



HAL
open science

Étude mathématique d'écoulements de fluides viscoélastiques dans des domaines singuliers

Zaynab Salloum

► **To cite this version:**

Zaynab Salloum. Étude mathématique d'écoulements de fluides viscoélastiques dans des domaines singuliers. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2008. Français. NNT : 2008PEST0017 . tel-00461675

HAL Id: tel-00461675

<https://theses.hal.science/tel-00461675>

Submitted on 5 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Est
Co-direction avec l'Université Libanaise

Spécialité : Mathématiques

Présentée par

Zaynab SALLOUM

sous la direction de

Mme Colette GUILLOPÉ et M. Raafat TALHOUK

Sujet de la thèse :

**Étude mathématique d'écoulements de fluides
viscoélastiques dans des domaines singuliers**

Soutenue le 25 juin 2008 après avis des rapporteurs

M. Didier BRESCH et M. Marius PAÏCU

devant le jury composé de

M. Jerry BONA
M. Raphaël DANCHIN Président
Mme Colette GUILLOPÉ
M. Ali MNEIMNÉ
M. Marius PAÏCU
M. Raafat TALHOUK

Au Liban, ma patrie...

À

ma mère et mon père,

Wissam,

Hanan, Zahraa, Hiba, Mohamad Ali et Soha,

et aussi à Colette.

Non, merci !

Et que faudrait-il faire ?
Chercher un protecteur puissant, prendre un patron,
Et comme un lierre obscur qui circonvient un tronc
Et s'en fait un tuteur en lui léchant l'écorce,
Grimper par ruse au lieu de s'élever par force ?
Non, merci. Dédier, comme tous ils le font,...

Non, merci ! Calculer, avoir peur, être blême,
Préférer faire une visite qu'un poème,
Rédiger des placets, se faire présenter ?

Pour un oui, pour un non, se battre, -ou faire un vers !
Travailler sans souci de gloire ou de fortune,
A tel voyage, auquel on pense, dans la lune !
N'écrire jamais rien qui de soi ne sortît,
Et modeste d'ailleurs, se dire : mon petit,
Sois satisfait des fleurs, des fruits, même des feuilles,
Si c'est dans ton jardin à toi que tu les cueilles !
Vis-à-vis de soi-même en garder le mérite,
Bref, dédaignant d'être le lierre parasite,
Lors même qu'on n'est pas le chêne ou le tilleul,
Ne pas monter bien haut, peut-être, mais tout seul!¹

EDMOND ROSTAND

¹La fameuse "Non merci" tirée de Cyrano de Bergerac, acte II, scène 8

Oui, merci !

BIEN que j'aime cette scène de Cyrano de Bergerac, je ne peux pas "monter" toute seule. Je resterai reconnaissante toute ma vie à plusieurs personnes qui m'ont aidée à remettre le pied dans les moments difficiles. Je ne peux qu'être d'accord avec ARISTOTE et dire "*Il y a parmi nous des magiciens et magiciennes, mais personne ne le sait...*". À ces magiciens et magiciennes, je veux dédier mes remerciements.

Trouver les bons mots pour dire "Merci" est une chose difficile, d'autant plus dans une langue qui n'est pas sa langue maternelle. Je tiens tout d'abord à manifester ma plus profonde et sincère reconnaissance envers ma directrice de thèse Colette Guillopé et mon directeur de thèse Raafat Talhouk pour m'avoir offert la possibilité de réaliser ce travail. Colette Guillopé a toujours fait preuve d'une totale confiance, d'un soutien et d'une gentillesse permanente à mon égard. Malgré son emploi du temps chargé, elle a toujours su trouver du temps à m'accorder aussi bien lors de l'encadrement scientifique que dans ma vie quotidienne par ses conseils et suggestions, ce qui a fait nos rapports simples et chaleureux. Les nombreux échanges scientifiques avec Raafat Talhouk m'ont permis de découvrir et apprécier un champ d'investigation nouveau pour moi. Sa rigueur scientifique et ses conseils avisés m'ont aidée et motivée dans la réalisation de cette thèse. Tout deux ont su m'orienter et m'apporter l'optimisme et la confiance en moi nécessaire à la réalisation d'un tel projet et plus particulièrement dans les moments difficiles, où le doute m'effleurait. Pour tout cela, merci.

Je souhaite remercier très sincèrement les rapporteurs Didier Bresch et Marius Païcu pour avoir accepté de consacrer un peu de leur temps à la lecture de cette thèse. Merci également à Jerry Bona, Raphaël Danchin et Ali Mneimné pour participer au jury.

Pendant les années de thèse, j'ai beaucoup apprécié l'ambiance amicale qui règne au LAMA à Paris 12, je tiens à remercier plus particulièrement son directeur Frank Pacard et ses membres Geneviève Allain, Jean-Marie Aubry, Amine Asselah, Julien Brémont, Frédéric Charve, Alain Damlamian, Raphaël Danchin, Benoît Daniel, Nicolas Fournier, Clotilde Fermanian-Kammerer, Yuxin Ge, Rejeb Hadiji, Stéphane Jaffard, Eva Löcherbach, Etienne Sandier, François Vigneron et Marguerite Zani. Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Jacques Printems, Stéphane Seuret, Cyril Odasso et Marie-Odile Perrain qui ont su me transmettre leurs connaissances pédagogiques et pour leur aide amicale dans mes enseignements en tant qu'ATER.

Je remercie également les secrétaires, notamment Mervate Bazzi (Université Libanaise) et Stéphanie Judée (Paris 12) pour leur gentillesse. Je suis aussi reconnaissante envers Laurent Marciniszyn d'avoir répondu à toutes mes demandes informatiques.

Merci aussi aux doctorant-e-s du LAMA de l'université Paris 12 avec qui j'ai pu discuter des joies et des malheurs de la vie de thésard et qui m'ont accueillie, notamment Marianne Clausel, Arnaud Durand, Boris Haspot, Saïda Kaabachi Mejbri, Fathi Masmoudi, Perialberto Sicbaldi et Habib Yazidi. Je n'oublie pas ceux qui sont arrivés un peu plus tard, en particulier Lin Fang, Taomiu Sun, Dan Zhou, ainsi que les post-doc Li Haozhao et Anna Tchirina.

Je remercie également toutes et tous les membres des départements de mathématiques de l'Université Libanaise situés à Beyrouth et à Nabatieh. Ce sont elles et eux qui ont dirigé mes premiers pas en mathématiques. J'en profite pour remercier tout particulièrement le Doyen de Faculté des Sciences Ali Mneimné pour l'accueil qu'il a toujours réservé aux thésards ainsi que pour ses encouragements. Il me vient naturellement un remerciement à toutes et tous les collègues doctorant-e-s de l'Université Libanaise, notamment Lina Abdallah, Waad Al Sayed, Hassan Ibrahim, Ayman Kachmar, Rola Kiwan, Bassam Kojok, Ali Tarhini et Wael Youssef ainsi que à Ibtissam Zaiter et Mouchira Zaiter.

J'ai eu l'occasion d'enseigner à l'Université Paris 12 et à l'Association de Bienfaisance Culturelle, ce qui a été une expérience tout à fait enrichissante. J'ai beaucoup apprécié l'enthousiasme et la motivation de mes étudiantes et de mes étudiants. Pour cela, je souhaite ici les saluer tous, en particulier les promotions de Doha ainsi que tous mes collègues membres de l'Association de Bienfaisance Culturelle pour leur amitié.

"Les anges existent mais des fois ils n'ont pas d'ailes... Nous les appelons alors « amis »". Un grand merci à Sahar Assi Jaber, Maha Chmayssani Rizek, Nargess Choueib Makki, Angela Issa Sbeity et Houssein Traboulssi. Ainsi un grand merci à chaque membre du groupe égyptien en France, pour les bons moments familiaux, notamment à Shimaa Abdel Wahab.... Merci à vous toutes et vous tous pour votre présence.

Je profite également de cette page pour remercier une personne à qui je dois beaucoup : Amal Irani Nasser.

Je n'oublie pas de remercier ma deuxième famille : ma belle-mère Awatef, mon beau-père Ahmad et mes beaux-frères et belles-soeurs ainsi que leurs familles.

Je pense aujourd'hui avec beaucoup de tendresse à mes parents, à la confiance qu'ils m'accordent et qui, malgré la tristesse de voir leur fille partir à l'étranger, m'ont toujours soutenue et encouragée. Je veux les remercier de tout mon coeur, ainsi que mes soeurs Hanan, Zahraa, Hiba et Soha et mon frère Mohamad Ali. Sans votre soutien et votre amour sans faille, tout ceci n'aurait jamais pu aboutir et je vous serai éternellement reconnaissant d'avoir su me donner les moyens d'arriver jusqu'ici. Aucun mot ne saurait décrire ma pensée !

Pour finir, merci à mon grand amour Wissam, pour sa patience et son soutien avant et durant ma thèse, et plus généralement pour tout l'amour que je reçois au quotidien. Sans lui, je n'aurais pas surmonté les périodes de stress. Puisse cette thèse être le début de la réalisation de nos rêves...

La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.
La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi.
Ici, nous avons réuni théorie et pratique : rien ne fonctionne et personne ne sait pourquoi !

ALBERT EINSTEIN

Étude mathématique d'écoulements de fluides viscoélastiques dans des domaines singuliers

Résumé. Cette thèse est consacrée à l'analyse mathématique de trois problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques de type Oldroyd. Tout d'abord, nous étudions des écoulements stationnaires faiblement compressibles dans un domaine borné avec des conditions au bord de type "rentrante-sortante". Nous étudions aussi le problème d'écoulements stationnaires faiblement compressibles dans un coin convexe. En utilisant une méthode de point fixe (premier et deuxième problèmes) et une décomposition de Helmholtz (deuxième problème), nous montrons des résultats d'existence et d'unicité des solutions. Nous étudions également le cas d'un écoulement non stationnaire. Nous montrons un résultat d'existence locale et un résultat d'existence globale, avec des conditions initiales suffisamment petites, pour des fluides compressibles. Nous démontrons aussi la convergence du modèle d'écoulement viscoélastique compressible à faible nombre de Mach vers le modèle incompressible lorsque les données initiales sont "bien préparées".

Mots clefs : fluide viscoélastique, modèle Oldroyd, faiblement compressible, point fixe, domaine singulier, espace de Sobolev et de Hölder avec poids, convergence, nombre de Mach.

La Classification Mathématique par Matières 2000 (AMS) : 76A05, 76A10, 76N10, 35B30.

Mathematical study of viscoelastic fluid flows in singular domains

Abstract. In this PHD thesis, we study three problems for viscoelastic flows of Oldroyd type. First, we study steady flows of slightly compressible in a bounded domain with non-zero velocities on the boundary ; the pressure and the extra-stress tensor are prescribed on the part of the boundary corresponding to entering velocity. This causes a weak singularity in the solution at the junction of incoming and outgoing flows. We also study the problem of steady flows of slightly compressible fluids with zero boundary conditions in a domain with an isolated corner point. Using a method of fixed point (first and second problems) and a Helmholtz decomposition (second problem), we show some results of existence and uniqueness of solutions. In the last part, we study the case of a non-steady flow : we show some results of local and of global existence, with sufficiently small initial data, for compressible flows. The zero-Mach number limit is also established.

Keywords : viscoelastic fluids, Oldroyd model, slightly compressible, fixed-point arguments, singular domains, weighted Sobolev and Hölder spaces, convergence, Mach number.

2000 Mathematics Subject Classification (AMS) : 76A05, 76A10, 76N10, 35B30.

Table des matières

I	Introduction générale	19
1	La mécanique des fluides : de l'histoire aux applications	23
1.1	Introduction	24
1.2	La mécanique des fluides	24
1.2.1	Une partie de l'histoire de la mécanique des fluides	24
1.2.2	La mécanique des fluides : de l'aéronautique à la géophysique	26
1.2.3	Subdivisions de la mécanique des fluides	27
1.3	Les fluides	28
1.3.1	Qu'est-ce qu'un fluide ?	28
1.3.2	Fluides : liquides ou gaz	29
1.3.3	Les fluides et le corps humain	30
1.3.4	Fluides visqueux	30
1.3.5	Fluides parfaits	31
1.3.6	Les fluides newtoniens	31
1.3.7	Les fluides non newtoniens	31
1.3.8	Viscoélasticité linéaire	32
1.3.9	Fluides compressibles ou fluides incompressibles	32
1.4	Les écoulements des fluides	32
1.4.1	Rhéologie	35
1.5	Bibliographie	35
2	Introduction : la problématique, les équations et les résultats	39
2.1	Description d'un fluide en mouvement	39
2.1.1	Conservation de la masse ou équation de continuité	40
2.1.2	Notion de viscosité dans un fluide en mouvement	41
2.1.3	Conservation de l'impulsion ou équation du mouvement	41
2.1.4	Conservation du moment angulaire	42
2.1.5	Conservation de l'énergie du fluide	42
2.2	Equation des fluides isothermes	42
2.2.1	Écoulement stationnaire	43
2.2.2	Les équations de Stokes	43
2.3	Comportement non-newtonien	44
2.4	Modèle d'Oldroyd	44
2.5	Modèle d'Oldroyd-B : cas d'un fluide viscoélastique non stationnaire incompressible	46
2.5.1	Quelques résultats	47

2.6	Modèle d'Oldroyd-B : cas d'un fluide viscoélastique faiblement compressible . .	49
2.6.1	Écoulement d'un fluide faiblement compressible stationnaire dans un domaine borné avec des conditions aux bords de type "rentrantes-sortantes"	49
2.6.2	Écoulements de fluides viscoélastiques viscoélastiques, stationnaires et faiblement compressibles de type Oldroyd dans un domaine borné avec coins	51
2.6.3	Existence globale de solutions régulières à petites données et limite incompressible pour des écoulements de fluides viscoélastiques faiblement compressibles	55

II Analyse mathématique de quelques écoulements de fluides viscoélastiques faiblement compressibles et stationnaires dans un domaine singulier 59

3	Écoulements de fluides viscoélastiques, stationnaires et faiblement compressibles à travers un domaine borné avec des conditions aux bords de type "rentrantes-sortantes"	63
3.1	Introduction	63
3.2	Modélisation	64
3.2.1	Écoulement de fluides viscoélastiques compressibles	64
3.2.2	Équations sans dimension	65
3.2.3	Écoulement de fluides faiblement compressibles	65
3.2.4	Description du domaine	66
3.3	Notations et résultat	67
3.3.1	Notations, espaces et normes	67
3.3.2	Résultat principal	68
3.4	Formulation du problème	69
3.4.1	Changement de variables	69
3.4.2	Linéarisation du problème non linéaire	70
3.5	Résolution des problèmes auxiliaires	71
3.5.1	Résolution du problème concernant la pression p	71
3.5.2	Résolution du problème concernant le tenseur τ	76
3.5.3	Existence et unicité du vecteur vitesse u	79
3.6	Résolution du problème linéaire	81
3.7	Estimations	82
3.7.1	Estimations de f_0 , g_0 et h_0	82
3.7.2	Estimations de F , G et H	84
3.8	Résolution du problème non linéaire	86
3.8.1	Application contractante et point fixe	86
3.8.2	Preuve du théorème 3.3.1	91
4	Écoulements de fluides viscoélastiques viscoélastiques, stationnaires et faiblement compressibles de type Oldroyd dans un domaine borné avec coins.	95
4.1	Introduction	95
4.2	Modélisation et Description du domaine	96
4.2.1	Modèle d'écoulement d'un fluide compressible	96

4.2.2	Description du domaine	97
4.2.3	Équations sans dimension	98
4.2.4	Modèle d'écoulement d'un fluide faiblement compressible	99
4.3	Notations, espaces et normes	100
4.3.1	Les espaces de Hölder et de Sobolev avec poids	101
4.3.2	Résultat principal	103
4.4	Formulation du problème	104
4.4.1	Transformation du problème	104
4.4.2	Linéarisation du problème non linéaire	106
4.5	Résultats préliminaires	108
4.5.1	Espaces, définitions et lemmes préliminaires	108
4.5.2	Résultats modifiés des problèmes classiques	109
4.6	Résolution du problème du transport	114
4.7	Résolution du problème linéaire	119
4.7.1	Preuve du théorème 4.7.1	123
4.8	Résolution du problème non linéaire	125
4.8.1	Preuve du théorème 4.3.4	125

III Sur la limite d'un écoulement de fluides viscoélastiques, compressible et non stationnaire, pour un faible nombre de Mach. 135

5 Existence globale de solutions régulières à petites données et limite incompressible pour des écoulements de fluides viscoélastiques faiblement compressibles 139

5.1	Introduction	139
5.2	Modélisation	140
5.2.1	Écoulement de fluides viscoélastiques compressibles non stationnaires	140
5.2.2	Définitions mathématiques des quantités physiques	141
5.2.3	Conditions bien préparées	142
5.2.4	Équations sans dimension	143
5.3	Notations et résultats principaux	144
5.3.1	Résultats principaux	145
5.4	Existence et unicité de solutions locales	147
5.4.1	Problème linéaire	148
5.4.2	Problème linéaire concernant la vitesse \mathbf{u}	149
5.4.3	Équations de transport en densité σ et en contraintes τ	151
5.4.4	Preuve du Théorème 5.4.1	152
5.5	Estimations	153
5.6	Estimation de $\operatorname{div} \mathbf{u}$ à l'intérieur de Ω	164
5.7	Estimation de $\operatorname{div} \mathbf{u}$ sur $\partial\Omega$	167
5.7.1	Estimation a priori des dérivées normales de $\operatorname{div} \mathbf{u}$ sur $\partial\Omega$	171
5.8	Existence globale	179
5.8.1	Preuve du théorème d'existence globale 5.3.1	180
5.9	Passage à la limite	181

IV	Perspectives	185
6	Perspectives	189
6.1	Étude mathématique d'écoulements de fluides viscoélastiques viscoélastiques, stationnaires et faiblement compressibles de type Oldroyd dans un polygone convexe ou non convexe	189
6.2	Écoulements de fluides viscoélastiques, stationnaires, faiblement compressibles et non isothermes avec des conditions au bord de type "rentrantes-sortantes" .	190
6.3	Limite incompressible pour des écoulements de fluides viscoélastiques faiblement compressibles avec des conditions bien ou mal préparées	190
V	Bibliographie et Index	193
	Références	196
	Index thématique général	202

Table des figures

1.1	Une goutte d'eau après la pluie : Parfaitement sphérique.	23
1.2	Manuscrit Al-Jazari.	24
1.3	L'horloge, faite par Al Jazari, offerte à Charlemagne en 807 par les ambassadeurs d'Haroun Al Raschid. Source : Museum of Fine Arts, Boston.	25
1.4	Les progrès de l'aviation depuis Ibn Fernas jusqu'à L'Airbus. Otto Lilienthal et son histoire des vols à voile (à gauche) ; Airbus A330 de la MEA au départ de Beyrouth 2004 (à droite). Photos : http://www.lilienthal-museum.de et ©Hisham Attalah.	26
1.5	L'effet de pluie à la surface de l'eau (à gauche). "Une colonne cylindrique est instable et se décompose spontanément en un chapelet de gouttes dont la forme oscillante tend rapidement vers une sphère" [6]. (à droite).	27
1.6	Le Microgravity Research Center (MRC) de l'Université Libre de Bruxelles (ULB), a réalisé plusieurs expériences de physique de fluide avec la capsule russe Foton ©SIC-Progress (à gauche) ; Cyclone (à droite).	28
1.7	Silly-Putty sous forme liquide (à gauche) ; Silly-Putty sous forme solide (à droite). ©Fakr.	29
1.8	Coulée de lave en bord de mer à Kamoamo. Hawaii, 2001. ©Pascal Blondé.	32
1.9	Vague de tsunami (à gauche) ; Cyclone en Australie de l'ouest (à droite).	33
1.10	Visualisation des tourbillons de sillage consécutive au passage d'un avion léger à travers un panache de fumée. ©NASA Langley Research Center (à gauche) ; les torrents (à droite).	34
1.11	Spot Turbulent : On observe sur la figure un « spot turbulent », domaine au sein duquel l'écoulement apparaît désordonné, entouré d'un écoulement laminaire. Les contours de ce spot se déforment au cours du temps, mais la part de l'écoulement qu'il occupe, la fraction turbulente, demeure essentiellement constante. Source : http://www-drecam.cea.fr/ComScience	34
1.12	Anneau hexagonal de fumée. La croissance des vagues autour d'un angle de l'hexagone s'appelle souvent l'instabilité de WIDNALL, elle a produit un modèle remarquablement symétrique de fumée en air (à gauche). La fumée à un nombre de Reynolds environ de 13.000 (à droite). Source : An Album of Fluid Motion [98].	35
3.1	Exemple de domaine Ω	67
4.1	Un exemple d'un angle convexe.	98

Première partie

Introduction générale

La philosophie est écrite dans ce grand livre -je veux dire l'univers- qui est en permanence sous notre regard, mais il ne peut être compris que si l'on apprend d'abord le langage et interprète les symboles avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans le langage des mathématiques, et ses symboles sont triangles, cercles, et autres figures géométriques sans lesquels il est humainement impossible d'y comprendre un seul mot ; sans eux, on erre dans un labyrinthe obscur.

GALILÉE

Chapitre 1

La mécanique des fluides : de l'histoire aux applications



FIG. 1.1 – Une goutte d'eau après la pluie : Parfaitement sphérique.

"Dans un liquide ou un solide, les molécules s'attirent les unes les autres, ce qui leur permet de vaincre l'agitation thermique qui favoriserait l'état gazeux. Sectionner ce liquide en deux pour créer une interface conduit à couper ces liens moléculaires, ce qui se traduit par une énergie de surface. Cette dernière est proportionnelle à l'aire de l'interface et à un coefficient dénommé tension de surface, qui dépend des deux phases considérées. Pour le couple eau-air, ce coefficient vaut 72 MJ/m^2 . D'une manière générale, un système tend à minimiser son énergie. Dans le cas où l'énergie de surface domine les autres termes (énergie potentielle de gravité ou énergie cinétique, par exemple), l'interface adopte une forme sphérique, puisque pour un volume donné cette forme permet de minimiser la surface. Contrairement aux idées reçues, une goutte de pluie est donc pratiquement sphérique" [6].

1.1 Introduction

Ce chapitre est une introduction historique à la mécanique des fluides à partir des travaux de quelques grands noms dans ce domaine en notant que cette liste de noms est subjective et incomplète. Nous essayons de faire apparaître l'importance de cette discipline au cœur des évolutions technologiques dans la plupart de grands secteurs économiques (transports, énergie, chimie, élaboration des matériaux, bio-médical), ainsi que son rôle central dans le domaine des sciences de l'univers (météorologie, chimie atmosphérique, climatologie, océanographie, etc.).

Le lecteur intéressé peut aussi aller directement au chapitre 2 où ils sont présentés les résultats obtenus dans ce travail de thèse.

1.2 La mécanique des fluides

1.2.1 Une partie de l'histoire de la mécanique des fluides

La maîtrise de l'eau, comme de l'air, a intéressé les hommes depuis la préhistoire, pour résoudre les problèmes d'irrigation et utiliser la force du vent pour propulser les bateaux. C'est ARCHIMÈDE, au IIIe siècle av. J.-C., qui a été le véritable initiateur de la "mécanique des fluides" en énonçant le théorème qui porte son nom. Bien qu'ils ne connussent pas les lois de l'hydraulique, les Romains utilisaient ses applications pour la construction de canaux ouverts pour la distribution d'eau.

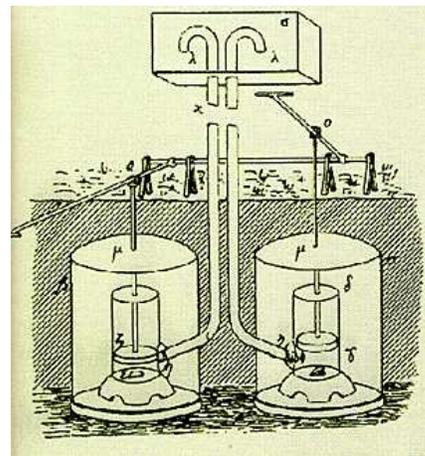
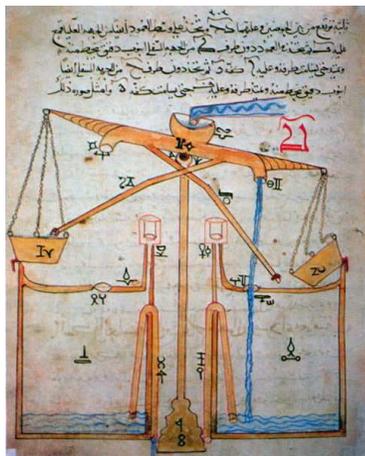


FIG. 1.2 – Manuscrit Al-Jazari.

Dans l'âge d'or des sciences arabes (VIIIe-XVe siècle), ABBAS IBN FIRNAS (805-888), précurseur de l'aéronautique, a conçu une horloge à eau, le Clepsydre appelée Al-Maqata. Ibn Fernas a été le premier qui a essayé de se mouvoir dans l'espace avec un appareil volant. Appliquant les principes d'Archimède, ABU L'RAYHAN AL-BIRUNI (973-1048) a calculé avec précision les densités et poids spécifiques de minéraux et des différents métaux, liquides et pierres précieuses. Il s'intéressa à l'hydrostatique et il parvint à expliquer le principe des sources et des puits artésiens par le principe hydrostatique des vases communicants. Dans le " kitab al'Ilm wa al-

'amal al-nafi' fi sina'at al-hiyal : *Recueil utile sur la théorie et la pratique de l'art des procédés ingénieux*", ABU AL IZ AL-JAZARI (1136-1206) décrit l'horloge hydraulique¹ et traite la régularité du débit et la maîtrise de la pression de l'eau dans les horloges hydrauliques de l'époque à travers l'utilisation notamment d'un astrolabe pour régler la durée et d'un flotteur conique pour maîtriser le débit et la pression de l'écoulement de l'eau dans le cylindre.



FIG. 1.3 – L'horloge, faite par Al Jazari, offerte à Charlemagne en 807 par les ambassadeurs d'Haroun Al Raschid. Source : Museum of Fine Arts, Boston.

Au XVII^e siècle, BLAISE PASCAL (1623-1662), à la suite de travaux sur le développement de méthodes de calcul, a donné un nouvel essor à l'hydraulique en expliquant, entre autres, les expériences de son contemporain EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647) sur les pompes aspirantes. Ses travaux ont été repris durant les siècles suivants avec, en particulier, les innovations de HENRI PITOT (1695-1771) et GIOVANNI BATTISTA VENTURI (1746-1822). En 1732, Henri Pitot a décrit dans une note une machine pour mesurer la vitesse des eaux courantes et le sillage des vaisseaux, cette machine est connue sous le nom tube de Pitot. Giovanni Battista Venturi a construit une tuyère à cônes divergents. En 1738, le théoricien DANIEL BERNOULLI (1700-1782) publie "*Hydrodynamique, ou Mémoire sur les forces et les mouvements des fluides*" dans lequel il exprime le principe de conservation de l'énergie.

LEONARD EULER (1707- 1783), qui est d'après JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736-1813) le fondateur de la mécanique des fluides, a établi en 1750 les équations du mouvement d'un fluide non visqueux et a introduit le concept de "*particule fluide*". Les travaux et les études théoriques de CLAUDE-LOUIS NAVIER (1785-1836) en théorie générale de l'élasticité où il a introduit la viscosité dans les équations de mouvement, complétées par GEORGE GABRIEL STOKES (1819-1903), ont fait avancer de manière décisive la mécanique des fluides.

Les écoulements de fluides visqueux dans des tuyaux cylindriques ont été étudiés par le

¹ Le chroniqueur royal de Charlemagne décrit l'horloge d'Al-Jazari : « Une machine qui, actionnée par la force motrice de l'eau, marque les heures par un nombre approprié de petites boules de bronze qui retombent sur un timbre d'airain ; à midi, 12 cavaliers sortent par 12 fenêtres qui se referment ensuite derrière eux ».

médecin JEAN-LOUIS POISEUILLE (1797-1869) qui, afin d'étudier le mouvement de sang dans les veines et vaisseaux, a établi les lois de l'écoulement laminaire des fluides visqueux dans les tuyaux cylindriques dans son ouvrage "*Le mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres*". Le physicien ERNST MACH (1838-1916) met en évidence le rôle de la vitesse du son en aérodynamique, il publie son ouvrage fondamental "*La mécanique, exposé historique et critique de son développement*", dans lequel on trouve une critique des principes de la mécanique newtonienne. Son nom sera donné, en 1929 en son honneur, au fameux "nombre de Mach". La transition "laminaire-turbulent" dans un écoulement de fluide est mise en évidence expérimentalement par les travaux d'OSBORNE REYNOLDS (1842-1912). Le fameux nombre de Reynolds apparaît pour la première fois en 1883 dans son article [84] intitulé "*An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water in parallel channels shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels*".

L'aérodynamicien NIKOLAÏ IEGOROVITCH JOUKOVSKI (1847-1921) a construit l'un des premiers tunnels aérodynamiques en 1902. Il a étudié le vol des oiseaux en 1891, et énoncé la loi qui définit la portance d'une aile d'avion en 1906. Les problèmes de couche limite développés par LUDWIG PRANDTL (1875-1953) ou ceux d'écoulements turbulents traités par THEODORE VON KARMAN (1881-1963), qui a construit le premier tunnel aérodynamique supersonique et mis au point un programme de développement de moteurs à réaction et de fusées, font aujourd'hui encore l'objet de recherches poussées.

Dans leur article "*Large eddy simulation of turbulent channel flow ILLIAC 5 calculation*" en 1980, JOHN KIM et PARZIV MOIN, au centre de recherche Ames de la NASA, ont simulé des écoulements turbulents à nombre de Reynolds jusqu'à 1400. Jusqu'à nos jours, beaucoup des problèmes posés par la turbulence ne sont pas résolus.

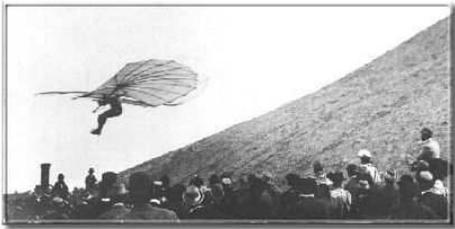


FIG. 1.4 – Les progrès de l'aviation depuis Ibn Fernas jusqu'à L'Airbus. Otto Lilienthal et son histoire des vols à voile (à gauche); Airbus A330 de la MEA au départ de Beyrouth 2004 (à droite). Photos : <http://www.lilienthal-museum.de> et ©Hisham Attalah.

1.2.2 La mécanique des fluides : de l'aéronautique à la géophysique

Milieu continu : « milieu dont le comportement macroscopique peut être schématisé en supposant la matière répartie sur tout le domaine qu'il occupe ».

J. COIRIER

Plusieurs questions, dont les réponses se trouvent dans la mécanique des fluides, se rencontrent dans notre vie quotidienne. D'où vient la forme sphérique des gouttes de pluie? Quelles sont les propriétés physiques de la soie d'araignée²? Comment expliquons-nous les cercles propagés à la surface de l'eau après la pluie? Pourquoi est-il plus facile de plonger un morceau de pain dans l'eau que dans le miel?.....



FIG. 1.5 – L'effet de pluie à la surface de l'eau (à gauche). "Une colonne cylindrique est instable et se décompose spontanément en un chapelet de gouttes dont la forme oscillante tend rapidement vers une sphère" [6]. (à droite).

La mécanique des fluides forme un sous-domaine de la mécanique des milieux continus. Elle comprend l'étude des gaz et des liquides dans les cas statiques et dynamiques. L'étude de l'interaction solides-fluides est aussi une partie de la mécanique de fluide dont les applications sont partout : la météorologie, l'hydrologie, l'aérodynamique, l'étude des plasmas ; elle s'applique aussi en biologie, en géophysique et en astrophysique, en océanographie, ainsi qu'en génies chimique, nucléaire, hydraulique et en écologie. La mécanique des fluides consiste à offrir une théorie mathématique bien construite pour des domaines divers, ce qui indique son importance dans plusieurs champs surtout l'industrie. Le fluide (liquide, gaz ou gaz ionisé) est considéré comme un milieu continu représenté par les champs de densité, de pression et de vitesse satisfaisant la fameuse équation de Navier-Stokes.

1.2.3 Subdivisions de la mécanique des fluides

La *statique* et la *dynamique* des fluides consistent en l'étude de fluides respectivement à repos et en mouvement. La statique des liquides (ou *hydrostatique*) et la statique des gaz (ou *aérostatique*) forment le deux ailes de la statique de fluide. Dans la dynamique des fluides, nous distinguons la dynamique des liquides (ou *hydrodynamique*), la dynamique des gaz (ou *aérodynamique*) et la dynamique des fluides conducteurs de l'électricité en présence de champs magnétiques (ou *magnétohydrodynamique*).

² "Bien que la soie de certaines araignées fasse l'admiration générale par ces incomparables propriétés mécaniques, son processus de synthèse demeure assez peu connu. L'étude de la rhéologie en cisaillement et en extension du liquide précurseur de la soie indique des valeurs colossales de la viscosité (3 millions de fois celle de l'eau!), une forme subtile de lubrification semble ainsi nécessaire à l'élaboration de la soie". Source : <http://www.pmmh.espci.fr>



FIG. 1.6 – Le Microgravity Research Center (MRC) de l'Université Libre de Bruxelles (ULB), a réalisé plusieurs expériences de physique de fluide avec la capsule russe Foton ©SIC-Progress (à gauche); Cyclone (à droite).

La maîtrise de l'eau pour les différentes constructions navales, ainsi que la construction de nombreux instruments dans lesquels interviennent des écoulements de fluides dans des conduites (pompes, moteurs, échangeurs de chaleur, horloge hydraulique...) sont basées sur l'*hydrodynamique*. Les courants marins, qui servent aux échanges de chaleur entre pôles et tropiques, forment un de nombreux exemples de la présence de l'hydrodynamique dans l'océanographie.

Les avions, les fusées et les navettes spatiales ne se réalisent pas sans l'*aérodynamique*. Les recherches consistent surtout à établir des formes "aérodynamiques" qui minimisent la résistance de l'air. Un bon exemple est l'architecture des ailes d'avion où l'écoulement de l'air sert à modifier la répartition de pression, ce qui a comme conséquence maintenir l'avion en équilibre. L'étude de la diminution de la consommation d'énergie des véhicules aériens est aussi une branche assez important de l'aérodynamique. L'aérodynamique, qui joue un rôle empereur dans la météorologie, étudie aussi les phénomènes atmosphériques des autres planètes.

L'étude des gaz ionisés, ou plasmas, est une discipline de la *magnétohydrodynamique* qui joue aussi un grand rôle en astrophysique (modèles d'étoiles, dynamique de la matière interstellaire).

1.3 Les fluides

1.3.1 Qu'est-ce qu'un fluide ?

Fluide : « qui n'est ni solide, ni épais, qui coule aisément ».

Solide : « qui a de la consistance, qui n'est pas liquide, tout en pouvant être plus ou moins mou ».

Le petit Robert³

Un fluide (liquide ou gaz), selon les physiciens, est un corps simple composé d'atomes ou de molécules identiques. Du point de vue mécanique, la définition d'un matériau est liée à sa déformation en fonction des contraintes : "un fluide, c'est quelque chose qui coule" sous l'action d'une contrainte donnée et même si la déformation est grande, ceci ne provoque pas la perte

³ Un dictionnaire de langue française publié par les Dictionnaires Le Robert.

de cohésion entre ses molécules. Par contre, un solide (indéformable, élastique ou plastique) ne coule pas sous contrainte et la déformation qui croît avec la contrainte appliquée provoque (si elle est grande) une rupture de solide. Alors, la mécanique des fluides s'intéresse aux déformations des fluides.

La distinction mécanique entre fluide et liquide est insuffisante quand nous étudions des cas particuliers comme celui des pâtes aux silicones appelées "silly-putty". En fait, les "silly-putty" se comportent à la fois comme des solides (cubes ou boules) et comme des liquides (s'étale comme une couche mince). C'est pour cela que la notion de fluidité dépend de l'échelle spatiale d'observation ainsi que du temps caractéristique d'observation du système.



FIG. 1.7 – Silly-Putty sous forme liquide (à gauche) ; Silly-Putty sous forme solide (à droite). ©Fakr.

1.3.2 Fluides : liquides ou gaz

Liquide : « tout corps qui coule ou tend à couler ».

Le petit Robert

Selon la définition élémentaire, un liquide a "un volume propre, mais pas de forme propre", alors qu'un gaz n'a pas de "volume propre mais tend à occuper tout l'espace qui lui est offert". Sous les conditions normales de pression et de température, la distinction entre liquide et gaz est évidente mais à cause de la continuité de l'état fluide le passage de la phase gazeuse à la phase liquide peut se faire sous simple modification (augmentation de la température par exemple).

Dans un liquide, où les forces d'interaction moléculaire caractérisent sa liquidité, le mouvement des molécules est contrôlé par la conservation d'une distance entre ces molécules correspondant environ à leur taille. Cependant, dans la phase gazeuse, ces forces n'interviennent que très peu. Les molécules d'un gaz sont en mouvement désordonné sans prendre en considération les grandes distances entre eux par rapport à leur dimension.

C'est à partir de son coefficient de compressibilité que nous distinguons un liquide d'un gaz. Ce coefficient, ayant la dimension de l'inverse d'une pression, est défini comme étant "le rapport de la diminution relative de volume à l'augmentation de pression, et ce à température

constante". Dans la pratique, une augmentation de pression de 2.10^{15} Pa se traduit par une diminution de volume de l'eau égale à un dix-millième du volume initial. Cependant que pour les gaz : à une pression voisine de la pression atmosphérique normale, la compressibilité de l'air est 20 000 fois plus grande que celle de l'eau !

Un écoulement gazeux est considéré comme incompressible si la vitesse de l'écoulement est très petite par rapport à celle du son. Autrement dit, si son nombre de Mach (rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse du son) est très inférieur à 1. Pratiquement, l'hypothèse d'écoulement incompressible est faite lorsque le nombre de Mach est inférieur à 0,3 en tout point de l'écoulement. Elle est donc très utilisée en aérodynamique pour des véhicules dont la vitesse ne dépasse pas 400 km/h.

1.3.3 Les fluides et le corps humain

Dans le corps humain, plusieurs fluides s'écoulent à chaque instant. L'eau, le fluide le plus présent dans chaque cellule humaine, n'est pas le seul fluide essentiel à la vie humaine. L'air inspiré et l'air expiré, qui forment un exemple d'un ensemble fluide-gaz, circulent dans l'appareil respiratoire humain et dans des branches de dimensions différentes dont la forme géométrique est moins fréquent parmi les domaines habituels de fluide rencontrés dans l'industrie et dans la nature. Le sang, nécessaire à la fonction des organes vivants et ayant les propriétés des fluides non newtoniens, coule d'une manière non stationnaire de l'artériole à une veinule où le nombre de Reynolds varie avec la taille des vaisseaux.

Plusieurs exemples pratiques, provenant des travaux dans le domaine de la *biomécanique des fluides*, nous donnent une idée claire et chiffrée des variations de pressions et de nombre de Reynolds qui entraînent une modification totale de la nature de l'écoulement. Prenons cet exemple de [46] : les "changements très importants de niveau de pression peuvent être observés entre les bas niveaux de pression (inférieurs à 30 mmHg \approx 4104 Pa) de la circulation pulmonaire et les hauts niveaux de pression (jusqu'à 120 mmHg \approx 16104 Pa) de la circulation systémique", alors que "l'écoulement du sang s'effectuant dans des conduits de calibres variant de plus de trois ordres de grandeur" ce qui provoque que "le nombre de Reynolds diminue de 6 ordres de grandeur" .

1.3.4 Fluides visqueux

La viscosité d'un fluide, qui est la propriété inverse de la fluidité, est la caractéristique de résistance au glissement ou à la déformation d'un fluide. Ces forces de résistance proviennent du fait que les couches des fluides en mouvement ne peuvent pas glisser indépendamment et librement les unes sur les autres. Ce qui donne naissance à des forces de frottement qui s'opposent directement à l'écoulement. Cette viscosité, dite dynamique, s'exprime comme le quotient d'une masse par une vitesse (l'unité est le poiseuille noté Pa.s ou $N.s.m^{-2}$ dans le système MKSA), et dépend de la température. Dans un liquide, elle est inversement proportionnelle à la température. Au contraire, elle augmente avec la température dans le cas d'une phase gazeuse.

On mesure la viscosité dynamique d'un fluide, généralement fluide newtonien, à l'aide d'un *viscosimètre*. On distingue plusieurs genres de viscosimètres comme le viscosimètre à tube capillaire et le viscosimètre à chute de bille. Par exemple, avec un viscosimètre à tube capillaire

on mesure le temps d'écoulement d'un liquide visqueux à travers un tube mince. Sachant que ce temps est proportionnel à la viscosité, on peut la calculer. On note aussi qu'il y a d'autres appareils qui mesurent la viscosité comme le *rhéomètre*. Cet instrument mesure directement les contraintes et les taux de déformation.

1.3.5 Fluides parfaits

Un fluide parfait, dont l'écoulement se fait "sans frottements internes", est un fluide considéré comme non visqueux. Le modèle du fluide parfait permet de rendre compte assez convenablement de la structure de certaines régions d'écoulements réels ou de la modéliser, mais jamais de la structure complète de ceux-ci. Une des caractéristiques principales de la mécanique des fluides apparaît ici : pour représenter des faits ou des observations, elle fait appel à des modèles, dont le degré de raffinement est variable. En raison de l'extrême complexité des phénomènes qu'elle tente de décrire, elle ne peut se passer de tests expérimentaux (réalisation de maquettes, testées dans un bassin, qui serviront à la conception des navires ; essais en soufflerie pour la construction aéronautique, etc.).

1.3.6 Les fluides newtoniens

Ces fluides sont les fluides qui ont une viscosité indépendante de la contrainte appliquée. Exemples : eau, la plupart des solvants, huiles minérales.

1.3.7 Les fluides non newtoniens

Le caractère non newtonien le plus répandu est la variation de la viscosité avec la vitesse de cisaillement. Ce type de comportement est de loin le plus fréquent. Il concerne les polymères à longues chaînes en solution ou à l'état fondu, les pâtes à papier, les colles, les ciments.

Nous distinguons :

1. Fluides rhéofluidifiants que l'on nomme également pseudoplastiques : la viscosité de ces fluides diminue si la contrainte augmente. C'est le cas du sang, des polymères liquides à longue chaîne, des jus de fruits, des pâtes à papier, des colles et des ciments, des shampoings.
2. Fluides à seuil ou plastiques ou fluides de Bingham : Ces fluides ne s'écoulent que si la contrainte appliquée est supérieure à une valeur seuil. Exemple : Dentifrice ⁴.
3. Fluides rhéoépaississants : ces fluides voient leur viscosité s'accroître lorsque la contrainte augmente. C'est le cas de certains amidons dans l'eau.
4. Fluides thixotropes : Les fluides thixotropes sont des fluides ayant une mémoire à courte et à grande échelle. Le comportement à un instant t d'un fluide thixotrope est fonction des contraintes subies dans un passé récent (mémoire à courte échelle). Lorsque la contrainte

⁴ La pâte dentifrice ne peut sortir du tube sous l'effet de son propre poids, il faut lui appliquer une contrainte nettement supérieure pour qu'elle s'écoule.

disparaît, le fluide recouvre ses propriétés d'origine (mémoire à grande échelle). Exemple : ketchup, yaourt.

1.3.8 Viscoélasticité linéaire

Un autre comportement non newtonien très important est le caractère viscoélastique, très fréquent dans les solutions de polymères et dans les polymères fondus. C'est un comportement visqueux (liquide) et élastique (solide). La réponse du fluide à une déformation présente à la fois un aspect visqueux (contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation) et un aspect élastique (contrainte proportionnelle à la déformation). Un exemple typique de fluide viscoélastique est la pâte "silly-putty" : une boule de silly-putty apparaît comme une boule de caoutchouc (aspect solide) ou s'étale comme un fluide visqueux (aspect liquide).

1.3.9 Fluides compressibles ou fluides incompressibles

Un fluide est dit incompressible lorsque sa masse volumique ne dépend pas de la pression ou de la température. Généralement, en statique des fluides, les liquides sont considérés comme incompressibles et les gaz sont compressibles. C'est la nature de l'écoulement qui permet de distinguer l'écoulement compressible de l'écoulement incompressible et non la nature du fluide.



FIG. 1.8 – Coulée de lave en bord de mer à Kamoamo. Hawaii, 2001. ©Pascal Blondé.

1.4 Les écoulements des fluides

Dans la vie quotidienne, dans la nature et dans le domaine industriel, les écoulements sont toujours présents. La circulation de l'oxygène dans notre organisme est l'un des exemples de l'importance de l'écoulement dans la vie humaine. Les tsunamis, les cyclones ou les coulées de lave sont aussi des exemples de l'écoulement mais qui conduisent quelquefois à de grands dégâts pour l'humanité.

A part le critère physique qui distingue écoulements *compressibles* et *incompressibles*, ainsi que écoulements *visqueux* et *non visqueux*, il existe d'autres critères qui distinguent les écoulements de fluides.

1. Le critère géométrique :

- Les écoulements *internes* : ils s'effectuent à l'intérieur d'une conduite. Exemples : rivière, canal.
- Les écoulements *externes* : ils se font autour des corps solides, par exemple un navire ou un avion.

2. Le critère cinématique :

- Les écoulements *uniformes*, si ses composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace.
- Les écoulements *permanents* ou *stationnaires*, si ses composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps.



FIG. 1.9 – Vague de tsunami (à gauche) ; Cyclone en Australie de l'ouest (à droite).

Un écoulement peut également être *tourbillonnaire* : le cyclone en est l'exemple typique ; de la même façon, lors d'une promenade en bateau, on peut observer des tourbillons dans le sillage de l'embarcation.

En aérodynamique, le nombre de Mach ε permet de distinguer l'*écoulement subsonique* ($\varepsilon < 1$), l'*écoulement supersonique* ($1 < \varepsilon < 5$) et hypersonique ($\varepsilon > 5$) . Si le nombre de Mach est proche de l'unité, l'écoulement est dit *transsonique*. Les écoulements subsonique et supersonique se comportent de manière très différente, l'écoulement transsonique étant caractérisé par des instabilités (le fameux "mur du son").

Une dernière distinction concerne les écoulements *laminaires* où l'écoulement peut être décrit comme un ensemble de lames (filets, couches) de fluide qui glissent les unes sur les autres et les *écoulements turbulents* où on ne peut plus définir de lames fluides qui garderaient leur individualité. Un écoulement turbulent est caractérisé par son irrégularité temporelle et spatiale. Les exemples d'écoulements turbulents ne manquent pas : torrents, sillages d'avion...

Plus la viscosité d'un fluide est grande, plus le régime turbulent s'établit difficilement. Le passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent se fait à partir d'une certaine valeur de la vitesse moyenne. Le diamètre du tube dans lequel se produit l'écoulement joue également



FIG. 1.10 – Visualisation des tourbillons de sillage consécutive au passage d'un avion léger à travers un panache de fumée. ©NASA Langley Research Center (à gauche); les torrents (à droite).

un rôle dans la transition de l'état laminaire à l'état turbulent. L'influence de ces trois grandeurs est décrite par un nombre, sans dimension physique, appelé nombre de Reynolds Re^5 , une valeur du nombre de Reynolds caractérise le type de l'écoulement.

On admet que :

- si $Re < 2\,000$, l'écoulement est laminaire ;
- si $2\,000 < Re < 8\,000$, on a un écoulement de transition ;
- si $8\,000 < Re$, l'écoulement est turbulent.

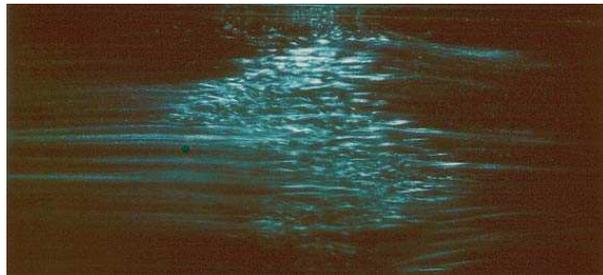


FIG. 1.11 – Spot Turbulent : On observe sur la figure un « spot turbulent », domaine au sein duquel l'écoulement apparaît désordonné, entouré d'un écoulement laminaire. Les contours de ce spot se déforment au cours du temps, mais la part de l'écoulement qu'il occupe, la fraction turbulente, demeure essentiellement constante. Source : <http://www-drecam.cea.fr/ComScience>

⁵ Le nombre de Reynolds, du à OSBORNE REYNOLDS, représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses.



FIG. 1.12 – Anneau hexagonal de fumée. La croissance des vagues autour d'un angle de l'hexagone s'appelle souvent l'instabilité de WIDNALL, elle a produit un modèle remarquablement symétrique de fumée en air (à gauche). La fumée à un nombre de Reynolds environ de 13.000 (à droite). Source : An Album of Fluid Motion [98].

1.4.1 Rhéologie

Rhéologie : « Branche de la mécanique qui étudie le comportement des matériaux lié aux contraintes et aux déformations ».

Le Petit Robert.

Mot créé aux États Unis en 1929 par EUGÈNE COOK BINGHAM (1878-1945). La rhéologie est une science qui traite de l'écoulement, des déformations, et plus généralement de la viscosité des matériaux sous l'action de contraintes. La rhéologie est capable d'intégrer l'étude de l'ensemble des substances, qu'elle soient liquides (surtout liquides épais) ou solides (en particulier solides pâteux).

1.5 Bibliographie

1. J.COIRIER et C.NADOT-MARTIN, *Mécanique des milieux continus*, Dunod, 2001.
2. M.FERMIGIER, *Hydrodynamique Physique*, Notes de cours, ESPI-Laboratoire d'Hydrodynamique et mécanique Physique, <http://www.pmmh.espci.fr>, 2004.
3. E.GUYON, J.P.HULIN et L.PETIT, *Ce que disent les fluides : La science des écoulements en images*, Belin, Bibliothèque scientifique, 2005.
4. M.SAMIMY, K.S.BREUER, L.G.LEAL, P.H.STEEN, *A Gallery of Fluid Motion*, Cambridge University Press, 2003.
5. G.SALIBA, *Early Arabic critique of Ptolemaic cosmology : A ninth-century text on the motion of the celestial spheres*, Journal for the History of Astronomy **25**, pp. 115-141, 1994.

Préservez votre droit de penser, car même penser mal est mieux que de ne pas penser du tout.

HYPATIE⁶

⁶ Hypatie d'Alexandrie (370-415) est une mathématicienne et philosophe grecque.

Chapitre 2

Introduction : la problématique, les équations et les résultats

2.1 Description d'un fluide en mouvement

DÉCRIRE le mouvement d'un fluide fait appel à des notions différentes de celles développées en Mécanique du point ou du solide. Le mouvement d'un fluide est un *écoulement* où il y a déformation continue du fluide. On peut, de manière analogue à ce que l'on fait en Mécanique du solide, isoler (par la pensée ou en trouvant un moyen de visualisation, coloration par exemple) une partie restreinte du fluide appelée *particule* et la " suivre " au cours du temps c'est-à-dire connaître à chaque instant t sa position. Cette position sera déterminée, par exemple, par ses coordonnées cartésiennes $x_p(t, x_0^p, y_0^p, z_0^p)$, $y_p(t, x_0^p, y_0^p, z_0^p)$ et $z_p(t, x_0^p, y_0^p, z_0^p)$ où x_0^p, y_0^p, z_0^p représentent les coordonnées de la particule choisie à l'instant t_0 , la vitesse de la particule aura pour composantes $v_x = \frac{\partial x_p}{\partial t}$, $v_y = \frac{\partial y_p}{\partial t}$ et $v_z = \frac{\partial z_p}{\partial t}$.

