



**HAL**  
open science

# CHAOS ONDULATOIRE ET DIFFUSION MULTIPLE EN CAVITÉ MICRO-ONDES : Expériences modèles et applications

David Laurent

► **To cite this version:**

David Laurent. CHAOS ONDULATOIRE ET DIFFUSION MULTIPLE EN CAVITÉ MICRO-ONDES : Expériences modèles et applications. Physique [physics]. Université Nice Sophia Antipolis, 2007. Français. NNT : . tel-00460414

**HAL Id: tel-00460414**

**<https://theses.hal.science/tel-00460414>**

Submitted on 28 Feb 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ de NICE-SOPHIA ANTIPOLIS

UFR SCIENCES

École Doctorale :

Sciences Fondamentales et Appliquées

**DOCTORAT en SCIENCES**

spécialité **Physique**

**LAURENT David**

**CHAOS ONDULATOIRE ET DIFFUSION MULTIPLE**

**EN CAVITÉ MICRO-ONDES :**

*Expériences modèles et applications*

**Thèse dirigée par**

**Olivier LEGRAND et Fabrice MORTESSAGNE**

Soutenue **le 13 Juin 2007** devant le jury composé de :

Pierre Bruguière	Responsable Ondes DGA, Gramat	<i>Membre invité</i>
Jean-Marc Laheurte	Professeur à l'ESYCOM, UMVLV	<b>Président</b>
Olivier Legrand	Professeur au LPMC, UNSA	<i>Directeur de Thèse</i>
Fabrice Mortessagne	Maître de Conférence au LPMC, UNSA	<i>Co-directeur de Thèse</i>
Marc Saillard	Professeur au LSEET, Toulon	<i>Rapporteur</i>
Thomas Seligman	Professeur à l'ICF, UNAM (Mexique)	<i>Rapporteur</i>
René Vézinet	Expert DGA, Gramat	
Richard Weaver	Professeur, Urbana(USA)	

**REMERCIEMENTS...**

Et voilà, c'est l'heure des remerciements. La transition est tellement rapide que je n'arrive pas à réaliser. Je veux commencer par remercier toute l'équipe du LPMC et avant tout, Gérard Monnom qui m'a accueilli au sein du laboratoire. Merci à Christine, Denise, Martine, Raphaëlle et Angélique pour leur sympathie et leur gentillesse. Greg, je crois qu'il y a des modifications à faire sur le programme!! Tu as fais preuve d'une grande patience. Ta contribution a été importante dans l'obtention de mes résultats, merci. Merci aussi à Bernard et Dédé qui ont su résoudre respectivement tous mes problèmes informatiques et mécaniques.

Un grand merci à tous les membres du jury d'avoir accepté de faire le déplacement le jour de ma soutenance et plus particulièrement à Jean Marc Laheurte qui a accepté de présider ce jury d'une main de maître. Merci à Thomas Seligman et à Richard Weaver pour leurs remarques très constructives. Je remercie enfin Thomas Seligman et Marc Saillard pour avoir accepté de rapporter mon manuscrit.

Pour garder le meilleur pour la fin, un grand et gros MERCI à Fabrice et Olivier. Merci de m'avoir donné ma chance en stage de DEA après mon excursion florentine. Merci de m'avoir soutenu pour l'obtention d'une bourse de thèse afin que je puisse continuer cette belle aventure. Je me souviens de la joie que j'ai ressenti lorsque vous m'avez annoncé qu'une bourse m'était accordée. Un grand Merci plus particulièrement à Fabrice qui a fait preuve d'une présence sans faille et d'une grande patience (et oui!!!). Tu n'as jamais refusé de venir dans la salle de manip lorsque j'avais un problème technique ou une question. Le fait d'avoir travaillé à vos côtés m'a fait grandir d'un point de vue personnel. Je pense que mon pessimisme ne pouvait se soigner qu'en étant proche de personnes comme vous. Et tout ceci va beaucoup m'aider pour mon entrée dans la vie active. Ah oui, un dernier détail, ce n'est pas que je ne voulais pas vous tutoyer mais j'ai toujours eu du mal. Mais maintenant que nous sommes collègues, je peux y arriver!!! Merci Christian, grâce à tes simulations numériques, j'ai pu prouver la qualité de mon travail. Merci pour ta patience car tu n'as jamais refusé de faire "tourner" tes programmes malgré ton emploi du temps chargé. Enfin, merci Valérie pour tous

les conseils que tu m'as donné pour mes oraux. Ah, tes cours de communication scientifique!!! Que de bons souvenirs... Je suis persuadé que c'est grâce à ces cours que mon stress face au public a diminué avec les années. Tu as su me donner un minimum de confiance en moi. Merci l'équipe POMC...

Eh TONTON, je ne t'oublie pas cette fois!!! Oui Séb, c'est de toi que je parle. Tu es un super mec. Merci de m'avoir écouté et d'avoir toujours été là quand des petites tensions faisaient leur apparition. Tu as toujours tout fait pour que tout se passe bien et que tout se finisse de la meilleure des façons. Tous tes conseils ont été bénéfiques. Mais j'aurais toujours de tes nouvelles puisque je vais travailler avec ta femme!! Enfin, je ne te tiendrais pas rigueur de tous les coups que j'ai reçu au foot.....

Quelle transition pour remercier les footeux du vendredi!!! Merci Pascal, Greg, Séb, Franck, Wilfrid, Christophe, Olivier, Xavier (les vieux!!) et enfin, l'équipe des jeunes : Jérôme, Nadir, Sorin, Stan. On vous a quand même donné du fil à retordre et je pense que la prise de pouvoir des jeunes est proche. Allez les jeunes, je compte sur vous ....

Bon les potes, est-ce que vous méritez des remerciements!!! Pierre, que de bons souvenirs depuis 8 ans. Les années de licence et maîtrise avec Emilie ont été superbes, beaucoup de travail mais aussi beaucoup d'amitié et de bon temps. Je pense que l'on gardera un très bon souvenir du DEA. Donner des cours à Fabrice, qui pourrait oublier! Quelle expérience enrichissante et inoubliable! Nadir, tout d'abord, arrête de gonfler car c'est impressionnant. Merci pour les discussions que l'on a eu en pause café ou en tête à tête dans notre bureau lorsque mes recherches n'avançaient pas. Enfin les petits derniers... Et oui Claire, Charles et Jérôme, c'est de vous que je parle. Ma dernière année a été superbe grâce à vous. Je crois que c'est la meilleure chose qui pouvait m'arriver au cours de cette année que je trouve personnellement la plus riche en émotion. Claire, merci pour toutes nos discussions lors de nos réunions "tupperware" le midi, lesquelles je pense sont à l'origine de certaines rumeurs (Merci Charles et Jérôme!!). Comme je te l'ai déjà dit, tu es une fille bien et très sympa et j'ai été ravi de te connaître. J'espère

que notre amitié continuera malgré mon départ. Et vous c'est pareil, ceux du bureau 4A. Merci pour la superbe ambiance que vous avez mis au laboratoire. Que de bons souvenirs j'ai en votre compagnie. Les soirées à thèmes, les soirées Borriglione ... Et comptez sur moi dans un ou deux ans pour venir vous proposer "PAUSEEE" toutes les 2 heures pendant votre rédaction. Sans oublier à 17H le "Chocolat!!!! Cho Cho Cho Chocolat si tu ... je te ...". Et Charles : "GOOD MORNING WARSWA!!!" où met-on les posters ??? Pour conclure encore un GROS MERCI à vous trois pour cette superbe troisième année que vous m'avez fais vivre. J'espère que l'on vivra encore de bons moments dans le futur. Je vous souhaite bon courage pour la fin de votre parcours. Ah!!! Charles attention aux bourres pif!!! Et Claire bon courage avec ces deux fous!! Je vous attends avec des rollers aux pieds sur le bord de mer ....

Merci aussi à mes potes Loïc, Nicolas et Mansour avec lesquels j'ai partagé plusieurs années à la fac et qui sont toujours présents. Que de bons souvenirs devant un match de foot avec une pizza et (une) bière, sans oublier des 31 Décembre mémorables. Ta présence Loïc le jour de ma soutenance m'a fait très plaisir et prouve que notre amitié est bien forte.

Les plus grands remerciements vont à ma famille. Comme Fabrice l'a si bien dis, je suis un pessimiste qui se soigne et mes parents m'ont toujours encouragés et soutenus depuis le bac. On peut imaginer la patience qu'ils ont. Ils ont toujours eu confiance en moi ainsi que toute ma famille. Tout le monde a toujours été présent pendant ces années, à toujours se soucier de moi. Je ne sais comment les remercier. A travers ces quelques lignes, je peux simplement leur dire qu'ils sont en grande partie responsables de ma réussite dans les études. Je leur en suis extrêmement reconnaissant et je ne l'oublierai jamais. C'est pour cette raison que cette journée du 13 Juin est également leur journée. D'ailleurs, un gros merci à ma marraine, ma maman et ma sIJur pour toutes les bonnes choses qu'elles ont préparé... Ma sIJur mérite aussi un gros merci personnel pour avoir été là pendant les moments les plus durs, toujours en train de se soucier de savoir comment va son grand frère. MERCIIIIIII!!!!

Fabienne, Fabienne le dernier Merci est pour toi!!! Tu me supportes jours et nuits depuis plus de deux ans. Tu as fait preuve d'une patience hors norme surtout ces derniers mois. Tu as très bien géré la situation et tu m'as surtout toujours très bien soutenu. Le 13 Juin est aussi ta journée. .e .'.i.e

MERCI A TOUS

# Table des matières



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 LES CAVITÉS MICRO-ONDES HABILLÉES</b>	<b>17</b>
1.1 Historique non exhaustif des cavités micro-ondes . . . . .	19
1.2 Approximation semi-classique . . . . .	21
1.3 Étude numérique des cavités habillées . . . . .	28
1.4 Étude expérimentale des cavités habillées . . . . .	42
1.5 Exploitations des résultats et interprétations . . . . .	53
<b>Conclusion</b>	<b>65</b>
<b>2 MILIEUX DÉSORDONNÉS FORTEMENT DIFFUSIFS</b>	<b>67</b>
2.1 Introduction à la localisation d'Anderson . . . . .	69
2.2 Nouveau dispositif expérimental . . . . .	73
2.3 Protocole expérimental . . . . .	92
2.4 Une expérience type . . . . .	105
2.5 Les premiers modes localisés . . . . .	108
2.6 Étude exhaustive des modes localisés . . . . .	121
<b>Conclusion</b>	<b>147</b>
<b>Annexes</b>	<b>151</b>

<b>A</b>	<b>Calcul des longueurs d'orbites périodiques</b>	<b>153</b>
<b>B</b>	<b>Orthogonalité des fonctions propres perturbées</b>	<b>157</b>
	Liste des figures et des tableaux	<b>163</b>
	Bibliographie	<b>175</b>

# Introduction

Le vaste sujet de la propagation d'ondes en milieux complexes peut être divisé en deux régimes : le chaos ondulatoire et la diffusion multiple. L'objectif de cette thèse est de développer deux expériences modèles pour observer ces deux régimes. En régime de chaos ondulatoire, nous étudierons le cas d'une cavité de type billard de Šeba *i.e.* un billard perturbé par un diffuseur considéré comme ponctuel. Ce sujet a été très largement exploré numériquement mais très peu de travaux expérimentaux ont été réalisés. Le but de cette étude est de montrer qu'il est possible de faire expérimentalement de la détection non destructive de défaut en milieu bidimensionnel fermé. Pour cela, les expériences vont consister à étudier comment un unique diffuseur ponctuel perturbe une cavité micro-ondes. Une approche semi-classique est suivie afin d'extraire des signaux de transmission les informations sur le diffuseur telle que sa position et ainsi de le détecter.

Le régime de diffusion multiple est quant à lui atteint en augmentant le nombre de diffuseurs introduits dans la cavité micro-ondes. Nous souhaiterions développer une première expérience modèle pour étudier les milieux désordonnés fortement diffusifs et observer le phénomène de localisation forte d'Anderson. L'observation de ce phénomène reste un véritable défi expérimental preuve en est le grand nombre d'articles dédiés à ce sujet. Nous avons développé pour cela un dispositif expérimental permettant d'obtenir des cartographies de l'intensité du champ électrique exhibant les modes localisés. Une des particularités de cette étude est que toutes les mesures sont faites en régime stationnaire contrairement à la majorité des travaux consacrés à ce régime où le problème est généralement considéré

sous son aspect dynamique. Une autre originalité de ces expériences vient du fait qu'elles sont réalisées en milieu ouvert *i.e.* avec quasiment aucune injection d'énergie dans le milieu après réflexion sur les bords. En effet, certaines équipes ont déjà présenté des cartographies de champ montrant un effet de localisation mais, ces cartographies étant obtenues en milieu fermé, il se peut qu'il s'agisse d'un mode de cavité et non pas d'un mode localisé. L'ouverture du système permet de supprimer tout éventuel doute sur le résultat. Dans notre étude, différents tests sont faits sur les résultats expérimentaux afin de vérifier différents critères de localisation et ainsi valider et consolider les résultats. Nous avons par exemple vérifié, d'une part, la relative insensibilité aux conditions de bords et, d'autre part, la décroissance exponentielle en fonction de la taille du milieu des largeurs spectrales partielles liées aux pertes sur les bords. Nous avons également effectué une comparaison entre résultats expérimentaux et simulations numériques.

Le premier chapitre de ce manuscrit sera consacré au régime du chaos ondulatoire et plus particulièrement à l'étude d'une cavité micro-ondes perturbée par un défaut. Ce défaut est représenté par un diffuseur ponctuel, son diamètre étant très petit devant les longueurs d'ondes utilisées. En préambule, nous présentons un historique non exhaustif des principaux travaux réalisés en cavités micro-ondes, régulières, pseudo-intégrables ou chaotiques. Le choix de développer une étude expérimentale d'un système perturbé par un diffuseur est motivé par le fait que la quasi totalité des travaux réalisés sur ce type de système reste essentiellement numérique. L'étude consiste à extraire d'un signal de transmission, obtenu expérimentalement en cavité perturbée, une signature du diffuseur ponctuel.

On détaillera, en se basant sur un travail théorique de R. Weaver et D. Sornette, le calcul des fonctions propres et des valeurs propres d'un système perturbé en montrant que chaque fréquence propre d'un tel système est comprise entre deux valeurs propres successives du système non perturbé. Nous verrons comment l'utilisation d'une approche semi-classique, basée sur la notion d'orbite périodique et notamment sur l'utilisation des spectres de longueurs, permet de remonter à des

informations spatiales sur le diffuseur. Nous justifierons par une étude numérique détaillée du problème cavité plus diffuseur, le choix des spectres de longueurs pour extraire la position du diffuseur. La mise en évidence dans ces spectres de longueurs de contributions associées à de nouvelles orbites liées au diffuseur prouvera la pertinence de cette approche. La notion d'orbites diffractives sera ainsi introduite. Grâce à cette étude numérique, nous vérifierons des résultats établis par le passé par Shigehara ou Bogomolny tel que le comportement intermédiaire, entre Poisson et Wigner, de la distribution des écarts entre deux niveaux plus proches voisins. L'observation de ce comportement intermédiaire permettra de caractériser le système perturbé comme pseudo-intégrable. Après avoir décrit l'étude numérique utilisée pour valider et montrer la pertinence de l'approche semi-classique et du choix des spectres de longueurs, nous détaillerons l'étude expérimentale de ce type de système.

Pour cela, nous donnerons une description détaillée du dispositif expérimental, composé notamment d'une cavité micro-ondes bidimensionnelle et d'un analyseur de réseau. Nous expliciterons la méthode utilisée pour extraire des signaux de transmission les paramètres pertinents pour le calcul des spectres de longueurs tels que la fréquence centrale de chaque résonance associée à un mode propre du système. Nous présenterons les résultats obtenus respectivement en cavité régulière, chaotique et pseudo-intégrable. Pour finir, nous montrerons que les contributions des orbites diffractives sont bien présentes dans les spectres de longueurs et qu'il est donc possible de faire de la détection non destructive en milieu bidimensionnel fermé.

Le second chapitre, purement expérimental, sera dédié à l'étude de systèmes désordonnés fortement diffusifs afin d'observer le régime de diffusion multiple. Une introduction à la localisation forte d'Anderson sera faite dans le but de présenter les principales avancées dans ce domaine de recherche très actif. Nous montrerons ainsi que de nombreux critères de localisation et des observations directes ont été obtenus en milieu quasi unidimensionnel. A deux dimensions, un grand

nombre de travaux numériques ont été réalisés permettant d'obtenir des cartographies du champ électrique, illustrant la localisation d'Anderson, ainsi que des preuves de localisation telle que l'insensibilité aux conditions de bords. Expérimentalement, des représentations spatiales du champ électrique ont été montrées mais, une ambiguïté sur la nature des modes peut subsister à cause des conditions expérimentales dans lesquelles ces cartographies ont été mesurées.

Nous présenterons ensuite les modifications apportées au dispositif expérimental précédent afin de réaliser des expériences dans les conditions optimales pour observer cette localisation. Nous décrirons comment l'ajout d'absorbants micro-ondes permet de simuler des conditions aux bords dites de rayonnement vers l'extérieur et ainsi travailler en cavité *ouverte*. Pour finir cette description, nous présenterons la méthode suivie pour mesurer l'indice des diélectriques afin de calculer leur courbe de section efficace et ainsi connaître les résonances de Mie *i.e.* les fréquences autour desquelles ces diffuseurs sont le plus efficaces. Nous concluons l'étude faite sur les diffuseurs diélectriques en montrant le phénomène de résonances de proximité obtenu lorsque deux de ces diffuseurs sont séparés d'une distance du même ordre que la longueur d'onde utilisée.

La section suivante de ce chapitre détaillera le protocole expérimental mis en place pour observer la localisation des ondes électro-magnétiques. Nous expliquerons comment le désordre est généré, comment le réseau de diélectrique est créé à l'intérieur de la cavité et comment, via une bille magnétique, la mesure du champ électrique est faite à l'intérieur du milieu désordonné. La méthode choisie pour effectuer cette mesure sera validée grâce à des tests en cavité vide. En effet, comme la structure modale d'une cavité rectangulaire est connue analytiquement, une comparaison pourra être faite entre une carte du champ électrique expérimentale et une carte "analytique". Un résumé du protocole expérimental modèle suivi pour atteindre l'objectif fixé sera ensuite donné en mettant en avant tous les paramètres importants et pertinents.

Les deux dernières sections de ce chapitre seront consacrées aux résultats expérimentaux. Nous décrirons dans un premier temps l'étude détaillée faite sur les

signaux de transmission. Nous montrerons que, malgré la présence de désordre dans le milieu, la structure spectrale du signal de transmission est proche de celle d'un signal de transmission obtenu en milieu périodique *i.e.* constitué de bandes permises et interdites. Nous mettrons en évidence que cette structure spectrale est très directement reliée, d'une part, au degré de désordre et, d'autre part, aux maxima d'efficacité des diffuseurs diélectriques. Nous présenterons les premières cartographies de l'intensité du champ électrique obtenues en milieu ouvert désordonné fortement diffusif. Nous verrons que ces cartographies illustrent très bien le piégeage du champ par le milieu désordonné. Nous prouverons que ces cartographies correspondent bien à des modes localisés en vérifiant notamment l'insensibilité aux conditions de bords de ces modes ainsi qu'en montrant le très bon accord qui existe entre les cartes expérimentales et les cartes numériques. Nous verrons que les différentes méthodes mises en œuvre pour estimer la longueur de localisation de chacun de ces modes sont cohérentes entre elles. Nous prouverons que les pertes des modes localisés, liées aux fuites par les bords ouverts du système, décroissent exponentiellement en fonction de la taille du système. Ce comportement prévu par Pinheiro et *al.* représente un critère fort de localisation. Nous verrons qu'il est également possible d'extraire de ce comportement une valeur de la longueur de localisation cohérente avec les précédentes estimations. Nous concluons ce chapitre par une étude exhaustive des modes localisés. Nous verrons que cette étude permettra d'observer l'influence directe des différents paramètres du milieu sur les signaux de transmission et sur les modes localisés.



# Chapitre 1

## Les cavités micro-ondes habillées par un diffuseur

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Historique non exhaustif des cavités micro-ondes . . .</b>	<b>19</b>
<b>1.2</b>	<b>Approximation semi-classique . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>1.3</b>	<b>Étude numérique des cavités habillées . . . . .</b>	<b>28</b>
1.3.1	Fonctions propres et fréquences propres . . . . .	28
1.3.2	Spectres de longueurs numériques . . . . .	33
1.3.3	Particularités des systèmes à diffuseur unique . . . . .	38
<b>1.4</b>	<b>Étude expérimentale des cavités habillées . . . . .</b>	<b>42</b>
1.4.1	La cavité micro-ondes bidimensionnelle . . . . .	42
1.4.2	L'analyseur de réseau vectoriel: HP8720D . . . . .	48
1.4.3	Les expériences réalisées en cavité habillée . . . . .	51
<b>1.5</b>	<b>Exploitations des résultats et interprétations . . . . .</b>	<b>53</b>
1.5.1	Extractions des fréquences propres à partir des signaux de transmission . . . . .	53
1.5.2	La cavité non perturbée . . . . .	55
1.5.3	La cavité habillée . . . . .	57

1.5.4	Spectres de longueurs en cavité chaotique . . . . .	62
1.5.5	Cartographie d'une cavité rectangulaire en présence d'un défaut . . . . .	63

---

## 1.1 Historique non exhaustif des cavités micro-ondes

Stöckmann et Stein, en 1990, ont été les premiers à utiliser une cavité micro-ondes pour montrer que les prédictions faites par la théorie des matrices aléatoires en chaos quantique étaient correctes. La répulsion de niveaux, caractéristique principale d'un système chaotique (GOE), a été entre autre mise en évidence via la distribution  $P(s)$  des écarts entre deux niveaux plus proches voisins. Ils ont également montré, pour un billard chaotique de type Sinaï, que la transformée de Fourier de la densité de modes exhibe des pics associés à des orbites particulières de cette géométrie<sup>1</sup> [Stöckmann and Stein, 1990]. Un des derniers résultats marquants obtenus en cavité micro-ondes est issu des travaux réalisés par J. Barthélemy et *al.* [Barthélemy et al., 2005]. La réponse de la cavité micro-ondes, à une excitation extérieure, est représentée par un signal de transmission. L'excitation et la réponse sont réalisées par l'intermédiaire de deux antennes. Ce signal de transmission est composé de résonances associées aux modes de cavité. Ces résonances sont définies, entre autre, par une largeur finie consécutive à différents types de pertes : les pertes dues au couplage avec l'extérieur via les antennes, les pertes ohmiques inhomogènes et homogènes dues à la conductivité électrique finie des parois et des bords de la cavité. Le couplage vers l'extérieur, *i.e.* les pertes liées aux antennes, a déjà été étudié en théorie des matrices aléatoires en termes de canaux de pertes afin de simuler une ouverture de la cavité vers l'extérieur [Fyodorov and Sommers, 1997]. L'originalité de travaux J. Barthélemy a été de mettre en évidence, les contributions individuelles de chaque type de pertes ohmiques en se plaçant dans une configuration de couplage vers l'extérieur faible (pertes dues aux antennes négligeables). En effet, grâce à une approche basée sur la théorie de la diffusion, une description complète de la matrice de diffusion a été faite, permettant ainsi, d'une part, de montrer l'existence de deux contributions

---

<sup>1</sup>Cette particularité, également vraie pour des systèmes réguliers, sera utilisée et donc détaillée par la suite

aux pertes ohmiques et, d'autre part, d'établir des expressions analytiques pour chacune d'elles. Ce résultat majeur est à l'origine de l'étude numérique d'un nouveau type de système, appelé cavité ouverte. L'énergie injectée dans le système fuit ainsi par les bords. Le paramètre contrôlant l'importance des pertes par les bords *i.e* l'ouverture de la cavité est la conductivité électrique des parois. Le facteur de complexité, donné par le rapport entre la partie imaginaire et la partie réelle de la fonction d'onde dans la cavité, est la grandeur utilisée pour caractériser le milieu.

En ce qui concerne l'étude du comportement d'une cavité micro-ondes en présence d'un diffuseur ponctuel, la quasi totalité des travaux sont numériques. Le premier à avoir étudié ce système est Šeba. On parle depuis de billard de Šeba. Il étudie le cas d'une cavité rectangulaire avec en son centre un diffuseur ponctuel de rayon variable  $R$  et caractérisé par un paramètre  $\alpha$  permettant d'avoir un diffuseur plus ou moins influent. Il montre avec ces simulations que le  $P(s)$  d'un système non chaotique peut ne pas avoir un comportement de type Poisson [Seba, 1990]. Il parle alors de systèmes pseudo-intégrables par comparaison à ceux étudiés par Cheon et Cohen représentés par un système avec des coins convexes [Cheon and Cohen, 1989]. Un comportement intermédiaire de ce type de système est observé numériquement par une étude plus détaillée et réalisée quelques années plus tard par Shigeara et *al.* [Shigehara et al., 1993, Shigehara, 1994]. Toujours basés sur l'étude de cette distribution des écarts  $P(s)$ , deux autres articles relatent des travaux numériques réalisés par E. Bogomolny et *al.* [Bogomolny et al., 2001, Bogomolny et al., 2002]. A la fin des années 1990, une vision théorique, juste évoquée ici car détaillée par la suite, a été choisie pour appréhender ces systèmes. Weaver et Sornette en 1995, et ensuite Shigehara et Cheon, en 1996 ont par deux approches différentes calculé les valeurs propres et les fonctions propres de cette "cavité habillée" (pour reprendre l'expression "dressed cavity" introduit par R. Weaver [Weaver and Sornette, 1995, Shigehara and Cheon, 1996]). Le comportement intermédiaire de ces systèmes a fait que les différentes équipes se sont orientées vers une approche semi-classique pour comprendre et caractériser ces systèmes. D'autres travaux théoriques basés sur cette approche ont eux servi à calculer des

quantités physiques telles que la densité d'état par la formule de trace ou les statistiques spectrales. Nous nous appuyons sur cette approche semi-classique dans la suite du manuscrit. Legrand *et al.* et ensuite Bogomolny *et al.* ont mis en évidence via ces entités un nouvel élément permettant de décrire ces cavités habillées, les orbites diffractives [Legrand *et al.*, 1997, Bogomolny *et al.*, 2000]. Ces dernières sont souvent associées à des billards en formes de polygones [Pavloff and Schmit, 1995].

Un an après avoir obtenu les premiers résultats numériques, Šeba réalisa en compagnie de Haake et Stöckmann les premières expériences en cavité pseudo-intégrable [Haake *et al.*, 1991]. Le système était constitué d'un billard rectangulaire avec en son centre une antenne de diamètre faible devant les longueurs d'ondes. Cette dernière est à la fois utilisée pour réaliser le couplage avec l'extérieur, ce dernier augmentant avec la fréquence, et comme diffuseur ponctuel. Il montre que pour des fréquences de plus en plus élevées *i.e.* pour un couplage de plus en plus grand, la distribution des écarts présente une allure du type semi-Poisson en accord avec les études numériques et théoriques antérieures.

En conclusion, mis à part la découverte d'une allure intermédiaire entre Poisson et Wigner pour la distribution  $P(s)$  des écarts entre modes plus proches voisins, aucune autre signature du diffuseur ponctuel n'a été mise en évidence expérimentalement. Cet axe de recherche est donc propice à de nouvelles études.

## 1.2 Approximation semi-classique : Orbites Périodiques et Spectres de longueurs

Comme nous le verrons ultérieurement, les expériences consistent à exciter, via une antenne, une cavité micro-onde rectangulaire. La réponse à cette excitation est mesurée par l'intermédiaire d'une seconde antenne et constitue un signal de transmission. Un diffuseur ponctuel (en pratique très petit devant la longueur d'onde) est-il en mesure d'affecter ce signal ? Plus concrètement : une mesure de transmission peut-elle révéler la présence d'un défaut quasi-ponctuel ? L'objectif

est de mettre en évidence une preuve expérimentale claire de la présence des orbites diffractives. Deux exemples de signaux obtenus respectivement en cavité vide et cavité perturbée sont présentés sur la figure 1.1.

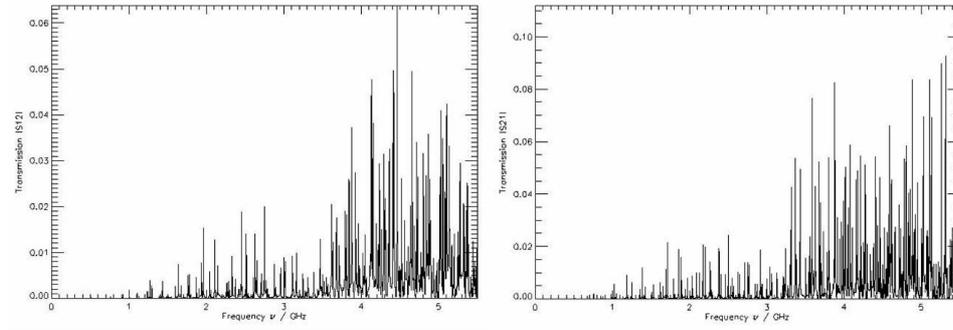


FIG. 1.1 – *Comparaison des signaux de transmission obtenus respectivement en cavité rectangulaire vide (gauche) et habillée (droite).*

Les différences entre ces deux spectres montrent bien l'influence du diffuseur. Il est cependant difficile de quantifier cet effet et surtout de l'associer aux orbites diffractives. On doit donc, pour extraire la signature du défaut, faire appel à des outils plus pertinents et construits à partir de ces signaux.

Une approche semi-classique a donc été choisie pour tenter d'extraire la position du diffuseur du signal de transmission. Cette théorie utilise l'approche géométrique des rayons pour décrire un système même lorsque des effets ondulatoires sont présents. Ainsi, on utilisera la trajectoire d'un rayon dans un billard pour décrire la propagation d'une onde dans une cavité. Des trajectoires particulières appelées orbites périodiques (OP) constituent le squelette de l'approche semi-classique. Comme nous allons le voir tout le long de ce chapitre, toutes les grandeurs physiques utilisées sont construites sur cette base.

L'outil semi-classique ou géométrique choisi pour extraire l'influence d'un défaut est le spectre de longueurs. Ces spectres sont calculés à partir de la densité d'états  $\rho(k)$  obtenue, en cavité régulière, en utilisant la représentation semi-classique de la fonction de Green  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  qui s'écrit comme une somme sur les

trajectoires classiques présentes dans la cavité allant d'un point  $\vec{r}$  à un point  $\vec{r}'$  [Stöckmann, 1999].

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{tr.cl.} A_{tr}(\vec{r}, \vec{r}') \exp(i\mathcal{S}_{tr}(\vec{r}, \vec{r}')) \quad (1.1)$$

où la somme porte sur les trajectoires classiques allant de  $\vec{r}$  à  $\vec{r}'$  et  $\mathcal{S}_{tr}$  définie l'action d'une trajectoire de longueur  $\ell$  et est donnée dans le cas d'une cavité rectangulaire par  $k\ell + \pi$  (un terme  $\pi$  s'ajoute à chaque réflexion sur une paroi).

Dans le cadre de l'approximation de la phase stationnaire, la formule de trace semi-classique pour la densité d'états est définie comme [Stöckmann, 1999, Gutzwiller, 1971] :

$$\rho(k) = \text{Tr} [Im(G(\vec{r}', \vec{r}'))]. \quad (1.2)$$

.

Cette quantité s'écrit comme la somme d'une contribution moyenne et d'une contribution oscillante.

$$\rho(k) = \bar{\rho}(k) + \rho^{osc}(k) = \bar{\rho}(k) + \sum_j A_j \exp[ik\ell_j] + \text{c.c.} \quad (1.3)$$

avec  $\ell_j$  la longueur de la  $j^{ieme}$  orbite périodique et  $A_j$  son amplitude complexe prenant en compte son facteur de stabilité et sa possible dépendance en  $k$ .

Il est pertinent de faire une parenthèse dans ce paragraphe pour énoncer quelques propriétés de ces orbites utiles par la suite pour l'interprétation des résultats. Les orbites périodiques sont des trajectoires qui se re-parcourent indéfiniment après  $n$  rebonds sur les parois de la cavité. Le nombre de famille d'OPs croît linéairement (resp. exponentiellement) avec  $n$  dans un billard régulier rectangulaire (resp. chaotique). Si on regarde le système à un temps suffisamment long ou après un grand nombre de rebonds ( $t \rightarrow \infty$  ou  $n \rightarrow \infty$ ), l'ensemble des orbites périodiques couvre spatialement la totalité du billard et explore tous les angles de réflexion. Une orbite quelconque évolue constamment au voisinage d'une OP et peut donc être définie, si ce n'est dans sa totalité, au moins morceau par

morceau, à partir d'OPs. Ceci montre encore une fois le rôle de base joué par ces orbites. La dernière propriété importante pour la suite est le caractère isolé ou non de l'orbite. Dans le cas d'une cavité intégrable telle qu'un billard rectangulaire, il est possible connaissant les dimensions de la cavité, de calculer les longueurs de toutes les orbites périodiques présentes dans la cavité (Fig A.4).

$$l_{nm} = 2\sqrt{n^2L_x^2 + m^2L_y^2} \quad (1.4)$$

L'appendice (A) "Calcul des orbites périodiques" détaille l'obtention de cette expression. Ces orbites forment des familles d'orbites continûment déformables et de même longueur ; on parle alors d'orbites non isolées. Par contre dans le cas d'un billard chaotique, d'une part aucune expression analytique permet de calculer les longueurs de ces orbites et d'autre part elles sont quasiment toutes isolées<sup>2</sup>.

Le spectre de longueur est obtenu à partir du facteur de forme  $K(L)$  défini comme la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation  $C(\kappa)$  (Eq (1.5)) de la partie oscillante de la densité d'états  $\rho(k)$  (Eq (1.3)) [Biswas, 1993].

$$C(\kappa) = \langle \rho^{osc}(k + \frac{\kappa}{2}) \rho^{osc}(k - \frac{\kappa}{2}) \rangle_k \quad (1.5)$$

Si on écrit la moyenne sous forme intégrale :

$$\langle f(k) \rangle_k = \int dk' f(k') W_\sigma(k' - k) \quad (1.6)$$

avec  $W_\sigma$  une fonction normalisée à 1, centrée en zéro et de largeur typique  $\sigma$ , alors  $C(\kappa)$  se met sous la forme :

$$C(\kappa) = \int \sum_i \sum_j A_i A_j^* \exp [ik(l_i - l_j)] \exp [i\kappa(\frac{l_i + l_j}{2})] W(k) dk \quad (1.7)$$

Lors du traitement numérique, la fonction  $W(k)$  est représentée soit par une fonction de Hanning, si le spectre dans son entier nous intéresse, soit par une fonction gaussienne si seule une fenêtre spectrale est utile. La dernière étape vers

---

<sup>2</sup>Les Bouncing-balls sont des orbites non-isolées dans un billard chaotique

le facteur de forme  $K(L)$  consiste à prendre la transformée de Fourier de cette expression :

$$\begin{aligned} K(L) &= \frac{1}{2\pi} \int \exp[-i\kappa L] C(\kappa) d\kappa \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_i \sum_j A_i A_j^* \int \exp[-i\kappa L] \exp[i\kappa(\frac{l_i + l_j}{2})] d\kappa \\ &\qquad \int W(k) \exp[ik(l_i - l_j)] dk \quad (1.8) \end{aligned}$$

L'intégrale sur la variable  $\kappa$  donne une série de pics de Dirac centrés sur les longueurs  $\frac{l_i + l_j}{2}$  :

$$K(L) = \sum_{i,j} A_i A_j^* \delta(L - \frac{l_i + l_j}{2}) \int W(k) \exp[ik(l_i - l_j)] dk \quad (1.9)$$

L'approximation diagonale, qui consiste à ne retenir que les termes diagonaux ( $i = j$ ), simplifie cette expression [Stöckmann, 1999]. En effet, si on intègre sur une grande fenêtre en  $k$ , il faut pour que le terme  $e^{ik\Delta l}$  oscille peu et ne se moyenne pas à zéro, que la différence  $l_i - l_j$  soit la plus petite possible. Nous supposons donc que les contributions non diagonales  $i \neq j$  sont négligeables [Berry, 1977].

Il est important de faire la distinction entre les systèmes possédant ou non la symétrie par renversement du temps [Stöckmann, 2000]. Dans un système possédant cette symétrie, deux orbites périodiques qui suivent la même trajectoire mais la parcourent en sens opposé sont considérées comme identiques. Cette dégénérescence est prise en compte en multipliant la somme de l'équation (1.9) par 2. L'expression finale du facteur de forme est, dans l'approximation diagonale, donnée par [Stöckmann, 1999, Legrand et al., 1997] :

$$K(L) = 2 \sum_i |A_i|^2 \delta(L - l_i) \quad (1.10)$$

En conclusion, le spectre de longueurs apparaît, dans le cas idéal, comme une série de pics de Dirac, d'amplitude réelle et positive, et centrés sur les longueurs

$l_i$  des orbites périodiques. La figure 1.2 donne un exemple de spectre de longueur obtenu numériquement.

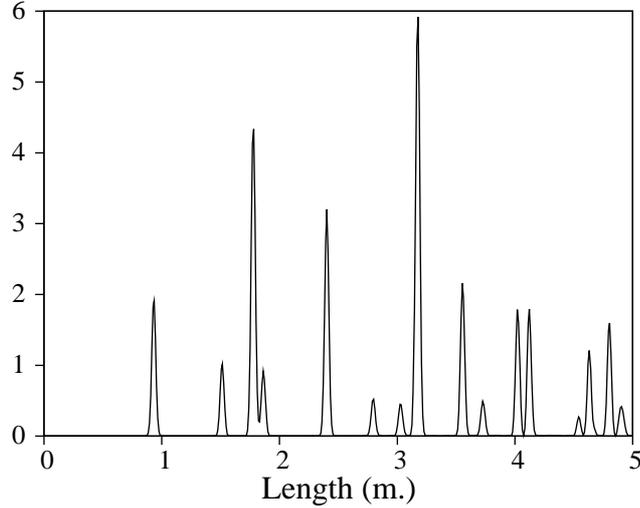


FIG. 1.2 – Exemple de spectre de longueur obtenu numériquement à partir de 11000 modes propres pour la cavité rectangulaire en présence d'un diffuseur.

Considérons maintenant une *cavité habillée* ou *billard de Šeba*. Une trajectoire classique qui heurte ce défaut peut se prolonger dans n'importe quelle direction. La totalité de la trajectoire n'est donc pas connue de façon déterministe. Dans la description ondulatoire du système, ce problème se traduit par l'apparition d'un coefficient isotrope de diffusion  $\mathcal{D}$ , lequel fixe l'amplitude du diffuseur [Exner and Seba, 1996, Rahav and Fishman, 2002]. Ce coefficient s'écrit, dans la limite  $ka \ll 1$ , comme :

$$\mathcal{D} = \frac{2\pi}{-\ln(ka/2) - \gamma + i\pi/2} \quad (1.11)$$

avec  $\gamma$  la constante d'Euler et  $a$  une longueur caractéristique pouvant être assimilée au rayon du diffuseur utilisé lors des expériences. Dans un milieu perturbé par un diffuseur placé en  $\vec{b}$ , la fonction de Green est définie à partir de deux contributions (Eq (1.12)). La première est la fonction de Green de la cavité vide, la seconde traduit la diffusion de l'onde par le diffuseur.

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G_0(\vec{r}, \vec{r}') + G_0(\vec{r}, \vec{b}) \mathcal{D} G(\vec{b}, \vec{r}') \quad (1.12)$$

avec  $G_0$  la fonction de Green de la cavité non perturbée. Contrairement au cas d'une cavité non perturbée, le second terme de l'équation (1.12) montre qu'une nouvelle famille d'orbites périodiques contribue : celles qui subissent au moins une réflexion sur le diffuseur ; elles sont appelées orbites diffractives (ODs).

Pour prendre en compte cette nouvelle famille d'orbites, la densité d'état s'écrit comme :

$$\rho^{osc} = \rho_{op}^{osc} + \rho_{od}^{osc}. \quad (1.13)$$

Ces deux contributions, dans une cavité de surface  $\mathcal{A}$  contenant un diffuseur, sont données par [Pavloff and Schmit, 1995] :

$$\rho_{op}^{osc}(k) = \frac{\mathcal{A}}{\pi} \sum'_{op} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{2\pi r k l_{op}}} \cos(r k l_{op} - r n_{op} \pi - \pi/4) \quad (1.14)$$

et

$$\rho_{od}^{osc}(k) = \sum'_{od} \frac{l_{od}}{\pi} \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{8\pi k l_{od}}} \cos(k l_{od} - n_{od} \pi - 3\pi/4) \quad (1.15)$$

où  $\sum'$  représente la somme sur les orbites périodiques (diffractives) primitives de longueur  $l_{op}$  ( $l_{od}$ ),  $r$  le nombre de répétitions des OPs et  $n_{op}$  ( $n_{od}$ ) le nombre de rebonds sur les parois (sur le diffuseur). Nous pouvons remarquer que, grâce aux dépendances respectives en  $k$ , les contributions les plus importantes sont associées aux orbites périodiques. C'est pour cette raison que, dans le cas des orbites diffractives, les répétitions ou les concaténations d'ordre  $\nu$  ne sont pas prises en compte, leurs contributions d'ordre  $\mathcal{O}(k^{-\nu/2})$  étant négligeables par rapport à celles des OPs [Pavloff and Schmit, 1995].

Numériquement, il est plus aisé d'utiliser la primitive de la densité d'états  $\rho(k)$ , *i.e.* le nombre cumulé de modes  $N(k) = \int_0^k dk' \rho(k')$  qui compte le nombre de modes de la cavité jusqu'à une fréquence donnée. Grâce à la formule de trace de Gutwiller [Gutzwiller, 1971, Balian and Bloch, 1971], une expression analogue à (1.3) est donnée pour  $N(k)$  sous forme d'une somme d'une partie moyenne et

d'une contribution oscillante.

$$N(k) = \overline{N}(k) + N^{osc}(k) \quad (1.16)$$

Cette grandeur est représentée par une fonction escalier qui augmente d'une unité à chaque valeur propre. Le facteur de forme est donc calculé en prenant la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation  $C_N$  de  $N(k)$ .

$$K_N(L) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\kappa L} C_N(\kappa) d\kappa \quad (1.17)$$

avec

$$C_N(\kappa) = \langle N^{osc}(k + \frac{\kappa}{2}) N^{osc}(k - \frac{\kappa}{2}) \rangle_k \quad (1.18)$$

On déduit ensuite  $K_N(L)$  de  $K(L)$  (Eq (1.10)) en utilisant la propriété de la transformée de Fourier suivante [Rodier, 1982] :

$$TF [\rho(k)] = iL.TF [N(k)] \quad (1.19)$$

et donc :

$$K_N(L) = |\widehat{N}(k)|^2 = \frac{1}{L^2} |\widehat{\rho}(k)|^2 = \frac{K(L)}{L^2} \quad (1.20)$$

avec  $K(L)$  donné par l'expression (1.10).

Toutes les orbites périodiques présentes dans la cavité rectangulaire sont connues grâce à l'expression (1.4) ce qui permet d'identifier dans les spectres de longueurs tous les pics leur étant associés. L'extraction des contributions des nouvelles orbites diffractives est ainsi facilitée.

## 1.3 Étude numérique des cavités rectangulaires habillées

### 1.3.1 Fonctions propres et fréquences propres

La pertinence du choix des spectres de longueurs comme outil permettant d'identifier la contribution non-universelle des orbites diffractives est prouvée grâce

à une étude numérique du système cavité-diffuseur. La méthode choisie est directement inspirée de celle décrite dans [Weaver and Sornette, 1995]. Contrairement à cette approche où ils posent  $c = 1$  pour utiliser la variable  $\omega$ , on a préféré la variable  $k$  définie comme  $k = \omega/c$ . Pour calculer les modes propres de ce système, étape indispensable pour l'obtention des spectres de longueurs, nous considérons dans un premier temps une cavité ouverte dans laquelle se trouve une source ponctuelle en  $\vec{s}$  et un diffuseur ponctuel en  $\vec{b}$ . Ce dernier est caractérisé par sa force de diffraction  $t$  définie comme le rapport entre le champ sortant et le champ incident. Ce paramètre **dépend** de  $k$ . Cette dépendance représente bien le cas expérimental où l'efficacité du diffuseur dépend de la fréquence. Dans un système ouvert, le champ en un point  $\vec{r}$  quelconque proche de  $\vec{b}$ , s'écrit comme la somme d'un champ provenant de la source et d'un champ issu du diffuseur :

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}) &= \Psi^{source}(\vec{r}) + \Psi^{diffuseur}(\vec{r}) \\ &= \Psi^{source}(\vec{b})J_0(k|\vec{r} - \vec{b}|) - \frac{i}{4}\Psi^{source}(\vec{b})H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{b}|)t(k)\end{aligned}\quad (1.21)$$

Le diffuseur est considéré comme une source ponctuelle secondaire.  $\Psi^{diffuseur}(\vec{r})$  est alors défini par la fonction de Green d'un milieu ouvert *i.e.* par la fonction de Hankel  $H_0^{(1)}$ . Le champ  $\Psi(\vec{r})$  peut être décomposé en ondes entrantes et en ondes sortantes, en développant la fonction de Bessel en fonctions de Hankel du premier et second ordre :

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi^{source}(\vec{b}) \left[ \frac{1}{2}H_0^{(2)}(k|\vec{r} - \vec{b}|) + \left( \frac{1}{2} - i\frac{t}{4} \right) H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{b}|) \right] \quad (1.22)$$

Une expression du paramètre  $t$  est déduite de l'Eq (1.22) à partir du théorème de la conservation de l'énergie ; les flux d'énergie entrant et sortant sont égaux :

$$\left| \frac{1}{2} \right|^2 = \left| \frac{1}{2} - i\frac{t}{4} \right|^2 \quad (1.23)$$

et donc

$$t = \left( \alpha + \frac{i}{4} \right)^{-1} \quad (1.24)$$

La dépendance en  $k$  du coefficient  $t$  se retrouve dans le paramètre réel  $\alpha$ .

