, s'obtient par le biais du théorème de l'alternative de Fredholm ²¹.

Condition suffisante (sur $\partial\mathcal{F}$) de semi-perméabilité pour la variété \mathcal{F}

Proposition 3.9.6 *Désignons par $\partial\mathcal{F}^+$ et $\partial\mathcal{F}^-$ les bords atteints, respectivement par des trajectoires $\tau = \tau^+$ et $\tau = \tau^-$. Si $n^+ \geq 0$ sur $\partial\mathcal{F}^+$ et $n^- \geq 0$ sur $\partial\mathcal{F}^-$, avec n^+ et n^- non simultanément nuls, alors n^+ et n^- sont positifs sur toute la variété \mathcal{F} .*

Preuve de la proposition 3.9.6. L'idée de base de la preuve, consiste à montrer que sur un voisinage en (t, u) , la positivité de n^+ et n^- se propage en temps retrograde, et peut être étendu à tout le domaine par un argument de continuation. La preuve complète se trouve dans l'annexe ??.

3.9.5 Vérification de la condition de semi-perméabilité

Nous allons utiliser la proposition 3.9.6 pour montrer que $n^+ \geq 0$ et $n^- \geq 0$ sur \mathcal{F} . En accord avec les conditions au bord obtenues dans le paragraphe 3.9.3 (on peut s'aider de la figure (3.8)), nous

²¹Nous pouvons montrer très simplement l'unicité à l'aide d'une preuve par différence.

avons pour le call vanille

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{F}^+ &= (\Lambda \cap \{(t_-, u)\}) \cup \{(u, t) \mid t \in [0, t_-] \text{ et } u = u_d(t)\} \\ \text{et } \partial\mathcal{F}^- &= (\Lambda \cap \{(t_-, u)\}) \cup \{(u, t) \mid t \in [0, t_-] \text{ et } u = u_g(t)\} . \end{aligned}$$

signe de n^ε sur $\partial\mathcal{F} = \Lambda \cap \{(t_-, u)\}$

Pour ce bord, nous adoptons, et adaptions aux variétés focales, l'étape 5 de la méthode développée pour les variétés équivoques, en page 115. (On va obtenir 6 équations au lieu de 2).

Une tangente à la variété $\partial\mathcal{F} = \Lambda \cap \{(t_-, u)\}$ de dimension 1 est, indépendamment de t_m , donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \check{v}_u \\ \check{w}_u \end{pmatrix} .$$

Premières équations. La tangente à $\partial\mathcal{F} \subset \mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ doit être orthogonale à la fois, à la normale ν^+ à la nappe $\langle \uparrow \rangle$, et à la normale ν^- à la nappe $\langle \downarrow \rangle$. On obtient les équations

$$\forall \varepsilon \in \{+, -\} : p^\varepsilon + C^\varepsilon \check{v}_u + \check{w}_u = 0 \quad \text{i.e.} \quad p^\varepsilon + Q_f^\varepsilon \check{V}_u = 0 . \quad (3.140)$$

Deuxièmes équations. Les quatre équations (3.134) doivent être vérifiées, en particulier

$$\langle \nu^\varepsilon, f(\bar{Y}; \tau^\varepsilon, \xi^\varepsilon) \rangle = 0, \forall \varepsilon \in \{+, -\} .$$

Ces deux dernières équations s'écrivent (puisque $q^\varepsilon = C^\varepsilon \forall \varepsilon \in \{+, -\}$)

$$\forall \varepsilon \in \{+, -\} : n^\varepsilon + p^\varepsilon \tau^\varepsilon u + \tau^\varepsilon (1 + C^\varepsilon) \check{v} = 0 \quad \text{i.e.} \quad n^\varepsilon + p^\varepsilon \tau^\varepsilon u + \tau^\varepsilon Q_f^\varepsilon \mathcal{S}\check{V} = 0 . \quad (3.141)$$

En multipliant (3.140) par $-\tau^\varepsilon u$, et en l'ajoutant à (3.141), on obtient

$$\forall \varepsilon \in \{+, -\} : n^\varepsilon = \tau^\varepsilon Q_f^\varepsilon [\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}] , \quad (3.142)$$

où les fonctions q^ε sont continues de part et d'autre de $t = t_m$. Par ailleurs, si la variété $\check{V}(t, u)$ porte une discontinuité de gradient en $t = t_m$, alors celle-ci est nécessairement orthogonale au bord, donc portée uniquement par t . Ainsi, \check{V} ne peut pas porter de discontinuité de gradient en u . Il en résulte, pour chaque $\varepsilon \in \{+, -\}$, que la composante n^ε de l'équation (3.142) est continue de part et d'autre de $t = t_m$. Par conséquent, sur $\partial\mathcal{F} = \Lambda \cap \{(t_-, u)\}$, la composante n^ε coïncide avec celle de la variété équivoque sur laquelle \mathcal{F} se raccorde continûment. Nous avons précédemment montré qu'elle est positive (condition de semi-perméabilité des variétés équivoques respectives). Par ailleurs, une des deux composantes n^- ou n^+ est strictement positive sur \mathcal{E} , comme composante de la normale semi-perméable à la nappe régulière ($\langle \tau^- \rangle$ ou $\langle \tau^+ \rangle$) sur laquelle \mathcal{E} se raccorde (cette composante est de la forme (3.38)).

signe de n^- sur $\partial\mathcal{F} = \{ (u, t) \mid t \in [0, t_-] \text{ et } u = u_g(t) \}$

Le long de $u_g(t)$, nous avons $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u)) = (0, 0)$, donc $\dot{\check{v}} = \frac{d\check{v}}{dt} = 0$ et $\dot{\check{w}} = \frac{d\check{w}}{dt} = 0$. Par ailleurs sur cette variété la dynamique (avec $\dot{u} = \tau^+ u$) est donnée par

$$\begin{cases} \dot{\check{v}} &= \check{v}_t + \tau^+ \check{v}_u u, \\ \dot{\check{w}} &= \check{w}_t + \tau^+ \check{w}_u u. \end{cases}$$

En multipliant la première équation par C^- et en l'ajoutant à la seconde, il en résulte l'équation

$$C^- \dot{\check{v}} + \dot{\check{w}} = 0 = (C^- \check{v}_t + \check{w}_t) + \tau^+ u (C^- \check{v}_u + \check{w}_u) \quad \text{i.e.} \quad Q_f^- \check{V}_t + \tau^+ u Q_f^- \check{V}_u = 0. \quad (3.143)$$

Puisque \check{V} satisfait l'EDP (3.131), avec $\tau^- Q_f^- \mathcal{S}\check{V} = \tau^- (1 + C^-) \check{v}$, on a également l'équation

$$Q_f^- \check{V}_t + \tau^- u Q_f^- \check{V}_u = \tau^- (1 + C^-) \check{v}. \quad (3.144)$$

En multipliant par $-\tau^-$ l'équation (3.143) et par τ^+ l'équation (3.144), puis en les ajoutant, il en résulte que

$$Q_f^- \check{V}_t = \frac{\tau^+ \tau^- (1 + C^-) \check{v}}{\tau^+ - \tau^-} < 0,$$

et donc, en nous servant de la propriété 3.9.4, que

$$n^- > 0.$$

signe de n^+ sur $\partial\mathcal{F} = \{ (u, t) \mid t \in [0, t_-] \text{ et } u = u_d(t) \}$

Sur la variété \mathcal{F} , le long de $u_d(t)$, nous avons $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u)) = (u, u - K)$, donc

$$\dot{\check{v}} = \dot{u} = \tau^- u \quad \text{et} \quad \dot{\check{w}} = \dot{u} = \tau^- u.$$

Par ailleurs, sur cette variété, la dynamique est donnée par

$$\begin{cases} \tau^- u &= \dot{\check{v}} &= \check{v}_t + \tau^- \check{v}_u u & (\times C^+), \\ \tau^- u &= \dot{\check{w}} &= \check{w}_t + \tau^- \check{w}_u u & (\times 1), \end{cases}$$

de laquelle, il en résulte l'équation

$$(1 + C^+) \tau^- u = (C^+ \check{v}_t + \check{w}_t) + \tau^- u (C^+ \check{v}_u + \check{w}_u) \quad \text{i.e.} \quad Q_f^+ \check{V}_t + \tau^- u Q_f^+ \check{V}_u = (1 + C^+) \tau^- u. \quad (3.145)$$

Puisque \check{V} satisfait l'EDP (3.131), on a également l'équation

$$Q_f^+ \check{V}_t + \tau^+ u Q_f^+ \check{V}_u = \tau^+ (1 + C^+) \check{v}. \quad (3.146)$$

En multipliant par τ^+ l'équation (3.145) et par $-\tau^-$ l'équation (3.146), puis en les ajoutant, on en déduit que

$$(\tau^+ - \tau^-)Q_f^+ \check{V}_t = \tau^+ \tau^- (1 + C^+) (u - \check{v}) \quad \text{i.e.} \quad Q_f^+ \check{V}_t = \frac{\tau^+ \tau^- (1 + C^+) (u - \check{v})}{\tau^+ - \tau^-} < 0,$$

et donc, compte tenu de la propriété 3.9.4, que

$$n^+ > 0 .$$

3.9.6 Vérification du signe de ξ^+ et de ξ^-

Montrons à présent que $\xi^+ \geq 0$ et $\xi^- \leq 0$. En se servant de la propriété 3.9.4 et des EDP (3.131), les stratégies (3.135) sur \mathcal{F} se réécrivent pour tout $\varepsilon \in \{+, -\}$

$$\xi^\varepsilon = \frac{\tau^+ - \tau^-}{C^+ - C^-} [-Q_f^\varepsilon \check{V}_u u + Q_f^\varepsilon \mathcal{S}\check{V}] = \frac{\tau^+ - \tau^-}{C^+ - C^-} \left[\frac{1}{\tau^\varepsilon} Q_f^\varepsilon \check{V}_t \right] = \frac{\tau^+ - \tau^-}{C^+ - C^-} \left[\frac{-1}{\tau^\varepsilon} n^\varepsilon \right] .$$

Nous venons de montrer que sur \mathcal{F} , $n^\varepsilon \geq 0 \forall \varepsilon \in \{+, -\}$. Comme par ailleurs τ^ε est du signe contraire à ε , et $\frac{\tau^+ - \tau^-}{C^+ - C^-} > 0$, il en résulte que l'on a bien

$$\text{signe}(\xi^\varepsilon) = \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}.$$

3.10 Synthèse de la solution et prime de l'option

3.10.1 Formule de représentation de la fonction Valeur

Au cours de l'analyse par la méthode du jeu qualitatif dans l'espace d'état (t, u, v, w) , faite dans ce chapitre, nous nous sommes particulièrement intéressé aux valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur une variété de dimension 2 faite de l'intersection de 2 hypersurfaces semi-perméables, à savoir, l'intersection de la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ ou d'une nappe de saut $\langle \uparrow \rangle$, avec la nappe $\langle \tau^- \rangle$ ou une nappe de saut $\langle \downarrow \rangle$. La zone de capture \mathbb{C}_t , épigraphe de la fonction Valeur W , est située au dessus de ces deux nappes par rapport à l'axe w (où l'on rappelle que w est la valeur du portefeuille). Il en résulte que pour tout (t, u, v) , la fonction Valeur W peut se représenter sous la forme

$$W(t, u, v) = \check{w}(t, u) + q^\varepsilon(t)(\check{v}(t, u) - v) = Q^\varepsilon(t)\check{V}(t, u) - q^\varepsilon(t)v, \quad \varepsilon = \text{signe}(\check{v} - v), \quad (3.147)$$

indépendamment de la nature de la variété de dimension 2 paramétrée en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$.

Remarque 3.10.1 *Le lecteur peut se convaincre que cette formule obtenue initialement pour \mathcal{D} (la formule (3.72)), peut être étendue aux variétés \mathcal{E} quivoques et à la \mathcal{F} ocale. Elle peut également s'étendre en dehors de la région d'intérêt Λ par le biais de la proposition 3.6.1.*

Dans la formule (3.147), la fonction $q^\varepsilon(t)$, donnée par la formule (3.57) pour tout $\varepsilon \in \{+, -\}$, représente l'opposée de la pente de l'une des quatre nappes différentes dans le plan (v, w) (suivant

l'expression prise par $q^\varepsilon(t)$. Dans le plan (t, u) , les différentes expressions de q^ε et les nappes qui s'y rapportent se divisent en

$$q^-(t) = \begin{cases} (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1 \in]C^-, C^+[& \text{si } t > t_- \quad (\text{nappe } \langle \tau^- \rangle) \\ C^- & \text{si } t \leq t_- \quad (\text{nappe } \langle \downarrow \rangle) \end{cases} \quad (3.148)$$

$$q^+(t) = \begin{cases} (1 + c^+)e^{\tau^+(T-t)} - 1 \in]C^-, C^+[& \text{si } t > t_+ \quad (\text{nappe } \langle \tau^+ \rangle) \\ C^+ & \text{si } t \leq t_+ \quad (\text{nappe } \langle \uparrow \rangle) \end{cases}$$

La figure 3.9 représente le graphe de la fonction Valeur W , dans le plan (v, w) à (t, u) fixés, à partir de la formule de représentation (3.147).

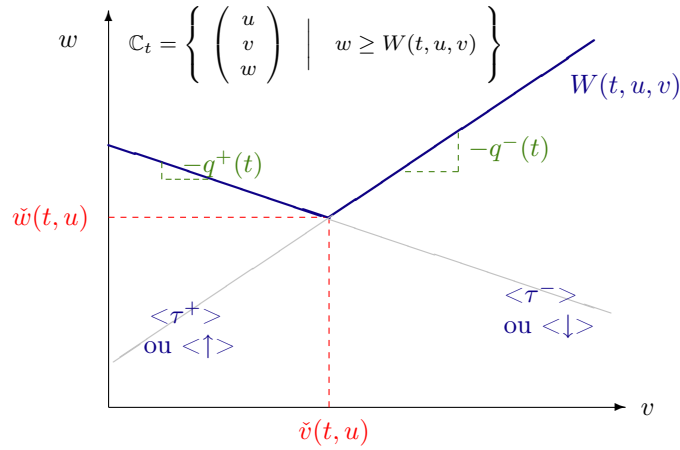


FIG. 3.9 – Graphe de la fonction Valeur W , dans le plan (v, w) à (t, u) fixés, à partir de la formule de représentation (3.147).

Remarque 3.10.2 Pour $t > t_-$, le prolongement de la partie de la barrière pour $v > \check{v}(t, u)$ sur la figure 3.9, correspond à la nappe $\langle \tau^- \rangle$ et passe donc par l'origine $(v, w) = (0, 0)$, puisque l'équation de la nappe $\langle \tau^- \rangle$ est $w = -q^-(t)v$ (équation (3.41)).

Pour tout couple (t, u) dans la région d'intérêt Λ , les variétés de dimension 2, paramétrées en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u) = W(t, u, \check{v}(t, u)))$, obtenues comme l'intersection de la nappe $\langle \tau^- \rangle$ ou $\langle \downarrow \rangle$, avec la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ ou $\langle \downarrow \rangle$, sont :

- ➔ une Dispersion : $\mathcal{D} = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$ lorsque $C^- < q^\varepsilon(t) < C^+$, $\varepsilon \in \{+, -\}$,
- ➔ deux jonctions \mathcal{E} quivoques : $\mathcal{E}^- = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ lorsque $C^- < q^+(t) < C^+$ et $q^- = C^-$,
- $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$ lorsque $q^+ = C^+$ et $C^- < q^-(t) < C^+$,
- ➔ une variété \mathcal{F} ocale : $\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ lorsque $q^\varepsilon = C^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{+, -\}$.

Nous rappelons qu'une interprétation des valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur ces variétés a été donnée dans l'interprétation financière 3.6.3. La figure 3.8 regroupe les différentes variétés identifiées dans la région

d'intérêt Λ , selon que $t_- \leq t_+$ ou $t_+ \leq t_-$, et la table 3.1 synthétise les différents résultats obtenus relatifs aux valeurs en (v, w) , $\check{V}(t, u) = (\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))^t$, sur ces variétés.

domaine du plan (t, u)	EDO / EDP	conditions au bord	solution explicite
$u(t) < u_g(t)$			(3.64)
$u(t) > u_d(t)$			(3.65)
$\{ (t, u) \mid t \geq t_M \text{ et } u \in [u_g(t), u_d(t)] \}$	(3.36)		$\mathcal{D} : (3.55)$
$\{ (t, u) \mid t \in [t_-, t_+] \text{ et } u \in [u_g(t), \tilde{u}^+(t)] \}$	(3.92)	(3.95)	$\mathcal{E}_1^+ : (3.98)$
$\{ (t, u) \mid t \in [t_-, t_+] \text{ et } u \in [\tilde{u}^+(t), u_d(t)] \}$	(3.92)	(3.96)	$\mathcal{E}_2^+ : (3.99)$
$\{ (t, u) \mid t \in [t_+, t_-] \text{ et } u \in [u_g(t), \tilde{u}^-(t)] \}$	(3.110)	① page 129	$\mathcal{E}_1^- : (3.114)$
$\{ (t, u) \mid t \in [t_+, t_-] \text{ et } u \in [\tilde{u}^-(t), u_d(t)] \}$	(3.110)	② page 130	$\mathcal{E}_2^- : (3.115)$
$\{ (t, u) \mid t \leq t_m \text{ et } u \in [u_g(t), u_d(t)] \}$	(3.133)	paragraphe 3.9.3	$\mathcal{F} : \text{numérique}$

TAB. 3.1 – Une synthèse des résultats relatifs aux valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ pour le call vanille.

Remarque 3.10.3 Là où $q^\varepsilon = C^\varepsilon \forall \varepsilon \in \{+, -\}$, les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sont sur une variété focale \mathcal{F} de dimension 2, et sont solution du système d'EDP couplées linéaires du premier ordre (3.133). Nous verrons dans le paragraphe 5.1 que ce système pourra être étendu à l'ensemble des variétés de dimension 2 paramétrées en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$, en remplaçant simplement les constantes C^ε par les fonctions $q^\varepsilon \forall \varepsilon \in \{+, -\}$. Avec la formule de représentation (3.147) et ce système d'EDP, nous obtenons alors une représentation complète et uniforme de la fonction Valeur.

3.10.2 Prime de l'option et stratégie du trader au cours du jeu

La figure 3.10 constitue une représentation schématique en dimension 2 de la barrière du jeu $w = W(t, u, v)$ dans l'espace (t, u, v, w) en dimension 4, mais sur laquelle les axes ne sont pas clairement définis. Cette figure correspond au cas où la nappe $\langle \tau^- \rangle$ a une durée de validité plus grande que celle de la nappe $\langle \tau^+ \rangle$, c'est-à-dire au cas où $t_- < t_+$ (la variété équivoque \mathcal{E} est alors une variété \mathcal{E}^+). Pour l'autre cas, le dessin est similaire, mutatis mutandis.

Prime de l'option

Dans cette dernière section, nous répondons naturellement à la problématique initiale qui a motivé l'étude de ce jeu.

La formule de représentation de la fonction Valeur (3.147) montre que la prime de l'option (définition 1.3.9 et formule (1.52)) est respectivement en variables actualisées et non actualisées ²²

²²On rappelle que d'une part $\check{v}(t, u) \in [0, u]$ (propriété 1.6.1), donc a fortiori $\check{v}(0, u(0)) \geq v(0) = 0$, et que d'autre

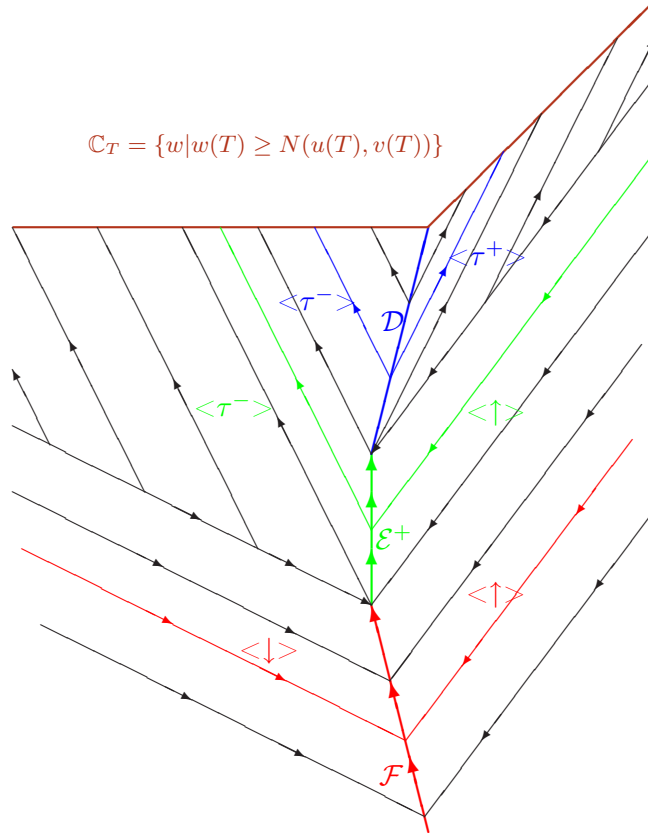


FIG. 3.10 – Un schéma en dimension 2 de la géométrie du jeu en dimension 4.

$$\begin{aligned}
 P(u(0)) &= W(0, u(0), 0) &= \check{w}(0, u(0)) + C^+ \check{v}(0, u(0)) , \\
 \tilde{P}(S(0)) &= e^{-\rho T} W(0, e^{\rho T} S(0), 0) &= e^{-\rho T} (\check{w}(0, e^{\rho T} S(0)) + C^+ \check{v}(0, u(0))) .
 \end{aligned}
 \tag{3.149}$$

Cette prime s'analyse comme le montant nécessaire pour constituer le portefeuille $(\check{v}(0, u(0)), \check{w}(0, u(0)))$ initial, à savoir qu'elle correspond à la valeur du portefeuille de couverture initial $\check{w}(0, u(0))$ augmentée des coûts de transaction $C^+ \check{v}(0, u(0))$ engendrés par l'investissement initial $\check{v}(0, u(0))$ en actif sous-jacent. La stratégie du trader comprend donc un saut positif (achat) à l'instant initial, pour passer de $v(0) = 0$ à $v(0^+) = \check{v}(0, u(0))$, et le graphe de $\check{v}(0, u(0)) \geq 0$ donne en fonction de $(u(0))$ l'amplitude de cet achat. Les graphes de $\check{v}(0, u(0))$ et $\check{w}(0, u(0))$, obtenus (pour chacune des options étudiées dans ce manuscrit) sont visibles dans le paragraphe 7.2.2. Nous constaterons qu'ils ont une allure semblable à ceux obtenus avec la théorie de BS .

part la durée de l'option ($T = 44$ jours par défaut) est largement supérieure à celle de la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ (2h48mn avec les valeurs par défaut). Il en résulte que, dans la formule de représentation (3.147), nous avons $q^\varepsilon = q^+ = C^+$.

Stratégie du trader

Dans ce paragraphe, nous souhaitons vérifier à posteriori que la commande du trader ξ appartient bien à l'ensemble Ξ , à savoir qu'elle ne possède pas de point d'accumulation de sauts.

Dans le cas où $u(0) \notin \Lambda = \{u(0) \mid u_g(0) \leq u(0) \leq u_d(0)\}$, la stratégie est triviale. Pour $u(0) < u_g(0)$, le trader ne fait rien pendant toute la durée du jeu. Pour $u(0) > u_d(0)$ il effectue une transaction (saut) initiale pour passer d'un investissement $v(0) = 0$ à $v(0^+) = u(0)$, puis, il ne fait rien pendant toute la durée du jeu.

Dans le cas où $u(0) \in \Lambda$, si le marché joue de manière optimale (ici un τ extremal) pendant toute la durée du jeu, la stratégie du trader consiste à (on peut s'aider de la figure 3.10 et de la figure 3.8)

- Effectuer un saut initial pour passer de $v(0) = 0$ à $v(0^+) = \check{v}(0, u(0))$.
- Puis des transactions infinitésimales (transactions continues) pour maintenir l'état sur la variété focale \mathcal{F} , c'est-à-dire à ajuster en continu le portefeuille de manière à avoir un investissement toujours égal à $v = \check{v}(t, u)$.
- Puis, dans la région où une équivoque \mathcal{E} existe, à effectuer des transactions infinitésimales ou ne rien faire et laisser l'état partir sur la nappe émergente $\langle \mathcal{N} \rangle$, suivant la commande extrémales appliquée par le marché.
- Enfin, à ne rien faire (à laisser l'état partir sur une des nappes $\langle \tau^- \rangle$ ou $\langle \tau^+ \rangle$, suivant le τ extrémales appliqué par le marché) dans la région où la dispersion \mathcal{D} existe.

L'état peut également quitter la région d'intérêt Λ à un instant t donné au cours du jeu. A cet instant t ,

- Si $u(t) < u_g(t)$, la stratégie du trader est de vendre l'actif sous-jacent restant, via une vente instantanée d'un montant $\xi = -v$, à condition que $t < t_-$, et de ne rien faire pendant le reste du jeu.
- Si $u(t) > u_d(t)$, la stratégie du trader est de ramener la composition du portefeuille à $v = u$ via un achat instantané d'un montant $\xi = u - v$, à condition toutefois que $t < t_+$, et de ne rien faire pendant le reste du jeu.

En conclusion, la commande du trader ne possède pas de point d'accumulation de saut, puisque celle-ci comprend au maximum deux sauts (un saut initial, puis un autre dans le cas où le cours quitte la région d'intérêt suffisamment longtemps avant la fin du jeu).

3.11 Coûts de clôture : des cas particuliers

Nous allons montrer que des cas particuliers apparaissent pour certains choix des taux coûts de clôture c^- et c^+ .

3.11.1 En absence de coûts de clôture : rien de particulier

Il suffit de remplacer c^ε , $\varepsilon \in \{+, -\}$, par 0 tout au long de l'analyse développée dans ce chapitre depuis le paragraphe 3.4. Le lecteur peut se convaincre que la géométrie du jeu qualitatif reste identique.

Elle reste décrite par la figure 3.9, la figure 3.8 (avec $u_g(T) = u_d(T) = K$, et où $\check{v}(T, u)$ de la formule (3.31) devient sans objet ²³), et la figure 3.10.

Remarque 3.11.1 *La fonction de coût terminal $N(u, v)$ (relation (1.30)) devient la fonction de paiement $M(u)$. L'étude d'un call vanille en absence de coûts de clôture a été publiée dans [BEFT06].*

3.11.2 Le cas où $c^- = C^-$ ou $c^+ = C^+$

Dans ce cas particulier, la validité de l'une des deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ ou $\langle \tau^+ \rangle$ est nulle ($t_- = T$ ou $t_+ = T$, voir la formule (3.56)). Cette nappe est remplacée par une nappe de saut dès le début du jeu, et la dispersion \mathcal{D} n'existe plus. Les différentes variétés de dimension 2 paramétrées en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$, et leur régions correspondantes, (regroupées sur la figure 3.8 dans le cas général), sont à présent visibles sur la figure 3.11 (à gauche pour le cas $c^+ = C^+$ et à droite pour le cas $c^- = C^-$).

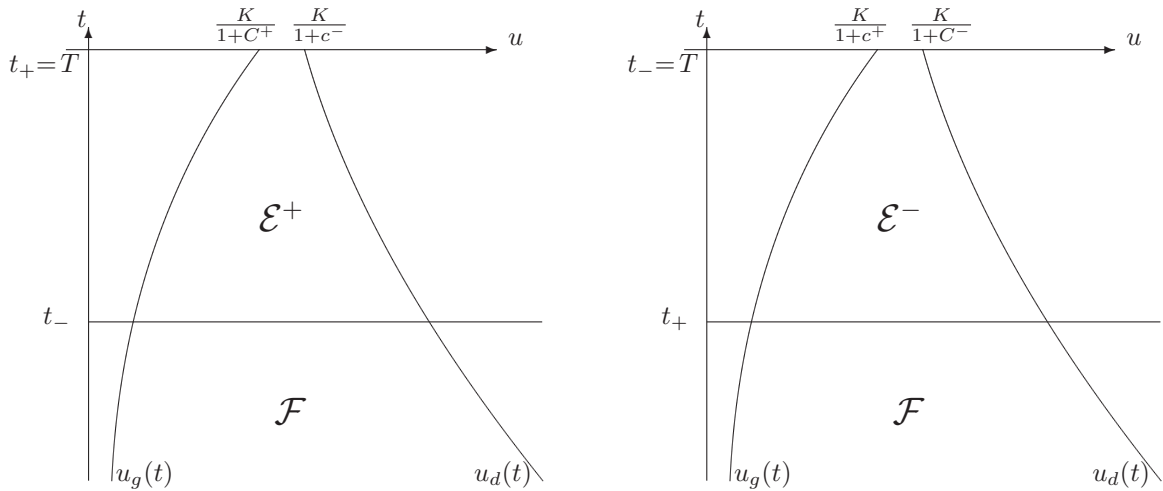


FIG. 3.11 – Les différentes variétés de dimension 2 dans les cas particuliers $c^+ = C^+$ (figure de gauche) et $c^- = C^-$ (figure de droite) .

3.11.3 Le cas particulier $c^\varepsilon = C^\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}$

Dans ce cas particulier la validité de chacune des deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$ est nulle ($t_+ = t_- = T$), et de ce fait, les nappes de saut $\langle \uparrow \rangle$ et $\langle \downarrow \rangle$ existent pendant toute la durée du jeu, avec $q^\varepsilon = C^\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}$. Dans toute la région d'intérêt Λ , dans laquelle il existe un dilemme pour le trader (i.e. où la solution n'est pas obtenue de manière triviale), nous avons une variété focale \mathcal{F} pendant toute la durée du jeu.

Remarque 3.11.2 *L'approximation de la remarque 3.4.7 aurait simplifié considérablement l'analyse du jeu qualitatif, mais celui-ci aurait alors perdu une grande partie de son intérêt mathématique, puisque la solution aurait exhibé uniquement une variété focale \mathcal{F} , dans toute la région d'intérêt. En outre, il*

²³La cible ne dépend plus de v .

n'est pas exclu que des marchés différents d'actions traditionnels résultent en des t^ε supérieurs à T .

Remarque 3.11.3 *A l'exception du paragraphe 3.1, le chapitre 3 suppose l'existence de coûts de transaction. En l'absence de coûts de transaction, remarquons que l'on se trouve dans le cas particulier $C^- = c^- = 0 = c^+ = C^+$, donc également $t_- = t_+ = T$ et $q^\varepsilon = 0 \forall \varepsilon \in \{+, -\}$, pendant toute la durée du jeu. Par conséquent le système d'EDP (3.133) ne peut pas être étendu à ce cas (la variété focale ne peut pas être formalisée par le système d'EDP (3.133)), ce qui justifie que l'on ait procédé à cette étude différemment, dans le paragraphe 3.1.*

3.12 Le put vanille avec paiement en nature

Chapitre 4

Le call digital par la méthode du jeu qualitatif

Comme dans le chapitre 3 nous allons procéder, pour un call digital ¹ cette fois-ci, à l'analyse minutieuse dans l'espace d'état (t, u, v, w) des trajectoires extrémales et singulières du jeu qualitatif unique à cible unique \mathbb{C}_T à T (3.11). Cette analyse qui constitue une contribution majeure de la thèse a été publiée de manière condensée dans l'article [TBO06]. Pour les options digitales la fonction de coût terminal (la cible à T) devient discontinue (s.c.s) en $u = K$, du fait de la discontinuité de la fonction de paiement en $u = K$ (1.5) et (1.6)). Nous allons voir que la perte de la convexité (comparé au chapitre 3 pour un call vanille) et la discontinuité d'autre part vont rendre l'étude de ce jeu qualitatif plus délicate et plus riche en singularités dans le champ des trajectoires extrémales et singulières. Nous constaterons également que pour un call digital, la discontinuité dans la cible à T va se propager au cours du temps au sein de la fonction Valeur, le long de la trajectoire $u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$.

4.1 En absence de coûts de transaction

A l'instar d'une option vanille (paragraphe 3.1), nous nous intéresserons tout d'abord à l'évaluation d'une option digitale en absence de coûts de transaction (et donc également de coûts de clôture). Avec la démarche strictement identique à celle du paragraphe 3.1, la fonction Valeur (3.3) à caractériser est solution de l'équation d'Isaacs (3.4), et nous pouvons montrer que $W(t, u, v) = M(u)$ est **une** solution de viscosité discontinue de cette équation (3.4), au sens de G.Barles [Bar94]. Cependant puisque nous n'avons pas de théorème d'unicité pour une solution de viscosité discontinue, nous allons procéder par une approche directe qui consiste à :

1. Approximer le paiement $M(u)$ par un paiement $M_\Delta(u)$ continu, tel que $M_\Delta(u) \geq M(u) \forall u$ avec $M_\Delta(u) \rightarrow M(u)$ lorsque $\Delta \rightarrow 0$. On s'intéresse alors au jeu, noté \mathcal{G}_Δ , ayant pour paiement (coût terminal) $M_\Delta(u)$, et donc pour critère (voir l'équation (3.2))

$$J_\Delta(t, u; \tau(\cdot), \phi) = \left[M_\Delta(u(T)) - \int_t^T \tau(s)v(s)ds \right]. \quad (4.1)$$

¹Sous-entendu un call digital de type « cash or nothing ».

2. Montrer que $W_\Delta(t, u) = M_\Delta(u)$ est la Valeur du jeu \mathcal{G}_Δ .
3. Montrer que le jeu d'origine \mathcal{G} (à paiement $M(u)$ discontinu) a pour valeur $W(t, u) = M(u)$.

4.1.1 Approximation du paiement

Nous regardons l'approximation continue $M_\Delta(u) \geq M(u)$ du paiement $M(u)$ d'un call digital, utilisant une transition linéaire de $(u, M_\Delta(u)) = (K(1 - \Delta), 0)$ à (K, D) , avec $0 < \Delta < 1$. Cette fonction de paiement $M_\Delta(u)$ représentée sur la figure 4.1, tend vers $M(u)$ quand $\Delta \rightarrow 0$, et son expression est donnée par

$$M_\Delta(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq K(1 - \Delta) , \\ \frac{D}{K\Delta}u - \frac{D(1-\Delta)}{\Delta} & \text{si } u \in [K(1 - \Delta), K] , \\ D & \text{si } u \geq K . \end{cases}$$

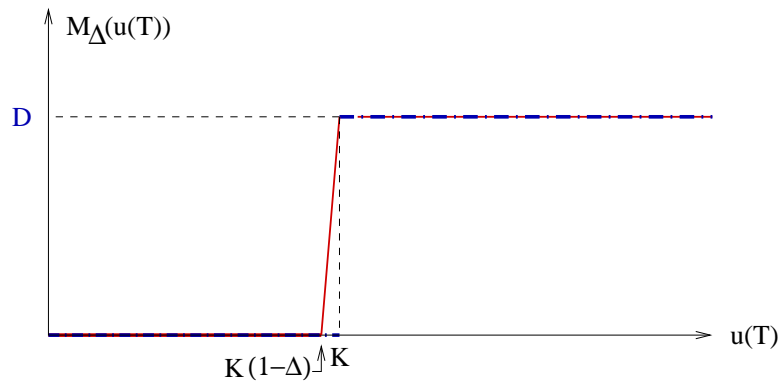


FIG. 4.1 – Approximation continue $M_\Delta(u)$ de la fonction de paiement $M(u)$ d'un call digital.

Remarque 4.1.1 *La convergence $M_\Delta(u) \rightarrow M(u)$ lorsque $\Delta \rightarrow 0$ est une convergence simple, puisqu'une fonction continue ne peut pas converger uniformément vers une fonction discontinue.*

Remarque 4.1.2 *Pour un put digital (paiement (1.6)), nous procédons de manière similaire en choisissant pour $\Delta > 0$:*

$$M(u) \leq M_\Delta(u) = \begin{cases} D & \text{si } u \leq K , \\ \frac{-D}{K\Delta}u + \frac{D(1+\Delta)}{\Delta} & \text{si } u \in [K, K(1 + \Delta)] , \\ 0 & \text{si } u \geq K(1 + \Delta) . \end{cases}$$

4.1.2 Solution de viscosité du jeu \mathcal{G}_Δ

La Valeur W_Δ du jeu \mathcal{G}_Δ est solution de l'équation d'Isaacs (3.4), initialisée avec $W(T, u) = M_\Delta(u)$. Comme $M_\Delta(u)$ est continue, l'analyse effectuée dans le paragraphe 3.1.2 en présence d'une discontinuité

de gradient, nous montre directement que $W_\Delta(t, u) = M_\Delta(u)$ est la solution de viscosité de l'équation d'Isaacs associée au jeu \mathcal{G}_Δ , donc la Valeur du jeu \mathcal{G}_Δ .

Notons seulement que pour un call digital ², $W(t, u) = M_\Delta(u)$ présente une discontinuité de gradient en $u = K(1 - \Delta)$ qui correspond à un minimum local, ainsi qu'en $u = K$ qui correspond à un maximum local, avec

$$\frac{\partial W_\Delta}{\partial u} = M'_\Delta(u) = \begin{cases} \frac{D}{K\Delta} & \text{si } u \in]K(1 - \Delta), K[, \\ 0 & \text{si } u \notin [K(1 - \Delta), K] . \end{cases}$$

En $u = K(1 - \Delta)$ (respectivement $u = K$), les elements du sous-différentiel (respectivement du sur-différentiel) s'écrivent donc :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} = 0 , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} \in [0, \frac{D}{K\Delta}] ,$$

et le \min_v dans l'équation d'Isaacs est obtenu pour $v = \frac{\partial \Phi}{\partial u} u \in [0, \frac{D}{K\Delta} u]$ (formule (3.8)).

4.1.3 Valeur du jeu \mathcal{G}

Les critères respectifs J (du jeu \mathcal{G} à paiement $M(u)$) et J_Δ (du jeu \mathcal{G}_Δ à paiement $M_\Delta(u)$), sont donnés par (3.2) et (4.1). De l'inégalité $M_\Delta(u) \geq M(u) \forall u$, il en découle la propriété

Propriété 4.1.1 $\forall (\tau(\cdot), \phi) \in \Omega \times \Phi$ et $\forall (t, u(t)) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$:

$$J(t, u(t); \tau(\cdot), \phi) \leq J_\Delta(t, u(t); \tau(\cdot), \phi) .$$

Proposition 4.1.2 $\forall t_0, u(t_0) \in \mathbb{R}^+$ fixés, nous avons $M(u(t_0)) = \inf_\phi \sup_\tau J(t_0, u(t_0); \tau(\cdot), \phi)$, c'est-à-dire que $M(u)$ est la Valeur du jeu \mathcal{G} .

Preuve de la proposition 4.1.2. Pour un couple $(t_0, u(0))$ donné (condition initiale), nous choisissons Δ suffisamment petit pour que $u(t_0) \notin [K(1 - \Delta), K]$. Ainsi $M_\Delta(u(t_0)) = M(u(t_0))$. Comme $W_\Delta(t, u) = M_\Delta(u)$ est la valeur du jeu \mathcal{G}_Δ à critère J_Δ , il en découle :

$$\inf_\phi \sup_\tau J_\Delta(t_0, u(t_0); \tau(\cdot), \phi) = M_\Delta(u(t_0)) = M(u(t_0)) .$$

Ainsi $\forall \mu > 0, \exists \phi_\mu$ tel que :

$$\sup_\tau J_\Delta(t_0, u(t_0); \tau(\cdot), \phi_\mu) \leq M(u(t_0)) + \mu .$$

En se servant de la propriété 4.1.1, on obtient

$$\sup_\tau J(t_0, u(t_0); \tau(\cdot), \phi_\mu) \leq \sup_\tau J_\Delta(t_0, u(t_0); \tau(\cdot), \phi_\mu) \leq M(u(t_0)) + \mu ,$$

²Mutatis mutandis pour un put digital.

et donc

$$\inf_{\phi} \sup_{\tau} J(t_0, u(t_0); \tau(\cdot), \phi) \leq M(u(t_0)) .$$

Par ailleurs, pour $\tau(t) = 0 \forall t \in [t_0, T]$, le critère J (3.2) devient $J(t_0, u(t_0); 0, \phi) = M(u(t_0))$, et donc

$$\forall \phi \in \Phi : \sup_{\tau} J(t_0, u(t_0); \tau(\cdot), \phi) \geq M(u(t_0)) .$$

Par conséquent

$$\inf_{\phi} \sup_{\tau} J(t_0, u(t_0); \tau(\cdot), \phi) \geq M(u(t_0)) .$$

Par une double inégalité, nous venons ainsi de montrer que

$$\forall t_0, u(t_0) \in \mathbb{R}^+ \text{ fixés : } \inf_{\varphi} \sup_{\tau} J(0, u(0); \tau(\cdot), \phi) = M(u(0)) . \quad \blacksquare$$

4.1.4 Prime et stratégie

En pratique, il nous faut déterminer à la fois la prime et la stratégie de transaction du trader. Par la proposition 4.1.2, la prime est

$$\tilde{P}(S(0)) = e^{-\rho T} W(0, e^{\rho T} S(0)) = e^{-\rho T} M(e^{\rho T} S(0)) .$$

De l'équation (3.5), il découle une stratégie de transaction ϕ_{Δ} pour le jeu \mathcal{G}_{Δ} , qui approxime une stratégie du trader ϕ pour le jeu \mathcal{G} .

Dans le cas du call digital ³, on obtient :

$$v(t, u) = \phi_{\Delta}(t, \tau(\cdot)) = \frac{\partial W}{\partial u} u = \frac{\partial M_{\Delta}}{\partial u} u = \begin{cases} \frac{D}{K\Delta} u & \text{si } u \in]K(1 - \Delta), K[, \\ 0 & \text{si } u \notin [K(1 - \Delta), K] . \end{cases} \quad (4.2)$$

La stratégie de transaction $\phi_{\Delta}(t, \tau(\cdot))$ recommandée au trader est donc de ne rien faire excepté :

- ➔ quand le cours de l'actif sous-jacent atteint l'intervalle de prix $u =]K(1 - \Delta), K[$, où la stratégie de transaction optimale du trader est d'acheter $\frac{D}{K\Delta}$ parts d'actif sous-jacent.
- ➔ quand le cours de l'actif sous-jacent quitte l'intervalle de prix $u = [K(1 - \Delta), K]$, la stratégie optimale du trader est de vendre les $\frac{D}{K\Delta}$ parts d'actifs sous-jacent.

La figure 4.2 représente avec cette stratégie $\phi_{\Delta}(t, \tau(\cdot))$, le nombre $\frac{v(t, u)}{u(t)} = \frac{\phi_{\Delta}(t, \tau(\cdot))}{u(t)}$ de part d'actif sous-jacent contenu dans le portefeuille en fonction de $u(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. L'intégrale (l'aire du rectangle hachuré ⁴) est égale à $D \forall \Delta > 0$. Quand $\Delta \rightarrow 0$, $\frac{\phi_{\Delta}}{u}$ tend vers $\frac{\phi}{K} = \frac{D\delta(u-K)}{K}$, où δ est une impulsion de Dirac.

Notons que la stratégie ϕ_{Δ} obtenue n'est pas très réaliste lorsque $\Delta \rightarrow 0$ car elle induirait des transactions très grandes à chaque fois que u franchit $K(1 - \Delta)$ ou K . En pratique, ces transactions sont, d'une part non robuste à l'égard des coûts de transaction et d'autre part elles sont susceptibles

³Mutatis mutandis pour le put digital.

⁴Remarquons que ce rectangle devient un trapèze si l'on considère la stratégie optimale du trader $v(t, u) = \varphi_{\Delta}(t, \tau(\cdot))$ au lieu de $\frac{v(t, u)}{u(t)}$ en ordonnée.

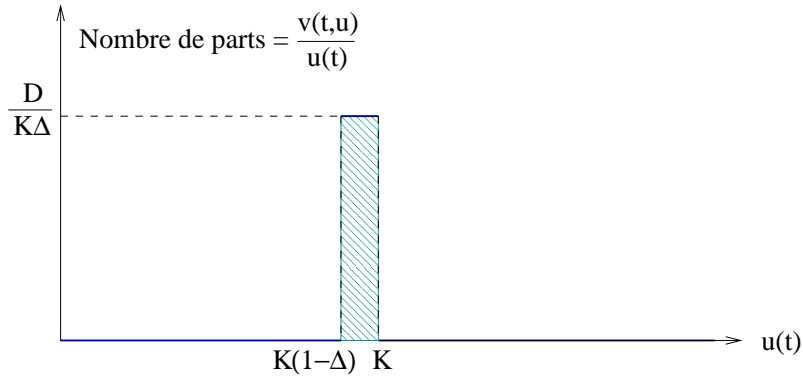


FIG. 4.2 – Nombre optimal de parts $\frac{v(t)}{u(t)}$ en fonction de $u(t)$ lorsque le paiement est $M_\Delta(u)$.

de violer l'hypothèse d'atomicité (définition 1.1.6) (du fait de leur grandeur, elle pourraient avoir un impact sur l'évolution future du cours de l'actif) et de liquidité (définition 1.1.4). De plus la stratégie limite $\phi = D\delta(u - K)$ obtenue pour le jeu \mathcal{G} n'est pas applicable en pratique.

Remarquons que par définition même de la transition linéaire de pente $\frac{D}{K\Delta}$ joignant $(u, M_\Delta(u)) = (K(1 - \Delta), 0)$ à (K, D) , il découle la proposition suivante :

Proposition 4.1.3 *Si u traverse l'intervalle de prix $[K(1 - \Delta), K]$, c'est-à-dire varie de $u \leq K(1 - \Delta)$ à $u \geq K$ (respectivement varie de $u \geq K$ à $u \leq K(1 - \Delta)$), cela engendre une variation du montant $v = \varphi_\Delta(t, u)$ égale à D (respectivement égale à $-D$)*

Preuve de la proposition 4.1.3. Si u traverse l'intervalle de prix $[K(1 - \Delta), K]$ en croissant, la stratégie correspondante est $v = 0$ jusqu'à ce que $u = K(1 - \Delta)$ soit atteint. En $u = K(1 - \Delta)$ le trader achète un montant $v = \frac{D}{K\Delta}u$ en actif sous-jacent, sans payer de coûts de transaction. La variation du cours entre $u = K(1 - \Delta)$ et $u = K$ engendre une variation du montant v investit en actif sous-jacent, égale à

$$\frac{D}{K\Delta}(K - K(1 - \Delta)) = D .$$

Finalement lorsque le cours atteint $u = K$, le trader vend tout l'actif sous-jacent sans payer de coûts de transaction. Par un raisonnement similaire, si le cours traverse l'intervalle en décroissant, la variation du montant v est $\frac{D}{K\Delta}(K(1 - \Delta) - K) = -D$ ■

4.2 Quelques rappels utiles

On rappelle que le jeu qualitatif étudié consiste à séparer les états pour lesquels le trader peut assurer la couverture (1.33) contre toute variation du cours satisfaisant l'hypothèse du modèle à intervalles ($\tau \in \Omega$ où Ω est donnée par (1.23)). On rappelle également que le graphe de la fonction Valeur recherchée (1.51) est une surface semi-perméable correspondant à tout instant $t \in [0, T]$ à la frontière la zone de capture \mathcal{C}_t (3.12). En outre, nous rappelons que dans le paragraphe 3.3, l'analyse développée

(normale semi-perméable, équation qualitative d'Isaacs, contrôles optimaux, trajectoires de saut) reste valable quelque soit l'option étudiée. On pourra donc s'appuyer en particulier sur :

➔ Les équations primales (la dynamique du jeu \mathcal{G} en dimension 3 plus temps) (1.20), (1.21), (1.22).

$$\begin{cases} \dot{u} = \tau u, \\ \dot{v} = \tau v + \xi_c \quad \text{ou} \quad v(t_k^+) = v(t_k) + \xi_k, \\ \dot{w} = \tau v - C^{\varepsilon_c} \xi_c \quad \text{ou} \quad w(t_k^+) = w(t_k) - C^{\varepsilon_k}(\xi_k), \end{cases}$$

➔ L'équation qualitative d'Isaacs (condition de semi-perméabilité) (3.17)

$$n + \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \min_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \{[pu + (q+1)v]\tau + (q - C^\varepsilon)\xi\} = 0,$$

ainsi que l'interprétation des composantes de la normale semi-perméable (3.14)

$$(n, p, q) = \left(-\frac{\partial W}{\partial t}, -\frac{\partial W}{\partial u}, -\frac{\partial W}{\partial v} \right).$$

➔ Les nappes de saut, qui correspondent à des hypersurfaces semi-perméables singulières en ξ . Elles sont formées de trajectoires orthogonales au plan (t, u) ayant pour dynamique (3.25) et pour normale semi-perméable (3.26), $(n, p, C^\varepsilon, 1)^t$, $\varepsilon = \text{signe}(\xi_k)$.

➔ La minimisation en τ et la maximisation en ξ (3.19)

$$\tau^* = \arg \min_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} [pu + (q+1)v]\tau \quad \text{et} \quad \xi^* = \arg \max_{\xi} (q - C^\varepsilon)\xi$$

conduisant (après interprétation des trajectoires de sauts dans le cas de ξ^*) aux contrôles optimaux (3.21) et (3.27) :

$$\tau^* = \begin{cases} \tau^- & \text{si } [pu + (q+1)v] > 0 \\ \tau^+ & \text{si } [pu + (q+1)v] < 0 \\ \text{indeterminé} & \text{si } [pu + (q+1)v] = 0 \end{cases}$$

où $\sigma = [pu + (q+1)v]$ est la fonction de commutation en τ ; et

$$\xi^* = \begin{cases} \geq 0 & \text{si } q = C^+, \\ 0 & \text{si } C^- < q < C^+, \\ \leq 0 & \text{si } q = C^-. \end{cases}$$

où les trajectoires de saut correspondent à un hamiltonien singulier en ξ .

➔ Les équations adjointes (3.29)

$$\dot{n} = 0, \quad \dot{p} = -\tau p, \quad \dot{q} = -(1+q)\tau$$

valables le long d'une trajectoire optimale τ^* , ξ^* parcourant une partie \mathcal{C}^1 de la barrière.

Par ailleurs, les résultats suivants obtenues au cours de l'analyse du call vanille, restent également valables :

- ➔ L'intégration en temps rétrograde avec $\xi^* = 0$ (3.37) qui s'effectuera pendant une maturité $m = T - t$ non nulle si $c^\varepsilon \neq C^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{+, -\}$ (proposition 3.4.1).
- ➔ La composante n de la normale semi-perméable à la partie \mathcal{C}^1 de la barrière (où $\xi^* = 0$) s'écrit sous la forme (3.38).
- ➔ La méthode développée dans le paragraphe 3.7 pour construire un raccordement sur un variété équivoque \mathcal{E} et vérifier la semi-perméabilité.
- ➔ Le système d'EDP couplées linéaires du premier ordre (3.133), pour identifier conjointement les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u) = W(t, u, \check{v}(t, u)))$ sur une variété focale \mathcal{F} de dimension 2.
- ➔ La proposition 3.9.6 qui fournit une condition suffisante de semi-perméabilité pour la variété focale \mathcal{F} .

Nous pouvons à présent, pour le call digital, construire de manière classique la barrière naturelle (le graphe de la fonction Valeur W , frontière de la zone de capture \mathbb{C}_t) par intégration en temps rétrograde des équations de la dynamique et des équations adjointes, depuis la partie utile de la frontière $W(T, u, v) = N(u, v)$ de la cible à l'instant T .

4.3 Intégration depuis la frontière de la cible à T

4.3.1 Frontière de la cible et normales semi-perméables à $t = T$

Pour un call digital, la fonction de paiement $M(u)$ (donnée par (1.5) et représentée sur la figure 1.2) est croissante en u . Il en résulte que nous avons nécessairement $v(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, de manière à ce que la valeur du portefeuille augmente lorsque le paiement possible dû par le trader au souscripteur augmente. Une option de type call digital ne réside pas dans un droit d'acheter une part d'actif sous-jacent, mais en un gain fixe D si le cours fini avec $u(T) \geq K$ (on dit que le cours finit « dans la monnaie »). Par conséquent seul un paiement en espèces est possible pour un call digital. Ainsi, de $v(t) \geq 0$, il en découle que le trader étant contraint de vendre l'actif sous-jacent restant dans son portefeuille à l'instant T , occasionnant ainsi des coûts de clôture d'un montant $c^-(-v(T))$. Le coût terminal (1.30), frontière de la cible (3.11) du jeu à l'instant T , s'écrit donc

$$N(u, v) = \begin{cases} -c^-v & \text{si } u < K, \\ D - c^-v & \text{si } u \geq K. \end{cases}$$

La figure 4.3 représente la coupe en $v = 0$ de la frontière de la cible à l'instant T (la fonction $N(u, 0) = M(u)$). La fonction de coût terminal $N(u, v)$ étant discontinue en $u = K$, la normale semi-perméable en $u = K$ peut être n'importe quel élément du sur-différentiel. Ainsi, comme l'illustre la figure 4.3, il existe une infinité de normales semi-perméables en $u(T) = K$, de la forme

$$\nu(T) = (n(T), p(T), c^-, 0)^t \text{ avec } p(T) \in]-\infty, 0] \quad \text{en } u(T) = K.$$

qui conduit pour $v(T) = \beta \neq 0$ à la commande du marché $\tau^* = \tau^-$ sur la période finale où $\xi^* = 0$. Par une étude analogue à celle de la nappe $\langle \tau^- \rangle$ du call vanille (paragraphe 3.4.4), nous obtenons deux nappes de trajectoires extrémales $\tau^* = \tau^-$ ayant pour équations respectives

$$\langle \tau_g^- \rangle : w = -q^-(t)v, \quad (4.3)$$

$$\langle \tau_d^- \rangle : w = D - q^-(t)v, \quad (4.4)$$

avec

$$q^-(t) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1,$$

et pour normale semi-perméable

$$\nu_{\tau_g^-} = \nu_{\tau_d^-} = \left(-\tau^-(1 + q^-(t))v(t), 0, q^-(t), 1 \right)^t. \quad (4.5)$$

Remarque 4.3.1 *Nous remarquons que la composante de la normale semi-perméables de ces deux nappes est la même que celle de la nappe $\langle \tau^- \rangle$ apparaissant dans l'étude du call vanille avec paiement en nature (3.39), puisqu'elles sont toutes les trois définies par $q^-(T) = c^-$, $\tau^* = \tau^-$ et $\xi^* = 0$. Par ailleurs la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$ a la même équation que la nappe $\langle \tau^- \rangle$ du call vanille (équation (3.41)) puisque en plus, elles se raccordent toutes les deux à une partie utile de la cible où $N(u, v) = -c^-v$.*

Comme les normales semi-perméables à ces deux nappes ont la même composante $q^-(t)$, ces deux nappes ont la même durée de validité (et la même durée de validité que la nappe $\langle \tau^- \rangle$). Elles existent jusqu'à ce que $q^-(t)$ atteignent C^- , c'est-à-dire sur la période finale $[t_-, T]$ où t_- est donné par la relation (3.43) réécrite ci dessous

$$T - t_- = \frac{1}{\tau^-} \ln \left(\frac{1 + C^-}{1 + c^-} \right) \quad (4.6)$$

Antérieurement à $t = t_-$ ces deux nappes de trajectoires extrémales $\tau^* = \tau^-$ seront remplacées par des nappes de saut négatif $\langle \downarrow \rangle$ de pente $-q^- = -C^-$ dans le plan (v, w) . On défini (formule (3.44))

$$q^-(t) = \max\{(1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1, C^-\} = \begin{cases} (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1 & \text{si } t > t_- \\ C^- & \text{si } t \leq t_- \end{cases}. \quad (4.7)$$

Remarque 4.3.2 *Pour $\beta = 0$, on obtient pour $u(T) < K$ et $u(T) > K$, une variété singulière en τ de codimension 2 (paramètres libres t et $\theta = \int_t^T \tau(s)ds$), avec respectivement $(v, w) = (0, 0)$ et $(v, w) = (0, D)$. Ces trajectoires singulières parcourent respectivement le bord de la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$ et de la nappe $\langle \tau_d^- \rangle$ en $v = 0$. Pour $u(T) < K$, ces trajectoires singulières sont identiques à celles obtenues page 98 pour le call vanille, et l'on explique leur apparition par l'interprétation financière 3.4.4. Pour $u(T) > K$, ces trajectoires sont très semblables s'interprètent de la même façon (la seule différence est que w et le coût terminal deviennent D).*

4.3.3 Une nappe singulière en τ : nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$

Considérons maintenant les trajectoires qui atteignent la frontière de la cible en

$$u(T) = K, \quad w(T) = D - c^- v(T),$$

c'est-à-dire sur la partie non-différentiable (discontinue) de la cible $W(T, u, v) = N(u, v)$, ayant une infinité de normales semi-perméables de la forme

$$\nu(T) = (n(T), p(T), c^-, 0)^t \text{ avec } p(T) \in]-\infty, 0].$$

Ces trajectoires gênèrent une variété de dimension 3 paramétrée à l'instant T par $v(T) = \beta \geq 0$ et $p(T) = \gamma \in \mathbb{R}^-$ en

$$\begin{aligned} u(T) &= K, & p(T) &= \gamma, \\ v(T) &= \beta, & q(T) &= c^-. \\ w(T) &= D - c^- \beta, \end{aligned}$$

La fonction de commutation en τ est à l'instant T à pour valeur

$$\sigma(T) = p(T)u(T) + (q(T) + 1)v(T) = (1 + c^-)\beta = \gamma K + (1 + c^-)\beta \quad (4.8)$$

avec $\gamma \in \mathbb{R}^-$, $c^- < 1$ et $\beta \in [0, K]$. Ainsi cette fonction de commutation constante dans le temps (propriété 3.4.2.b) peut prendre les deux signes, suivant les valeurs des paramètres β et γ en $t = T$. En particulier, il existe une composante de la normale en u à l'instant T , $\gamma < 0$, pour laquelle cette fonction de commutation s'annule conduisant ainsi à une nappe de trajectoires singulières en τ puisque la fonction de commutation en τ reste nulle le long de tout intervalle $[t, T]$ sur lequel $\xi^* = 0$ (comme tenu de la propriété 3.4.2.b et de la formule (3.21)).

La nappe singulière $\langle \mathcal{K} \rangle$ joignant $u(T) = K$

Intéressons nous à la valeur particulière

$$\gamma = -\frac{(1 + c^-)\beta}{K},$$

conduisant à une nappe de trajectoires singulières en τ . En posant $\theta = \int_t^T \tau(s)ds$, l'intégration en temps rétrograde avec $\xi^* = 0$ (3.37) (rappelée ci-dessous)

$$\begin{aligned} u(t) &= Ke^{-\theta}, & p(t) &= \gamma e^\theta, \\ v(t) &= \beta e^{-\theta}, & q(t) &= (1 + c^-)e^\theta - 1, \\ w(t) &= w(T) - (e^\theta - 1)v(t), \end{aligned}$$

conduit, dans l'espace d'état $\bar{Y} = (t, u, v, w)$, aux équations ci-dessous pour la nappe singulière qui nous appelons $\langle \mathcal{K} \rangle$ (puisque'elle forme un champ de trajectoires ayant toutes la propriété d'atteindre

$$u(T) = K)$$

$$\langle \mathcal{K} \rangle : e^\theta = \frac{K}{u}, \quad q^+(u) = (1 + c^-) \frac{K}{u} - 1, \quad w = D - q^+(u)v. \quad (4.9)$$

C'est une variété semi-perméable de dimension 3 paramétrée en t, θ (ou t et u de manière équivalente) et $v > 0$. Par commodité pour la suite ⁶, nous avons nommé $q^+(u)$ la composante de la normale semi-perméable en v qui représente l'opposé de la pente de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ dans le plan (v, w) . Cette pente, et par incidence le domaine de validité dans de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ le plan (t, u) , devient une fonction de u , ce qui est une nouveauté par rapport aux nappes vues jusqu'à présent.

Remarque 4.3.3 La composante $q^+(u) = (1 + c^-) \frac{K}{u} - 1$ vérifie bien l'équation adjointe (3.29) puisque

$$\dot{q}^+(u) = \frac{\partial q}{\partial u} \frac{du}{dt} = \frac{-(1 + c^-)K}{u^2} \tau u = (-1 + q^+(u))\tau.$$

Sur la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ la commande optimale du marché τ^* n'est pas unique (du fait de la singularité), mais caractérisée par

$$\tau^*(.) = \left\{ \tau(.) \mid u(T) = K \quad \text{i.e.} \quad ue^{\int_t^T \tau(s) ds} = K \right\}. \quad (4.10)$$

Propriété 4.3.1 Si le paiement avait été choisi s.c.i, il n'aurait pas été possible de caractériser τ^* et ainsi le choix du paiement s.c.s plutôt que s.c.i (qui n'implique aucune restriction en terme de modélisation) facilite l'analyse, dans le sens où le suprémum en τ dans (1.51) devient un maximum.

La propriété 3.4.2.c a montré que sous la stratégie $\xi^* = 0$, la première composante de la normale semi-perméable à une nappe singulière en τ est

$$n(t) = 0. \quad (4.11)$$

En remarquant par ailleurs que

$$p(t) = -\frac{(1 + c^-)\beta}{K} e^\theta = -\frac{(1 + q^+(u))v}{u},$$

la normale semi-perméable en tout point de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ s'écrit

$$\langle \mathcal{K} \rangle : \nu_{\mathcal{K}} = \left(0, -\frac{(1 + q^+(u))v}{u}, q^+(u), 1 \right). \quad (4.12)$$

Cette nappe singulière $\langle \mathcal{K} \rangle$ (où tout $\tau \in [\tau^-, \tau^+]$ vérifie la condition de semi-perméabilité) est une

⁶Pour représenter la fonction Valeur sous la forme (4.35) à venir.

hyper-surface semi-perméable valide aussi longtemps que $\xi^* = 0$, c'est-à-dire tant que

$$C^- \leq q^+(u) = (1 + c^-) \frac{K}{u} - 1 \leq C^+$$

qui se réécrit

$$\ln \left(\frac{1 + C^-}{1 + c^-} \right) \leq \int_t^T \tau(\theta) d\theta \leq \ln \left(\frac{1 + C^+}{1 + c^-} \right) ,$$

et conduit à

$$u(t) \in \left[K \frac{1 + c^-}{1 + C^+}, K \frac{1 + c^-}{1 + C^-} \right] \cap \left[Ke^{-\tau^+(T-t)}, Ke^{-\tau^-(T-t)} \right] . \quad (4.13)$$

En introduisant les notations

$$u_+ = K \frac{1 + c^-}{1 + C^+} \quad \text{et} \quad u_- = K \frac{1 + c^-}{1 + C^-} , \quad (4.14)$$

$$u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)} \quad \text{et} \quad u_d(t) = Ke^{-\tau^-(T-t)} , \quad (4.15)$$

le domaine de validité de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ (4.13) se réécrit

$$\langle \mathcal{K} \rangle : \{ (t, u) \mid \max \{ u_g(t), u_+ \} \leq u(t) \leq \min \{ u_-, u_d(t) \} \} . \quad (4.16)$$

Il est à noter que puisque $C^- < c^- \leq 0$ et $0 \leq c^+ < C^+ < 1$, nous avons $u_+ < K < u_-$ et ainsi la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ existe durant toute la durée du jeu $t \in [0, T]$ comme l'illustre la figure 4.4 présentée à la fin de ce paragraphe. Les taux des différents coûts étant de l'ordre de quelque pour mille, l'intervalle $[u_-, u_+]$ est très petit. Avec les taux par défaut donnés dans le paragraphe 1.7, nous obtenons à $K \times 10^{-4}$ près

$$[u_+, u_-] = [0.9896K, 1.0035K] . \quad (4.17)$$

Interprétation financière 4.3.4 *Les trajectoires se terminant en $u(T) = K$ sont dangereuses pour le trader (correspondent à un contrôle optimal du marché τ) car elles correspondent à un endroit où le paiement subit par rapport à u une brusque augmentation de D . Sur la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$, la variation globale de l'actif sous-jacent entre t et T satisfait*

$$\int_t^T \tau^*(s) ds = \frac{u(T)}{u(t)} = \frac{K}{u(t)} .$$

Comme le paiement $M(u)$ est un pallier (reste constant) pour les valeurs de $u > K$ il en découle que toute variation τ menant en $u > K$ (en particulier $\tau = \tau^+$ de t à T) c'est-à-dire telle que

$$\int_t^T \tau(s) ds > \int_t^T \tau^*(s) ds$$

est moins dangereuse car entre $u = K$ et $u > K$ la valeur du portefeuille augmente alors que le paiement reste fixe.

Deux nappes extrémales joignant $u(T) = K$

Lorsque la fonction de commutation (4.8) n'est pas nulle, nous obtenons respectivement :

- ① Pour $p(T) < -\frac{(1+c^-)v(T)}{K}$ ($\sigma(T) < 0$) des trajectoires (variété de codimension 2) extrémales $\tau^* = \tau^-$ avec $q(t) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1$ qui décroît lorsque t décroît. Ces trajectoires avec $\xi^* = 0$ sont valides jusqu'à ce que $q(t) = C^-$ soit atteint, c'est-à-dire sur la période finale $[t_-, T]$ où t_- est donné par la relation (4.6).
- ② Pour $p(T) > -\frac{(1+c^-)v(T)}{K}$ ($\sigma(T) > 0$), des trajectoires extrémales $\tau^* = \tau^+$, avec $q(t) = (1 + c^-)e^{\tau^+(T-t)} - 1$. La stratégie $\xi^* = 0$ est valide le long de ces trajectoires sur la période finale $[t_+, T]$ avec t_+ tel que $q(t_+) = C^+$ c'est-à-dire

$$m_+ = T - t_+ = \frac{1}{\tau^+} \ln \left(\frac{1 + C^+}{1 + c^-} \right) . \quad (4.18)$$

Ces trajectoires extrémales se raccordent au bord de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ avec toutefois une discontinuité de gradient étant donnée que ces variétés possèdent une infinité de normales (une infinité de composantes $p(t)$ possibles). Nous montrerons (paragraphe 4.4.1) que la trajectoire obtenue avec $\tau = \tau^-$ ($u_d(t) = Ke^{-\tau^-(T-t)}$) se raccorde au bord de la nappe $\langle \tau_d^- \rangle$, contrairement à la trajectoire obtenue avec $\tau = \tau^+$ ($u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$) qui ne se raccorde pas au bord de la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$.

La figure 4.4 représente, dans le plan (u, t) , le domaine de validité (4.16) de la nappe semi-perméable $\langle \mathcal{K} \rangle$, ainsi que celui des trajectoires extrémales se raccordant au bord de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ (les trajectoires $\tau = \tau^+$ avec $u(T) = K$ ① et $\tau = \tau^-$ avec $u(T) = K$ ②).

Remarque 4.3.5 Nous allons voir, dans le paragraphe 4.4.1, que les deux cas $t_+ < t_-$ et $t_- < t_+$ sont possibles. Cependant, il n'est pas réellement utile de représenter chacun des cas sur la figure 4.4.

Quelques relations utiles

Au vu des équations (4.6), (4.18), (4.14), et (4.15), nous avons les relations suivantes

$$e^{\tau^\varepsilon(T-t_\varepsilon)} = \frac{1 + C^\varepsilon}{1 + c^-} \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\} , \quad (4.19)$$

$$u_g(t_+) = u_+ \quad \text{et} \quad u_d(t_-) = u_- . \quad (4.20)$$

4.4 Projection dans le plan (u, t) , et cas simples

4.4.1 Projection des nappes $\langle \tau_g^- \rangle$, $\langle \tau_d^- \rangle$ et $\langle \mathcal{K} \rangle$ dans le plan (u, t)

Afin de faire l'étude géométrique minutieuse des trajectoires extrémales et singulières en dimension 4, il est utile, comme pour l'étude du call vanille avec paiement en nature, de regarder la projection des différentes nappes $\langle \tau_g^- \rangle$, $\langle \tau_d^- \rangle$ et $\langle \mathcal{K} \rangle$ dans le plan (u, t) . Cette projection est représentée sur la figure 4.5, où les paramètres utilisés sont

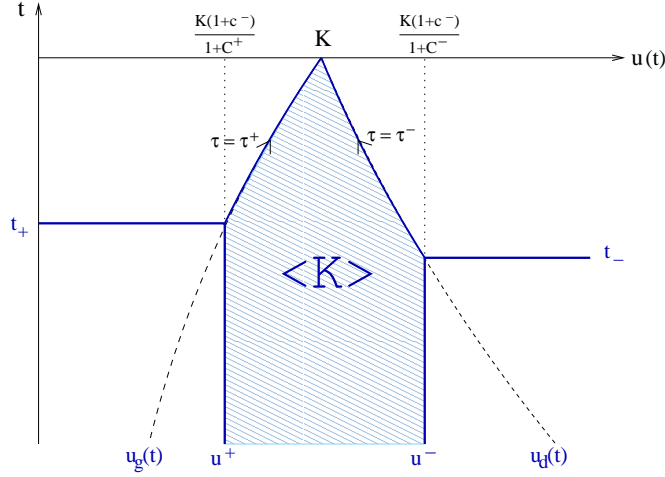


FIG. 4.4 – Domaine de validité (4.16) de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ dans le plan (u, t) .

⇒ Pour la figure de gauche : les paramètres par défaut donnés dans le paragraphe 3.4.6. On obtient alors :

$$t_+ < t_- \quad (T - t_+ = 0.3511 \text{ (8h28mn)} \quad \text{et} \quad T - t_- = 0.0701 \text{ (1h41mn)}). \quad (4.21)$$

⇒ Pour la figure de droite : les paramètres par défaut, à l'exception de $\tilde{\tau}^- = -0.02$ et $\tilde{\tau}^+ = 0.10$ (au lieu de $\tilde{\tau}^- = -0.05$ et $\tilde{\tau}^+ = 0.03$). On obtient :

$$t_- < t_+ \quad (T - t_+ = 0.1050 \text{ (2h31mn)} \quad \text{et} \quad T - t_- = 0.1745 \text{ (4h11mn)}).$$

Afin d'être le plus complet possible, on va procéder à l'analyse des deux cas $t_- < t_+$ et $t_+ \leq t_-$.

Les domaines de validité (figures 4.4 et 4.5) de chacune des trois nappes sont :

$$\begin{aligned} \langle \tau_g^- \rangle &: \{ (t, u) \mid t < t_- \text{ et } u < u_d(t) \} , \\ \langle \tau_d^- \rangle &: \{ (t, u) \mid t \geq t_- \text{ et } u \geq u_d(t) \} , \\ \langle \mathcal{K} \rangle &: \{ (t, u) \mid \max \{ u_g(t), u_+ \} \leq u(t) \leq \min \{ u_-, u_d(t) \} \} \quad (\text{formule (4.16)}) . \end{aligned}$$

Il est utile de rappeler ci-dessous leurs équations respectives (4.3), (4.4), et (4.9) :

$$\langle \tau_g^- \rangle : w = -q^-(t)v , \quad \langle \tau_d^- \rangle : w = D - q^-(t)v , \quad \langle \mathcal{K} \rangle : w = D - q^+(u)v ,$$

où les expressions de leur pente respective, $-q^-(t)$ et $-q^+(u)$, dans le plan (v, w) à (t, u) fixés, sont données par

$$q^-(t) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1 \quad \text{et} \quad q^+(u) = (1 + c^-)\frac{K}{u} - 1 . \quad (4.22)$$

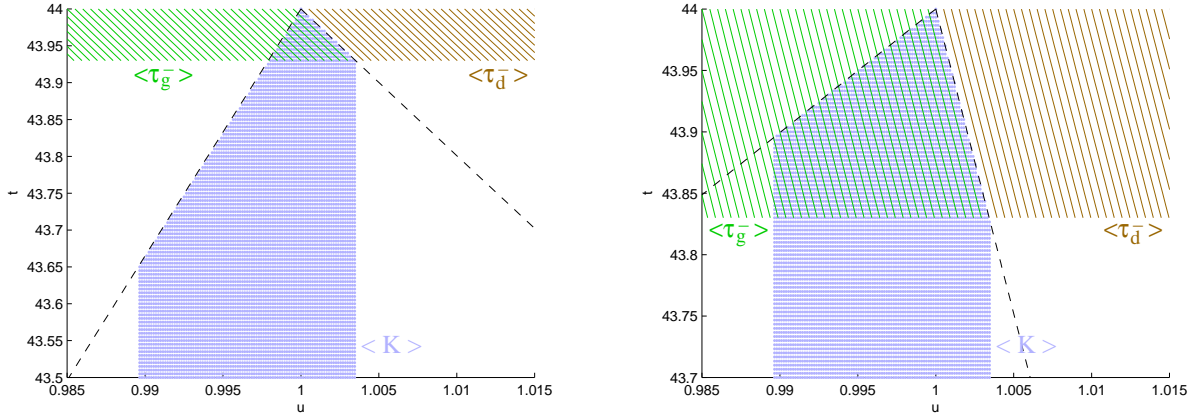


FIG. 4.5 – Projection des trajectoires des trois nappes $\langle \tau_g^- \rangle$, $\langle \tau_d^- \rangle$, et $\langle \mathcal{K} \rangle$ dans le plan (u, t) .

Pour la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ nous obtenons tout un champ de trajectoires atteignant $u(T) = K$ et remplissant entièrement le domaine (4.16) du plan (t, u) .

Propriété 4.4.1 *Remarquons que les trajectoires de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ telles que $u(t) > K$ engendrent une variation $\int_t^T \tau(s)ds < 0$ du cours entre t et T , c'est-à-dire correspondent à une baisse de la valeur du cours jusqu'à l'instant final, alors que celles telles que $u(t) < K$ correspondent à une hausse du cours jusqu'à l'instant final.*

Nous constatons que les nappes $\langle \tau_g^- \rangle$ et $\langle \mathcal{K} \rangle$ coexistent dans la région du plan (t, u)

$$\{(t, u) \mid t \in [t_-, T] \text{ et } u \in [\max\{u_g(t), u_+\}, u_d(t)]\} . \quad (4.23)$$

Cette région correspondra au domaine de validité de la variété $\mathcal{D} = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \tau_d^- \rangle$ déterminée dans le paragraphe 4.6. En ce qui concerne la nappe $\langle \tau_d^- \rangle$, celle-ci ne coexiste pas avec la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$ (puisque les deux nappes sont formées de trajectoires $\tau = \tau^-$, se raccordent à deux bords disjoints de la cible, respectivement en $u(T) \geq K$ et $u(T) < K$). La nappe $\langle \tau_d^- \rangle$ est également disjointe de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ dans le plan (t, u) , excepté le long de leur trajectoire commune $u = u_d(t)$ pour $t \geq t_-$, où ces deux nappes se joignent continûment puisqu'elle partage la même pente dans le plan (v, w) . En effet pour $u = u_d(t) = Ke^{-\tau^-(T-t)}$ nous avons

$$q^+(u_d(t)) = \frac{(1 + c^-)K}{u_d(t)} - 1 = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1 = q^-(t) \quad \forall t \geq t_- . \quad (4.24)$$

4.4.2 Deux régions triviales dans l'espace (t, u)

La projection dans le plan (u, t) , nous montre deux régions du plan (u, t) , $u < u_g(t)$ et $u \geq u_d(t)$, où respectivement, seules les nappes $\langle \tau_g^- \rangle$ et $\langle \tau_d^- \rangle$ pour $t \geq t_-$ et leurs prolongements respectifs à une nappe de saut $\langle \downarrow \rangle$ pour $t \leq t_-$ existent. Nous pouvons identifier directement la fonction Valeur

dans ces deux régions.