Au cours du temps, la particule sera en différents points M , l'ensemble des points M constitue la trajectoire de la particule.

Cette façon de faire est appelée *méthode de Lagrange*, les variables introduites sont appelées *variables de Lagrange*. La méthode de Lagrange s'avère dans la plupart des cas délicate car il n'est pas facile de suivre les particules : elle est peu employée.

La *méthode d'Euler* consiste à connaître la vitesse des particules au cours du temps t à un endroit donné déterminé par ses coordonnées, par exemple cartésiennes x, y, z . Elle est plus employée que la méthode de Lagrange, la connaissance du champ des vitesses étant suffisante pour décrire le fluide en mouvement.

Remarque 2.1.1. *Dans la méthode d'Euler, l'accélération d'une particule peut être due, bien sûr, au caractère non stationnaire de l'écoulement mais aussi à sa non uniformité. Ainsi, chacun a pu constater, dans l'écoulement permanent d'une rivière, l'accélération des particules lors du franchissement d'un rétrécissement.*

2.1.1 Conservation de la masse ou équation de continuité

Soit une partie d'un fluide de masse volumique ρ délimitée par une surface fermée S (de volume V). Soit dS un vecteur élémentaire de cette surface, orienté vers l'extérieur à la surface fermée. La partie de fluide a une masse $m = \iiint_V \rho dV$. Le débit massique sortant de la surface S est égal à $\oiint_S \rho \mathbf{u} dS$. La conservation de la masse s'écrit

$$\frac{dm_s}{dt} - \oiint_S \rho \mathbf{u} dS = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

où $\frac{dm_s}{dt}$ représente le débit massique de fluide interne au volume considéré, compté positivement s'il s'agit d'une source et négativement s'il s'agit d'un puits. Compte tenu du théorème d'Ostrogradsky pour transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume,

$$\oiint_S \mathbf{u} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) dV,$$

l'équation de conservation de la masse peut être écrite

$$\frac{dm_s}{dt} = \iiint_V \left\{ \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} dV.$$

L'égalité écrite ci-dessus est valide quel que soit le volume V considéré et l'intégral est nul, ce qui conduit à l'expression locale de la conservation de la masse :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Deux cas particuliers sont alors à considérer.

1. Si le fluide est *incompressible*, la masse volumique n'évolue pas au cours du temps et l'équation de conservation de la masse se réduit à :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{2.1.1}$$

pour un écoulement *stationnaire* ou *non stationnaire*. Cet écoulement est dit *isovolume*. L'équation (2.1.1) exprime la conservation du volume d'un élément de fluide au cours de sa déformation par l'écoulement.

2. Le cas d'un écoulement *stationnaire* $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ alors $\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 = \rho \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho$.

En dehors du cas 1, l'écoulement peut être *isovolume* si $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = 0$, c'est-à-dire les variations de masse volumique sont orthogonales, en tout point, au vecteur vitesse. Ce cas correspond à des écoulements *stratifiés* par salinité ou température (courants marins), ou par température et humidité (atmosphère).

En pratique, un fluide en écoulement peut être considéré comme incompressible si plusieurs conditions sont réunies :

1. la vitesse typique de l'écoulement U est petite devant la vitesse du son c , c'est-à-dire, le nombre de Mach $\varepsilon = U/c$ est petit devant l'unité. Dans l'eau où la vitesse du son est voisine de $1500m/s$ cette condition est presque toujours vérifiée. En revanche, dans l'air où c est de l'ordre de $300m/s$, de nombreux écoulements, en particulier en aéronautique, sont influencés par la compressibilité du fluide.
2. Dans un écoulement non stationnaire, si ν est la fréquence typique de variation temporelle de la vitesse, ν doit être telle que $1/\nu \ll c/L$ où L est une dimension caractéristique de l'écoulement. C'est-à-dire qu'à l'échelle du temps typique de fluctuation de la vitesse, une onde de pression se propage très rapidement à travers tout l'écoulement. Il est évident que si on s'intéresse à la propagation des ondes sonores, il faut tenir compte de la compressibilité du fluide.
3. Il est nécessaire que la variation de pression due à une force extérieure (la gravité par exemple) soit petite devant la pression absolue. Cette dernière condition est presque toujours satisfaite, même si on considère des écoulements atmosphériques sur des échelles verticales très grandes.

2.1.2 Notion de viscosité dans un fluide en mouvement

L'expérience montre que, lors d'un écoulement d'un fluide, les forces de pression (force normale) ne suffisent pas à expliquer les phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées *forces de viscosité*.

2.1.3 Conservation de l'impulsion ou équation du mouvement

Par la relation fondamentale de la dynamique, la variation temporelle de la quantité de mouvement d'un élément de volume V est égale à la somme des forces qui s'exercent sur cet élément de volume, soit :

$$\frac{d}{dt} \int_V [\rho \mathbf{u} dx] = \int_V \mathbf{f} dx + \int_{\Sigma} \sigma \cdot \mathbf{n} ds,$$

où Σ est la surface délimitant le volume V , ds est un élément de surface de normale \mathbf{n} , \mathbf{f} est la force exercée par unité de volume et σ le tenseur des contraintes. La masse de l'élément de fluide ρdx reste constante dans ce mouvement. Il est donc possible d'écrire

$$\frac{d}{dt} \int_V [\rho \mathbf{u} dx] = \int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dx.$$

L'intégrale des forces de surface peut s'écrire, à l'aide du théorème d'Ostrogradsky sous la forme $\int_V \text{div } \sigma dx$. En faisant tendre le volume V vers zéro l'équation de mouvement devient :

$$\rho (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \mathbf{f} + \text{div } \sigma.$$

2.1.4 Conservation du moment angulaire

La conservation du moment angulaire d'un fluide s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{r} \wedge \mathbf{u} dx = \int_V \mathbf{r} \wedge \mathbf{f} + \int_{\Sigma} (\mathbf{r} \wedge \sigma) \cdot \mathbf{n} ds, \quad (2.1.2)$$

où $\mathbf{r}(x, t)$ est le rayon-vecteur de x à partir d'une origine quelconque. On peut montrer que cette loi est toujours satisfaite si le tenseur σ est symétrique.

2.1.5 Conservation de l'énergie du fluide

Le taux de variation de l'énergie cinétique du fluide peut s'écrire,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho |\mathbf{u}|^2 dx = \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} + \int_{\Sigma} (\mathbf{u} \cdot \sigma) \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \mathbf{D}_{ij}[\mathbf{u}] dx, \quad (2.1.3)$$

où $\mathbf{D}_{ij}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$. Le dernier terme de cette équation représente l'énergie mécanique dissipée dans le mouvement, c'est-à-dire, l'énergie mécanique transformée en chaleur. Appelons $T(t, x)$ la température du fluide au point x et au temps t . On définit la densité massique d'énergie interne $\mathcal{E}(t, x)$ par

$$\mathcal{E}(t, x) = C_p T(t, x)$$

où $C_p > 0$ est la chaleur spécifique du fluide. On définit aussi le flux de chaleur par unité de surface $\mathbf{q}(t, x)$ par

$$\mathbf{q}(t, x) = k(T(t, x)) \frac{\partial T}{\partial n}(t, x),$$

où $k(T)$ est le coefficient de diffusion thermique. Notons $Q(t, x)$ la quantité de chaleur fournie au fluide au point x et au temps t . Le postulat de la conservation de l'énergie du fluide s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \{|\mathbf{u}|^2 + \mathcal{E}\} dx = \int_V Q dx + \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} + \int_{\Sigma} (\mathbf{u} \cdot \sigma) \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dx.$$

D'où on déduit l'équation pour l'énergie interne :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathcal{E} dx = \int_V Q dx - \int_{\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \mathbf{D}_{ij}[\mathbf{u}] dx,$$

ce qui nous aboutit à l'équation de conservation de l'énergie,

$$\rho C_p \{\partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T\} - \operatorname{div}(k(T) \nabla T) = Q.$$

2.2 Equation des fluides isothermes

Nous avons trouvé les équations qui gèrent le mouvement du fluide. Dans le cas général d'un fluide isotherme ¹, la contrainte σ est symétrique pour satisfaire à la loi de conservation

¹Dans l'écoulement isotherme, la température ne dépend ni de t ni de x . Un tel écoulement ne peut avoir lieu que si le terme de source de la chaleur Q est identiquement nul. L'équation de l'énergie est alors trivialement satisfaite.

du moment angulaire. Dans l'hydrodynamique des fluides isothermes, l'écoulement d'un fluide s'écrit sous la forme,

$$\begin{cases} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) &= \mathbf{f} + \operatorname{div} \sigma, \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où ρ est la densité de masse, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x) \in \mathbb{R}^N$ est la vitesse et σ est le tenseur des contraintes (tenseur symétrique). De plus, nous pouvons décomposer σ de la manière suivante,

$$\sigma = \tau - p\mathbf{I}, \quad (2.2.2)$$

où τ désigne la partie tangentielle du tenseur alors que $p\mathbf{I}$ est la partie normale (p est la pression).

Dans le cas d'un fluide newtonien, τ dépend linéairement de $\nabla \mathbf{u}$ de la manière suivante,

$$\tau = 2\nu \mathbf{D}[\mathbf{u}],$$

où $\mathbf{D}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$ est le tenseur des taux de déformation et ν est la viscosité du fluide ($\nu > 0$). Alors l'équation de mouvement prend la forme :

$$\rho \partial_t \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \nu(\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}).$$

Les équations de Navier-Stokes sont les équations pour l'écoulement incompressible et isotherme d'un fluide newtonien, elles s'écrivent

$$\begin{cases} \rho \partial_t \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{u}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{cases}$$

Ce système sera complété par des conditions de bords et des conditions initiales.

2.2.1 Ecoulement stationnaire

Dans cet écoulement $\partial_t \mathbf{u} = \partial_t \rho = \partial_t T = \partial_t p = 0$. Un tel écoulement est possible lorsque le domaine Ω , les forces massiques appliquées, les sources de chaleur et les conditions de bord sont elles aussi indépendantes du temps. Les équations de Navier-Stokes stationnaires s'écrivent

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

2.2.2 Les équations de Stokes

En négligeant dans l'équation de Navier-Stokes incompressible stationnaire les termes proportionnels à la masse volumique du fluide $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, on obtient l'équation de Stokes

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Plus la vitesse de l'écoulement est petite en regard des dimensions de Ω et de la valeur de la viscosité, plus le modèle de Stokes est une approximation valable des équations de Navier-Stokes. La différence fondamentale entre les deux équations est que le terme non linéaire en vitesse a disparu, l'équation de Stokes est une équation aux dérivées partielles linéaire.

2.3 Comportement non-newtonien

Il est bien connu que beaucoup de fluides ne satisfont pas la loi newtonienne $\tau = 2\nu\mathbf{D}[\mathbf{u}]$ et qu'il n'existe pas une loi constitutive générale satisfaite par tous les fluides. Lorsque la viscosité n'est plus indépendante du taux de cisaillement, il est nécessaire d'utiliser plusieurs paramètres pour décrire le comportement mécanique du fluide. Un certain nombre de modèles empiriques permettent cette description, citons par exemple les modèles d'Ericksen-Rivlin [88, 89] ou les modèles introduits par Ladyzhenskaya [64]. Dans ces modèles, le tenseur τ dépend de $\mathbf{D}[\mathbf{u}]$ d'une manière non linéaire. Il y a également des modèles étudiés dans [44, 70], où la viscosité dépend de $\mathbf{D}[\mathbf{u}]$ et de p . Dans ces modèles, (2.2) est remplacé par

$$\tau = 2\mu(|\mathbf{D}[\mathbf{u}]|^2)\mathbf{D}[\mathbf{u}].$$

Un modèle très fréquent est le modèle en loi de puissance d'Ostwald. Dans une certaine gamme de taux de cisaillement, on peut représenter la viscosité comme une loi de puissance de $\mathbf{D}[\mathbf{u}]$, en particulier pour les polymères

$$\mu(|\mathbf{D}[\mathbf{u}]|^2) = \nu + \beta |\mathbf{D}[\mathbf{u}]|^{p-2},$$

où $\nu \geq 0$, $\beta > 0$ et $p \geq 1$. Selon p , nous distinguons les cas suivants :

- $1 \leq p < 2$, cas d'un un fluide viscoplastique,
- $p = 2$, cas d'un fluide newtonien classique,
- $p > 2$, cas d'un fluide dilatant.

Bien que ce modèle permette de résoudre bon nombre de problèmes d'écoulement de fluides non newtoniens, il faut garder à l'esprit qu'il décrit très mal le comportement à faible taux de cisaillement et que les paramètres β et p n'ont pas d'interprétation claire en termes de paramètres microscopiques tels que la masse moléculaire.

2.4 Modèle d'Oldroyd

Un autre type de fluide non newtonien est souvent dit fluide *à mémoire*, parce que le tenseur des contraintes dépend de toute l'histoire de la déformation du fluide. Très souvent, ce phénomène de mémoire est dû au fait que, vu à l'échelle microscopique, le fluide est le mélange d'un solvant (l'eau) et de microstructures qui flottent dans ce solvant (par exemple des brins d'ADN, ou des chaînes de polymères, ou des petits cristaux ...). En effet, pour beaucoup de fluides, il n'est pas possible de déterminer à un moment donné t la valeur de τ si nous connaissons seulement $\mathbf{D}[\mathbf{u}]$: dans ce cas on doit également connaître l'histoire entière de $\mathbf{D}[\mathbf{u}]$. Un fluide viscoélastique est un fluide non newtonien ayant une mémoire continue du comportement du milieu. Mais, il n'y a pas unicité des lois de comportement décrivant un fluide viscoélastique. Un très grand nombre de lois a été proposé pour décrire le comportement rhéologique des polymères. Un des modèles classiques est le modèle de JAMES GARDNER OLDROYD², qui s'écrit

$$\partial_t \tau + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau + b\tau + F(\tau, \nabla \mathbf{u}) = 0,$$

² James Gardner Oldroyd (1921-1982) est un ancien président de la société britannique de la rhéologie. Il a formulé le modèle d'Oldroyd-B pour décrire le comportement viscoélastique des fluides non newtoniens. Il a eu le prix Adams en 1964.

où $b > 0$ et F est une forme quadratique en τ et $\nabla \mathbf{u}$.

Par contre, Il est difficile de travailler avec la forme quadratique la plus générale de F . Oldroyd a introduit plusieurs modèles, notamment le modèle à huit constantes, qui peut être écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tau + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}\tau}{\mathcal{D}t} + \frac{1}{2}\eta_0 \text{tr}(\tau)\mathbf{D}[\mathbf{u}] - \frac{1}{2}\eta_1 \{\tau\mathbf{D}[\mathbf{u}] + \mathbf{D}[\mathbf{u}]\tau\} + \frac{1}{2}\nu_1 (\tau : \mathbf{D}[\mathbf{u}])\mathbf{I} = \\ 2\eta_0 \left[\mathbf{D}[\mathbf{u}] + \lambda_2 \frac{\mathcal{D}\mathbf{D}[\mathbf{u}]}{\mathcal{D}t} - \mu_2 \mathbf{D}[\mathbf{u}]\mathbf{D}[\mathbf{u}] + \frac{1}{2}(\mathbf{D}[\mathbf{u}] : \mathbf{D}[\mathbf{u}])\mathbf{I} \right], \end{aligned}$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité.

La dérivée objective, c'est-à-dire indépendante du repère choisi, $\frac{\mathcal{D}\tau}{\mathcal{D}t}$ (nommée aussi dérivée d'Oldroyd) est définie par,

$$\frac{\mathcal{D}\tau}{\mathcal{D}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \right) \tau + \tau \mathbf{W}[\mathbf{u}] - \mathbf{W}[\mathbf{u}]\tau,$$

avec $\mathbf{W}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - \nabla^T \mathbf{u})$ est le tenseur des taux de rotation.

Notons qu'il y a aussi des travaux (cf. [5]) sur un autre modèle d'Oldroyd, nommé *modèle d'Oldroyd à 6 constantes*, où τ vérifie l'équation,

$$\tau + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}\tau}{\mathcal{D}t} + \frac{\lambda_3}{2} \left\{ \tau \mathbf{D}[\mathbf{u}] + \mathbf{D}[\mathbf{u}]\tau \right\} + \frac{\lambda_5}{2} \text{tr}(\tau)\mathbf{D}[\mathbf{u}] = \mu \left[\mathbf{D}[\mathbf{u}] + \lambda_2 \frac{\mathcal{D}\mathbf{D}[\mathbf{u}]}{\mathcal{D}t} + \lambda_4 (\mathbf{D}[\mathbf{u}])^2 \right],$$

où $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sont les 6 constantes.

Nous allons décrire un modèle viscoélastique plus simple, le modèle d'Oldroyd-B. L'équation décrivant le comportement du tenseur des extra contraintes τ comporte seulement quatre constantes,

$$\tau + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} = 2\eta \left(\mathbf{D}[\mathbf{u}] + \lambda_2 \frac{\mathcal{D}_a \mathbf{D}[\mathbf{u}]}{\mathcal{D}t} \right) \quad (2.4.1)$$

où $\frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t}$ est une dérivée objective de tenseur, d'expression

$$\frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \right) \tau + \tau \mathbf{W}[\mathbf{u}] - \mathbf{W}[\mathbf{u}]\tau - a(\mathbf{D}[\mathbf{u}]\tau + \tau \mathbf{D}[\mathbf{u}]). \quad (2.4.2)$$

Dans (2.4.1), η est la viscosité dynamique du fluide, $\lambda_1 > 0$ est un temps de relaxation, $\lambda_2 > 0$ est un temps de retard. Le coefficient λ_2 permet de distinguer la partie élastique de la partie visqueuse du fluide : il est compris entre 0 et λ_1 , si λ_2 est proche de 0 alors le fluide est très élastique et inversement si λ_2 est proche de λ_1 alors le fluide est plutôt newtonien. a est un paramètre réel vérifiant $a \in [-1, 1]$. Les fluides de ce type ont des propriétés élastiques et des propriétés visqueuses. Le cas $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ correspond à un fluide purement visqueux (équation de Navier-Stokes), alors que le cas $\lambda_2 = 0, \lambda_1 > 0$, correspond au cas d'un fluide purement

élastique (Modèle de Maxwell).

En général, nous décomposons la contrainte τ en deux parties, une newtonienne τ_s qui correspond au solvant (on retrouve en effet un tenseur dépendant linéairement du tenseur des taux de déformations) et une polymérique τ_p ou partie purement élastique de la contrainte. Nous écrivons

$$\tau = \tau_s + \tau_p = 2\eta_s \mathbf{D} + \left(\left(\xi_s - \frac{2\eta_s}{N} \right) \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \mathbf{I} + \tau_p, \quad (2.4.3)$$

où N est la dimension de l'espace physique, \mathbf{I} est le tenseur identité, ξ_s est la viscosité dite de groupe et $\eta_s = \frac{\eta\lambda_2}{\lambda_1} = \eta - \eta_p$ est la viscosité du solvant.

2.5 Modèle d'Oldroyd-B : cas d'un fluide viscoélastique non stationnaire incompressible

Dans ce cas, nous avons $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ et nous supposons que $\xi_s = 0$, alors

$$\tau = 2\eta_p \mathbf{D} + \tau_p.$$

De (2.4.1), nous obtenons

$$\tau_p + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}_a \tau_p}{\mathcal{D}t} = 2\eta_p \mathbf{D}[\mathbf{u}],$$

où $\eta_p = \eta(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1})$. Notons τ au lieu de τ_p , alors le fluide viscoélastique non stationnaire incompressible vérifie le système suivant,

$$\begin{cases} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} + \eta_s \Delta \mathbf{u} + \operatorname{div} \tau, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \tau + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} = 2\eta_p \mathbf{D}[\mathbf{u}], \text{ dans } \mathbf{Q}_T = \Omega \times]0, T[. \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Le système (2.5.1) est complété par les conditions initiales suivantes,

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0, \\ \tau(0, \cdot) = \tau_0, \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (2.5.2)$$

Considérons des quantités physiques sans dimension, en posant :

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^*}{U}, \quad p = \frac{p^* L}{\eta U}, \quad \tau = \frac{\tau^* L}{\eta U},$$

et nous définissons trois nombres sans dimension, le nombre de Reynolds Re , le nombre de Weissenberg We et un nombre ω associé aux temps λ_1 et λ_2 :

$$\operatorname{Re} = \frac{\rho_0 U L}{\eta}, \quad \operatorname{We} = \frac{\lambda_1 U}{L}, \quad \omega = \frac{\eta_p}{\eta} = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

où U et L sont respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques du fluide.

Le problème (2.5.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \{ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \} - (1 - \omega) \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \operatorname{div} \tau, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{We} \{ \partial_t \tau + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau) \} + \tau = 2\omega \mathbf{D}[\mathbf{u}], & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.5.3)$$

où

$$\mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau) = \left(\tau \mathbf{W}[\mathbf{u}] - \mathbf{W}[\mathbf{u}] \tau \right) - a \left(\mathbf{D}[\mathbf{u}] \tau + \tau \mathbf{D}[\mathbf{u}] \right).$$

2.5.1 Quelques résultats

Le système (2.5.2)-(2.5.3) a été le sujet de plusieurs travaux. Nous allons citer quelques résultats.

Des résultats d'unicité et d'existence locale ont été obtenus par C.Guillopé et J.-C.Saut dans [38]. Ils ont utilisé la technique du point fixe et l'application du Théorème de Schauder. Ils ont aussi démontré l'existence globale en temps en domaine borné dans \mathbb{R}^N ($N=2$ ou 3) pour des données suffisamment petites, et sous condition de petitesse sur le paramètre ω lié aux viscosités.

Théorème 2.5.1. [38]³(Existence globale des solutions régulières) *Soit $\partial\Omega \in C^3$. Il existe une constante ω^0 , $0 < \omega^0 < 1$, dépend de $\partial\Omega$, telle que si $0 < \omega < \omega^0$ et $\mathbf{u}_0 \in D(A)$, $\tau_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^1)$ et $\mathbf{f}' \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-1})$ sont suffisamment petits, alors le problème (2.5.2)-(2.5.3) admet une solution unique (\mathbf{u}, p, τ) définie pour tout $t \geq 0$, satisfaisant :*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^3(\Omega)) \cap C_b(\mathbb{R}_+, D(A)), & \tau &\in L^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^2(\Omega)), \\ \mathbf{u}' &\in L^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}_+, V) \cap C_b(\mathbb{R}_+, H), & \tau' &\in C_b(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^1(\Omega)), \\ p &\in L^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^2(\Omega)). \end{aligned}$$

L'existence et l'unicité d'une solution globale pour des données arbitraires ont été démontrées aussi par C.Guillopé et J.-C.Saut [37] dans les cas particuliers d'écoulements de Couette et de Poiseuille.

R.Talhouk, dans [95], a montré que le résultat d'existence locale reste vrai en domaine non borné. Il a montré qu'il existe une unique solution régulière du problème (2.5.2)-(2.5.3) pour une classe de domaines uniformément réguliers. La difficulté en domaine non borné provient de la perte de compacité. Pour démontrer l'existence, il a utilisé une méthode de compacité locale pour construire une suite de solutions sur des sous-domaines $\Omega_n \subset \Omega$ tels que $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$, puis il a passé à la limite ce qui définit une solution sur Ω tout entier. L'unicité est démontrée grâce à des estimations d'énergie. Il a obtenu le résultat suivant.

Théorème 2.5.2. [95] *Soit $\Omega \in \mathbb{R}^N$ ($N=2$ ou 3) uniformément C^3 -régulier. Soient $\mathbf{f} \in L^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^1)$, $\mathbf{f}' \in L^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-1})$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap V$, $\tau_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$. Alors, il existe un temps $T^* < T$, et une solution unique (\mathbf{u}, p, τ) du problème (2.5.2)-(2.5.3) tels que ⁴*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^2(0, T^*; \mathbf{H}^3_{\text{loc}} \cap \mathbf{H}^{2+\nu} \cap V) \cap C([0, T^*]; \mathbf{H}^2_{\text{loc}} \cap \mathbf{H}^{\frac{3}{2}+\nu}), & \mathbf{u}' &\in L^2(0, T^*; V) \cap L^\infty(0, T^*; H), \\ \tau &\in L^2(0, T^*; \mathbf{H}^2_{\text{loc}} \cap \mathbf{H}^{\frac{3}{2}+\nu}) \cap C_w([0, T^*]; \mathbf{H}^2_{\text{loc}}), & p &\in L^2(0, T^*; \mathbf{H}^2_{\text{loc}}); \end{aligned}$$

³ $\mathbf{H} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{div } \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$;

$V = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega), \text{div } \mathbf{u} = 0\}$; P est la projection de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ sur H ;

$A = P(-\Delta)$; $D(A) = V \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$.

⁴ $C_w([0, T^*]; \mathbf{H}^2_{\text{loc}})$ est l'espace des fonctions faiblement continues de $[0, T^*]$ à valeurs dans $\mathbf{H}^2_{\text{loc}}(\Omega)$.

pour tout ν , $\frac{1}{2} < \nu < 1$.

R.Talhouk et L.Molinet, dans leur article [72], ont trouvé le même résultat obtenu par C.Guillopé et J.-C.Saut [38], mais cette fois-ci sans condition sur ω . L'idée a été de traiter le terme $\mathbf{div}\tau$ figurant dans (2.5.3)₁ d'une manière différente à celle utilisée dans [38]. Dans leur estimation, ils ont remplacé $\|\mathbf{div}\tau\|_1$ par $\|P\mathbf{div}\tau\|_1$, puis ils ont utilisé l'inégalité

$$\|P\mathbf{div}\tau\|_1 \leq C(\|P\mathbf{div}\tau\| + \|\mathbf{curl}\mathbf{div}\tau\|).$$

Théorème 2.5.3. [72] *Le résultat du Théorème 2.5.1 reste vrai pour tout $\omega \in]0, 1[$.*

Le cas des solutions $\mathbf{L}^s - \mathbf{L}^r$ est étudié par E.Fernández-Cara, F.Guillén et R.R.Ortega [29], et le cas stationnaire est résolu par M.Renardy [83]. Ils obtiennent un résultat d'existence locale de solutions $\mathbf{L}^s - \mathbf{L}^r$ de (2.5.2)-(2.5.3), ainsi que un résultat d'existence globale pour des données suffisamment petites.

Théorème 2.5.4. [29](Existence locale)⁵ *Soient $\partial\Omega \in C^{2,\mu}$ ($\Omega \in \mathbb{R}^3, \mu > 0$), $1 < s < +\infty$, $3 < r < +\infty$ et $T > 0$. Si*

$$\mathbf{u}_0 \in D_r^s, \quad \tau_0 \in \mathbf{W}^{1,r}, \quad \mathbf{f} \in \mathbf{L}^s(\mathbf{L}^r),$$

il existe un temps $T^ \in]0, T[$ et une solution forte unique de (2.5.2)-(2.5.3) dans $[0, T^*]$, avec*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in \mathbf{L}^s(0, T^*; D(A^r)), & \mathbf{u}' &\in \mathbf{L}^s(0, T^*; H_r) \\ \tau &\in C([0, T^*]; \mathbf{W}^{1,r}), & \tau' &\in \mathbf{L}^s(0, T^*; \mathbf{L}^r). \end{aligned}$$

Théorème 2.5.5. [29](Existence globale) *Soient $\partial\Omega \in C^{2,\mu}$ ($\Omega \in \mathbb{R}^3, \mu > 0$), $1 < s < +\infty$. Pour tout $T > 0$, il existe $\omega^0(T) \in]0, 1[$ tel que si $0 < \omega \leq \omega^0(T)$ et*

$$\mathbf{u}_0 \in D_r^s, \quad \tau_0 \in \mathbf{W}^{1,r}, \quad \mathbf{f} \in \mathbf{L}^s(\mathbf{L}^r),$$

ont des normes suffisamment petites dans leur espace, il existe une solution forte unique de (2.5.2)-(2.5.3) dans $[0, T]$, avec

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in \mathbf{L}^s(D(A_r)), & \mathbf{u}' &\in \mathbf{L}^s(H_r) \\ \tau &\in C(\mathbf{W}^{1,r}), & \tau' &\in \mathbf{L}^s(\mathbf{L}^r). \end{aligned}$$

P.L.Lions et N.Masmoudi [68] ont obtenu un résultat d'existence de solutions faibles globales pour des conditions initiales générales dans le cas où le paramètre a figurant dans $\mathbf{g}(\nabla\mathbf{u}, \tau)$ est nul. Notons que J.Y.Chemin et N.Masmoudi, dans [17], ont obtenu l'existence et l'unicité des solutions locales et globales pour le système des équations (2.5.2)-(2.5.3) dans des espaces critiques.

Récemment, Z.Lei [65] a démontré l'existence locale et globale des solutions classiques pour le système des équations (2.5.2)-(2.5.3) par l'intermédiaire de la limite incompressible quand les données initiales sont suffisamment petites et dans des espaces de fonctions très régulières.

⁵ $H_r = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^r(\Omega), \mathbf{div}\mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$;
 $V = H \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$; P_r est la projection de $\mathbf{L}^r(\Omega)$ dans H_r ;
 $A_r = P_r(-\Delta)$; $D(A_r) = \mathbf{W}^{2,r} \cap \mathbf{W}_0^{1,r} \cap H_r$;
 $D_r^s = \{\mathbf{v} \in H_r; \|\mathbf{v}\|_{D_r^s} \equiv \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^r} + (\int_0^\infty \|A_r e^{-tA_r} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^r}^s)^{\frac{1}{s}} < \infty\}$.

2.6 Modèle d'Oldroyd-B : cas d'un fluide viscoélastique faiblement compressible

Nous nous intéressons à l'écoulement d'un fluide viscoélastique *faiblement compressible* de type Oldroyd-B dans le cas stationnaire ainsi que dans le cas non stationnaire. Notons que ce problème a été déjà étudié dans plusieurs travaux (par exemple [12, 26, 27, 39, 40, 41, 42]). Dans le cas d'un écoulement stationnaire, nous nous intéressons aux singularités du domaine de l'écoulement. Cette singularité joue un rôle très important dans la régularité de la solution obtenue. Dans la partie concernant l'écoulement non stationnaire, nous abordons un problème d'écoulement de fluides compressibles avec des conditions initiales *bien préparées*. Nous démontrons l'existence (et l'unicité) locale et globale dans le cas des données initiales suffisamment petites. Nous étudions aussi la convergence vers le modèle incompressible, lorsque le nombre de Mach tend vers 0.

Nous commençons par établir nos équations. Dans le cas d'un fluide faiblement compressible, nous avons $\operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0$ et nous supposons que $\xi_s = 0$.

D'après l'équation (2.4.3), τ s'écrit

$$\tau = 2\eta_s \mathbf{D} + \tau_e, \quad \tau_e = \tau_p - \left(\frac{2\eta_s}{N} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \mathbf{I}.$$

De (2.4.1), nous pouvons conclure que τ_e vérifie l'équation

$$\tau_e + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}_a \tau_e}{\mathcal{D}t} = 2\eta_p \mathbf{D}.$$

Dans la suite, pour alléger la notation, notons τ_e par τ , alors τ vérifie avec des variables sans dimension :

$$\text{We} \{ \partial_t \tau + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau) \} + \tau = 2\omega \mathbf{D}[\mathbf{u}].$$

2.6.1 Écoulement d'un fluide faiblement compressible stationnaire dans un domaine borné avec des conditions aux bords de type "rentrantes-sortantes"

Plusieurs travaux sont consacrés à l'étude des équations de Navier-Stokes compressible et incompressible ainsi que stationnaire et non stationnaire dans un domaine avec des conditions aux bords de type "rentrantes-sortantes". Citons les travaux de J.R.Kweon et R.B.Kellogg (par exemple [53, 54]) où ils sont intéressés aux équations de Navier-Stokes compressible stationnaire dans plusieurs types de domaines (domaine borné, polygone convexe, polygone non convexe, etc ...) en considérant des conditions "rentrantes-sortantes" au bord. S.Novo, dans [75], est concerné par les équations de Navier-Stokes compressible isentropique et non stationnaire dans un domaine borné de \mathbb{R}^3 avec des conditions (rentrantes) de Dirichlet non homogènes pour la vitesse et la densité. Récemment, F.Boyer et P.Fabrie [7] ont étudié l'existence globale des solutions faibles du problème de Navier-Stokes non homogène incompressible dans un domaine borné dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , avec des conditions sortantes et non linéaires au bord.

Dans ce travail (chapitre 3), nous considérons des écoulements stationnaires de fluides viscoélastiques faiblement compressibles dans un domaine borné Ω dans \mathbb{R}^2 , de frontière Γ . La vitesse $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ est donnée sur Γ , et a priori non identiquement nulle. Tout d'abord, la frontière de notre domaine borné Ω est divisé en deux parties Γ_{in} et Γ_{out} . On définit

$$\Gamma_{in} = \{(x, y) \in \Gamma; \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} < 0\},$$

$$\Gamma_{out} = \{(x, y) \in \Gamma; \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} > 0\},$$

$$\Gamma^* = \{(x, y) \in \Gamma; \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = 0\}.$$

où $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ est le vecteur unitaire normal à $\Gamma = \partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω . Les valeurs de la pression p , et du tenseur des extra-contraintes τ sont données sur Γ_{in} .

La faible de compressibilité va apparaître dans notre choix de ρ . Nous considérons l'approximation de la densité ([35],[36],[40],[93],[94]) obtenue en prenant son développement d'ordre 1 par rapport à la pression :

$$\rho = 1 + \frac{1}{\beta}(p - p^0), \quad (2.6.1)$$

où $\frac{1}{\beta} = - \left(\frac{1}{L_0} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right)_{(p^0, T^0)}$ est le coefficient isotherme de compressibilité, L_0 est une longueur donnée pour une pression p^0 et une température T^0 fixées.

Sous l'hypothèse de faible compressibilité isotherme $\frac{|p - p^0|}{\beta} \ll 1$, nous nous intéressons au système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} -(1 - \omega)(\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{Re}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{div} \tau, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\beta}(\mathbf{u} \cdot \nabla)p = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{We} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\tau + g(\nabla \mathbf{u}, \tau)\} + \tau = 2\varepsilon \mathbf{D}[\mathbf{u}], & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.6.2)$$

Ce système est complété par des conditions aux bords de type "rentrantes-sortantes"

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(x, y), & \text{sur } \Gamma, \\ p = p_0(x, y), & \text{sur } \Gamma_{in}, \\ \tau = \tau_0(x, y), & \text{sur } \Gamma_{in}. \end{cases} \quad (2.6.3)$$

Nous nous inspirons de la méthode proposée par J.R.Kweon et R.B.Kellogg, dans leur article [50], où ils ont démontré l'existence et l'unicité d'une solution des équations de Navier-Stokes dans un domaine borné et dans les espaces de Sobolev $W^{2,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ avec des conditions aux bords de type "rentrantes-sortantes".

Nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.6.1. *Soient $\mathbf{u}_0 = (u_0, 0) \in W^{2,q}(\Omega)$, $p_0 \in W^{2,q}(\Omega)$ et $\tau_0 \in W^{2,q}(\Omega)$ avec $2 < q < 3$. Il existe une constante $\widetilde{\operatorname{Re}}$ dépendant de $\|\mathbf{u}_0\|_{2,q} + \|\mathbf{p}_0\|_{2,q} + \|\tau_0\|_{2,q}$ telle que si $\operatorname{Re} \leq \widetilde{\operatorname{Re}}$, alors le système (2.6.2)-(2.6.3) admet une solution unique $(\mathbf{u}, p, \tau) \in W^{2,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ vérifiant de plus*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_{2,q} + \|p - p_0\|_{1,q} + \|\tau - \tau_0\|_{1,q} \leq C,$$

où $C = C(\widetilde{\operatorname{Re}}, \beta, \Omega, \operatorname{We}, \omega, C_0)$.

La démonstration du théorème ci-dessus consiste à introduire deux points fixes pour le système (2.6.2)-(2.6.3), pour en extraire trois problèmes plus simples à résoudre : un système elliptique résolu par la méthode de Lax-Milgram et deux équations de transport que seront résolues en faisant une intégration le long des courbes caractéristiques. Nous construisons des applications contractantes dans des espaces de Banach en utilisant le théorème du point fixe.

2.6.2 Écoulements de fluides viscoélastiques viscoélastiques, stationnaires et faiblement compressibles de type Oldroyd dans un domaine borné avec coins

Dans le chapitre 4, nous considérons des écoulements stationnaires de fluides viscoélastiques faiblement compressibles dans un domaine borné Ω de \mathbb{R}^2 ayant des coins. La vitesse sur le bord de Ω est supposée nulle. Nazarov, Novotný et Pileckas dans [80], ont résolu le problème de Navier-Stokes dans un domaine borné ayant un coin convexe. Dans [54], Kweon et Kellogg ont montré l'existence et l'unicité de solutions du problème de Navier-Stokes dans un polygone avec des conditions de type "rentrantes-sortantes" au bord. Récemment, S.Monniaux [74] a démontré l'existence d'une solution forte locale pour les équations de Navier-Stokes dans un domaine arbitraire ouvert de \mathbb{R}^3 sans imposer a priori de régularité au bord.

Nous nous intéressons au problème suivant,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(1-\omega)(\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{Re}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \mathbf{div} \tau, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{We} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau)\} + \tau = 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{u}), & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2.6.4)$$

Nous considérons l'approximation de la densité précédente (2.6.1),

$$\rho = 1 + \frac{1}{\beta}(p - p^0), \quad (2.6.5)$$

en notant ici $1/\beta$ le coefficient isotherme de compressibilité.

Avant de remplacer ρ par sa valeur et de faire les approximations, nous remarquons que, sous la condition (2.6.4)₄, l'équation (2.6.4)₂ est équivalente à l'équation

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0, \quad (2.6.6)$$

où $|\Omega|$ désigne la mesure de l'ouvert Ω .

Remplaçons ρ par sa valeur donnée dans (2.6.5), l'égalité (2.6.6) s'écrit

$$\frac{1}{\beta}(\mathbf{u} \cdot \nabla)p + \left(1 + \frac{p - p^0}{\beta}\right) \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(1 + \frac{p - p^0}{\beta}\right) \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1}{\beta|\Omega|} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla)p = 0. \quad (2.6.7)$$

Sous l'hypothèse de faible compressibilité isotherme $\frac{|p - p^0|}{\beta} \ll 1$, comme $\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, nous pouvons approcher (2.6.7) par la condition suivante

$$\operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\beta}(\mathbf{u} \cdot \nabla)p - \frac{1}{\beta|\Omega|} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla)p = 0. \quad (2.6.8)$$

Définissons l'opérateur de projection Π par

$$\Pi(f) = f - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f \, dx.$$

L'équation (2.6.8) s'écrit :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\beta} \Pi((\mathbf{u} \cdot \nabla)p) = 0.$$

Finalement, nous nous intéressons au système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(1-\omega)(\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{Re}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \operatorname{div} \tau, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\beta} \Pi((\mathbf{u} \cdot \nabla)p) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{We} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau)\} + \tau = 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{u}), & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (2.6.9)$$

Dans le cas où le domaine Ω est borné régulier, Talhouk dans [94] a démontré le résultat suivant.

Théorème 2.6.2 (Théorème 1, [94]). *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $\Omega \in C^{k+2}$ un domaine borné de \mathbb{R}^N ($N = 2, 3$), $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^k(\Omega)$ et $0 \leq \omega < 1$. Alors, il existe trois constantes $\gamma_0, \gamma_1, \beta_1$ telles que pour tous \mathbf{f} et β vérifiant $\|\mathbf{f}\|_k \leq \gamma_1$ et $\beta > \beta_1$, le problème (2.6.9) admet une unique solution dans la boule*

$$B_{\gamma_0}^{k+2} = \{(\mathbf{u}, p, \tau) \in \mathbf{H}^{k+2}(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times (H^{k+1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R}) \times \mathbf{H}^{k+1}(\Omega), \\ \|\mathbf{u}\|_{k+2} + \|p\|_{k+1} + \|\tau\|_{k+1} \leq \gamma_0\}.$$

Nous nous intéressons au cas d'un domaine Ω borné singulier. Nous remarquons que la solution (\mathbf{u}, p, τ) du problème (2.6.9) ne peut pas être dans le produit des espaces de Sobolev $\mathbf{H}^{k+2}(\Omega) \times H^{k+1}(\Omega) \times \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$. C'est pourquoi, nous sommes amenés à chercher des solutions du système (2.6.9) dans des espaces de Sobolev avec poids.

Nous avons démontré le résultat d'existence de solutions suivant.

Théorème 2.6.3. *Soit Ω est un domaine ⁶ borné de \mathbb{R}^2 . Supposons que $\theta_0 \in]0, \pi[$, $\omega_0 = \frac{\pi}{\theta_0} > 1$.*

Soient

$$\mathbf{f} \in \mathcal{V}_{\beta}^{k,2}(\Omega), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2, \quad \omega \in]0, 1[, \quad \sigma > 0, \\ \xi \in]k+1 - \omega_0, k[, \quad \xi \neq k+2 - m\omega_0, \quad \forall m = 2, 3, \dots$$

Alors il existe trois constantes positives $\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ et \mathfrak{f} telles que pour tous \mathbf{f} et σ vérifiant

$$\|\mathbf{f}\|_{k,2,\xi} < \mathfrak{f}, \quad \beta > \tilde{\beta},$$

⁶ Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^2 , de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ ayant un seul coin, qui sera un angle \mathcal{P} de mesure θ_0 , de sommet placé en l'origine O .

le problème (2.6.9) admet une unique solution (\mathbf{u}, p, τ) dans la boule⁷

$$\mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k,\xi} = \left\{ (\mathbf{u}, p, \tau) \in \mathcal{V}_{\xi}^{k+2,2}(\Omega) \times \mathcal{V}_{\xi}^{k+1,2}(\Omega)/\mathbb{R} \times \mathcal{V}_{\xi}^{k+1,2}(\Omega), \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \right. \\ \left. \|(\mathbf{u}, p, \tau)\|_{k,\xi} \leq \tilde{\gamma} \right\}.$$

Idée de la preuve

Tout d'abord, nous commençons par linéariser le problème non linéaire (2.6.9) : nous mettons le problème linéarisé sous la forme

$$\begin{cases} -(\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) + \nabla(L[\mathbf{w}]^{-1}p) = \mathbf{F}_1, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\beta} \Pi((\mathbf{w} \cdot \nabla)p) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \tau + \operatorname{We}(\mathbf{w} \cdot \nabla)\tau = \mathbf{H} + 2\omega \mathbf{D}[\mathbf{u}], & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.6.10)$$

où $L[\mathbf{w}]^{-1} = (1 - \omega)I + \omega(I + \operatorname{We}(\mathbf{w} \cdot \nabla))^{-1}$.

Pour étudier le problème (2.6.10), nous utilisons une décomposition de Helmholtz, et un argument de point fixe. La décomposition de Helmholtz nous permet de séparer la partie compressible de la partie incompressible du vecteur vitesse \mathbf{u} de la manière suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\varphi, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{/\partial\Omega} = 0, \quad \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}_{/\partial\Omega} = 0, \quad \nabla\varphi|_{\partial\Omega} = -\mathbf{v}|_{\partial\Omega}.$$

où \mathbf{v} est champ de vitesse incompressible et $\nabla\varphi$ est champ de vitesse compressible.

Maintenant, nous définissons formellement l'opérateur,

$$\mathcal{S} : \eta \longrightarrow p$$

de la façon suivante.

η étant donné, nous résolvons d'abord le problème de Neumann,

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \frac{1}{\beta} \Pi((\mathbf{w} \cdot \nabla)\eta), & \text{dans } \Omega, \\ \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.6.11)$$

Nous démontrons que la solution φ du problème (2.6.11), dans le domaine Ω ayant un coin, est de la forme

$$\varphi = \varphi_{\mathbb{R}} + \varphi_{\mathbb{S}},$$

⁷ Soit ξ un nombre réel. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout p vérifiant $1 \leq p \leq \infty$, nous définissons l'espace de Sobolev avec poids $\mathcal{V}_{\xi}^{k,p}(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions dont la norme est définie par :

$$\|u\|_{k,p,\xi}^p = \sum_{i=0}^k \left\| r^{\xi-k+i} u \right\|_{i,p}^p,$$

où $r = |x|$.

avec

$$\varphi_R \in \mathcal{V}_\xi^{k+3,2}(\Omega), \quad \varphi_S = \sum_{j=1}^m c_j r^j \omega_0 \cos(j \omega_0 \theta) \text{ et } (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Une fois que φ est connu, nous résolvons le problème de Stokes,

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v} + \nabla \left(L[\mathbf{w}]^{-1} p + \frac{2}{\beta} \Pi((\mathbf{w} \cdot \nabla) \eta) \right) = \mathbf{F}_1, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{v} = -\nabla \varphi, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.6.12)$$

Dans le domaine Ω singulier, la solution (\mathbf{v}, q) du problème (2.6.12) est donnée par ⁸

$$\mathbf{v} \in \mathfrak{D}_\xi^{k+2,2}(\Omega), \quad q \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega).$$

Après résolution du problème (2.6.12), \mathbf{v} et q seront connus, alors nous pouvons chercher p et τ comme étant les solutions des deux équations de transport :

$$L[\mathbf{w}]^{-1} p + \frac{2}{\beta} (\mathbf{w} \cdot \nabla) p = q, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.6.13)$$

et

$$\tau + \operatorname{We}(\mathbf{w} \cdot \nabla) \tau = 2\varepsilon \mathbf{D}[\mathbf{v} + \nabla \varphi] + \mathbf{H} = \mathbf{R}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.6.14)$$

Le problème de transport (2.6.13) n'est pas classique, il contient deux difficultés principales : une difficulté liée au terme $L[\mathbf{w}]^{-1}$ et une autre difficulté liée au domaine Ω qui a un coin convexe.

Pour démontrer l'existence des solutions, nous démontrons l'existence des solutions de l'équation approchée

$$L[\mathbf{w}_s]^{-1} p_s + \frac{2}{\beta} (\mathbf{w}_s \cdot \nabla) p_s = q_s, \quad \text{dans } \Omega_s,$$

où $\{\Omega_s\}_{s>0}$ est une famille de sous-domaines définie par les conditions :

$$\Omega_s \subset \Omega \setminus C(0, s), \quad \Omega_{s_1} \subset \Omega_{s_2} \quad (s_2 < s_1),$$

$$\partial \Omega_s \in C^{k+2}, \quad \partial \Omega_s \subset \overline{\Omega}, \quad \partial \Omega_s \setminus C(0, 2s) = \partial \Omega \setminus C(0, 2s),$$

où $C(0, s)$ est un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon s . Puis nous passons à la limite, ce qui définit une solution sur Ω tout entier et nous donnons deux estimations de la solution.

Finalement, nous utilisons le problème linéaire (2.6.10) pour résoudre le problème non linéaire (2.6.9).

⁸ $\mathfrak{D}_\xi^{k+2,2}(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega); \mathbf{v} = \mathbf{v}_R + \sum_{j=1}^m c_j \nabla [r^j \omega_0 \cos(j \omega_0 \theta)] \text{ où } \mathbf{v}_R \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega) \text{ et } c_j \in \mathbb{R} \right\}.$

Cet espace est muni de la norme suivante :

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{D}_\xi^{k+2,2}(\Omega)}^2 = \|\mathbf{v}_R\|_{k+2,2,\xi}^2 + \sum_{j=1}^m |c_j|^2.$$

2.6.3 Existence globale de solutions régulières à petites données et limite incompressible pour des écoulements de fluides viscoélastiques faiblement compressibles

Le fait de négliger la compressibilité d'un fluide est très fréquent dans l'étude des écoulements. On peut montrer que pour des écoulements dont le nombre de Mach est inférieur à 0.2, la vitesse obtenue en considérant le fluide incompressible ne diffère pas de plus de 1% de la valeur trouvée en prenant en compte la compressibilité. Par exemple, pour une voiture roulant à une vitesse de 130 km/h, avec la célérité du son dans l'air $c=340$ m/s, le nombre de Mach est d'ordre 0.1. On se situe donc dans le cas du régime incompressible. Par contre, pour un avion, le nombre de Mach est d'ordre 0.8, ce qui impose la prise en compte l'effet de compressibilité. Une propriété très connue est le fameux « bang sonique » entendu lorsqu'un avion franchit le « mur du son », c'est-à-dire lorsque le nombre de Mach vaut 1. Ce bruit signale la compression brutale (ondes de choc) subie par l'air autour de l'avion en mouvement à ces vitesses très importantes.

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier les écoulements non stationnaires de fluides viscoélastiques faiblement compressibles à faible nombre de Mach dans un domaine borné régulier Ω de \mathbb{R}^3 . Le but est d'obtenir un résultat d'existence globale des solutions régulières avec des données petites ainsi que la convergence vers le modèle incompressible, lorsque le nombre de Mach tend vers 0, via l'obtention d'estimations uniformes par rapport au nombre de Mach.

L'étude mathématique de la limite incompressible remonte aux travaux de D.G.Ebin [26], S.Klainerman et A.Majda [61, 62], S.Schochet [91], H.Isozaki [47] et beaucoup d'autres. Nous limitons notre travail au cas des données initiales bien préparées. Le cas de données non préparées ou mal préparées est plus difficile. La raison est que la convergence ne peut pas avoir lieu uniformément en temps. Citons les travaux de P-L.Lions et N.Masmoudi [66, 67] pour le problème de Navier-Stokes isentropique. Pour ce qui est des solutions faibles, nous rencontrons plusieurs travaux, notamment ceux de B.Desjardins et E.Grenier [21], D.Bresch, B.Desjardins et D.Gérard-Varet [14], D.A.Vorotnikov et V.G.Zvyagin [99]. Quant aux solutions fortes de régularité minimale, citons les travaux de R.Danchin [19, 20].

Récemment, plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude de la limite incompressible de divers modèles (Euler, Navier-Stokes, Oldroyd,...). Citons par exemple celui de Z.Lei [65] (modèle d'Oldroyd) ainsi que les travaux de I.Gallagher [31] et T.Alazard [3, 4] (équations d'Euler). En 2007, E.Feireisl et A.Novotný [30] ont étudié les solutions du système de Navier-Stokes-Fourier, complété avec des données mal préparées et à faible nombre de Mach, sur un intervalle arbitraire de temps ainsi que la convergence du modèle vers les équations de Navier-Stokes incompressibles.

Notons ε le nombre de Mach, défini comme étant le rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse du son dans le fluide. Nous nous intéressons au cas des fluides subsoniques, i.e. $\varepsilon \in]0, 1[$. On suppose que la densité ρ^ε et le nombre de Mach ε sont reliés entre eux par la relation suivante :

$$\rho^\varepsilon(x, t) = \alpha + \varepsilon^2 \sigma(x, t).$$

Nous nous intéressons au système non stationnaire de la forme,

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon (\mathbf{u}'^\varepsilon + (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{u}^\varepsilon) + (1 - \omega) [\Delta \mathbf{u}^\varepsilon + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon] + \nabla p^\varepsilon &= \rho^\varepsilon \mathbf{f} + \operatorname{div} \tau^\varepsilon, & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \rho^\varepsilon + \operatorname{div} (\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) &= 0, & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \tau^\varepsilon + \operatorname{We} \{ \tau'^\varepsilon + (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla) \tau^\varepsilon + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \tau^\varepsilon) \} &= 2\alpha\omega \mathbf{D}[\mathbf{u}^\varepsilon], & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega. \end{cases} \quad (2.6.15)$$

Ce système est complété par la condition aux bords homogène,

$$\mathbf{u}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Sigma = \partial\Omega \times]0, T[,$$

et des conditions initiales

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon(x, 0) &= \mathbf{u}_0^\varepsilon(x), & \text{dans } \Omega, \\ \rho^\varepsilon(x, 0) &= \rho_0^\varepsilon(x), & \text{dans } \Omega, \\ \tau^\varepsilon(x, 0) &= \tau_0^\varepsilon(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Nous fixons un ε et nous définissons les données initiales $(\rho_0^\varepsilon, \mathbf{u}_0^\varepsilon, \tau_0^\varepsilon)$ comme des perturbations régulières d'un état de référence $(\alpha, \mathbf{v}_0, \mathbf{S}_0)$,

$$\begin{aligned} \rho_0^\varepsilon &= \alpha + \varepsilon^2 \sigma_0, \\ \mathbf{u}_0^\varepsilon &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^\varepsilon, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_0^\varepsilon - \mathbf{v}_0\| = 0, \\ \tau_0^\varepsilon &= \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0^\varepsilon, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\tau_0^\varepsilon - \mathbf{S}_0\| = 0, \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ est une norme bien choisie.