La section efficace du diffuseur définie comme le rapport entre la puissance sortante et la puissance entrante du diffuseur s'écrit en terme de ce paramètre  $t$  comme suit :

$$\sigma = \frac{|t|^2}{4k} \text{ ou } \sigma = \frac{4}{k(1+16\alpha^2)} \quad (1.25)$$

La dernière égalité est obtenue grâce à l'Eq (1.24). Dans le cas à deux dimensions, le terme le mieux approprié serait longueur efficace.

Pour le calcul des fréquences propres, on considère maintenant une cavité fermée. Le champ résultant en un point  $\vec{r}$  s'écrit :

$$G(\vec{r}, \vec{s}) = G_0(\vec{r}, \vec{s}) + G(\vec{r}, \vec{b})A(\vec{b}, \vec{s}) \quad (1.26)$$

où le terme  $A(\vec{b}, \vec{s})$  traduit l'efficacité de diffusion du diffuseur placé en  $\vec{b}$ .  $G_0$  est la fonction de Green dans la cavité rectangulaire vide donnée par :

$$G_0(\vec{r}, \vec{b}; k) = \sum_{n,m} \frac{\Phi_{nm}(\vec{r})\Phi_{nm}(\vec{b})}{k^2 - k_{nm}^2} \quad (1.27)$$

avec  $\Phi_{nm}$  et  $k_{nm}$  respectivement les fonctions propres et les valeurs propres de la cavité vide.

En  $\vec{r}$  proche de  $\vec{b}$ , le premier terme de l'expression (1.26) se développe en fonctions de Green et de Bessel. Une nouvelle contribution au champ apparaît si on ajoute et on soustrait la fonction de Hankel.

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{s})|_{r=b} = & G_0(\vec{b}, \vec{s}) \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{b}} \left\{ J_0(k|\vec{r} - \vec{b}|) \right\} \\ & - \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{b}} \left\{ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{b}|) \right\} A(\vec{b}, \vec{s}) \\ & + \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{b}} \left\{ G_0(\vec{r}, \vec{b}) + \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{b}|) \right\} A(\vec{b}, \vec{s}) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Le second terme montre que le diffuseur peut être vu comme une source secondaire avec une efficacité  $A(\vec{b}, \vec{s})$ . Le dernier terme entre accolades traduit la présence d'une nouvelle contribution au champ : celle due aux réflexions sur les parois de la cavité. Dans un premier temps, pour simplifier son écriture, on définit la fonction  $f(\vec{b})$  comme étant :

$$f(\vec{b}) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{b}} \left\{ G_0(\vec{r}, \vec{b}) + \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{b}|) \right\} \quad (1.29)$$

L'équation suivante est obtenue en introduisant  $f(\vec{b})$  dans l'équation (1.28), en prenant la limite  $\vec{r}$  tend vers  $\vec{b}$  et en sachant que  $J_0 = 1$  pour  $\vec{r} = \vec{b}$ .

$$G(\vec{r}, \vec{s})|_{r=b} \simeq \left[ G_0(\vec{b}, \vec{s}) + f(\vec{b})A(\vec{b}, \vec{s}) \right] J_0(k|\vec{r} - \vec{b}|) + \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{b}} \left\{ - \left( \frac{i}{4} \right) H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{b}|) \right\} A(\vec{b}, \vec{s}) \quad (1.30)$$

Par analogie avec le cas du système ouvert, le paramètre  $t$  donnant l'efficacité du diffuseur est redéfini par le rapport entre les deux amplitudes présentes devant les différentes fonctions de Bessel. Les deux contributions de l'équation (1.30) peuvent être interprétées respectivement comme des ondes incidentes et diffusées. Nous pouvons donc récrire l'équation (1.26) donnant le champ total comme :

$$G(\vec{r}, \vec{s}) = G_0(\vec{r}, \vec{s}) + G_0(\vec{r}, \vec{b})\tau G_0(\vec{b}, \vec{s}) \quad (1.31)$$

avec dans un système fermé, le paramètre  $\tau$  défini par  $\tau = t / [1 - f(\vec{b})t]$ . Ce paramètre traduit analytiquement les effets dus aux réflexions sur le diffuseur avec le paramètre  $t$  mais également via  $f(\vec{b})$  (Eq (1.28)) celles sur les parois de la cavité.

Les pôles de  $\tau$  donnent les modes propres. Nous cherchons donc les  $k$  pour lesquels :

$$f(\vec{b})t = 1 \quad (1.32)$$

En utilisant les expressions (1.24), (1.29) et le développement de la fonction de Hankel, l'équation à résoudre devient :

$$\alpha = g(\vec{b}, k) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{b}} \left\{ G_0(\vec{r}, \vec{b}) - \frac{1}{2\pi} \left[ \gamma + \ln\left( \left| \vec{r} - \vec{b} \right| \frac{k}{2} \right) \right] \right\} \quad (1.33)$$

La somme qui définit la fonction de Green  $G_0$  (Eq (1.27)) a l'inconvénient de ne pas converger rapidement. En faisant l'hypothèse d'un diffuseur placé loin

des bords et en utilisant la procédure d'accélération de convergence décrite dans [Weaver and Sornette, 1995], l'expression (1.33) se réduit à :

$$g(\vec{b}, k) \approx \sum_{n,m} \Phi_{nm}^2(\vec{b}) \frac{4k^6}{k^8 - k_{nm}^8} - \frac{1}{4} \quad (1.34)$$

La résolution graphique illustrée par la figure 1.3, où l'allure de  $g(k)$  est donnée (courbe noire), fournit toutes les fréquences propres  $k$  du système. On note la

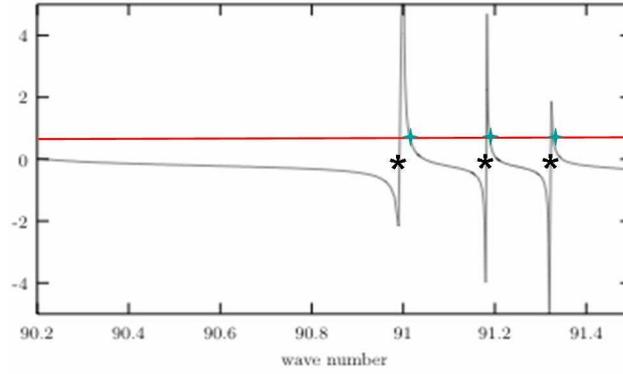


FIG. 1.3 – Représentation de la fonction  $g(k)$ . Les astérisques et les intersections entre  $g(k)$  (en noir) et  $\alpha(k) = C^{ste}$  (en rouge) représentent respectivement les  $k_{nm}$  et le  $k$

présence de singularités en chaque nombre d'onde propre  $k_{nm}$  de la cavité vide représentés sur la figure par les astérisques. Les intersections entre la courbe de  $g(k)$  et  $\alpha(k)$  (courbe rouge) donnent les valeurs propres du système habillé. Comme il est montré dans l'appendice (B) "Orthogonalité des fonctions propres de la cavité habillée",  $\alpha(k)$  varie logarithmiquement et donc très lentement en fonction de  $k$  (Eq (B.31)) ce qui explique que sur la figure 1.3 ce paramètre peut être vu comme constant. Lorsque  $\alpha \approx 0$ , ce qui correspond d'après (1.24) à un diffuseur très efficace, les valeurs propres du système habillé sont au voisinage du centre du segment reliant deux  $k_{nm}$  successifs. Si par contre, le diffuseur est transparent c'est-à-dire d'efficacité nulle et donc  $\alpha \rightarrow \infty$ , les  $k$  tendent vers les  $k_{nm}$ .

L'avantage d'une étude numérique est de pouvoir travailler sur une gamme de fréquences très grande par rapport à celle exploitable expérimentalement. Les simulations correspondent au cas idéal, c'est-à-dire à l'absence totale de pertes.

Il faut noter que la méthode développée initialement par R. Weaver et D. Sornette [Weaver and Sornette, 1995] pour calculer les fréquences propres de la cavité habillée, utilisait un paramètre  $\alpha$  constant. Le diffuseur présentait alors la même efficacité de diffraction à chaque fréquence. Cette hypothèse entraîne une pathologie du modèle, comme l'ont montré Shigehara et Cheon, à savoir la non orthogonalité des fonctions propres [Shigehara and Cheon, 1996]. Nous avons ici rétabli la dépendance en  $k$  de  $\alpha$  pour à la fois restaurer l'orthogonalité des fonctions propres et réconcilier les approches de Weaver et *al.* et Shigehara et *al.* Le détail de ce calcul est présenté dans l'appendice (B) "Orthogonalité des fonctions propres de la cavité habillée".

### 1.3.2 Spectres de longueurs numériques

Une fois les fréquences propres de la cavité habillée obtenues, la fonction escalier  $N(k)$  est construite afin d'obtenir par transformée de Fourier de  $N(k) - \overline{N}(k)$ , le facteur de forme  $K(L)$  représentant le spectre de longueurs (Fig 1.5). Numériquement, tous les modes propres du système sont connus sur une gamme de fréquences donnée, le comportement moyen  $\overline{N}(k)$  est alors défini par la loi de Weyl (Eq (1.35)). C'est une loi polynomiale dont les coefficients dépendent de la surface et du périmètre de la cavité. Elle est de la forme :

$$\overline{N}(k) = \frac{\mathcal{A}}{4\pi}k^2 - \frac{\mathcal{L}}{4\pi}k + \frac{1}{4} \quad (1.35)$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{L}$  sont respectivement la surface et le périmètre de la cavité bidimensionnelle utilisée lors des expériences. La constante tient compte des coins de la cavité. Pour tracer cette loi de Weyl, nous avons considéré l'aire et le périmètre de la cavité expérimentale c'est-à-dire  $\mathcal{A} = 0.3521 \text{ m}^2$  et  $\mathcal{L} = 2.4436 \text{ m}$ . La très grande précision sur les dimensions a été obtenue par J.Barthélemy, en ajustant la fonction escalier  $N(k)$ , déterminée dans le cas de la cavité rectangulaire, par la loi de

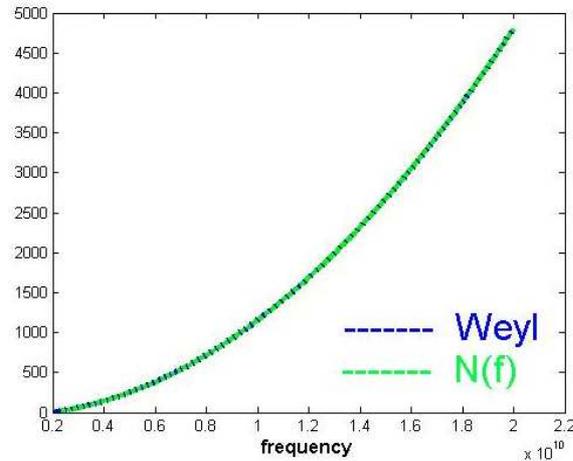


FIG. 1.4 – Fonction escalier construite à partir des 11000 modes obtenus numériquement et la loi de Weyl décrivant le comportement moyen du nombre cumulé de modes.

Weyl (Eq 1.35) [Barthélemy, 2003]. Un exemple de spectre de longueurs est montré sur la Fig 1.5. Ce spectre a été construit à partir des 11000 premiers modes de la cavité habillée calculés sur une gamme de fréquences allant jusqu'à 20GHz. Expérimentalement, de telles gammes de fréquences sont inexploitable car les pertes ohmiques rendent impossible l'extraction de la position en fréquence ou de la largeur d'une résonance. La simulation a été réalisée avec un diffuseur placé en  $x = 46.5$  cm et  $y = 20$  cm une des positions étudiées expérimentalement, l'origine étant prise dans le coin en haut à gauche de la cavité. La possibilité de travailler sur une grande gamme de fréquences offre au spectre de longueurs une très bonne résolution.

Des simulations numériques ont été réalisées sur différentes gammes de fréquences. La figure 1.6 présente des zooms sur les petites longueurs de spectres de longueurs calculés numériquement à partir de différentes gammes de fréquences. On remarque une augmentation de la résolution avec l'augmentation la largeur de la gamme de fréquences exploitée. L'existence d'une gamme de fréquences seuil

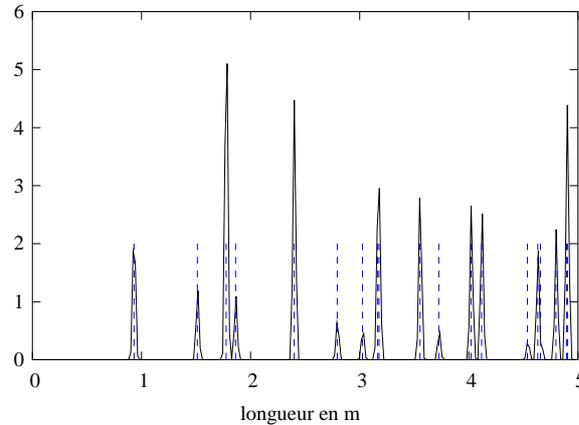


FIG. 1.5 – Exemple de spectre de longueur obtenu numériquement à partir de 11000 modes propres pour la cavité rectangulaire en présence d'un diffuseur. Les lignes en pointillés sont centrées sur les longueurs d'orbites périodiques de la cavité vide.

est ainsi mise en évidence.

La superposition aux spectres de longueurs d'une série de pics centrés sur les longueurs des OPs du rectangle vide calculées par la méthode décrite dans l'appendice (A) "Calcul des orbites périodiques", prouve la pertinence du choix de cet outil semi-classique pour obtenir des informations sur les orbites présentes dans la cavité (Fig 1.5). A première vue, tous les pics sont associés à des OPs : on serait tenté d'en conclure que seules ces orbites contribuent. Aucune corrélation à longue portée n'est présente dans les spectres en fréquences. Ceci signifie que si les orbites diffractives contribuent aux spectres de longueurs, plus particulièrement pour de petites longueurs, c'est de façon négligeable.

Grâce à un zoom autour des longueurs de l'ordre de la taille de la cavité, on remarque l'apparition de pics non centrés sur les longueurs d'OPs.

Ces pics représentent les contributions des orbites diffractives comme l'illustre la Fig 1.7. Deux remarques peuvent être faites à partir de ces premiers résultats. La totalité des contributions identifiables d'ODs est centrée sur les petites longueurs. D'où l'intérêt de travailler sur une gamme de fréquence supérieure à la gamme seuil

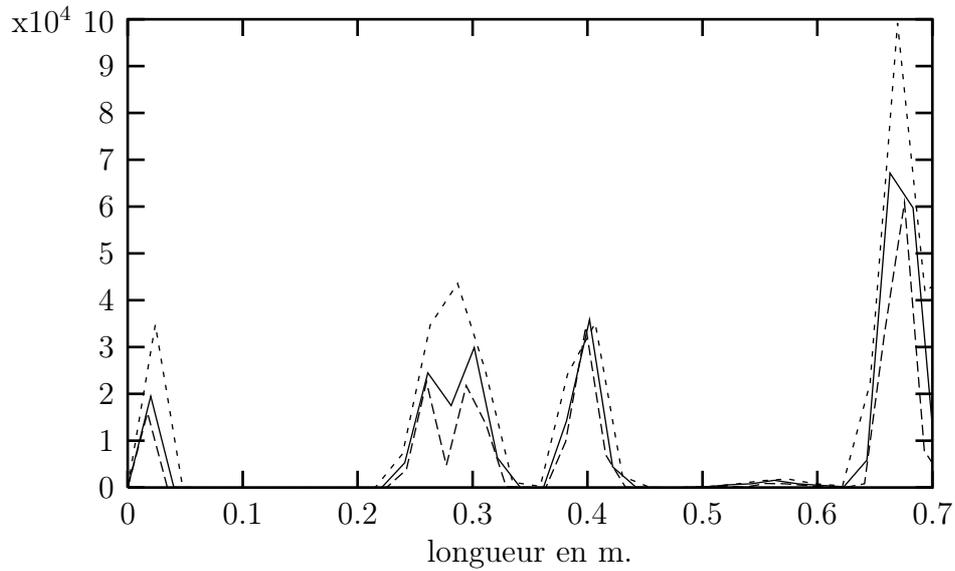


FIG. 1.6 – Spectres de longueur pour différentes gammes de fréquence. En pointillés de 2 à 12GHz, en trait plein de 2 à 15GHz, en tirets de 2 à 17GHz.

pour s'assurer d'identifier toutes ces contributions d'ODs. La seconde remarque consiste à mettre en avant l'accord entre les simulations numériques et la théorie. En effet, la différence d'amplitudes des pics associés respectivement aux OPs et aux ODs prédit par la théorie à partir des équations (1.14) et (1.15) est clairement visible sur les spectres de longueurs numériques. Ceci sera décrit de manière plus détaillée dans la partie (1.3.3) de ce chapitre.

Sur le spectre de longueurs de la figure 1.7 sont représentées les contributions des ODs (pointillés) et OPs (pointillés et tirets) ayant des longueurs inférieures à 1.6m.

Un tracé des ODs ayant une contribution dans les spectres de longueurs est représenté sur la figure 1.8. Les orbites diffractives les plus courtes, représentées sur la Fig 1.8(a), sont celles qui partent du diffuseur et qui subissent un seul rebond sur une des parois de la cavité. Sur les figures 1.8(b) et 1.8(c) sont représentées des orbites ayant également un seul rebond sur le diffuseur mais respectivement

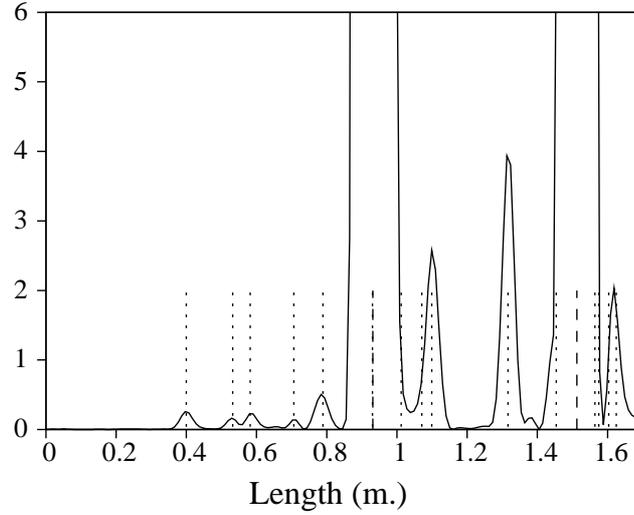


FIG. 1.7 – Zoom ( $\times 10^4$ ) du spectre de longueur montré en Figure 1.5 sur les longueurs allant de 0 à 1.6 m : POs (dashed sticks), DOs (dotted sticks)

deux et trois rebonds sur les parois de la cavité. Pour identifier toutes les ODs, nous les avons répertorié dans le tableau (1.1) avec leur longueur.

1er type		2nd type	3ème type
a : 0.400	e : 0.789	a : 1.454	a : 1.099
b : 0.532	f : 0.930	b : 1.575	b : 1.316
c : 0.582	g : 1.012	c : 1.625	c : 1.564
d : 0.706	h : 1.071	d : 1.734	d : 1.603

TAB. 1.1 – Longueurs en mètre des orbites diffractives représentées sur la figure 1.8; 1er, 2nd et 3ème type d'ODs se réfèrent aux (a), (b) et (c) de la figure 1.8.

Les deux spectres de longueurs de la figure 1.9 représentent deux autres zooms de spectres de longueurs obtenus pour deux positions différentes du diffuseur.

On y retrouve, pour les petites longueurs, des contributions d'orbites diffractives présentes dans la cavité. Des concaténations d'ODs sont également mises en

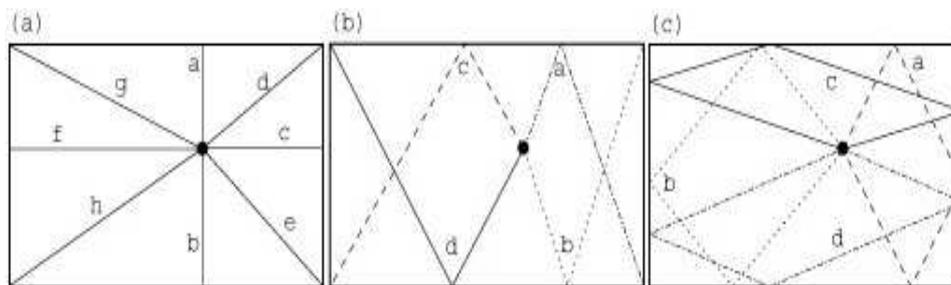


FIG. 1.8 – Trois différents types d'orbites diffractives à 1 rebond sur le diffuseur : (a) direct self-retracing DOs (1st kind), (b) self-retracing DOs (2nd kind), (c) 3-bounce DOs (3rd kind).

évidence. Les orbites a,b,c et d présentes sur ces figures sont celles représentées sur la figure 1.8(a).

Malgré l'importante différence d'amplitudes entre les contributions d'OPs et d'ODs, les résultats numériques mettent en avant une signature géométrique du diffuseur ponctuel et montrent la pertinence des outils semi-classiques pour traiter ce problème. Il reste maintenant à montrer que les orbites diffractives sont accessibles expérimentalement.

### 1.3.3 Particularités des systèmes à diffuseur unique

#### **P(s) : Poisson vs Wigner**

L'allure de la distribution  $P(s)$  des écarts entre deux résonances plus proches voisines permet de connaître à quelle classe de billard appartient le cavité habillée par un diffuseur. Cette distribution montre l'existence ou non de répulsion entre deux niveaux voisins. La théorie des matrices aléatoires prédit uniquement le comportement de quantités fluctuantes. Si on applique ceci au nombre cumulé de mode  $N(k)$ , il faut s'affranchir de la contribution moyenne. Cette étape porte le nom de redressement et consiste concrètement à définir le paramètre  $s$  comme

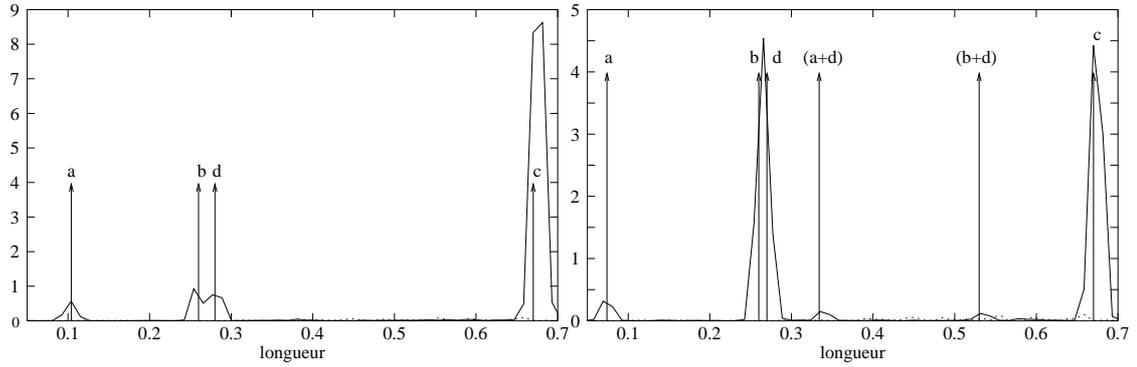


FIG. 1.9 – Spectres de longueur théoriques de la cavité vide en pointillés et avec diffuseur en trait plein avec respectivement  $a = 0.11$  m  $c = 0.26$  m  $d = 0.28$  m  $b = 0.67$  m et  $a = 0.07$  m  $c = 0.26$  m  $d = 0.27$  m  $b = 0.67$  m voir figure 1.8(a).

suit :

$$s = \overline{N}(k_{i+1}) - \overline{N}(k_i) \quad (1.36)$$

avec  $k_i$  les valeurs propres du système. Le paramètre  $s$  est sans dimension et l'espacement moyen est normalisé à 1, par construction.

Dans le cas d'une cavité régulière, si un très grand nombre de modes propres sont connus alors la distribution  $P(s)$  est décrite par une décroissance exponentielle c'est-à-dire de type Poisson, traduisant un spectre sans corrélations et la présence d'un très grand nombre de quasi-dégénérescences :

$$P(s) = \exp[-s] \quad (1.37)$$

La statistique suivie par un système chaotique et prédite par la théorie des matrices aléatoires est du type GOE. La probabilité  $P(s)$  a un comportement du type Wigner <sup>3</sup> :

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left[\frac{-\pi s^2}{4}\right] \quad (1.38)$$

Ces deux comportements sont représentés sur la figure 1.10. Cette figure illustre bien la principale différence entre les deux types de cavités. Les cavités chaotiques

<sup>3</sup>Cette relation est une très bonne approximation de l'expression prédit par la théorie des matrices aléatoires pour la distribution  $P(s)$  dans le cas de billards chaotiques

présentent une répulsion de niveau c'est-à-dire une probabilité nulle d'avoir deux niveaux voisins aussi proche que l'on veut. Tandis qu'une cavité intégrable (e.g. rectangulaire) est caractérisée par un très grand nombre de quasi-dégénérescences se traduisant par une probabilité maximale d'avoir deux niveaux voisins aussi proches que possible.

Le fait que chaque fréquence propre du système cavité-diffuseur soit comprise entre deux fréquences propres de la cavité vide peut laisser croire que le comportement du  $P(s)$  associé à ce système est proche de celui obtenu en milieu intégrable. Cependant, le billard de Šeba peut être vu comme la limite d'un billard de Sinaï avec le diamètre du disque qui tend vers zéro et donc avoir un  $P(s)$  du type GOE.

Pour des faibles forces de diffraction *i.e.* des grandes valeurs du paramètre  $\alpha$  (diffuseur transparent), le comportement est très proche d'un comportement de type Poisson. Ce résultat est prévisible si on regarde la figure 1.3 car si  $\alpha \rightarrow \infty$  alors les valeurs propres de la cavité perturbée tendent vers celles de la cavité vide. Le diffuseur ne perturbe que très peu le milieu et l'allure du  $P(s)$  converge vers une allure "Poissonienne" et donc le milieu reste intégrable. Le résultat est

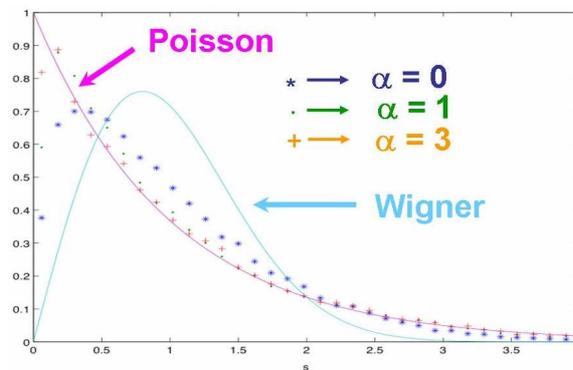


FIG. 1.10 –  $P(s)$  numérique.

tout autre pour des forces de diffractions très importantes. En effet, pour une valeur de  $\alpha$  proche de zéro, c'est-à-dire un diffuseur très efficace, l'allure du  $P(s)$  s'éloigne pour les faibles écarts d'un comportement du type Poisson car une nette

répulsion de niveau est présente mais ne suit pas pour les grands écarts une évolution du type Wigner propre aux systèmes chaotiques. L'origine de la chaoticité du milieu n'est plus la taille du diffuseur (comparable aux longueurs d'ondes) mais sa grande force de diffraction. Les équipes de Cheon et Šeba au début des années 90 et de Bogomolny à la fin des années 90 ont montré numériquement que ce comportement intermédiaire était caractéristique de systèmes pseudo-intégrables [Cheon and Cohen, 1989, Seba, 1990, Bogomolny et al., 2001]. En 1990, l'équipe de Haake dont faisait parti Šeba mettait en avant expérimentalement ce comportement [Haake et al., 1991]. Par comparaison avec le système expérimental, décrit ultérieurement, sa cavité rectangulaire était habillée par une antenne de diamètre faible devant les longueurs d'ondes mais pénétrant suffisamment dans la cavité pour qu'elle soit perturbatrice et ainsi augmenter la diffusion. La distribution  $P(s)$  attendue pour ces billards pseudo-intégrables est proche de la distribution baptisée semi-Poisson [Bogomolny et al., 2001], son expression est donnée par :

$$P(s) = 4s \exp[-2s] \quad (1.39)$$

### Dépendance en $k$ des contributions associées aux OPs et aux ODs

Les modules carrés des amplitudes des relations (1.14) et (1.15) montrent une dépendance en  $1/k$  pour les ODs et en  $k$  pour les OPs.

Pour mettre en avant cette différence de comportement, uniquement une partie du spectre en fréquence entre 0 GHz et 25 GHz est utilisée pour calculer les spectres de longueurs, contrairement aux simulations précédentes où tout le spectre est considéré. Les différents spectres de longueurs représentés sur la figure 1.11 sont calculés en délimitant la gamme de fréquences utile par une fonction  $W(k)$  (Eq (1.6)) décrite par une gaussienne normalisée, centrée respectivement en 10, 15 et 20 GHz et de variance 2 GHz.

Ces spectres ont été obtenus pour un diffuseur placé en  $x = 46.5 \text{ cm}$  et  $y = 20 \text{ cm}$ . Nous avons également superposé le spectre obtenu en considérant toute la gamme de fréquences en utilisant une fonction de Hanning de largeur 30 GHz.

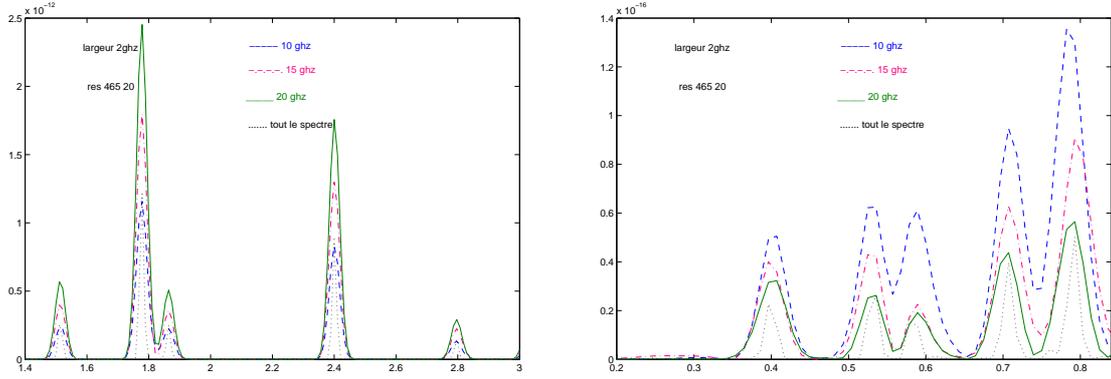


FIG. 1.11 – Dépendance en  $k$  des amplitudes des pics associés aux OPs et aux ODs. Spectres de longueurs obtenus avec des gaussiennes normalisées, de variance (2 GHz) et centrées en 10 GHz (trait plein), 15 GHz (pointillés) and 20 GHz (tirets).

Les dépendances respectives en  $1/k$  et  $k$  des ODs et OPs sont représentées sur la figure 1.11. Ce résultat est une nouvelle preuve de la pertinence du choix d'une approche semi-classique pour étudier ce problème de billard pseudo-intégrable.

## 1.4 Étude expérimentale des cavités rectangulaires habillées

### 1.4.1 La cavité micro-ondes bidimensionnelle

Si on considère un milieu conducteur homogène, l'établissement d'une onde électromagnétique stationnaire de pulsation  $k$  est décrite par les équations de Maxwell stationnaires :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \quad (1.40)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} - i\omega\epsilon\vec{E} \quad (1.41)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.42)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (1.43)$$

où  $\epsilon$  et  $\mu$  sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du milieu homogène ;  $\vec{J}$  et  $\rho$  représentent les densités de courant et de charges volumique. L'évolution temporelle de l'onde est supposée être de la forme  $e^{-i\omega t}$ . L'équation de Helmholtz est obtenue en combinant les deux premières équations de Maxwell ((1.40) et (1.41)) et en supposant l'absence totale de charge et de courant ( $\vec{J} = \vec{0}$  et  $\rho = 0$ ). Cette équation est de la forme :

$$(\Delta + k^2)\vec{E} = 0 \quad (1.44)$$

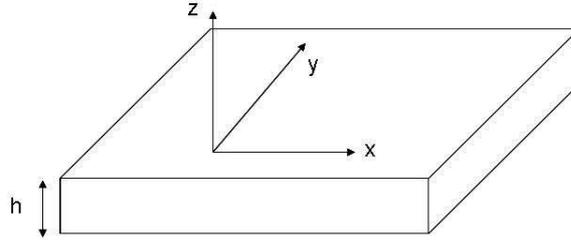
avec  $k^2 = \omega/v$  et  $\epsilon\mu v^2 = 1$  où  $v$  est la vitesse de l'onde dans le milieu. Une équation similaire est trouvée pour le champ magnétique  $\vec{H}$  en considérant les deux autres équations de Maxwell. Si on considère le cas d'une cavité de géométrie quelconque (fig 1.12) constituée par des parois parfaitement conductrices et d'un milieu représenté par le vide alors les champs électrique et magnétique doivent être respectivement normal et tangent à la surface. Ces conditions sur le contour s'écrivent comme ceci :

$$E_{\parallel} = 0 \text{ et } H_{\perp} = 0 \quad (1.45)$$

La résolution de l'équation (1.44) avec les conditions aux bords précédentes fournit les modes propres de la cavité. Deux types de solutions sont possibles ; les modes Transverses Électriques (TE) et les modes Transverses Magnétiques (TM) selon que l'on annule la composante  $z$  du champ électrique ou du champ magnétique [Jackson, 2001].

Pour les modes TE, l'annulation du champ magnétique en  $z = 0$  et  $z = h$  ( $h$  étant la hauteur de la cavité considérée) conduit à :

$$B_z \alpha \sin\left(p \frac{\pi z}{h}\right) \text{ avec } p \neq 0 \quad (1.46)$$

FIG. 1.12 – Exemple de cavité de hauteur  $h$ .

Pour les modes TM, le champ électrique s'annule sur les parois supérieure et inférieure de la cavité. Nous avons donc :

$$E_z \propto \cos\left(p \frac{\pi z}{h}\right) \text{ avec } p \text{ entier} \quad (1.47)$$

Lorsque l'épaisseur de la cavité est inférieure à la moitié de la plus petite longueur d'onde utilisée, seuls les modes TM d'ordre 0 vérifient l'Eq (1.44) [Jackson, 2001]. Ces derniers étant définis comme :

$$\vec{B} = \begin{cases} B_x(x, y) \\ B_y(x, y) \\ 0 \end{cases} \text{ et } \vec{E} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ E_z(x, y) \end{cases} \quad (1.48)$$

avec

$$(\Delta + k^2)E_z(x, y) = 0 \quad (1.49)$$

$$E_z(x, y)|_C = 0 \quad (1.50)$$

L'invariance selon  $z$  des solutions permet de considérer la cavité comme bidimensionnelle et de l'assimiler à un billard. De plus, le problème initialement vectoriel est ramené à un problème d'onde scalaire régi par l'équation (1.49) et s'établissant dans un milieu 2D. Il suffit de connaître, par exemple, la composante selon  $z$  du champ électrique,  $E_z$ , pour résoudre le problème électromagnétique. Grâce à cette restriction un lien direct avec la mécanique quantique peut être fait car les équations de Schrödinger stationnaire et de Helmholtz sont équivalentes. L'analogie entre une onde dans la cavité 2D est une particule quantique dans un puits

de potentiel infini à 2D est parfaite. Cette analogie explique le fait que les cavités électromagnétiques sont souvent utilisées pour étudier le chaos quantique.

Si on considère le cas d'une cavité bidimensionnelle rectangulaire, le problème aux valeurs propres avec les conditions aux bords de Dirichlet peut s'écrire de façon générale à partir de la fonction de Green de la cavité rectangulaire  $G_0$ .

En posant  $c = 1$  pour simplifier l'écriture, l'équation de Helmholtz devient :

$$[k^2 + \nabla^2] G_0(\vec{r}, \vec{r}'; k) = \delta^2(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.51)$$

avec

$$G(\vec{r}, \vec{b}; k) = \sum_{n,m} \frac{\Phi_{nm}(\vec{r})\Phi_{nm}(\vec{b})}{k^2 - k_{nm}^2} \quad (1.52)$$

La résolution de l'équation homogène

$$\nabla^2 \phi_{nm}(\vec{r}) = -k^2 \phi_{nm}(\vec{r}) \quad (1.53)$$

fournie une expression analytique à la fois pour les modes propres

$$\phi_{nm}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{L_x L_y}} \sin\left(n \frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(m \frac{\pi y}{L_y}\right) \quad (1.54)$$

et les valeurs propres :

$$k_{nm} = \pi \sqrt{n^2 \frac{\pi^2}{L_x^2} + m^2 \frac{\pi^2}{L_y^2}} \quad (1.55)$$

$n$  et  $m$  les nombres quantiques déterminent le nombre de ventres selon  $x$  et  $y$ . Expérimentalement, la fonction propre  $\phi_{nm}$  est représentée par la composante  $E_z$  du champ électrique.  $L_x$  et  $L_y$  sont les dimensions caractéristiques de la cavité rectangulaire valant respectivement 756.21 mm et 456.64 mm pour la cavité utilisée expérimentalement. La hauteur de la cavité est égale à 5 mm et vérifie donc la condition  $h < \lambda/2$  nécessaire pour que la cavité puisse être considérée comme bidimensionnelle.

La cavité est conçue en superposant plusieurs couches. Les deux plaques de Dural utilisées comme faces externes assurent à l'ensemble une bonne rigidité. Pris en sandwich entre les deux plaques de Dural, deux plaques de cuivre d'épaisseur

respective 5 mm et 0.5 mm et un cadre en cuivre d'épaisseur 5 mm et aux bords de largeur 2 cm forment la cavité. Le cuivre de qualité OFHC a été choisi pour concevoir la cavité en raison de sa grande conductivité électrique. Cette qualité de cuivre a l'inconvénient de s'oxyder. Le bon état de surface, essentiel pour les expériences, est assuré en nettoyant ces plaques cuivrées par un acide (Citranox). Les pertes ohmiques sont ainsi minimisées car elles sont dues à l'effet Joule induit par des courants de surface s'établissant dans une couche de profondeur donnée par l'épaisseur de peau  $\delta = \sqrt{2/\mu\sigma ck}$ . Les pertes ohmiques présentes dans la cavité sont pour l'essentiel responsables de l'élargissement des résonances et donc de la dégradation des signaux.



FIG. 1.13 – *Dispositif expérimental composé d'une cavité micro-ondes et d'un analyseur de réseau vectoriel piloté par ordinateur .*

La cavité est complétée par un dispositif de 25 vis traversantes réparties sur tout le périmètre pour garantir un serrage important et uniforme. L'environnement électromagnétique de la cavité n'influence donc pas son intérieur car les ouvertures susceptibles d'exister entre deux éléments composant la cavité sont réduites. Ce dispositif assure également un contact uniforme entre les couches permettant ainsi de maintenir la cavité à une équipotentielle.

Des antennes, fixées dans la plus épaisse des plaques de cuivre, pénètrent dans

la cavité pour assurer le couplage de celle-ci avec l'analyseur de réseau permettant ainsi l'injection d'énergie dans la cavité. Ces antennes, au nombre de 10 et positionnées aléatoirement, sont généralement utilisées pour des fréquences pouvant aller jusqu'à 18 GHz et possèdent une impédance de  $50\ \Omega$ . Ces antennes peuvent être considérées comme quasi-ponctuelles car leur diamètre de 1.27 mm est très petit devant les longueurs d'ondes utilisées.

L'intensité du couplage de la cavité dépend très fortement de la longueur de pénétration des antennes à l'intérieur de la cavité. Un compromis est à faire entre efficacité de couplage et perturbation engendrée par les antennes. En effet, si l'antenne pénètre trop dans la cavité, elle devient perturbatrice et joue alors le rôle de diffuseur. En revanche, si l'antenne pénètre peu, alors le couplage est faible, ce qui diminue considérablement le rapport signal sur bruit, l'exploitation du signal devenant alors très délicate. Expérimentalement, le meilleur compromis est obtenu avec une longueur optimale de pénétration de 2 mm [Barthélemy et al., 2005].

En transmission l'antenne réceptrice couple de la puissance vers l'extérieur introduisant ainsi une contribution supplémentaire aux pertes. Ces pertes sont proportionnelles à l'intensité du champ électrique au niveau de l'antenne émettrice [Barthélemy et al., 2005]. Expérimentalement, pour que ces pertes soient indépendantes du couple d'antennes utilisé pour réaliser la mesure, une charge d'impédance  $50\ \Omega$ , identique à celles des câbles et de l'analyseur de réseau, est connectée à chaque antenne non utilisée.

L'utilisation d'autant d'antennes rend possible la mesure de  $E_z$  en divers points de la cavité. La probabilité qu'un mode ait un noeud au niveau d'une des antennes utilisées et donc qu'il ne soit pas identifié n'est pas négligeable. L'utilisation de différents couples d'antennes permet de rendre cette probabilité nulle et donc d'identifier tous les modes de la cavité. L'ajustement de la fonction escalier construite à partir de toutes les fréquences propres obtenues avec chaque couple se fait, ainsi, par la loi de Weyl, comme évoqué dans la première partie de ce chapitre.

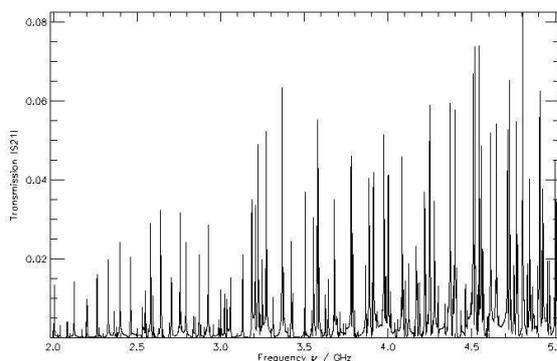


FIG. 1.14 – *Signal de transmission obtenu en cavité rectangulaire entre 2GHz et 5GHz.*

### 1.4.2 L'analyseur de réseau vectoriel : HP8720D

La cavité et l'analyseur sont reliés par l'intermédiaire de câbles blindés de longueurs 1.5 m (NTC195 de marque Flexco). Ces derniers permettent un couplage de la puissance fournie (mesurée) par l'analyseur de réseau vers l'intérieur (extérieur) de la cavité via les antennes. Ils sont flexibles, d'impédance  $50 \Omega$  comme les antennes. Les câbles assurent à l'onde lors de la propagation un déphasage faible de  $0.15^\circ$  et, grâce à leur blindage, des pertes minimales de l'ordre de 0.025 dB pour des fréquences inférieures à 5 GHz et pour une courbure quelconque.

L'analyseur de réseau utilisé est un HP8720D. Cet appareil couvre une gamme de fréquence allant de 50 Mhz à 20 GHz. Les deux ports présents sur la face avant permettent son utilisation aussi bien en tant qu'émetteur que de récepteur d'ondes hyper-fréquences. L'analyseur de réseau calcule la matrice complexe de diffusion composée des éléments  $S_{ij}$  avec  $i = 1, 2$  (en transmission  $i \neq j$  et  $i = j$  en réflexion). Le paramètre  $S_{ij}$  ( $S_{ii}$ ) est calculé en effectuant le rapport entre l'onde transmise (réfléchie) et l'onde incidente mesurées toutes deux en quadrature de phase. La réciprocité du milieu est prouvée en s'assurant de la symétrie des mesures i.e que les signaux de transmission obtenus respectivement en calculant le paramètre  $S_{12}$  et le paramètre  $S_{21}$  sont identiques comme l'illustre la figure 1.15.

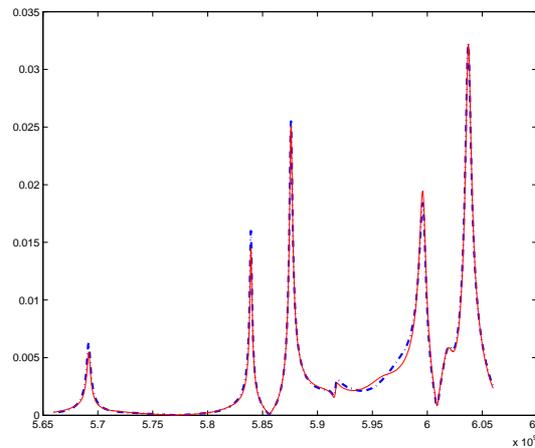


FIG. 1.15 – Comparaison de signaux de transmission :  $S_{12}$  vs  $S_{21}$

### La procédure de calibration

Expérimentalement, les signaux mesurés suite à l'excitation de la cavité correspondent à la réponse du système cavité-câbles-antennes (CCA). Pour obtenir une réponse propre à la cavité, une calibration précède la mesure du paramètre  $S_{12}$ . Cette calibration supprime des signaux de transmission la modulation due à la propagation de l'onde dans la totalité des câbles. Pour cela, les deux câbles connectés à l'analyseur de réseau par les deux ports sont reliés entre eux via à un étalon. L'analyseur envoie des ondes à travers l'étalon et mesure la réponse associée à l'ensemble câbles-étalon. Connaissant la réponse de l'étalon, l'analyseur extrait de cette réponse les effets dus à la propagation dans les câbles pour ensuite corriger chaque signal mesuré dans le système CCA. Les effets liés à la propagation dans les antennes, néfaste uniquement lors de mesures en réflexion, ne peuvent pas être supprimés car il est impossible de relier directement l'étalon aux antennes.

La calibration permet également de configurer l'analyseur de réseau. Le faible nombre de points maximum (1601 points) utilisé pour discrétiser en fréquence le signal de transmission oblige, par soucis de résolution, à réaliser des expériences

par fenêtre de 500 MHz. Il y a autant de fenêtres spectrales que de calibrations réalisées. Par fenêtre de mesure, le nombre de balayages et le temps de mesure en un point sont également choisis. La multiplication des balayages en fréquences sur une fenêtre permet de s'affranchir du bruit ; ce dernier étant de moyenne nulle. L'influence du bruit diminue avec la fréquence. Ce nombre de passage passe de 5 pour des fréquences inférieures à 2.5 GHz, à 3 jusqu'à 4 GHz et vaut 1 pour des fréquences supérieures. Le second paramètre est l'IFBandwidth. L'inverse de ce paramètre donne le temps mis par l'analyseur pour effectuer la mesure en chaque point. Plus ce temps est important plus la mesure est de bonne qualité. Lors des expériences, il est toujours égale à 100 Hz. 16 secondes sont donc nécessaires pour effectuer un balayage en fréquences sur une fenêtre de 500 MHz. Pour s'assurer d'obtenir une réponse propre au système étudié et du bon paramétrage de l'analyseur, une calibration est réalisée avant chaque mesure. Ce protocole calibration-mesure est sensiblement facilité grâce au pilotage de l'analyseur de réseau par un ordinateur.