Dans les régions $u < u_g(t)$ et $u \geq u_d(t)$, même si le cours varie avec un τ extremal ($\tau = \tau^+$ pour $u < u_g(t)$ et $\tau = \tau^-$ pour $u \geq u_d(t)$), le cours est certain de finir respectivement en $u(T) < K$ et $u(T) \geq K$. Ainsi dans ces régions, les paiements seront certains, respectivement égaux à $M(u(T)) = 0$ et $M(u(T)) = D$. Ces paiements étant fixes, il en résulte que le trader n'a aucun intérêt à détenir de l'actif sous-jacent, car avec un investissement $v(t) > 0$ le trader s'exposerait inutilement à une baisse du cours, engendrant une perte en valeur du portefeuille alors que le paiement reste fixe. Pour que le portefeuille ($v = 0, w$) soit un portefeuille de couverture, il est nécessaire que $w(t) = w(T) \geq M(u(T))$, ainsi

$$(v, w) = (0, 0) \quad \text{pour } u < u_g(t) , \quad (4.25)$$

$$(v, w) = (0, D) \quad \text{pour } u \geq u_d(t) , \quad (4.26)$$

constituent des portefeuilles de couverture optimaux.

Nous venons de noter que dans ces régions, si $v(t) > 0$, le trader s'expose à une baisse du cours, à fortiori maximale pour $\tau = \tau^-$. Cette affirmation corrobore l'obtention de deux nappes semi-perméables de trajectoires extrémales ⁷ $\tau^* = \tau^-$, $\langle \tau_g^- \rangle$ et $\langle \tau_d^- \rangle$, de part et d'autre de $u(T) = K$ lorsque $v > 0$. Si le trader détient de l'actif sous-jacent dans son portefeuille, il est intéressant pour le trader de vendre immédiatement la totalité de cet actif pour se ramener à $v = 0$ à un coût $-C^-v$ seulement si $t < t_-$. Dans le cas contraire ($t > t_-$), où la proportion de la perte relative à ne pas être en $v = 0$ est $q^-(t) = (1 + c^-)e^{-\tau^-(T-t)} - 1 \in]C^-, 0[$, il est préférable pour le trader d'attendre la clôture. Les expressions des fonctions Valeur respectives dans ces deux régions sont ainsi :

$$W(t, u, v) = \begin{cases} -((1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1) v & \text{si } t > t_- \\ -C^- v & \text{si } t \leq t_- \end{cases} \quad \text{pour } u(t) < u_g(t) , \quad (4.27)$$

$$W(t, u, v) = \begin{cases} D - ((1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1)v & \text{si } t > t_- \\ D - C^- v & \text{si } t \leq t_- \end{cases} \quad \text{pour } u(t) \geq u_d(t) . \quad (4.28)$$

ou plus simplement, en utilisant la notation (4.7),

$$W(t, u, v) = \begin{cases} -q^-(t)v & \text{pour } u(t) < u_g(t) , \\ D - q^-(t)v & \text{pour } u(t) \geq u_d(t) , \end{cases} \quad (4.29)$$

qui elles même peuvent se regrouper sous une forme unique

$$W(t, u, v) = M(e^{\tau^+(T-t)}u) - q^-(t)v . \quad (4.30)$$

Remarque 4.4.1 Dans (4.29), on retrouve en $t = T$ la discontinuité de la fonction Valeur en $u = K$. En effet on obtient $W(T, u, v) = -c^-v(T)$ pour $u(T) < K$ et $W(T, u, v) = D - c^-v(T)$ pour $u(T) \geq K$, c'est-à-dire la fonction de coût terminal $W(T, u, v) = N(u(T), v(T)) = M(u(T)) - c^-v(T)$ où $M(u)$

⁷L'invariance du paiement par rapport à $u(T)$ se traduit par $p(T) = 0$ et donc le τ le plus dangereux (3.19) minimise $(1 + c^-)v(T)\tau$ avec $v(T) \geq 0$, ce qui conduit à $\tau = \tau^-$.

est discontinue en $u = K$.

4.5 Région d'intérêt pour un call digital et plan de l'analyse

4.5.1 Région d'intérêt

Compte tenu des solutions triviales obtenues dans le paragraphe 4.4.2, nous pouvons restreindre l'analyse à la région du plan (t, u)

$$\Lambda = \{(t, u) \mid u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)} \leq u(t) \leq u_d(t) = Ke^{-\tau^-(T-t)}\}, \quad (4.31)$$

appelée « région d'intérêt » et représentée sur la figure 4.6.

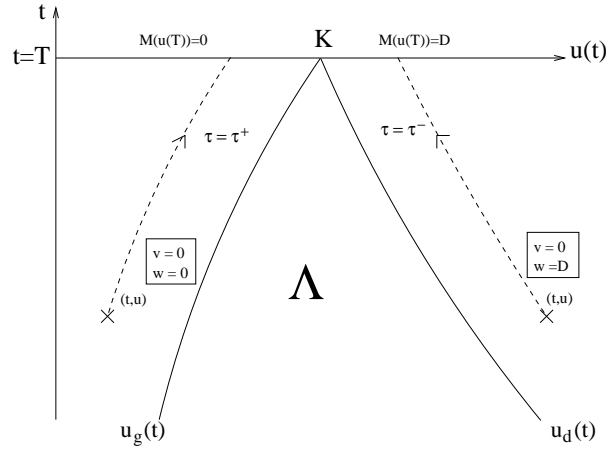


FIG. 4.6 – Région d'intérêt Λ dans le plan (u, t) pour un call digital.

Remarquons que ce domaine Λ correspond également au domaine de contrôlabilité à K , c'est-à-dire à l'ensemble des couples (t, u) pour lesquels il existe un contrôle du marché $\tau(\cdot)$ entre t et T tel que le cours de l'actif puisse atteindre $u(T) = K$. Par conséquent nous notons également

$$\Lambda = \{(t, u) \mid \exists \tau(\cdot) \in \Omega : ue^{\int_t^T \tau(s)ds} = K\}. \quad (4.32)$$

4.5.2 Les différentes variétés de dimension 2 $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ à caractériser et plan de l'analyse

Nous allons procéder maintenant, dans la région d'intérêt Λ , à l'analyse minutieuse des trajectoires dans l'espace d'état $\bar{Y} = (t, u, v, w)$ de dimension 4, en distinguant les deux cas $t_- < t_+$ et $t_+ < t_-$ aussi plausibles l'un que l'autre. Comme pour l'étude précédente (le call vanille), nous allons découper l'étude en différentes régions du plan (t, u) , et nous allons particulièrement nous intéresser à la variété de dimension 2, paramétrée en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u) = W(t, u, \check{v}(t, u))$. Cette variété correspond à l'intersection de deux hyper-surfaces semi-perméables, intervenant dans la construction de la barrière composite, à

savoir dans cette étude, l'intersection de la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$ (ou de son prolongement à une nappe de saut) avec la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ (ou son prolongement à une nappe de saut).

Les différentes nappes et la formule de représentation de W

Pour $t < t_-$ où $q^-(t) < C^-$, la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$ se trouvera remplacée par une nappe de saut $\langle \downarrow \rangle$ avec $q^- = C^-$. En ce qui concerne la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ où $q^+(u) \in [C^-, C^+]$ pour $u \in [u_+, u_-]$, celle-ci se trouvera remplacée, respectivement, par une nappe de saut $\langle \uparrow \rangle$ avec $q^+ = C^+$ pour $(t, u) \in \Lambda \cap \{u < u_+\}$, et par une nappe de saut $\langle \downarrow \rangle$ avec $q^+ = C^-$ pour $(t, u) \in \Lambda \cap \{u > u_-\}$. Ainsi, dans la région d'intérêt Λ (4.31), il est commode d'introduire les fonctions

$$q^-(t) = \max\{(1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1, C^-\} \quad \text{et} \quad q^+(u) = \min\left\{\max\{(1 + c^-)\frac{K}{u} - 1, C^-\}, C^+\right\}$$

conduisant à

$$q^-(t) = \begin{cases} (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1 & \text{si } t \geq t_- \quad (\text{nappe } \langle \tau_g^- \rangle) \\ C^- & \text{si } t \leq t_- \quad (\text{nappe } \langle \downarrow \rangle) \end{cases}, \quad (4.33)$$

$$q^+(u) = \begin{cases} C^+ & \text{si } u \leq u_+ \quad (\text{nappe } \langle \uparrow \rangle) \\ (1 + c^-)\frac{K}{u} - 1 & \text{si } u_+ \leq u \leq u_- \quad (\text{nappe } \langle \mathcal{K} \rangle) \\ C^- & \text{si } u \geq u_- \quad (\text{nappe } \langle \downarrow \rangle) \end{cases}. \quad (4.34)$$

Comme dans l'analyse du call vanille (chapitre 3), nous allons raccorder des nappes semi-perméables affines en v (une des nappes de l'équation (4.34) avec une des nappes de l'équation (4.33)). Par conséquent, dans la région d'intérêt Λ , la frontière de la zone de capture \mathbb{C}_t (3.12), c'est-à-dire le graphe de la fonction Valeur W , restera décrit par la formule de représentation (3.147)

$$W(t, u, v) = \check{w}(t, u) + q^\varepsilon(t, u)(\check{v}(t, u) - v) = Q^\varepsilon(t, u)\check{V}(t, u) - q^\varepsilon(t, u)v \quad \text{avec } \varepsilon = \text{signe}(\check{v}(t, u) - v), \quad (4.35)$$

et où $q^-(t, u) = q^-(t)$ et $q^+(t, u) = q^+(u)$ sont donnés respectivement par (4.33) et (4.34).

Remarque 4.5.1 *Remarquons qu'en dehors de la région d'intérêt Λ , la fonction Valeur (4.29) peut être mise sous la forme (4.35), en posant $(\check{v}, \check{w}) = (0, 0)$ pour $u < u_g(t)$ (la relation (4.25)) et $(\check{v}, \check{w}) = (0, D)$ pour $u < u_d(t)$ (la relation (4.26)). Comme $v(t) \geq 0 = \check{v}$, on a $\varepsilon = +$, et ainsi (4.29) et (4.35) coïncident bien. Ces extensions de $\check{v}(t, u)$ et $\check{w}(t, u)$ en dehors de Λ nous permettent d'avoir une formule de représentation unique (4.35) de la fonction Valeur, valable pour tout $(t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$.*

Il nous reste à caractériser les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$.

Les différentes variétés

La dépendance en u du domaine de validité de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ fait apparaître dans la région Λ , un découpage des différentes variétés de dimension 2, \mathcal{D} , \mathcal{E} , \mathcal{F} , paramétrées $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u)) =$

$W(t, u, \check{v}(t, u))$, qui ne depend plus exclusivement de t comme pour le découpage de l'étude du call vanille, donné dans le paragraphe 3.5.4. Compte tenu des fonctions (4.33) et (4.34), ce découpage, représenté sur la figure 4.7, est le suivant

⇒ une Dispersion, $\mathcal{D} = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle$, dans la région (4.23)

$$\{(t, u) \mid t \geq t_- \text{ et } u \in [\max\{u_g(t), u_+\}, u_d(t)]\} \text{ où } C^- < q^\varepsilon < C^+, \varepsilon \in \{+, -\}. \quad (4.36)$$

⇒ une jonction \mathcal{E} quivoque, $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle$, dans la région

$$\{(t, u) \mid t \in [t_-, t_+] \text{ et } u \in [u_g(t), u_+]\} \text{ où } q^+ = C^+ \text{ et } C^- < q^- < C^+. \quad (4.37)$$

⇒ une jonction \mathcal{E} quivoque, $\mathcal{E}^- = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$, dans la région

$$\{(t, u) \mid t \leq t_- \text{ et } u \in [\max\{u_+, u_g(t)\}, u_-]\} \text{ où } C^- < q^+ < C^+ \text{ et } q^- = C^-. \quad (4.38)$$

⇒ une variété \mathcal{F} ocale, $\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$, dans la région

$$\{(t, u) \mid t \leq t_- \text{ et } u \in [u_g(t), u_+]\} \text{ où } q^\varepsilon = C^\varepsilon, \varepsilon \in \{+, -\}. \quad (4.39)$$

⇒ une variété notée \mathcal{C} : « $\langle \downarrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ », dans la région

$$\{(t, u) \mid t \leq t_- \text{ et } u \in [u_-, u_d(t)]\} \text{ où } q^\varepsilon = C^-, \varepsilon \in \{+, -\}. \quad (4.40)$$

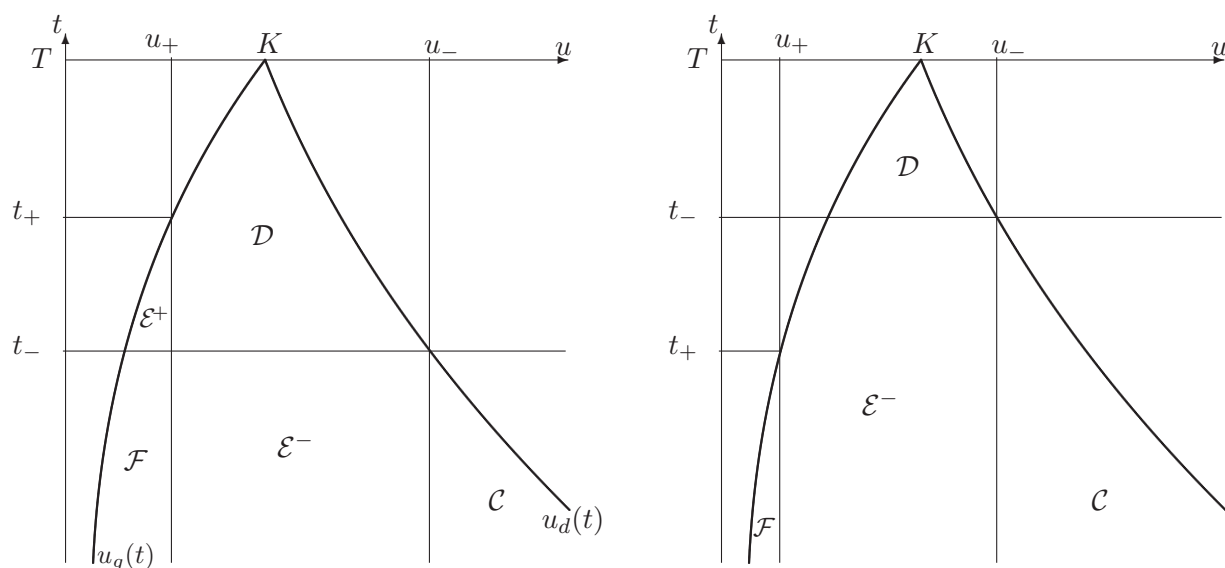


FIG. 4.7 – Une vue dans le plan (u, t) des différentes variétés singulières de dimension 2 à caractériser.

Plan de l'analyse

On constate que l'analyse va s'avérer plus riche celle du call vanilla, et que notamment les deux « types » de jonctions équivoques, \mathcal{E}^+ et \mathcal{E}^- , apparaissent dans le cas où $t_- < t_+$. Cette analyse va s'effectuer de proche en proche, « variété par variété », en respectant l'ordre d'intégration en temps rétrograde. Notons que la région $u \in [u_-, u_d(t)]$ $q^\varepsilon = C^-$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, correspond au cas où les deux nappes $\langle \mathcal{K} \rangle$ et $\langle \tau_g^- \rangle$ sont remplacées par deux nappes de saut négatif en v (avec $q = C^-$), donc parallèles dans le plan (v, w) . Ainsi l'intersection $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u) = W(t, u, \check{v}(t, u)))$, « $\langle \downarrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ » des deux nappes est vide (noté \mathcal{C} sur la figure 4.7), et la frontière de la zone de capture \mathbb{C}_t correspondra trivialement à celle de des nappes situé au dessus de l'autre (par rapport à l'axe des w). Ce cas « trivial » sera examiné à part, dans le paragraphe 4.10.

4.6 La dispersion $\mathcal{D} = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle$

4.6.1 Les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur \mathcal{D}

La région (4.36) du plan (t, u) correspond au domaine où les deux nappes $\langle \tau_g^- \rangle$ et $\langle \mathcal{K} \rangle$ d'équations respectives (4.3) et (4.9), coexistent. Ces deux nappes, candidates à faire partie de la partie \mathcal{C}^1 de la barrière du jeu, s'intersectent le long d'une variété $\mathcal{D} = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle$ de dimension 2 caractérisée par $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ avec

$$\check{V}(t, u) = \begin{pmatrix} \check{v}(t, u) \\ \check{w}(t, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -q^-(t) \end{pmatrix} \frac{D}{q^+(u) - q^-(t)}. \quad (4.41)$$

La barrière du jeu, c'est-à-dire la frontière de la zone de capture \mathbb{C}_t (3.12) correspondant au graphe de la fonction Valeur W , est une barrière composite formée du max en w des deux nappes. Une illustration dans le plan (v, w) (à (t, u) fixés) est représentée sur la figure 4.8.

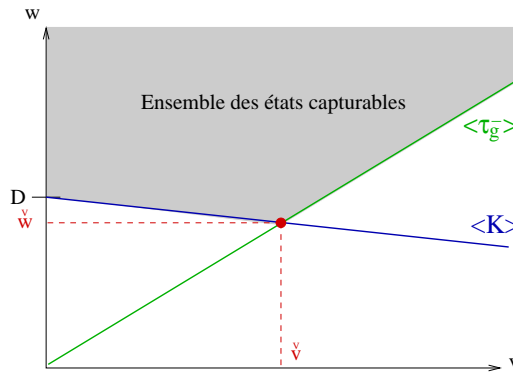


FIG. 4.8 – Représentation dans l'espace (v, w) , des nappes de dimension 3 $\langle \mathcal{K} \rangle$ and $\langle \tau_g^- \rangle$, de leur intersection (variété \mathcal{D} de dimension 2), et de l'ensemble des états capturables.

Ainsi, dans la région (4.36), la fonction Valeur donnée par $W(t, u, v) = \max \{D - q^+(u)v, -q^-(t)v\}$

se réécrit

$$W(t, u, v) = \begin{cases} D - q^+(u)v & \text{si } v \leq \check{v}(t, u) \\ -q^-(t)v & \text{si } v \geq \check{v}(t, u) \end{cases} . \quad (4.42)$$

Cette fonction Valeur (4.42) présente une discontinuité de gradient en $v = \check{v}(t, u)$, et peut être directement réécrite sous la forme (4.35).

Interprétation financière 4.6.1 *Nous pouvons utiliser un argument direct pour caractériser, pour tout couple (t, u) , la couverture dans la région (4.36) où $\xi^* = 0$. Comme $v(t) \geq 0$, avec $M(u) = D \cdot \Upsilon(u - K)$ (un échelon d'Heaviside d'amplitude D en $u = K$), il apparaît que dans la région d'intérêt Λ les deux « pires » (les deux plus dangereuses) trajectoires pour le trader sont*

➤ $\tau = \tau^-$ de t à T pour laquelle le risque pour le trader est de finir avec un portefeuille de valeur négative après s'être affranchi des coûts de clôture $-c^-v$.

➤ Toute⁸ fonction $\tau(\cdot)$ entre t et T engendrant une trajectoire finissant exactement en $u(T) = K$. Pour le trader le risque est alors de finir avec un portefeuille de valeur inférieure à $N(u, v) = D - c^-v$. Nous notons $\Omega_K(t, u)$ l'ensemble de ces fonctions $\tau(\cdot)$, pour tout état initial $(t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$. Ainsi

$$\Omega_K(t, u) = \{ \tau(\cdot) \in \Omega \mid u e^{\int_t^T \tau(s) ds} = K \} ,$$

et nous remarquons que

$$\Lambda = \{ (t, u) \mid \Omega_K(t, u) \neq \emptyset \} . \quad (4.43)$$

Les autres trajectoires sont moins dangereuses pour le trader (voir l'interprétation financière 4.3.4).

En accord avec l'intégration en temps rétrograde sous la stratégie $\xi^* = 0$ (3.37), la condition de couverture $w(T) \geq M(u(T)) - c^-v(T)$ se réécrit

$$w(t) + ((1 + c^-)e^\theta - 1)v(t) \geq M(u(T)) \quad (4.44)$$

Contre $\tau(s) = \tau^- \forall s \in [t, T]$, (c'est-à-dire $e^\theta = e^{\tau^-(T-t)}$), la condition de couverture (4.44) est

$$w(t) + ((1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1)v(t) \geq 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad w(t) + q^-(t) \geq 0 . \quad (4.45)$$

La frontière de la condition de couverture contre $\tau^*(s) = \tau^- \forall s \in [t, T]$, correspond à l'hypersurface semi-perméable (nappe) $\langle \tau_g^- \rangle$ d'équation (4.3).

Contre une trajectoire de prix $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$, c'est-à-dire $e^\theta = \frac{u(T)}{u(t)} = \frac{K}{u(t)}$, la condition de couverture (4.44) devient

$$w(t) + ((1 + c^-)\frac{K}{u(t)} - 1)v(t) \geq D \quad \text{c'est-à-dire} \quad w(t) + q^+(u) \geq D . \quad (4.46)$$

⁸Remarquons que puisque le trader ne fait aucune transaction durant cette période finale du jeu $[t_M, T]$, toutes les trajectoires qui finissent exactement $u(T) = K$ peuvent être considérées comme équivalentes. Ce qui est important est la variation relative globale $\theta = \int_t^T \tau(s) ds$ du cours de l'actif sous-jacent entre les deux instant t et T .

La frontière de la condition de couverture contre $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$ est la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ d'équation (4.9).

Par conséquent pour chaque (t, u) nous obtenons deux contraintes affines dans le plan (v, w) , (4.45) et (4.46), et dont les frontières respectives sont les nappes $\langle \tau_g^- \rangle$ et $\langle \mathcal{K} \rangle$. Ces deux droites à (t, u) fixés s'intersectent au point de coordonnées

$$(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u)) = \left(\frac{D}{q^+(u) - q^-(t)}, -q^-(t)\check{v}(t, u) \right)$$

Pour $\{(t, u) \mid t \in [t_-, T] \text{ et } u \in [\max\{u_g(t), u_+\}, u_d(t)]\}$ (4.36), ce point décrit naturellement la variété \mathcal{D} de dimension 2. L'ensemble des états capturables, situé au dessus des ces deux contraintes dans le plan (v, w) (au dessus des deux nappes $\langle \tau_g^- \rangle$ et $\langle \mathcal{K} \rangle$ par rapport à l'axe des w), conduit à la fonction Valeur (4.42) avec q^+ et q^- donnés par (4.22), et $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ donnés par (4.41).

Remarque 4.6.2 Le danger $\tau = \tau^-$ existe toujours à l'intérieur et à l'extérieur de la région d'intérêt pour $t \geq t_-$ (ce qui correspond aux nappes $\langle \tau_g^- \rangle$ et $\langle \tau_d^- \rangle$ et au bord droit de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ où $\tau^* = \tau^-$), alors l'ensemble $\Omega_K(t, u)$ est vide en dehors de la région d'intérêt (équation (4.43)), où la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ n'existe pas. Par conséquent en dehors de Λ nous avons $\tau^*(s) = \tau^- \forall s \in [t, T]$ pour unique commande optimale du marché, ce qui conduit aux formules (4.27) et (4.28) pour $t \geq t_-$. Nous remarquons également que dans le cas où $u(t) > K$, les évolutions les plus dangereuses correspondent chacune à une décroissance du cours de l'actif sous-jacent entre t et T . Il en découle que le trader n'a aucun intérêt à avoir un investissement $v(t) > 0$ en actif sous-jacent dans son portefeuille (il s'expose au risque que le cours baisse).

4.6.2 Analyse des résultats dans la région comprenant \mathcal{D}

Dans la région (4.36), la fonction valeur est donnée par (4.35) avec q^+ et q^- donnés par (4.22), et $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ donnés par (4.41). La fonction Valeur W est donc continue à l'intérieur de la région (4.36).

Composition optimale du portefeuille

La pente $-q^+(u)$ (4.22) de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ dans le plan (v, w) étant fonction de u , la « forme » de la frontière de la zone de capture à (t, u) fixée (figure 4.8) diffère suivant le signe de $-q^+(u)$ à (t, u) fixés. Les différents cas sont représentés sur la figure 4.9. Dans le cas où $u(t) = u_d(t)$, nous avons la relation (4.24), et par conséquent \check{v} et \check{w} tendent chacun vers $+\infty$. Nous étudierons séparément ce cas comme un cas limite. Notons que la valeur $u = K(1 + c^-)$ pour laquelle $q^+ = 0$, satisfait

$$u_+ = \frac{K(1 + c^-)}{1 + C^+} \leq K(1 + c^-) \leq K .$$

Désignons par $w^*(t, u)$ la plus petite valeur d'un portefeuille de couverture ⁹, et $v^*(t, u)$ l'investis-

⁹qui se trouve a fortiori sur la frontière de l'ensemble des état capturables.

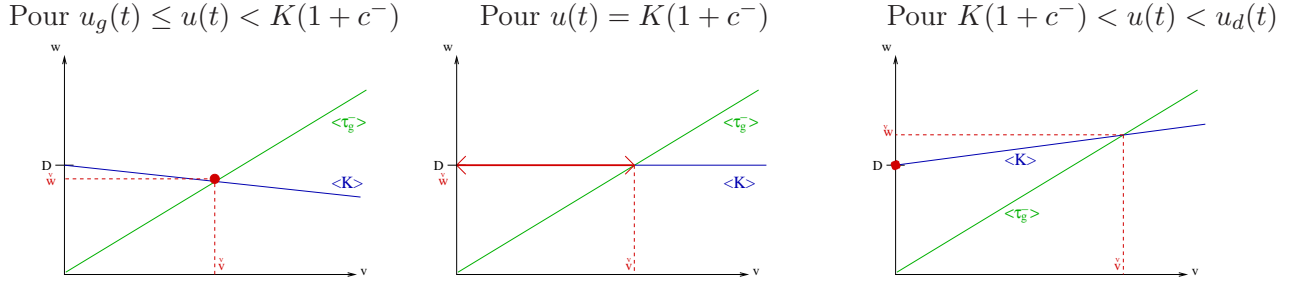


FIG. 4.9 – Ensemble des états capturables : les différents cas dans la région (4.36), suivant le signe de $q^+(u)$.

sement en actif sous-jacent correspondant à ce portefeuille. En se servant des formules (4.25) et (4.26) en, dehors de la région d'intérêt Λ , et de la figure (4.9) dans la région (4.36), nous en concluons que pour la période finale du jeu (c'est-à-dire aussi longtemps que $\xi^* = 0$), le portefeuille de couverture le meilleur marché est

⇒ Pour $u(t) < u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$: $w^*(t, u) = 0$ avec $v^*(t, u) = 0$.

⇒ Pour $\max\{u_g(t), u_+\} \leq u(t) < K(1 + c^-)$:

$$w^*(t, u) = \check{w}(t, u) = \frac{-Dq^-(t)}{q^+(t, u) - q^-(t)} \quad \text{avec} \quad v^*(t, u) = \check{v}(t, u) = \frac{D}{q^+(t, u) - q^-(t)}.$$

⇒ Pour $u(t) = K(1 + c^-)$: $w^*(t, u) = D$ avec $v^*(t, u) \in [0, \check{v}(t, K(1 + c^-))] = [0, \frac{D}{-q^-(t)}]$.

⇒ Pour $u(t) > K(1 + c^-)$: $w^*(t, u) = D$ avec $v^*(t, u) = 0$.

Interprétation financière 4.6.3 Nous pouvons interpréter la composition $(v^*(t, u), w^*(t, u))$ obtenue en $u(t) = K(1 + c^-)$. Si $u(t) = K(1 + c^-)$ (c'est-à-dire $q^+ = 0$), les deux contrôles optimaux du marché sont $\tau(s) = \tau^- \forall s \in [t, T]$, et tout $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$, c'est-à-dire tels que $e^\theta = e^{\int_t^T \tau(s) ds} = \frac{K}{u(t)} = \frac{1}{1+c^-}$. La relation $e^\theta = \frac{1}{1+c^-}$ signifie que la variation du cours de l'actif sous-jacent est la même que celle des coûts du montant des coûts de clôture $-c^-v$. Par conséquent, la valeur du portefeuille après s'être affranchi des coûts de clôture est indépendante de v pour une variation $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$. Pour se convaincre de cette affirmation, il suffit de regarder la condition de couverture (3.67) pour $e^\theta = \frac{1}{1+c^-}$. Elle devient $w(T) \geq M(u(T)) = D$ indépendamment de v . Par conséquent, le montant de l'investissement en actif sous-jacent importe peu contre le danger $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$, mais il est nécessaire d'avoir $w(t) \geq D = w^*$. Tout montant $v \geq 0$ est optimal à condition qu'il ne soit pas trop grand ($0 \leq v^*(t, u) \leq \check{v}(t, u)$) afin de permettre au trader de rester couvert contre l'autre danger $\tau(s) = \tau^- \forall s \in [t, T]$. En effet, une décroissance du cours de l'actif pourrait conduire à $w(T) < 0$ si le montant de l'investissement en actif v est trop important ($v > \check{v}$).

La figure 4.10 représente les coupes en fonction de u du portefeuille optimal de couverture $(v^*(u), w^*(u))$ à l'instant $t = (t_M + T)/2 \in [t_M, T]$ fixé ¹⁰ (on rappelle que $t_M = \max\{t_-, t_+\}$). Les paramètres utilisés

¹⁰On a choisi un instant tel que $\xi^* = 0 \forall u$, afin de pour pouvoir représenter $(v^*(u), w^*(u))$ pour tout u .

sont les paramètres par défaut du paragraphe 3.4.6 .

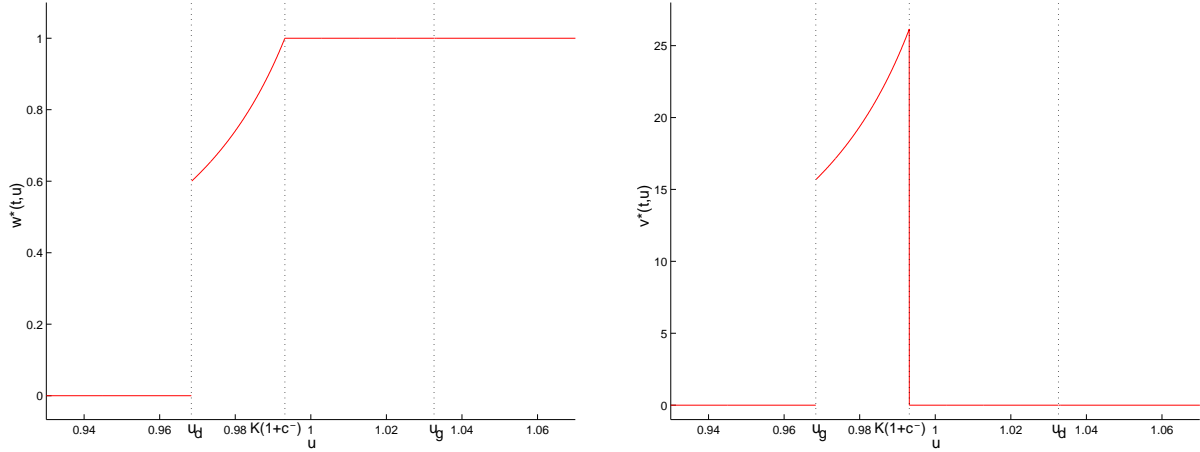


FIG. 4.10 – Portefeuille de couverture le meilleur marché $w^*(u)$ et investissement $v^*(u)$ correspondant sous la stratégie $\xi = 0$.

Nous remarquons (et nous le vérifions sur la figure 4.10) que le montant du portefeuille de couverture le meilleur marché $w^*(t, u)$ sous la stratégie $\xi^* = 0$ est :

- ⇒ discontinu le long du bord gauche $u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$ du domaine Λ pour $t \geq t_+$ (i.e. tant que $\xi^* = 0$), avec un investissement correspondant en actif sous-jacent $v^*(t, u)$ discontinu.
- ⇒ continu le long de $u = K(1 + c^-)$ mais avec un $v^*(t, u)$ correspondant discontinu.

Une coupe des fonctions $(\check{v}(u), \check{w}(u))$.

La figure 4.11 représente les coupes des fonctions $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ en fonction de u à l'instant fixé $t = (t_M + T)/2 \in [t_M, T]$, où $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ est donné par (4.41) dans la région Λ , et avec les extensions discontinues de la remarque 4.5.1 en dehors de Λ .

Discutons à présent de la fonction Valeur obtenue sur les bords de la région d'intérêt Λ (4.31).

Le cas limite où $u(t) = u_d(t) = Ke^{-\tau^-(T-t)}$

Sur le bord droit $u_d(t)$ de la région d'intérêt Λ , nous avons la relation (4.24). Il en résulte, dans la formule explicite (4.41), que l'intersection $\langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle$ devient $(\check{v}, \check{w}) \rightarrow (+\infty, +\infty)$ et donc que $\varepsilon = +$ dans la formule de représentation (4.35), où $Q^+ \check{V} = D$ par appartenance à la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$. La fonction Valeur (4.35) devient donc

$$W(t, u, v) = D - q^+(u)v = D - q^-(t)v, \quad (4.47)$$

compte tenu de la relation (4.24).

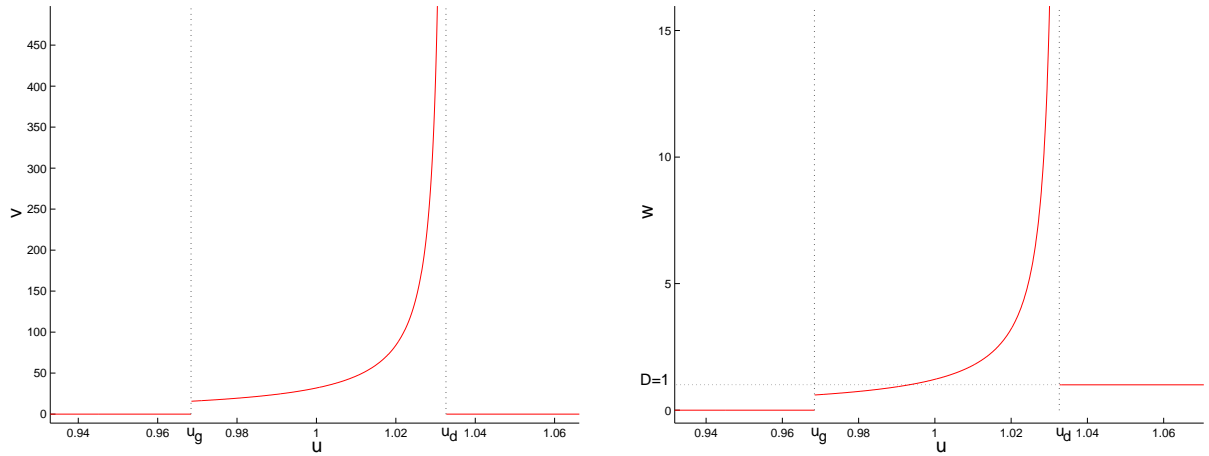


FIG. 4.11 – Les fonctions $(\check{v}(u), \check{w}(u))$ à l'instant $t = (t_M + T)/2 \in [t_M, T]$ fixé.

Remarque 4.6.4 *En se servant de la formule explicite (4.41), on retrouve naturellement*

$$Q^+ \check{V} = (q^+ - 1) \begin{pmatrix} q^- \\ 1 \end{pmatrix} \frac{D}{q^+ - q^-} = D.$$

De même, en utilisant l'expression de la fonction Valeur (4.42) avec ici la relation (4.24) et $\check{v} = \infty$, on retrouve l'expression (4.47).

Interprétation financière 4.6.5 *La relation (4.24) montre que le contrôle du marché $\tau \in \Omega_K(t, u)$ qui conduit en $u(T) = K$ devient unique et égal à $\tau = \tau^-$ de t à T . Par conséquent les conditions de couverture (4.45) et (4.46), et donc les nappes $\langle \tau_g^- \rangle$ et $\langle \mathcal{K} \rangle$, deviennent, à (t, u) fixés, deux droites parallèles¹¹ dans le plan (v, w) comme cela est illustré sur la figure 4.12.*

La couverture consiste alors à satisfaire la contrainte unique (4.46) avec ici $q^+(u) = q^-(t)$. Par conséquent la fonction Valeur (frontière de l'ensemble admissible \mathbb{C}_t) devient

$$W(t, u, v) = D - ((1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1)v = D - q^-(t)v \quad \forall t \in [t_-, T].$$

L'expression de la fonction Valeur (4.47) est la même que celle obtenue dans la région $u(t) \geq u_d(t)$ (formule (4.28)), où cette expression correspond à l'équation de la nappe $\langle \tau_d^- \rangle$. Par conséquent la fonction Valeur $W(t, u, v)$ est continue le long du bord droit $u_d(t)$ du domaine Λ pour tout $t \geq t_-$.

Interprétation financière 4.6.6 *Ce cas limite provient du fait que, si $\tau = \tau^-$ de t à T , on aura $u(T) = K$, première valeur de u à partir de laquelle le paiement devient $M(u(T)) = D$ et non plus 0. A partir de cette valeur de u , la condition de couverture (4.45), donc la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$, cesse d'exister*

¹¹ce qui est en accord avec $(\check{v}, \check{w}) \rightarrow (+\infty, +\infty)$.

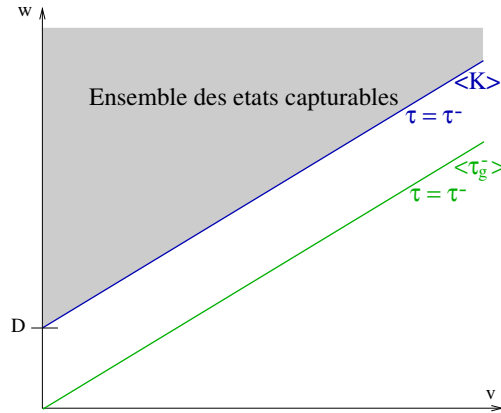


FIG. 4.12 – Ensemble des états capturables pour $u(t) = u_d(t) = Ke^{-\tau^-(T-t)}$ quand $t \in [t_-, T]$

au profit de la nappe $\langle \tau_d^- \rangle$ pour les u plus grands. Cette trajectoire fait également partie du bord de la nappe $\langle K \rangle$ où la condition de couverture est donnée par l'unique contrainte (4.46) avec $q^+(u) = q^-(t)$. Ces affirmations sont en accord avec les domaines de validité des différentes nappes (se reporter au paragraphe 4.4.1).

Remarque 4.6.7 Par la remarque (4.5.1), les formules (4.28) et (4.35) coïncident si nous choisissons $(\check{v}, \check{w}) = (0, D) = (v^*(t, u), w^*(t, u))$ au lieu de $+\infty$ le long de $u(t) = u_d(t) = Ke^{-\tau^-(T-t)}$. L'expression de la fonction Valeur à droite du domaine Λ peut aussi être donnée par (4.35) mais avec $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ discontinu le long de la trajectoire $u(t) = u_d(t) = Ke^{-\tau^-(T-t)}$, tandis que la fonction Valeur reste elle continue le long de $u_d(t)$ pour $t \geq t_-$.

La limite lorsque $u(t) \rightarrow u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$

A l'instant T , la fonction Valeur (dont l'épigraphe est l'ensemble des états capturables) est discontinue en $u(T) = K$. La fonction Valeur (4.35) avec (4.41) est continue à l'intérieur et sur le bord droit $u_d(t)$ (voir le paragraphe 4.6.2) de la région d'intérêt Λ pour $t \in [t_M, T]$, mais également à l'extérieur (à gauche et à droite en u) de la région d'intérêt où elle est respectivement de la forme (4.27) et (4.28). Intéressons nous à présent à la fonction Valeur obtenue de part et d'autre du bord gauche de la région d'intérêt Λ .

Proposition 4.6.1 La discontinuité de la fonction Valeur en $u(T) = K$ se propage pour $t \in [t_M, T]$ le long de la trajectoire $u(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$ pour $v < \check{v}(t, u)$ (c'est-à-dire pour $\varepsilon = 1$ dans la formule (4.35))¹².

¹²Dans cette proposition, nous nous limitons au cas où $t \geq t_M$, afin de nous pouvoir s'appuyer dans cette preuve sur l'existence le long de $u_g(t)$, de la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$ pour $t \geq t_-$, ainsi que de la trajectoire extrémaux $\tau = \tau^+$ de $\langle K \rangle$ pour $t \geq t_+$ (voir la figure 4.16).

Preuve de la proposition 4.6.1 Pour $u < u_g(t)$, la fonction Valeur est donnée par $W(t, u, v) = -q^-(t)v(t)$ (4.27) avec pour commande optimale du marché $\tau^* = \tau^-$. La condition (4.46) n'apparaît pas dans cette région puisque $u(T) = K$ ne peut être atteint (la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ n'existe pas). La seule condition de couverture est (4.45) et le graphe de la fonction Valeur (4.27) est la frontière de cette condition de couverture, c'est-à-dire la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$ d'équation (4.3).

Dans la région d'intérêt Λ incluant $u_g(t)$, la fonction Valeur est donnée pour $t \in [t_M, T]$ par (4.35) avec (4.41). Nous devons ainsi distinguer deux cas suivant que $\varepsilon = -1$ ($v \geq \check{v}$, $\tau^* = \tau^-$) ou $\varepsilon = +1$ ($v < \check{v}$ et $\tau^*(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$ qui devient unique le long de $u_g(t)$ et correspond à $\tau^* = \tau^+$ de t à T). Dans le cas $\varepsilon = -1$, la fonction Valeur correspondante est

$$W(t, u, v) = \check{w}(t, u) + q^-(t)(\check{v}(t, u) - v(t)) = -q^-(t)v(t)$$

puisque $\check{w}(t, u) = -q^-(t)\check{v}(t, u)$ (relation (4.41)). Par conséquent pour $v \geq \check{v}(t, u)$, la fonction Valeur est continue le long de $u(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$. Nous pouvons expliquer ce résultat par le fait que les contrôles optimaux du marché et la stratégie du trader sont les mêmes ($\tau^* = \tau^-$, $\xi^* = 0$) de part et d'autre de $u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$. Dans le cas $\varepsilon = +1$, la fonction Valeur est donnée par $W(t, u, v) = \check{w}(t, u) + q^+(t, u)(\check{v}(t, u) - v(t))$. En utilisant (4.41) on obtient

$$W(t, u, v) = (q^+(t, u) - q^-(t))\check{v}(t, u) - q^+(t, u)v(t) = D - q^+(t, u)v(t).$$

Cette dernière expression de $W(t, u, v)$ est celle obtenue à l'aide de la formule (4.42). On en déduit que pour $v < \check{v}(t, u)$ la différence entre les fonctions Valeurs de chaque côté de la trajectoire $u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$ dans le plan (u, t) est donnée par

$$\begin{aligned} \delta W(t, u) &= [(q^+(t, u) - q^-(t))\check{v}(t, u) - q^+(t, u)v(t)] - [-q^-(t)v(t)] \\ &= (q^+(t, u) - q^-(t))(\check{v}(t, u) - v(t)) = (1 + c^-)(e^{\tau^+(T-t)} - e^{\tau^-(T-t)})(\check{v}(t, u) - v(t)) \end{aligned}$$

puisque $q^+(t, u) = (1 + c^-)\frac{K}{u(t)} - 1 = (1 + c^-)e^{\tau^+(T-t)} - 1$ le long de $u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$.

Cette différence $\delta W(t, u)$ est le produit de trois termes strictement positifs, et ainsi elle même strictement positive. La fonction Valeur est donc discontinue le long de $u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$ pour $v < \check{v}(t, u)$, et cette discontinuité correspond à une augmentation de la Valeur lorsque u augmente. ■

Remarque 4.6.8 Par la remarque (4.5.1), la fonction Valeur (4.27) pour $u < u_g(t)$ peut se représenter à l'aide de la formule de représentation (4.35) si nous choisissons $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u)) = (0, 0)$. Toutefois, pour $u = u_g(t)$, $t \leq t_+$, il nous faut noter qu'à la fois les valeurs $\check{v}(t, u)$, $\check{w}(t, u)$, et la fonction Valeur $W(t, u, v)$, sont discontinues le long de la trajectoire $u_g(t)$ (voir la formule (4.41) ou la figure 4.11 pour (\check{v}, \check{w}) et la proposition 4.6.1 pour W).

Une justification de la discontinuité de W le long de $u_g(t)$

Dans le plan (t, u) , de part et d'autre de la région d'intérêt Λ , l'unique commande optimale du marché est $\tau(s) = \tau^-$ pour tout $s \in [t, T]$ (voir la remarque 4.6.2). A l'intérieur de la région d'intérêt

Λ , la commande optimale du marché peut être soit $\tau(s) = \tau^-$, soit une commande $\tau(\cdot)$ qui atteint $u(T) = K$ (une commande $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$).

Pour tout (t, u) le long de la trajectoire $u(t) = u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$, il existe une unique commande du marché $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$. Cette trajectoire correspond à $\tau = \tau^+$ de t à T . Ainsi un contrôle optimal du marché $\tau \in \Omega_K(t, u)$ apparaît soudainement le long de $u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$, pour lequel le paiement devient $M(u(T)) = D$. Cette commande du marché nécessite alors un portefeuille de couverture strictement positif pour se couvrir contre cette possibilité (il n'existe pas de portefeuille de couverture avec $w < \dot{w}(t, u)$ le long de $u_g(t)$). L'apparition soudaine de ce contrôle optimal (illustré sur la figure 4.14) justifie l'apparition de la discontinuité de W le long de $u_g(t)$.

La figure 4.13 permet de visualiser les variations relatives des deux contrôles optimaux $\tau^*(s) = \tau^- \forall s \in [t, T]$ et $\tau^*(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$, dans le plan (u, t) , à un instant $t \geq t_M$ fixé (où $\xi^* = 0 \forall u$). Pour une commande $\tau^*(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$, nous avons noté τ_K cette variation relative qui, tant que $\xi^* = 0$, est donnée pour tout $(t, u) \in \Lambda$ par

$$\tau_K = \frac{1}{T-t} \int_t^T \tau(s) ds = \frac{1}{T-t} \ln \left(\frac{K}{u(t)} \right) .$$

La discontinuité de la fonction Valeur n'apparaît pas à l'intérieur de Λ par continuité en u de τ_K , ni sur le bord droit $u_d(t)$ de la région d'intérêt, puisque dans ce cas $\tau^*(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$ est unique et correspond à l'autre commande optimale du marché $\tau^*(s) = \tau^- \forall s \in [t, T]$.

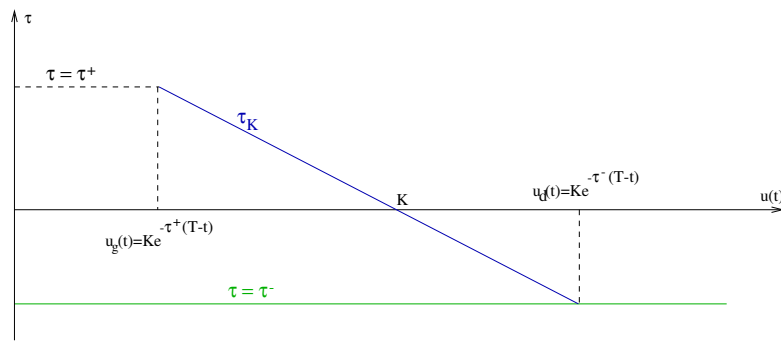


FIG. 4.13 – Variation relative des contrôles optimaux en fonction de u et à t fixé, pour une période finale $[t, T]$ où $\xi^* = 0 \forall u$.

Remarque 4.6.9 En utilisant la formule (4.42) à l'intérieur du domaine Λ et les formules (4.30) en dehors de Λ , on obtient pour $v = 0$ et tant que $\xi^* = 0$:

$$W(t, u(t), 0) = D \cdot \Upsilon(u(t) - Ke^{-\tau^+(T-t)})$$

qui présente bien une discontinuité en $u(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$. Cette fonction correspond, à l'actualisation

près, à la prime $P(u(0))$ dans le cas où $t = 0$. Ce cas ne présente toutefois pas d'intérêt puisqu'il correspondrait à une option de maturité très faible, de l'ordre de quelques heures¹³, ce qui n'est pas réaliste. Notons que nous obtenons $P(u(0)e^{\tau^+(T-t)}) = M(u(T))$ et par conséquent aucun call digital ne peut être proposé avec une trop faible maturité¹⁴.

Nature de la variété \mathcal{D} pour $t \in [t_M, T]$

Proposition 4.6.2 *La variété $\mathcal{D} = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle$ est une τ -variété de dispersion. Plus précisément, c'est une τ -variété de dispersion dégénérée, exceptée le long du bord gauche $u(t) = u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$ de la région d'intérêt.*

Preuve de la proposition 4.6.2 . Considérons un état $(t, u, \check{v}(t, u), \check{w}(t, u) = W(t, u, \check{v}(t, u))$ situé sur la variété \mathcal{D} . Nous distinguons deux cas suivant que l'état se trouve sur le bord gauche de la région d'intérêt $u(t) = u_g(t)$ où à l'intérieur $u(t) \in]u_g(t), u_d(t)[$ de celle-ci.

⇒ Le long du bord gauche $u(t) = u_g(t)$ de la région d'intérêt, la commande $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$ qui fait diriger l'état sur la nappe singulière $\langle \mathcal{K} \rangle$ (rester dans la région d'intérêt) est unique et correspond à $\tau = \tau^+$ de t à T . Pour $\tau = \tau^-$ l'état se dirige sur la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$, et pour tout $\tau \neq \{\tau^-, \tau^+\}$ l'état quitte \mathcal{D} (il quitte la région d'intérêt donc également la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$). Ainsi le long de $u(t) = u_g(t)$ la variété $\mathcal{D} = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \tau_d^- \rangle$ est une dispersion classique au sens de [Ber77].

⇒ Pour $u(t) \in]u_g(t), u_d(t)[$, où pour toute variation l'état (t, u) reste dans la région d'intérêt pendant un certain temps, l'état se dirige sur la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$ contre $\tau = \tau^-$ et sur la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ pour tout τ (puisque pour tout τ à l'intérieur Λ , il existe une infinité de commande $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$). Ainsi la variété $\mathcal{D} = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \tau_d^- \rangle$ est une dispersion. Mais cette dispersion est dégénérée dans le sens où pour toute commande $\tau(\cdot)$ l'état reste sur la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$. En particulier si $\tau = \tau^-$ l'état demeure conjointement sur les nappes $\langle \tau_g^- \rangle$ et $\langle \mathcal{K} \rangle$, et donc ne quitte pas la variété \mathcal{D} . Il en découle également que la variété \mathcal{D} contient des trajectoires de la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$.

La figure 4.14 illustre cette dispersion dégénérée. Par ailleurs la stratégie de transaction du trader qui lui permet d'assurer la couverture est la même contre toutes commandes optimales du marché $\tau = \tau^-$ et $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$ est la même ($\xi = 0$), c'est-à-dire que cette même stratégie empêche le trader de traverser la barrière $\mathcal{D} = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \tau_d^- \rangle$ dans le sens $w < W(t, u, v)$ et ainsi « le coin ne fuit pas ». ■

Une illustration résumant les trajectoires extrémales du marché pour $t \in [t_M, T]$

Nous concluons l'étude de la période finale $t \in [\max\{t_-, t_+\}, T]$ du jeu, où la stratégie optimale du trader reste $\xi^* = 0$, par un schéma (figure 4.14) regroupant certaines trajectoires extrémales et singulières au sens du contrôle τ du marché dans la région d'intérêt Λ . Pour des raisons évidentes de visibilité, nous n'avons représenté sur cette figure que trois trajectoires $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$ à partir d'un seul point (t, u) . Sur cette figure 4.14, nous mettons également en évidence la dispersion obtenue.

¹³Voir l'application numérique dans le paragraphe 4.4.1.

¹⁴Aussi longtemps que le trader n'a pas intérêt à faire une transaction ($\xi^* = 0$), il en découle que dans le cas le plus favorable, le souscripteur recevrait seulement pour paiement la prime qu'il a versée pour souscrire cette option.

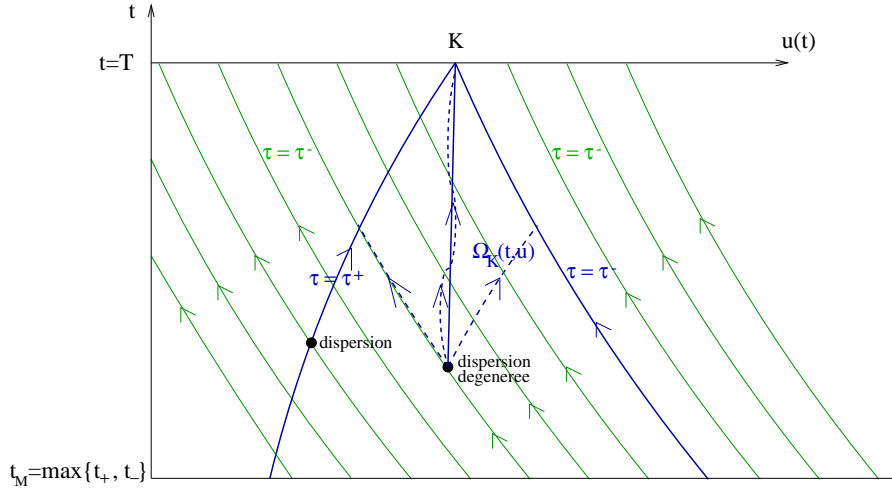


FIG. 4.14 – Illustration de la dispersion pour des trajectoires singulières et extrémales dans le plan (u, t) pour $t \in [t_M, T]$

4.7 La variété équivoque $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle$

Dans la région (4.37), qui est non vide seulement dans le cas où $t_- < t_+$, la nappe $\langle \tau^- \rangle$ continue d'exister puisque $t \geq t_-$. Par contre, la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ n'est plus valide étant donné que $q^+ = C^+$ est atteint en temps rétrograde pour $u \leq u_+$. La nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ se trouve ainsi remplacée par une nappe de saut positif $\langle \uparrow \rangle$. Cette nappe de saut doit se raccorder à la nappe émergente $\langle \tau^- \rangle$ le long d'une variété équivoque $\mathcal{E}^+ = \langle \tau_g^- \rangle \cap \langle \uparrow \rangle$ de dimension 2, où $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ désigne les valeurs de (v, w) sur \mathcal{E}^+ .

4.7.1 Dynamique

Puisque la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$ a la même équation que la nappe $\langle \tau^- \rangle$ identifiée dans l'étude du call vanilla avec paiement en nature (voir la remarque 4.3.1), la construction de la variété équivoque $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle$ est exactement la même que celle de la variété équivoque homonyme $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$ du paragraphe 3.8.1. Elle est donc construite le long du champ de trajectoires $\tau^+, \xi^+(\tau^+)$ où $\xi^+(\tau)$ est donné par l'équation (3.90). La dynamique satisfaite par les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur \mathcal{E}^+ est ainsi donnée par le système d'équations (3.92), qui a conduit à la forme explicite (3.94) en fonction des conditions au bord $(t_0, u(t_0), v(t_0), w(t_0))$. Ces dernières sont données sur une variété de dimension 1, noté $\partial\mathcal{E}^+$ sur laquelle la variété \mathcal{E}^+ se raccorde continûment.

4.7.2 Conditions au bord

Les conditions au bord $(t_0, u(t_0), v(t_0), w(t_0))$, illustrées sur la figure 4.15, sont situées sur le bord $\partial\mathcal{E}^+$ de la dispersion \mathcal{D} en $u(t_0) = u_+ = \frac{K(1+c^-)}{1+C^+}$ pour tout $t_0 \in [t_-, t_+]$, où t_0 désigne l'instant auquel les trajectoires $(\tau^+, \xi^+(\tau^+))$ atteignent ce bord $\partial\mathcal{E}^+$.

Comme $q^-(t_0) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t_0)}$ ne dépend pas de u , il satisfait l'équation adjointe (3.29)

$$\frac{\partial q^-}{\partial t}(t_0) = \dot{q}^-(t_0) = -(1 + q^-(t_0))\tau^- \quad \forall t_0 \geq t_- .$$

En accord avec les expressions des valeurs $\check{v}(t, u)$ et $\check{w}(t, u)$ obtenues sur la variété \mathcal{D} (équation (4.41)), la variété $\partial\mathcal{E}^+$ de dimension 1 et sa tangente sont alors données par :

$$\partial\mathcal{E}^+ : \left(\begin{array}{l} t_0 \in [t_-, t_+] \\ u(t_0) = u_+ \\ v(t_0) = \frac{D}{C^+ - q^-(t_0)} \\ w(t_0) = -q^-(t_0)v(t_0) \end{array} \right), \quad \text{tangente} : \left(\begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ -\frac{D\tau^-(1+q^-)}{(C^+ - q^-)^2} \\ C^+ \frac{D\tau^-(1+q^-)}{(C^+ - q^-)^2} \end{array} \right). \quad (4.48)$$

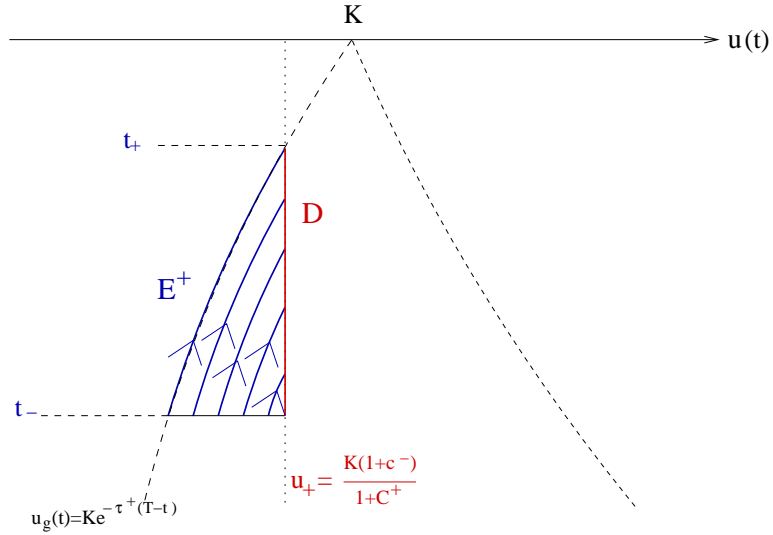


FIG. 4.15 – Conditions au bord pour la variété équivoque \mathcal{E}^+ .

4.7.3 Formules explicites

En plaçant les conditions au bord de l'équation (4.48) dans la forme explicite (3.94), on aboutit à la solution (aux expressions des valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$) suivante pour \mathcal{E}^+ :

$$\left\{ \begin{array}{l} t \in [t_-, t_+] \text{ et } t_0 \in [t_-, t_+] \text{ avec } t_0 \geq t, \\ u(t) = u_+ e^{\tau^+(t-t_0)} \text{ donc } t_0 = t + \frac{1}{\tau^+} \ln \left(\frac{u_+}{u} \right), \\ \check{v}(t, u) = \frac{D}{u_+} (C^+ - q^-(t_0))^{\frac{\tau^+}{-\tau^-}} (C^+ - q^-(t))^{\frac{\tau^+ - \tau^-}{\tau^-}} u, \\ \check{w}(t, u) = -q^-(t)\check{v}(t, u). \end{array} \right. \quad (4.49)$$

On note que l'instant t_0 dépend de la paire (t, u) .

4.7.4 Semi-perméabilité de \mathcal{E}^+ ($n^+ \geq 0$ sur \mathcal{E}^+)

Il nous reste à vérifier la condition de semi-perméabilité $n^+ \geq 0$ pour la nappe $\langle \uparrow \rangle$ (pour conclure à la semi-perméabilité de la surface composite à la jonction \mathcal{E}^+), où nous déduisons $\nu^+ = (n^+, p^+, C^+, 1)^t$ de la théorie des équations adjointes généralisées pour la jonction équivoque \mathcal{E}^+ .

Comme la variété $\partial\mathcal{E}^+$ de dimension 1 doit être contenue dans \mathcal{E}^+ , sa tangente (donnée dans l'équation (4.48)) doit être orthogonal à ν^+ , c'est-à-dire

$$\left\langle \begin{pmatrix} n^+ \\ p^+ \\ C^+ \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{D\tau^-(1+q^-)}{(C^+-q^-)^2} \\ C^+ \frac{D\tau^-(1+q^-)}{(C^+-q^-)^2} \end{pmatrix} \right\rangle = 0 ,$$

qui se réécrit tout simplement

$$n^+ = 0 . \quad (4.50)$$

Cette dernière équation représente une condition au bord de l'équation adjointe généralisée pour n^+ . De même que pour la jonction équivoque homonyme $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$ du call vanille, les équations adjointes généralisées s'écrivent (3.101) avec (3.102), à savoir (on rappelle seulement la partie de ces équations qui va nous être utile) :

$$\dot{n}^+ = \alpha(t)n^+ + \beta(t) , \quad \text{où } \alpha(t) = \frac{\tau^+(1+C^+)}{C^+ - q^-(t)} > 0 \text{ et } \beta(t) = \alpha(t)\tau^-(1+q^-)\check{v} < 0 .$$

Il en résulte que sur \mathcal{E}^+ nous avons

$$n^+(t) = - \int_t^{t_0} e^{-\int_t^s \alpha(\sigma) d\sigma} \beta(s) ds > 0 .$$

Remarque 4.7.1 *Nous pouvions arriver à la même conclusion via le raisonnement suivant. Comme $\beta(t) \leq 0$, il résulte de la propriété 3.7.5 que n^+ ne change pas de signe sur $[t_-, t_+]$. En $t = t_+$, c'est-à-dire sur $\partial\mathcal{E}^+ = \mathcal{D} \cap \{u = u_+\}$ de \mathcal{E}^+ , nous avons $n^+ = 0$ (équation (4.50)) et ainsi l'équation différentielle ci-dessus devient $\dot{n}^+ = \beta(t) < 0$ que l'on intègre depuis $n^+ = 0$. Il en résulte que, sur une partie finale de la variété équivoque \mathcal{E}^+ nous avons $n^+ \geq 0$, et donc $n^+ \geq 0$ sur toute la variété \mathcal{E}^+ .*

4.8 La variété équivoque $\mathcal{E}^- = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$

Dans la région (4.38), qui est non vide dans les deux cas de figure $t_+ > t_-$ et $t_- > t_+$, la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ singulière en τ continue d'exister étant donné que $C^- \leq q^+(u) = (1+c^-)\frac{K}{u(t)} - 1 \leq C^+$ pour $u \in [u_+, u_-]$. Par contre la nappe puisque $t \leq t_-$, la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$ n'est plus valide. Cette dernière se trouve remplacée par une nappe de saut négatif $\langle \downarrow \rangle$, caractérisée par la singularité $q^- = C^-$. La variété de dimension 2, $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ à identifier est une variété équivoque $\mathcal{E}^- = \langle \mathcal{K} \rangle \cup \langle \downarrow \rangle$, jonction d'une nappe de saut $\langle \downarrow \rangle$ sur la variété $\langle \mathcal{K} \rangle$.

On rappelle que la singularité en τ de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ découle de $\sigma^+(t) = 0$ où σ^+ représente la

fonction de commutation en τ , sur la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$. Cette nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ à pour équation $Q^+V = D$ (voir l'équation 4.9) et sa normale semi-perméable est donnée par l'équation (4.12).

4.8.1 Stratégie du trader et interprétation

On cherche la stratégie de transaction appropriée ξ^- qui puisse, quelque soit τ , maintenir l'état sur ou au dessus de la variété $\langle \mathcal{K} \rangle$ et de la nappe de saut $\langle \downarrow \rangle$. La nappe émergente $\langle \mathcal{K} \rangle$ étant une nappe singulière en τ , la propriété 3.7.3 conduit à

$$\xi^- = 0 . \quad (4.51)$$

Interprétation financière 4.8.1 *La stratégie du trader $\xi^- = 0$ dans cette région s'interprète facilement. En effet pour $u(t) \neq u_g(t)$, si le marché joue $\tau = \tau^-$, le cours de l'actif sous-jacent $u(t)$ reste dans la région d'intérêt pendant un certain temps, et peut donc toujours atteindre $u(T) = K$ ($\Omega_K(t, u) \neq \emptyset$). Par conséquent une vente d'actif sous-jacent ne permettait plus au trader de se couvrir contre une trajectoire $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$ (l'état passerait dessous la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ par rapport à l'axe w).*

En ce qui concerne le cas où $u(t) = u_g(t)$ nous avons la proposition suivante qui s'applique à la variété équivoque \mathcal{E}^- en cours d'étude dans ce paragraphe mais également à la variété focale \mathcal{F} qui fera l'objet du paragraphe 4.9.

Proposition 4.8.1 *Pour tout t , sur le bord gauche $u(t) = u_g(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$ de la région d'intérêt Λ , nous avons*

$$Q^- \check{V}(t, u_g(t)) = 0 \quad \text{où} \quad \check{v}(t, u_g(t)) > 0 .$$

Preuve de la proposition 4.8.1.

➔ Pour $t \geq t_-$ (bord de \mathcal{D} et \mathcal{E}^+), la proposition découle directement puisque (\check{v}, \check{w}) appartient à la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$ d'équation $Q^-V = 0$ avec $\check{v} > 0$ donné par la formule (4.41) pour $t \geq t_M = \max\{t_-, t_+\}$ et la formule (4.49) avec $t_0 = t_+$ pour $t \in [t_-, t_+]$.

➔ Pour $t \leq t_-$, les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ doivent représenter un portefeuille de la frontière des états capturables. Le long de $u_g(t)$, si le cours se met à jouer $\tau < \tau^+$ (et à fortiori $\tau = \tau^-$), l'état (t, u) sort immédiatement de la région d'intérêt Λ et le trader n'est donc plus menacé par une variation $\tau \in \Omega_K(t, u)$. Dans ce cas, compte tenu de la relation (4.25) pour $u(t) < u_g(t)$, et du fait qu'une vente devient possible pour $t \leq t_-$, la stratégie optimale du trader consiste à vendre immédiatement les parts d'actif sous-jacent restantes à un coût $-C^-v$, puis de ne rien faire ($\xi = 0$) par la suite. Pour que cette stratégie soit une stratégie de couverture, il est nécessaire que $Q^- \check{V} \geq 0$, de manière à ce que le trader puisse se couvrir contre la variation $\tau = \tau^-$. Deux sous-cas sont à distinguer :

➔ Pour $t \in [t_+, t_-]$ (bord de \mathcal{E}_2^-), la stratégie du trader est $\xi^- = 0$ (formule (4.51)), et l'état reste sur la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ d'équation $Q^+V = D$. Les conditions au bord sont choisies pour que $Q^- \check{V}(t, u_g(t)) = 0$, de sorte à minimiser la valeur du portefeuille de couverture en $v = \check{v}$ contre $\tau \neq \tau^+$. Il en résulte que les valeurs $(\check{v}(t, u_g(t)), \check{w}(t, u_g(t)))$ satisfont $\{Q^- \check{V} = 0\} \cap \{Q^+ \check{V} = D\}$, et

donc, que celles-ci restent de la forme (4.41) mais avec $q^- = C^-$, et à fortiori $\check{v}(t, u_g(t)) > 0$. Elles se raccorde continûment sur la dispersion \mathcal{D} en $(t_-, u_g(t_-))$, ce qui préserve la semi-perméabilité le long de $u_g(t)$. La variété de dimension 2 obtenue, paramétrée en (\check{v}, \check{w}) , est une τ -dispersion. En effet, si le marché continue à jouer $\tau = \tau^+$, c'est-à-dire reste sur ce bord $u_g(t)$, alors l'état quitte cette dispersion, et dérive sur la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$. Par ailleurs, l'état reste au dessus de la variété $Q^-V = 0$ (dérive à l'intérieur de la zone de capture \mathbb{C}_t), étant donné que

$$\frac{d(Q^-V)}{dt} = C^- \frac{dv}{dt} + \frac{dw}{dt} = C^-(\tau^+v + \xi^-) + (\tau^+v - C^-\xi^-) = (1 + C^-)\tau^+v > 0 .$$

➔ Pour $t \leq t_m = \min\{t_-, t_+\}$ (bord de \mathcal{F}), comme pour la proposition 3.9.3, nous imposons $Q^-V(t, u_g(t))$ constant, par le choix d'un achat en continu¹⁵ avec la stratégie (3.136). Les valeurs (\check{v}, \check{w}) se raccordent continûment en $(t_m, u_g(t_m))$ où $Q^-V = 0$, mais avec $\check{v} > 0$ (et non $\check{v} = 0$ comme pour la proposition 3.9.3). Par ailleurs, avec la stratégie $\xi^+ > 0$, la dynamique en v satisfaite par le raccordement est de la forme $\dot{v} = \alpha\check{v}$, ce qui montre que $\check{v}(t, u_g(t))$ ne change pas de signe en temps rétrograde, et de ce fait, reste strictement positif. ■

4.8.2 Conditions au bord et solution explicite

Pour déterminer $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ dans la région étudiée, on conjecture que la jonction équivoque \mathcal{E}^- doit être construite avec des trajectoires $\tau = \tau^-$. Nous vérifierons à posteriori que $\tau = \tau^-$ minimise bien l'hamiltonien, ce qui est équivalent à s'assurer de la condition de semi-perméabilité $n^- \geq 0$ sur \mathcal{E}^- (voir l'étape 5 de la méthode page 115).

Solution explicite en fonction de $(t_0, u(t_0), v(t_0), w(t_0))$

Puisque la nappe émergente $\langle \mathcal{K} \rangle$ est singulière, la dynamique et la solution explicite depuis des conditions au bord $(t_0, u(t_0), v(t_0), w(t_0))$ sont donnés par l'équation (3.89) avec ici $\tau_E = \tau^-$.

Conditions au bord

Sur la figure 4.16, nous distinguons les différentes variétés équivoques \mathcal{E}^- , notées \mathcal{E}_1^- , \mathcal{E}_2^- , et \mathcal{E}_3^- , selon la variété de dimension 1 servant de condition au bord d'intégration le long des trajectoires $\tau = \tau^-$ et sur laquelle \mathcal{E}^- va se raccorder continûment.

Notons que les trajectoires $\tau = \tau^-$ séparant les différentes variétés sont :

- ➔ Pour la frontière entre \mathcal{E}_1^- et \mathcal{E}_3^- (cas $t_- < t_+$) : $\tilde{u}_{13}^-(t) = u_+ e^{-\tau^-(t_- - t)}$.
- ➔ Pour la frontière entre \mathcal{E}_1^- et \mathcal{E}_2^- (cas $t_+ < t_-$) : $\tilde{u}_{12}^-(t) = u_g(t_-) e^{-\tau^-(t_- - t)}$.
- ➔ Pour la frontière entre \mathcal{E}_2^- et \mathcal{E}_3^- (cas $t_+ < t_-$) : $\tilde{u}_{23}^-(t) = u_+ e^{-\tau^-(t_+ - t)}$.

Ces différentes frontières sont susceptibles de porter une discontinuité de gradient de la fonction Valeur W .

¹⁵Comme ici $t \leq t_+$, il devient effectivement intéressant pour le trader d'acheter, contrairement au cas précédent $t \in [t_-, t_+]$.

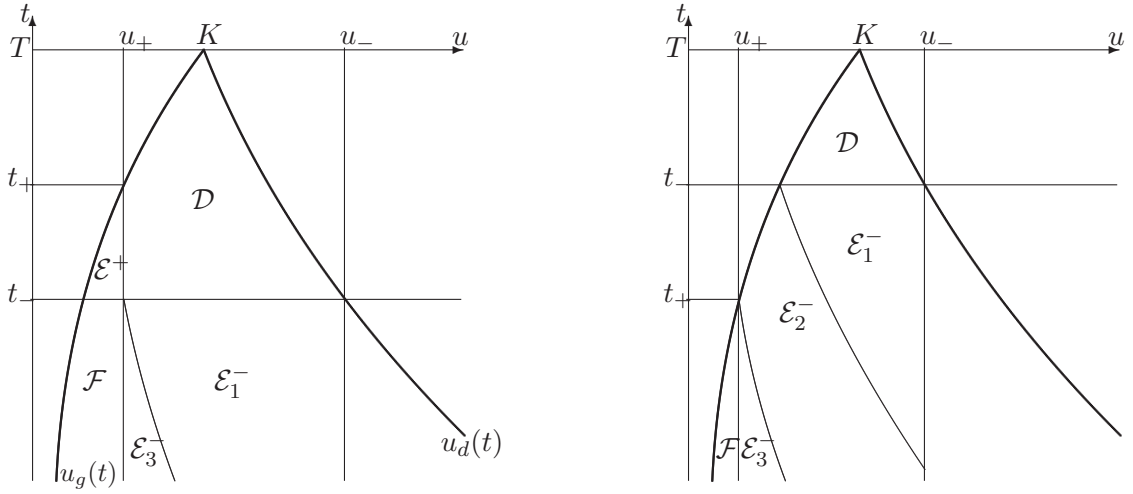


FIG. 4.16 – Les différentes variétés \mathcal{E}^- suivant les conditions au bord d'intégration.

Remarque 4.8.2 Comme l'intervalle $[u_+, u_-]$ est un voisinage très petit autour de $u = K$ (application numérique (4.17)), les trois frontières ci-dessus intersectent, dans le plan (t, u) , la droite $u = u_-$ au cours du jeu, pour une échéance de l'option réaliste (supérieure à $T = 1$ jour). Par exemple, pour les paramètres par défaut, qui donnent $t_+ < t_-$ (voir paragraphe 4.4.1), la trajectoire $u(t) = \tilde{u}_{23}^-(t)$ intersecte $u = u_-$ à l'instant t_{u_-} donné par

$$T - t_{u_-} = T - t_+ + \frac{1}{-\tau^-} \ln \left(\frac{u_-}{u_+} \right) = T - t_+ + \frac{1}{-\tau^-} \ln \left(\frac{1 + C^+}{1 + C^-} \right) = 0,6296 \text{ jours} .$$

Les variétés équivoques \mathcal{E}_1^- , \mathcal{E}_2^- , et \mathcal{E}_3^- sont respectivement définies dans la région du plan (t, u) :

⇒ Pour \mathcal{E}_1^- :

$$\begin{cases} \{ (t, u) \mid t \leq t_- \text{ et } u \in [\tilde{u}_{13}^-(t), u_-] \} & \text{si } t_+ > t_- , \\ \{ (t, u) \mid t \leq t_- \text{ et } u \in [\tilde{u}_{12}^-(t), u_-] \} & \text{si } t_- > t_+ . \end{cases}$$

En remarquant que $u_+ = u_g(t_+) > u_g(t_-)$ dans le cas $t_+ > t_-$ et $u_+ = u_g(t_+) < u_g(t_-)$ dans le cas $t_- > t_+$, on peut regrouper ces deux régions en la région unique suivante valable dans les deux cas

$$\{ (t, u) \mid t \leq t_- \text{ et } u \in [\max\{\tilde{u}_{13}^-(t), \tilde{u}_{12}^-(t)\}, u_-] \} . \quad (4.52)$$

⇒ Pour \mathcal{E}_2^- :

$$\{ (t, u) \mid t \leq t_- \text{ et } u \in [\max\{u_g(t), \tilde{u}_{23}^-(t)\}, \min\{u_-, \tilde{u}_{12}^-(t)\}] \} , \quad (4.53)$$

dans le cas $t_+ < t_-$. Remarquons que, puisque $u_+ = u_g(t_+)$, on a

$$\frac{\tilde{u}_{23}^-(t)}{\tilde{u}_{12}^-(t)} = e^{(\tau^+ - \tau^-)(t_+ - t_-)} > 1 \quad \text{si } t_- < t_+ ,$$

et ainsi la région (4.53) devient vide pour $t_- > t_+$. Elle peut de ce fait servir de région commune aux deux cas.