Ces conditions, dites *bien préparées*, permettent aux données initiales de converger vers les conditions initiales d'un écoulement incompressible. Tout d'abord, il faut établir l'existence locale des solutions régulières $(\mathbf{u}^\varepsilon, \sigma^\varepsilon, \tau^\varepsilon)$ du problème (2.6.3), ce que l'on peut faire par la méthode classique de point fixe. Il suffit d'étudier trois problèmes linéaires : un pour la vitesse \mathbf{u} et deux équations de transport en densité σ et en contraintes τ , puis d'utiliser une méthode basée sur l'application du théorème du point fixe de Schauder.

La deuxième étape consiste à établir l'existence globale de solutions sous certaines conditions sur les données initiales. Pour cela, nous nous intéressons à la convergence, c'est-à-dire au comportement de notre solution $(\mathbf{u}^\varepsilon, \sigma^\varepsilon, \tau^\varepsilon)$ lorsque le nombre de Mach ε tend vers zéro. Ceci nécessite de contrôler les variables uniformément en ε , afin d'utiliser des résultats de convergences de topologies faibles et ensuite en déduire des convergences fortes. Un point crucial pour établir le résultat d'existence globale est de trouver une inégalité différentielle du type

$$z'(t) + w(t) \leq \mathbf{c}_1 w(t) \left[z_1(t) + z_1^2(t) \right] + \mathbf{c}_2 \mathfrak{Z}(t),$$

où \mathbf{c}_1 et \mathbf{c}_2 sont des constantes indépendantes de ε , $z(t)$ et $w(t)$ sont deux fonctions continues et $\mathfrak{Z}(t)$ est une fonction dépendant des forces \mathbf{f} . Une fois qu'on a cette inégalité, nous pouvons montrer que si $z(0) \leq \mathbf{c}_3$ ainsi que $\mathfrak{Z}(t)$ suffisamment petit alors la fonction $z(t)$ elle-même vérifie $z(t) \leq \mathbf{c}_3$ et ceci nous permet d'étendre la solution pour tous les temps positifs. Cependant trouver une telle estimation comporte de nombreuses difficultés.

Au cours de nos estimations, un terme en $\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_2^2$ apparait, pour lequel nous allons nous

inspirer du travaux de A.Valli [97] (voir aussi H.Bessaih [13]). La méthode consiste à estimer ce terme dans $\overset{\circ}{\Omega}$ et sur $\partial\Omega$. Un autre terme gênant, qui n'existe pas dans les travaux de Valli et Bessaih, est $\|\mathbf{div}\tau\|_1^2$, qui a un comportement similaire à $\|\mathbf{div}\mathbf{u}\|_2^2$. La méthode intuitive serait d'appliquer la même technique pour les deux termes. Mais le couplage entre \mathbf{u} et τ provenant des première et troisième équations nous en empêche. Pour pallier à la difficulté, nous avons appliqué la technique de Valli pour estimer $\|\mathbf{div}\mathbf{u}\|_2^2$ tout en gardant à sa place le terme $(\omega\|\mathbf{div}\tau\|_1^2)$. A la fin des estimations, nous parvenons à contrôler le terme $\|\mathbf{div}\tau\|_1^2$ en diminuant ω . Notons qu'un changement de cartes locales, fait sur $\partial\Omega$, nous permet de contrôler les dérivées normales et tangentielles de $\mathbf{div}\mathbf{u}$.

L'inégalité (2.6.16) étant démontrée, nous pouvons déduire l'existence globale de solutions avec des données initiales petites. Le problème maintenant est de prouver que la solution $(\rho^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \tau^\varepsilon)$ tend vers la solution unique $(1, \mathbf{v}, \mathbf{S})$ du problème limite,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha(\mathbf{v}' + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) - (1 - \omega)\Delta\mathbf{v} + \nabla\pi & = \alpha\mathbf{f} + \mathbf{div}\mathbf{S}, \\ \mathbf{div}\mathbf{v} & = 0, \\ \mathbf{S} + \text{We}\{\mathbf{S}' + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{S} + \mathbf{g}(\nabla\mathbf{v}, \mathbf{S})\} & = 2\omega\mathbf{D}[\mathbf{v}], \\ \rho & = \alpha, \\ \mathbf{v} & = 0, \\ \mathbf{v}(0, x) & = \mathbf{v}_0(x), \\ \mathbf{S}(0, x) & = \mathbf{S}_0(x), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma, \\ \text{sur } \Omega, \\ \text{sur } \Omega. \end{array} \quad (2.6.16)$$

Les estimations uniformes en ε , cherchées pour établir l'existence globale, nous permettent de déduire que $\{(\mathbf{u}^\varepsilon, \varepsilon\sigma^\varepsilon, \tau^\varepsilon)\}_\varepsilon$ est une suite uniformément bornée et par suite on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement-étoile vers $(\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{S})$ lorsque ε tend vers zéro où \mathbf{p} est la limite faible étoile (quand ε tend vers zéro) de $\varepsilon\sigma^\varepsilon$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^2(\Omega))$.

Deuxième partie

Analyse mathématique de quelques écoulements de fluides viscoélastiques faiblement compressibles et stationnaires dans un domaine singulier

C'est en rentrant dans l'objet qu'on rentre dans sa propre peau ...

Respecter l'objet !

Tout doit être construit ... composé de parties qui forment un tout. Un arbre comme un corps humain, un corps humain comme une cathédrale.

J'ajoute, je retranche, je déplace

MATISSE & PICASSO

Chapitre 3

Écoulements de fluides viscoélastiques, stationnaires et faiblement compressibles à travers un domaine borné avec des conditions aux bords de type "rentrantes-sortantes"

WE study a steady isothermal motion of a nonlinear barotropic compressible viscoelastic fluid of Oldroyd type in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ with non-zero velocities on the boundary of Ω . We suppose that the pressure p and the extra-stress tensor τ are prescribed on the part of the boundary corresponding to entering velocity. A uniqueness and existence result for the solution (\mathbf{u}, p, τ) is established in $W^{2,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ with $2 < q < 3$. The proof follows from an analysis of a linearized problem. The fixed point theorem is used to establish the existence of a solution. The solution of two transport equations for p and τ are obtained by integration along streamlines.

3.1 Introduction

DANS ce travail, nous étudions des écoulements de fluides stationnaires viscoélastiques de type Oldroyd dans le cas où la frontière est divisée en deux parties Γ_{in} et Γ_{out} . Les valeurs de la pression p et du tenseur des extra contraintes τ sont données sur Γ_{in} . Notre objectif est de prouver un résultat d'unicité et d'existence pour le problème (3.2.1)-(3.2.2).

Pour cela, nous commençons par linéariser notre problème deux fois pour en extraire trois problèmes plus simples à résoudre : un système elliptique résolu par la méthode variationnelle et deux équations de transport résolues en faisant une intégration le long des courbes caractéristiques. Puis, nous introduisons deux algorithmes de points fixes pour résoudre, le problème linéarisé et le problème non linéaire.

Le travail est organisé comme suit. Après la modélisation du problème et la description du domaine dans la section 3.2, nous présentons notre résultat principal et nos notations dans la

section 3.3. La section 3.4 consiste en une reformulation du problème suite à un changement de variables. Nous rappelons quelques résultats auxiliaires et nous résolvons deux équations de transport dans la section 3.5. Des estimations utiles sont données dans la section 4.3.2. Enfin, dans les sections 3.6 et 3.8 nous prouvons les théorèmes principaux : le premier concerne le problème linéarisé et le second le système non linéaire des équations correspondant à l'ensemble original d'équations.

3.2 Modélisation

3.2.1 Écoulement de fluides viscoélastiques compressibles

Nous considérons des écoulements stationnaires de fluides viscoélastiques supposés faiblement compressibles dans un domaine borné Ω dans \mathbb{R}^2 , modélisés par un système couplant les équations de Navier-Stokes et une équation constitutive différentielle pour le tenseur des extra contraintes τ . Nous nous limiterons à des fluides barotropiques (i.e. la loi de pression ne dépend que de la densité) non conducteur de chaleur et isothermique. La vitesse au bord de Ω est donnée non nulle.

Nous considérons le modèle donné par le système d'équations aux dérivées partielles suivant (cf. [38], [40],[93], [94]) :

$$\begin{cases} -\mu_s(\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{div} \tau, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ \lambda_1 \{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau + g(\nabla \mathbf{u}, \tau)\} + \tau &= 2\mu_p \mathbf{D}(\mathbf{u}), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Ce système est couplé avec des conditions aux bords de type "rentrantes-sortantes" :

$$\begin{cases} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0(x, y), & \text{sur } \Gamma, \\ p &= p_0(x, y), & \text{sur } \Gamma_{in}, \\ \tau &= \tau_0(x, y), & \text{sur } \Gamma_{in}. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Le système (3.2.1)-(3.2.2) est satisfait dans un ouvert régulier borné Ω de \mathbb{R}^2 . Le bord de ce domaine est noté Γ alors que n désigne la normale sortante à ce bord. Les inconnues sont : le vecteur vitesse $\mathbf{u} = (u, v)$, la pression p , et le tenseur des extra contraintes τ . μ_s et μ_p sont deux réels positifs, respectivement les viscosités de solvant et de polymère, la viscosité totale étant $\mu = \mu_s + \mu_p$. $\lambda_1 > 0$ est un temps de relaxation. g est une fonctionnelle provenant de la dérivée objective d'un tenseur, d'expression

$$\mathbf{g}(\nabla u, \tau) = \tau W(u) - W(u) \tau - a(\mathbf{D}(u) \tau + \tau \mathbf{D}(u)), \quad (3.2.3)$$

où $W(u) = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla^T u)$ et $\mathbf{D}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$ sont respectivement le tenseur des taux de rotation et celui des taux de déformation, a est un paramètre vérifiant $a \in [-1, 1]$.

Les fonctions $\mathbf{u}_0(x, y)$, $p_0(x, y)$ et $\tau_0(x, y)$ sont des données définies sur Ω et régulières au bord du domaine Ω . On définit

$$\Gamma_{in} = \{(x, y) \in \Gamma; \mathbf{u}_0 \cdot n < 0\}, \quad (3.2.4)$$

où $n = (n_1, n_2)$ est le vecteur unitaire normal à Γ .

Notons que les conditions $p = p_0(x, y)$ et $\tau = \tau_0(x, y)$ seront absents dans le cas où $\mathbf{u}_0 = 0$ i.e dans le cas des conditions aux bords homogènes.

3.2.2 Équations sans dimension

Nous considérons des quantités physiques sans dimension, en posant :

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^*}{U}, \quad p = \frac{p^*L}{\mu U}, \quad \tau = \frac{\tau^*L}{\mu U},$$

et nous définissons trois nombres sans dimension, le nombre de Reynolds Re , le nombre de Weissenberg We et un nombre associé aux viscosités ω :

$$Re = \frac{\rho_0 U L}{\mu}, \quad We = \frac{\lambda_1 U}{L}, \quad \omega = \frac{\mu_p}{\mu},$$

où U et L sont respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques du fluide.

En utilisant les variables sans dimension toujours notées \mathbf{u} , p , τ , ρ , nous écrivons le problème (3.2.1)-(3.2.2),

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(1 - \omega)(\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) + Re(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{div} \tau, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ We \{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau + g(\nabla \mathbf{u}, \tau)\} + \tau = 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{u}), & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(x, y), & \text{sur } \Gamma, \\ p = p_0(x, y), & \text{sur } \Gamma_{in}, \\ \tau = \tau_0(x, y), & \text{sur } \Gamma_{in}. \end{array} \right. \quad (3.2.5)$$

Dans les cas de fluides incompressibles, C. Guillopé et J.-C.Saut, dans [39], ont prouvé l'existence et la stabilité des écoulements faiblement viscoélastiques stationnaires proches des écoulements newtoniens en supposant que la viscosité est assez grande. D'autre part, dans les cas de fluides faiblement compressibles, R.Talhok, dans [93], a établi l'existence et l'unicité des écoulements stationnaires pour les modèles de Jeffreys et Maxwell, associés à une petite force extérieure et une condition de vitesse nulle au bord dans un domaine $\subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ou 3). Dans [50], J.R. Kweon et R.B. Kellogg ont étudié les équations de Navier-Stokes compressibles barotropiques dans un domaine borné et espaces de Sobolev $W^{2,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ avec une condition de vitesse non nulle au bord d'un domaine de \mathbb{R}^2 .

Nous démontrons l'existence et l'unicité des solutions stationnaires dans des espaces $W^{1,q}(\Omega)$ et $W^{2,q}(\Omega)$ avec $2 < q < 3$.

3.2.3 Écoulement de fluides faiblement compressibles

Les équations du problème (3.2.1)-(3.2.2) sont complétées par une équation d'état reliant la pression à la densité. Supposons que la compressibilité $1/\beta$ du fluide est petite. Nous allons considérer l'approximation de la densité ([35],[36],[40],[93],[94]) obtenue en prenant son développement d'ordre 1 par rapport à la pression :

$$\rho = 1 + \frac{1}{\beta}(p - p^0), \quad (3.2.6)$$

où $\frac{1}{\beta} = - \left(\frac{1}{L_0} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right)_{(p^0, T^0)}$ est le coefficient isotherme de compressibilité, L_0 est une longueur donnée pour une pression p^0 et une température T^0 fixées.

Sous l'hypothèse de faible compressibilité isotherme $\frac{|p - p^0|}{\beta} \ll 1$, nous nous intéressons au système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(1 - \omega)(\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{Re}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{div} \tau, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\beta}(\mathbf{u} \cdot \nabla) p = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{We} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau + g(\nabla \mathbf{u}, \tau)\} + \tau = 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{u}), & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(x, y), & \text{sur } \Gamma, \\ p = p_0(x, y), & \text{sur } \Gamma_{in}, \\ \tau = \tau_0(x, y), & \text{sur } \Gamma_{in}. \end{array} \right. \quad (3.2.7)$$

3.2.4 Description du domaine

Nous définissons Γ^* et Γ_{out} par :

$$\Gamma_{out} = \{(x, y) \in \Gamma; \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} > 0\}, \quad (3.2.8)$$

$$\Gamma^* = \{(x, y) \in \Gamma; \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = 0\}. \quad (3.2.9)$$

Pour simplifier, nous supposons que $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)$ avec $v_0(x, y) \equiv 0$ et $u_0(x, y) \geq C_0 > 0$ où C_0 est une constante fixée.

Sur Γ^* , nous imposons aussi les deux conditions suivantes :

Condition A : Γ^* est constitué des deux points seulement (x^*, y^*) et (x_*, y_*) .

Dans ce cas, Γ sera divisé en deux arcs connexes, définis par les graphes de deux fonctions δ_- et δ_+ , telles que :

$$\Gamma_{in} = \{(\delta_-(y), y) \in \Gamma; y_* \leq y \leq y^*\}, \quad (3.2.10)$$

$$\Gamma_{out} = \{(\delta_+(y), y) \in \Gamma; y_* \leq y \leq y^*\}, \quad (3.2.11)$$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \delta_-(y) < x < \delta_+(y), y_* \leq y \leq y^*\}. \quad (3.2.12)$$

Les fonctions δ_- et δ_+ sont supposées définies, continues sur l'intervalle $[y_*, y^*]$, dérivables sur $]y_*, y^*[$.

Sur Γ_{in} , nous avons

$$n(\delta_-(y), y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta'_-(y)^2}}(-1, \delta'_-(y)). \quad (3.2.13)$$

Ainsi dans un voisinage de (x^*, y^*) , Γ est le graphe d'une fonction $y = \epsilon_+(x)$, et au voisinage de (x_*, y_*) , Γ est le graphe d'une fonction $y = \epsilon_-(x)$. Au voisinage de (x^*, y^*) et (x_*, y_*) , nous définissons $\mu(x) = (u_0 \cdot \mathbf{n})(x, \epsilon(x))$ où ϵ est égal à ϵ_- ou ϵ_+ . De plus, nous avons :

$$n(\epsilon_{\pm}(x), x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon'_{\pm}(x)^2}}(-\epsilon'_{\pm}(x), \pm 1). \quad (3.2.14)$$

La deuxième condition à imposer est :

Condition B : $\mu'(x_*) \neq 0$ et $\mu'(x^*) \neq 0$.

On définit la distance entre Γ^* et un point quelconque $(\delta_-(y), y)$ de Γ_{in} par :

$$d(y) \equiv \min \left\{ \sqrt{(y - y^*)^2 + (\delta_-(y) - x^*)^2}, \sqrt{(y - y_*)^2 + (\delta_-(y) - x_*)^2} \right\}. \quad (3.2.15)$$

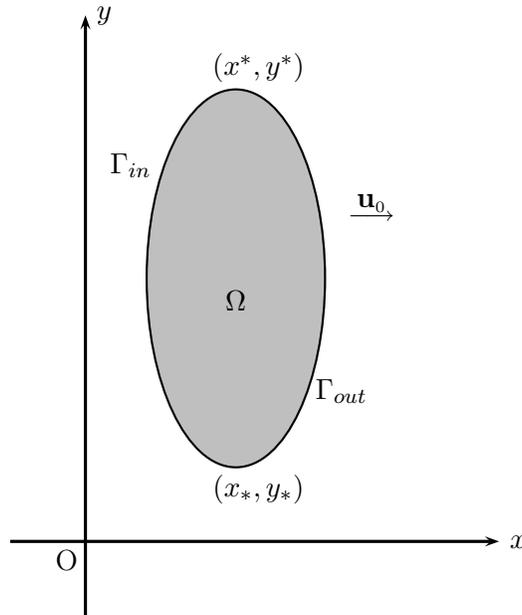


FIG. 3.1 – Exemple de domaine Ω .

Nous utiliserons deux lemmes dont les démonstrations se trouvent dans [50].

Lemme 3.2.1. *On suppose la condition B vérifiée. Alors il existe deux constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que*

$$C_1 d(y) \leq \min\{|y - y^*|^{\frac{1}{2}}, |y - y_*|^{\frac{1}{2}}\} \leq C_2 d(y), \quad (3.2.16)$$

pour tout y tel que $(\delta_-(y), y) \in \Gamma_{in}$.

Lemme 3.2.2. *On suppose que la condition B est vérifiée. Soit V^* un voisinage de Γ^* dans Γ_{in} . Alors, il existe deux constantes \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 strictement positives telles que*

$$\mathcal{M}_1 d(y) \leq |\mu(\delta_-(y))| \leq \mathcal{M}_2 d(y), \quad (3.2.17)$$

pour tout $(\delta_-(y), y) \in V^*$ avec \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 .

3.3 Notations et résultat

3.3.1 Notations, espaces et normes

Dans toute la suite, c_* dénote une constante dépendant de Ω, k, q et provenant des inclusions de Sobolev. Les autres constantes seront précisées lorsque la notation sera utilisée.

Nous utiliserons les espaces de Sobolev, normes et notations suivantes (voir par exemple [1]). Si u est une fonction ou un vecteur défini presque partout sur Ω , nous définissons

$$\begin{aligned} \|u\|_0 &\equiv \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ et } \mathcal{L}^2(\Omega) = \{u; \|u\|_0 < +\infty\}, \\ \|u\|_k &\equiv \sum_{j=0}^k \|\nabla^j u\|_0 \text{ et } H^k(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^2(\Omega); \|u\|_k < +\infty\}, \\ \|u\|_{-1} &\equiv \sup \{ \langle u, v \rangle; v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_1 = 1 \}, \\ \|u\|_{0,q} &\equiv \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \text{ et } \mathcal{L}^q(\Omega) = \{u; \|u\|_{0,q} < +\infty\}, \\ \|u\|_{k,q} &\equiv \sum_{j=0}^k \|\nabla^j u\|_q \text{ et } W^{k,q}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^q(\Omega); \|u\|_{k,q} < +\infty\}, \\ \|u\|_{-1,q} &\equiv \sup \left\{ \langle u, v \rangle; v \in W_0^{1,q'}(\Omega), \|v\|_{1,q'} = 1, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \right\}, \\ \|u\|_{\infty} &\equiv \sup \{ |u(x)|; x \in \Omega \} \text{ et } \|u\|_{k,\infty} \equiv \sum_{j=0}^k \|\nabla^j u\|_{\infty}. \end{aligned}$$

On dénote par $W_0^{k,q}(\Omega) = \{u \in W^{k,q}(\Omega); u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ et $W^{k-\frac{1}{q},q,\Gamma}(\Gamma)$ l'espace des traces des fonctions de $W^{k,q}(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|u\|_{k-\frac{1}{q},q,\Gamma} = \sup_{\{v \in W^{k,q}(\Omega) \text{ tel que } v|_{\partial\Omega} = u\}} \|v\|_{k,q}.$$

On définit sur $H_0^1(\Omega)$ la norme $|u|_{1,\Omega}$ tel que $|u|_{1,\Omega} = \|\nabla u\|_0$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.

Si $A = (a_{ij})_{i,j=1,2}$ et $B = (b_{ij})_{i,j=1,2}$ sont deux matrices. On définit le produit matriciel

$$A : B = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} b_{ij},$$

et la norme matricielle

$$|A| = \left(\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La notation $(i)_j$, i et j dans \mathbb{N}^* , dénote la $j^{\text{ème}}$ équation du système (i) . Les espaces de fonctions scalaires ou vectorielles seront notés de la même façon.

3.3.2 Résultat principal

Nous utilisons la méthode proposée par J. R. Kweon et R. B. Kellogg, dans leur article [50], où ils ont démontré l'existence et l'unicité de la solution des équations de Navier-Stokes compressibles barotropiques avec des conditions aux bords de types "rentrante-sortante".

Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 3.3.1. Soient $\mathbf{u}_0 = (u_0, 0) \in W^{2,q}(\Omega)$, $p_0 \in W^{2,q}(\Omega)$ et $\tau_0 \in W^{2,q}(\Omega)$ avec $2 < q < 3$. Il existe une constante $\widetilde{\text{Re}}$ dépendant de $\|\mathbf{u}_0\|_{2,q} + \|\mathbf{p}_0\|_{2,q} + \|\tau_0\|_{2,q}$ telle que si $\text{Re} \leq \widetilde{\text{Re}}$, alors le système (3.2.7) admet une solution unique $(\mathbf{u}, p, \tau) \in W^{2,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ vérifiant de plus

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_{2,q} + \|p - p_0\|_{1,q} + \|\tau - \tau_0\|_{1,q} \leq C, \quad (3.3.1)$$

où $C = C(\widetilde{\text{Re}}, \beta, \Omega, \text{We}, \omega, C_0)$.

La démonstration de ce théorème consiste à linéariser le système (3.2.7), puis à établir l'existence d'un point fixe en construisant des applications contractantes dans des espaces de Banach en utilisant le théorème du point fixe.

3.4 Formulation du problème

3.4.1 Changement de variables

Tout d'abord, nous faisons un changement de variables en posant $\bar{\mathbf{u}} = \text{Re } \mathbf{u} - \text{Re } \mathbf{u}_0$, $\bar{p} = p - p_0$ et $\bar{\tau} = \tau - \tau_0$ dans le système (3.2.7). La première équation devient

$$-(1 - \omega)(\Delta(\text{Re}^{-1} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_0) + \nabla \text{div}(\text{Re}^{-1} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_0)) + \text{Re}((\text{Re}^{-1} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_0) \cdot \nabla)(\text{Re}^{-1} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_0) + \nabla(\bar{p} + p_0) = \text{div}(\bar{\tau} + \tau_0).$$

Pour simplifier l'écriture, nous supprimons les barres sur les fonctions et nous notons $\bar{\mathbf{u}}$ par \mathbf{u} , \bar{p} par p et $\bar{\tau}$ par τ . Ainsi nous obtenons

$$-(1 - \omega) \text{Re}^{-1} (\Delta \mathbf{u} + \nabla \text{div } \mathbf{u}) + \text{Re}^{-1} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \text{div } \tau + \mathbf{f}_0,$$

avec

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_0(\mathbf{u}_0, p_0, \tau_0) = (1 - \omega)(\Delta \mathbf{u}_0 + \nabla \text{div } \mathbf{u}_0) - \text{Re}(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 - \nabla p_0 + \text{div } \tau_0. \quad (3.4.1)$$

La 2^{ème} équation du système (3.2.7) devient

$$\frac{1}{\beta} ((\text{Re}^{-1} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_0) \cdot \nabla)(\bar{p} + p_0) + \text{div}(\text{Re}^{-1} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_0) = 0,$$

ce qui donne après simplification :

$$\frac{1}{\beta} ((\mathbf{u} + \text{Re } \mathbf{u}_0) \cdot \nabla) p + \frac{1}{\beta} (\mathbf{u} \cdot \nabla) p_0 + \text{div } \mathbf{u} = g_0,$$

avec

$$g_0 = g_0(\mathbf{u}_0, p_0) = -\frac{\text{Re}}{\beta} (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) p_0 - \text{Re } \text{div } \mathbf{u}_0. \quad (3.4.2)$$

Pour la 3^{ème} équation, nous obtenons

$$\text{We} \{ ((\text{Re}^{-1} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_0) \cdot \nabla)(\bar{\tau} + \tau_0) + \mathbf{g}(\nabla(\text{Re}^{-1} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_0), (\bar{\tau} + \tau_0)) \} + (\bar{\tau} + \tau_0) = 2\omega \mathbf{D}(\text{Re}^{-1} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_0),$$

ce qui donne après simplification

$$\text{We} \{ ((\mathbf{u} + \text{Re } \mathbf{u}_0) \cdot \nabla) \tau + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau_0 + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, (\tau + \tau_0)) + \text{Re } g(\nabla \mathbf{u}_0, \tau) \} + \text{Re } \tau = \mathbf{h}_0 + 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{u}),$$

avec

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}_0(\mathbf{u}_0, \tau_0) = -\text{Re We} \{(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\tau_0 + \mathbf{g}(\nabla\mathbf{u}_0, \tau_0)\} - \text{Re} \tau_0 + 2\omega \text{Re} \mathbf{D}(\mathbf{u}_0). \quad (3.4.3)$$

Ainsi, avec les notations détaillées ci-dessus, le système (3.2.7) à étudier se met, dans Ω , sous la forme

$$\begin{cases} -(1-\omega)\text{Re}^{-1}(\Delta\mathbf{u} + \nabla\text{div} \mathbf{u}) + \text{Re}^{-1}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{div} \tau + \mathbf{f}_0, \\ \frac{1}{\beta}((\mathbf{u} + \text{Re} \mathbf{u}_0) \cdot \nabla)p + \frac{1}{\beta}(\mathbf{u} \cdot \nabla)p_0 + \text{div} \mathbf{u} &= g_0, \\ \text{We} \{((\mathbf{u} + \text{Re} \mathbf{u}_0) \cdot \nabla)\tau + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\tau_0 + \mathbf{g}(\nabla\mathbf{u}, \tau + \tau_0) + \text{Re} \mathbf{g}(\nabla\mathbf{u}_0, \tau)\} + \text{Re} \tau &= \mathbf{h}_0 + 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{u}), \end{cases} \quad (3.4.4)$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ p = 0, & \text{sur } \Gamma_{in}, \\ \tau = 0, & \text{sur } \Gamma_{in}, \end{cases} \quad (3.4.5)$$

où \mathbf{f}_0 , g_0 et \mathbf{h}_0 sont des fonctions qui ne dépendent que des données.

3.4.2 Linéarisation du problème non linéaire

Pour résoudre le problème non linéaire (3.4.4), nous le reformulerons en un problème de point fixe. Soient $\mathbf{w} = (w^1, w^2)$ et \mathbf{T} respectivement, un vecteur et une matrice donnés tel que $\mathbf{w} = 0$ sur Γ et $\mathbf{T} = 0$ sur Γ_{in} . Nous considérons le système linéaire,

$$\begin{cases} -(1-\varepsilon)\text{Re}^{-1}(\Delta\mathbf{u} + \nabla\text{div} \mathbf{u}) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}_0 + \text{div} \tau - \text{Re}^{-1}(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \\ \text{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\beta}((\mathbf{w} + \text{Re} \mathbf{u}_0) \cdot \nabla)p &= g_0 - \frac{1}{\beta}(\mathbf{w} \cdot \nabla)p_0, \\ \text{We}((\mathbf{w} + \text{Re} \mathbf{u}_0) \cdot \nabla)\tau + \text{Re} \tau &= \mathbf{h}_0 + 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{u}) - \text{We} \mathbf{g}(\nabla\mathbf{w}, \mathbf{T} + \tau_0) \\ &\quad - \text{Re We} g(\nabla\mathbf{u}_0, \mathbf{T}) - \text{We}(\mathbf{w} \cdot \nabla)\tau_0, \\ &\quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 &\text{ sur } \Gamma, \\ p = 0 &\text{ sur } \Gamma_{in}, \\ \tau = 0 &\text{ sur } \Gamma_{in}. \end{cases} \quad (3.4.6)$$

Nous remarquons que si $\mathbf{u}_0 = (u_0, 0)$ et $\mathbf{w} = (w^1, w^2)$ alors $((\mathbf{w} + \text{Re} \mathbf{u}_0) \cdot \nabla)p = U p_x + V p_y$ et $((\mathbf{w} + \text{Re} \mathbf{u}_0) \cdot \nabla)\tau = U \tau_x + V \tau_y$, en notant $U = w^1 + \text{Re} u_0$ et $V = w^2$.

Nous écrivons le système linéaire (3.4.6) sous la forme :

$$\begin{cases} -(1-\omega)\text{Re}^{-1}(\Delta\mathbf{u} + \nabla\text{div} \mathbf{u}) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{F} + \text{div} \tau, \\ \text{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\beta}(U p_x + V p_y) &= G, \\ \text{We} \{U \tau_x + V \tau_y\} + \text{Re} \tau &= \mathbf{H} + 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{u}), \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 &\text{ sur } \Gamma, \\ p = 0 &\text{ sur } \Gamma_{in}, \\ \tau = 0 &\text{ sur } \Gamma_{in}. \end{cases} \quad (3.4.7)$$

avec :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_0, p_0, \tau_0, \mathbf{w}) = \mathbf{f}_0 - \text{Re}^{-1}(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \quad (3.4.8)$$

$$G = G(\mathbf{u}_0, p_0, \mathbf{w}) = g_0 - \frac{1}{\beta}(\mathbf{w} \cdot \nabla)p_0, \quad (3.4.9)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{u}_0, \tau_0, \mathbf{w}, \mathbf{T}) = \mathbf{h}_0 - \text{We} \mathbf{g}(\nabla\mathbf{w}, \mathbf{T} + \tau_0) - \text{Re We} g(\nabla\mathbf{u}_0, \mathbf{T}) - \text{We}(\mathbf{w} \cdot \nabla)\tau_0. \quad (3.4.10)$$

Tout d'abord, nous allons montrer que le système (3.4.7) admet une solution pour tous $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{w})$, $G = G(\mathbf{w})$ et $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{w}, \mathbf{T})$ où $U = w^1 + \operatorname{Re} u_0$ et $V = w^2$ sont donnés.

Puis, nous utiliserons le problème linéarisé (3.4.7) pour définir une application contractante qui donnera par argument d'un point fixe unique une solution du problème non linéaire (3.4.6). Remarquons par ailleurs que le système (3.2.1)-(3.2.2) n'est qu'une version de (3.4.6) après un changement de variable convenable.

3.5 Résolution des problèmes auxiliaires

3.5.1 Résolution du problème concernant la pression p

Dans cette partie, nous allons démontrer l'existence de la pression. Les fonctions δ_- et d , définies respectivement dans (3.2.10) et (3.2.15), sont prolongées sur Ω tout entier indépendamment de x : comme fonction des variables x, y ou de la variable $y \in]y_*, y^*]$, ces fonctions seront toujours notées δ_- et d . En outre, δ'_- et δ''_- désigneront les dérivées premières et secondes par rapport à la variable y .

Rappelons le lemme dont la démonstration est dans [50].

Lemme 3.5.1. *Soit q tel que $2 < q < 3$ alors $\delta'_-, d^2\delta''_- \in \mathcal{L}^q(\Omega)$.*

On considère le problème de transport défini par :

$$\begin{cases} p_x(x, y) + (U^{-1}V)(x, y)p_y(x, y) &= \widehat{G}_1(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ p(\delta_-(y), y) &= 0, & y \in]y_*, y^*], \end{cases} \quad (3.5.1)$$

avec $U \geq C_0 > 0$, U, V sont deux fonctions données et $\widehat{G}_1 = \beta U^{-1}G_1$.

Pour résoudre ce système, nous considérons le problème suivant pour tout \bar{y} fixé dans $]y_*, y^*]$:

$$\begin{cases} p_x(x, h(x, \bar{y})) + (U^{-1}V)(x, h(x, \bar{y}))p_y(x, h(x, \bar{y})) &= \widehat{G}_1(x, h(x, \bar{y})), & (x, \bar{y}) \in \Omega, \\ p(\delta_-(\bar{y}), \bar{y}) &= 0, \end{cases} \quad (3.5.2)$$

où $x \longrightarrow h(x, \bar{y})$ est la solution de :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}h(x, \bar{y}) &= (U^{-1}V)(x, h(x, \bar{y})), & (x, \bar{y}) \in \Omega, \\ h(\delta_-(\bar{y}), \bar{y}) &= \bar{y}. \end{cases} \quad (3.5.3)$$

Or la fonction $(x, y) \longrightarrow (U^{-1}V)(x, y)$ est lipschitzienne. Donc, la solution du problème (3.5.3) est :

$$h(x, \bar{y}) = \int_{\delta_-(\bar{y})}^x (U^{-1}V)(s, h(s, \bar{y}))ds + \bar{y}. \quad (3.5.4)$$

Lemme 3.5.2. *Soit $(x, \bar{y}) \in \Omega$. Alors la fonction $\bar{y} \longrightarrow h(x, \bar{y})$ est strictement croissante sur $I_x = \{\bar{y} \in]y_*, y^*], (x, \bar{y}) \in \Omega\}$.*

Preuve.

Supposons que la fonction la fonction $\bar{y} \longrightarrow h(x, \bar{y})$ ne soit pas strictement croissante sur $I_x = \{\bar{y} \in]y_*, y^*[, (x, \bar{y}) \in \Omega\}$. Alors, il existe \bar{y}_1 et \bar{y}_2 dans I_x , tels que $\bar{y}_1 > \bar{y}_2$ et $h(x, \bar{y}_1) \leq h(x, \bar{y}_2)$ et on peut trouver un $x_0 \in]\delta_-(y), \delta_+(y)[$, où $h(x_0, \bar{y}_1) = h(x_0, \bar{y}_2)$. Dans ce cas, les trajectoires de $h(x, \bar{y})$ correspondant à $\bar{y} = \bar{y}_1$ et $\bar{y} = \bar{y}_2$ se coupent et ce qui est contradictoire avec le fait que la solution du (3.5.3) est unique. \square

Nous posons $y = h(x, \bar{y})$. Puisque la fonction $\bar{y} \longrightarrow h(x, \bar{y}) = y$ est continue, strictement croissante sur I_x , elle est bijective sur son image J_x . Alors il existe une fonction φ définie sur Ω telle que :

$$\left. \begin{array}{l} h(x, \bar{y}) = y \\ \bar{y} \in I_x \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \bar{y} = \varphi(x, y) \\ y \in J_x. \end{array} \right. \quad (3.5.5)$$

Donc

$$y = h(x, \bar{y}) = \int_{\delta_-(\varphi(x, y))}^x (U^{-1}V)(s, h(s, \varphi(x, y)))ds + \varphi(x, y). \quad (3.5.6)$$

Remarque 3.5.3. En particulier pour tout $(x, y) \in \Omega$, $h(x, \varphi(x, y)) = y$.

Proposition 3.5.4. La solution du problème (3.5.1) est

$$p(x, y) = \int_{\delta_-(\varphi(x, y))}^x \widehat{G}_1(s, h(s, \varphi(x, y)))ds, \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (3.5.7)$$

Preuve.

Pour $(x, y) \in \Omega$, nous posons $y = h(x, \bar{y})$, avec $\bar{y} \in I_x$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [p(x, h(x, \bar{y}))] &= p_x(x, h(x, \bar{y})) + \frac{d}{dx} [h(x, \bar{y})] p_y(x, h(x, \bar{y})) \\ &= p_x(x, h(x, \bar{y})) + (U^{-1}V)(x, h(x, \bar{y})) p_y(x, h(x, \bar{y})) \\ &= \widehat{G}_1(x, h(x, \bar{y})). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $p(\delta_-(\bar{y}), \bar{y}) = 0$, on obtient que

$$p(x, h(x, \bar{y})) = \int_{\delta_-(\bar{y})}^x \widehat{G}_1(s, h(s, \bar{y}))ds,$$

et donc (3.5.6) en posant $\bar{y} = \varphi(x, y)$. \square

Lemme 3.5.5. Soient $2 < q < 3$, $U \in W^{2,q}(\Omega)$ et $V \in W^{2,q}(\Omega)$ tels que $U \geq C_0 > 0$ et $V = 0$ sur Γ_{in} . La solution du (3.5.3) définie par :

$$h(x, y) = \int_{\delta_-(y)}^x (U^{-1}V)(s, h(s, y))ds + y, \quad \text{pour } (x, y) \in \Omega,$$

est dans $W^{2,q}(\Omega)$ et vérifie l'estimation suivante :

$$\|h\|_{2,q} \leq C(C_0, q, \Omega, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{2,q}). \quad (3.5.8)$$

Preuve.

Tout d'abord, $U \geq C_0 > 0$ alors $\frac{1}{U} \leq \frac{1}{C_0}$ donc $\|U^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{C_0}$.
De plus, $\|h\|_{2,q} = \|h\|_q + \|\nabla h\|_q + \|\nabla^2 h\|_q$.

Pour tout $(x, y) \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} |h(x, y)|^q &\leq 2^{q-1} \left(\int_{\delta_-(y)}^x |(U^{-1}V)(s, h(s, y))|^q ds + [\max(|y^*|, |y_*|)]^q \right) \\ &\leq C(q) (|\partial\Omega| \|U^{-1}\|_\infty^q \|V\|_\infty^q + [\max(|y^*|, |y_*|)]^q) \\ &\leq C(q, \Omega) \left[1 + \left(\frac{1}{C_0} \right)^q \|V\|_\infty^q \right], \end{aligned}$$

et ceci en utilisant le fait que $(a+b)^q \leq 2^{q-1}(a^q + b^q)$ avec a et b deux réels positifs et l'inclusion $W^{2,q}(\Omega) \subset \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ pour $q \geq 1$ (voir par exemple [9]). Donc :

$$\left(\int_\Omega |h(x, y)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C(q, \Omega) \left[1 + \frac{1}{C_0} \|V\|_{2,q} \right],$$

par suite :

$$\|h\|_q \leq C(\Omega, q, C_0, \|V\|_{2,q}). \quad (3.5.9)$$

D'autre part, $h_x(x, y) = (U^{-1}V)(x, h(x, y))$ donc :

$$\begin{aligned} |h_x(x, y)|^q &= |(U^{-1}V)(x, h(x, y))|^q \\ &\leq \|U^{-1}\|_\infty^q \|V\|_\infty^q \\ &\leq \left(\frac{1}{C_0} \right)^q \|V\|_{2,q}^q, \end{aligned}$$

et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\|h_x\|_q \leq C(\Omega, C_0, \|V\|_{2,q}). \quad (3.5.10)$$

On a $h_{xx}(x, y) = \frac{d}{dx}[U^{-1}(x, h(x, y))]V(x, h(x, y)) + U^{-1}(x, h(x, y))\frac{d}{dx}[V(x, h(x, y))]$, or :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[U^{-1}(x, h(x, y))] &= -U^{-2}(x, h(x, y))\frac{d}{dx}[U(x, h(x, y))] \\ &= -U^{-2}(x, h(x, y))[U_x(x, y) + U_z(x, z) \times h_x(x, y)], \end{aligned}$$

et on a aussi :

$$\frac{d}{dx}[V(x, h(x, y))] = V_x(x, y) + V_z(x, z) \times h_x(x, y),$$

avec $z = h(x, y)$. Alors :

$$\begin{aligned} h_{xx}(x, y) &= -U^{-2}(x, h(x, y))[U_x(x, y) + U_z(x, z) \times h_x(x, y)] \times V(x, h(x, y)) \\ &+ U^{-1}(x, h(x, y)) \times [V_x(x, y) + V_z(x, z) \times h_x(x, y)]. \end{aligned}$$

Et par suite,

$$|h_{xx}(x, y)|^q \leq 2^{q-1} |U^{-1}(x, h(x, y))|^q \left| \frac{d}{dx} [V(x, h(x, y))] \right|^q + \left| \frac{d}{dx} [U^{-1}(x, h(x, y))] \right|^q |V(x, h(x, y))|^q.$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dx} [U^{-1}(x, h(x, y))] \right|^q &\leq 2^{q-1} |U^{-2}(x, h(x, y))|^q (|U_x(x, y)|^q + |U_z(x, z)|^q \times |h_x(x, y)|^q) \\ &\leq 2^{q-1} \|U^{-2}\|_\infty^q \times (\|U_x\|_\infty^q + \|U_z\|_\infty^q |h_x(x, y)|^q) \\ &\leq 2^{q-1} \left(\frac{1}{C_0} \right)^{2q} (\|U_x\|_\infty^q + \|U_z\|_\infty^q |h_x(x, y)|^q). \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dx} [V(x, h(x, y))] \right|^q &\leq 2^{q-1} (|V_x(x, y)|^q + |V_z(x, z)|^q \times |h_x(x, y)|^q), \\ \left| \frac{d}{dx} [V(x, h(x, y))] \right|^q &\leq 2^{q-1} (\|V_x\|_\infty^q + \|V_z\|_\infty^q \times |h_x(x, y)|^q). \end{aligned}$$

Par suite, on obtient :

$$\begin{aligned} |h_{xx}(x, y)|^q &\leq 2^{q-1} \left(\left| \frac{d}{dx} [U^{-1}(x, h(x, y))] \right|^q |V(x, h(x, y))|^q + |U^{-1}(x, h(x, y))|^q \left| \frac{d}{dx} [V(x, h(x, y))] \right|^q \right) \\ &\leq 2^{2q-2} \left(\frac{1}{C_0} \right)^{2q} (\|U_x\|_\infty^q + \|U_z\|_\infty^q \times |h_x(x, y)|^q) \|V\|_\infty^q \\ &\quad + 2^{2q-2} (\|V_x\|_\infty^q + \|V_z\|_\infty^q \times |h_x(x, y)|^q) \|U^{-1}\|_\infty^q, \end{aligned}$$

par suite :

$$\begin{aligned} \|h_{xx}\|_q &\leq C(C_0, q, \Omega) \left((\|U_x\|_{1,q} + \|U_z\|_{1,q} \times \|h_x\|_q) \|V\|_{2,q} + \|V_x\|_{1,q} + \|V_z\|_{1,q} \times \|h_x\|_q \right) \\ \|h_{xx}\|_q &\leq C(C_0, q, \Omega) \left((\|U\|_{2,q} + \|U\|_{2,q} \times C(\Omega, C_0, \|V\|_{2,q})) \|V\|_{2,q} + \|V\|_{2,q} + \|V\|_{2,q} \times C(\Omega, C_0, \|V\|_{2,q}) \right), \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\|h_{xx}\|_q \leq C(C_0, q, \Omega, \|V\|_{2,q}, \|U\|_{2,q}). \quad (3.5.11)$$

Pour $h_y(x, y)$ on calcule, en posant $z = h(s, y)$:

$$\begin{aligned} h_y(x, y) &= 1 + \int_{\delta_-(y)}^x \frac{\partial}{\partial y} \left(U^{-1} V(s, h(s, y)) \right) ds - U^{-1} V(\delta_-(y), h(\delta_-(y), y)) \delta'_-(y) \\ &= 1 + \int_{\delta_-(y)}^x \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(U^{-1}(s, h(s, y)) \right) V(s, h(s, y)) + U^{-1}(s, h(s, y)) \frac{\partial}{\partial y} \left(V(s, h(s, y)) \right) \right) ds \\ &= 1 - \int_{\delta_-(y)}^x (U^{-2}(s, h(s, y)) U_z(s, z) h_y(s, y) V(s, h(s, y)) - U^{-1}(s, h(s, y)) V_z(s, z) h_y(s, y)) ds, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $h(\delta_-(y), y) = y$ et $V(\delta_-(y), y) = 0$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
|h_y(x, y)|^q &\leq 2^{q-1} \left[1 + 2^{q-1} \int_{\delta_-(y)}^x |U^{-2}(s, h(s, y))|^q |U_z(s, z)|^q |h_y(s, y)|^q |V(s, h(s, y))|^q ds \right. \\
&\quad \left. + 2^{q-1} \int_{\delta_-(y)}^x |U^{-1}(s, h(s, y))|^q |V_z(s, z)|^q |h_y(s, y)|^q ds \right] \\
&\leq C(q) \left[\left(\|U^{-2}\|_\infty^q \|U_z\|_\infty^q \|V\|_\infty^q + \|U^{-1}\|_\infty^q \|V_z\|_\infty^q \right) \int_{\delta_-(y)}^x |h_y(s, y)|^q ds + 1 \right] \\
&\leq C(q) \left[\left(\left(\frac{1}{C_0} \right)^{2q} \|U_z\|_{1,q}^q \|V\|_{2,q}^q + \left(\frac{1}{C_0} \right) \|V_z\|_{1,q}^q \right) \int_{\delta_-(y)}^x |h_y(s, y)|^q ds + 1 \right],
\end{aligned}$$

donc

$$\|h_y\|_q \leq C(q, \Omega) \left[1 + \frac{1}{C_0^2} \|U\|_{2,q} \|V\|_{2,q} \|h_y\|_q + \frac{1}{C_0} \|V\|_{2,q} \|h_y\|_q \right].$$

Alors :

$$\|h_y\|_q \leq C(C_0, q, \Omega, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{2,q}). \quad (3.5.12)$$

Le même calcul est fait pour estimer $h_{yy}(x, y)$. Ainsi en utilisant (3.5.9), (3.5.10), (3.5.11) et (3.5.12), nous obtenons :

$$\|h\|_{2,q} \leq C(C_0, \Omega, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{2,q}, q).$$

□

Maintenant nous dérivons les deux membres de l'égalité (3.5.6) par rapport à x et y , en utilisant le fait que $V = 0$ sur Γ , ainsi nous obtenons

$$\varphi_x(x, y) = -U^{-1}V(x, y) - \int_{\delta_-(\bar{y})}^x \frac{d}{dx} [(U^{-1}V)(s, h(s, \varphi))] ds, \quad (3.5.13)$$

$$\varphi_y(x, y) = 1 - \int_{\delta_-(\bar{y})}^x \frac{d}{dy} [(U^{-1}V)(s, h(s, \varphi))] ds. \quad (3.5.14)$$

Lemme 3.5.6. *Sous les hypothèses du lemme 5.5.5, la fonction φ définie en (3.5.5) est dans $W^{2,q}(\Omega)$ et vérifie :*

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{2,q} &\leq C(\Omega, C_0, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{2,q}), \\
\|\nabla(\delta_- \circ \varphi)\|_{0,q} &\leq C(\Omega, C_0, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{2,q}).
\end{aligned}$$

La démonstration de ce lemme est analogue à celle faite pour le lemme 5.5.5.

Lemme 3.5.7. *Soient $2 < q < 3$, $U \in W^{2,q}(\Omega)$ et $V \in W^{2,q}(\Omega)$ tels que $U \geq C_0$ et $V = 0$ sur Γ_{in} . Alors la solution $p(x, y)$ du (3.5.1) satisfait l'inégalité suivante :*

$$\|p\|_{1,q} \leq C_1 \|G_1\|_{1,q}, \quad (3.5.15)$$

avec $C_1 = C(\Omega, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{2,q}, C_0, \beta)$.

La preuve repose sur les estimations des lemmes 5.5.5 et 3.5.6. Elle est faite dans [50].

3.5.2 Résolution du problème concernant le tenseur τ

Soit le problème concernant le tenseur des extra-contraintes défini par :

$$\begin{cases} \tau_x(x, y) + (U^{-1}V)(x, y)\tau_y(x, y) + \frac{\text{Re}}{\text{We}}U^{-1}(x, y)\tau(x, y) = \widehat{H}_1(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ \tau(\delta_-(y), y) = 0, & y \in]y_*, y^*[, \end{cases} \quad (3.5.16)$$

avec $\widehat{H}_1 = \frac{U^{-1}}{\text{We}}H_1$.

Pour tout \bar{y} fixé dans $]y_*, y^*[$ et $x \in]\delta_-(y), \delta_+(y)[$, on considère le système suivant :

$$\begin{cases} \tau_x(x, h(x, \bar{y})) + (U^{-1}V)(x, h(x, \bar{y}))\tau_y(x, h(x, \bar{y})) + \frac{\text{Re}}{\text{We}}U^{-1}\tau(x, h(x, \bar{y})) = \widehat{H}_1(x, h(x, \bar{y})), \\ \tau(\delta_-(\bar{y}), \bar{y}) = 0, \end{cases} \quad (3.5.17)$$

où la fonction $x \longrightarrow h(x, \bar{y})$, définie de $]\delta_-(y), \delta_+(y)[$ dans \mathbb{R} , est la solution du problème (3.5.3).

Posons $\Lambda(x, \bar{y}) = \frac{\text{Re}}{\text{We}} \int_{\delta_-(\bar{y})}^x U^{-1}(t, h(t, \bar{y}))dt$. Nous remarquons que $\Lambda(\delta_-(\bar{y}), \bar{y}) = 0$ et que la fonction $x \longrightarrow \Lambda(x, \bar{y})$ est croissante sur $]\delta_-(\bar{y}), \delta_+(\bar{y})[$.

Proposition 3.5.8. *La solution du problème (3.5.16) est :*

$$\tau(x, y) = \int_{\delta_-(\varphi(x, y))}^x \exp\left(-\frac{\text{Re}}{\text{We}} \int_s^x U^{-1}(t, h(t, \varphi(x, y)))dt\right) \widehat{H}_1(s, h(s, \varphi(x, y)))ds, \quad (3.5.18)$$

pour $(x, y) \in \Omega$.

Preuve.