### **Le pilotage par Labview**

Le pilotage s'effectue grâce à un ordinateur muni d'une carte GPIB directement relié à l'analyseur de réseau. Le logiciel utilisé est Labview, les programmes ont été écrits par G. Sauder, l'ingénieur " Mesures Physiques " du laboratoire. L'intérêt de ce pilotage est de diminuer la durée d'une campagne de mesures composée d'une calibration et d'une mesure sur chacune des fenêtres de 500 MHz. Pour cela, la première étape consiste à faire les calibrations correspondant à chacune des fenêtres.

Ces calibrations sont ensuite enregistrées dans l'ordinateur. Une fois cette étape effectuée, l'expérimentateur peut choisir par l'intermédiaire d'une interface (voir Fig 1.16) les fenêtres sur lesquelles il souhaite effectuer les mesures. L'ordinateur va ainsi charger les calibrations sélectionnées dans l'analyseur afin de le paramétrer et de réaliser les mesures qui sont finalement enregistrées sur l'ordinateur.

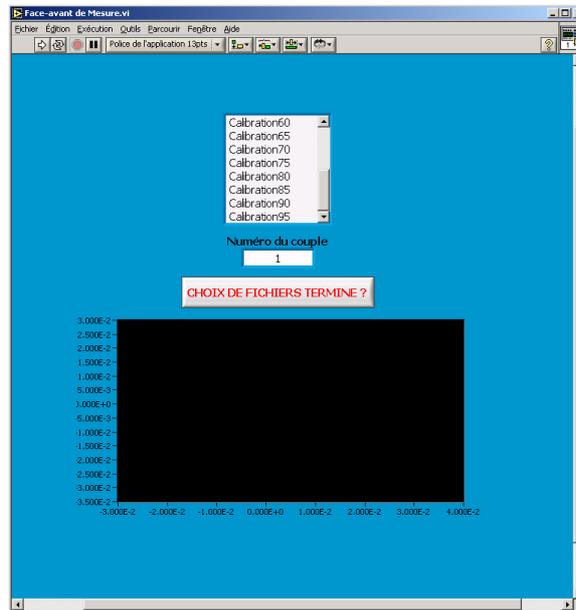


FIG. 1.16 – Interface graphique permettant le pilotage de l'analyseur de réseau.

### 1.4.3 Les expériences réalisées en cavité habillée

Les expériences sont réalisées sur une gamme de fréquences allant de 2 GHz à 5 GHz. Le défaut introduit dans la cavité micro-ondes est un diffuseur cylindrique en cuivre de hauteur 5 mm comme la cavité. Il est considéré comme quasi-ponctuel car son diamètre de 6 mm est petit devant les longueurs d'ondes utilisées comprises entre 6 cm et 15 cm. Contrairement à l'étude numérique, l'efficacité du diffuseur est variée avec la fréquence car expérimentalement le diffuseur possède une taille petite mais finie. Les différentes sources de pertes limitent la gamme de fréquences exploitable contrairement aux simulations numériques correspondant au cas idéal sans pertes. Ces pertes ont comme effet néfaste l'élargissement  $\delta\nu$  des résonances dans les signaux de transmission, celui-ci augmentant avec la fréquence. Cet élargissement est d'autant plus néfaste à hautes fréquences que le  $\delta\nu$  devient, alors, comparable à l'écart moyen entre deux résonances voisines. Ce dernier diminue avec la fréquence car le nombre de résonances augmente avec le carré de la fréquence (Eq (1.35)). Un recouvrement important entre résonances

apparaît et limite la gamme de fréquences exploitable entre 2 GHz et 5 GHz. La cavité est toujours bidimensionnelle car les fréquences utilisées sont inférieures à la fréquence de coupure de 30 GHz.

La gamme totale de fréquences de 3 GHz est divisée en 6 fenêtres de 500 MHz. Sur chacune d'elles une calibration en réponse et une mesure en transmission sont réalisées. Cette procédure calibration-mesure est faite pour 43 positions du diffuseur. Le diffuseur est déplacé parallèlement aux grands côtés par pas de 1.5 cm à partir de la première position de coordonnées  $x = 10.5$  cm et  $y = 13$  cm. Ce pas correspond au quart de la plus petite longueur d'onde utilisée. Grâce au pilotage de l'analyseur par ordinateur, l'expérimentateur n'intervient qu'au niveau du déplacement du diffuseur. Cette étape est fastidieuse car elle nécessite l'ouverture et ensuite la fermeture de la cavité ce qui implique un cycle dévisage-serrage des 25 vis.

Sur cette gamme de fréquences, le nombre de modes détectés varie entre 160 et 200 selon le couple d'antennes utilisé. La loi de Weyl prévoit environ 350 modes. Ainsi, pour être sûr d'identifier toutes les fréquences propres du système, la procédure consiste à mesurer le signal de transmission pour les 45 combinaisons d'antennes possibles et ce pour les 43 positions du diffuseur. La calibration est, elle, valable quel que soit le couple d'antennes choisi. Pour chaque position du diffuseur, 350 modes sont détectés grâce aux 45 couples d'antennes. Pour limiter le temps de l'expérience, nous nous sommes assurés que l'utilisation de seulement 3 couples d'antennes sur les 45 possibles est suffisante pour identifier tous les modes propres du système. Pour être certain que tous les modes propres du système sont identifiés, il faut vérifier que l'ajustement par la loi de Weyl de la fonction escalier  $N(k)$ , construite à partir de ces modes, est correcte.

## 1.5 Exploitations des résultats et interprétations

### 1.5.1 Extractions des fréquences propres à partir des signaux de transmission

L'analyseur de réseau fournit un signal de transmission complexe  $S_{ab}$  correspondant à la réponse du système cavité-diffuseur à une excitation extérieure. Les paramètres pertinents pour le calcul des spectres de longueurs, tels que la position exacte  $f_n$  de la  $n$ -ième résonance, sa largeur  $\Gamma_n$  et son amplitude  $A_n$ , sont extraits des signaux grâce à une procédure d'ajustement. L'algorithme utilisé se base sur une formule du type Breit-Wigner [Barthélemy, 2003] qui décrit le signal de transmission complexe comme une somme de lorentziennes complexes :

$$S_{ab}(f) = \sum_n \frac{A_n^{ab}}{f^2 - f_n^2 + i f_n \Gamma_n} \quad (1.56)$$

$a$  et  $b$  sont les antennes utilisées et  $A_n$  l'amplitude complexe de chaque résonance de la forme  $\alpha_n^{ab} + i\beta_n^{ab}$ .

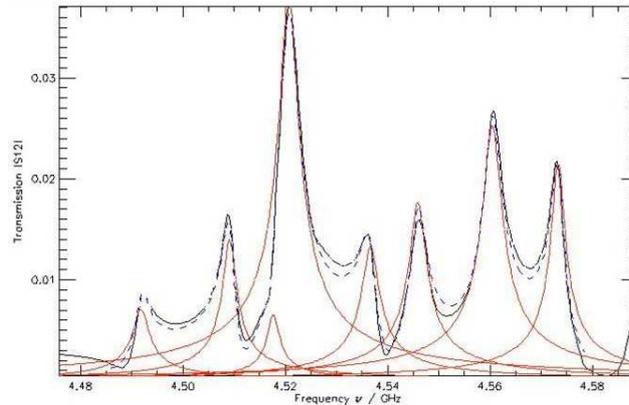


FIG. 1.17 – En rouge les ajustements réalisés à partir de 1.56 pour chaque résonance.

La figure 1.17 montre que l'ajustement fait par cet algorithme est de bonne qualité malgré le recouvrement entre résonances. Chaque tracé en rouge correspond à l'ajustement d'une résonance par une lorentzienne de la forme (1.56).

Il est important de remarquer que lorsqu'il y a un recouvrement important entre plusieurs résonances voisines, l'ajustement est indispensable car la fréquence de résonance  $f_n$  ne correspond pas forcément à un maximum du signal de transmission. Cet algorithme d'ajustement utilise deux méthodes de minimisation, "Levenberg-Marquadt Method" [Marquardt, 2005] et "Downhill Simplex Method : Amoeba" [Press et al., 1997]. La première utilise la "méthode du gradient" loin du minimum et "l'approximation parabolique" proche du minimum. C'est une méthode exacte pour les paramètres intervenant linéairement dans notre ajustement ( $\alpha$  et  $\beta$  dans notre cas). La seconde méthode utilise comme *ansatz* les valeurs moyennes des paramètres obtenus par la méthode précédente. C'est une méthode géométrique qui, par transformations successives, réduit l'espace des phases déterminé par les paramètres initiaux, autour du minimum [Barthélemy, 2003]. Ce programme a été

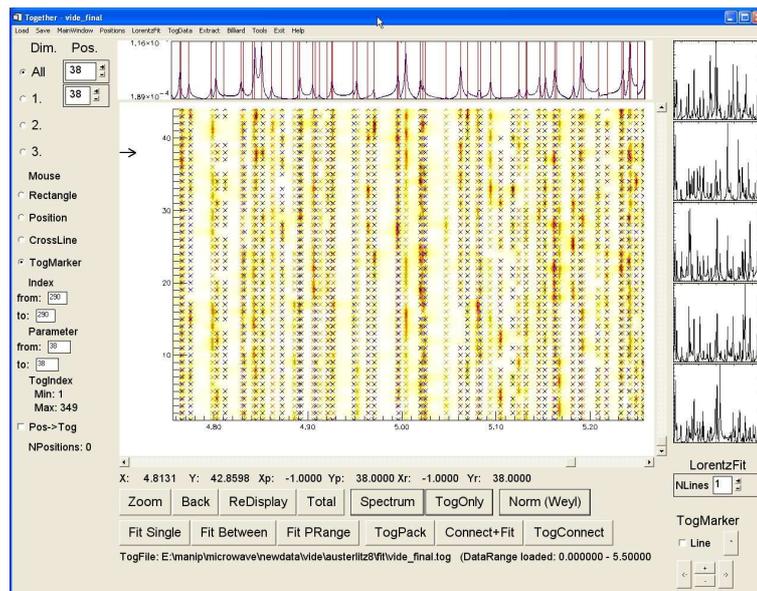


FIG. 1.18 – Capture d'écran du programme interactif de traitement des mesures *Together*.

ensuite intégré dans une interface de travail, "*Together*", développée par l'équipe du Professeur Stöckmann et J.Barthélemy. Dans une zone à fort recouvrement, il

est possible que la procédure d'ajustement n'identifie pas toutes les résonances. Ces oublis sont visibles grâce à la superposition du spectre initial et de son ajustement sur cette interface. Ces erreurs d'ajustement sont corrigées en imposant la présence d'une résonance à une fréquence donnée. Cette partie du travail est une partie très longue et très importante. Toutes les résonances propres sont déterminées avec une résolution égale au moins au dixième de l'espacement moyen entre deux résonances voisines. Meilleure est la précision sur la position de chaque résonance, plus les grandeurs déduites, comme le nombre cumulé de modes et le spectre de longueur sont correctement évaluées. Après ce travail minutieux, nous pouvons visualiser, toujours via cette interface, toutes les fréquences détectées par les couples d'antennes utilisés comme le montre la figure 1.18 où chaque résonance est représentée par une croix. Chaque ligne correspond à un couple d'antennes utilisé.

### 1.5.2 La cavité non perturbée

Ce retour en arrière est réalisé dans le but de vérifier, dans la cavité rectangulaire vide, si les résultats expérimentaux concordent avec les résultats analytiques. Les 350 modes prévus par la loi de Weyl sur la gamme de fréquences étudiée sont identifiés. L'ajustement de la fonction escalier  $N(k)$  se fait donc, comme le montre la première partie de la figure 1.19, par un polynôme de degré 2 en accord avec la loi de Weyl. La seconde image de la figure 1.19 montre que les écarts entre l'ajustement et la fonction escalier sont localisés sur des petites gammes de fréquences. Aucune information n'est donc perdue sur les temps courts ou sur les petites longueurs dans les spectres de longueurs *i.e.* là où les orbites diffractives sont majoritaires et identifiables. Car comme nous l'avons observé numériquement, les orbites diffractives contribuent principalement pour de petites longueurs.

La fonction de corrélation à deux points ou la "fonction d'auto-corrélation"  $C(\kappa)$  (Eq(1.5)) est calculée à partir de la différence entre  $N(k)$  et  $\overline{N(k)}$ . Avant de calculer  $C(\kappa)$ , une discrétisation du spectre avec un pas  $\delta f$  plus petit que l'écar-

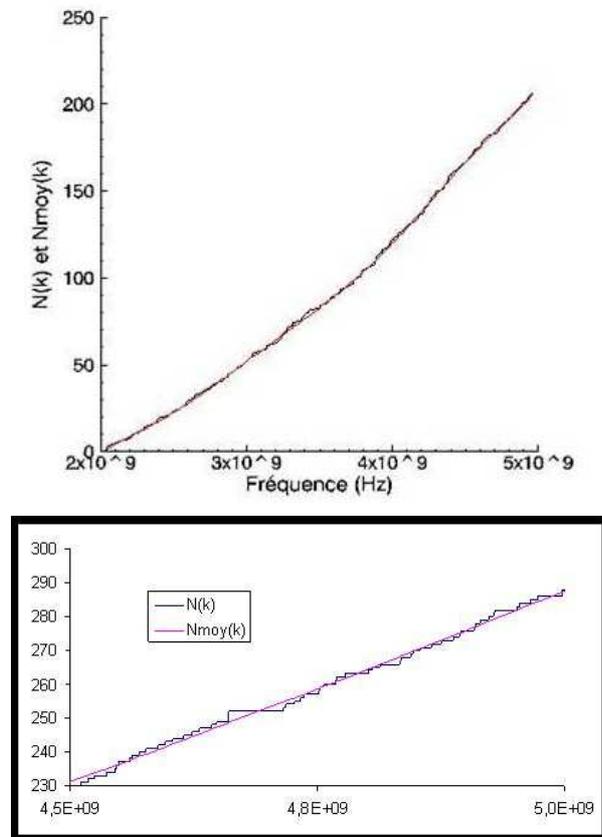


FIG. 1.19 – Fonction escalier  $N(k)$  et un zoom exhibant les écarts en  $N(k)$  son ajustement.

tement minimal entre deux résonances a été effectuée. Cette discrétisation (faite avec une puissance de 2 pour utiliser les algorithmes de FFT) permet d'obtenir un spectre de longueurs sur une plus grande gamme de longueurs.

La figure 1.20 montre la comparaison faite entre un spectre de longueurs expérimental et un spectre de longueurs numérique dont on sait qu'il contient toutes les contributions des OPs. Les OPs ayant une longueur inférieure à 5 m ont été considérées ici.

Un bon accord qualitatif est trouvé entre les deux spectres de longueurs. En

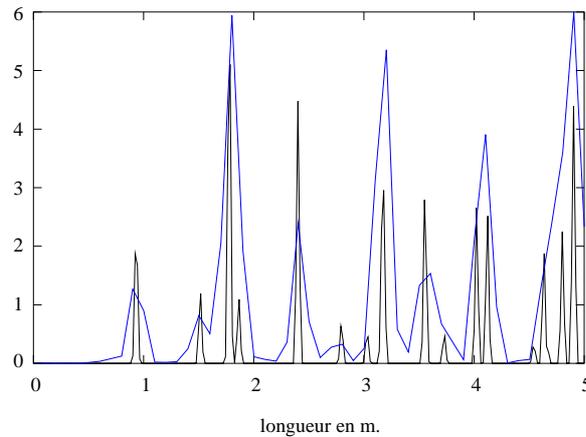


FIG. 1.20 – *Comparaison du spectre de longueur théorique et des orbites calculées directement (traits bleus).*

effet, la dégradation de la résolution empêche d’extraire, comme dans le cas numérique, la contribution individuelle de chaque OP.

Cet accord entre ces deux spectres de longueurs valide, en plus du choix des spectres de longueurs comme outil, l’ajustement de la fonction escalier par un polynôme de degré 2. Ceci prouve que le spectre de longueurs est un outil pertinent pour extraire des signaux de transmission la signature du diffuseur ponctuel malgré les faibles différences qui existent entre celui de la cavité vide et ceux mesurés en cavité habillée (Fig 1.20).

### 1.5.3 La cavité habillée

La signature géométrique du diffuseur dans les spectres de longueur est mise en avant, comme le montre la figure 1.22, en superposant à ces spectres une série de pics centrés sur les longueurs des OPs calculées précédemment et ceci pour chaque position du diffuseur. Les OPs encore présentes dans la cavité sont ainsi identifiées et l’apparition de pics dus à la réflexion sur le diffuseur peut être observée. L’extraction des contributions associées aux orbites diffractives est donc possible.

Avant de regarder les différents spectres de longueurs, nous avons calculé la distribution des écarts  $P(s)$  expérimentale. Le paramètre  $s$  est toujours défini comme étant la différence  $\bar{N}(k_{i+1}) - \bar{N}(k_i)$  avec les valeurs propres  $k_i$  obtenues par l'ajustement du signal de transmission (Eq (1.56)). Sur la figure 1.21, l'histogramme des écarts décrit bien un comportement du type semi-Poisson, en accord donc avec la théorie et l'étude numérique.

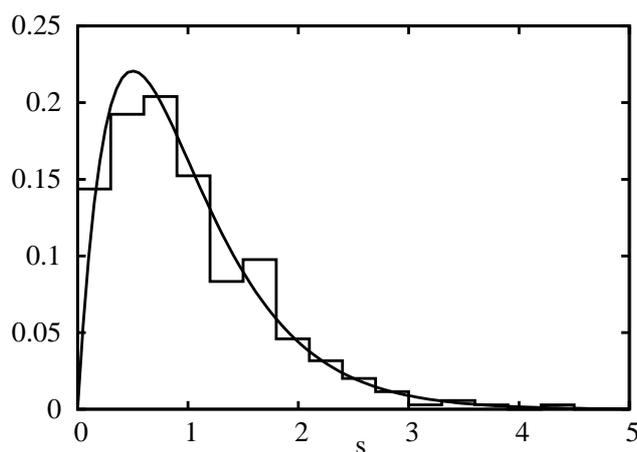


FIG. 1.21 – Histogramme expérimental de  $P(s)$  dans la cavité perturbée; Loi Semi-Poisson :  $P(s) = 4se^{-2s}$  (trait continu).

En observant le spectre de la figure 1.22, on remarque que le problème de résolution entraîne la présence de pics très larges englobant la contributions de plusieurs orbites. La signature du diffuseur ne peut donc pas être extraite en regardant quel pic disparaît entre deux spectres de longueurs associés à deux positions différentes du défaut.

Par contre, comme dans le cas numérique, des pics, ne correspondant pas aux OPs, apparaissent. Le calcul des longueurs des orbites (a), (b), (c) et (d) (Fig1.23) pour la première position prouve que le pic présent au début du spectre de la figure 1.22 contient les contributions des trois premières ODs de longueurs respectives 21 cm, 26 cm et 67 cm (traits rouges). Les autres pics non associés aux OPs correspondent soit à d'autres ODs comme le pic centré en 1.3m qui est

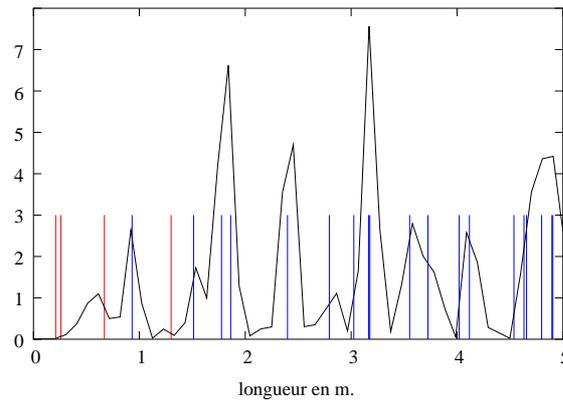


FIG. 1.22 – Spectre de longueur correspondant à la position 1 du diffuseur et localisation des OPs (traits bleus)

associé à l'orbite ( $d$ ), soit à des combinaisons linéaires d'orbites.

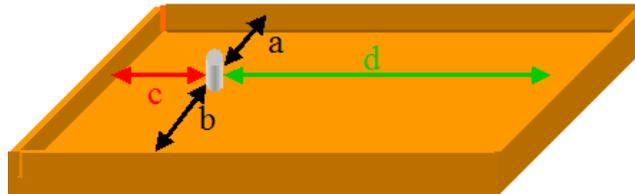


FIG. 1.23 – Quatre orbites particulières liées à la présence du diffuseur.

Comme le déplacement du diffuseur se fait parallèlement aux grands côtés par pas de 1.5cm, les orbites (a) et (b) dues à la réflexion entre le diffuseur et les grands côtés de la cavité et de longueur respectives 26 cm et 67 cm sont présentes sur les 43 spectres de longueurs dont des exemples sont donnés avec la figure 1.25. Les orbites (c) et (d) (Fig 1.23), vont quant à elles, pour chaque position du diffuseur, être respectivement allongées et raccourcies de 3 cm par aller-retour si on considère que l'orbite est définie comme une trajectoire dont les points de départ et d'arrivée sont le diffuseur.

A ce niveau, une comparaison peut être faite avec les résultats numériques. Expérimentalement, la différence d'amplitude, entre les contributions des OPs et celles des ODs, est beaucoup moins importante. Tout en étant plus faibles, les

amplitudes des pics associés aux ODs sont du même ordre de grandeur que celles associées aux OPs (Fig 1.22). Ceci peut s'expliquer par la taille finie du diffuseur entraînant une nouvelle dépendance en  $k$  des contributions des ODs.

On peut montrer que les orbites contribuant majoritairement aux spectres de longueurs sont les OPs en calculant leur robustesse. Pour cela, un "spectre" fictif correspondant à la somme des 43 spectres associés aux différentes positions du diffuseur métallique est calculé (Fig 1.24). A l'exception du pic très large regroupant les contributions de toutes les plus courtes ODs, les orbites périodiques sont bien majoritaires. La comparaison de ce spectre résultant de la somme (Fig 1.24) avec le spectre de longueurs de la figure 1.22 montre l'apparition d'un "offset". Ce dernier correspond vraisemblablement à la somme de toutes les contributions des orbites diffractives.

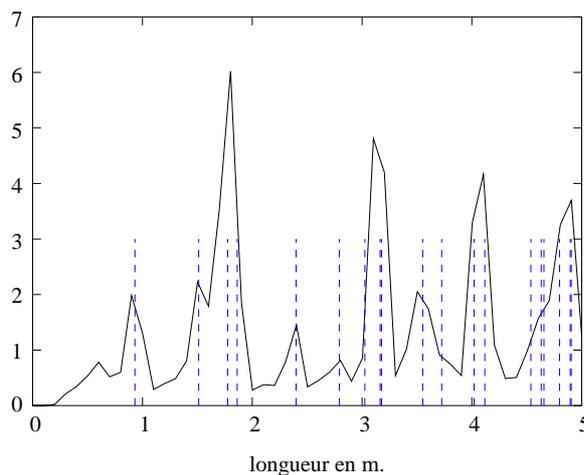


FIG. 1.24 – Spectre de longueur correspondant à la somme des 43 spectres et localisation des OPs en pointillés

Une fois le défaut détecté, est-il possible de suivre le défaut lors d'un éventuel déplacement ?

L'exploitation des spectres de longueurs montre la possibilité de suivre le diffuseur lors de son déplacement. Nous venons de mentionner que les orbites ( $c$ ) et ( $d$ ) ont une longueur qui varie en fonction de la position du diffuseur. Malgré

la difficulté de suivre l'évolution d'une seule orbite à la fois, nous avons mis en évidence cette variation de longueur sur les spectres. En regardant les spectres de longueurs de la figure 1.25, on observe que les pics associés aux orbites (c) (vert) et (d) (rouge) vont pour une position du diffuseur inférieure à la  $n^{\circ}19$  (centre de la cavité) se rapprocher jusqu'à se confondre, puis s'éloigner pour un diffuseur placé dans la seconde moitié de la cavité.

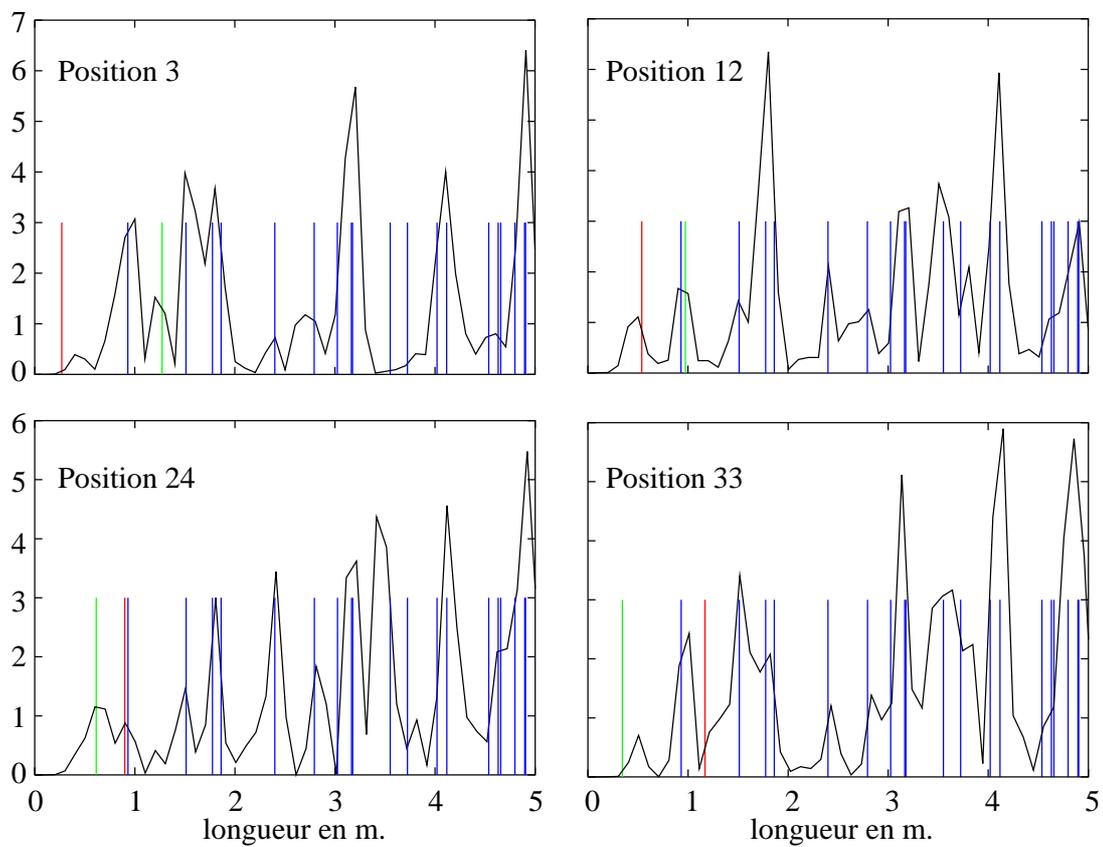


FIG. 1.25 – Evolution des orbites (c) (vert) et (d) (rouge) pour les positions 3, 12, 24 et 33 du diffuseur.

### 1.5.4 Spectres de longueurs en cavité chaotique

Les résultats suivants sont présentés uniquement dans le but de montrer la complexité de travailler dans un billard chaotique. Aucune étude systématique n'a été faite.

La cavité rectangulaire est rendue chaotique en introduisant en  $x = 34.5$  cm et  $y = 39$  cm un second diffuseur en cuivre de diamètre 12 cm donc comparable aux longueurs d'ondes utilisées. Dans le cas chaotique, la signature du défaut ne peut être mise en évidence en isolant les pics non centrés sur les longueurs d'OPs car il est difficile de calculer ces longueurs. On utilise donc la propriété des billards chaotiques qui est que la majorité des orbites périodiques présentes sont isolées. Dans les spectres de longueurs, la relation 1 pic = 1 OP isolée est donc possible. En comparant donc deux spectres de longueurs associés à deux positions du diffuseur dans la cavité chaotique, la perturbation d'une orbite pour une position donnée se voit par l'apparition ou la disparition d'un pic comme le montre la figure 1.26. Peu de points communs existent entre ces deux spectres

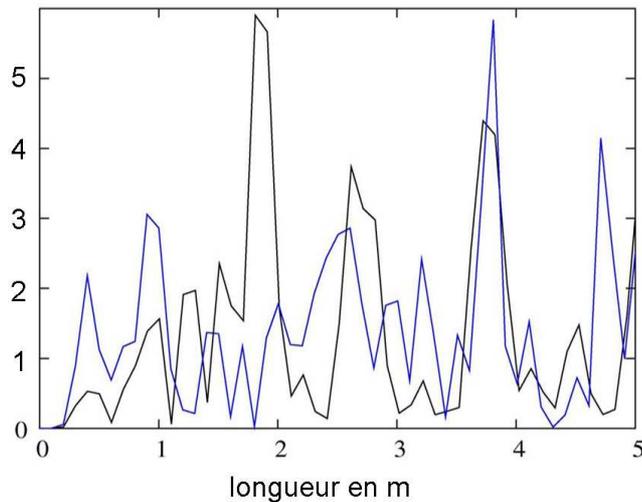


FIG. 1.26 – Spectres de longueurs correspondant à deux positions différentes du diffuseur en cavité chaotique

excepté le pic très large associé aux ODs et centré sur les petites longueurs déjà présent dans les spectres de longueurs obtenus dans le billard de Šeba. L'apparition ou la disparition d'orbites est facilement observable. Par exemple, on remarque que l'orbite ayant une longueur légèrement supérieure à 1 m est perturbée pour une position mais pas pour l'autre.

### 1.5.5 Cartographie d'une cavité rectangulaire en présence d'un défaut

Après avoir extrait une signature géométrique du diffuseur, nous avons regardé comment ce petit élément perturbateur modifie la structure spatiale du champ électrique à l'intérieur de la cavité. Pour cela, nous avons mesuré, par une procédure de mesure décrite ultérieurement, le carré du champ électrique à l'intérieur de la cavité.

Cependant, cette partie est purement descriptive et visuelle. Les cartographies du champ électrique obtenues n'ont pas été directement exploitées mais uniquement utilisées pour illustrer comment un diffuseur ponctuel introduit dans une cavité perturbe la structure de mode.

Lors de l'étude numérique de la cavité habillée, nous avons vu qu'un mode de la cavité habillée est compris entre deux modes de la cavité non perturbée. Les cartographies du champ électrique montrées sur la figure 1.27 ont été réalisées pour les deux résonances centrées sur les fréquences qui encadrent la fréquence du mode propre (6,2) cartographié dans la section précédente *i.e.* pour  $f < f_{62}$  et  $f < f_{62}$ .

La structure spatiale du champ électrique n'est plus celle d'un mode (6,2) de la cavité vide. Cependant, malgré la présence du diffuseur ponctuel on peut remarquer sur la seconde cartographie du champ de la figure 1.27 que cette structure de mode définit pour la cavité vide persiste car une structure spatiale quasi-(5,2) de la cavité vide est trouvée. En fait, les structures observées peuvent s'obtenir par une superposition linéaire des modes réguliers, voisins du mode (6,2). Cet effet de

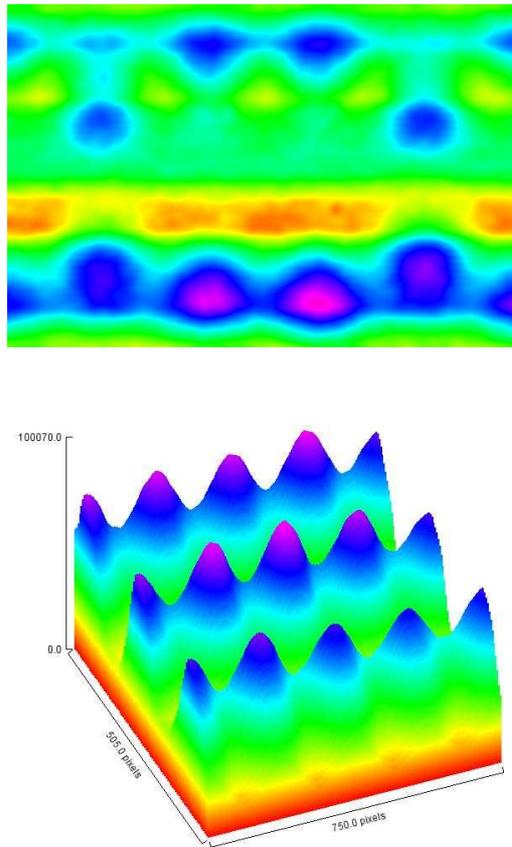


FIG. 1.27 – Représentations de l'intensité du champ électrique correspondant aux modes obtenus pour les résonances centrées en  $f < f_{62}$  et  $f > f_{62}$  avec le diffuseur placé en  $x = 46.5$  cm et  $y = 20$  cm

couplage des résonances, qui s'observe en mécanique quantique dans le problème du double puits de potentiel, a été étudié expérimentalement dans une cavité micro-ondes rectangulaire par l'équipe de H.J Stöckmann [Kuhl et al., 2000].

# Conclusion

Depuis les années 90, de très nombreux travaux théoriques et numériques ont mis en évidence l'influence directe d'un défaut sur des grandeurs théoriques telles que la distribution des écarts entre deux niveaux plus proches voisins. En effet, il a été montré que cette distribution  $P(s)$  ne vérifie ni une loi de type Wigner propre à des billards chaotiques ni un comportement de type Poisson caractéristique de billards intégrables mais un comportement intermédiaire associé à des billards définis comme pseudo-intégrables. Nous avons souhaité, à travers ce chapitre, montrer qu'il était tout à fait possible, à partir d'une expérience en cavité micro-ondes perturbée par un défaut, de remonter à des informations spatiales sur celui-ci. Nous avons choisi pour cela de suivre une approche semi-classique basée sur les orbites périodiques et d'utiliser plus précisément des spectres de longueurs. Ces spectres contiennent les contributions de toutes les orbites présentes dans le système. La pertinence de ce choix pour extraire une signature du défaut des signaux de transmission est prouvée par les très bons résultats obtenus à partir d'une étude numérique du système pseudo-intégrable. En effet, en plus d'observer des résultats en accord avec les résultats obtenus par le passé (comportement intermédiaire de la distribution  $P(s)$ ), cette étude a permis de prouver que les spectres de longueurs contiennent bien des informations sur le diffuseur. Nous avons montré que dans ces spectres apparaissent de nouvelles contributions associées à de nouvelles orbites dues à la présence du diffuseur, les orbites diffractives. Une fois la pertinence de l'approche choisie prouvée, nous avons réalisé l'étude expérimentale d'une cavité micro-ondes habillée par un diffuseur ponctuel de taille

finie. Nous avons démontré que les spectres de longueurs, malgré la faible résolution liée à l'utilisation d'un spectre en fréquence limité, exhibent toujours des contributions associées aux orbites diffractives. Nous avons également montré que le déplacement du diffuseur à l'intérieur de la cavité peut être suivi via les spectres de longueurs. De façon purement quantitative, nous avons également montré que dans un billard chaotique habillé par un défaut, il est également possible, certes plus difficilement, d'extraire les contributions des orbites diffractives.

En amont de ces études numérique et expérimentale du billard de Šeba, une analyse théorique, basée sur celle de R. Weaver et D. Sornette, a été faite pour calculer les fonctions propres et les valeurs propres d'un tel système. Cette étude théorique a permis de corriger une pathologie, mise en avant par Shigehara et Cheon, sur la non orthogonalité des fonctions propres calculées par l'approche de Weaver et Sornette.

Une des applications directes de ces résultats est la résolution du problème inverse. En effet, en identifiant dans les spectres de longueurs toutes les contributions des orbites diffractives, on peut très bien imaginer remonter à la position exacte du diffuseur dans la cavité. On pourrait alors faire de la détection non destructive et non invasive de défaut en milieu bidimensionnel fermé.

# Chapitre 2

## Milieux désordonnés fortement diffusifs

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction à la localisation d'Anderson . . . . .</b>	<b>69</b>
<b>2.2</b>	<b>Nouveau dispositif expérimental . . . . .</b>	<b>73</b>
2.2.1	La nouvelle cavité micro-ondes . . . . .	74
2.2.2	L'analyseur de réseau nouvelle génération: R&S ZVA24 . . . . .	82
2.2.3	Les diffuseurs diélectriques . . . . .	83
<b>2.3</b>	<b>Protocole expérimental . . . . .</b>	<b>92</b>
2.3.1	Les platines de translation . . . . .	92
2.3.2	Le réseau de diélectriques . . . . .	93
2.3.3	Mesure indirecte de l'intensité du champ électrique . . . . .	97
2.3.4	La trajectoire labyrinthique . . . . .	103
<b>2.4</b>	<b>Une expérience type . . . . .</b>	<b>105</b>
<b>2.5</b>	<b>Les premiers modes localisés . . . . .</b>	<b>108</b>
<b>2.6</b>	<b>Étude exhaustive des modes localisés . . . . .</b>	<b>121</b>
2.6.1	$d = 11 \text{ mm}$ , $\sigma = 8.8\%$ , $r = 3 \text{ mm}$ . . . . .	122
2.6.2	$d = 13 \text{ mm}$ , $\sigma = 5.5\%$ , $r = 3 \text{ mm}$ . . . . .	128
2.6.3	$d = 13 \text{ mm}$ , $\sigma = 5.5\%$ , $r = 4 \text{ mm}$ . . . . .	136

2.6.4  $d = 13$  mm,  $\sigma = 5.5\%$ ,  $r = 3$  mm,  $r = 4$  mm . . . . . 141

---

## 2.1 Introduction à la localisation d'Anderson

A travers cette introduction, une description non exhaustive des travaux, réalisés en milieux diffusifs dans le but d'observer la localisation d'Anderson, est proposée.

P.W Anderson donna son nom au phénomène de localisation en 1958 lorsqu'il proposa un modèle en terme de potentiels désordonnés de la transition conducteur-isolant pour un métal. En effet, il montra que si les potentiels ont tous des énergies aléatoires alors les électrons restent piégés spatialement [Anderson, 1958]. Les électrons ne peuvent donc pas traverser le métal ce qui implique que le courant électrique n'est plus conduit : le métal se comporte comme un isolant. La localisation d'Anderson est due aux interférences d'ondes multiples diffusées par les défauts présents dans le métal. Ces phénomènes physiques d'interférences et de diffusion multiple n'existent pas uniquement pour des particules quantiques comme les électrons mais sont également présents lorsqu'on étudie des phénomènes ondulatoires classiques. Ceci a induit un développement dans les années 1980 de nombreux travaux expérimentaux et théoriques. Pour observer la localisation d'Anderson différents types d'ondes, comme les ondes électromagnétiques, acoustiques ou encore mécaniques, ont été employées. L'avantage de travailler avec les photons est qu'ils n'interagissent pas entre eux contrairement aux particules telles que les électrons. En effet, les implications directes des interactions sur le phénomène de localisation sont mal maîtrisées.

Cependant malgré ce grand intérêt porté à l'étude du transport des ondes, peu de résultats convaincants, c'est-à-dire d'observation directe de la localisation d'Anderson, ont été obtenus, excepté dans des systèmes unidimensionnels où tout désordre localise. Un des critères de localisation, dans le domaine spatial, est la décroissance exponentielle du signal de transmission en fonction du rapport entre la longueur du système étudié et la longueur de localisation. Les premiers à avoir mis en évidence expérimentalement ce critère sont ceux de l'équipe de Wiersma [Wiersma et al., 1997]. Cette longueur correspond à l'étalement spa-

tial du mode caractérisé par une enveloppe exponentielle. Ce critère est rapidement mis en question car dans la majorité des systèmes, l'absorption présente est à l'origine de cette même décroissance ce qui rend donc les résultats très discutables [Sheffold et al., 1999]. Cette remise en question a suscité la recherche de nouvelles signatures de la localisation comme par exemple à travers l'étude statistique de la localisation d'Anderson proposée par l'équipe de A.Z. Genack. Le système considéré est un tube en cuivre assimilable à un milieu quasi unidimensionnel rempli de diffuseurs diélectriques enveloppés dans du polystyrène. Deux antennes sont placées respectivement aux extrémités du tubes pour exciter et mesurer le signal de transmission. Le paramètre utilisé est la variance de la transmission normalisée [Chabanov et al., 2000]. Une autre approche statistique basée sur le calcul des fonctions de corrélation spectrale et spatiale du champ électrique et de son intensité dans le milieu désordonné a été proposée par P. Sebbah et al [Sebbah et al., 2000, Sebbah et al., 2002]. Le système désordonné est celui quasi-unidimensionnel précédemment décrit et utilisé par Genack. Ils montrent par exemple qu'il existe des corrélations à longue portée de l'intensité du champ électrique. Dans ce même milieu quasi uni-dimensionnel, une première représentation spatiale du champ électrique obtenue expérimentalement et illustrant la localisation d'Anderson a été donnée par P. Sebbah et al [Sebbah et al., 2006] et Bliokh et al [Bliokh et al., 2006]. La mesure du champ électrique est faite par une antenne qui se déplace le long du guide d'onde rempli de diffuseurs diélectriques. Leur dispositif expérimental leur permet aisément de changer de configurations de désordre. L'analyse de signaux de transmission obtenus pour plusieurs désordres a mis en évidence l'existence de modes localisés communs à toutes ces configurations, appelés les "*modes perlés*".

A deux dimensions, des représentations spatiales du champ électrique et de nombreux critères de localisation, présentés dans [Sebbah and Vanneste, 2002, Vanneste and Sebbah, 2005], ont été obtenus à partir de simulations numériques réalisées notamment dans l'équipe "Propagation d'Ondes en Milieux Complexes" au sein du laboratoire. Le système simulé est composé de cylindres diélectriques de

rayon  $r$ . Il est ouvert de sorte que la quasi totalité de l'énergie fuit le système. Les simulations consistent à résoudre les équations de Maxwell pour les modes transverses magnétiques avec un méthode FDTD (Finite Differences Time Domain). Les auteurs étudient l'existence de modes localisés en fonction de la fraction volumique de diélectriques dans le milieu. Ils montrent que les fenêtres de localisation, présentes dans les signaux de transmission et contenant les résonances associées à ces modes localisés, sont centrées sur des fréquences dont la valeur ne dépend pas du désordre mais de la taille et la proportion des diffuseurs et plus précisément du rapport  $r/\lambda$ . Les modes localisés sont propres à un désordre. Le changement de désordre induit donc de nouveaux modes localisés et donc un changement du signal dans chaque fenêtre de localisation. C'est donc la structure interne à chaque fenêtre qui dépend du désordre. Les représentations spatiales des modes localisés sont obtenues en excitant le milieu à différentes fréquences choisies dans les fenêtres de localisation. Dans le second article, le paramètre variable est le diamètre des diélectriques composant le système. Ils ont prouvé que dans les fenêtres de localisation évoquées précédemment se trouvent des modes localisés à durée de vie très grande et donc que ces derniers "voient" très peu les bords car leurs pertes sont faibles. Un autre résultat intéressant est la relation directe qui existe entre la fréquence  $f_{loc}$  sur laquelle la fenêtre de localisation est centrée et la fréquence  $f_{Mie}$  de la résonance de Mie d'un diélectrique unique. Cette dernière fréquence dépend directement du diamètre  $d$  du diffuseur. Les simulations numériques réalisées pour différentes valeurs de  $d$  montrent un léger décalage entre  $f_{loc}$  et  $f_{Mie}$ . Ce décalage est dû au fait que dans un milieu désordonné, chaque diffuseur ne peut être considéré individuellement. Leur importante efficacité pour ces  $f_{Mie}$  fait que le comportement d'un seul diffuseur est influencé par ses plus proches voisins ; les diffuseurs doivent donc être considérés dans leur ensemble. Une résonance de Mie effective, décalée vers les basses fréquences par rapport à  $f_{Mie}$ , peut être définie. L'insensibilité aux conditions de bords est mise en avant comme critère de localisation tout comme l'importance du contraste d'indice entre les diffuseurs et l'air. Expérimentalement, plusieurs équipes ont obtenu des représentations spatiales de

modes mais jamais très convaincantes. Un premier exemple est l'expérience réalisée par Dalichaouch *et al* [Dalichaouch et al., 1991]. L'expérience est faite en cavité micro-onde en présence de diffuseurs diélectriques. Des trous présents dans la paroi supérieure de la cavité permettent la mesure du champ électrique via une antenne. Des absorbants sont ajoutés le long des parois pour simuler une cavité ouverte et rejoindre le cas des simulations numériques évoquées précédemment. L'insensibilité aux conditions de bords est vérifiée. Deux arguments remettent en cause ces résultats : l'absence de comparaison des représentations spatiales obtenues en ayant changé les bords et leur faible résolution spatiale, due à leur procédé de mesure du champ, qui les empêche d'exciter un unique mode localisé. Sridhar *et al* ont également réalisés de nombreuses expériences en milieux désordonnés dans le cadre de leur étude basée sur la comparaison des billards chaotiques et désordonnés [Kudrolli et al., 1995, Pradhan and Sridhar, 2000]. Le système étudié est une cavité rectangulaire de faible hauteur (6 mm) et les milieux désordonnés sont composés de diffuseurs très efficaces. Le critère de localisation utilisé pour faire la comparaison entre ces deux types de milieux est l'IPR, Inverse Participation Ratio défini, en posant la normalisation  $\langle |\Psi(\vec{q})|^2 \rangle = 1$ , comme la limite quand  $\vec{r}$  tend vers zéro de la fonction d'autocorrélation  $\langle |\Psi(\vec{q})|^2 |\Psi(\vec{r} + \vec{q})|^2 \rangle$ . C'est un argument statistique, il est donc pertinent pour un système où de nombreux modes peuvent être détectés. Le régime de localisation est défini par une valeur moyenne de l'IPR très grande devant 3 (valeur obtenue pour un système chaotique) et des fluctuations de l'ordre de sa valeur moyenne. Deux remarques peuvent être faite sur ces modes localisés. Si on considère un unique mode, le critère d'un grand IPR comme critère de localisation peut être remis en cause en appliquant le critère d'insensibilité aux conditions de bords obtenu numériquement et utilisé par Dalichaouch *et al*. Les représentations fournies dans les articles sont celles de modes localisés extrêmement proches des bords du milieu, une modification de ces derniers engendrerait donc leur disparition. De plus, en supposant que ce critère d'insensibilité est vérifié, le fait de travailler en cavité fermée ajoute un doute sur la nature du mode. Est-ce un mode de cavité dû aux réflexions sur les parois ou est-ce vraiment un mode

localisé? Dans ces milieux à deux dimensions, la mesure du champ électrique est réalisée en mesurant le décalage en fréquence d'une résonance induit par la présence d'un élément perturbateur tel qu'une bille métallique. L'intensité du champ électrique est directement proportionnelle à ce décalage. Nous reviendrons plus en détail sur cette technique dans la section (2.2.3) de ce chapitre.