➔ Pour \mathcal{E}_3^- , en utilisant la notation $t_m = \min\{t_-, t_+\}$:

$$\left\{ (t, u) \mid t \leq t_- \text{ et } u \in [u_+, u_+ e^{-\tau^-(t_m-t)}] \right\} . \quad (4.54)$$

Les conditions au bord respectives d'intégration en temps rétrograde pour \mathcal{E}_1^- , \mathcal{E}_2^- et \mathcal{E}_3^- , sont situées :

➔ Sur le bord $\partial\mathcal{E}_1^-$ de la dispersion \mathcal{D} en $t = t_m$. Les valeurs $(v(t_0), w(t_0))$ sur $\partial\mathcal{E}_1^-$ sont données par (4.41), et l'on obtient ainsi les conditions au bord :

$$\partial\mathcal{E}_1^- : \begin{cases} t_0 = t_- , \\ u(t_0) \in [\max\{u_g(t_-), u_+\}, u_-] , \\ v(t_0) = \frac{D}{q^+(u(t_0)) - q^-(t_-)} \quad \text{où } q^-(t_-) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t_-)} - 1 = C^- , \\ w(t_0) = -q^-(t_-)v(t_0) . \end{cases}$$

➔ Sur $\partial\mathcal{E}_2^- = \{ (t, u) \mid t \in [t_+, t_-] \text{ et } u = u_g(t) \}$ où nous avons $Q^+\check{V}(t, u) = D$ et $Q^-\check{V}(t, u) = 0$ avec $q^- = C^-$ (proposition 4.8.1). Ainsi $(v(t_0), w(t_0))$ restent données par (4.41), mais avec $q^-(t_0) = C^-$. Les conditions au bord d'intégration sur $\partial\mathcal{E}_2^-$ sont donc données par

$$\partial\mathcal{E}_2^- : \begin{cases} t_0 = \frac{1}{\tau^+ - \tau^-} (\tau^+ T - \tau^- t + \ln(\frac{u}{K})) \in [t_+, t_-] , \\ u(t_0) = u_g(t_0) = K e^{-\tau^+(T-t_0)} , \\ v(t_0) = \frac{D}{q^+(u(t_0)) - C^-} , \\ w(t_0) = -C^- v(t_0) , \end{cases}$$

avec

$$q^+(u(t_0)) = (1 + c^-) \frac{K}{u_g(t_0)} - 1 = (1 + c^-) e^{\tau^+(T-t_0)} - 1 .$$

L'expression de t_0 a été obtenue en écrivant que $K e^{-\tau^+(T-t_0)} = u e^{-\tau^-(t_0-t)}$. Remarquons que cette expression dépend de la paire (t, u) .

➔ Sur $\partial\mathcal{E}_3^- = \{ (t, u) \mid t \in [0, t_m] \text{ et } u = u_+ \}$ c'est-à-dire sur un bord de la variété focale \mathcal{F} . Par conséquent, ces conditions au bord seront fournies par l'analyse de la région (4.39), faite dans le paragraphe 4.9, où les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur \mathcal{F} , seront obtenues numériquement (à l'aide du système d'EDP (3.133)). Pour cette raison, nous ne pouvons pas obtenir de formule explicite pour les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur \mathcal{E}_3^- .

Formules explicites

En remplaçant les conditions au bord $(t_0, u(t_0), v(t_0), w(t_0))$ par leurs expressions respectives sur $\partial\mathcal{E}_1^-$ et $\partial\mathcal{E}_2^-$, l'équation (3.89) avec $\tau_E = \tau^-$ conduit aux formules explicites suivantes pour les valeurs

$(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur \mathcal{E}_1^- et \mathcal{E}_2^-

$$\text{Pour } \mathcal{E}_1^- : \check{V}(t, u) = \begin{pmatrix} \check{v}(t, u) \\ \check{w}(t, u(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\tilde{q}^-(t) \end{pmatrix} \frac{D}{q^+(u) - \tilde{q}^-(t)} , \quad (4.55)$$

$$\text{pour } \mathcal{E}_2^- : \check{V}(t, u) = \begin{pmatrix} \check{v}(t, u) \\ \check{w}(t, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\tilde{q}^-(t, t_0) \end{pmatrix} \frac{D}{q^+(u) - \tilde{q}^-(t, t_0)} , \quad (4.56)$$

où

$$\begin{cases} q^+(u) &= (1 + c^-) \frac{K}{u} - 1 , \\ \tilde{q}^-(t) &= (1 + c^-) e^{\tau^-(T-t)} - 1 < C^- \quad \text{puisque } t \leq t_- , \\ \tilde{q}^-(t, t_0) &= (1 + C^-) e^{\tau^-(t_0-t)} - 1 , \quad \text{avec } \tilde{q}^-(t, t_0) < C^- \text{ puisque } t_0 > t . \end{cases}$$

Remarque 4.8.3 Nous avons été amené à introduire la notation

$$\tilde{q}^-(t) = (1 + c^-) e^{\tau^-(T-t)} - 1 < C^- \text{ pour } t \leq t_- ,$$

afin de distinguer cette quantité de $q^- = C^-$.

Les valeurs $\check{V}(t, u)$ sont naturellement continues le long de la frontière $\tilde{u}_{12}(t)$, par continuité des conditions au bord au point $(t_-, u_g(t_-))$.

Remarque 4.8.4 On peut retrouver ce résultat en remarquant que le long de la trajectoire $\tilde{u}_{12}(t)$, où $t_0 = t_-$ dans (4.56), on obtient, en se servant de la propriété (4.19) avec $\varepsilon = -$:

$$\tilde{q}^-(t, t_-) = \tilde{q}^-(t) .$$

Ainsi la formule (4.56) coïncide avec (4.55) le long de $\tilde{u}_{12}(t)$.

Interprétation financière 4.8.5 Comme $\xi^- = 0$ le long de \mathcal{E}^- , le trader garde en main l'actif sous-jacent contenu dans son portefeuille. Il en découle que la perte relative encourue par la variation $\tau(s) = \tau^-$ sur $[t, T]$ devient, pour $t_+ \leq t \leq t_-$, supérieure à celle des coûts de transaction liés à la vente de cet actif ($q = C^-$). Ainsi le trader doit être un peu plus riche pour compenser cette perte, d'où l'apparition des deux fonctions $\tilde{q}^- < C^-$ pour $t < t_-$.

De plus, nous pouvons interpréter assez facilement l'expression de chacune des deux fonctions \tilde{q}^- obtenues. Celles-ci représentent la proportion de la perte relative (en valeur du portefeuille w en fonction de v) liée à une éventuelle variation du cours avec $\tau = \tau^-$ jusqu'à l'instant final T .

➔ Sur \mathcal{E}_1^- , contre $\tau = \tau^-$, le trader est contraint de garder l'actif en main jusqu'à la fin, car la valeur du cours sort de la zone d'intérêt Λ à un instant $t_0 > t_-$. A cet instant $t = t_0 > t_-$, il n'est en effet plus optimal de procéder à une vente puisque la perte relative $q = C^-$ liée à une vente devient supérieure à celle liée à la variation $\tau = \tau^-$ jusqu'à l'échéance T , augmentée des coûts de clôture ($q = (1 + c^-) e^{\tau^-(T-t_0)} - 1$). Ainsi le trader subit une éventuelle variation $\tau = \tau^-$ jusqu'à T , d'où l'apparition de la perte relative $\tilde{q}^-(t) = (1 + c^-) e^{-\tau^-(T-t)} - 1$.

→ Sur \mathcal{E}_2^- , le trader ne subit la variation $\tau = \tau^-$ qu'entre les instants t et $t_0 < t_-$ où t_0 est l'instant où le cours atteint $u_g(t)$. Pour $t_0 < t_-$, la valeur du cours quitte la région d'intérêt Λ et le trader vend à l'instant t_0 l'actif sous-jacent restant, ce qui lui permet de limiter à C^- la perte relative entre t_0 et T . D'où la perte relative $\tilde{q}^-(t, t_0) = (1 + C^-)e^{-\tau^-(t_0-t)} - 1$.

Compte tenu des expressions (4.55) et (4.56) obtenues pour les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$, la figure 4.17 illustre, dans les régions (4.53) et (4.53), une coupe dans le plan (v, w) à (t, u) fixés, du graphe de la fonction Valeur (4.35).

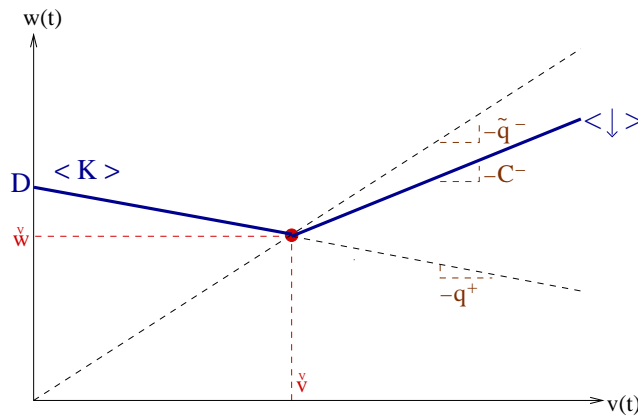


FIG. 4.17 – Une coupe en (v, w) du graphe de la fonction Valeur W dans la région du plan (u, t) où \mathcal{E}_1^- ou \mathcal{E}_2^- existe.

4.8.3 Semi-perméabilité de \mathcal{E}^-

Équations adjointes généralisées

Sous la condition que $\tau = \tau^-$ minimise l'hamiltonien, l'hamiltonien minimaximisé et les équations adjointes généralisées pour \mathcal{E}^- sont données respectivement par les équations (3.83) et (3.82), avec ici $s = -$, $\tau_E = \tau^-$, et $\nu_N = \nu_K$. Les équations adjointes généralisées s'écrivent donc :

$$\begin{pmatrix} \dot{n}^- \\ \dot{p}^- \\ \dot{q}^- \\ \dot{r}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p^- \tau^- \\ -\tau^- (1 + C^-) \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \left[\begin{pmatrix} n^- \\ p^- \\ C^- \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -(1 + q^+) \frac{v}{u} \\ q^+ \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

La composante $\alpha(t)$ doit être telle que $\dot{q} = 0$, afin de préserver la singularité $q^- = C^-$ depuis $t = t_-$ (en temps rétrograde). Comme pour la variété \mathcal{E}^- du call vanille, il en résulte l'expression (3.117) :

$$\alpha(t) = \frac{\tau^-(1 + C^-)}{C^- - q^+(t)} > 0 \quad (\text{compte tenu des inégalités (3.109)}).$$

L'équation différentielle

$$\dot{n}^- = \alpha(t)n^-$$

montre que n^- ne change pas de signe le long d'une trajectoire. Il suffit donc de s'assurer que $n^- \geq 0$ sur les variétés $\partial\mathcal{E}_1^-$, $\partial\mathcal{E}_2^-$, $\partial\mathcal{E}_3^-$ de dimension 1 pour conclure à la semi-perméabilité de la surface composite aux variétés respectives \mathcal{E}_1^- , \mathcal{E}_2^- et \mathcal{E}_3^- . Pour faire cette vérification, on s'appuie sur l'étape 5 de la méthode du paragraphe 3.7.

Condition de semi-perméabilité de \mathcal{E}_1^- ($n^- \geq 0$ sur $\partial\mathcal{E}_1^-$)

Cette vérification est identique à celle de la variété \mathcal{E}_2^- du call vanille (page 132). En effet :

- ⇒ puisque $\check{w}(t, u) = -C^- \check{w}(t, u)$, la tangente à $\partial\mathcal{E}_1^- = \mathcal{D} \cap \{t = t_-\}$ s'écrit également sous la forme (3.118), et par conséquent la première équation conduit également à $p^- = 0$ (équation (3.119)).
- ⇒ Par la propriété 3.8.3, la seconde équation (3.120) est indépendante de $\xi^-(\tau^-)$, donc à fortiori vérifiée pour $\xi^- = 0$.

Condition de semi-perméabilité de \mathcal{E}_2^- ($n^- \geq 0$ sur $\partial\mathcal{E}_2^-$)

Cette vérification est entièrement identique à celle faite pour la variété homonyme du call vanille (page 132), conduisant à $n^- = 0$ sur $\partial\mathcal{E}_2^-$.

Remarque 4.8.6 Ici $v \neq 0$ sur $\partial\mathcal{E}_2^-$ (voir la condition au bord $v(t_0)$ correspondante). C'est pour cette raison que nous n'avons pas utilisé la connaissance de $v = 0$ sur la variété homonyme du call vanille (voir la remarque 3.8.3).

Condition de semi-perméabilité de \mathcal{E}_3^- ($n^- \geq 0$ sur $\partial\mathcal{E}_3^-$)

Cette condition sera vérifiée en même temps que celle de la variété \mathcal{F} , précisément dans le paragraphe 4.9.3 à venir.

4.9 la variété focale $\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ et la variété équivoque $\mathcal{E}_3^- = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$

Dans la région (4.39), aucune des deux nappes $\langle \tau_g^- \rangle$ et $\langle \mathcal{K} \rangle$ n'existe pour construire une jonction équivoque, étant donné que respectivement, $q^- = C^-$ et $q^+ = C^+$ ont été atteints en temps rétrograde pour $t \leq t_-$ et $u \leq u_+$. Les deux nappes $\langle \tau_g^- \rangle$ et $\langle \mathcal{K} \rangle$ sont respectivement remplacées par une nappe de saut $\langle \downarrow \rangle$ et $\langle \uparrow \rangle$, qui se joignent le long d'une variété focale $\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ de dimension 2.

Comme dans le cas du call vanille (paragraphe 3.9.1), cette jonction focale doit être parcourue par des trajectoires $\tau = \tau^-$ et $\tau = \tau^+$, ce qui, par la proposition 3.9.1, caractérise conjointement les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur \mathcal{F} comme solution du système d'EDP linéaire couplé du premier ordre (3.133). Il reste à spécifier les conditions au bord permettant de définir de manière unique les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur \mathcal{F} , solution du système d'EDP couplé (3.133).

4.9.1 Conditions au bord

Nous avons vu, dans le paragraphe 4.8.2, que les conditions au bord d'intégration de la variété équivoque \mathcal{E}_3^- , apparaissant dans la région (4.54), sont situées sur le bord de la variété \mathcal{F} en $u = u_-$ et, de ce fait, les valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur cette variété \mathcal{E}_3^- ne sont pas obtenues indépendamment de \mathcal{F} . Nous montrerons plus loin (dans le paragraphe 5.1.2) que la variété \mathcal{E}_3^- satisfait un même système d'EDP (5.3), obtenu simplement en remplaçant C^+ par $q^+(u) = (1 + c^-)^{\frac{K}{u}} - 1$ dans le système (3.133). Par conséquent, nous pouvons considérer un système d'EDP couplé unique (5.3) à résoudre dans la région

$$(\mathcal{E}_3^- \cup \mathcal{F}) : \begin{cases} \{ (t, u) \mid t \leq t_- \text{ et } u \in [u_g(t), \tilde{u}_{13}(t)] \} & \text{(dans le cas } t_- < t_+) , \\ \{ (t, u) \mid t \leq t_- \text{ et } u \in [u_g(t), \tilde{u}_{23}(t)] \} & \text{(dans le cas } t_+ < t_-) . \end{cases} \quad (4.57)$$

Notons $\partial(\mathcal{E}_3^- \cup \mathcal{F})$ les différentes variétés de dimension 1 servant de condition au bord d'intégration pour la variété $(\mathcal{E}_3^- \cup \mathcal{F})$. En nous appuyant sur la figure 4.16, nous obtenons :

⇒ Dans le cas $t_- < t_+$, trois bords différents, à savoir

$$\Rightarrow \partial(\mathcal{E}_3^- \cup \mathcal{F}) = \{ (t, u) \mid t \in [0, t_m] \text{ et } u = u_g(t) \},$$

$$\Rightarrow \partial(\mathcal{E}_3^- \cup \mathcal{F}) = \{ (t, u) \mid t = t_- \text{ et } u \in [u_g(t_-), \tilde{u}_{13}(t_-)] \},$$

$$\Rightarrow \partial(\mathcal{E}_3^- \cup \mathcal{F}) = \{ (t, u) \mid t \in [0, t_m] \text{ et } u = \tilde{u}_{13}(t) \}.$$

⇒ dans le cas $t_+ < t_-$, deux bords différents, à savoir

$$\Rightarrow \partial(\mathcal{E}_3^- \cup \mathcal{F}) = \{ (t, u) \mid t \in [0, t_m] \text{ et } u = u_g(t) \},$$

$$\Rightarrow \partial(\mathcal{E}_3^- \cup \mathcal{F}) = \{ (t, u) \mid t \in [0, t_m] \text{ et } u = \tilde{u}_{23}(t) \}.$$

Les conditions au bord s'obtiennent par continuité avec les nappes adjacentes, sauf le long de $u_g(t)$ où l'analyse est celle fournie par la proposition 4.8.1. Par exemple, pour le bord $\partial(\mathcal{E}_3^- \cup \mathcal{F}) = \tilde{u}_{13}(t_-) \cap [0, t_m]$, nous avons obtenu la forme explicite (4.55) à sa droite, où se trouve la variété \mathcal{E}_1^- . Par continuité, cela fournit les conditions sur ce bord.

Il nous reste à vérifier la condition de semi-perméabilité, à savoir $n^- \geq 0$ et $n^+ \geq 0$, sur $(\mathcal{F} \cup \mathcal{E}_3^-)$, ce que l'on va faire en traitant successivement les variétés \mathcal{F} et \mathcal{E}_3^- .

4.9.2 Semi-perméabilité de \mathcal{F}

Pour la variété \mathcal{F} , nous nous servons de la proposition 3.9.6. Les variétés au bord $\partial\mathcal{F}^+$ et $\partial\mathcal{F}^-$ atteintes respectivement par des trajectoires $\tau = \tau^+$ et $\tau = \tau^-$ sont données par :

⇒ Dans le cas $t_- < t_+$

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{F}^+ &= \{ (t, u) \mid t = t_- \text{ et } u \in [u_g(t_-), \tilde{u}(t_-)_{13}] \} \cup \{ (t, u) \mid t \leq t_m \text{ et } u = u_+ \} \\ \text{et } \partial\mathcal{F}^- &= \{ (t, u) \mid t \in [0, t_m] \text{ et } u = u_g(t) \} \cup \{ (t, u) \mid t = t_- \text{ et } u \in [u_g(t_-), \tilde{u}(t_-)_{13}] \} . \end{aligned}$$

⇒ Dans le cas $t_+ < t_-$

$$\partial\mathcal{F}^+ = \{ (t, u) \mid t \leq t_m \text{ et } u = u_+ \} \quad \text{et} \quad \partial\mathcal{F}^- = \{ (t, u) \mid t \in [0, t_m] \text{ et } u = u_g(t) \} .$$

Signe de n^ε , $\forall \varepsilon \in \{+, -\}$, sur $\partial\mathcal{F} = \{(t, u) \mid t = t_- \text{ et } u \in [u_g(t_-), \tilde{u}(t_-)_{13}]\}$

La vérification est identique à celle faite dans le paragraphe 3.9.5, pour la variété au bord $\partial\mathcal{F} = \Lambda(t_m, u)$ intervenant dans l'étude du call vanille. La composante n^- est strictement positive, puisqu'elle coïncide avec celle de la variété équivoque \mathcal{E}^+ se raccordant sur la nappe régulière $\langle \tau_g^- \rangle$ (la normale semi-perméable n^- à la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$ est de la forme (3.38)).

Signe de n^- sur $\partial\mathcal{F} = \{(t, u) \mid t \in [0, t_m] \text{ et } u = u_g(t)\}$

La preuve est très similaire à celle faite pour la variété au bord homonyme, dans le paragraphe 3.9.5. Le long de $u_g(t)$, sur la variété $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$, nous avons par la proposition 4.8.1,

$$Q^-V = 0, \text{ donc } \frac{d(Q^-V)}{dt} = \dot{w} + C^-\dot{v} = 0.$$

L'équation (3.143) se trouve ainsi vérifiée. La suite de la preuve reste inchangée.

Signe de n^+ sur $\partial\mathcal{F} = \{(t, u) \mid t \leq t_m \text{ et } u = u_+\}$

Sur $\partial\mathcal{F} = \{(t, u) \mid t \leq t_m \text{ et } u = u_+\}$, la variété $(\check{v}(t, u_+), \check{w}(t, u_+))$ se raccorde sur l'équivoque \mathcal{E}_3^- qui est incluse dans la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ d'équation $w + q^+v = D$, avec $q^+ = C^+$ sur ce bord. Par différentiation, il en résulte $\check{w}_t(t, u_+) + C^+\check{v}_t(t, u_+) = 0$, et qu'ainsi une tangente à cette variété $\partial\mathcal{F}$ de dimension 1, est, indépendamment de u , donnée par

$$(1, 0, \check{v}_t, -C^+\check{v})^t. \quad (4.58)$$

Cette tangente doit être orthogonale à la normale $\nu^+ = (n^+, p^+, C^+, 1)^t$ à $\langle \uparrow \rangle$, ce qui conduit directement à

$$n^+ = 0.$$

Remarque 4.9.1 *La preuve est exactement la même que pour la variété \mathcal{E}^+ , ce qui provient du fait que la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ existe à droite de $u = u_+$ pour tout $t \leq t_+$.*

Nous venons ainsi de montrer les arguments nécessaires pour conclure à $n^- \geq 0$ et $n^+ \geq 0$ sur la variété \mathcal{F} , par le biais de la proposition 3.9.6.

4.9.3 Semi-perméabilité de \mathcal{E}_3^-

Nous avons montré (dans les paragraphes 4.8.2 et 4.8.3), qu'il suffit pour cela de s'assurer que $n^- > 0$ sur $\partial\mathcal{E}_3^- = \{(t, u) \mid t \leq t_m \text{ et } u = u_+\}$.

De part et d'autre du bord $\partial\mathcal{E}_3^-$, la normale ν^- à la nappe de saut $\langle \downarrow \rangle$ doit être orthogonale à la tangente (4.58) à ce bord. Il en résulte

$$n^- = (C^+ - C^-)\check{v}_t.$$

Or si la variété $(\check{v}(t, u_+), \check{w}(t, u_+))$ porte une discontinuité de gradient, celle-ci est nécessairement orthogonale à $\{u = u_+\}$, donc uniquement portée par u . Par conséquent \check{v}_t et par incidence n^- , sont continus de part et d'autre de $u = u_-$. Comme nous venons de montrer que $n^- \geq 0$ sur \mathcal{F} (paragraphe 4.9.2), la semi-perméabilité de \mathcal{E}_3^- en découle.

4.10 La variété \mathcal{C} : « $\langle \downarrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ » (région (4.40)) : une solution triviale

La région (4.40) ne nécessite pas de grande théorie.

Fonction Valeur

Proposition 4.10.1 *Dans la région (4.40), la fonction Valeur est donnée par*

$$W(t, u, v) = D - C^- v . \quad (4.59)$$

Preuve de la proposition 4.10.1. Dans la région (4.40) nous avons

$$(1 + c^-) \frac{K}{u} - 1 < C^- \text{ (puisque } u \geq u_-) \text{ et } (1 + c^-) e^{-\tau^- (T-t)} - 1 < C^- \text{ (puisque } t \leq t_-) . \quad (4.60)$$

Les relations (4.60) signifient que les deux nappes $\langle \mathcal{K} \rangle$ et $\langle \tau_g^- \rangle$ (sur lesquelles $\xi^* = 0$) ne sont plus valides, étant donné que $q^+ = C^-$ et $q^- = C^-$ ont été atteints en temps rétrograde. Ces deux nappes émergentes sont chacune remplacées par deux nappes de saut $\langle \downarrow \rangle$ de pente $-q = -C^-$ dans le plan (v, w) , donc parallèles, joignant respectivement $u(T) < K$ et $u(T) \geq K$, où les paiements sont respectivement $M(u(T)) = 0$ et $M(u(T)) = D$. Ces deux nappes de saut ont pour équations respectives $w + C^- v = 0$ et $w + C^- v = D$. Le graphe de la fonction Valeur, frontière des états capturables correspond à la nappe située au dessus, par rapport à l'axe des w (comme illustré sur la figure 4.12, mais avec $q^+ = q^- = C^-$, et des nappes $\langle \downarrow \rangle$ en lieu et place des nappes $\langle \mathcal{K} \rangle$ et $\langle \tau_g^- \rangle$). Il en résulte que la fonction Valeur est donnée par (4.59). ■

Remarquons que la fonction Valeur (4.59) a la même expression que celle obtenue pour les u plus grands, i.e. pour $\{ (t, u) \mid u > u_d(t) \text{ et } t \leq t_- \}$ (formule (4.28)). Par conséquent la fonction valeur est continue le long du bord droit $u(t) = u_d(t)$ de la région d'intérêt Λ , pour $t \leq t_-$. Par ailleurs, la formule de représentation (4.35) peut être préservée en posant

$$(\check{v}, \check{w}) = (0, D) \quad (4.61)$$

comme pour $u > u_d(t)$ (voir la remarque 4.6.7).

Interprétation financière 4.10.1 *Les relations (4.60) signifient que la perte résultant à avoir de l'actif sous-jacent en main devient supérieure aux coûts de transaction $C^- v$ liés à leur vente, pour*

chacune des variations les plus dangereuses pour le trader, à savoir $\tau(s) = \tau^- \forall s \in [t, T]$ et $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$ ($\tau(\cdot)$ tel que $u(T) = K$). Comme dans cette région on a $u \geq u_- > K$, les trajectoires les plus dangereuses correspondent chacune à une décroissance du cours entre t et T , et de ce fait, il existe toujours une fonction strictement décroissante telle que $u(T) \geq K$ (en particulier $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$). Si $v(t) > 0$, une telle variation ferait décroître la valeur du portefeuille, alors que le paiement final sera D . Il en résulte qu'il n'est pas raisonnable pour le trader de garder de l'actif sous-jacent dans son portefeuille, et qu'ainsi la seule stratégie raisonnable pour le trader est de vendre immédiatement l'actif sous-jacent contenu dans son portefeuille. La couverture optimale consiste alors à avoir un portefeuille de valeur $w = D$ après s'être affranchi de ces coûts de transaction, de manière à être couvert avec un investissement $v = 0$ contre $\tau(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$, ce qui conduit à la fonction Valeur (4.59).

Continuité de la fonction valeur W le long de $u = u_-$ et absence de discontinuité de gradient

Proposition 4.10.2 *La fonction Valeur est de classe C^1 dans un voisinage du bord $u = u_-$ pour tout $t \leq t_-$.*

Preuve de la proposition 4.10.2 Dans un voisinage de part et d'autre de $u = u_-$ pour $t < t_-$ les fonctions Valeur sont respectivement de la forme

$$W(t, u, v) = \begin{cases} Q^\varepsilon \check{V} - q^\varepsilon v & \text{pour } u < u_- \quad \text{avec } q^+(u) = (1 + c^-) \frac{K}{u} - 1 \text{ et } q^- = C^- \\ D - C^- v & \text{pour } u \geq u_- \end{cases}$$

Or le long de $u = u_- = \frac{K(1+c^-)}{1+C^-}$, nous avons $q^+(u_-) = C^- = q^-(t)$ et donc $Q^-(u_-)\check{V}(t, u_-) = Q^+(u_-)\check{V}(t, u_-)$. Par ailleurs $Q^+(u_-)\check{V}(t, u_-) = D$ par raccordement de la variété équivoque \mathcal{E}^- sur la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ d'équation $Q^+V = 0$ pour $u \leq u_-$. Il en résulte que

$$Q^\varepsilon \check{V} - q^\varepsilon v \rightarrow D - C^- v \quad \text{lorsque } u \uparrow u_-.$$

Comme la fonction $W(t, u, v) = D - C^- v$ est affine en v , la fonction valeur W ne peut pas présenter pas de discontinuité de gradient le long de $u = u_-$ ■

La continuité le long de $u = u_-$ sera utilisée comme condition au bord pour intégrer l'EDP (3.9).

Remarque 4.10.2 *Au voisinage de $u = u_-$ pour $u < u_-$, nous avons des formules explicites pour les variétés équivoques \mathcal{E}_1^- (la formule (4.55)) et \mathcal{E}_2^- (la formule (4.56)). Vérifions directement la continuité de W le long de $u = u_-$. En reportant les formules explicites (4.55) et (4.56) dans la formule de représentation (4.35), nous obtenons, en notant indifféremment \tilde{q}^- les deux fonctions $\tilde{q}^-(t)$ et $\tilde{q}^-(t, t_0)$,*

$$W(t, u, v) = D \frac{q^\varepsilon(t, u) - \tilde{q}^-}{q^+(u) - \tilde{q}^-} - q^\varepsilon(t, u)v$$

c'est-à-dire

$$W(t, u, v) = \begin{cases} D \frac{q^-(t) - \tilde{q}^-}{q^+(u) - \tilde{q}^-} - q^-(t)v & \text{pour } \varepsilon = -1 \text{ (i.e. } v \leq \check{v}(t, u)) \\ D - q^+(u)v & \text{pour } \varepsilon = +1 \text{ (i.e. } v \geq \check{v}(t, u)) \end{cases} .$$

Or le long de $u = u_-$, nous avons $q^-(t) = q^+(t) = C^-$ et $\tilde{q}^- < C^-$, ce qui conduit à $\check{v}(t, u_-) > 0$ fini¹⁶ dans les formules (4.55) et (4.56) et montre que la fonction Valeur ci-dessous devient

$$W(t, u_-, v) = D - q^+(u)v = D - C^-v \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}.$$

Par conséquent, elle coïncide avec la fonction Valeur triviale (4.59) obtenue à droite du bord $u = u_-$. La figure 4.18 montre comment évolue la fonction Valeur illustrée en figure 4.17, lorsque $u = u_-$.

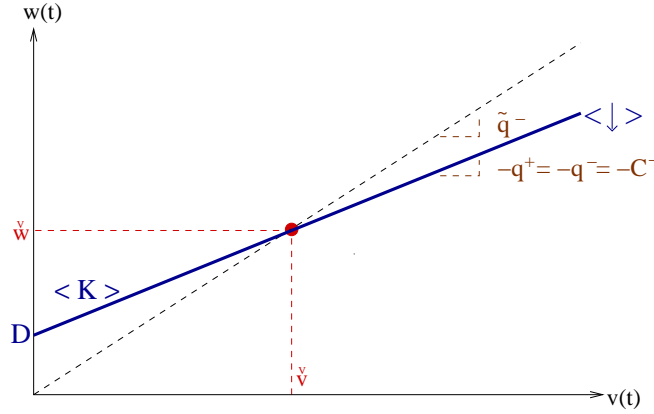


FIG. 4.18 – Une coupe en (v, w) du graphe de la fonction Valeur $W(t, u_-, v)$ pour $t < t_-$.

La continuité de la fonction Valeur le long de $u = u_-$ est ainsi montrée directement pour tout $t \in [t_{u_-}, t_-]$, où¹⁷ t_{u_-} désigne l'instant où, la trajectoire $\tilde{u}_{13}^-(t) = u_+ e^{-\tau^-(t_- - t)}$ dans le cas $t_+ < t_-$ et la trajectoire $\tilde{u}_{23}^-(t) = u_+ e^{-\tau^-(t_+ - t)}$ dans le cas $t_+ > t_-$, intersecte $u = u_-$ (voir la figure 4.16). En utilisant la notation $t_m = \min\{t_-, t_+\}$, nous obtenons

$$t_{u_-} = t_m - \frac{1}{-\tau^-} \ln \left(\frac{1 + C^+}{1 + C^-} \right) .$$

L'analyse par la méthode du jeu qualitatif est ainsi terminée dans chacune des régions.

¹⁶Contrairement à $\check{v}(t, u_d(t)) = +\infty$ pour $t \geq t_-$ (paragraphe « le cas limite où $u(t) = u_d(t) = Ke^{-\tau^-(T-t)}$ », page 174).

¹⁷À l'instar de la remarque 4.8.2.

4.11 Résumé de la solution obtenue et stratégie du trader

4.11.1 Résumé

Une partie de la solution a été donnée dans le paragraphe 4.5.2 (la fonction Valeur et les fonctions $q^-(t)$ et $q^+(u)$). Il nous reste seulement à synthétiser, dans la table 4.1, les résultats obtenues pour les variétés de dimension 2 paramétrées en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$.

domaine du plan (t, u)	EDO / EDP	conditions au bord	solution explicite
$u(t) < u_g(t)$			(4.29)
$u(t) > \min\{u_-, u_d(t)\}$			(4.61)
(4.36)	(3.36)		\mathcal{D} : (4.41)
(4.37)	(3.92)	(4.48)	\mathcal{E}^+ : (4.49)
(4.52)	(3.89) avec $\tau_E = \tau^-$	sur $\partial\mathcal{E}_1^-$, page 186	\mathcal{E}_1^- : (4.55)
(4.53)	(3.89) avec $\tau_E = \tau^-$	sur $\partial\mathcal{E}_2^-$, page 186	\mathcal{E}_2^- : (4.56)
(4.54)	(3.89) avec $\tau_E = \tau^-$	sur $\partial\mathcal{E}_3^-$, page 186	\mathcal{E}_3^- : numérique
(4.39)	(3.133)	paragraphe 4.9.1	\mathcal{F} : numérique

TAB. 4.1 – Une synthèse des résultats relatifs aux valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ pour le call digital.

4.11.2 Discontinuité de la fonction Valeur le long de $u_g(t)$

Pour $u < u_g(t)$, la fonction Valeur est triviale, donnée par $W_g = -q^-v$ (formule (4.29)).

Le long de $u = u_g(t)$, nous avons $Q^- \check{V}(t, u_g(t)) = 0$ (proposition 4.8.1) donc $\check{w}(t, u_g(t)) = -q^-(t)\check{v}(t, u_g(t))$, avec ¹⁸ $\check{v}(t, u_g(t)) > 0$. En $u = u_g(t)$ la fonction Valeur (4.35) s'écrit donc

$$W_d(t, u, v) = (q^\varepsilon(t, u) - q^-(t))\check{v}(t, u) - q^\varepsilon v \quad \text{avec } \varepsilon = \text{signe}(\check{v}(t, u) - v).$$

Il en résulte que

$$\Delta W = W_d(t, u, v) - W_g(t, u, v) = (q^\varepsilon(t, u) - q^-(t))(\check{v}(t, u) - v) .$$

Pour $\varepsilon = -$, i.e. $0 < \check{v} < v$, nous avons $\Delta W = 0$. La fonction Valeur est donc continue de part et d'autre de $u_g(t)$. Ce résultat s'explique simplement, puisque dans ce cas le contrôle optimal du marché est le même, $\tau^* = \tau^-$, de part et d'autre de $u_g(t)$, et aboutit à $M(u(T)) = 0$ dans les deux cas.

Pour $\varepsilon = +$, i.e. $\check{v} > v \geq 0$, nous avons

$$\Delta W = (q^+(u) - q^-(t))(\check{v}(t, u) - v) > 0$$

¹⁸On peut vérifier que $\check{v}(t, u_g(t)) > 0$ dans les formules explicites, à savoir dans (4.41) pour \mathcal{D} , dans (4.49) pour \mathcal{E}^+ , et sur le bord $\partial\mathcal{E}_2^-$ (page 186) pour \mathcal{E}_2^- .

comme le produit de deux termes strictement positifs. En conclusion, la discontinuité du paiement pour $u(T) = K$ se propage au sein de la fonction Valeur le long de la trajectoire $u_g(t)$ pour $v < \check{v}(t, u_g(t))$, et cette discontinuité correspond à une augmentation de la fonction Valeur lorsque u augmente. A gauche de cette trajectoire nous avons $\tau^* = \tau^-$ et $M(u(T)) = 0$, tandis que sur $u_g(t)$, la commande optimale du marché devient $\tau^* = \tau^+ \forall s \in [t, T]$ menant en $u(T) = K$, c'est-à-dire $\tau^*(\cdot) \in \Omega_K(t, u)$, où $M(u(T)) = D$.

4.11.3 Prime de l'option et stratégie du trader

De manière similaire au paragraphe 3.10.2 pour le call vanille, nous allons donner la prime de l'option (1.52) et la stratégie de couverture préconisée et vérifier a posteriori que celle-ci ne comporte pas de point d'accumulation de saut. Le lecteur peut s'aider de la figure 4.16 (par exemple) pour comprendre plus facilement les résultats qui vont être énoncés.

On rappelle que les stratégies du trader ne sont définies (de manière unique) que sur des surfaces semi-perméables à savoir seulement lorsque le marché joue l'une des commandes optimales. Dans le cas contraire, où l'état dérive à l'intérieur de la zone de capture, une discussion sur « une politique judicieuse » à appliquer dans ce cas sera faite dans le paragraphe ???. Tout comme pour le call vanille cette politique ne présentera pas de point d'accumulation de sauts.

Prime de l'option

La fonction Valeur (4.35) avec q^- (4.33) et q^+ (4.34), alliée aux résultats regroupés dans le table 4.1 concernant $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ et aux propriétés $\check{v} \geq 0$ et $\check{w} + ((1 + c^-)\frac{K}{u} - 1)\check{v} = D$ sur $\langle \mathcal{K} \rangle$ (équation (4.9)), nous montrent que la prime de l'option est donnée en variables actualisées par

$$P(u(0)) = \begin{cases} 0 & \text{pour } u(0) < u_g(0) , \\ \check{w}(0, u(0)) + C^+\check{v}(0, u(0)) & \text{pour } u(0) \in [u_g(0), u_+] \\ \check{w}(0, u(0)) + ((1 + c^-)\frac{K}{u} - 1)\check{v}(0, u(0)) = D & \text{pour } u(0) \in [u_+, u_-] \quad (\langle \mathcal{K} \rangle) \\ D & \text{pour } u(0) \geq u_- \end{cases} \quad (4.62)$$

La première propriété qui apparaît est que si $u(0) \geq u_+$, la prime de l'option actualisée (1.52) est $e^{-\rho T}W(0, e^{-\rho T}u(0), 0) = De^{-\rho T}$ et donc que dans ce cas de figure une option digitale ne présente aucun intérêt.

Interprétation financière 4.11.1 *Ce résultat s'explique assez bien par un argument direct.*

Tout d'abord il est clair que si $u(t) > K$, il existe toujours une variation $\tau(\cdot) \in \Omega$ entre t et T telle que $u(T) \geq K$ (pour laquelle le paiement reste égal à D), et ayant à tout instant $t \in [t_0, T]$ le signe opposé à celui de $v(t)$. En fait seuls les $v(t) \geq 0$ ont un sens puisque le paiement est croissant avec u . Dans ce cas une telle trajectoire correspond à une baisse du cours de l'actif (aussi petite soit telle) à chaque instant t , mais terminant en $u(T) \geq K$. Cette baisse du cours de l'actif engendre une perte en valeur du portefeuille, alors que le paiement lui reste égale à D (ne varie pas). Cela conduit à $w(T) < w(t) < D$ et ainsi il n'existe pas de portefeuille de couverture de valeur strictement inférieure à D . Il en découle que le trader n'a jamais intérêt à avoir de l'actif sous-jacent dans son portefeuille et que le portefeuille de couverture triviale $(v, w) = (0, D)$ est optimale. En utilisant l'équation (1.52),

on en déduit que la prime sera $e^{-\rho T}W(0, e^{-\rho T}u(0), 0) = De^{-\rho T}$ et par conséquent qu'aucun call digital ne peut être proposé avec $u(0) > K$, étant donné que dans le cas le plus favorable le souscripteur reçoit seulement D , c'est-à-dire la prime qu'il payé pour souscrire cette option, au taux d'intérêt ρ près.

La borne u_+ s'explique elle par le fait que pour tout $u_+ \leq u(0) < K$ toute variation du cours menant en $u(T) = K$ (qui correspond donc à une faible augmentation relative du cours) et telle que $u(t) \in [u_+, u_-] \forall t \in [0, T]$ ne suffirait pas à compenser les coûts de transactions $C^+\check{v}(0, u(0))$ engendrés par un quelconque investissement en actif sous-jacent.

Par ailleurs la remarque suivante explique également pourquoi dans l'intervalle $u \in [u_+, u_-]$ très petit autour de K (voir l'application numérique 4.17), où la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ avec $\xi^* = 0$ existe, il n'est pas intéressant pour le trader de vendre.

Interprétation financière 4.11.2 Pour $u = u_- = \frac{K(1+c^-)}{1+C^-}$, si le cours finit en $u(T) = K$, la perte liée à cette évolution du cours suivi de la revente en $t = T$ (clôture) est égale à la perte que produirait la vente instantanée de l'actif sous-jacent (on a la relation $q^+ = C^-$). Dans le « petit » intervalle $u \in]K, u_-]$ pour tout t , même si chacune des variations « optimales » du marché correspondent à une baisse du cours, il n'est pas intéressant pour le trader de vendre.

Stratégie du trader

Au vu des résultats obtenus la stratégie préconisée est :

- ➔ dans le cas où $(0, u(0)) \notin \Lambda$ le trader ne fait rien pendant toute la durée du jeu avec respectivement $\check{w}(0, u(0)) = 0$ si $u(0) < u_g(0)$ et $\check{w}(0, u(0)) = D$ si $u(0) > u_g(0)$ pour prime (stratégie triviale).

Dans la région d'intérêt Λ si le marché joue de manière optimale pendant toute la durée du jeu la stratégie du trader est la suivante

- ➔ Pour $u(0) \in [u_g(0), u_+]$ le trader procède à un achat initial (saut) pour passer de $v(0) = 0$ à $v(0^+) = \check{v}(0, u(0))$, puis procède à des transactions infinitésimales (transactions continues) tant que $t < t_+$ pour maintenir l'état sur la variété focale \mathcal{F} dans la zone où celle ci existe. Dans la zone où \mathcal{E}^+ existe, le trader ne fait rien et laisse l'état partir sur la nappe $\langle \tau_g^- \rangle$ si $\tau = \tau^-$ ou procède des transactions infinitésimales positives dans le cas où $\tau \neq \tau^-$ pour maintenir l'état sur la jonction \mathcal{E}^+ .
- ➔ Pour $u(0) > u_+$, $v(t)$ reste égale à 0 tant que $u(t) > u_+$ (soit l'état est dans la région $u(t) \in [u_+, u_-]$ où une variété de type \mathcal{E}^- et la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ avec $\xi^* = 0$ existent, soit l'état se trouve dans la région \mathcal{C} $u(t) > u_-$ où la solution est la solution triviale $v = 0$). Au premier instant où $u(t) < u_+$, le trader procède à un achat à condition toutefois que $t < t_+$ (c'est-à-dire dans la région où \mathcal{E}^+ ou \mathcal{F} existe). Ensuite tant que $u(t) < u_+$
 - pour $t \leq \min\{t_+, t_-\}$, le trader procède à un ajustement en continu du portefeuille,
 - pour $t \in [t_+, t_-]$, le trader procède à un ajustement du portefeuille si $v < \check{v}(t, u)$ mais ne fait rien si $v > \check{v}(t, u)$,
 - pour $t > \max\{t_+, t_-\}$, le trader ne fait rien.

Si le cours retourne à nouveau dans la région $u(t) > u_+$, le trader ne fait rien. Une difficulté apparaît si le cours se met à osciller de part et d'autre de $u(t) = u_+$ avec un point d'accumulation des instants

de franchissement. Dans ce cas le trader doit dès que $u(t) < u_+$ procéder à un saut, et par conséquent la commande du trader possède un point d'accumulation de sauts.

Si le cours franchit $u(t) > u_-$ en un instant $t < t_-$, le trader procède à la vente de l'actif sous-jacent contenu dans son portefeuille (s'il en possède). Si le cours retourne à nouveau dans la région $u(t) > u_+$, le trader ne fait rien donc reste en $v = 0$ et ainsi si le cours revenait à franchir $u(t) > u_-$, le trader ne fait rien et a fortiori il en est de même si le cours se met à osciller de part et d'autre de $u(t) = u_-$ (v reste égal à 0).

Il reste un cas de figure à évoquer à savoir ce qui se passe à chaque fois que le cours traverse la « bande » étroite $[u_+, u_-]$ vers l'extérieur. Dans ce cas le trader procède à une transaction instantanée (saut positif) dès que $u(t) < u_+$ avec $t < t_+$ et à une vente instantanée (saut négatif jusqu'à $v = 0$) dès que $u(t) < u_-$ avec $t < t_-$. Par conséquent la stratégie du trader peut comporter un nombre important de saut. Toutefois, le temps pour traverser cette bande $[u_+, u_-]$ est borné inférieurement et l'horizon du jeu est fini, d'où il en résulte, que le temps entre deux sauts est fini et que le nombre de sauts est borné.

Nous avons ainsi vérifié à posteriori que $\xi \in \Xi$ à savoir que commande de trader ne possède pas de point d'accumulation de saut, à l'exception du cas où le cours se met à osciller de part et d'autre de $u(t) = u_+$ avec une fréquence tendant vers l'infini. Toutefois cette difficulté est purement théorique puisqu'en pratique les prix sont quantifiés. Nous pouvons donc supprimer cette difficulté en supposant que l'ensemble des $\tau(\cdot)$ admissibles est l'ensemble des fonctions constantes par morceaux dans Ω avec des instants de commutation isolés. C'est bien un ensemble clos par concaténation, donc la technique de la programmation dynamique (le « tenet of transition ») sur laquelle s'appuie notre développement demeure inchangée. Et les commandes extrémales trouvées ci-dessus pour $\tau(\cdot)$ peuvent toutes être choisies dans cet ensemble.

4.11.4 Coûts de clôture : des cas particuliers

On rappelle que, pour un call digital, la clôture consiste, quelque soit $u(T)$ à vendre l'actif sous-jacent restant dans le portefeuille à l'instant T , et de ce fait c^+ n'apparaît pas.

En absence de coûts de clôture : rien de particulier

Il suffit de faire $c^- = 0$ tout au long de l'analyse (depuis le paragraphe 4.3), ce qui n'engendre aucune modification particulière ¹⁹.

Le cas $c^- = C^-$

Intéressons nous au cas particulier où les taux des coûts de clôture sont les mêmes que ceux d'une transaction. Ici, cela revient à s'intéresser à $c^- = C^-$, ce qui engendre les modifications notables suivantes : $t_- = T$, $q^- = C^-$ (donc $\langle \tau_g^- \rangle$ et $\langle \tau_d^- \rangle$ n'existent plus au profit d'une nappe $\langle \downarrow \rangle$ pendant toute la durée du jeu), et $u_- = K$. Les différentes régions et variétés de dimension 2 paramétrées en $(\tilde{v}(t, u), \tilde{w}(t, u))$ qui apparaissent dans ce cas sont illustrées sur la figure 4.19.

¹⁹On rappelle que c^+ n'intervient pas, puisque le trader doit vendre l'actif sous-jacent restant quelque soit $u(T)$.

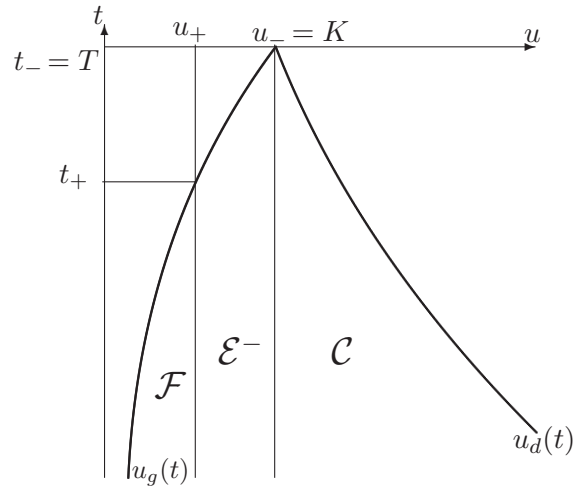


FIG. 4.19 – Une vue dans le plan (u, t) des différentes variétés de dimension 2 lorsque $c^- = C^-$.

Dans le cas particulier où $C^- = c^- = 0$ (absence de coûts), $t_+ = t_- = T$, $u_- = u_+ = K$, et la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ n'existe ponctuellement qu'en $u = K$ ($q^+(u) = \frac{u}{K} - 1$ atteint $C^+ = C^- = 0$ dès que u quitte K). Dans la région d'intérêt on obtient alors une variété focale \mathcal{F} pour $u < K$ et une variété \mathcal{C} pour $u > K$.

4.12 Le put digital

Chapitre 5

Formule de représentation et vérification à l'aide de la solution de viscosité

Nous allons développer tout ce chapitre sur l'application au cas des options d'achat (call vanille et digital). Le cas des options de vente (put) étant similaire, mutatis mutandis. Nous allons tout d'abord montrer que, dans les zones du plan (t, u) où $q^- \neq q^+$, les différentes variétés singulières de dimension 2 paramétrées en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ peuvent s'obtenir comme solution d'un même système d'EDP couplées linéaires du premier ordre ¹. Allié à la formule de représentation (4.35) obtenue lors de l'étude du jeu qualitatif (chapitres 3 et 4), nous avons alors un théorème de représentation complet de la fonction Valeur W , qui fournit une fonction candidate à être solution de viscosité de l'équation d'Isaacs de notre jeu \mathcal{G} .

Cependant, le caractère dégénéré de l'équation d'Isaacs de notre jeu \mathcal{G} va nous obliger à introduire, via une transformation introduisant un temps artificiel, un jeu standard \mathcal{J} sans impulsion de même valeur que le jeu \mathcal{G} et dont l'équation d'Isaacs correspond à une forme différentielle d'une inéquation quasi-variationnelle (DIQV). Nous montrons alors que la fonction Valeur candidate W est bien une solution de viscosité (discontinue pour un call digital) de cette DIQV. Toutefois, l'unicité de la solution reste une question ouverte.

5.1 Système d'EDP satisfait par les variétés singulières

Par commodité nous décidons, le long de tout ce paragraphe 5.1, de désigner par \mathbb{V} toute variété de dimension 2 de la forme $\{t, u, \check{v}(t, u), \check{w}(t, u)\}$ dans \mathbb{R}^4 . Nous allons montrer que le système d'EDP couplé linéaire du premier ordre (3.133) vérifié par la variété focale peut être étendu à toute variété \mathbb{V} dans les zones du plan (t, u) où $q^- \neq q^+$, en remplaçant simplement les quantités C^ε , $\varepsilon \in \{+, -\}$, par les fonctions $q^\varepsilon(t, u)$ (qui dépendent de l'option choisie). L'hypothèse $q^- \neq q^+$ est implicite dans tout ce paragraphe 5.1, sauf mention explicite du contraire.

¹Lorsque $q^+ = q^-$, c'est-à-dire dans la région $\{(t, u) \mid u \geq \max\{u_d(t), u_-\}\}$ pour le call digital, nous avons la formule explicite triviale (4.61) $\check{V}(t, u) = (0, D)^t$, qui, au demeurant, satisfait la forme (5.2) du système d'EDP (5.3) à venir.

5.1.1 Notations

Les notations utilisées sont celles du paragraphe 3.9.1 (page 134) où l'on remplace C^ε , $\varepsilon \in \{+, -\}$, par les fonctions $q^\varepsilon(t, u)$, données par les formules (3.57) pour le call vanille, et les formules (4.33) et (4.34) pour le call digital. On introduit donc :

- Les vecteurs $Q^\varepsilon = (q^\varepsilon \ 1)$, $\varepsilon \in \{+, -\}$
- Les matrices carrées 2×2 inversibles Q et \mathcal{T} où

$$Q = \begin{pmatrix} Q^+ \\ Q^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^+ & 1 \\ q^- & 1 \end{pmatrix} \text{ s'inverse en } Q^{-1} = \frac{1}{q^+ - q^-} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -q^- & q^+ \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{T} = \frac{1}{q^+ - q^-} \begin{pmatrix} \tau^+ q^+ - \tau^- q^- & \tau^+ - \tau^- \\ -(\tau^+ - \tau^-) q^+ q^- & \tau^- q^+ - \tau^+ q^- \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} \tau^+ & 0 \\ 0 & \tau^- \end{pmatrix} Q. \quad (5.1)$$

- Le système d'EDP couplé linéaire du premier ordre (système d'EDP fondamental)

$$Q\check{V}_t + \begin{pmatrix} \tau^+ & 0 \\ 0 & \tau^- \end{pmatrix} Q(\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

qui, en multipliant à gauche par Q^{-1} , est équivalent au système d'EDP

$$\check{V}_t + \mathcal{T}(\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Par la suite, nous aurons besoin de nous appuyer sur les relations (3.129) ainsi que sur les propriétés

$$Q^\varepsilon \mathcal{T} = \tau^\varepsilon Q^\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}, \quad (5.4)$$

$$Q^\varepsilon \mathbf{1} = (1 + q^\varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}. \quad (5.5)$$

Propriété 5.1.1 Lorsque $q^+ = q^-$, noté q , la matrice Q n'est pas inversible, et le système (5.2) devient

$$(q \ 1)\check{V}_t + \tau^\varepsilon(q \ 1)[\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}] = 0 \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}.$$

Par différence des deux équations, ce système conduit à

$$\begin{cases} (q \ 1)\check{V}_t = 0, \\ (q \ 1)[\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}] = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Remarque 5.1.1 En l'absence total de coûts, $q^+ = q^- = q = 0$, les équations (5.6) conduisent à

$$\check{w}_t = 0 \quad \text{et} \quad \check{v} = \check{w}_u u.$$

Au raccordement \mathbb{V} , où $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u) = W(t, u, \check{v}(t, u)))$, nous retrouvons ainsi les solutions (3.6) et (3.5).

5.1.2 Les variétés \mathcal{D} , \mathcal{E}^+ , \mathcal{E}^- et \mathcal{F} , vérifient le système d'EDP (5.3)

Lors de l'analyse du jeu qualitatif en dimension 4 dans l'espace d'état (t, u, v, w) , nous avons caractérisé dans la région d'intérêt du plan (t, u) , des variétés \mathbb{V} correspondant à l'intersection de deux nappes de dimension 3. Cette analyse en dimension 4, aussi bien pour une option vanille (chapitre 3) que pour une option digitale (chapitre 4), nous a conduit à identifier une dispersion, des variétés équivoques, ainsi qu'une variété focale. Dans cette partie, nous allons montrer que, indépendamment de leur nature, ces différentes variétés vérifient naturellement le système d'EDP (5.3) (par construction, à savoir par des propriétés géométriques locales, indépendamment des conditions au bord d'intégration).

La table 5.1 récapitule les différentes catégories de variétés singulières \mathbb{V} obtenues, sans tenir compte des conditions au bord d'intégration ²

	Call vanille	Call digital
Dispersion	$\mathcal{D} = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$	$\mathcal{D} = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle$
Equivoques	$\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$	$\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle$
	$\mathcal{E}^- = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$	$\mathcal{E}^- = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$
Focales	$\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$	$\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$

TAB. 5.1 – Rappels des différentes variétés \mathbb{V} identifiées.

Théorème 5.1.2 Partout où $q^+ \neq q^-$, si la variété \mathbb{V} est soit

1. parcourue par des trajectoires $\tau = \tau^-$ et $\tau = \tau^+$

$$\text{call vanille et call digital : } \mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle.$$

2. parcourue par des trajectoires $\tau = \tau^+$ joignant la nappe $\langle \tau^- \rangle = \langle \tau_g^- \rangle$ ³.

$$\text{call vanille : } \mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau^- \rangle.$$

$$\text{call digital : } \mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle.$$

3. parcourue par des trajectoires $\tau = \tau^-$ joignant la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$

$$\text{call digital : } \mathcal{E}^- = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \downarrow \rangle.$$

4. L'intersection des nappes $\langle \mathcal{K} \rangle$ et $\langle \tau^- \rangle = \langle \tau_g^- \rangle$

$$\text{call digital : } \mathcal{D} = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle.$$

5. L'intersection des nappes $\langle \tau^+ \rangle$ et $\langle \tau^- \rangle = \langle \tau_g^- \rangle$

²Par exemple, nous ne distinguons pas les variétés \mathcal{E}_1^- , \mathcal{E}_2^- , \mathcal{E}_3^- identifiées (dans le paragraphe 4.8) lors de l'analyse du jeu qualitatif en dimension 4 pour un call digital.

³Par la remarque 4.3.1, les deux nappes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau_g^- \rangle$ ont la même équation et les mêmes conditions au bord, sur la frontière de la cible en $t = T$.

$$\text{call vanille} : \mathcal{D} = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \tau^- \rangle.$$

alors elle satisfait le système d'EDP (5.3).

Preuve du théorème 5.1.2.

⇒ Preuve du point 1.

Si la variété \mathbb{V} est parcourue par des trajectoires $\tau = \tau^\varepsilon$, alors celle-ci satisfait la dynamique avec $\tau = \tau^\varepsilon$ et C^η où $\eta = \text{signe}(\xi)$. Cette dynamique s'écrit

$$\begin{cases} \dot{v} &= \check{v}_t + \tau^\varepsilon \check{v}_u u &= \tau^\varepsilon \check{v} + \xi, \\ \dot{w} &= \check{w}_t + \tau^\varepsilon \check{w}_u u &= \tau^\varepsilon \check{w} - C^\eta \xi, \end{cases} \quad (5.7)$$

où nous notons que ξ vérifie (du fait de la maximisation (3.27))

$$\forall \varepsilon \in \{+, -\} : \begin{cases} \text{signe}(\xi) = \eta & \text{si } q^\varepsilon = C^\eta, \\ \xi = 0 & \text{sinon } (q^\varepsilon \in]C^-, C^+[). \end{cases}$$

Il en résulte la propriété

$$(q^\varepsilon - C^\eta)\xi = 0 \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}. \quad (5.8)$$

En multipliant la première équation de (5.7) par q^ε et en l'ajoutant à la seconde, on obtient l'équation

$$Q^\varepsilon \check{V}_t + \tau^\varepsilon Q^\varepsilon \check{V}_u u = \tau^\varepsilon Q^\varepsilon S \check{V} + (q^\varepsilon - C^\eta)\xi,$$

qui conduit, en se servant de la propriété (5.8), à l'équation

$$Q^\varepsilon \check{V}_t + \tau^\varepsilon Q^\varepsilon [\check{V}_u u - S \check{V}] = 0. \quad (5.9)$$

Par hypothèse, la variété \mathbb{V} est ici parcourue à la fois par des trajectoires τ^+ et τ^- . Ainsi celle-ci satisfait l'équation (5.9) pour $\varepsilon = +$ et $\varepsilon = -$, d'où il en résulte le système d'EDP (5.2) équivalent au système (5.3).

La variété focale $\mathcal{F} = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ vérifie le point 1 du théorème 5.1.2 avec $q^+ = C^+ \neq q^- = C^-$.

⇒ Preuve du point 2.

Le fait que la variété \mathbb{V} soit ici parcourue par des trajectoires $\tau = \tau^+$ implique l'équation (5.9) pour $\varepsilon = +$. Par ailleurs cette variété est par hypothèse dessinée sur la nappe $\langle \tau^- \rangle = \langle \tau_g^- \rangle$ d'équation $Q^- V = 0$, qui admet (3.53) pour normale semi-perméable. En $v = \check{v}$, la normale (3.53) qui s'écrit

$$\nu_{\tau^-} = (-\tau^- Q^- S \check{V}, 0, q^-, 1)^t,$$

est de ce fait une normale au raccordement \mathbb{V} . Par conséquent, cette normale est orthogonale aux

tangentes à la variété \mathbb{V} , donc en particulier orthogonale à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \check{v}_t \\ \check{w}_t \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \check{v}_u \\ \check{w}_u \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

On obtient alors le système d'équations suivant vérifié par la variété \mathbb{V} :

$$\begin{cases} Q^- \check{V}_t - \tau^- Q^- \mathcal{S} \check{V} = 0, \\ Q^- \check{V}_u = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

En multipliant la seconde équation par $\tau^- u$ et en l'ajoutant à la première, ces deux équations impliquent

$$Q^- \check{V}_t + \tau^- Q^- [\check{V}_u u - \mathcal{S} \check{V}] = 0. \quad (5.12)$$

Les équations (5.9) pour $\varepsilon = +$ et (5.12) sont conjointement équivalentes au système d'EDP (5.2) impliquant le système (5.3).

Les variétés équivoques $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$ (call vanille) et $\mathcal{E}^+ = \langle \uparrow \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle$ (call digital) sont définies comme le raccordement d'une nappe de saut positif $\xi^+ \geq 0$, donc avec $q^+ = C^+$, sur la variété $\langle \tau^- \rangle = \langle \tau_g^- \rangle$ (nappe émergente formée de trajectoires $\tau^* = \tau^-$) d'équation $Q^- V = 0$, où $q^-(t) = (1+c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1 \in]C^-, C^+[$ (étant donné que $\xi = 0$ sur $\langle \tau^- \rangle$). Donc à fortiori $q^+ \neq q^-$. En outre, par la proposition 3.7.4, les variétés \mathcal{E}^+ sont parcourues par des trajectoires $\tau = \tau^+$ (τ extrémal engendrant des trajectoires transverses à celle de la nappe $\langle \tau^- \rangle$). Ainsi ces variétés \mathcal{E}^+ vérifient les hypothèses du point 2 du théorème 5.1.2.

➔ Preuve du point 3.

Comme la variété \mathbb{V} est par hypothèse parcourue par des trajectoires $\tau = \tau^-$, l'équation (5.9) pour $\varepsilon = -$ s'avère satisfaite. La variété \mathbb{V} est en outre dessinée sur la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ (donc $Q^+ \check{V} = D$ par appartenance à cette nappe), qui admet pour normale semi-perméable ν_K (4.12), dont l'expression est rappelée ci-dessous

$$\nu_K = \left(0, -\frac{1}{u} Q^+ \mathcal{S} V, q^+, 1 \right)^t.$$

De même que pour le point précédent, en écrivant que les deux tangentes (5.10) sont orthogonales à la normale ν_K au raccordement \mathbb{V} , nous obtenons le système d'équations

$$\begin{cases} Q^+ \check{V}_t = 0, \\ Q^+ \check{V}_u - \frac{1}{u} Q^+ \mathcal{S} \check{V} = 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

En multipliant la seconde équation par $\tau^+ u$ et en l'ajoutant à la première, ces deux équations conduisent à l'équation

$$Q^+ \check{V}_t + \tau^+ Q^+ [\check{V}_u u - \mathcal{S} \check{V}] = 0. \quad (5.14)$$

Comme précédemment, les équations (5.9) pour $\varepsilon = -$ et (5.14) définissent le système d'EDP (5.3).

La variété $\mathcal{E}^- = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \downarrow \rangle$ satisfait les hypothèses du point 3, puisque celle-ci a été construite le long de trajectoires $\tau = \tau^-$ (voir le paragraphe 4.8.2), et correspond au raccordement d'une nappe de saut négatif (donc avec $q^- = C^-$) sur la variété $\langle \mathcal{K} \rangle$ d'équation $Q^+V = D$, où $q^+(u) = (1+c^-)\frac{K}{u} - 1 \in]C^-, C^+[$ (puisque $\xi^* = 0$ sur $\langle \mathcal{K} \rangle$), donc à fortiori $q^+ \neq q^-$.

⇒ Preuve du point 4.

La variété \mathbb{V} étant de codimension 2, les normales ν_{τ^-} (3.53) et ν_K (4.12) aux hypersurfaces $\langle \tau_g^- \rangle$ et $\langle \mathcal{K} \rangle$, sont chacune des normales au raccordement \mathbb{V} . Ainsi les tangentes (5.10) à la variété \mathbb{V} de dimension 2 sont orthogonales aux deux normales ν_{τ^-} et ν_K , ce qui conduit respectivement aux équations (5.11) et (5.13), conjointement équivalentes ⁴ au système (5.3).

La dispersion $\mathcal{D} = \langle \mathcal{K} \rangle \cap \langle \tau_g^- \rangle$, valide dans la région (4.36), vérifie le point 4 du théorème avec

$$q^+(u) = (1+c^-)\frac{K}{u} - 1 \neq q^-(t) = (1+c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1 \text{ (on rappelle que } q^+(u_d(t)) = q^-(t)\text{)}.$$

⇒ Preuve du point 5.

De même que pour la preuve du point précédent, l'orthogonalité de ν^- avec les tangentes (5.10) implique l'équation (5.13). À l'intersection \mathbb{V} , la normale ν_{τ^+} (3.54) à la nappe $\langle \tau^+ \rangle$ s'écrit

$$\nu_{\tau^+} = \left(-\tau^+Q^+(t)\mathbf{1}(\check{v} - u), -Q^+(t)\mathbf{1}, q^+(t), 1 \right)^t.$$

L'orthogonalité de ν_{τ^+} avec les tangentes (5.10) conduit aux équations

$$\begin{cases} Q^+\check{V}_t - \tau^+Q^+\mathbf{1}(\check{v} - u) = 0, \\ Q^+\check{V}_u - Q^+\mathbf{1} = 0. \end{cases}$$

En multipliant la seconde équation par τ^+u et en l'ajoutant à la première (et en nous servant par ailleurs de la relation $\mathbf{1}\check{v} = S\check{V}$ (3.129)), nous obtenons l'équation

$$Q^+\check{V}_t + \tau^+ [Q^+\check{V}_u u - Q^+S\check{V}] = 0,$$

qui, avec l'équation (5.13), conduit au système (5.3).

La dispersion $\mathcal{D} = \langle \tau^+ \rangle \cap \langle \tau^- \rangle$ du call vanille, valide dans la région (3.60), vérifie le point 5 du théorème avec $q^\varepsilon(t) = (1+c^\varepsilon)e^{\tau^\varepsilon(T-t)} - 1$ non nul ⁵ et du signe de ε , donc à fortiori $q^+ \neq q^-$.

La preuve du théorème 5.1.2 est ainsi achevée. ■

⁴bien évidemment, sous la condition implicite que $q^+ \neq q^-$.

⁵Sauf en $t = T$ dans le cas où $c^\varepsilon = 0 \forall \varepsilon \in \{+, -\}$. Mais dans ce cas, $u_g(T) = \frac{K}{1+c^+} = K$ et $u_d(T) = \frac{K}{1+c^-} = K$, et donc en $t = T$, la variété \mathcal{D} se réduit au seul point $u = K$ (voir par exemple la figure (3.8)). Ce cas n'est donc pas gênant.

Nous avons également vérifié « à la main », par différenciation directe, que les formules explicites $\check{V}(t, u)$ obtenues ⁶ pour chacune des variétés \mathcal{D} , \mathcal{E}^- , \mathcal{E}^+ satisfont effectivement le système d'EDP (5.3). Quant à la variété \mathcal{F} , c'est sa seule caractérisation.

5.1.3 Les régions « triviales »

Dans les régions « triviales », où la frontière de la zone de capture (la couverture) est caractérisée par une nappe unique, nous avons recours à une vérification par différenciation directe à partir des formules explicites des valeurs $\check{V}(t, u) = (\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))^t$.

Pour le call digital, la fonction q^+ (4.34) n'a pas encore été définie en dehors de la région d'intérêt Λ (4.31), où l'on a $\check{v} = 0$, donc $\varepsilon = -$ dans la formule de représentation (4.35). Une extension continue de q^+ sera définie infra (dans le paragraphe 5.2.2), avec $q^+ \neq q^-$ pour $u \leq u_g(t)$ (à gauche de la région d'intérêt) et $q^+ = q^-$ pour $u \geq u_d(t)$ (à droite de la région, d'intérêt). Pour cette raison, nous nous plaçons dès à présent dans ce cas.

➔ À gauche de la région d'intérêt, le vecteur $\check{V}(t, u) = (0, 0)^t$ (formule (3.64) pour le call vanille et formule (4.25) pour le call digital) fournit une solution triviale du système d'EDP (5.3).

➔ À droite de la région d'intérêt pour le call vanille, nous avons $\check{V}(t, u) = (u, u - K)^t$ (formule (3.64)) et donc

$$\check{V}_t + \mathcal{T}(\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}) = \mathcal{T} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u - K \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

➔ Dans la région $\{ (t, u) \mid u(t) \geq \max\{u_d(t), u_-\} = \max\{Ke^{-\tau^-(T-t)}, \frac{K(1+c^-)}{1+C^-}\} \}$ pour le call digital, nous avons $q^+ = q^-$ et la formule explicite triviale $\check{V}(t, u) = (0, D)^t$ (4.61). Cette dernière vérifie

$$\check{V}_t = \check{V}_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

donc trivialement les équations (5.6) (et par incidence le système d'EDP (5.2)).

5.2 Théorème de représentation de la fonction Valeur W

La formule de représentation (4.35) et le système d'EDP (5.3), fournissent à présent un théorème de représentation complet de la fonction Valeur

Théorème 5.2.1 *La fonction Valeur W est, pour tout (t, u, v) , donnée par*

$$W(t, u, v) = \check{w}(t, u) + q^\varepsilon(t, u)(\check{v}(t, u) - v) = Q^\varepsilon(t, u)\check{V}(t, u) - q^\varepsilon(t, u)v \quad \text{avec } \varepsilon = \text{signe}(\check{v}(t, u) - v) ,$$

où les fonctions $q^\varepsilon(t, u)$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, dépendent de l'option étudiée, et où les valeurs $\check{V}(t, u)$ en (v, w) sur la variété \mathbb{V} satisfont

⁶Les références à ces formules sont toutes regroupées dans la table 3.1 pour le call vanille, et la table 4.1 pour le call digital.

- ⇒ le système d'EDP couplé linéaire du premier ordre (5.3) dans toute région où $q^+ \neq q^-$,
- ⇒ les équations $\check{V}_t = 0 = \check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}$ (voir remarque 5.1.1) dans la région où $q^+ = q^-$ (i.e. où la matrice \mathcal{T} n'est pas définie),

avec les conditions au bord appropriées.

Remarque 5.2.1 Nous aurions pu utiliser le système d'EDP (5.2) même lorsque $q^+ = q^-$ (propriété 5.1.1). La raison pour laquelle nous avons utilisé le système d'EDP (5.3) est que ce dernier à la forme d'une équation d'évolution⁷ directement exploitable numériquement.

5.2.1 Conditions au bord pour le call vanille

Les fonctions q^+ et q^- sont données par les formules (3.57), avec $q^+ \neq q^- \forall (t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$. Le système d'EDP (5.3) peut donc être initialisé avec

$$\check{V}(T, u) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } u \leq u_g(T) = \frac{K}{1+c^-} \quad (\text{formule (3.64)}), \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -c^- \end{pmatrix} \frac{(1+c^+)u-K}{c^+-c^-} & \text{si } \frac{K}{1+c^-} \leq u \leq \frac{K}{1+c^+} \quad (\text{formule (3.31)}), \\ \begin{pmatrix} u \\ u-K \end{pmatrix} & \text{si } u \geq u_d(T) = \frac{K}{1+c^+} \quad (\text{formule (3.65)}), \end{cases} \quad (5.15)$$

qui correspond à la « séparatrice » de la figure 3.1.

Remarque 5.2.2 L'unicité de la solution du système d'EDP (5.3) pour les conditions au bord (5.15) se fait par un argument semblable (en plus simple) à celui développé dans l'annexe A.4 pour le call digital.

Remarque 5.2.3 L'article [Ber05b] donne les conditions au bord $(\check{v}(T, u), \check{w}(T, u))$ ⁸ (ainsi que les fonctions de coût terminal $N(u, v)$) pour les options vanilles (call ou put), à la fois pour un paiement en nature et en espèces.

5.2.2 Le cas du call digital

Extension continue de la fonction q^+ en dehors de Λ

Pour le call digital, la fonction q^- est donnée par la formule (4.33), et la fonction q^+ , donnée par la formule (4.34), n'est pour l'instant définie que dans la région d'intérêt Λ . Pour énoncer le théorème de représentation sous la forme du théorème 5.2.1, nous avons besoin de définir la fonction q^+ pour tout (t, u) , par le biais d'une extension continue en dehors de Λ .

⁷C'est également sous cette forme que l'EDP fondamentale a d'abord été trouvée pour \mathcal{F} , puis étendue à \mathcal{D} et \mathcal{E} .

⁸Notée $(\check{v}(u), \check{w}(u))$ dans [Ber05b], en l'absence de confusion possible.

Pour cette raison, nous divisons l'espace (t, u) en trois régions $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ où l'ensemble Γ_2 est défini par

$$\Gamma_2 = \{ (t, u) \mid u(t) \in [\{\max\{u_g(t), u_+\}, \min\{u_d(t), u_-\}\}] \forall t \in [0, T] \}$$

et où les ensembles Γ_1 et Γ_3 sont respectivement localisés à gauche et à droite de l'ensemble Γ_2 dans le plan (u, t) , comme cela est représenté sur la figure (5.1) dans les deux cas $t_- \leq t_+$ et $t_+ \leq t_-$.

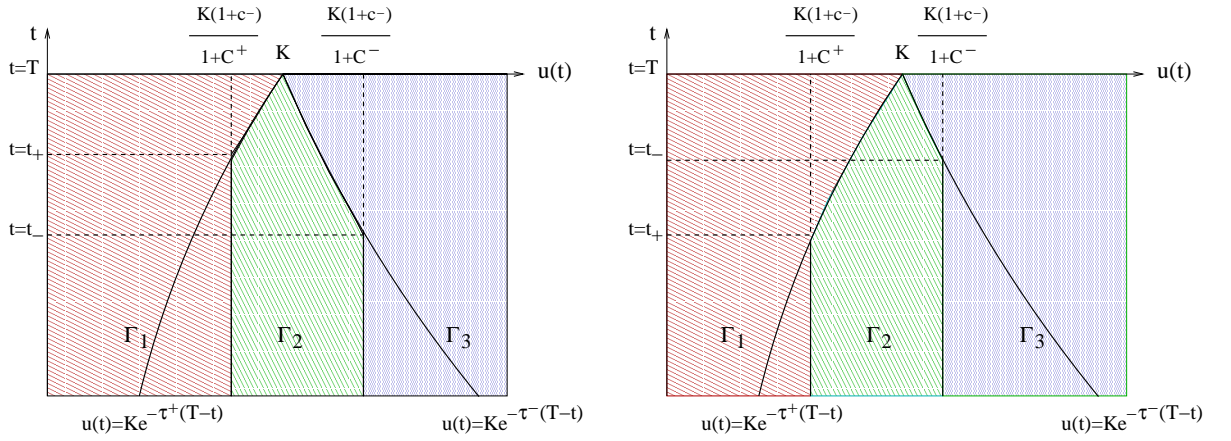


FIG. 5.1 – Schéma des ensembles $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ dans le plan (u, t) .

Il est commode d'étendre la fonction q^+ (4.34) continûment à tout le plan (t, u) , de la manière suivante

$$q^+(t, u) = \begin{cases} \min\{(1+c^-)e^{\tau^+(T-t)} - 1, C^+\} & \text{dans la région } \Gamma_1, \\ (1+c^-)\frac{K}{u} - 1 & \text{dans la région } \Gamma_2, \\ q^-(t) = \max\{(1+c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1, C^-\} & \text{dans la région } \Gamma_3. \end{cases} \quad (5.16)$$

Il est à noter que dans chacune des régions, les fonctions q^ε , $\varepsilon \in \{+, -\}$, vérifient bien la propriété 5.5.

Notons que :

- ➔ La région Γ_1 correspond à la région dans laquelle les fonctions $q^+(t)$ (5.16) et $q^-(t)$ (4.33) admettent des dérivées partielles en t de la forme

$$\forall \varepsilon \in \{+, -\} : q_t^\varepsilon = \begin{cases} -(1+\tau^\varepsilon)q^\varepsilon & \text{si } t > t_\varepsilon \quad (\text{équation adjointe (3.29)}) , \\ 0 & \text{si } t < t_\varepsilon . \end{cases}$$

Il en résulte la propriété suivante

Propriété 5.2.2 Dans la région Γ_1 les expressions des dérivées partielles des fonctions q^ε coïncident avec celles des fonctions $q^\varepsilon(t)$ (3.57) apparaissant dans le call vanille pour tout (t, u) .

Remarque 5.2.4 Ce choix de l'extension $q^+(t) = \min\{(1 + c^-)e^{\tau^+(T-t)} - 1, C^+\}$ à gauche de la région d'intérêt pour le call digital nous permettra de traiter très rapidement le call vanille par l'approche à l'aide de solution de viscosité, une fois cette même approche effectuée pour le call digital. Par ailleurs cette extension à un sens puisque $q^+(t) = \min\{(1 + c^-)e^{\tau^+(T-t)} - 1, C^+\}$ correspond à la proportion de la perte relative contre $\tau = \tau^+$ si le trader ne possède pas un investissement suffisant (c'est-à-dire si $v < \check{v} = 0$), suivant qu'il soit optimal ($q^+ = C^+$) ou non (l'autre forme) pour le trader de ramener l'investissement v à $\check{v} = 0$ via un achat instantané.