Tout d'abord, calculons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\exp(\Lambda(x, \bar{y})) \tau(x, h(x, \bar{y})) \right] &= \left[\tau_x(x, h(x, \bar{y})) + (U^{-1}V)(x, h(x, \bar{y}))\tau_y(x, h(x, \bar{y})) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\text{Re}}{\text{We}}U^{-1}(x, h(x, \bar{y}))\tau(x, h(x, \bar{y})) \right] \exp(\Lambda(x, \bar{y})) \\ &= \exp(\Lambda(x, \bar{y})) \widehat{H}_1(x, h(x, \bar{y})). \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

Nous intégrons l'équation (3.5.19) entre $\delta_-(\bar{y})$ et x , puis nous utilisons le fait que $\tau(\delta_-(\bar{y}), \bar{y}) = 0$, ce qui donne

$$\tau(x, h(x, \bar{y})) = \int_{\delta_-(\bar{y})}^x \exp(\Lambda(s, \bar{y}) - \Lambda(x, \bar{y})) \widehat{H}_1(s, h(s, \bar{y}))ds,$$

avec $\bar{y} = \varphi(x, y)$ où la fonction φ a été définie par (3.5.5), par suite

$$\tau(x, y) = \int_{\delta_-(\bar{y})}^x \exp\left(-\frac{\text{Re}}{\text{We}} \int_s^x U^{-1}(t, h(t, \varphi(x, y)))dt\right) \widehat{H}_1(s, h(s, \varphi(x, y)))ds.$$

□

Lemme 3.5.9. Soient $2 < q < 3$, $U \in W^{2,q}(\Omega)$ et $V \in W^{2,q}(\Omega)$ tels que $U \geq C_0$ et $V = 0$ sur Γ_{in} . La solution τ du (3.5.16), qui est définie dans (3.5.8), est dans $W^{1,q}(\Omega)$ et vérifie l'estimation suivante :

$$\|\tau\|_{1,q} \leq C_2 \|H_1\|_{1,q}, \quad (3.5.20)$$

avec $C_2 = C(\Omega, \text{We}, \text{Re}, C_0, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{2,q})$.

Preuve.

Soit $\tau(x, y) = \int_{\delta_-(\bar{y})}^x \exp(\Lambda(s, \bar{y}) - \Lambda(x, \bar{y})) \widehat{H}_1(s, h(s, \bar{y})) ds$ avec $\bar{y} = \varphi(x, y)$, on a :

$$\begin{aligned} |\tau(x, y)| &\leq \int_{\delta_-(\bar{y})}^x |\exp(\Lambda(s, \bar{y}) - \Lambda(x, \bar{y}))| |\widehat{H}_1(s, h(s, \bar{y}))| ds \\ |\tau(x, y)|^q &\leq \int_{\delta_-(\bar{y})}^x |\widehat{H}_1(s, h(s, \bar{y}))|^q ds \leq C(\Omega) \left\| \widehat{H}_1 \right\|_{\infty}^q, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|\tau\|_q \leq C(\Omega) \left\| \widehat{H}_1 \right\|_{1,q}. \quad (3.5.21)$$

Soit $\bar{y} = \varphi(x, y)$, calculons

$$\begin{aligned} \tau_x(x, y) &= \widehat{H}_1(x, y) - \exp(-\Lambda(x, \bar{y})) \widehat{H}_1(\delta_-(\bar{y}), \bar{y}) \frac{d}{dx} [\delta_-(\bar{y})] + \int_{\delta_-(\bar{y})}^x \exp(\Lambda(s, \bar{y}) - \Lambda(x, \bar{y})) \\ &\quad \times \left\{ \frac{d}{dx} [\Lambda(s, \bar{y}) - \Lambda(x, \bar{y})] \widehat{H}_1(s, h(s, \bar{y})) + \frac{d}{dx} [\widehat{H}_1(s, h(s, \bar{y}))] \right\} ds, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé $h(\delta_-(\bar{y}), \bar{y}) = \bar{y}$ et $h(x, \bar{y}) = y$.

Pour estimer $\tau_x(x, y)$ dans $\mathcal{H}^{1,q}(\Omega)$, nous avons d'une part $|\widehat{H}_1(x, y)|^q \leq \left\| \widehat{H}_1 \right\|_{\infty}^q$, donc

$$\left\| \widehat{H}_1 \right\|_{0,q} \leq C(\Omega) \left\| \widehat{H}_1 \right\|_{\infty},$$

ce qui entraîne

$$\left| \exp(-\Lambda(x, \bar{y})) \widehat{H}_1(\delta_-(\bar{y}), \bar{y}) \frac{d}{dx} [\delta_-(\bar{y})] \right|^q \leq C(\Omega) \left\| \widehat{H}_1 \right\|_{\infty}^q \left| \frac{d}{dx} [\delta_-(\bar{y})] \right|^q.$$

Or

$$\left(\int_{\Omega} \left| \frac{d}{dx} [\delta_-(\bar{y})] \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C(\Omega) \|\nabla(\delta_- \circ \varphi)\|_{0,q},$$

et en utilisant le lemme 3.5.6 pour l'estimation du terme $\|\nabla(\delta_- \circ \varphi)\|_{0,q}$, donc nous avons

$$\left\| \exp(-\Lambda(x, \bar{y})) \widehat{H}_1(\delta_-(\bar{y}), \bar{y}) \frac{d}{dx} [\delta_-(\bar{y})] \right\|_{0,q} \leq C(\Omega, C_0, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{2,q}) \left\| \widehat{H}_1 \right\|_{1,q}. \quad (3.5.22)$$

D'autre part, nous estimons

$$A(x, y) = \int_{\delta_-(\bar{y})}^x \exp(\Lambda(s, \bar{y}) - \Lambda(x, \bar{y})) \frac{d}{dx} [\Lambda(s, \bar{y}) - \Lambda(x, \bar{y})] \widehat{H}_1(s, h(s, \bar{y})) ds.$$

Calculons pour cela,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\Lambda(s, \bar{y}) - \Lambda(x, \bar{y})] &= -\frac{\text{Re}}{\text{We}} \frac{d}{dx} \left[\int_s^x U^{-1}(t, h(t, \bar{y})) dt \right] \\ &= \frac{\text{Re}}{\text{We}} \left[-U^{-1}(x, y) + \int_s^x U^{-2}(t, h(t, \bar{y})) U_y(t, h(t, \bar{y})) h_y(t, \bar{y}) \varphi_x(x, y) dt \right], \end{aligned}$$

et ceci en utilisant $h(x, \bar{y}) = y$ et $\bar{y} = \varphi(x, y)$. Donc,

$$|A(x, y)| \leq C(\Omega, \text{We}, \text{Re}) \left\| \widehat{H}_1 \right\|_{\infty} \left[\|U^{-1}\|_{\infty} + \frac{1}{C_0^2} \|U_y\|_{\infty} \|h_y\|_{\infty} \left| \int_s^x \varphi_x(x, y) dt \right| \right],$$

alors,

$$\|A\|_{0,q} \leq C(\Omega, C_0, \text{We}, \text{Re}, \|U\|_{2,q}) \|H_1\|_{1,q}. \quad (3.5.23)$$

Enfin, nous estimons

$$B(x, y) = \int_{\delta_-(\bar{y})}^x \exp(\Lambda(s, \bar{y}) - \Lambda(x, \bar{y})) \frac{d}{dx} \left[\widehat{H}_1(s, h(s, \bar{y})) \right] ds.$$

Pour cela remarquons que $\frac{d}{dx} \left[\widehat{H}_1(s, h(s, \bar{y})) \right] = (\widehat{H}_1)_y(s, h(s, \bar{y})) h_y(s, \bar{y}) \varphi_x(x, y)$, alors

$$|B(x, y)| \leq C(\Omega) \|h_y\|_{\infty} \|\varphi_x\|_{\infty} \int_{\delta_-(\bar{y})}^x |(\widehat{H}_1)_y(s, h(s, \bar{y}))| ds,$$

ainsi après intégration sur Ω , nous concluons

$$\|B\|_{0,q} \leq C(\Omega, C_0, \text{We}, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{1,q}) \|H_1\|_{1,q}, \quad (3.5.24)$$

ce qui finit l'estimation de $\tau_x(x, y)$ dans $W^{1,q}(\Omega)$ et alors

$$\|\tau_x\|_q \leq C(\Omega, C_0, \text{We}, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{1,q}) \|H_1\|_{1,q}. \quad (3.5.25)$$

Pour achever la démonstration du lemme, il faut calculer le terme $\tau_y(x, y)$ et l'estimer dans $W^{1,q}(\Omega)$ de la même manière que $\tau_x(x, y)$. Nous trouvons

$$\begin{aligned} \tau_y(x, y) &= -\exp(-\Lambda(x, \bar{y})) \widehat{H}_1(\delta_-(\bar{y}), \bar{y}) \frac{d}{dy} [\delta_-(\bar{y})] + \int_{\delta_-(\bar{y})}^x \exp(\Lambda(s, \bar{y}) - \Lambda(x, \bar{y})) \\ &\quad \times \left\{ -\frac{\text{Re}}{\text{We}} \widehat{H}_1(s, h(s, \bar{y})) \int_s^x \frac{d}{dy} [U^{-1}(t, h(t, \bar{y}))] dt + \frac{d}{dy} [\widehat{H}_1(s, h(s, \bar{y}))] \right\} ds, \end{aligned}$$

et nous remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} [U^{-1}(t, h(t, \bar{y}))] &= U^{-2}(t, h(t, \bar{y})) U_y(t, h(t, \bar{y})) h_y(t, \bar{y}) \varphi_y(x, y), \\ \frac{d}{dy} [\widehat{H}_1(s, h(s, \bar{y}))] &= (\widehat{H}_1)_y(s, h(s, \bar{y})) h_y(s, \bar{y}) \varphi_y(x, y). \end{aligned}$$

Par un calcul similaire au calcul précédent, on trouve que :

$$\|\tau_y\|_{0,q} \leq C \|H_1\|_{1,q} \quad \text{avec} \quad C = C(\Omega, \text{We}, \text{Re}, C_0, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{2,q}), \quad (3.5.26)$$

par suite,

$$\|\tau\|_{1,q} \leq C(\Omega, \text{We}, \text{Re}, C_0, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{2,q}) \|H_1\|_{1,q}.$$

□

3.5.3 Existence et unicité du vecteur vitesse \mathbf{u}

Soit à résoudre le problème défini par :

$$\begin{cases} -(1-\omega)\text{Re}^{-1}(\Delta\mathbf{u} + \nabla\text{div}\mathbf{u}) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{F}_1 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5.27)$$

Théorème 3.5.10. *Étant donnés $\mathbf{F}_1 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in W^{2,q}(\Omega)$, $\omega > 0$ avec*

$$\text{Re} \|\text{div}\mathbf{u}_0\|_\infty < \frac{2(1-\omega)}{C_p^2}, \quad (3.5.28)$$

où C_p est la constante de Poincaré. Il existe une unique solution faible \mathbf{u} de (3.5.27) dans $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\text{Re}^{-1} \|\mathbf{u}\|_1 \leq C_3 \|\mathbf{F}_1\|_0, \quad (3.5.29)$$

avec

$$C_3 = \frac{C_p}{1-\omega - \frac{1}{2}\text{Re}C_p^2 \|\text{div}\mathbf{u}_0\|_\infty}.$$

De plus, si $\mathbf{F}_1 \in W^{k-2,q}(\Omega)$, alors la solution \mathbf{u} de (3.5.27) est dans $W^{k,q}(\Omega)$ et vérifie l'estimation

$$\text{Re}^{-1} \|\mathbf{u}\|_{k,q} \leq C'_3 \|\mathbf{F}_1\|_{k-2,q}, \quad (3.5.30)$$

où $C'_3 = C(\text{Re}, \omega, C_p, \mathbf{u}_0)$ et $k \geq 2$ est un entier naturel.

Preuve.

Nous effectuons le changement de fonction $\bar{\mathbf{u}} = \text{Re}^{-1}\mathbf{u}$ dans le problème (3.5.27), qui s'écrit

$$\begin{cases} -(1-\omega)(\Delta\bar{\mathbf{u}} + \nabla\text{div}\bar{\mathbf{u}}) + \text{Re}(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_1 & \text{dans } \Omega, \\ \bar{\mathbf{u}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5.31)$$

Multiplions dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ par $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$ et intégrons par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (1-\varepsilon) \int_\Omega \nabla\bar{\mathbf{u}} : \nabla\mathbf{v} \, dx + (1-\omega) \int_\Omega \text{div}\bar{\mathbf{u}} \text{div}\mathbf{v} \, dx - \text{Re} \int_\Omega \text{div}\mathbf{u}_0 \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dx - \text{Re} \int_\Omega (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, dx \\ & = \int_\Omega \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v} \, dx. \end{aligned}$$

Soit l'application \mathcal{L} définie de $H_0^1(\Omega)$ dans \mathbb{R} par $\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v} \, dx$ qui est linéaire et continue sur $H_0^1(\Omega)$, puisque :

$$|\mathcal{L}(\mathbf{v})| \leq C(\Omega) \|\mathbf{F}_1\|_0 \|\mathbf{v}\|_0 \leq C(\Omega)C_p \|\mathbf{F}_1\|_0 \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega},$$

où C_p est la constante de Poincaré.

Soit \mathcal{A} est l'application bilinéaire définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ dans \mathbb{R} par :

$$\mathcal{A}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = (1 - \varepsilon) \int_{\Omega} \nabla \bar{\mathbf{u}} : \nabla \mathbf{v} \, dx + (1 - \omega) \int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx - \operatorname{Re} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad (3.5.32)$$

$$- \operatorname{Re} \int_{\Omega} (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, dx. \quad (3.5.33)$$

Pour montrer la continuité de \mathcal{A} , nous estimons ces termes. Pour cela nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dx \right| &\leq \|\operatorname{div} \mathbf{u}_0\| \|\bar{\mathbf{u}}\|_0 \cdot \|\mathbf{v}\|_0 \\ &\leq C_p^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_0\|_{\infty} \|\bar{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \cdot \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}, \\ \left| \int_{\Omega} (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, dx \right| &\leq C_p \|\mathbf{u}_0\|_{\infty} \|\bar{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \cdot \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Donc $|\mathcal{A}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})| \leq C \|\bar{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \cdot \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$ pour tout $(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ avec $C = C(\operatorname{Re}, \omega, C_p, \Omega, \|\mathbf{u}_0\|_{1,\infty})$, alors $\mathcal{A}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$ est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

De plus, \mathcal{A} est coercive sur $H_0^1(\Omega)$ si on trouve un $\zeta > 0$, tel que :

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \mathcal{A}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \zeta |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2.$$

Remarquons que

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 |\mathbf{v}|^2 \, dx, \quad (3.5.34)$$

calculons alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= (1 - \omega) \|\nabla \mathbf{v}\|_0^2 + (1 - \omega) \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 \, dx - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 |\mathbf{v}|^2 \, dx, \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\geq (1 - \omega) |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \operatorname{Re} C_p^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_0\|_{\infty} \cdot |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 \\ &\geq \zeta |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2, \end{aligned}$$

avec $\zeta = (1 - \omega) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} C_p^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_0\|_{\infty}$.

Nous avons $\zeta > 0$ si $\operatorname{Re} (1 - \omega)^{-1} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_0\|_{\infty} < \frac{2}{C_p^2}$. Alors il existe une solution faible unique $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)$ du (3.5.27) par le théorème de Lax-Milgram. De plus,

$$\begin{aligned} (1 - \omega) \|\nabla \mathbf{u}\|_0^2 + (1 - \omega) \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \, dx &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \mathbf{u}^2 \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{F}_1 \mathbf{u} \\ \zeta |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 &\leq C_p \|\mathbf{F}_1\|_0 \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

alors $\operatorname{Re}^{-1} \|\mathbf{u}\|_1 \leq C_3 \|\mathbf{F}_1\|_0$ et $C_3 = \frac{C_p}{(1 - \omega) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} C_p^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_0\|_{\infty}}$.

Par ellipticité, on peut démontrer de la même manière que $\operatorname{Re}^{-1} \|\mathbf{u}\|_{k,q} \leq C_3 \|\mathbf{F}_1\|_{k-2,q}$ tel que $C_3 = C(\operatorname{Re}, \omega, C_p, \|\mathbf{u}_0\|_{2,q})$.

□

3.6 Résolution du problème linéaire

Théorème 3.6.1. Soient \mathbf{F} , G et \mathbf{H} fixés respectivement dans $W^{0,q}(\Omega)$, $W^{1,q}(\Omega)$ et $W^{1,q}(\Omega)$, $2 < q < 3$ et $U \geq C_0$. Il existe $\widetilde{\text{Re}}_1 > 0$ tel que si $\|\mathbf{u}_0\|_{1,\infty}$ vérifie la condition

$$\text{Re}(1 - \omega)^{-1} \|\mathbf{u}_0\|_{1,\infty} < \frac{1}{C_p^2} \quad (3.6.1)$$

pour tout $0 < \text{Re} \leq \widetilde{\text{Re}}_1$, où C_p est la constante de Poincaré, alors le système (3.4.7) admet une solution unique $(\mathbf{u}, p, \tau) \in W_0^{2,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ avec l'estimation :

$$\text{Re}^{-1} \|\mathbf{u}\|_{2,q} + \|p\|_{1,q} + \|\tau\|_{1,q} \leq C_4 [\|\mathbf{F}\|_{0,q} + \|G\|_{1,q} + \|\mathbf{H}\|_{1,q}], \quad (3.6.2)$$

où $C_4 = C(\Omega, \text{We}, \beta, \|\mathbf{u}_0\|_{2,q}, C_0, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{2,q})$.

Preuve.

Les tenseurs \mathbf{F} , G et \mathbf{H} sont des données fixées. Soit $\mathbf{v} \in W_0^{2,q}(\Omega)$. La démonstration consiste à prouver que l'application $\mathcal{K} : W_0^{2,q}(\Omega) \rightarrow W_0^{2,q}(\Omega)$ admet un point fixe unique : ce point fixe sera la solution du système (3.4.7).

En effet, nous considérons le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(1 - \omega)\text{Re}^{-1}(\Delta \mathbf{u} + \nabla \text{div} \mathbf{u}) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{div} \tau + \mathbf{F}, \\ \frac{1}{\beta}(Up_x + Vp_y) = G - \text{div} \mathbf{v}, \\ \text{We} \{U\tau_x + V\tau_y\} + \text{Re} \tau = 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{v}) + \mathbf{H}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ p = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{in}, \\ \tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{in}. \end{array} \right. \quad (3.6.3)$$

Soient $G_1 = G - \text{div} \mathbf{v}$ et $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} + 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{v})$. La fonction p et le tenseur τ , solution de (3.6.3), sont définis respectivement, par les formules établies dans les propositions 3.5.4 et 3.5.8, soit

$$p(x, y) = \int_{\delta_-(\varphi)}^x \widehat{G}_1(s, h(s, \varphi(x, y))) ds,$$

et

$$\tau(x, y) = \int_{\delta_-(\varphi)}^x \exp\left(-\frac{\text{Re}}{\text{We}} \int_s^x U^{-1}(t, h(t, \varphi(x, y))) dt\right) \widehat{\mathbf{H}}_1(s, h(s, \varphi(x, y))) ds,$$

avec $\widehat{G}_1 = \beta U^{-1} G_1$ et $\widehat{\mathbf{H}}_1 = \frac{U^{-1}}{\text{We}} \mathbf{H}_1$.

De plus, d'après le lemme 5.5.6, p existe et vérifie l'estimation :

$$\|p\|_{1,q} \leq C_1 (\|G\|_{1,q} + \|\mathbf{v}\|_{2,q}), \quad (3.6.4)$$

avec $C_1 = C(\Omega, q, \beta, C_0, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{2,q})$.

Et le lemme 5.5.7 montre que τ existe aussi et vérifie

$$\|\tau\|_{1,q} \leq C_2 (\|\mathbf{H}\|_{1,q} + 2\omega \|\mathbf{v}\|_{2,q}), \quad (3.6.5)$$

où $C_2 = C(\Omega, q, C_0, \|U\|_{2,q}, \|V\|_{2,q}, \text{We})$.

Donc, la résolution du problème (3.6.3) se réduit à la résolution du système :

$$\begin{cases} -(1-\omega)\text{Re}^{-1}(\Delta \mathbf{u} + \nabla \text{div} \mathbf{u}) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{F}_1 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6.6)$$

avec $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} + \text{div} \tau - \nabla p$.

\mathbf{F}_1 est dans $W^{0,q}(\Omega)$. D'après le théorème 5.4.1, le problème (3.6.6) admet une solution unique $\mathbf{u} \in W^{2,q}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ qui vérifie :

$$\text{Re}^{-1} \|\mathbf{u}\|_{2,q} \leq C'_3 \left(\|\mathbf{F}\|_{0,q} + \|\text{div} \tau\|_{0,q} + \|\nabla p\|_{0,q} \right) \quad (3.6.7)$$

avec $C'_3 = C(\omega, \text{Re}, \mathbf{u}_0, \Omega)$.

Utilisons (3.6.7), (3.6.4) et (3.6.5), alors

$$\begin{aligned} \text{Re}^{-1} \|\mathbf{u}\|_{2,q} + \|p\|_{1,q} + \|\tau\|_{1,q} &\leq C_3 \|\mathbf{F}\|_{0,q} + C_1(C_3 + 1) \|G\|_{1,q} + C_2(C_3 + 1) \|\mathbf{H}\|_{1,q} \\ &\quad + (C_3 + 1)(C_1 + 2\omega C_2) \|\mathbf{v}\|_{2,q}. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Soient (\mathbf{u}, p, τ) et $(\mathbf{u}^*, p^*, \tau^*)$ solutions du problème (3.6.3) correspondant respectivement aux données $(\mathbf{F}, G, \mathbf{H}, U, V, \mathbf{v})$ et $(\mathbf{F}, G, \mathbf{H}, U^*, V^*, \mathbf{v}^*)$. La solution $(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*, p - p^*, \tau - \tau^*)$ du problème (3.6.3), correspondant à $(0, 0, 0, U, V, \mathbf{v} - \mathbf{v}^*)$, vérifie l'estimation (3.6.8) :

$$\text{Re}^{-1} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|_{2,q} \leq C_5 \|\mathbf{v} - \mathbf{v}^*\|_{2,q} \quad (3.6.9)$$

avec $C_5 = (C_3 + 1)(C_1 + 2\omega C_2)$.

Pour $\text{Re} \leq \widetilde{\text{Re}}_1 < \frac{1}{C_5}$, il existe une constante $k = \widetilde{\text{Re}}_1 C_5 < 1$ alors l'application

$$\mathcal{K} : W_0^{2,q}(\Omega) \longrightarrow W_0^{2,q}(\Omega)$$

est contractante et admet un point fixe tel que $\mathcal{K}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Notons qu'on peut choisir $\widetilde{\text{Re}}_1 = \min(1/C_5, (1-\omega)/C_p^2 \|\mathbf{u}_0\|_{1,\infty})$.

Nous pouvons déduire l'estimation (3.6.2) de l'inégalité (3.6.8), en posant

$$C_4 = (C_3 + 1)(C_1 + (1 + 2\omega)C_2 + 1). \quad (3.6.10)$$

□

3.7 Estimations

3.7.1 Estimations de f_0 , g_0 et h_0

Dans cette section nous estimons g_0 et \mathbf{h}_0 dans $W^{1,q}(\Omega)$ et \mathbf{f}_0 dans $W^{0,q}(\Omega)$. Soit \mathbf{m} défini par

$$\mathbf{m} = \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q} + \|\nabla p_0\|_{1,q} + \|\nabla \tau_0\|_{1,q} + \|\tau_0\|_{0,q}, \quad (3.7.1)$$

où \mathbf{f}_0 , g_0 et \mathbf{h}_0 sont définis par

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_0(\mathbf{u}_0, p_0, \tau_0) = (1 - \omega)(\Delta \mathbf{u}_0 + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_0) - \operatorname{Re}(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 - \nabla p_0 + \operatorname{div} \tau_0, \quad (3.7.2)$$

$$g_0 = g_0(\mathbf{u}_0, p_0) = -\frac{\operatorname{Re}}{\beta}(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) p_0 - \operatorname{Re} \operatorname{div} \mathbf{u}_0, \quad (3.7.3)$$

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}_0(\mathbf{u}_0, \tau_0) = -\operatorname{Re} \operatorname{We} \{(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \tau_0 + g(\nabla \mathbf{u}_0, \tau_0)\} - \tau_0 + 2\omega \operatorname{Re} \mathbf{D}(\mathbf{u}_0). \quad (3.7.4)$$

Lemme 3.7.1. *On suppose que $\mathbf{u}_0 = (u_0, 0) \in W^{2,q}(\Omega)$, $p_0 \in W^{2,q}(\Omega)$ et $\tau_0 \in W^{2,q}(\Omega)$ avec $2 < q < 3$. Alors $\mathbf{f}_0 \in W^{0,q}(\Omega)$, $g_0 \in W^{1,q}(\Omega)$ et $\mathbf{h}_0 \in W^{1,q}(\Omega)$ et vérifient les estimations :*

$$\|\mathbf{f}_0\|_{0,q} \leq c_* \left[2(1 - \omega) \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{0,q} + \|\operatorname{div} \tau_0\|_{0,q} + \|\nabla p_0\|_{0,q} + \operatorname{Re} \|\mathbf{u}_0\|_{1,q}^2 \right], \quad (3.7.5)$$

$$\|g_0\|_{1,q} \leq \operatorname{Re} c_* \left(\frac{1}{\beta} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q} \|\nabla p_0\|_{1,q} + \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q} \right), \quad (3.7.6)$$

$$\|\mathbf{h}_0\|_{1,q} \leq \operatorname{Re} c_* \left[\|\tau_0\|_{1,q} + \operatorname{We} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q} \|\tau_0\|_{1,q} + \operatorname{We} \|\mathbf{u}_0\|_{1,q} \|\nabla \tau_0\|_{1,q} + 2\varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q} \right], \quad (3.7.7)$$

où $c_* = C(\Omega, q)$.

De plus, $\|\mathbf{f}_0\|_{0,q} + \|g_0\|_{1,q} + \|\mathbf{h}_0\|_{1,q} \leq C_6 \mathbf{m}$ avec $C_6 = C(\Omega, q, \operatorname{Re}, \operatorname{We}, \beta, \omega)$.

Preuve.

Calculons

$$\|\mathbf{f}_0\|_{0,q} \leq 2(1 - \omega) \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{0,q} + \|\operatorname{div} \tau_0\|_{0,q} + \|\nabla p_0\|_{0,q} + \operatorname{Re} \|(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0\|_{0,q}.$$

Or $\mathbf{u}_0 = (u_0, 0)$, alors $(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 = u_0 \partial_x u_0$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0\|_{0,q} &\leq c_* \|u_0\|_{\infty} \|\partial_x u_0\|_{0,q} \\ &\leq c_* \|\mathbf{u}_0\|_{1,q} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{0,q} \\ &\leq c_* \|\mathbf{u}_0\|_{1,q}^2, \end{aligned}$$

d'où nous trouvons (3.7.5).

D'autre part, il suffit d'estimer les deux termes de g_0 pour obtenir (3.7.6).

Pour estimer \mathbf{h}_0 , nous estimons $(u_0 \cdot \nabla) \tau_0$, $\mathbf{D}(\mathbf{u}_0)$ et $g(\nabla \mathbf{u}, \tau)$.

Calculons

$$(u_0 \cdot \nabla) \tau_0 = \begin{bmatrix} u_0 \partial_x \tau_{011} & u_0 \partial_x \tau_{012} \\ u_0 \partial_x \tau_{021} & u_0 \partial_x \tau_{022} \end{bmatrix}$$

et

$$\|u_0 \partial_x \tau_{0ij}\|_{1,q} \leq c_* \|u_0\|_{\infty} \|\partial_x \tau_{0ij}\|_{1,q} \leq c_* \|\mathbf{u}_0\|_{1,q} \|\nabla \tau_0\|_{1,q}.$$

Pour $\mathbf{D}(\mathbf{u}_0) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_0 + \nabla^T \mathbf{u}_0)$, alors

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{u}_0)\|_{1,q} \leq c_* \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q}.$$

On a : $g(\nabla \mathbf{u}, \tau) = \tau W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u})\tau - a(\mathbf{D}(\mathbf{u})\tau + \tau \mathbf{D}(\mathbf{u}))$ se met sous la forme d'une matrice

$$g(\nabla \mathbf{u}, \tau) = \begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(\tau_{21} + \tau_{12})((1-a)\partial_x u_2 + (-1-a)\partial_y u_1) - 2a\tau_{11}\partial_x u_1, \\ B &= \frac{1}{2}(\tau_{11} - \tau_{22})(\partial_x u_2 - \partial_y u_1) - \frac{a}{2}(\tau_{11} + \tau_{22})(\partial_x u_2 + \partial_y u_1) - a\tau_{12}(\partial_x u_1 + \partial_y u_2), \\ D &= \frac{1}{2}(\tau_{11} - \tau_{22})(\partial_x u_2 - \partial_y u_1) - \frac{a}{2}(\tau_{11} + \tau_{22})(\partial_x u_2 + \partial_y u_1) - a\tau_{21}(\partial_x u_1 + \partial_y u_2), \\ E &= \frac{1}{2}(\tau_{21} + \tau_{12})((1-a)\partial_x u_2 + (-1-a)\partial_y u_1) - 2a\tau_{22}\partial_y u_2. \end{aligned}$$

Nous faisons les estimations, alors :

$$\begin{aligned} \|A\|_{1,q} &\leq \frac{1}{2}((1-a)\|\partial_x u_2\|_\infty + (1+a)\|\partial_y u_1\|_\infty) \left(\|\tau_{12}\|_{1,q} + \|\tau_{21}\|_{1,q} \right) + 2a\|\partial_x u_1\|_\infty \|\tau_{11}\|_{1,q}, \\ &\leq c_* \|\nabla \mathbf{u}\|_{1,q} \|\tau\|_{1,q}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|B\|_{1,q} &\leq C[\|\tau_{11}\|_{1,q} + \|\tau_{22}\|_{1,q}][\|\partial_x u_2\|_\infty + \|\partial_y u_1\|_\infty] + a[\|\partial_x u_1\|_\infty + \|\partial_y u_2\|_\infty] \|\tau_{12}\|_{1,q} \\ &\leq c_* \|\nabla \mathbf{u}\|_{1,q} \|\tau\|_{1,q}. \end{aligned}$$

De la même manière nous estimons D et E , ce qui donne

$$\|\mathbf{g}\|_{1,q} \leq c_* \|\nabla \mathbf{u}\|_{1,q} \|\tau\|_{1,q}. \quad (3.7.8)$$

Par suite, nous déduisons une estimation de \mathbf{h} :

$$\|\mathbf{h}\|_{1,q} \leq c_* \left[\|\tau_0\|_{1,q} + \text{We} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q} \|\tau_0\|_{1,q} + \text{We} \|\mathbf{u}_0\|_{1,q} \|\nabla \tau_0\|_{1,q} + 2\varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q} \right], \quad (3.7.9)$$

où c_* désigne toujours une constante qui ne dépend que de Ω et q .

Pour estimer $\|\mathbf{f}_0\|_{0,q} + \|g_0\|_{1,q} + \|\mathbf{h}_0\|_{1,q}$, il suffit d'utiliser (3.7.5), (3.7.6), (3.7.9) et la définition de \mathbf{m} . □

3.7.2 Estimations de \mathbf{F} , G et \mathbf{H}

Nous rappelons les définitions de \mathbf{F} , G et \mathbf{H} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_0, p_0, \tau_0, \mathbf{w}) = \mathbf{f}_0 - \text{Re}^{-1}(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \quad (3.7.10)$$

$$G = G(\mathbf{u}_0, p_0, \mathbf{w}) = g_0 - \frac{1}{\beta}(\mathbf{w} \cdot \nabla) p_0, \quad (3.7.11)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{u}_0, \tau_0, \mathbf{w}, \mathbf{T}) = \mathbf{h}_0 - \text{We} \left(\mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}_0, \mathbf{T}) + g(\nabla \mathbf{w}, \mathbf{T} + \tau_0) + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \tau_0 \right). \quad (3.7.12)$$

Lemme 3.7.2. *Étant données $\mathbf{u}_0 = (u_0, 0) \in W^{2,q}(\Omega)$, $p_0 \in W^{2,q}(\Omega)$ et $\tau_0 \in W^{2,q}(\Omega)$ avec $2 < q < 3$. Soient $\mathbf{w} \in W_0^{2,q}(\Omega)$ et $\mathbf{T} \in W^{1,q}(\Omega)$ tels que $\mathbf{T} = 0$ sur Γ_{in} . Alors $(\mathbf{F}, G, \mathbf{H}) \in W^{0,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$.*

De plus,

$$\|\mathbf{F}\|_{0,q} \leq c_* \left(\|\mathbf{f}_0\|_{0,q} + \text{Re}^{-1} \|\mathbf{w}\|_{1,q}^2 + \|\mathbf{w}\|_{1,q} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q} \right), \quad (3.7.13)$$

$$\|G\|_{1,q} \leq c_* \left(\|g_0\|_{1,q} + \frac{1}{\beta} \|\mathbf{w}\|_{1,q} \|\nabla p_0\|_{1,q} \right), \quad (3.7.14)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}\|_{1,q} \leq c_* \left[\|\mathbf{h}_0\|_{1,q} + \text{We}(\text{Re} \|\mathbf{T}\|_{1,q} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q} + \|\mathbf{T}\|_{1,q} \|\mathbf{w}\|_{2,q} + \|\tau_0\|_{1,q} \|\mathbf{w}\|_{2,q} \right. \\ \left. + \|\mathbf{w}\|_{1,q} \|\nabla \tau_0\|_{1,q} \right], \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

où $c_* = C(\Omega, q)$.

Preuve.

Calculons $\|\mathbf{F}\|_{0,q} \leq \|\mathbf{f}_0\|_{0,q} + \text{Re}^{-1} \|(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w}\|_{0,q} + \|(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0\|_{0,q}$. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w}\|_{0,q} &\leq \|w_1 \partial_x w_1 + w_2 \partial_y w_1\|_{0,q} + \|w_1 \partial_x w_2 + w_2 \partial_y w_2\|_{0,q} \\ &\leq c_* \left(\|w_1\|_\infty \|\partial_x w_1\|_{0,q} + \|w_2\|_\infty \|\partial_y w_1\|_{0,q} + \|w_1\|_\infty \|\partial_x w_2\|_{0,q} + \|w_2\|_\infty \|\partial_y w_2\|_{0,q} \right) \\ &\leq c_* \|\mathbf{w}\|_{1,q}^2. \end{aligned}$$

De la même manière, nous estimons le terme $(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0$, alors $\|(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0\|_{0,q} \leq c_* \|\mathbf{w}\|_{1,q} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q}$. nous obtenons enfin

$$\|\mathbf{F}\|_{0,q} \leq c_* \left(\|\mathbf{f}_0\|_{0,q} + \text{Re}^{-1} \|\mathbf{w}\|_{1,q}^2 + \|\mathbf{w}\|_{1,q} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q} \right).$$

Pour G , nous appliquons le calcul déjà fait pour estimation de \mathbf{F} alors nous avons

$$\|(\mathbf{w} \cdot \nabla) p_0\|_{1,q} \leq c_* \|\mathbf{w}\|_{1,q} \|\nabla p_0\|_{1,q},$$

et alors nous obtenons,

$$\|G\|_{1,q} \leq c_* \left(\|g_0\|_{1,q} + \frac{1}{\beta} \|\mathbf{w}\|_{1,q} \|\nabla p_0\|_{1,q} \right).$$

Enfin, nous utilisons (3.7.8) et $\|(\mathbf{w} \cdot \nabla) \tau_0\|_{1,q} \leq c_* \|\mathbf{w}\|_{1,q} \|\nabla \tau_0\|_{1,q}$ pour déduire

$$\|\mathbf{H}\|_{1,q} \leq C \left[\|\mathbf{h}_0\|_{1,q} + \text{We}(\text{Re} \|\mathbf{T}\|_{1,q} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q} + \|\mathbf{T}\|_{1,q} \|\mathbf{w}\|_{2,q} + \|\tau_0\|_{1,q} \|\mathbf{w}\|_{2,q} + \|\mathbf{w}\|_{1,q} \|\nabla \tau_0\|_{1,q}) \right]$$

tel que $c_* = C(\Omega, q)$.

□

Lemme 3.7.3. Soient $\mathbf{w} = (w^1, w^2) \in W_0^{2,q}(\Omega)$, $U = w^1 + \text{Re}u_0$, $V = w^2$ et $\mathbf{T} \in W^{1,q}(\Omega)$ tels que $\mathbf{T} = 0$ sur Γ_{in} . Alors la solution $(\mathbf{u}, p, \tau) \in W_0^{2,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ du problème (3.4.7) satisfait l'estimation :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{2,q} + \|\text{Re } p\|_{1,q} + \|\text{Re } \tau\|_{1,q} &\leq C_4 \left\{ \mathbf{m} \text{Re} + \mathbf{m} \text{Re} (\|\mathbf{w}\|_{2,q} + \|\text{Re} \mathbf{T}\|_{1,q}) \right. \\ &\quad \left. + (\|\text{Re} \mathbf{T}\|_{1,q} + \|\mathbf{w}\|_{2,q})^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.7.16)$$

où C_4 est défini en (3.6.10).

Preuve.

Nous utilisons les inégalités (4.8.34), (3.7.14) et (3.7.15) alors :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\|_{0,q} + \|G\|_{1,q} + \|\mathbf{H}\|_{1,q} &\leq c_* \left\{ \|\mathbf{f}_0\|_{0,q} + \|\mathbf{g}_0\|_{1,q} + \|\mathbf{h}_0\|_{1,q} + \text{Re } \text{We} \|\mathbf{T}\|_{1,q} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q} + \text{Re}^{-1} \|\mathbf{w}\|_{2,q}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{w}\|_{2,q} \left[\|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q} + \frac{1}{\beta} \|\nabla p_0\|_{1,q} + \text{We} \|\tau_0\|_{1,q} + \text{We} \|\nabla \tau_0\|_{1,q} \right] \right. \\ &\quad \left. + \text{We} \|\mathbf{T}\|_{1,q} \|\mathbf{w}\|_{2,q} \right\} \end{aligned}$$

Utilisons la définition de \mathbf{m} dans (3.7.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\|_{0,q} + \|G\|_{1,q} + \|\mathbf{H}\|_{1,q} &\leq c_* \left(\mathbf{m} + \text{Re}^{-1} \|\mathbf{w}\|_{2,q}^2 + \mathbf{m} \left(1 + \frac{1}{\beta} + 2\text{We} \right) \|\mathbf{w}\|_{2,q} + \mathbf{m} \text{Re } \text{We} \|\mathbf{T}\|_{1,q} \right. \\ &\quad \left. + \text{We} \|\mathbf{T}\|_{1,q} \|\mathbf{w}\|_{2,q} \right), \end{aligned}$$

avec $c_* = C(\Omega, q)$.

Utilisons (3.6.2), nous trouvons

$$\|\mathbf{u}\|_{2,q} + \|\text{Re } p\|_{1,q} + \|\text{Re } \tau\|_{1,q} \leq C_4 \left(\mathbf{m} \text{Re} + \mathbf{m} \text{Re} (\|\mathbf{w}\|_{2,q} + \|\text{Re} \mathbf{T}\|_{1,q}) + (\|\text{Re} \mathbf{T}\|_{1,q} + \|\mathbf{w}\|_{2,q})^2 \right),$$

où C_4 est défini en (3.6.10). □

3.8 Résolution du problème non linéaire

3.8.1 Application contractante et point fixe

Soient $\mathbf{u}_0 = (u_0, 0) \in W^{2,q}(\Omega)$ tel que $u_0 \geq C_0 > 0$, et $(p_0, \tau_0) \in W^{2,q}(\Omega) \times W^{2,q}(\Omega)$. Soient \mathbf{f}_0 , g_0 , \mathbf{h}_0 définis respectivement par les relations (3.4.1), (3.4.2), (3.4.3).

Dans cette partie, nous définissons une méthode de point fixe pour démontrer l'existence de solutions du problème non linéaire (3.4.4). Soient $(\mathbf{w}, \mathbf{T}) \in W_0^{2,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ tels que $\mathbf{T} = 0$ sur Γ_{in} et soit (\mathbf{u}, p, τ) la solution du problème linéaire (3.4.7). Définissons $q = \text{Re } p$, $\mathbf{t} = \text{Re } \mathbf{T}$

et $\mathcal{S} = \operatorname{Re} \tau$, alors le système linéaire (3.4.7) se met sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} -(1-\omega)(\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{Re}(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{div} \mathcal{S} + \operatorname{Re} \mathbf{F}, \\ \operatorname{Re} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\beta}(Uq_x + Vq_y) = \operatorname{Re} G, \\ \operatorname{We} \{U\mathcal{S}_x + V\mathcal{S}_y\} + \operatorname{Re} \mathcal{S} = 2\omega \operatorname{Re} \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \operatorname{Re} \mathbf{H}, \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ q = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{in}, \\ \mathcal{S} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{in}, \end{array} \right. \quad (3.8.1)$$

où $(U, V) = \mathbf{w} + \operatorname{Re} \mathbf{u}_0 = (w^1 + \operatorname{Re} u_0, w^2)$ et $\mathbf{F}, G, \mathbf{H}$ sont donnés par les relations (3.4.8), (3.4.9), (3.4.10).

L'existence de la solution de (3.8.1) est obtenue dans le théorème 3.6.1.

On définit $\mathcal{R} : (\mathbf{w}, \mathbf{t}) \longrightarrow (\mathbf{u}, \mathcal{S})$ avec $(\mathbf{u}, q, \mathcal{S})$ solution du système (3.8.1). Nous allons démontrer que \mathcal{R} est une application contractante pour la topologie de $W_0^{1,q}(\Omega) \times W^{0,q}(\Omega)$ dans la boule \mathcal{B}_γ définie par

$$\mathcal{B}_\gamma = \{(\mathbf{w}, \mathbf{t}) \in W_0^{2,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega); \|\mathbf{w}\|_{2,q} + \|\mathbf{t}\|_{1,q} \leq \gamma\} \quad (3.8.2)$$

où $\gamma \leq 1$.

Nous avons défini la constante \mathbf{m} en (3.7.1) par

$$\mathbf{m} = \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{1,q} + \|\nabla p_0\|_{1,q} + \|\nabla \tau_0\|_{1,q} + \|\tau_0\|_{0,q}.$$

Lemme 3.8.1. *Il existe trois constantes positives $\widetilde{\operatorname{Re}}_2, \widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ ($\widetilde{\gamma}_1 < \widetilde{\gamma}_2 \leq 1$), dépendant de \mathbf{m} , telles que si $0 < \operatorname{Re} \leq \widetilde{\operatorname{Re}}_2$ et $\gamma \in]\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2[$ alors $\mathcal{R}(\mathcal{B}_\gamma) \subset \mathcal{B}_\gamma$.*

Preuve.

Soit $(\mathbf{w}, \mathbf{t}) \in \mathcal{B}_\gamma$ alors $\|\mathbf{w}\|_{2,q} + \|\mathbf{t}\|_{1,q} \leq \gamma$. Or l'estimation (3.7.16) montré dans le lemme (5.6.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{2,q} + \|\mathcal{S}\|_{1,q} &\leq \|\mathbf{u}\|_{2,q} + \|q\|_{1,q} + \|\mathcal{S}\|_{1,q} \\ &\leq C_4 \left(\mathbf{m} \operatorname{Re} + \mathbf{m} \operatorname{Re} (\|\mathbf{w}\|_{2,q} + \|\operatorname{Re} \mathbf{T}\|_{1,q}) + (\|\operatorname{Re} \mathbf{T}\|_{1,q} + \|\mathbf{w}\|_{2,q})^2 \right), \\ &\leq C_4 \left(\mathbf{m} \operatorname{Re} + \mathbf{m} \operatorname{Re} \gamma + \gamma^2 \right), \\ &\leq \gamma, \end{aligned}$$

et ceci en choisissant γ tel que $3\mathbf{m}C_4\widetilde{\operatorname{Re}}_2 < \gamma < \frac{1}{3C_4}$. D'où $\mathcal{R}(\mathcal{B}_\gamma) \subset \mathcal{B}_\gamma$. □

Notons que $\|\mathbf{u}\|_\infty \leq \|\mathbf{u}\|_{2,q} \leq \gamma$, et puisque $\gamma \leq 1$ nous avons donc $\|\mathbf{u}\|_\infty < C_0$ et ceci pour conserver la positivité de U .

Lemme 3.8.2. *Soient $(\mathbf{u}_1, q_1, \mathcal{S}_1)$ et $(\mathbf{u}_2, q_2, \mathcal{S}_2)$ les solutions du système (3.8.1) correspondant respectivement aux données $(\mathbf{w}_1, \mathbf{t}_1, \mathbf{F}_1, G_1, \mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{w}_2, \mathbf{t}_2, \mathbf{F}_2, G_2, \mathbf{H}_2)$, alors $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, q_1 -$*

$q_2, \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2) = (\mathbf{u}^*, q^*, \mathcal{S}^*)$ est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} -(1 - \omega)(\Delta \mathbf{u}^* + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^*) + \operatorname{Re}(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}^* + \nabla q^* = \operatorname{div} \mathcal{S}^* + \operatorname{Re} \mathbf{F}^*, \\ \frac{1}{\beta}((\mathbf{w}_2 + \operatorname{Re} \mathbf{u}_0) \cdot \nabla) q^* = \operatorname{Re} G^* - \operatorname{Re} \operatorname{div} \mathbf{u}^* - \frac{1}{\beta}(\mathbf{w}^* \cdot \nabla) q_1, \\ \operatorname{We}((\mathbf{w}_2 + \operatorname{Re} \mathbf{u}_0) \cdot \nabla) \mathcal{S}^* + \operatorname{Re} \mathcal{S}^* = 2\operatorname{Re} \omega \mathbf{D}(\mathbf{u}^*) + \operatorname{Re} \mathbf{H}^* - (\mathbf{w}^* \cdot \nabla) \mathcal{S}_1, \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ q^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{in}, \\ \mathcal{S}^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{in}, \end{array} \right. \quad (3.8.3)$$

avec

$$\operatorname{Re} \mathbf{F}^* = -(\mathbf{w}^* \cdot \nabla) \mathbf{w}_1 - (\mathbf{w}_2 \cdot \nabla) \mathbf{w}^* - \operatorname{Re}(\mathbf{w}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \quad (3.8.4)$$

$$\operatorname{Re} G^* = \frac{\operatorname{Re}}{\beta}(\mathbf{w}^* \cdot \nabla) p_0, \quad (3.8.5)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathbf{H}^* &= -\operatorname{We} \operatorname{Re} \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}_0, \mathbf{t}^*) - \operatorname{We} \operatorname{Re} \mathbf{g}(\nabla \mathbf{w}^*, \tau_0) - \operatorname{We} \mathbf{g}(\nabla \mathbf{w}_1, \mathbf{t}^*) \\ &\quad - \operatorname{We} \mathbf{g}(\nabla \mathbf{w}^*, \mathbf{t}_2) - \operatorname{We} \operatorname{Re}(\mathbf{w}^* \cdot \nabla) \tau_0. \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

De plus,

$$\|\operatorname{Re} \mathbf{F}^*\|_{0,q} \leq c_*(\gamma + m \operatorname{Re}) \|\mathbf{w}^*\|_{1,q}, \quad (3.8.7)$$

$$\|\operatorname{Re} G^*\|_{0,q} \leq c_* \frac{m \operatorname{Re}}{\beta} \|\mathbf{w}^*\|_{1,q}, \quad (3.8.8)$$

$$\|\operatorname{Re} \mathbf{H}^*\|_{0,q} \leq c_* \operatorname{We}(\operatorname{Re} m + \gamma) \left(\|\mathbf{w}^*\|_{1,q} + \|\mathbf{t}^*\|_{0,q} \right), \quad (3.8.9)$$

avec $c_* = C(\Omega, q)$.

Preuve.

Pour estimer $(\operatorname{Re} \mathbf{F}^*)$ et $(\operatorname{Re} G^*)$, nous calculons :

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Re} \mathbf{F}^*\|_{0,q} &\leq c_* \left(\|\mathbf{w}^*\|_{\infty} \|\nabla \mathbf{w}_1\|_{0,q} + \|\mathbf{w}_2\|_{\infty} \|\nabla \mathbf{w}^*\|_{0,q} \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Re} \|\mathbf{w}^*\|_{\infty} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{0,q} \right) \\ &\leq c_*(\gamma + m \operatorname{Re}) \|\mathbf{w}^*\|_{1,q} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Re} G^*\|_{0,q} &\leq c_* \frac{\operatorname{Re}}{\beta} \|\mathbf{w}^*\|_{\infty} \cdot \|\nabla p_0\|_{0,q} \\ &\leq c_* \frac{m \operatorname{Re}}{\beta} \|\mathbf{w}^*\|_{1,q}. \end{aligned}$$

Enfin, estimons $(\operatorname{Re} \mathbf{H}^*)$ de la même manière, alors :

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Re} \mathbf{H}^*\|_{0,q} &\leq c_* \operatorname{We} \left[\operatorname{Re} \|\mathbf{t}^*\|_{0,q} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{\infty} + \operatorname{Re} \|\tau_0\|_{\infty} \|\nabla \mathbf{w}^*\|_{0,q} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{t}^*\|_{0,q} \|\nabla \mathbf{w}_1\|_{\infty} + \|\mathbf{t}_2\|_{\infty} \|\nabla \mathbf{w}^*\|_{0,q} + \operatorname{Re} \|\mathbf{w}^*\|_{1,q} \|\nabla \tau_0\|_{0,q} \right] \\ &\leq c_* \operatorname{We}(\operatorname{Re} m + \gamma) \left[\|\mathbf{t}^*\|_{0,q} + \|\mathbf{w}^*\|_{1,q} \right], \end{aligned}$$

et ceci en tenant compte de fait que $\|\mathbf{t}_2\|_\infty \leq \|\mathbf{t}_2\|_{1,q} \leq \gamma$, $\|\nabla \mathbf{w}\|_\infty \leq \|\mathbf{w}\|_{2,q} \leq \gamma$.

□

Proposition 3.8.3. Soient $(\mathbf{f}_0, g_0, \mathbf{h}_0) \in W^{0,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$. Il existe trois constantes positives $\widetilde{\text{Re}}$, $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}$ ($\widetilde{\gamma}_1 < \widetilde{\gamma} \leq 1$), dépendant de \mathbf{m} , telles que si $0 < \text{Re} \leq \widetilde{\text{Re}}$ et $\gamma \in]\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}[$, alors

$$\mathcal{R} : \mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma$$

est une application contractante pour la topologie de $W_0^{1,q}(\Omega) \times W^{0,q}(\Omega)$.

Preuve.

Soient $\mathbf{w}_2 = (w_2^1, w_2^2) \in W_0^{2,q}$ et $\mathbf{u}_0 = (u_0, 0) \in W^{2,q}$ tels que $U_2 = w_2^1 + \text{Re } u_0$, $V_2 = w_2^2$. Le système (3.8.3) s'écrit sous la forme,

$$\left\{ \begin{array}{l} -(1-\omega)(\Delta \mathbf{u}^* + \nabla \text{div } \mathbf{u}^*) + \text{Re}(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}^* = \mathbf{F}_2, \\ \frac{1}{\beta}((\mathbf{w}_2 + \text{Re } \mathbf{u}_0) \cdot \nabla) q^* = G_2, \\ \text{We}((\mathbf{w}_2 + \text{Re } \mathbf{u}_0) \cdot \nabla) \mathcal{S}^* + \text{Re } \mathcal{S}^* = \mathbf{H}_2, \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ q^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{in}, \\ \mathcal{S}^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{in}, \end{array} \right. \quad (3.8.10)$$

avec :

$$\mathbf{F}_2 = \text{Re } \mathbf{F}^* + \nabla q^* + \mathbf{div } \mathcal{S}^*, \quad (3.8.11)$$

$$G_2 = \text{Re } G^* - \text{Re } \text{div } \mathbf{u}^* - \frac{1}{\beta}(\mathbf{w}^* \cdot \nabla) q_1, \quad (3.8.12)$$

$$\mathbf{H}_2 = \text{Re } \mathbf{H}^* + 2\omega \text{Re } \mathbf{D}(\mathbf{u}^*) - (\mathbf{w}^* \cdot \nabla) \mathcal{S}_1. \quad (3.8.13)$$

Soit $h_1(x, \bar{y})$ la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} (h_1)_x(x, \bar{y}) = (U_2^{-1} V_2)(x, h_1(x, \bar{y})) \text{ dans } \Omega, \\ h_1(\delta_-(\bar{y}), \bar{y}) = \bar{y}. \end{array} \right. \quad (3.8.14)$$

La fonction continue $h_1(x, \bar{y})$ est définie par

$$h_1(x, \bar{y}) = \int_{\delta_-(\bar{y})}^x (U_2^{-1} V_2)(s, h_1(s, \bar{y})) ds + \bar{y}. \quad (3.8.15)$$

D'après le lemme 5.5.2, $h_1(x, \bar{y})$ est strictement croissante sur $]y_*, y^*[$.