En conclusion, faute de résultats marquants, l'observation expérimentale de modes localisés en milieux bidimensionnels reste un défi important dans la communauté de la diffusion multiple. Les résultats obtenus à partir des simulations numériques réalisées tels que la nécessité de travailler en cavité ouverte et le critère d'insensibilité aux conditions de bords, vont servir de base pour les expériences. Ces simulations prouvent de plus l'existence de la localisation spatiale du champ électrique. La théorie offre également des critères de localisation comme le comportement exponentiel des largeurs spectrales en fonction du rapport entre la distance aux bords d'un mode localisé et sa longueur de localisation montré par Pinheiro et *al* [Pinheiro et al., 2004].

Un sujet de recherche en plein essor est directement relié à l'observation de modes localisés, celui des lasers aléatoires. Ils sont construits en "plongeant" le milieu désordonné (milieu passif) dans un milieu à gain. L'effet laser est obtenu si la courbe de gain de ce milieu est centré sur une résonance d'un mode localisé du milieu passif. Si l'apport d'énergie se fait là où le champ est localisé spatialement alors l'effet laser est possible [Sebbah and Vanneste, 2002]. H. Cao a été une des premières à mettre au point expérimentalement un laser aléatoire. Le système désordonné, exhibant des modes localisés, est un milieu de nano-particules semi-conductrices [Cao et al., 2000].

## 2.2 Nouveau dispositif expérimental

Si l'on compare le dispositif expérimental utilisé pour l'étude du système à un diffuseur (Fig 1.13) à celui présenté sur la figure 2.1, à première vue uniquement l'apparition des platines de translation les différencie. Ce dispositif, dont on donne

pour commencer un rapide descriptif, a été conçu pour observer la localisation d'Anderson dans des milieux fortement diffusifs. Cette localisation est caractérisée par un piégeage spatial du champ électrique dans le milieu désordonné. Ceci a impliqué de nombreuses modifications à l'intérieur de la cavité. On utilise entre 100 et 200 diffuseurs non plus métalliques mais diélectriques car beaucoup plus efficaces et beaucoup moins absorbants. Des absorbants micro-ondes ont été ajoutés le long des parois de la cavité afin de simuler une cavité ouverte et de supprimer tous les "modes de cavité" dus aux réflexions sur ces parois. L'avantage de l'absence totale de modes de cavité est que si une représentation spatiale du champ montre un piégeage alors aucune ambiguïté n'est possible sur la nature localisé du mode. En plus de ces modifications directes sur le dispositif expérimental, une nouvelle procédure numérique a été développée, à partir de Labview, afin de piloter les platines de translation utilisées pour le positionnement des diffuseurs diélectriques dans la cavité et pour réaliser la mesure du champ électrique.

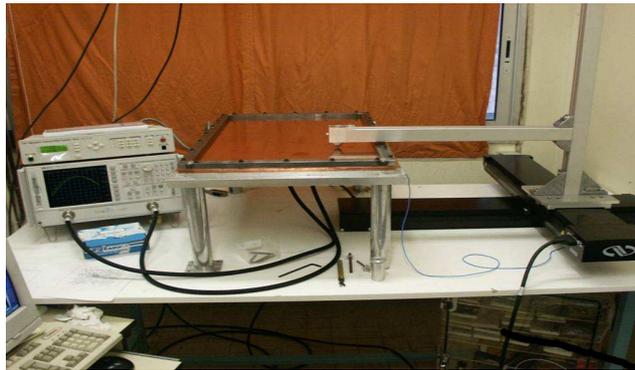


FIG. 2.1 – Nouveau dispositif expérimental conçu pour observer des modes localisés en milieux 2D.

### 2.2.1 La nouvelle cavité micro-ondes

Dans le dispositif précédent, la cavité était constituée de deux plaques de cuivre d'épaisseur respective 5 mm et 0.5 mm. La plus fine des plaques a été remplacée par

une plaque de cuivre rigide, de qualité OFHC et d'épaisseur 5 mm afin d'améliorer l'état de surface et donc la qualité des signaux de transmission. Cette dernière amélioration se traduit par des résonances plus fines car la qualité de surface est directement liée aux pertes dans la cavité et donc à l'élargissement des résonances. Pour réaliser les expériences en cavité vide, cette plaque de cuivre ne pouvait être utilisée à cause du flambage dû à son poids contrairement à une cavité remplie de diffuseurs "soutiennent" cette plaque et donc empêche une éventuelle courbure de la plaque. La seule précaution à prendre avec cette nouvelle cavité est de ne pas réaliser une mesure du champ électrique juste après l'avoir fermée. En effet, si les diffuseurs sont légèrement plus épais que la cavité, il est alors vraisemblable qu'une contrainte soit appliquée sur la plaque de cuivre. Les relaxations mécaniques du cuivre font qu'il est indispensable d'attendre environ 24 heures avant d'effectuer une mesure. Cette relaxation se traduit par une dérive en fréquence du signal jusqu'à la stabilisation.

L'inconvénient du cuivre est que sa conductivité électrique augmente avec la température. Pour que les pertes soient les mêmes pour chaque mesure *i.e* que la conductivité électrique soit toujours la même, il est indispensable de maintenir le dispositif expérimental à une température constante. Ainsi, la qualité de la mesure ne dépend pas du moment de la journée ou celle-ci est réalisée.

Avec cette toute nouvelle cavité, le dispositif de 25 vis traversantes n'est plus suffisant pour fournir un serrage uniforme et donc assure une rigidité à la cavité. Pour pallier à ce problème nous avons ajouté, comme le montre la Fig 2.1, un cadre en acier d'épaisseur 2 cm et de largeur 3 cm. Le mauvais serrage s'illustre par l'absence de résonances dans nos signaux quand le cadre en acier n'est pas utilisé (Fig 2.2). L'amélioration du serrage grâce à ce cadre permet également de minimiser l'influence de l'environnement de la cavité, très néfaste dans ce type d'expérience car les signaux mesurés sont très faibles comparés à ceux obtenus en cavité rectangulaire vide.

L'ajout d'absorbants le long des parois de la cavité réduit, comme le montre la figure 2.4, la zone de mesure mais également le nombre d'antennes utilisables.

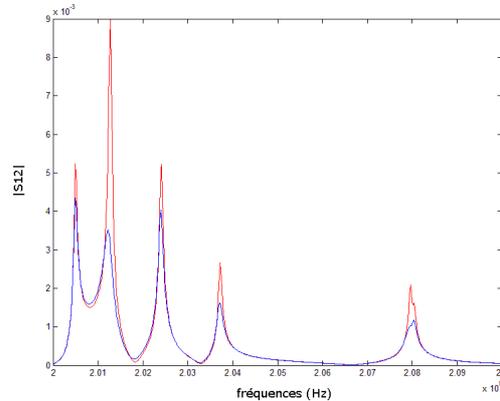


FIG. 2.2 – Spectres obtenus respectivement avec (rouge) et sans (bleu) le cadre en acier.

Comme on l’a évoqué dans le chapitre précédent, si l’on souhaite détecter tous les modes du système il faut suffisamment d’antennes pour espérer remonter au champ électrique sur une surface la plus étendue possible. En plus des deux antennes déjà existantes, deux nouvelles antennes, toujours visées dans la plaque de cuivre la plus épaisse, ont été ajoutées au centre de la cavité.

### Son ouverture vers l’extérieur !!

Une des différences entre les simulations numériques et les expériences est le choix des conditions de bords. Numériquement, des conditions aux bords dites de rayonnement vers l’extérieur sont utilisées afin de simuler une cavité ouverte. Expérimentalement, les conditions aux bords sont réfléchissantes ce qui correspond à une cavité fermée. Cette partie justifie ce choix de conditions de bords. Les deux spectres représentés sur la figure 2.3 sont obtenus en considérant un milieu désordonné introduit respectivement dans une cavité ouverte et dans une cavité fermée. L’ouverture de la cavité est décrite par la suite. Les signaux possèdent une structure globale très similaire et présentent, tous les deux, des résonances. Deux raisons peuvent être avancées pour prouver la pertinence des bords rayonnant vers l’extérieur.

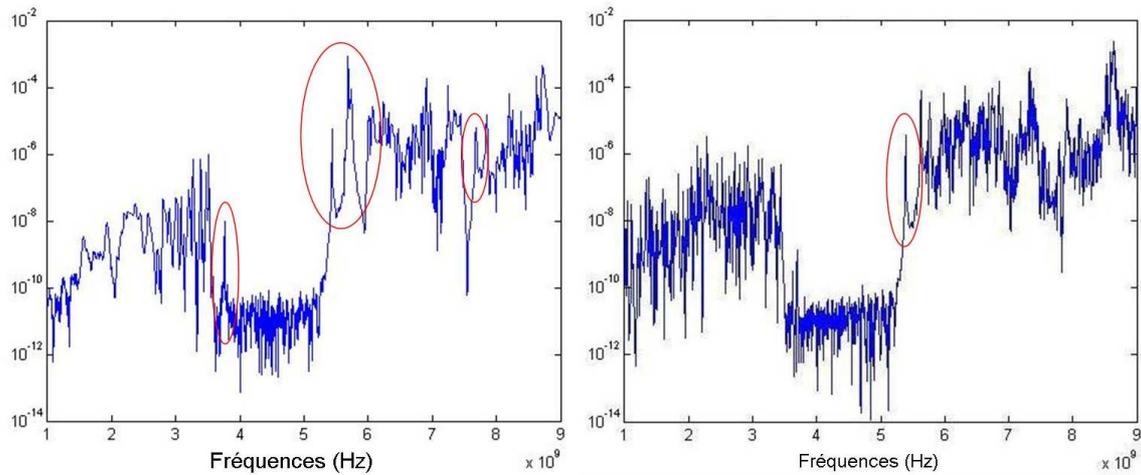


FIG. 2.3 – Spectres obtenus respectivement dans la cavité en présence et en absence d'absorbants.

La première est sur l'origine des résonances dans chacun des spectres. Dans une cavité fermée contenant un milieu désordonné, le nombre de résonances est beaucoup plus important que dans le cas d'une cavité ouverte. Ceci vient du fait qu'en plus des résonances associées aux éventuels modes localisés dans le milieu désordonné, s'ajoutent les résonances liées aux modes de cavité dus aux réflexions sur les parois cuivrées de la cavité. Cette double origine des modes ajoute donc une ambiguïté sur la nature du mode cartographié contrairement au cas de la cavité vide où les réflexions sur les bords sont minimisées. Les modes de cavités sont complètement absents, comme le montre la figure 2.5 et donc un mode cartographié ne peut être que localisé.

La seconde raison est directement liée à la méthode utilisée pour réaliser les cartographies de champ électrique. En effet, nous verrons par la suite que la mesure du champ électrique se fait de façon indirecte via une mesure du décalage en fréquence d'une résonance. Ainsi, l'observation d'un mode localisé spatialement peut être faite uniquement si la résonance est isolée spectralement. Il est facile d'imaginer la difficulté de suivre le décalage en fréquence d'une résonance possédant un recouvrement important. En effet, lorsqu'on a décrit dans la partie précédente la

méthode d'extraction des paramètres pertinents comme  $f_n$ , nous avons évoqué le fait qu'en présence d'un recouvrement important la vraie fréquence de résonance ne correspond pas à la fréquence du maximum sur le signal. Donc, comme lors de l'expérience le décalage en fréquence d'une résonance est observé en étudiant le décalage d'un maximum du signal de transmission, nous sommes contraints de travailler avec des résonances très bien isolées. Cette résolution et cet isolement spectral nécessaire sont visibles pour de nombreuses résonances dans la configuration cavité ouverte par rapport au cas d'une cavité fermée. Ceci s'explique encore une fois par le grand nombre de pics présents dans le signal de la cavité fermée par rapport à celui de la cavité vide. Les résonances exploitables sont mises en avant par un tracé rouge sur les différentes figures.

En conclusion, la cavité ouverte est bien la configuration expérimentale optimale pour obtenir des représentations spectrales du champ électriques mettant en avant le phénomène de localisation d'Anderson sans aucune ambiguïté.

Comment ouvrir la cavité micro-ondes ?

En résumé, il faut expérimentalement réduire le plus possible les réflexions sur les bords de la cavité afin d'avoir des conditions de bords rayonnantes vers l'extérieur. La première idée a été de travailler en "vraie" cavité ouverte c'est-à-dire enlever directement le cadre en cuivre. Cependant, dans ce cas extrême, la réponse mesurée n'est plus tout à fait propre au système désordonné placé à l'intérieur de la cavité. En effet, l'environnement électro-magnétique qui entoure la cavité, par l'exemple celui dû à la présence de l'ordinateur et de l'analyseur de réseau, peut perturber très fortement l'intérieur de la cavité. Ceci implique que le résultat mesuré n'a plus aucune signification physique car son origine n'est pas connue exactement. La meilleure solution est donc d'opter pour une cavité ouverte via des parois absorbantes.

La cavité rectangulaire est ouverte vers l'extérieur en ajoutant le long des bords des absorbants micro-ondes, comme le montre la figure 2.4. Ce sont des absorbants de chez Emerson & Cuming.

Pour que les réflexions sur les parois soient minimales, il est indispensable

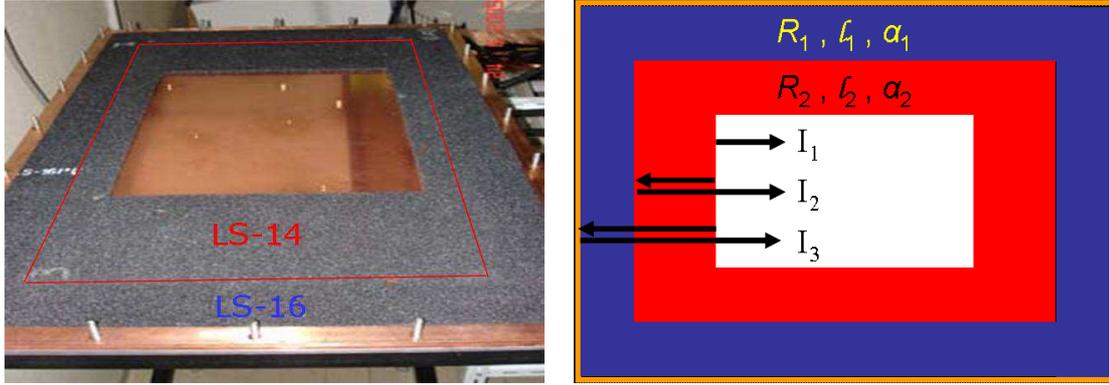


FIG. 2.4 – Cavité rectangulaire consid er e comme ouverte grâce aux absorbants micro-ondes et sa représentation schématique illustrant la ré-insertion d'ondes dans la cavité après un aller-retour dans les absorbants, les réflexions sur les interfaces absorbant-air et absorbant-absorbant.

d'éviter de trop grandes variations relatives d'impédance et donc d'éviter des coefficients de réflexion trop importants. Ces coefficients sont obtenus à partir des ruptures d'impédance par la relation suivante :

$$R = \frac{\left(\frac{Z}{Z_0} - 1\right)^2}{\left(\frac{Z}{Z_0} + 1\right)^2} \quad (2.1)$$

avec respectivement  $Z$  et  $Z_0$  les impédances de l'absorbant consid er e et du vide.

Différentes combinaisons, comme par exemple l'association de plusieurs absorbants ou l'utilisation d'un unique absorbant très efficace, ont été  tudi es. Pour chacune de ces configurations, des expériences ont été faites avec et sans les bords cuivr es de la cavité. Analytiquement, le choix de la configuration optimale se fait via le calcul de r e-insertion d'ondes dans notre cavité. Ce calcul s'écrit de la façon suivante :

$$I = \underbrace{R_1}_{I_1} + \underbrace{(1 - R_1)^2 e^{-2\alpha_1 l_1} * R_2}_{I_2} + \underbrace{(1 - R_1)^2 e^{-2\alpha_1 l_1} * (1 - R_2)^2 e^{-2\alpha_2 l_2} * R}_{I_3} \quad (2.2)$$

Pour écrire la relation (2.2), uniquement trois contributions, illustr es sur le schéma de la figure 2.4, sont prises en compte, l'intensité injectée après :

1.  $I_1$ , la réflexion sur la première paroi absorbante,
2.  $I_2$ , un aller-retour dans la première couche absorbante,
3.  $I_3$ , un aller-retour dans les deux couches absorbantes et une réflexion sur la paroi cuivrée.

Donc comme illustré sur la figure 2.4, les  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ) et  $l_i$  (voir Tab(2.1)) correspondent respectivement aux coefficients de réflexions et aux épaisseurs de chaque absorbant. Si un seul absorbant est utilisé  $R_2 = 1$  et  $l_2 = 0$ . Le coefficient  $R$  vaut 1 dans le cas où les bords en cuivre sont conservés et  $R_i$  dans la situation où l'absorbant est directement en contact avec l'air. La résolution de l'équation (2.2) montre que la meilleure configuration est celle composée de deux absorbants différents et en présence des parois cuivrées.

En effet, les absorbants utilisés ont la particularité d'être simultanément très absorbants mais également très réfléchissants *i.e.* leur coefficient de réflexion air-absorbant est important. L'utilisation d'un seul absorbant très efficace engendrerait donc une ré-injection importante d'onde dès la première réflexion sur l'absorbant et donc de nouveaux modes de cavité apparaîtraient. La solution à ce nouveau problème est l'utilisation de deux absorbants différents. Un premier absorbant peu efficace avec un coefficient air-absorbant faible est utilisé pour minimiser les réflexions sur les premières parois absorbantes, dans notre cas du  $LS_{14}$ . Le second absorbant,  $LS_{16}$ , est beaucoup plus efficace pour avoir une grande absorption du signal et donc de faibles réflexions sur les parois en cuivre de la cavité initiale. Leurs caractéristiques techniques sont regroupées dans le tableau (2.1).

	Atténuation (dB/cm)	Coefficient de Réflexion
LS-14	1.0	$8.6 \cdot 10^{-3}$
LS-16	1.5	$1.5 \cdot 10^{-2}$

TAB. 2.1 – *Caractéristiques techniques des absorbants micro-ondes utilisés.*

En résumé, la nouvelle configuration de la cavité est, comme le montre la figure

2.4 : bords cuivrés + 2 absorbants  $LS_{14}$  et  $LS_{16}$ . Les longueurs optimales sont calculées à partir de la relation (2.2) et sont de :

- $l_{LS_{14}} = 3.8$  cm et  $l_{LS_{16}} = 5.6$  cm parallèlement aux grands côtés et de
- $l_{LS_{14}} = 15$  cm et  $l_{LS_{16}} = 5.5$  cm le long des petits côtés.

Avec ces épaisseurs optimales, après un aller-retour à travers les deux couches absorbantes la ré-injection dans la cavité est de 1% de l'intensité incidente du champ électrique. Cette faible re-injection est prouvée par le facteur 30 présent entre les deux signaux de transmission. La figure 2.5 représente le signal de transmission obtenu dans la cavité de la figure 2.4. La comparaison de ce signal avec le signal caractéristique d'une cavité fermée (Fig 2.5) confirme l'efficacité de la combinaison des absorbants pour éliminer les modes de cavité. La dernière diffé-

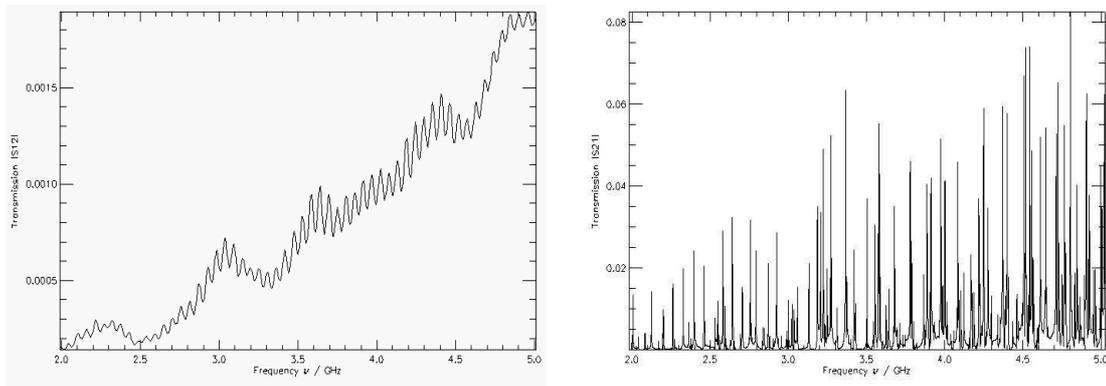


FIG. 2.5 – Spectres obtenus respectivement dans la cavité vide avec les deux couches d'absorbants et en cavité fermée.

rence entre les signaux est la présence d'une oscillation. Après vérification cette dernière ne correspond ni à la propagation de l'onde dans les câbles ni dans les antennes. Nous avons émis l'hypothèse que cette modulation est d'origine électronique intrinsèque à l'analyseur de réseau et donc présente sur tous les signaux précédemment obtenus mais non visible à cause de la différence d'amplitude.

En conclusion, nous pouvons imaginer que les résonances présentes dans nos signaux de transmission, résultats de l'excitation d'un milieu désordonné, sont toutes associées à des modes localisés ou des quasi-modes du système.

### 2.2.2 L'analyseur de réseau nouvelle génération : R&S ZVA24

L'analyseur de réseau HP8720D précédemment utilisé pour réaliser des expériences dans des billards de Šeba présente certaines limitations techniques telles que le nombre de points pour discrétiser la fenêtre spectrale et la puissance de sortie. Nous verrons que la qualité de la cartographie du champ électrique mesurée pour observer la localisation d'Anderson nécessite une très bonne résolution spectrale. La faible puissance de sortie quant à elle ne permet pas d'avoir dans certaines parties du spectre un rapport signal sur bruit suffisant pour pouvoir extraire toute l'information de nos signaux de transmission. En effet, certaines résonances associées à des modes propres du milieu étudié peuvent être d'amplitude proche de celle du bruit. Une puissance plus élevée augmente ce rapport et rend ainsi possible l'extraction de ces résonances du bruit et ainsi leur identification et leur exploitation.

La nouvelle génération d'analyseur de réseau présente des améliorations notables sur ces deux critères. Nous avons fait l'acquisition d'un appareil de chez Rohde & Schwarz, un R&S ZVA24. La gamme en fréquence totale exploitable est comprise entre 10 MHz à 24 GHz. Un des avantages de cet appareil est que le nombre de points est un paramètre libre et ajustable. Auparavant, le nombre de points était fixé donc nous étions limités par un soucis de résolution sur la gamme de fréquence exploitable. On a donc une liberté plus grande sur le choix de la largeur spectrale de la fenêtre sur laquelle le signal est exploité.

La grande puissance de sortie représente une amélioration notable. Ce nouvel analyseur fournit jusqu'à 100mW en sortie à comparer au 1mW de l'HP8720D. Cette augmentation de puissance de sortie rend possible l'exploitation de résonances précédemment noyées dans le bruit. L'analyseur permet de diminuer également le niveau de bruit présent sur les signaux de transmission. En plus de la contribution importante au bruit due à l'expérience, il existe une contribution intrinsèque à l'analyseur appelé le bruit de trace. Le niveau de ce bruit est sensiblement diminué ce qui augmente le rapport signal sur bruit et donc contribue à l'extraction de résonances non identifiées auparavant. Le temps de réponse de

l'analyseur en chaque point de mesure est très faible, 3.5 ns, ce qui réduit la durée des expériences déjà très longues.

Une des options de cet appareil est adaptée aux expériences de cartographie du champ électrique. Ces mesures ont une durée d'au minimum 1 jour, il est donc indispensable que l'appareil possède une très bonne stabilité en fréquence dans le temps. Pour augmenter cette durée de stabilité, initialement très correcte, l'appareil est doté d'un stabilisateur en température du générateur de fréquences.

L'utilisation de ce nouvel analyseur de réseau a entraîné une période creuse dans les expériences. En effet, il a été indispensable de réécrire la procédure numérique de pilotage de l'appareil car les commandes utilisées par Rohde & Schwarz sont totalement différentes de celles utilisées par HP. De nombreux tests ont été réalisés pendant cette période, dans l'optique de valider au fur et à mesure toutes les modifications apportées à la procédure numérique.

### 2.2.3 Les diffuseurs diélectriques

Dans la partie "Les cavités micro-ondes habillées", le défaut est représenté par un diffuseur métallique. Ce type de diffuseurs possède deux gros inconvénients. Il est à la fois peu efficace et très absorbant. Si les milieux désordonnés sont composés de ce type de diffuseur alors les pertes dues à la conductivité finie du matériau utilisé sont considérables. L'absorption est alors importante et les signaux s'en trouvent très détériorés. Le choix s'est orienté vers un type de diffuseur beaucoup moins absorbant mais également beaucoup plus efficace, constitué d'un matériau diélectrique. On parlera par la suite de diffuseurs diélectriques.

#### Leurs caractéristiques techniques

Lors de l'achat de ces diffuseurs au près de la société Temex, les caractéristiques techniques suivantes des diffuseurs ont été fournies pour une fréquence de 7GHz :

- leur hauteur est de 5mm comme la cavité,
- leur indice est de :  $n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{37} \approx 6$ ,

- leur absorption est donnée par la partie imaginaire de la permittivité électrique relative :  $\epsilon'' = 5.14 \cdot 10^{-3}$ ,
- enfin leur facteur de qualité, permettant de connaître leur contribution aux pertes, est de 7000.

Leur diamètre de 6mm, très petit devant les longueurs d'ondes utilisées, permet de les considérer comme des diffuseurs ponctuels. Cependant, à cause du très grand indice, il est possible que des longueurs d'ondes dans le diélectrique soient du même ordre de grandeurs que les dimensions caractéristiques du diffuseur. L'établissement de résonances dans les diffuseurs est donc possible. Leur indice très élevée leur offre une très grande efficacité. Néanmoins, les diffuseurs diélectriques ont la particularité d'être très efficaces uniquement pour certaines fréquences, ce sont les fréquences internes du diffuseur connues sous le nom de fréquences de Mie. Ces fréquences sont déterminées à partir du calcul de la courbe de section efficace d'un diffuseur diélectrique. Ce calcul de section efficace ne peut pas être effectué de façon analytique, car il n'existe pas d'expression exacte décrivant le comportement de l'efficacité d'un diélectrique. Le calcul se fait donc à partir d'un algorithme écrit dans l'équipe par C. Vanneste et inspiré de [Van de Hulst, 1981]. Les paramètres pertinents pour calculer numériquement cette courbe de section efficace sont les dimensions et l'indice du diélectrique. La courbe de section efficace représentée sur la figure 2.6 est calculée pour un diffuseur diélectrique de rayon  $r = 3 \text{ mm}$  d'indice  $n = 6$  et placé dans un milieu de taille infinie. Cette courbe de section efficace met en avant les différentes résonances de Mie pour lesquelles le diffuseur diélectrique est très efficace. Trois fréquences se distinguent vers 2.3 GHz, 6.2 GHz et 9.8 GHz. L'intérêt et donc de travailler expérimentalement au voisinage de ces résonances afin d'avoir le maximum d'effet.

Avant de se lancer dans l'étude expérimentale de milieux désordonnés diffusifs construits à partir de ces diffuseurs, il faut faire une remarque très importante. Les caractéristiques techniques des diffuseurs mentionnées en début de section sont fournies pour une fréquence donnée, 7 GHz. Après avoir obtenu la figure 2.6, nous souhaitons travailler vers des fréquences proches de 2.5 GHz. Comme les

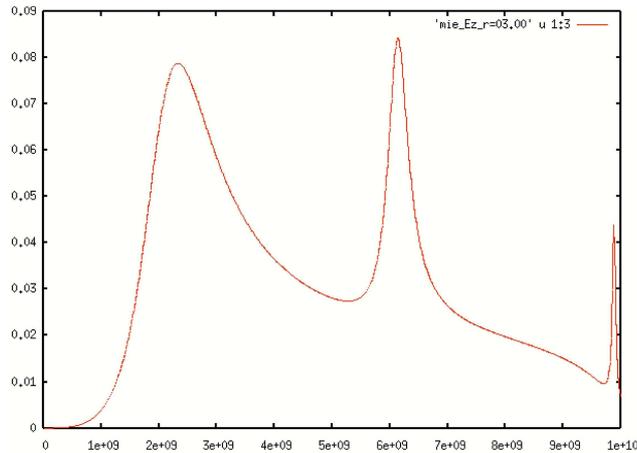


FIG. 2.6 – Courbes de section efficace d'un diffuseur diélectrique. On observe les 3 premières résonances de Mie autour desquelles le diffuseur est très efficace.

spectres de diffusion sont très fortement dépendants de l'indice du diélectrique, il est indispensable de vérifier la valeur de l'indice des diélectriques à une fréquence proche de 2.5 GHz, pour vérifier *a posteriori* que la courbe de section efficace est la même que celle de la figure 2.6.

### Mesure de leur indice

Comme évoqué précédemment, les spectres de diffusion sont très dépendants de l'indice  $\sqrt{\epsilon}$  du diélectrique. Ne travaillant pas à 7 GHz, nous allons mesurer l'indice du diélectrique pour une fréquence proche de 2.5 GHz. Après de nombreuses discussions avec des spécialistes, il s'est avéré que cette mesure d'indice est très délicate, surtout dans le domaine des micro-ondes. Pour réaliser cette mesure, nous utilisons une cavité circulaire. L'expérience, réalisée avec le HP8720D, consiste à mesurer le signal de transmission dans cette cavité en présence d'un diffuseur diélectrique placé en son centre comme le montre la (Fig 2.7). Il faut donc, pour avoir une mesure de l'indice à une fréquence proche de 2.5 GHz, un mode fondamental du système proche de cette fréquence. Cette configuration est obtenue grâce à une cavité circulaire de rayon  $r = 1.9\text{cm}$ . Plusieurs cavités circulaires

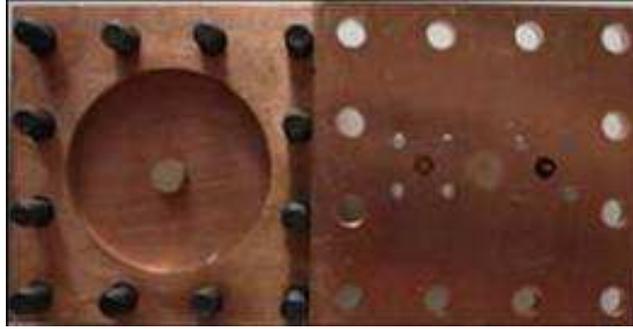


FIG. 2.7 – Cavité circulaire avec un diffuseur diélectrique placé en son centre.

de rayons différents ont été utilis es pour faire ces mesures. Les premières expériences consistaient à introduire un cadre en forme d’anneau, avec divers rayons, dans la cavité rectangulaire. Les modes fondamentaux obtenus étaient présents à très haute fréquence, proches de 7 GHz. Les indices calculés à partir de ces modes sont complètement différents de celui fourni par le fabricant. La qualité du serrage peut être la raison de ce désaccord. En effet, le serrage de cette pseudo cavité circulaire est, en fait, assuré par le dispositif de 25 vis dispos es sur le périmètre de la cavité rectangulaire. Le contact entre les parois supérieure et inférieure et le cadre anneau n’est donc pas de très bonne qualité. Pour pallier ce manque de serrage, une cavité circulaire de diamètre optimal avec un dispositif de serrage très important a été usin e. En effet, comme le montre la (Fig 2.7), 12 vis de diamètre 5mm sur un périmètre de 16cm assure un serrage uniforme et important. Le signal de transmission obtenu dans la cavité circulaire perturb e par un diffuseur diélectrique en son centre met en évidence un mode fondamental centré sur une fréquence de 2.44 GHz (Fig 2.8).

Comment obtenir, à partir de ce signal expérimental, la valeur de l’indice du diélectrique pour une fréquence de 2.44 GHz. L’intérêt d’utiliser une telle cavité est que l’on sait écrire, du moins pour le mode fondamental, le champ électrique dans le diélectrique  $E_z^{in}$  et dans la cavité  $E_z^{out}$  [Hersch and Heller, 1998] :

$$E_z^{in} = AJ_0(\sqrt{\epsilon_r}kr) \quad (2.3a)$$

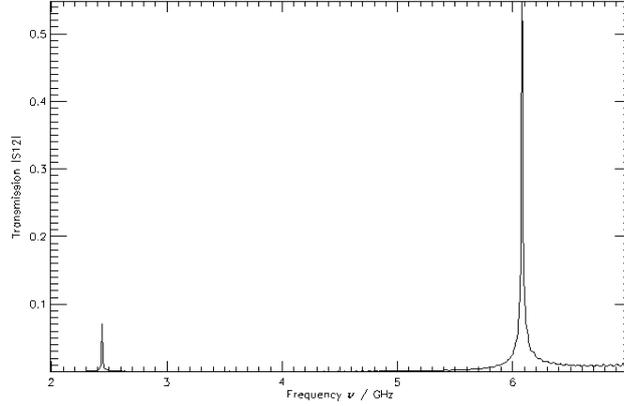


FIG. 2.8 – Signal de transmission obtenu dans la cavité anneau de diamètre 3.8 cm. Le mode fondamental est centré à 2.44 GHz.

$$E_z^{out} = BJ_0(kr) + CY_0(kr) \quad (2.3b)$$

Avec  $\sqrt{\epsilon_r}$  l'indice du diélectrique,  $k$  le nombre d'onde associé au mode fondamental,  $J_0$  et  $Y_0$  respectivement les fonctions de Bessel et de Neumann. L'indice est obtenu en écrivant les relations de continuité du champ électrique  $E_z$  et de sa dérivée sur la surface du diélectrique en  $r = a$  et sur le contour de la cavité circulaire, en  $r = R$ , avec les conditions aux bords de Dirichlet. En  $r = R$  :

$$E_z^{out}(r = R) = 0 \quad (2.4)$$

En  $r = a$  :

$$E_z^{in}(r = a) = E_z^{out}(r = a) \quad (2.5a)$$

$$\left. \frac{\partial E_z^{in}}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial E_z^{out}}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (2.5b)$$

Nous obtenons à partir de (2.4), (2.5a) et (2.5b) le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} BJ_0(kR) + CY_0(kR) = 0 \\ AJ_0(\sqrt{\epsilon_r}ka) = BJ_0(ka) + CY_0(ka) \\ \sqrt{\epsilon_r}AJ_0'(\sqrt{\epsilon_r}ka) = BJ_0'(ka) + CY_0'(ka) \end{cases} \quad (2.6)$$

On peut ré-écrire (2.6) sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 0 & J_0(kR) & Y_0(kR) \\ J_0(\sqrt{\epsilon_r}ka) & -J_0(ka) & -Y_0(ka) \\ \sqrt{\epsilon_r}J_0'(\sqrt{\epsilon_r}ka) & -J_0'(ka) & Y_0'(ka) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

La résolution du problème se restreint à la recherche de la valeur de  $\epsilon_r$  qui annule le déterminant de la matrice  $I$ . L'annulation du déterminant s'écrit :

$$\begin{aligned} & J_0(\sqrt{\epsilon_r}ka) \left[ -J_0'(ka)Y_0(kR) + J_0(kR)Y_0'(ka) \right] \\ & + \sqrt{\epsilon_r}J_0(ka)J_0'(\sqrt{\epsilon_r}ka)Y_0(kR) \\ & - \sqrt{\epsilon_r}Y_0(ka)J_0'(\sqrt{\epsilon_r}ka)J_0(kR) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

En utilisant les propriétés suivantes des fonctions de Bessel et de Hankel,

$$J_0'(x) = -J_1(x) \text{ et } Y_0'(x) = -Y_1(x) \quad (2.9)$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} & J_0(\sqrt{\epsilon_r}ka) [J_1(ka)Y_0(kR) - J_0(kR)Y_1(ka)] = \\ & -\sqrt{\epsilon_r}J_1(\sqrt{\epsilon_r}ka) [J_0(ka)Y_0(kR) - Y_0(ka)J_0(kR)] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Cette équation a été résolue graphiquement, via Matlab. La valeur de l'indice est donnée par l'abscisse de la première intersection entre les deux courbes associées aux deux membres de l'équation (2.10). La résolution graphique donne :

$$\sqrt{\epsilon_r} = 36.97 \text{ donc } n = 6.08 \text{ pour } f = 2.44 \text{ GHz} \quad (2.11)$$

Pour conclure cette partie sur la mesure de l'indice du diffuseur diélectrique, nous avons vu que l'utilisation de micro-ondes implique de prendre des précautions expérimentales notamment en ce qui concerne le serrage. Enfin, nous pouvons conclure que l'indice du diélectrique varie très peu sur une gamme de fréquences allant de 2.4 GHz à 7 GHz. La variation étant de l'ordre de 0.08% par rapport à la donnée du fournisseur pour une fréquence de 7 GHz. La courbe de section efficace des diélectriques ne change donc pas (Fig 2.6).

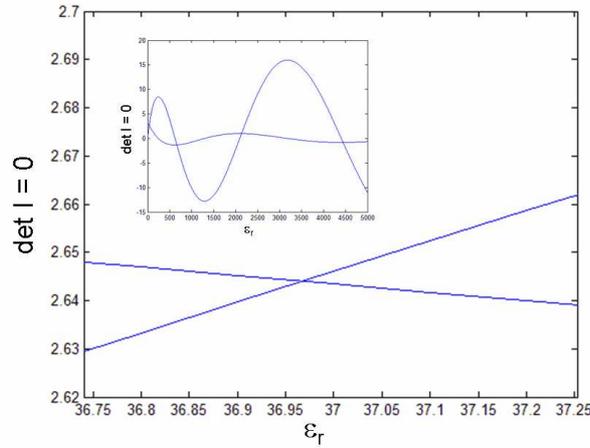


FIG. 2.9 – Solution graphique de l'équation (2.10).

### Résonance de proximité

Nous venons de montrer qu'un diffuseur diélectrique possède une efficacité très importante uniquement pour certaines fréquences, les fréquences de Mie  $f_{Mie}$ . Cette étude a été faite pour un unique diffuseur. Les milieux désordonnés sont constitués d'environ deux cents diffuseurs diélectriques. La probabilité d'avoir deux diffuseurs séparés d'une distance de l'ordre de la longueur d'onde est grande. Ceci signifie qu'il est fort possible que les zones spatiales de grande efficacité de deux diffuseurs voisins se chevauchent. La question sur l'efficacité de  $N$  diffuseurs s'est donc posée. Concrètement, est-ce que la section efficace totale  $S_{eff}^{totale}$  des  $N$  diffuseurs est donnée par  $N$  fois la section efficace d'un unique diffuseur  $S_{eff}$  i.e si :

$$S_{eff}^{totale} = N * S_{eff} \quad (2.12)$$

Théoriquement, il a été montré que si l'on considère deux diffuseurs isotropes et ponctuels ayant une unique résonance interne, l'allure de la section efficace change selon que les diffuseurs se trouvent en champ proche ou en champ lointain [Rusek and Orłowski, 1999]. La figure 2.10 illustre cette différence de comportement. Deux diffuseurs sont en champ lointain si la distance qui les sépare est

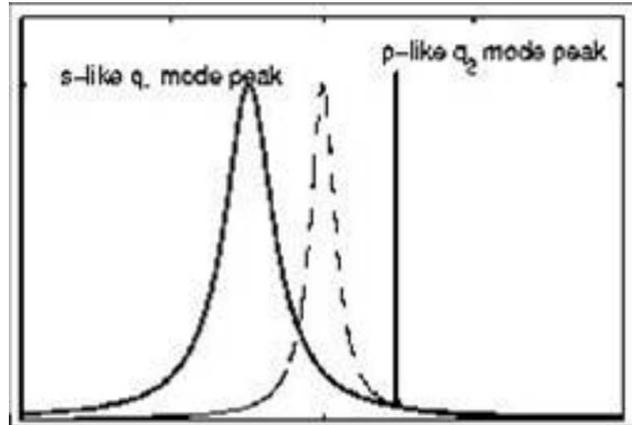


FIG. 2.10 – Le modèle de Rusek et Orłowski montre l’allure de la courbe d’efficacité obtenue avec deux diffuseurs. En pointillés, la courbe illustre le cas où les deux diffuseurs sont éloignés tandis que la courbe pleine celui où les deux diffuseurs sont proches.

supérieure à la longueur d’onde utilisée. Les deux diffuseurs se comportent alors comme deux sources indépendantes. Les diffuseurs emmagasinent de l’énergie pour une fréquence de Mie et ensuite émettent en phase, le mode symétrique  $s$  de chaque diffuseur est ainsi excité, ceci se traduit par un pic centré sur la fréquence de la résonance interne des diffuseurs. Par contre dans le cas où les deux diélectriques sont très proches, chacun d’entre eux va perturber le comportement de son voisin. L’apparition d’un pic très étroit centré sur une fréquence supérieure à la  $f_{Mie}$  du diffuseur s’explique par une émission des deux sources en opposition de phase, le mode anti-symétrique  $p$  est ainsi excité en plus du mode  $s$  représenté lui par un pic très large centré sur une fréquence inférieure à celle de la résonance de Mie [Hersch and Heller, 1998]. Ces conclusions théoriques illustrent le phénomène de résonances de proximité. En conclusion, la théorie montre que l’égalité (2.12) n’est pas vérifiée et que le milieu diélectrique ne peut pas être vu comme l’addition de diffuseurs indépendants.

Pour prouver expérimentalement que cette égalité n’est pas vérifiée et donc observée le phénomène de résonances de proximité, deux situations ont été étudiées :

soit deux diffuseurs éloignés d'une distance supérieure aux longueurs d'ondes utilisées *i.e.* quelques centimètres, soit deux diffuseurs voisins susceptible d'être dans leurs zones respectives de forte efficacité. Nous avons réalisé plusieurs expériences pour différents écartements entre les deux diffuseurs. Les expériences sont réalisées dans la cavité avec les couches d'absorbants micro-ondes et avec comme analyseur de réseau le HP8720D. Pour observer ce phénomène de résonances de proximité expérimentalement, nous avons en fait soustrait au signal de transmission obtenu en présence des deux diffuseurs, le signal de transmission obtenu en cavité vide dont un exemple est donné par la figure 2.5. Le résultat le plus probant pour des diffuseurs en champ lointain est obtenu pour un écartement de 8 cm. La distance minimale entre diffuseur pour observer l'apparition d'un pic associé à l'onde  $p$  est de 1 cm. La figure 2.11 illustre nos résultats. Le tracé bleu permet de distin-

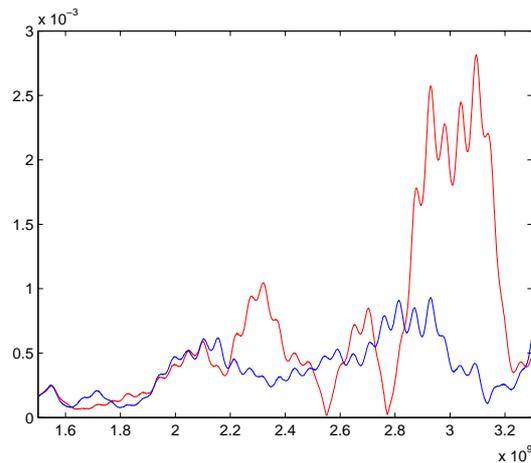


FIG. 2.11 – *Superposition des deux signaux de transmission obtenus respectivement avec un écart de 1cm (rouge) et 8cm (bleu) entre les diffuseurs .*

guer un pic très large centré sur le première résonance de Mie autour de 2.3 GHz. L'apparition du pic correspondant à l'excitation du mode  $p$  est quant à lui visible sur le tracé rouge. Les mesures sont perturbées par la même modulation que celle présente sur la figure 2.5 et dont l'origine est très probablement due à un composant électronique dans l'analyseur de réseau. Les résultats expérimentaux

présentent un bon accord quantitatif avec la théorie. La qualité des signaux n'est pas optimale car le dispositif expérimental n'est pas conçu pour travailler à des amplitudes aussi faibles.

## 2.3 Protocole expérimental

Après avoir transformé la cavité et changé le type de diffuseur, un nouveau protocole expérimental a été développé avec comme objectif final l'observation du phénomène de localisation d'Anderson. Grossièrement ce protocole se décompose en 4 étapes. Les deux premières consistent à déterminer de façon aléatoire la position des diffuseurs diélectriques pour ensuite construire dans la cavité micro-ondes le milieu désordonné. Lors de la troisième étape, la surface occupée par les diélectriques est discrétisée c'est-à-dire que l'on choisit les pas selon  $x$  et selon  $y$  correspondant à la distance entre deux points de mesures dans chaque direction. Une trajectoire labyrinthique empruntée par la bille pour éviter tous les diffuseurs est ensuite calculée. Pour finir, en chaque point de cette trajectoire la mesure est effectuée. En parallèle de ce protocole, nous avons développé autant d'algorithmes que d'étapes afin de réaliser ce protocole à partir d'un ordinateur.

### 2.3.1 Les platines de translation

Les platines de translation (Newport M-IMS600) sont utilisées dans notre dispositif expérimental à la fois pour la construction des milieux désordonnés dans la cavité et pour la réalisation des mesures du champ électrique dans cette matrice diélectrique. Ces platines ont une course de 600 mm chacune et une précision du  $m$ . Pour effectuer ces deux étapes du protocole expérimental mis au point, nous avons, comme le montre la figure 2.1, "greffé" un bras sur l'intersection des deux platines. Afin d'assurer à tout le dispositif une stabilité indispensable, la cavité et les platines de translation sont fixées à la table. Une étape importante a été d'assurer un excellent parallélisme entre la cavité et une des platines. L'écartement

entre le bras et un des bords de la cavité doit être constant le long du déplacement du bras parallèlement au côté. Ce parallélisme se doit d'être quasiment parfait car les cartographies du champ électrique en sont fortement dépendantes.