- ⇒ La région Γ_2 correspond naturellement à la région où la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ existe.
- ⇒ La région $\Gamma_3 = \{(t, u) \mid u(t) \geq \min\{u_d(t), u_-\}\}$ est celle où $q^+ = q^-$ (donc où la matrice \mathcal{T} (5.1) et le système d'EDP (5.3) ne sont pas définis). Dans la région Γ_3 , la fonction Valeur est triviale, donnée par la formule $W = D - q^-(t)v$ (4.59).

La figure 5.2 illustre la séparation du plan (u, t) en cinq régions suivant l'expression prise à présent par la fonction $q^+(t, u)$ (5.16).

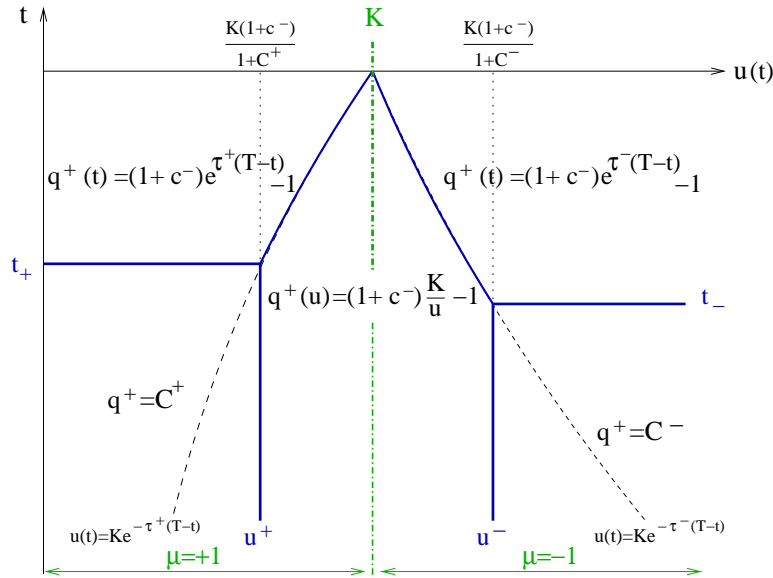


FIG. 5.2 – Les régions du plan (u, t) suivant l'expression prise par la fonction $q^+(t, u)$ (5.16).

Il est à noter également qu'en introduisant $\mu = \text{signe}(K - u)$, c'est-à-dire en séparant en deux le plan (u, t) par rapport à la droite $u = K$, nous pouvons (voir la figure 5.2 pour s'en convaincre) regrouper les différentes formes prises par la fonction $q^+(t, u)$ (5.16) sous la formule unique suivante

$$q^+(t, u) = \mu \min \left\{ \mu[(1 + c^-)e^{\tau^\mu(T-t)} - 1], \mu C^\mu, \mu[(1 + c^-)\frac{K}{u} - 1] \right\} \quad \forall (t, u) .$$

Théorème de représentation

Toutefois, nous décidons de ne nous servir que d'une partie de l'extension de la fonction q^+ . En effet, afin de se prémunir contre le risque d'utiliser, le système d'EDP (5.3) et par incidence la matrice \mathcal{T} dans une région où celle-ci n'est pas définie (i.e. dans la région Γ_3 où $q^+ = q^-$), nous prenons la précaution, pour le call digital, de reformuler le théorème 5.2.1 de représentation sous la forme suivante

Théorème 5.2.3 *La fonction Valeur W est, pour tout (t, u, v) , donnée par*

$$W(t, u, v) = \begin{cases} \check{w}(t, u) + q^\varepsilon(t, u)(\check{v}(t, u) - v) = Q^\varepsilon(t, u)\check{V}(t, u) - q^\varepsilon(t, u)v & \text{dans la région } (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) , \\ D - q^-(t, u)v & \text{dans la région } \Gamma_3 , \end{cases}$$

avec, $\varepsilon = \text{signe}(\check{v} - v)$, les fonctions q^ε données par les formules (5.16) et (4.33), et $\check{V}(t, u)$ solution du système d'EDP couplé linéaire du premier ordre (5.3) avec les conditions au bord appropriées.

Conditions au bord appropriées

Remarquons tout d'abord que nous ne pouvons pas, à l'instar du call vanille (5.15), choisir les conditions au bord en $t = T$ en raison de la région Γ_3 où le système d'EDP (5.3) n'est pas défini. Les conditions au bord sont données par $Q^-\check{V} = 0$ le long de la trajectoire $u = u_g(t)$ (propriété 4.8.1) et par $Q^+\check{V} = D$ (nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$) sur la frontière entre Γ_2 et Γ_3 (figure 5.1). Dans l'annexe A.1 ces conditions au bord sont rappelées et l'unicité de la solution du système d'EDP (5.3) pour ces conditions au bord est prouvée dans l'annexe A.4.

5.2.3 Une transition vers l'approche par solution de viscosité

Le théorème 5.2.3 fournit pour le call digital une fonction candidate à être *une* solution de viscosité discontinue⁹ de l'équation d'Isaacs associée à notre jeu impulsif minimax \mathcal{G} . Le reste de ce chapitre est en grande partie consacré à la vérification à l'aide de solution de viscosité. Cette même vérification pour le call vanille est beaucoup plus simple (elle comprend beaucoup moins de régions différentes), et sera condensée à la fin du chapitre (paragraphe 5.5). Intéressons nous à présent à l'équation d'Isaacs du jeu \mathcal{G} .

5.3 Équation d'Isaacs d'un jeu \mathcal{J} de même Valeur que \mathcal{G}

5.3.1 L'équation d'Isaacs du jeu \mathcal{G} s'avère dégénérée.

Nous avons évoqué dans le chapitre 2 (section 2.2.2) que pour un jeu différentiel sans impulsion, la fonction valeur W (1.51) peut s'obtenir comme la solution de viscosité de l'équation d'Isaacs (2.6) associée à ce jeu. Sans la partie impulsif de la dynamique¹⁰, l'équation d'Isaacs (2.6) de notre

⁹Au sens de G.Barles [Bar94].

¹⁰Par exemple si nous avons borné la commande du trader ξ et étudié la limite lorsque cette borne tend vers l'infini, comme ce fut le cas dans l'approche initiale du problème [Ber05c, Ber03].

jeu quantitatif \mathcal{G} dans l'espace (t, u, v) , s'écrirait

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial t} + \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \sup_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \left\{ \tau \left[\frac{\partial W}{\partial u} u + \left(\frac{\partial W}{\partial v} - 1 \right) v \right] + \left(\frac{\partial W}{\partial v} + C^\varepsilon \xi \right) \right\} = 0, \\ W(T, u, v) = N(u, v) \quad (\text{condition au bord}). \end{array} \right.$$

En se référant à un problème de contrôle impulsionnel à un seul joueur [Ben82], on s'attend à ce que l'équation d'Isaacs du jeu impulsionnel \mathcal{G} se transforme sous la forme de l'inéquation quasi variationnelle (IQV) suivante

$$0 = \min \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} + \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau \left[\frac{\partial W}{\partial u} u + \left(\frac{\partial W}{\partial v} - 1 \right) v \right] + \min_{\xi} \left(\frac{\partial W}{\partial v} + C^\varepsilon \right) \xi, \right. \\ \left. \inf_{\xi} [W(t, u, v + \xi) - W(t, u, v) + C^\varepsilon \xi] \right\}. \quad (5.17)$$

Mais cette IQV correspondante est dégénérée comparée à la théorie du contrôle impulsionnel de A.Bensoussan et J.L.Lions [Ben82]. En effet l'infimum du coût des sauts n'est pas strictement positif mais égal à 0 obtenu quand $\xi \rightarrow 0$. Il est à noter que si nous rajoutons un coût fixe strictement positif aux sauts (c'est-à-dire si nous considérons des coûts de transaction non plus proportionnels au montant de la transaction mais affines par rapport à la transaction) l'infimum du coût des sauts devient strictement positif (il est égal au coût fixe du saut et obtenu en $\xi = 0$). Cette étude sera mentionnée comme perspective dans le paragraphe 8.2. Cette dégénérescence nous empêche d'étendre directement (en passant au \min_{ξ}) la théorie du contrôle de A.Bensoussan et J.L.Lions [Ben82] à notre jeu minimax. Cependant nous allons maintenant en introduisant un temps artificiel transformer le jeu \mathcal{G} en un jeu standard \mathcal{J} sans contrôle impulsionnel. Nous pourrons alors écrire l'équation d'Isaacs correspondante à ce jeu (en réalité une DIQV). Il est à noter que cette transformation utilise le fait que les coûts sont proportionnels à l'amplitude du saut, c'est-à-dire qu'elle tire parti de la cause de la dégénérescence du jeu.

5.3.2 La transformée de Josué : du jeu impulsionnel \mathcal{G} au jeu « standard » \mathcal{J}

Cette transformation publiée dans l'article [BEFT06] utilise une idée attribuée à Josué [JosAD], en introduisant un temps artificiel permettant d'arrêter le temps t lors des impulsions afin de les remplacer par une transition linéaire en (v, w) pendant un temps artificiel.

Extrait de [JosAD] (chapitre 10, versets 12 et 13)

« Alors Josué parla à l'Éternel [...] Soleil, arrête-toi sur Gabaon, Et toi, lune, sur la vallée d'Ajalon ! Et le soleil s'arrêta, et la lune suspendit sa course [...] Le soleil s'arrêta au milieu du ciel, Et ne se hâta point de se coucher, presque tout un jour. »

Dans ce nouveau jeu, le trader possède à présent deux commandes ξ_c et j (en remplacement des impulsions $\xi_k \delta(t - t_k)$). La commande j peut prendre seulement les valeurs $j \in \{-1, 0, 1\}$, qui corres-

pondent respectivement à une impulsion négative en ξ (vente), à ξ_c fini (transaction continue), et une impulsion positive en ξ (achat). Ce jeu se déroule dans un artificiel que l'on note θ . Le temps naturel t est maintenant une variable d'état et l'instant final du jeu \mathcal{J} est l'instant $\theta = \Theta$ tel que $t(\Theta) = T$ avec $t(0) = 0$. On denote avec un "prime" les dérivées par rapport à θ , et l'on introduit $\bar{j} = 1 - |j|$. La dynamique du jeu \mathcal{J} est alors donnée par

$$\begin{aligned} t' &= \bar{j}, \\ u' &= \bar{j}\tau u, \\ v' &= \bar{j}[\tau v + \xi_c] + j, \\ \text{avec } w' &= \bar{j}[\tau v - C^\varepsilon \xi_c] - C^j j, \end{aligned} \quad (5.18)$$

où C^0 peut être choisi arbitrairement (par exemple $C^0 = 0$). On obtient ainsi (comme le montre la dynamique (5.18)) un jeu différentiel standard stationnaire en θ et sans commande impulsionnelle. Comme ce jeu est stationnaire en θ , sa fonction Valeur, notée V , est indépendante de θ . Ainsi, bien que l'on ait t comme nouvelle variable d'état, la dimension de l'espace d'état n'est pas augmentée (l'espace d'état reste (t, u, v)). Par un raisonnement similaire à celui du jeu \mathcal{G} , la fonction valeur du jeu \mathcal{J} s'écrit à l'instant initial $t = 0$

$$V(0, u(0), v(0)) = \inf_{j(\cdot) \in \Upsilon} \inf_{\xi_c(\cdot) \in \Xi_c} \sup_{\tau(\cdot) \in \Omega} \left[N(u(\Theta), v(\Theta)) + \int_0^\Theta (-\bar{j}\tau v + C^\varepsilon \xi_c + C^j j) d\theta \right], \quad (5.19)$$

où l'ensemble des commandes $j(\cdot)$ admissibles est choisit sous la forme

$$\Upsilon = \{ j(\cdot) \text{ continues par morceaux } \mid j(\theta) \in \{-1, 0, 1\} \forall \theta \in [0, \Theta] \}. \quad (5.20)$$

Remarque 5.3.1 *En fait, il faudrait imposer dans Υ la condition que deux intervalles où j prend des valeurs non nulles différentes ($j = 1$ puis $j = -1$ ou réciproquement) sont séparés par un intervalle où $j = 0$. Cette condition correspond à dire qu'il n'y a pas de point d'accumulation d'un saut négatif et d'un saut positif. Mais nous excluons cette condition dans la définition Υ de manière à ce que l'ensemble de commandes admissibles j soit clos par concatenation. Par ailleurs la commande $j \in \Upsilon$ optimale trouvée vérifiera cette condition supplémentaire, car toute commande $j \in \Upsilon$ telle que $j = 1$ succède à $j = -1$ ou réciproquement ne peut pas être optimale. En effet, toute stratégie contenant deux sauts consécutifs en v (un négatif $j = -1$ d'amplitude ξ_k^+ et un positif $j = 1$ d'amplitude ξ_k^-) intervenant à l'instant t_k fixe et durant un temps artificiel $|\xi_k^+| + |\xi_k^-|$ (car $j = \pm 1$ arrête le temps réel) est dominée par la stratégie consistant à remplacer ces deux sauts par un saut unique d'amplitude $|\xi_k^+ + \xi_k^-|$, c'est-à-dire par un unique intervalle avec $j = \text{signe}\{\xi_k^+ + \xi_k^-\}$. Cette stratégie conduit au même état $v(t_k^+)$ mais engendre des coûts de transaction inférieurs et par conséquent nécessite un portefeuille de couverture de valeur plus petite.*

Proposition 5.3.1 : *Le jeu \mathcal{J} est un jeu à horizon fini non borné $\Theta = T + \sum_k |\xi_k|$ ayant la même valeur que le jeu \mathcal{G} .*

Preuve de la proposition 5.3.1 Pour appuyer cette preuve, la figure 5.3 illustre la transformation de Josué du plan (t, v) vers le plan (θ, v) , où l'on a introduit respectivement les instants artificiels θ_k

et θ_k^+ de commencement et de fin du k^{eme} saut (pour $k = 1$ et $k = 2$ sur la figure)

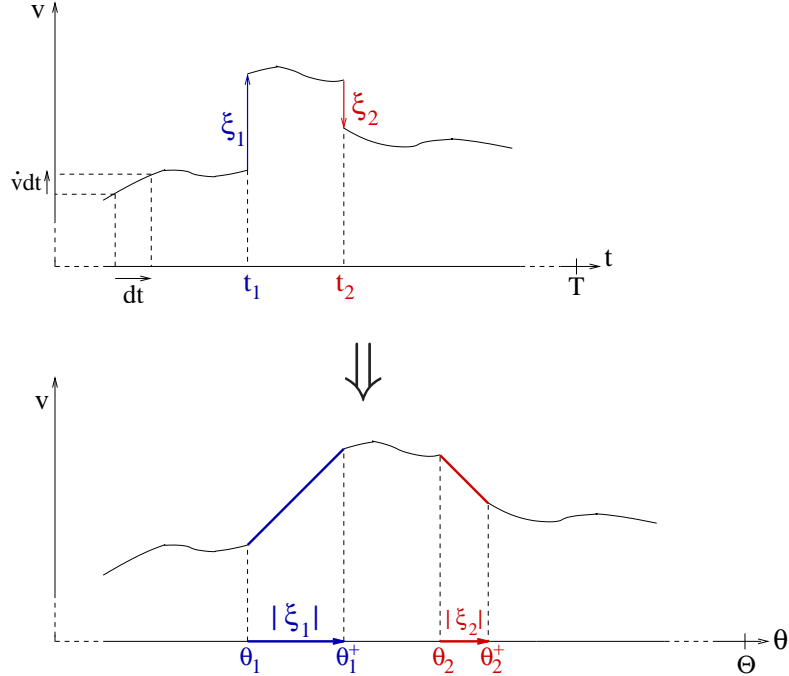


FIG. 5.3 – La « transformée de Josué » : du plan (t, v) vers le plan (θ, v) .

À toute commande $\xi(t) = \xi_c(t) + \xi_k \delta(t - t_k) \in \Xi$ du jeu \mathcal{G} on fait correspondre dans le jeu \mathcal{J} les commandes $\xi(\theta) = \xi_c(t(\theta))$, et $j(\theta)$ avec $j(\theta)$ telle que :

- Si $t(\theta) \neq t_k, k = \{1, \dots\}$: $j(\theta) = 0$.
- Si $t(\theta) = t_k$: on introduit $\theta_k = \min\{\theta \mid t(\theta) = t_k\}$ et l'on choisit la commande $j(\theta) = \text{signe}(\xi_k)$ pour $\theta \in [\theta_k, \theta_k + |\xi_k|]$, avec $j(\theta) = 0$ dans un ouvert droit de $\theta_k + |\xi_k|$. La relation $j(\theta) = 0$ dans un ouvert droit de $\theta_k + |\xi_k|$ signifie qu'il ne peut pas y avoir de point d'accumulation de sauts et qu'il est par ailleurs interdit de rester en $t(\theta) = t_k$ au delà de l'instant artificiel $\theta_k + |\xi_k|$.

Ceci a pour conséquence qu'à tout couple de commandes du jeu \mathcal{J} ($\xi(\theta)$ mesurable et $j(\theta) \in \Upsilon$), nous pouvons faire correspondre dans le jeu \mathcal{G}

- Si $j(\theta) = 0$: une commande $\xi_c(t) = \xi(t(\theta))$
- Pour tout intervalle $[\theta_k^-, \theta_k^+]$ où $j \neq 0$: $t_k = t(\theta)$ avec $\theta \in [\theta_k^-, \theta_k^+]$ et $\xi_k = j(\theta_k^+ - \theta_k^-)$.

On peut se convaincre facilement (en s'aidant de la figure 5.3) que ces deux correspondances sont inverses l'une de l'autre. Nous pouvons alors montrer que le jeu \mathcal{J} est équivalent au jeu \mathcal{G} . Quand le trader choisit $j = 0$ c'est-à-dire une transaction continue avec un débit d'achat ou de vente $\xi(\theta) = \xi_c(t(\theta))$ fini, la dynamique (5.18) du jeu \mathcal{J} est la même que la partie continue de la dynamique du jeu \mathcal{G} . Ainsi le jeu \mathcal{J} procède exactement comme le jeu \mathcal{G} entre deux impulsions. Quand le trader choisit une impulsion (un saut) $j \in \{-1, 1\}$, alors $\bar{j} = 0$, et la dynamique (5.18) montre que le temps naturel s'arrête ($t_k = t(\theta)$ avec $\theta \in [\theta_k^-, \theta_k^+]$) et que v évolue avec la pente $j = \text{signe}(\xi_k)$ pendant une « durée artificielle » $\theta_k^+ - \theta_k^- = |\xi_k|$ de la quantité $j(\theta_k^+ - \theta_k^-) = \xi_k$ à un coût $C^j \xi_k$ pour w .

Cette transition linéaire en (v, w) dans le jeu \mathcal{J} remplace à l'identique une impulsion ξ_k du jeu \mathcal{G} et par conséquent le critère du jeu \mathcal{J} à la même valeur que celui du jeu \mathcal{G} lors d'une impulsion, à condition que la stratégie $\tau(\cdot) \mapsto \xi(\theta)$ dans le jeu \mathcal{J} soit non anticipative. Mais si la stratégie $\tau(\cdot) \mapsto \xi(\cdot) = \phi(\tau(\cdot))$ du jeu \mathcal{G} est non anticipative, la causalité dans le jeu \mathcal{J} est respectée car $u(\theta)$ reste constant pendant un intervalle de saut (il n'y a pas de nouvelle information qui arrive durant le saut). Par conséquent les stratégies non anticipatives du jeu \mathcal{G} restent non anticipatives pour le jeu \mathcal{J} et réciproquement. Les deux jeux \mathcal{G} et \mathcal{J} ont donc bien la même valeur.

La durée artificielle $|\xi_k|$ de la transition linéaire conduit aux expressions suivantes pour les instants artificiels θ_k et θ_k^+ , et l'horizon artificiel Θ

$$\theta_k = t_k + \sum_{l < k} |\xi_l|, \quad \theta_k^+ = t_k + \sum_{l=1}^k |\xi_l| \quad \Theta = T + \sum_k |\xi_k|.$$

Ainsi puisque dans le jeu \mathcal{G} les commandes admissibles (voir (1.18)) du trader $\xi \in \Xi$ sont avec une suite finie d'impulsions $\{\xi_k\}_{k=\{1, \dots\}}$ d'amplitudes finies, l'horizon Θ du jeu \mathcal{J} est lui aussi fini, quoi qu'à priori non borné. ■

La fonction valeur V (5.19) du jeu \mathcal{J} est alors solution de viscosité de l'équation d'Isaacs

$$0 = \min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \inf_{\xi_c(\cdot) \in \Xi_c} \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \left\{ \bar{j} \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \tau \left(\frac{\partial W}{\partial u} u + \left(\frac{\partial W}{\partial v} - 1 \right) v \right) + \xi_c \left(\frac{\partial W}{\partial v} + C^\varepsilon \right) \right] \right. \\ \left. + j \left[\frac{\partial W}{\partial v} + C^j \right] \right\} \quad (5.21)$$

qui peut se réécrire en énumérant les trois possibilités pour le commande $j = \{-1, 0, 1\}$ du trader

$$0 = \min \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} + \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau \left[\frac{\partial W}{\partial u} u + \left(\frac{\partial W}{\partial v} - 1 \right) v \right] + \inf_{\xi_c(\cdot) \in \Xi_c} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial v} + C^\varepsilon \right) \xi_c \right], \right. \\ \left. \frac{\partial W}{\partial v} + C^+, - \left(\frac{\partial W}{\partial v} + C^- \right) \right\}, \quad (5.22)$$

avec $W(\Theta, u, v) = N(u, v)$ pour condition au bord.

Proposition 5.3.2 *Le jeu \mathcal{J} à la même équation d'Isaacs que le jeu \mathcal{J}' obtenu en retirant la composante continue $\xi_c(\cdot)$ à la commande du trader (c'est-à-dire dans lequel le trader a pour unique commande $j \in \{-1, 0, 1\}$).*

Preuve de la proposition 5.3.2 Remarquons que dans l'équation (5.22), les deux derniers termes du min $\{.\}$ sont forcément positifs

$$\frac{\partial W}{\partial v} + C^+ \geq 0 \quad \text{et} \quad - \left(\frac{\partial W}{\partial v} + C^- \right) \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall(t, u, v) \quad \frac{\partial W}{\partial v}(t, u, v) \in [-C^+, -C^-], \quad (5.23)$$

qui par l'interprétation de la composante q de la normale semi-perméables (l'équation (3.15)), correspond à la condition (3.24). Par conséquent, la minimisation en ξ (3.27) implique l'équation

$$\min_{\xi_c(\cdot) \in \Xi_c} \left(\frac{\partial W}{\partial v} + C^\varepsilon \right) \xi_c = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \xi_c = 0 & \text{si } \frac{\partial W}{\partial v} + C^\varepsilon \neq 0, \\ \xi_c \text{ indéterminé par cette équation} & \text{si } \frac{\partial W}{\partial v} + C^\varepsilon = 0, \end{cases}$$

et ainsi l'équation d'Isaacs (5.22) prend la forme

$$\begin{cases} 0 = \min \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} + \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau \left[\frac{\partial W}{\partial u} u + \left(\frac{\partial W}{\partial v} - 1 \right) v \right], \frac{\partial W}{\partial v} + C^+, - \left(\frac{\partial W}{\partial v} + C^- \right) \right\}, \\ W(T, u, v) = N(u, v) \quad (\text{condition au bord}). \end{cases} \quad (5.24)$$

Elle devient ainsi indépendante de la composante continue $\xi_c(\cdot)$ de la commande du trader. Par conséquent l'équation d'Isaacs (5.24) est aussi celle d'un jeu noté \mathcal{J}' obtenu en retirant la composante continue $\xi_c(\cdot)$ à la commande du trader (la commande $j \in \{-1, 0, 1\}$ devient alors l'unique commande du trader). ■

S'il y a unicité de la solution de viscosité de l'équation d'Isaacs (5.24), la proposition 5.3.2 démontre directement que les jeux \mathcal{J} et \mathcal{J}' ont la même valeur ¹¹

Remarque 5.3.2 *La proposition 5.3.2 a une interprétation simple. Dans le jeu \mathcal{J} (mais également dans le jeu \mathcal{G}), nous pouvons approcher arbitrairement bien une commande continue par une suite de petits sauts (des petits segments dans le cas du jeu \mathcal{J}) tout en préservant le caractère strictement causale de la stratégie (en prenant pour amplitude du saut l'intégrale de la commande sur le pas de temps passé). Une preuve de cette remarque est faite dans [BEFT06].*

5.3.3 Interprétation de l'équation d'Isaacs (5.24) du jeu \mathcal{J} , et condition de viscosité

Remarquons que l'équation d'Isaacs (5.22) est une forme différentielle de l'inéquation quasi variationnelle (5.17) du jeu \mathcal{G} . En effet, l'inclusion (5.23), où $q = -\frac{\partial W}{\partial v}$, en tout (t, u, v) , implique par intégration (en distinguant les deux cas $\xi > 0$ et $\xi < 0$)

$$W(t, u, v + \xi) - W(t, u, v) + C^\varepsilon \xi \geq 0 \quad \forall \xi. \quad (5.25)$$

Réciproquement, en faisant tendre ξ vers 0, par valeurs positives puis négatives dans l'inégalité (5.25) ci-dessus, nous retrouvons (5.23). Et manifestement, l'inégalité (5.25) est équivalente à

$$\min_{\xi} [W(t, u, v + \xi) - W(t, u, v) + C^\varepsilon \xi] = 0.$$

¹¹Ce dernier point fait l'objet d'une preuve directe dans [BEFT06].

Nous pouvons interpréter la DIQV (5.24) comme une IQV avec la contrainte (5.23) sur le gradient de la fonction Valeur.

- ➔ Dans le cas où la contrainte est strictement satisfaite ($\frac{\partial W}{\partial v} \in]C^-, C^+[$ dans notre cas) l'équation d'Isaacs correspond à celle du même jeu avec $\xi = 0$ (en accord avec la maximisation en ξ (3.27))¹², qui s'écrit ici

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau \left[\frac{\partial W}{\partial u} u + \left(\frac{\partial W}{\partial v} - 1 \right) v \right] = 0 \quad (5.26)$$

Remarquons que dans le cas $\frac{\partial W}{\partial v} \in]C^-, C^+[$ les deux derniers termes de l'équation (5.24) sont strictement positifs et ainsi il nous faut vérifier que le premier terme de (5.24) est égal à 0, ce qui conduit bien à (5.26).

- ➔ Dans le cas où l'on est en butée sur les contraintes ($\frac{\partial W}{\partial v} = -C^-$ ou $\frac{\partial W}{\partial v} = -C^+$), un des deux derniers termes de l'équation (5.24) est nul et l'autre est strictement positif. La condition de viscosité revient alors à prouver que le premier terme de l'équation (5.24) est positif ou nul.

Les trois termes de l'équation d'Isaacs (5.24) de notre jeu, ont une interprétation claire, par définition même de la commande θ . Ils sont respectivement associés à la décision du trader :

- ➔ de ne pas faire de transaction ($\xi = 0$),
- ➔ d'effectuer un achat d'actif sous-jacent,
- ➔ d'effectuer une vente d'actif sous-jacent.

L'exploitation d'une équation d'Isaacs avec contrainte sur les gradients de la fonction Valeur, a été étudiée par G.Barles [Bar90] dans le cadre d'un problème de contrôle. Dans ce cadre, l'article [Bar90] donne un mode d'approche pour montrer l'unicité de la solution de viscosité dans ce cadre. Pour notre jeu différentiel, nous n'avons pas à ce jour de théorème d'unicité de la solution de viscosité de l'IQV d'Isaacs (5.17) du fait que l'infimum du coût des sauts est ici égal à 0 (dégénérescence), ni de théorème d'unicité de la solution de l'équation d'Isaacs (5.24) du fait que des coordonnées de la dynamique (5.18) peuvent s'annuler (notamment t') alors que le problème est stationnaire à horizon variable $t(\Theta) = T$ fini.

Conjecture 5.3.3 *La solution de Viscosité de l'équation (5.24) est unique.*

Sous cette conjecture, les jeux \mathcal{G} et \mathcal{J}' ont la même Valeur (compte tenu des propositions 5.3.1 et 5.3.2) et par conséquent la fonction Valeur W du jeu \mathcal{G} doit être solution de viscosité de la DIQV (5.24). Toutefois, une preuve directe que les jeux \mathcal{G} et \mathcal{J}' ont la même valeur à été obtenue dans [BEFT06].

Cependant, pour la vérification à l'aide de solution de viscosité (paragraphe 5.4) et le théorème de convergence (paragraphe 6.3), nous aurons besoin de l'unicité de la solution de viscosité de l'équation (5.24). C'est pourquoi nous avons été contraint de poser la conjecture 5.3.3.

5.4 Vérification à l'aide de solution de viscosité pour le call digital

L'objet de ce paragraphe 5.4 est de montrer, pour le call digital, que la fonction Valeur exhibée dans le théorème de représentation (le théorème 5.2.3) est **une** solution de viscosité discontinue de

¹²Donc l'équation d'Isaacs d'un simple problème de commande τ , ou équation de HJB.

l'équation d'Isaacs (5.24) au sens de G. Barles [Bar94]. Dans le paragraphe suivant 5.5, nous montrerons succinctement la vérification correspondante pour le call vanille avec paiement en nature.

5.4.1 Propriétés préliminaires et plan de la vérification

Remarques et propriétés préliminaires

Remarque 5.4.1 Afin d'alléger les notations, nous désignons par (W_t, W_u, W_v) , $(\check{V}_t, \check{V}_u)$, $(q_t^\varepsilon, q_u^\varepsilon)$, les dérivées partielles respectives, de la fonction valeur $W(t, u, v)$, du vecteur $\check{V}(t, u)$, et des fonctions $q^\varepsilon \forall \varepsilon \in \{+, -\}$, par rapport à chacune des variables.

Remarque 5.4.2 Concernant la fonction q^+ (5.16) qui peut être localement une fonction de l'une ou l'autre des variables (t, u) , mais jamais des deux à la fois, on indiquera seulement la variable dont dépend la fonction q^+ , par exemple $q^+(u) = (1 + c^-)\frac{K}{u} - 1$. Néanmoins, lorsque cela ne présentera aucune ambiguïté, on se permettra certaines fois d'omettre l'argument de la fonction q^+ . Sans connaissance a priori sur la région étudiée (et donc aussi sur l'expression de la fonction q^+), on continuera d'écrire $q^+(t, u)$ lorsqu'il est nécessaire de préciser la variable. On procédera de la même manière pour la fonction $q^-(t)$ (4.33) et pour les différentes fonctions de (t, u) qui apparaîtront dans la vérification.

Intéressons nous aux expressions prises par les dérivées partielles des fonctions q^+ (5.16) et q^- (4.33). Nous avons

$$\text{Si } q^+(u) = (1 + c^-)\frac{K}{u} - 1 \text{ on a } q_t^+ = 0, q_u^+ = -\frac{Q^+\mathbf{1}}{u} \text{ et donc } Q_t^+ = (0 \ 0), Q_u^+ = -\frac{Q^+\mathcal{S}}{u}, \quad (5.27)$$

et dans tous les autres cas ¹³ $\forall \varepsilon = \pm 1$:

$$\text{pour } t > t_\varepsilon : q_t^\varepsilon = -\tau^\varepsilon Q^\varepsilon \mathbf{1} \text{ et } q_u^\varepsilon = 0 \quad \text{et donc } Q_t^\varepsilon = -\tau^\varepsilon Q^\varepsilon \mathcal{S} \text{ et } Q_u^\varepsilon = (0 \ 0), \quad (5.28)$$

$$\text{pour } t \leq t_\varepsilon : q_t^\varepsilon = 0 \text{ et } q_u^\varepsilon = 0 \quad \text{et donc } Q_t^\varepsilon = (0 \ 0) \text{ et } Q_u^\varepsilon = (0 \ 0). \quad (5.29)$$

Pour effectuer la vérification par solution de viscosité, nous pourrions nous appuyer sur les relations (3.129) ainsi que sur les propriétés (5.4), (5.5), mais également sur la propriété $Q^-(t)\check{V}(t, u_g(t)) = 0$ (propriété 4.8.1) et sur les deux propriétés suivantes

Propriété 5.4.1 On rappelle que $\varepsilon = \text{signe}(\check{v} - v)$. Comme $\tau^- < 0$ et $\tau^+ > 0$ nous pouvons aussi écrire $\varepsilon = \text{signe}(\tau^\varepsilon)$, ce qui conduit à la propriété

$$\tau^\varepsilon(\check{v} - v) \geq 0 \quad \forall \varepsilon = \pm 1. \quad (5.30)$$

Propriété 5.4.2

$$Q^\varepsilon \check{V}_t \leq 0 \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}. \quad (5.31)$$

¹³Pour la fonction $q^-(t) \forall (t, u)$, pour la fonction $q^+(t)$ dans la région Γ_1 , mais également pour la fonction q^+ dans la région Γ_3 où $q^+(t) = q^-(t)$ (donc avec $\varepsilon = -1$ au lieu de $\varepsilon = 1$).

Les propriétés 4.8.1 et 5.4.2 proviennent de l'analyse du jeu qualitatif. La propriété 4.8.1 s'applique au call digital tandis que la propriété 5.4.2 est valable à la fois pour le call vanille et le call digital. Cette dernière propriété 5.4.2 est équivalente à la condition de semi-perméabilité $n^\varepsilon \geq 0$ que nous avons vérifiée dans chacune des régions du plan (u, t) , pour chacune des options étudiées. En effet cette propriété est une généralisation de la propriété 3.7.6 à tout raccordement ou intersection \mathbb{V} paramétrée en $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ sur une variété admettant une normale semi-perméable qui est, dans le cas de notre jeu, toujours de la forme $\nu^\varepsilon = (n^\varepsilon, p^\varepsilon, q^\varepsilon, 1)^t$ (L'orthogonalité de ν^ε à la première tangente $(1, 0, \check{v}_t, \check{w}_t)^t$ (3.84) à la variété \mathbb{V} conduisant à l'équation $n^\varepsilon + Q^\varepsilon \check{V}_t(t, u) = 0$).

En conséquence, la vérification par solution de viscosité n'est pas auto-suffisante (elle va s'appuyer sur deux propriétés obtenues lors de l'analyse du jeu qualitatif) et ne constitue donc pas une seconde approche mais une vérification qu'il importe de montrer de par son caractère plus classique.

Plan de la vérification

La vérification, dans laquelle nous gérerons simultanément les deux cas $t_+ > t_-$ et $t_- > t_+$, se divise en trois parties principales :

- ➔ Les régions régulières.
- ➔ Les régions non régulières sans discontinuité de la fonction valeur W . On pourra, si besoin, se servir du test de la proposition 2.2.3 pour identifier si l'on est en présence d'un minimum ou d'un maximum local. L'inventaire des régions non régulières est dressé dans le paragraphe 5.4.3 à venir.
- ➔ La région $u(t) = u_g(t)$ qui, dans le cas $\varepsilon = +$, supporte une discontinuité de la fonction valeur W . Pour ce cas, nous aurons recours au concept de solution de viscosité discontinue au sens de G. Barles [Bar94], introduit dans le paragraphe 2.2.3. On s'appuiera sur la proposition 2.2.5 pour construire le gradient des fonctions tests.

5.4.2 Régions régulières

Dans les régions régulières, où la fonction Valeur W est \mathcal{C}^1 , il nous faut vérifier que l'équation d'Isaacs (5.24) est satisfaite (condition de viscosité).

Schéma des différentes régions régulières

Séparons, dans les deux cas $t_+ > t_-$ et $t_- > t_+$, les différentes régions régulières selon les expressions prises par les fonctions $q^+(t, u)$ (5.16) et $q^-(t)$ (4.33) dans et en dehors de la région d'intérêt Λ . Dans le but de condenser la vérification, les différentes régions régulières sont numérotées, selon la numérotation indiquée sur la figure 5.4.

Remarquons que les régions *II* et *IV* (où $q^-(t) = (1 + C^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1$ et $q^+(t) = C^+$) et la région *XI* (où $q^-(t) = C^-$ et $q^+(t, u) = (1 + c^-)e^{\tau^+(T-t)} - 1$) apparaissent respectivement uniquement, dans

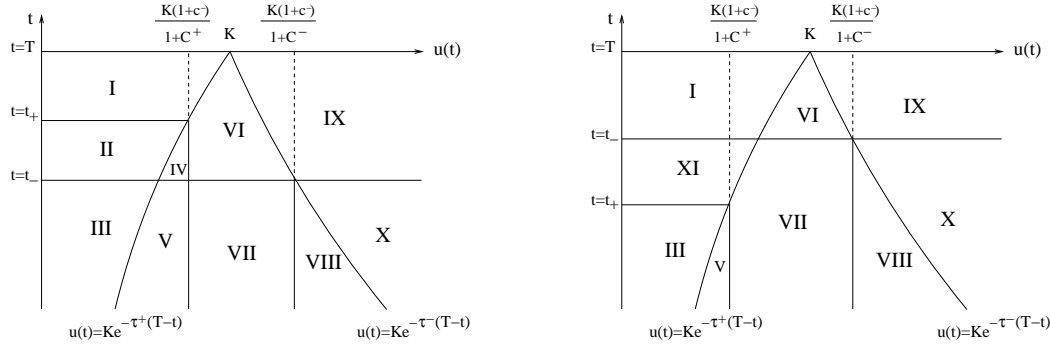


FIG. 5.4 – Call digital : schéma des différentes régions régulières dans le plan (u, t) séparées suivant l'expression prise par les fonction q^- et q^+ .

le cas $t_- < t_+$ et dans le cas $t_+ > t_-$. Nous utiliserons la notation I^+ (respectivement I^-) lorsque l'on étudiera la région I avec $\varepsilon = +1$ c'est-à-dire $\check{v} \leq v$ et $q = q^+$ (respectivement avec $\varepsilon = -1$ c'est-à-dire $\check{v} \geq v$ et $q = q^-$). Pour les autres régions nous utiliserons la notation similaire.

Régions régulières où $W = \check{w}(t, u) + q^\varepsilon(\check{v}(t, u) - v) = Q^\varepsilon \check{V} - q^\varepsilon v$ ($\Gamma_1 \cup \Gamma_2$)

Il est commode d'introduire la table 5.2 qui regroupe les régions régulières vues sur la figure 5.4, en trois catégories, selon que les expressions des dérivées partielles $q_t^\varepsilon, q_u^\varepsilon$ de la fonction $q^\varepsilon(t, u)$ sont données par (5.27), (5.28) ou (5.29). Ce classement va nous permettre de faire la vérification « expression par expression » plutôt que « région par région » et donc d'éviter de faire plusieurs fois la même chose.

En utilisant les relations $Q_t^\varepsilon = (q_t^\varepsilon, 0), Q_u^\varepsilon = (q_u^\varepsilon, 0), \mathcal{S}\check{V} = \mathbf{1}\check{v}$ (relation (3.129)) et (5.3) avec (5.4), on obtient :

$$W_t = Q^\varepsilon \check{V}_t + q_t^\varepsilon(\check{v} - v) = -\tau^\varepsilon Q^\varepsilon(\check{V}_u u - \mathbf{1}\check{v}) + q_t^\varepsilon(\check{v} - v), \quad (5.32)$$

$$W_u = Q^\varepsilon \check{V}_u + q_u^\varepsilon(\check{v} - v), \quad (5.33)$$

et $W_v = -q^\varepsilon$ donc $W_v - 1 = -Q^\varepsilon \mathbf{1}$. Il en résulte que

$$W_t + \tau^\varepsilon [W_u u + (W_v - 1)v] = (q_t^\varepsilon + \tau^\varepsilon Q^\varepsilon \mathbf{1} + \tau^\varepsilon q_u^\varepsilon u)(\check{v} - v). \quad (5.34)$$

Le terme (5.34) correspond au premier terme de l'équation d'Issacs (5.24) dans le cas où

$$\max_\tau \tau [W_u u + (W_v - 1)v] \quad \text{est atteint en } \tau = \tau^\varepsilon.$$

Proposition 5.4.3 Si $\varepsilon q^\varepsilon < \varepsilon C^\varepsilon$ (cas ① et ②) alors

$$q_t^\varepsilon + \tau^\varepsilon Q^\varepsilon \mathbf{1} + \tau^\varepsilon q_u^\varepsilon u = 0.$$

	①	②	③
$q^\varepsilon(t, u)$	$(1 + c^-)e^{\tau^\varepsilon(T-t)} - 1$	$(1 + c^-)\frac{K}{u} - 1$	C^ε
$(q_t^\varepsilon, q_u^\varepsilon)$	$(-\tau^\varepsilon Q^\varepsilon \mathbf{1}, 0)$ (formule (5.28))	$(0, -\frac{Q^+1}{u})$ (formule (5.27))	$(0, 0)$ (formule (5.29))
régions concernées	I^\pm, II^-, IV^- VI^-, XI^+	VI^+, VII^+	II^+, III^\pm, IV^+ V^\pm, VII^-, XI^-
$\varepsilon = -1$ $\varepsilon = +1$	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ pour $t > t_-$ Γ_1 pour $t > t_+$	\emptyset Γ_2	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ pour $t < t_-$ Γ_1 pour $t < t_+$
région décrite	$u(t) < Ke^{-\tau^\varepsilon(T-t)}$ pour $t > t_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$	$u(t) \in \Gamma_2$ avec $\varepsilon = +1$	$u(t) < \frac{K(1+c^-)}{1+C^\varepsilon}$ pour $t < t_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$

TAB. 5.2 – Table des différentes régions régulières dans $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ suivant l’expression ①, ②, ③ prise par $q^\varepsilon(t, u)$.

Preuve de la proposition 5.4.3.

- ① Si $q^-(t) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1$ alors, puisque $q_t^\varepsilon = -\tau^\varepsilon Q^\varepsilon \mathbf{1}$ et $q_u^\varepsilon = 0$ (équation (5.28)), les deux premiers termes de l’expression $q_t^\varepsilon + \tau^\varepsilon Q^\varepsilon \mathbf{1} + \tau^\varepsilon q_u^\varepsilon u$ se compensent et le troisième est nul.
- ② Si $q^\varepsilon(t, u) = (1 + c^-)\frac{K}{u} - 1$, compte tenu des dérivées partielles (5.27), le premier et le troisième termes de l’expression $q_t^\varepsilon + \tau^\varepsilon Q^\varepsilon \mathbf{1} + \tau^\varepsilon q_u^\varepsilon u$ se compensent et le deuxième est nul. ■

Nous allons à présent montrer que dans les régions régulières la fonction valeur exhibée est bien solution de viscosité de l’équation (5.24).

- ① Pour $C^- \leq q^\varepsilon(t) = (1 + c^-)e^{\tau^\varepsilon(T-t)} - 1 \leq 0 < C^+$, les quantités $W_v + C^+ = -q^\varepsilon + C^+$ et $-(W_v + C^-) = q^\varepsilon - C^-$ sont strictement positives. Par conséquent nous devons montrer que le premier membre de l’équation d’Isaacs (5.24) est nul, c’est-à-dire que

$$W_t + \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau [W_u u + (W_v - 1)v] = 0, \quad (5.35)$$

où $\max_\tau \tau [W_u u + (W_v - 1)v]$ est toujours positif et obtenu pour $\tau = \tau^- < 0$ ou $\tau = \tau^+ > 0$ selon le signe de $W_u u + (W_v - 1)v$. Compte tenu de la proposition 5.4.3, l’expression (5.34) est égale à 0. Il reste seulement à vérifier que le \max_τ dans l’équation 5.35 est atteint pour $\tau = \tau^\varepsilon$, ce qui est équivalent à vérifier que $W_t = Q^\varepsilon \check{V}_t - \tau^\varepsilon Q^\varepsilon \mathbf{1}(\check{v} - v) \leq 0$.

En utilisant la formule (5.28) nous obtenons $W_t = Q^\varepsilon \check{V}_t - \tau^\varepsilon Q^\varepsilon \mathbf{1}(\check{v} - v)$ qui est non positif comme la somme de deux termes non positifs du fait des propriétés $Q^\varepsilon \check{V}_t \leq 0 \forall \varepsilon = \pm 1$ (propriété 5.4.2)

et de la relation (5.30).

- ② Pour $u(t) \in \Gamma_2$ avec $\varepsilon = 1$ (régions VI^+ , VII^+), nous avons $C^- < q^\varepsilon(t, u) = (1+c^-)\frac{K}{u} - 1 < C^+$; et ainsi puisque $W_v + C^+ = C^+ - q^\varepsilon > 0$ et $-(W_v + C^-) = q^\varepsilon - C^- > 0$, nous devons montrer (5.35). L'utilisation de (5.27) dans (5.34) nous donne $W_t + \tau^\varepsilon [W_u u + (W_v - 1)v] = 0$ avec $W_t = Q^\varepsilon \check{V}_t \leq 0$ compte tenu de la propriété 5.4.2.
- ③ Pour $q^\varepsilon = C^\varepsilon$, une des deux quantités $W_v + C^+ = C^+ - q^\varepsilon$, $-(W_v + C^-) = q^\varepsilon - C^-$ est égale à zero et l'autre est strictement positive. Ainsi il nous reste à démontrer que

$$W_t + \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau [W_u u + (W_v - 1)v] \geq 0 . \quad (5.36)$$

Ici q^ε satisfait (5.29), et ainsi (5.34) entraîne

$$W_t + \max_{\tau} \tau [W_u u + (W_v - 1)v] \geq W_t + \tau^\varepsilon [W_u u + (W_v - 1)v] = \tau^\varepsilon Q^\varepsilon \mathbf{1}(\check{v} - v) \geq 0.$$

Régions régulières où $W = D - q^-v$ (Γ_3)

Dans ces régions $q^+(t, u)$ est égal à $q^-(t)$ ¹⁴ et nous avons $(W_t, W_u, W_v) = (-q_t^-, 0, -q^-)$, ce qui conduit à

$$W_t + \tau^- [W_u u + (W_v - 1)v] = -(q_t^- + \tau^- Q^- \mathbf{1})v . \quad (5.37)$$

Nous avons besoin de distinguer deux cas selon l'expression prise par la fonction q^- , c'est-à-dire selon que $t > t_-$ ou $t < t_-$

- Pour $t > t_-$ (région IX), $C^- \leq q^+(t, u) = q^-(t) = (1+c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1 \leq C^+$. Ainsi les deux derniers termes de (5.24) sont strictement positifs et il nous faut par conséquent vérifier (5.35). Ici $q^+(t, u)$ satisfait (5.28), ce qui entraîne $W_u u + (W_v - 1)v = -Q^- \mathbf{1}v \leq 0$, et donc le max en τ est atteint pour $\tau = \tau^-$. En utilisant (5.28) dans (5.37) avec $\varepsilon = -1$, on obtient

$$W_t + \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau [W_u u + (W_v - 1)v] = \tau^- Q^- \mathbf{1}v - \tau^- Q^- \mathbf{1}v = 0 .$$

- Pour $t < t_-$ (régions $VIII$ et X), $q^+ = q^- = C^-$, d'où $W_v + C^+ > 0$ et $-(W_v + C^-) = 0$. Il nous reste ainsi à vérifier (5.36). Mais maintenant (5.29) conduit à $W_t = 0$ et a fortiori $\max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau [W_u u + (W_v - 1)v] \geq 0$.

La vérification dans les régions régulières est ainsi terminée.

5.4.3 Inventaire des différentes régions non régulières

Intéressons nous à présent aux régions où la fonction Valeur (théorème de représentation 5.2.3). est non régulière (ou susceptible d'être non régulière). Ces régions sont

$$\Rightarrow v = \check{v}(t, u) \text{ pour } (t, u) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

¹⁴Cela signifie que seule les trajectoires avec $\tau = \tau^-$ (contrôle optimal du marché) joue un rôle dans la stratégie de couverture optimale.

et les régions du plan (u, t) suivantes (Le lecteur est invité à se reporter à la partie qui débute au paragraphe 4.8.2 et qui va jusqu'à la figure 4.16).

- ➔ Les trajectoires suivantes avec $\tau = \tau^-$ pour $u \in [u_+, u_-]$
 - la frontière entre \mathcal{E}_1^- et \mathcal{E}_3^- (cas $t_- < t_+$) : $\tilde{u}_{13}^-(t) = u_+ e^{-\tau^-(t_- - t)}$.
 - la frontière entre \mathcal{E}_1^- et \mathcal{E}_2^- (cas $t_+ < t_-$) : $\tilde{u}_{12}^-(t) = u_g(t_-) e^{-\tau^-(t_- - t)}$.
 - la frontière entre \mathcal{E}_2^- et \mathcal{E}_3^- (cas $t_+ < t_-$) : $\tilde{u}_{23}^-(t) = u_+ e^{-\tau^-(t_+ - t)}$.

Il nous sera possible de faire une vérification unique pour toute trajectoire donnée avec $\tau = \tau^-$ (et par incidence de traiter simultanément les cas $t_- < t_+$ et $t_+ < t_-$), en écrivant ces trajectoires sous la forme générale

$$u(t) = \alpha e^{-\tau^-(t_\beta - t)} \text{ pour } u \in [u_+, u_-] \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \beta \in \{+, -\} .$$

- ➔ $u = u_+ = \frac{K(1+c^-)}{1+C^+}$ pour $t < t_+$.
- ➔ $t = t_- \forall u \in \mathbb{R}^+$.
- ➔ $u(t) = u_d(t) = K e^{-\tau^-(T-t)}$ pour $t > t_-$
- ➔ $u(t) = u_g(t) = K e^{-\tau^+(T-t)}$.

Toutes les régions non régulières correspondent à des cas où la fonction valeur reste continue mais peut posséder une discontinuité de gradient ¹⁵, à l'exception de la trajectoire $u(t) = u_g(t)$ dans le cas $\varepsilon = +$, pour laquelle la fonction valeur est discontinue ¹⁶.

5.4.4 Régions non régulières pour lesquelles W demeure continue

➔ **Le cas $v = \check{v}(t, u)$ pour $(t, u) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$**

La fonction valeur W n'est pas régulière mais apparaît comme le maximum de l'intersection de deux fonctions régulières

$$W(t, u, v) = \max\{\check{w} + q^+(\check{v} - v), \check{w} + q^-(\check{v} - v)\} .$$

Ainsi la discontinuité de gradient de W correspond à un minimum en $v = \check{v}$. Par conséquent le sur-différentiel de $W(t, u, v)$ est vide et son sous-différentiel, dénoté par $(\varphi_t, \varphi_u, \varphi_v)$, est fait de toutes les combinaisons convexes des deux gradients

$$(W_t, W_u, W_v) = (Q^\varepsilon \check{V}_t + q_t^\varepsilon(\check{v} - v), Q^\varepsilon \check{V}_u, -q^\varepsilon), \text{ pour } \varepsilon = \pm 1.$$

Les termes $q_t^\varepsilon(\check{v} - v)$ et $q_u^\varepsilon(\check{v} - v)$ valent toujours zero en $v = \check{v}$ que q^ε satisfasse (5.27), (5.28) ou (5.29). En conséquence n'importe quel élément du sous-différentiel peut être écrit sous la forme :

$$(\varphi_t, \varphi_u, \varphi_v) = (Q \check{V}_t, Q \check{V}_u, -q) \text{ avec } Q = (q \ 1)$$

¹⁵On rappelle que l'on pourra se servir du test de la proposition 2.2.3 pour identifier si l'on est en présence d'un minimum ou d'un maximum local.

¹⁶Voir le paragraphe 4.11.2, mais également (pour la partie finale du jeu où $\xi^* = 0$) la proposition (4.6.1) et la justification qui suit la preuve de cette proposition.

où la fonction $q = (1 - \lambda)q^- + \lambda q^+$, $\lambda \in [0, 1]$ est une combinaison convexe des deux fonctions q^- et q^+ . La condition de viscosité est, en substituant dans (5.24) n'importe quel élément du sous-différentiel au gradient de $W(t, u, v)$, que le minimum des trois termes doit être non-positif. Ainsi nous devons vérifier que :

$$\min \left\{ Q\check{V}_t + \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau Q [\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}] , -q + C^+, q - C^- \right\} \leq 0 \quad \forall q \in [q^-, q^+] . \quad (5.38)$$

Comme les deux derniers termes sont non-négatifs pour $q = q^+$ et $q = q^-$, ils restent non-négatifs pour toute combinaison convexe q . Par conséquent, il nous faut montrer que le premier terme est non-positif. Il découle de (5.3) avec la propriété (5.4) que

$$Q^\varepsilon \check{V}_t + \tau^\varepsilon Q^\varepsilon (\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}) = 0 .$$

Par ailleurs en utilisant la propriété 5.4.2, il en résulte que pour $\varepsilon = \pm$

$$\tau^\varepsilon Q^\varepsilon (\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}) \geq 0 ,$$

c'est-à-dire que le \max_τ dans l'équation (5.38) est atteint sur la borne $\tau = \tau^\varepsilon$ (ou est singulier en τ si $Q^\varepsilon \check{V}_t = 0$). Par conséquent, nous avons pour $q = q^+$ et $q = q^-$ deux fonctions linéaires de la variable τ qui valent zero à leur maximum, donc toujours non-positives. Par linéarité en q , la condition de viscosité restante $Q\check{V}_t + \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau Q [\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}] \leq 0$ est vérifiée pour toute combinaison convexe $q = (1 - \lambda)q^- + \lambda q^+$, $\lambda \in [0, 1]$. Nous remarquons que la vérification dans la région $\check{v} = v$ n'a pas nécessité de distinguer les expressions prises par la fonction q et par extension n'a pas nécessité de distinguer le cas $t_+ > t_-$ du cas $t_- > t_+$.

➔ **Le cas $u = u_+ = \frac{K(1+c^-)}{1+C^+}$ pour $t < t_+$**

Des deux côtés de cette frontière (demi-plan de dimension 3 dans l'espace d'état (t, u, v, w)), la fonction valeur est donnée par $W = Q^\varepsilon \check{V} - q^\varepsilon v$ où \check{V} est obtenue comme solution de (5.3) et ¹⁷ $q^-(t) = \max\{(1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1, C^-\}$ est de classe \mathcal{C}^1 à travers cette frontière. La fonction $q^+(t, u)$ est continue à travers $u = u_+$ ¹⁸. Par ailleurs \check{V} et \check{V}_t , et ainsi $\check{V}_u = \frac{1}{u}(\mathcal{S}\check{V} - \mathcal{T}^{-1}\check{V}_t)$ (compte tenu de (5.3)) sont continus à travers $u = u_+$. Par conséquent tout est régulier et il n'y a rien d'autre à vérifier.

Remarque 5.4.3 *Ce résultat pouvait s'obtenir directement à partir de l'annexe A.5 puisque la courbe $u = u_+$ n'est pas une trajectoire $\dot{u} = \tau^\varepsilon u$.*

¹⁷Comme $q^-(t) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)}$ pour $t > t_-$ et $q^-(t) = C^-$ pour $t < t_-$, nous remarquons que dans le cas $t_+ > t_-$ la fonction $q^-(t)$ peut prendre ses deux expressions, alors que dans le cas $t_- > t_+$ nous avons nécessairement $q^-(t) = C^-$.

¹⁸Pour $u > u_g$ (à droite) $q^+(t, u) = \frac{(1+c^-)K}{u} - 1$, alors que pour $u < u_g$ (à gauche) $q^+(t, u) = C^+$. Mais les deux expressions coïncident sur $u = u_+ = \frac{K(1+c^-)}{1+C^+}$.

⇒ Le cas $t = t_- \forall u \in \mathbb{R}^+$

A l'instant $t = t_-$, la fonction $q^-(t) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)}$ (valide pour $t \geq t_-$) devient $q^-(t) = C^-$ (valide pour $t \leq t_-$), tandis que l'expression de la fonction $q^+(t, u)$ demeure la même de part et d'autre de $t = t_-$. Par conséquent, compte tenu de (5.28) et (5.29), la discontinuité de gradient apparaît seulement pour $\varepsilon = -1$ et correspond à une commutation de la dérivée partielle de $q_t^- = 0$ ($t < t_-$) à $q_t^- = -\tau^-Q^- \mathbf{1}$ ($t > t_-$). La seule différence entre les deux cas $t_+ > t_-$ et $t_- > t_+$ réside dans l'expression de la fonction $q^+(t, u)$ à cet instant $t = t_-$ dans la région Γ_1 . Mais puisque la discontinuité apparaît seulement pour $\varepsilon = -1$, la vérification ne dépendra pas de l'expression de la fonction $q^+(t, u)$ à l'instant $t = t_-$ et par extension sera la même dans les deux cas $t_+ > t_-$ et $t_- > t_+$. Nous devons cependant séparer la vérification en deux parties selon l'expression prise par la fonction Valeur (théorème de représentation 5.2.3)

- Dans la région $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où $W = Q^- \check{V} - q^- v$ (c'est-à-dire pour $u < Ke^{\tau^-(t_- - t)} = u_- = \frac{K(1+c^-)}{1+C^-}$) la dérivée partielle par rapport au temps t commute de $W_t = Q^- \check{V}_t$ à $W_t = Q^- \check{V}_t - \tau^- Q^- \mathbf{1}(\check{v} - v)$. Les autres dérivées partielles $W_u = Q^- \check{V}_u$ et $W_v = -q^-$ restent continues. Le terme supplémentaire $-\tau^- Q^- \mathbf{1}(\check{v} - v)$ est négatif compte tenu de la propriété (5.30). Il en résulte directement¹⁹ que dans cette région la discontinuité de gradient de W correspond à un maximum local. Par conséquent le sous-différentiel est vide et le sur-différentiel $(\varphi_t, \varphi_u, \varphi_v)$ est obtenu en prenant les mêmes $W_u = Q^- \check{V}_u$ et $W_v = -q^- = -C^-$, et en faisant varier W_t entre ses deux valeurs des deux côtés de la discontinuité (combinaisons convexes des deux gradients). Ainsi

$$(\varphi_t, \varphi_u, \varphi_v) = (Q^- \check{V}_t - \lambda \tau^- Q^- \mathbf{1}(\check{v} - v), Q^- \check{V}_u, -q^-) \text{ avec } \lambda \in [0, 1].$$

Avec le sur-différentiel au lieu de (W_t, W_u, W_v) , le minimum des trois termes dans (5.24) doit être non-négatif c'est-à-dire que les trois termes doivent être non-négatifs. Mais comme $\varphi_v + C^+ = C^+ - C^- > 0$ et $-(\varphi_v + C^-) = 0$, il reste seulement à vérifier la condition

$$\varphi_t + \max_{\tau} \tau [\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v] \geq 0 \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (5.39)$$

En utilisant le fait que \check{V} est solution du système d'EDP (5.3) avec la propriété (5.4) (c'est-à-dire que $Q^- \check{V}_t + \tau^- Q^- [\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}] = 0$) dans l'équation (5.39), nous trouvons :

$$\varphi_t + \max_{\tau} \tau [\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v] \geq \varphi_t + \tau^- [\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v] = \lambda \tau^- Q^- \mathbf{1}(\check{v} - v) \geq 0 .$$

- Dans la région Γ_3 où $W = D - q^- v$ (c'est-à-dire pour $u > \frac{K(1+c^-)}{1+C^-} = u_-$), la dérivée partielle par rapport au temps commute de $W_t = 0$ vers $W_t = \tau^- Q^- \mathbf{1} < 0$ tandis que $W_u = 0$ et $W_v = -q^-$ restent continues. Comme précédemment, nous sommes en présence d'un maximum local avec en outre $\varphi_v + C^+ = C^+ - C^- > 0$ et $-(\varphi_v + C^-) = 0$. Il nous reste à vérifier la condition (5.39) pour le sur-différentiel $(\varphi_t, \varphi_u, \varphi_v) = (\lambda \tau^- Q^- \mathbf{1} v, 0, -q^-)$ avec $\lambda \in [0, 1]$. Or

$$\varphi_t + \max_{\tau} \tau [\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v] \geq \varphi_t + \tau^- [\varphi_u u + (W_v - 1) v] = -(1 - \lambda) \tau^- Q^- \mathbf{1} v \geq 0.$$

¹⁹Sans avoir besoin de recourir au test de la proposition 2.2.3.

⇒ **Le cas** $u = u_d(t) = Ke^{-\tau^-(T-t)}$ **pour** $t > t_-$

Dans un voisinage à gauche de cette frontière dans le plan (u, t) (c'est-à-dire pour des valeurs de u plus petites) nous avons $q^+(u) = (1 + c^-)\frac{K}{u} - 1 \in]C^-, C^+[$ et $q^-(t) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1 \in]C^-, C^+[$, tandis qu'à sa droite (pour des u plus grands), nous avons $q^+(t) = q^-(t) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1 \in]C^-, C^+[$. Ces expressions sont indépendantes de la position de t_+ par rapport à t_- (du signe de $t_+ - t_-$) et par conséquent la vérification va être la même dans les deux cas $t_+ > t_-$ et $t_- > t_+$.

Nous avons vu (dans le paragraphe « le cas limite où $u(t) = u_d(t) = Ke^{-\tau^-(T-t)}$ », page 174) que la fonction W est continue le long de cette frontière, avec $\check{v} = +\infty$ (donc $\varepsilon = +1$), $q^+(t) = q^-(t) = \max\{(1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1, C^-\}$ et $Q^+\check{V} = D$. A gauche ($u < u_d(t)$) nous avons les relations (5.27), (5.32) et (5.33) et ainsi le gradient est donné par

$$\nabla W^- = (W_t, W_u, W_v) = (Q^+\check{V}_t, Q^+\check{V}_u - \frac{Q^+\mathbf{1}}{u}(\check{v} - v), -q^+)$$

tandis qu'à droite ($u \geq u_d(t)$) nous avons

$$\nabla W^+ = (W_t, W_u, W_v) = (-q_t^-v, 0, -q^+ = -q^-) \quad \text{avec} \quad q_t^- = -\tau^-Q^-\mathbf{1} < 0 \quad (\text{relation (5.28)}) .$$

Comme sur cette frontière $q^+ = q^-$ la discontinuité du gradient a lieu dans le plan (t, u) .

Nous nous servons du test de la proposition 2.2.3 pour identifier la nature de la discontinuité de gradient. Compte tenu du choix de ∇W^- et ∇W^+ , nous posons $S(t, u, v) = 0$ l'équation de la frontière telle que $S(t, u, v) > 0$ à sa droite dans le plan (u, t) et ∇S son gradient. Nous avons

$$S(t, u, v) = u - Ke^{-\tau^-(T-t)} \quad \text{et} \quad \nabla S = (-\tau^-u, 1, 0) .$$

Considérons la direction transverse $h = (0, 1, 0)^t$ qui vérifie bien $\langle \nabla S, h \rangle = 1 > 0$ et désignons par

$$\delta \nabla W = \nabla W^+ - \nabla W^- = \left(-q_t^-v - Q^+\check{V}_t, -Q^+\check{V}_u + \frac{Q^+\mathbf{1}}{u}(\check{v} - v), 0 \right)$$

la différence de gradient entre celui de droite et celui de gauche.

À gauche nous avons la formule (4.41) $\check{V} = \begin{pmatrix} \check{v} \\ \check{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -q^- \end{pmatrix} \frac{D}{q^+(u) - q^-(t)}$, où la quantité $q^+(u) - q^-(t)$ est positive mais devient égale à zéro sur la frontière. Après quelques calculs nous obtenons

$$\check{V}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ -q^+ \end{pmatrix} \frac{q_t^-}{q^+ - q^-} \check{v} \quad \text{et} \quad \check{V}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ q^- \end{pmatrix} \frac{Q^+\mathbf{1}}{u(q^+ - q^-)} \check{v} . \quad (5.40)$$

Il en résulte que les gradient \check{V}_t, \check{V}_u sont non définis. Mais $Q^+\check{V}_t = 0$ et $Q^+\check{V}_u = \frac{Q^+\mathbf{1}}{u}\check{v}$ et par conséquent $\delta \nabla$ se simplifie en

$$\delta \nabla W = \left(-q_t^-v, -\frac{Q^+\mathbf{1}}{u}v, 0 \right) .$$

Nous en déduisons ainsi que (en utilisant la propriété (5.5))

$$\langle \delta \nabla W, h \rangle = -\frac{Q^+ \mathbf{1}}{u} v = -\frac{(1+q^+)u}{v} < 0 ,$$

c'est-à-dire, d'après la proposition 2.2.3, que sur toute la frontière $u_d(t) = Ke^{-\tau^-(T-t)}$ pour $t > t_-$ la discontinuité de gradient de W correspond à un maximum local.

Remarque 5.4.4 *Nous aurions pu, également, choisir la direction transverse $h = (1, 0, 0)^t$ puisque celle-ci vérifiait $\langle \nabla S, h \rangle = -\tau^- u > 0$. Le test aurait alors conduit à $\langle \mu_t, \delta \nabla W \rangle = -q_t^- v = \tau^-(1+q^-)v \leq 0$, donc fort heureusement à la même conclusion.*

Le sous-différentiel est vide, et comme \check{V}_t, V_u sont infinis, le gradient ∇W^- à gauche de la frontière est infini et le sur-différentiel devient

$$(\varphi_t, \varphi_u, \varphi_v) = \nabla W^+ - \lambda \nabla S = (\tau^- Q^- \mathbf{1} v + \lambda \tau^- u, -\lambda, -q^-) \text{ avec } \lambda \geq 0 . \quad (5.41)$$

Avec le sur-différentiel à la place de (W_t, W_u, W_v) , le minimum des trois termes dans (5.24) doit être non positif. Comme $\varphi_v = -q^- \in]-C^+, -C^-]$, nous avons $\varphi_v + C^+ > 0$ et $-(\varphi_v + C^-) > 0$. Il reste à vérifier la condition (5.39)

$$\varphi_t + \max_{\tau} \tau [\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v] \geq 0 \quad \forall \lambda \geq 0 .$$

Or $\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v = -\lambda u - Q^- \mathbf{1} v \leq 0$. Par conséquent le maximum en τ est obtenu pour $\tau = \tau_-$ et conduit directement, compte tenu de l'expression (5.41), à

$$\varphi_t + \tau^- [\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v] = 0 \quad \forall \lambda \geq 0 .$$

⇒ Le cas $u = \alpha e^{-\tau^-(t_\beta - t)}$ pour $u \in [u_+, u_-]$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $\beta \in \{+, -\}$.

Nous rappelons que cet ensemble de courbes englobe les trajectoires

$$\tilde{u}_{13}^-(t) = u_+ e^{-\tau^-(t_- - t)} , \quad \tilde{u}_{12}^-(t) = u_g(t_-) e^{-\tau^-(t_- - t)} , \quad \text{et} \quad \tilde{u}_{23}^-(t) = u_+ e^{-\tau^-(t_+ - t)} .$$

Des deux côtés de ces trajectoires, la valeur du jeu est donnée par $W(t, u, v) = Q^\varepsilon(t, u) \check{V}(t, u) - q^\varepsilon(t, u) v$ et donc (W_t, W_u) sont donnés par les relations (5.32), (5.33). La solution de (5.3) $\check{V}(t, u)$ est continue à travers ces trajectoires. Nous désignons par $(\delta \check{V}_t, \delta \check{V}_u)$ la différence des composantes de son gradient de part et d'autre de ces trajectoires, de sorte que $(\check{V}_t, \check{V}_u)$ est le gradient de la solution à gauche et $(\check{V}_t + \delta \check{V}_t, \check{V}_u + \delta \check{V}_u)$ celui de la solution à droite dans le plan (u, t) . Ainsi par différence des deux relations (5.3), on obtient la condition de continuité

$$\delta \check{V}_t + \mathcal{T} \delta \check{V}_u u = 0 ,$$

et en utilisant la relation (5.4) il vient $Q^\varepsilon \delta \check{V}_t = -\tau^\varepsilon Q^\varepsilon \delta \check{V}_u u$.

Comme ces courbes sont des trajectoires avec $\tau = \tau^-$, en utilisant le théorème de l'annexe A.5, nous avons

$$Q^+ \delta \check{V}_u = Q^+ \delta \check{V}_t = 0 . \quad (5.42)$$

Posons

$$S(t, u, v) = u - \alpha e^{-\tau^-(t_\beta - t)} \quad \text{et} \quad \nabla S = (-\tau^- u, 1, 0) .$$

De part et d'autre de la variété $S = 0$, la valeur du jeu à pour expression $W(t, u, v) = Q^\varepsilon(t, u) \check{V}(t, u) - q^\varepsilon(t, u)v$ avec par ailleurs $q^+(u) = (1 + c^-) \frac{K}{u}$ et $q^- = C^-$. Comme les expressions de $q^+(u)$ et q^- coïncident de chaque côté, les expressions de leur dérivées partielles q_t^ε et q_u^ε sont les mêmes de part et d'autre de ces trajectoires. Compte tenu des expressions (5.32), (5.33) et $W_v - 1 = -Q^\varepsilon \mathbb{1}$, nous en déduisons la différence de gradient $\delta \nabla W = \nabla W^+ - \nabla W^-$ entre les deux valeurs du jeu à gauche et à droite

$$\delta \nabla W = (\delta W_t, \delta W_u, \delta W_v) = (Q^\varepsilon \delta \check{V}_t, Q^\varepsilon \delta \check{V}_u, 0) = (-\tau^\varepsilon Q^\varepsilon \delta \check{V}_u u, Q^\varepsilon \delta \check{V}_u, 0) \quad (5.43)$$

Pour savoir si nous sommes en présence d'une discontinuité de gradient, et si celle-ci correspond à un maximum local ou à un minimum local, nous utilisons le test de la proposition 2.2.3.

Considérons la direction transverse $h = (0, 1, 0)^t$ qui vérifie $\langle \nabla S, h \rangle = 1 > 0$. Nous avons $\langle \delta \nabla W, h \rangle = Q^\varepsilon \delta \check{V}_u u$ qui est nul pour $\varepsilon = +$ compte tenu de la propriété (5.42). Mais pour $\varepsilon = -$, nous sommes incapables de déterminer le signe de ce produit scalaire. A ce stade nous pouvons donc seulement en déduire que pour $\varepsilon = +$ (c'est-à-dire $v < \check{v}(t, u)$) la fonction Valeur ne présente pas de discontinuité de gradient le long de ces courbes et donc il n'y a rien à vérifier pour $\varepsilon = +$.

Remarque 5.4.5 *En choisissant la direction transverse $h = (1, 0, 0)^t$ pour laquelle $\langle \nabla S, h \rangle = -\tau^- u > 0$, le test aboutit à $\langle \delta \nabla W, h \rangle = -\tau^\varepsilon Q^\varepsilon \delta \check{V}_u u$. On retrouve bien le fait que ce produit scalaire est égal à 0 pour $\varepsilon = +$, et que pour $\varepsilon = -$ il est du même signe que le produit scalaire du test avec la direction $h = (0, 1, 0)^t$ puisque $-\tau^- > 0$.*

De même en choisissant la direction transverse $h = (1, \tau^+ u, 0)^t$ (la direction $\tau = \tau^+$) qui vérifie $\langle \nabla S, h \rangle = (\tau^+ - \tau^-)u > 0$, on aboutit à la même conclusion puisque dans ce cas

$$\langle \delta \nabla W, \begin{pmatrix} 1 \\ \tau^+ u \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = (\tau^+ - \tau^\varepsilon) Q^\varepsilon \delta \check{V}_u u .$$

Nous pouvons même remarquer qu'en choisissant cette direction transverse on en conclut directement, pour $\varepsilon = +$, à l'absence de discontinuité de gradient sans même utiliser la propriété $Q^+ \delta \check{V}_u = 0$.

Le test équivalent $\langle \delta \nabla W, \nabla S \rangle$ non homogène (au sens de la physique), mentionné dans la proposition 2.2.3, conduit à

$$\langle \delta \nabla W, \nabla S \rangle = (1 + \tau^\varepsilon \tau^- u^2) Q^\varepsilon \delta \check{V}_u ,$$

et donc également à la même conclusion (indetermination du signe du produit scalaire pour $\varepsilon = -$ et absence de discontinuité de gradient pour $\varepsilon = +$).

Si pour $\varepsilon = -$ le signe du produit scalaire du test s'avère être strictement positif, nous aurions un minimum local et donc un sous-différentiel non vide avec $\varphi_v = W_v = -C^-$. Avec ce sous différentiel,

au lieu de (W_t, W_u, W_v) , il nous faudrait vérifier que le min des trois termes de (5.24) est négatif ou nul, c'est-à-dire qu'au moins un des trois termes de (5.24) est négatif ou nul. Comme $-(\varphi_v + C^-) = 0$, ce cas serait ainsi résolu directement.

Toutefois nous suspectons que le produit scalaire du test est strictement négatif (avec donc $Q^- \delta \check{V}_u < 0$), de sorte que nous sommes en présence d'une discontinuité de gradient correspondant à un maximum local, et donc d'un sur-différentiel non vide. Le sur-différentiel est alors donné par

$$(\varphi_t, \varphi_u, \varphi_v) = (W_t + \lambda \delta W_t, W_u + \lambda \delta W_u, W_v) \quad \text{avec} \quad \lambda \in [0, 1],$$

c'est-à-dire

$$(\varphi_t, \varphi_u, \varphi_v) = (-\tau^- Q^- (\check{V}_u u - \mathbf{1}\check{v}) - \lambda \tau^- Q^- \delta \check{V}_u u, Q^- \check{V}_u + \lambda Q^- \delta \check{V}_u, -q^-).$$

Nous obtenons ainsi une discontinuité de gradient dans le plan (t, u) . Avec le super-différentiel $(\varphi_t, \varphi_u, \varphi_v)$ au lieu de (W_t, W_u, W_v) , le min des trois termes dans (5.24) doit être non négatif. Comme $-(\varphi_v + C^-) = 0$ et $\varphi_v + C^+ = C^+ - C^- > 0$, il nous reste plus qu'à vérifier que

$$\varphi_t + \max_{\tau} \tau [\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v] \geq 0 \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Le signe de $\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v = Q^- \check{V}_u u + \lambda Q^- \delta \check{V}_u u - Q^- \mathbf{1}v$ ne peut pas être déterminé, et par conséquent nous traitons les deux cas :

- Si $Q^- \check{V}_u u + \lambda Q^- \delta \check{V}_u u - Q^- \mathbf{1}v \leq 0$, le \max_{τ} est atteint pour $\tau = \tau^-$ ce qui conduit à

$$\varphi_t + \max_{\tau} \tau [\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v] = \tau^- Q^- \mathbf{1}(\check{v} - v) \geq 0$$

compte tenu des propriétés (5.5) et (5.30).

- Si $Q^- \check{V}_u u + \lambda Q^- \delta \check{V}_u u - Q^- \mathbf{1}v \geq 0$, le \max_{τ} est atteint pour $\tau = \tau^+$ ce qui conduit à

$$\varphi_t + \max_{\tau} \tau [\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v] = (\tau^+ - \tau^-)(Q^- \check{V}_u u + \lambda Q^- \delta \check{V}_u u - Q^- \mathbf{1}v) + \tau^- Q^- \mathbf{1}(\check{v} - v)$$

qui est positif comme la somme de deux termes positifs du fait de l'hypothèse $Q^- \check{V}_u u + \lambda Q^- \delta \check{V}_u u - Q^- \mathbf{1}v \geq 0$ pour le premier terme et du résultat du cas précédent pour le second terme.

La conclusion aboutit bien dans les deux cas.

⇒ **Le cas** $u = u_g(t) = K e^{-\tau^+(T-t)}$ **avec** $\varepsilon = -$

A gauche de cette trajectoire dans le plan (u, t) nous avons la solution explicite $\check{v}(t, u) = \check{w}(t, u) = 0$. A droite ($u(t) > u_g(t)$), nous avons $V_t = \delta V_t$ et $V_u = \delta V_u$ non nuls satisfaisant (5.3). La variation de gradient de W de part et d'autre de $u(t) = u_g(t)$ est donné par

$$(\delta W_t, \delta W_u, \delta W_v) = (\delta Q^- V_t, \delta Q^- V_u, 0).$$

Mais compte tenu du théorème de l'annexe A.5, le long de cette trajectoire $\tau = \tau^+$ nous avons $\delta Q^- V_t = \delta Q^- V_u = 0$. Par conséquent le gradient de W est continu à travers la trajectoire $u(t) = u_g(t)$

dans le cas $\varepsilon = -$. La fonction W est par conséquent régulière et il n'y a donc rien à vérifier.