La proposition 3.5.4 nous donne :

$$q^*(x, y) = \int_{\delta_-(\varphi(x, y))}^x \widehat{G}_2(s, h_1(s, \varphi(x, y))) ds, \quad (3.8.16)$$

avec $\widehat{G}_2 = \beta U_2^{-1} G_2$.

Et la proposition 3.5.8 nous donne :

$$\mathcal{S}^*(x, y) = \int_{\delta_-(\bar{y})}^x \exp\left(-\frac{\text{Re}}{\text{We}} \int_s^x U_2^{-1}(t, h_1(t, \varphi(x, y))) dt\right) \widehat{\mathbf{H}}_2(s, h_1(s, \varphi(x, y))) ds, \quad (3.8.17)$$

avec $\widehat{\mathbf{H}}_2 = \frac{U_2^{-1}}{\text{We}} \mathbf{H}_2$.

Pour estimer q^* , nous utilisons les inégalités (3.5.15) et (3.8.8),

$$\begin{aligned} \|q^*\|_{0,q} &\leq C_1 \left(\|\text{Re} G^*\|_{0,q} + \text{Re} \|\text{div} \mathbf{u}^*\|_{0,q} + \frac{1}{\beta} \|\mathbf{w}^*\|_{\infty} \|\nabla q_1\|_{0,q} \right) \\ &\leq C_1 \left((\mathbf{m} \text{Re} + \gamma) \|\mathbf{w}^*\|_{1,q} + \text{Re} \|\mathbf{u}^*\|_{1,q} \right). \end{aligned} \quad (3.8.18)$$

En utilisant les lemmes 5.5.7 et 3.8.2, nous estimons \mathcal{S}^* :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^*\|_{0,q} &\leq C_2 \left(\|\text{Re} \mathbf{H}^*\|_{0,q} + \|\mathbf{w}^*\|_{\infty} \|\nabla \mathcal{S}_1\|_{0,q} + 2\omega \text{Re} \|D(\mathbf{u}^*)\|_{0,q} \right) \\ &\leq C_2(\gamma + \mathbf{m} \text{Re}) \left(\|\mathbf{w}^*\|_{1,q} + \|\mathbf{t}^*\|_{0,q} \right) + 2\omega \text{Re} C_2 \|\mathbf{u}^*\|_{1,q}. \end{aligned} \quad (3.8.19)$$

Remarque 3.8.4. *On a déjà démontré que si*

$$\|\mathbf{u}\|_{2,q} + \|q\|_{1,q} + \|\mathcal{S}\|_{1,q} \leq \gamma$$

alors

$$\|\nabla q\|_{0,q} \leq \gamma.$$

D'après l'inégalité (3.5.30) dans le théorème 5.4.1 et pour $k = 1$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^*\|_{1,q} &\leq C'_3 \left(\|\text{div} \mathcal{S}^*\|_{-1,q} + \|\nabla q^*\|_{-1,q} + \|\text{Re} \mathbf{F}^*\|_{-1,q} \right) \\ &\leq C'_3 \left(\|\mathcal{S}^*\|_{0,q} + \|q^*\|_{0,q} + \|\text{Re} \mathbf{F}^*\|_{0,q} \right). \end{aligned}$$

Or, les estimations (3.8.18), (3.8.19) et (3.8.7) nous donnent

$$\|\mathbf{u}^*\|_{1,q} \leq C_3(C_1 + C_2 + c_*)(\gamma + \mathbf{m} \text{Re}) \left(\|\mathbf{w}^*\|_{1,q} + \|\mathbf{t}^*\|_{0,q} \right) + C'_3 \text{Re} (C_1 + 2\omega C_2) \|\mathbf{u}^*\|_{1,q}. \quad (3.8.20)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^*\|_{1,q} + \|\mathcal{S}^*\|_{0,q} &\leq \|\mathbf{u}^*\|_{1,q} + \|q^*\|_{0,q} + \|\mathcal{S}^*\|_{0,q} \\ &\leq (C_3 + 1)(C_1 + C_2 + c_*)(\gamma + \mathbf{m} \text{Re}) \left(\|\mathbf{w}^*\|_{1,q} + \|\mathbf{t}^*\|_{0,q} \right) \\ &\quad + \text{Re} (C_3 + 1)(C_1 + 2\omega C_2) \|\mathbf{u}^*\|_{1,q}. \end{aligned} \quad (3.8.21)$$

Utilisons la condition $\widetilde{\text{Re}} (C_3 + 1)(C_1 + 2\omega C_2) < 1$, et prenons $C_7 = (C_3 + 1)(C_1 + C_2 + c_*)$ alors :

$$\|\mathbf{u}^*\|_{1,q} + \|\mathcal{S}^*\|_{0,q} < C_7(\gamma + \mathbf{m} \text{Re}) \left(\|\mathbf{w}^*\|_{1,q} + \|\mathbf{t}^*\|_{0,q} \right), \quad (3.8.22)$$

par suite pour $\widetilde{\text{Re}} < \min(\widetilde{\text{Re}}_1, \widetilde{\text{Re}}_2, \frac{1}{2\mathbf{m}C_7})$ et $\widetilde{\gamma} < \min(\widetilde{\gamma}_2, \frac{1}{2C_7})$, alors $\mathcal{R} : \mathcal{B}_{\widetilde{\gamma}} \longrightarrow \mathcal{B}_{\widetilde{\gamma}}$ défini par $\mathcal{R}(\mathbf{w}, \mathbf{t}) = (\mathbf{u}, \mathcal{S})$ est une contraction pour la topologie de $W_0^{1,q}(\Omega) \times W^{0,q}(\Omega)$.

□

3.8.2 Preuve du théorème 3.3.1

La boule \mathcal{B}_γ , qui est définie dans (3.8.2), est un ensemble compact et convexe de $W_0^{1,q}(\Omega) \times W^{0,q}(\Omega)$. Pour $\tilde{\gamma}_1 < \gamma < \tilde{\gamma}$ et $0 < \text{Re} < \widetilde{\text{Re}}$, le lemme 3.8.1 et la proposition 3.8.3 donnent respectivement $\mathcal{R}(\mathcal{B}_\gamma) \subset \mathcal{B}_\gamma$ et \mathcal{R} est une application continue de \mathcal{B}_γ dans $W_0^{1,q}(\Omega) \times W^{0,q}(\Omega)$, alors $\mathcal{R}(\mathcal{B}_\gamma)$ est compact. Par l'application du théorème du point fixe, nous déduisons qu'il existe une solution unique $(\mathbf{u}, \tau) \in \mathcal{B}_\gamma$ où $\mathcal{R}(\mathbf{w}, \mathbf{t}) = (\mathbf{u}, \mathcal{S})$.

De plus, $\mathbf{u}_0 \in W^{2,q}(\Omega)$, $p_0 \in W^{2,q}(\Omega)$, $\tau_0 \in W^{2,q}(\Omega)$ et $\widetilde{\text{Re}}$ est une constante positive suffisamment petit telle que $0 < \text{Re} < \widetilde{\text{Re}}$. Utilisons l'estimation (3.7.16), nous déduisons que la solution $(\text{Re}\mathbf{u} - \text{Re}\mathbf{u}_0, p - p_0, \tau - \tau_0)$ du système (3.2.1)-(3.2.2) satisfait l'estimation :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_{2,q} + \|p - p_0\|_{1,q} + \|\tau - \tau_0\|_{1,q} \leq C,$$

avec $C = C(\widetilde{\text{Re}}, \beta, \omega, \Omega, C_0, \text{We}, q)$.

Ce problème est, d'ailleurs, indissolublement lié à la recherche des points singuliers de f , puisque ceux-ci constituent, au point de vue de la théorie moderne des fonctions, la plus importante des propriétés de f .

JACQUES HADAMARD
Notice sur les travaux scientifiques.

Chapitre 4

Écoulements de fluides viscoélastiques viscoélastiques, stationnaires et faiblement compressibles de type Oldroyd dans un domaine borné avec coins.

THE steady state nonlinear weakly compressible viscoelastic fluid of Oldroyd type with zero boundary conditions is considered on a bounded two-dimensional domains with an isolated corner point. For small data, we prove the existence and the uniqueness of the solution for the nonlinear problem in weighted Sobolev spaces $\mathcal{V}_\xi^{k,2}$ where the index ξ characterizes the power growth of the solution near the angular points. The proof follows from an analysis of a linearized problem and the use of fixed point theory. We introduce a method of decomposition for such linearized equations : the velocity field \mathbf{u} is split into a non-homogeneous incompressible part \mathbf{v} ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) and a compressible part $\nabla\varphi$. We describe the behavior of the solutions near the angular points. We show that the solution is the sum of finitely many singular functions and a regular remainder.

4.1 Introduction

AU 20ème siècle et particulièrement dans sa deuxième moitié, un grand nombre d'articles et de livres mathématiques, concernant le sujet des problèmes de valeur elliptiques dans les domaines avec des frontières singulières, a été publié. Les premiers travaux, qui développent une théorie générale pour les problèmes elliptiques dans des domaines ayant des points angulaires ou coniques, sont ceux de G.I. Eskin [25, 24], Ya.B. Lopatinskii [63] et V.A. Kondrat'ev [58, 59]. G.I. Eskin et Ya.B. Lopatinskii ont étudié des problèmes elliptiques dans des domaines avec des angles dans le plan. Ils ont appliqué la transformation de Mellin en intégrant les équations sur la frontière du domaine.

Citons également les livres de P. Grisvard [34, 33], ainsi que celui de V.A. Kozlov, V.G. Ma-

za'ya et J. Rossman [57, 56]. Il y a beaucoup d'articles intéressants et il est difficile d'en faire une liste complète. Citons en particulier les articles de M. Dauge (par exemple [18]), de M.G. Garroni, V.A. Solonnikov, M.A. Vivaldi [43], de P. Grisvard et G. Iooss [32], de G. Sweers [87].

L'analyse de plusieurs problèmes physiques, intervenant en mécanique de fluide, dans les domaines avec des frontières singulières, est encore ouverte. Récemment, les systèmes de Stokes, de Neumann et de Navier-Stokes dans des domaines avec coins ont été étudiés dans plusieurs articles. Nous pouvons citer les travaux de R.B. Kellogg, J.E. Osborn [49], S.A. Nazarov, A. Novotný et K. Pileckas [80], J.R. Kweon [52], S.A. Nazarov, M. Specovius-Neugebauer et J.H. Videman [81], J.R. Kweon et R.B. Kellogg [54, 53, 55], A. Kokotov et B. Plamenevskii (par exemple [60]). Parallèlement aux travaux théoriques, plusieurs études numériques ont été publiés, de problèmes dans des domaines singuliers (par exemple [15, 16]).

Notre objectif est d'étudier l'écoulement stationnaire des fluides viscoélastiques faiblement compressibles de type Oldroyd, dans un domaine ayant des coins, avec condition au bord homogène. En introduisant les espaces de Sobolev avec poids, nous utilisons des résultats classiques modifiés pour résoudre les problèmes de Neumann et de Stokes, obtenus à partir de la décomposition de type Helmholtz, dans des domaines singuliers. Sous certaines hypothèses, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème.

Le travail est organisé comme suit. Après la modélisation du problème et la description du domaine dans la section 4.2, nous présentons, dans la section 4.3, nos notations ainsi que nos espaces et surtout les espaces de Sobolev avec poids. La section 4.4 consiste en une reformulation du problème suite à un changement de variable. Nous rappelons quelques résultats auxiliaires et lemmes préliminaires et nous résolvons deux équations de transport dans les sections 4.5 et 4.6. Enfin, dans les sections 4.7 et 4.8 nous prouvons les théorèmes principaux : le premier concerne un problème linéarisé et le second le système non linéaire des équations correspondant à l'ensemble original d'équations.

4.2 Modélisation et Description du domaine

4.2.1 Modèle d'écoulement d'un fluide compressible

Nous considérons des écoulements stationnaires de fluides viscoélastiques faiblement compressibles dans un domaine borné Ω dans \mathbb{R}^2 ayant des coins, pour un système couplant les équations de Navier-Stokes et une équation constitutive différentielle du tenseur des extra contraintes τ . Nous nous limiterons à des fluides barotropiques (i.e. la loi de pression ne dépend que de la densité) non conducteurs de chaleur et isothermiques. La vitesse au bord de Ω est donnée nulle.

Nous considérons le modèle donné par le système d'équations aux dérivées partielles suivant (cf. [38], [40]) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu_s(\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \operatorname{div} \tau, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \lambda_1 \{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau)\} + \tau = 2\mu_p \mathbf{D}(\mathbf{u}), & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

Dans (4.2.1), \mathbf{f} est une force extérieure. μ_s et μ_p sont deux réels positifs, respectivement les viscosités de solvant et de polymère, la viscosité totale étant $\mu = \mu_s + \mu_p$. $\lambda_1 > 0$ est le temps de relaxation. \mathbf{g} est une fonctionnelle provenant de la dérivée objective d'un tenseur, d'expression

$$\mathbf{g}(\nabla u, \tau) = \tau W(u) - W(u)\tau - a(\mathbf{D}(u)\tau + \tau\mathbf{D}(u)), \quad (4.2.2)$$

où $W(u) = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla^T u)$ et $\mathbf{D}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$ sont respectivement le tenseur des taux de rotation et celui de taux de déformation, a est un paramètre vérifiant $a \in [-1, 1]$.

Les inconnues de notre problème sont : le vecteur vitesse $\mathbf{u} = (u, v)$, la pression p et le tenseur des extra contraintes τ .

4.2.2 Description du domaine

Nous nous limiterons au cas d'un domaine ayant un seul coin qui sera un angle \mathcal{P} dans le plan. Nous allons décrire précisément le domaine Ω que nous définissons dans \mathbb{R}^2 , de frontière $\Gamma = \partial\Omega$.

Nous considérons le cas où l'angle est de sommet placé sur l'origine $(0,0)$. Nous pouvons distinguer deux sortes de secteurs angulaires convexes :

- I. Soient ω_1 et ω_2 deux angles tels que $-2\pi < \omega_1 \leq \frac{-3\pi}{2}$ et $0 < \omega_2 \leq \frac{\pi}{2}$, on définit le premier secteur convexe S_1 par :

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \Theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \text{ tels que } r > 0 \text{ et } \omega_1 < \Theta < \omega_2\}.$$

- II. Soient ω_1 et ω_2 deux angles tels que $\frac{\pi}{2} \leq \omega_1 < \pi$ et $\pi < \omega_2 \leq \frac{3\pi}{2}$, on définit le deuxième secteur convexe S_2 par :

$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \Theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \text{ tels que } r > 0 \text{ et } \omega_1 < \Theta < \omega_2\}.$$

Modèle d'un angle convexe

Désignons par $\theta_0 = |\omega_2 - \omega_1|$ la mesure intérieure de l'angle dans S_1 ou S_2 . Le coin de notre domaine est représenté par un secteur angulaire \mathcal{P} , que nous définissons comme suit.

Soit r_0 un réel positif,

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \Theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \leq \theta_0 \text{ tels que } 0 < r \leq r_0\}.$$

Pour que le coin soit un coin convexe, nous supposons que,

$$\theta_0 \in]0, \pi[, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{\theta_0} > 1.$$

Les côtés de l'angle \mathcal{P} , nommés $\partial_1\mathcal{P}$ et $\partial_2\mathcal{P}$, sont définis par :

$$\partial_1\mathcal{P} = \{(r, \Theta); 0 \leq r \leq r_0 \text{ et } \Theta = \omega_1\},$$

$$\partial_2\mathcal{P} = \{(r, \Theta); 0 \leq r \leq r_0 \text{ et } \Theta = \omega_2\},$$

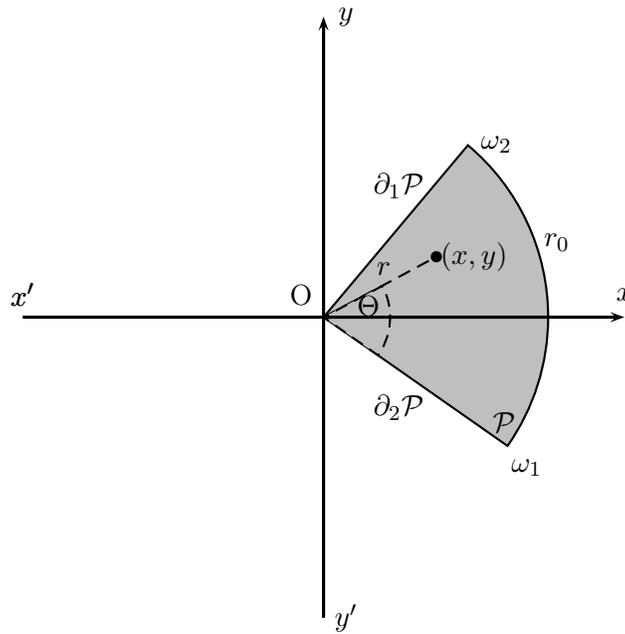


FIG. 4.1 – Un exemple d'un angle convexe.

et ils sont paramétrisés par :

$$\partial_1 \mathcal{P} = (t \cos \omega_1, t \sin \omega_1), \quad 0 \leq t \leq r_0,$$

$$\partial_2 \mathcal{P} = (t \cos \omega_2, t \sin \omega_2), \quad 0 \leq t \leq r_0.$$

Notons par n_i et d_i , $i \in \{1, 2\}$, respectivement les vecteurs normaux et les vecteurs directeurs de $\partial_1 \mathcal{P}$ et $\partial_2 \mathcal{P}$:

$$n_i = (-1)^i (-\sin \omega_i, \cos \omega_i),$$

$$d_i = (\cos \omega_i, \sin \omega_i).$$

Nous supposons les conditions suivantes :

1. $B(0, r_0) \cap \Omega$ coïncide avec \mathcal{P} .
2. $\Gamma = \partial\Omega$ est régulier en dehors du coin en $O(0,0)$.

4.2.3 Équations sans dimension

Nous considérons des quantités physiques sans dimension, en posant :

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^*}{U}, \quad p = \frac{p^* L}{\mu U}, \quad \tau = \frac{\tau^* L}{\mu U},$$

et nous définissons trois nombres sans dimension, le nombre de Reynolds Re , le nombre de Weissenberg We et un nombre associé aux viscosités ε :

$$Re = \frac{\rho_0 U L}{\mu}, \quad We = \frac{\lambda_1 U}{L}, \quad \varepsilon = \frac{\mu_p}{\mu},$$

où U et L sont respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques du fluide.

Le problème (4.2.1) s'écrit ([38], [40]) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(1-\omega)(\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{Re}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \operatorname{div} \tau, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{We} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau)\} + \tau = 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{u}), & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (4.2.3)$$

4.2.4 Modèle d'écoulement d'un fluide faiblement compressible

Les équations du système (4.2.1) sont complétées par une équation d'état reliant la pression à la densité. Supposons que la compressibilité $1/\beta$ du fluide est petite. Nous allons considérer l'approximation de la densité ([35, 36, 40, 94]), en prenant son développement d'ordre 1 par rapport à la pression :

$$\rho = 1 + \frac{1}{\beta}(p - p^0), \quad (4.2.4)$$

où $\frac{1}{\beta} = -\left(\frac{1}{L_0}\right) \left(\frac{\partial L}{\partial p}\right)_{(p^0, T^0)}$ est le coefficient isotherme de compressibilité, L_0 est une longueur donnée pour une pression p^0 et une température T^0 fixées.

Avant de remplacer ρ par sa valeur et faire les approximations, nous remarquons que, sous la condition (4.2.3)₄, l'équation (4.2.3)₂ est équivalente à l'équation suivante

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0, \quad (4.2.5)$$

où $|\Omega|$ désigne la mesure de l'ouvert Ω .

Remplaçons ρ par sa valeur donnée dans (4.2.4), l'égalité (4.2.5) s'écrit

$$\frac{1}{\beta}(\mathbf{u} \cdot \nabla)p + \left(1 + \frac{p - p^0}{\beta}\right) \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(1 + \frac{p - p^0}{\beta}\right) \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1}{\beta|\Omega|} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla)p = 0. \quad (4.2.6)$$

Sous l'hypothèse de faible compressibilité isothermique $\frac{|p - p^0|}{\beta} \ll 1$, comme $\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, nous pouvons approcher (4.2.6) par la condition suivante

$$\operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\beta}(\mathbf{u} \cdot \nabla)p - \frac{1}{\beta|\Omega|} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla)p = 0. \quad (4.2.7)$$

Définissons l'opérateur de projection Π par

$$\Pi(f) = f - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f \, dx. \quad (4.2.8)$$

L'équation (4.2.7) s'écrit :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\beta} \Pi((\mathbf{u} \cdot \nabla)p) = 0. \quad (4.2.9)$$

Finalement, nous nous intéressons donc au système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(1 - \omega)(\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{Re}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p & = \mathbf{f} + \operatorname{div} \tau, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\beta} \Pi((\mathbf{u} \cdot \nabla) p) & = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{We} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau)\} + \tau & = 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{u}), & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} & = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (4.2.10)$$

Un candidat "naturel" pour chercher notre solution (\mathbf{u}, p, τ) des équations du problème (4.2.10) est de le faire dans l'espace $\mathbf{H}^{k+2}(\Omega) \times \mathbf{H}^{k+1}(\Omega) \times \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$, ce qui n'est pas possible dans le cas d'un domaine avec coin. C'est pourquoi, dans le paragraphe 4.3.2, nous saurons amenés à donner des résultats de régularité pour la solution du système (4.2.10) dans des espaces de Sobolev avec poids.

Dans le cas où notre domaine Ω est borné régulier, Talhouk a démontré le résultat suivant.

Théorème 4.2.1 (Théorème 1, [94]). *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $\Omega \in C^{k+2}$ un domaine borné de \mathbb{R}^N ($N = 2, 3$), $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^k(\Omega)$ et $0 \leq \omega < 1$. Alors, il existe trois constantes $\gamma_0, \gamma_1, \beta_1$ telles que pour tous \mathbf{f} et β vérifiant $\|\mathbf{f}\|_k \leq \gamma_1$ et $\beta > \beta_1$, le problème (4.2.3) admet une unique solution dans la boule*

$$B_{\gamma_0}^{k+2} = \{(\mathbf{u}, p, \tau) \in \mathbf{H}^{k+2}(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times (H^{k+1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R}) \times \mathbf{H}^{k+1}(\Omega), \\ \|\mathbf{u}\|_{k+2} + \|p\|_{k+1} + \|\tau\|_{k+1} \leq \gamma_0\}.$$

Nazarov, Novotný et Pileckas, dans [80], ont résolu le problème de Navier-Stokes dans un domaine borné ayant un coin. Dans [54], Kweon et Kellogg ont montré l'existence et l'unicité de la solution du problème de Navier-Stokes dans un polygone avec des conditions de type "rentrantes-sortantes" au bord.

4.3 Notations, espaces et normes

Dans toute la suite, C désignera une constante qui ne dépend pas des fonctions inconnues, mais dépend uniquement des données : cette dépendance en les données sera précisée explicitement. La notation $(i)_j$, i et j dans \mathbb{N}^* , dénote la $j^{\text{ème}}$ équation du système (i) .

Avant de définir les espaces utilisés, précisons que les espaces des fonctions scalaires ou vectorielles sont notés de la même façon. Nous utilisons les espaces de Sobolev, normes et notations suivantes.

Si u est une fonction ou un vecteur défini presque partout sur un domaine borné Ω dans \mathbb{R}^2 , on note par $|u|$ sa valeur absolue dans \mathbb{R} ou sa norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 . Soient $k \in \mathbb{N}$,

$0 < \alpha < 1$ et $q \geq 1$. Nous définissons

$$\begin{aligned} \|u\|_0 &\equiv \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ et } \mathcal{L}^2(\Omega) = \{u; \|u\|_0 < +\infty\}, \\ \|u\|_{0,q} &\equiv \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \text{ et } \mathcal{L}^q(\Omega) = \{u; \|u\|_{0,q} < +\infty\}, \\ \|u\|_{k,q} &\equiv \sum_{j=0}^k \|\nabla^j u\|_q \text{ et } W^{k,q}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^q(\Omega); \|u\|_{k,q} < +\infty\}, \\ \|u\|_{\infty} &\equiv \sup\{|u(x)|; x \in \Omega\} \text{ et } \|u\|_{k,\infty} \equiv \sum_{j=0}^k \|\nabla^j u\|_{\infty}, \\ \|u\|_{C^\alpha(\Omega)} &\equiv \|u\|_{\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\alpha} \text{ et } C^\alpha(\Omega) = \{u; \|u\|_{C^\alpha(\Omega)} < +\infty\}. \end{aligned}$$

On dénote par $W_0^{k,q}(\Omega) = \{u \in W^{k,q}(\Omega); u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ et $W^{k-\frac{1}{q},q}(\Gamma)$ l'espace des traces des fonctions de $W^{k,q}(\Omega)$, muni de la norme :

$$|u|_{k-\frac{1}{q},q} = \inf_{\{v \in W^{k,q}(\Omega) \text{ tel que } v|_{\partial\Omega} = u\}} \|v\|_{k,q}.$$

4.3.1 Les espaces de Hölder et de Sobolev avec poids

Soit ξ un nombre réel. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout p vérifiant $1 \leq p \leq \infty$, nous définissons l'espace de Sobolev avec poids $\mathcal{V}_\xi^{k,p}(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions dont la norme est définie par :

$$\|u\|_{k,p,\xi}^p = \sum_{i=0}^k \left\| r^{\xi-k+i} u \right\|_{i,p}^p,$$

où $u = u(x)$ et $r = |x|$.

L'espace $\mathcal{V}_\xi^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme ci-dessus. En particulier,

$$\|u\|_{k,2,\xi}^2 = \sum_{i=0}^k \left\| r^{\xi-k+i} u \right\|_{i,2}^2,$$

est la norme de l'espace de Sobolev avec poids $\mathcal{V}_\xi^{k,2}(\Omega)$.

Pour $k \geq 1$, désignons par $\mathcal{V}_\xi^{k-\frac{1}{2},2}(\Gamma)$ l'espace des traces des fonctions de $\mathcal{V}_\xi^{k,2}(\Omega)$ sur le bord Γ muni de la norme :

$$|u|_{k-\frac{1}{2},2,\xi} = \inf_{\{v \in \mathcal{V}_\xi^{k,2}(\Omega) \text{ tel que } v|_{\partial\Omega} = u\}} \|v\|_{k,2,\xi}.$$

Nous définissons aussi l'espace $\mathcal{V}_{\xi,0}^{k,2}(\Omega)$ par,

$$\mathcal{V}_{\xi,0}^{k,2}(\Omega) = \{u \in \mathcal{V}_\xi^{k,2}(\Omega); u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Définissons l'espace de Hölder avec poids $\Lambda_\xi^{m+\delta}(\Omega)$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $0 < \delta < 1$, comme étant l'espace des fonctions définies dans Ω muni de la norme suivante,

$$\|u\|_{\Lambda_\xi^{m+\delta}} = \left(\sum_{k=0}^m \left\| r^{\xi-m-\delta+k} u \right\|_{C^k(\Omega)} + \left\| r^\xi u \right\|_{C^{m+\delta}(\Omega)} \right).$$

Lemme 4.3.1 (Section 6.1.1 [56]). *Soient les réels ξ_1, ξ_2 et les entiers naturels k_1, k_2 . Si $k_1 \geq k_2 \geq 1$ et $\xi_1 - k_1 = \xi_2 - k_2$, alors*

$$\mathcal{V}_{\xi_1}^{k_1,2}(\Omega) \subset \mathcal{V}_{\xi_2}^{k_2,2}(\Omega), \quad \mathcal{V}_{\xi_1}^{k_1-\frac{1}{2},2}(\Gamma) \subset \mathcal{V}_{\xi_2}^{k_2-\frac{1}{2},2}(\Gamma).$$

avec injections continues.

Lemme 4.3.2 (Lemme 3.1 [80]). *Soient $\xi \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et $q \geq 1$.*

1. *Soit $u \in \mathcal{V}_\xi^{k,q}(\Omega)$ et soit $t \in \mathbb{R}_+$ tel que*

$$q \leq t \leq \frac{2q}{2-qq} \text{ si } qq < 2, \quad (4.3.1)$$

ou

$$q \leq t < \infty \text{ si } qq = 2. \quad (4.3.2)$$

Alors $u \in \mathcal{V}_{\xi-k-\frac{2}{t}+\frac{2}{q}}^{0,t}(\Omega)$ et

$$\|u\|_{0,t,\xi-k-\frac{2}{t}+\frac{2}{q}} \leq c \|u\|_{k,q,\xi}. \quad (4.3.3)$$

2. *Soit $u \in \mathcal{V}_\xi^{k,q}(\Omega)$ et soit δ , $0 < \delta < 1$ tel que*

$$m + \delta \leq \frac{qq - 2}{q} \text{ si } qq > 2. \quad (4.3.4)$$

Alors $u \in \Lambda_{m+\delta-k+\xi+\frac{2}{q}}^{m+\delta}$ et

$$\|u\|_{\Lambda_{m+\delta-k+\xi+\frac{2}{q}}^{m+\delta}} \leq c \|u\|_{k,q,\xi}. \quad (4.3.5)$$

Avant de donner le résultat principal, nous allons établir et démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.3.3. *Soient $l \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega)$, $g \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega)$, $f \in \mathcal{V}_\xi^{k,2}(\Omega)$ et $h \in \mathcal{V}_\xi^{k-1,2}(\Omega)$. Supposons que*

$$k \in \mathbb{N}^*, \quad \xi < k. \quad (4.3.6)$$

Alors, il existe une constante $c_ = C(\Omega, k, \xi)$ telle que*

$$\|fg\|_{k,2,\xi} \leq c_* \|f\|_{k,2,\xi} \|g\|_{k+1,2,\xi}, \quad (4.3.7)$$

$$\|(l \cdot \nabla)l\|_{k,2,\xi} \leq c_* \|l\|_{k+2,2,\xi}^2, \quad (4.3.8)$$

$$\|gh\|_{k-1,2,\xi} \leq c_* \|g\|_{k+1,2,\xi} \|h\|_{k-1,2,\xi}, \quad (4.3.9)$$

$$\|lf\|_{k-1,2,\xi} \leq c_* \|l\|_{k+2,2,\xi} \|f\|_{k,2,\xi}. \quad (4.3.10)$$

Preuve.

Les estimations (5.2.1) et (4.3.8) sont déjà démontrés dans [80]. Nous allons démontrer (5.2.2). Soit $r = 0, 1, \dots, k-1$. Calculons la dérivée du produit gh à l'ordre r ,

$$\nabla^r(gh) = \sum_{\substack{i+j=r \\ 0 \leq j \leq r}} \nabla^i g \nabla^j h.$$

Donc,

$$\|\nabla^r(gh)\|_{0,2,\xi-k+1+r}^2 \leq \sum_{\substack{i+j=r \\ 0 \leq j \leq r}} \int_{\Omega} |\nabla^i g|^2 |\nabla^j h|^2 |x|^{2(\xi-k+1+r)} dx.$$

Or, $\xi < k$ et $i+j=r$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla^i g|^2 |\nabla^j h|^2 |x|^{2(\xi-k+1+r)} dx &= \int_{\Omega} |\nabla^i g|^2 |x|^{2(\xi-k+i)} |\nabla^j h|^2 |x|^{2(\xi-k+1+j)} |x|^{2(k-\xi)} dx \\ &\leq \|\nabla^i g\|_{\Lambda_{\xi-k+i}^0}^2 \|\nabla^j h\|_{0,2,\xi-k+1+j}^2. \end{aligned}$$

Utilisons l'inclusion $\mathcal{V}_{\xi}^{k+1-i,2}(\Omega) \subset \Lambda_{\xi-k+i}^0$ pour $i < k$, qui est vraie en tenant compte de $i \in \{0, \dots, r\}$ et $r \in \{0, \dots, k-1\}$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla^i g|^2 |\nabla^j h|^2 |x|^{2(\xi-k+1+r)} dx &\leq \|\nabla^i g\|_{k+1-i,2,\xi}^2 \|\nabla^j h\|_{0,2,\xi-k+1+j}^2 \\ &\leq c_* \|g\|_{k+1,2,\xi}^2 \|h\|_{k-1,2,\xi}^2. \end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de faire la somme sur r entre 0 et $k-1$,

$$\|gh\|_{k-1,2,\xi}^2 = \sum_{r=0}^{k-1} \|\nabla^r(gh)\|_{0,2,\xi-k+1+r}^2 \leq c_* \|g\|_{k+1,2,\xi}^2 \|h\|_{k-1,2,\xi}^2.$$

Nous utilisons la même méthode pour démontrer (5.2.5). □

4.3.2 Résultat principal

Nous allons montrer un résultat concernant le problème non linéaire (4.4.6).

Théorème 4.3.4. *Soit Ω est le domaine borné défini dans la section 4.2.2. Supposons que $\theta_0 \in]0, \pi[$, $\omega_0 = \frac{\pi}{\theta_0} > 1$.*

Soient

$$\mathbf{f} \in \mathcal{V}_{\xi}^{k,2}(\Omega), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2, \quad \omega \in]0, 1[, \quad \xi > 0, \quad (4.3.11)$$

$$\xi \in]k+1-\omega_0, k[, \quad \xi \neq k+2-m\omega_0, \quad \forall m = 2, 3, \dots. \quad (4.3.12)$$

Alors il existe trois constantes positives $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ et \mathfrak{f} telles que pour tous \mathbf{f} et β vérifiant

$$\|\mathbf{f}\|_{k,2,\xi} < \mathfrak{f}, \quad \beta > \tilde{\beta}, \quad (4.3.13)$$

le problème (4.2.10) admet une unique solution (\mathbf{u}, p, τ) dans la boule

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k,\xi} &= \left\{ (\mathbf{u}, p, \tau) \in \mathcal{V}_{\xi}^{k+2,2}(\Omega) \times \mathcal{V}_{\xi}^{k+1,2}(\Omega)/\mathbb{R} \times \mathcal{V}_{\xi}^{k+1,2}(\Omega), \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \right. \\ &\quad \left. \|(\mathbf{u}, p, \tau)\|_{k,\xi} \leq \tilde{\gamma} \right\}. \end{aligned}$$

4.4 Formulation du problème

4.4.1 Transformation du problème

Nous commençons par éliminer le terme $\mathbf{div}\tau$ de l'équation (4.2.10)₁. Pour cela, nous cherchons sa valeur en appliquant l'opérateur \mathbf{div} à l'équation (4.2.10)₃. Utilisons le calcul fait dans [94]. Tout d'abord nous avons

$$\mathbf{div}\{(I + \text{We}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\tau)\} = \text{We} \left(\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \right)_{i=1,2} + \text{We}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{div}\tau + \mathbf{div}\tau.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\mathbf{g}(\nabla\mathbf{u}, \tau) &= \tau \mathbf{div}(W - a\mathbf{D}) - (W + a\mathbf{D})\mathbf{div}\tau + \left(\sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_j} (W_{kj} - a\mathbf{D}_{kj}) \right)_{i=1,2} \\ &\quad - \left(\sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial (W_{ik} + a\mathbf{D}_{ik})}{\partial x_j} \tau_{kj} \right)_{i=1,2}. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons

$$(I + \text{We}(\mathbf{u} \cdot \nabla))\mathbf{div}\tau = \omega(\Delta\mathbf{u} + \nabla\mathbf{div}\mathbf{u}) + \mathbf{F}(\mathbf{u}, \tau), \quad (4.4.1)$$

avec

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \tau) = \text{We}\{l_1(\partial\mathbf{u}, \partial\tau) + l_2(\partial^2\mathbf{u}, \tau)\}$$

où

$$\begin{aligned} l_1(\partial\mathbf{u}, \partial\tau) &= (W + a\mathbf{D})\mathbf{div}\tau - \left(\sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_j} (W_{kj} - a\mathbf{D}_{kj}) + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \right)_{i=1,2}, \\ l_2(\partial^2\mathbf{u}, \tau) &= \left(\sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial (W_{ik} + a\mathbf{D}_{ik})}{\partial x_j} \tau_{kj} \right)_{i=1,2} - \tau \mathbf{div}(W - a\mathbf{D}). \end{aligned}$$

Pour démontrer que

$$Z[\mathbf{u}] = (I + \text{We}(\mathbf{u} \cdot \nabla)) : \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega) \quad (4.4.2)$$

est inversible, nous avons besoin de la proposition suivante :

Proposition 4.4.1 (Théorème 5.6, [80]). *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \leq k$. Supposons que*

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega), \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad g \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega).$$

Il existe une constante positive $\alpha = \alpha(\xi, k)$ telle que si

$$\alpha \text{We} \|\mathbf{u}\|_{k+2,2,\xi} < 1,$$

alors le problème

$$z + \text{We}(\mathbf{u} \cdot \nabla)z = g,$$

admet une solution unique $z \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega)$.

De plus, cette solution satisfait l'estimation suivante,

$$\|z\|_{k+1,2,\xi} \leq C \|g\|_{k+1,2,\xi},$$

où $C = C(\Omega, k, \xi)$.

En effet, soit la constante $\alpha_1 = \alpha_1(\xi, k)$ telle que

$$\alpha_1 \text{We} \|\mathbf{u}\|_{k+2,2,\xi} < 1,$$

alors la proposition 4.4.1 montre que l'opérateur $Z[\mathbf{u}]$ est inversible, d'inverse continu.

De plus, pour $q \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega)$,

$$\|Z[\mathbf{u}]^{-1}q\|_{k+1,2,\xi} \leq C_*^0 \|q\|_{k+1,2,\xi},$$

où $C_*^0 = C(\Omega, k, \xi)$.

Soient $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega)$ et $\tau \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega)$, alors $\mathbf{div}\tau \in \mathcal{V}_\xi^{k,2}(\Omega)$ et $(\Delta\mathbf{u} + \nabla\text{div}\mathbf{u}) + \mathbf{F}(\mathbf{u}, \tau) \in \mathcal{V}_\xi^{k,2}(\Omega)$. D'après la proposition 4.4.1, $Z[\mathbf{u}] : \mathcal{V}_\xi^{k,2}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}_\xi^{k,2}(\Omega)$ est inversible, nous déduisons que l'équation (4.4.1) est équivalente à

$$\mathbf{div}\tau = (I + \text{We}(\mathbf{u} \cdot \nabla))^{-1}[\omega(\Delta\mathbf{u} + \nabla\text{div}\mathbf{u}) + \mathbf{F}(\mathbf{u}, \tau)]. \quad (4.4.3)$$

Remplaçons le terme $\mathbf{div}\tau$ de l'équation (4.2.10)₁ par sa valeur trouvée dans (4.4.3), nous obtenons

$$-L[\mathbf{u}](\Delta\mathbf{u} + \nabla\text{div}\mathbf{u}) + \text{Re}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{f} + Z[\mathbf{u}]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{u}, \tau), \quad (4.4.4)$$

où $L[\mathbf{u}] = (1 - \omega)I + \omega Z[\mathbf{u}]^{-1}$.

Citons les propriétés de $L[\mathbf{u}]$ dans la proposition suivante :

Proposition 4.4.2. *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \leq k$. Supposons que*

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega), \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Il existe une constante positive $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\xi, k)$ telle que

$$\tilde{\alpha} \text{We} \|\mathbf{u}\|_{k+2,2,\xi} < 1,$$

alors l'opérateur $L[\mathbf{u}] : \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega)$ est continu et inversible.

Preuve.

De la proposition 4.4.1, on déduit que l'opérateur $L[\mathbf{u}]$ est bien défini de $\mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega)$ dans lui-même, ainsi qu'il est continu.

D'autre part, l'opérateur $L[\mathbf{u}]$ s'écrit,

$$L[\mathbf{u}] = Z[\mathbf{u}]^{-1} \times [I + (1 - \omega)\text{We}(\mathbf{u} \cdot \nabla)].$$

Appliquons la proposition 4.4.1 à l'opérateur $W[\mathbf{u}] = [I + (1 - \omega)\text{We}(\mathbf{u} \cdot \nabla)]$: il existe une constante α_2 telle que si

$$\alpha_2(1 - \omega)\text{We} \|\mathbf{u}\|_{k+2,2,\xi} < 1,$$

alors cet opérateur $W[\mathbf{u}]$ est inversible d'inverse continu. Il suffit de choisir

$$\tilde{\alpha} = \max(\alpha_1, (1 - \omega)\alpha_2), \quad (4.4.5)$$

pour conclure que $L[\mathbf{u}]$ est inversible. □

Nous revenons à l'équation (4.4.4) et utilisons la proposition 4.4.2, pour obtenir

$$-(\Delta \mathbf{u} + \nabla \text{div } \mathbf{u}) + \text{Re}L[\mathbf{u}]^{-1}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - L[\mathbf{u}]^{-1}\nabla p = L[\mathbf{u}]^{-1}\mathbf{f} + W[\mathbf{u}]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{u}, \tau).$$

Utilisons l'estimation du commutateur de $L[\mathbf{u}]^{-1}\nabla$ (voir [94]), nous avons

$$L[\mathbf{u}]^{-1}\nabla p = \nabla(L[\mathbf{u}]^{-1}p) - L[\mathbf{u}]^{-1}\{\text{We } \omega Z[\mathbf{u}]^{-1}(\nabla \mathbf{u})^T \nabla [Z[\mathbf{u}]^{-1} \times L[\mathbf{u}]^{-1}p]\}.$$

Le système (4.2.10) est transformé en un système équivalent

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(\Delta \mathbf{u} + \nabla \text{div } \mathbf{u}) + \nabla(L[\mathbf{u}]^{-1}p) = \mathbf{F}_1(\mathbf{u}, p, \tau), & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} + \frac{1}{\beta}\Pi((\mathbf{u} \cdot \nabla)p) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \text{We } \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\tau + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau)\} + \tau = 2\omega\mathbf{D}(\mathbf{u}), & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (4.4.6)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(\mathbf{u}, p, \tau) &= L[\mathbf{u}]^{-1}\{\mathbf{f} - \text{Re}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + Z[\mathbf{u}]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{u}, \tau)\} \\ &\quad + L[\mathbf{u}]^{-1}\{\text{We } \omega Z[\mathbf{u}]^{-1}(\nabla \mathbf{u})^T \nabla [Z[\mathbf{u}]^{-1} \times L[\mathbf{u}]^{-1}p]\}. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

4.4.2 Linéarisation du problème non linéaire

Pour étudier le problème (4.4.6), nous utilisons la décomposition de type Helmholtz, et un argument de point fixe, méthode introduite dans plusieurs articles, citons ([23],[40],[76],[78],[79]). Celle-ci nous permet de séparer la partie compressible de la partie incompressible du vecteur vitesse \mathbf{u} . Nous commençons par linéariser le problème non linéaire (4.4.6). Soient $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ un vecteur tel que $\mathbf{w} = 0$ sur Γ , \mathbf{T} un tenseur symétrique et μ une fonction, tous définis sur Ω .

Nous considérons le système linéaire en (\mathbf{u}, p, τ) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(\Delta \mathbf{u} + \nabla \text{div } \mathbf{u}) + \nabla(L[\mathbf{w}]^{-1}p) = \mathbf{F}_1, & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} + \frac{1}{\beta}\Pi((\mathbf{w} \cdot \nabla)p) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \tau + \text{We } (\mathbf{w} \cdot \nabla)\tau = \mathbf{H} + 2\omega\mathbf{D}(\mathbf{u}), & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (4.4.8)$$

avec :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, \mu, \mathbf{T}), \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}(\mathbf{w}, \mathbf{T}) = -We \mathbf{g}(\nabla \mathbf{w}, \mathbf{T}).\end{aligned}$$

Nous utilisons la décomposition de Helmholtz. Nous pouvons exprimer le champ de vitesse \mathbf{u} sous la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla \varphi, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{|\partial\Omega} = 0, \quad \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{|\partial\Omega} = 0, \quad \nabla \varphi|_{\partial\Omega} = -\mathbf{v}|_{\partial\Omega}, \quad (4.4.9)$$

où \mathbf{v} est le champ de vitesse incompressible et $\nabla \varphi$ est le champ de vitesse compressible.

La résolution du problème (4.4.8) peut être décomposée de la manière suivante.

D'une part, le problème de Stokes en (\mathbf{v}, p) ,

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v} + \nabla(L[\mathbf{w}]^{-1}p - 2\Delta \varphi) = \mathbf{F}_1, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{v} = -\nabla \varphi, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.4.10)$$

D'autre part, le problème de Neumann en φ ,

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = \frac{1}{\beta} \Pi((\mathbf{w} \cdot \nabla)p), & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.4.11)$$

Finalement, deux équations de transport en τ et p .

Maintenant, nous définissons formellement l'opérateur,

$$\mathcal{S} : \eta \longrightarrow p \quad (4.4.12)$$

de la façon suivante.

η étant donné, nous résolvons d'abord le problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = \frac{1}{\beta} \Pi((\mathbf{w} \cdot \nabla)\eta), & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.4.13)$$

Une fois que φ est connu, nous résolvons le problème de Stokes,

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v} + \nabla \left(L[\mathbf{w}]^{-1}p + \frac{2}{\beta} \Pi((\mathbf{w} \cdot \nabla)\eta) \right) = \mathbf{F}_1, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{v} = -\nabla \varphi, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.4.14)$$

qui, comme le gradient d'une constante est nul, s'écrit aussi :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v} + \nabla \left(L[\mathbf{w}]^{-1}p + \frac{2}{\beta} (\mathbf{w} \cdot \nabla)\eta \right) = \mathbf{F}_1, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{v} = -\nabla \varphi, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.4.15)$$

Posons $q = L[\mathbf{w}]^{-1}p + \frac{2}{\beta}((\mathbf{w} \cdot \nabla)\eta)$, alors nous résolvons le problème de Stokes suivant,

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v} + \nabla q = \mathbf{F}_1, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{v} = -\nabla \varphi, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.4.16)$$

Après résolution du problème (4.4.16), \mathbf{v} et q seront connus, alors nous pouvons chercher p comme étant la solution du premier problème de transport :

$$L[\mathbf{w}]^{-1}p + \frac{2}{\beta}(\mathbf{w} \cdot \nabla)p = q, \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.4.17)$$

Finalement, \mathbf{H} étant une fonction de \mathbf{w} et \mathbf{T} , est donnée, et τ sera la solution du second problème de transport :

$$\tau + \operatorname{We}(\mathbf{w} \cdot \nabla)\tau = 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{v} + \nabla\varphi) + \mathbf{H}, \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.4.18)$$

Il suffit de démontrer que \mathcal{S} est une contraction et admet un point fixe unique pour résoudre (4.4.8).

La dernière étape consiste à montrer que l'application $\mathcal{K} : (\mathbf{w}, \mu, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{u}, p, \tau)$ est une application contractante qui admet un point fixe unique.

4.5 Résultats préliminaires

4.5.1 Espaces, définitions et lemmes préliminaires

En appuyant sur les travaux de Nazarov, Novotný et Pileckas dans [80], nous commençons par introduire un nouvel espace, que nous pouvons identifier à $\mathcal{V}_\xi^{k+3,2}(\Omega) \times \mathbb{R}^m$. Cet espace nommé $\mathfrak{N}_\xi^{k+3,2}(\Omega)$ est défini pour tous $\xi \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ par,

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_\xi^{k+3,2}(\Omega) &= \left\{ \psi \in \mathcal{V}_\xi^{k+3,2}(\Omega); \psi = \psi(r, \theta) = \psi_{\mathbb{R}} + \sum_{j=1}^m c_j r^{j\omega_0} \cos(j\omega_0\theta) \right. \\ &\quad \left. \text{où } \psi_{\mathbb{R}} \in \mathcal{V}_\xi^{k+3,2}(\Omega) \text{ et } c_j \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{N}_\xi^{k+3,2}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$\|\psi\|_{\mathfrak{N}_\xi^{k+3,2}(\Omega)}^2 = \|\psi_{\mathbb{R}}\|_{k+3,2,\xi}^2 + \sum_{j=1}^m |c_j|^2.$$

Ici, tous les fonctions et les vecteurs sont définis sur Ω , et le point x de Ω est repéré par rapport à ses coordonnées polaires $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Nous définissons l'espace

$$\mathfrak{N}_{0,\xi}^{k+3,2}(\Omega) = \left\{ \psi \in \mathfrak{N}_\xi^{k+3,2}(\Omega); \nabla \psi_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}.$$

Nous avons aussi les projections continues suivantes,

$$\begin{aligned} \psi \in \mathfrak{N}_\xi^{k+3,2}(\Omega) &\mapsto \Pi_{\mathfrak{N}_1} \psi = \psi_{\mathbb{R}} \in \mathcal{V}_\xi^{k+3,2}(\Omega), \\ \psi \in \mathfrak{N}_\xi^{k+3,2}(\Omega) &\mapsto \Pi_{\mathfrak{N}_2} \psi = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Nous introduisons également l'espace

$$\mathfrak{D}_\xi^{k+2,2}(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega); \mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \theta) = \mathbf{v}_R + \sum_{j=1}^m c_j \nabla [r^j \omega_0 \cos(j \omega_0 \theta)] \right. \\ \left. \text{où } \mathbf{v}_R \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega) \text{ et } c_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cet espace est muni de la norme suivante :

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{D}_\xi^{k+2,2}(\Omega)}^2 = \|\mathbf{v}_R\|_{k+2,2,\xi}^2 + \sum_{j=1}^m |c_j|^2.$$

Nous définissons les projections continues $\Pi_{\mathfrak{D}_1}$ et $\Pi_{\mathfrak{D}_2}$:

$$\mathbf{v} \in \mathfrak{D}_\xi^{k+2,2}(\Omega) \mapsto \Pi_{\mathfrak{D}_1} \mathbf{v} = \mathbf{v}_R \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega), \\ \mathbf{v} \in \mathfrak{D}_\xi^{k+2,2}(\Omega) \mapsto \Pi_{\mathfrak{D}_2} \mathbf{v} = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Lemme 4.5.1 (Lemme 5.1, [80]). *Pour tous $\mathbf{v} \in \mathfrak{D}_\xi^{k+2,2}(\Omega)$ et $\psi \in \mathfrak{N}_\xi^{k+3,2}(\Omega)$, $\mathbf{v} + \nabla \psi \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega)$ si et seulement si $\Pi_{\mathfrak{D}_2} \mathbf{v} + \Pi_{\mathfrak{N}_2} \psi = 0$.*

Lemme 4.5.2 (Lemme 5.2, [80]). *Pour tout $\mathbf{v} \in \mathfrak{D}_\xi^{k+2,2}(\Omega)$, la fonction $\operatorname{div} \mathbf{v}$ est dans $\mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega)$.*

4.5.2 Résultats modifiés des problèmes classiques

Nazarov, Novotný et Pileckas, dans leur article [80], ont modifié plusieurs résultats classiques valables dans les espaces de Sobolev $W^{k,q}(\Omega)$, de façon à les appliquer dans les espaces de Sobolev avec poids $\mathcal{V}_\xi^{k,2}(\Omega)$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Nous profitons, dans notre travail, de cette adaptation et nous allons utiliser ces résultats dans des espaces appropriés.