Le contrôle et le pilotage direct de ces platines de translation se fait via un contrôleur de mouvement, l'ESP300. Ce dernier est équipé d'un processeur DSP 32 bits, à virgule flottante, et peut effectuer des contrôles synchronisés de haute précision. Une routine évoluée prend en compte la lecture du capteur d'origine de la platine et de l'index du codeur pour effectuer un retour précis sur un point de référence absolu. La programmation de compensation de jeu et de l'erreur linéaire permet de réduire les imprécisions de positionnement dues à la mécanique. Chaque ESP300 est équipé d'une liaison de communication IEEE-488 (GPIB) pour assurer l'interface avec un PC et permettre une communication parallèle rapide. Cette liaison a été utilisée pour faciliter le protocole expérimental en développant une nouvelle procédure numérique permettant de piloter à la fois l'analyseur de réseau et les platines de translations. Le contrôleur ne joue donc plus que le rôle d'intermédiaire et d'alimentation des platines. Cette procédure a été développée en collaboration avec l'ingénieur "Mesures Physiques", Grégory Sauder. La figure 2.12 montre l'interface graphique utilisée pour le déplacement des platines. Ce déplacement s'effectue soit directement en entrant les coordonnées des points où l'on souhaite se placer, soit en se déplaçant pas-à-pas dans n'importe quelle direction.

Cette interface offre la possibilité de se replacer à la position d'origine des platines après un déplacement quelconque, de définir un point quelconque comme nouvelle origine et de visualiser les coordonnées du point où l'on se situe. La création du réseau de diélectriques et la mesure du champ électrique, deux étapes décrites ultérieurement, sont réalisées via cette procédure.

### 2.3.2 Le réseau de diélectriques

Cette section est consacrée à la description du milieu désordonné ; du choix aléatoire des coordonnées de chaque diffuseur à la création du réseau à l'intérieur

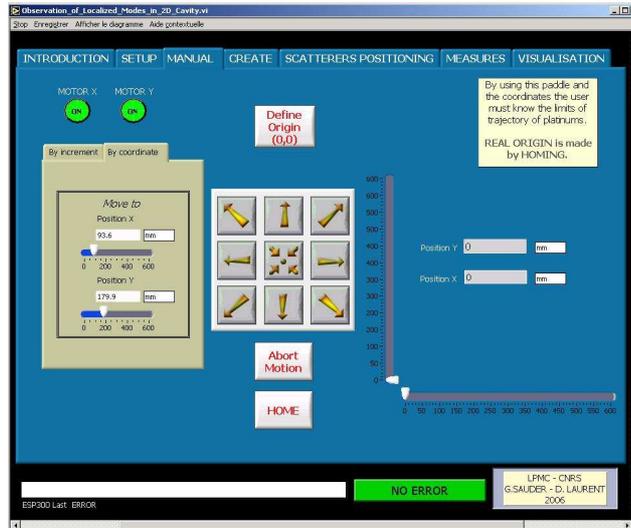


FIG. 2.12 – Interface graphique utilisée pour le déplacement des platines soit par incréments soit en rentrant directement des coordonnées spatiales.

de la cavité.

### Génération du désordre

On dispose aléatoirement, dans un carré de 25 cm de côté un nombre  $N$  de diffuseurs correspondant à une fraction surfacique de diffuseur préalablement choisie. Les différentes réalisations de désordre sont obtenues par deux approches différentes. Dans un premier temps, des expériences ont été réalisées sur des milieux périodiques afin de valider toute l'approche et maîtriser correctement le tout nouveau dispositif expérimental. La première idée a donc été d'ajouter du désordre à ce milieu périodique en autorisant un déplacement aléatoire pour chaque diffuseur autour du réseau périodique. Ce déplacement aléatoire fixé par l'utilisateur est donné par un pourcentage de la distance entre deux diffuseurs voisins dans le réseau périodique. Par cette approche, une quantification du degré du désordre dans le milieu est possible.

La figure 2.13 représente l'interface graphique utilisée pour concevoir tous les

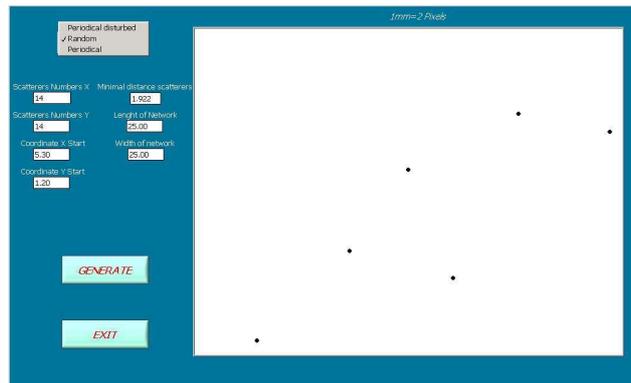


FIG. 2.13 – Interface graphique utilisée pour créer notre réseau de diélectrique : périodique, périodique perturbé ou aléatoire.

réseaux diélectriques. En plus des réseaux périodiques et périodiques perturbés décrits précédemment, nous avons également la possibilité de construire directement un réseau aléatoire. Pour cela, un générateur de nombres aléatoires de distribution uniforme est utilisé pour déterminer distinctement les deux coordonnées de chaque diffuseur. Avec cette option, la quantification du désordre se fait indirectement. En effet, lorsque l'on lance le générateur aléatoire, l'utilisateur peut choisir la distance minimale  $d$  entre les centres de deux diffuseurs voisins. Cette distance est l'unique paramètre libre. On définit ainsi une surface "exclue" autour de chaque diffuseur. Une transition continue peut être faite d'un milieu complètement aléatoire ( $d \rightarrow d_{min} = 2 * r_{diélectrique}$ ) à un milieu périodique en faisant varier continûment cette distance. Cependant, pour une raison technique que l'on évoquera lors de la création du réseau, une distance minimale entre diffuseur de 8 mm est obligatoire. Une partie de cette distance est due au fait que l'on calcule cette distance de centre à centre de chaque diffuseur ayant un rayon de 6 mm. Les coordonnées de chaque diffuseur sont enregistrées au fur et à mesure dans un fichier. Ce fichier est ensuite injecté dans un nouveau programme afin de construire le milieu aléatoire à l'intérieur de la cavité.

### Création de ce réseau

Une fois le fichier des coordonnées enregistré, le milieu désordonné est représenté via l'interface de la figure 2.14. Sur cette figure, en plus des diffuseurs (cercles de couleurs) les antennes présentes (points noirs sur la figure 2.14) sont également représentées afin d'éviter, lors du choix des positions des diffuseurs, d'avoir un diffuseur au niveau d'une antenne.

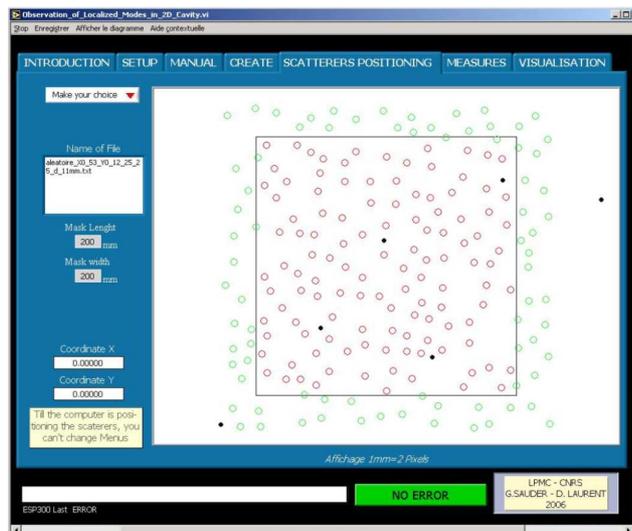


FIG. 2.14 – Interface graphique utilisée pour visualiser et ensuite de construire notre réseau dans la cavité.

Nous verrons ultérieurement que pour chaque mode localisé identifié dans un carré de côtés 25 cm, la mesure est effectuée également dans un milieu carré de côté 20 cm (Fig 2.14), obtenu en enlevant une bande de 2.5 cm sur chaque côté du grand carré, afin de vérifier un critère de localisation

Cette procédure numérique est également utilisée pour le placement des diffuseurs. Elle sert en effet à piloter les platines de translation via le contrôleur ESP300. Ayant enregistré toutes les positions des diffuseurs, un nouvel algorithme est utilisé pour positionner, avec une précision au micron, automatiquement l'extrémité du bras solidaire des platines en chacune des positions des diffuseurs. En-

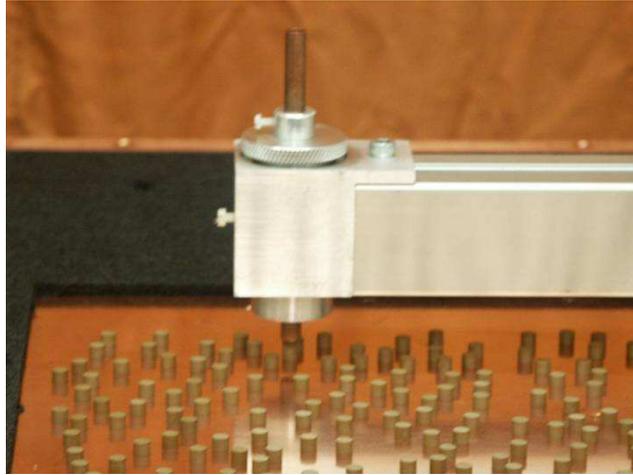


FIG. 2.15 – Cette figure représente le bras placé sur les platines de translation nous permettant ainsi de placer chacun des 196 diffuseurs.

suite, grâce à un tube en cuivre placé à son extrémité, chaque diffuseur est placé un par un (Fig 2.15). Cette étape de construction prend généralement un peu plus d'une heure. Le tube en cuivre est la seconde origine de l'existence d'une distance minimale entre deux diffuseurs voisins. Au 6 mm liés aux diffuseurs s'ajoutent les 2 mm correspondant à l'épaisseur des parois du tube.

### 2.3.3 Mesure indirecte de l'intensité du champ électrique

#### Théorie perturbative

Nous utilisons pour mesurer l'intensité du champ électrique dans le milieu étudié, une méthode indirecte utilisée par différentes équipes [Kudrolli et al., 1995, Stöckmann, 1999, Gokirmak et al., 1998]. Cette méthode consiste à introduire à l'intérieur de la cavité, un élément perturbateur *i.e.* de dimensions caractéristiques très inférieures aux longueurs d'ondes utilisées. L'objet choisit est une bille métallique de rayon  $r$  et de volume  $\delta v$ .

Le principe de cette mesure indirecte consiste à sélectionner dans le signal de transmission, propre au système étudié, une résonance centrée sur une fréquence

$f_0$ . Cette résonance est liée à un mode dont on veut connaître la répartition spatiale. L'introduction de la bille à l'intérieur de la cavité modifie localement le champ. La résonance est maintenant centrée en  $f_{perturbee}$ . Théoriquement, il est montré que ce décalage en fréquence, lié à l'introduction de la bille, est directement proportionnel à la somme des carrés des amplitudes des champs électriques et magnétiques non perturbés au niveau de la bille [Gokirmak et al., 1998]. L'équation (2.13) décrit ce résultat :

$$\frac{f_0 - f_{perturbee}}{f_{perturbee}} \approx - \frac{\iiint_{\delta v} \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_{vide}^2 d\tau + \iiint_{\delta v} \mu_0 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} H_{vide}^2 d\tau}{\iiint_V (\epsilon_0 E_{vide}^2 + \mu_0 H_{vide}^2) d\tau} \quad (2.13)$$

$$\propto -\pi r^3 \left[ \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_{vide}^2 + \mu_0 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} H_{vide}^2 \right]$$

où  $\epsilon_r$  et  $\mu_r$  sont respectivement la permittivité électrique relative et la perméabilité magnétique relative de la bille. La mesure de la fréquence centrale de la résonance donne directement la valeur locale du champ. On exhibe bien, à travers le terme  $\pi r^3$ , que seules les contributions des champs non perturbés sur la bille contribuent à ce décalage spectral. On remarque bien que plus cette fréquence est donnée avec une grande précision plus la cartographie du champ est détaillée. On comprend bien l'intérêt d'avoir un grand nombre de point pour discrétiser en fréquence le signal de transmission.

Il faut cependant prendre une précaution. Expérimentalement, nous souhaitons obtenir des cartographies illustrant la répartition du champ électrique. Il faut donc s'assurer que la contribution du champ magnétique dans l'expression (2.13) est négligeable. On sait que la permittivité électrique relative et la perméabilité magnétique relative d'une bille métallique tendent respectivement vers l'infini et vers 1 par valeurs supérieures quand le champ magnétique augmente [Weber and Fajans, 1998]. Le fait de ne pas savoir de quel type précis d'acier la bille est constituée empêche de connaître la valeur exacte de  $\mu_r$ . Nous pouvons donc juste prévoir que, d'une part, la contribution du champ électrique est plus importante que celle du champ magnétique et, d'autre part, que le déca-

lage en fréquence lié au champ magnétique se fait dans le même sens que celui dû au champ électrique *i.e.* vers les basses fréquences. Dans de nombreux articles, la contribution du champ magnétique a été négligée sans aucune justification [Kudrolli et al., 1995]. Nous avons donc décidé de vérifier expérimentalement cette différence de contribution entre les deux champs.

### Mesure du champ électrique

Expérimentalement, une bille métallique en acier de diamètre 2.5 mm, donc très petit devant les longueurs d'ondes, a été utilisée. La bille peut donc être considérée comme un élément perturbateur. Une fois la bille introduite, elle est maintenue plaquée à la paroi supérieure de la cavité par l'intermédiaire d'un dispositif d'aimants placé à l'extrémité du bras solidaire des platines comme le montre la figure 2.16. Ce dispositif est constitué de 4 aimants de 1 tesla. Un cône en métal est ajouté à l'extrémité des aimants afin de concentrer les lignes du champ magnétique au niveau de la bille. Le champ effectif à l'extrémité du cône est de 400 mTesla. Au niveau de la bille, c'est-à-dire après avoir traversé la plaque de cuivre d'épaisseur 5 mm, l'intensité du champ magnétique n'est plus que de 160 mTesla. Ces mesures de champ magnétique ont été réalisées avec un teslamètre composé d'une sonde à effet Hall reliée à un générateur de courant. Le principe consiste à appliquer au matériau un courant électrique responsable d'un déséquilibre de charges sur les parois du matériau. Ce déséquilibre induit un champ électrique qui en régime permanent équilibre le champ magnétique présent dans le matériau. Les forces de Lorentz et de Coulomb se compensent. La valeur du champ magnétique est directement obtenue en mesurant la tension électrique aux bornes du matériau car un simple coefficient de proportionnalité, propre à chaque sonde et fourni par le fabricant, relie ces deux quantités. L'article [Weber and Fajans, 1998] montre que, pour un champ magnétique d'une telle intensité, le  $\mu_r$  de la bille est très proche de l'unité. Cette intensité du champ magnétique est suffisante pour assurer que le déplacement de la bille reproduit fidèlement celui du cône. En effet, il est indispensable, lors du déplacement entre deux points de mesure, que l'axe

du cône et la bille restent alignés. Un désalignement peut impliquer un contact entre la bille et les diffuseurs. En chaque point de mesure, il est indispensable de vérifier l'existence entre la plaque de cuivre et le cône d'un écart de quelques millimètres car un éventuel contact engendrerait des modifications sur le signal de transmission. La qualité des cartographies dépend fortement de l'attention portée à ces différents points.



FIG. 2.16 – Dispositif contenant les 4 aimants et permettant le déplacement de la bille.

Une fois le dispositif aimant-bille bien aligné, il faut choisir les points où la mesure du champ est effectuée. Une nouvelle interface permet de discrétiser la zone sur laquelle nous souhaitons faire la mesure en choisissant une distance entre chaque point de mesure selon  $x$  et selon  $y$ . La valeur de ces pas est de 5 mm dans les deux directions et la zone de la cavité cartographiée est limitée par la course des platines selon  $x$  à 600 mm et par la taille de la cavité à 460 mm selon  $y$ . Le déplacement d'un point à l'autre s'effectue également par une des options du logiciel. Il suffit de rentrer dans la procédure numérique un fichier contenant toutes les coordonnées des points où la mesure doit être effectuée. Les platines, pilotées par ordinateur, déplacent ensuite la bille point par point avec une précision de l'ordre du  $\mu m$ .

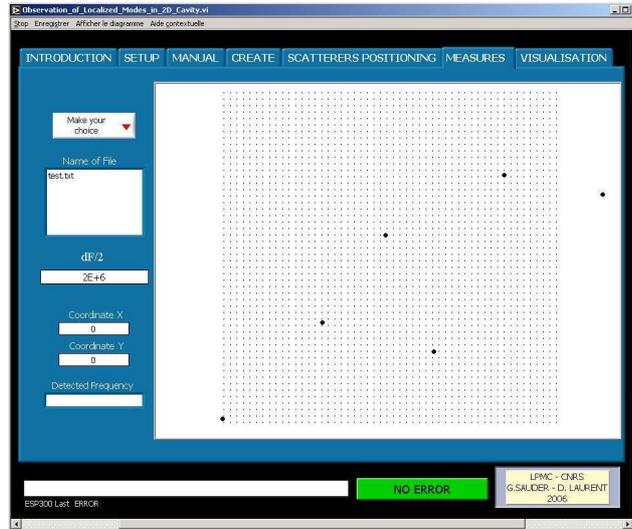


FIG. 2.17 – *Discrétisation de la zone à cartographier grâce à l'interface graphique.*

### Cartographies du champ électrique en cavité rectangulaire

La mesure de l'intensité du champ électrique en cavité vide permet, d'une part, de valider le procédé utilisé pour faire cette mesure via la bille et, d'autre part, de s'assurer de la faible contribution du champ magnétique dans les cartographies obtenues.

Dans la première section de ce manuscrit, nous avons vu que pour une cavité rectangulaire une expression analytique des modes est connue. L'expression (2.14) donne, pour  $\phi_{nm} = E_z$  une représentation du champ électrique dans la cavité rectangulaire.

$$E_z^{nm}(x, y) \propto \sin\left(n\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(m\frac{\pi y}{L_y}\right) \quad (2.14)$$

Un mode est caractérisé par les deux nombres quantiques  $(n, m)$  donnant le nombre de ventres respectivement selon  $x$  et selon  $y$ . L'expression (1.55) permet de calculer la fréquence associée à chaque mode. Donc pour vérifier que la méthode utilisée pour mesurer le champ électrique décrite précédemment est valable, nous avons choisi dans le signal de transmission de la cavité rectangulaire une résonance

associée à un mode donné. Le but étant de comparer la répartition du champ obtenue par cartographie à celle prévue analytiquement.

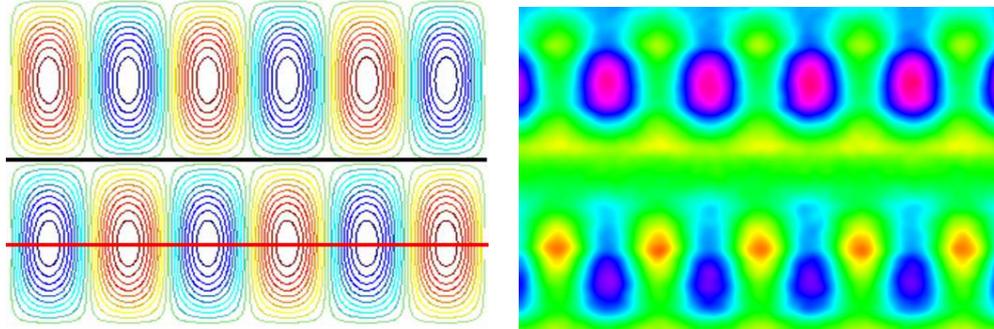


FIG. 2.18 – Cartographies analytique et expérimentale du champ électrique du mode  $n=6$  et  $m=2$ .

Les ventres présents sur les bords de la cavité ne peuvent pas être mesurés car la course maximale de la platine est plus petite que la plus grande des dimensions de la cavité. La pertinence de la méthode de cartographie, via la bille, est prouvée grâce à l'accord qualitatif trouvé entre l'expérience et la théorie comme l'illustre la figure 2.18 où le résultat expérimental pour le mode (6,2) est comparé au résultat analytique, ce dernier étant calculé à partir de la relation (1.54).

Pour un mode possédant la symétrie du système, comme le (6,2), l'unique contribution du champ sur la ligne nodale (ligne noire sur la figure 2.18) est celle du champ magnétique (Eq (2.15) et (2.16)). Sur la ligne ventrale (ligne rouge sur la figure 2.18) la contribution du champ magnétique est très faible par rapport à celle du champ électrique (Eq (2.14)).

$$B_x^{nm}(x, y) \propto \sin\left(n\frac{\pi x}{L_x}\right) \cos\left(m\frac{\pi y}{L_y}\right) \quad (2.15)$$

$$B_y^{nm}(x, y) \propto \cos\left(n\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(m\frac{\pi y}{L_y}\right) \quad (2.16)$$

La comparaison des amplitudes maximales du décalage en fréquences mesuré sur ces deux lignes, illustrée sur la figure 2.19, montre que la contribution du

champ magnétique est de l'ordre de 1%. Les intensités minimales des champs électrique ou magnétique correspondent, comme le prévoit la relation (2.13), aux fréquences maximales mesurées. On remarque une légère pente due à la dérive dans le temps de la mesure est présente sur les deux courbes. L'offset présent entre les deux courbes peut correspondre à la contribution du champ magnétique statique dû au dispositif d'aimants utilisé pour maintenir la bille. En effet, en mesurant le décalage spectral sur ces lignes de ventres et de noeuds avec un fil métallique à la place de la bille, le dispositif d'aimants nécessaire est plus faible ce qui diminue le champ magnétique statique et fait disparaître cet offset.

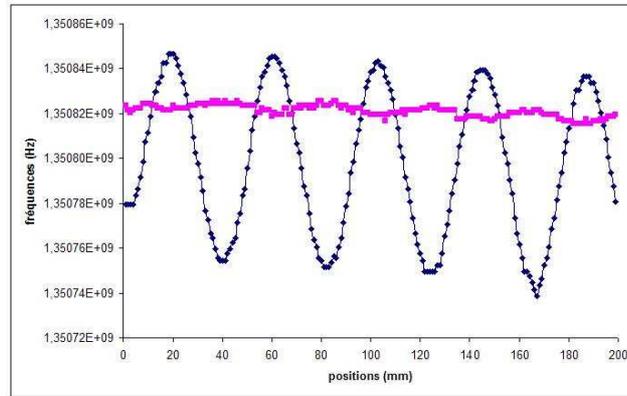


FIG. 2.19 – Résultats obtenus sur les lignes nodale et ventrale.

Ceci valide notre approche et justifie l'approximation faite dans certains articles qui consiste à écrire l'équation (2.13) comme suit :

$$\frac{f_{vide} - f_{perturbee}}{f_{perturbee}} \propto \epsilon_0 E_{vide}^2 \quad (2.17)$$

### 2.3.4 La trajectoire labyrinthique

Une fois la cavité fermée, il y a contact entre les diffuseurs et les parois supérieure et inférieure. Les diffuseurs diélectriques représentent donc des obstacles pour la bille. Contrairement aux cas de la cavité vide ou habillée d'un diffuseur unique, la trajectoire suivie par la bille pour effectuer la mesure n'est donc pas

triviale. Pour calculer cette nouvelle trajectoire, un nouvel algorithme a été développé et incorporé dans la procédure numérique.

La première étape avant la construction de la trajectoire consiste à créer une représentation du milieu diffusif à partir du pas de discrétisation choisi tout en incorporant des murs en lieu et place des diffuseurs (points rouges sur la figure 2.20. Pour faire cela, les coordonnées de chaque point de mesure sont comparés avec celles de chaque diffuseur en définissant au préalable une distance minimale entre la position de la bille et le diffuseur. Concrètement, pour que la mesure soit effectuée en un point du réseau il faut que ce point soit à une distance supérieure à 4.5 mm d'un diffuseur. Cette distance tient compte du rayon du diffuseur 3 mm, de celui de la bille 1.25 mm et d'une incertitude sur la position exacte de la bille de 0.25 mm pour compenser un éventuel décalage de la bille par rapport à l'axe du cône qui la maintient. La base de l'algorithme est de regarder si le point  $i + 1$

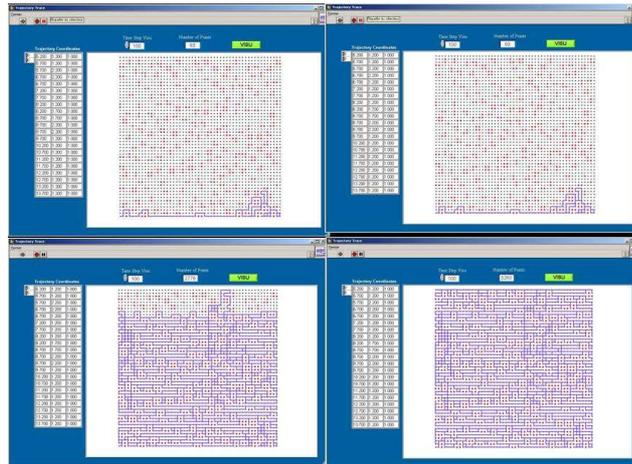


FIG. 2.20 – Évolution de la trajectoire lors de sa création. En noir les points de mesure ; en rouge les points éliminés à cause des diffuseurs

est accessible ou pas. Pour les lignes impaires, le déplacement entre point se fait de la gauche vers la droite et inversement pour les lignes paires. Si ce déplacement direct est impossible à cause d'un diffuseur alors l'algorithme choisit par ordre de préférence un déplacement vers le haut, vers le bas ou un retour en arrière. La

probabilité pour que la trajectoire passe plusieurs fois par le même point est non nulle. Un traitement de la trajectoire est fait afin d'identifier ces dégénérescences et n'autoriser la mesure qu'au premier passage. Pour un milieu carré de 25 cm de côté discrétisé en 2704 points avec un pas de 5 mm, une trajectoire classique comporte environ 3500 points de passage et environ 2600 points de mesure effective. Cependant pour traiter le résultat et obtenir une cartographie totale du carré de 25 cm de côté *i.e.* avoir une valeur du décalage pour les 2704 points, l'algorithme associe à chaque point non traversé la valeur maximale mesurée du décalage (minimum d'intensité du champ électrique car le décalage est négatif d'après l'équation (2.13)) lors de l'expérience. Pour obtenir la cartographie du champ électrique, il suffit de connaître uniquement la fréquence sur laquelle la résonance, associée au mode mesuré, est centrée. Ceci revient à chercher la fréquence correspondant au maximum du signal. En effet, comme nous l'avons évoqué précédemment, pour qu'une résonance soit exploitable il faut qu'elle soit isolée spectralement ; la fenêtre en fréquence choisie ne contient donc que cette résonance. C'est cette information qui est mesurée expérimentalement et stockée dans un fichier.

Pour finir avec la description de la procédure numérique, il est possible de représenter directement, grâce à ce fichier, le résultat expérimental comme le montre la figure 2.21 où la localisation spatiale du champ électrique est très explicitement illustrée.

## 2.4 Une expérience type

Pour résumer tout ce qui a été dit auparavant, une expérience type est constituée de 6 étapes. Pour un milieu désordonné carré donné de 25cm de côté, il faut :

1. choisir le fraction surfacique  $\sigma$  de diffuseurs diélectriques,
2. générer le désordre, c'est-à-dire déterminer les positions des  $N$  diffuseurs en imposant une distance minimale  $d$  entre deux diffuseurs plus proches voisins,

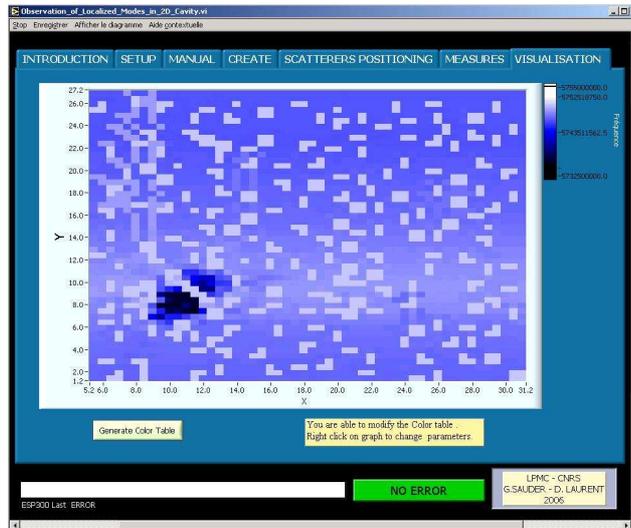


FIG. 2.21 – Visualisation du résultat expérimental directement à partir du logiciel.

3. échantillonner la mesure avec un pas égal à 5 mm selon  $x$  et  $y$  ceci qui donne 2704 points de mesure pour un milieu carré de 25 cm de côté.
4. éliminer, ensuite, les points de mesures inaccessibles à cause des diffuseurs, en comparant les coordonnées de ces points et celles des diffuseurs, et en imposant une distance minimale entre point de mesure et diélectrique égale à 0.45 mm.
5. construire la trajectoire labyrinthique reliant tous les points de mesures.
6. configurer l'analyseur de réseau en lui rentrant différents paramètres tels que (Fig 2.22) :
  - (a) la puissance de sortie de l'analyseur,
  - (b) le paramètre  $S$  de la matrice de diffusion,
  - (c) le nombre de points avec lesquels les fenêtres spectrales sont discrétisées,
  - (d) l'IFBandwidth déterminant le temps pris en chaque point pour faire la mesure,
  - (e) le nombre de balayage en fréquence par fenêtre

(f) et enfin les bornes des deux fenêtres en fréquence où se trouve la résonance à suivre.

7. construire, via Matlab, la représentation spatiale du champ électrique.

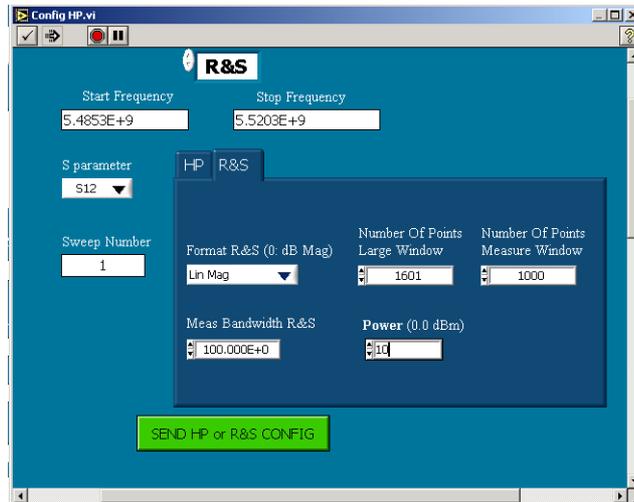


FIG. 2.22 – Interface graphique utilisée pour configurer l'analyseur de réseau.

Lors de ce petit résumé d'une expérience type, j'ai évoqué l'existence de deux fenêtres fréquentielles utilisées pour faire la mesure. Selon la puissance de sortie de l'analyseur choisie, les décalages en fréquence de la résonance peuvent être importants, de l'ordre de 20 MHz. Ceci implique que la fenêtre de mesure doit d'une part être d'une largeur de l'ordre de 30 MHz, mais aussi discrétisée avec un très grand nombre de points pour avoir une bonne résolution spectrale et atteindre un bon niveau de détail sur la cartographie du champ électrique. L'analyseur de réseau est caractérisé par un bruit intrinsèque dont l'amplitude est de l'ordre du kHz, il est donc inutile d'essayer d'obtenir une résolution meilleure que le kHz, les résultats seraient bruités. Pour une fenêtre de 30 MHz et atteindre cette résolution, il faut 30000 points d'échantillonnage ce qui correspond à un balayage long 300 secondes en chaque point de mesure représentant une mesure longue de plus de 9 jours. Le compromis choisi est de faire la mesure de la fréquence sur deux fenêtres. La première large de 30 MHz, avec une faible résolution permet d'obtenir

une valeur grossière de la fréquence. La seconde, d'une largeur 1 MHz, centrée sur cette dernière fréquence et discrétisée avec 1000 points, donne une valeur finale de la fréquence de résonance avec une résolution du kHz. Ce procédé réduit le temps de mesure en chaque point d'un facteur 10 car il faut respectivement 16 et 10 secondes par fenêtre.

## 2.5 Les premières observations directes de modes localisés

Avant de réaliser la mesure du champ électrique afin d'observer le phénomène de localisation d'Anderson, nous avons voulu voir comment le signal de transmission associé à un milieu périodique, *i.e.* à un agencement régulier de diffuseurs, est modifié lorsqu'on rompt cette périodicité en ajoutant du désordre. Pour cela, les milieux considérés sont composés de 196 diélectriques répartis sur un carré de 25 cm de côté, ce qui correspond à une fraction surfacique de 8.9%. Le système de référence est périodique avec une distance entre diffuseurs plus proches voisins égale à  $d = 1.9$  cm. Quatre autres systèmes désordonnés, appelés périodiques perturbés, sont obtenus en autorisant un déplacement aléatoire de chaque diffuseur de respectivement 10, 20, 30 et 40% de  $d$  lors du choix de leurs coordonnées. La dernière configuration est un milieu complètement aléatoire. La figure 2.23 regroupent les différents signaux de transmission mesurés avec toujours le même couple d'antennes choisi à l'intérieur du milieu.

Par analogie avec la physique du solide, la réponse du système périodique présente une structure en bandes permises et en bandes interdites où la transmission est nulle, "Microwaves Photonic Band Gaps". L'ajout de désordre détruit cette structure en bande car il entraîne l'apparition de nouvelles résonances dans les bandes interdites notamment dans la seconde. Cette dernière disparaît pour un désordre de 30%. Le premier "gap" est réduit par l'apparition de résonances près des bords mais survit. Les deux dernières figures présentent une structure

semblable avec une pseudo bande interdite. La présence de cette zone de transmission nulle, malgré le désordre, peut être vue comme un vestige du système initial périodique.

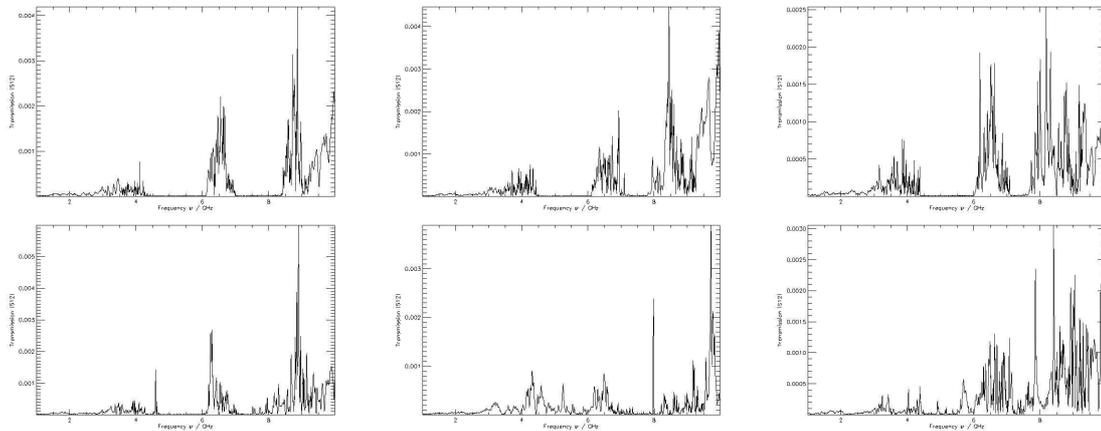


FIG. 2.23 – Signaux de transmission obtenus respectivement, de gauche à droite et de haut en bas, pour un milieu périodique, des milieux périodiques perturbés à 10%, 20%, 30%, 40% et aléatoire.

Considérons maintenant un nouveau désordre aléatoire représenté sur la figure 2.24 et ayant la même fraction surfacique que précédemment. Les points noirs étiquetés de *A* à *D* correspondent aux antennes présentes dans le milieu. La distance minimale entre deux diffuseurs plus proches voisins est fixée à 11 mm. Le désordre est ainsi "homogène" *i.e.* sans zones de vide de dimensions proches des longueurs d'ondes utilisées.

Après avoir mis en évidence l'influence du désordre, il est intéressant de voir comment le diélectrique lui même influe sur la structure du signal de transmission propre à un milieu désordonné. Pour cela, sur la figure 2.25, ont été superposés ce signal de transmission en échelle semi-log et linéaire et la courbe de section efficace. La comparaison de ces deux courbes rejoint le résultat numérique évoqué au début de ce chapitre et dû à C. Vanneste et P. Sebbah, et prouve la corrélation qui existe entre les résonances de Mie, correspondant aux maxima d'efficacité du diffuseur, et les fréquences sur lesquelles les bandes permises sont centrées

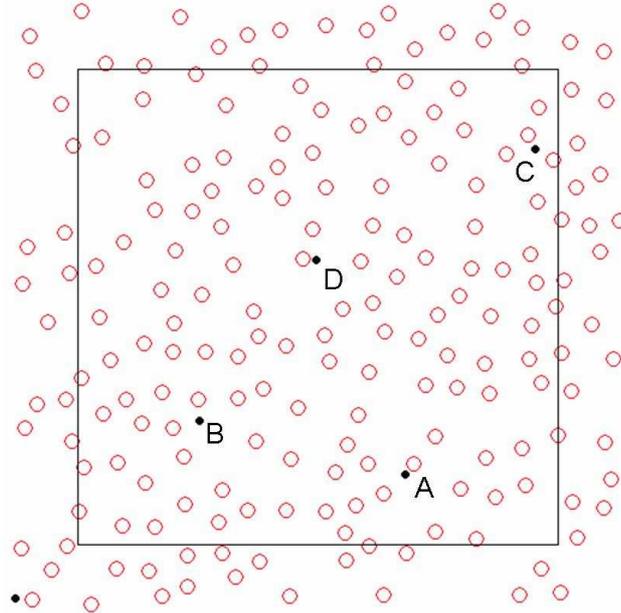


FIG. 2.24 – Milieu désordonné 2D constitué de 196 diélectriques avec une distance minimale entre deux diffuseurs égale à 11 mm. Les points noirs représentent les antennes de mesure.

[Vanneste and Sebbah, 2005, Ye et al., 1992, Sigalas et al., 1996].

Une fois les influences du désordre et des propriétés intrinsèques du diélectrique sur le signal de transmission mises en évidence, les premières mesures du champ électrique ont été réalisées dans le milieu de la figure 2.24 dont le signal de transmission est montré sur la figure 2.26. Les mesures du champ électrique ont été effectuées avec l'analyseur de réseau HP8720D. La résolution de ces cartographies n'est pas optimale car, contrairement à ce qui a été décrit dans la section "Une expérience type", la mesure du décalage en fréquence de la résonance est faite sur une unique fenêtre large de 20 MHz et discrétisée avec 1601 points. Les premières cartographies de l'intensité du champ électrique représentées sur la première image de la figure 2.27 ont été obtenues via les antennes *B* et *D* et en mesurant le décalage de trois résonances : une dans le gap et centrée en 5.45 GHz (insert de la figure 2.26), la seconde en fin de gap à 5.66 GHz et la dernière à plus

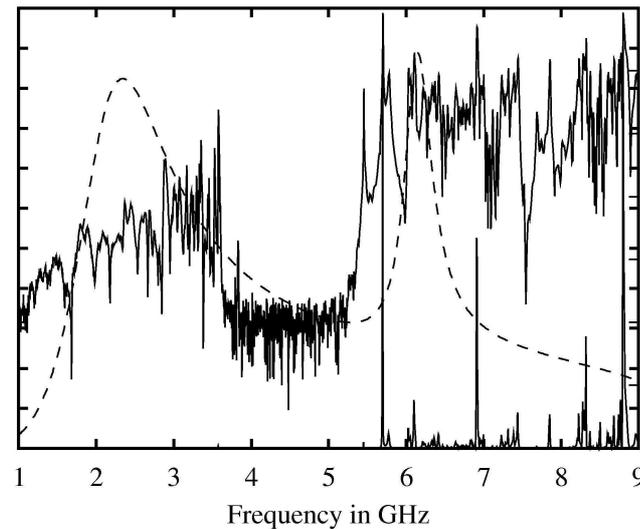


FIG. 2.25 – Superposition du signal de transmission, en échelle logarithmique et linéaire, et de la courbe de section efficace d'un unique diffuseur diélectrique.

haute fréquence car centrée en 7.80 GHz.

La figure 2.27 met, respectivement en 2D et 3D, très clairement en évidence un piégeage spatial de l'onde électro-magnétique pour ces trois résonances. Avant de parler de premières observations directes de modes localisés en milieu multi-plement diffusif bidimensionnel *i.e.* de localisation d'Anderson, plusieurs critères de localisation ont été vérifiés.

### Critères visuels

Tout d'abord, le critère d'insensibilité aux conditions de bords mis en avant numériquement. Pour cela, la mesure a été effectuée dans un milieu carré de côté 20cm obtenu en supprimant une bande de diffuseur large de 2.5 cm sur chaque côté du précédent milieu. L'accord qualitatif entre les deux cartographies est excellent comme le montre la figure 2.28. La structure spatiale des modes n'est pas modifiée par les modifications apportées sur la zone de diffusion. Ces résultats expérimentaux représentent un pas de plus vers l'idée que le phénomène observé est bien

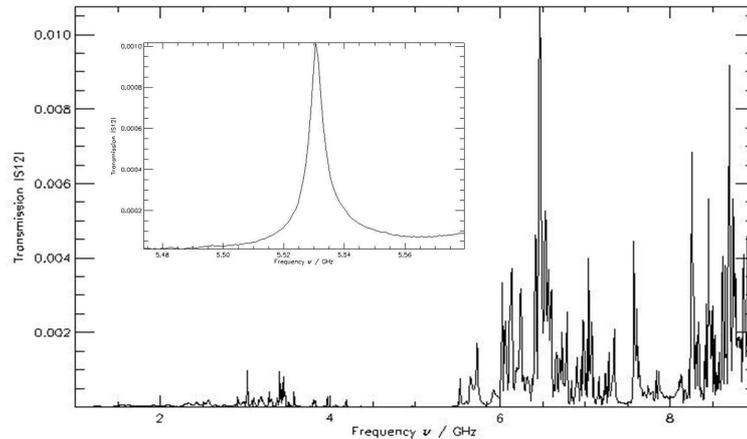


FIG. 2.26 – Signal de transmission propre au milieu de la figure 2.24 avec en insert un zoom sur la résonance centrée en 5.45 GHz correspondant au premier mode localisé.

la localisation d'Anderson. Ces modes sont obtenus en utilisant des résonances ayant des allures et des fréquences centrales comparables à celles des fréquences mesurées dans le milieu précédent. La différence en fréquence, quand elle existe, est du même ordre de grandeur que celle causée par l'ouverture de la cavité.

Une dernière représentation de ces modes va conforter l'idée que la localisation d'Anderson est visible expérimentalement. Elle est obtenue numériquement en résolvant les équations de Maxwell, dans un système similaire au système expérimental, avec la méthode de FDTD [Taflove, 1995]. Des conditions aux limites dites PML (Perfectly Matched Layer) représentent les absorbants micro-ondes afin de définir les conditions aux bords ouverts [Berenger, 1995]. Contrairement au cas expérimental, ces couches n'induisent aucune ré-insertion d'énergie dans la cavité. Expérimentalement, on peut assimiler ces PML à une succession de couches absorbantes de plus en plus efficaces pour avoir un gradient d'absorption. La grosse différence entre l'approche numérique et celle expérimentale est la notion de pertes. Expérimentalement, en plus de pertes dues aux fuites d'énergie par les bords ouverts, présentes numériquement, s'ajoutent celles dues à la propagation

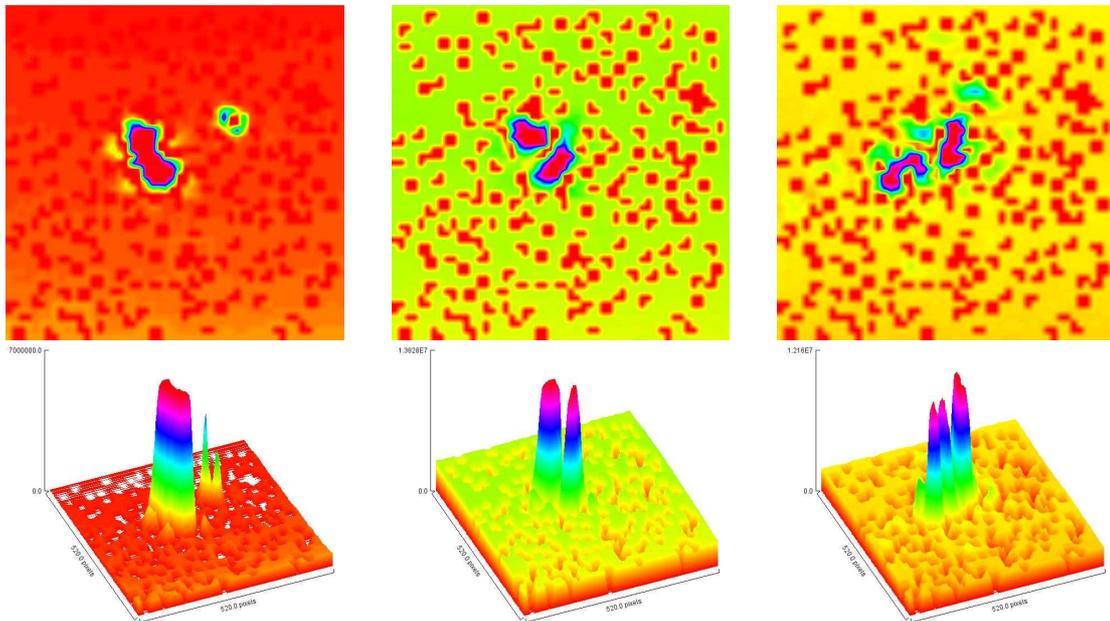


FIG. 2.27 – Représentation 2D et 3D des trois premiers modes localisés obtenus expérimentalement dans un carré de 25cm de côté et pour des résonances centrées respectivement (de gauche à droite) en 5.45 GHz, 5.66 GHz et 7.80 GHz.

*i.e.* celles dont l'origine est la conductivité finie des parois supérieure et inférieure de la cavité.