Remarque 5.4.6 Cette vérification est évidemment valable dans les deux cas $t_- < t_+$ et $t_+ < t_-$ puisque nous n'avons pas eu besoin de discuter des expressions prises par les fonctions q^ε ou par leurs dérivées partielles en t ou en u .

5.4.5 Régions non régulières avec discontinuité de la fonction valeur W

Nous avons montré dans le paragraphe 4.11.2 que la fonction valeur W est discontinue le long du bord gauche $u(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$ de la région d'intérêt Λ , pour $\varepsilon = +$ (c'est-à-dire $v < \check{v}(t, u)$), et que cette discontinuité correspond à un saut positif lorsque u augmente (à savoir de gauche à droite de la trajectoire $u_g(t)$ dans le plan (u, t)). Nous allons montrer que la fonction Valeur exhibée W dans le théorème 5.2.3 de représentation est **une** solution de viscosité discontinue de l'équation d'Isaacs (5.24) au sens de G. Barles [Bar94], en nous servant de la définition 2.2.4. Nous pourrions nous appuyer sur la proposition 2.2.5 pour construire le gradient des fonctions tests).

Posons $S(t, u, v) = u - Ke^{-\tau^+(T-t)}$, dont le gradient est donné par

$$\nabla S = (-\tau^+ u, 1, 0). \quad (5.44)$$

La figure 5.5 rappelle des informations de part et d'autre de $u_g(t)$ qui vont nous être utile.

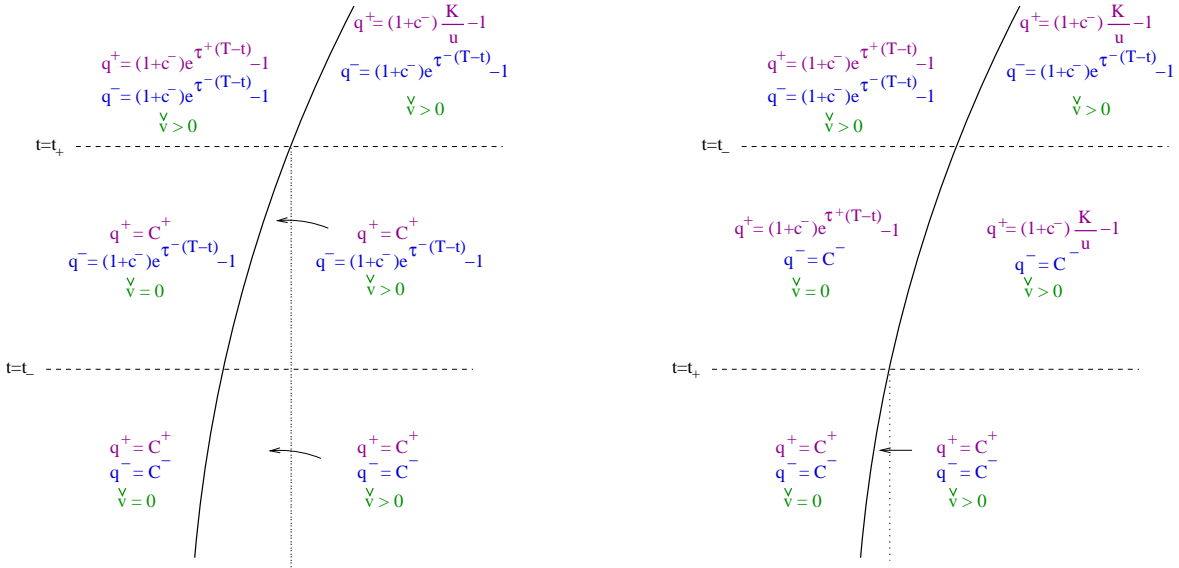


FIG. 5.5 – Expressions de $q^+(t, u)$, $q^-(t)$ et propriété de \check{v} des deux côtés de la courbe $u(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$ dans le plan (u, t) .

Dans la partie du plan (u, t) où $S < 0$, c'est-à-dire pour $u(t) < u_g(t)$, nous avons $\check{V} = (0, 0)^t$ pour

solution de (5.3) et par conséquent $\varepsilon = -1$. La fonction valeur et son gradient sont ainsi données par :

$$W_L = -q^- v \quad \text{avec} \quad \nabla W_L = (-q_t^- v, 0, -q^-) \quad (5.45)$$

où q^- satisfait (5.28) si $t > t_-$ et (5.29) si $t \leq t_-$.

A droite de $u_g(t)$ dans le plan (u, t) (c'est-à-dire pour $S > 0$), nous avons $\check{V}(t, u)$ non nulle solution de (5.3). La fonction valeur est donnée par $W_R(t, u, v) = Q^\varepsilon(t, u)\check{V}(t, u) - q^\varepsilon(t, u)v$ avec (5.32) et (5.33). Donc

$$\nabla W_G = (-\tau^\varepsilon Q^\varepsilon(\check{V}_u u - \mathbf{1}\check{v}) + q_t^\varepsilon(\check{v} - v), Q^\varepsilon \check{V}_u + q_u^\varepsilon(\check{v} - v), -q^\varepsilon) .$$

Pour $\varepsilon = +$, seul cas à étudier, nous rappelons que compte tenu des relations (5.27) et (5.29) nous avons

$$q_t^+ = 0 \quad \text{et} \quad q_u^+ = \begin{cases} \frac{-(1+q^+)}{u} & \text{si } t > t_+ , \\ 0 & \text{si } t < t_+ , \end{cases} \quad (5.46)$$

et ainsi

$$\nabla W_D = (-\tau^\varepsilon Q^+(\check{V}_u u - \mathbf{1}\check{v}), Q^+ \check{V}_u + q_u^+(\check{v} - v), -q^+) . \quad (5.47)$$

Nous avons montré dans le paragraphe 4.11.2 que la discontinuité de W le long de la variété $u_g(t)$ d'équation $S(t, u, v) = 0$ correspond à un saut simple positif lorsque u augmente. Par ailleurs $W_* = W_G$ dans le demi espace ouvert $S(t, u, v) < 0$ et $W^* = W_D$ dans le demi espace ouvert $S(t, u, v) > 0$ sont tous les deux de classe \mathcal{C}^1 . En nous servant de la propriété 2.2.5, l'ensemble des gradients des fonctions tests Φ_* et Φ^* dans $\bar{X} = (t, u, v)$ (c'est-à-dire respectivement les éléments du sur-différentiel et du sous-différentiel, telles que $(W_G - \Phi_*)$ et $(W_D - \Phi^*)$ possèdent respectivement un minimum et un maximum en $S(t, u, v) = 0$), s'écrivent

$$\nabla \Phi_* = (\Phi_{*t}, \Phi_{*u}, \Phi_{*v}) = \nabla W_G + \mu \nabla S = (\tau^- Q^- \mathbf{1}v - \mu \tau^+ u, \mu, -q^-) \quad \text{avec } \mu \geq 0 , \quad (5.48)$$

$$\nabla \Phi^* = (\Phi_t^*, \Phi_u^*, \Phi_v^*) = \nabla W_G + \nu \nabla S = (-\tau^+ Q^+(\check{V}_u u - \mathbf{1}\check{v}) - \nu \tau^+ u, Q^+ \check{V}_u + q_u^+(\check{v} - v) + \nu, -q^+) \quad \text{avec } \nu \geq 0 . \quad (5.49)$$

- **Pour** $S(t, u, v) < 0$

La discontinuité correspond à un minimum de la fonction $(W_G - \Phi_*)$ en $u = Ke^{-\tau^+(T-t)}$. Donc $\nabla \Phi_* d\bar{X} \leq \nabla W_L d\bar{X}$ à gauche de $u(t) = Ke^{-\tau^+(T-t)}$. Avec (5.48)²⁰ en lieu et place de ∇W_L , le minimum des trois termes dans (5.24) doit être non positif (c'est-à-dire qu'au moins l'un des trois termes doit être non positif). La condition de viscosité s'écrit donc

$$\min \left\{ \Phi_{*t} + \max_{\tau} \tau [\Phi_{*u} u + (\Phi_{*v} - 1)v] , \Phi_{*v} + C^+ , -(\Phi_{*v} + C^-) \right\} \leq 0 , \quad (5.50)$$

avec $(\Phi_{*t}, \Phi_{*u}, \Phi_{*v})$ donné par (5.48). Distinguons deux cas suivant l'expression prise par q^- à savoir selon que $t > t_-$ et $t < t_-$.

²⁰Nous avons bien μ positif puisque un déplacement vers la gauche correspond à une variation négative de S .

➔ Pour $t > t_-$ nous avons $C^- < q^-(t) = (1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1 < C^+$ donc $\Phi_{*v} + C^+ = C^+ - q^- > 0$ et $-(\Phi_{*v} + C^-) = q^- - C^- > 0$. Nous sommes ainsi contraint de vérifier que

$$\Phi_{*t} + \max_{\tau} \tau [\Phi_{*u} u + (\Phi_{*v} - 1) v] \leq 0 \quad \forall \mu \geq 0.$$

Il découle de la relation (5.48) que

$$\Phi_{*u} u + (\Phi_{*v} - 1) v = \mu u - Q^- \mathbf{1}v ,$$

est la différence de deux termes positifs avec un $\mu \geq 0$ quelconque (non spécifié). Ainsi le max en τ peut être atteint en $\tau^- < 0$ ou en $\tau^+ > 0$. Nous rappelons en outre que $q_t^- = -Q^- \mathbf{1}v$ pour $t > t_-$ (relation (5.28))

– Si le maximum est atteint en τ^- (c'est-à-dire $\mu u - Q^- \mathbf{1}v \leq 0$) nous obtenons

$$\Phi_{*t} + \max_{\tau} \tau [\Phi_{*u} u + (\Phi_{*v} - 1) v] = -\mu u (\tau^+ - \tau^-) \leq 0.$$

– Si il est atteint en τ^+ , nous avons

$$\Phi_{*t} + \max_{\tau} \tau [\Phi_{*u} u + (\Phi_{*v} - 1) v] = -(\tau^+ - \tau^-) Q^- \mathbf{1}v \leq 0.$$

Par conséquent la condition (5.50) (condition de viscosité) est bien satisfaite dans les deux cas.

➔ Pour $t < t_-$, nous avons $q^- = C^-$ et par conséquent (5.50) est clairement vérifié puisque le troisième terme est $-(\Phi_{*v} + C^-) = q^- - C^- = 0$.

- Pour $S(t, u, v) > 0$

La discontinuité de la fonction valeur qui n'a lieu que dans le cas où $\varepsilon = +1$ correspond à un maximum de la fonction $(W_R - \Phi^*)$ en $u = Ke^{-\tau^+(T-t)}$. Par conséquent $\nabla \Phi^* dx \geq \nabla W_R dx$ à droite de $u = Ke^{-\tau^+(T-t)}$. Avec (5.48) ²¹ à la place de ∇W_R le minimum des trois termes dans (5.24) doit être non négatifs (c'est-à-dire que les trois termes doivent être non positifs). La condition de viscosité à vérifier s'écrit donc

$$\min \left\{ \Phi_t^* + \max_{\tau} \tau [\Phi_u^* u + (\Phi_v^* - 1) v] , \Phi_v^* + C^+ , -(\Phi_v^* + C^-) \right\} \geq 0 . \quad (5.51)$$

Comme nous avons $\Phi_v^* = -q^+$ (relation (5.49)), avec $q^+ = (1 + c^-) \frac{K}{u} - 1 \in] - C^-, C^+[$ pour $t > t_+$ et $q^+ = C^+$ pour $t < t_+$, les deux derniers termes de (5.51) sont positifs quelque soit t . Dans les deux cas, $t > t_+$ et $t \leq t_+$, il nous reste à vérifier que le premier terme de (5.51) est non négatif, c'est-à-dire que

$$-\tau^+ Q^+ (\check{V}_u u - \mathbf{1}\check{v}) - \nu \tau^+ u + \max_{\tau} \tau [Q^+ \check{V}_u u + q_u^+ (\check{v} - v) u + \nu u - Q^+ \mathbf{1}v] \geq 0$$

²¹Nous avons bien ν positif puisque un déplacement vers la droite correspond à une variation positive de S .

où $q_u^+(\check{v} - v)u$ est égal à $-Q^+\mathbf{1}(\check{v} - v)$ si $t > t_+$ et égal à 0 si $t < t_+$ (compte tenu de (5.46)). Mais ici, le signe de

$$\Phi_u^*u + (\Phi_v^* - 1)v = \begin{cases} Q^+\check{V}_u u + \nu u - Q^+\mathbf{1}\check{v} & \text{si } t > t_+ \\ Q^+\check{V}_u u + \nu u - Q^+\mathbf{1}v & \text{si } t < t_+ \end{cases}$$

ne peut être déterminé sans utiliser la propriété 5.4.2 (condition de semi-perméabilité dans le jeu qualitatif)²². Considérons que le max en τ peut être atteint en chacune des bornes τ^+ et τ^- .

⇒ Si le maximum est atteint en $\tau = \tau^+$, le premier terme de (5.51) devient

$$\begin{aligned} \text{si } t > t_+ \quad \Phi_t^* + \max_{\tau} \tau [\Phi_u^*u + (\Phi_v^* - 1)v] &= 0 \\ \text{si } t < t_+ \quad \Phi_t^* + \max_{\tau} \tau [\Phi_u^*u + (\Phi_v^* - 1)v] &= \tau^+ Q^+\mathbf{1}(\check{v} - v) \geq 0 \end{aligned}$$

Le second cas conduit à un terme positif puisque ici $\varepsilon = +1$ c'est-à-dire $(\check{v} - v) \geq 0$.

⇒ Si le max en τ est atteint en $\tau = \tau^-$, cela signifie que nous avons

$$\begin{cases} Q^+\check{V}_u u + \nu u - Q^+\mathbf{1}\check{v} \leq 0 & \text{pour } t > t_+, \\ Q^+\check{V}_u u + \nu u - Q^+\mathbf{1}v \leq 0 & \text{pour } t < t_+, \end{cases} \quad (5.52)$$

et que le premier terme de (5.51) devient

$$\Phi_t^* + \max_{\tau} \tau [\Phi_u^*u + (\Phi_v^* - 1)v] = \begin{cases} -(\tau^+ - \tau^-)(Q^+\check{V}_u u + \nu u - Q^+\mathbf{1}\check{v}) & \text{pour } t > t_+ \\ -(\tau^+ - \tau^-)(Q^+\check{V}_u u + \nu u) + \tau^+ Q^+\mathbf{1}\check{v} - \tau^- Q^-\mathbf{1}v & \text{pour } t < t_+ \end{cases} \quad (5.53)$$

Pour $t > t_+$, en utilisant l'inégalité (5.52), l'équation (5.53) donne directement

$$\Phi_t^* + \max_{\tau} \tau [\Phi_u^*u + (\Phi_v^* - 1)v] \geq 0 .$$

Pour $t < t_+$, l'inégalité (5.52) se ré-écrit $-(Q^+\check{V}_u u + \nu u) \geq -Q^+\mathbf{1}v$. En multipliant cette inégalité par $\tau^+ - \tau^- > 0$ puis en la reportant dans (5.53), nous en concluons que

$$\Phi_t^* + \max_{\tau} \tau [\Phi_u^*u + (\Phi_v^* - 1)v] \geq \tau^+ Q^+\mathbf{1}(\check{v} - v) \geq 0 .$$

La condition (5.51) est donc bien satisfaite dans tous les cas. Remarquons que la considération de la position de t par rapport à t_- (respectivement par rapport à t_+) n'intervient que dans la région $S < 0$ (respectivement que dans la région $S > 0$). Ainsi nous comprenons que cette vérification gère conjointement les $t_- < t_+$ et $t_+ < t_-$.

La vérification par solution de viscosité pour le call digital est ainsi terminée.

²²L'utilisation de cette propriété avec (5.3) conduit à $Q^+(\check{V}_u u - \mathbf{1}\check{v}) \geq 0$. Comme par ailleurs $\varepsilon = +1$ (c'est-à-dire $\check{v} > v$), nous obtenons $Q^+(\check{V}_u u - \mathbf{1}v) \geq Q^+(\check{V}_u u - \mathbf{1}\check{v}) \geq 0$. Par conséquent puisque l'on a aussi $\nu u \geq 0 \forall \nu \geq 0$, il en résulte que $\Phi_u^*u + (\Phi_v^* - 1)v \geq 0$ dans chacun des cas, à savoir que le \max_{τ} est atteint en τ^+ .

5.4.6 Le cas particulier où $t_+ = t_-$

Ce cas n'est pas très intéressant en pratique puisqu'il se rapporte à un événement de probabilité nulle, il ne remet donc pas en cause le fait que la vérification est déjà terminée. Cependant, nous souhaitons nous assurer que ce cas particulier n'occasionne pas de dégénérescence contrairement au cas $C^- = C^+$ (en particulier en absence de coûts de transaction $C^- = C^+ = 0$, traité à part dans le paragraphe 4.1) où la variété focale \mathcal{F} (région où $q^+ = C^+$ et $q^- = C^-$) ne peut plus être formalisée par le système d'EDP (5.3) puisque dans ce cas $q^+ = q^-$.

La figure 5.6 illustre les différentes régions régulières du plan (u, t) apparaissant dans les deux cas $t_+ > t_-$ et $t_- > t_+$ (les deux schémas du dessus), et leur limite commune lorsque $t_- = t_+$ (le schéma du dessous).

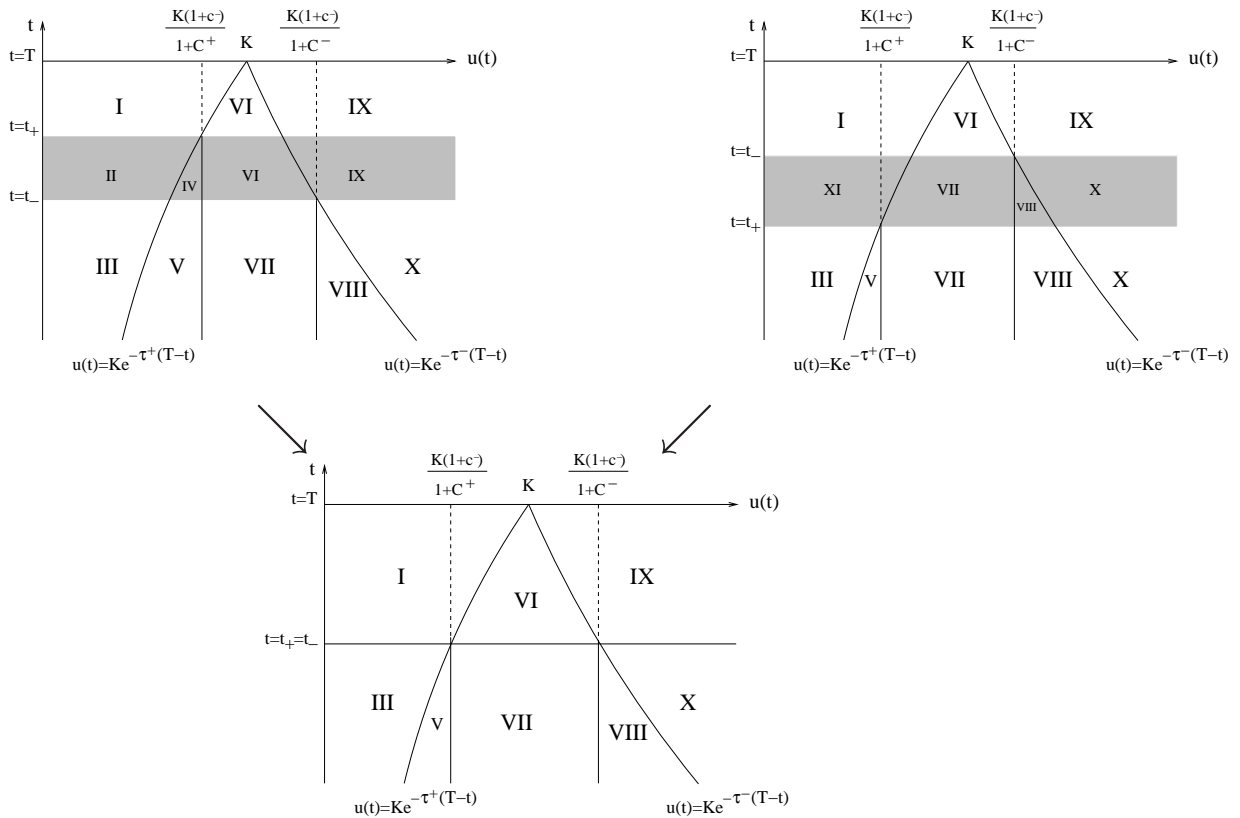


FIG. 5.6 – Les différentes régions régulières dans le plan (u, t) et le cas particulier $t_- = t_+$

Le cas limite $t_- = t_+$ constitue juste un cas particulier dans lequel la région $\min\{t_-, t_+\} \leq t \leq \max\{t_-, t_+\}$ (en gris sur la figure 5.6), disparaît. Puisque aucune nouvelle région n'apparaît dans la solution, la quasi totalité de la vérification ne présente aucune difficulté et a déjà été faite au cours de la vérification générale. Il reste seulement à s'assurer que la région non régulière $t = t_+ = t_-$ n'introduit pas de difficulté supplémentaire. Séparons les cas $\varepsilon = -1$ et $\varepsilon = +1$:

- ➔ Si $\varepsilon = -1$, la vérification est identique à celle de la région non régulière $t = t_-$ (paragraphe 5.4.4). En effet, la discontinuité de gradient de la fonction valeur correspond toujours à une commutation de la dérivée partielle par rapport au temps, qui provient de la discontinuité de gradient de la fonction $q^-(t)$ à travers $t = t_-$ (se rappeler de (5.28) et (5.29)).
- ➔ Pour $\varepsilon = +1$ trois sous cas peuvent apparaître suivant que $t = t_+ = t_-$ sépare les régions I et III ($u(t) \in \Gamma_1$), VI et VII ($u(t) \in \Gamma_2$), ou IX et X ($u(t) \in \Gamma_3$).
 - Dans les régions I et III , mais aussi IX and X , nous avons la solution explicite $\check{v} = 0$ (formules (4.25) et (4.26) avec $v \geq 0$ (du fait du caractère croissant en u de la fonction de paiement $M(u)$). Ainsi nécessairement $\varepsilon = \text{signe}(\check{v} - v) = -1$ et par conséquent le cas $\varepsilon = 1$ n'a pas besoin d'être discuté (les fonctions valeurs ne dépendent pas de $q^+(t, u)$ et s'écrivent $W(t, u, v) = \check{w} - q^-(t)v$ avec respectivement $\check{w} = 0$ et $\check{w} = D$, comme le montre la formule (4.29)).
 - Entre les régions VI and VII , $q^+(u) = (1 + c^-)\frac{K}{u} - 1$, $\check{v}(t, u)$ et $\check{w}(t, u)$ sont des fonctions de classe C^1 . Par conséquent la fonction valeur $W(t, u, v)$ est aussi de classe C^1 .

L'étude du cas de mesure nulle $t_+ = t_-$ est ainsi terminée.

5.5 Vérification à l'aide de solution de viscosité pour le call vanille avec paiement en nature

Nous venons de vérifier pour un call digital que la fonction Valeur donnée par le théorème de représentation 5.2.3 est une solution de viscosité discontinue de la DIQV (l'équation d'Isaacs du jeu \mathcal{J}) (5.24). Intéressons nous maintenant succinctement à cette même vérification pour un call vanille avec paiement en nature. Nous rappelons que, pour le call vanille, la formule de représentation de W est donnée par le théorème 5.1.2, avec la formule (3.57) pour les fonctions $q^\varepsilon(t)$. Autrement dit nous allons montrer la proposition suivante.

Proposition 5.5.1 *La fonction*

$$W(t, u, v) = Q^\varepsilon(t)\check{V}(t, u) - q^\varepsilon(t)v = \check{w}(t, u) + q^\varepsilon(t)(\check{v}(t, u) - v) \quad \text{avec } \varepsilon = \text{signe}(\check{v} - v) ,$$

$$q^\varepsilon(t) = \varepsilon \min\{\varepsilon(1 + c^\varepsilon)e^{\tau^\varepsilon(T-t)} - 1, \varepsilon C^\varepsilon\} = \begin{cases} (1 + c^\varepsilon)e^{\tau^\varepsilon(T-t)} - 1 & \text{si } t > t_\varepsilon \\ C^\varepsilon & \text{si } t \leq t_\varepsilon \end{cases}$$

et $\check{V}(t, u)$ solution de (5.3), est une solution de viscosité de la DIQV (5.24) dans le domaine $[0, T] \times \mathbb{R} \times [0, u]$.

Cette vérification pour le call vanille avec paiement en nature a été publiée de manière condensée dans [BEFT07].

5.5.1 Préliminaires et structure de la vérification

Propriété préliminaire

Les dérivées partielles des fonctions q^ε , $\varepsilon \in \{+, -\}$, sont données par l'expression (5.28) pour $t > t_\varepsilon$ et par l'expression (5.29) pour $t \leq t_\varepsilon$. Compte tenu du choix (5.16) de l'extension de $q^+(t, u)$ à gauche de la région d'intérêt pour le call digital (voir l'expression de $q^+(t, u)$ dans la région Γ_1) nous avons la propriété 5.2.2, ce qui va nous permettre d'effectuer plus rapidement la vérification puisque en outre la formule de représentation de la fonction Valeur W (proposition 5.5.1) a la même forme que celle obtenue pour le call digital dans la région Γ_1 (théorème 5.2.3).

Pour $t > t_\varepsilon$, nous avons $q^\varepsilon(t) = (1 + c^-)e^{\tau^\varepsilon(T-t)} - 1$ pour le call digital dans la région Γ_1 et $q^\varepsilon(t) = (1 + c^\varepsilon)e^{\tau^\varepsilon(T-t)} - 1$ pour le call vanille avec paiement en nature. Cette légère différence ne change toutefois pas l'expression (5.28) de la dérivée partielle en t de ces fonctions. Nous parlerons plus en détail de ce point dans le paragraphe 5.6.

Inventaire des régions où W est non régulière

L'analyse par la méthode du jeu qualitatif en dimension 4 faite dans le chapitre 3 pour un call vanille avec paiement en nature a montré que la fonction Valeur W reste continue mais que, en plus de la région $v = \tilde{v}(t, u) \forall (t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$ (pour laquelle la vérification est mot pour mot la même que dans le cas du call digital), les trajectoires suivantes du plan (u, t) sont susceptibles de porter une discontinuité de gradient de W (le lecteur peut s'appuyer sur la figure 3.8) :

- $t = t_\varepsilon \forall \varepsilon \in \{+, -\}$ et $\forall u \in \mathbb{R}^+$.
- Les bords $u_g(t) = \frac{K}{1+c^+}e^{-\tau^+(T-t)}$ et $u_d(t) = \frac{K}{1+c^-}e^{-\tau^-(T-t)}$ de la région d'intérêt Λ .
- Les trajectoires

$$\begin{aligned} \tilde{u}^+(t) &= u_d(t_+)e^{-\tau^+(t_+-t)} = \frac{K}{1+c^-}e^{-\tau^-(T-t_+)}e^{-\tau^+(t_+-t)} \quad \text{pour } t \leq t_+ , \\ \tilde{u}^-(t) &= u_g(t_-)e^{-\tau^-(t_--t)} = \frac{K}{1+c^+}e^{-\tau^+(T-t_-)}e^{-\tau^-(t_--t)} \quad \text{pour } t \leq t_- . \end{aligned}$$

Comme pour le call digital nous allons effectuer une vérification gérant conjointement les cas $t_- < t_+$ et $t_+ < t_-$, en commençant par les régions régulières avant de s'attaquer aux différentes régions non régulières.

5.5.2 Les régions régulières

En gardant la même numérotation que sur la figure 5.4 qui nous permet de séparer les différentes régions régulières du plan (u, t) selon les expressions prises par les fonctions q^ε , nous obtenons pour le call vanille le schéma donné en figure 5.7

La vérification pour les régions régulières est juste un sous-cas de celle faite pour le call digital (paragraphe 5.4.2)²³. Elle se réduit au point ① dans le cas $t > t_\varepsilon$ et au point ③ dans le cas $t \leq t_\varepsilon$.

²³Elle correspond à la vérification faite dans la région Γ_1 , ce qui est conforme à ce qui a été annoncé dans le paragraphe précédent.

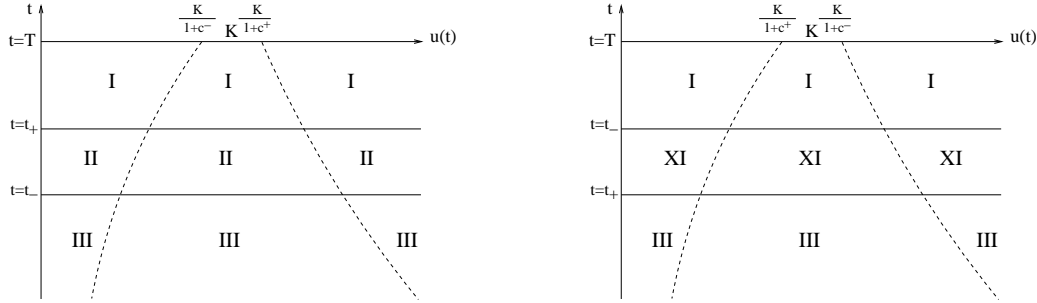


FIG. 5.7 – Call vanille : schéma des différentes régions régulières dans le plan (u, t) séparées suivant l'expression prise par les fonction q^- et q^+ , dans et en dehors de la région d'intérêt Λ .

Remarque 5.5.1 Les fonctions q^ε étant ici seulement fonction de t , nous avons toujours $q_u^\varepsilon = 0$ dans l'expression (5.34) qui correspond à l'expression notée \bar{H} dans l'article [BEFT07].

5.5.3 Les régions comportant une discontinuité de gradient de W

$\Rightarrow t = t_\varepsilon \forall \varepsilon \in \{+, -\}$ et $\forall u \in \mathbb{R}^+$

A l'instant $t = t_\varepsilon$, l'expression $q^\varepsilon(t) = (1 + c^\varepsilon)e^{\tau^\varepsilon(T-t)} - 1$ (valide pour $t \geq t_\varepsilon$) devient $q^\varepsilon = C^\varepsilon$ (valide pour $t \leq t_\varepsilon$). Compte tenu des relations (5.28) et (5.29), la dérivée partielle par rapport au temps dans (5.34) commute à l'instant $t = t_\varepsilon$ de $W_t = Q^\varepsilon V_t$ à $W_t = Q^\varepsilon V_t - \tau^\varepsilon Q^\varepsilon \mathbf{1}(\check{v} - v)$. Les autres dérivées partielles $W_u = Q^\varepsilon V_u$ et $W_v = -q^\varepsilon$ restent continues.

Par conséquent, par rapport à la vérification faite pour le call digital dans la région $t = t_- \forall u \in \mathbb{R}^+$ (page 225), il suffit simplement de substituer $-$ par ε dans la partie de la vérification référant à la région $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

$\Rightarrow u = u_g(t) = \frac{K}{1+c^+} e^{-\tau^+(T-t)} \forall \varepsilon \in \{+, -\}$

A gauche de cette trajectoire dans le plan (u, t) (c'est-à-dire à gauche de la région d'intérêt Λ) nous avons, tout comme pour le call digital, la solution explicite $\check{v}(t, u) = \check{w}(t, u) = 0$. Comme par ailleurs v est positif ($v \in [0, u]$ par la proposition 1.6.1), il en résulte que $\check{v} - v \leq 0$ et donc $\varepsilon = -$. La suite de la vérification est en tout point semblable à celle faite pour le call digital le long de la trajectoire $u(t) = u_g(t) = K e^{-\tau^+(T-t)}$ dans le cas $\varepsilon = -$ (page 229). La fonction W s'avère donc régulière le long de cette trajectoire.

$\Rightarrow u = u_d(t) = \frac{K}{1+c^-} e^{-\tau^-(T-t)} \forall \varepsilon \in \{+, -\}$

A droite et sur cette trajectoire dans le plan (u, t) , nous avons la solution explicite $\check{v}(t, u) = u$ et $\check{w}(t, u) = u - K$. Comme $v \in [0, u]$, nous avons $\check{v} - v \geq 0$, c'est-à-dire $\varepsilon = +$. Par ailleurs les fonctions $q^-(t)$ et $q^+(t)$ sont de classe \mathcal{C}^1 de part et d'autre de cette trajectoire et $\check{V}(t, u)$ est continu sur ce

bord. La variation de gradient $(\delta\check{V}_t, \delta\check{V}_u)$ satisfait donc la condition de continuité ²⁴ $\delta\check{V}_t = -\tau^- \delta\check{V}_u u$ avec $Q^+ \delta\check{V}_u = 0$ (par le théorème de l'annexe A.5). Il en résulte que la fonction Valeur W est régulière le long de cette trajectoire.

$$\Rightarrow u = \tilde{u}^-(t) = u_g(t_-) e^{-\tau^-(t_- - t)} = \frac{K}{1+c^+} e^{-\tau^+(T-t_-)} e^{-\tau^-(t_- - t)} \quad \text{pour } t \leq t_-$$

La vérification est identique à celle faite pour les trajectoires $\tau = \tau^-$ du call digital (page 227),

$$u(t) = \alpha e^{-\tau^-(t_\beta - t)} \quad \text{pour } u \in [u_+, u_-] \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \beta \in \{+, -\},$$

à la seule différence que nous avons ici $q^+(t) = \min\{(1+c^+)e^{-\tau^+(T-t)} - 1, C^+\}$ de part et d'autre de cette trajectoire ²⁵. En effet, le lecteur peut constater que la vérification référant à ces trajectoires n'utilise à aucun moment les expressions des fonctions q^ε ou de ces dérivées partielles, mais simplement le fait que q^- et q^+ sont de classe \mathcal{C}^1 de part et d'autre de la trajectoire, ce qui dans tous les cas conduit à la différence de gradient (5.43) pour la fonction W .

$$\Rightarrow u = \tilde{u}^+(t) = u_d(t_+) e^{-\tau^+(t_+ - t)} = \frac{K}{1+c^-} e^{-\tau^-(T-t_+)} e^{-\tau^+(t_+ - t)} \quad \text{pour } t \leq t_+$$

Pour cette trajectoire $\tau = \tau^+$, la vérification est similaire mutatis mutandis à celle du cas précédent (trajectoire $\tau = \tau^-$). Comme les fonctions $q^+ = C^+$ et $q^-(t) = \max\{(1+c^-)e^{-\tau^-(T-t)} - 1, C^-\}$ sont \mathcal{C}^1 de part et d'autre de cette trajectoire, la différence de gradient de la fonction W reste donnée par (5.43). Cependant puisque nous avons ici une trajectoire $\tau = \tau^+$, la relation (5.42) se transforme en $Q^- \delta\check{V}_u = Q^- \delta\check{V}_t = 0$ et par ailleurs $\nabla S = (-\tau^+ u, 1, 0)$.

Nous utilisons le test de la proposition 2.2.3, pour savoir si nous sommes en présence d'une discontinuité de gradient, et si celle-ci correspond à un maximum local ou à un minimum local. La direction transverse $h = (0, 1, 0)^t$ vérifie toujours $\langle \nabla S, h \rangle = 1 > 0$ et $\langle \delta\nabla W, h \rangle = Q^\varepsilon \delta\check{V}_u u$. Ce produit scalaire est nul pour $\varepsilon = -$ (la fonction Valeur ne présente donc pas de discontinuité de gradient pour $v \geq \check{v}(t, u)$), mais pour $\varepsilon = +$ nous ne pouvons pas déterminer son signe.

Remarque 5.5.2 En choisissant la direction transverse $h = (-1, 0, 0)^t$ pour laquelle $\langle \nabla S, h \rangle = \tau^+ u > 0$, le test aboutit à $\langle \delta\nabla W, h \rangle = \tau^\varepsilon Q^\varepsilon \delta\check{V}_u u$. On retrouve bien le fait que ce produit scalaire est égal à 0 pour $\varepsilon = -$, et que pour $\varepsilon = +$ il est du même signe que le produit scalaire du test avec la direction $h = (0, 1, 0)^t$ puisque $\tau^+ > 0$. De même en choisissant la direction transverse $h = (1, -\tau^- u, 0)^t$ qui vérifie $\langle \nabla S, h \rangle = (\tau^+ - \tau^-) u > 0$, on aboutit à la même conclusion puisque dans ce cas

$$\langle \delta\nabla W, \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau^- u \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = (\tau^\varepsilon - \tau^-) Q^\varepsilon \delta\check{V}_u u .$$

²⁴L'équation (8.14) de l'annexe A.5 avec ici $\dot{u} = \frac{du}{dt} = \tau^- u$.

²⁵Nous remarquons par ailleurs que $\varphi_v = -q^- = -C^-$ dans chacun des cas.

Nous pouvons même remarquer qu'en choisissant cette direction transverse on en conclut directement, pour $\varepsilon = -$, à l'absence de discontinuité de gradient sans même utiliser la propriété $Q^- \delta \check{V}_u = 0$.

Si pour $\varepsilon = +$ le signe du produit scalaire du test s'avère être strictement positif, nous aurions un minimum local et donc un sous-différentiel non vide avec $\varphi_v = W_v = -q^+ = -C^+$. Avec ce sous-différentiel, au lieu de (W_t, W_u, W_v) , il nous faudrait vérifier que le min des trois termes de (5.24) est négatif ou nul, c'est-à-dire qu'au moins un des trois termes de (5.24) est négatif ou nul. Comme $\varphi_v + C^+ = 0$, ce cas serait ainsi résolu directement.

Toutefois nous suspectons que le produit scalaire du test est strictement négatif (avec donc $Q^+ \delta \check{V}_u < 0$), de sorte que nous sommes en présence d'une discontinuité de gradient correspondant à un maximum local, et donc d'un sur-différentiel non vide. Le sur-différentiel est alors donné par

$$(\varphi_t, \varphi_u, \varphi_v) = (-\tau^+ Q^+ (\check{V}_u u - \mathbf{1}\check{v}) - \lambda \tau^+ Q^+ \delta \check{V}_u u, Q^+ \check{V}_u + \lambda Q^+ \delta \check{V}_u, -q^+).$$

Avec le super-différentiel $(\varphi_t, \varphi_u, \varphi_v)$ au lieu de (W_t, W_u, W_v) , le min des trois termes dans (5.24) doit être non négatif. Comme $-(\varphi_v + C^-) = C^+ - C^- > 0$ et $\varphi_v + C^+ = 0$, il nous reste plus qu'à vérifier que

$$\varphi_t + \max_{\tau} \tau [\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v] \geq 0 \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Le signe de $\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v = Q^+ \check{V}_u u + \lambda Q^+ \delta \check{V}_u u - Q^+ \mathbf{1}v$ ne peut pas être déterminé, et par conséquent nous traitons les deux cas :

- Si $Q^+ \check{V}_u u + \lambda Q^+ \delta \check{V}_u u - Q^+ \mathbf{1}v \geq 0$, le \max_{τ} est atteint pour $\tau = \tau^+$ ce qui conduit à

$$\varphi_t + \max_{\tau} \tau [\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v] = \tau^+ Q^+ \mathbf{1}(\check{v} - v) \geq 0$$

compte tenu des propriétés (5.5) et (5.30).

- Si $Q^+ \check{V}_u u + \lambda Q^+ \delta \check{V}_u u - Q^+ \mathbf{1}v \leq 0$, le \max_{τ} est atteint pour $\tau = \tau^-$ ce qui conduit à

$$\varphi_t + \max_{\tau} \tau [\varphi_u u + (\varphi_v - 1) v] = -(\tau^+ - \tau^-)(Q^+ \check{V}_u u + \lambda Q^+ \delta \check{V}_u u - Q^+ \mathbf{1}v) + \tau^+ Q^+ \mathbf{1}(\check{v} - v)$$

qui est positif comme la somme de deux termes positifs puisque par hypothèse nous avons $Q^+ \check{V}_u u + \lambda Q^+ \delta \check{V}_u u - Q^+ \mathbf{1}v \leq 0$.

La conclusion aboutit bien dans les deux cas et la vérification de la proposition 5.5.1 est ainsi terminée ■

5.6 Une propriété de la vérification par solution de viscosité

A l'instar de la remarque 5.6, le lecteur peut se convaincre que la vérification par solution de viscosité est entièrement indépendante des taux des coûts de clôture c^- et c^+ , à la fois pour le call vanille et le call digital (nous rappelons que seul c^- intervient pour le call digital).

En effet, bien que les fonctions q^ε , les instants t_ε et les différentes régions régulières et non régulières dépendent de ces taux, ces derniers n'apparaissent de manière explicite dans aucun des gradients et ne

changent pas le système d'EDP couplées (5.3) (à l'instar des gradients (5.28) et (5.27) des fonctions q^ε , les différents gradients et le système d'EDP couplées s'expriment de manière identique en fonction de q^+ et q^-). Lorsque c^- et/ou c^+ varie(nt), seul un déplacement des différentes régions s'opère.

En particulier, par incidence, la vérification par solution de viscosité est la même en absence de coûts de clôture et la vérification faite pour le call vanille avec paiement en nature se généralise également à un call vanille avec paiement en espèces.

Chapitre 6

Jeu multi-étage \mathcal{G}^h et théorème de convergence

Dans le paragraphe 6.1 nous allons nous atteler à la résolution du jeu multi-étages \mathcal{G}^h par le biais d'un algorithme de programmation dynamique classique en temps rétrograde, à la fois pour une option vanille et une option digitale (sous entendu de type cash or nothing). Ensuite dans le paragraphe 6.2, nous mettrons en évidence, pour le call digital et le call vanille, une formule de représentation de la Valeur du jeu \mathcal{G}^h dont la forme est assez similaire à celle de la solution du jeu différentiel \mathcal{G} . De cette formule de représentation découle un algorithme rapide applicable en pratique donnant à la fois la prime et la stratégie préconisée au cours du jeu.

Dans une dernière partie du chapitre (le paragraphe 6.3), nous montrerons (sous la conjecture 5.3.3) un théorème de convergence de manière monotone décroissante de la Valeur du jeu \mathcal{G}^h vers celle du jeu problème en temps continu lorsque le pas de temps h tend vers 0, sans changer de modèle d'actif au fur et à mesure que l'on réduit le pas de temps. Il en découle que l'algorithme rapide en temps discret fournit une bonne approximation de la solution (prime et stratégie) en temps continu.

6.1 Programmation dynamique en deux étapes pour chaque pas de temps

6.1.1 Equation d'Isaacs discrète du jeu \mathcal{G}^h

La fonction Valeur $W^h(k, u, v)$ du jeu minimax multi-étages classique \mathcal{G}^h , de dynamique (1.46) s'écrit sous la forme (1.53). Le critère est donc ici

$$J(t_k, u, v, \tau, \xi) = N(u_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}}) + \sum_{l \geq k} (-\tau_l(v_l + \xi_l) + C^{\varepsilon_l} \xi_l) . \quad (6.1)$$

On rappelle que h désigne le pas d'échantillonnage (que nous fixons) et $t_k = kh$ les instants d'échantillonnage avec $\mathbb{K} = Th$. Afin de raccourcir légèrement la notation de la fonction Valeur $W^h(k, u, v)$ du jeu \mathcal{G}^h , nous écrivons à partir de maintenant cette dernière sous la forme $W_k^h(u, v)$.

Comme mentionné dans le paragraphe 2.2.4, cette fonction valeur $W_k^h(u, v)$ s'obtient comme l'unique

solution de l'équation d'Isaacs discrète (2.13), qui s'écrit ici

$$\begin{cases} \forall k < \mathbb{K} & W_k^h(u, v) = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \max_{\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]} [W_{k+1}^h((1 + \tau)u, (1 + \tau)(v + \xi)) - \tau(v + \xi) + C^\varepsilon \xi] , \\ \forall (u, v) & W_{\mathbb{K}}^h(u, v) = N(u, v) . \end{cases} \quad (6.2)$$

L'équation d'Isaacs discrète (6.2) donne une construction explicite rétrograde de la suite des $\{W_k^h\}_k$.

6.1.2 Séparation de la minimisation en ξ et de la maximisation en τ

Nous allons voir que, à l'instar de la théorie en temps continu (paragraphe 3.3.2), il nous est possible de séparer la minimisation et la maximisation respective des commandes ξ et τ dans l'équation d'Isaacs (6.2) et ainsi aboutir à un algorithme de programmation dynamique en deux étapes à chaque pas de temps (la récurrence (6.4) à venir), plus pratique à résoudre.

Dans ce but, nous introduisons l'instant t_k^+ suivant « immédiatement » la décision ξ_k du trader à l'instant t_k ($\xi_k = 0$ en cas d'absence de transaction). Une transaction ξ_k produit une modification du portefeuille entre t_k et t_k^+ (c'est-à-dire un saut en v et w) sans évolution du temps, ni du cours de l'actif sous-jacent u . Ainsi la dynamique devient indépendante de τ_k entre t_k et t_k^+ . Par ailleurs, comme la prochaine transaction ne peut intervenir avant l'instant t_{k+1} , il en résulte qu'entre t_k^+ et t_{k+1} la dynamique est indépendante de la commande du trader ξ_k . On peut ainsi dans la dynamique (1.46) séparer les deux commandes τ_k et ξ_k entre t_k et t_{k+1} . La dynamique (1.46) se réécrit en effet sous la forme suivante, où (v_k^+, w_k^+) caractérise le portefeuille à l'instant t_k^+

$$\begin{cases} u_{k+1} & = (1 + \tau_k)u_k , \\ v_{k+1} & = (1 + \tau_k)v_k^+ , & v_k^+ & = v_k + \xi_k , \\ w_{k+1} & = w_k^+ + \tau_k v_k^+ , & w_k^+ & = w_k - C^{\varepsilon k} \xi_k . \end{cases} \quad (6.3)$$

Nous comprenons que la solution de l'équation d'Isaacs (6.2) va pouvoir se déterminer par une programmation dynamique en temps rétrograde à deux étapes pour chaque pas de temps, avec une maximisation sur τ entre t_k^+ et t_{k+1} , et une minimisation sur ξ entre t_k et t_k^+ . En remplaçant $v_k + \xi_k$ par v_k^+ dans l'équation d'Isaacs discrète (6.2), il en résulte directement que cette dernière se réécrit, de manière équivalente, sous la forme de l'algorithme suivant

$$\text{ALGORITHME 1 : } \begin{cases} W_{k+1}^h(u, v) & = \max_{\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]} [W_{k+1}^h((1 + \tau)u, (1 + \tau)v) - \tau v] , \\ W_k^h(u, v) & = \min_{\xi \in \mathbb{R}} [W_{k+1}^h(u, v + \xi) + C^\varepsilon \xi] . \end{cases} \quad (6.4)$$

Remarque 6.1.1 *Nous aurions pu considérer le jeu qualitatif multi-étages en dimension trois et à cible unique à $T = \mathbb{K}h$, qui est sensiblement le même que celui de la théorie en temps continu (paragraphe 3.2). La détermination des équations de programmation dynamique (6.4) pouvait s'établir également par la considération de la frontière de l'ensemble des états admissibles de ce jeu qualitatif aux instants t_{k+1} , t_k^+ et t_k , comme cela a été fait dans l'article [Ber05c].*

6.1.3 Des propriétés préliminaires (convexité, relation liant $W_k^h(u, v)$ à $W_{k+}^h(u, v)$ pour tout k)

Afin d'accélérer l'algorithme numérique permettant d'évaluer la séquence $\{W_k^h\}_k$ et la stratégie de transaction optimale à partir l'équation d'Isaacs discrète (6.4), nous allons dans ce paragraphe mettre en évidence certaines propriétés, à la fois pour les options vanilles et digitales. Ces propriétés préliminaires concernent la propagation en temps retrograde de la convexité de certaines fonctions, mais également la forme prise par la fonction Valeur au regard de la minimisation en ξ (c'est-à-dire la mise en évidence d'une relation liant W_k^h à W_{k+}^h).

Propriétés de convexité

Proposition 6.1.1

- \Rightarrow La fonction $v \mapsto W_k^h(u, v)$ est convexe pour tout (k, u) .
- \Rightarrow Si la fonction $(u, v) \mapsto N(u, v)$ est convexe alors la fonction $(u, v) \mapsto W_k^h(u, v)$ est convexe pour tout k .

Preuve de la proposition 6.1.1.

La maximisation en τ . Supposons la fonction W_{k+1} convexe en (u, v) . Alors la fonction $(u, v) \mapsto W_{k+1}^h((1 + \tau)u, (1 + \tau)v) - \tau v$ est convexe, et ainsi la fonction W_{k+} est le maximum d'une famille de fonctions convexes en (u, v) , donc convexe en (u, v) . Si la fonction W_{k+1} est « seulement » convexe en v pour tout u alors W_{k+} est convexe en v pour tout u , par le même raisonnement.

La minimisation en ξ . En changeant ξ en $-\xi'$, la minimisation en ξ dans l'algorithme de programmation dynamique (6.4) se réécrit

$$W_k^h(u, v) = \min_{\xi' \in \mathbb{R}} [W_{k+}^h(u, v - \xi') + C^\varepsilon(-\xi')] , \quad (6.5)$$

où $\varepsilon = \text{signe}(-\xi')$. Introduisons la fonction étendue convexe en (η, ξ)

$$\Gamma(\eta, \xi) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \eta \neq 0 , \\ C^\varepsilon(-\xi) & \text{si } \eta = 0 \quad (\text{où } \varepsilon = \text{signe}(-\xi)) . \end{cases}$$

La minimisation en ξ' dans (6.5) conduit à

$$W_k(u, v) = \min_{\eta, \xi} [W_{k+}^h(u - \eta, v - \xi) + \Gamma(\eta, \xi)] .$$

Par conséquent, si W_{k+}^h est convexe conjointement en (u, v) , la fonction W_k^h apparaît comme l'inf-convolution de deux fonctions convexes en (u, v) , donc W_k^h est elle-même convexe en (u, v) . Dans le cas où la fonction W_{k+}^h est « seulement » convexe en v , puisque la minimisation en ξ s'effectue à u fixé, nous avons besoin d'utiliser que la convexité en v qui est toujours préservée. Par un argument similaire d'inf-convolution, nous en déduisons que la fonction W_k^h convexe en v .

Des propriétés de convexité obtenues sur la maximisation en τ puis sur la minimisation en ξ , il en résulte que si $W_{k+1}(u, v)$ est convexe en v (respectivement conjointement convexe en (u, v)) alors

La fonction W_k obtenue à partir de W_k^+ (la formule (6.7)) est illustrée sur la figure 6.2.

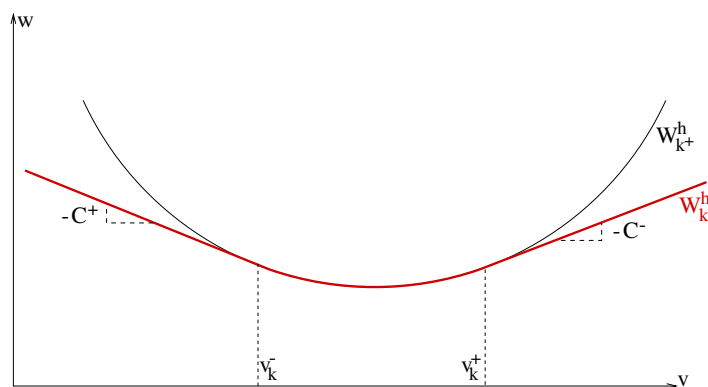


FIG. 6.2 – Une illustration dans le plan (v, w) de la minimisation en ξ à (u, k) fixés dans l’algorithme de programmation dynamique (6.4).

Notons ξ_k^* la stratégie minimisant (6.5). Compte tenu de ce qui précède, celle-ci est donnée par

$$\xi_k^* = \begin{cases} v_k^-(u) - v & \text{si } v \leq v_k^-(u) & \text{(achat) ,} \\ 0 & \text{si } v \in [v_k^-(u), v_k^+(u)] , \\ v_k^+(u) - v & \text{si } v \geq v_k^+(u) & \text{(vente) .} \end{cases} \quad (6.8)$$

Nous discuterons plus en détail cette stratégie dans le paragraphe 6.1.4.

La forme (6.7) des fonctions W_k^h sera utile pour la suite, plus précisément dans le théorème de convergence (paragraphe 6.3). C’est pourquoi nous insistons sur la propriété suivante

Propriété 6.1.2

⇒ Pour $v \leq v^-$, pour $0 < h < v^- - v$

$$W_k^h(u, v) = W_k^h(u, v + h) + C^+ h \leq W_{k+}^h(u, v) \quad \text{et} \quad W_k^h(u, v) \leq W_k^h(u, v - h) - C^- h .$$

⇒ Pour $v \in [v^-, v^+]$ et pour tout $h > 0$

$$W_k^h(u, v) = W_{k+}^h(u, v) \leq W_k^h(u, v - h) - C^- h \quad \text{et} \quad W_k^h(u, v) \leq W_k^h(u, v + h) - C^+ h .$$

⇒ Pour $v > v^+$, pour $0 < h < v - v^+$

$$W_k^h(u, v) = W_k^h(u, v - h) - C^- h \leq W_{k+}^h(u, v) \quad \text{et} \quad W_k^h(u, v) \leq W_k^h(u, v + h) + C^+ h .$$

6.1.4 Implémentation de l'algorithme de programmation dynamique (6.4).

Utilisation des propriétés de convexité

Pour l'implémentation de l'algorithme (6.4), la maximisation en τ requiert une procédure d'interpolation pour le calcul de $W_{k+1}^h((1 + \tau)u, (1 + \tau)v^+)$. La procédure choisie est par éléments finis P1 (triangles) sur un maillage régulier en (u, v) .

Les propriétés de convexité montrée dans le paragraphe 6.1.3 nous aide dans l'élaboration d'une procédure numérique efficace pour calculer la Valeur du jeu.

➔ Pour les options vanilles dont la fonction $(u, v) \mapsto N(u, v)$ est convexe nous venons de voir que les fonctions $\tau \mapsto W_k^h((1 + \tau)u, (1 + \tau)v) - \tau v$ sont convexes en τ pour tout k . Il en résulte qu'à chaque pas de temps le maximum en τ dans (6.4) est atteint sur l'une des bornes, à savoir en $\tau = \tau_h^-$ ou en $\tau = \tau_h^+$. La maximisation en τ se réduit ainsi à comparer la valeur prise en deux points (une simplification importante), ce qui permet une implémentation rapide de (6.4) pour des options à paiement (et donc à coût terminal) convexe en (u, v) . Pour la minimisation en ξ , nous appliquons la procédure de recherche (6.6) impliquant (6.8) car celle-ci est beaucoup plus rapide que de calculer le \min_{ξ} dans (6.4) par l'intermédiaire d'une méthode de recherche unidimensionnelle (section dorée, dichotomie, balayage, etc).

➔ Concernant les options digitales, puisque la convexité en v est préservée, la maximisation en ξ peut encore être réalisée de la même manière (par l'algorithme efficace (6.6) conduisant à (6.7)) et ainsi la propriété 6.1.2 est préservée. Par contre la maximisation en τ n'est plus directe et doit être faite de manière exhaustive sur l'intervalle $[\tau_h^-, \tau_h^+]$ par une méthode de recherche unidimensionnelle.

Remarque 6.1.2 Pour les valeurs par défaut ($\tau^- = -0.05$, $\tau^+ = 0.03$, $h = 1$) où $[\tau_h^-, \tau_h^+] \simeq [-0.05012, 0.02988]$, nous avons, pour une option digitale, opté pour un balayage régulier comprenant 81 valeurs de τ dont les deux bornes τ_h^- et τ_h^+ , ce qui correspond à un pas de 10^{-3} en τ .

Propriété et liens avec la théorie de CRR

Propriété 6.1.3 Contrairement à la théorie en temps continu (voir le paragraphe 3.1 pour une option vanille et le paragraphe 4.1 pour une option digitale), l'absence de coût de transaction n'entraîne aucune dégénérescence pour la théorie en temps discret et de plus toute convexité évoquée pour la fonction N est préservé par récurrence. De manière similaire au paragraphe 3.1, puisque la variable v évolue à présent sans coût, elle devient la commande du trader en remplacement de ξ . L'équation d'Isaacs discrète (6.2) se transforme pour $C^\varepsilon = 0$, $\forall \varepsilon \in \{+, -\}$ en

$$W_k^h(u) = \min_{v^+ \in \mathbb{R}} \max_{\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]} \left[W_{k+1}^h((1 + \tau)u) - \tau v^+ \right] .$$

En absence de coûts de transaction, la procédure de recherche en v (6.6) conduit à $v_k^- = v_k^+$, égal à l'argument du minimum en v dans l'équation ci-dessus.

Une conséquence immédiate et importante de la maximisation en τ est la propriété suivante

Propriété 6.1.4

⇒ Pour une option à coût terminal $N(u, v)$ convexe en (u, v) (une option vanille par exemple), notre théorie en absence de coûts de transaction coïncide avec celle de la théorie CRR [CRR79] pour un arbre binaire (1.4) avec $\tau_n \in \{\tau_h^-, \tau_h^+\}$ pour tout n .

⇒ Pour une option à coût terminal non convexe en u (comme les options digitales), la théorie de CRR sous-estimerait la prime obtenue avec notre théorie ³.

Pour plus de détails sur la première partie de la propriété 6.1.4, le lecteur peut se reporter à l'article [Ber05c] dans lequel est faite l'étude en temps discret pour un call vanille en absence de coût de transaction, qui aboutit bien aux équations de CRR [CRR79]. Une conséquence de cette propriété est que, pour une option vanille, des coûts de transaction suffisamment petits, et des « valeurs raisonnables » des bornes τ_h^- et τ_h^+ , les courbes de primes (en fonction de $u(0)$) obtenues par implémentation de notre théorie ressembleront à celles de BS. Dans le paragraphe 7.2.2, nous montrerons des courbes de primes et nous reparlerons de ce point.

6.2 Théorème de représentation et algorithme rapide

Dans ce paragraphe nous allons tout d'abord montrer que la résolution à la main de l'algorithme de programmation dynamique (6.4) pour le call digital est inextricable, ce qui nous conduira à poser une conjecture sur la forme de la Valeur $W_k^+(u, v)$, que nous vérifions numériquement en annexe. Moyennant cette conjecture, nous pourrions établir une formule de représentation de la Valeur du jeu \mathcal{G}^h de laquelle découle un algorithme rapide applicable en pratique. Nous montrerons également, toujours pour un call digital, la présence d'une région comportant une singularité en τ (l'analogue de la région où la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ obtenue dans l'analyse géométrique du chapitre 4 existe). Nous donnerons ensuite brièvement la formule de représentation et l'algorithme rapide analogues obtenus pour un call vanille. Pour terminer nous ferons un point sur la stratégie obtenue en temps discret.

6.2.1 Tentative de dérouler à la main l'algorithme de programmation dynamique (6.4) pour le call digital

Schéma des différentes régions apparaissant aux deux premiers pas de temps

La figure 8.3 représente, pour le call digital, les différentes régions du plan (u, t_k) qui vont intervenir lors des deux premiers pas (en temps rétrograde) de programmation dynamique, pour le jeu de paramètres par défaut donné dans le paragraphe 1.7.

Pour ces paramètres par défaut, nous avons l'application (4.21) donc à fortiori

$$T - h < t_- \quad \text{et} \quad T - h < t_+ . \quad (6.9)$$

³Le maximum en τ n'étant pas nécessairement atteint sur l'une des deux bornes. La prime est par ailleurs d'avantage sous estimée si l'on inclut des coûts de transaction dans notre théorie.

Le premier pas de programmation dynamique : la maximisation en τ

⇒ **Région A** : $u_{\mathbb{K}-1} < \frac{K}{1+\tau^+}$

En $t = T$, seule la région $u_{\mathbb{K}} < K$ peut-être atteinte et donc

$$W_{\mathbb{K}-1}^+(u, v) = \max_{\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]} [-c^-(1 + \tau)v - \tau v] .$$

Comme $(1 + c^-) > 0$, le maximum est atteint en $\tau = \tau_{\min} = \tau_h^-$, ce qui conduit à

$$W_{\mathbb{K}-1}^+(u, v) = -[(1 + \tau_h^-)c^- + \tau_h^-] v .$$

⇒ **Région E** : $u_{\mathbb{K}-1} \geq \frac{K}{1+\tau^+}$

De manière similaire à la région A seule la région $u_{\mathbb{K}} \geq K$ peut-être atteinte, où $W_{\mathbb{K}}(u, v) = D - c^-v$. Le maximum en τ est atteint en $\tau = \tau_{\min} = \tau_h^-$ et conduit à

$$W_{\mathbb{K}-1}^+(u, v) = D - [(1 + \tau_h^-)c^- + \tau_h^-] v .$$

⇒ **Régions B,C,D** : $u_{\mathbb{K}-1} \in [\frac{K}{1+\tau^+}, \frac{K}{1+\tau^-}]$

Dans ces trois régions deux cas sont à distinguer puisque chacune des deux régions distinctes en $T = \mathbb{K}h$ peut être atteinte.

- Si $(1 + \tau)u < K$, l'état arrive dans la région $u_{\mathbb{K}} < K$ et de manière identique à la région A, nous en déduisons que

$$W_{\mathbb{K}-1}^+(u, v) = -[(1 + \tau_h^-)c^- + \tau_h^-]v .$$

- Si $(1 + \tau)u \geq K$ c'est-à-dire $\tau \geq \tau_{\min} = \frac{K}{u} - 1$, l'état arrive dans la région $u_{\mathbb{K}} \geq K$, et donc

$$W_{\mathbb{K}-1}^+(u, v) = \max_{\tau \in [\tau_{\min}, \tau_h^+]} [D - c^-(1 + \tau)v - \tau v] .$$

Le maximum en τ est atteint en $\tau = \tau_{\min} = \frac{K}{u} - 1$ étant donné que dans cette région $(1 + \tau)u \geq K$. Ainsi

$$W_{\mathbb{K}-1}^+(u, v) = D - \left[(1 + c^-) \frac{K}{u} - 1 \right] v .$$

La maximisation en τ conduit donc à

$$W_{\mathbb{K}-1}^+(u, v) = \max \left\{ D - \left[(1 + c^-) \frac{K}{u} - 1 \right] v , -[(1 + \tau_h^-)c^- + \tau_h^-]v \right\} .$$

Ces deux « droites » dans le plan (v, w) s'intersectent (comme sur le schéma 4.9) en

$$\begin{pmatrix} \check{v}_{\mathbb{K}-1}^+(u) \\ \check{w}_{\mathbb{K}-1}^+(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -[(1 + \tau_h^-)c^- + \tau_h^-] \end{pmatrix} \frac{D}{(1 + c^-) \left[\frac{K}{u} - (1 + \tau_h^-) \right]} .$$

⇒ Synthèse des résultats

De la maximisation en τ , il en résulte la formule de représentation

$$W_{\mathbb{K}-1}^+(u, v) = \check{w}_{\mathbb{K}-1}^+(u) + q_{(\mathbb{K}-1)^+}^\varepsilon(u)(\check{v}_{\mathbb{K}-1}^+(u) - v) = Q_{(\mathbb{K}-1)^+}^\varepsilon(u)\check{V}_{\mathbb{K}-1}^+(u) - q_{(\mathbb{K}-1)^+}^\varepsilon(u)v ,$$

$$\text{avec } q_{(\mathbb{K}-1)^+}^+ = (1 + c^-)\frac{K}{u} - 1 \quad , \quad q_{(\mathbb{K}-1)^+}^- = (1 + \tau_h^-)c^- + \tau_h^- = (1 + \tau_h^-)q_{\mathbb{K}}^-(u) + \tau_h^- , \quad (6.12)$$

$$\text{et } \check{V}_{\mathbb{K}-1}(u) = \begin{cases} (0, 0)^t & \text{dans la région A,} \\ \frac{D}{q_{(\mathbb{K}-1)^+}^+ - q_{(\mathbb{K}-1)^+}^-} (1, -q_{(\mathbb{K}-1)^+}^-)^t & \text{dans les régions B,C,D,} \\ (0, D)^t & \text{dans la région E,} \end{cases}$$

Notons que la formule (6.12) requiert l'initialisation de $q_{\mathbb{K}}^-$, mais pas de $q_{\mathbb{K}}^+$, qui d'ailleurs n'a pas été initialisé dans (6.11).

Le premier pas de programmation dynamique : la minimisation en ξ

Si la fonction $W_k^+(u, v)$ est affine en deux morceaux, la procédure de minimisation en ξ ne change pas les valeurs de $(\check{v}_{k^+}(u), \check{w}_{k^+}(u))$, mais seulement les pentes en v , qu'elle limite à C^+ si $q_{k^+}^\varepsilon(u) > C^+$ où à C^- si $q_{k^+}^\varepsilon(u) < C^-$. Par conséquent, si $W_k^+(u, v)$ est affine en deux morceaux alors $W_k(u, v)$ l'est aussi et par ailleurs

$$\check{V}_k(u) = \begin{pmatrix} \check{v}_k(u) \\ \check{w}_k(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{v}_{k^+}(u) \\ \check{w}_{k^+}^+(u) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad q_k^\varepsilon(u) = \min\{\max\{q_{k^+}^\varepsilon(u), C^-\}, C^+\} , \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}. \quad (6.13)$$

Pour $k = \mathbb{K} - 1$, cette minimisation en ξ conduit à $q_{\mathbb{K}-1}^-(u) = C^-$ dans chacune des régions A,B,C,D,E et à

$$q_{\mathbb{K}-1}^+(u) = \begin{cases} C^+ & \text{pour la région B,} \\ (1 + c^-)\frac{K}{u} - 1 & \text{pour la région C,} \\ C^- & \text{pour la région D,} \\ \text{non définis} & \text{pour les régions A et E} \end{cases}$$

La Valeur $W_{\mathbb{K}-1}(u, v)$, affine en deux morceaux dans le plan (v, w) pour tout (u, v) , est donnée par

$$W_{\mathbb{K}-1}(u, v) = \check{w}_{\mathbb{K}-1}(u) + q_{\mathbb{K}-1}^\varepsilon(u)(\check{v}_{\mathbb{K}-1}(u) - v) = Q_{\mathbb{K}-1}^\varepsilon(u)\check{V}_{\mathbb{K}-1}(u) - q_{\mathbb{K}-1}^\varepsilon(u)v .$$

De manière similaire à la théorie en temps continu, nous constatons que la Valeur $W_{\mathbb{K}-1}(u, v)$ est discontinue entre les régions A et B (c'est-à-dire en $u_{\mathbb{K}-1} = \frac{K}{1+\tau^+}$). Dans la région D, puisque $q_{\mathbb{K}-1}^+(u) = C^- = q_{\mathbb{K}-1}^-(u)$, nous avons

$$\left(\check{v}_{\mathbb{K}}\left(\frac{K}{1+\tau^-}\right), \check{w}_{\mathbb{K}}\left(\frac{K}{1+\tau^-}\right) \right) \rightarrow (+\infty, +\infty) \quad \text{et} \quad W_{\mathbb{K}-1}(u, v) = D - C^-v$$

comme dans la région E. Les régions D et E peuvent donc être considéré comme une région unique (« E=D »).

Second pas de programmation dynamique

La table 6.1 résume la situation obtenue pour $k = \mathbb{K} - 2$ (en $t = T - 2h$) à partir de la figure 8.3, en tenant compte du fait que « E=D ».

région étudiée pour $k = \mathbb{K} - 2$	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
régions accessibles pour $k = \mathbb{K} - 1$	A	A B	A B C	A B C D	A B C D	A B C D	B C D	C D	D	

TAB. 6.1 – Situation inextricable au pas $\mathbb{K} - 2$ pour le call digital.

Le premier pas a pu être réalisé simplement puisqu'il n'y a que deux régions distinctes pour $k = \mathbb{K}$, ce qui a conduit naturellement à une fonction $W_{\mathbb{K}-1}^+(u, v)$ affine en deux morceaux dans le plan (v, w) . Pour $k = \mathbb{K} - 2$ nous avons à présent dix régions distinctes et pour certaines, les quatre régions distinctes du pas précédent $k = \mathbb{K} - 1$ peuvent être atteintes, ce qui rend la maximisation en τ excessivement complexe, voir impossible à faire dans ces régions. Par ailleurs le nombre de régions à distinguer s'accroît considérablement d'un pas de temps à l'autre, ce qui rend inextricable la résolution à la main de cet algorithme de programmation dynamique. De plus la configuration pour le second pas $k = \mathbb{K} - 2$, et pour les pas suivants, est sensible aux valeurs des différents paramètres (l'ordre des points séparant les différentes régions pouvant changer en fonction du jeu de paramètres).

6.2.2 Formule de représentation et algorithme rapide dans le cas du call digital

Conjecture sur la fonction Valeur $W_{k+}^h(u, v)$

L'impossibilité de dérouler à la main l'algorithme de programmation dynamique à partir du second pas de temps nous conduit à poser la conjecture suivante, dont nous proposons une vérification numérique en annexe (annexe B).

Conjecture 6.2.1 *Pour tout (k, u, v) , la fonction Valeur W_k^+ est affine en deux morceaux dans le plan (v, w) c'est-à-dire*

$$W_{k+}^h(u, v) = \check{w}_{k+}^h(u) + q_{k+}^\varepsilon(u)(\check{v}_{k+}^h(u) - v) = Q_{k+}^\varepsilon(u)\check{V}_{k+}(u) - q_{k+}^\varepsilon(u)v, \quad \varepsilon = \text{signe}(\check{v}_{k+}^h(u) - v) .$$

Compte tenu de cette conjecture, la propriété (6.13) concernant la minimisation en ξ devient vraie quelque soit k . la Valeur $W_k(u, v)$ est ainsi également affine en deux morceaux dans le plan (v, w) pour tout (k, u, v)

$$W_k^h(u, v) = \check{w}_k^h(u) + q_k^\varepsilon(u)(\check{v}_k^h(u) - v) = Q_k^\varepsilon(u)\check{V}_k(u) - q_k^\varepsilon(u)v, \quad \varepsilon = \text{signe}(\check{v}_k^h(u) - v) . \quad (6.14)$$

De la formule de représentation (6.14) pour tout (k, u, v) , donc à fortiori vraie pour $k + 1$, la maximisation en τ dans l'algorithme (6.4) s'écrit

$$W_{k^+}^h(u, v) = \max_{\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]} \left[\check{w}_{k+1}^h((1 + \tau)u) + q_{k+1}^\varepsilon((1 + \tau)u) \left(\check{v}_{k+1}^h((1 + \tau)u) - (1 + \tau)v \right) - \tau v \right],$$

qu'il est pratique d'écrire sous la forme

$$W_{k^+}^h(u, v) = \max_{\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]} \left[Q_{k+1}^\varepsilon((1 + \tau)u) \check{V}_{k+1}^h((1 + \tau)u) - [(1 + q_{k+1}^\varepsilon(1 + \tau)u)\tau v + q_{k+1}^\varepsilon(1 + \tau)u]v \right]. \quad (6.15)$$

Relations de récurrence liant $\check{V}_k(u)$ à $\check{V}_{k+1}(u)$. Fonctions $q_k^+(u)$ et q_k^-

Nous constatons que si v est très grand en valeur absolue alors le \max_τ dans (6.15) est atteint sur l'une des deux bornes à savoir, puisque $(1 + q_{k+1}^\varepsilon(1 + \tau)u) > 0 \forall \varepsilon \in \{+, -\}$, en τ_h^- si v est très positif et en τ_h^+ si v est très négatif. La conjecture 6.2.1 permet de limiter l'étude aux v très négatifs (donc à fortiori $v - \check{v}_{k+}(u) < 0$ c'est-à-dire $\varepsilon = +$) et aux v très positifs (donc à fortiori $v - \check{v}_{k+}(u) > 0$ c'est-à-dire $\varepsilon = -$). On cherche le point d'intersection des deux branches affines, obtenu en posant

$$\forall \varepsilon \in \{+, -\} : q_{k^+}^\varepsilon(u) = (1 + q_{k+1}^\varepsilon((1 + \tau_h^\varepsilon)u))\tau v + q_{k+1}^\varepsilon((1 + \tau_h^\varepsilon)u) = (1 + \tau_h^\varepsilon)q_{k+1}^\varepsilon((1 + \tau_h^\varepsilon)u) + \tau_h^\varepsilon. \quad (6.16)$$

Nous avons alors

$$W_{k^+}^h(u, v) = \begin{cases} Q_{k+1}^-((1 + \tau_h^-)u) \check{V}_{k+1}^h((1 + \tau_h^-)u) - q_{k^+}^-((1 + \tau_h^-)u)v & \text{pour } v \leq \check{v}_k(u) = \check{v}_k^+(u), \\ Q_{k+1}^+((1 + \tau_h^+)u) \check{V}_{k+1}^h((1 + \tau_h^+)u) - q_{k^+}^+((1 + \tau_h^+)u)v & \text{pour } v \geq \check{v}_k(u) = \check{v}_k^+(u). \end{cases}$$

Posons

$$\Delta = q_{k^+}^+((1 + \tau_h^+)u) - q_{k^+}^-((1 + \tau_h^-)u).$$

Par un calcul direct, il en résulte que les valeurs $\check{V}_k(t, u) = (\check{v}_k(t, u), \check{w}_k(t, u))^t$ sont caractérisées par le système d'équations

$$\check{V}_k(u) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -q_{k^+}^-((1 + \tau_h^-)u) & q_{k^+}^+((1 + \tau_h^+)u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{k+1}^+((1 + \tau^+)u) \check{V}_{k+1}((1 + \tau^+)u) \\ Q_{k+1}^-((1 + \tau^-)u) \check{V}_{k+1}((1 + \tau^-)u) \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

Propriété 6.2.2 Si $q_{k+1}^+(u) = (1 + c^-)\frac{K}{u} - 1$ alors la relation (6.16) implique

$$q_{k^+}^+(u) = (1 + \tau_h^+)[(1 + c^-)\frac{K}{(1 + \tau_h^+)u} - 1] + \tau_h^+ = (1 + c^-)\frac{K}{u} - 1 = q_{k+1}^+(u)$$

Des relations de $q_{\mathbb{K}-1}^+$ et $q_{\mathbb{K}-1}^-$ (6.12) et des relations de récurrences (6.16) avec la propriété 6.2.2, nous en déduisons les relations données dans l'équation (6.18) concernant $q_{k^+}^-(u)$ et $q_{k^+}^+(u)$. En utilisant en outre la procédure de minimisation en ξ (6.13), nous obtenons les relations de récurrence données

dans (6.18) pour q_k^- et ⁴ $q_k^+(u)$.

$$\begin{aligned} q_{\mathbb{K}}^- &= c^- , \quad q_{k+}^- = (1 + \tau_h^-)q_{k+1}^-(u) + \tau_h^- , \quad q_k^- = \max\{q_{k+}^-, C^-\} , \\ q_{k+}^+(u) &= (1 + c^-)\frac{K}{u} - 1 , \quad q_k^+(u) = \min\{\max\{q_{k+}^+(u), C^-\}, C^+\} . \end{aligned} \tag{6.18}$$

Synthèse : formule de représentation et algorithme rapide (ALGORITHME 2)

Sous la conjecture 6.2.1, la solution de l'algorithme de programmation dynamique (6.4), se représente pour tout (k, u, v) sous la forme (6.14) où $q_k^\varepsilon(u)$ sont donnés par les récurrences (6.18), et où les valeurs $(\check{v}_k(u), \check{w}_k(u))$ sont obtenues comme solution du système d'équations de récurrence (6.17) initialisé avec (6.10).