Problème de Neumann dans les espaces $\mathfrak{N}_\xi^{k+3,q}(\Omega)$

Nous considérons le problème de Neumann suivant,

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = G, & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \varphi \cdot n = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.5.1)$$

Le problème de Neumann homogène associé à (4.5.1) s'écrit

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \varphi \cdot n = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.5.2)$$

Dans l'angle \mathcal{P} , le problème de Neumann est,

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = 0, & \text{dans } \mathcal{P}, \\ \nabla \varphi \cdot n = 0, & \text{sur } \partial \mathcal{P}. \end{cases} \quad (4.5.3)$$

Nous écrivons le système (4.5.3) en utilisant les coordonnées polaires,

$$\begin{cases} -(r\partial_r)^2 \varphi(\theta, r) - \partial_\theta^2 \varphi(\theta, r) = 0, & \theta \in]0, \theta_0[, \\ (\partial_\theta \varphi)(0, r) = 0, \\ (\partial_\theta \varphi)(\theta_0, r) = 0, \end{cases} \quad (4.5.4)$$

avec $r > 0$.

Supposons que φ à variable séparée de la forme $\varphi(\theta, r) = r^\lambda \tilde{\varphi}(\theta)$, nous obtenons le système suivant,

$$\begin{cases} -\tilde{\varphi}''(\theta) - \lambda^2 \tilde{\varphi}(\theta) = 0, & \theta \in]0, \theta_0[, \\ \tilde{\varphi}'(0) = 0, \\ \tilde{\varphi}'(\theta_0) = 0. \end{cases} \quad (4.5.5)$$

Considérons $\mathfrak{D}(\lambda, \partial_\theta) = -\partial_\theta^2 - \lambda^2$ et $\mathfrak{G} : \tilde{\varphi} \rightarrow (\tilde{\varphi}'(0), \tilde{\varphi}'(\theta_0))$, alors (4.5.5) peut se mettre aussi sous la forme,

$$\begin{cases} \mathfrak{D}(\lambda, \partial_\theta)(\tilde{\varphi}) = 0, & \theta \in]0, \theta_0[, \\ \mathfrak{G}(\tilde{\varphi}) = (0, 0). \end{cases} \quad (4.5.6)$$

Le spectre de l'opérateur $\mathfrak{K}(\lambda)$ associé au problème spectral (4.5.6), défini par

$$\mathfrak{K}(\lambda)(\tilde{\varphi}) = \left(\mathfrak{D}(\lambda, \partial_\theta)(\tilde{\varphi}), \mathfrak{G}(\tilde{\varphi}) \right),$$

constitué des valeurs propres $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_j = j \omega_0$ avec $j = \pm 1, \pm 2, \dots$; λ_j est une valeur propre simple et λ_0 est une valeur propre double. Les vecteurs propres correspondant à λ_j , pour $j = \pm 1, \pm 2, \dots$, sont $\tilde{\varphi}_j(\theta) = \cos(j \omega_0 \theta)$ alors que les vecteurs propres correspondant à λ_0 sont $\tilde{\varphi}_0^1(\theta) = 1$ et $\tilde{\varphi}_0^2(\theta) = 0$ (voir [80]).

Le problème de Neumann non homogène (4.5.1) est résolu dans Ω par les deux lemmes suivants :

Lemme 4.5.3 (Théorème 5.1, [80]). *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\kappa \in]k+2-\omega_0, k+2[$. Soit $G \in \mathcal{V}_\kappa^{k+1,2}(\Omega)$ tel que $\int_\Omega G dx = 0$. Alors, le problème (4.5.1) admet une solution unique φ dans $\mathcal{V}_\kappa^{k+3,2}(\Omega)$.*

De plus, on a l'estimation suivante :

$$\|\varphi\|_{k+3,2,\kappa} \leq C_2 \|G\|_{k+1,2,\kappa} \quad (4.5.7)$$

où $C_2 = C(\Omega, k, \kappa)$.

Lemme 4.5.4 (Théorème 5.2, [80]). *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \in]k+2-(m+1)\omega_0, k+2-m\omega_0[$, où m est un entier naturel. Si $G \in \mathcal{V}_\kappa^{k+1,2}(\Omega)$ tel que $\int_\Omega G dx = 0$, alors la solution φ du problème (4.5.1) est dans l'espace $\mathcal{V}_\xi^{k+3,2}(\Omega) \subset \mathcal{V}_\kappa^{k+3,2}(\Omega)$. De plus, φ admet la représentation suivante :*

$$\varphi = \varphi_R + \varphi_S,$$

avec

$$\varphi_R \in \mathcal{V}_\xi^{k+3,2}(\Omega), \quad \varphi_S = \sum_{j=1}^m c_j r^{j\omega_0} \cos(j\omega_0\theta) \text{ et } (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m. \quad (4.5.8)$$

Nous avons aussi l'estimation suivante :

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{R}_\xi^{k+3,2}(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{k+3,2,\xi} \leq C_2 \|G\|_{k+1,2,\xi}, \quad (4.5.9)$$

avec $C_2 = C(\Omega, k, \xi)$.

Problème de Stokes dans les espaces $\mathfrak{D}_\xi^{k+2,2}(\Omega)$

Cette partie est consacrée à la résolution du problème de Stokes,

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v} + \nabla q &= \mathbf{F}_1, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{v} &= \phi, & \text{sur } \Gamma, \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

où Ω est défini dans le paragraphe 4.2.2.

Commençons par la résolution du problème de Stokes homogène,

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v} + \nabla q &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{v} &= 0, & \text{sur } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

Utilisant l'approche générale de résolution du problème (4.5.11) au voisinage d'une singularité, nous commençons par étudier le même problème, mais cette fois-ci dans le secteur angulaire \mathcal{P} ,

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v} + \nabla q &= 0, & x \in \mathcal{P}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, & x \in \mathcal{P}, \\ \mathbf{v} &= 0, & x \in \partial\mathcal{P} \setminus O, \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

où O est l'origine $(0,0)$.

Nous écrivons notre problème (4.5.12) en coordonnées polaires. Soient v_r, v_θ les composantes polaires de $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Le vecteur \mathbf{v} s'écrit,

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (4.5.13)$$

Le problème (4.5.12) peut s'écrire aussi,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\left[(r\partial_r)^2 v_r + \partial_\theta^2 v_r - 2\partial_\theta v_\theta - v_r \right] + \partial_r q = 0, & \theta \in]0, \theta_0[, \\ -\left[(r\partial_r)^2 v_\theta + \partial_\theta^2 v_\theta + 2\partial_\theta v_r - v_\theta \right] + r\partial_\theta q = 0, & \theta \in]0, \theta_0[, \\ r\partial_r v_r + v_r + \partial_\theta v_\theta = 0, & \theta \in]0, \theta_0[, \\ v_r = 0, & \theta = 0, \theta = \theta_0, \\ v_\theta = 0, & \theta = 0, \theta = \theta_0. \end{array} \right. \quad (4.5.14)$$

Nous nous intéressons aux solutions (v_r, v_θ, q) à variables séparées de la forme,

$$\mathbf{v}(r, \theta) = \begin{pmatrix} v_r(r, \theta) \\ v_\theta(r, \theta) \end{pmatrix} = r^\lambda \begin{pmatrix} v_r(\theta) \\ v_\theta(\theta) \end{pmatrix} = r^\lambda \mathbf{V}(\theta) \text{ et } q(r, \theta) = r^{\lambda-1} q(\theta), \quad (4.5.15)$$

où \mathbf{V} et q sont les parties angulaires de \mathbf{v} et q définies dans $]0, \theta_0[$ et λ est un paramètre complexe.

Les fonctions v_r , v_θ et \mathfrak{q} satisfaisent au problème d'équations différentielles ordinaires (cf. [80, 81, 57, 56]),

$$\begin{cases} -\left[v_r'' + (\lambda^2 - 1)v_r - 2v_\theta'\right] + (\lambda - 1)\mathfrak{q} = 0, & \theta \in]0, \theta_0[, \\ -\left[v_\theta'' + (\lambda^2 - 1)v_\theta + 2v_r'\right] + \mathfrak{q}' = 0, & \theta \in]0, \theta_0[, \\ (\lambda + 1)v_r + v_\theta' = 0, & \theta \in]0, \theta_0[, \\ v_r = 0, & \theta = 0, \theta = \theta_0, \\ v_\theta = 0, & \theta = 0, \theta = \theta_0, \end{cases} \quad (4.5.16)$$

avec $D_\theta v = \frac{dv}{d\theta} = v'$ et $\phi = (\phi_r, \phi_\theta)$.

Considérons la matrice $\mathfrak{M}(\lambda, \partial_\theta)$ des opérateurs différentiels ordinaires, quadratique en λ définie par

$$\mathfrak{M}(\lambda, \partial_\theta) = \begin{pmatrix} -\partial_\theta^2 - (\lambda^2 - 1) & 2\partial_\theta & \lambda - 1 \\ -2\partial_\theta & -\partial_\theta^2 - (\lambda^2 - 1) & \partial_\theta \\ \lambda + 1 & \partial_\theta & 0 \end{pmatrix},$$

et l'application $\mathfrak{F} : (v_r, v_\theta) \rightarrow (v_r(0), v_\theta(0), v_r(\theta_0), v_\theta(\theta_0))$.

Le problème (4.5.16) peut se mettre aussi sous la forme,

$$\begin{cases} \mathfrak{M}(\lambda, \partial_\theta) \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ \mathfrak{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \theta \in]0, \theta_0[, \\ \mathfrak{F} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (4.5.17)$$

Notons par $\mathfrak{U}(\lambda)$, l'opérateur de Fredholm, défini par

$$\mathfrak{U}(\lambda) \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ \mathfrak{q} \end{pmatrix} = \left(\mathfrak{M}(\lambda, \partial_\theta) \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ \mathfrak{q} \end{pmatrix}, \mathfrak{F} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} \right).$$

D'après [57] (Théorème 1.1.1 et Section 5.1.1), le spectre de \mathfrak{U} est discret et formé des valeurs propres de multiplicité algébrique finie. En particulier, d'après ([80, 81, 57]), les valeurs propres de (4.5.17) coïncident avec les racines non nulles de l'équation transcendante

$$\lambda \sin \theta_0 \pm \sin \lambda \theta_0 = 0. \quad (4.5.18)$$

De plus, d'après le théorème 5.1.2 de [57], la bande

$$\left\{ \lambda \in \text{spectre}(\mathfrak{U}); 0 < \text{Re}(\lambda) \leq \frac{\pi}{\theta_0} \right\}, \quad (4.5.19)$$

contient exactement une seule valeur propre simple et réelle $\lambda = 1$ solution de l'équation $\lambda \sin \theta_0 - \sin \lambda \theta_0 = 0$. Cette valeur propre, $\lambda = 1$, correspondant au vecteur propre

$$(v_r^{(1)}, v_\theta^{(1)}, \mathfrak{q}^{(1)}) = (0, 0, 1). \quad (4.5.20)$$

Le problème de Stokes non homogène (4.5.10) est résolu dans Ω par le lemme suivant :

Lemme 4.5.5 (Théorème 5.3, [80]). *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \in]k+1-\omega_0, k+1[$ avec $\omega_0 = \pi/\theta_0$. Soient $\mathbf{F}_1 \in \mathcal{V}_\xi^{k,2}(\Omega)$ et $\phi \in \mathcal{V}_\xi^{k+\frac{3}{2},2}(\Gamma)$ vérifiant la condition de compatibilité $\int_\Gamma \phi \cdot n \, d\Gamma = 0$. Alors, le problème (4.5.10) admet une solution unique $(\mathbf{v}, q) \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega) \times \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega)$. Cette solution satisfait l'estimation suivante :*

$$\|\mathbf{v}\|_{k+2,q,\xi} + \|q\|_{k+1,2,\xi} \leq C_1 \left(\|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} + |\phi|_{k+\frac{3}{2},2,\xi} \right), \quad (4.5.21)$$

où $C_1 = C(\Omega, k)$.

Pour résoudre le problème (4.4.16), nous ne pouvons pas appliquer le lemme 4.5.5 directement puisque $\Pi_{\mathfrak{N}_2} \varphi \neq 0$, autrement dit, $\nabla \varphi|_\Gamma$ n'appartient pas à $\mathcal{V}_\xi^{k+\frac{3}{2},2}(\Gamma)$. Pour cela, nous introduisons le vecteur suivant

$$\mathbf{v}_S = - \sum_{j=1}^m c_j \nabla [r^{j\omega_0} \cos(j\omega_0\theta)], \quad c_j \in \mathbb{R}. \quad (4.5.22)$$

De (4.4.16), nous déduisons le problème

$$\begin{aligned} -\Delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) + \nabla q &= \mathbf{F}_1, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{v} - \mathbf{v}_S &= -\nabla \varphi - \mathbf{v}_S, & \text{sur } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.5.23)$$

D'après le lemme 4.5.4, la solution φ du problème de Neumann (4.4.13) s'écrit sous la forme

$$\varphi = \varphi_R + \varphi_S, \quad \varphi_R \in \mathcal{V}_\xi^{k+3,2}(\Omega), \quad \varphi_S = \sum_{j=1}^m c_j r^{j\omega_0} \cos(j\omega_0\theta) \text{ et } (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Maintenant, nous avons bien $-\nabla \varphi - \mathbf{v}_S = -\nabla \varphi_R$ et $\nabla \varphi_R|_\Gamma \in \mathcal{V}_\xi^{k+\frac{3}{2},2}(\Gamma)$. Appliquons le lemme 4.5.5, alors le problème (4.5.23) admet une solution unique $(\mathbf{v}_R, q) = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_S, q) \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega) \times \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega)$.

Enfin, le problème (4.4.16) est résolu grâce au lemme suivant :

Lemme 4.5.6 (Théorème 5.4, [80]). *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \in]k+1-\omega_0, k+1[$. Posons $\mathbf{F}_1 \in \mathcal{V}_\xi^{k,2}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathfrak{N}_\xi^{k+3,2}(\Omega)$ qui satisfait la condition de compatibilité $\int_\Gamma \nabla \varphi \cdot n \, d\Gamma = 0$. Alors, le problème (4.4.16) admet une solution unique (\mathbf{v}, q) telle que*

$$\mathbf{v} \in \mathfrak{D}_\xi^{k+2,2}(\Omega), \quad q \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega), \quad (4.5.24)$$

et cette solution satisfait l'estimation suivante :

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{D}_\xi^{k+2,2}(\Omega)} + \|q\|_{k+1,2,\xi} \leq C_1 \left(\|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} + \|\varphi\|_{\mathfrak{N}_\xi^{k+3,2}(\Omega)} \right), \quad (4.5.25)$$

où $C_1 = C(\Omega, k)$.

Problème de Dirichlet

Considérons le problème de Dirichlet suivant,

$$\begin{aligned} -\Delta\psi &= \zeta, & \text{dans } \Omega, \\ \psi &= 0, & \text{sur } \Gamma, \end{aligned}$$

où Ω est défini dans 4.2.2.

Lemme 4.5.7 (Théorème 5.5, [80]). *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \in]k+1 - \omega_0, k+1[$. Supposons que $\zeta \in \mathcal{V}_\xi^{k-1,2}(\Omega)$.*

Si $\psi \in \mathcal{V}_{\xi-k-1}^{0,2}(\Omega)$ est une solution du problème de Dirichlet (4.5.2), alors $\psi \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega)$ et vérifie l'estimation suivante

$$\|\psi\|_{k+1,2,\xi} \leq C \left(\|\zeta\|_{k-1,2,\xi} + \|\psi\|_{0,2,\xi-k-1} \right),$$

où $C = C(\Omega, k)$.

4.6 Résolution du problème du transport

Nous considérons le problème de transport suivant : trouver p définie sur Ω telle que

$$L[\mathbf{w}]^{-1}p + \frac{2}{\beta}(\mathbf{w} \cdot \nabla)p = q, \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.6.1)$$

Théorème 4.6.1. *Soient Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^2 , défini dans la section 4.2.2, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \in \mathbb{R}$ tels que $\xi < k$.*

Supposons que

$$\mathbf{w} \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega), \quad q \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega).$$

Il existe deux constantes positives $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\xi, k)$ et $\hat{\beta}$ telles que si

$$\beta > \hat{\beta}, \quad (4.6.2)$$

et

$$\hat{\alpha} \text{We} \|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} < 1, \quad (4.6.3)$$

le problème (4.6.1) admet une solution unique $p \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega)$ vérifiant :

$$\|p\|_{k+1,2,\xi} \leq C_3 \|q\|_{k+1,2,\xi}, \quad (4.6.4)$$

$$\|\Delta p\|_{k-1,2,\xi} \leq C_4 \left[\|\Delta q\|_{k-1,2,\xi} + \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\varepsilon}{\beta} \right) \|p\|_{k+1,2,\xi} \right]. \quad (4.6.5)$$

Preuve.

Nous allons démontrer ce théorème en utilisant plusieurs étapes.

Étape 1. Approximation du domaine et de l'équation du transport

Notons par $B(0, r)$ la boule de centre $(0, 0)$ et de rayon $r > 0$. Soit χ une fonction réelle telle que

$$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \chi = 0 \text{ dans } B(0, 1), \quad \chi = 1 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus B(0, 2).$$

Définissons maintenant une fonction de troncature χ_s , pour $s > 0$, par :

$$\chi_s(t) = \chi\left(\frac{t}{2s}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}^2.$$

Nous avons bien que

$$\chi_s = 0 \text{ dans } B(0, 2s), \quad \chi_s = 1 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus B(0, 4s).$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, il existe une constante c telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^2$,

$$|\nabla^\alpha \chi_s(t)| \leq c|t|^{-|\alpha|}$$

et

$$\nabla^\alpha \chi_s = 0 \text{ dans } (\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 4s)) \cup B(0, 2s).$$

La constante c est indépendante de s et $|t|$.

Soit $\{\Omega_s\}_{s>0}$ une famille de sous-domaines définis par les conditions :

$$\begin{aligned} \Omega_s &\subset \Omega \setminus B(0, s), \quad \Omega_{s_1} \subset \Omega_{s_2} \quad (s_2 < s_1), \\ \partial\Omega_s &\in C^{k+2}, \quad \partial\Omega_s \subset \bar{\Omega}, \quad \partial\Omega_s \setminus B(0, 2s) = \partial\Omega \setminus B(0, 2s). \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

Définissons $\mathbf{w}_s = \mathbf{w}\chi_s$, alors nous pouvons déduire l'équation de transport approchant (4.6.1) :

$$L[\mathbf{w}_s]^{-1} p_s + \frac{2}{\beta} (\mathbf{w}_s \cdot \nabla) p_s = q, \quad \text{dans } \Omega_s. \quad (4.6.7)$$

Étape 2. Existence de solutions de l'équation du transport approchée

Pour un $s > 0$ fixé, si $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega)$ et $q \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega)$ alors $\mathbf{w}_s \in W^{k+2,2}(\Omega_s)$ et $q \in W^{k+1,2}(\Omega_s)$. Ce problème est résolu dans le lemme suivant dont la démonstration se trouve dans [94].

Lemme 4.6.2. *Soient $\Omega_s \in C^{k+2}$ un domaine borné et $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que*

$$\mathbf{w}_s \in W^{k+2,2}(\Omega_s) \cap W_0^1(\Omega_s), \quad q \in W^{k+1,2}(\Omega_s).$$

Il existe deux constantes α_3 et β_1 telles que si

$$\alpha_3 \text{We} \|\mathbf{w}_s\|_{k+2} < 1, \quad \beta > \beta_1.$$

Alors le problème (4.6.7) admet une solution unique dans $W^{k+1,2}(\Omega_s)$ vérifiant

$$\|p_s\|_{k+1} \leq c^0 \|q\|_{k+1}, \quad (4.6.8)$$

$$\|\Delta p_s\|_{k-1} \leq c^1 \left[\|\Delta q\|_{k-1} + \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \|p_s\|_{k+1} \right]. \quad (4.6.9)$$

Étape 3. Estimation de p_s dans $\mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega_s)$

Lemme 4.6.3. *Soient $\mathbf{w}_s \in W^{k+2,2}(\Omega_s)$, $q \in W^{k+1,2}(\Omega_s)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $s > 0$. Supposons que $p_s \in W^{k+1,2}(\Omega_s)$ est la solution du problème (4.6.7). Il existe deux constantes $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ telles que si*

$$\xi < k, \quad \beta > \bar{\beta}, \quad (4.6.10)$$

et

$$\bar{\alpha} \text{We} \|\mathbf{w}_s\|_{k+2,2,\xi;\Omega_s} < 1, \quad (4.6.11)$$

alors, p_s vérifie les estimations suivantes :

$$\|p_s\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s} \leq c^2 \|q\|_{k+1,2,\xi}, \quad (4.6.12)$$

$$\|\Delta p_s\|_{k-1,2,\xi;\Omega_s} \leq c^3 \left[\|\Delta q\|_{k-1,2,\xi;\Omega_s} + \left(\|\mathbf{w}_s\|_{k+2,2,\xi;\Omega_s} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \|p_s\|_{k+1,2,\xi} \right]. \quad (4.6.13)$$

Preuve.

Rappelons notre problème de transport :

$$L[\mathbf{w}_s]^{-1} p_s + \frac{2}{\beta} (\mathbf{w}_s \cdot \nabla) p_s = q \quad \text{dans } \Omega_s, \quad (4.6.7)$$

où $L[\mathbf{w}_s]^{-1}$ est défini en (5.5.59) et (4.4.4). Ce problème est équivalent à

$$p_s + \frac{2}{\beta} L[\mathbf{w}_s] (\mathbf{w}_s \cdot \nabla) p_s = L[\mathbf{w}_s] q = q_s \quad \text{dans } \Omega_s,$$

que l'on écrit sous la forme

$$L_1[\mathbf{w}_s] p_s + \frac{2\omega}{\beta} L_2[\mathbf{w}_s] p_s = q_s \quad \text{dans } \Omega_s, \quad (4.6.14)$$

avec

$$\begin{aligned} L_1[\mathbf{w}_s] &= I + \frac{2(1-\omega)}{\beta} (\mathbf{w}_s \cdot \nabla), \\ L_2[\mathbf{w}_s] &= (I + \text{We}(\mathbf{w}_s \cdot \nabla))^{-1} (\mathbf{w}_s \cdot \nabla). \end{aligned}$$

Étudions les opérateurs $L_1[\mathbf{w}_s]$ et $L_2[\mathbf{w}_s]$. En effet, soit $\mathbf{w}_s \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega_s)$, nous appliquons la proposition 4.4.1, alors il existe une constante $\alpha_4 = \alpha_4(\xi, k)$ telle que si

$$\frac{2\alpha_4(1-\omega)}{\beta} \|\mathbf{w}_s\|_{k+2,2,\xi,\Omega_s} < 1,$$

alors l'opérateur $L_1[\mathbf{w}_s] : \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega_s) \longrightarrow \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega_s)$ est inversible d'inverse continu. De plus,

$$\begin{aligned} \|L_1[\mathbf{w}_s] q\|_{k+1,2,\xi,\Omega_s} &\leq C^1 \|q\|_{k+1,2,\xi,\Omega_s}, \\ \|L_1[\mathbf{w}_s]^{-1} q\|_{k+1,2,\xi,\Omega_s} &\leq C_*^1 \|q\|_{k+1,2,\xi,\Omega_s}. \end{aligned}$$

D'autre part, $L_2[\mathbf{w}_s]$ est défini continu de $\mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega_s)$ dans $\mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega_s)$ si

$$\alpha_1 \text{We} \|\mathbf{w}_s\|_{k+2,2,\xi,\Omega_s} < 1. \quad (4.6.15)$$

Pour la continuité de $L_2[\mathbf{w}_s]$, nous écrivons pour $q \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega_s)$,

$$L_2[\mathbf{w}_s]q = \frac{1}{\text{We}} \left(I - Z[\mathbf{w}_s]^{-1} \right) q,$$

alors,

$$\|L_2[\mathbf{w}_s]q\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s} \leq C^2 \|q\|_{k+1,2,\xi},$$

avec $C^2 = (1 + C_*^0)/\text{We}$. $L_2[\mathbf{w}_s]$ est bien continu dans $\mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega_s)$.

Sous l'hypothèse (4.6.15), nous pouvons écrire le problème (4.6.14) sous la forme

$$p_s = L_1[\mathbf{w}_s]^{-1} \left(q_s - \frac{2\omega}{\beta} L_2[\mathbf{w}_s] p_s \right),$$

donc

$$\|p_s\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s} \leq C_*^1 \left(\|q_s\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s} + \frac{2C^2\omega}{\beta} \|p_s\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s} \right).$$

Pour $\beta > 2\omega C_*^1 C^2$, on a

$$\|p_s\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s} \leq \frac{C_*^1}{1 - 2C_*^1 C^2 \omega / \beta} \|q_s\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s},$$

or $q_s = L[\mathbf{w}_s]q$, donc

$$\|q_s\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s} \leq ((1 - \omega) + \omega C_*^0) \|q\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s},$$

Donc nous avons finalement,

$$\|p_s\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s} \leq c^2 \|q\|_{k+1,2,\xi},$$

avec

$$c^2 = C_*^1 \frac{(1 - \omega) + \omega C_*^0}{1 - 2C_*^1 C^2 \omega / \beta},$$

ce qui démontre l'inégalité (4.6.12).

Pour démontrer l'inégalité (4.6.13), nous appliquons l'opérateur $\Delta = \text{Tr}\nabla^2$ à l'équation (4.6.7)

$$L[\mathbf{w}_s]^{-1} p_s + \frac{2}{\beta} (\mathbf{w}_s \cdot \nabla) p_s = q.$$

D'après le calcul fait dans [94], nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla^2(L[\mathbf{w}_s]^{-1} p_s) &= L[\mathbf{w}_s]^{-1} \nabla^2 p_s + 2(D_{\mathbf{w}_s} L[\mathbf{w}_s]^{-1} \nabla \mathbf{w}_s) \nabla p_s + (D_{\mathbf{w}_s} L[\mathbf{w}_s]^{-1} \nabla^2 \mathbf{w}_s) p_s \\ &\quad - \omega(1 - \omega) \text{We}^2 L[\mathbf{w}_s]^{-1} Z[\mathbf{w}_s]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_s)^T \nabla \left(L[\mathbf{w}_s]^{-1} Z[\mathbf{w}_s]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_s)^T \right. \\ &\quad \left. \times \nabla (Z[\mathbf{w}_s]^{-1} L[\mathbf{w}_s]^{-1} p) \right), \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

$$(4.6.17)$$

$$\nabla^2(L[\mathbf{w}_s]^{-1} p_s) = L[\mathbf{w}_s]^{-1} \nabla^2 p_s + A + B + C,$$

où A , B et C désignent chacun des trois termes de (4.6.17).

Donc,

$$\begin{aligned} L[\mathbf{w}_s]^{-1} \Delta p_s + \frac{2}{\beta} (\mathbf{w}_s \cdot \nabla) \Delta p_s &= \Delta q - \frac{2}{\beta} \nabla \mathbf{w}_s \cdot \nabla^2 p_s - \frac{2}{\beta} (\mathbf{w}_s \cdot \nabla) p_s - \text{Tr}A - \text{Tr}B - \text{Tr}C \\ &= Q. \end{aligned}$$

Nous avons $Q \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega_s)$ et donc ce qui précède implique qu'il existe une constante c^2 telle que

$$\|\Delta p_s\|_{k-1,2,\xi;\Omega_s} \leq c^2 \|Q\|_{k-1,2,\xi;\Omega_s}.$$

Pour estimer le terme de droite Q , nous allons utiliser le lemme 4.3.3,

$$\begin{aligned} \|Q\|_{k-1,2,\xi;\Omega_s} &\leq \|\Delta q\|_{k-1,2,\xi} + \frac{2}{\beta} \left(\|\mathbf{w}_s\|_{k+2,2,\xi;\Omega_s} \|\nabla^2 p_s\|_{k-1,2,\xi;\Omega_s} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{w}_s\|_{k+2,2,\xi;\Omega_s} \|\nabla p_s\|_{k,2,\xi;\Omega_s} \right) + \|\mathbf{w}_s\|_{k+2,2,\xi;\Omega_s} \|p_s\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s} \\ &\quad + \omega(1-\omega) \text{We}^2 C_*^0 \|\mathbf{w}_s\|_{k+2,2,\xi;\Omega_s}^2 \|p_s\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s}. \end{aligned}$$

Donc, nous pouvons trouver une constante c^3 telle que,

$$\|\Delta p_s\|_{k-1,2,\xi;\Omega_s} \leq c^3 \left[\|\Delta q\|_{k-1,2,\xi;\Omega_s} + \left(\|\mathbf{w}_s\|_{k+2,2,\xi;\Omega_s} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \|p_s\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s} \right],$$

et ceci sous l'hypothèse (4.6.11). Pour terminer, notons que nous choisissons $\bar{\beta} > 2\omega C^1 C^2$ et $\bar{\alpha} = \max(\alpha_1, \alpha_3, 2\alpha_4(1-\omega)/\beta \text{We})$.

□

Étape 4. Passage à la limite

Tout d'abord, nous avons l'inégalité suivante,

$$\|\mathbf{w}_s\|_{k+2,2,\xi;\Omega_s} \leq c' \|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi}, \quad (4.6.18)$$

avec $c' > 0$ indépendant de $s \in]0, s_0[$.

Soient $\hat{\alpha} = c' \bar{\alpha}$ et $\bar{\beta} = \hat{\beta}$ alors les conditions (4.6.2) et (4.6.3) donnent immédiatement les conditions (4.6.10) et (4.6.11). D'après le lemme 4.6.2, il existe une solution unique p_s du problème (4.6.7) vérifiant les estimations suivantes,

$$\|p_s\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s} \leq c^2 \|q\|_{k+1,2,\xi}, \quad (4.6.19)$$

$$\|\Delta p_s\|_{k-1,2,\xi;\Omega_s} \leq c^3 c' \left[\|\Delta q\|_{k-1,2,\xi} + \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \|p_s\|_{k+1,2,\xi;\Omega_s} \right]. \quad (4.6.20)$$

Soit $\{s_i\}_{i=1}^\infty$ une suite de réels décroissante telle que

$$s_i > 0, \quad s_i \rightarrow 0 \text{ si } i \rightarrow \infty.$$

Notons par $\Omega_i = \Omega_{s_i}$, alors

$$\Omega_{i_1} \subset \Omega_{i_2} \text{ pour } i_1 < i_2, \quad \bigcup_{i=1}^\infty \Omega_i = \Omega.$$

Soit p_i la solution unique de (4.6.7) dans le domaine Ω_i et qui vérifie (4.6.12). p_i est borné dans $W^{k+1,2}(\Omega_i)$ alors pour tout m fixé, on peut extraire une sous-suite $\{p_{i_k}^m\}_{k=1}^\infty$ de $\{p_i\}_{i=1}^\infty$ telle que $p_{i_k}^m$ converge faiblement dans $W^{k+1,2}(\Omega_m)$ et fortement dans $W^{1,2}(\Omega_m)$ vers $p^m \in W^{k+1,2}(\Omega_m)$. Pour $m_1 > m$, on peut extraire de $\{p_{i_k}^m\}_{k=1}^\infty$, une sous-suite $\{p_{i_k}^{m_1}\}_{k=1}^\infty$ qui converge faiblement dans $W^{k+1,2}(\Omega_{m_1})$ et fortement dans $W^{1,2}(\Omega_{m_1})$ vers p^{m_1} . Alors

$$p^m = p^{m_1}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega_m.$$

Définissons une fonction p dans Ω de la façon suivante :

$$p(x) = p^m(x), \quad x \in \Omega_m, \quad (4.6.21)$$

alors $p \in W_{\text{loc}}^{k+1,2}(\Omega)$ et satisfait l'équation de transport,

$$L[\mathbf{w}]^{-1}p + \frac{2}{\beta}(\mathbf{w} \cdot \nabla)p = q, \quad x \in \Omega \quad (4.6.22)$$

au sens,

$$\int_{\Omega} \left[L[\mathbf{w}]^{-1}p + \frac{2}{\beta}(\mathbf{w} \cdot \nabla)p \right] \phi dx = \int_{\Omega} q \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (4.6.23)$$

donc p satisfait (4.6.23) presque partout dans Ω , or $p \in W_{\text{loc}}^{k+1,2}(\Omega)$ avec $k \geq 1$, l'équation (4.6.22) est vrai dans $x \in \Omega \setminus O$. De plus, nous avons l'estimation :

$$\begin{aligned} \|p^m\|_{k+1,2,\xi;\Omega_m} &= \|p\|_{k+1,2,\xi;\Omega} \leq C^3 \|q\|_{k+1,2,\xi}, \\ \|\Delta p^m\|_{k-1,2,\xi;\Omega_m} &= \|\Delta p\|_{k-1,2,\xi;\Omega} \leq C^4 \left[\|\Delta q\|_{k-1,2,\xi} + \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \|p\|_{k+1,2,\xi;\Omega} \right], \end{aligned}$$

avec $C^3 = c^2$ et $C^4 = c^3 c'$.

□

4.7 Résolution du problème linéaire

Dans cette section, nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème linéaire (4.4.8).

Théorème 4.7.1. *Soit Ω un domaine borné défini dans la section 4.2.2. Soit*

$$\mathbf{w} \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega), \quad \mathbf{w}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{T} \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega), \quad \mu \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega), \quad (4.7.1)$$

$$\mathbf{F}_1 \in \mathcal{V}_\xi^{k,2}(\Omega), \quad \mathbf{H} \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega). \quad (4.7.2)$$

avec

$$k \in \mathbb{N}^*, \quad \omega \in]0, 1[, \quad \beta > 0, \quad (4.7.3)$$

et

$$\xi \in]k+1-\omega_0, k[, \quad \xi \neq k+2-m\omega_0, \quad \forall m = 2, 3, \dots \quad (4.7.4)$$

Il existe deux constantes $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ telles que, si

$$\underline{\alpha} \|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} < 1, \quad \beta > \underline{\beta}, \quad (4.7.5)$$

alors le problème linéaire (4.4.8) admet une solution unique (\mathbf{u}, p, τ) ,

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V}_{\xi,0}^{k+2,2}(\Omega), \quad p \in \mathcal{V}_{\xi}^{k+1,2}(\Omega)_{/\mathbb{R}}, \quad \tau \in \mathcal{V}_{\xi}^{k+1,2}(\Omega). \quad (4.7.6)$$

De plus, on a l'estimation suivante

$$\|\mathbf{u}\|_{k+2,2,\xi} + \|p\|_{k+1,2,\xi} + \|\tau\|_{k+1,2,\xi} \leq C_5(\|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} + \|\mathbf{H}\|_{k+1,2,\xi}), \quad (4.7.7)$$

où $C_5 = C(\Omega, \omega, \underline{\beta}, k)$.

Nous commençons par définir l'espace

$$\mathcal{V}_{\xi}^k(\Omega) = \{\mu; \mu \in \mathcal{V}_{\xi}^{k,2}(\Omega), (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mu \in \mathcal{V}_{\xi}^{k,2}(\Omega)\}, \quad (4.7.8)$$

dont la norme

$$\|\mu\|_{\mathcal{V}_{\xi}^k(\Omega)} = \|\mu\|_{k,2,\xi} + C_7 \mathfrak{C} \|(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mu\|_{k,2,\xi}, \quad (4.7.9)$$

avec $C_7 = C_1 C_2 C_3$ et $\mathfrak{C} > 1$.

Lemme 4.7.2. *L'application \mathcal{S} définie formellement dans (4.4.12) est une application bien définie de $\mathcal{V}_{\xi}^{k+1}(\Omega)$ dans lui-même.*

Preuve.

Soit $\mu \in \mathcal{V}_{\xi}^k(\Omega)$. Nous commençons par résoudre le problème de Neumann suivant,

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \frac{1}{\beta}\Pi((\mathbf{w} \cdot \nabla)\mu), & \text{dans } \Omega, \\ \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.7.10)$$

En appliquant le lemme 4.5.3 avec $G = \frac{1}{\beta}\Pi((\mathbf{w} \cdot \nabla)\mu)$ et $\int_{\Omega} G dx = 0$. Alors φ existe, est unique, et telle que

$$\varphi \in \mathcal{V}_{\xi}^{k+3,2}(\Omega). \quad (4.7.11)$$

De plus, φ admet la représentation suivante :

$$\varphi = \varphi_{\mathbb{R}} + \varphi_{\mathbb{S}},$$

où $\varphi_{\mathbb{R}} \in \mathcal{V}_{\xi}^{k+3,2}(\Omega)$, $\varphi_{\mathbb{S}} = \sum_{j=1}^m c_j r^j \omega_0 \cos(j \omega_0 \theta)$ et $(c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$.

Nous avons aussi l'inégalité,

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{H}_{\xi}^{k+3,2}(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{k+3,2,\xi} \leq \frac{2C_2}{\beta} \|(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mu\|_{k+1,2,\xi}. \quad (4.7.12)$$

Nous savons que $(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mu|_{\partial\Omega} = 0$ car $\mathbf{w}|_{\partial\Omega} = 0$, or l'opérateur Δ est un isomorphisme de $\mathcal{V}_{0,\xi}^{k+1,2}(\Omega)$ dans $\mathcal{V}_{\xi}^{k-1,2}(\Gamma)$. Donc,

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{H}_{\xi}^{k+3,2}(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{k+3,2,\xi} \leq \frac{2C_2'}{\beta} \|(\Delta(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mu)\|_{k-1,2,\xi}. \quad (4.7.13)$$

Une fois que φ est connue, nous résolvons le problème de Stokes suivant,

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v} + \nabla q = \mathbf{F}_1, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{v} = -\nabla \varphi, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega, \\ \text{sur } \Gamma. \end{array} \quad (4.7.14)$$

Découpons formellement \mathbf{v} comme suit,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_S, \quad \mathbf{v}_S = -\sum_{j=1}^m c_j \nabla [r^{j\omega_0} \cos(j\omega_0\theta)], \quad c_j \in \mathbb{R}. \quad (4.7.15)$$

Nous allons chercher (\mathbf{v}_R, q) solution du problème,

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v}_R + \nabla q = \mathbf{F}_1, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_R = 0, \\ \mathbf{v}_R = -\nabla \varphi - \mathbf{v}_S, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega, \\ \text{sur } \Gamma. \end{array} \quad (4.7.16)$$

On a $\varphi \in \mathfrak{N}_\xi^{k+3,2}(\Omega)$, alors nous pouvons l'écrire sous la forme,

$$\varphi = \varphi_R + \sum_{j=1}^m c_j r^{j\omega_0} \cos(j\omega_0\theta) \quad \text{où } \varphi_R \in \mathcal{V}_\xi^{k+3,q}(\Omega) \text{ et } c_j \in \mathbb{R}, \quad (4.7.17)$$

alors le problème (4.7.16) s'écrit,

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v}_R + \nabla q = \mathbf{F}_1, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_R = 0, \\ \mathbf{v}_R = -\nabla \varphi_R, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega, \\ \text{sur } \Gamma. \end{array} \quad (4.7.18)$$

Appliquons le lemme 4.5.5 au problème de Stokes (4.7.18) : ceci montre que (\mathbf{v}_R, q) existe et est unique à une constante près, et tel que :

$$\mathbf{v}_R \in \mathcal{V}_\xi^{k+2,2}(\Omega), \quad q \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega).$$

Autrement dit, le problème (4.7.14) est résolu par le lemme 4.5.6, donc la solution (\mathbf{v}, q) existe et est unique à une constante près, et telle que :

$$\mathbf{v} \in \mathfrak{D}_\xi^{k+2,2}(\Omega), \quad q \in \mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega). \quad (4.7.19)$$

Cette solution satisfait l'estimation suivante :

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{D}_\xi^{k+3,2}(\Omega)} + \|q\|_{k+1,2,\xi} \leq C_6 \left(\|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} + \|\varphi\|_{\mathfrak{N}_\xi^{k+3,2}(\Omega)} \right), \quad (4.7.20)$$

où $C_6 = C(\Omega, k)$. Donc, (4.7.20) s'écrit :

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{D}_\xi^{k+3,2}(\Omega)} + \|q\|_{k+1,2,\xi} \leq C_6 \left(\|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} + \frac{2C'_2}{\beta} \|(\Delta(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mu)\|_{k-1,2,\xi} \right), \quad (4.7.21)$$

D'autre part, appliquons l'opérateur Δ à l'équation (4.5.12)₁, alors

$$-\operatorname{div} \Delta \mathbf{v} + \operatorname{div} \nabla q = \operatorname{div} \mathbf{F}_1,$$

ce qui donne $\Delta q = \operatorname{div} \mathbf{F}_1$ et

$$\|\Delta q\|_{k-1,2,\xi} \leq \|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi}. \quad (4.7.22)$$

Maintenant, considérons l'équation de transport (4.4.17) concernant la pression. D'après le théorème 4.6.1, p existe, est unique dans $\mathcal{V}_\xi^{k+1,2}(\Omega)$ et satisfait à l'estimation

$$\|p\|_{k+1,2,\xi} \leq C_3 \|q\|_{k+1,2,\xi}. \quad (4.7.23)$$

Utilisons les estimations (4.7.12), (4.7.20) et (4.7.23) : nous déduisons l'estimation suivante,

$$\|p\|_{k+1,2,\xi} \leq C_7 \left(\|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} + \frac{1}{\beta} \|(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mu\|_{k+1,2,\xi} \right), \quad (4.7.24)$$

avec $C_7 = C_1 C_2 C_3$.

L'inégalité (4.6.5) implique l'estimation :

$$\frac{2}{\beta} \|\Delta[(\mathbf{w} \cdot \nabla) p]\|_{k-1,2,\xi} \leq C_8 \left[\|\Delta q\|_{k-1,2,\xi} + \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \|p\|_{k+1,2,\xi} \right]. \quad (4.7.25)$$

Utilisons maintenant les inégalités précédentes, alors (4.7.25) s'écrit,

$$\begin{aligned} 2 \left\| \Delta \left[\left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) p \right] \right\|_{k-1,2,\xi} &\leq C_8 \left[\|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} + C_3 C_6 \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} + \frac{2C_2'}{\beta} \left\| \Delta \left[(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mu \right] \right\|_{k-1,2,\xi} \right) \right], \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} 2 \left\| \Delta \left[\left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) p \right] \right\|_{k-1,2,\xi} &\leq C_8 \left(1 + C_3 C_6 \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \right) \|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} \quad (4.7.26) \\ &\quad + 2C_3 C_6 C_8 C_2' \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \left\| \Delta \left[\left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) \mu \right] \right\|_{k-1,2,\xi} \quad (4.7.27) \end{aligned}$$

Posons $C_9 = C_3 C_6 C_8 C_2'$, nous déduisons de (4.7.26)

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) p \right\|_{k+1,2,\xi} &\leq C_9 \left(1 + \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \right) \|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} \\ &\quad + C_9 \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \left\| \left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) \mu \right\|_{k+1,2,\xi}. \quad (4.7.28) \end{aligned}$$

Les estimations (4.7.23) et (4.7.28) montrent que l'application \mathcal{S} est bien définie et opère de \mathcal{V}_ξ^{k+1} dans lui-même. □

4.7.1 Preuve du théorème 4.7.1

Après que nous avons démontré que l'application \mathcal{S} est bien définie et opère de V_ξ^{k+1} dans lui-même, nous allons démontrer que \mathcal{S} est une application contractante. Pour \mathbf{F}_1 fixé, soient μ_1 et μ_2 des fonctions de $V_\xi^{k+1}(\Omega)$ tels que

$$p_1 = \mathcal{S}(\mu_1), \quad p_2 = \mathcal{S}(\mu_2).$$

Posons

$$\tilde{p} = p_1 - p_2, \quad \tilde{\mu} = \mu_1 - \mu_2.$$

Pour $\tilde{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 = 0$, nous déduisons facilement que $\mathcal{S}(\tilde{\mu}) = \tilde{p}$, donc nous avons les estimations suivantes,

$$\|\tilde{p}\|_{k+1,2,\xi} \leq C_7 \left\| \left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) \tilde{\mu} \right\|_{k+1,2,\xi}, \quad (4.7.29)$$

$$\left\| \left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) \tilde{p} \right\|_{k+1,2,\xi} \leq C_9 \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \left\| \left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) \tilde{\mu} \right\|_{k+1,2,\xi}. \quad (4.7.30)$$

Utilisons le deux dernières estimations, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\tilde{p}\|_{V_\xi^{k+1}(\Omega)} &\leq C_7 \left\| \left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) \tilde{\mu} \right\|_{k+1,2,\xi} + C_7 C_9 \mathfrak{C} \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \left\| \left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) \tilde{\mu} \right\|_{k+1,2,\xi} \\ &\leq C_7 \mathfrak{C} \left[\frac{1}{\mathfrak{C}} + C_9 \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \right] \left\| \left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) \tilde{\mu} \right\|_{k+1,2,\xi}, \end{aligned}$$

où la constante \mathfrak{C} est définie dans (4.7.9). Nous déduisons que

$$\|\tilde{p}\|_{V_\xi^{k+1}(\Omega)} \leq \left[\frac{1}{\mathfrak{C}} + C_9 \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \right] \|\tilde{\mu}\|_{V_\xi^{k+1}(\Omega)}.$$

Pour démontrer que \mathcal{S} est une contraction dans $V_\xi^{k+1}(\Omega)$, nous avons besoin de la condition,

$$\left[\frac{1}{\mathfrak{C}} + C_9 \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \right] < 1. \quad (4.7.31)$$

Or, cette condition est vraie si on suppose que

$$\beta > 2 \frac{C_9 \mathfrak{C} \omega}{\mathfrak{C} - 1} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} < \frac{1}{C_9} \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{C}} \right) - \frac{2\omega}{\beta}. \quad (4.7.32)$$

Donc, \mathcal{S} admet un point fixe unique p .

Rappelons la troisième équation du problème linéaire (4.4.8) concernant le tenseur τ ,

$$\tau + \text{We}(\mathbf{w} \cdot \nabla)\tau = \mathbf{H} + 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{u}), \quad x \in \Omega. \quad (4.7.33)$$

Si

$$\alpha_5 \|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} < 1, \quad (4.7.34)$$

alors ce problème de transport est résolu dans la proposition 4.4.1. Pour l'estimation de τ , on applique les estimations de 4.4.1 avec le second membre $\mathbf{H} + 2\omega\mathbf{D}(\mathbf{u})$,

$$\|\tau\|_{k+1,2,\xi} \leq \|\mathbf{H}\|_{k+1,2,\xi} + 2\omega \|\mathbf{u}\|_{k+2,2,\xi}. \quad (4.7.35)$$

Il nous reste à démontrer l'inégalité (4.7.7). Nous avons trouvé $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\varphi$, alors

$$\|\mathbf{u}\|_{k+2,2,\xi} \leq \|\mathbf{v}\|_{k+2,2,\xi} + \|\varphi\|_{k+3,2,\xi}. \quad (4.7.36)$$

φ vérifie l'estimation (4.7.12) et \mathbf{v} vérifie l'estimation (4.7.20), donc

$$\|\mathbf{u}\|_{k+2,2,\xi} \leq C_6 \|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} + 2C_2(1 + C_6) \left\| \left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) p \right\|_{k+1,2,\xi}. \quad (4.7.37)$$

D'autre part, utilisons l'estimation (4.7.29),

$$\|p\|_{k+1,2,\xi} \leq C_7 \left(\|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} + \left\| \left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) p \right\|_{k+1,2,\xi} \right). \quad (4.7.38)$$

Pour l'estimation de $\|\tau\|_{k+1,2,\xi}$, nous utilisons l'inégalité (4.7.35),

$$\|\tau\|_{k+1,2,\xi} \leq \|\mathbf{H}\|_{k+1,2,\xi} + 2\omega C_6 \|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} + 4\omega C_2(1 + C_6) \left\| \left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) p \right\|_{k+1,2,\xi} \quad (4.7.39)$$

Maintenant, de l'estimation (4.7.28) nous déduisons

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) p \right\|_{k+1,2,\xi} &\leq C_9 \left(1 + \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \right) \|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} \\ &\quad + C_9 \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) \left\| \left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) p \right\|_{k+1,2,\xi}. \end{aligned}$$

D'après la condition (4.7.32), nous avons

$$C_9 \left(\|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + \frac{2\omega}{\beta} \right) < 1,$$

donc il existe une constante C_{10} dépendant de ω , β , C_9 telle que

$$\left\| \left(\frac{\mathbf{w}}{\beta} \cdot \nabla \right) p \right\|_{k+1,2,\xi} \leq C_{10} \|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi}. \quad (4.7.40)$$

Additionnons (4.7.37), (4.7.38), (4.7.35) et (4.7.40) alors

$$\|\mathbf{u}\|_{k+2,2,\xi} + \|p\|_{k+1,2,\xi} + \|\tau\|_{k+1,2,\xi} \leq C_5 \left(\|\mathbf{H}\|_{k+1,2,\xi} + \|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} \right), \quad (4.7.41)$$

avec $C_5 = [2C_2(1 + C_6)(2\omega C_{10} + 1) + C_7(1 + C_{10}) + C_6(2\omega + 1)]$. Donc nous avons démontré l'estimation (4.7.7).

Pour terminer, nous précisons que les constantes $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ sont données par,

$$\underline{\alpha} = \max \left(\alpha_5, \hat{\alpha}, \frac{C_9 \mathfrak{C} \beta}{\beta(\mathfrak{C} - 1) - 2\omega C_9 \mathfrak{C}} \right), \quad \underline{\beta} = \max \left(\hat{\beta}, 2 \frac{C_9 \mathfrak{C} \omega}{\mathfrak{C} - 1} \right). \quad (4.7.42)$$

4.8 Résolution du problème non linéaire

Dans ce paragraphe nous cherchons la solution de notre problème non linéaire,

$$\begin{cases} -(\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) + \nabla(L[\mathbf{u}]^{-1}p) &= \mathbf{F}_1(\mathbf{u}, p, \tau), & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\beta} \Pi((\mathbf{u} \cdot \nabla)p) &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{We} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\tau + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau)\} + \tau &= 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{u}), & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.4.6)$$

comme point fixe de l'application

$$\mathcal{K} : (\mathbf{w}, \mu, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{u}, p, \tau),$$

où (\mathbf{u}, p, τ) est la solution du problème linéaire (4.4.8) donnée par le théorème 4.7.1 et correspondant à $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, \mu, \mathbf{T})$. Nous commençons en définissant un ensemble dans lequel nous allons appliquer le théorème du point fixe. Pour tout $k \geq 2$, l'ensemble $\mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k, \xi}$ est défini par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k, \xi} &= \left\{ (\mathbf{w}, \mu, \mathbf{T}) \in \mathcal{V}_{\xi}^{k+2, 2}(\Omega) \times \mathcal{V}_{\xi}^{k+1, 2}(\Omega)/\mathbb{R} \times \mathcal{V}_{\xi}^{k+1, 2}(\Omega), \mathbf{w}|_{\partial\Omega} = 0, \right. \\ &\quad \left. \|(\mathbf{w}, \mu, \mathbf{T})\|_{k, \xi} \leq \tilde{\gamma} \right\}, \end{aligned} \quad (4.8.1)$$

en posant

$$\|(\mathbf{w}, \mu, \mathbf{T})\|_{k, \xi} = \|\mathbf{w}\|_{k+2, 2, \xi} + \|\mu\|_{k+1, 2, \xi} + \|\mathbf{T}\|_{k+1, 2, \xi}. \quad (4.8.2)$$

4.8.1 Preuve du théorème 4.3.4

$\mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k, \xi}$ est un fermé, borné, non vide et convexe de l'espace $\mathcal{V}_{\xi}^{k+2, 2}(\Omega) \times \mathcal{V}_{\xi}^{k+1, 2}(\Omega)/\mathbb{R} \times \mathcal{V}_{\xi}^{k+1, 2}(\Omega)$.

Soit l'application $\mathcal{K} : (\mathbf{w}, \mu, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{u}, p, \tau)$. Montrons que $\mathcal{K}(\mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k, \xi}) \subset \mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k, \xi}$.