L'accord entre l'expérience et les simulations numériques est excellent et spectaculaire. On peut parler maintenant concrètement de modes localisés et de localisation d'Anderson. Cet accord prouve la qualité de la mesure et montre que les paramètres physiques telle que l'ouverture du système est bien contrôlée. De plus, on montre avec cet accord que l'absorption présente expérimentalement et pas dans les simulations n'est pas un élément néfaste pour l'observation de la localisation lorsqu'on travaille en stationnaire via les modes localisés. En examinant bien les images en bas de la figure 2.29 résultant des simulations numériques, on remarque, pour des diffuseurs proches de la zone de localisation, la présence de champ électrique à l'intérieur de ces derniers, information inaccessible expérimentalement. La structure du champ dans les diffuseurs est, pour les deux premiers

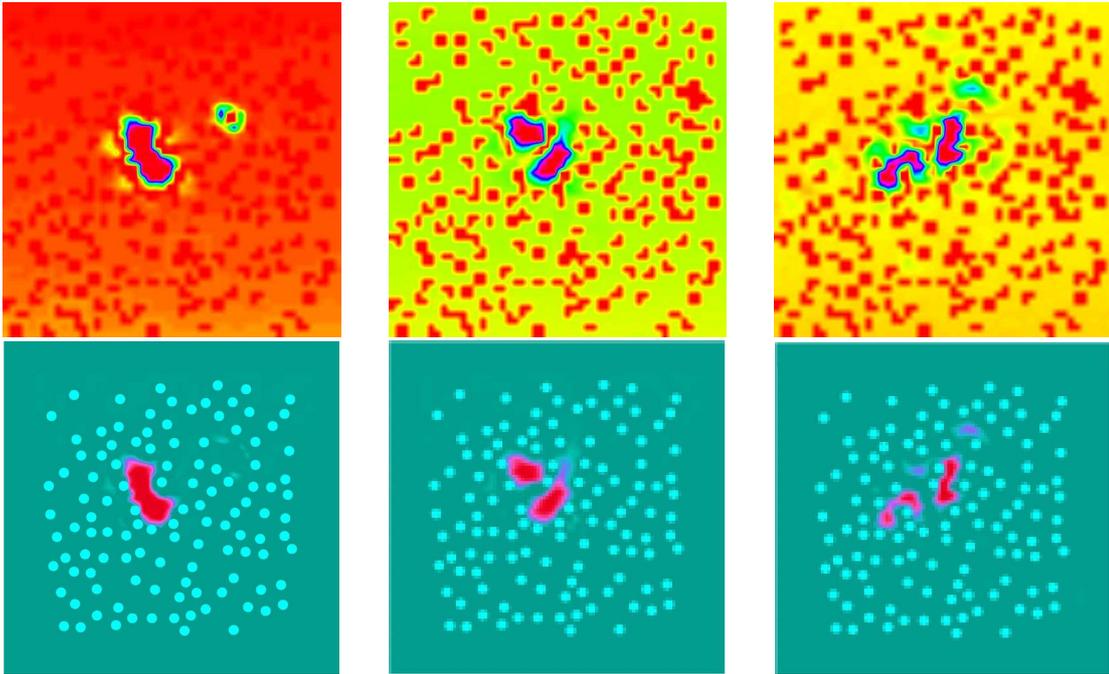


FIG. 2.28 – Représentation 2D des trois modes obtenus respectivement dans un milieu carré de 25 cm de côté (haut) et de côté 20 cm (bas).

modes localisés, sous la forme de 2 lobes, ce qui laisse entendre que les résonances suivies sont liées à la seconde résonance de Mie d'un diffuseur ponctuel centrée en 6.3 GHz.

### Critères physiques

L'étalement spatial d'un mode localisé est caractérisé à la fois par une enveloppe exponentielle et une longueur dite de localisation  $\xi_{loc}$ . Trois méthodes différentes dans leur approche mais aux résultats concordants, ont été utilisées pour évaluer  $\xi_{loc}$ . La première, très directe, consiste à calculer la fonction d'auto-corrélation de l'amplitude du champ électrique (Fig 2.30). L'inconvénient est que ce calcul ne peut se faire qu'à partir de la représentation spatiale du champ calculée numériquement car le fond des cartographies expérimentales est relativement

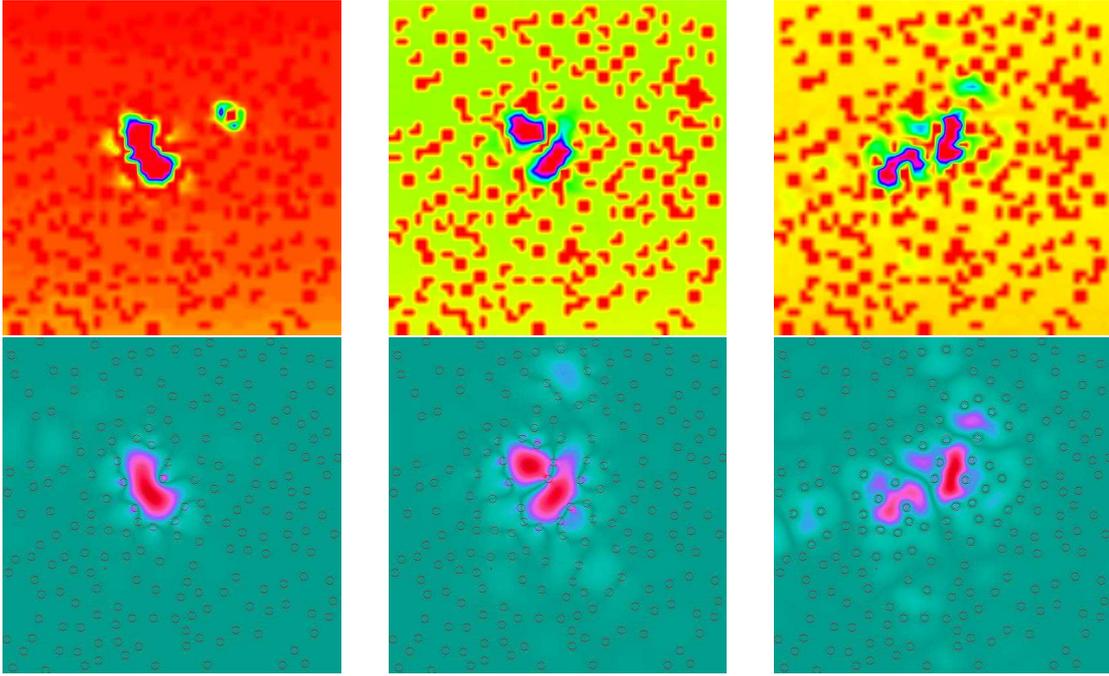


FIG. 2.29 – Représentation 2D des trois modes obtenus respectivement à partir des expériences (haut) et à partir des simulations numériques (bas).

uniforme mais différent de zéro ce qui réduit la dynamique de la mesure et donc modifie la structure de la fonction d'auto-corrélation.

La seconde est basée sur la théorie de la diffusion dans l'approximation des diffuseurs indépendants [Gupta and Ye, 2003, Derode et al., 2001]. La longueur de localisation  $\xi_{theorie}$  est donnée par la relation suivante :

$$\xi_{theorie} = \ell \exp \left[ \frac{\pi Re(k_{eff}) \ell}{2} \right] \quad (2.18)$$

avec  $k_{eff}$  est le nombre d'onde effectif et  $\ell = (2Im(k_{eff}))^{-1}$  le libre parcours moyen, lequel est inversement proportionnel à la section efficace de Mie (Fig 2.6) ce qui est illustré par la figure 2.31 où la courbe de section efficace est comparée à celle de la longueur de localisation. On observe que les longueurs de localisation  $\xi_{theorie}$  les plus petites correspondent à peu près aux maxima d'efficacité et sont cohérentes avec les plus petites longueurs de localisation  $\xi_{loc}$  bien que l'hypothèse de diffuseurs

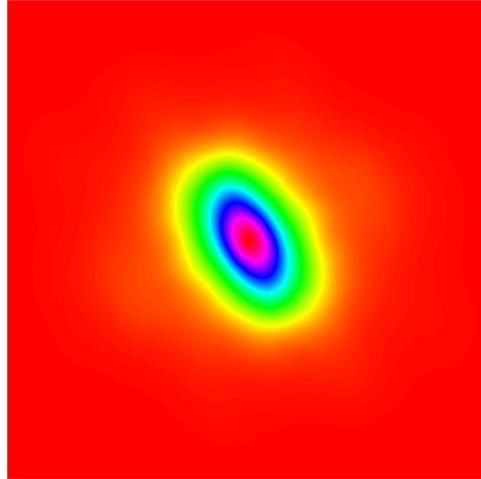


FIG. 2.30 – Fonction d’auto-corrélation de l’amplitude du champ électrique pour le premier mode localisé obtenu à 5.45GHz.

indépendants ne soit pas correcte dans un milieu à fraction de diffuseurs élevée. En effet, le phénomène de résonance de proximité décrit précédemment est une des raisons pour laquelle cette hypothèse peut être remise en cause. Les valeurs de  $\xi_{loc}$  sont regroupées dans le tableau (2.2) : Un intervalle de valeur est donné

Fréquence du mode (GHz)	Longueur de localisation (mm)
5.45	10-12
5.66	14-25
7.80	22-30

TAB. 2.2 – Longueurs de localisation pour les trois premiers modes localisés

pour chacune des longueurs de localisation à cause de l’anisotropie des modes localisés. Ces longueurs de localisation sont du même ordre de grandeur que le libre parcours moyen et que la distance minimale entre diffuseurs plus proches voisins mais très petite devant les longueurs d’ondes utilisées et les dimensions caractéristiques du système étudié ce qui est essentiel pour être dans le régime de localisation lorsqu’on travaille dans un milieu 2D de taille finie. Ce résultat

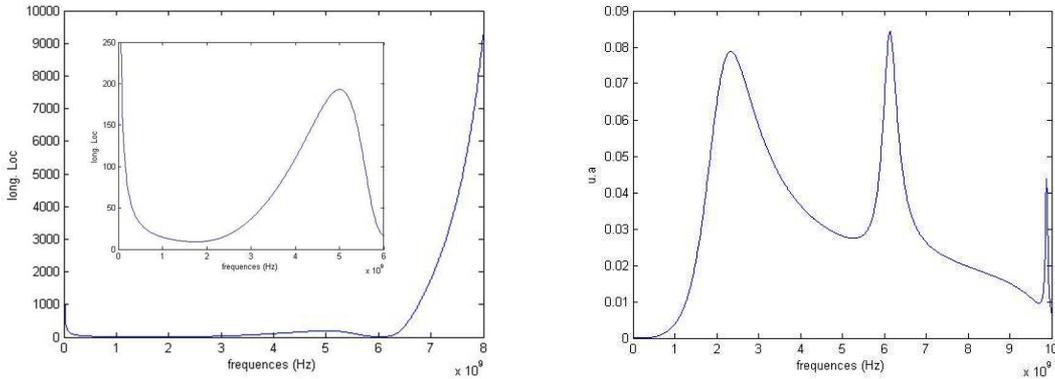


FIG. 2.31 – Comparaison des courbes de section efficace d'un diffuseur unique diélectrique et de longueurs de localisation.

est très important car c'est la première fois qu'une anisotropie de la longueur de localisation est montrée.

Un dernier critère est vérifié pour prouver la localisation. La largeur de la résonance associé à un mode localisé loin des bords est due uniquement aux pertes à la propagation, d'origine ohmique. Ces pertes  $\Gamma_{ohm}$  sont calculables analytiquement à partir de la relation (2.19) [Barthélemy, 2003].

$$\Gamma_{ohm} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{f}{\pi \nu \sigma}} \quad (2.19)$$

Il est donc possible de comparer ces valeurs théoriques aux largeurs expérimentales,  $\Gamma_{exp}$ , déterminées à partir de l'ajustement de chaque résonance par le procédé décrit dans la section (1.5.1). Les valeurs de ces différentes largeurs sont regroupées dans la tableau (2.3). Les mesures faites sont cohérentes car une augmentation de  $\Gamma_{exp}$  est attendue lorsqu'on passe d'un milieu de 25 cm de côté à celui de 20 cm, les modes "voyant" plus les bords. Pour le premier mode, localisé au centre du système, les largeurs expérimentale et théorique sont similaires. La faible différence entre les deux correspond aux pertes dues aux antennes, non prises en compte dans l'équation (2.19). Pour les deux autres modes dont l'étalement spatial croît, les pertes dues aux fuites de l'énergie par les bords contribuent de façon non né-

Fréquence du mode (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{exp}^{20}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)
5.45	1.13813	1.41744	0.9762
5.66	3	3	0.9787
7.80	14.96	15.0285	1.1714

TAB. 2.3 – Différentes largeurs caractérisant chacun des modes de la figure 2.27

gligeable. Ceci est bien visible pour le mode le plus étalé (Fig 2.28) où de l'énergie est localisé proche des bords d'où un grand  $\Gamma_{exp}$ .

A partir de ces largeurs, une relation (Eq (2.20)) donnée dans l'article de Pinheiro et *al.* peut être vérifiée [Pinheiro et al., 2004] :

$$\Gamma_{bords} \propto \exp \left[ \frac{-2R}{\xi_{loc}} \right] \quad (2.20)$$

Elle relie ces pertes  $\Gamma_{bords}$  au rapport entre la distance  $R$  du mode localisé au bord du milieu et la longueur de localisation  $\xi_{loc}$  du mode. Pour vérifier cet argument fort en faveur de la localisation, nous avons considéré le premier mode localisé de la figure 2.27. L'expérience consiste à diminuer progressivement la taille du milieu désordonné. On part d'un carré de 25 cm de côté pour arriver à un carré de côté 13 cm en ôtant successivement des bandes de diffuseurs larges de 1.5 cm est sur chacun des côtés. Pour chaque nouveau système, la largeur de la résonance associée à ce mode est calculée. (Tableau (2.4)). On remarque que pour les deux plus grandes tailles du système, les largeurs de la résonance sont très proche. La différence entre les deux largeurs est du même ordre que l'incertitude présente lors de leurs mesures. La taille du système est telle que le mode ne "voit" plus les bords. Les pertes responsables de cette largeur  $\Gamma_{ref}$  sont les pertes ohmiques et celles dues au couplage au niveau des antennes. Ces pertes sont donc présentes pour n'importe quelle taille du milieu. Pour définir les pertes dûs aux bords, on soustrait cette contribution  $\Gamma_{ref}$  de toutes les largeurs mesurées expérimentalement. On définit ainsi un paramètre adimensionné  $\Gamma = (\Gamma_{exp} - \Gamma_{ref}) / \Gamma_{ref}$  que l'on trace en fonction de la distance minimale  $R_{min}$  entre le mode et le bord le plus proche. Cette distance

Taille du système (cm)	$\Gamma_{exp}$ (MHz)
25	1.951
22	1.946
19	2.079
16	3.033
13	20.316

TAB. 2.4 – Largeur de la résonance associé au premier mode localisé de la figure 2.27 pour différents tailles du système

diminue de 1.5 cm par taille de système.

La courbe de la figure 2.32 présente une décroissance exponentielle des pertes aux bords en fonction de  $R_{min}$ , en accord avec la loi décrite par l'équation (2.20). Comme le montre cette loi, une valeur de la longueur de localisation  $\xi_{loc}$  peut être extraite. L'ajustement de la courbe de la figure 2.32 par une loi exponentielle donne une valeur de  $\xi_{loc}$  égale à 12.7 mm très proche de celle obtenue à partir de la fonction d'auto-corrélation de l'amplitude du champ électrique (Tableau (2.2)). On constate donc une cohérence entre les deux méthodes d'extraction de  $\xi_{loc}$ , ce qui consolide l'idée que tous ces modes sont bien des modes localisés.

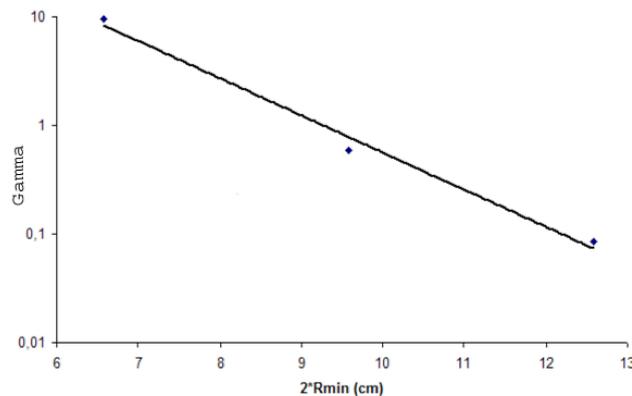


FIG. 2.32 –  $\Gamma \approx \exp\left[\frac{-2R_{min}}{\xi_{loc}}\right]$  en échelle semi-logarithmique.

Pour prouver la décroissance exponentielle de l'enveloppe d'un mode localisé, nous avons réalisé de nouvelles expériences dans ce même désordre avec différents couples d'antennes. Pour qu'un mode soit détecté, il est nécessaire qu'une antenne soit proche de ce mode. Si on considère le premier mode localisé obtenu avec les antennes  $(B,D)$ , il sera détecté avec tous les couples d'antennes ayant en commun une de ces deux antennes. Par contre, si les deux antennes utilisées sont loin de la zone de localisation alors le mode ne peut être détecté. La figure 2.33 montre la concordance entre les modes obtenus respectivement pour le couple d'antennes  $(B,D)$  et  $(A,B)$ .

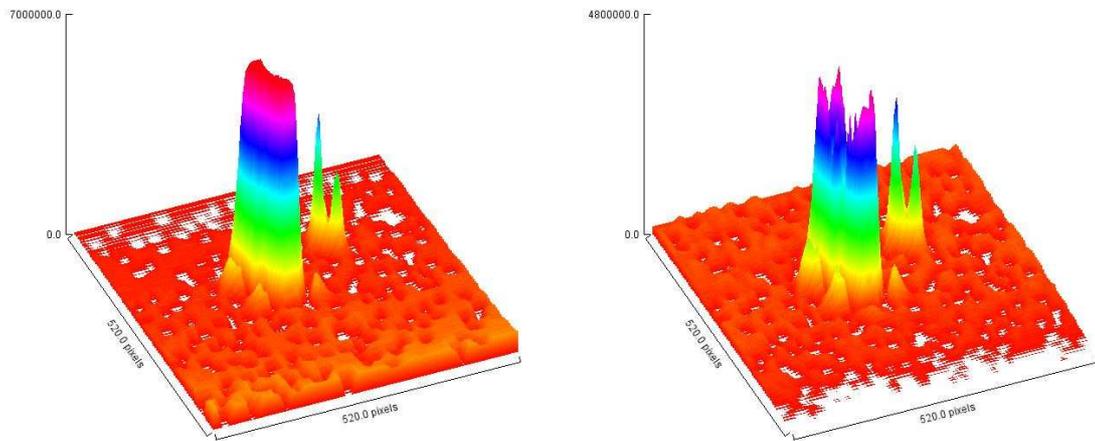


FIG. 2.33 – Modes obtenus respectivement avec les couples d'antennes  $(A,B)$  et  $(B,D)$

Tout ceci tend à démontrer que c'est bien le désordre qui est responsable de l'existence de ces modes. La notion de mode de cavité évoqué précédemment pour des certains modes localisés n'est pas pertinent mais on est plutôt dans un cas extrême de la localisation. Les simulations numériques appuient cette interprétation. Malgré leur indice très élevé, ces diffuseurs ne peuvent pas être perçus comme des miroirs car les résultats numériques montrent que ces diffuseurs piègent de l'énergie.

Nous pouvons conclure en disant que les modes localisés, au sens d'Anderson,

d'une structure 2D ont été pour la première fois observés et analysés expérimentalement sans ambiguïtés.

Toute une série de nouveaux modes localisés mesurés dans différents milieux désordonnés sont donnés dans la section suivante. Ces milieux diffusifs diffèrent soit par :

- la configuration du désordre pour un nombre de diffuseurs et une distance  $d$  donnés,
- la fraction surfacique de diffuseurs,
- la distance minimale entre diffuseurs plus proches voisins
- le rayon des diélectriques.

## 2.6 Étude exhaustive des modes localisés

Tous les modes localisés expérimentaux présentés par la suite, sont obtenus dans un milieu de forme carrée de côté 25 cm. Seule la configuration du désordre change. Pour décrire ce désordre, plusieurs paramètres sont utiles :

1.  $\sigma$  correspond à la fraction surfacique des diffuseurs diélectriques dans le système,
2.  $d$  représente la distance minimale entre deux diffuseurs plus proches voisins
3.  $r$  définit le rayon du diffuseur.

Pour tous les modes localisés présentés par la suite, les critères de localisation n'ont pas été vérifiés telles que l'insensibilité aux conditions de bords et le comportement exponentiel avec la taille du système des pertes non ohmiques. Uniquement, une comparaison entre les largeurs spectrales expérimentale  $\Gamma_{exp}^{25}$  et théorique  $\Gamma_{ohm}$  a été effectuée, un calcul de la longueur de localisation via la fonction d'auto-corrélation de l'amplitude du champ électrique et une comparaison, pour certains modes, entre expériences et simulations numériques. Pour la longueur de localisation, nous donnerons toujours un intervalle de valeur dû à l'anisotropie du mode. Toutes ces nouvelles mesures ont été réalisées avec l'analyseur de réseau de

Rohde & Schwarz. Pour chacun des modes, plusieurs représentations 3D sont fournies pour bien montrer la structure spatiale du mode, plus détaillée qu'auparavant grâce à ce nouvel analyseur de réseau. La dynamique des modes localisés mesurés avec ce nouvel appareil permet de calculer la longueur de localisation  $\xi_{loc}$  à partir des résultats expérimentaux contrairement aux précédents modes, obtenus avec le HP8720D, où  $\xi_{loc}$  n'est pas calculable à cause de la dynamique insuffisante (DI dans les tableaux).

### 2.6.1 $d = 11 \text{ mm}$ , $\sigma = 8.8\%$ , $r = 3 \text{ mm}$

Pour montrer que les résultats sont reproductibles, un second milieu désordonné ayant la même fraction surfacique que celui décrit précédemment a été exploré. Tous les modes suivants ont été mesurés avec le couple d'antennes ( $B, D$ ).

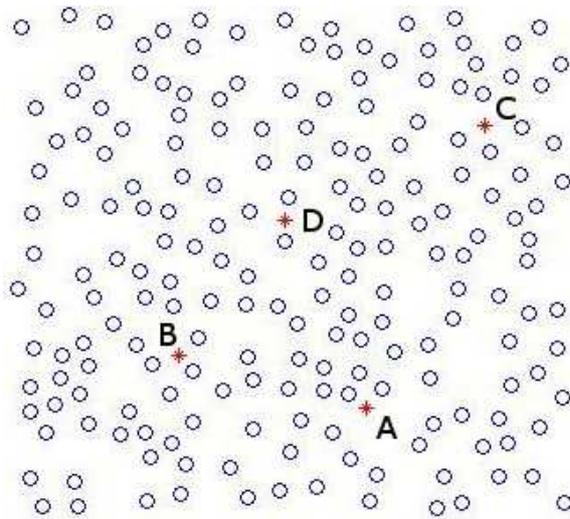


FIG. 2.34 – Nouvelle configuration de désordre avec  $d=11 \text{ mm}$  et  $\sigma = 8.8\%$  .

Pour tous ces modes localisés, on retrouve un comportement similaire à celui qui est observé dans le précédent milieu. Une longueur  $\xi_{loc}$  qui augmente avec la fréquence ce qui traduit un mode de plus en plus étalé et donc une contribution des pertes liées aux bords beaucoup plus importante, ce qui justifie les

différences croissantes entre  $\Gamma_{exp}$  et  $\Gamma_{ohm}$ .  $\Gamma_{ohm}$  est une quantité théorique définie par l'équation (2.19) et ne prend pas en compte les pertes liées aux antennes. On peut remarquer cependant que l'a priori qu'un mode détecté en bord de gap corresponde à un mode peu étalé n'est pas correct. La preuve en est le premier mode cartographié dans ce milieu et centré en  $f = 5.69$  GHz (2.35).

Pour prouver la décroissance exponentielle de chacun des modes, nous avons vérifié s'ils étaient observables avec différents couples d'antennes. Tous les modes suivants, cartographiés avec les antennes  $(B,D)$  sont identifiés sur tous les signaux mesurés avec un couple d'antennes comprenant l'antenne  $B$  ou  $D$ . Ces signaux exhibent des résonances centrées sur des fréquences comparables à celles trouvées avec le couple  $B$  et  $D$ . Ils ne sont par contre identifiables pour aucune des autres combinaisons d'antennes.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
5.69	4.57828	0.99129	DI

TAB. 2.5 – Caractéristiques du mode localisé (2.35) centré en  $f = 5.69$  GHz

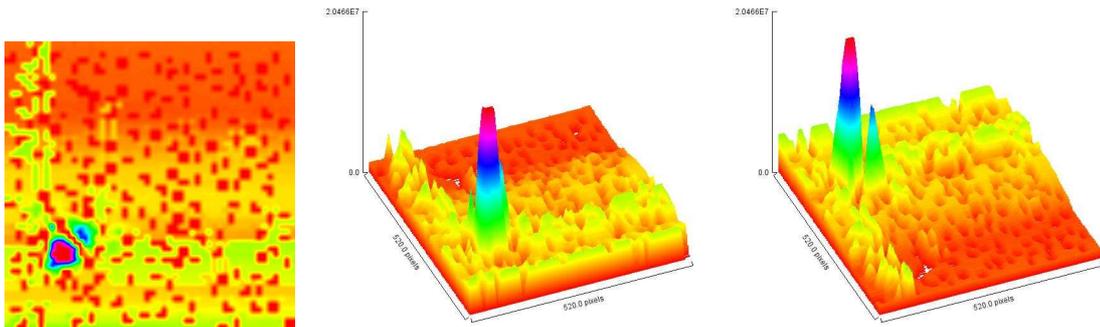


FIG. 2.35 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 5.69 GHz. Le couple d'antennes  $(B,D)$  a été utilisé.

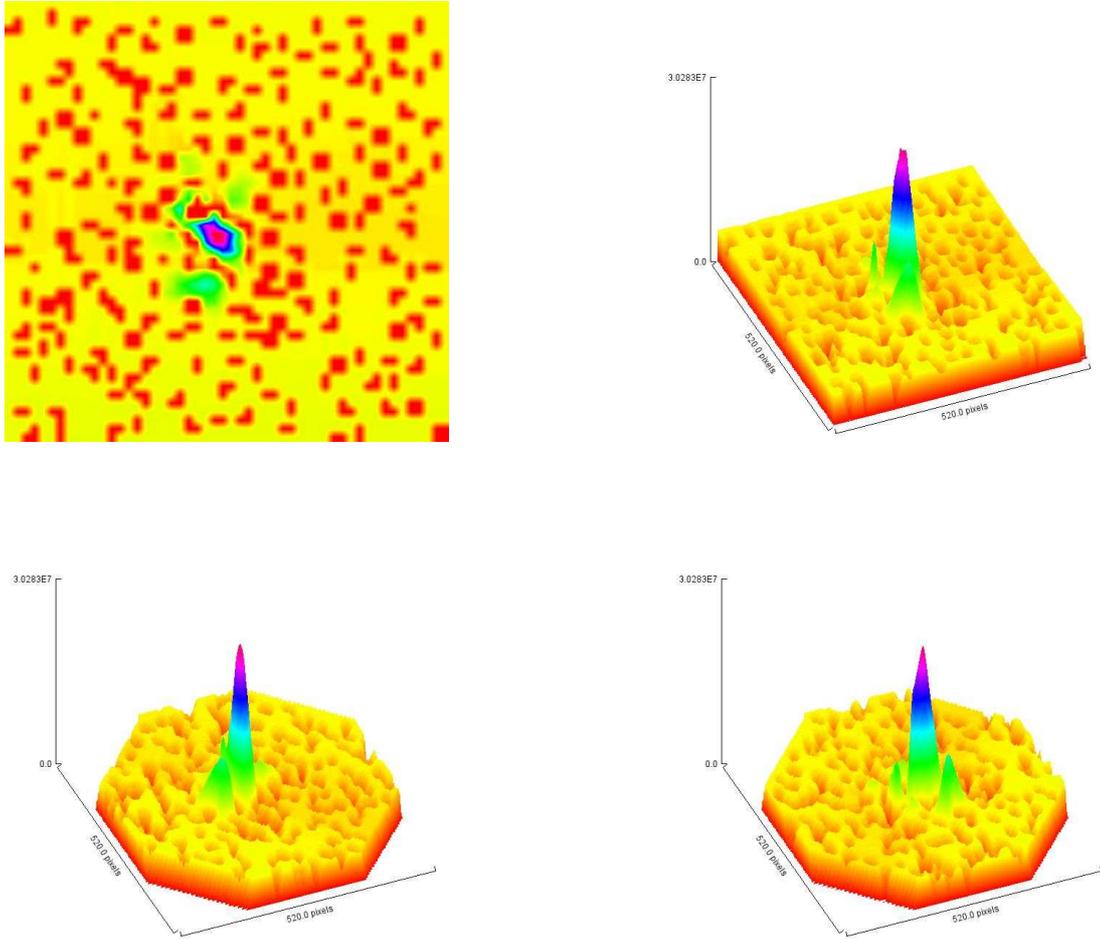


FIG. 2.36 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 5.846 GHz. Le couple d’antennes (B,D) a été utilisé.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
5.846	1.7153	1.010404	DI

TAB. 2.6 – Caractéristiques du mode localisé (2.36) centré en  $f = 5.846$  GHz

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
5.891	2.527	1.014	DI

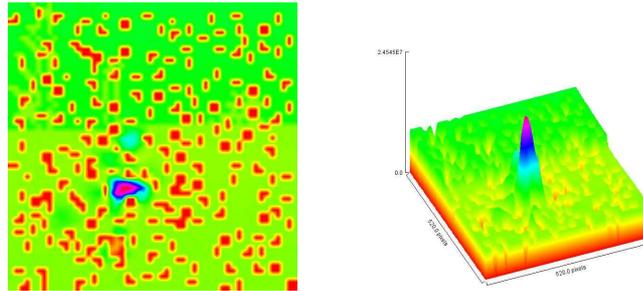
TAB. 2.7 – Caractéristiques du mode localisé (2.37) centré en  $f = 5.891$  GHz

FIG. 2.37 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 5.891 GHz. Le couple d'antennes (B,D) a été utilisé.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
6.295	7.3587	1.0485	DI

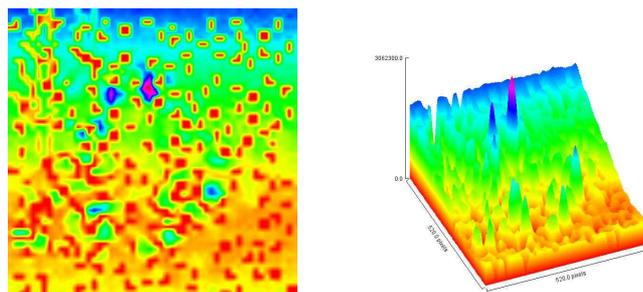
TAB. 2.8 – Caractéristiques du mode localisé (2.38) centré en  $f = 6.295$  GHz

FIG. 2.38 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 6.295 GHz. Le couple d'antennes (C,D) a été utilisé.

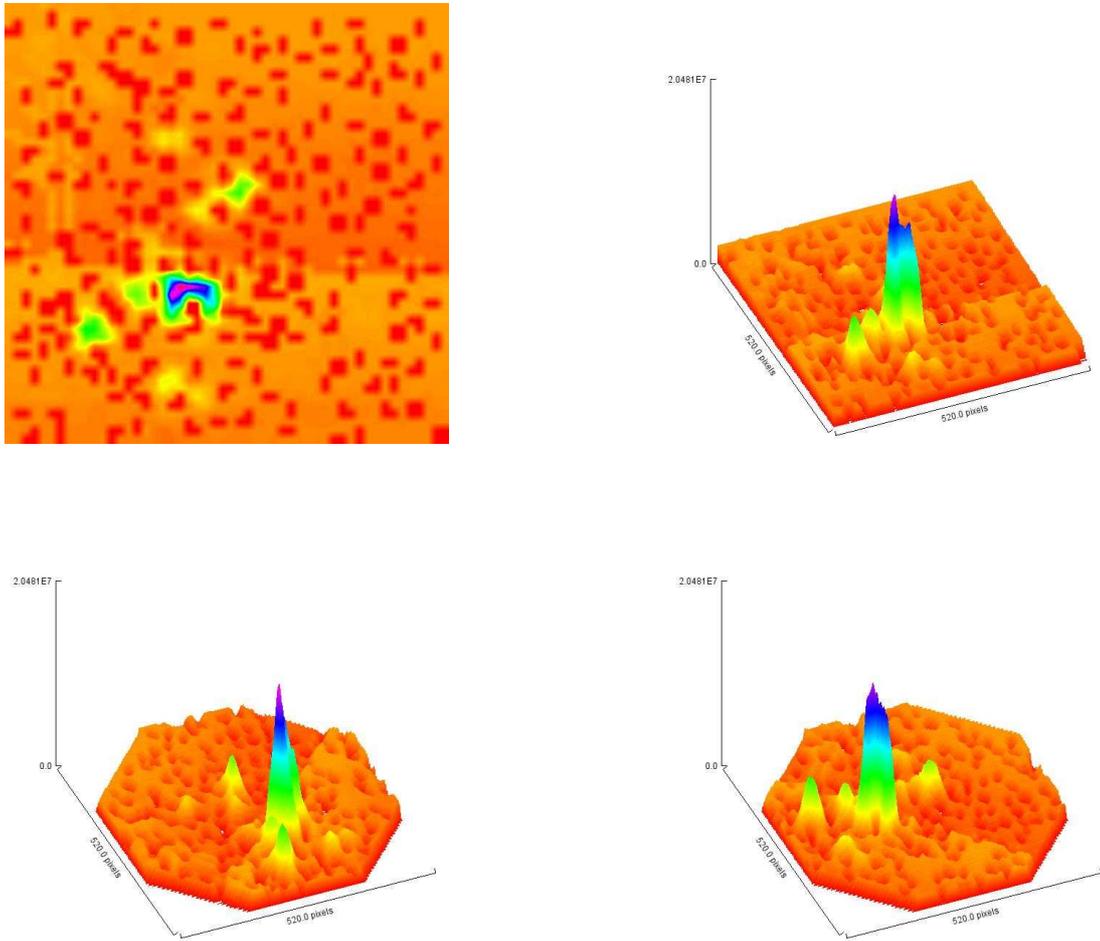


FIG. 2.39 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 7.55 GHz. Le couple d’antennes (B,D) a été utilisé.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
7.55	11.2027	1.148611	DI

TAB. 2.9 – Caractéristiques du mode localisé (2.39) centré en  $f = 7.55\text{GHz}$

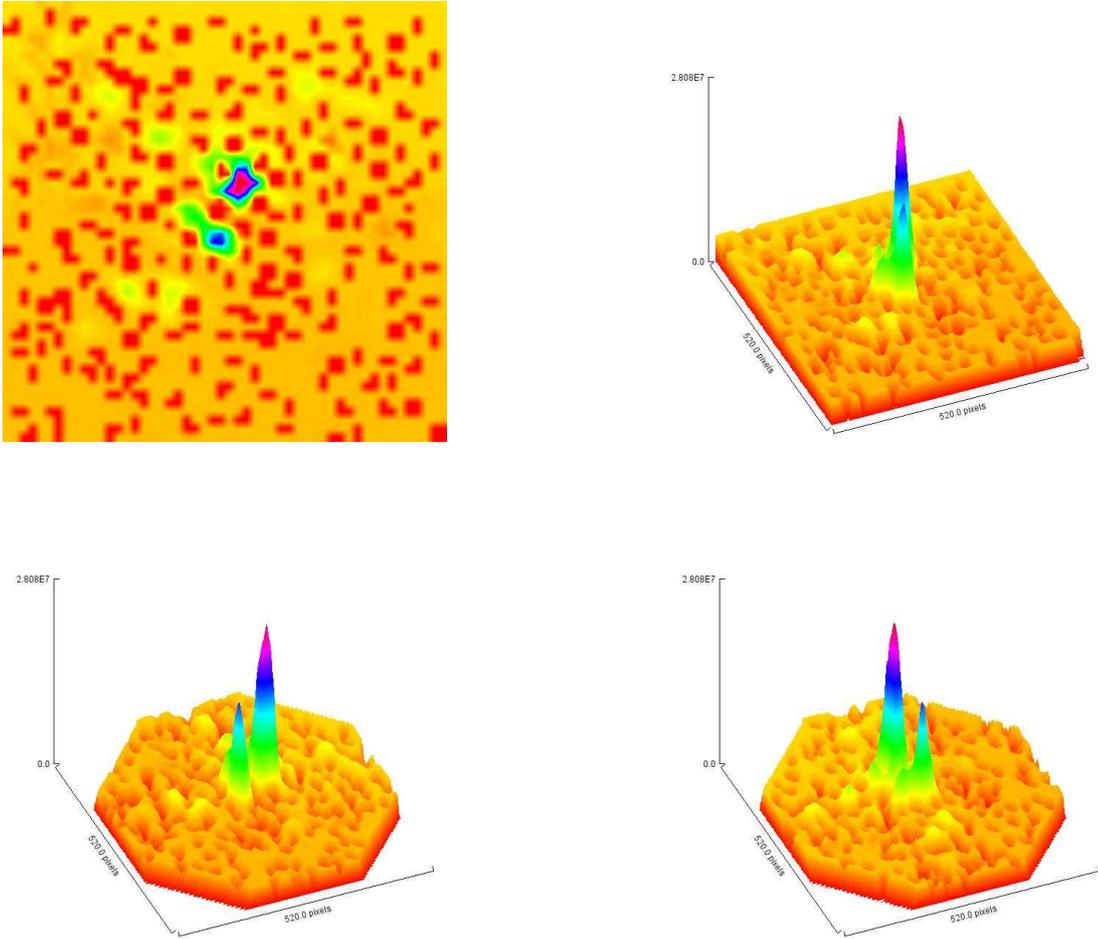


FIG. 2.40 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 7.70 GHz. Le couple d’antennes (B,D) a été utilisé.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
7.70	11.3	1.159	DI

TAB. 2.10 – Caractéristiques du mode localisé (2.40) centré en  $f = 7.70$  GHz

### 2.6.2 $d = 13 \text{ mm}$ , $\sigma = 5.5 \%$ , $r = 3 \text{ mm}$

La fraction surfacique de diélectriques a été diminuée dans le but d'augmenter la longueur de localisation des modes. Cette fraction correspond à 121 diffuseurs diélectriques. La distance  $d$  a été choisie pour la même raison que précédemment *i.e.* avec le soucis de travailler dans une configuration de désordre "homogène". Par comparaison avec les milieux précédents, la bande interdite est à plus basse fréquence. En effet, les premières résonances, présentes en fin de gap, apparaissent au voisinage de 4.5 GHz contre 5.5 GHz dans la configuration précédente. Une autre distinction à faire est l'absence de résonances intéressantes au delà d'une fréquence de 7 GHz.

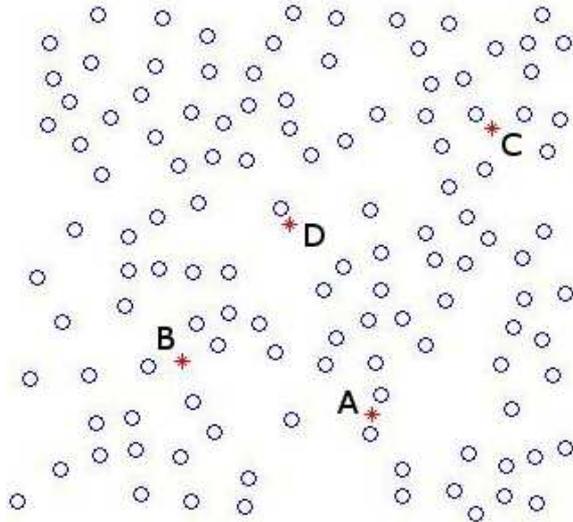


FIG. 2.41 – Nouvelle configuration de désordre avec  $d = 13 \text{ mm}$  et  $\sigma = 5.5\%$  .

Dans ce milieu, on retrouve que l'étalement spatial du mode augmente avec la fréquence. Cependant, grâce à la diminution du nombre de diffuseurs, beaucoup plus de modes localisés étendus sont détectés.

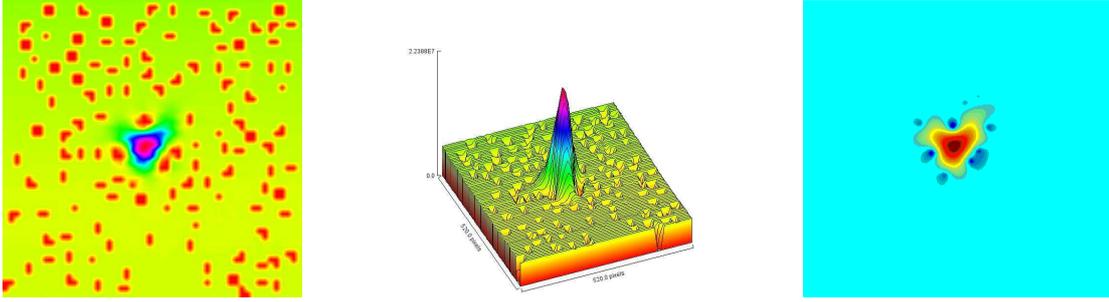


FIG. 2.42 – Représentation 2D obtenue expérimentalement (gauche) et numérique (droite) et une représentation 3D (centre) du mode localisé centré en 4.179 GHz. Le couple d'antennes (B,D) a été utilisé.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
4.179	1.251	0.854	19-22

TAB. 2.11 – Caractéristiques du mode localisé (2.42) centré en  $f = 4.179$  GHz

La position centrale du mode de la figure 2.42 offre la possibilité de vérifier la loi (Eq (2.20)) décrivant le comportement des pertes liées aux bords. Pour cela, la largeur de la résonance associée à ce mode a été mesurée pour différentes tailles du système (Tableau 2.12). Nous sommes partis d'un carré de côté 25 cm pour terminer avec un carré de côté 9 cm, en supprimant successivement des bandes de diffuseurs larges de 1 cm.

Comme pour la figure 2.32,  $\Gamma_{exp} = 1.29$  MHz, la largeur obtenue pour le plus grand système a été prise comme valeur de référence  $\Gamma_{ref}$  et le paramètre sans dimension  $\Gamma = (\Gamma_{exp} - \Gamma_{ref}) / \Gamma_{ref}$  est tracé en fonction de la distance la plus courte entre le mode et un des bords  $R_{min}$ . La figure 2.43 présente l'allure exponentielle des ces pertes aux bords en fonction de  $R_{min}$  comme le prévoit la loi (2.20). L'ajustement de la figure 2.43 par une exponentielle du même type que l'équation (2.20) permet d'extraire une valeur de la longueur de localisation.  $\xi_{loc} = (1.96 \pm 0.12)$  cm et  $\xi_{loc} = (2.04 \pm 0.16)$  cm sont les longueurs de localisation extraites respective-

Taille du système (cm)	$\Gamma_{exp}$ (MHz)	Taille du système (cm)	$\Gamma_{exp}$ (MHz)
23	1.275	15	1.548
21	1.339	13	2.641
19	1.356	11	7.307
17	1.469	9	15.445

TAB. 2.12 – Largeur de la résonance associé au premier mode localisé de la figure 2.27 pour différents tailles du système

ment de la fonction d’auto-corrélation du mode obtenu numériquement (image de droite sur la figure 2.42) et calculée à partir de la figure 2.43. La cohérence de ces deux valeurs fait le lien entre ces deux méthodes de calcul de  $\xi_{loc}$  mais prouve également leur pertinence.

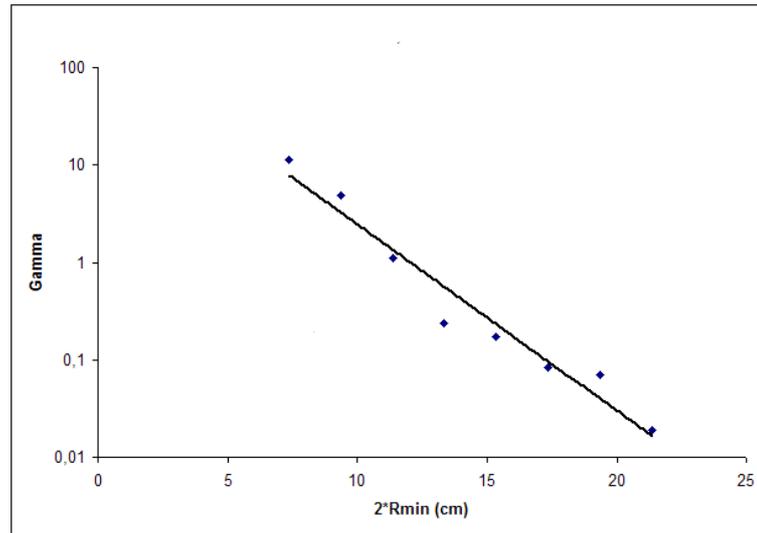


FIG. 2.43 –  $\Gamma \approx \exp\left[\frac{-2R_{min}}{\xi_{loc}}\right]$  en échelle semi-logarithmique obtenue pour le mode localisé de la figure 2.42.