Cette formule de représentation nous donne un algorithme rapide puisqu'elle nous permet de restreindre la détermination de la fonction Valeur aux valeurs $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ (6.17) et non pour tout v , ce qui permet un gain de temps de calcul.

Propriété 6.2.3 *Cette formule de représentation présente une forte ressemblance avec celle obtenue en temps continu (le théorème 5.2.1) avec q^+ et q^- donnés respectivement par (4.34) et (4.33) dans la région d'intérêt). Par rapport à cette dernière :*

- les fonctions q_k^ε calculées correspondent aux échantillonnées des fonctions q^ε de la théorie en temps continu.
- les relations de récurrence (6.17) permettant de calculer $\check{V}_k = (\check{v}_k, \check{w}_k)^t$ constituent une schéma différences finies du système d'EDP couplé linéaire du premier ordre (5.3) (La preuve de ce point est directe mais fastidieuse).

Propriété 6.2.4 *Pour $u \geq u_- = \frac{K(1+c^-)}{1+C^-} \simeq K$, nous avons dès le premier pas $q_k^+ = q_k^- = C^-$. Il en résulte que l'algorithme rapide n'est pas applicable pour le call digital pour $u > u_-$ puisque, dans la relation (6.17), Δ devient égal à 0. Dans la région $u > u_-$ la Valeur du jeu est donnée par*

$$W_k(u, v) = D - C^- v ,$$

par le raisonnement fait au premier pas dans les régions notées D et E . Tout comme le cas continu (théorème 5.2.3), il faut adapter de manière similaire la formule de représentation.

6.2.3 Mise en évidence d'une singularité en τ pour le call digital

Considérons la région du plan (u, k)

$$\Lambda_k = \left[\frac{K}{(1 + \tau_h^+)^{\mathbb{K}-k}} , \frac{K}{(1 + \tau_h^-)^{\mathbb{K}-k}} \right] \quad \text{à l'instant } t_k = kh .$$

⁴Les fonctions q^- obtenues ne dépendent donc pas de u .

Cette région est l'équivalent en temps discret de la région d'intérêt Λ (4.31) dans la théorie en temps continu ⁵. Si le pas de temps h est suffisamment petit alors il existe ℓ suffisamment loin de \mathbb{K} (en temps retrograde) tel que $\Lambda_\ell \subset]u_+, u_-[$. En nous servant des équations de récurrence (6.18), nous avons alors

$$\forall k \geq \ell : \Lambda_k \subset]u_+, u_-[\text{ et } \begin{cases} q_k^+(u) &= (1 + c^-) \frac{K}{u} - 1 \in]C^-, C^+[\\ q_k^-(u) &= (1 + c^-)(1 + \tau_h^-)^{\mathbb{K}-k} - 1 \in]C^-, C^+[, \end{cases} \quad (6.19)$$

ainsi que

$$W_k(u, v) = Q_k^\varepsilon(u) \check{V}_k(u) - q_k^\varepsilon(u) v \quad \text{avec} \quad Q_k^+(u) \check{V}_k(u) = D \quad \forall u \in \Lambda_k . \quad (6.20)$$

La deuxième relation de l'équation (6.20) peut s'interpréter comme une version discrète de l'équation (4.9) de la nappe $\langle \mathcal{K} \rangle$ avec $\xi = 0$, obtenue dans la région d'intérêt Λ pour $\varepsilon = +$ au cours de l'analyse géométrique du jeu différentiel.

Concrètement si nous changeons h en 0.01 (ce qui reviendrait pour le trader à pouvoir opérer un ajustement du portefeuille 100 fois par jour) alors, en gardant les autres paramètres par défaut, nous avons compte tenu de l'application (4.21)

$$\forall k \geq \ell = \mathbb{K} - 7 : \Lambda_k \subset]u_+, u_-[.$$

En réalité, $l \leq \mathbb{K} - 3$ suffit à mettre en évidence la présence d'une singularité en τ . Sous cette condition, comme l'illustre la figure 6.4, il existe pour une(des) valeur(s) de k une région $A_k \subset \Lambda_k \subset]u_+, u_-[$ telle que

$$\forall u_k \in A_k , \forall \tau_k \in [\tau_h^-, \tau_h^+] , u_{k+1} = (1 + \tau_k) u_k \in \Lambda_{k+1} .$$

Pour $k + 1$, nous avons donc les relations (6.19) et (6.20). En outre, lorsque $\Lambda_k \subset]u_+, u_-[$ nous avons $\xi_k = 0$ et donc d'après l'algorithme (6.4)

$$W_k^h(u, v) = W_{k+1}^h(u, v) = \max_{\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]} [W_{k+1}^h((1 + \tau)u, (1 + \tau)v) - \tau v] ,$$

à savoir ici

$$W_k^h(u, v) = \max_{\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]} [Q_k^\varepsilon((1 + \tau)u) \check{V}_k((1 + \tau)u) - [q_k^\varepsilon((1 + \tau)u)(1 + \tau) + \tau]v] .$$

Compte tenu de (6.20) avec ici $(1 + \tau)u \in \Lambda_{k+1} \quad \forall (\tau, u) \in [\tau_h^-, \tau_h^+] \times \Lambda_k$, nous avons dans la relation ci-dessus pour $v \leq \check{v}_{k+1}(u)$ (c'est-à-dire $\varepsilon = +$)

$$Q_k^+((1 + \tau)u) \check{V}_k((1 + \tau)u) = D .$$

⁵Elles coïncident aux instants $t_k = kh$, compte tenu du choix de τ_h^ε .

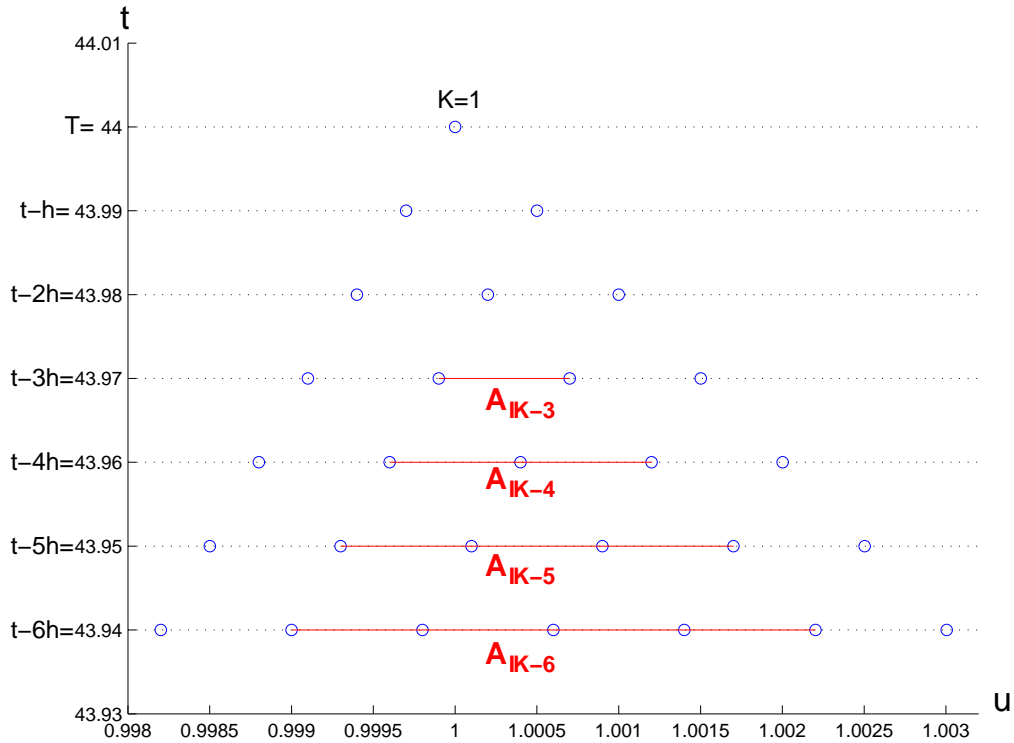


FIG. 6.4 – Configuration générale des régions du plan (u, k) pour h suffisamment petit.

De l'expression (6.19) pour $q^+(u)$, il en résulte

$$\begin{aligned}
 W_k^h(u, v) &= \max_{\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]} \left[D - \left(\left((1 + c^-) \frac{K}{(1 + \tau)u} - 1 \right) (1 + \tau) + \tau \right) v \right] \\
 &= \max_{\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]} \left[D - \left((1 + c^-) \frac{K}{u} - 1 \right) v \right] .
 \end{aligned}$$

Le crochet ci-dessus est indépendant de τ , ce qui met en évidence la présence d'une singularité en τ dans la région Λ_k tant que $\Lambda_k \subset]u_+, u_-[$ c'est-à-dire $q_k^+(u) \in]C^-, C^+[$ ($\xi = 0$). La Valeur est donnée par

$$W_k^h(u, v) = D - \left((1 + c^-) \frac{K}{u} - 1 \right) v = D - q_k^+(u) v .$$

La présence de cette singularité équivaut donc à la présence de la nappe émergente ($\xi = 0$) singulière $\langle \mathcal{K} \rangle$ dans la solution du problème en temps continu.

6.2.4 Formule de représentation et algorithme rapide pour le call vanille avec paiement en nature

En temps discret, l'étude d'un call vanille a été traitée dans les articles [BEFT06, Ber05b, Ber05c] en absence de coûts de clôture et dans l'article [BEFT07] avec un paiement en nature (option étudiée

dans cette thèse). La formule de représentation de la Valeur et l'algorithme rapide qui en résulte restent donnés par (6.14) avec (6.17). Seules les expressions des fonctions q_k^ε changent. Pour un call vanille avec paiement en nature ces dernières sont données par

$$\begin{aligned} q_K^\varepsilon &= c^\varepsilon, \\ q_{k+}^\varepsilon &= (1 + \tau_h^\varepsilon)q_{k+1}^\varepsilon + \tau_h^\varepsilon, \\ q_k^\varepsilon &= \varepsilon \min\{\varepsilon q_{k+}^\varepsilon, \varepsilon C^\varepsilon\}. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Remarque 6.2.1 *Seul q_K^ε change en fonction du type de paiement (espèce, nature), puisque le type de paiement se répercute uniquement sur les coûts de clôture.*

Pour un call vanille, l'établissement des expressions (6.14) avec (6.17) est directe grâce à la convexité en τ (le max en τ est toujours atteint sur l'une des deux bornes). Par ailleurs la conjecture 6.2.1 portant sur W_k^+ est remplacée par un argument utilisant le fait que W_k est la valeur optimale (minimale) d'un portefeuille de couverture. Pour plus de détail sur ce dernier point le lecteur peut se reporter à l'annexe A1 de l'article [BEFT07].

6.2.5 Stratégie obtenue en temps discret et propriétés supplémentaires

Revenons à présent à la stratégie (6.8). Si nous obtenons $v_k^-(u) = -\infty$ ($v_k^-(u) = v_{min}$ lors de l'implémentation), alors en $(t = kh, u)$ la stratégie ne passe pas par un achat. Si respectivement $v_k^+ = +\infty$ ($v_k^+(u) = v_{max}$ lors de l'implémentation), il n'y a pas de vente en $(t = kh, u)$. En particulier $\xi^* = 0$ tant que $v_k^-(u) = -\infty$ et $v_k^+(u) = +\infty$. Ce cas correspond, pour la fonction Valeur $W_k(u, v)$ à une pente appartenant à $] -C^+, -C^-[$ pour tout v , comme le montre la procédure (6.6). Ce cas est équivalent à la présence d'une dispersion dans la théorie en temps continu. Si l'un des deux est fini et l'autre infini, nous sommes dans une situation équivalente à la présence d'une variété \mathcal{E} en temps continu.

Au regard de la formule de représentation (caractère affine de la fonction Valeur $W_k^h(u, v)$ dans le plan (v, w)), il en résulte que si l'une des quantités $v_k^-(u)$ ou $v_k^+(u)$ est finie alors elle correspond au $\check{v}_k(u)$ obtenue par l'algorithme rapide (système d'équations (6.17)). En particulier si $v_k^-(u)$ et $v_k^+(u)$ sont tous les deux finis, ce qui se produit lorsque $q_k^\varepsilon = C^\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\}$, alors ⁶

$$v_k^-(u) = v_k^+(u) = \check{v}_k(u) .$$

Lors de l'implémentation de l'algorithme (6.4), les quantités $v_k^-(u)$ et $v_k^+(u)$ obtenues par la procédure de recherche (6.6) ne diffèrent pas de plus d'un pas d'espace. Ce dernier cas est l'équivalent à la présence d'une variété focale \mathcal{F} dans la théorie en temps continu (saut de part et d'autre de \check{v}_k).

En résumé, la stratégie est de ne pas faire de vente (respectivement d'achat) si $t_k > t_-$ (respectivement $t_k > t_+$). Mais pour des valeurs réalistes des paramètres (dont les paramètres par défaut) nous avons $T - t_\varepsilon < h$. Dans ce cas, à chaque pas d'échantillonnage la stratégie est de faire un saut jusqu'à $v = \check{v}_k^h(u)$ qui joue, de manière analogue à la théorie en temps continu, le rôle de la composition

⁶Voir la figure 6.1 avec W_k^+ affine.

optimale du portefeuille en actif sous-jacent.

Le point principal de l'algorithme rapide est que ce dernier nous permet de limiter, à chaque pas de temps, l'implémentation au calcul de deux fonctions à une variables ($\tilde{v}_k(u), \tilde{w}_k(u)$) au lieu d'une fonction à deux variables $W_k(u, v)$, ce qui entraîne un gain en volume de calcul significatif, en particulier pour les options digitales où lors de l'implémentation il nous faut prendre v_{\max} suffisamment grand.

Remarque 6.2.2 *Pour l'implémentation nous avons choisi $u \in [0, 3K] = [0, 3]$. Pour un call vanille avec paiement en nature nous avons pris, au vu de la propriété 1.6.1, $v \in [0, 3]$, ce qui pour les paramètres par défaut ($du = dv = 0.01$, $T = 44$, $h = 1$) conduit à une discrétisation en espace comportant 300×300 points sur 44 pas de temps. Pour un call digital où la borne de v est beaucoup plus grande (v borné par D/C^+ au regard de la proposition 1.6.2), nous avons choisis $v_{\max} = 20$, et donc un discrétisation en espace comportant 300×2000 points sur chacun des 44 pas de temps.*

Propriété 6.2.5 *En absence de coûts de transaction, contrairement à l'algorithme initial (6.4) de programmation dynamique (propriété 6.1.3), le système d'équations (6.17) et l'algorithme rapide dégénèrent puisque $q_k^\varepsilon = 0 \forall \varepsilon \in \{+, -\}$, conduisant à $\Delta = 0$. La cause de la dégénérescence est donc la même que celle du système d'EDP (5.3) de la théorie en temps continu, ce qui n'est pas étonnant au vu du second point de la propriété 6.2.3.*

6.3 Théorème de convergence

Dans ce paragraphe nous allons montrer, sous la conjecture 5.3.3 (unicité de la solution de viscosité de la DIQV (5.24)), la convergence de manière décroissante monotone de la fonction Valeur W_k^h du jeu multi-étages \mathcal{G}^h vers la valeur W du jeu différentiel \mathcal{G} lorsque le pas de temps h tend vers 0. Cette preuve améliore, et généralise, la preuve faite dans [BEFT06] pour les options vanilles à toute option à paiement semi continu supérieurement (s.c.s), comprenant donc les options digitales de type cash or nothing ainsi que les options vanilles (à paiement continu donc a fortiori s.c.s) ⁷.

6.3.1 Énoncé du théorème de convergence et jeux utilisés au cours de la preuve

Liste des différents jeux utilisés

Nous rappelons les notations $\bar{X} = (t, X)^t = (t, u, v)^t$. Pour prouver le théorème de convergence 6.3.1 à venir, nous allons avoir besoin d'utiliser les différents jeux suivants :

- ➔ le jeu d'origine \mathcal{G} en temps continu, où le contrôle du minimiseur $\xi \in \Xi$ c'est-à-dire peut être fini ou impulsionnel. Sa fonction valeur est $W(\bar{X})$.
- ➔ le jeu multi-étages \mathcal{G}^h en question, de Valeur $\{W^h(kh, X)\}_k = \{W_k^h(X)\}_k$, dans lequel le trader ne dispose que de la commande impulsionnelle, les impulsions ne pouvant en outre intervenir qu'aux instants d'échantillonnage $t_k = kh$.

⁷Comme la preuve ne va dépendre que du caractère s.c.s de la fonction de paiement, elle sera identique pour un call et un put.

- ➔ le jeu multi-étage $\mathcal{G}^{h,l}$ correspondant au jeu \mathcal{G}^h (jeu discrétisé avec un pas de temps h) où en plus les commandes $\{\xi_k\}$ du minimiseur sont discrétisées avec un pas l , c'est-à-dire $\xi_k \in l\mathbb{Z}$. Sa fonction valeur est une suite $\{W_k^{h,l}(X)\}_k$.
- ➔ le jeu standard sans commande impulsionnelle \mathcal{J} , dit de Josué, introduit dans le paragraphe 5.3.2. C'est un jeu stationnaire, de dynamique (5.18), et dont la Valeur est notée $V(\bar{X})$.
- ➔ le jeu \mathcal{J}^h , de Valeur $V_k^h(X)$, obtenu par discrétisation du jeu \mathcal{J} avec un schéma d'Euler du premier ordre. La dynamique du jeu \mathcal{J}^h est donc (compte tenu de (5.18))

$$\bar{X}((k+1)h) = \bar{X}(kh) + hf(kh; \tau(kh), j(kh)) \quad (6.22)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} t((k+1)h) &= t(kh) + h\bar{j}(kh) , \\ u((k+1)h) &= u(kh) + h\bar{j}(kh)\tau(kh)u(kh) , \\ v((k+1)h) &= v(kh) + h(\bar{j}(kh)\tau(kh)v(kh) + j(kh)) , \end{cases}$$

où le paiement est défini avec $t(\Theta) = T$. Nous redéfinissons le nombre de pas par $\mathcal{K} = \frac{\Theta}{h}$. Le critère J^h est donné par

$$J^h(0, u(0), v(0)) = N(u(\Theta), v(\Theta)) + \sum_{k=0}^{N-1} h(-\bar{j}\tau v + jC^j) ,$$

et les contrôles du minimiseur et du maximiseur respectivement par $j \in \{-1, 0, 1\}$ (avec $\bar{j} = 1 - |j|$) et $\tau \in [\sigma_h^-, \sigma_h^+]$ où (voir les relations 1.39))

$$\sigma_h^- = \frac{\tau_h^-}{h} = \frac{1}{h}(e^{\tau^- h} - 1) \text{ et } \sigma_h^+ = \frac{\tau_h^+}{h} = \frac{1}{h}(e^{\tau^+ h} - 1) .$$

En outre nous avons $\sigma_h^- \rightarrow \tau^-$ et $\sigma_h^+ \rightarrow \tau^+$ quand $h \rightarrow 0$, et compte tenu du choix de τ_h^- et τ_h^+ ($\tau_h^- = e^{\tau^- h} - 1$ et $\tau_h^+ = e^{\tau^+ h} - 1$), la quantité $e^{(\int_{t-h}^t \tau(\theta) d\theta)}$ parcourt exactement l'intervalle $[\tau_h^-, \tau_h^+]$. Par conséquent (par linéarité de la dynamique) le jeu discret \mathcal{J}^h est une discrétisation exacte (échantillonnage) du jeu \mathcal{J} .

Extension à tout $t \in [0, T]$ des Valeurs des différents jeux multi-étages

Pour tout h fixé nous étendons à tout $t \in [0, T]$ les Valeurs respectives $W_k^h(X)$, $W_k^{h,l}(X)$, et $V^h(X)$ des jeux multi-étages \mathcal{G}^h , $\mathcal{G}^{h,l}$, et \mathcal{J}^h , en trois fonctions $W^h(\bar{X})$, $W^{h,l}(\bar{X})$, et $V^h(\bar{X})$, via la procédure suivante. Si $t \in]kh, (k+1)h[$ nous effectuons un premier pas de programmation dynamique $0 < \tilde{h} < h$ (et donc $\tilde{h} \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$), en autorisant un saut à l'instant initial t , et avec $\tilde{h} > 0$ qui représente la distance en temps par rapport au prochain point de discrétisation, à savoir $\tilde{h} = (k+1)h - t$.

Énoncé du théorème

Notre but consiste à prouver le théorème de convergence suivant

Théorème 6.3.1 *Si la solution de viscosité (discontinue) de l'équation (5.24) est unique (conjecture 5.3.3), la suite des fonctions $\{W^h\}$ converge ponctuellement de manière monotone décroissante vers la fonction W quand le pas de temps h tend vers 0 de façon dyadique ($h = 2^{-d}T$ avec $\mathbb{N} \ni d \rightarrow \infty$).*

Avant de commencer la preuve nous rappelons que les jeux \mathcal{G} et \mathcal{J} ont la même Valeur (proposition 5.3.1) à savoir $W(\bar{X}) = V(\bar{X})$. Par ailleurs, compte tenu de la proposition 5.3.2, nous pouvons supprimer le terme en ξ_c de l'équation d'Isaacs (5.21) du jeu \mathcal{J} . La fonction Valeur $V = W$ doit donc être solution de viscosité de l'équation

$$\begin{cases} 0 = \min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \{ \bar{j} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \tau \left(\frac{\partial V}{\partial u} u + \left(\frac{\partial V}{\partial v} - 1 \right) v \right) \right] + j \left[\frac{\partial V}{\partial v} + C^j \right] \} , \\ \forall X, \quad V(T, X) = N(X) . \end{cases} \quad (6.23)$$

Afin d'alléger les notations dans certaines parties de la preuve, nous posons l'équation d'Isaacs (6.23) sous la forme générale (2.7), à savoir ici

$$\min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \left[\frac{\partial V}{\partial \bar{X}} f(\bar{X}; j, \tau) + L(\bar{X}; j, \tau) \right] \text{ avec } f = \begin{pmatrix} \bar{j} \\ \bar{j}\tau u \\ \bar{j}\tau v + j \end{pmatrix} \text{ et } L = -\tau \bar{j}v + C^j j . \quad (6.24)$$

Par ailleurs nous rappelons que la commande $\tau(\cdot)$ peut être prise en boucle ouverte⁸. Ainsi les versions discrétisées des jeux concernés induisent des restrictions sur les stratégies admissibles du minimiseur, mais ne change pas l'ensemble des commande admissibles du maximiseur. Ce point va s'avérer crucial dans les lemmes 6.3.2 et 6.3.4 à venir.

6.3.2 Preuve du théorème

La preuve du théorème 6.3.1 repose sur les quatres lemmes suivants :

Lemme 6.3.2 $\forall h, l$ positifs et tout $\bar{X} = (t, X)^t = (t, u, v)^t$ nous avons

$$W(\bar{X}) \leq W^h(\bar{X}) \leq W^{h,l}(\bar{X}) .$$

Preuve du lemme 6.3.2 Le jeu \mathcal{G}^h est un échantillonnage du jeu \mathcal{G} où le minimiseur est contraint à ne peut plus pouvoir utiliser de contrôle continu ξ_c , mais uniquement des impulsions ξ_k (transactions) ne pouvant intervenir qu'à l'instant initial t et aux instants d'échantillonnage $t = kh$, $k \in \mathbb{N}$. Du jeu \mathcal{G} au jeu \mathcal{G}^h des contraintes ont ainsi été placées sur l'ensemble des stratégies admissibles du minimiseur mais pas sur celles du maximiseur, ce qui a pour conséquence d'augmenter la valeur du jeu. Il en résulte la première inégalité $W(\bar{X}) \leq W^h(\bar{X})$.

Dans le jeu $\mathcal{G}^{h,l}$, par rapport au jeu \mathcal{G}^h , nous avons de nouveau une contrainte supplémentaire sur les stratégies admissibles ξ du minimiseur, à savoir que le montant des transactions doit être un multiple du pas l ($\xi_k \in l\mathbb{Z}$), ce qui, pour les mêmes raisons, conduit à la deuxième inégalité $W^h(\bar{X}) \leq W^{h,l}(\bar{X})$. ■

⁸Grâce au « lemme de Berkovitz » [Ber71] mentionné dans le chapitre 2, page 61.

Lemme 6.3.3 *La fonction Valeur étendue du jeu \mathcal{J}^h coïncide avec la Valeur étendue du jeu $\mathcal{G}^{h,h}$ (c'est-à-dire $V^h(\bar{X}) = W^{h,h}(\bar{X})$).*

Preuve du lemme 6.3.3 Ce lemme découle directement de l'identité des jeux \mathcal{G} et \mathcal{J} . Nous pouvons aussi remarquer que l'équation d'Isaacs satisfaite par la Valeur étendue $V^h(\bar{X}) = V^h(t, u, v)$ du jeu \mathcal{J}^h stationnaire s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \forall \bar{X} \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : \\ \min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\sigma_h^-, \sigma_h^+]} [V^h(\bar{X} + hf(\bar{X}; j, \tau)) - V^h(\bar{X}) + hL(\bar{X}; j, \tau)] = 0, \\ \forall X : V^h(T, X) = N(X), \end{cases}$$

avec ici (voir l'équation (6.24))

$$(\bar{X} + hf(\bar{X}; j, \tau)) = (t + h\bar{j}, u + h\bar{j}\tau u, v + h(\bar{j}\tau v + j)) \quad \text{et} \quad L(\bar{X}; j, \tau) = -\tau\bar{j}v + C^j j. \quad (6.25)$$

En étendant le \min_j aux trois possibilités pour le contrôle j du minimiseur ($j \in \{-1, 0, 1\}$ avec $\bar{j} = 1 - |j|$), l'équation d'Isaacs (6.25) se réécrit

$$V^h(t, u, v) = \min \left\{ \max_{\tau \in [\sigma_h^-, \sigma_h^+]} [V^h(t + h, (1 + h\tau)u, (1 + h\tau)v) - h\tau v], \right. \\ \left. V^h(t, u, v - h) - C^- h, V^h(t, u, v + h) + C^+ h \right\}.$$

En remplaçant $h\tau \in [\sigma_h^-, \sigma_h^+]$ par $\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]$, cette dernière conduit à

$$V^h(t, u, v) = \min \left\{ \max_{\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]} [V^h(t + h, (1 + \tau)u, (1 + \tau)v) - \tau v], \right. \\ \left. V^h(t, u, v - h) - C^- h, V^h(t, u, v + h) + C^+ h \right\}.$$

En utilisant la formule (6.7) déduite de la minimisation en ξ , nous pouvons en conclure que $V^h(t, u, v) = V^h(\bar{X})$ coïncide ⁹ avec $W^{h,h}(t, u, v) = W^{h,h}(\bar{X})$. ■

Remarque 6.3.1 *Le lemme (6.3.3) s'explique par le fait que l'amplitude d'un saut dans le jeu \mathcal{G} est traduite en la durée d'une transition linéaire dans le jeu \mathcal{J} (voir la figure 5.3). Ainsi dans le jeu \mathcal{J}^h , à la fois le temps et l'amplitude d'un saut sont discrétisés avec le pas h .*

Lemme 6.3.4 *Pour $h = 2^{-d}T$ avec $d \in \mathbb{N}$, la suite des fonctions $\{V^h\}$ converge de manière monotone décroissante vers une fonction \widehat{V} lorsque $d \rightarrow \infty$.*

Preuve du lemme 6.3.4 En fonction de h les jeux \mathcal{J}^h diffèrent par la fréquence à laquelle le minimiseur est autorisé à appliquer sa commande j (c'est-à-dire à faire des transactions) puisque le pas est subdivisé par 2 entre 2 valeurs de d consécutives. Le jeu \mathcal{J}^h avec $h = 2^{-d}T$ peut être lui même

⁹Par exemple, le troisième terme signifie que la fonction valeur V^h a une pente en v de $-C^+$ sur un pas de temps.

considéré comme une variante du même jeu \mathcal{J}^h avec $h = 2^{-(d+1)T}$, mais où le minimiseur est contraint de jouer $\xi = 0$ à chaque pas impair. Les raffinements successifs des instants d'échantillonnages lorsque d augmente a pour effet de relâcher des contraintes sur les ξ admissibles ce qui prouve le caractère décroissant de la Valeur $V^h(\bar{X})$ pour chaque \bar{X} fixé lorsque d augmente. La fonction Valeur V^h étant par ailleurs bornée par 0 quelque soit h , la suite des $\{V^h\}$ converge de manière monotone décroissante vers une fonction \hat{V} . ■

Lemme 6.3.5 *La fonction \hat{V} est solution de viscosité (discontinue) de l'équation d'Isaacs (6.24) du jeu \mathcal{J} .*

La preuve de ce lemme fait l'objet du prochain paragraphe 6.3.3.

Conclusion

Du lemme 6.3.2 avec $l = h$ et des lemmes 6.3.3 et 6.3.4, nous en déduisons

$$W \leq W^h \leq V^h \quad \text{avec} \quad V^h \downarrow \hat{V} \quad \text{lorsque} \quad h \downarrow 0 \quad \text{de façon dyadique.} \quad (6.26)$$

Sous l'unicité de la solution de viscosité de la DIQV (5.24) du jeu \mathcal{J} (la conjecture 5.3.3), le lemme 6.3.5 implique $\hat{V} = V$. Comme par ailleurs $V = W$ (proposition 5.3.1), nous en déduisons que $\hat{V} = W$. Par conséquent, en employant le théorème des gendarmes sur les inégalités (6.26), il en résulte que $W^h \downarrow W$ quand $h \downarrow 0$ de façon dyadique, c'est-à-dire le théorème de convergence 6.3.1. ■

6.3.3 Preuve du lemme 6.3.5

Il nous reste à faire la preuve du lemme 6.3.5, laissée en suspend.

Les conditions à vérifier

Nous notons respectivement \hat{V}^* et \hat{V}_* les enveloppes supérieures et inférieures de \hat{V} . Sur la base de la définition 2.2.4, la fonction \hat{V} est une solution de viscosité discontinue de l'équation d'Isaacs (6.24) du jeu \mathcal{J} si \hat{V}^* est une sous-solution discontinue et \hat{V}_* est une sur-solution discontinue de l'équation d'Isaacs (6.24), c'est-à-dire si les inégalités respectives sont vérifiées :

⇒ Pour tout $\bar{X}_1 = (t_1, u_1, v_1) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $\forall \Phi$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $(\hat{V}^* - \Phi)$ à un maximum local strict en \bar{X}_1

$$\min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{X}} f(\bar{X}_1; j, \tau) + L(\bar{X}_1; j, \tau) \right] \geq 0 \quad (6.27)$$

⇒ Pour tout $\bar{X}_2 = (t_2, u_2, v_2) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $\forall \Phi$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $(\hat{V}_* - \Phi)$ à un minimum local strict en \bar{X}_2

$$\min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{X}} f(\bar{X}_2; j, \tau) + L(\bar{X}_2; j, \tau) \right] \leq 0 \quad (6.28)$$

Dans les équations (6.27) et (6.28) nous n'avons pas écrit les conditions aux bords, car puisque $V^h(T, X) = N(X)$ quelque soit h , nous avons $\widehat{V}(T, X) = N(X)$, de sorte que les conditions au bord sont satisfaites dans les deux cas.

Nous allons commencer par montrer la propagation en temps rétrograde du caractère s.c.s de la fonction de paiement $M(u)$ au sein de la Valeur « étendue » $V^h(t, u, v) = V^h(\bar{X})$ du jeu \mathcal{J}^h ainsi que qu'au sein de $\widehat{V}(\bar{X})$. Il en résulte que l'enveloppe supérieure $\widehat{V}^* = \widehat{V}$, et donc que la condition (6.27) à vérifier est celle d'une sous-solution de viscosité continue (définition 2.2.2). Par contre l'autre condition (6.28) à vérifier reste celle d'une sur-solution de viscosité discontinue. La vérification des conditions (6.27) et (6.28) va utiliser en grande partie la méthode de I.Capuzzo-Dolcetta [CD83] avec des détails techniques pour l'appliquer à notre problème.

Les fonctions $\{V^h\}$ et \widehat{V} sont s.c.s

Lemme 6.3.6 : La fonction $\bar{X} \mapsto V^h(\bar{X})$ est s.c.s .

Preuve du lemme 6.3.6. Grâce à l'extension à tout $t \in [0, T]$ choisie ¹⁰ pour la valeur $V_k^h(X)$ du jeu multi-étages \mathcal{J}^h , la fonction $V^h = W^{h,h}$ s'analyse pour tout \bar{X} comme la Valeur d'un jeu différentiel minimax ¹¹ de critère (6.1)

$$V^h(t, u, v) = \inf_{\varphi \in \Phi_D^h} \sup_{\{\tau_k\} \in \Omega} \left[N(u_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}}) + \sum_{l \geq k} (-\tau_l(v_l + \xi_l) + C^{\varepsilon_l} \xi_l) \right] ,$$

où Φ_D^l désigne l'ensemble des stratégies non anticipatives φ admissibles ¹² pour le jeu $\mathcal{G}^{h,l}$ (c'est-à-dire avec $\xi_k \in l\mathbb{Z}$ aux instants $t_k = kh$ et $\xi = 0$ ailleurs). Une stratégie $\varphi(u_0, \tau(\cdot)) \in \Phi_D^h$ est une application de $\mathbb{R}^+ \times \Omega \mapsto l\mathbb{Z}$. Dans le cas présent $l = h$ ($W^{h,h}$ est la Valeur de jeu $\mathcal{G}^{h,h}$).

Le coût terminal se décompose en $N(u_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}}) = M(u_{\mathbb{K}}) + m(u_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}})$ (formule 1.30) où les coûts de clôture $m(u_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}})$ sont continus en (u, v) . Comme nous avons choisi $M(u)$ s.c.s, $N(u, v)$ est donc également s.c.s. Considérons les applications continues suivantes

$$\begin{aligned} \bar{X} &\mapsto g(\bar{X}; \{\tau_k\}_k, \{\xi_k\}_k) = (u_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}}) = (u(T), v(T)) , \\ \bar{X} &\mapsto L(\bar{X}; \{\tau_k\}_k, \{\xi_k\}_k) = \sum_{l \geq k} (-\tau_l(v_l + \xi_l) + C^{\varepsilon_l} \xi_l) . \end{aligned}$$

Comme $\forall k \in \{0, 1, \dots, \mathbb{K}\}$ nous avons $\tau_k \in [\tau_h^-, \tau_h^+]$ fermé de \mathbb{R} donc compact, la suite des $\{\tau_k\}_k$ appartient à un produit de compact qui lui même est compact par le théorème de Tychonov. L'application $\bar{X} \mapsto g(\bar{X}; \{\tau_k\}_k, \{\xi_k\}_k) = (u(T), v(T))$ est ainsi continue pour tout suite $\{\tau_k\}_k$ appartenant à un compact, donc continue uniformément en $\{\tau_k\}_k$. Par ailleurs $\{\xi_k\}_k$ est un terme additif (il disparaît par différence) et par conséquent la continuité est indépendante de la suite $\{\xi_k\}_k$, donc a fortiori uniforme en $\{\xi_k\}_k$. L'application $\bar{X} \mapsto g(\bar{X}; \{\tau_k\}_k, \{\xi_k\}_k)$ est par conséquent continue uniformément en $(\{\tau_k\}_k, \{\xi_k\}_k)$. L'application continue $\bar{X} \mapsto L(\bar{X}; \{\tau_k\}_k, \{\xi_k\}_k)$ dépend continûment de $\{\tau_k\}$ et

¹⁰Nous rappelons qu'elle consiste à faire un premier pas $\tilde{h} = (k+1)h - t$ pour se rendre au prochain instant d'échantillonnage $(k+1)h$ si $t \in]kh, (k+1)h[$ (page 258).

¹¹Voir la Valeur (1.53).

¹²En fait Φ_D^l dépend de t puisque nous autorisons un saut à l'instant t .

$\{\xi_k\}$, donc a fortiori également du sous-ensemble $\{\xi_k^h\}$ des $\{\xi_k\}$ discrétisés avec un pas h . L'application $\bar{X} \mapsto L(\bar{X}; \{\tau_k\}_k, \{\xi_k\}_k)$ considérée est, pour les mêmes raisons que l'application g ci dessus, continue uniformément en $(\{\tau_k\}_k, \{\xi_k\}_k)$.

Le lemme 6.3.6 devient ainsi équivalent à la proposition suivante dans laquelle nous utilisons τ et ξ pour désigner $\{\tau_k\}_k$ et $\{\xi_k\}_k$.

Proposition 6.3.7 Soit $V^h(\bar{X}) = \inf_{\phi \in \Phi_D^l} \sup_{\tau \in \Omega} J(\bar{X}; \tau, \xi)$ avec J de la forme

$$J(\bar{X}; \tau, \xi) = N(g(\bar{X}; \tau, \xi)) + L(\bar{X}; \tau, \xi)$$

satisfaisant les hypothèses

1. $(u, v) \mapsto N(u, v)$ s.c.s ,
2. $\bar{X} \mapsto g(\bar{X}; \tau, \xi)$ continue uniformément en (τ, ξ) ,
3. $\bar{X} \mapsto L(\bar{X}; \tau, \xi)$ continue uniformément en (τ, ξ) ,

alors

$$\bar{X} \mapsto V(\bar{X}) \text{ est s.c.s.}$$

Preuve de la proposition 6.3.7. Soit \bar{X} fixé et $\varepsilon > 0$ donné. On fixe également $\phi \in \Phi_D^l$. Il existe un voisinage \mathcal{V} de \bar{X} , indépendant de τ grâce aux hypothèses de continuité uniforme, tel que si $\bar{X}' \in \mathcal{V}$ alors

$$N(g(\bar{X}; \phi(\tau'), \tau')) \geq N(g(\bar{X}'; \phi(\tau'), \tau')) - \frac{\varepsilon}{4} \text{ grace à 1. et 2.}$$

$$L(\bar{X}; \tau', \phi(\tau')) \geq L(\bar{X}'; \tau', \phi(\tau')) - \frac{\varepsilon}{4} \text{ grace à 3.}$$

Par ailleurs nous choisissons τ' tel que

$$J(\bar{X}'; \tau', \phi(\tau')) \geq \sup_{\tau} J(\bar{X}'; \tau, \phi(\tau)) - \frac{\varepsilon}{2} ,$$

de sorte que

$$J(\bar{X}; \tau', \phi(\tau')) \geq J(\bar{X}'; \tau', \phi(\tau')) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \sup_{\tau} J(\bar{X}'; \tau, \phi(\tau)) - \varepsilon ,$$

et a fortiori

$$\sup_{\tau} J(\bar{X}; \tau, \phi(\tau)) \geq J(\bar{X}; \tau', \phi(\tau')) \geq \sup_{\tau} J(\bar{X}'; \tau, \phi(\tau)) - \varepsilon .$$

Donc $\bar{X} \mapsto \sup_{\tau} J(\bar{X}; \tau, \phi(\tau))$ est s.c.s pour chaque ϕ fixé. Finalement, prendre l'inf en ϕ préserve le caractère s.c.s. La proposition 6.3.7 et par conséquent le lemme 6.3.6 sont ainsi prouvés. ■

Des lemmes 6.3.6 et 6.3.4, nous en déduisons que la fonction $\widehat{V}(\bar{X}) = \inf_h V^h(\bar{X})$ est s.c.s comme l'inf de fonctions s.c.s (son hypographe $\text{Hypo}(\widehat{V}(\bar{X})) = \bigcap_h \text{Hypo}(V^h(\bar{X}))$) est fermé comme intersection de fermés de $[0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$).

La fonction \hat{V} est sous-solution de viscosité continue de l'équation d'Isaacs (6.24) (condition (6.27) avec $\hat{V}^* = \hat{V}$)

Lemme 6.3.8 Soit E un espace euclidien et Δ^h une suite de fonctions s.c.s qui converge ponctuellement de manière monotone décroissante vers une fonction Δ . Soit \bar{X}_1 un maximum strict de Δ dans un voisinage compact \mathcal{V} de \bar{X}_1 . Soit \bar{X}^h le maximum¹³ de Δ^h sur \mathcal{V} alors

$$\bar{X}^h \rightarrow \bar{X}_1 \quad \text{quand } h \downarrow 0.$$

Preuve du lemme 6.3.8. La suite des maximum \bar{X}^h de Δ^h vit dans le compact \mathcal{V} , donc possède au moins un point d'accumulation. Soit \bar{X}^{h_i} une sous-suite extraite vivant dans le compact \mathcal{V} et convergeant donc vers un point d'accumulation \hat{X}_1 . Montrons que $\hat{X}_1 = \bar{X}_1$, ce qui permet d'en déduire que la suite toute entière des \bar{X}^h converge vers \bar{X}_1 quand $h \rightarrow 0$. Comme Δ^h possède un maximum dans \mathcal{V} en \bar{X}^h , il vient

$$\forall \bar{X} \in \mathcal{V} \quad \Delta^h(\bar{X}) \leq \Delta^h(\bar{X}^h) \quad \text{avec } \Delta^h(\bar{X}) \downarrow \Delta(\bar{X}) \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0,$$

et à fortiori en $\bar{X}_1 \in \mathcal{V}$

$$\Delta(\bar{X}_1) \leq \Delta^h(\bar{X}_1) \leq \Delta^h(\bar{X}^h). \quad (6.29)$$

Supposons que $\bar{X}^h \rightarrow \hat{X}_1$ et posons $\Delta(\bar{X}_1) - \Delta(\hat{X}_1) = \delta \geq 0$. Notons que $\delta = 0$ si et seulement si $\hat{X}_1 = \bar{X}_1$ (du fait du caractère strict du maximum de Δ). Puisque $\Delta^h(\bar{X}) \rightarrow \Delta(\bar{X})$, il existe \hat{h} suffisamment petit tel que

$$\Delta^{\hat{h}}(\hat{X}_1) \leq \Delta(\hat{X}_1) + \frac{\delta}{3}.$$

Comme $\Delta^{\hat{h}}$ est s.c.s, il existe un voisinage $\hat{\mathcal{V}}$ de \hat{X}_1 tel que

$$\forall \bar{X} \in \hat{\mathcal{V}} : \quad \Delta^{\hat{h}}(\bar{X}) \leq \Delta^{\hat{h}}(\hat{X}_1) + \frac{\delta}{3} \leq \Delta(\hat{X}_1) + \frac{2\delta}{3}.$$

Puisque $\Delta^h(\bar{X}) \downarrow \Delta(\bar{X})$ nous obtenons

$$\forall h < \hat{h} \quad \text{et} \quad \forall \bar{X} \in \hat{\mathcal{V}} : \quad \Delta^h(\bar{X}) \leq \Delta(\hat{X}_1) + \frac{2\delta}{3}.$$

Comme $\bar{X}^h \rightarrow \hat{X}_1$, il existe $\tilde{h} < \hat{h}$ tel que $\forall h < \tilde{h} < \hat{h}$ nous ayons $\bar{X}^h \in \hat{\mathcal{V}}$ et donc

$$\Delta^h(\bar{X}^h) \leq \Delta(\hat{X}_1) + \frac{2\delta}{3} = \Delta(\bar{X}_1) - \frac{\delta}{3},$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (6.29) si $\delta \neq 0$. Il en résulte que nécessairement $\hat{X}_1 = \bar{X}_1$. ■

¹³Il existe puisque Δ^h est s.c.s.

Nous appliquons le lemme 6.3.8 aux fonctions

$$\begin{aligned} \Delta^h &: [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \bar{X} &\mapsto \Delta^h(\bar{X}) = V^h(\bar{X}) - \Phi(\bar{X}) \end{aligned}$$

qui convergent vers $\Delta = \hat{V} - \Phi$ quand $h \rightarrow 0$. Les fonctions $\Delta^h = V^h - \phi$ sont s.c.s comme différences d'une fonction s.c.s avec une fonction test ϕ , de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Ainsi quand $h \rightarrow 0$, nous avons $\bar{X}^h \rightarrow \bar{X}_1$ pour les maximums respectifs \bar{X}_1 et \bar{X}^h des fonctions Δ et Δ^h sur le compact \mathcal{V} .

Dans le jeu \mathcal{J}^h , la commande j est un entier et par ailleurs la dynamique (6.22) est bornée¹⁴. Comme la dynamique (6.22) est bornée, nous en déduisons que pour h suffisamment petit ($\bar{X}^h + \tilde{h}f(\bar{X}^h; j, \tau)$) reste dans le compact \mathcal{V} . Puisque \bar{X}^h est un maximum pour $V^h - \Phi$ sur \mathcal{V} , nous avons

$$V^h(\bar{X}^h) - \Phi(\bar{X}^h) \geq V^h(\bar{X}^h + \tilde{h}f(\bar{X}^h; j, \tau)) - \Phi(\bar{X}^h + \tilde{h}f(\bar{X}^h; j, \tau)).$$

En utilisant dans \mathcal{V} cette dernière inégalité ainsi que l'équation d'Isaacs (6.25) du jeu \mathcal{J} discrétisé et la monotonie de l'opérateur « min max », nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &= \min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\sigma_h^-, \sigma_h^+]} \left[V^h(\bar{X}^h + \tilde{h}f(\bar{X}^h; j, \tau)) - V^h(\bar{X}^h) + \tilde{h}L(\bar{X}^h; j, \tau) \right] \\ &\leq \min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\sigma_h^-, \sigma_h^+]} \left[\Phi(\bar{X}^h + \tilde{h}f(\bar{X}^h; j, \tau)) - \Phi(\bar{X}^h) + \tilde{h}L(\bar{X}^h; j, \tau) \right]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Comme $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, nous déduisons de l'inégalité (6.30) et du théorème des accroissements finis, qu'il existe un point (un triplet) \tilde{X}^h dans le segment $[\bar{X}^h, \bar{X}^h + \tilde{h}f(\bar{X}^h; j, \tau)]$ tel que

$$0 \leq \min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\sigma_h^-, \sigma_h^+]} \tilde{h} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{X}}(\tilde{X}^h) f(\bar{X}^h; j, \tau) + L(\bar{X}^h; j, \tau) \right]. \quad (6.31)$$

Comme $\tilde{h} > 0$, nous pouvons diviser par \tilde{h} . Puisque \bar{X}^h converge vers \bar{X}_1 quand $h \downarrow 0$ (et donc $\tilde{h} \rightarrow 0$)¹⁵, et que la dynamique (6.22) est bornée, il en découle que \tilde{X}^h converge aussi vers \bar{X}_1 . De plus $\sigma_h^- \rightarrow \tau^-$ et $\sigma_h^+ \rightarrow \tau^+$ et dans l'inéquation (6.31) le crochet est continu en (τ, \bar{X}) , donc en (τ, h) , et donc uniformément continu en (τ, h) dans un voisinage de $[\tau^-, \tau^+] \times \{0\}$. Ainsi nous pouvons passer à la limite pour chaque valeur de j et conclure que

$$0 \leq \min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} h \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{X}} f(\bar{X}_1; j, \tau) + L(\bar{X}_1; j, \tau) \right].$$

La condition de sous-solution de viscosité continue est ainsi vérifiée.

La fonction \hat{V} est sur-solution de viscosité discontinue de l'équation d'Isaacs (6.24)

Lemme 6.3.9 *Soit E un espace euclidien et Δ^h une suite de fonctions s.c.s convergent de manière monotone décroissante vers une fonction Δ s.c.s. Soit Δ_*^h et Δ_* leurs enveloppes inférieures respectives*

¹⁴Même si ξ est non borné dans le jeu \mathcal{G} , et indépendamment du critère terminal.

¹⁵Puisque $0 < \tilde{h} \leq h$.

(qui sont donc s.c.i). Soit \bar{X}_2 un minimum strict de Δ_* dans un voisinage compact \mathcal{V} et \bar{X}^h le minimum de Δ_*^h dans \mathcal{V} , alors

$$\bar{X}^h \rightarrow \bar{X}_2 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Preuve du lemme 6.3.9 Soit \bar{X}^h une sous-suite convergeant vers \hat{X}_2 . Du minimum de Δ_* en \bar{X}_2 nous avons $\Delta_*(\hat{X}_2) \geq \Delta_*(\bar{X}_2)$ et donc $\Delta_*(\hat{X}_2) = \Delta_*(\bar{X}_2) + \varepsilon$ avec $\varepsilon \geq 0$, et $\varepsilon = 0$ si et seulement si $\hat{X}_2 = \bar{X}_2$. Puisque Δ_* est s.c.i avec $\bar{X}^h \rightarrow \hat{X}_2$ il en découle que

$$\exists h_\varepsilon \text{ tel que } \forall h \leq h_\varepsilon : \Delta_*(\bar{X}^h) \geq \Delta_*(\hat{X}_2) - \frac{\varepsilon}{2} = \Delta_*(\bar{X}_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\forall \bar{X} \Delta^h(\bar{X}) \geq \Delta(\bar{X})$ nous avons par passage à la lim inf : $\forall \bar{X}, \Delta_*^h(\bar{X}) \geq \Delta_*(\bar{X})$. En $\bar{X} = \bar{X}^h$ nous avons donc :

$$\Delta_*^h(\bar{X}^h) \geq \Delta_*(\bar{X}^h) \geq \Delta_*(\bar{X}_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par définition de l'enveloppe inférieure Δ_* et puisque en outre \bar{X}^h est le minimum de $\Delta_*(\bar{X})$ dans \mathcal{V} , nous obtenons

$$\forall \bar{X} \in \mathcal{V} : \Delta^h(\bar{X}) \geq \Delta_*^h(\bar{X}) \geq \Delta_*^h(\bar{X}^h) \geq \Delta_*(\bar{X}_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi lorsque $h \rightarrow 0$ nous en concluons à l'inégalité

$$\forall \bar{X} \in \mathcal{V} : \Delta(\bar{X}) \geq \Delta_*(\bar{X}_2) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.32)$$

Or par définition de l'enveloppe inférieure

$$\exists \text{ une suite } \bar{X}^n \rightarrow \bar{X}_2 \text{ telle que } \Delta(\bar{X}^n) \rightarrow \Delta_*(\bar{X}_2),$$

et par conséquent

$$\exists \bar{X} \in \mathcal{V} \text{ tel que } \Delta(\bar{X}) \leq \Delta_*(\bar{X}_2) + \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (6.32) si $\varepsilon \neq 0$. Nous avons donc nécessairement $\hat{X}_2 = \bar{X}_2$. ■

L'application du lemme 6.3.9 aux fonctions s.c.i $\Delta_*^h = V_*^h - \Phi$ qui convergent vers la fonction s.c.i $\Delta_* = \hat{V}_* - \Phi$ conduit, en adoptant mutatis-mutandis ¹⁶ la démarche qui a conduit à l'inéquation (6.30), à l'inéquation

$$\begin{aligned} & \min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\sigma_h^-, \sigma_h^+]} \left[V_*^h(\bar{X}_2 + hf(\bar{X}_2; j, \tau)) - V_*^h(\bar{X}_2) + \tilde{h}L(\bar{X}_2; j, \tau) \right] \\ & \geq \min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\sigma_h^-, \sigma_h^+]} \left[\Phi(\bar{X}_2 + hf(\bar{X}_2; j, \tau)) - \Phi(\bar{X}_2) + \tilde{h}L(\bar{X}_2; j, \tau) \right] \end{aligned}$$

Par la démarche similaire à la suite du raisonnement (théorème des accroissements finis), le second

¹⁶En remplaçant dans la démarche respectivement s.c.s, maximum et \geq par s.c.i, minimum et \leq .

terme devient en passant à la limite

$$\min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tilde{h} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{X}} f(\bar{X}_2^h; j, \tau) + L(\bar{X}_2^h; j, \tau) \right].$$

Pour conclure à la condition de sur-solution de viscosité discontinue (6.28), il nous reste donc à montrer la proposition suivante

Proposition 6.3.10

$$\min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\sigma_h^-, \sigma_h^+]} \left[V_*^h(\bar{X}_2 + \tilde{h}f(\bar{X}_2; j, \tau)) - V_*^h(\bar{X}_2) + \tilde{h}L(\bar{X}_2; j, \tau) \right] \leq 0 .$$

Preuve de la proposition 6.3.10. Par définition de l'enveloppe inférieure V_*^h de V^h , il existe une suite $\bar{X}^n \rightarrow \bar{X}^h$ telle que

$$V^h(\bar{X}_n) \rightarrow V_*^h(\bar{X}_n) \quad \text{et de plus} \quad \liminf_h V^h(\bar{X}_n + \tilde{h}f(\bar{X}_n)) \geq V_*^h(\bar{X}^h + \tilde{h}f(\bar{X}^h)) .$$

À stratégie fixée, il en résulte que

$$\forall \bar{X} : \liminf_h \left[V_*^h(\bar{X}_n + \tilde{h}f(\bar{X}_n; j, \tau)) - V_*^h(\bar{X}_n) + \tilde{h}L(\bar{X}_n; j, \tau) \right] \geq V_*^h(\bar{X}^h + \tilde{h}f(\bar{X}^h; j, \tau)) - V_*^h(\bar{X}^h) + \tilde{h}L(\bar{X}^h; j, \tau) .$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists n$ tel que

$$V_*^h(\bar{X}_n + \tilde{h}f(\bar{X}_n; j, \tau)) - V_*^h(\bar{X}_n) + \tilde{h}L(\bar{X}_n; j, \tau) \geq V_*^h(\bar{X}^h + \tilde{h}f(\bar{X}^h; j, \tau)) - V_*^h(\bar{X}^h) + \tilde{h}L(\bar{X}^h; j, \tau) - \varepsilon .$$

Comme à n fixé

$$\min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\sigma_h^-, \sigma_h^+]} \left[V_*^h(\bar{X}_n + \tilde{h}f(\bar{X}_n; j, \tau)) - V_*^h(\bar{X}_n) + \tilde{h}L(\bar{X}_n; j, \tau) \right] = 0 ,$$

nous en concluons que

$$\min_{j \in \{-1, 0, 1\}} \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \left[V_*^h(\bar{X}^h + \tilde{h}f(\bar{X}^h; j, \tau)) - V_*^h(\bar{X}^h) + \tilde{h}L(\bar{X}^h; j, \tau) \right] \leq \varepsilon .$$

Et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, nous en déduisons la proposition 6.3.10. ■

La preuve du lemme 6.3.5 est ainsi terminée, et par par la même occasion celle du théorème principal 6.3.1 . ■

6.3.4 Quelques remarques complémentaires

Il nous paraît intéressant de souligner les points suivants :

- ➔ Dans le cas d'une option vanille, nous avons montré que la convexité de la fonction de paiement se propage au sein des de la fonction Valeur en temps retrograde. Il en résulte d'une part que $V^* = V_* = V$ à savoir la définition classique d'une solution de viscosité continue (ce qui conduit à une preuve plus simple), et d'autre part, une convergence uniforme sur tout compact [BEFT06]. Le caractère uniforme sur tout compact de la convergence peut être vue comme une conséquence directe du théorème de Dini. Notons aussi que dans le cas des options vanilles, la preuve des lemmes 6.3.8 et 6.3.9 est beaucoup plus directe [BEFT06] en utilisant le caractère uniforme de la convergence.
- ➔ Toute suite de division obtenue par raffinements successifs et dont le diamètre tend vers 0 aurait abouti au même résultat qu'avec une division dyadique. En effet, tout raffinement revient à relâcher les contraintes sur la commande ξ du minimiseur, ce qui a pour effet de faire décroître la fonction Valeur.

Conclusion générale sur le plan mathématique

Une approche par commande robuste sur un ensemble de trajectoires de prix défini par un modèle de marché à intervalles nous a permis de construire une théorie d'évaluation d'options, en temps continu et en temps discret, en présence de coûts de transaction et de coût de clôture. Avec ce modèle de marché incomplet, la modélisation du problème d'évaluation d'options a conduit à la caractérisation de la prime comme solution d'un jeu minimax à horizon fini fixé T (pour une option européenne), à commande impulsionnelle et à coût terminal convexe ou discontinu (suivant que l'option étudiée est respectivement une option vanille ou digitale). La minimisation a pour objet de trouver une prime unique et cohérente, qui n'offre pas d'opportunité d'arbitrage au trader.

Pour la théorie en temps continu, la résolution s'est basée sur une analyse géométrique en dimension 4 des trajectoires extrémales et singulières par la méthode du jeu qualitatif (avec des outils géométriques de la théorie d'Isaacs-Breakwell), permettant de traiter les impulsions comme des nappes singulières particulières (nappes de saut). La solution obtenue s'avère riche en variétés singulières \mathbb{V} de codimension 2 (à plus forte raison pour un call digital en raison de la singularité d'une nappe émergente) puisqu'elle exhibe une dispersion, des variétés équivoques et une variété focale de dimension 2. À notre connaissance, ce jeu est le premier jeu différentiel exhibant une variété focale de dimension supérieure à 1 résolu dans la littérature. En temps discret, la résolution se fait par un algorithme de programmation dynamique classique.

La résolution a abouti à la fois en temps continu et en temps discret à une formule de représentation de la Valeur, de laquelle découle un algorithme rapide pour la théorie en temps discret, donnant conjointement la prime et la stratégie de transaction préconisée pour le trader. Pour la théorie en temps continu, le théorème de représentation donne la fonction Valeur sous la forme d'une formule non linéaire faisant intervenir des fonctions q^+ et q^- données analytiquement et un vecteur $\check{V}(t, u)$ de dimension 2 (représentant les valeurs sur toute variété singulière \mathbb{V} de dimension 2) solution d'un système d'EDP couplées linéaires du premier ordre. Mentionnons que dans [Ber05a], il est montré que si l'on admet la formule de représentation de la fonction Valeur alors nécessairement \check{V} est solution du système d'EDP en question indépendamment de la nature de la variété \mathbb{V} . En temps discret, la formule de représentation est similaire à celle de la théorie en temps continu. Les fonctions q_k^+ et q_k^- correspondent aux échantillonnées des fonctions q^+ et q^- et le système de récursions linéaire portant sur \check{V}_k , qui découle directement du caractère affine en deux morceaux de la fonction Valeur, constitue un schéma de différence finie du système d'EDP.

Pour le jeu différentiel, nous avons vérifié en outre que cette fonction Valeur est bien solution de viscosité d'une DIQV associée à un jeu sans commande impulsionnelle et de même valeur que le jeu différentiel étudié.

Nous avons par ailleurs prouvé, aussi bien pour les options vanilles que pour les options digitales, la convergence de manière monotone décroissante de la Valeur du jeu discret vers celle du jeu continu lorsque le pas de temps tend vers 0, sans changer de modèle d'actif lorsque l'on réduit le pas de temps. La preuve de ce théorème utilise cependant une conjecture concernant l'unicité de la solution de viscosité de la DIQV. La convergence obtenue s'avère uniforme sur tout compact pour une option vanille (à Valeur convexe) et simple pour une option digitale (en raison de la discontinuité de la Valeur).

Notre théorie a donc montré, à notre avis, une forte structure mathématique qui justifie déjà sur un plan purement mathématique l'intérêt de ce jeu minimax. Nous allons terminer cette thèse par l'ébauche d'un examen critique de l'intérêt de notre théorie dans son domaine d'application, à savoir du point de vue des techniques financières d'évaluation d'options.

Chapitre 7

Début d'un examen critique du point de vue applicatif

Nous allons discuter des forces et des faiblesses de notre théorie d'évaluation d'options comparée à la théorie classique de F.Black et M.Scholes [BS73], et exhiber des liens indirects entre notre théorie et celle de BS. Nous allons montrer des courbes de primes obtenues avec notre théorie et constater qu'elles ont (pour le call vanille) une allure très semblable à celles obtenues avec la théorie de BS.

Pour aller plus loin dans la comparaison, il convient de distinguer les résultats mathématiques annoncés au sens strict, de ce qui est réellement possible de faire en pratique, grâce à une certaine robustesse de la solution théorique. Pour ce faire nous allons évaluer la robustesse de notre théorie (la robustesse de la stratégie de couverture à l'égard de l'hypothèse du modèle de marché). Nous pourrions alors dans une certaine mesure tenter, dans la conclusion au plan des techniques financières qui suit ce chapitre, de répondre à la question suivante qui se pose naturellement à nous « Avons-nous développé une théorie applicable en pratique ? ».

7.1 Préambule

7.1.1 Avertissements

Nous n'avons pas la prétention de proclamer la supériorité de notre théorie sur celle de F.Black et M.Scholes. Nous souhaitons seulement montrer qu'elle peut-être une alternative intéressante (une approche complémentaire) à utiliser pour certains cas (en présence de coûts de transaction par exemple) en comparaison à une théorie plus classique.

La position épistémologique classique de l'économie et de la théorie de BS est celle des sciences naturelles : on pose le principe de l'absence d'opportunité d'arbitrage, et on en déduit ce qui doit se passer sur le marché comme un phénomène naturel¹. La domination de la théorie de BS sur la pensée financière des acteurs du marché est telle qu'il serait vain d'espérer une précision significativement meilleure d'un modèle radicalement différent. Aussi adoptons-nous une posture épistémologique beau-

¹Ce point de vue est aussi reflété par le parti pris que nous adoptons de représenter les fluctuations du marché comme un phénomène exogène et imprévisible, un phénomène naturel comme le mouvement brownien.

coup plus humble, celle d'une discipline d'aide à la décision (une théorie normative) pour agir dans un monde dont nous ne cherchons pas à percer les mécanismes profonds. Dans cette perspective, il est particulièrement important de prendre en compte les imperfections du marché : transactions discrètes, coûts de transactions, etc.

Dans cette discussion, nous prenons donc un point de vue normatif plutôt que la vision positive d'une théorie prédictive, plus fréquente dans la pensée économique.

7.1.2 Rappels du jeu de paramètres par défaut et paramètres supplémentaires pour l'implémentation.

Nous pensons tout d'abord utile de rappeler, dans la table 7.1, le jeu de paramètres par défaut (données dans le paragraphe 1.7) que nous utilisons dans les différentes applications et expériences numériques, sauf mention du contraire. Par ailleurs, sauf mention du contraire, l'algorithme utilisé est

K	T	D	$\tilde{\tau}^-$	$\tilde{\tau}^+$	ρ	C^-	C^+	c^-	c^+	$du = dv$	h
1	44	1	-5%	3%	0,0123%	-0,6986%	0,7014%	0,5 C^-	0,5 C^+	0,01	1

TAB. 7.1 – Rappel du jeu de paramètres par défaut.

l'algorithme de programmation dynamique classique (6.4) dans lequel, pour la maximisation en τ par balayage, nous prenons un nombre de pas sur $[\tilde{\tau}^-, \tilde{\tau}^+]$ égal à 1 pour les options vanilles (fonction Valeur convexe) et 81 pour les options digitales (voir la remarque 6.1.2). Par ailleurs nous avons choisi un domaine en $u \in \mathbb{R}^+$ large ($u \in [0, 3K]$) mais réalisé les différents tracés de courbes uniquement pour des valeurs de u bien inférieures à la borne maximale ², ceci afin de se prémunir contre tout effet de bord.

7.2 Résultats numériques et comparaison avec ceux de la théorie de BS

7.2.1 Formules de BS

La formule de BS pour une option vanille européenne

La théorie de BS aboutit à une formule de représentation $P(S(0)) = V_K(0, S(0))$ pour la prime d'un call européen d'échéance T et de strike K , où la valeur du portefeuille de réplication (couverture exacte) $V_K(t, x)$ est donnée par

$$V_K(t, s) = s\mathcal{N}[d_1(T-t, s)] - Ke^{-\rho(T-t)}\mathcal{N}[d_2(T-t, s)] \quad (7.1)$$

²Hormis sur la figure 7.9 et la figure 7.10 où nous montrerons un comportement limite pour les grands u .

avec

$$\begin{aligned} d_1(t, s) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \ln\left(\frac{s}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} , \\ d_2(t, s) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \ln\left(\frac{s}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} = d_1(t, s) - \sigma\sqrt{t} , \\ \mathcal{N}(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy . \end{aligned}$$

Remarque 7.2.1 Pour le put européen, la théorie de BS aboutit à la formule de représentation suivante pour la valeur du portefeuille de couverture

$$V_K(t, s) = -s\mathcal{N}[-d_1(T-t, s)] + Ke^{-\rho(T-t)}\mathcal{N}[-d_2(T-t, s)] .$$

Extension au call digital cash or nothing dans le modèle de Samuelson

L'extension de la théorie de BS à un call digital se heurte à un problème de divergence du portefeuille de couverture au voisinage de $(S, t) = (K, T)$. Ce problème s'explique par le fait que, comme le modèle de marché de la théorie de BS est un modèle de marché complet, la replication exacte de l'option implique qu'il faut au voisinage de $(S, t) = (K, T)$ avec $S(t) < K$ produire une richesse égale à D en un laps de temps très court si le cours finit en $S(T) > K$.

Néanmoins, la figure 7.1 montre comment le paiement d'une option digitale peut-être approché arbitrairement près à l'aide de $2n$ calls vanilles, en vendant n calls vanilles au strike $K - D/n$ (n « long call » de prime $V_{K-D/n}(0, S(0))$ donnée par la formule (7.1)) et en achetant n calls vanilles au strike K (n « long call » de prime $V_K(0, S(0))$ donnée par la formule (7.1)). Plus n est grand, meilleure est l'approximation.

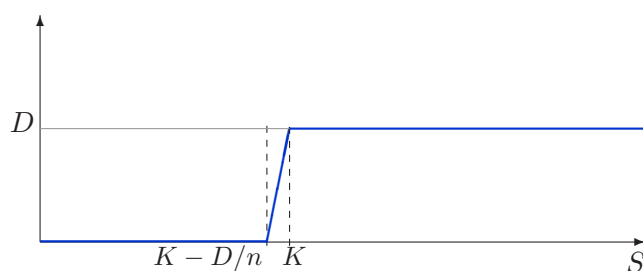


FIG. 7.1 – Approximation d'un call digital à partir de $2n$ call vanille.

Grace à la complétude du modèle de marché la valeur (et par incidence la prime) est également approchée arbitrairement près³ par

$$V_K^D(t, s) = n [V_{K-D/n}(t, s) - V_K(t, s)] .$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$ la valeur obtenue est alors une valeur « exacte » qui s'exprime à partir de la dérivée

³Nous rappelons que, dans un marché complet, la valeur (et la prime) d'une option de paiement $M(S(T))$ peuvent se décomposer comme la somme des valeurs (et des primes) de plusieurs options à partir du moment où le paiement total formé par ces options correspond à $M(S(T))$. Par ailleurs nous avons préféré opter pour une approximation supérieure du paiement afin que la couverture reste assurée.

partielle par rapport au strike K , comme

$$V_K^D(t, s) = -D \frac{\partial V_K(t, S(t))}{\partial K} = D e^{-\rho(T-t)} \mathcal{N}[d_2(T-t, s)] . \quad (7.2)$$

Implémentation de la formule de BS (7.1) et de la formule (7.2)

Pour comparer, dans le paragraphe 7.2.2 à venir, nos primes aux primes $V(0, S(0))$, nous avons implémenté les formules (7.1) et (7.2) à l'aide d'un tableur, mais également à l'aide d'un programme en langage C. Pour ce dernier nous avons utilisé l'approximation de M.Abramowitz and I.A.Stegun [AS64] (algorithme 26.2.17) pour calculer $\mathcal{N}(x)$ à 10^{-7} près pour $x > 0$, à savoir l'approximation

$$\mathcal{N}(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5)$$

avec

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{1+0.2316419x} , & a &= 0.319381530 , & b &= -0.3565633782, \\ c &= 1.781477937 , & d &= -1.821255978 , & e &= 1.3302744429 . \end{aligned}$$

7.2.2 Courbes de primes obtenues avec notre théorie et comparaison avec BS

Courbes de la Valeur $W_k^h(u, 0)$ et de la composition optimale du portefeuille $\check{v}_k^h(u)$ pour différents k .

La figure 7.2 pour le call vanille, et la figure 7.3 pour le call digital, représentent les graphes des fonctions $W_k^h(u, 0)$ et $\check{v}_k^h(u)$ pour $t_k = kh = \{0, 10, 20, 30, 40, 44\}$ dans leurs plans respectifs (u, v) et (u, w) . Ces graphiques ont été produit avec les paramètres par défauts à l'exception du pas de temps h choisi ici égal à 0,1 (au lieu de 1) afin de réduire un peu la présence d'artefacts de discrétisation et de se placer dans des conditions proches de BS.

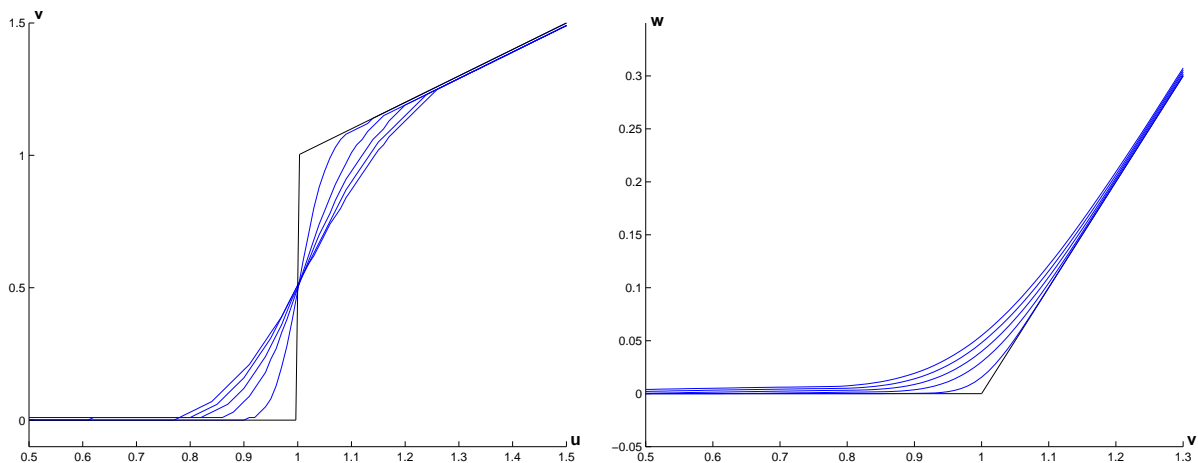


FIG. 7.2 – Call vanille : représentation des fonctions $\check{v}_k^h(u)$ et $W_k^h(u, 0)$ pour $t_k = \{0, 10, 20, 30, 40, 44\}$

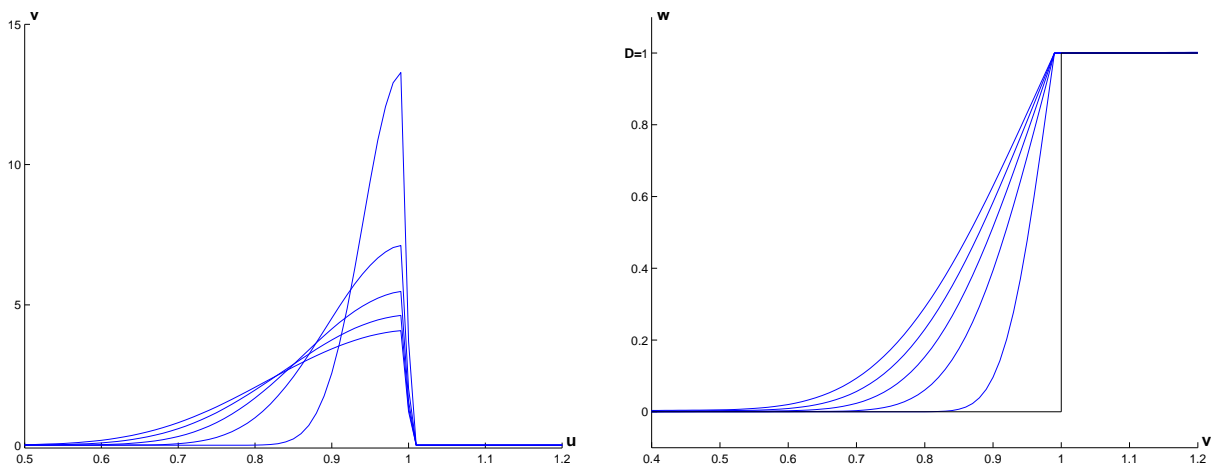


FIG. 7.3 – Call digital : représentation des fonctions $\check{v}_k^h(u)$ et $W_k^h(u, 0)$ pour $t_k = \{0, 10, 20, 30, 40, 44\}$.

Les graphes des fonctions Valeurs $W_k^h(u, 0)$ sont croissants lorsque t_k décroît et lorsque u croît. Pour le call vanille la composition optimale du portefeuille $\check{v}_k(u)$ est croissante avec u (par ailleurs $\check{v}(44, u)$ correspond à la séparatrice représenté sur la figure 3.1 où $[\frac{K}{1+c^+}, \frac{K}{1+c^-}] = [0.9965K, 1.0035K]$) et pour le call digital, dont nous rappelons que $\check{v}(T, u) = 0$ quelque soit $u \in \mathbb{R}^+$, cette fonction n'est ni monotone en k , ni monotone en u . Nous constatons que pour tout t_k , elle possède un maximum pour u tendant vers K par valeur inférieure. Ce pic est d'autant plus important ⁵ que t_k est proche de l'échéance T , et s'explique par le fait qu'il est optimal pour le trader de posséder une quantité importante d'actif sous-jacent afin de pouvoir amener son portefeuille à une valeur $w(T) \geq D$ si le cours venait à croître légèrement jusqu'à $u(T) \geq K$.

Pour $t_k = 0$, ces graphes représentent respectivement en fonction du cours initial u_0 , l'investissement (achat) initial $\check{v}_0(u_0)$ en actif sous-jacent (ce qui montre que la stratégie du trader passe par un saut initial) et la prime actualisée $P(u_0) = W_k^h(u_0, 0)$.

Comparaison avec la théorie de F.Black et M.Scholes (BS)

Sur la figure 7.4, nous comparons pour le call vanille la prime obtenue par notre théorie pour les coûts par défaut ainsi qu'en absence de coûts de transaction (les deux courbes en trait plein ⁶) avec celles obtenues à l'aide des formules de BS (les courbes en pointillés) pour les volatilités

$$\sigma = \{ 0.05, 0.08, 0.1, 0.2, 0.3 \} . \tag{7.3}$$

⁴Nous avons $\check{V}(t, u) = (0, 0)^t$ pour $u < u_g(t)$ avec $u_g(T) = K$, et $\check{V}(t, u) = (0, D)^t$ pour $u \geq u_d(t)$ avec $u_d(T) = K$.

⁵Ce dernier est toutefois nécessairement borné par D/C^+ comme cela a été mis en évidence dans la preuve de la proposition 1.6.2.

⁶La courbes en présence de coûts de transaction étant évidemment celle située au dessus par rapport à l'axe des w .

Pour que le lecteur puisse se repérer facilement sur la figure 7.4, nous rappelons que la prime de BS (sous-entendu pour une option vanille) est croissante avec la volatilité ⁷ σ .

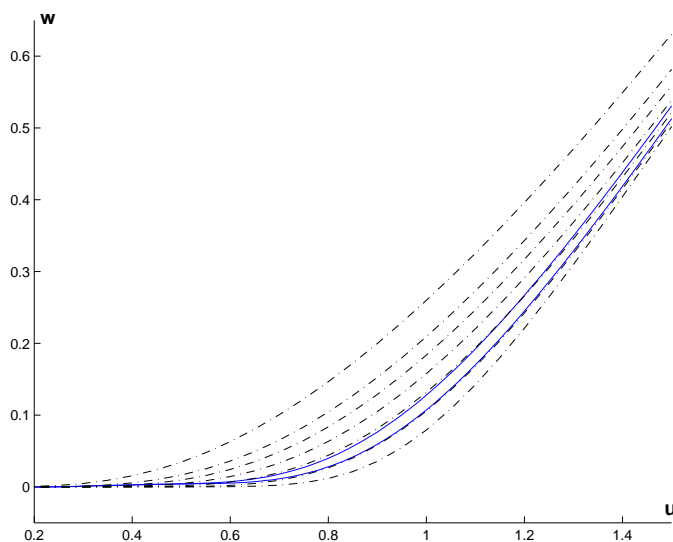


FIG. 7.4 – Comparaison avec la prime de BS pour le call vanille .