Soit $(\mathbf{w}, \mu, \mathbf{T}) \in \mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k, \xi}$, vérifions que $\mathcal{K}(\mathbf{w}, \mu, \mathbf{T}) = (\mathbf{u}, p, \tau) \in \mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k, \xi}$. En effet, d'après l'estimation (4.7.7), nous avons l'inégalité,

$$\|(\mathbf{u}, p, \tau)\|_{k, \xi} \leq C_5(\|\mathbf{F}_1\|_{k, 2, \xi} + \|\mathbf{H}\|_{k+1, 2, \xi}).$$

Donc, nous avons besoin d'estimer les deux termes à droite de l'inégalité.

Rappelons la définition de \mathbf{F}_1 et \mathbf{H} ,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, \mu, \mathbf{T}) &= L[\mathbf{w}]^{-1} \{ \mathbf{f} - \operatorname{Re}(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} + Z[\mathbf{w}]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{w}, \mathbf{T}) \} \\ &\quad + L[\mathbf{w}]^{-1} \{ \omega \operatorname{We} Z[\mathbf{w}]^{-1} (\nabla \mathbf{w})^T \nabla [Z[\mathbf{w}]^{-1} \times L[\mathbf{w}]^{-1} \mu] \}, \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{w}, \mathbf{T}) &= -\operatorname{We} \mathbf{g}(\nabla \mathbf{w}, \mathbf{T}). \end{aligned}$$

Estimons \mathbf{H} ,

$$\|\mathbf{H}\|_{k+1, 2, \xi} \leq c_* \operatorname{We} \|\mathbf{T}\|_{k+1, 2, \xi} \|\mathbf{w}\|_{k+2, 2, \xi}.$$

D'autre part, d'après les propriétés déjà étudiées des opérateurs $L[\mathbf{u}]$, $W[\mathbf{u}]$ et $Z[\mathbf{u}]$ intervenant dans l'expression de \mathbf{F}_1 , nous vérifions que

$$\|\mathbf{F}_1\|_{k, 2, \xi} \leq C_* \left[\|\mathbf{f}\|_{k, 2, \xi} + \operatorname{Re} \|\mathbf{w}\|_{k+2, 2, \xi}^2 + C_*^0 \|\mathbf{F}\|_{k, 2, \xi} + C_*^0 \omega \operatorname{We} \|\mathbf{w}\|_{k+2, 2, \xi} \|\mu\|_{k+1, 2, \xi} \right].$$

En tenant compte de fait que $\mathbf{F}(\mathbf{w}, \mathbf{T}) = \text{We}\{l_1(\partial\mathbf{w}, \partial\mathbf{T}) + l_2(\partial^2\mathbf{w}, \mathbf{T})\}$, alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}_1\|_{k,2,\xi} &\leq C_*c_* \left[\|\mathbf{f}\|_{k,2,\xi} + \text{Re} \|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi}^2 + 2C_*^0\text{We} \|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} \|\mathbf{T}\|_{k+1,2,\xi} \right. \\ &\quad \left. + C_*^0\omega\text{We} \|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} \|\mu\|_{k+1,2,\xi} \right], \end{aligned} \quad (4.8.3)$$

avec C_* est la constante provenant de la continuité de l'inverse de $L[\mathbf{w}]$.

D'après l'estimation (4.7.7) du théorème 4.7.1 nous avons l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}, p, \tau)\|_{k,\xi} &\leq c_*C_*C_5 \left[\|\mathbf{f}\|_{k,2,\xi} + \text{Re} \|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi}^2 + C_*^0\omega\text{We} \|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} \|\mu\|_{k+1,2,\xi} \right. \\ &\quad \left. + \text{We}(1 + 2C_*^0) \|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} \|\mathbf{T}\|_{k+1,2,\xi} \right], \\ &\leq C_{11} \|\mathbf{f}\|_{k,2,\xi} + C_{11} \|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} \left[\text{Re} \|\mathbf{w}\|_{k+2,2,\xi} + C_*^0\omega \|\mu\|_{k+1,2,\xi} \right. \\ &\quad \left. + \text{We}(1 + 2C_*^0) \|\mathbf{T}\|_{k+1,2,\xi} \right], \end{aligned} \quad (4.8.4)$$

avec $C_{11} = c_*C_*C_5$ et $\mathfrak{A} = (\text{Re} + C_*^0\omega + \text{We}(1 + 2C_*^0))$.

Pour $\|\mathbf{f}\|_{k,2,\xi} < \mathfrak{f}$, l'estimation précédente implique que $(\mathbf{u}, p, \tau) \in \mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k,\xi}$, si

$$C_{11}\mathfrak{f} + C_{11} \left[\text{Re} + C_*^0\omega + \text{We}(1 + 2C_*^0) \right] \tilde{\gamma}^2 \leq \tilde{\gamma}, \quad (4.8.5)$$

et ce vrai si nous choisissons $\tilde{\gamma}$ et \mathfrak{f} comme suit.

$$\tilde{\gamma} < \frac{1}{2C_{11}\mathfrak{A}}, \quad (4.8.6)$$

et

$$\mathfrak{f} < \frac{\tilde{\gamma}}{2C_{11}}, \quad (4.8.7)$$

alors $(\mathbf{u}, p, \tau) \in \mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k,\xi}$.

Maintenant, montrons que $\mathcal{K} : \mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k,\xi} \longrightarrow \mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k,\xi}$ est une application contractante. D'après le lemme 4.3.1, nous avons les injections continues,

$$\mathcal{V}_{\xi}^{k+2,2}(\Omega) \subset \mathcal{V}_{\xi-k+1}^{3,2}(\Omega), \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_{\xi}^{k+1,2}(\Omega) \subset \mathcal{V}_{\xi-k+1}^{2,2}(\Omega). \quad (4.8.8)$$

Donc, il suffit de montrer que $\mathcal{K} : \mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k,\xi} \longrightarrow \mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k,\xi}$ est contractante pour la topologie de $\mathcal{V}_{\xi-k+1,0}^{3,2}(\Omega) \times \mathcal{V}_{\xi-k+1}^{2,2}(\Omega)_{/\mathbb{R}} \times \mathcal{V}_{\xi-k+1}^{2,2}(\Omega)$.

Tout d'abord, $\mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k,\xi}$ est non vide, convexe et fermé dans $\mathcal{V}_{\xi-k+1,0}^{3,2}(\Omega) \times \mathcal{V}_{\xi-k+1}^{2,2}(\Omega)_{/\mathbb{R}} \times \mathcal{V}_{\xi-k+1}^{2,2}(\Omega)$.

Soient $(\mathbf{w}_1, \mu_1, \mathbf{T}_1)$ et $(\mathbf{w}_2, \mu_2, \mathbf{T}_2)$ dans $\mathcal{V}_{\xi-k+1,0}^{4,2}(\Omega) \times \mathcal{V}_{\xi-k+1}^{3,2}(\Omega)_{/\mathbb{R}} \times \mathcal{V}_{\xi-k+1}^{3,2}(\Omega)$ tels que

$$\mathcal{K}(\mathbf{w}_1, \mu_1, \mathbf{T}_1) = (\mathbf{u}_1, p_1, \tau_1) \quad \text{et} \quad \mathcal{K}(\mathbf{w}_2, \mu_2, \mathbf{T}_2) = (\mathbf{u}_2, p_2, \tau_2) \quad (4.8.9)$$

Alors, $\mathcal{K}(\mathbf{w}^*, \mu^*, \mathbf{T}^*) = (\mathbf{u}^*, p^*, \tau^*)$ en posant :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \quad p^* = p_1 - p_2, \quad \tau^* = \tau_1 - \tau_2, \quad \mathbf{w}^* = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2, \quad \mu^* = \mu_1 - \mu_2, \quad \mathbf{T}^* = \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2.$$

$$\mathbf{F}_1^* = \mathbf{F}_1(\mathbf{w}_1, \mu_1, \mathbf{T}_1) - \mathbf{F}_1(\mathbf{w}_2, \mu_2, \mathbf{T}_2), \quad \mathbf{H}^* = \mathbf{H}(\mathbf{w}_1, \mu_1, \mathbf{T}_1) - \mathbf{H}(\mathbf{w}_2, \mu_2, \mathbf{T}_2).$$

Nous commençons par calculer \mathbf{F}_1^* et \mathbf{H}^* . Nous trouvons simplement que,

$$\mathbf{H}^* = -\text{We g}(\nabla \mathbf{w}^*, \mathbf{T}_1) - \text{We g}(\nabla \mathbf{w}_2, \mathbf{T}^*). \quad (4.8.10)$$

et qui vient par un simple différence entre $\mathbf{H}(\mathbf{w}_1, \mu_1, \mathbf{T}_1)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{w}_2, \mu_2, \mathbf{T}_2)$, alors que pour \mathbf{F}_1^* , le calcul sera moins évident.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^* &= \left[L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] \mathbf{f} + \text{Re} \left[L[\mathbf{w}_1]^{-1} (\mathbf{w}_1 \cdot \nabla) \mathbf{w}_1 - L[\mathbf{w}_2]^{-1} (\mathbf{w}_2 \cdot \nabla) \mathbf{w}_2 \right] \\ &+ \left[L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{w}_1, \mathbf{T}_1) - L[\mathbf{w}_2]^{-1} Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) \right] \\ &+ \omega \text{We} \left[L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T \nabla [Z[\mathbf{w}_1]^{-1} \times L[\mathbf{w}_1]^{-1} \mu_1] \right. \\ &\quad \left. - L[\mathbf{w}_2]^{-1} Z[\mathbf{w}_2]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_2)^T \nabla [Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \times L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2] \right]. \end{aligned} \quad (4.8.11)$$

Pour simplifier le calcul de \mathbf{F}_1^* , nous posons :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \left(L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1} \right) \mathbf{f}, \\ \mathfrak{S} &= \text{Re} \left(L[\mathbf{w}_1]^{-1} (\mathbf{w}_1 \cdot \nabla) \mathbf{w}_1 - L[\mathbf{w}_2]^{-1} (\mathbf{w}_2 \cdot \nabla) \mathbf{w}_2 \right), \\ \mathfrak{T} &= \left(L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{w}_1, \mathbf{T}_1) - L[\mathbf{w}_2]^{-1} Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) \right), \\ \mathfrak{U} &= \omega \text{We} \left(L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T \nabla (Z[\mathbf{w}_1]^{-1} \times L[\mathbf{w}_1]^{-1} \mu_1) \right. \\ &\quad \left. - L[\mathbf{w}_2]^{-1} Z[\mathbf{w}_2]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_2)^T \nabla (Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \times L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2) \right). \end{aligned}$$

Nous écrivons \mathfrak{S} sous la forme,

$$\mathfrak{S} = \text{Re} L[\mathbf{w}_1]^{-1} \left((\mathbf{w}^* \cdot \nabla) \mathbf{w}_1 + (\mathbf{w}_2 \cdot \nabla) \mathbf{w}^* \right) + \text{Re} \left(L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1} \right) (\mathbf{w}_2 \cdot \nabla) \mathbf{w}_2. \quad (4.8.12)$$

Pour \mathfrak{T} ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_1, \mathbf{T}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) \right) + \left(L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1} Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \right) \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) \\ &= L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_1, \mathbf{T}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) \right) + L[\mathbf{w}_1]^{-1} \left(Z[\mathbf{w}_1]^{-1} - Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \right) \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) \\ &\quad + \left(L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1} \right) Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2). \end{aligned} \quad (4.8.13)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{w}_1, \mathbf{T}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) &= \text{We} \left\{ l_1(\partial \mathbf{w}_1, \partial \mathbf{T}_1) + l_2(\partial^2 \mathbf{w}_1, \mathbf{T}_1) - l_1(\partial \mathbf{w}_2, \partial \mathbf{T}_2) - l_2(\partial^2 \mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) \right\} \\ &= \text{We} \left\{ l_1(\partial \mathbf{w}^*, \partial \mathbf{T}_1) + l_1(\partial \mathbf{w}_2, \partial \mathbf{T}^*) + l_2(\partial^2 \mathbf{w}^*, \mathbf{T}_1) + l_2(\partial^2 \mathbf{w}_2, \mathbf{T}^*) \right\}. \end{aligned} \quad (4.8.14)$$

Finalement, \mathfrak{U} s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} = & \omega \text{We} L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_1]^{-1} \times L[\mathbf{w}_1]^{-1} \mu_1 - Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \\ & + \omega \text{We} \left[L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T - L[\mathbf{w}_2]^{-1} Z[\mathbf{w}_2]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_2)^T \right] \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right). \end{aligned}$$

Pour faire apparaître μ^* et \mathbf{w}^* , nous ajoutons et nous retranchons des termes semblables,

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} = & \omega \text{We} L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_1]^{-1} L[\mathbf{w}_1]^{-1} \mu^* \right) \\ & + \omega \text{We} L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T \nabla \left((Z[\mathbf{w}_1]^{-1} L[\mathbf{w}_1]^{-1} - Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1}) \mu_2 \right) \\ & + \omega \text{We} \left[L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}^*)^T \right] \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \\ & + \omega \text{We} (L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1} Z[\mathbf{w}_2]^{-1}) (\nabla \mathbf{w}_2)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right). \end{aligned}$$

Enfin, \mathfrak{U} s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} = & \omega \text{We} L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_1]^{-1} L[\mathbf{w}_1]^{-1} \mu^* \right) \\ & + \omega \text{We} L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T \nabla \left(L[\mathbf{w}_1]^{-1} \left[Z[\mathbf{w}_1]^{-1} - Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] \mu_2 \right) \\ & + \omega \text{We} L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T \nabla \left(\left[L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \\ & + \omega \text{We} L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}^*)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \\ & + \omega \text{We} L[\mathbf{w}_1]^{-1} \left[Z[\mathbf{w}_1]^{-1} - Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] (\nabla \mathbf{w}_2)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \\ & + \omega \text{We} \left[L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] Z[\mathbf{w}_2]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_2)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right). \quad (4.8.15) \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^* = & \left[L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] \mathbf{f} + \left[L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) \\ & + L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} \left[\mathbf{F}(\mathbf{w}_1, \mathbf{T}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) \right] + L[\mathbf{w}_1]^{-1} \left[Z[\mathbf{w}_1]^{-1} - Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) \\ & + \text{Re} L[\mathbf{w}_1]^{-1} \left[(\mathbf{w}^* \cdot \nabla) \mathbf{w}_1 + (\mathbf{w}_2 \cdot \nabla) \mathbf{w}^* \right] + \text{Re} \left[L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] (\mathbf{w}_2 \cdot \nabla) \mathbf{w}_2 \\ & + \omega \text{We} L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_1]^{-1} L[\mathbf{w}_1]^{-1} \mu^* \right) \\ & + \omega \text{We} L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T \nabla \left(L[\mathbf{w}_1]^{-1} \left[Z[\mathbf{w}_1]^{-1} - Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] \mu_2 \right) \\ & + \omega \text{We} L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T \nabla \left(\left[L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \\ & + \omega \text{We} L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}^*)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \\ & + \omega \text{We} L[\mathbf{w}_1]^{-1} \left[Z[\mathbf{w}_1]^{-1} - Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] (\nabla \mathbf{w}_2)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \\ & + \omega \text{We} \left[L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] Z[\mathbf{w}_2]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_2)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right). \quad (4.8.16) \end{aligned}$$

D'où $(\mathbf{u}^*, p^*, \tau^*)$ vérifie le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\Delta \mathbf{u}^* + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^*) + \nabla(L[\mathbf{w}_1]^{-1} p^*) = \mathbf{F}_1^* + \nabla[(L[\mathbf{w}_2]^{-1} - L[\mathbf{w}_1]^{-1})p_2], \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^* + \frac{1}{\beta} \Pi((\mathbf{w}_1 \cdot \nabla) p^*) = -\frac{1}{\beta} \Pi((\mathbf{w}^* \cdot \nabla) p_2), \\ \tau^* + \operatorname{We}(\mathbf{w}_1 \cdot \nabla) \tau^* = \mathbf{H}^* + 2\omega \mathbf{D}(\mathbf{u}^*) - \operatorname{We}(\mathbf{w}^* \cdot \nabla) \tau_2, \\ \mathbf{u}^* = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega \\ \text{sur } \Gamma, \end{array} \quad (4.8.17)$$

avec \mathbf{F}_1^* et H^* sont définis respectivement dans (4.8.16) et (4.8.10).

Appliquons le théorème 4.7.1, avec la condition de compatibilité sur le second membre dans (4.8.17), autrement dit avec le fait que $\left(\int_{\Omega} \Pi((\mathbf{w}^* \cdot \nabla) p_2) dx = 0\right)$, alors $(\mathbf{u}^*, p^*, \tau^*)$ existe et vérifie l'estimation suivante pour $k = 1$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^*\|_{3,2,\xi-k+1} + \|p^*\|_{2,2,\xi-k+1} + \|\tau^*\|_{2,2,\xi-k+1} &\leq C_5 \left(\|\mathbf{F}_1^*\|_{1,2,\xi-k+1} \right. \\ &+ \left\| \frac{1}{\beta} \Pi((\mathbf{w}^* \cdot \nabla) p_2) \right\|_{2,2,\xi-k+1} \\ &+ \left\| \nabla[(L[\mathbf{w}_2]^{-1} - L[\mathbf{w}_1]^{-1})p_2] \right\|_{1,2,\xi-k+1} \\ &+ \left\| \mathbf{H}^* - \operatorname{We}(\mathbf{w}^* \cdot \nabla) \tau_2 \right\|_{2,2,\xi-k+1} \Big). \end{aligned} \quad (4.8.18)$$

Pour $\xi < k$ et $k \geq 2$, \mathbf{H}^* est estimé de la manière suivante :

$$\|\mathbf{H}^*\|_{2,2,\xi-k+1} \leq \operatorname{We} C_* (\|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\mathbf{T}_1\|_{k+1,2,\xi} + \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi} \|\mathbf{T}^*\|_{2,2,\xi-k+1}). \quad (4.8.19)$$

D'autre part,

$$\|\mathbf{F}_1^*\|_{1,2,\xi-k+1} \leq \|\mathfrak{R}\|_{1,2,\xi-k+1} + \|\mathfrak{S}\|_{1,2,\xi-k+1} + \|\mathfrak{T}\|_{1,2,\xi-k+1} + \|\mathfrak{U}\|_{1,2,\xi-k+1}. \quad (4.8.20)$$

Estimons chaque terme à droite de la dernière égalité. Avant d'estimer $\|\mathfrak{R}\|_{1,2,k-\xi+1}$, utilisons le développement limité de l'opérateur $L[\mathbf{w}]^{-1}$ donné dans [94].

En effet,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= (L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1}) \mathbf{f} \\ &= -L[\mathbf{w}_1]^{-1} \{ \operatorname{We} \omega Z[\mathbf{w}_1]^{-1} \cdot \mathbf{w}^* \cdot \nabla [Z[\mathbf{w}_1]^{-1} L[\mathbf{w}_1]^{-1} \mathbf{f}] \} + \varepsilon(\mathbf{w}^*) \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (4.8.21)$$

Alors,

$$\|\mathfrak{R}\|_{1,2,\xi-k+1} \leq \omega \operatorname{We} C^* C_0^* (1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)|) \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\mathbf{f}\|_{k,2,\xi}, \quad (4.8.22)$$

avec $\lim \varepsilon(\mathbf{w}^*) = 0$ si $\|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \longrightarrow 0$.

Examinons le terme $\|\mathfrak{G}\|_{1,2,\xi-k+1}$,

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{G}\|_{1,2,\xi-k+1} &\leq \operatorname{Re} \left\| L[\mathbf{w}_1]^{-1} [(\mathbf{w}^* \cdot \nabla) \mathbf{w}_1 + (\mathbf{w}_2 \cdot \nabla) \mathbf{w}^*] \right\|_{1,2,\xi-k+1} \\
&\quad + \operatorname{Re} \left\| [L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1}] (\mathbf{w}_2 \cdot \nabla) \mathbf{w}_2 \right\|_{1,2,\xi-k+1} \\
&\leq \operatorname{Re} C^* (\|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi} + \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi}) \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \\
&\quad + \operatorname{Re} C^* C_0^* (1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)|) \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi}^2 \\
&\leq 2 \operatorname{Re} C^* C_0^* (1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)|) (\|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi} + \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi}) \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1}.
\end{aligned} \tag{4.8.23}$$

Pour estimer \mathfrak{Z} , il faut estimer ses trois termes, commençons par son premier terme

$$L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} [\mathbf{F}(\mathbf{w}_1, \mathbf{T}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2)].$$

En effet,

$$\|L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} [\mathbf{F}(\mathbf{w}_1, \mathbf{T}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2)]\|_{1,2,\xi-k+1} \leq C^* C_0^* \|\mathbf{F}(\mathbf{w}_1, \mathbf{T}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2)\|_{1,2,k-\xi+1},$$

avec,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{F}(\mathbf{w}_1, \mathbf{T}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2)\|_{1,2,\xi-k+1} &\leq \operatorname{We} \left\{ \|l_1(\partial \mathbf{w}^*, \partial \mathbf{T}_1)\|_{1,2,\xi-k+1} + \|l_1(\partial \mathbf{w}_2, \partial \mathbf{T}^*)\|_{1,2,\xi-k+1} \right. \\
&\quad \left. + \|l_2(\partial^2 \mathbf{w}^*, \mathbf{T}_1)\|_{1,2,\xi-k+1} + \|l_2(\partial^2 \mathbf{w}_2, \mathbf{T}^*)\|_{1,2,\xi-k+1} \right\}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\|L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} [\mathbf{F}(\mathbf{w}_1, \mathbf{T}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2)]\|_{1,2,\xi-k+1} &\leq 2 \operatorname{We} C^* C_0^* \left\{ \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\mathbf{T}_1\|_{k+1,2,\xi} \right. \\
&\quad \left. + \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi} \|\mathbf{T}^*\|_{2,2,\xi-k+1} \right\}.
\end{aligned}$$

Maintenant, posons

$$\begin{aligned}
Z[\mathbf{w}_1] q_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) \\
Z[\mathbf{w}_2] q_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2).
\end{aligned}$$

Effectuons la différence de ces deux relations :

$$Z[\mathbf{w}_1](q_1 - q_2) = -\operatorname{We}(\mathbf{w}^* \cdot \nabla) q_2;$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|q_1 - q_2\|_{1,2,\xi-k+1} &\leq \operatorname{We} \|(\mathbf{w}^* \cdot \nabla) q_2\|_{1,2,\xi-k+1} \\
&\leq \operatorname{We} \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|q_2\|_{2,2,k-\xi+1}.
\end{aligned}$$

Donc, on peut estimer le deuxième terme de \mathfrak{X} ,

$$\begin{aligned}
& \left\| L[\mathbf{w}_1]^{-1} [Z[\mathbf{w}_1]^{-1} - Z[\mathbf{w}_2]^{-1}] \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) \right\|_{1,2,\xi-k+1} \\
& \leq C^* \text{We} \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \left\| Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) \right\|_{2,2,\xi-k+1} \\
& \leq C^* C_0^* \text{We} \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi} \|\mathbf{T}_2\|_{k+1,2,\xi}.
\end{aligned} \tag{4.8.24}$$

Pour le troisième terme de \mathfrak{X} ,

$$\begin{aligned}
& \left\| [L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1}] Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2) \right\|_{1,2,\xi-k+1} \\
& \leq C^* C_0^* (1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)|) \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\mathbf{F}(\mathbf{w}_2, \mathbf{T}_2)\|_{1,2,\xi-k+1} \\
& \leq C^* C_0^* (1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)|) \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi} \|\mathbf{T}_2\|_{k+1,2,\xi}.
\end{aligned} \tag{4.8.25}$$

Additionnons (4.8.24), (4.8.24) et (4.8.25), alors

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{X}\|_{1,2,\xi-k+1} & \leq C^* C_0^* \left((1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)| + \text{We}) \|\mathbf{w}_2\|_{4,2,\xi-k+1} \|\mathbf{T}_2\|_{3,2,\xi-k+1} + 2\text{We} \|\mathbf{T}_1\|_{2,2,\xi-k+1} \right) \\
& \quad \times \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,k-\xi+1} + 2\text{We} C^* C_0^* \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi} \|\mathbf{T}^*\|_{2,2,\xi-k+1}.
\end{aligned} \tag{4.8.26}$$

Pour estimer \mathfrak{U} , nous allons estimer ses 6 termes. Commençons par

$$\begin{aligned}
\omega \text{We} \left\| L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_1]^{-1} L[\mathbf{w}_1]^{-1} \mu^* \right) \right\|_{1,2,\xi-k+1} \\
\leq \omega \text{We} C^* C_0^* \|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi} \|\mu^*\|_{2,2,\xi-k+1}.
\end{aligned} \tag{4.8.27}$$

Pour le deuxième terme ;

$$\begin{aligned}
\omega \text{We} \left\| L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T \nabla \left(L[\mathbf{w}_1]^{-1} [Z[\mathbf{w}_1]^{-1} - Z[\mathbf{w}_2]^{-1}] \mu_2 \right) \right\|_{1,2,\xi-k+1} \\
\leq \omega \text{We} C^* C_0^* \|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi} \left\| \nabla \left(L[\mathbf{w}_1]^{-1} [Z[\mathbf{w}_1]^{-1} - Z[\mathbf{w}_2]^{-1}] \mu_2 \right) \right\|_{1,2,\xi-k+1} \\
\leq \omega \text{We} C^{*2} C_0^* \|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi} \left\| [Z[\mathbf{w}_1]^{-1} - Z[\mathbf{w}_2]^{-1}] \mu_2 \right\|_{2,2,\xi-k+1} \\
\leq \omega \text{We} C^{*2} C_0^* \|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi} \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \left\| Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right\|_{2,2,\xi-k+1} \\
\leq \omega \text{We} C^{*2} C_0^{*2} \|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi} \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\mu_2\|_{k+1,2,\xi}.
\end{aligned} \tag{4.8.28}$$

Estimons le troisième terme,

$$\begin{aligned}
\omega \text{We} \left\| L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_1)^T \nabla \left([L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1}] Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \right\|_{1,2,\xi-k+1} \\
\leq \omega \text{We} C^* C_0^* \|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi} \left\| [L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1}] Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right\|_{2,2,\xi-k+1} \\
\leq \omega \text{We} C^{*2} C_0^{*2} (1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)|) \|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi} \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\mu_2\|_{k+1,2,\xi}.
\end{aligned} \tag{4.8.29}$$

Pour le quatrième terme,

$$\begin{aligned}
& \omega \text{We} \left\| \left\| L[\mathbf{w}_1]^{-1} Z[\mathbf{w}_1]^{-1} (\nabla \mathbf{w}^*)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \right\| \right\|_{1,2,\xi-k+1} \\
& \leq \omega \text{We} C^* C_0^* \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \left\| Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right\|_{2,2,\xi-k+1} \\
& \leq \omega \text{We} C^{*2} C_0^{*2} \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\mu_2\|_{k+1,2,\xi}.
\end{aligned} \tag{4.8.30}$$

Examinons le cinquième terme,

$$\begin{aligned}
& \omega \text{We} \left\| \left\| L[\mathbf{w}_1]^{-1} \left[Z[\mathbf{w}_1]^{-1} - Z[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] (\nabla \mathbf{w}_2)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \right\| \right\|_{1,2,\xi-k+1} \\
& \leq \omega \text{We} C^* C_0^* \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,k-\xi+1} \left\| Z[\mathbf{w}_2]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_2)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \right\|_{2,2,\xi-k+1} \\
& \leq \omega \text{We} C^{*2} C_0^{*2} \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi} \left\| \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \right\|_{2,2,\xi-k+1} \\
& \leq \omega \text{We} C^{*2} C_0^{*2} \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi} \|\mu_2\|_{k+1,2,\xi}.
\end{aligned} \tag{4.8.31}$$

Pour le dernier terme,

$$\begin{aligned}
& \omega \text{We} \left\| \left\| \left[L[\mathbf{w}_1]^{-1} - L[\mathbf{w}_2]^{-1} \right] Z[\mathbf{w}_2]^{-1} (\nabla \mathbf{w}_2)^T \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \right\| \right\|_{1,2,\xi-k+1} \\
& \leq \omega \text{We} C^* C_0^* (1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)|) \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\mathbf{w}_2\|_{3,2,\xi-k+1} \left\| \nabla \left(Z[\mathbf{w}_2]^{-1} L[\mathbf{w}_2]^{-1} \mu_2 \right) \right\|_{2,2,\xi-k+1} \\
& \leq \omega \text{We} C^{*2} C_0^{*2} (1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)|) \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\mu_2\|_{k+1,2,\xi}.
\end{aligned} \tag{4.8.32}$$

Maintenant, nous avons l'estimation de \mathfrak{U} ,

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{U}\|_{1,2,\xi-k+1} & \leq \omega \text{We} C^{*2} C_0^{*2} \left[(1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)|) (1 + \|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi}) + \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi} \right. \\
& \quad \left. + \|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi} + 1 \right] \|\mu_2\|_{k+1,2,\xi} \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \\
& \quad + \omega \text{We} C^{*2} C_0^{*2} \|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi} \|\mu^*\|_{2,2,\xi-k+1}.
\end{aligned} \tag{4.8.33}$$

Donc, nous pouvons trouver l'estimation de $\|\mathbf{F}_1\|_{1,2,\xi-k+1}$ en additionnant les estimations (4.8.22), (4.8.23), (4.8.26) et (4.8.33),

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{F}_1\|_{1,2,\xi-k+1} & \leq \left\{ \omega \text{We} C^* C_0^* (1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)|) \|\mathbf{f}\|_{k,2,\xi} \right. \\
& \quad + \omega \text{We} C^{*2} C_0^{*2} \left[(1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)|) (1 + \|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi}) + \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi} \right. \\
& \quad \left. + \|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi} + 1 \right] \|\mu_2\|_{k+1,2,\xi} + C^* C_0^* \left[(1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)| + \text{We}) \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi} \right. \\
& \quad \left. \times \|\mathbf{T}_2\|_{k+1,2,\xi} + 2\text{We} \|\mathbf{T}_1\|_{k+1,2,\xi} \right] + 2\text{Re} C^* C_0^* (1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)|) (\|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi} \\
& \quad \left. + \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi}) \right\} \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \\
& \quad + \omega \text{We} C^{*2} C_0^{*2} \|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi} \|\mu^*\|_{2,2,\xi-k+1} \\
& \quad + 2\text{We} C^* C_0^* \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi} \|\mathbf{T}^*\|_{2,2,\xi-k+1}.
\end{aligned} \tag{4.8.34}$$

Pour terminer l'estimation (4.8.18), il nous rester trois termes à estimer. D'une part,

$$\left\| \frac{1}{\beta} \Pi((\mathbf{w}^* \cdot \nabla) p_2) \right\|_{2,2,\xi-k+1} \leq \frac{2c_*}{\beta} \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|p_2\|_{k+1,2,\xi}. \quad (4.8.35)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left\| \nabla [(L[\mathbf{w}_2]^{-1} - L[\mathbf{w}_1]^{-1}) p_2] \right\|_{1,2,\xi-k+1} &\leq \left\| (L[\mathbf{w}_2]^{-1} - L[\mathbf{w}_1]^{-1}) p_2 \right\|_{2,2,\xi-k+1} \\ &\leq \omega \text{We} c_* C^* (1 + |\varepsilon(\mathbf{w}^*)|) \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|p_2\|_{k+1,2,\xi}. \end{aligned} \quad (4.8.36)$$

Enfin,

$$\|\text{We}(\mathbf{w}^* \cdot \nabla) \tau_2\|_{2,2,\xi-k+1} \leq \text{We} c_* \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} \|\tau_2\|_{k+1,2,\xi}. \quad (4.8.37)$$

Donc, (4.8.18) s'écrit :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^*\|_{3,2,\xi-k+1} + \|p^*\|_{2,2,\xi-k+1} + \|\tau^*\|_{2,2,\xi-k+1} &\leq C_5 \mathfrak{B}_1 \|\mathbf{w}^*\|_{3,2,\xi-k+1} + C_5 \mathfrak{B}_2 \|\mu^*\|_{2,2,\xi-k+1} \\ &\quad + C_5 \mathfrak{B}_3 \|\mathbf{T}^*\|_{2,2,\xi-k+1}, \end{aligned} \quad (4.8.38)$$

avec,

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_1(\|\mathbf{f}\|_{k,2,\xi}, \|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi}, \|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi}, \|\mu_2\|_{k+1,2,\xi}, \|\mathbf{T}_1\|_{k+1,2,\xi}, \|\mathbf{T}_2\|_{k+1,2,\xi}), \quad (4.8.39)$$

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_2(\|\mathbf{w}_1\|_{k+2,2,\xi}), \quad (4.8.40)$$

$$\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_3(\|\mathbf{w}_2\|_{k+2,2,\xi}). \quad (4.8.41)$$

Notons que \mathfrak{B}_1 , \mathfrak{B}_2 et \mathfrak{B}_3 dépendent de \mathbf{f} , $\tilde{\gamma}$, et $\tilde{\beta}$, donc on peut choisir \mathbf{f} et $\tilde{\gamma}$ assez petits et $\tilde{\beta}$ assez grand de manière à avoir une contraction dans la boule $\mathfrak{B}_{\tilde{\gamma}}^{k,\xi}$. Ainsi l'application \mathcal{K} est contractante, donc elle admet un point fixe unique et par suite le problème (4.2.10) est résolu. Ce qui termine la démonstration du théorème 4.3.4.

Troisième partie

Sur la limite d'un écoulement de fluides viscoélastiques, compressible et non stationnaire, pour un faible nombre de Mach.

Tout art et toute recherche, de même que toute action et toute délibération réfléchie, tendent, semble-t-il, vers quelque bien, toutefois il paraît bien qu'il y a une différence entre les fins.

ARISTOTE
"Ethique à Nicomaque"

Chapitre 5

Existence globale de solutions régulières à petites données et limite incompressible pour des écoulements de fluides viscoélastiques faiblement compressibles

IN this chapter, we consider compressible fluids satisfying the Oldroyd constitutive law. We prove the local existence (and uniqueness) of a solution by classical fixed point argument. We also prove some global properties of the solution. In particular, we obtain some a priori estimates uniformly in the Mach number and global existence for slightly compressible fluids. We prove that compressible flows with *well-prepared* initial data converge to incompressible flows as the Mach number tends to zero.

5.1 Introduction

Nous étudions l'existence locale et globale ainsi que l'unicité d'écoulements de fluides viscoélastiques faiblement compressibles de type Oldroyd-B dans un domaine Ω borné et régulier de \mathbb{R}^3 . Nous étudions aussi la convergence du modèle faiblement compressible vers le modèle incompressible pour des données initiales *bien préparées* lorsque le nombre de Mach tend vers zéro. Cette convergence, pour des données initiales petites et bien préparées, a été établie après avoir obtenu des estimations uniformes par rapport au nombre de Mach.

Dans [13], Bessaih a étudié la limite d'un système de Navier-Stokes compressible dans le cas des données initiales bien préparées lorsque le nombre de Mach tend vers zéro. B.Desjardins et E.Grenier [21] ont abordé la limite des solutions faibles des équations de Navier-Stokes dans l'espace tout entier \mathbb{R}^d ($d=2$ ou 3). R.Danchin [19] a étudié l'existence locale et globale pour des données petites pour le système de Navier-Stokes ainsi que la convergence du modèle vers le système incompressible lorsque le nombre de Mach tend vers zéro dans l'espace tout entier et avec des conditions initiales *mal préparées*. Récemment, en prenant des conditions initiales bien préparées, Z.Lei [65] a démontré l'existence locale et globale des solutions classiques du

système des équations d'un fluide viscoélastique incompressible par l'intermédiaire de la limite incompressible quand les données initiales sont suffisamment petites dans un tore et dans des espaces de fonctions très régulières.

Ce travail est organisé comme suit. La section 5.2 est consacrée à la modélisation du problème, à la définition des conditions bien préparées et à l'établissement du modèle sans dimension à étudier. Les notations et les résultats principaux sont détaillés dans la section 5.3, alors que l'existence locale des solutions régulières se trouve dans la section 5.4. Dans les sections 5.5, 5.6 et 5.7, nous avons établi les estimations uniformes par rapport au nombre de Mach qui nous aident à établir l'existence globale dans la section 5.8 et la convergence du modèle vers un modèle incompressible dans la section 5.9.

5.2 Modélisation

5.2.1 Écoulement de fluides viscoélastiques compressibles non stationnaires

Considérons des écoulements non stationnaires pour des fluides viscoélastiques dans un domaine borné régulier Ω dans \mathbb{R}^3 . Le système, couplant les lois de conservation de la quantité de mouvement, de la masse et la loi du comportement du fluide, s'écrit sous la forme,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho^* \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right) = \rho^* \mathbf{f}^* + \operatorname{div}^* (\tau^* - p^* \mathbf{I}), & \text{dans } Q_T, \\ \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \operatorname{div}^* (\rho^* \mathbf{u}^*) = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \tau^* + \lambda \frac{\mathcal{D}_a \tau^*}{\mathcal{D}t^*} = 2\eta \left(\mathbf{D}^* + \mu \frac{\mathcal{D}_a \mathbf{D}^*}{\mathcal{D}t^*} \right), & \text{dans } Q_T, \end{array} \right. \quad (5.2.1)$$

où les variables étoilées sont les variables avec dimension et $Q_T =]0, T[\times \Omega$. Les inconnues sont : le vecteur vitesse \mathbf{u}^* , la pression $p^* = p^*(\rho^*)$, la densité ρ^* et le tenseur des extra contraintes τ^* (tenseur symétrique). η est la viscosité totale du fluide, $\lambda > 0$ est un temps de relaxation, μ est un temps de retard ($0 < \mu < \lambda$).

$\frac{\mathcal{D}_a \tau^*}{\mathcal{D}t^*}$ est une dérivée objective de tenseur d'expression,

$$\frac{\mathcal{D}_a \tau^*}{\mathcal{D}t^*} = \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \right) \tau^* + \tau^* \mathbf{W}^* - \mathbf{W}^* \tau^* - a(\mathbf{D}^* \tau^* + \tau^* \mathbf{D}^*),$$

où $\mathbf{W}^*[\mathbf{u}^*] = \frac{1}{2}(\nabla^* \mathbf{u}^* - \nabla^{*\top} \mathbf{u}^*)$ et $\mathbf{D}^*[\mathbf{u}^*] = \frac{1}{2}(\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*\top} \mathbf{u}^*)$ sont respectivement le tenseur des taux de rotation et celui des taux de déformation, a est un paramètre réel vérifiant $a \in [-1, 1]$.

Le système est complété par une condition aux bords,

$$\mathbf{u}^* = 0 \text{ sur } \Sigma_T =]0, T[\times \partial\Omega,$$

et trois conditions initiales,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}^*(0, x^*) = \mathbf{u}_0^*(x^*), & \text{dans } \Omega, \\ \rho^*(0, x^*) = \rho_0^*(x^*), & \text{dans } \Omega, \\ \tau^*(0, x^*) = \tau_0^*(x^*), & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

En général, nous décomposons τ^* en deux parties : une newtonienne relative au solvant τ_s^* , et une polymérique τ_p^* . Dans le cas de dimension 3, nous écrivons

$$\tau^* = 2\eta_s \mathbf{D}^* + \left(\left(\xi_s - \frac{2\eta_s}{3} \right) \operatorname{div}^* \mathbf{u}^* \right) \mathbf{I} + \tau_p^*,$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité et ξ_s la viscosité de groupe. Puisque nous nous intéressons à un modèle de fluides faiblement compressibles, nous supposons que $\xi_s = 0$. τ^* s'écrit,

$$\tau^* = 2\eta_s \mathbf{D}^* + \tau_e^*, \quad \tau_e^* = \tau_p^* - \left(\frac{2\eta_s}{3} \operatorname{div}^* \mathbf{u}^* \right) \mathbf{I}.$$

De (5.2.1)₃, nous pouvons déduire que τ_e^* vérifie l'équation

$$\tau_e^* + \lambda \frac{\mathcal{D}_a \tau_e^*}{\mathcal{D}t^*} = 2\eta_e \mathbf{D}^*,$$

où $\eta = \eta_s + \eta_e$ et $\mu = \lambda \frac{\eta_e}{\eta}$ tel que $0 \leq \mu \leq \lambda$. η_s et η_e sont deux réels positifs, respectivement les viscosités du solvant et du polymère. Donc, sous les hypothèses faites, résoudre (5.2.1) devient équivalent à résoudre le système,

$$\begin{cases} \rho^* \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right) = \rho^* \mathbf{f}^* + \eta_s (\Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* \operatorname{div}^* \mathbf{u}^*) - \nabla^* p^* + \operatorname{div}^* \tau^*, \\ \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \operatorname{div}^* (\rho^* \mathbf{u}^*) = 0, \\ \tau^* + \lambda \frac{\mathcal{D}_a \tau^*}{\mathcal{D}t^*} = 2\eta_e \mathbf{D}^*[\mathbf{u}^*], \text{ dans } Q_T, \end{cases} \quad (5.2.2)$$

où pour alléger la notation, nous avons noté τ_e^* par τ^* .

5.2.2 Définitions mathématiques des quantités physiques

Nous définissons dans cette partie quelques quantités physiques qui seront utiles pour la définition de notre système mathématique.

Définition 5.2.1. *Sans onde de cisaillement, la vitesse du son se propage seulement par compression. La célérité du son dans un fluide, noté C_s , est donnée par la racine carrée de la dérivée partielle de la pression par rapport à la densité à entropie constante. Autrement dit,*

$$C_s := \left[\frac{dp^*}{d\rho^*}(\bar{\rho}^*) \right]^{1/2}.$$

Nous supposons aussi que

$$\frac{dp^*}{d\rho^*} > 0.$$

Définition 5.2.2. *Le nombre de Mach est un nombre sans dimension, noté ε , qui est le rapport de la vitesse locale d'un fluide sur la vitesse du son dans ce même fluide. On peut le définir comme suit*

$$\varepsilon := \frac{\mathbf{U}_0}{C_s},$$

où C_s est la célérité du son dans le fluide et \mathbf{U}_0 une vitesse typique du fluide.

5.2.3 Conditions bien préparées

Dans ce travail, nous prenons une densité que l'on divise en deux parties : une partie constante indépendante de ε et une autre dépendant de ε mais tendant vers zéro si ε tend vers zéro :

$$\rho^{*\varepsilon} = \bar{\rho}^* + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \bar{\rho}^* + \varepsilon^2 \sigma^{*\varepsilon}. \quad (5.2.3)$$

Nous supposons aussi que les conditions initiales $\rho_0^{*\varepsilon}$, $\mathbf{u}_0^{*\varepsilon}$ et $\tau_0^{*\varepsilon}$ sont des conditions *bien préparées* qui dépendent de ε . Nous les définissons de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \rho_0^{*\varepsilon} &= \bar{\rho}_0^* + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \bar{\rho}_0^* + \varepsilon^2 \sigma_0^{*\varepsilon}, \\ \mathbf{u}_0^{*\varepsilon} &= \mathbf{v}_0^* + \mathbf{v}_0^{*\varepsilon}, \quad \text{div } \mathbf{v}_0^* = 0, \\ \tau_0^{*\varepsilon} &= \mathbf{S}_0^* + \mathbf{S}_0^{*\varepsilon}. \end{aligned}$$

où $\bar{\rho}_0^*$, \mathbf{v}_0^* , \mathbf{S}_0^* sont respectivement une fonction, un vecteur, un tenseur (symétrique) indépendants de ε . Dans la suite de ce travail, le paramètre ε sera sous-entendu sauf dans la section 5.9.

Nous allons considérer la densité $\bar{\rho}^* = \bar{\rho}_0^*$ comme une densité typique. Nous supposons que

$$\mathfrak{m} = \min_{\Omega} \rho_0^*(x^*) > 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{M} = \max_{\Omega} \rho_0^*(x^*). \quad (5.2.4)$$

Nous remarquons que

$$\frac{dp^*}{d\rho^*}(\bar{\rho}^* + \varepsilon^2 \sigma^*) - \frac{dp^*}{d\rho^*}(\bar{\rho}^*) = \varepsilon^2 \int_0^1 \frac{d^2 p^*}{d\rho^{*2}}(\bar{\rho}^* + t\varepsilon^2 \sigma^*) dt.$$

Notons par $w^*(\sigma^*) = \frac{dp^*}{d\rho^*}(\bar{\rho}^* + \varepsilon^2 \sigma^*) - \frac{dp^*}{d\rho^*}(\bar{\rho}^*)$. Il est évident que $w^*(\sigma^*)$ dépend de ε , ainsi que $w^*(0) = 0$. Nous supposons que la fonction $\rho^* \rightarrow p^*(\rho^*)$ est de classe C^3 et la fonction $\sigma^* \rightarrow w^*(\sigma^*)$ est de classe C^2 .

Maintenant, remplaçons ρ^* par sa valeur dans (5.2.2)₁, il vient

$$\begin{aligned} (\bar{\rho}^* + \varepsilon^2 \sigma^*) \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right) + \varepsilon^2 \frac{dp^*}{d\rho^*}(\bar{\rho}^* + \varepsilon^2 \sigma^*) \nabla^* \sigma^* = \\ (\bar{\rho}^* + \varepsilon^2 \sigma^*) \mathbf{f}^* + \eta_s (\Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* \text{div}^* \mathbf{u}^*) + \text{div}^* \tau^*. \end{aligned}$$

Nous pouvons l'écrire aussi, en tenant compte des définitions de $w^*(\sigma^*)$ et du nombre de Mach ε , sous la forme

$$\begin{aligned} (\bar{\rho}^* + \varepsilon^2 \sigma^*) \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right) + \mathbf{U}_0^2 \nabla^* \sigma^* = (\bar{\rho}^* + \varepsilon^2 \sigma^*) \mathbf{f}^* + \eta_s (\Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* \text{div}^* \mathbf{u}^*) \\ + \text{div}^* \tau^* - \varepsilon^2 w^*(\sigma^*) \nabla^* \sigma^*. \end{aligned}$$

Pour la deuxième équation, nous déduisons facilement,

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \sigma^*}{\partial t^*} + \bar{\rho}^* \text{div}^* \mathbf{u}^* + \varepsilon^2 \text{div}^* (\sigma^* \mathbf{u}^*) = 0.$$

En tenant compte de la définition de $\frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t}$ et des notations $\mathbf{u}' = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$, $\sigma' = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ et $\tau' = \frac{\partial \tau}{\partial t}$, le système (5.2.8) se réécrit,

$$\begin{cases} \mathbf{u}' + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (1 - \omega) A \mathbf{u} + \nabla \sigma &= \mathbf{F} + \mathbf{div} \tau, \\ \sigma' + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \sigma + \sigma \operatorname{div} \mathbf{u} &= -\varepsilon^{-2} \alpha \operatorname{div} \mathbf{u}, \\ \tau + \operatorname{We} \{ \tau' + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau) \} &= 2\omega \mathbf{D}[\mathbf{u}], \text{ dans } \mathcal{Q}_T, \end{cases} \quad (5.2.9)$$

avec

$$A = -\Delta - \nabla \operatorname{div}, \quad (5.2.10)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \sigma, \tau) = \mathbf{f} + (1 - \omega) \frac{\varepsilon^2 \sigma}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma} A \mathbf{u} + \frac{\varepsilon^2}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma} (\sigma - w(\sigma)) \nabla \sigma - \frac{\varepsilon^2 \sigma}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma} \mathbf{div} \tau, \quad (5.2.11)$$

$$\mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau) = \left(\tau \mathbf{W}[\mathbf{u}] - \mathbf{W}[\mathbf{u}] \tau \right) - a \left(\mathbf{D}[\mathbf{u}] \tau + \tau \mathbf{D}[\mathbf{u}] \right). \quad (5.2.12)$$

Ce système est complété par la condition aux bords

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Sigma_T = \partial\Omega \times]0, T[, \quad (5.2.13)$$

et trois conditions initiales,

$$\begin{cases} \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x), & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(0, x) = \sigma_0(x), & \text{dans } \Omega, \\ \tau(0, x) = \tau_0(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (5.2.14)$$

et

$$0 < \mathfrak{m}_1 = \frac{\mathfrak{m}}{\bar{\rho}^*} \leq \alpha + \varepsilon^2 \sigma_0(x) \leq \mathfrak{M}_1 = \frac{\mathfrak{M}}{\bar{\rho}^*}, \quad \text{sur } \bar{\Omega}. \quad (5.2.15)$$

5.3 Notations et résultats principaux

Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^3 , de frontière régulière $\partial\Omega$ et \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$, dirigé vers l'extérieur de Ω . Dans tout ce travail, nous utilisons les notations et les espaces suivants.

Si x est un point de \mathbb{R}^3 , rapporté au repère orthonormal canonique, on note $x = (x^1, x^2, x^3)$ et $|x|$ la norme euclidienne de x .

On note $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace de Lebesgue et $\|\cdot\|_{L^p}$ sa norme (sauf la norme de $L^2(\Omega)$ qui est notée par $\|\cdot\|$). L'espace de Sobolev est noté $\mathbf{H}^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, sa norme $\|\cdot\|_k$ et son produit scalaire $((\cdot, \cdot))_k$. Nous utilisons aussi l'espace de Sobolev homogène $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ainsi que son dual $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$. $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\mathbf{H}^k(\Omega)$ sont les espaces des fonctions à valeurs vectorielles ou matricielles à composantes dans $L^2(\Omega)$ et $\mathbf{H}^k(\Omega)$ respectivement, leurs normes étant dénotées comme ci-dessus.

Soit I un intervalle de \mathbb{R}_+ et soient $k \in \mathbb{N}$. $C(\bar{I}, \mathbf{H}^k(\Omega))$ est l'espace des fonctions continues de \bar{I} à valeurs dans $\mathbf{H}^k(\Omega)$. La norme de cet espace est notée par $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$. $C_b(\bar{I}, \mathbf{H}^k(\Omega))$ est l'espace des fonctions continues et bornées de \bar{I} dans $\mathbf{H}^k(\Omega)$.

L'espace de fonction $L^p(I, \mathbf{H}^k(\Omega))$, $1 \leq p \leq +\infty$ et $k \in \mathbb{N}$, consiste en les fonctions p -intégrables à valeurs dans $\mathbf{H}^k(\Omega)$. Notons par $[\cdot]_{p,k,T}$ la norme de l'espace $L^p((0, T), \mathbf{H}^k(\Omega))$ pour $1 \leq p \leq +\infty$, $k \in \mathbb{N}$ et $0 < T \leq \infty$.

Soient $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ et $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ deux matrices ($N=2$ ou 3), nous définissons le produit matriciel $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}b_{ij}$ et la norme matricielle $|\mathbf{A}| = \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

On introduira différentes constantes, en précisant le cas échéant de quels paramètres ou données elles dépendent. C_Ω désignera toujours une constante ne dépendant que de Ω .

5.3.1 Résultats principaux

Rappelons le système que nous étudions,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}' + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (1 - \omega) \mathbf{A} \mathbf{u} + \nabla \sigma &= \mathbf{F} + \mathbf{div} \tau, \\ \sigma' + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \sigma + \sigma \operatorname{div} \mathbf{u} &= -\varepsilon^{-2} \alpha \operatorname{div} \mathbf{u}, \\ \tau + \operatorname{We} \{ \tau' + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau) \} &= 2\omega \mathbf{D}[\mathbf{u}], \quad \text{dans } \mathbf{Q}_T, \\ \mathbf{u}(0, x) &= \mathbf{u}_0(x), \\ \sigma(0, x) &= \sigma_0(x), \\ \tau(0, x) &= \tau_0(x), \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0, \quad \text{sur } \Sigma_T, \end{array} \right. \quad (5.3.1)$$

où A et \mathbf{F} ont été définis respectivement en (5.2.10) et (5.2.11) .

Nous allons énoncer nos résultats principaux. Le premier résultat concerne l'existence globale pour des données initiales suffisamment petites.