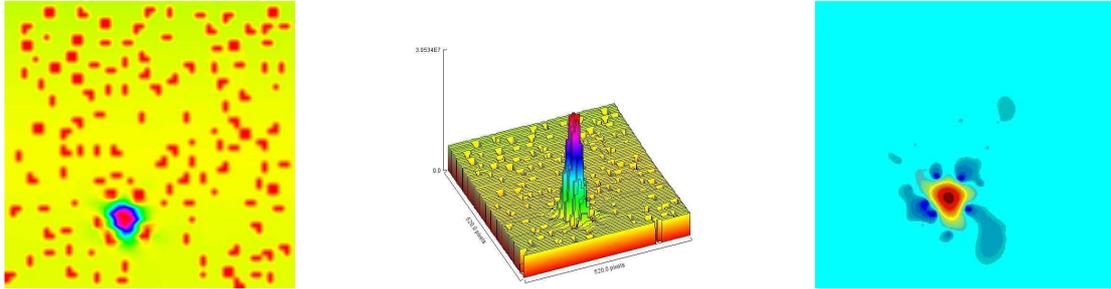


FIG. 2.44 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.509 GHz. Le couple d’antennes (B,D) a été utilisé.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
4.509	3.174	0.887	26-36

TAB. 2.13 – Caractéristiques du mode localisé (2.44) centré en  $f = 4.509$  GHz

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
6.584	8.800	1.072	DI

TAB. 2.14 – Caractéristiques du mode localisé (2.45) centré en  $f = 6.584$  GHz

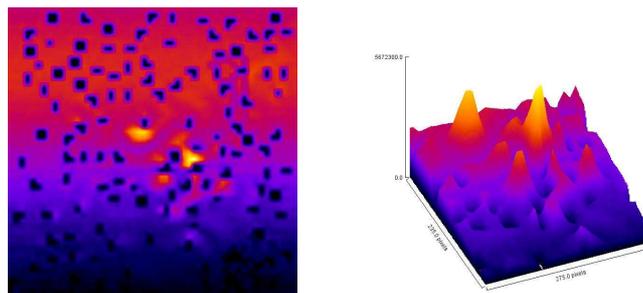


FIG. 2.45 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 6.584 GHz. Le couple d’antennes (B,D) a été utilisé.

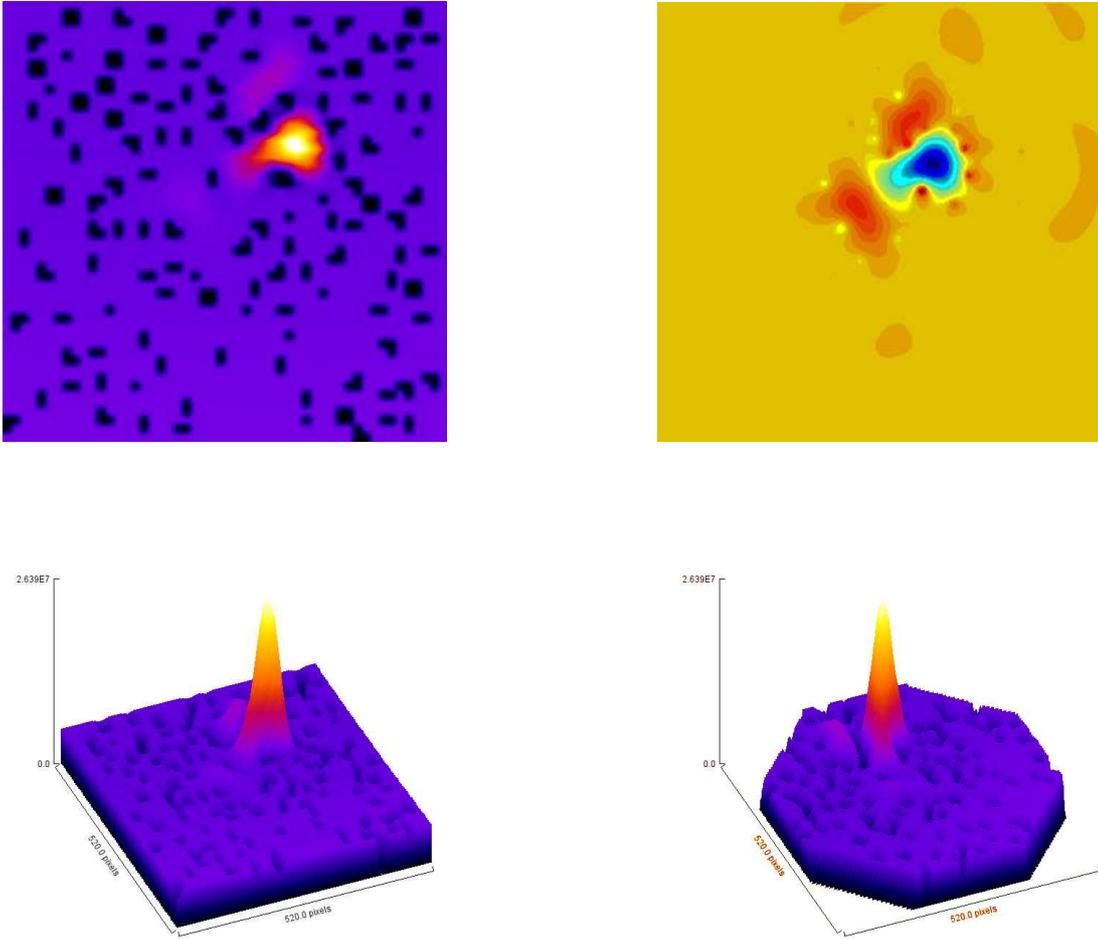


FIG. 2.46 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.356 GHz. Le couple d’antennes (B,C) a été utilisé.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
4.356	0.945	0.872	13-15

TAB. 2.15 – Caractéristiques du mode localisé (2.46) centré en  $f = 4.356$  GHz

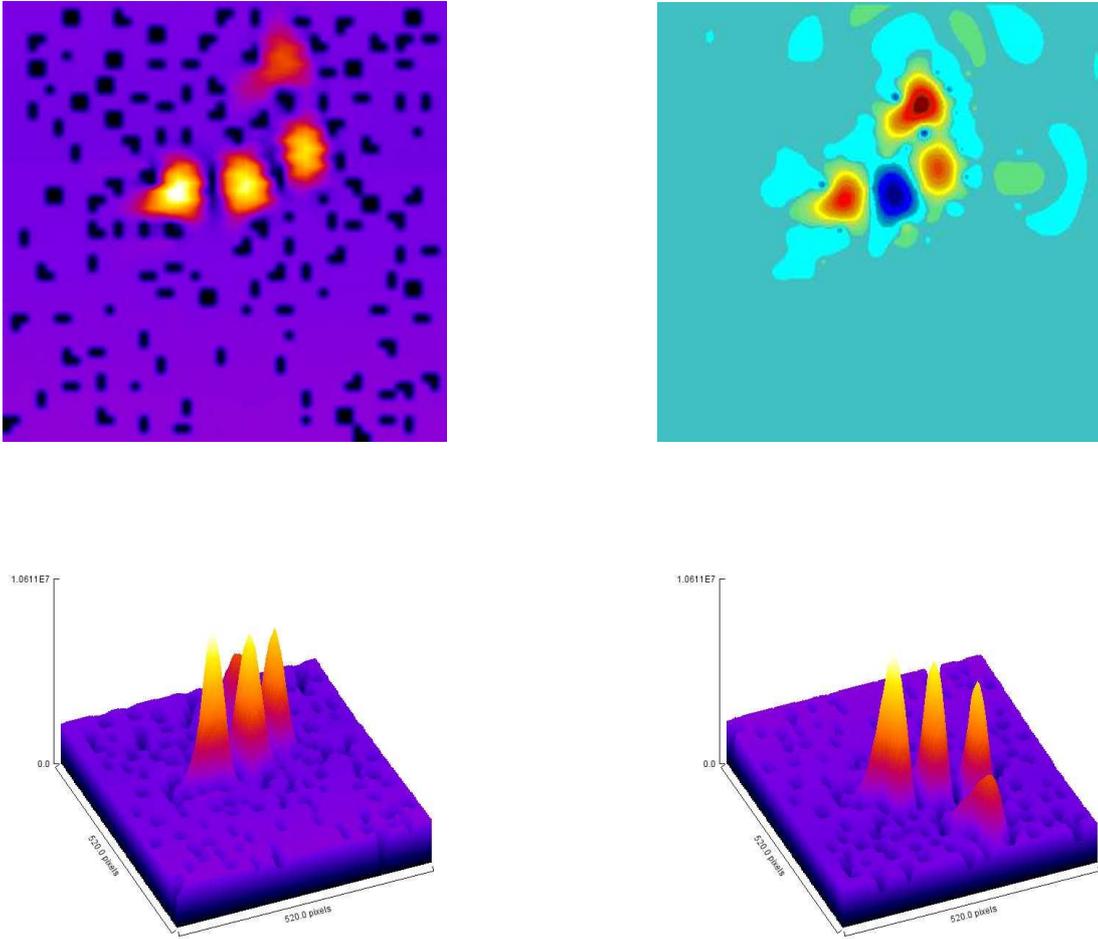


FIG. 2.47 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.641 GHz. Le couple d'antennes (B,C) a été utilisé.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
4.641	1.849	0.900	14-20

TAB. 2.16 – Caractéristiques du mode localisé (2.47) centré en  $f = 4.641$  GHz

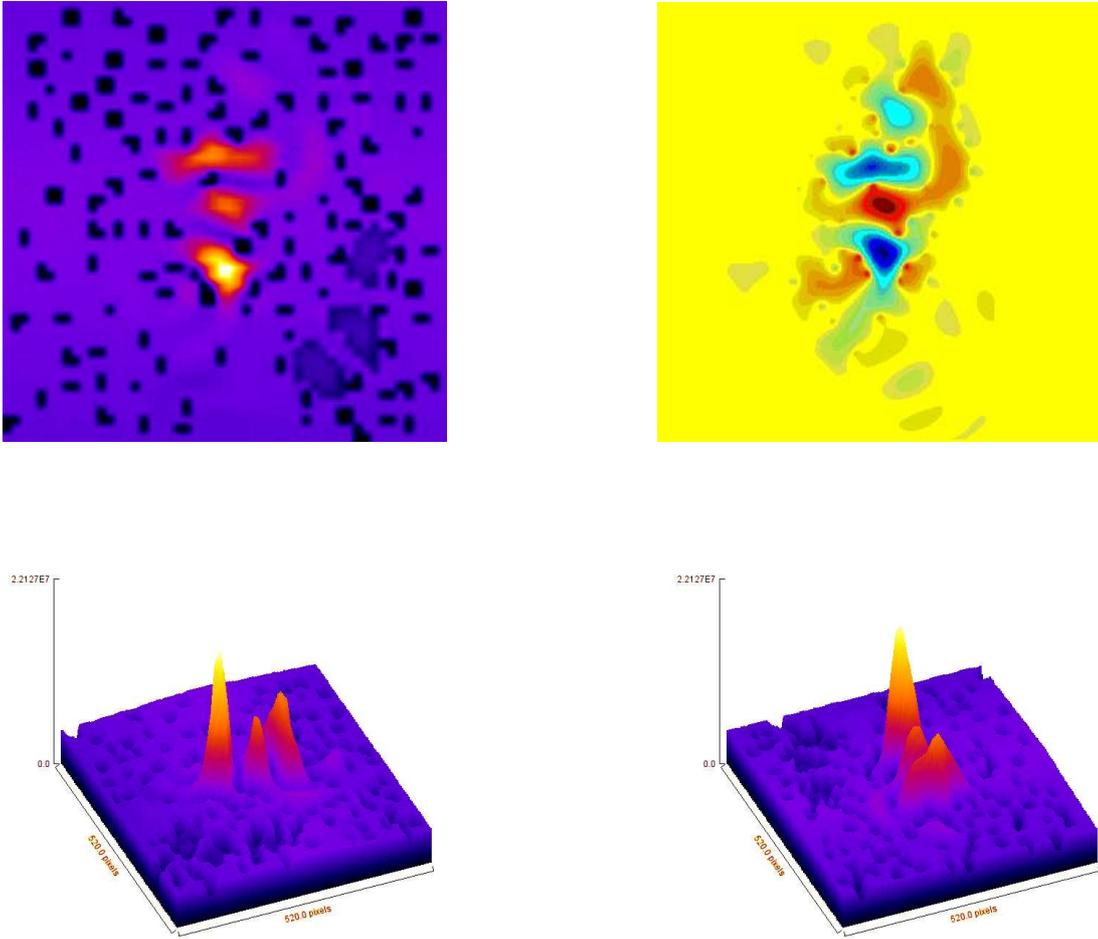


FIG. 2.48 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 5.383 GHz. Le couple d’antennes (B,C) a été utilisé.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
5.383	6.661	0.969	55-80

TAB. 2.17 – Caractéristiques du mode localisé (2.48) centré en  $f = 5.383$  GHz

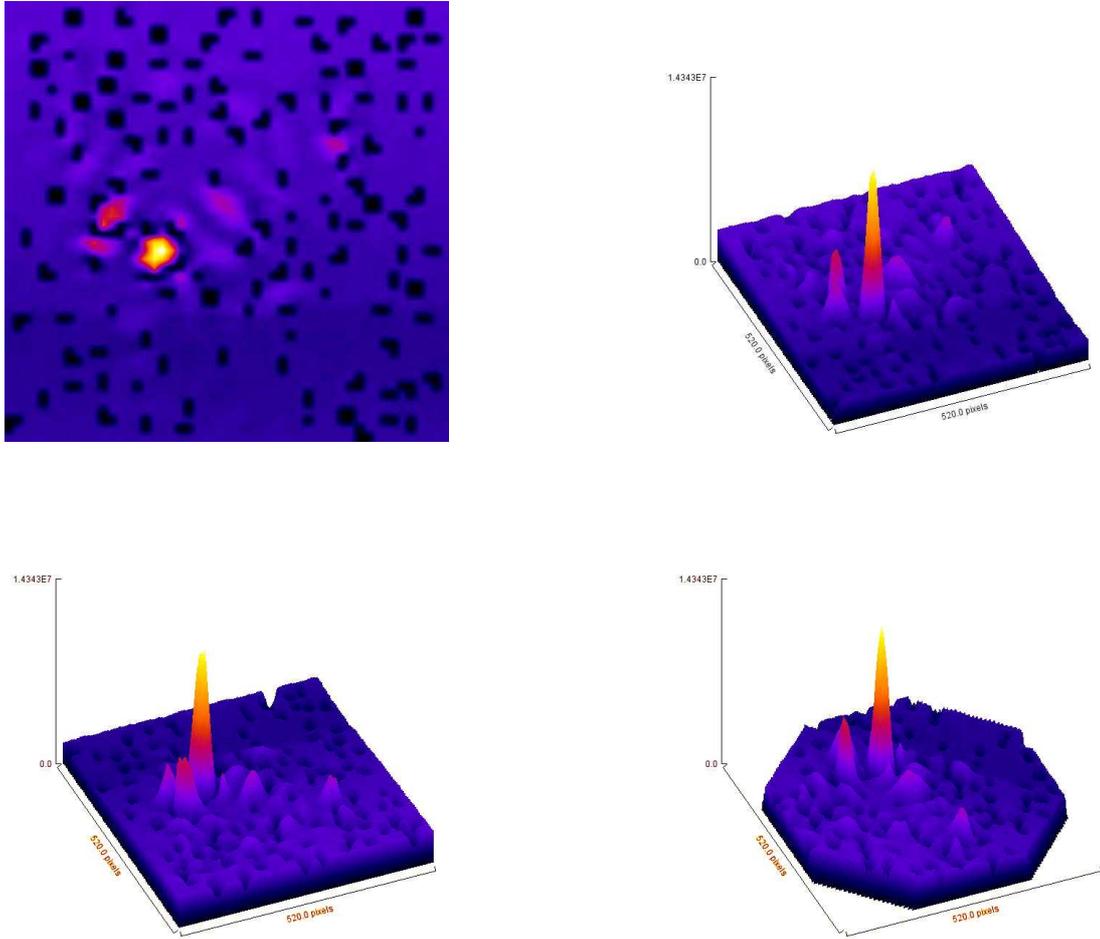


FIG. 2.49 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 6.218 GHz. Le couple d'antennes (B,C) a été utilisé.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
6.218	10.500	1.042	52-60

TAB. 2.18 – Caractéristiques du mode localisé centré (2.49) en  $f = 6.218$  GHz

### 2.6.3 $d = 13 \text{ mm}$ , $\sigma = 5.5\%$ , $r = 4 \text{ mm}$

Après avoir montré comment  $d$  et  $\sigma$  modifiait la structure du signal de transmission, nous avons étudié la même configuration de désordre que la section précédente (Fig 2.6.2) mais en utilisant des diffuseurs de rayon  $r = 4 \text{ mm}$ .

Le changement de rayon de diélectrique engendre une nouvelle courbe de section efficace (Fig 2.50). Cette courbe, pour des diffuseurs de rayon 4 mm, peut être obtenue soit numériquement comme décrit précédemment soit de façon très approximative par homothétie de la courbe de section efficace propre à un diffuseur unique de rayon 3 mm. Le rapport d'homothétie est de 0.25 et correspond à la variation de rayon. Cette méthode géométrique serait exacte si les désordres à  $r = 3 \text{ mm}$  et  $r = 4 \text{ mm}$  étaient identiques. Pour cela, il est nécessaire d'augmenter la taille totale du système afin de garder la même fraction surfacique de diffuseurs. L'approche numérique et l'approche géométrique fournissent des fréquences des résonances de Mie *i.e.* pour les maxima d'efficacité très proches, 1.75 GHz, 4.6 GHz et 7.4 GHz. Comme dans le cas des diffuseurs à  $r = 3 \text{ mm}$ , le

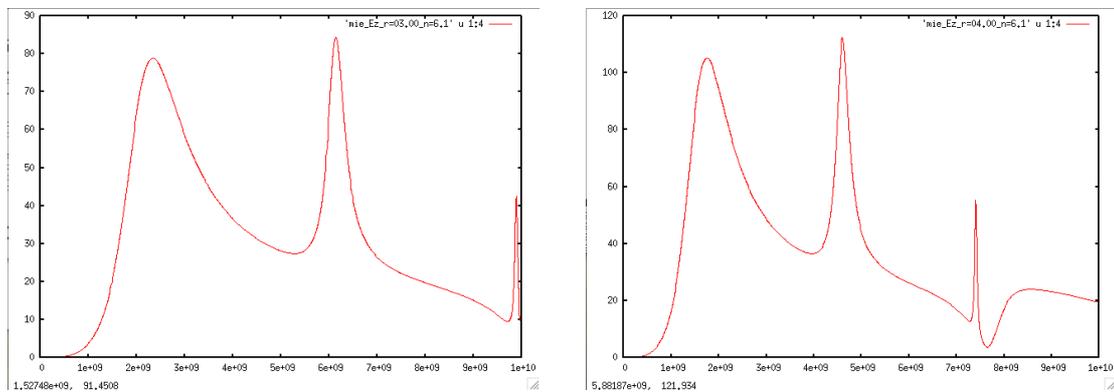


FIG. 2.50 – Courbe de section efficace pour des diffuseurs de rayon 3 mm et 4 mm.

lien direct entre les résonances de Mie et les fenêtres de localisation est mis en évidence. Le décalage en fréquence des bandes interdites et des fenêtres de localisation effectuent le même déplacement spectral que les résonances de Mie. Vanneste *et al.* ou encore Sigalas *et al.* ont mis en évidence, numériquement, que la posi-

tion spectrale globale des bandes interdites et permises est guidée par la taille du diffuseur [Vanneste and Sebbah, 2005, Sigalas et al., 1996]. En revanche, la structure interne de chacune des fenêtres dépend de la configuration du désordre. Pour une même configuration de désordre, on peut donc s'attendre à retrouver dans ce milieu des modes observés avec les diffuseurs de rayon  $r = 3$  mm, comme le prouve les figures 2.42 et 2.52, les figures 2.47 et 2.53 et les figures 2.44 et 2.54. Si on considère les fréquences de résonances associées à ces différents modes, on retrouve entre les deux systèmes un décalage des fréquences entre les deux milieux du même ordre que celui déjà observé pour les fréquences des résonances de Mie. Ceci illustre bien que se sont les résonances de Mie qui sont à l'origine de tous ces modes. Ceci est prouvé par les résultats numériques où du champ électrique est détecté dans les diffuseurs. En effet, deux lobes sont identifiables dans les diffuseurs ce qui tend à indiquer l'influence de la deuxième résonance de Mie.

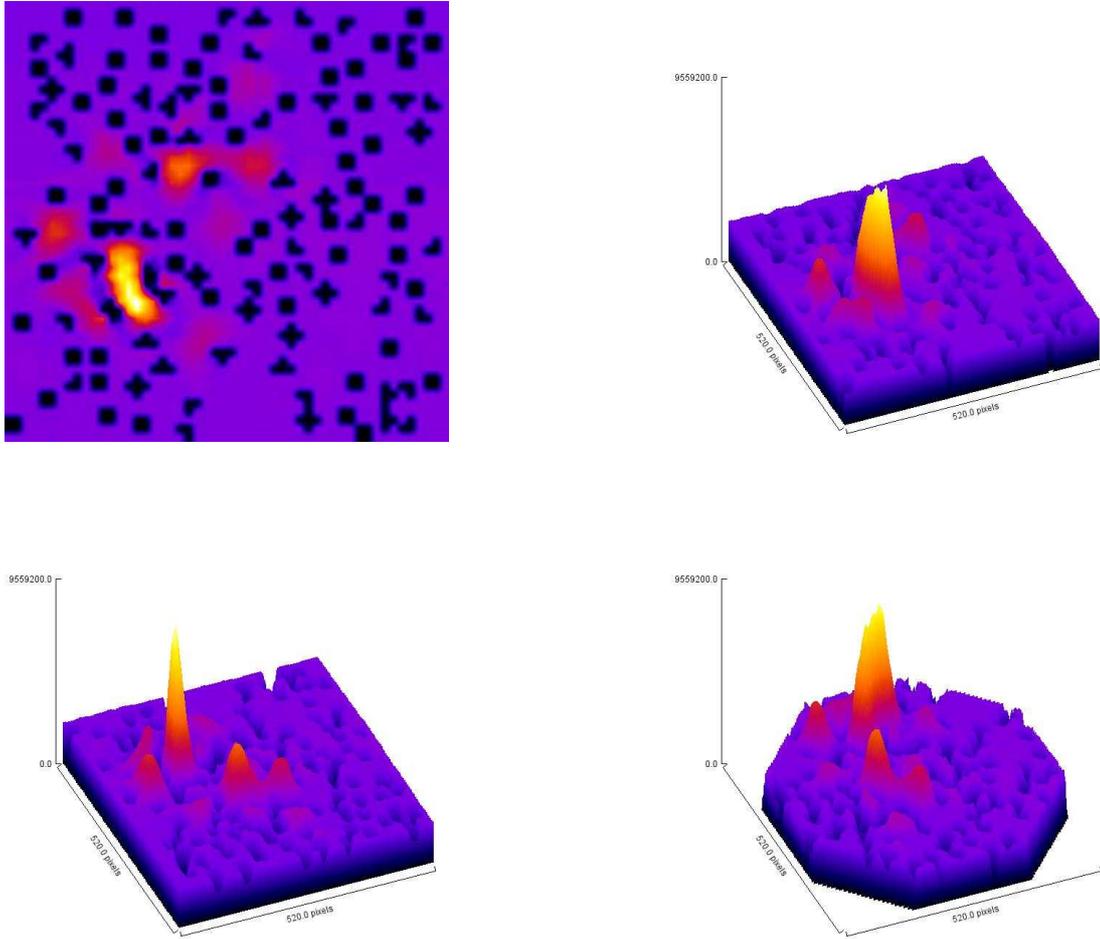


FIG. 2.51 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.966 GHz. Le couple d’antennes (B,D) a été utilisé.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
4.966	7.989	0.932	20-60

TAB. 2.19 – Caractéristiques du mode localisé (2.51) centré en  $f = 4.966$  GHz

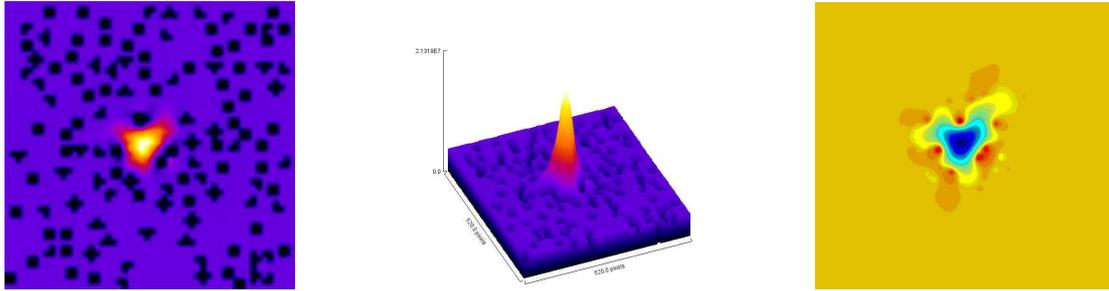


FIG. 2.52 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.166 GHz. Le couple d’antennes  $(B,D)$  a ont été utilisés. Mode identique au mode de la figure 2.42 obtenu avec les diélectriques de rayon 3 mm.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
4.166	1.138	0.853	12-13

TAB. 2.20 – Caractéristiques du mode localisé (2.52) centré en  $f = 4.166$  GHz

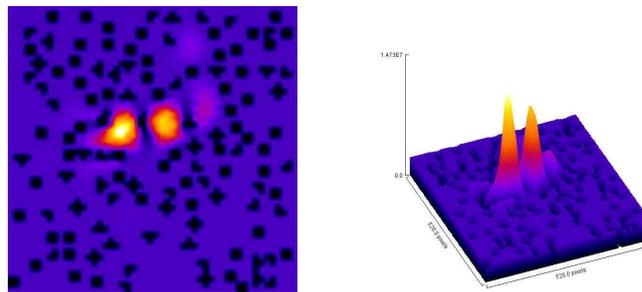


FIG. 2.53 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.515 GHz. Le couple d’antennes  $(B,D)$  a été utilisés. Mode identique au mode de la figure 2.47 obtenu avec les diélectriques de rayon 3 mm.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
4.515	1.713	0.888	20-53

TAB. 2.21 – Caractéristiques du mode localisé (2.53) centré en  $f = 4.515$  GHz

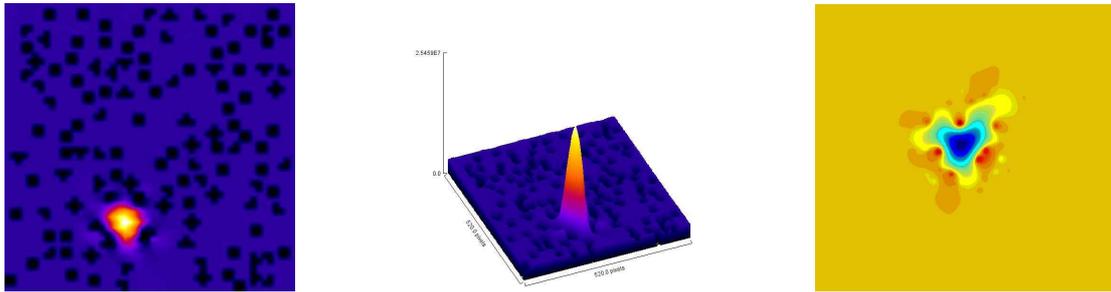


FIG. 2.54 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.418 GHz. Le couple d’antennes (B,D) ont été utilisés. Mode identique au mode de la figure 2.44 obtenu avec les diélectriques de rayon 3 mm.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
4.418	5.223	0.878	17-19

TAB. 2.22 – Caractéristiques du mode localisé (2.54) centré en  $f = 4.418$  GHz

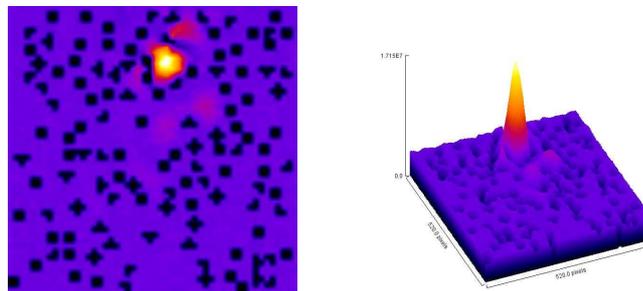


FIG. 2.55 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.911 GHz. Le couple d’antennes (B,D) et a été utilisés.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
4.911	18.210	0.926	25-26

TAB. 2.23 – Caractéristiques du mode localisé (2.55) centré en  $f = 4.911$  GHz

### 2.6.4 $d = 13 \text{ mm}$ , $\sigma = 5.5\%$ , $r = 3 \text{ mm}$ , $r = 4 \text{ mm}$

La dernière configuration étudiée est un désordre constitué de 50% de diffuseurs de rayon  $r = 3 \text{ mm}$  et 50% de diffuseurs de rayon  $r = 4 \text{ mm}$ . La fraction surfacique est de 5.5% et la distance entre centres de diffuseurs plus proches voisins est de  $d = 13 \text{ mm}$ .

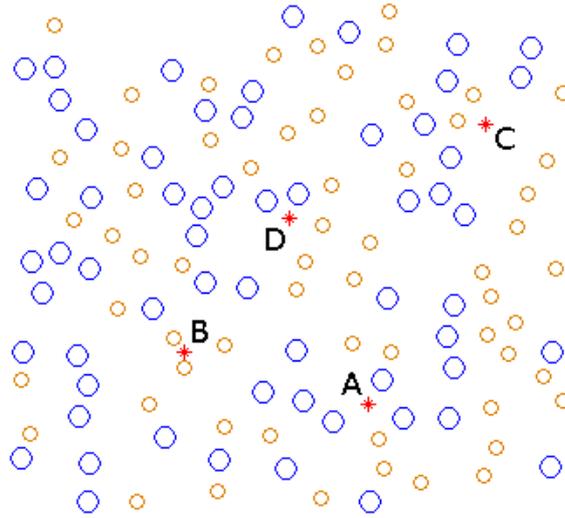


FIG. 2.56 – Désordre composé de 50% de diffuseurs de rayon 3 mm (bleu) et 50% de diffuseurs de rayon 4 mm (orange).

Cette expérience est réalisée dans le but d'appuyer l'hypothèse évoquée précédemment selon laquelle les vestiges d'un réseau périodique sous-jacents disparaîtraient en ajoutant au désordre de position un désordre de taille. En effet, comme les résonances de Mie sont différentes pour les deux tailles de diélectriques, on peut imaginer que le bande interdite présente pour un rayon de diffuseur soit remplie par les résonances dues à la seconde taille de diffuseurs. La figure 2.57 présente les trois signaux de transmission mesurés respectivement dans des configurations de désordres comprenant uniquement des diffuseurs à 3 mm, des diffuseurs à 4 mm et enfin un mélange à part égale des deux diamètres.

Comme évoqué auparavant, on remarque un décalage de la bande interdite

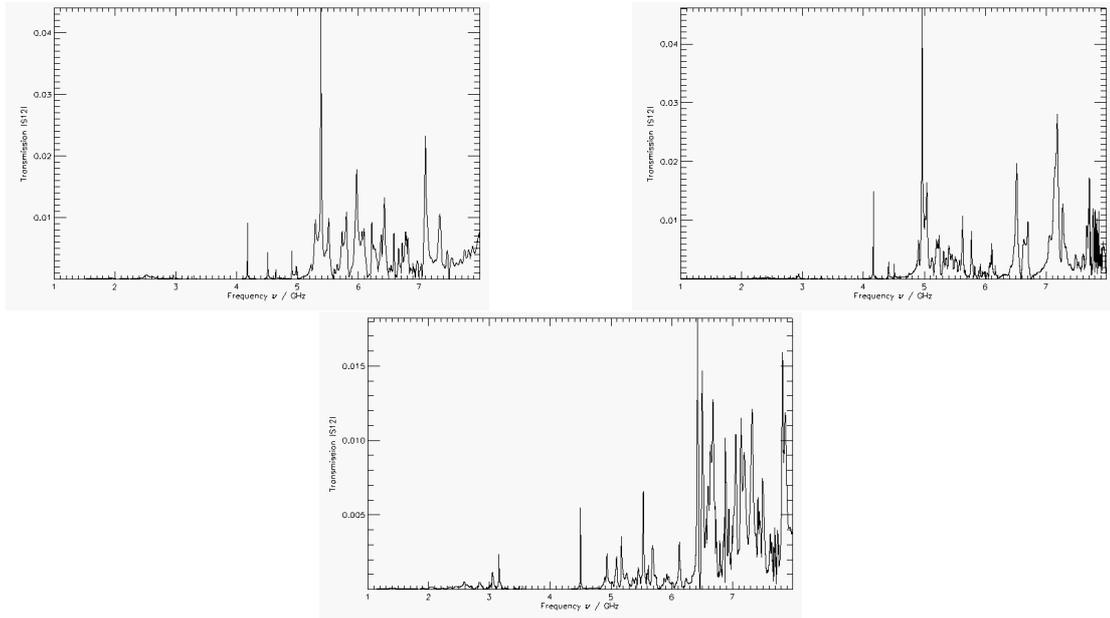


FIG. 2.57 – Comparaison des trois signaux de transmission, mesurés avec le couple d’antennes  $(B,D)$ , obtenus respectivement avec des diffuseurs à 3 mm, des diffuseurs à 4 mm et un mélange à part égale des diamètres.

entre les signaux mesurés dans un désordre à 3 mm et un désordre à 4 mm dû au décalage des résonances de Mie. Cependant, lorsque le désordre en taille est présent en plus du désordre en position, cette bande interdite subsiste toujours. L’explication peut venir du fait que la différence entre les rayons utilisés n’est pas suffisamment importante. La solution serait de travailler avec des diffuseurs diélectriques d’un rayon tel que le décalage des fréquences de Mie compense la largeur de la bande interdite mesurée pour les diffuseurs de rayon 3 mm.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
4.495	1.558	0.886	19-30

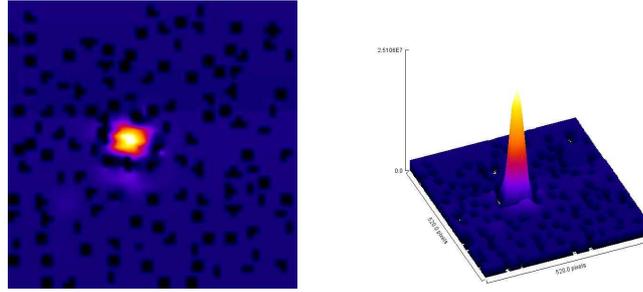
TAB. 2.24 – Caractéristiques du mode localisé (2.58) centré en  $f = 4.495$  GHz

FIG. 2.58 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.495 GHz. Le couple d'antennes (B,D) ont été utilisés.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
5.180	9.017	0.953	10-13

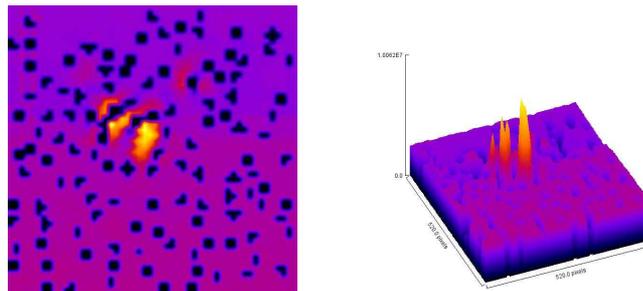
TAB. 2.25 – Caractéristiques du mode localisé (2.59) centré en  $f = 5.180$  GHz

FIG. 2.59 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 5.180 GHz. Le couple d'antennes (B,D) et a été utilisés.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
6.430	9.211	1.059	17-25

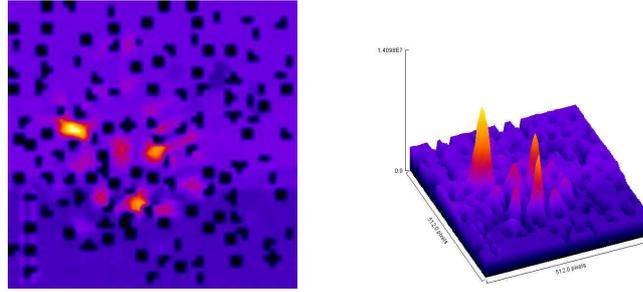
TAB. 2.26 – Caractéristiques du mode localisé (2.60) centré en  $f = 6.430$  GHz

FIG. 2.60 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 6.430 GHz. Le couple d'antennes (B,D) ont été utilisés.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
5.542	7.913	0.983	DI

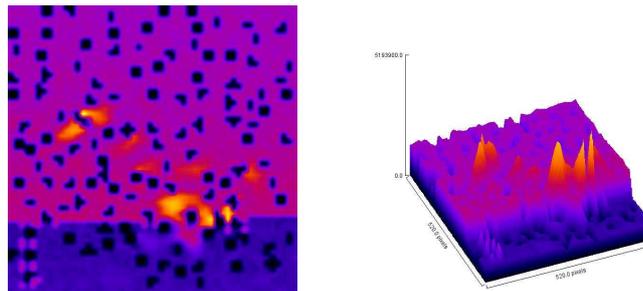
TAB. 2.27 – Caractéristiques du mode localisé (2.61) centré en  $f = 5.542$  GHz

FIG. 2.61 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 5.542 GHz. Le couple d'antennes (C,D) et a été utilisés.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
6.343	6.127	1.053	11-13

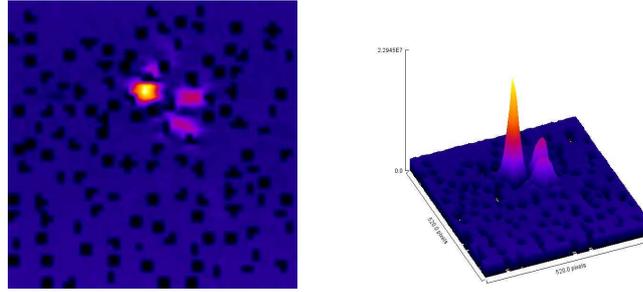
TAB. 2.28 – Caractéristiques du mode localisé (2.62) centré en  $f = 6.343$  GHz

FIG. 2.62 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 6.343 GHz. Le couple d'antennes (C,D) ont été utilisés.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
7.147	18.934	1.117	28-56

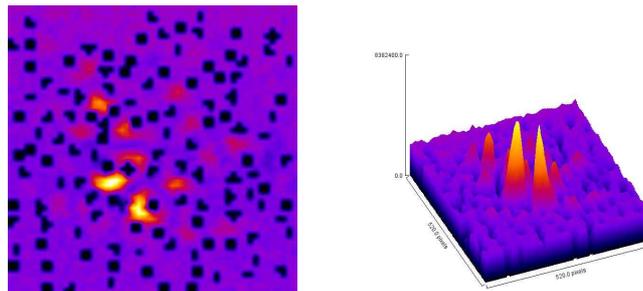
TAB. 2.29 – Caractéristiques du mode localisé (2.63) centré en  $f = 7.147$  GHz

FIG. 2.63 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 7.147 GHz. Le couple d'antennes (C,D) et a été utilisés.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
4.313	10.496	0.868	24-40

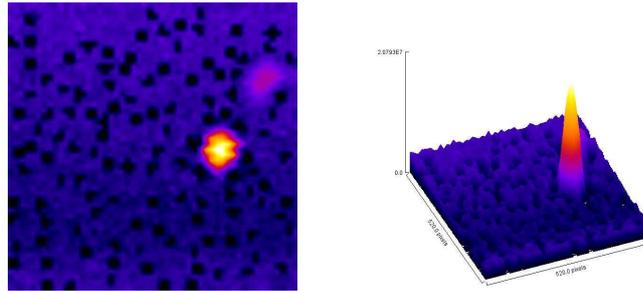
TAB. 2.30 – Caractéristiques du mode localisé (2.64) centré en  $f = 4.313$  GHz

FIG. 2.64 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.313 GHz. Le couple d'antennes (C,D) et a été utilisé.

$f_{mode}$ (GHz)	$\Gamma_{exp}^{25}$ (MHz)	$\Gamma_{ohm}$ (MHz)	$\xi_{loc}$ (mm)
6.507	10	1.066	37-39

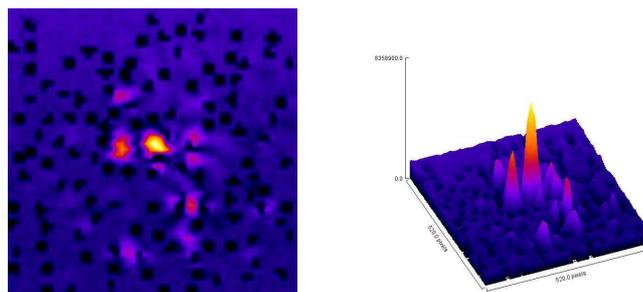
TAB. 2.31 – Caractéristiques du mode localisé (2.65) centré en  $f = 6.507$  GHz

FIG. 2.65 – Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 6.507 GHz. Le couple d'antennes (A,C) et a été utilisé.

# Conclusion

Depuis que P.W. Anderson a proposé la localisation des électrons dans un métal pour expliquer la transition conducteur-isolant, l'observation de ce phénomène est devenu un véritable "graal". Les effets inconnus des interactions entre particules quantiques sur la localisation ont poussé les différentes équipes à tenter d'observer cette localisation dans le domaine des ondes classiques. Au cours des deux dernières décennies, les premières expériences à une dimension ont été réalisées pour tenter d'observer des signatures de la localisation comme la décroissance exponentielle de la transmission en fonction de la taille du système. Comme cette décroissance exponentielle peut être due à l'absorption présente dans le milieu, ce critère a été remis en cause. Une étude statistique de la localisation en milieu quasi-unidimensionnel a alors été proposée par Genack et *al.*. Dans les années 90, de nombreuses expériences réalisées à deux dimensions, notamment par Sridhar et *al.*, ont permis d'obtenir des cartographies montrant un piégeage du champ électrique. Cependant les conditions expérimentales dans lesquelles ces observations ont été faites remettent en cause la nature de ces modes. En effet, ces modes peuvent être dus aux réflexions sur les parois de la cavité contenant le milieu désordonné. Le mode ne peut donc pas être considéré comme un mode localisé mais plutôt comme un mode de cavité. Parallèlement à ces expériences, une étude numérique des systèmes désordonnés a été réalisée notamment par Vanneste et *al.*. Elle a notamment montré que l'utilisation de conditions de bords dites de rayonnement vers l'extérieur ce qui permet de travailler en cavité ouverte et enlève toute ambiguïté sur la nature du mode. C'est en tenant compte de tous ces travaux

antérieurs que nous avons développé à la fois un dispositif expérimental modèle et un protocole expérimental modèle. L'ouverture du système afin de supprimer la quasi totalité des modes de cavité est faite en ajoutant des absorbants micro-ondes le long des parois de la cavité. Connaissant la structure du champ électrique pour une cavité vide rectangulaire, nous avons validé le protocole de mesure du champ électrique, via une bille de faible diamètre, en effectuant des mesures tests dans une cavité de ce type. Une mesure de l'indice de réfraction des diffuseurs a été faite afin d'obtenir leur courbe de section efficace et ainsi connaître leurs résonances de Mie. Le phénomène de résonance de proximité visible lorsque deux diffuseurs sont séparés d'une distance de l'ordre de la longueur d'onde a également été observé. Nous avons vérifié pour la première série de modes, mesurés dans un milieu désordonné composé d'environ deux cents diffuseurs diélectriques de fort indice, les différents critères de localisation. L'insensibilité aux conditions de bords est prouvée en comparant les structures spatiales du champ électrique mesurées pour deux milieux de tailles différentes. Un accord excellent est observé entre les cartographies expérimentales et numériques. Le critère fort de localisation qui prévoit la décroissance exponentielle des pertes, dues aux fuites de l'énergie par les bords, est également vérifié. Cette dernière vérification a permis d'extraire une valeur de la longueur de localisation cohérente avec celles obtenues par deux autres méthodes d'extraction qui sont : la théorie de la diffusion avec l'hypothèse de diffuseurs indépendants (pour les faibles valeurs de la longueur de localisation) et la décroissance de la fonction d'auto-corrélation spatiale de l'amplitude du champ électrique. Pour prouver la qualité du protocole et du dispositif expérimental, nous avons effectué une étude quantitative des modes localisés. Pour cela, nous avons travaillé dans plusieurs milieux désordonnés différents soit par leur fraction surfacique de diffuseurs, soit par le rayon des diffuseurs soit par la distance minimale entre deux diffuseurs plus proches voisins. Les influences respectives de ces trois paramètres caractéristiques du milieu désordonné sur les signaux de transmission ont également été observées.

Pour le futur, il reste à faire un travail plus quantitatif. Il faudrait par exemple

explorer plus en détail l'influence directe des résonances de Mie sur les fenêtres de localisation présentes dans les signaux de transmission. Ensuite, il serait très intéressant de regarder l'influence directe de l'indice sur la localisation en utilisant des diffuseurs beaucoup moins efficaces. Une dernière piste consisterait à ajouter au désordre en position un désordre en taille de diffuseur beaucoup plus grand que celui qui a déjà été étudié ici afin d'observer la disparition des gaps dans les signaux de transmission. D'un point de vue technique, une automatisation totale du protocole expérimental est également envisagée.



# Annexes



## Annexe A

# Calcul des longueurs d'orbites périodiques

Dans une cavité rectangulaire de cotés  $L_x$  et  $L_y$ , les orbites sont identifiées par deux indices  $n$  et  $m$  indiquant le nombre de pas sur le réseau de maille  $2L_y \times 2L_x$  (pour nous :  $L_x = 0.75621$  m et  $L_y = 0.46564$  m) tel que décrit dans l'article de Jain [Jain, 1994] (voir fig A.1).

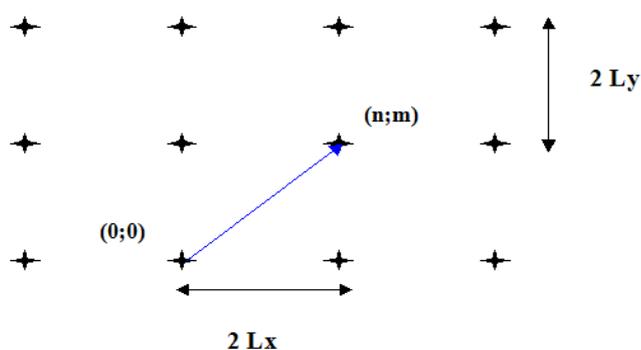


FIG. A.1 – Maille rectangulaire permettant d'obtenir les OPs.

Il faut noter que  $n$  et  $m$  représentent respectivement le nombre de rebonds sur un bord  $L_y$  et sur un bord  $L_x$ . Les orbites dont l'un des indices est nul sont, dans le billard rectangulaire, des droites verticales ou horizontales. Pour les autres

orbites, l'algorithme de construction, à partir de la donnée des deux indices, est simple : l'orbite (1,1) constitue le motif de base (Fig A.2).

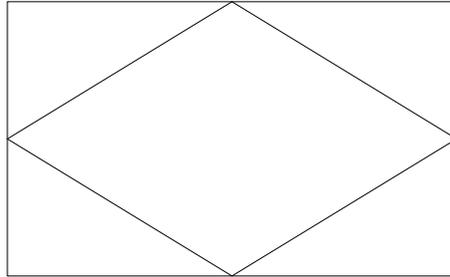


FIG. A.2 – Orbite périodique (1,1) de longueur  $1.776m$ . Toutes les autres orbites sont des combinaisons linéaires de celle-ci.