L'apparence générale de nos primes est très semblable à celles obtenues par la théorie de BS. Cette correspondance peut-être vue comme une conséquence du théorème de convergence (théorème 6.3.1) allié au fait que pour des options à paiement convexe notre théorie en temps discret coïncide avec celle de CRR en l'absence de coûts de transaction (voir la propriété 6.1.4), qui elle-même tend vers la prime de BS pour des pas de temps petits. L'effet des coûts de transaction fait paraître la prime plus grande. Nous constatons que notre courbe de prime en absence de transaction est assez proche de celle de BS avec ⁸ $\sigma = 0.04$.

Une différence significative entre notre théorie et celle de BS est susceptible d'intervenir pour les options à paiement non convexe, donc notamment pour les options digitales. En effet, comme le système d'EDP (5.3) est du premier ordre, la discontinuité de la Valeur au bord $N(u(T), v(T))$ (provenant de la discontinuité de la fonction de paiement $M(u(T))$) se propage en temps retrograde, tandis que l'EDP du second ordre intervenant dans la théorie de BS conduit à une solution régulière pour tout instant $t \in [0, T[$ antérieur à la date d'exercice. Cependant compte tenu de notre procédure d'interpolation, nos calculs numériques ne montrent pas ces chocs.

La figure 7.5, montre une comparaison entre nos primes (avec les coûts par défaut et en absence de coûts) à celles obtenues par extension de la théorie de BS (formule (7.2)) pour les différentes valeurs (7.3) de la volatilité.

Remarque 7.2.2 *Nous constatons que pour un call digital, la prime n'est plus monotone avec la volatilité. En effet, pour des valeurs faibles du cours initial u_0 (par rapport à k), plus l'actif est volatil, plus*

⁷Cette propriété peut être vue comme une conséquence de l'inégalité de Jensen.

⁸Ce qui est dans le cas présent en accord avec le lien indirect (7.4) évoqué ultérieurement entre la volatilité dans le modèle de BS et nos bornes.

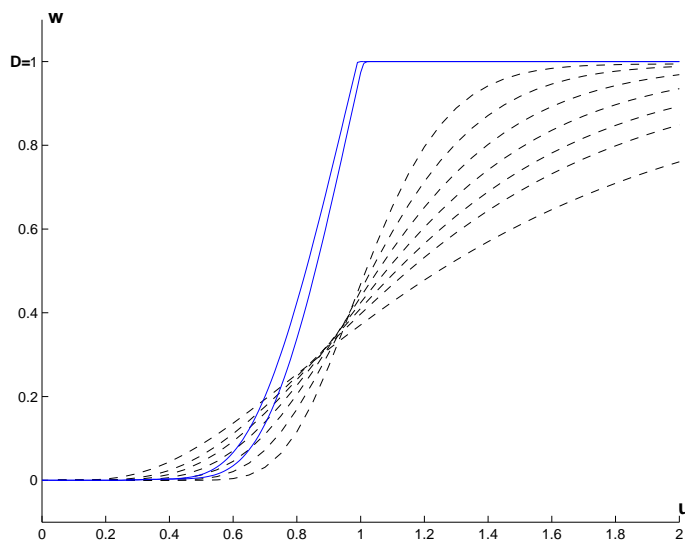


FIG. 7.5 – Comparaison avec la prime obtenue par extension de BS pour le call digital .

la probabilité que $u(T) \geq K$ soit atteint est grande (c'est à dire la probabilité pour le trader de devoir D au souscripteur). Pour les petits u_0 la prime est donc croissante avec la volatilité. Au contraire si u_0 est grand devant K , un actif plus volatil donne une probabilité plus grande au trader de ne rien devoir à son souscripteur (à savoir que $u(T) < K$), et donc pour des u_0 grands la prime est décroissante avec la volatilité.

Nous constatons une différence significative entre nos courbes de prime et celles de BS. Pour $u > K$ notre approche par commande robuste donne une prime triviale égale à D , alors que la prime obtenue à l'aide de la formule dérivée de BS (7.2) aboutit à une prime bien inférieure (au prix toutefois d'un portefeuille qui diverge au voisinage de $(t, u) = (T, K)$).

7.2.3 Un point sur la vérification numérique de la convergence

Difficulté à réaliser une vérification numérique pour le call digital

Pour vérifier numériquement la convergence de manière décroissante monotone de la Valeur du jeu en temps discret vers celle en temps continu lorsque le pas de temps tend vers 0, il nous faut implémenter la résolution numérique du système d'EDP (5.3) de la théorie en temps continu. Nous avons opté pour un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 en temps et un schéma de différences finies centré en espace.

Dans le cas du call vanille, pour lequel le « découpage » des différentes variétés singulières de dimension 2 (dispersion, équivoque, focale) se fait seulement par rapport au temps dans la région d'intérêt (voir par exemple la figure 3.8), nous avons pu faire cette vérification. L'article [BEFT06] expose les courbes de $\check{v}(0, u)$ et $\check{w}(0, u)$ obtenues en temps continu et en temps discret pour un call vanille en absence de coûts de clôture (pour un jeu de paramètres différent de celui par défaut). Cependant pour le call digital, l'implémentation de la théorie en temps continu devient très délicate

en raison de la dépendance conjointe en (t, u) des régions dans lesquelles interviennent les variétés équivoques \mathcal{E}^+ , \mathcal{E}^- et la variété focale \mathcal{F} (voir par exemple la figure 4.7). Pour cette raison nous n'avons pas réalisé cette implémentation à l'heure actuelle (et donc la convergence n'a pas été confirmée numériquement).

Une propriété importante concernant la stratégie

Propriété 7.2.1 *Une conséquence du théorème de convergence est que nous pouvons approcher arbitrairement près la valeur du portefeuille de couverture de la théorie en temps continu en utilisant une stratégie de transaction discrète, si le trader est autorisé à faire des transactions à une fréquence suffisamment grande (c'est-à-dire si le pas h est suffisamment petit). L'algorithme rapide en temps discret fournit une bonne approximation de la solution (prime et stratégie) du problème en temps continu et ainsi toute stratégie en temps continu peut être approchée par une stratégie en temps discret, donc applicable en pratique, ce qui règle en plus le problème de la dépendance instantanée en τ de la stratégie (3.79) (ce que nous avons évoqué dans la propriété 3.7.2).*

Une remarque essentielle

Il peut sembler étrange au lecteur que pour les options vanilles et en absence de coût de transaction, nous retrouvons la solution de CRR en temps discret (propriété 6.1.4) alors qu'en temps continu nous obtenons une stratégie naïve et non la solution de BS.

L'explication de ce phénomène est le suivant. Contrairement au processus de limite classique $\text{CRR} \rightarrow \text{BS}$, notre convergence s'établit sans changer de modèle d'actif au fur et à mesure que l'on réduit le pas de temps (puisque le modèle de marché en temps discret est un échantillonnage du modèle de marché en temps continu), c'est-à-dire que $\tilde{\tau}^-$ et $\tilde{\tau}^+$ demeurent fixes dans le temps. En effectuant un développement limité à l'ordre 1 de l'exponentielle au voisinage de 0, la relation (1.39) montre que $\forall \varepsilon \in \{+, -\}$, $\tilde{\tau}_h^\varepsilon$ se comporte comme $h\tilde{\tau}^\varepsilon$ quand $h \rightarrow 0$. Par analogie avec la dynamique de CRR (1.4), nous avons dans notre modèle $u - 1 = \tilde{\tau}_h^+ \simeq h\tilde{\tau}^+ + o(h)$ et $d - 1 = \tilde{\tau}_h^- \simeq h\tilde{\tau}^- + o(h)$ qui convergent vers 0 en h et non en \sqrt{h} comme dans le processus de limite $\text{CRR} \rightarrow \text{BS}$. Un arbre binaire converge vers un mouvement brownien si le pas d'espace convergence vers 0 comme la racine du pas de temps. Notre convergence étant plus rapide nous ne retrouvons pas ce phénomène.

7.2.4 Des liens indirects entre le modèle de marché à intervalles et le modèle de diffusion géométrique

Modélisation du cours de l'actif sous-jacent

Bien qu'il n'y ait aucune probabilité sur les trajectoires du cours de l'actif sous-jacent dans le cas du modèle de marché à intervalles (définition 1.2.1), il existe un lien indirect entre le modèle de marché à intervalles en temps continu et le modèle de diffusion géométrique classique (1.3) utilisé dans la théorie de F.Black et M.Scholes (BS), et particulièrement entre les bornes $\tilde{\tau}^-$, $\tilde{\tau}^+$ et la volatilité σ de l'actif sous-jacent.

Pour faire ce lien, nous interprétons tout d'abord la fonction (la variation du cours) $t \rightarrow \tilde{\tau}(t) \in [\tilde{\tau}^-, \tilde{\tau}^+]$ comme une perturbation (un aléa) d'amplitude bornée⁹. Posons

$$\mu = \frac{\tilde{\tau}^+ + \tilde{\tau}^-}{2}, \quad \sigma = \frac{\tilde{\tau}^+ - \tilde{\tau}^-}{2}, \quad \nu = \frac{\tilde{\tau} - \mu}{\sigma}. \quad (7.4)$$

Ainsi toute trajectoire de prix vérifiant l'hypothèse (1.8), équivalente à l'hypothèse (1.7) énoncée en termes différentiels, peut être représentée par le système

$$\dot{S} = (\mu + \sigma\nu)S \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma(\nu dt). \quad (7.5)$$

Dans l'équation (7.4), la quantité μ représenterait la moyenne de la perturbation $\tilde{\tau}$, ce qui n'est pas vraiment satisfaisant puisque $\tau^+ > 0$ et $\tau^- < 0$ représentent des variations extrémales, et ne donnent aucune tendance sur la variation moyenne de l'actif. En particulier, $|\tau^-| > \tau^+$ n'implique pas que le cours baisse en moyenne, mais que les variations importantes du cours sont susceptibles d'intervenir plus « à la baisse » qu'« à la hausse ». La variable centrée ν est une fonction du temps mesurable satisfaisant $|\nu(t)| \leq 1$. Ainsi ν peut être vue comme une perturbation normalisée, νdt remplace dans une certaine mesure le mouvement brownien $dW(t)$ dans le modèle de diffusion géométrique classique (dans l'équation (1.3)), et σ joue le rôle de la volatilité.

La théorie de F.Black et M.Scholes sans probabilités [Ber03, Ber05b]

Les trajectoires engendrées par le modèle de diffusion géométrique (1.3) appartiennent presque sûrement, indépendamment de la dérive μdt , à l'ensemble $\tilde{\Psi}$ des trajectoires à variation quadratique bornée et connue [Ber03, Ber05b] :

$$\tilde{\Psi} = \left\{ S(\cdot) \in \mathcal{C}^0 \mid \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S(t_{k+1}) - S(t_k)}{S(t_k)} \right)^2 = \sigma^2 t \right\},$$

où, sans perte de généralités, on peut se limiter à des divisions régulières du pas de temps, avec $t_k = \frac{kt}{N}$ où N est la nombre de subdivisions (donc avec $(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$). Pour plus de généralité et plus de détails, le lecteur peut se reporter à [Ber03].

Dans [Ber03], il est prouvé que sans probabiliser les trajectoires de l'ensemble $\tilde{\Psi}$ ci-dessus, une approche par commande robuste du problème d'évaluation d'option vanille (en absence de coûts de transaction) sur l'ensemble des trajectoires $\tilde{\Psi}$ permet de retrouver la prime de la théorie de BS. Ainsi la théorie de BS peut se développer sans faire usage des probabilités et cette propriété vient renforcer l'idée que notre approche à un sens. Ce résultat s'explique par le fait (prouvé dans [Ber03]) que le terme de Itô apparaît de manière déterministe si l'on suppose les trajectoires du mouvement brownien à variation quadratique bornée. Cette propriété est un cas particulier du lemme de Föllmer [Föll81] qui montre que le calcul de Itô peut s'effectuer sans probabilités. En conclusion, ce n'est pas l'abandon des probabilités au profit d'une approche par commande robuste qui est la différence majeure entre la théorie de BS et la nôtre, mais le choix de l'ensemble des trajectoires possibles $\tilde{\Psi}$ pour décrire le cours

⁹Cette interprétation de la fonction $t \rightarrow \tilde{\tau}(t)$ est juste un dispositif mathématique.

de l'actif sous-jacent.

Remarque 7.2.3 *Si l'on remplace l'ensemble $\tilde{\Psi}$, par l'ensemble des fonctions continues à variation bornée alors, en absence de coûts de transaction, une approche par commande robuste conduit à une solution naïve appelée « stop loss », qui n'est pas satisfaisante en présence de coûts de transaction. Pour plus de détails sur cette solution naïve, le lecteur peut se reporter à [Ber03].*

7.3 Forces et faiblesses de notre théorie. Comparaison avec la théorie de BS

7.3.1 Les limites majeures de chacune des deux théories, au plan strictement mathématique

Notre théorie

Une des principales limites de notre théorie provient du fait que le modèle de marché à intervalles est un modèle de marché incomplet au sens de la théorie financière, menant à une couverture en terme de super-réplication et à un prix auquel le trader souhaite vendre, et non à un prix d'équilibre. Il résulte de cette incomplétude que dans notre théorie la prime d'un ensemble d'options ne peut être obtenue comme la somme des primes de chacune des options qui le composent. Autrement dit, couvrir un ensemble d'options n'est pas identique à couvrir ces options séparément. Par exemple, notre théorie conduira à l'absence de relation de parité call-put.

La principale difficulté (faiblesse) réside dans le caractère peu réaliste de l'hypothèse de notre modèle de marché (1.7) qui exclut d'emblée des variations de prix rapides du cours de l'actif sous-jacent. Ainsi il est nécessaire de se faire une opinion sur l'efficacité (la robustesse) de la stratégie de couverture préconisée par commande robuste, en présence de variations du cours qui violent l'hypothèse (1.7). Cette étude fera l'objet du paragraphe 7.4. Nous verrons que cette difficulté se transforme sous la forme de l'interrogation suivante : comment déterminer empiriquement au mieux les bornes τ^- et τ^+ à adopter pour l'actif sous-jacent considéré ?

En effet si nous choisissons des bornes $\tau^- < 0$, $\tau^+ > 0$ suffisamment grandes en valeur absolue pour permettre au modèle de marché d'être (presque) toujours satisfait, alors ce choix n'est pas raisonnable car il conduit à une prime beaucoup plus grande que nécessaire pour assurer la couverture¹⁰ (le trader n'est pas compétitif sur le marché). Il s'agit d'un fait classique étant donné que le modèle de marché à intervalles est un modèle de marché incomplet, nous avons recours à une super-réplication pouvant conduire à une prime potentiellement plus grande que nécessaire. Au contraire, si nous choisissons des bornes trop petites en valeur absolue, la couverture ne sera (presque) jamais assurée en raison des fréquentes violations de l'hypothèse du modèle de marché, qui engendreront au final une perte pour le trader. Par conséquent, nous obtiendrons une prime réaliste en tolérant des violations du modèle de marché mais pas trop régulières, pour que la couverture reste assurée.

¹⁰Compte tenu de l'approche en terme de commande robuste (de l'absence de notion d'optimalité de la part du cours) le trader obtient un gain à chaque fois que la variation du cours se situe entre les deux bornes $\tilde{\tau}^-$ et $\tilde{\tau}^+$ sans correspondre à la pire des variations.

Une autre limite probable du modèle est l'extension à des options exotiques (que nous n'avons à l'heure actuelle pas étudiées). Nous pouvons toutefois affirmer que leur étude est notablement plus compliquée que celle des options vanilles et digitales. Par exemple, pour une option arc-en-ciel portant sur I actifs sous-jacents différents de cours $u_i(t)$, $i = \{1, \dots, I\}$, la dimension de l'espace d'état deviendrait probablement de $2I + 1$ plus temps (variables d'états $(u_{i=1\dots I}, v_{i=1\dots I}, w)$). Il faudrait en outre, pour que cette étude ait un sens, introduire des couplages entre les différents actifs (l'équivalent d'une matrice de covariance), ce qui n'est pas facile à traduire dans le modèle de marché à intervalles.

La théorie de BS

La théorie de BS possède également ses propres lacunes théoriques. D'une part, elle suppose fondamentalement que les transactions se font en temps continu et sans retard. Il est impossible, dans le modèle de Samuelson, d'atteindre la couverture si les transactions ne se font pas en continu, excepté avec le trivial et trop coûteux portefeuille $v = u$ (pour un call vanille). Ce problème vient du fait que le modèle de Samuelson peut afficher des variations arbitrairement grand en un temps fini, ce qui rend toute couverture réaliste impossible. D'un autre côté, avec le modèle de Samuelson, « il n'existe pas de portefeuille de couverture non trivial pour l'évaluation d'options en présence de coûts de transaction » [SSC95]. Ce second problème, provient du fait étroitement lié que, ce modèle possède presque sûrement des trajectoires de variation totale non bornée (ce qui, en soi, pourrait être considéré comme peu réaliste). Si le cours se met à « osciller » avec des variations importantes, le trader se ruine en coûts de transactions. Comme les transactions réelles se font en temps discret, cela entraîne un décalage entre la théorie de BS et la pratique. Ce décalage importe peu tant que le cours de l'actif sous-jacent ne change pas trop vite. Mais quand des variations importantes ont lieu, ce décalage devient fatal (le modèle de portefeuille se trouve violé).

Conclusion

En conséquence, les deux théories possèdent leurs propres lacunes, et échouent notamment dans un même circonstance, à savoir en cas de crash ou de boom de cours (dans notre théorie le modèle de marché se trouve violé, et dans la théorie de F.Black et M.Scholes, c'est la modèle de portefeuille qui échoue).

Pour aller plus loin dans cette comparaison, il convient de distinguer ces résultats énoncés au sens strictement mathématique, de ce qui applicable en pratique grâce à une certaine robustesse de la solution théorique. De ce point de vue, la théorie de BS se trouve être performante. En effet, en pratique la théorie de BS et la stratégie de transaction sous-jacente peuvent être utilisées en temps discret à condition que les transactions soient assez fréquentes. Par ailleurs, des coûts de transaction faibles peuvent également être tolérés, et en outre, une approximation d'une couverture exacte peut être développée à l'aide du concept des limites de diffusion [ADGS98]. Cette dernière affirmation ne contredit pas le propos de [SSC95]. Ce sont des caractéristiques de robustesse de cette théorie à l'égard de faibles violations des hypothèses.

Dans le paragraphe 7.4, nous proposons des simulations numériques permettant de nous faire une opinion sur la robustesse de notre théorie (de notre stratégie de couverture) à l'égard de l'hypothèse (1.7) du modèle de marché.

7.3.2 Nos motivations pour l'introduction du modèle de marché à intervalles

Mathématiquement, il est impossible de concilier un modèle qui permet des variations de prix de l'actif sous-jacent arbitrairement grandes dans un délai d'un pas de temps avec une couverture en temps discret. Une théorie mathématique doit ainsi renoncer à l'une de ces deux fonctionnalités. Nous voulions développer une théorie de transaction en temps discret avec un modèle de marché compatible avec un modèle en temps continu (c'est-à-dire, où le pas de temps soit en réalité un pas d'échantillonnage), de sorte à obtenir la convergence de la solution d'une théorie en temps continu vers celle d'une théorie en temps discret sans changer de modèle de marché à chaque pas de temps contrairement à la convergence CRR→BS. Ainsi, nous avons dû renoncer à un modèle qui permettrait des variations de prix arbitraires en un seul pas de temps. Pourtant, nous voulions un modèle moins irréaliste que celui de CRR et qui ne dépende pas du pas de temps. Ainsi nous avons été amené à utiliser le modèle d'intervalle, au prix de renoncer à un modèle de marché complet. Et il n'est pas étonnant que d'autres auteurs [Puj00, APSP05, Kol98, Kol01, RES05b, RES05a] utilisent un modèle identique.

Passons maintenant à la question des coûts de transaction, qui sont un ingrédient naturel de notre théorie, puisque ceux-ci sont pris en compte directement dans l'équation d'autofinancement du portefeuille. Ceux-ci sont par ailleurs un ingrédient nécessaire de notre théorie avec un trading en temps continu, puisque sans eux la solution se trivialisait en une solution naïve (voir le paragraphe 3.1 pour le call vanille et le paragraphe 4.1 pour le call digital). Cependant la théorie en temps discret subsiste en absence de coûts de transaction, et en pratique les transactions se font en temps discret. Cela contraste avec la théorie de BS dans laquelle seuls des petits coûts de transaction ont pu être (difficilement) pris en compte en utilisant des limites de diffusion [ADGS98]. Enfin, une fois que les coûts de transaction sont introduits, il est tout naturel de penser qu'il y a également des coûts de clôture. L'introduction de ces coûts (dans le coût terminal du trader) crée une différence entre une clôture en espèce et en nature. Si cette différence est considérée comme une gêne, les frais de clôture peuvent être retirés en fixant c^- et c^+ à zéro, sans aucune incidence sur notre théorie.

7.4 Étude de la robustesse du modèle de marché à intervalles

Dans le paragraphe 7.3.1, nous avons expliqué les raisons qui nous poussent à étudier la robustesse de la stratégie de couverture en présence de trajectoires violant l'hypothèse du modèle de marché.

Nous allons constater que la théorie d'évaluation d'option du modèle de marché à intervalles exhibe un certain degré de robustesse, à l'instar de la théorie de BS, affiché par les expériences numériques suivantes.

7.4.1 Avec des intervalles plus larges munis d'une loi de probabilité

Le principe de cette étude

Dans une première série d'expériences, nous supposons que le taux $\tau = \frac{u_{k+1}-u_k}{u_k}$ obéit à une certaine loi de probabilité sur un support compact $[\sigma^-, \sigma^+]$ plus large que l'intervalle $[\tau^-, \tau^+]$ utilisé pour déterminer la stratégie de couverture par commande robuste, notée ξ^* . Nous calculons alors le coût

total obtenu en utilisant cette stratégie ξ^* sous cette nouvelle hypothèse pour le modèle de marché. Ce calcul à été fait à l'aide de l'équation discrète de Kolmogorov plus précise (ou plus rapide) qu'une simulation de type Monté-Carlo. L'implémentation est très simple. L'algorithme de programmation dynamique (6.4) se transforme en

$$\begin{cases} W_{k^+}^h(u, v) &= \mathbb{E}_\sigma[W_{t+1}((1 + \sigma)u, (1 + \sigma)(v + \xi_t^*) - \sigma(v + \xi_t^*))] \\ W_k^h(u, v) &= W_{t+\frac{1}{2}}^h(u, v) + C_t^\varepsilon \xi_t^* \end{cases} \quad (7.6)$$

Dans l'algorithme (7.6), l'évaluation de l'espérance mathématique \mathbb{E} se fait à chaque pas via la méthode des trapèzes.

Pour la loi de probabilité de τ sur le support compact $[\sigma^-, \sigma^+]$, deux loi différentes ont été considérées :

- Une loi uniforme (qui correspond à une vision pessimiste dans le cas des options à paiement convexe).
- Une loi « triangulaire », dont la densité est une fonction affine par morceaux, nulle à chaque point extremal $\tau = \sigma^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, et maximum en $\tau = 0$.

Remarque 7.4.1 *Pour ces deux lois de probabilité l'intégrale par la méthode des trapèzes se calcule explicitement.*

Le support compact $[\sigma^-, \sigma^+]$ est choisi sous la forme

$$\sigma^\varepsilon = (1 + \Delta)\tau^\varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in \{+, -\} \text{ avec } \Delta \geq 0. \quad (7.7)$$

La quantité Δ sera appelée « débordement ». Nous comparons alors

- La prime $P(u_0)$ obtenue à l'aide de l'approche par commande robuste sur l'intervalle $[\tau^-, \tau^+]$.
- Le coût total prévu, noté $Q_\Delta(u_0)$, avec τ réparti sur $[\sigma^-, \sigma^+]$ (muni des deux lois de probabilité considérées) pour différentes valeurs de Δ (voir l'équation (7.7)).

Remarque 7.4.2 *Lors de l'implémentation, le nombre de points de support sur l'intervalle $[\sigma^-, \sigma^+]$ a été choisi croissant avec Δ et de sorte que le pas entre deux points de support reste constant. Nous avons pour cela choisi*

$$1000(1 + \Delta)(\tilde{\tau}^+ - \tilde{\tau}^-) = 80(1 + \Delta) \text{ points de support}$$

avec Δ variant de 0 à 3 par pas de 0,01 donc un nombre de points de support variant de 80 à 320 par pas de 4.

Application au call vanille

Pour le call vanille avec paiement en nature le résultat de cette comparaison est visible sur la figure 7.6 pour la loi uniforme et sur la figure 7.7 pour la loi triangulaire, où nous avons superposé $P(u_0)$ et $Q_\Delta(u_0)$ pour un nombre restreint de valeurs de Δ (pour une question de lisibilité). Sur la

figure 7.6 (respectivement sur la figure 7.7), la courbe $Q_{\Delta}(u_0)$ avec $\Delta = 0.85$ (respectivement $Q_{\Delta}(u_0)$ avec $\Delta = 1.62$), bien que non représentée ici pour des questions de lisibilité, peut difficilement être distinguée de $P(u_0)$.

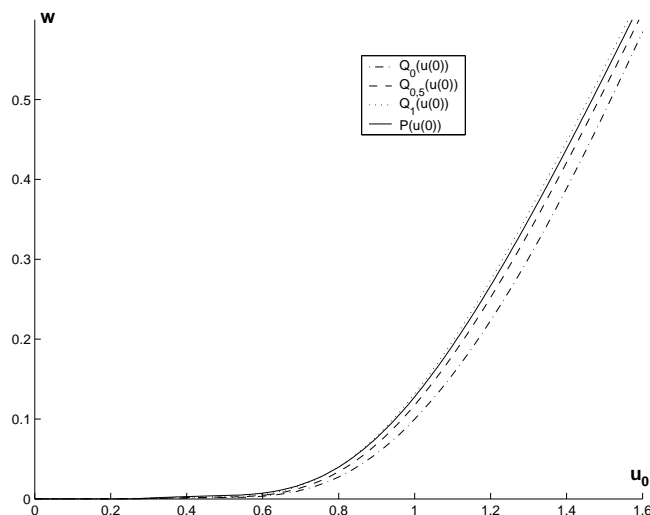


FIG. 7.6 – Call vanille et loi uniforme : comparaison entre la prime $P(u_0)$ et le coût total $Q_{\Delta}(u_0)$ pour différents valeurs du débordement Δ .

En complément, sur la figure 7.8 nous avons tracé pour $u_0 = K$ la différence $P(K) - Q_{\Delta}(K)$ en fonction de la valeur du débordement Δ , pour chacune des deux loi de probabilité (uniforme ou triangulaire) étudiées sur le support compact $[\sigma^-, \sigma^+]$, montrant (sans surprise à l'égard de la figure 7.6 et de la figure 7.7), que pour jusqu'à un « débordement » de 85% pour la loi uniforme, et de 162% pour la loi triangulaire, le résultat attendu reste positif pour le trader, à savoir que la couverture reste assurée en espérance. Autrement dit, dans le cas d'une loi uniforme nous pouvons ignorer jusqu'à 46% des données extrêmes, et dans le cas d'une loi triangulaire jusqu'à 62% des données extrêmes, pour fixer l'intervalle $[\tau^-, \tau^+]$.

Sur les figures 7.6 et 7.7, nous remarquons que les allures (la croissance) des courbes $P(u_0)$ et $Q_{\Delta}(u_0)$ sont assez similaires. Il en résulte que pour tout valeur de u_0 , le tracé de la différence $P(u_0) - Q_{\Delta}(u_0)$ conduira à des valeurs voisines de 85% et 162% pour les débordements maximum respectifs préservant la couverture.

Application au call digital

Nous avons fait également cette même étude de robustesse pour le call digital. La comparaison entre la prime $P(u_0)$ et le coût total $Q_{\Delta}(u_0)$ pour trois valeurs différentes du débordement Δ sont visibles sur la figure 7.9 pour la loi uniforme sur le support compact $[\sigma^-, \sigma^+]$ et sur la figure 7.10 pour la loi triangulaire. Pour chacune de ces deux figures, nous avons montré deux tracés. Le tracé de droite étant destiné à étudier le comportement pour les grands u .

Nous constatons, au contraire du call vanille, des différences significatives entre $P(u_0)$ et $Q_{\Delta}(u_0)$.

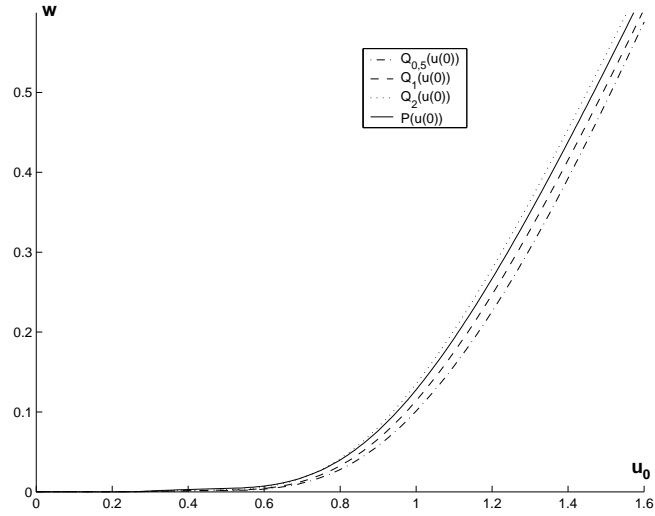


FIG. 7.7 – Call vanille et loi triangulaire : comparaison entre la prime $P(u_0)$ et le coût total $Q_\Delta(u_0)$ pour différents valeurs du débordement Δ .

Pour $u_0 \geq u_- \gtrsim K = 1$, la Valeur du jeu \mathcal{G}^h est triviale $W_0(u_0, v_0) = D - C^-v_0$ et la prime égale à $W_0(u_0, 0) = D$ (voir la propriété 6.2.4), alors que le coût moyen $Q_\Delta(u_0)$ est moins important puisque qu'il existe des variations de prix telle que $u(T) < K$, où le paiement est 0. La présence d'un premier pic de $Q_\Delta(u_0)$ au voisinage de K pourrait s'expliquer par le fait que c'est pour $u_0 \lesssim K$ que l'investissement en actif sous-jacent v_0 est le plus grand (voir la figure 7.3), c'est-à-dire là où une baisse du cours engendre un coût significatif pour le trader (cette baisse serait moins compensée par les hausses que pour les u_0 voisins).

Il est plus facile d'expliquer le comportement du coût moyen $Q_\Delta(u_0)$ pour les grandes valeurs de u_0 (figures de droites). Lorsque u_0 est suffisamment grand, moins l'intervalle $[\sigma^-, \sigma^+]$ est large et plus le coût moyen $Q_\Delta(u_0)$ est grand, car l'espérance que le cours finisse en dessous de K (et donc que le trader ne doive rien au souscripteur) est plus faible. Nous retrouvons ce résultat sur la figure 7.9 et sur la figure 7.10 pour $u_0 > 2$. Par ailleurs quelque soit la largeur de l'intervalle $[\sigma^-, \sigma^+]$, pour tout $u_0 > Ke^{-\sigma^-T}$ (cette valeur est croissante avec Δ) le cours finira en $u(T) \geq K$ avec une probabilité 1, c'est-à-dire que le coût moyen $Q_\Delta(u_0)$ sera égal au paiement D . Il est donc rassurant de voir sur ces deux figures le coût moyen augmenter et tendre vers $D = 1$ pour les u_0 grands (pour $\Delta = 1$, cette valeur de u_0 est très grande devant 3, mais on devine toutefois le comportement).

Nous avons complété cette étude de la robustesse par le tracé, sur la figure 7.11, de la différence $P(0, 8K) - Q_\Delta(0, 8K)$ en fonction du débordement, afin de calculer le degré de robustesse pour $u_0 = 0, 8K$.

Pour $u_0 = 0, 8K$, la figure 7.11 montre que jusqu'à un débordement de 77% pour la loi uniforme et de 152% pour la loi triangulaire, la couverture reste assurée. Comme l'allure des courbes $P(u_0)$ et $Q_\Delta(u_0)$ sont très différentes (figure 7.9 et figure 7.10), les valeurs des débordements maximum pour lesquelles la couverture reste assurée sont très variables avec u_0 . En particulier pour $u_0 > u_-$, où la prime est triviale et égale à D , donc à fortiori supérieure au coût moyen quelque soit Δ ($P(u_0) - Q_\Delta(u_0) \geq 0$,

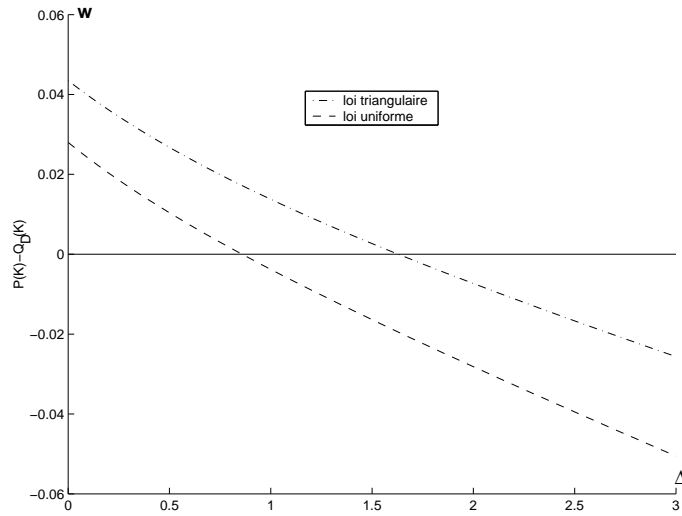


FIG. 7.8 – La différence $P(K) - Q_{\Delta}(K)$ en fonction du débordement Δ .

le débordement maximum devient infini.

7.4.2 Avec des suites de cours réelles et simulées

Pour évaluer d'une manière différente la robustesse de la stratégie de couverture à l'égard de l'hypothèse du modèle de marché à intervalles, nous proposons une (ébauche d'une) seconde série d'expériences, réalisées à partir de données réelles et de suites de cours simulées suivant une loi log-normale. Les cours réels sont des historiques journaliers de cours à la clôture de la bourse sur une période de $T = 44$ jours boursiers. Les suites (de 44 valeurs) de cours simulés suivant une loi log-normale¹¹ ont été choisies de moyenne $\mu = 0$ et de volatilité $\sigma = 0.01$ et $\sigma = 0.1$. Ces expériences ont été réalisées à partir de l'algorithme rapide (voir page 253), donc uniquement pour un call vanille à l'égard de la propriété 6.2.4.

Détail de la procédure utilisée

À partir de ces données, nous avons calculé la suite des τ journaliers correspondants (appelé ici échantillon), puis nous avons choisi des ensembles d'intervalles $[\tau^-, \tau^+]$ successifs les moins larges possibles, destinés à contenir une proportion p de moins en moins grande de réalisations de τ sur cet échantillon. Les quantités τ^- et τ^+ ont ainsi été à chaque fois choisies égales à des réalisations de τ , et les intervalles ont par ailleurs tous été choisi de telle sorte que le nombre d'occurrences de $\tau < \tau^-$ soit le même que le nombre d'occurrences de $\tau > \tau^+$. Pour cela nous avons ordonné les $T - 1 = 43$ réalisations de τ selon une liste $L(i)$, $i = 1 \dots T - 1$ et choisi :

$$\tau^-(i) = L(i) \quad \text{et} \quad \tau^+(i) = L(T - i) ,$$

¹¹Une situation idéalement favorable à la théorie de F.Black et M.Scholes, fondée sur cette hypothèse pour le modèle de marché.

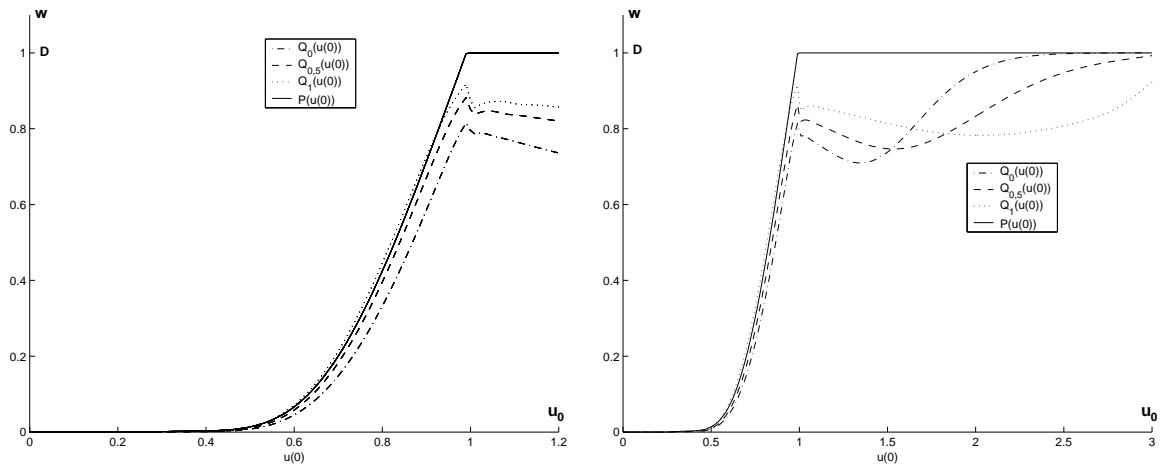


FIG. 7.9 – Call digital et loi uniforme : comparaison entre la prime $P(u_0)$ et le coût total $Q_\Delta(u_0)$ pour différents valeurs du débordement Δ .

où $i = \{0, 1 \dots\}$ fixe la proportion

$$p = 2 * (i - 1) * 100/43$$

de réalisations de τ en dehors de l'intervalle. Nous avons itéré cette procédure jusqu'à la première valeur de i (exclue) pour laquelle $\tau^-(i)$ et $\tau^+(i)$ deviennent de même signe.

Les suites des cours utilisées ainsi que la liste des réalisations de τ correspondantes (non ordonnées et ordonnées) sont données dans l'annexe C.

Pour chacun de ces intervalles $[\tau^-, \tau^+]$, nous calculons la prime $P(K)$ (c'est-à-dire la prime pour un prix d'exercice $K = u_0$) obtenue par commande robuste ainsi que la stratégie de couverture ξ^* préconisée par notre théorie. Ensuite, nous simulons sur l'historique du cours l'effet de cette stratégie $\xi_k^* = \check{v}_k(u_k) - v$, $k \in \{0, \dots, \mathbb{K}\}$, destinée à couvrir l'option proposée (assise sur l'actif sous-jacent dont l'historique de cours sur la période $[0, T]$ est justement celui étudié) et nous calculons

→ le coût total pour le trader (6.1)

$$N(u_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}}) + \sum_{l \geq k} (-\tau_l(v_l + \xi_l^*) + C^{\varepsilon_l} \xi_l) .$$

Quand le coût total est supérieur à la prime $P(u_0) = P(K)$, cela signifie si le trader agit selon notre théorie (propose l'option à un tarif $P(K)$ et applique la stratégie $\{\xi_k^*\}_k$ par commande robuste préconisée pour l'intervalle $[\tau^-, \tau^+]$), alors ce le trader perd de l'argent (la couverture n'est pas assurée).

En complément de ce test, nous calculons, à partir de l'historique de cours proposé, une volatilité historique empirique pour l'actif sous-jacent. Soit une suite de cours $S(t_k)$ avec $t_k = kh$, $t_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}h = T$ et $k = 0 \dots \mathbb{K}$ alors une estimée $\hat{\sigma}$ de la volatilité dans le modèle de Samuelson (1.3) est

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{t_{\mathbb{K}-1}} \sum_{k=0}^{\mathbb{K}-1} \left[\ln \left(\frac{S(t_{k+1})}{S(t_k)} \right) - \frac{1}{\mathbb{K}} \ln \left(\frac{S(t_{\mathbb{K}})}{S_0} \right) \right]^2 \quad (7.8)$$

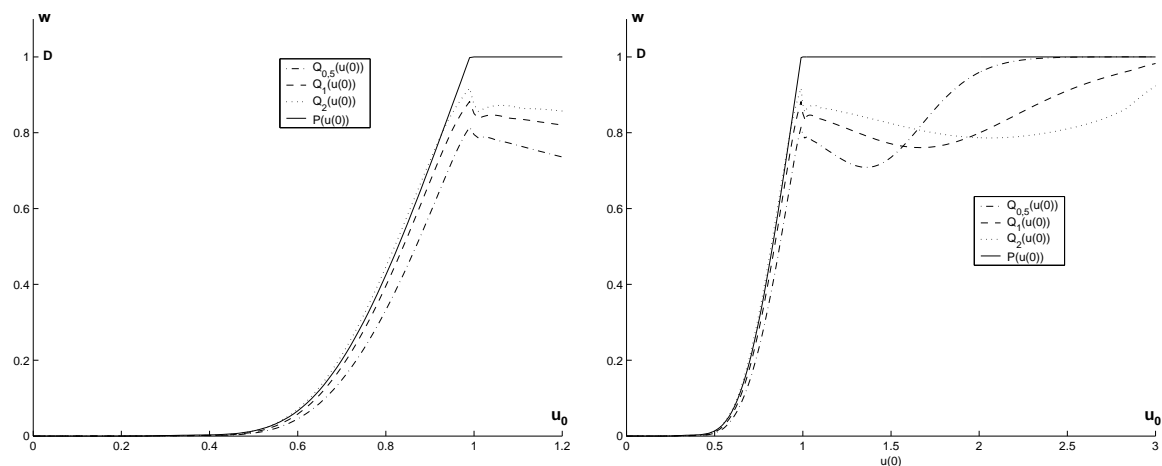


FIG. 7.10 – Call digital et loi triangulaire : comparaison entre la prime $P(u_0)$ et le coût total $Q_{\Delta}(u_0)$ pour différents valeurs du débordement Δ .

Ce calcul nous permet de calculer la prime à posteriori de la théorie F. Black et M. Scholes (BS) par inversion de la formule de BS (volatilité implicite), et de voir le cas échéant, pour quel intervalle $[\tau^-, \tau^+]$ notre théorie donne approximativement la même prime que la théorie de BS. Rappelons cependant que notre théorie suppose toujours l'existence de coûts de transaction non nuls, contrairement à la théorie de BS. Par conséquent, pour que la comparaison soit significative, nous séparons dans le coût total, la partie des coûts provenant des transactions, de ceux liés aux variations du cours de l'actif sous-jacent durant la période $[0, T]$. Nous calculons donc aussi

➔ Le coût pour le trader excluant les coûts de transactions et de clôture, à savoir

$$M(u_{\mathbb{K}}) - \sum_{l \geq k} \tau_l (v_l + \xi_l^*).$$

Résultats numériques

Les figures 7.12, 7.13, 7.14 et 7.15, montrent les résultats obtenus pour quatre suites de cours différentes, représentatifs des nombreuses expériences que nous avons effectuées. Ces quatre suites de cours (données dans l'annexe C) sont respectivement :

- ➔ le cours de l'action Air France entre le 18 août 1998 et le 20 octobre 1998 (figure 7.12). Sa volatilité estimée (7.8) est $\sigma \simeq 0,031$.
- ➔ le cours du CAC 40 entre le 6 mars 1998 et le 8 mai 1998. Sa volatilité estimée (7.8) est $\sigma \simeq 0,013$.
- ➔ Une suite de cours simulé suivant une loi log-normale de moyenne $\mu = 0$ et $\sigma = 0.1$.
- ➔ Une suite de cours simulé suivant une loi log-normale de moyenne $\mu = 0$ et $\sigma = 0.01$.

Pour ces deux dernières la volatilité estimée (7.8) est respectivement de $\sigma \simeq 0.09$ et $\sigma \simeq 0.0103$, à savoir une différence respective de 10% et de 3% par rapport aux volatilités théoriques (ce qui n'est pas étonnant sur un échantillon de seulement 44 valeurs).

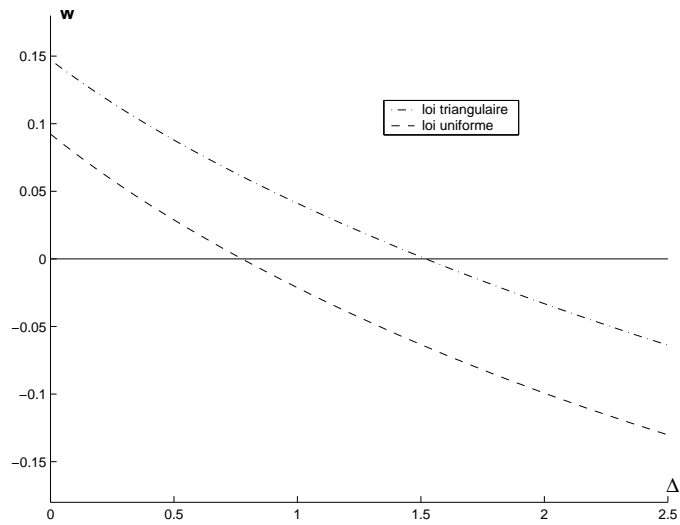


FIG. 7.11 – La différence $P(0, 8K) - Q_{\Delta}(0, 8K)$ en fonction du débordement Δ .

Sur ces quatre figures nous avons regroupé notre prime $P(u_0) = P(K)$ et le coût encouru par le trader (à la fois le coût total u et celui excluant les coûts de transaction) en fonction de la proportion p de valeurs du cours situés en dehors de l'intervalle $[\tau^-, \tau^+]$ utilisé. Nous avons également indiqué sur ces mêmes figures la prime de BS pour $u_0 = K$. Pour les coûts de transaction par défaut (de l'ordre de 0.7% du montant de la transaction), de nombreuses simulations montrent qu'en prenant un intervalle $[\tau^-, \tau^+]$ qui exclut jusqu'à 30% des τ_k observés, la prime demeure plus grande que le coût total (donc la couverture reste assurée). Si l'on exclu les coûts de transaction, la couverture reste assurée jusqu'à une plus grande proportion d'exclusion, et la prime obtenue pour la proportion d'exclusion limite (où la prime est égale au coût total excluant les coûts de transaction c'est-à-dire égale au coût engendré par les variations du cours) est proche de celle de BS. Certaines simulations, principalement pour suites de cours ayant une volatilité historique faible, montrent une prime de F.Black et M.Scholes nettement inférieure à la nôtre. Plus d'expériences (non faites à ce jour) sont nécessaires pour comprendre complètement ces cas. Par ailleurs, pour que ces expériences soient plus significatives, il serait nécessaire d'effectuer ces simulations pour des échéances T beaucoup plus grandes, afin d'avoir un nombre significatif (plus important) d'itérations i . Ce travail est en cours à la fois pour un call vanille et un call digital sur des périodes de six mois boursier.

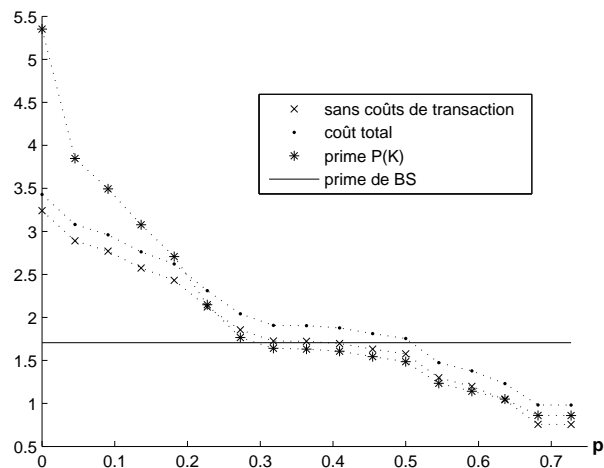


FIG. 7.12 – Prime et coût encouru en fonction de p . Suite du cours : action Air France entre le 18 août 1998 et le 20 octobre 1998 ($\sigma \simeq 0,031$).

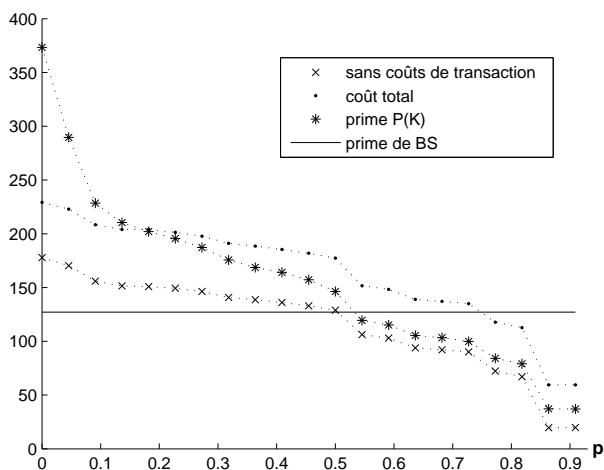


FIG. 7.13 – Prime et coût encouru en fonction de p . Suite de cours : CAC 40 entre le 6 mars 1998 et le 8 mai 1998 ($\sigma \simeq 0,013$).

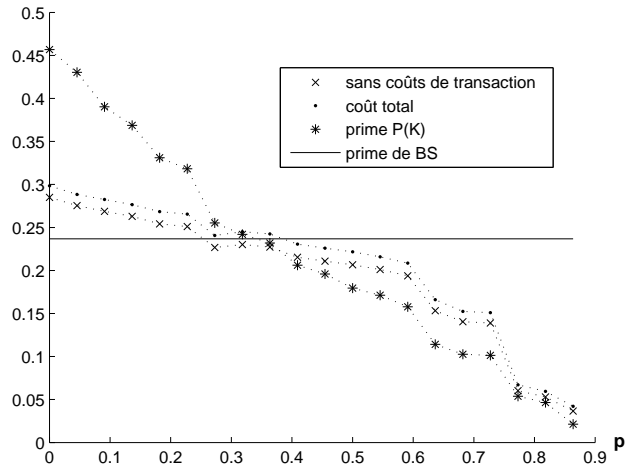


FIG. 7.14 – Prime et coût encouru en fonction de p . Suite de cours : log-normale ($\mu = 0$ et $\sigma \simeq 0,09$).

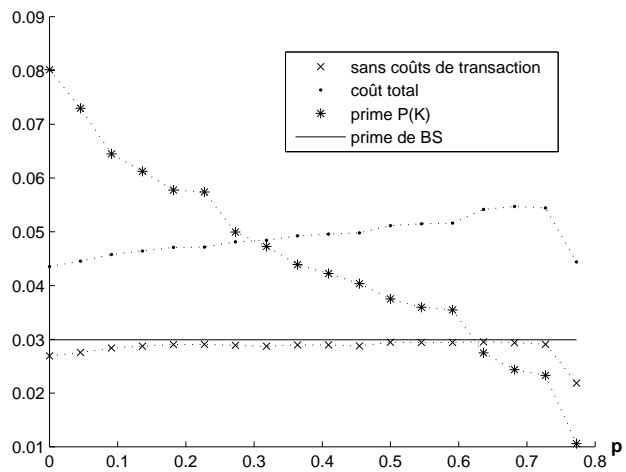


FIG. 7.15 – Prime et coût encouru en fonction de p . Suite de cours : log-normale ($\mu = 0$ et $\sigma \simeq 0,0103$).

Conclusion sur le plan des techniques financières

D'un point de vue des techniques financières, cette thèse a eu pour but de présenter une modélisation et une théorie d'évaluation d'options qui se veut (dans une faible mesure compte tenu de sa jeunesse) complémentaire à celle de BS, dans le sens où elle permet de développer en parallèle une théorie d'évaluation d'options en temps continu et en temps discret, en présence de coûts de transaction. Notre théorie peut être utile en particulier lorsque les coûts de transaction sont trop élevés pour être négligés ou lorsque la discrétisation du temps est critique.

Le développement d'une théorie en temps discret est un point positif dans la perspective d'appliquer notre théorie, puisqu'en pratique les transactions se font en temps discret. En outre l'intégration des coûts de transaction peut être considérée comme décrivant mieux la pratique et donc la « réalité » des marchés financiers. Notre théorie présente en outre l'avantage d'obtenir un théorème de convergence sans changer de modèle d'actif avec le pas de temps contrairement à la convergence CRR→BS.

Cette théorie est menée dans une perspective normative d'aide à la décision, à savoir qu'elle a pour but de fournir une prime et une stratégie préconisée pour le trader. Notre étude fournit en temps discret un algorithme simple et applicable en pratique donnant conjointement la prime et la stratégie préconisée. Nous pouvons encore simplifier l'algorithme rapide en utilisant l'approximation $q^\varepsilon = C^\varepsilon$, $\forall \varepsilon \in \{+, -\}$, en lieu et place des relations (6.21) pour le call vanille et (6.18) pour le call digital. L'algorithme de programmation dynamique (6.4) peut, lui, s'appliquer à toute option européenne ou américaine (voir la perspective du paragraphe 8.5) assise sur le cours d'un actif boursier et repérée par un paiement. En outre, grâce au théorème de convergence, la stratégie de couverture ainsi calculée fournit une bonne approximation de la stratégie de couverture en temps continu, ce qui permet de contourner le problème concernant la causalité de la stratégie en temps continu, comme mentionné dans la propriété 3.7.2. En outre cette stratégie exploite au mieux l'absence de notion d'optimalité du marché, à savoir le fait que les perturbations τ ne prennent pas toujours les pires valeurs pour le trader dans $[\tau^-, \tau^+]$.

L'hypothèse du modèle de marché à intervalles suppose la connaissance à priori de bornes de variations relatives du cours de l'actif sous-jacent sur lequel est assis l'option. L'étude de robustesse faite dans le paragraphe 7.4.1 a montré que notre théorie tolère des violations régulières de l'hypothèse du modèle de marché. Ainsi, tout comme la théorie de BS est parfaitement opérationnelle du fait de sa robustesse, il nous semble que la théorie que nous proposons pourrait, au vue de ces premiers résultats, mériter un intérêt du monde académique et des praticiens. Cependant, pour que cette théorie

soit applicable en pratique il faut pouvoir fixer de manière simple et précise les bornes de l'intervalle, d'autant que ce choix est crucial (un choix de bornes « trop larges » conduit à une prime trop importante alors qu'un choix de bornes trop restreintes ne permettrait pas au trader d'assurer la couverture en raison de la fréquence des variations de cours violant l'hypothèse du modèle). Nos simulations ont été faites en utilisant des informations « statistiques » à posteriori sur les suites de cours, ce qui ne constitue pas forcément une information fiable sur la façon de choisir $[\tau^-, \tau^+]$ pour les cours futurs.

Une méthode directe pour fixer les bornes de l'intervalle consisterait en une étude statistique poussée (donc très lourde) des cours passées. Une seconde méthode plus simple consiste en méthode implicite (une calibration de modèle) permettant de choisir les bornes de l'intervalle à partir de l'exploitation de cours d'options sur le marché (actif et prime pratiquée). Cette calibration pour différents actifs et différents prix d'exercice constitue du point de vue des techniques financières une priorité sur les études à venir (elle est amorcée dans le paragraphe 8.6).

En conclusion, cette théorie est jeune et demande donc plus de temps pour développer un nombre significatif d'expériences, des travaux de validation et de calibration de modèle, afin de pouvoir un jour être applicable en pratique. Nous espérons avoir montré que cela vaut la peine de poursuivre dans cette voie. Il s'agit pour nous à l'heure actuelle d'une simple « fable » au sens de A.Rubinstein [Rub06], et seul le monde académique et les praticiens pourront, à l'avenir, dire s'il a quelque utilité pour eux.

Chapitre 8

Quelques perspectives

Nous amorçons ici quelques perspectives d'études sur l'aspect mathématique du jeu différentiel et multi-étages étudié, mais également des perspectives sur certains aspects des techniques financières. Pour certaines de ces perspectives nous donnons également quelques ébauches d'études et nos intuitions.

8.1 Unicité de la solution de la DIQV (5.24)

Une perspective importante consisterait à prouver la conjecture 5.3.3 concernant l'unicité de la solution de viscosité de la DIQV (5.24) puisque une partie de la thèse en dépend, à savoir la vérification par solution de viscosité et le théorème de convergence. La conjecture paraît déjà très difficile à prouver dans le cas où la Valeur reste continue (options vanilles), puisque d'une part elle concerne un jeu minimax et non un problème de commande, et que d'autre part l'infimum des coûts des sauts est égal à zéro dans ce jeu. Dans le cas discontinu (option digitales), il manque en outre des outils théoriques sur les solutions de viscosité discontinues, que nous pourrions essayer de développer. Cette perspective cumule donc les difficultés et reste à ce jour un formidable défi.

8.2 Coûts de transaction affines

Une des perspectives serait de travailler sur l'ajout d'un coût fixe, à savoir de considérer dans la dynamique généralisée (1.26) de notre jeu \mathcal{G} des coûts de transaction non plus proportionnels au montant de la transaction, mais affines.

Equation d'autofinancement

Notons c'_0 (respectivement c'_1) la partie fixe du coût sur une transaction en actif sous-jacent (respectivement en bons sans risques). Soit (dx, dy) la variation en nombre de parts des deux actifs. Les coûts de transaction sont à présent égaux à $c'_0 + c_0|dy|R$ sur les bons sans risques et $c'_1 + c_1|dx|S$ sur l'actif sous-jacent. Lors de chaque transaction, c'est à dire sous la condition $(dx, dy) \neq (0, 0)$, l'équation d'autofinancement (1.12) du portefeuille en présence de coûts proportionnels se transforme en

$$dx(t)S(t) + c'_1 + c_1|dx(t)|S(t) + dy(t)R(t) + c'_0 + c_0|dy(t)|R(t) = 0 \quad (8.1)$$

où cette expression peut être prise au sens du calcul de Stieltjes.

Remarque 8.2.1 *L'équation d'autofinancement (8.1) n'est valable qu'en présence d'une transaction, compte tenu de la partie fixe des coûts, contrairement à l'équation (1.12) valable pour tout $t \in [0, T]$.*

Afin de rendre l'équation d'autofinancement et la dynamique indépendantes du taux d'intérêt ρ des bons sans risques, il est commode de considérer non pas des coûts fixes dans le temps, mais évoluant avec un taux d'inflation égal à ρ . C'est pourquoi nous posons

$$c_0'' = \frac{c_0'}{R} \quad \text{et} \quad c_1'' = \frac{c_1'}{R} .$$

En variables actualisées (relations (1.19)), l'équation d'autofinancement (8.1) devient ainsi

$$dx(t)u(t) + c_1'' + c_1|dx(t)|u(t) + dy(t) + c_0'' + c_0|dy(t)| = 0 . \quad (8.2)$$

Ensemble des stratégies admissibles du trader pour la théorie en temps continu

Propriété 8.2.1 *En présence d'un coût fixe, le trader ne peut utiliser que des transactions discrètes, mais à des instants choisis librement.*

Cette propriété est évidente. En effet, toute transaction infinitésimale (continue) ferait payer au trader les coûts fixes $c_0'' + c_1''$ en continu, ce qui mènerait à un coût infiniment grand, et par conséquent, une telle stratégie est absurde. La commande du trader ξ est donc nécessairement impulsionnelle (elle désigne l'amplitude du saut en actif sous-jacent donnée par la relation $udx = \xi$). Pour des raisons similaires, la commande ξ ne peut pas contenir de points d'accumulation (un point d'accumulation engendrerait un coût de transaction total infiniment grand).

La théorie étudiée reste celle en temps continu mais avec l'ensemble de commande

$$\Xi = \{ \text{nombre fini d'impulsions de Dirac d'amplitudes finies } \xi_k \delta(t - t_k) \} ,$$

où les instants t_k peuvent être choisis librement par le trader.

En réalité, nous pouvons être plus précis sur la définition de l'ensemble Ξ , en montrant qu'il existe des bornes sur l'amplitude de tout saut ξ . Cette affirmation est expliquée dans la remarque suivante.

Remarque 8.2.2 *En présence de coûts de transactions affines, compte tenu des coûts fixes, les quantités dx et dy ne sont pas nécessairement de signe contraire. On comprend qu'elles peuvent s'avérer toutes les deux négatives (une transaction peut à présent engendrer une perte en valeur sur chacun des deux actifs), si la vente d'une partie de l'un des actifs n'est pas assez grande pour financer la partie fixe des coûts. Nous devons interdire de telles transactions, car elles n'ont aucun sens pour le trader. En effet, si dx et dy sont tous les deux négatifs, il aurait été préférable pour le trader de ne rien faire (si le trader décide de vendre d'un actif c'est pour pouvoir acheter de l'autre actif). Posons*

$$\varepsilon_x = \text{signe}(dx) \quad \text{et} \quad \varepsilon_y = \text{signe}(dy) .$$

Si le trader vend de l'actif sous-jacent $dx < 0$ (donc $\varepsilon_x = -$) l'équation d'autofinancement (8.2) implique

$$dy = \frac{-(c_0'' + c_1'') - dx(1 - c_1)u}{(1 + c_0\varepsilon_y)}$$

où $(1 + c_0\varepsilon_y) > 0 \forall \varepsilon_y = \pm$ étant donné que $c_0 \ll 1$. Ainsi si $dx < 0$, le trader peut acheter des bons risques ($dy > 0$) à la condition que

$$dx < \frac{-(c_0'' + c_1'')}{(1 - c_1)u}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \xi \notin \left[\frac{-(c_0'' + c_1'')}{(1 - c_1)u}, 0 \right].$$

De même, nous pourrions exhiber une borne inférieure sur les ξ positifs, en écrivant que le bénéfice maximum possible¹ procuré par cette transaction doit être supérieure à son coût.

Dynamique du jeu différentiel et IQV

Nous pouvons montrer que la dynamique obtenue correspond à (1.26) avec

$$C(\xi) = C^\varepsilon \xi + c''^\varepsilon, \quad \text{où} \quad C^\varepsilon = \varepsilon \frac{c_0 + c_1}{1 - \varepsilon c_0} \quad \text{et} \quad c''^\varepsilon = \varepsilon \frac{c_0'' + c_1''}{1 - \varepsilon c_0} \quad \forall \varepsilon = \text{signe}(\xi) = \pm.$$

Remarque 8.2.3 Pour établir cette dynamique nous avons considéré que $\text{signe}(dy) = -\varepsilon$, car dans le cas contraire dx et dy serait tous deux négatifs, ce que l'on vient d'interdire. On a ainsi la relation

$$dy = -\frac{1 + \varepsilon c_1}{1 - \varepsilon c_0} u dx - \frac{c_0'' + c_1''}{1 - \varepsilon c_0} = -(1 + C^\varepsilon) u dx - c''^\varepsilon.$$

De manière similaire au paragraphe 1.3.3, la dynamique (1.26) s'obtient par différentiation directe des différentes relations en variables actualisées ($v = xu$, $w = xu + y$), avec $u dx = \xi dt$ et $du = \tau u dt$.

L'IQV du jeu différentiel est donnée par

$$0 = \min \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} + \max_{\tau \in [\tau^-, \tau^+]} \tau \left[\frac{\partial W}{\partial u} u + \left(\frac{\partial W}{\partial v} - 1 \right) v \right], \min_{\xi} \left[W(t, u, v + \xi) - W(t, u, v) + C^\varepsilon \xi + c''^\varepsilon \right] \right\}.$$

Elle devient plus classique car l'infimum du coût des sauts est à présent strictement positif (égal au coût fixe c''^ε). Pour cette raison, il en résulte que l'on perd la transformée de Josué (voir par exemple la dernière phrase du paragraphe 5.3.1). Cette IQV, bien qu'elle soit plus classique, garde un caractère dégénéré au sens de Bensoussan-Lions [Ben82] étant donné que l'opérateur différentiel reste du 1er ordre.

Intuitions

Dans ce jeu le trader est contraint à des transactions discrètes mais sans contraintes toutefois sur les instants des sauts (propriété 8.2.1), contrairement à la théorie en temps discrets où les transac-

¹En accord avec l'hypothèse du modèle de marché à intervalles, $\tau(t) \in [\tau^-, \tau^+]$.

tions ne peuvent intervenir qu'à des instants multiples du pas de temps (instants d'échantillonnage). La prime du jeu différentiel existe et, contenu de la contrainte, constitue une borne inférieure de la prime du jeu multi-étage. Il apparaît ainsi vraisemblable qu'un théorème de convergence de manière décroissante monotone ² puisse être établi de manière plus naturelle que pour l'étude menée dans cette thèse (coûts proportionnels), en raison de l'absence à présent de la composante continue du contrôle ξ dans la théorie en temps continu.

Concernant la théorie en temps discret, la technique reste la même (programmation dynamique), et nous nous attendons à ce que la stratégie de transaction préconisée contienne des transactions moins fréquentes et de plus grande amplitude.

8.3 Modèle à intervalles avec un délai égal à un pas de temps

Pour cette perspective, nous ne mentionnons que le cas discret, car la perspective de l'ajout d'un délai dans la théorie en temps continu s'avère beaucoup moins abordable ³.

Stratégie de transaction et dynamique du jeu

En temps discret, si les instants de transaction $t_k = kh$ sont très proches les uns des autres, il devient plus réaliste de n'autoriser pour le banquier que des stratégies strictement non anticipatives

$$\phi_k(u_0, \dots, u_{k-1}) = \phi_k(u_0, \tau_0, \dots, \tau_{k-2}) ,$$

c'est à dire de n'autoriser au trader que la connaissance de u_{k-1} pour choisi ξ_k . En effet, il devient impossible au trader de réagir à la variation du cours dans un temps significativement inférieur à un pas de temps (remarque 1.4.4) ⁴ et donc, dans une perspective normative (d'aide à la décision), il devient plus réaliste d'utiliser des stratégies strictement non-anticipative lorsque h est petit.

Concrètement, la stratégie du trader $\xi_k = \varphi(u_k, v_k)$ ne peut s'appliquer qu'à l'instant $k + 1$ (et donc cette stratégie correspond au ξ_{k+1} dans notre précédente théorie). Cela revient à changer notre dynamique (1.46) de portefeuille (v, w) en

$$\begin{cases} u_{k+1} &= (1 + \tau_k)u_k , \\ v_{k+1} &= (1 + \tau_k)v_k + \xi_k , \\ w_{k+1} &= w_k + \tau_k v_k + \xi_k - C^{\varepsilon_k} \xi_k . \end{cases} \quad (8.3)$$

La dynamique du modèle avec un pas de délai reste de même dimension, avec un décalage de l'indice de ξ_k qui représente le décalage d'information disponible sur u_k . Par conséquent la théorie sous-jacente pourra être développée facilement.

²Le caractère décroissant provenant toujours du fait que lorsque l'on réduit le pas de temps, on relâche simplement la contrainte sur les stratégies du trader (le minimiseur).

³En temps continu, on obtiendrait un système d'équations d'évolution dans un espace de Banach (l'état étant un segment de fonction sur le délai).

⁴Par exemple si le pas de temps h est de l'ordre de la minute, et non d'un jour comme la valeur par défaut choisie pour les différentes expériences numériques.

Remarque 8.3.1 *Le trader décide (applique sa commande) au pas k , mais celle-ci n'a d'effet sur la dynamique qu'au pas $k+1$. Ce délai ne change pas l'ordre des joueurs. Le problème reste un « $\inf_{\xi} \sup_{\tau}$ ».*

Équation d'Isaacs discrète et difficulté

L'équation d'Isaacs (6.2) est également changée en conséquence. En présence d'un pas de délai l'équation d'Isaacs s'écrit en fonction des commandes qui dépendent de l'instant présent. L'équation d'Isaacs de notre jeu devient ⁵

$$\begin{cases} W^h(k, u, v) &= \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \max_{\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]} [W^h(k+1, (1+\tau)u, (1+\tau)v + \xi) - \tau v - \xi + C^\varepsilon \xi] \\ W^h(\mathbb{K}, u, v) &= N(u, v) . \end{cases} \quad (8.4)$$

Dans cette équation (8.4), il ne semble pas possible de séparer la minimisation en ξ et la maximisation en τ , comme ce fut le cas dans l'étude précédente (voir les équations (6.4) de programmation dynamique en deux étapes à chaque pas de temps). Dès lors il apparaît que nous perdons la forme actuelle de l'algorithme rapide. Par ailleurs, il semble plus difficile, pour les options à paiement convexe, de prouver que la fonction Valeur reste convexe au cours du jeu.

Intuitions

Comme l'équation d'Isaacs change la théorie ne fonctionne plus de la même manière et reste à faire entièrement. Toutefois, nous pensons que le théorème de convergence reste vrai étant donné que lorsque l'on fait tendre le pas de temps vers 0, le délai tend vers 0 également. Par ailleurs, il semble raisonnable de penser que la fonction W est plus grande (par rapport à celle sans délai) puisque le minimiseur possède moins d'information. Remarquons que l'écart d'information tend vers 0 avec le pas de temps, ce qui renforce l'idée que le théorème de convergence reste vrai.

Remarque 8.3.2 *Dans une théorie normative (d'aide à la décision), si le pas de temps h devient de plus en plus petit, il faudrait commuter d'un modèle sans délai à un modèle avec un pas de délai pour obtenir des stratégies de transactions utilisables en pratique à très haute fréquence d'intervention.*

Intuitivement il semble à priori, pour les options étudiés durant cette thèse, que le théorème 5.2.1 de représentation de la fonction Valeur reste sous cette forme dès lors que l'on conjecture que le graphe de la fonction Valeur s'écrit comme le maximum de deux conditions de couverture contre chacune des deux commandes optimales du marché τ .

8.4 Des options plus complexes ... du point de vue mathématique

Nous pourrions nous intéresser à des options pour lesquelles il existent plus de deux valeurs de τ s'avérant maximiser l'hamiltonien, ce qui correspond à plus de deux menaces pour le trader et, par extension, à plus de deux contraintes linéaires dans le plan (v, w) (les conditions de couverture contre chacune des commandes τ optimales) et plus de deux nappes émergentes (nous rappelons que

⁵Nous n'avons plus l'assurance que l' \inf_{ξ} soit atteint.

les équations de ces nappes correspondent aux équations respectives des frontières de chacune des conditions de couvertures sous la stratégie $\xi^* = 0$).

Deux exemples

Nous avons représenté sur la figure 8.1 le paiement de deux options entrant dans ce cadre, à savoir :

- ➔ Une option digitale de type cash or nothing à échelons multiples (ici deux), sur la figure de gauche.
- ➔ Une option digitale de type « asset or nothing » (voir page 29), sur la figure de droite.

Le paiement de chacune de ces deux options est discontinu et choisi s.c.s, pour les raisons exposées dans la propriété 4.3.1.

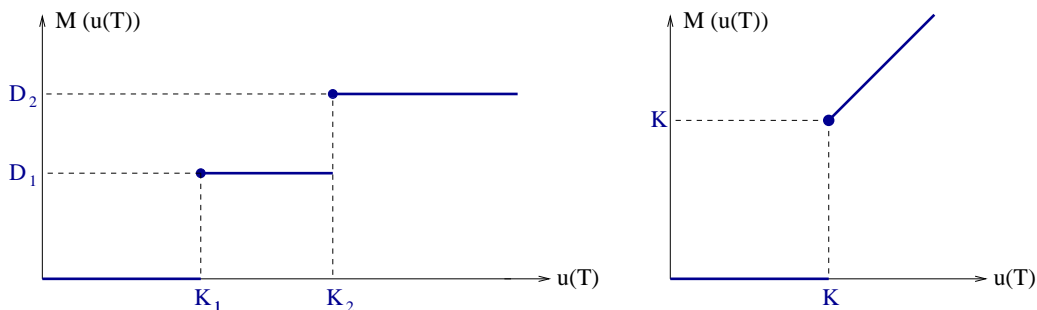


FIG. 8.1 – Paiement de deux options à « trois menaces » pour le trader.

Remarque 8.4.1 Ces paiements correspondent chacun à la somme des paiements de deux options .

- ➔ Pour celui de gauche : deux options digitales, une de strike K_1 et d'échelon D_1 , et l'autre de strike $K_2 > K_1$ et d'échelon $D_2 - D_1 > 0$.
- ➔ Pour celui de droite : une call vanille de strike K et une option digitale de strike K et d'échelon K .

Mais comme notre modèle de marché est incomplet, la prime d'une option ne s'obtient pas comme la somme des primes des deux options qui la composent. Nous sommes curieux de savoir à quoi ces études conduisent du point de vue normatif (c'est-à-dire les stratégies respectives ξ préconisées pour couvrir l'option).

En fonction de la quantité v investie en actif sous-jacent, nous comprenons qu'il existe trois menaces possibles pour le trader :

- ➔ Pour l'option digitale de type cash or nothing à deux échelons :

$$\tau = \tau^- \quad \text{et} \quad \tau = \tau_K^i = \{ \tau(\cdot) \in \Omega \mid u(T) = K_i, \} \quad \forall i \in \{1, 2\}$$

- ➔ Pour l'option digitale de type asset or nothing :

$$\tau = \tau^- \quad , \quad \tau = \tau_K = \{ \tau(\cdot) \in \Omega \mid u(T) = K \} \quad \text{et} \quad \tau = \tau^+ .$$

Compte tenu de l'augmentation du nombre de contrôles optimaux τ possibles pour le marché, de deux (pour les options étudiées pendant la thèse) à trois (pour les deux options de ce paragraphe), le nombre de nappes émergentes jouant un rôle dans la solution va également passer de deux à trois (une nappe émergente associée à chaque contrôle). Nous obtenons respectivement

- ➔ Pour l'option digitale de type cash or nothing à deux échelons, deux nappes émergentes $\langle \mathcal{K}_i \rangle$ singulières en τ et une nappe extrême $\langle \tau_g^- \rangle$.
- ➔ Pour l'option digitale de type asset or nothing, une nappe émergente $\langle \mathcal{K} \rangle$ singulières en τ et deux nappes extrêmes $\langle \tau^- \rangle$ et $\langle \tau^+ \rangle$.

L'analyse géométrique du jeu qualitatif en dimension 4 (dimension 3 plus temps) va s'avérer beaucoup plus difficile à faire et la solution devrait s'avérer encore plus riche en singularités. Nous pouvons déjà affirmer que nous perdons la formule de représentation sous sa forme actuelle affine en deux morceaux (théorème 5.2.1), comme le montre l'application proposée ci-dessous.

Application pour l'option digitale de type cash or nothing à deux échelons

La condition de couverture $w(T) \geq N(u(T), v(T)) = M(u(T)) - c^- v(T)$ sous la stratégie $\xi^* = 0$ se réécrit, à partir de l'intégration en temps rétrograde (3.37) sous la forme de l'équation (4.44). Pour chacun des trois contrôles optimaux respectifs du marché, nous obtenons les conditions de couverture (4.45)

$$w(t) + ((1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1)v(t) \geq 0 ,$$

et (de manière analogue à la condition de couverture (4.46))

$$\begin{aligned} w(t) + ((1 + c^-)\frac{K_1}{u(t)} - 1)v(t) &\geq D_1 , \\ w(t) + ((1 + c^-)\frac{K_2}{u(t)} - 1)v(t) &\geq D_2 . \end{aligned}$$

Les frontières de ces trois conditions de couvertures sont les équations respectives des deux nappes singulières $\langle \mathcal{K}_1 \rangle$ et $\langle \mathcal{K}_2 \rangle$ et de la nappe extrême $\langle \tau_g^- \rangle$.

Remarque 8.4.2 Les instants t_- et t_+ jusqu'auxquels la stratégie $\xi^* = 0$ reste valide en temps rétrograde depuis T , respectivement contre τ^- et τ^+ , restent donnés par (4.6) et (4.18)⁶, ce qui conduit avec les paramètres par défauts à l'application (4.21). Pour les paramètres par défauts donnés dans le paragraphe (1.7) et pour le jeu de paramètres

$$(K_1, D_1, K_2, D_2) = (1, 0.5, 2, 1) ,$$

les trois contraintes linéaires obtenues dans le plan (v, w) sont représentés sur la figure 8.2 à $(t, u) = (43.965, 0.6)$ fixés⁷. Dans ce cas précis le graphe de la fonction Valeur

⁶À l'instar du call digital de type cash or nothing les coûts de clôture restent donnés par $m(u, v) = -c^- v$ quelque soit u et donc $q(T) = c^-$. Les fonctions $q^\varepsilon(t)$ sont elles données par (3.37) avec $\theta = \tau^\varepsilon(T - t)$, $\forall \varepsilon \in \{+, -\}$ et les instants t_ε , $\forall \varepsilon \in \{+, -\}$ définis par $q^\varepsilon(t_\varepsilon) = C^\varepsilon$.

⁷Pour l'instant t nous avons décidé de prendre $t = \frac{T + \max\{t_+, t_-\}}{2} \in [\max\{t_+, t_-\}, T] = 43.965$ pour qu'à fortiori cet instant se situe dans la région du jeu où $\xi^* = 0$.

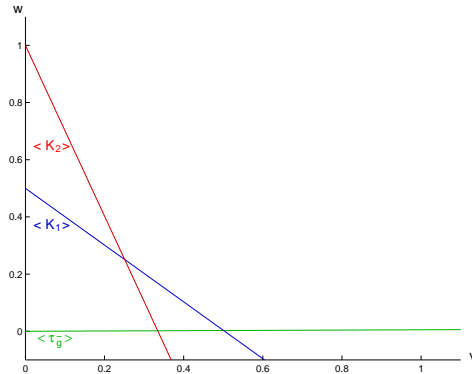


FIG. 8.2 – Une application destinée à montrer la perte du théorème de représentation 5.2.1.

$$\begin{aligned}
 W(t, u, v) &= \max\{ -((1 + c^-)e^{\tau^-(T-t)} - 1)v, D_1 - ((1 + c^-)\frac{K_1}{u(t)} - 1)v, D_2 - ((1 + c^-)\frac{K_2}{u(t)} - 1)v \} \\
 &= \max\{ 0, 0,00524v, 0,5 - 0,993v, 1 - 2,986v \}
 \end{aligned}$$

est par conséquent affine est trois morceaux dans le plan (v, w) .

Remarque 8.4.3 *Nous venons juste de montrer sur un exemple la perte du théorème de représentation 5.2.1). Nous ne prétendons pas que, en raison de la présence à présent de trois nappes émergentes, nous pouvons obtenir pour tout (t, u, v) une formule de représentation affine en v en trois morceaux.*

8.5 Options américaines

Contexte générale

Un autre type d'options courantes sont les options américaines (qui diffèrent des options européennes par le droit d'exercer l'option à tout instant $t \in [0, T]$ au cours du jeu, et non uniquement à l'échéance T). Par conséquent, au delà des apports au plan mathématique qui pourraient découler de cette étude, il apparaît essentiel de développer cette étude sur le plan des techniques financières.

Pour un call vanille, le paiement (1.1) n'est pas borné alors que celui d'un put vanille (1.2) est borné par K (mentionné dans la propriété 1.1.2). De cette propriété, il résulte [LL97] qu'un call vanille n'a aucun intérêt à être exercé avant l'échéance contrairement au put vanille. De manière heuristique nous comprenons que pour un put vanille, si $u(t) \ll K$ à un instant donné pendant la durée de vie de l'option, le gain espéré entre cet instant et un instant futur devient faible par rapport au risque d'une diminution de ce gain provoquée par une augmentation du cours. D'où l'exercice de l'option. Pour un call vanille le trader peut toujours espérer une augmentation sensible du cours, se répercutant sur son gain. Dans le cas d'une option digitale de type cash or nothing (aussi bien un call qu'un put), l'intérêt du souscripteur est évident en raison du caractère « binaire » du paiement. En effet, il exercera l'option dès lors que $M(u) = D$ (respectivement au premier instant où, $u(t) \geq K$ pour un call, et $u(t) < K$ pour un put), étant donné qu'il ne peut prétendre à un gain plus important et qu'avant cet instant son gain était nul. La stratégie du trader reste elle à étudier.

Remarquons que dans le cas d'une option digitale à plusieurs échelons (perspective du paragraphe 8.4), l'option américaine devient plus intéressante. En effet, si la valeur du cours franchit le premier échelon ($u(t) > K_1$), le gain arrive à un pallier intermédiaire D_1 ce qui entraîne un dilemme pour le souscripteur entre

- ➔ ne pas exercer l'option sachant que le gain peut arriver à l'échelon supérieur D_2 si le cours augmente au delà de $u(t) \geq K_2$,
- ➔ exercer l'option sachant que le cours peut redescendre en dessous de K_1 .

Amorce de l'étude

Nous allons seulement montrer ici, qu'en temps discret, le passage d'une option européenne à une option américaine dans notre théorie d'évaluation d'options nécessite simplement de rajouter une ligne de programmation lors de l'implémentation. Le passage aux options américaines est moins délicat qu'avec la théorie stochastique où une telle étude requiert l'usage des enveloppes de Snell. Concernant notre théorie en temps continu, l'étude reste à l'heure actuelle pas suffisamment avancée pour pouvoir être catégorique sur cette affirmation. Le bref développement ci-dessous est repris de l'article [Ber05b].

Notre jeu minimax à horizon fini fixé devient un jeu minimax à temps d'arrêt puisque le souscripteur peut à présent arrêter le jeu à tout à tout instant $t \in [0, T]$. Il nous faut ainsi réintroduire le taux d'intérêt ρ des bons sans risques. Toutefois nous pouvons toujours actualiser à l'échéance au taux d'intérêt ρ afin de garder la même dynamique ((3.16) en temps continu et (1.46) en temps discret). A tout instant $t \in [0, T]$ le coût du trader en cas d'exercice de l'option s'écrit

$$\widehat{N}(t, u, v) = \exp^{-\rho(T-t)} N(\exp^{\rho(T-t)} u, \exp^{\rho(T-t)} v) \quad (\text{en temps discret } \widehat{N}_k^h(u, v) = \widehat{N}(kh, u, v)).$$

En temps discret, la prime (1.49) est à présent remplacée par

$$P(u_0) = \min_{\varphi \in \Phi_D} \sup_{\{\tau_k\} \in \Omega} \sup_{l < \mathbb{K}} \left[\widehat{N}_l^h(u_l, v_l) + \sum_{k=0}^{l-1} (-\tau_k(v_k + \xi_k) + C^{\varepsilon_k} \xi_k) \right],$$

et l'équation d'Isaacs (6.2) par l'IQV

$$\begin{cases} W_k^h(u, v) = \max \left\{ \widehat{N}_k^h(u, v), \max_{\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]} [W_{k+1}^h((1+\tau)u, (1+\tau)(v+\xi)) - \tau(v+\xi) + C^\varepsilon \xi] \right\} \\ W_{\mathbb{K}}^h(u, v) = N(u, v). \end{cases}$$

L'implémentation de cette IQV nécessite seulement de rajouter une simple ligne de code dans l'implémentation de l'équation d'Isaacs (6.2), consistant à comparer $W_k^h(u, v)$ à $\widehat{N}_k^h(u, v)$ pour ne garder que le plus grand des deux dans $W_k^h(u, v)$. L'algorithme (6.4) se transforme en

$$\text{ALGORITHME 1' : } \begin{cases} W_{k+}^h(u, v) = \max_{\tau \in [\tau_h^-, \tau_h^+]} [W_{k+1}^h((1+\tau)u, (1+\tau)v) - \tau v], \\ W_k^h(u, v) = \min_{\xi \in \mathbb{R}} [W_{k+}^h(u, v+\xi) + C^\varepsilon \xi], \\ W_k^h(u, v) = \max \{ W_{k+}^h(u, v), N_k(u, v) \}. \end{cases}$$

Puisque le maximum de deux fonctions convexes (respectivement s.c.s) est convexe (respectivement

s.c.s), les propriétés de convexité exposées dans la paragraphe 6.1.3 sont préservées et par conséquent également les formules et l’algorithme rapide qui en découle. Cependant nous n’avons pas encore suffisamment réfléchi pour avoir des intuitions, en particulier concernant un quelconque théorème de représentation de la fonction Valeur.

8.6 Calibration du modèle de marché à intervalles

Jusqu’à présent, nous nous sommes penché sur la résolution directe du problème d’évaluation d’options avec le modèle de marché à intervalles. Une étude intéressante, et plus proche des préoccupations financières réelles, serait de se pencher sur le problème de calibration du modèle de marché à intervalles. Dans ce paragraphe nous allons expliquer le principe de la calibration de modèle de marché et mettre en évidence une (légère?) faiblesse à la réalisation de celle-ci pour notre modèle de marché à intervalles. Aucune calibration du modèle de marché à intervalles n’a été réalisée à l’heure actuelle.

Principe de la calibration du modèle de marché à intervalles

La calibration du modèle de marché consiste à déterminer les paramètres de ce modèle, à savoir les bornes $\tilde{\tau}^-$ et $\tilde{\tau}^+$ à partir de l’exploitation de différents cours d’option sur le marché (actif et prime $\tilde{P}(S_0)$ donnés), en utilisant par exemple une estimation par moindres carrés. Nous pourrions ensuite appliquer sur cet intervalle $[\tilde{\tau}^-, \tilde{\tau}^+]$ notre théorie d’évaluation d’options afin de déterminer la stratégie de transaction (par commande robuste) préconisée pour le trader, puis appliquer cette stratégie sur le cours de l’actif en question avec ⁸ $(v_0, \tilde{w}_0) = (0, \tilde{P}(S_0))$ pour voir si la couverture est assurée.

L’intérêt serait ensuite de répéter cette opération sur un échantillon important de cours d’option pour faire une analyse statistique des résultats, comme par exemple, calculer le pourcentage de couverture réussies, calculer le gain moyen (ou la perte moyenne), comparer notre stratégie préconisée avec celle de la théorie de BS (le delta).

Une faiblesse pour la calibration du modèle de marché à intervalles

La calibration du modèle de marché à intervalles est en quelque sorte l’équivalent de la « volatilité implicite » [Cre00, LL97] dans le modèle de BS, qui a toute prime fait correspondre un choix unique de volatilité σ par inversion de la formule de BS. Dans la théorie de BS le modèle de marché (1.3) dépend de deux paramètres σ et μ . Mais la prime de l’option est, d’une part indépendante de la moyenne μ [SSC95, LL97], et d’autre part une grandeur strictement croissante avec la volatilité σ dans le cas des options vanilles. D’où l’existence d’une bijection entre prime et volatilité dans le cas des options vanilles.

Or nous allons constater numériquement que les deux paramètres $\tilde{\tau}^-$ et $\tilde{\tau}^+$ du modèle de marché à intervalles influent chacun sur la prime. En particulier nous n’avons pas de résultat d’indépendance de la prime par rapport au centre de l’intervalle $\frac{\tilde{\tau}^+ + \tilde{\tau}^-}{2}$ qui joue en quelque sorte le rôle de μ dans le modèle de BS (se reporter à la comparaison du paragraphe 7.2.4). Cette étude met l’accent sur une faiblesse de notre modèle de marché pour réaliser une calibration de ce dernier.

⁸Voir la définition 1.3.9 puis la relation (1.50) pour passer de la prime actualisée à celle non actualisée.

Mise en évidence de la dépendance de $P(u_0)$ par rapport aux deux paramètres τ^- et τ^+

Les expériences numériques qui suivent, réalisées à partir de l'implémentation de l'algorithme de programmation dynamique (6.4), sont destinées à montrer l'évolution de la prime actualisée ⁹ $P(u_0)$ par translation puis par dilatation ou contraction de l'intervalle $[\tilde{\tau}^-, \tilde{\tau}^+]$. Pour ces expériences, les paramètres par défaut sont ceux du paragraphe 1.7 à l'exception de $\tilde{\tau}^-$ et $\tilde{\tau}^+$ qui deviennent variables pour cette étude.

➔ Translation de l'intervalle $[\tilde{\tau}^-, \tilde{\tau}^+]$

Dans cette série d'expériences, nous fixons la largeur de l'intervalle $[\tilde{\tau}^-, \tilde{\tau}^+]$, choisie égale à celle obtenue avec les valeurs par défaut des deux bornes. Donc $\tilde{\tau}^+ - \tilde{\tau}^- = 0,03 - (-0,05) = 0,08$. Nous posons

$$\tilde{\tau}^- = -0,05 + 0,001\delta \quad \text{et} \quad \tilde{\tau}^+ = 0,03 + 0,001\delta \quad \text{pour } \delta \text{ variant de } -30 \text{ à } 40 .$$

Pour $\delta = 0$ nous retrouvons ainsi les paramètres par défaut et par ailleurs en dehors de $\delta \in [-30, 40]$ les deux quantités $\tilde{\tau}^-$ et $\tilde{\tau}^+$ sont de même signe, ce qui ne présente plus d'intérêt ¹⁰.

➔ Contraction/dilatation de l'intervalle $[\tilde{\tau}^-, \tilde{\tau}^+]$

La prime est de manière évidente croissante (respectivement décroissante) lorsque l'on dilate (respectivement contracte) l'intervalle $[\tilde{\tau}^-, \tilde{\tau}^+]$ (voir la proposition 1.3.10), ce que nous vérifions toutefois en prenant

$$\tilde{\tau}^+ = (1 + 0,1\Delta) \times 0,03 \quad \text{et} \quad \tilde{\tau}^- = -(1 + 0,1\Delta) \times 0,05 \quad \text{pour } \Delta \text{ variant de } -10 \text{ à } 30 .$$

Pour $\Delta = 0$ nous retrouvons ainsi les paramètres par défaut ¹¹.

➔ Des résultats numériques

Compte tenu de la finalité de ces expériences, qui consiste seulement à constater sur un exemple la dépendance de la prime en fonction de δ (par translation de l'intervalle) et de Δ (par dilatation ou contraction de l'intervalle), nous nous contentons de montrer en fonction de δ et de Δ les résultats obtenus en $u_0 = K$ pour le call vanille (figure 8.3) et en $u_0 = 0.8K$ pour le call digital (figure 8.4) ¹².

Nous constatons effectivement les dépendances énoncées. La variation de la prime est toutefois moins sensible pour une translation autour de $\delta = 0$ que pour une contraction/dilatation autour de $\Delta = 0$.

Remarquons que, dans le lien (7.4) évoqué entre notre théorie et celle de BS, cette étude reviendrait à laisser la volatilité constante à 0,04. Le lien indirect (7.4) est donc mis en défaut puisque dans la théorie de BS la prime ne dépend que de la volatilité σ et donc la prime ne varie pas lorsque σ varie.

⁹On peut ensuite utiliser la relation (1.50) ou (1.54) pour passer de $P(u_0)$ à $\tilde{P}(S_0)$, ce qui revient simplement à changer les labels sur les axes.

¹⁰Nous avons la solution triviale $\tilde{P}(S(0)) = 0$ car le trader peut jouer sur le fait que l'actif ne peut que croître ou décroître.

¹¹Donc $\Delta < 0$ représente une contraction de l'intervalle et $\Delta > 0$ une dilatation de ce dernier.

¹²Nous rappelons que pour cette option la prime se trivialise en $W(0, u_0, 0) = D$ pour $u_0 \geq u_-$.

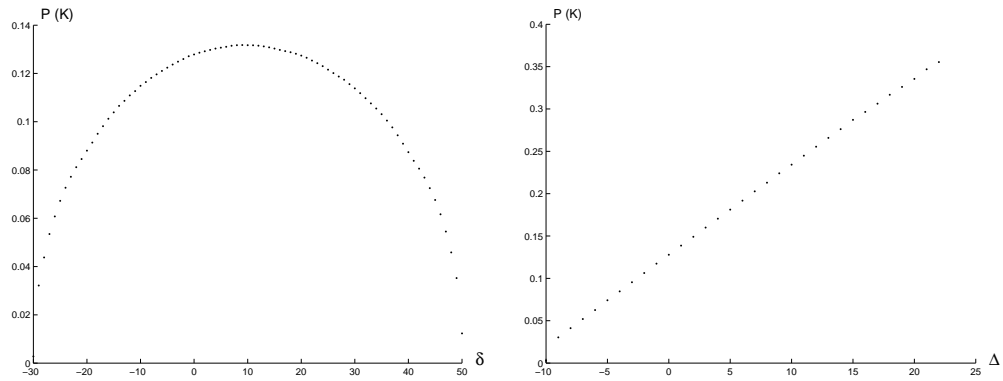


FIG. 8.3 – Influence sur la prime d'un call vanille en $u_0 = K$, d'une translation (figure de gauche) et d'une contraction/dilatation (figure de droite) de l'intervalle.

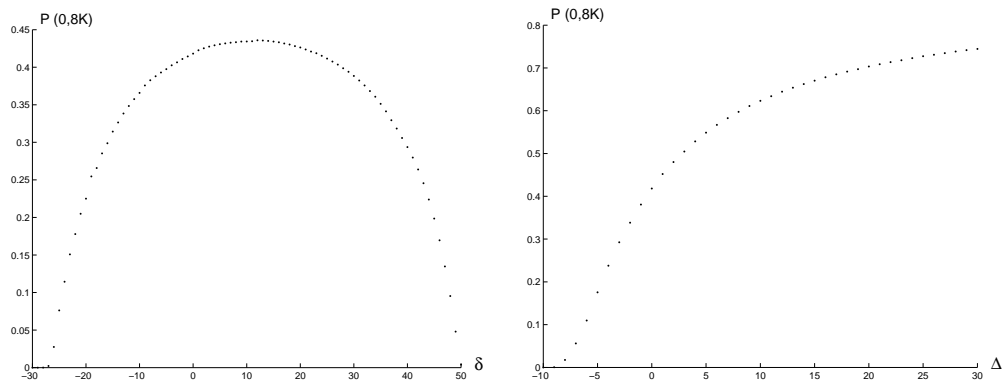


FIG. 8.4 – Influence sur la prime d'un call digital en $u_0 = 0,8K$, d'une translation (figure de gauche) et d'une contraction/dilatation (figure de droite) de l'intervalle.

Plan pour la suite de l'étude

Pour réaliser la calibration du modèle de marché à intervalles, il est par conséquent nécessaire de « supprimer un des degrés de liberté », pour ramener le choix de l'intervalle $[\tilde{\tau}^-, \tilde{\tau}^+]$ à celui d'un paramètre unique, noté $\hat{\tau}$, qui implicitement (c'est-à-dire pour l'intervalle $[\tilde{\tau}^-, \tilde{\tau}^+]$ correspondant) conduit à la prime pratiquée sur le marché. Différentes manières réalistes de supprimer ce degré de liberté sont envisageables. Nous pouvons par exemple

- ➔ fixer une proportion α entre la baisse relative maximum $\tilde{\tau}^-$ et la hausse relative maximum $\tilde{\tau}^+$ du cours de l'actif sous-jacent :

$$[\tilde{\tau}^-, \tilde{\tau}^+] = [-\alpha\hat{\tau}, \hat{\tau}].$$

- ➔ fixer la moyenne (le milieu de l'intervalle) $\mu = (\tau^+ + \tau^-)/2$, conduisant ainsi à $\tau^- = 2\mu - \tau^+$ et donc à :

$$[\tilde{\tau}^-, \tilde{\tau}^+] = [2\mu - \hat{\tau}, \hat{\tau}].$$

Une étude importante serait dans un premier temps de voir si ces deux manières de « supprimer le degré de liberté » génèrent des différences significatives au niveau des stratégies de transaction optimales et/ou de la prime. Si les différences sont mineures (c'est notre intuition), le choix de la méthode est anecdotique et la faiblesse de modèle de marché constatée ici relève plus de l'ordre du détail.

Annexes

A EDP « fondamentale »

A.1 Le problème

L'EDP

L'objet de cette annexe est d'examiner l'existence et l'unicité de la solution de l'EDP (8.6) munie de diverses conditions au bord qui correspondent aux problèmes rencontrés dans le problème de couverture d'option, vanille ou digitale. On donne

- ➔ un domaine $(t, u) \in \Omega \subset [0, T] \times \mathbb{R}^+$,
- ➔ deux paramètres $\tau^- < 0$ et $\tau^+ > 0$ (notés τ^ε , $\varepsilon \in \{+, -\}$),
- ➔ deux paramètres $C^- < 0$ et $C^+ > 0$, (notés C^ε , $\varepsilon \in \{+, -\}$),
- ➔ deux fonctions q^- et $q^+ : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfont les relations suivantes, pour $\varepsilon \in \{+, -\}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon q^\varepsilon &\leq \varepsilon C^\varepsilon, \\ \text{si } \varepsilon q^\varepsilon < \varepsilon C^\varepsilon, \quad q_t^\varepsilon + \tau^\varepsilon q_u^\varepsilon u + \tau^\varepsilon(1 + q^\varepsilon) &= 0 \quad (\text{proposition 5.4.3}). \end{aligned} \quad (8.5)$$

On aura toujours $q^- < q^+$, et $1 + q^\varepsilon > 0$ (relation (5.5)). La fonction q^+ est très différente suivant le type d'option considéré en raison de conditions terminales en $t = T$ très différentes.

On introduit encore les matrices

$$Q = \begin{pmatrix} q^+ & 1 \\ q^- & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et (voir la matrice (5.1))

$$\mathcal{T} = \frac{1}{q^+ - q^-} \begin{pmatrix} \tau^+ q^+ - \tau^- q^- & \tau^+ - \tau^- \\ -(\tau^+ - \tau^-) q^+ q^- & \tau^- q^+ - \tau^+ q^- \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} \tau^+ & 0 \\ 0 & \tau^- \end{pmatrix} Q.$$

L'EDP porte sur une paire de fonctions scalaires de deux variables $\check{v}(t, u)$ et $\check{w}(t, u) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ manipulées conjointement en un vecteur $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))^t = \check{V}(t, u)$, et s'écrit (voir l'équation (5.3))

$$\check{V}_t + \mathcal{T}(\check{V}_u u - \mathcal{S}\check{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

A.2 Les conditions au bord

Le domaine Ω sera toujours de la forme suivante, pour t_m donnés :

$$\begin{aligned} 0 &\leq t \leq t_m, \\ \forall t \leq t_m, \quad u &\in [u_g(t), u_d(t)], \end{aligned}$$

où u_g et u_d sont donnés en fonction de deux valeurs $u_g(t_m) \leq u_d(t_m)$ qui font avec t_m partie des données, par

$$\begin{aligned} u_g(t) &= u_g(t_m)e^{\tau^+(t-t_m)}, \\ u_d(t) &= u_d(t_m)e^{\tau^-(t-t_m)}. \end{aligned}$$

De manière équivalente, on pourra introduire l'intersection (t_1, u_1) des courbes u_g et u_d . Évidemment, $t_1 = t_m$ si $u_g(t_m) = u_d(t_m)$ et $t_1 > t_m$ si-non. Et on pourra utiliser

$$\begin{aligned} u_g(t) &= u_1e^{\tau^+(t-t_1)}, \\ u_d(t) &= u_1e^{\tau^-(t-t_1)}. \end{aligned}$$

En outre, dans le cas « digital », ce domaine est tronqué par $u \leq u_+$ pour un $u_+ > u_g(t_m)$ donné.

On n'étudiera ici que les deux cas où ce théorème est vraiment nécessaire, à savoir les variétés focales des cas « vanille » et « digital ». Mais le lecteur se convaincra vite que les mêmes techniques s'étendent facilement à toutes les variétés $(\check{v}(t, u), \check{w}(t, u))$ de la thèse.

Ainsi, les q^ε seront de la forme suivante :

⇒ **Cas « vanille »** $q^\varepsilon = C^\varepsilon$, $\varepsilon = +, -$.

⇒ **Cas « digital »** $q^- = C^-$, $q^+ = C^+$ pour $u \leq u_+$, $q^+ < C^+$ pour $u > u_+$. (C'est à dire qu'on intègre simultanément la variété focale dans la région $u \leq u_+$ et une variété équivoque dans la région $u \geq u_+$)

Une difficulté supplémentaire dans ce cas advient le long du bord $u = u_-$. En effet, ce ne sont pas \check{v} et \check{w} qui y sont définis, mais seulement $\check{w} + q^+\check{v} = D$. On verra que cela n'invalide en rien la théorie d'existence et d'unicité ci-dessous.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème A.1 *L'équation aux dérivées partielles (8.6) munie des conditions au bord (A.2) admet une solution unique dans l'espace des fonctions continues de Ω dans \mathbb{R}^2 .*

A.3 Manipulations de l'EDP

Changement de fonctions

On remarque que puisque $QT = \begin{pmatrix} \tau^+ & 0 \\ 0 & \tau^- \end{pmatrix} Q$, l'EDP peut encore s'écrire

$$\forall \varepsilon \in \{+, -\}, \quad q^\varepsilon \check{v}_t + \check{w}_t + \tau^\varepsilon [(q^\varepsilon \check{v}_u + \check{w}_u)u - (1 + q^\varepsilon)\check{v}] = 0. \quad (8.7)$$

On introduit pour $\varepsilon = -, +$

$$\varphi^\varepsilon = q^\varepsilon \check{v} + \check{w}.$$

Il vient alors, en tenant compte de (8.5) et (8.7)

$$\varphi_t^\varepsilon + \tau^\varepsilon \varphi_u^\varepsilon u = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon q^\varepsilon < \varepsilon C^\varepsilon, \\ \tau^\varepsilon (1 + q^\varepsilon) \check{v} & \text{si } q^\varepsilon = C^\varepsilon. \end{cases}$$

On remarque que $\tilde{v} = (\varphi^+ - \varphi^-)/(q^+ - q^-)$. On obtient les équations

$$\varphi_t^\varepsilon + \tau^\varepsilon \varphi_u^\varepsilon u = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon q^\varepsilon < \varepsilon C^\varepsilon, \\ \frac{\tau^\varepsilon(1+q^\varepsilon)}{(q^+ - q^-)}(\varphi^+ - \varphi^-) & \text{si } q^\varepsilon = C^\varepsilon. \end{cases} \quad (8.8)$$

Changement de variables

Posons maintenant

$$\varphi^\varepsilon(t, u) = \psi^\varepsilon(-\tau^-(t_1 - t) - \ln \frac{u}{u_1}, \tau^+(t_1 - t) + \ln \frac{u}{u_1}),$$

c'est à dire qu'on a posé implicitement

$$\begin{cases} x = -\tau^-(t_1 - t) - \ln \frac{u}{u_1}, \\ y = \tau^+(t_1 - t) + \ln \frac{u}{u_1}, \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} t = t_1 - \frac{x+y}{\tau^+ - \tau^-}, \\ u = u_1 \exp\left(-\frac{\tau^+ x + \tau^- y}{\tau^+ - \tau^-}\right), \end{cases}$$

et

$$\varphi^\varepsilon(t, u) = \psi^\varepsilon(x, y).$$

Avec ces notations, on voit facilement que

$$\begin{aligned} \varphi_t^+ + \tau^+ \varphi_u^+ u &= -(\tau^+ - \tau^-) \psi_x^+, \\ \varphi_t^- + \tau^- \varphi_u^- u &= -(\tau^+ - \tau^-) \psi_y^-. \end{aligned}$$

On pose encore

$$a = \frac{\tau^+(1 + C^+)}{(\tau^+ - \tau^-)(C^+ - C^-)} \quad \text{et} \quad b = \frac{-\tau^-(1 + C^-)}{(\tau^+ - \tau^-)(C^+ - C^-)}.$$

L'EDP s'écrit, en tenant compte de (8.8)

$$\begin{aligned} \psi_x^+ &= \begin{cases} 0 & \text{là où } q^+ < C^+, \\ -a(\psi^+ - \psi^-) & \text{là où } q^+ = C^+, \end{cases} \\ \psi_y^- &= \begin{cases} 0 & \text{là où } q^- > C^-, \\ b(\psi^+ - \psi^-) & \text{là où } q^- = C^-. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Le domaine

Le domaine Ω est maintenant le quadrant positif, tronqué par une droite

$$x + y = (\tau^+ - \tau^-)(t_1 - t_m) =: y_m.$$

Et dans le cas « Équivoque-Focale digitale », le domaine $q^+ = C^+$ est défini par $\tau^+ x + \tau^-(y - y_m) \geq 0$, ou encore, en posant $-\tau^+/\tau^- = m$,

$$y \leq mx + y_m.$$

Enfin, toujours dans ce cas, Ω est en outre tronqué par $u \leq u_m$, soit pour un certain y_M ,

$$y \leq mx + y_M.$$

Dans tous les cas, on connaît \check{v} et \check{w} , et donc ψ^- et ψ^+ sur le bord Γ de Ω , sauf avons-nous indiqué, en $y = mx + y_M$ où on connaît seulement $\psi^+ = D$.

A.4 Existence et unicité de la solution

Cas vanille

On a donc

$$\begin{aligned}\psi_x^+ &= -a(\psi^+ - \psi^-), \\ \psi_y^- &= b(\psi^+ - \psi^-).\end{aligned}\tag{8.10}$$

En dérivant la première équation, il vient

$$\psi_{xy}^+ + a\psi_y^+ - a\psi_y^- = 0.$$

On utilise alors $a\psi_y^- = ab(\psi^+ - \psi^-) = -b\psi_x^+$ pour obtenir

$$\psi_{xy}^+ + a\psi_y^+ + b\psi_x^+ = 0.\tag{8.11}$$

Posons enfin

$$e^{ax+by}\psi^+(x, y) = z(x, y).$$

L'équation (8.11) devient, en posant $ab = c$

$$z_{xy} = cz.\tag{8.12}$$

La fonction ψ^+ est connue sur l'axe des x pour $x \geq y_m$. Donc aussi ψ_x^+ et donc aussi z_x . Sur le bord $x + y = y_m$, on a ψ^+ et ψ^- , donc par (8.9), on a aussi ψ_x^+ . Étendons ψ_x^+ dans la région $x < y_m$, $y = 0$ par sa valeur pour le même x sur ce bord $x + y = y_m$. Ceci permet d'étendre z_x et donc z sur tout le demi-axe des $x > 0$. Soit $z_0(x)$ cette extension.

À $x \in \Omega$ donné, faisons correspondre $y_0(x) = \min\{y \mid (x, y) \in \Omega\}$. De même, à $y \in \Omega$ fixé, faisons correspondre $x_1(y) = \min\{x \mid (x, y) \in \Omega\}$, et $z_1(y) = z(x_1(y), y)$ qui est une donnée. L'équation (8.12) donne

$$z_x(x, y) = z_x(y_0(x)) + \int_{y_0(x)}^y cz(x, \eta)d\eta.$$

Posons alors

$$c(x, y) = \begin{cases} c & \text{si } (x, y) \in \Omega, \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

L'équation ci-dessus peut aussi bien s'écrire

$$z_x(x, y) = z_{0x} + \int_0^y c(x, \eta)z(x, \eta)d\eta.$$

Intégrant alors en x , il vient

$$z(x, y) = z_1(y) + z_0(x) - z_0(x_1(y)) + \int_{[x_1, x] \times [0, y]} c(\xi, \eta) z(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

Mais avec notre convention que $c(x, y) = 0$ hors de Ω , on ne change pas l'intégrale en rajoutant le rectangle $(\xi, \eta) \in [0, x_0] \times [0, y]$. On a donc finalement

$$z(x, y) = z_1(y) + z_0(x) - z_0(x_1(y)) + \int_{R(x, y)} c(\xi, \eta) z(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (8.13)$$

où $R(x, y)$ désigne le rectangle $[0, x] \times [0, y]$.

Il s'agit d'une équation de point fixe sur la fonction z . Nous aurons montré l'existence et l'unicité de sa solution dans un espace adéquate si nous pouvons exhiber une norme pour laquelle cet espace est complet et l'opération γ :

$$\gamma(z(\cdot, \cdot))(x, y) = \int_{R(x, y)} c(\xi, \eta) z(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

est contractante.

De manière classique, nous proposons de chercher $z(\cdot, \cdot)$ dans \mathcal{C}^0 , et pour $\alpha > 0$, nous introduisons la norme

$$\|z\|_\alpha = \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2} e^{-\alpha(x+y)} |z(x, y)|.$$

On a alors

$$|z(x, y)| \leq e^{\alpha(x+y)} \|z\|_\alpha.$$

En outre $c(x, y) \leq c$. Donc

$$\left| \int_{R(x, y)} c(\xi, \eta) z(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| \leq c \int_{R(x, y)} e^{\alpha(\xi+\eta)} d\xi d\eta \|z\|_\alpha = \frac{c}{\alpha^2} (e^{\alpha x} - 1)(e^{\alpha y} - 1) \|z\|_\alpha.$$

Soit

$$e^{-\alpha(x+y)} \left| \int_{R(x, y)} c(\xi, \eta) z(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| \leq \frac{c}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha x})(1 - e^{-\alpha y}) \|z\|_\alpha < \frac{c}{\alpha^2} \|z\|_\alpha.$$

En utilisant le caractère uniforme de la majoration ci-dessus, il vient

$$\|\gamma(z)\|_\alpha < \frac{c}{\alpha^2} \|z\|_\alpha.$$

Il suffit de choisir $\alpha > \sqrt{c}$ pour conclure à l'existence d'une unique solution $z(x, y)$, et donc aussi $\psi^+(x, y)$. Enfin on en déduit $\psi^- = \psi^+ - (1/a)\psi_x^+$.

Cas digital

Dans le cas digital, soit $\Omega' = \Omega \cap \{y \leq mx + y_m\}$ la région où $q^+ = C^+$, et où donc on a encore les équations (8.10). Dans la région $\Omega - \Omega'$, on a $\psi_x^+ = 0$. Ainsi, en utilisant les mêmes notations que ci-dessus, on a $\psi^+(x, y) = \psi^+(x_1(y), y)$, qui est connu par hypothèse. Ceci permet de déterminer ψ^+ sur le bord de Ω' . Soit $x'_1(y)$ l'abscisse du point d'ordonnée y sur le bord de Ω' .

On fait les mêmes calculs que dans le cas vanille, en remplaçant $x_1(y)$ par $x'_1(y)$, et en gardant dans la formule (8.13) $R(x, y) = [x'_1(y), x] \times [0, y]$. Il n'en demeure pas moins qu'a fortiori

$$\int_{R(x,y)} e^{\alpha(\xi+\eta)} d\xi d\eta \leq \frac{1}{\alpha^2} (e^{\alpha x} - 1)(e^{\alpha y} - 1).$$

Le même développement que ci-dessus montre donc l'existence et l'unicité de ψ^+ .

Ici il faut enfin utiliser l'équation $\psi_y^- + b\psi^- = b\psi^+$ et la connaissance de $\psi^-(x, y_0(x))$ pour conclure à l'existence et à l'unicité de ψ^- .

Remarquons enfin que nous avons prouvé l'existence et l'unicité dans $\mathcal{C}^0(\Omega)$. Le domaine étant borné, nous avons donc montré que les ψ^ε le sont aussi. Ceci n'implique pas que \check{v} et \check{w} le soient. On sait en effet, on a $\check{v} = (\psi^+ - \psi^-)/(q^+ - C^-)$ et $\check{w} = (q^+\psi^- - C^-\psi^+)/(q^+ - C^-)$. Au voisinage du bord $u = u_-$, $q^+ \rightarrow C^-$, de sorte que \check{v} et \check{w} divergent.

A.5 Discontinuités du gradient

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème A.2 *Si une solution continue $\check{V}(t, u)$ de (8.6) présente un saut de gradient sur une courbe différentiable du domaine de définition, cette courbe est nécessairement une trajectoire $\dot{u} = \tau^\varepsilon u$, $\varepsilon \in \{-, +\}$. De plus sur cette trajectoire la différence de gradient (saut de gradient), noté $(\delta\check{V}_t, \delta\check{V}_u)$, satisfait $Q^{-\varepsilon}\delta\check{V}_t = Q^{-\varepsilon}\delta\check{V}_u = 0$.*

Soit (dt, du) une tangente à la courbe, et $(\delta\check{V}_t, \delta\check{V}_u)$ le saut de gradient. La continuité de \check{V} impose

$$\delta\check{V}_t dt + \delta\check{V}_u du = 0 \tag{8.14}$$

et le fait que la même fonction $\check{V}(t, u)$ sur la courbe satisfasse l'équation (8.6) avec les gradients $(\check{V}_t, \check{V}_u)$ et $(\check{V}_t + \delta\check{V}_t, \check{V}_u + \delta\check{V}_u)$ impose, en prenant la différence, l'équation

$$\delta\check{V}_t + \mathcal{T}\delta\check{V}_u u = 0. \tag{8.15}$$

En rapprochant les deux équations (8.14) et (8.15), nous obtenons

$$\left(\mathcal{T} - \frac{1}{u} \frac{du}{dt} I \right) \delta\check{V}_u = 0,$$

où I désigne la matrice identité 2×2 . Donc, soit $\delta\check{V}_u = 0$, mais alors aussi $\delta\check{V}_t = 0$, et il n'y a pas de discontinuité de gradient, soit $(1/u)(du/dt)$ est une valeur propre de \mathcal{T} , à savoir un τ^ε . En conséquent,

une discontinuité de gradient ne peut être portée que par une trajectoire $\dot{u} = \tau^\varepsilon u$, $\varepsilon \in \{-, +\}$.

De plus, nous venons de voir que $\delta\check{V}_u$, mais également $\delta\check{V}_t$ compte tenu de la condition de continuité (8.14), est un vecteur propre de \mathcal{T} , c'est-à-dire de la forme

$$\delta\check{V}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ -q^\varepsilon \end{pmatrix} \delta\check{v}_u .$$

Nous en concluons que le long de cette trajectoire $\dot{u} = \tau^\varepsilon u$, nous avons $Q^{-\varepsilon}\delta\check{V}_t = Q^{-\varepsilon}\delta\check{V}_u = 0$ ■

Remarque A.1 Dans l'article [MB05], il est montré que le système d'EDP couplé linéaire du premier ordre (8.6) peut se réécrire sous la forme d'une EDP scalaire du second ordre linéaire hyperbolique dont les caractéristiques sont les champs de trajectoires $\dot{u} = \tau^- u$ et $\dot{u} = \tau^+ u$. Le passage à cette EDP scalaire du second ordre donnerait ainsi une autre façon de démontrer la première affirmation du théorème A.2 étant donné qu'une discontinuité de gradient ne peut être portée que par une caractéristique.

B Vérification numérique de la conjecture $W_{k^+}^h(u, v)$ affine en deux morceaux

Nous effectuons cette vérification ¹³, pour les paramètres par défauts rappelés dans la table 7.1. La Valeur du call digitale est triviale pour $u > u_- = 1,0035K = 1,0035$. C'est pourquoi, nous décidons de vérifier cette conjecture pour $u = \{0.8K, 0.9K, K\}$ en affichant les graphes des fonctions $W_{k^+}(u, v)$ dans le plan (v, w) pour différents $k \in \{0, \dots, 44\}$.

Les résultats de cette vérification sont visibles respectivement, sur la figure 8.5 pour $u = 0.8K$, sur la figure 8.6 pour $u = 0.9K$, et sur la figure 8.7 pour $u = K$. Pour des questions de lisibilité les résultats ont été affichés :

- Pour $u = 0.8K$: à tous les instants t_{k^+} .
- Pour $u = 0.9K$ aux instants t_{k^+} pour $k = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43\}$.
- Pour $u = K$, aux instants t_{k^+} pour $k = \{0, 10, 20, 30, 35, 40, 43\}$.

Pour se repérer facilement sur ces figures, nous rappelons au lecteur que la fonction $W_{k^+}^h(u, v)$ est croissante avec la maturité, c'est à dire est croissante lorsque k décroît.

Nous constatons (sur ces exemples) que la conjecture est bien vérifiée numériquement ¹⁴.

Si le lecteur compte le nombre de tracés sur les différents figures, il pourra remarquer que sur la figure 8.5 et sur la figure 8.6, il semble manquer respectivement six et un graphes de $W_{k^+}^h(u, v)$, ce que nous allons justifier en expliquant l'allure générale des différents tracés. Pour cela nous avons représenté sur la figure 8.8 la région d'intérêt Λ_k du plan (k, u) ainsi que les couples (k^+, u) pour lesquels nous avons tracé $W_{k^+}^h(u, v)$ en fonction de v .

¹³Elle a bien entendu été effectuée à partir de l'algorithme de programmation dynamique 6.4 et non de l'algorithme rapide

¹⁴Dans certains cas les valeurs v_k^- et v_k^+ obtenues par la procédure de recherche (6.6) diffèrent d'un pas de temps du fait de la discrétisation en espace.

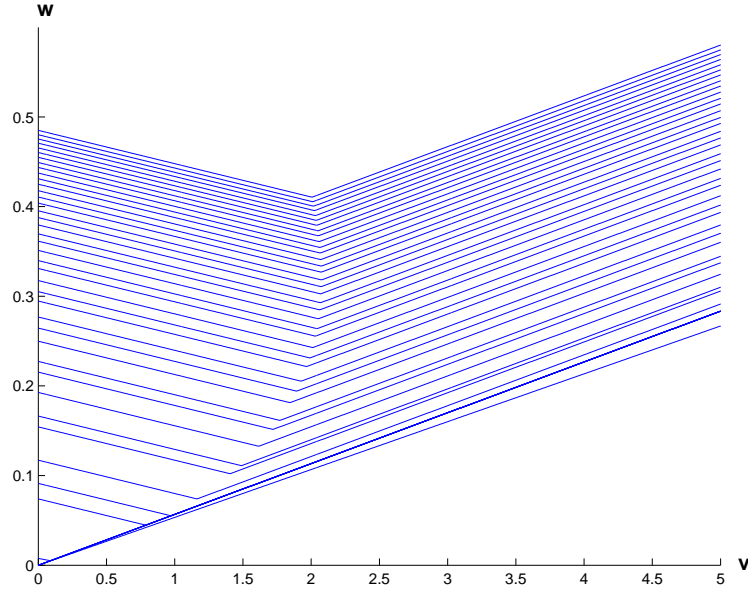


FIG. 8.5 – Vérification du caractère affine en v de $W_{k+}^h(0.8K, v)$.

Rappelons que $W_{k+}^h(u, v)$ est la Valeur obtenue avant la minimisation en ξ . Des équations (6.18), nous obtenons

$$q_{\mathbb{K}-1+}^- = (1 + \tau_h^-)c^- + \tau_h^- < C^- \quad \text{puis} \quad q_k^- = q_{k+}^- = C^- \quad \text{pour} \quad k < \mathbb{K} - 1.$$

et :

- ➔ Pour $u = 0.8K$: $q_{\mathbb{K}-1+}^+(u) = (1 + c^-)/0.8 - 1 \simeq 2,46 \times 10^{-1} > C^+$ puis $q_k^+ = q_{k+}^+ = C^+$ pour $k < \mathbb{K} - 1$.
- ➔ Pour $u = 0.9K$: $q_{\mathbb{K}-1+}^+ = (1 + c^-)/0.9 - 1 \simeq 1,07 \times 10^{-1} > C^+ \simeq 7 \times 10^{-3}$ puis $q_k^+ = q_{k+}^+ = C^+$ pour $k < \mathbb{K} - 1$.
- ➔ Pour $u = K$: $q_{k+}^+(u) = c^- \in [C^-, C^+] \quad \forall k$.

La figure 8.8 montre que les sept premiers couples $(k, u = 0.8K)$ (en temps rétrograde) sont à gauche de la région d'intérêt où $\check{v}_k(0.8K) = 0$. Ainsi sur la figure 8.5, nous retrouvons les équations $W_{(\mathbb{K}-1)+}^h(0.8K) = -q_{\mathbb{K}-1+}^-v$ avec $q_{\mathbb{K}-1+}^- < C^-$ puis $q_{k+}^- = C^-$ aux pas suivants. Nous comprenons ainsi qu'entre le deuxième pas et le septième pas les tracés sont confondus avec $W_{k+}^h(0.8K) = -C^-v$. Pour les pas suivants où les couples $(k, 0.8K)$ sont situés dans la région d'intérêt où $\check{v}_k(0.8K) > 0$, nous retrouvons une fonction affine en deux morceaux avec pour pente en v , $-q^+ = -C^+$ pour $v < \check{v}_k$ et $-q^+ = -C^-$ pour $v > \check{v}_k$. L'interprétation des tracés de la figure 8.6 est similaire. Sur la figure 8.7, c'est à dire en $u = K \in [u_+, u_-]$, nous retrouvons bien une fonction affine en deux morceaux d'équation $w = D - q_k^+(K)v = 1 - c^-v$ pour $v < \check{v}_k$ et de pente $-C^-$ pour $v > \check{v}_k$.

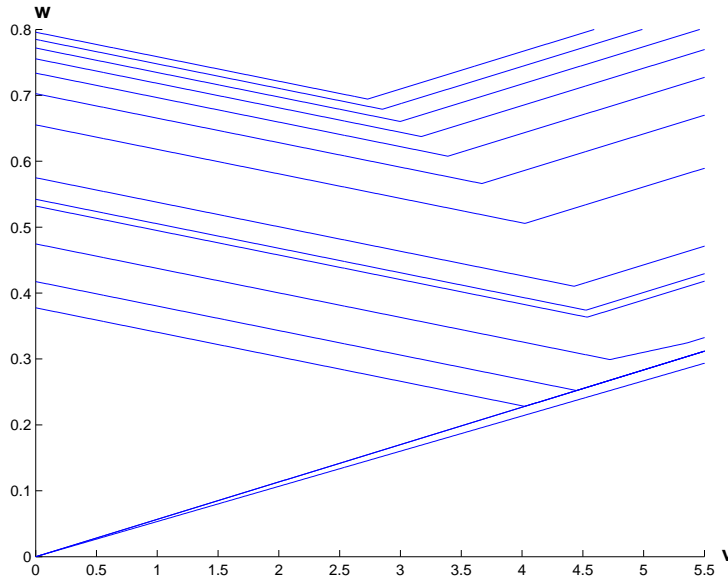


FIG. 8.6 – Vérification du caractère affine en v de $W_{k+}^h(0.9K, v)$.

C Les suites de cours utilisées pour l'étude de la robustesse

La table 8.1 donne les deux suites de cours réelles à la clôture¹⁵ sur $T = 44$ jours, utilisées pour les simulations du paragraphe 7.4.2, ainsi que les variations journalières correspondantes $\tau(k-1) = \frac{S(k)-S(k-1)}{S(k-1)}$. La figure 8.9 montre les évolutions respectives de ces cours sur les 44 jours.

Remarque C.1 Nous rappelons qu'en variables actualisés $\tau = -0.000121 = -\rho_j$ correspond à $\tilde{\tau} = 0$.

De manière similaire, la table 8.2 donne les deux suites de cours simulées suivant une loi lognormale de moyenne $\mu = 0$ et de volatilité respectives $\sigma = 0.1$ et $\sigma = 0.01$ ainsi que les variations correspondantes $\tau(k-1)$, et la figure 8.10 montre les évolutions de ces cours sur les 44 jours.

Remarque C.2 Pour simuler une suite de cours suivant une loi log-normale, nous avons implémenté à la base la méthode de Box-Muller pour simuler d'abord une suite de cours $S_{\mathcal{N}}(t)$ suivant une loi normale, puis nous avons appliqué la relation $S_{\text{Log}\mathcal{N}}(t) = e^{\mu h + \sigma \sqrt{h} S_{\mathcal{N}}(t)}$. Notons que pour cette implémentation, faite en langage C, nous avons utilisé la fonction `rand()` dans l'implémentation de la méthode de Box-Muller. Pour ce faire nous avons choisi des souches différentes pour simuler les deux suites (après 1000 générations pour $\sigma = 0.1$ et après 300 générations pour $\sigma = 0.01$).

¹⁵Donc $h = 1$ et $t_k = k \in \{0, \dots, T\}$.

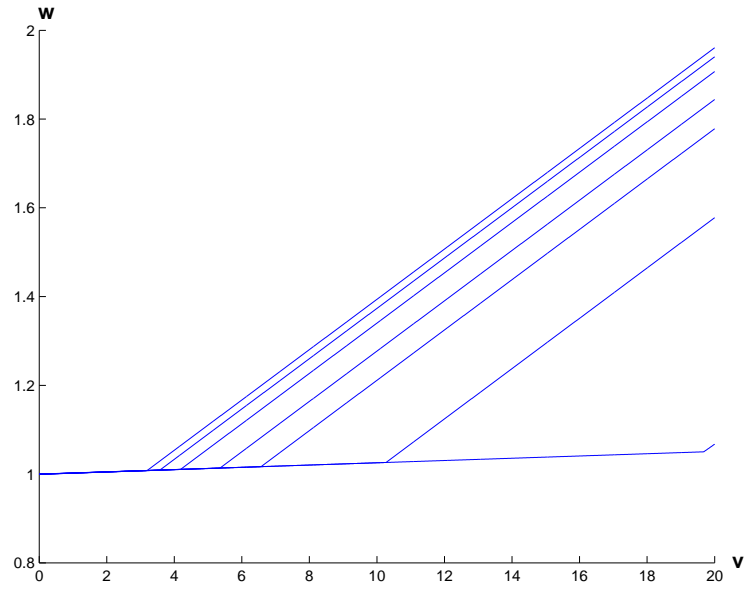


FIG. 8.7 – Vérification du caractère affine en v de $W_{k+}^h(K, v)$.

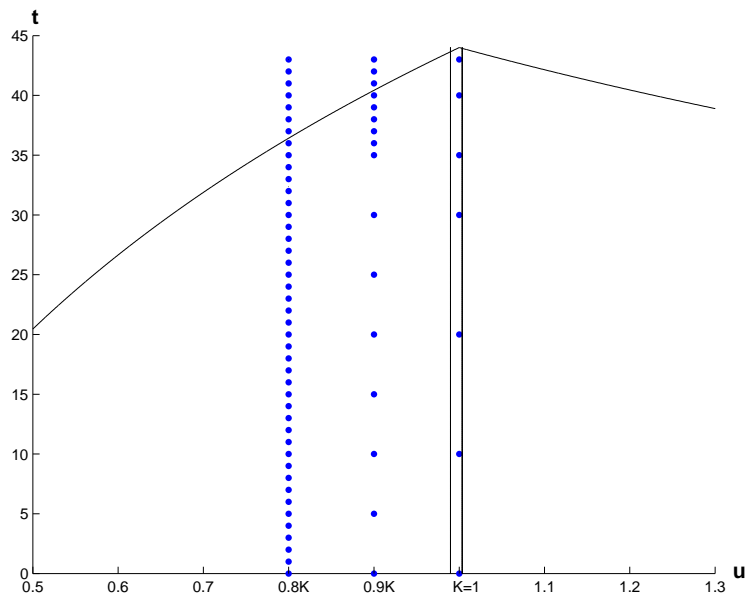


FIG. 8.8 – Une vue de la situation dans le plan (u, k) .

$S(k)$	$u(k)$	$\tau(k-1)$	τ ordonnés		$S(k)$	$u(k)$	$\tau(k-1)$	τ ordonnés
20.58	20.689491				3483.22	3 501.751593		
20.43	20.536216	-0.007408	-0.097709		3525.85	3544.180962	0.012117	-0.025891
19.97	20.071404	-0.022634	-0.068103		3521.51	3539.391542	-0.001351	-0.021057
19.51	19.606703	-0.023152	-0.061325		3539.43	3556.973560	0.004968	-0.011583
19.06	19.152163	-0.023183	-0.057970		3526.57	3543.622452	-0.003754	-0.010529
18.75	18.838392	-0.016383	-0.044735		3540.23	3556.919534	0.003752	-0.010268
16.92	16.997715	-0.097709	-0.031194		3598.26	3614.787153	0.016269	-0.010074
16.92	16.995665	-0.000121	-0.023183		3661.63	3678.004645	0.017489	-0.009267
16.54	16.611963	-0.022577	-0.023152		3652.52	3668.411490	-0.002608	-0.007652
16.28	16.348860	-0.015838	-0.022634		3688.68	3704.282074	0.009778	-0.007502
16.74	16.808778	0.028132	-0.022577		3688.91	3704.066331	-0.000058	-0.007006
16.42	16.485475	-0.019234	-0.021740		3680.13	3694.804658	-0.002500	-0.006681
15.47	15.529814	-0.057970	-0.020634		3738.54	3752.994953	0.015749	-0.006628
15.47	15.527942	-0.000121	-0.019234		3818.71	3833.012661	0.021321	-0.003754
16.62	16.680237	0.074208	-0.016383		3783.78	3797.493851	-0.009267	-0.003494
16.62	16.678226	-0.000121	-0.015838		3810.23	3823.578586	0.006869	-0.002745
15.49	15.542393	-0.068103	-0.010587		3800.23	3813.083689	-0.002745	-0.002608
15.40	15.450225	-0.005930	-0.010509		3875.81	3888.450374	0.019765	-0.002500
15.24	15.287859	-0.010509	-0.009695		3883.31	3895.505030	0.001814	-0.001351
15.11	15.155623	-0.008650	-0.008650		3935.88	3947.764013	0.013415	-0.001101
14.80	14.842897	-0.020634	-0.007408		3932.02	3943.416777	-0.001101	-0.000121
14.48	14.520218	-0.021740	-0.005930		3986.75	3997.823266	0.013797	-0.000121
14.48	14.518467	-0.000121	-0.000811		3903.27	3913.639408	-0.021057	-0.000121
14.03	14.065576	-0.031194	-0.000121		3873.87	3883.692925	-0.007652	-0.000058
14.06	14.093952	0.002017	-0.000121		3894.48	3903.884371	0.005199	0.000523
14.18	14.212528	0.008413	-0.000121		3894.48	3903.413614	-0.000121	0.001814
14.33	14.361140	0.010456	-0.000121		3867.66	3876.064632	-0.007006	0.003752
14.18	14.209100	-0.010587	-0.000121		3884.61	3892.582014	0.004261	0.003946
14.19	14.217406	0.000585	0.000570		3845.94	3853.367933	-0.010074	0.004261
14.48	14.506217	0.020314	0.000585		3861.58	3868.571584	0.003946	0.004968
14.64	14.664738	0.010928	0.002017		3885.69	3892.255825	0.006122	0.005199
15.24	15.263911	0.040858	0.003012		3860.40	3866.456791	-0.006628	0.006122
14.56	14.581085	-0.044735	0.004000		3835.07	3840.623864	-0.006681	0.006869
14.62	14.639407	0.004000	0.008413		3822.13	3827.203558	-0.003494	0.009778
14.48	14.497473	-0.009695	0.009441		3783.34	3787.905241	-0.010268	0.012117
14.48	14.495724	-0.000121	0.010456		3685.83	3689.832579	-0.025891	0.013415
14.47	14.483967	-0.000811	0.010928		3777.23	3780.875855	0.024674	0.013797
14.48	14.492229	0.000570	0.010928		3733.93	3737.083363	-0.011583	0.015749
14.64	14.650597	0.010928	0.013850		3880.92	3883.729115	0.039241	0.016269
14.78	14.788915	0.009441	0.020314		3880.92	3883.260788	-0.000121	0.017489
15.24	15.247353	0.030999	0.028132		3974.25	3976.167549	0.023925	0.019765
15.96	15.965775	0.047118	0.030999		3944.91	3946.337458	-0.007502	0.021321
16.01	16.013862	0.003012	0.040858		3947.45	3948.402194	0.000523	0.023925
15.03	15.031813	-0.061325	0.047118		3906.36	3906.831113	-0.010529	0.024674
15.24	15.240000	0.013850	0.074208		3906.36	3906.360000	-0.000121	0.039241

TAB. 8.1 – Cours de l'action Air France entre le 18 août 1998 et le 20 octobre 1998 (à gauche) et cours du CAC40 entre le 6 mars 1998 et le 8 mai 1998 (à droite).

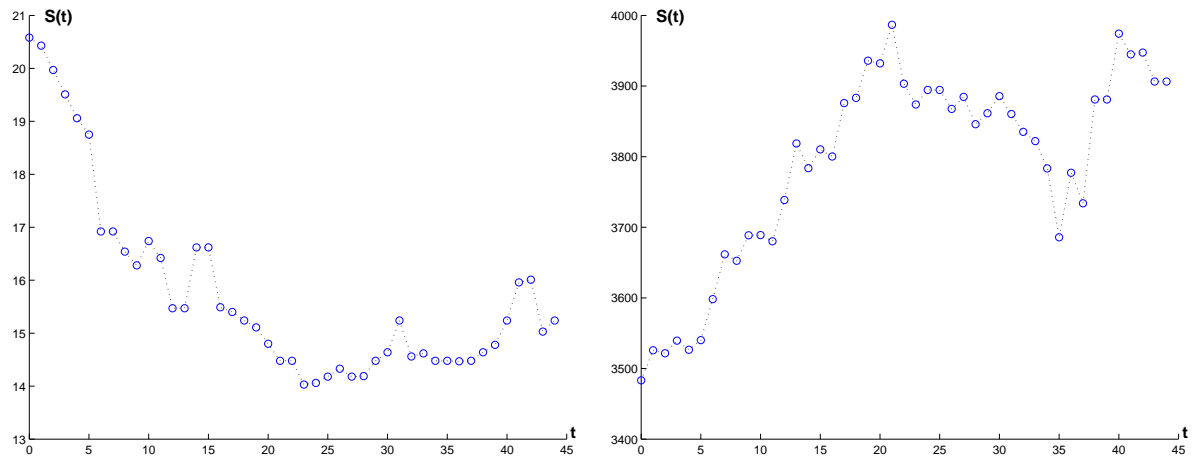


FIG. 8.9 – Evolution du cours de l'action Air France entre le 18 août 1998 et le 20 octobre 1998 (figure de gauche) et du cours du CAC40 entre le 6 mars 1998 et le 8 mai 1998 (figure de droite) .

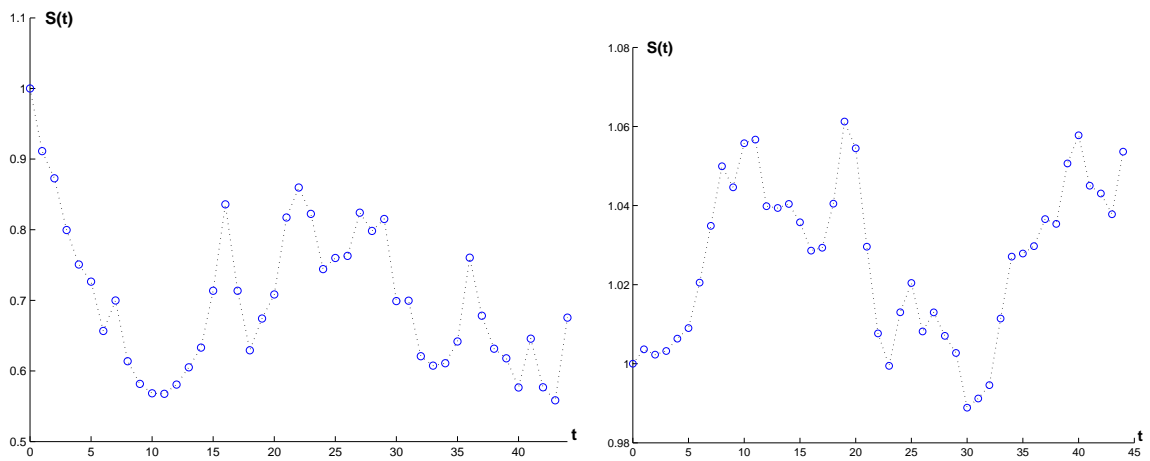


FIG. 8.10 – Evolution du cours log-normal simulé (pour $\sigma = 0.1$ à gauche et $\sigma = 0.01$ à droite).

$S(k)$	$u(k)$	$\tau(k-1)$	τ ordonnés	$S(k)$	$u(k)$	$\tau(k-1)$	τ ordonnés
1.000000	1.005320			1.000000	1.005320		
0.911233	0.915970	-0.088877	-0.146589	1.003647	1.008865	0.003526	-0.023703
0.872800	0.877232	-0.042292	-0.142717	1.002303	1.007392	-0.001459	-0.021434
0.799523	0.803486	-0.084067	-0.123079	1.003214	1.008186	0.000788	-0.016048
0.750678	0.754308	-0.061205	-0.118245	1.006346	1.011212	0.003001	-0.013927
0.726421	0.729846	-0.032430	-0.112468	1.009020	1.013777	0.002536	-0.012175
0.656640	0.659656	-0.096171	-0.108284	1.020520	1.025207	0.011275	-0.012119
0.699749	0.702878	0.065522	-0.106639	1.034880	1.039508	0.013949	-0.008261
0.613698	0.616368	-0.123079	-0.096171	1.049948	1.054516	0.014438	-0.007047
0.581739	0.584200	-0.052191	-0.095180	1.044628	1.049046	-0.005187	-0.006501
0.568285	0.570620	-0.023245	-0.088877	1.055772	1.060109	0.010546	-0.005988
0.567697	0.569961	-0.001155	-0.084067	1.056674	1.060888	0.000734	-0.005187
0.580766	0.583012	0.022898	-0.069021	1.039842	1.043862	-0.016048	-0.005154
0.605117	0.607383	0.041802	-0.067121	1.039389	1.043282	-0.000556	-0.004588
0.633118	0.635412	0.046148	-0.061205	1.040419	1.044190	0.000870	-0.004411
0.713535	0.716035	0.126882	-0.052191	1.035770	1.039399	-0.004588	-0.002012
0.835955	0.838782	0.171426	-0.043628	1.028595	1.032074	-0.007047	-0.001459
0.713499	0.715826	-0.146589	-0.042292	1.029330	1.032687	0.000594	-0.001273
0.629208	0.631183	-0.118245	-0.032430	1.040492	1.043759	0.010721	-0.000556
0.674278	0.676314	0.071502	-0.032072	1.061249	1.064453	0.019826	0.000594
0.708322	0.710375	0.050362	-0.031392	1.054476	1.057533	-0.006501	0.000627
0.817258	0.819528	0.153656	-0.023245	1.029607	1.032466	-0.023703	0.000734
0.859823	0.862107	0.051956	-0.021548	1.007660	1.010337	-0.021434	0.000788
0.822410	0.824496	-0.043628	-0.021519	0.999456	1.001990	-0.008261	0.000870
0.744222	0.746020	-0.095180	-0.001155	1.013020	1.015466	0.013449	0.001714
0.759950	0.761693	0.021009	0.000699	1.020414	1.022755	0.007178	0.002225
0.762945	0.764603	0.003821	0.003821	1.008170	1.010360	-0.012119	0.002536
0.824101	0.825792	0.080027	0.005427	1.012993	1.015072	0.004663	0.003001
0.798327	0.799869	-0.031392	0.020929	1.007049	1.008994	-0.005988	0.003284
0.815133	0.816609	0.020929	0.021009	1.002727	1.004543	-0.004411	0.003526
0.698884	0.700065	-0.142717	0.022898	0.988882	0.990553	-0.013927	0.004663
0.699457	0.700555	0.000699	0.041802	0.991201	0.992756	0.002225	0.006504
0.620866	0.621765	-0.112468	0.046148	0.994577	0.996017	0.003284	0.006659
0.607561	0.608367	-0.021548	0.050327	1.011432	1.012775	0.016825	0.007178
0.610932	0.611669	0.005427	0.050362	1.027093	1.028332	0.015362	0.010546
0.641756	0.642452	0.050327	0.051956	1.027861	1.028977	0.000627	0.010721
0.760437	0.761171	0.184790	0.065522	1.029746	1.030740	0.001714	0.011275
0.678175	0.678748	-0.108284	0.071502	1.036569	1.037444	0.006504	0.013449
0.631443	0.631900	-0.069021	0.080027	1.035374	1.036123	-0.001273	0.013949
0.617930	0.618303	-0.021519	0.119764	1.050659	1.051293	0.014641	0.014438
0.576523	0.576802	-0.067121	0.126882	1.057783	1.058294	0.006659	0.014641
0.645648	0.645882	0.119764	0.153656	1.045031	1.045409	-0.012175	0.015138
0.576867	0.577006	-0.106639	0.171426	1.043054	1.043305	-0.002012	0.015362
0.558433	0.558500	-0.032072	0.184790	1.037803	1.037928	-0.005154	0.016825
0.675564	0.675564	0.209605	0.209605	1.053641	1.053641	0.015138	0.019826

TAB. 8.2 – Cours log-normal simulé avec $\sigma = 0.1$ (à gauche) et $\sigma = 0.01$ (à droite)

Bibliographie

- [ADGS98] H. Ahn, M. Dayal, E. Grannan, and G. Swindle. Option replication with transaction costs : general diffusion limits. *The Annals of Applied Mathematics*, 8(3) :676–707, 1998.
- [APSP05] J.P. Aubin, D. Pujal, and P. Saint-Pierre. Dynamic management of portfolios with transaction costs under tyochastic uncertainty. In M. Breton and H. Ben-Ameur, editors, *Numerical Methods in Finance*, pages 59–89. Springer, New-York, 2005.
- [AS64] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, ninth dover printing, tenth GPO printing edition, 1964.
- [Aub91] J.P. Aubin. *Viability Theory*. Birkhäuser, Boston, 1991.
- [Bac00] L. Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales Sciences de l'Ecole Normale Supérieure*, 17 :21–86, 1900.
- [Bar90] G. Barles. An approach of deterministic control problem with unbounded data. In *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, volume 7, pages 235–258. Gauthier Villars, 1990.
- [Bar94] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17. Mathématiques et Applications, Springer-Verlag, Paris, 1994.
- [BCD97] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Birkhäuser, Boston, 1997.
- [BD62] R. Bellman and F. Dreyfus. *Applied Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1962.
- [BEFT06] P. Bernhard, N. El Farouq, and S. Thiery. An impulsive differential game arising in finance with interesting singularities. In A. Haurie, S. Muto, L.A. Petrosjan, and T.E.S Raghavan, editors, *Advances In Dynamic Games*, volume 8 of *Annals of the ISDG*, pages 335–363. Springer, New-York, 2006. (Also in 10th ISDG International Symposium on Dynamic Games and Applications, Saint-Petersburg, 2002).
- [BEFT07] P. Bernhard, N. El Farouq, and S. Thiery. Robust control approach to option pricing : A representation theorem and fast algorithm. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46(6) :2280–2302, 2007.
- [Bel57] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1957.
- [Ben82] J.L. Benssoussan, A. et Lions. *Contrôle impulsif et inéquations quasivariationnelles*. Gauthier-Villars, Paris, 1982.

- [Ber70] P. Bernhard. *Linear Differential Games and the Isotropic Rocket*. PhD thesis, Stanford University, 1970.
- [Ber71] L.D. Berkovitz. Lectures on differential games. In *Differential Games and Related Topics*. Kuhn and Szego, ed North Holland, 1971.
- [Ber75] P. Bernhard. New results about corners in differential games including state constraints. In *IFAC World Congress*, Boston, 1975.
- [Ber76] P. Bernhard. *Commande optimale, décentralisation et jeux dynamiques*. Dunod, Paris, 1976.
- [Ber77] P. Bernhard. Singular surfaces in differential games, an introduction. In P. Haggerton, G.J. Olsder, and H. Knobloch, editors, *Differential games and Applications*, volume 3 of *Lecture Notes in Information and Control Sciences*, pages 1–33. Springer Verlag, Berlin, 1977.
- [Ber79] P. Bernhard. Contribution à l'étude des jeux différentiels à deux joueurs, somme nulle et information imparfaite. Thèse de doctorat d'État des sciences mathématique de l'Université de Paris 6, 1979.
- [Ber00] P. Bernstein. *Des idées capitales*. Collection Quadrige, Presses Universitaires de France (PUF), Paris, 2000.
- [Ber03] P. Bernhard. A robust control approach to option pricing. In M. Salmon, editor, *Applications of Robust Decision Theory and Ambiguity in Finance*. City University Press, London, 2003.
- [Ber05a] P. Bernhard. On the singularities of an impulsive differential game arising in mathematical finance. *International Game Theory Review*, 8 :219–229, 2005.
- [Ber05b] P. Bernhard. The robust control approach to option pricing and interval models : an overview. In M. Breton and H. Ben-Ameur, editors, *Numerical Methods in Finance*, pages 91–108. Springer, New-York, 2005.
- [Ber05c] P. Bernhard. A robust control approach to option pricing including transaction costs. In A.S Novak and K. Szajowski, editors, *Advances in Dynamic Games*, volume 7 of *Annals of the ISDG*, pages 391–416. Birkäuser, Boston, 2005.
- [BGL69] A. Blaquiere, F. Gérard, and G. Leitmann. *Qualitative and quantitative games*. Academic Press, New York, 1969.
- [BHBM06] H. Ben-Hameur, M. Breton, and J.-M Martinez. A dynamic programming approach for pricing derivatives in the GARCH models. Cahier du GERAD G-2005-31, GERAD, HEC Montréal, 2006. ISSN : 0711-2440. Accepté dans Management Science.
- [BM69] J.V. Breakwell and A.W. Merz. Toward a complete solution of the homicidal chauffeur game. *First International Conference on the Theory and Applications of Differential Games*, Amherst, 1969.
- [Bol04] O. Bolza. *Lectures on the calculus of variation*. Dover Publications Inc, New-York, 1904.
- [Bre78] J.V. Breakwell. *Lecture notes*, volume N°3, pages 70–95. Springer Lectures Notes on Control & Information Sciences, Springer, Berlin, 1978.

- [Bre86] J.V. Breakwell. Sufficient conditions in zero-sum differential games. In *IFAC Workshop on Modeling, Decision and Games with Application to Social Phenomena, Beijing, China*, 1986.
- [BS73] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3) :637–654, 1973.
- [BTD07] P. Bernhard, S. Thiery, and M. Deschamps. La tarification d’option : Proposition pour une approche déterministe. 56^{ème} Congrès annuel de l’Association Française de Science Economique (AFSE), Paris, 2007.
- [Car65] C. Carathéodory. *Calculus of variations and partial differential equations of the first order. Part I : Partial differential equations of the first order*. Holden-Day Inc., San Francisco, 1965.
- [Car07] P. Cardaliaguet. Differential games with asymmetric information. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46(3) :816–838, 2007.
- [CD83] I. Capuzzo-Dolcetta. On a discrete approximation of the hamilton-jacobi equation of dynamic programming. *Applied Mathematics and Optimization*, 10 :367–377, 1983.
- [CEL84] M.G. Crandall, L.C. Evans, and P.L. Lions. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 282(1) :487–502, 1984.
- [CL83] M.G. Crandall and P.L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 277(1) :1–42, 1983.
- [CQ08] P. Cardaliaguet and M. Quincampoix. Deterministic differential games under probability knowledge of initial condition. *International Game Theory Review*, 10(1) :1–16, 2008.
- [CQSP07] E. Crück, M. Quincampoix, and P. Saint-Pierre. Pursuit-evasion games with impulsive dynamics. In *Advances In Dynamic Game Theory*, volume 9 of *Annals of the ISDG*, pages 223–247. Birkäuser, Boston, 2007.
- [CR85] J. Cox and M. Rubinstein. *Options Markets*. Prentice Hall, 1985.
- [Cre00] S. Crepey. *Contribution à des méthodes numériques appliquées à la finance et aux jeux différentiels*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2000.
- [CRR79] J. Cox, S. Ross, and M. Rubinstein. Option pricing : a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7 :229–263, 1979.
- [Dup94] B. Dupire. Pricing with a smile. *Risk*, 7(1) :18–20, 1994.
- [EK72] R.J. Elliot and N.J. Kalton. The existence of value in differential games of pursuit and evasion. *Journal of Differential Equations*, 12 :504–523, 1972.
- [ES84] L.C. Evans and P.E. Souganidis. Differential games and representation formulas for solutions of hamilton-jacobi equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 282 :487–502, 1984.
- [FB88] G. Faulhaber and W. Baumol. Economists as innovators : Practical products of theoretical research. *Journal of Economic Literature*, 26(2) :577–600, 1988.

- [Föll81] H. Föllmer. Calcul d'Itô sans probabilités. In *Seminar on Probability XV*, pages 143–150. Springer, Berlin, 1981.
- [Fle64] W.H. Fleming. The convergence problem for differential games II. In *Annals of mathematics study*, volume 52. Princeton University Press, 1964.
- [Fri71] A. Friedman. *Differential Games*. J.Wiley and Sons, New York, 1971.
- [HKMZ06] E. Han Kim, A. Morse, and L. Zingales. What has mattered to economics since 1970. *Journal of Economic Perspectives*, 20(4) :189–202, 2006.
- [Isa51] R. Isaacs. Games of pursuit. *Rand Report P-257*, 1951.
- [Isa65] R. Isaacs. *Differential Games*. John Wiley and Sons, New-york, 1965.
- [JosAD] Joshua. *The book of Josua*, chapter 10, vv 12-13, In the Bible. (circa 1000 to 500 AD).
- [Kel61] D.L. Kelendzheridze. On the theory of optimal pursuit. *Doklady Akad, Nauk S.S.S.R.*, 138 :529–532, 1961. English Translation in *Soviet Math.-Doklady*, **2**, 654–656 (1961).
- [Kol98] V. Kolokol'tsov. Nonexpansive maps and option pricing theory. *Kybernetika*, 34(6) :713–724, 1998.
- [Kol01] V. Kolokol'tsov. Idempotent structures in optimization. *Journal of Mathematical Sciences*, 104 :847–880, 2001.
- [KS77] N. Krassovski and A. Soubbotine. *Jeux différentiels*. Moscou, 1977. Traduction française de “Positionnal Differential Games”, Nauka, Moscow, (1974).
- [LL97] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2nd edition,. Ellipses, Paris, 1997.
- [MB05] A.A. Melikyan and P. Bernhard. Geometry of optimal trajectories around a focal singular surface in differential games. *Applied Mathematics and Optimization*, 52 :22–37, 2005.
- [McE97] W.M. McEneaney. A robust control framework for option pricing. *Mathematics of Operations Research*, 22(1) :202–221, 1997. ISSN :0364-765X.
- [Mel98] A.A. Melikyan. *Generalized Characteristics of First Order PDE's*. Application to Optimal Control and Differential Games, Birkhauser, Boston, 1998.
- [Mer71] A.W. Merz. *The Hommicial Chauffeur Game*. PhD thesis, SUDDAR Report, Standford University, 1971.
- [Mer73] R.C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics Management Science*, 4(Spring) :141–183, 1973.
- [Mer76] R.C. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2) :125–144, 1976.
- [Ols00] G.J. Olsder. Control-theoretic thoughts on option pricing. *Int. Game Theory Rev*, 2 :209–228, 2000.
- [PBG62] L. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes*. John Wiley and Sons, 1962.
- [Puj00] D. Pujal. *Evaluation et gestion dynamiques de portefeuilles*. PhD thesis, University Paris 9 Dauphine, 2000.

- [RES05a] B. Roorda, J. Engwerda, and H. Schumacher. Coherent acceptability measures in multiperiod models. *Mathematical Finance*, 15 :589–612, 2005.
- [RES05b] B. Roorda, J. Engwerda, and H. Schumacher. Performance of hedging strategies in interval models. *Kybernetika*, 41(5) :575–592, 2005.
- [Rou07] N. Rousseau. *How to keep the smile ? dynamic vega hedges and volatility derivatives*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2007.
- [Rox63] E. Roxin. Axiomatic approach in differential games. *JOTA*, 3(3) :153–163, 1963.
- [Rub06] A. Rubinstein. Dilemmas of an economic theorist. *Econometrica*, 74(4) :865–883, 2006.
- [SP04] P. Saint-Pierre. Viable capture basin for studying differential and hybrid games. *International Game Theory Review*, 6 :109–136, 2004.
- [SSC95] H.M. Soner, S.E. Shreve, and J. Cvitanic. There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs. *The Annals of Applied Probabilities*, 5 :327–355, 1995.
- [TBO06] S. Thiery, P. Bernhard, and G.J. Olsder. Robust control approach to digital option pricing : synthesis approach. In *12th International Symposium on Dynamic Games and Applications*, Sophia Antipolis, France, July 3-6, 2006. To appear in *Annals of the ISDG*, 2007.
- [Var67] P.P. Varaiya. On the existence of solutions to a differential game. *SIAM Journal on Control*, 5 :153–162, 1967.
- [VL69] P.P. Varaiya and J. Lin. Existence of saddle points in differential games. *SIAM Journal on Control*, 7(1) :141–157, 1969.