Une orbite  $(n, m)$ , dont un exemple est fourni par la première image de la figure A.3, s'obtient en reproduisant  $n$  fois verticalement et  $m$  fois horizontalement ce motif et en réduisant ensuite la structure rectangulaire formée jusqu'à la taille du rectangle initial.

Pour les orbites du type  $(l, k) = \alpha(n, m)$ , on obtient des orbites "composites" (seconde image de la figure A.3), c'est-à-dire  $\alpha$  orbites  $(n, m)$  distinctes et non symétriques, la superposition des ces  $\alpha$  orbites formant un tracé respectant les symétries du rectangle.

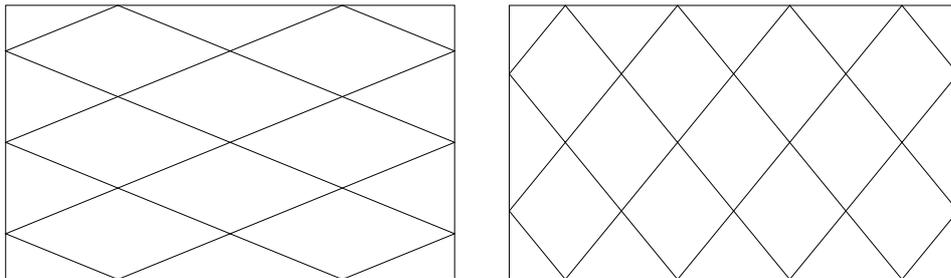


FIG. A.3 – Exemples d'une orbite périodique ( $n = 3, m = 2$ ) de longueur  $4.905m$  obtenue en représentant 3 fois selon  $y$  et 2 fois selon  $x$  l'orbite (1,1) et d'une orbite composite  $(1,1)*2$

Connaissant les dimensions de la cavité, les longueurs de toutes les orbites périodiques présentes dans la cavité vide sont connues. Elles forment des familles d'orbites continûment déformables (Fig A.4) de longueur :

$$l_{nm} = 2\sqrt{n^2L_x^2 + m^2L_y^2} \quad (\text{A.1})$$

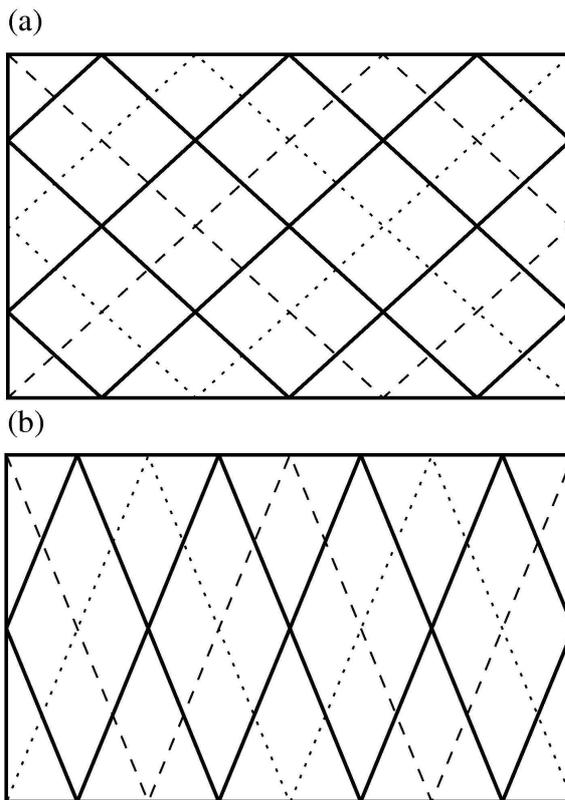


FIG. A.4 – 2 exemples de familles d'orbites. On représente l'orbite avec la symétrie du rectangle et 2 déformations possibles

Une fois les longueurs de toutes les OPs connues, nous pouvons facilement isoler leurs contributions dans les spectres de longueurs comme on le montre sur la figure 1.5 rendant ainsi l'extraction de nouvelles contributions associées aux ODs possible.



# Annexe B

## Orthogonalité des fonctions propres de la cavité habillée

Cette appendice montre comment la dépendance en énergie du paramètre  $\alpha$  permet d'obtenir des fonctions propres de la cavité perturbée orthogonales et de faire le lien entre l'approche à partir de laquelle notre calcul est inspiré et développée par Weaver-Sornette [Weaver and Sornette, 1995] et l'approche de Shigehara-Cheon [Shigehara and Cheon, 1996].

$G_0$  et  $G$  sont respectivement les fonctions de Green de la cavité rectangulaire vide et celle de la cavité avec diffuseur placé en un point  $\vec{b}$ . La cavité rectangulaire est caractérisée par les fonctions propres  $\Psi_n$  et les valeurs propres  $E_n$ . Celle perturbée par  $\Phi_n$  et  $z_n = \omega_n^2$ . Si on décrit ce qui se passe au niveau du diffuseur par une matrice de transition  $\tau$ , on peut relier les deux fonctions de Green par l'expression suivante :

$$G(\vec{r}, \vec{r}'; z) = G_0(\vec{r}, \vec{r}'; z) + G_0(\vec{r}, \vec{b}; z) \tau(\vec{b}; z) G_0(\vec{b}, \vec{r}'; z) \quad (\text{B.1})$$

avec la matrice de transition définie comme :

$$\tau(\vec{b}; z) = \frac{1}{t^{-1} - f(\vec{b}; z)} \quad (\text{B.2})$$

avec  $t$  le coefficient de diffraction défini par  $(\alpha + i/4)^{-1}$  et indépendant de  $k$  dans la méthode de Weaver et Sornette. Les résonances de la cavité perturbée sont données par les zéros du dénominateur de la relation précédente, avec :

$$f(\vec{b}; z) = \frac{i}{4} + \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{b}} \left[ G_0(\vec{r}, \vec{b}; z) - \frac{1}{2\pi} \left( \gamma + \ln \frac{\sqrt{z} \|\vec{r} - \vec{b}\|}{2} \right) \right] \quad (\text{B.3})$$

obtenue à partir de la relation (1.29) et en prenant le développement limité de la fonction de Hankel. Les fonctions propres de la cavité perturbée sont données par les résidus de la fonction de Green  $G$  au point  $z_n$ . Si on écrit la fonction de Green de la cavité perturbée comme suit :

$$G(\vec{r}, \vec{b}; z) = \sum_m \frac{\Phi_m(\vec{r}) \Phi_m(\vec{b})}{z - z_m} \quad (\text{B.4})$$

on obtient, par définition des résidus, l'expression suivante :

$$\lim_{z \rightarrow z_n} \left[ G(\vec{r}, \vec{b}; z) (z - z_n) \right] = \lim_{z \rightarrow z_n} \sum_m \frac{\Phi_m(\vec{r}) \Phi_m(\vec{b})}{z - z_m} (z - z_n) \quad (\text{B.5})$$

Si on considère deux valeurs propres différentes, c'est-à-dire  $m \neq n$ , alors la somme ne diverge pas et  $z$  tend vers  $z_n$ . Le résidu est donc nul. Par contre, si  $m = n$ , les termes en  $(z - z_n)$  se simplifient et le résidu donne :

$$\lim_{z \rightarrow z_n} \left[ G(\vec{r}, \vec{b}; z) (z - z_n) \right] = \Phi_n(\vec{r}) \Phi_n(\vec{b}) \quad (\text{B.6})$$

En considérant l'équation (B.1), nous obtenons pour  $\Phi_n$  une expression similaire à celle trouvée par Shigehara et Cheon [Shigehara and Cheon, 1996] :

$$\Phi_n(\vec{r}) = N_n G_0(\vec{r}, \vec{b}; z_n) \quad (\text{B.7})$$

En effet, si on réécrit le résidu de  $G$  à partir de l'éq (B.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_n} \left[ G(\vec{r}, \vec{b}; z) (z - z_n) \right] &= \lim_{z \rightarrow z_n} \left[ G_0(\vec{r}, \vec{b}; z) (z - z_n) \right] \\ &+ \lim_{z \rightarrow z_n} \left[ G_0(\vec{r}, \vec{b}; z) \tau(\vec{b}; z) G_0(\vec{b}, \vec{b}; z) (z - z_n) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

avec

$$G_0(\vec{r}, \vec{b}; z) = \sum_{\nu} \frac{\Psi_{\nu}(\vec{r}) \Psi_{\nu}(\vec{b})}{z - E_{\nu}} \quad (\text{B.9})$$

Dans la section numérique de ce manuscrit, nous avons montré que chaque valeur propre de la cavité perturbée est comprise entre deux valeurs propres de la cavité vide, les  $z_n$  sont donc différents des  $E_{\nu}$ . La première contribution au résidu est donc nulle car  $z$  tend vers  $z_n$ . L'expression (B.7) est obtenue à partir de la seconde contribution de (B.8). La matrice  $\tau$  possède des pôles simples en chaque valeur de  $z_n$ , il y a donc divergence. En multipliant ce terme divergeant par le produit  $(z - z_n)$ , on peut écrire :

$$\lim_{z \rightarrow z_n} [\tau(\vec{b}; z) (z - z_n)] = N' \quad (\text{B.10})$$

avec  $N'$  une constante. (B.8) devient :

$$\lim_{z \rightarrow z_n} [G(\vec{r}, \vec{b}; z) (z - z_n)] = N' * G_0(\vec{b}, \vec{b}; z) * G_0(\vec{r}, \vec{b}; z_n) \quad (\text{B.11})$$

La relation (B.7) est obtenue en identifiant les contributions dépendant de  $\vec{r}$  entre (B.11) et (B.6). La constante est obtenue en calculant la normalisation des fonctions propres de la cavité perturbée :

$$\int \Phi_n(\vec{r}) \Phi_n(\vec{r}) d\vec{r} = 1 \quad (\text{B.12})$$

Grâce aux relations (B.7) et (B.9), nous pouvons écrire :

$$N_n^2 \int \sum_{\nu} \left( \frac{\Psi_{\nu}(\vec{r}) \Psi_{\nu}(\vec{b})}{z_n - E_{\nu}} \right)^2 d\vec{r} = 1 \quad (\text{B.13})$$

ou :

$$N_n^2 \sum_{\nu} \sum_{\nu'} \frac{\Psi_{\nu}(\vec{b})}{z_n - E_{\nu}} \frac{\Psi_{\nu'}(\vec{b})}{z_n - E_{\nu'}} \int \Psi_{\nu}(\vec{r}) \Psi_{\nu'}(\vec{r}) d\vec{r} = 1 \quad (\text{B.14})$$

Comme les fonctions propres de la cavité rectangulaire sont orthogonales, nous avons

$$\int \Psi_{\nu}(\vec{r}) \Psi_{\nu'}(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_{\nu\nu'} \quad (\text{B.15})$$

On peut dire que :

$$N_n^2 = \left[ \sum_{\nu} \frac{\Psi_{\nu}^2(\vec{b})}{(z_n - E_{\nu})^2} \right]^{-1} \quad (\text{B.16})$$

Maintenant que l'on possède une expression pour les fonctions propres de la cavité perturbée, on peut calculer le produit scalaire afin de déterminer s'il y a ou non orthogonalité. Donc,

$$\int \Phi_m(\vec{r}) \Phi_n(\vec{r}) d\vec{r} = N_m N_n \sum_{\nu, \mu} \frac{\Psi_{\nu}(\vec{b}) \Psi_{\mu}(\vec{b})}{(z_m - E_{\nu})(z_n - E_{\mu})} \int \Psi_{\nu}(\vec{r}) \Psi_{\mu}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (\text{B.17})$$

Avec l'éq(B.15), ce produit scalaire devient :

$$\int \Phi_m(\vec{r}) \Phi_n(\vec{r}) d\vec{r} = N_m N_n \sum_{\nu} \frac{\Psi_{\nu}^2(\vec{b})}{(z_m - E_{\nu})(z_n - E_{\nu})} \quad (\text{B.18})$$

Tout d'abord, le cas trivial ou  $m = n$  :

$$\int \Phi_n^2(\vec{r}) d\vec{r} = N_n^2 \sum_{\nu} \frac{\Psi_{\nu}^2(\vec{b})}{(z_n - E_{\nu})^2} = 1 \quad (\text{B.19})$$

La dernière égalité étant obtenue à partir de la définition (B.16) de la constante  $N_n$ . Maintenant, le cas  $n \neq m$ . Pour cela nous allons calculer  $f(\vec{b}; z_n) - f(\vec{b}; z_m)$  à partir de l'éq (B.3) et de la définition de  $G_0$  donnée par l'éq (B.9) :

$$\begin{aligned} f(\vec{b}; z_n) - f(\vec{b}; z_m) &= \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{b}} \left[ G_0(\vec{r}, \vec{b}; z_n) - G_0(\vec{r}, \vec{b}; z_m) - \frac{1}{4\pi} \ln \left( \frac{z_n}{z_m} \right) \right] \\ &= \sum_{\nu} \frac{\Psi_{\nu}^2(\vec{b})}{(z_n - E_{\nu})} - \sum_{\nu} \frac{\Psi_{\nu}^2(\vec{b})}{(z_m - E_{\nu})} - \frac{1}{4\pi} \ln \left( \frac{z_n}{z_m} \right) \\ &= (z_m - z_n) \sum_{\nu} \frac{\Psi_{\nu}^2(\vec{b})}{(z_n - E_{\nu})(z_m - E_{\nu})} - \frac{1}{4\pi} \ln \left( \frac{z_n}{z_m} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Nous avons évoqué auparavant que les résonances  $z_n$  sont données par les zéros de  $[t^{-1} - f(\vec{b}; z)]$ . On obtient ainsi :

$$t^{-1} - f(\vec{b}; z_n) = 0 = t^{-1} - f(\vec{b}; z_m) \quad (\text{B.21})$$

Comme le coefficient de diffraction  $t$  est indépendant de l'énergie, on trouve que :

$$f(\vec{b}; z_n) - f(\vec{b}; z_m) = 0 \quad (\text{B.22})$$

Si on pose  $z_n = k^2$ , l'éq (B.20) nous permet d'écrire :

$$\sum_{\nu} \frac{\Psi_{\nu}^2(\vec{b})}{(z_n - E_{\nu})(z_m - E_{\nu})} = \frac{1}{2\pi(k_m^2 - k_n^2)} \ln\left(\frac{k_n}{k_m}\right) \neq 0 \quad (\text{B.23})$$

En combinant cette expression et l'éq (B.17), on trouve pour le produit scalaire dans le cas  $m \neq n$  :

$$\int \Phi_m(\vec{r}) \Phi_n(\vec{r}) d\vec{r} = \frac{N_m N_n}{2\pi(k_m^2 - k_n^2)} \ln\left(\frac{k_n}{k_m}\right). \quad (\text{B.24})$$

Nous obtenons, avec l'hypothèse d'indépendance en énergie du coefficient  $\alpha$ , des fonctions propres non-orthogonales, ce qui justifie bien la remarque faite par Shigehara et Cheon dans leur article. On peut restaurer cette orthogonalité entre  $\Phi_n$  et  $\Phi_m$  et ainsi relier les approches respectives de Weaver-Sorennette et Shigehara-Cheon, en autorisant à  $\alpha$  une dépendance en  $k$ . En effet, il suffit d'écrire :

$$\alpha(k_n) - \alpha(k_m) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{k_n}{k_m}\right) = -\frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{z_n}{z_m}\right) \quad (\text{B.25})$$

Dans ce contexte, on ne peut plus écrire la relation (B.22) mais plutôt,

$$t^{-1} - f(\vec{b}; z_n) = t^{-1} - f(\vec{b}; z_m) \quad (\text{B.26})$$

et donc comme maintenant  $t^{-1} = \alpha(k) + i/4$ , on a :

$$\alpha(z_n) - \alpha(z_m) = f(\vec{b}; z_n) - f(\vec{b}; z_m) \quad (\text{B.27})$$

Ce qui donne grâce aux expressions (B.20) et (B.25) :

$$(z_m - z_n) \sum_{\nu} \frac{\Psi_{\nu}^2(\vec{b})}{(z_n - E_{\nu})(z_m - E_{\nu})} - \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{z_n}{z_m}\right) = -\frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{z_n}{z_m}\right) \quad (\text{B.28})$$

$$\sum_{\nu} \frac{\Psi_{\nu}^2(\vec{b})}{(z_n - E_{\nu})(z_m - E_{\nu})} = 0 \quad (\text{B.29})$$

Ce qui permet d'obtenir d'après (B.18), un produit scalaire nul pour  $m \neq n$  et donc des fonctions propres  $\Phi_n$  orthogonales dans le cas de la cavité rectangulaire perturbée.

$$\int \Phi_m(\vec{r}) \Phi_n(\vec{r}) d\vec{r} = 0 \quad (\text{B.30})$$

Cette dépendance en  $k$  de  $\alpha$ , peut être écrite de façon équivalente à (B.25) comme

$$\alpha(k) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{k}{k_0}\right) + \text{const} \quad (\text{B.31})$$

Ceci permet de récrire le paramètre  $t$ , en posant  $k_0 = 2/a$  et  $\text{const} = -\gamma/(2\pi)$ , comme :

$$t = \frac{2\pi}{-\ln\left(\frac{ka}{2}\right) - \gamma + i\frac{\pi}{2}} \quad (\text{B.32})$$

Avec  $\gamma$  et  $a$  respectivement la constante de Euler et le rayon du diffuseur. Cette expression correspond au coefficient de diffraction  $\mathcal{D}$  de l'équation (1.11) dans la limite  $ka \ll 1$  et permet de récrire l'équation permettant de trouver toutes les résonances propres de la cavité perturbée comme suit :

$$-\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{ka}{2}\right) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{b}} \left\{ G_0(\vec{r}, \vec{b}; z) - \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{k\|\vec{r} - \vec{s}\|}{2}\right) \right\} \quad (\text{B.33})$$

# Liste des figures et des tableaux



# Table des figures

1.1	<i>Comparaison des signaux de transmission obtenus respectivement en cavité rectangulaire vide (gauche) et habillée (droite). . . . .</i>	22
1.2	<i>Exemple de spectre de longueur obtenu numériquement à partir de 11000 modes propres pour la cavité rectangulaire en présence d'un diffuseur. . . . .</i>	26
1.3	<i>Représentation de la fonction <math>g(k)</math>. Les astérisques et les intersections entre <math>g(k)</math> (en noir) et <math>\alpha(k) = C^{ste}</math> (en rouge) représentent respectivement les <math>k_{nm}</math> et le <math>k</math> . . . . .</i>	32
1.4	<i>Fonction escalier construite à partir des 11000 modes obtenus numériquement et la loi de Weyl décrivant le comportement moyen du nombre cumulé de modes. . . . .</i>	34
1.5	<i>Exemple de spectre de longueur obtenu numériquement à partir de 11000 modes propres pour la cavité rectangulaire en présence d'un diffuseur. Les lignes en pointillés sont centrées sur les longueurs d'orbites périodiques de la cavité vide. . . . .</i>	35
1.6	<i>Spectres de longueur pour différentes gammes de fréquence. En pointillés de 2 à 12GHz, en trait plein de 2 à 15GHz, en tirets de 2 à 17GHz. . . . .</i>	36
1.7	<i>Zoom (<math>\times 10^4</math>) du spectre de longueur montré en Figure 1.5 sur les longueurs allant de 0 à 1.6 m : POs (dashed sticks), DOs (dotted sticks) . . . . .</i>	37

1.8	Trois différents types d'orbites diffractives à 1 rebond sur le diffuseur : (a) direct self-retracing DOs (1st kind), (b) self-retracing DOs (2nd kind), (c) 3-bounce DOs (3rd kind). . . . .	38
1.9	Spectres de longueur théoriques de la cavité vide en pointillés et avec diffuseur en trait plein avec respectivement $a = 0.11$ m $c = 0.26$ m $d = 0.28$ m $b = 0.67$ m et $a = 0.07$ m $c = 0.26$ m $d = 0.27$ m $b = 0.67$ m voir figure 1.8(a). . . . .	39
1.10	$P(s)$ numérique. . . . .	40
1.11	Dépendance en $k$ des amplitudes des pics associés aux OPs et aux ODs. Spectres de longueurs obtenus avec des gaussiennes normalisées, de variance (2 GHz) et centrées en 10 GHz (trait plein), 15 GHz (pointillés) and 20 GHz (tirets). . . . .	42
1.12	Exemple de cavité de hauteur $h$ . . . . .	44
1.13	Dispositif expérimental composé d'une cavité micro-ondes et d'un analyseur de réseau vectoriel piloté par ordinateur . . . . .	46
1.14	Signal de transmission obtenu en cavité rectangulaire entre 2GHz et 5GHz. . . . .	48
1.15	Comparaison de signaux de transmission: $S_{12}$ vs $S_{21}$ . . . . .	49
1.16	Interface graphique permettant le pilotage de l'analyseur de réseau. . . . .	51
1.17	En rouge les ajustements réalisés à partir de 1.56 pour chaque résonance. . . . .	53
1.18	Capture d'écran du programme interactif de traitement des mesures Together. . . . .	54
1.19	Fonction escalier $N(k)$ et un zoom exhibant les écarts en $N(k)$ son ajustement. . . . .	56
1.20	Comparaison du spectre de longueur théorique et des orbites calculées directement (traits bleus). . . . .	57
1.21	Histogramme expérimental de $P(s)$ dans la cavité perturbée; Loi Semi-Poisson : $P(s) = 4se^{-2s}$ (trait continu). . . . .	58

1.22	<i>Spectre de longueur correspondant à la position 1 du diffuseur et localisation des OPs (traits bleus) . . . . .</i>	59
1.23	<i>Quatre orbites particulières liées à la présence du diffuseur. . . . .</i>	59
1.24	<i>Spectre de longueur correspondant à la somme des 43 spectres et localisation des OPs en pointillés . . . . .</i>	60
1.25	<i>Evolution des orbites (c) (vert) et (d) (rouge) pour les positions 3, 12, 24 et 33 du diffuseur. . . . .</i>	61
1.26	<i>Spectres de longueurs correspondant à deux positions différentes du diffuseur en cavité chaotique . . . . .</i>	62
1.27	<i>Représentations de l'intensité du champ électrique correspondant aux modes obtenus pour les résonances centrées en <math>f &lt; f_{62}</math> et <math>f &gt; f_{62}</math> avec le diffuseur placé en <math>x = 46.5</math> cm et <math>y = 20</math> cm . . . . .</i>	64
2.1	<i>Nouveau dispositif expérimental conçu pour observer des modes localisés en milieux 2D. . . . .</i>	74
2.2	<i>Spectres obtenus respectivement avec (rouge) et sans (bleu) le cadre en acier. . . . .</i>	76
2.3	<i>Spectres obtenus respectivement dans la cavité en présence et en absence d'absorbants. . . . .</i>	77
2.4	<i>Cavité rectangulaire considérée comme ouverte grâce aux absorbants micro-ondes et sa représentation schématique illustrant la ré-insertion d'ondes dans la cavité après un aller-retour dans les absorbants, les réflexions sur les interfaces absorbant-air et absorbant-absorbant. . . . .</i>	79
2.5	<i>Spectres obtenus respectivement dans la cavité vide avec les deux couches d'absorbants et en cavité fermée. . . . .</i>	81
2.6	<i>Courbes de section efficace d'un diffuseur diélectrique. On observe les 3 premières résonances de Mie autour desquelles le diffuseur est très efficace. . . . .</i>	85
2.7	<i>Cavité circulaire avec un diffuseur diélectrique placé en son centre.</i>	86

2.8	<i>Signal de transmission obtenu dans la cavité anneau de diamètre 3.8 cm. Le mode fondamental est centré à 2.44 GHz. . . . .</i>	87
2.9	<i>Solution graphique de l'équation (2.10). . . . .</i>	89
2.10	<i>Le modèle de Rusek et Orłowski montre l'allure de la courbe d'efficacité obtenue avec deux diffuseurs. En pointillés, la courbe illustre le cas où les deux diffuseurs sont éloignés tandis que la courbe pleine celui où les deux diffuseurs sont proches. . . . .</i>	90
2.11	<i>Superposition des deux signaux de transmission obtenus respectivement avec un écart de 1cm (rouge) et 8cm (bleu) entre les diffuseurs . . . . .</i>	91
2.12	<i>Interface graphique utilisée pour le déplacement des platines soit par incréments soit en rentrant directement des coordonnées spatiales.</i>	94
2.13	<i>Interface graphique utilisée pour créer notre réseau de diélectrique: périodique, périodique perturbé ou aléatoire. . . . .</i>	95
2.14	<i>Interface graphique utilisée pour visualiser et ensuite de construire notre réseau dans la cavité. . . . .</i>	96
2.15	<i>Cette figure représente le bras placé sur les platines de translation nous permettant ainsi de placer chacun des 196 diffuseurs. . . . .</i>	97
2.16	<i>Dispositif contenant les 4 aimants et permettant le déplacement de la bille. . . . .</i>	100
2.17	<i>Discrétisation de la zone à cartographier grâce à l'interface graphique.</i>	101
2.18	<i>Cartographies analytique et expérimentale du champ électrique du mode <math>n=6</math> et <math>m=2</math>. . . . .</i>	102
2.19	<i>Résultats obtenus sur les lignes nodale et ventrale. . . . .</i>	103
2.20	<i>Évolution de la trajectoire lors de sa création. En noir les points de mesure; en rouge les points éliminés à cause des diffuseurs . . . . .</i>	104
2.21	<i>Visualisation du résultat expérimental directement à partir du logiciel. . . . .</i>	106
2.22	<i>Interface graphique utilisée pour configurer l'analyseur de réseau.</i>	107

2.23	Signaux de transmission obtenus respectivement, de gauche à droite et de haut en bas, pour un milieu périodique, des milieux périodiques perturbés à 10%, 20%, 30%, 40% et aléatoire. . . . .	109
2.24	Milieu désordonné 2D constitué de 196 diélectriques avec une distance minimale entre deux diffuseurs égale à 11 mm. Les points noirs représentent les antennes de mesure. . . . .	110
2.25	Superposition du signal de transmission, en échelle logarithmique et linéaire, et de la courbe de section efficace d'un unique diffuseur diélectrique. . . . .	111
2.26	Signal de transmission propre au milieu de la figure 2.24 avec en insert un zoom sur la résonance centrée en 5.45 GHz correspondant au premier mode localisé. . . . .	112
2.27	Représentation 2D et 3D des trois premiers modes localisés obtenu expérimentalement dans un carré de 25cm de côté et pour des résonances centrées respectivement (de gauche à droite) en 5.45 GHz, 5.66 GHz et 7.80 GHz. . . . .	113
2.28	Représentation 2D des trois modes obtenus respectivement dans un milieu carré de 25 cm de côté (haut) et de côté 20 cm (bas). . . . .	114
2.29	Représentation 2D des trois modes obtenus respectivement à partir des expériences (haut) et à partir des simulations numériques (bas). . . . .	115
2.30	Fonction d'auto-corrélation de l'amplitude du champ électrique pour le premier mode localisé obtenu à 5.45GHz. . . . .	116
2.31	Comparaison des courbes de section efficace d'un diffuseur unique diélectrique et de longueurs de localisation. . . . .	117
2.32	$\Gamma \approx \exp \left[ \frac{-2R_{min}}{\xi_{loc}} \right]$ en échelle semi-logarithmique. . . . .	119
2.33	Modes obtenus respectivement avec les couples d'antennes (A,B) et (B,D) . . . . .	120
2.34	Nouvelle configuration de désordre avec $d=11$ mm et $\sigma = 8.8\%$ . . . . .	122
2.35	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 5.69 GHz. Le couple d'antennes (B,D) a été utilisé. . . . .	123

2.36	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 5.846 GHz. Le couple d'antennes (B,D) a été utilisé. . .	124
2.37	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 5.891 GHz. Le couple d'antennes (B,D) a été utilisé. . .	125
2.38	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 6.295 GHz. Le couple d'antennes (C,D) a été utilisé. . .	125
2.39	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 7.55 GHz. Le couple d'antennes (B,D) a été utilisé. . . .	126
2.40	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 7.70 GHz. Le couple d'antennes (B,D) a été utilisé. . . .	127
2.41	Nouvelle configuration de désordre avec $d = 13$ mm et $\sigma = 5.5\%$ . .	128
2.42	Représentation 2D obtenue expérimentalement (gauche) et numérique (droite) et une représentation 3D (centre) du mode localisé centré en 4.179 GHz. Le couple d'antennes (B,D) a été utilisé. . .	129
2.43	$\Gamma \approx \exp \left[ \frac{-2R_{min}}{\xi_{loc}} \right]$ en échelle semi-logarithmique obtenue pour le mode localisé de la figure 2.42. . . . .	130
2.44	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.509 GHz. Le couple d'antennes (B,D) a été utilisé. . .	131
2.45	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 6.584 GHz. Le couple d'antennes (B,D) a été utilisé. . .	131
2.46	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.356 GHz. Le couple d'antennes (B,C) a été utilisé. . .	132
2.47	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.641 GHz. Le couple d'antennes (B,C) a été utilisé. . .	133
2.48	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 5.383 GHz. Le couple d'antennes (B,C) a été utilisé. . .	134
2.49	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 6.218 GHz. Le couple d'antennes (B,C) a été utilisé. . .	135
2.50	Courbe de section efficace pour des diffuseurs de rayon 3 mm et 4 mm.	136

2.51	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.966 GHz. Le couple d'antennes (B,D) a été utilisés. . .	138
2.52	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.166 GHz. Le couple d'antennes (B,D) a ont été utilisés. Mode identique au mode de la figure 2.42 obtenu avec les diélectriques de rayon 3 mm. . . . .	139
2.53	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.515 GHz. Le couple d'antennes (B,D) a été utilisés. Mode identique au mode de la figure 2.47 obtenu avec les diélectriques de rayon 3 mm. . . . .	139
2.54	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.418 GHz. Le couple d'antennes (B,D) ont été utilisés. Mode identique au mode de la figure 2.44 obtenu avec les diélectriques de rayon 3 mm. . . . .	140
2.55	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.911 GHz. Le couple d'antennes (B,D) et a été utilisés.	140
2.56	Désordre composé de 50% de diffuseurs de rayon 3 mm (bleu) et 50% de diffuseurs de rayon 4 mm (orange). . . . .	141
2.57	Comparaison des trois signaux de transmission, mesurés avec le couple d'antennes (B,D), obtenus respectivement avec des diffuseurs à 3 mm, des diffuseurs à 4 mm et un mélange à part égale des diamètres. . . . .	142
2.58	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.495 GHz. Le couple d'antennes (B,D) ont été utilisés.	143
2.59	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 5.180 GHz. Le couple d'antennes (B,D) et a été utilisés.	143
2.60	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 6.430 GHz. Le couple d'antennes (B,D) ont été utilisés.	144
2.61	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 5.542 GHz. Le couple d'antennes (C,D) et a été utilisés.	144

2.62	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 6.343 GHz. Le couple d'antennes (C,D) ont été utilisés. .	145
2.63	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 7.147 GHz. Le couple d'antennes (C,D) et a été utilisés.	145
2.64	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 4.313 GHz. Le couple d'antennes (C,D) et a été utilisés.	146
2.65	Représentation 2D et différents points de vue 3D du mode localisé centré en 6.507 GHz. Le couple d'antennes (A,C) et a été utilisés.	146
A.1	Maille rectangulaire permettant d'obtenir les OPs. . . . .	153
A.2	Orbite périodique (1,1) de longueur 1.776m. Toutes les autres orbites sont des combinaisons linéaires de celle-ci. . . . .	154
A.3	Exemples d'une orbite périodique ( $n = 3, m = 2$ ) de longueur 4.905m obtenue en représentant 3 fois selon y et 2 fois selon x l'orbite (1,1) et d'une orbite composite (1,1)*2 . . . . .	154
A.4	2 exemples de familles d'orbites. On représente l'orbite avec la symétrie du rectangle et 2 déformations possibles . . . . .	155

# Liste des tableaux

1.1	<i>Longueurs en mètre des orbites diffractives représentées sur la figure 1.8; 1er, 2nd et 3ème type d'ODs se réfèrent aux (a), (b) et (c) de la figure 1.8. . . . .</i>	37
2.1	<i>Caractéristiques techniques des absorbants micro-ondes utilisés. .</i>	80
2.2	<i>Longueurs de localisation pour les trois premiers modes localisés .</i>	116
2.3	<i>Différentes largeurs caractérisant chacun des modes de la figure 2.27</i>	118
2.4	<i>Largeur de la résonance associé au premier mode localisé de la figure 2.27 pour différents tailles du système . . . . .</i>	119
2.5	<i>Caractéristiques du mode localisé (2.35) centré en <math>f = 5.69</math> GHz .</i>	123
2.6	<i>Caractéristiques du mode localisé (2.36) centré en <math>f = 5.846</math> GHz .</i>	124
2.7	<i>Caractéristiques du mode localisé (2.37) centré en <math>f = 5.891</math> GHz .</i>	125
2.8	<i>Caractéristiques du mode localisé (2.38) centré en <math>f = 6.295</math> GHz .</i>	125
2.9	<i>Caractéristiques du mode localisé (2.39) centré en <math>f = 7.55</math>GHz . .</i>	126
2.10	<i>Caractéristiques du mode localisé (2.40) centré en <math>f = 7.70</math> GHz .</i>	127
2.11	<i>Caractéristiques du mode localisé (2.42) centré en <math>f = 4.179</math> GHz .</i>	129
2.12	<i>Largeur de la résonance associé au premier mode localisé de la figure 2.27 pour différents tailles du système . . . . .</i>	130
2.13	<i>Caractéristiques du mode localisé (2.44) centré en <math>f = 4.509</math> GHz .</i>	131
2.14	<i>Caractéristiques du mode localisé (2.45) centré en <math>f = 6.584</math> GHz .</i>	131
2.15	<i>Caractéristiques du mode localisé (2.46) centré en <math>f = 4.356</math> GHz .</i>	132
2.16	<i>Caractéristiques du mode localisé (2.47) centré en <math>f = 4.641</math> GHz .</i>	133

2.17	Caractéristiques du mode localisé (2.48) centré en $f = 5.383$ GHz .	134
2.18	Caractéristiques du mode localisé centré (2.49) en $f = 6.218$ GHz .	135
2.19	Caractéristiques du mode localisé (2.51) centré en $f = 4.966$ GHz .	138
2.20	Caractéristiques du mode localisé (2.52) centré en $f = 4.166$ GHz .	139
2.21	Caractéristiques du mode localisé (2.53) centré en $f = 4.515$ GHz .	139
2.22	Caractéristiques du mode localisé (2.54) centré en $f = 4.418$ GHz .	140
2.23	Caractéristiques du mode localisé (2.55) centré en $f = 4.911$ GHz .	140
2.24	Caractéristiques du mode localisé (2.58) centré en $f = 4.495$ GHz .	143
2.25	Caractéristiques du mode localisé (2.59) centré en $f = 5.180$ GHz .	143
2.26	Caractéristiques du mode localisé (2.60) centré en $f = 6.430$ GHz .	144
2.27	Caractéristiques du mode localisé (2.61) centré en $f = 5.542$ GHz .	144
2.28	Caractéristiques du mode localisé (2.62) centré en $f = 6.343$ GHz .	145
2.29	Caractéristiques du mode localisé (2.63) centré en $f = 7.147$ GHz .	145
2.30	Caractéristiques du mode localisé (2.64) centré en $f = 4.313$ GHz .	146
2.31	Caractéristiques du mode localisé (2.65) centré en $f = 6.507$ GHz .	146

# Bibliographie



# Bibliographie

- [Anderson, 1958] Anderson, P. W. (1958). Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109(5) :1492–1505.
- [Balian and Bloch, 1971] Balian, R. and Bloch, C. (1971). Asymptotic evaluation of green's function for large quantum numbers. *Ann. Phys.*, 63 :582.
- [Barthélemy, 2003] Barthélemy, J. (2003). *Chaos ondulatoire en présence de pertes : modélisation et expérience de billards micro-ondes*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis.
- [Barthélemy et al., 2005] Barthélemy, J., Legrand, O., and Mortessagne, F. (2005). Complete S matrix in a microwave cavity at room temperature. *Phys. Rev. E*, 71 :016205.
- [Berenger, 1995] Berenger, J. (1995). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114 :185–200.
- [Berry, 1977] Berry, M. (1977). Regular and irregular semiclassical wavefunctions. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 10 :2083–2091.
- [Biswas, 1993] Biswas, D. (1993). Length spectrum of chaotic billiards. *Phys. Rev. Lett.*, 71(17) :2714–2717.
- [Bliokh et al., 2006] Bliokh, K., Bliokh, P., Freilikher, V., Genack, A., Hu, B., and Sebbah, P. (2006). Localized modes in open one-dimensional dissipative random systems. *Phys. Rev. Lett*, 97.
- [Bogomolny et al., 2001] Bogomolny, E., Gerland, U., and Schmit, C. (2001). Singular statistics. *Phys. Rev. E*, 63(3) :036206.

- [Bogomolny et al., 2002] Bogomolny, E., Giraud, O., and Schmit, C. (2002). Nearest-neighbor distribution for singular billiards. *Phys. Rev. E*, 65(5) :056214.
- [Bogomolny et al., 2000] Bogomolny, E., Pavloff, N., and Schmit, C. (2000). Diffractive corrections in the trace formula for polygonal billiards. *Phys. Rev. E*, 61(4) :3689–3711.
- [Cao et al., 2000] Cao, H., Xu, J. Y., Seeling, E. W., and H., C. R. P. (2000). Microlaser made of disordered media. *Appl. Phys. Lett.*, 76.
- [Chabanov et al., 2000] Chabanov, A., Stoytchev, M., and Genack, A. (2000). Statistical signatures of photon localization. *Nature (London)*, 404 :850–853.
- [Cheon and Cohen, 1989] Cheon, T. and Cohen, T. (1989). Quantum level statistics of pseudointegrable billiards. *Phys. Rev. Lett.*, 62(24) :2769–2772.
- [Dalichaouch et al., 1991] Dalichaouch, R., Armstrong, J., Schultz, S., Platzman, P., and McCall, S. (1991). Microwave localization by two-dimensional random scattering. *Nature (London)*, 354 :53–55.
- [Derode et al., 2001] Derode, A., Tourin, A., and Fink, M. (2001). Random multiple scattering of ultrasound I. coherent and ballistic waves. *Phys. Rev. E*, 64(3) :036605.
- [Exner and Seba, 1996] Exner, P. and Seba, P. (1996). Point interactions in two and three dimensions as models of small scatterers. *Phys. Lett. A*, 222(1) :1–4.
- [Fyodorov and Sommers, 1997] Fyodorov, Y. and Sommers, H.-J. (1997). Statistic of resonance poles, phase shifts and time delays in quantum chaotic scattering : Random matrix approach for systems with broken time-reversal invariance. *J. Math. Phys.*, 38(21) :1918.
- [Gokirmak et al., 1998] Gokirmak, A., Wu, D.-H., Bridgewater, J. S. A., and Analge, S. (1998). Scanned perturbation technique for imaging electromagnetic standing wave patterns of microwaves cavities. *Rev. Sci. Instrum.*, 69 :3410.
- [Gupta and Ye, 2003] Gupta, B. and Ye, Z. (2003). Localization of classical waves in two-dimensional random media : A comparison between the analytic theory and exact numerical simulation. *Phys. Rev. E*, 67 :036606.

- [Gutzwiller, 1971] Gutzwiller, M. C. (1971). Periodic orbits and classical quantization conditions. *J. Math. Phys.*, 12 :343–358.
- [Haake et al., 1991] Haake, F., Lenz, G., Seba, P., Stein, J., Stöckmann, H.-J., and Życzkowski, K. (1991). Manifestation of wave chaos in pseudointegrable microwave resonators. *Phys. Rev. A*, 44(10) :R6161–R6164.
- [Hersch and Heller, 1998] Hersch, J. S. and Heller, E. J. (1998). Observation of proximity resonances in a parallel-plate waveguide. *Phys. Rev. Lett.*, 81(15) :3059–3062.
- [Jackson, 2001] Jackson, J. (2001). *Electrodynamique classique*. Dunod.
- [Jain, 1994] Jain, S. R. (1994). Proliferation law of periodic orbits of an integrable billiard as obtained from the eigenvalue spectrum. *Phys. Rev. E*, 50(3) :2355–2356.
- [Kudrolli et al., 1995] Kudrolli, A., Kidambi, V., and Sridhar, S. (1995). Experimental studies of chaos and localization in quantum wave functions. *Phys. Rev. Lett.*, 75(5) :822–825.
- [Kuhl et al., 2000] Kuhl, U., Persson, E., Barth, M., and Stöckmann, H.-J. (2000). Mixing of wavefunctions in rectangular microwave billiards. *Eur. Phys. J. B*, 17 :253–259.
- [Legrand et al., 1997] Legrand, O., Mortessagne, F., and Weaver, R. (1997). Semiclassical analysis of spectral correlations in regular billiards with point scatterers. *Phys. Rev. E*, 55(6) :7741–7744.
- [Marquardt, 2005] Marquardt, D. (2005). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, II(2) :431–441.
- [Pavloff and Schmit, 1995] Pavloff, N. and Schmit, C. (1995). Diffractive orbits in quantum billiards. *Phys. Rev. Lett.*, 75(1) :61–64.
- [Pinheiro et al., 2004] Pinheiro, F., Rusek, M., Orłowsky, A., and van Tiggelen, B. (2004). Probing anderson localization of light via decay rate statistics. *Phys. Rev. E*, 69 :026605.

- [Pradhan and Sridhar, 2000] Pradhan, P. and Sridhar, S. (2000). Correlations due to localization in quantum eigenfunctions of disordered microwave cavities. *Phys. Rev. Lett.*, 85(11) :2360–2363.
- [Press et al., 1997] Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., and Flannery, B. (1997). *Numerical Recipes in C : the Art of Scientific Computing*,. chapter 10.4, 408-412, Cambridge University Press, second edition.
- [Rahav and Fishman, 2002] Rahav, S. and Fishman, S. (2002). Localized perturbations of integrable quantum billiards. *Phys. Rev. E*, 65(6) :067204.
- [Rodier, 1982] Rodier, F. (1982). *Distributions et transformation de Fourier*.
- [Rusek and Orłowski, 1999] Rusek, M. and Orłowski, A. (1999). Anderson localization of electromagnetic waves in confined dielectric media. *Phys. Rev. E*, 59(3) :3655–3660.
- [Seba, 1990] Seba, P. (1990). Wave chaos in singular quantum billiard. *Phys. Rev. Lett.*, 64(16) :1855–1858.
- [Sebbah et al., 2002] Sebbah, P., Hu, B., Genack, A. Z., Pnini, R., and Shapiro, B. (2002). Spatial-field correlation : The building block of mesoscopic fluctuations. *Phys. Rev. Lett.*, 88(12) :123901.
- [Sebbah et al., 2006] Sebbah, P., Hu, B., Klosner, J., and Genack, A. (2006). Extended quasimodes within nominally localized random waveguides. *Phys. Rev. Lett.*, 96.
- [Sebbah et al., 2000] Sebbah, P., Pnini, R., and Genack, A. Z. (2000). Field and intensity correlation in random media. *Phys. Rev. E*, 62(5) :7348–7352.
- [Sebbah and Vanneste, 2002] Sebbah, P. and Vanneste, C. (2002). Random laser in the localized regime. *Phys. Rev. B*, 66(14) :144202.
- [Sheffold et al., 1999] Sheffold, F., Lenke, R., Tweer, R., and Maret, G. (1999). Localization or classical diffusion of light? *Nature (London)*, 398 :206.
- [Shigehara, 1994] Shigehara, T. (1994). Conditions for the appearance of wave chaos in quantum singular systems with a pointlike scatterer. *Phys. Rev. E*, 50(6) :4357–4370.

- [Shigehara and Cheon, 1996] Shigehara, T. and Cheon, T. (1996). Wave chaos in quantum billiards with a small but finite-size scatterer. *Phys. Rev. E*, 54(2) :1321–1331.
- [Shigehara et al., 1993] Shigehara, T., Yoshinaga, N., Cheon, T., and Mizusaki, T. (1993). Level-spacing distribution of a singular billiard. *Phys. Rev. E*, 47(6) :R3822–R3825.
- [Sigalas et al., 1996] Sigalas, M. M., Soukoulis, C. M., Chan, C.-T., and Turner, D. (1996). Localization of electromagnetic waves in two-dimensional disordered systems. *Phys. Rev. B*, 53(13) :8340–8348.
- [Stöckmann, 1999] Stöckmann, H. J. (1999). *Quantum Chaos : An introduction*. Cambridge University Press.
- [Stöckmann and Stein, 1990] Stöckmann, H.-J. and Stein, J. (1990). Quantum chaos in billiards studied by microwave absorption. *Phys. Rev. Lett.*, 64(19) :2215–2218.
- [Taflove, 1995] Taflove, A. (1995). *Computational electrodynamics : The Finite-Difference Time-Domain Method*. artech House, Norwood, MA.
- [Van de Hulst, 1981] Van de Hulst, H. (1981). *Light Scattering by small particles*. New York : Dover Publications.
- [Vanneste and Sebbah, 2005] Vanneste, C. and Sebbah, P. (2005). Localized modes in random arrays of cylinders. *Phys. Rev. E*, 71 :144202.
- [Weaver and Sornette, 1995] Weaver, R. and Sornette, D. (1995). Range of spectral correlations in pseudointegrable systems : Gaussian-orthogonal-ensemble statistics in a rectangular membrane with a point scatterer. *Phys. Rev. E*, 52(4) :3341–3350.
- [Weber and Fajans, 1998] Weber, C. and Fajans, J. (1998). Saturation in  $\check{\check{S}}$ non-magnetic  $\check{\check{S}}$  stainless steel. *Review of scientific instruments*, 69(10).
- [Wiersma et al., 1997] Wiersma, D., Bartolini, P., Lagendijk, A., and Righini, R. (1997). Localization of light in a disordered medium. *Nature (London)*, 390 :671–673.

- [Ye et al., 1992] Ye, L., Cody, G., Zhou, M., Sheng, P., and Norris, A. N. (1992). Observation of bending wave localization and quasi mobility edge in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 69(21) :3080–3083.