Théorème 5.3.1. (Existence et unicité de solutions globales) *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert régulier de C^4 ,*

$$\mathbf{f} \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^1(\Omega)), \quad \text{tel que } \mathbf{f}' \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)),$$

$$\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \tau_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega), \quad \sigma_0 \in H^2(\Omega).$$

Il existe des constantes strictement positives, \mathfrak{b}_1 , \mathfrak{b}_2 et ω_0 ($0 < \omega_0 < 1$), indépendantes de ε telles que si

$$0 < \omega \leq \omega_0, \quad \|\mathbf{u}_0\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\sigma_0\|_2^2 + \|\tau_0\|_2^2 \leq \mathfrak{b}_1, \quad [\mathbf{f}]_{\infty,1,\infty}^2 + [\mathbf{f}']_{\infty,0,\infty}^2 \leq \mathfrak{b}_2,$$

alors il existe une solution unique $(\mathbf{u}, \sigma, \tau)$ du problème (5.3.1) vérifiant

$$\mathbf{u} \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^3(\Omega)) \cap C_b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^2(\Omega)),$$

$$\mathbf{u}' \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^1(\Omega)) \cap C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)),$$

$$\sigma \in C_b(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega)), \quad \sigma' \in C_b(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)),$$

$$\tau \in C_b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^2(\Omega)), \quad \tau' \in C_b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^1(\Omega))$$

et

$$-\frac{\alpha}{2} \leq \varepsilon^2 \sigma \leq \frac{\alpha}{2}, \quad \text{dans } \overline{Q_T},$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \|\mathbf{u}(t)\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\sigma(t)\|_2^2 + \|\tau(t)\|_2^2 \leq \mathfrak{b}_3, \quad \|\mathbf{u}'(t)\|^2 + \|\varepsilon \sigma'(t)\|^2 + \|\tau'(t)\|^2 \leq \mathfrak{b}_4,$$

où \mathfrak{b}_3 et \mathfrak{b}_4 sont des constantes strictement positives indépendantes de ε .

De plus si

$$\mathbf{f} \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^1(\Omega)), \quad \text{avec } \mathbf{f}' \in L^2(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)),$$

alors on a aussi

$$\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^3(\Omega)), \quad \mathbf{u}' \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^1(\Omega)),$$

$$\sigma \in L^2(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega)), \quad \sigma' \in L^2(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega)),$$

$$\tau \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^2(\Omega)), \quad \tau' \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^1(\Omega)).$$

Remarque 5.3.2. Notons que dans le théorème 5.3.1, nous avons besoin d'une condition plus faible sur $\|\mathbf{u}_0\|_2^2$, $\|p_0\|_2^2$ et $\|\tau_0\|_2^2$. Cette condition sera précisée au cours de la démonstration.

Le deuxième résultat concerne la convergence des solutions du système faiblement compressible vers les solutions du système incompressible et ceci quand ε tend vers zéro. Notre solution $(\mathbf{u}, \sigma, \tau)$ du problème (5.3.1) dépend de ε . Nous avons omis ε pour alléger la notation dans ce qui précède. Maintenant, notons dans (5.3.1) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\varepsilon, \quad \sigma = \sigma^\varepsilon, \quad \tau = \tau^\varepsilon. \quad (5.3.2)$$

Notons par $(\mathbf{v}, \pi, \mathbf{S})$ la solution du problème incompressible suivant, pour lequel $\rho \equiv \alpha$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha(\mathbf{v}' + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) - (1 - \omega)\Delta\mathbf{v} + \nabla\pi = \alpha\mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{S} \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{S} + \operatorname{We}\{\mathbf{S}' + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{S} + \mathbf{g}(\nabla\mathbf{v}, \mathbf{S})\} = 2\omega\mathbf{D}[\mathbf{v}], & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \mathbf{v} = 0, & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma \\ \mathbf{v}(0, x) = \mathbf{v}_0(x), & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{S}(0, x) = \mathbf{S}_0(x), & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (5.3.3)$$

Avant d'énoncer le théorème qui donne l'existence et l'unicité des solutions globales du problème 5.3.3, nous introduisons des notations usuelles. Considérons l'espace des vecteurs à divergence nulle \mathbf{H} et la projection orthogonale \mathbf{P} de $L^2(\Omega)$ sur \mathbf{H} , où

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Définissons aussi l'espace

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\},$$

et $D(\mathcal{A}) = \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$, le domaine de l'opérateur de Stokes $\mathcal{A} = -\mathbf{P}\Delta$.

Théorème 5.3.3. [38, 72](Existence globale des solutions régulières) *Soit $\partial\Omega \in C^3$. Soient $\mathbf{v}_0 \in D(\mathcal{A})$, $\mathbf{S}_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^1)$ et $\mathbf{f}' \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-1})$ suffisamment petits dans leurs espaces, alors le problème (5.3.3) admet une solution unique $(\mathbf{v}, \pi, \mathbf{S})$ définie pour tout $T \geq 0$, et satisfaisant :*

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\in L^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^3(\Omega)) \cap C_b(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})), & \mathbf{v}' &\in L^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbf{V}) \cap C_b(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}), \\ \mathbf{S} &\in L^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^2(\Omega)), & \mathbf{S}' &\in C_b(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^1(\Omega)), \\ \pi &\in L^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Sous les hypothèses des théorèmes 5.3.1 et 5.3.3, nous allons démontrer le résultat suivant.

Théorème 5.3.4. *Soit $0 \leq \tau < 1$. On suppose que $(\mathbf{u}_0^\varepsilon, \tau_0^\varepsilon)$ converge vers $(\mathbf{v}_0, \mathbf{S}_0)$ dans $\mathbf{H}^{1+\tau}(\Omega) \times \mathbf{H}^{1+\tau}(\Omega)$, lorsque ε tend vers zéro. Sous les hypothèses du théorème (5.3.1), la solution du problème faiblement compressible (5.3.1) tend vers la solution du problème incompressible (5.3.3) quand ε tend vers zéro. Plus précisément, pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tous ε et T , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $T > 0$,*

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{v}\|_{C([0,T]; \mathbf{H}^{1+\tau}(\Omega))} + \|\varepsilon^2 \sigma^\varepsilon\|_{C([0,T]; \mathbf{H}^{1+\tau}(\Omega))} + \|\tau^\varepsilon - \mathbf{S}\|_{C([0,T]; \mathbf{H}^{1+\tau}(\Omega))} < \delta. \quad (5.3.4)$$

5.4 Existence et unicité de solutions locales

Nous commençons par établir un résultat d'existence et d'unicité de solutions locales régulières en utilisant une méthode classique basée sur une formulation de point fixe et par application du théorème de Schauder (cf. [97, 38, 71]). Pour cela, nous étudions trois problèmes linéaires, le premier pour la vitesse \mathbf{u} , et deux équations de transport pour la densité σ et pour la contrainte τ . Le paramètre ε est fixé, $0 < \varepsilon \leq 1$. Dans tous les résultats qui suivent les constantes ne dépendent pas de ε , sauf s'il en est précisé autrement.

Théorème 5.4.1. (Existence et unicité de solutions locales) *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert régulier de classe C^3 et $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{M}_1$ les deux constantes définies dans (5.2.15). Soient*

$$\mathbf{f} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^1(\Omega)), \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}' \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{-1}(\Omega)),$$

$$\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \tau_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega),$$

$$\sigma_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega), \quad \text{avec} \quad \int_{\Omega} \sigma_0(x) dx = 0, \quad 0 < \mathfrak{m}_1 \leq \alpha + \varepsilon^2 \sigma_0 \leq \mathfrak{M}_1, \quad \text{sur } \overline{\Omega}.$$

Alors, il existe un $T^ > 0$ et une solution unique $(\mathbf{u}, \sigma, \tau)$ du problème (5.3.1) sur $Q_{T^*} =$*

$\Omega \times]0, T^*[$ vérifiant

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T^*; \mathbf{H}^3(\Omega)) \cap C([0, T^*]; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)),$$

$$\mathbf{u}' \in L^2(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \cap C([0, T^*]; \mathbf{L}^2(\Omega)),$$

$$\sigma \in C([0, T^*]; H^2(\Omega)), \quad \sigma' \in C([0, T^*]; H^1(\Omega)),$$

$$\int_{\Omega} \sigma(t, x) dx = 0 \text{ pour tout } t \in [0, T^*], \quad \frac{m_1}{2} \leq \alpha + \varepsilon^2 \sigma \leq 2\mathfrak{M}_1, \quad \text{dans } \overline{Q}_{T^*},$$

$$\tau \in C([0, T^*]; \mathbf{H}^2(\Omega)), \quad \tau' \in C([0, T^*]; \mathbf{H}^1(\Omega)).$$

Remarque 5.4.2. Soient d_1, d_2 et d_3 trois constantes positives. Si

$$\mathbf{f} \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^1(\Omega)), \quad \mathbf{f}' \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \quad (5.4.1)$$

et

$$\|\mathbf{u}_0\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\sigma_0\|_2^2 + \|\tau_0\|_2^2 \leq d_1, \quad 0 < d_2 \leq \inf_{\overline{\Omega}} (\alpha + \varepsilon^2 \sigma_0) \leq \sup_{\overline{\Omega}} (\alpha + \varepsilon^2 \sigma_0) \leq d_3, \quad (5.4.2)$$

alors le temps T^* trouvé dans le théorème 5.4.1 dépend de $\Omega, \alpha, \omega, We, d_1, d_2, d_3, [\mathbf{f}]_{\infty,1,\infty}$ et $[\mathbf{f}']_{\infty,0,\infty}$.

5.4.1 Problème linéaire

Soient \mathbf{w}, π et ψ respectivement un vecteur, une fonction et un tenseur symétrique donnés. Soit T un nombre réel positif, $Q_T = \Omega \times]0, T[$ et $\Sigma_T = \partial\Omega \times]0, T[$. Nous considérons le problème linéaire suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}' + (1 - \omega)A\mathbf{u} = \mathbf{F}_1, \\ \sigma' + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\sigma + \sigma \operatorname{div} \mathbf{w} = G_1, \\ \tau + We\{\tau' + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\tau + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{w}, \tau)\} = 2\omega \mathbf{D}[\mathbf{w}], \quad \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x), \\ \sigma(0, x) = \sigma_0(x), \\ \tau(0, x) = \tau_0(x), \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, \quad \text{sur } \Sigma_T, \end{array} \right. \quad (5.4.3)$$

avec

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{w}, \pi, \psi) - (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{w} - \nabla \pi + \operatorname{div} \psi, \quad (5.4.4)$$

$$G_1 = -\varepsilon^{-2} \alpha \operatorname{div} \mathbf{w}. \quad (5.4.5)$$

et

$$\frac{m_1}{2} \leq \alpha + \varepsilon^2 \pi(t, x) \leq 2\mathfrak{M}_1, \quad \text{dans } \overline{Q}_T. \quad (5.4.6)$$

5.4.2 Problème linéaire concernant la vitesse \mathbf{u}

Considérons le problème linéaire concernant la vitesse \mathbf{u}

$$\begin{cases} \mathbf{u}' + (1 - \omega)A\mathbf{u} = \mathbf{F}_1, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x), & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (5.4.7)$$

où $A\mathbf{u} = -(\Delta\mathbf{u} + \nabla\text{div}\mathbf{u})$, \mathbf{F}_1 et \mathbf{u}_0 sont donnés et $0 < T \leq +\infty$.

Lemme 5.4.3. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^2 , $\mathbf{F}_1 \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ et $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Alors il existe une unique solution du problème (5.4.7)*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap C([0, T]; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \\ \mathbf{u}' &\in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)). \end{aligned}$$

De plus, cette solution vérifie l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \frac{(1 - \omega)^2}{2} \|A\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + (1 - \omega) \|D\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \\ + (1 - \omega) \|\text{div}\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq 4(1 - \omega) \|D\mathbf{u}_0\|^2 + \|\mathbf{F}_1\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Preuve.

D'après des résultats classiques d'Agmon-Douglis-Nirenberg [2], l'opérateur $A = -\Delta - \nabla\text{div}$ est fortement elliptique et est donc générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique dans $L^2(\Omega)$ de domaine $D(A) = \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. La démonstration classique est faite dans [97].

Montrons l'estimation (5.4.8). Multiplions (5.4.7)₁ scalairement dans $L^2(\Omega)$ par $\mathbf{u}' + \alpha(1 - \omega)A\mathbf{u}$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathbf{u}'|^2 + 2(1 - \omega) \int_{\Omega} \mathbf{u}' \cdot A\mathbf{u} + (1 - \omega)^2 \int_{\Omega} |A\mathbf{u}|^2 \\ = \int_{\Omega} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}' + (1 - \omega) \int_{\Omega} \mathbf{F}_1 \cdot A\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Intégrons par parties le deuxième terme, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'\|^2 + (1 - \omega) \frac{d}{dt} \left(\|D\mathbf{u}\|^2 + \|\text{div}\mathbf{u}\|^2 \right) + (1 - \omega)^2 \|A\mathbf{u}\|^2 \leq \|\mathbf{F}_1\| \cdot \|\mathbf{u}'\| \\ + \frac{(1 - \omega)}{4} \|\mathbf{F}_1\| \cdot \|A\mathbf{u}\|. \end{aligned}$$

D'autre part, utilisons l'inégalité de Young sur les deux termes de droite, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}_1\| \cdot \|\mathbf{u}'\| &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{F}_1\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}'\|^2, \\ (1 - \omega) \|\mathbf{F}_1\| \cdot \|A\mathbf{u}\| &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{F}_1\|^2 + \frac{(1 - \omega)^2}{2} \|A\mathbf{u}\|^2. \end{aligned}$$

Intégrons sur $[0, T]$ et utilisons l'inégalité

$$\|\operatorname{div} \mathbf{u}_0\| \leq 3 \|D\mathbf{u}_0\|,$$

alors nous obtenons (5.4.8). □

Supposons que les données Ω , \mathbf{u}_0 et \mathbf{F} sont suffisamment régulières, nous pouvons obtenir plus de régularité pour \mathbf{u} .

Lemme 5.4.4 ([97, 92]). *Sous les conditions du lemme 5.4.3 et si de plus $\partial\Omega$ est de classe C^3 , $\mathbf{F}_1 \in L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$, $\mathbf{F}'_1 \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ et $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^1_0(\Omega)$, alors la solution \mathbf{u} du problème (5.4.7) donnée par le lemme 5.4.3 est telle que*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^2(0, T; \mathbf{H}^3(\Omega)) \cap C([0, T]; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}^1_0(\Omega)), \\ \mathbf{u}' &\in L^2(0, T; \mathbf{H}^1_0(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

et il existe une constante C_1 , qui dépend de Ω , de T , de α et de ω , telle que nous ayons

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}^1_0(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^1_0(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \\ &\leq C_1 \{ \|A\mathbf{u}_0\|^2 + \|\mathbf{F}_1(0)\|^2 + \|\mathbf{F}_1\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))}^2 + \|\mathbf{F}'_1\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))}^2 \}. \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

Preuve.

Dérivons par rapport à t l'équation (5.4.7)₁, alors nous avons

$$\mathbf{u}'' + (1 - \omega)A\mathbf{u}' = \mathbf{F}'_1, \quad \text{dans } Q_T,$$

et $\mathbf{u}'_{|\partial\Omega}(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Posons $\mathbf{v} = \mathbf{u}'$, alors \mathbf{v} vérifie le système

$$\begin{cases} \mathbf{v}' + (1 - \omega)A\mathbf{v} = \mathbf{F}'_1, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 = \mathbf{F}_1(0) - (1 - \omega)A\mathbf{u}_0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{v} = 0, & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases} \quad (5.4.10)$$

Multiplions par \mathbf{v} l'équation (5.4.12)₁ et intégrons sur Ω . Il vient

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + (1 - \omega) \int_{\Omega} A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{F}'_1, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}^1_0}.$$

Après calcul, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{3(1 - \omega)}{4} \|D\mathbf{v}\|^2 + (1 - \omega) \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|^2 \leq \frac{1}{(1 - \omega)} \|\mathbf{F}'_1\|_{\mathbf{H}^{-1}}^2,$$

puis intégrons sur $[0, T]$ et remplaçons \mathbf{v} et \mathbf{v}_0 par leur valeurs

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|\mathbf{u}'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \frac{3(1 - \omega)}{4} \|D\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + (1 - \omega) \|\operatorname{div} \mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \\ &\leq \frac{1}{(1 - \omega)} \|\mathbf{F}'_1\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{F}_1(0)\|^2 + (1 - \omega) \|A\mathbf{u}_0\|^2 \right). \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Enfin, l'inégalité (5.4.9) découle des inégalités (5.4.8) et (5.4.11). □

5.4.3 Équations de transport en densité σ et en contraintes τ

Nous considérons les deux problèmes suivants

$$\begin{cases} \sigma' + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\sigma + \sigma \operatorname{div} \mathbf{w} = G_1, & \text{dans } Q_T, \\ \sigma(0, x) = \sigma_0(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (5.4.12)$$

et

$$\begin{cases} \tau + \operatorname{We}\{\tau' + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\tau + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{w}, \tau)\} = 2\omega \mathbf{D}[\mathbf{w}], & \text{dans } Q_T, \\ \tau(0, x) = \tau_0(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (5.4.13)$$

où G_1 , \mathbf{w} , σ_0 et τ_0 sont donnés.

Les problèmes (5.4.12) et (5.4.13) sont des problèmes de transport, nous les résolvons par la méthode des caractéristiques (cf. [97, 38, 92]).

Lemme 5.4.5 ([97]). *Soient $\partial\Omega$ de classe C^1 , $\mathbf{w} \in L^1(0, T; \mathbf{H}^3(\Omega))$, $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Σ et $\sigma_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$, avec $\int_{\Omega} \sigma_0 dx = 0$. Alors il existe une unique solution σ du problème (5.4.12) telle que*

$$\sigma \in C([0, T]; \mathbf{H}^2(\Omega)), \quad \int_{\Omega} \sigma(t, x) dx = 0 \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Cette solution vérifie l'estimation suivante

$$\|\sigma\|_{L^\infty(0, T, \mathbf{H}^2(\Omega))} \leq C_2(\|\sigma_0\| + 1) \exp(C_2 \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(0, T, \mathbf{H}^3(\Omega))}). \quad (5.4.14)$$

Si de plus, $\mathbf{w} \in C([0, T]; \mathbf{H}^2(\Omega))$, alors $\sigma' \in C([0, T]; \mathbf{H}^1(\Omega))$ et vérifie

$$\|\sigma'\|_{L^\infty(0, T, \mathbf{H}^1(\Omega))} \leq C_2 \|\mathbf{w}\|_{L^\infty(0, T, \mathbf{H}^2(\Omega))} (\|\sigma_0\| + 1) \exp(C_2 \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(0, T, \mathbf{H}^3(\Omega))}). \quad (5.4.15)$$

Lemme 5.4.6 ([38]). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert régulier C^3 , $\mathbf{w} \in L^1(0, T; \mathbf{H}^3(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ et $\tau_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$. Alors il existe une unique solution $\tau \in C([0, T]; \mathbf{H}^2(\Omega))$ du problème (5.4.13) et il existe une constante C_3 telle que*

$$\|\tau\|_{L^\infty(0, T, \mathbf{H}^2(\Omega))} \leq \left(\|\tau_0\|^2 + \frac{2\omega}{C_3 \operatorname{We}} \right) \exp(C_3 \|\mathbf{w}\|_{L^1(0, T, \mathbf{H}^3(\Omega))}). \quad (5.4.16)$$

Si de plus, $\mathbf{w} \in C([0, T]; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega))$, alors $\tau' \in C([0, T]; \mathbf{H}^1(\Omega))$ et satisfait

$$\|\tau'\|_{L^\infty(0, T, \mathbf{H}^1(\Omega))} \leq C_0 \left(\|\mathbf{w}\|_{L^\infty(0, T, \mathbf{H}^2(\Omega))} + \frac{1}{C_3 \operatorname{We}} \right) \left(\|\tau_0\| + \frac{2\omega}{C_3 \operatorname{We}} \right) \exp(C_3 \|\mathbf{w}\|_{L^1(0, T, \mathbf{H}^3(\Omega))}). \quad (5.4.17)$$

5.4.4 Preuve du Théorème 5.4.1

Pour résoudre le problème (5.3.1), nous allons appliquer le théorème du point fixe de Schauder.

Pour $T > 0$, et $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 > 0$, on définit l'ensemble suivant

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_T = & \{(\mathbf{w}, \pi, \psi), \\ & \mathbf{w} \in C([0, T]; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, \mathbf{H}^3(\Omega)), \mathbf{w}' \in C([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \\ & \pi \in L^\infty(0, T, \mathbf{H}^2(\Omega)), \pi' \in L^\infty(0, T, \mathbf{H}^1(\Omega)), \\ & \psi \in L^\infty(0, T, \mathbf{H}^2(\Omega)), \psi' \in L^\infty(0, T, \mathbf{H}^1(\Omega)), \\ & \mathbf{w}(0) = \mathbf{u}_0, \pi(0) = \sigma_0, \psi(0) = \tau_0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{w} = 0 \text{ sur } \Sigma_T, \\ & \|\mathbf{w}\|_{L^\infty(0, T, \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega))}^2 + \|\mathbf{w}\|_{L^2(0, T, \mathbf{H}^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{w}'\|_{L^\infty(0, T, \mathbf{L}^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{w}'\|_{L^2(0, T, \mathbf{H}_0^1(\Omega))}^2 \leq \mathfrak{B}_1, \\ & \|\pi\|_{L^\infty(0, T, \mathbf{H}^2(\Omega))} + \|\psi\|_{L^\infty(0, T, \mathbf{H}^2(\Omega))} \leq \mathfrak{B}_1, \\ & \|\pi'\|_{L^\infty(0, T, \mathbf{H}^1(\Omega))} + \|\psi'\|_{L^\infty(0, T, \mathbf{H}^1(\Omega))} \leq \mathfrak{B}_2, \\ & \frac{\mathfrak{m}_1}{2} \leq \alpha + \varepsilon^2 \pi(t, x) \leq 2\mathfrak{M}_1, \quad \text{dans } \overline{Q}_T\}. \end{aligned}$$

Choisissons \mathfrak{B}_1 telle que

$$\mathfrak{B}_1 > \max\{C_4 \|\mathbf{A}\mathbf{u}_0\|^2, \|\sigma_0\|_2, \|\tau_0\|_2\}, \quad (5.4.18)$$

alors $(\mathbf{w}, \sigma_0, \tau_0) \in \mathfrak{R}_T$. En effet, \mathbf{w} est la solution du problème

$$\begin{cases} \mathbf{w}(\cdot) \in \mathbf{H}^1(\Omega), \\ \mathbf{w}' + (1 - \omega)\mathbf{A}\mathbf{w} = 0, & \text{p.p. dans } \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{w}(0) = \mathbf{u}_0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{w} = 0, & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases} \quad (5.4.19)$$

D'après l'estimation (5.4.9), il existe une constante C_4 telle que

$$\|\mathbf{w}'\|_{L^2(0, T, \mathbf{H}^3(\Omega))}^2 + \|\mathbf{w}'\|_{L^\infty(0, T, \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega))}^2 + \|\mathbf{w}\|_{L^2(0, T, \mathbf{H}_0^1(\Omega))}^2 + \|\mathbf{w}\|_{L^\infty(0, T, \mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \leq C_4 \|\mathbf{A}\mathbf{u}_0\|^2,$$

donc le choix de \mathfrak{B}_1 dans (5.4.18) est suffisant pour montrer que \mathfrak{R}_T est non vide pour tout $T > 0$.

Maintenant, définissons l'application \mathfrak{K} comme suit

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} : \quad \mathfrak{R}_T & \longrightarrow \mathfrak{X}_T = C([0, T]; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \times C([0, T]; \mathbf{H}^1(\Omega)) \times C([0, T]; \mathbf{H}^1(\Omega)) \\ (\mathbf{w}, \pi, \psi) & \longrightarrow (\mathbf{u}, \sigma, \tau) \end{aligned}$$

où \mathbf{u}, σ et τ sont les solutions uniques des problèmes (5.4.7), (5.4.12) et (5.4.13) avec

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{f} + (1 - \omega) \frac{\varepsilon^2 \pi}{\alpha + \varepsilon^2 \pi} \mathbf{A}\mathbf{w} + \frac{\varepsilon^2}{\alpha + \varepsilon^2 \pi} (\pi - w(\pi)) \nabla \pi - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} - \nabla \pi + \frac{1}{\alpha + \varepsilon^2 \pi} \mathbf{div} \psi, \\ G_1 &= -\varepsilon^{-2} \alpha \operatorname{div} \mathbf{w}. \end{aligned}$$

En procédant comme dans [38], nous pouvons démontrer qu'il existe T^* assez petit, tel que $\mathfrak{K}(\mathfrak{R}_{T^*}) \subset \mathfrak{R}_{T^*}$ et ceci si nous choisissons

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &> \max \left\{ C_4 \|A\mathbf{u}_0\|^2, e^{\sqrt{2}} \left(\|\sigma_0\|_2 + \|\tau_0\|_2 + 1 + \frac{2\omega}{C_3 \text{We}} \right), C_2(2C_5 + 1) \|A\mathbf{u}_0\|^2 \right. \\ &\quad + C_5 \|A\mathbf{u}_0\|^4 + 3 \left(2(1 + \|w\|_{\mathcal{C}}^2) \|\sigma_0\|_1^2 + \|\tau_0\|_1^2 \right) \\ &\quad \left. + 3 \|\mathbf{f}(0)\|^2 + 3 \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2 + 3 \|\mathbf{f}'\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

et

$$\mathfrak{B}_2 > e^{\sqrt{2}} \left\{ C_6 \left(\|\sigma_0\|_2 + \|\tau_0\|_2 + 1 + \frac{2\omega}{C_3 \text{We}} \right) + \frac{1}{\text{We}} \left(\|\tau_0\|_2 + \frac{2\omega}{C_3 \text{We}} \right) \right\}. \quad (5.4.21)$$

Donc pour tout T telle que

$$T \leq T^* = \min \left(\frac{\mathfrak{B}_1}{2C_2(4C_4(1 + \|w\|_{\mathcal{C}}^2)\mathfrak{B}_1^2 + 3\mathfrak{B}_2^2)}, \frac{2}{C_6^2 \mathfrak{B}_1} \right), \quad (5.4.22)$$

nous avons $\mathfrak{K}(\mathfrak{R}_T) \subset \mathfrak{R}_T$.

Pour terminer la démonstration du théorème 5.4.1, il suffit d'appliquer le théorème du point fixe de Schauder à l'application \mathfrak{K} de l'ensemble convexe fermé borné \mathfrak{R}_T dans \mathfrak{X}_T . Nous obtenons ainsi une solution du problème (5.3.1). La continuité de \mathfrak{K} est démontrée dans [92]. L'unicité de la solution de ce problème est démontrée dans [97] dans le cas newtonien compressible, dans [38] pour les écoulements de fluides viscoélastiques incompressibles et dans [92] pour les fluides faiblement compressibles.

5.5 Estimations

Notre but maintenant est d'obtenir des estimations a priori pour des normes convenables de \mathbf{u} , σ et τ . Ceci sera fait sous la condition que les données initiales $(\mathbf{u}_0, \sigma_0, \tau_0)$ et le champ de force extérieure \mathbf{f} sont assez petits.

Nous supposons que $(\mathbf{u}, \sigma, \tau)$ est la solution du problème (5.3.1) sur \mathbf{Q}_T ($0 < T \leq \infty$), dans les ensembles de fonctions du théorème 5.4.1. Nous supposons en outre que Ω est de classe C^4 , et que σ vérifie l'hypothèse suivante :

$$\frac{\alpha}{2} \leq \alpha + \varepsilon^2 \sigma(t, x) \leq \frac{3\alpha}{2}, \quad \text{dans } \overline{\mathbf{Q}}_T. \quad (5.5.1)$$

De plus, nous supposons que la fonction w , qui d'après (5.2.7) dépend de ε , satisfait pour tout $h \in H^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|w(h)\|_k &\leq C_\Omega \|h\|_k, \quad k = 0, 1, 2, \\ \left\| \frac{d}{dh}(w(h)) \right\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} &\leq C_\Omega. \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

Notons que nous pouvons trouver plusieurs exemples de définition de $p(\rho)$ où $w(h)$ vérifie les deux conditions ci-dessus. Citons, par exemple, le cas où la pression vérifie la loi d'état linéaire $p(\rho) = \frac{1}{\varepsilon}(\rho - \alpha)$ ainsi que le cas d'un gaz parfait compressible isotherme $p(\rho) = C_s^2 \rho$ avec C_s est la célérité du son dans le gaz. Dans ce deux cas, les conditions (5.5.2) sont vérifiées évidemment.

Dans le cas d'un gaz barotropique, c'est-à-dire $p(\rho) = a\rho^\gamma$ avec a est une constante positive et $\gamma \geq \gamma_0 = 9/5$ alors $\frac{dp}{d\rho}(\rho) = a\gamma\rho^{\gamma-1}$.

$$\begin{aligned} w(h) &= a \frac{d}{d\rho} [(\alpha + \varepsilon^2 h)^\gamma - \alpha^\gamma], \\ \frac{d}{dh} (w(h)) &= \varepsilon^2 \frac{d^2 p}{d\rho^2} (\alpha + \varepsilon^2 h). \end{aligned}$$

Alors $w(h)$ vérifie (5.5.2) en tenant compte que

$$\frac{d^2 p}{d\rho^2} (\alpha + \varepsilon^2 h) = a\gamma(\gamma - 1)(\alpha + \varepsilon^2 h)^{\gamma-2} \leq \frac{C_\Omega}{\varepsilon^2},$$

sont vérifiées.

A partir de (5.3.1), nous écrivons les problèmes suivants :

- Un problème concernant la vitesse \mathbf{u} :

$$\begin{cases} \mathbf{u}' + (1 - \omega)A\mathbf{u} + \nabla\sigma = \mathbf{F}_2 + \mathbf{div}\tau, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (5.5.3)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2(\mathbf{u}, \sigma, \tau) &= \mathbf{f} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (1 - \omega) \frac{\varepsilon^2 \sigma}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma} A\mathbf{u} + \frac{\varepsilon^2}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma} (\sigma - w(\sigma)) \nabla\sigma \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2 \sigma}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma} \mathbf{div} \tau. \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

- Un deuxième pour la densité σ :

$$\begin{cases} \sigma' + \alpha \varepsilon^{-2} \mathbf{div} \mathbf{u} = G_2, & \text{dans } Q_T, \\ \sigma(0) = \sigma_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (5.5.5)$$

avec

$$G_2(\mathbf{u}, \sigma) = -\sigma \mathbf{div} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\sigma. \quad (5.5.6)$$

- Un troisième pour le tenseur de contraintes τ :

$$\begin{cases} \text{We} \tau' + \tau = \mathbf{H}_2 + 2\omega \mathbf{D}[\mathbf{u}], & \text{dans } Q_T, \\ \tau(0) = \tau_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (5.5.7)$$

avec

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{u}, \tau) = -\text{We} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\tau - \text{We} \mathbf{g}(\nabla\mathbf{u}, \tau). \quad (5.5.8)$$

Lemme 5.5.1. *Sous les hypothèses (5.5.1) et (5.5.2), pour tout ζ , $0 < \zeta < 1$, il existe une constante c_1 indépendante de ε telle que*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma\|^2 + \frac{\text{We}}{2\omega} \|\tau\|^2 \right) + (1-\omega) \left(\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\text{div } \mathbf{u}\|^2 \right) + \frac{1}{2\omega} \|\tau\|^2 \\ & \leq \zeta \left(\|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \right) \\ & \quad + c_1 \left(\|\mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 + \|\text{div } \tau\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|^4 + \|\tau\|_1^4 \right). \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Preuve.

Multiplions (5.5.3)₁ par \mathbf{u} et intégrons sur Ω , il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 + (1-\omega) \int_{\Omega} A\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} \nabla \sigma \cdot \mathbf{u} = \int_{\Omega} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} \text{div } \tau \cdot \mathbf{u}. \quad (5.5.10)$$

Intégrons par parties et utilisons le fait que τ est un tenseur symétrique. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\text{div } \mathbf{u}\|^2, \\ \int_{\Omega} \nabla \sigma \cdot \mathbf{u} &= - \int_{\Omega} \sigma \cdot \text{div } \mathbf{u}, \\ \int_{\Omega} \text{div } \tau \cdot \mathbf{u} &= - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \tau = - \int_{\Omega} \nabla^T \mathbf{u} : \tau = - \int_{\Omega} \mathbf{D}[\mathbf{u}] : \tau. \end{aligned}$$

Alors (5.5.10) s'écrit,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 + (1-\omega) \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + (1-\omega) \|\text{div } \mathbf{u}\|^2 - \int_{\Omega} \sigma \cdot \text{div } \mathbf{u} = \int_{\Omega} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u} - \int_{\Omega} \mathbf{D}[\mathbf{u}] : \tau. \quad (5.5.11)$$

D'autre part, multiplions (5.5.5)₁ par $\varepsilon^2 \sigma / \alpha$ et intégrons sur Ω ,

$$\frac{\varepsilon^2}{2\alpha} \frac{d}{dt} \|\sigma\|^2 + \int_{\Omega} \sigma \cdot \text{div } \mathbf{u} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \int_{\Omega} G_2 \cdot \sigma. \quad (5.5.12)$$

Maintenant, multiplions (5.5.7)₁ par $\tau / (2\omega)$ et intégrons sur Ω ,

$$\frac{\text{We}}{4\omega} \frac{d}{dt} \|\tau\|^2 + \frac{1}{2\omega} \|\tau\|^2 = \frac{1}{2\omega} \int_{\Omega} \mathbf{H}_2 : \tau + \int_{\Omega} \mathbf{D}[\mathbf{u}] : \tau. \quad (5.5.13)$$

Additionnons (5.5.11), (5.5.12) et (5.5.13), nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma\|^2 + \frac{\text{We}}{2\omega} \|\tau\|^2 \right) + (1-\omega) \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + (1-\omega) \|\text{div } \mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2\omega} \|\tau\|^2 \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u} + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \int_{\Omega} G_2 \cdot \sigma + \frac{1}{2\omega} \int_{\Omega} \mathbf{H}_2 : \tau. \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

Il nous reste à estimer les trois termes à droite de l'égalité (5.5.14). Remarquons que d'après (5.5.1), nous avons

$$\frac{2}{3\alpha} \leq \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \sigma(t, x)} \leq \frac{2}{\alpha}, \quad \text{dans } \overline{Q}_T. \quad (5.5.15)$$

Alors

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u} \leq c_1^1 \left(\|\mathbf{f}\| \cdot \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2 \left[2(1-\omega) (\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2) + \|\mathbf{u}\| (\|\sigma\|_2 + \|\operatorname{div} \tau\|) \right] \right).$$

Par intégration par parties, nous trouvons

$$\int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \sigma] \cdot \sigma = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \sigma^2.$$

Alors,

$$\int_{\Omega} G_2 \cdot \sigma = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \sigma^2 \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_3 \cdot \|\sigma\|^2.$$

Calculons $\mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau) : \tau$. En effet,

$$\mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau) : \tau = \left[\frac{(1-a)}{2} (\tau \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} \cdot \tau) + \frac{(-1-a)}{2} (\nabla \mathbf{u} \cdot \tau + \tau \cdot \nabla^T \mathbf{u}) \right] : \tau.$$

Or τ est symétrique donc,

$$(\nabla \mathbf{u} \cdot \tau) : \tau = (\tau \cdot \nabla \mathbf{u}) : \tau = (\nabla^T \mathbf{u} \cdot \tau) : \tau = (\tau \cdot \nabla^T \mathbf{u}) : \tau,$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau) : \tau &= -2a \int_{\Omega} (\tau \cdot \nabla \mathbf{u}) : \tau = -2a \int_{\Omega} (\tau \cdot \tau) : \nabla \mathbf{u} \\ &= \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau] : \tau = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \tau^2. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{H}_2 : \tau &= \frac{\operatorname{We}}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \tau^2 + 2a \operatorname{We} \int_{\Omega} (\tau \cdot \tau) : \nabla \mathbf{u} \\ &\leq \frac{\operatorname{We}}{2} \|\nabla \mathbf{u}\| \cdot \|\tau\|_{\mathbf{L}^4}^2 + 2a \operatorname{We} \|\operatorname{div} \mathbf{u}\| \cdot \|\tau\|_{\mathbf{L}^4}^2. \end{aligned}$$

Par suite, il vient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma\|^2 + \frac{\operatorname{We}}{2\omega} \|\tau\|^2 \right) + (1-\omega) \left(\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \right) + \frac{1}{2\omega} \|\tau\|^2 \\ &\leq c_1^2 \left[\|\mathbf{f}\| \cdot \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + 2(1-\omega) \varepsilon^2 \|\sigma\|_2 \left(\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \|\mathbf{u}\| \left(\|\sigma\|_2^2 + \|\sigma\|_2 \cdot \|\operatorname{div} \tau\| \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\mathbf{u}\|_3 \cdot \|\sigma\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{We} \|\tau\|_{\mathbf{L}^4}^2 \left(\frac{1}{4\alpha\omega} \|\nabla \mathbf{u}\| + 2a \|\operatorname{div} \mathbf{u}\| \right) \right]. \end{aligned} \tag{5.5.16}$$

Or, $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^4} \leq c\|\cdot\|_1$ (c est une constante qui ne dépend que de Ω) alors l'estimation (5.5.16) s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma\|^2 + \frac{\text{We}}{2\omega} \|\tau\|^2 \right) + (1-\omega) \left(\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\text{div } \mathbf{u}\|^2 \right) + \frac{1}{2\omega} \|\tau\|^2 \\ & \leq \zeta \left(\|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \right) + c_1^4 \left[\|\mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + (1-\omega)^2 (\|\nabla \mathbf{u}\|^4 + \|\text{div } \mathbf{u}\|^4) \right. \\ & \quad \left. + \|\mathbf{u}\|^2 (\|\sigma\|_2^2 + \|\text{div } \tau\|^2) + \varepsilon^4 \|\sigma\|^4 + \text{We} \left(\frac{1}{8\omega} + a \right) \|\tau\|_1^4 \right], \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

où les constantes $(c_1^i)_{i=1}^4$ et ζ sont indépendantes de ε telles que $0 < \zeta < 1$ qu'on peut choisir arbitrairement. De plus, il existe une constante c_1 indépendant de ε et l'estimation (5.5.17) implique l'estimation (5.5.9). \square

Remarque 5.5.2. De (5.5.5)₁, nous obtenons

$$\varepsilon^4 \|\sigma'\|_2^2 \leq c(\varepsilon^4 \|\mathbf{u}\|_3^2 \|\sigma\|_2^2 + \|\text{div } \mathbf{u}\|_2^2), \quad (5.5.18)$$

où c est une constante qui ne dépend que de Ω .

A partir de (5.3.1), nous pouvons extraire le problème de Stokes suivant :

$$\begin{cases} (1-\omega)\Delta \mathbf{u} + \nabla \sigma = \mathbf{F}_3, \\ \text{div } \mathbf{u} = G_3, \quad \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{u} = 0, \quad \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (5.5.19)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_3 &= \mathbf{f} - \frac{1-\omega}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma} \nabla \text{div } \mathbf{u} + (1-\omega) \frac{\varepsilon^2 \sigma}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma} \text{div } \tau \\ & \quad + \frac{\varepsilon^2}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma} (\sigma - w(\sigma)) \nabla \sigma - \mathbf{u}' - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (5.5.20)$$

$$G_3 = -\frac{\varepsilon^2}{\alpha} (\sigma' + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \sigma + \sigma \text{div } \mathbf{u}). \quad (5.5.21)$$

Lemme 5.5.3. Sous les hypothèses (5.5.1) et (5.5.2), il existe deux constantes c_2^1 , c_2^2 et c_2 indépendantes de ε telles que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\sigma\|_2^2 &\leq c_2^1 (\|\mathbf{f}\|_1^2 + \|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\text{div } \mathbf{u}\|_2^2 \\ & \quad + \|\text{div } \tau\|_1^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \varepsilon^4 \|\mathbf{u}\|_3^2 \cdot \|\sigma\|_2^2), \end{aligned} \quad (5.5.22)$$

et

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 &\leq c_2 (\|\mathbf{f}\|_1^2 + \|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\text{div } \mathbf{u}\|_2^2 \\ & \quad + \|\text{div } \tau\|_1^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \varepsilon^4 \|\mathbf{u}\|_3^2 \cdot \|\sigma\|_2^2), \end{aligned} \quad (5.5.23)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\sigma\|_1^2 &\leq c_2^2 (\|\mathbf{f}\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\text{div } \mathbf{u}\|_1^2 \\ & \quad + \|\text{div } \tau\|^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \varepsilon^4 \|\mathbf{u}\|_2^2 \cdot \|\sigma\|_1^2). \end{aligned} \quad (5.5.24)$$

Preuve.

Les démonstrations de (5.5.22) et (5.5.24) reposent sur un résultat pour le problème de Stokes dans ([96], proposition 2.2, page 33). Pour éliminer le terme $\varepsilon^4 \|\sigma'\|_2^2$, nous utilisons (5.5.18). Pour (5.5.23), il suffit d'utiliser $0 < \varepsilon \leq 1$. Notons que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes selon l'inégalité du Poincaré.

□

Nous remarquons qu'il faut estimer le terme $\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_2^2$ qui apparaît dans le lemme 5.5.3. Pour cela, nous nous inspirons de la méthode utilisée dans [97] en estimant $\operatorname{div} \mathbf{u}$, à l'intérieur de Ω puis nous cherchons les estimations convenables pour ses dérivées normales et tangentielles sur $\partial\Omega$.

Lemme 5.5.4. *Sous les hypothèses (5.5.1) et (5.5.2), il existe une constante c_3 indépendante de ε telle que*

$$\begin{aligned} \frac{(1-\omega)}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \right) + \frac{(1-\omega)^2}{4} \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|^2 \\ \leq c_3 \left(\|\mathbf{f}\|_1^2 + \|\tau\|_2^2 + \|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \varepsilon^2 \|\sigma\|^2 \cdot \|\tau\|_2^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_2^2 \right. \\ \left. + \|\mathbf{u}\|_3^2 \left(\|\mathbf{u}\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (5.5.25)$$

Preuve.

Multiplions (5.5.3)₁ par $(1-\omega)\mathbf{A}\mathbf{u}$ et intégrons sur Ω , nous obtenons l'égalité suivante,

$$\begin{aligned} (1-\omega) \int_{\Omega} \mathbf{u}' \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} + (1-\omega)^2 \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|^2 &= -(1-\omega) \int_{\Omega} \nabla \sigma \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} + (1-\omega) \int_{\Omega} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} \\ &\quad + (1-\omega) \int_{\Omega} \operatorname{div} \tau \cdot \mathbf{A}\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} (1-\omega) \left| \int_{\Omega} \nabla \sigma \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} \right| &\leq c_3^1 \left(\|\sigma\|_1^2 + \frac{(1-\omega)^2}{4} \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|^2 \right), \\ (1-\omega) \left| \int_{\Omega} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} \right| &\leq c_3^2 \left(\|\mathbf{F}_2\|^2 + \frac{(1-\omega)^2}{4} \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|^2 \right), \\ (1-\omega) \left| \int_{\Omega} \operatorname{div} \tau \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} \right| &\leq c_3^3 \left(\|\tau\|_1^2 + \frac{(1-\omega)^2}{4} \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|^2 \right). \end{aligned}$$

Donc, il vient

$$\frac{(1-\omega)}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \right) + \frac{(1-\omega)^2}{4} \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|^2 \leq c_3^4 \left(\|\sigma\|_1^2 + \|\tau\|_1^2 + \|\mathbf{F}_2\|^2 \right).$$

Utilisons que

$$\|\mathbf{F}_2\|^2 \leq c_3^5 \left[\|\mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|^2 \left(\varepsilon^2 \|\sigma\|_1^2 + \|\tau\|_1^2 \right) \right],$$

nous pouvons déduire (5.5.25). Notons que les constantes $(c_3^i)_{i=1}^5$ ne dépendent que de Ω .

□

Lemme 5.5.5. *Sous les hypothèses (5.5.1) et (5.5.2), il existe une constante c_4 indépendante de ε telle que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{(1-\omega)}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \right) + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma'\|^2 + \frac{\operatorname{We}}{4\omega} \|\tau'\|^2 \\ \leq c_4 \left[\|\mathbf{f}'\|^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \|\tau\|_2^2 + \|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_2^2 \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \|\tau'\|^2 \cdot \|\sigma\|_2^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \|\mathbf{u}\|_3^2 \left(\|\mathbf{u}'\|^2 + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 \right) \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \left(\|\mathbf{u}'\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 \right) + \|\tau\|_2^2 \left(\varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 + \|\tau'\|^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.5.26)$$

Preuve.

Prenons la dérivée en temps des équations (5.5.3)₁ et (5.5.3)₂, il vient

$$\mathbf{u}'' + (1-\omega)\mathbf{A}\mathbf{u}' + \nabla \sigma' = \mathbf{F}'_2 + \operatorname{div} \tau', \quad \text{dans } \mathbf{Q}_T, \quad (5.5.27)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_2 = & \mathbf{f}' - (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + \frac{\varepsilon^2}{(\alpha + \varepsilon^2 \sigma)^2} \left((1-\omega) \sigma' \cdot \mathbf{A} \mathbf{u} + \sigma' \cdot \nabla \sigma \right. \\ & \left. + \varepsilon^2 \sigma' \cdot w(\sigma) \cdot \nabla \sigma - \sigma' \cdot \operatorname{div} \tau \right) + \frac{\varepsilon^2}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma} \left((1-\omega) \sigma \cdot \mathbf{A} \mathbf{u}' + \sigma \cdot \nabla \sigma' \right. \\ & \left. - (w(\sigma))' \cdot \nabla \sigma - w(\sigma) \cdot \nabla \sigma' - \sigma \cdot \operatorname{div} \tau' \right). \end{aligned} \quad (5.5.28)$$

Multiplions (5.5.27) par \mathbf{u} puis intégrons sur Ω . Intégrons par parties, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{(1-\omega)}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \right) - \int_{\Omega} \sigma' \cdot \operatorname{div} \mathbf{u} = \|\mathbf{u}'\|^2 \\ + \int_{\Omega} \mathbf{F}'_2 \cdot \mathbf{u} - \int_{\Omega} \tau' : \mathbf{D}[\mathbf{u}]. \end{aligned} \quad (5.5.29)$$

Maintenant, multiplions (5.5.5)₁ par $\varepsilon^2 \sigma' / \alpha$ et (5.5.7)₁ par $\tau' / 2\omega$. Intégrons sur Ω , nous avons les deux équations suivantes,

$$\frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma'\|^2 + \int_{\Omega} \sigma' \cdot \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \int_{\Omega} G_2 \cdot \sigma', \quad (5.5.30)$$

et

$$\frac{\operatorname{We}}{2\omega} \|\tau'\|^2 = \frac{1}{2\omega} \int_{\Omega} \mathbf{H}_2 : \tau' - \frac{1}{2\omega} \int_{\Omega} \tau : \tau' + \int_{\Omega} \tau' : \mathbf{D}[\mathbf{u}]. \quad (5.5.31)$$

Additionnons (5.5.29), (5.5.30) et (5.5.31), ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{(1-\omega)}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \right) + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma'\|^2 + \frac{\operatorname{We}}{2\omega} \|\tau'\|^2 \\ \leq \frac{\operatorname{We}}{4\omega} \|\tau'\|^2 + c_4^1 \left(\|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \|\tau\|_2^2 + \int_{\Omega} \mathbf{F}'_2 \cdot \mathbf{u} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} G_2 \cdot \sigma' + \frac{1}{2\omega} \int_{\Omega} \mathbf{H}_2 : \tau' \right). \end{aligned} \quad (5.5.32)$$

Nous avons

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}'_2 \cdot \mathbf{u} \leq c_4^2 \left[\|\mathbf{f}'\|^2 + \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \varepsilon^2 \|\tau\|_2^2 \cdot \|\sigma'\|^2 + \varepsilon^2 \|\tau'\|^2 \cdot \|\sigma\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_3^2 (\|\mathbf{u}'\|^2 + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2) + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 (\|\mathbf{u}'\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2) \right], \quad (5.5.33)$$

$$\int_{\Omega} G_2 \cdot \sigma' \leq c_4^3 \left[\|\mathbf{u}\|_3^2 \cdot \|\sigma'\|^2 + \|\sigma\|_2^2 \right], \quad (5.5.34)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{H}_2 : \tau' \leq c_4^4 \left[\|\tau\|_2^2 \cdot \|\tau'\|^2 + \|\mathbf{u}\|_3^2 \right], \quad (5.5.35)$$

où $(c_4^i)_{i=1}^4$ sont des constantes indépendantes de Ω . Utilisons le lemme 5.5.3 : l'estimation (5.5.26) est obtenue à partir de (5.5.32), (5.5.33), (5.5.34) et (5.5.35). \square

Lemme 5.5.6. *Sous les hypothèses (5.5.1) et (5.5.2), pour tout δ , $0 < \delta < 1$, il existe une constante c_5 indépendante de ε telle que*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}'\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma'\|^2 + \frac{\text{We}}{2\omega} \|\tau'\|^2 \right) + (1 - \omega) \left(\frac{1}{4} \|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \|\text{div } \mathbf{u}'\|^2 \right) \\ & + \frac{1}{2\omega} \|\tau'\|^2 \leq \delta (\varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_3^2) \\ & + c_5 \left[\|\mathbf{f}'\|^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \varepsilon^4 \|\sigma'\|^4 + \|\tau'\|^4 + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1^2 \right. \\ & + \|\tau'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\mathbf{u}\|_3^2 (\|\mathbf{u}'\|^2 + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2) \\ & \left. + \|\tau\|_2^2 (\varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 + \|\tau'\|^2) + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 (\varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 + \|\mathbf{u}'\|_1^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.5.36)$$

Preuve.

Dérivons l'équation (5.5.5)₁ par rapport au temps,

$$\sigma'' + \varepsilon^{-2} \alpha \text{div } \mathbf{u}' = G'_2, \quad \text{dans } Q_T, \quad (5.5.37)$$

où

$$G'_2 = -\sigma' \text{div } \mathbf{u} - \sigma \text{div } \mathbf{u}' - (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \sigma - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \sigma'.$$

La dérivée en temps de l'équation (5.5.7)₁ est

$$\text{We } \tau'' + \tau' = \mathbf{H}'_2 + 2\omega \mathbf{D}[\mathbf{u}'], \quad \text{dans } Q_T, \quad (5.5.38)$$

avec

$$\mathbf{H}'_2 = -\text{We } (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \tau - \text{We } (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau' - \text{We } \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}', \tau) - \text{We } \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, \tau').$$

Multiplions (5.5.27) par \mathbf{u}' et intégrons sur Ω ,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}'\|^2 + (1 - \omega) \int_{\Omega} A \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' + \int_{\Omega} \nabla \sigma' \cdot \mathbf{u}' = \int_{\Omega} \mathbf{F}'_2 \cdot \mathbf{u}' + \int_{\Omega} \text{div } \tau' \cdot \mathbf{u}'. \quad (5.5.39)$$

Intégrons par parties, alors (5.5.39) s'écrit,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}'\|^2 + (1-\omega) \|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + (1-\omega) \|\operatorname{div} \mathbf{u}'\|^2 - \int_{\Omega} \sigma' \cdot \operatorname{div} \mathbf{u}' = \int_{\Omega} \mathbf{F}'_2 \cdot \mathbf{u}' - \int_{\Omega} \mathbf{D}[\mathbf{u}'] : \tau'. \quad (5.5.40)$$

D'autre part, multiplions (5.5.37) par $\varepsilon^2 \sigma' / \alpha$ et intégrons sur Ω ,

$$\frac{\varepsilon^2}{2\alpha} \frac{d}{dt} \|\sigma'\|^2 + \int_{\Omega} \sigma' \cdot \operatorname{div} \mathbf{u}' = \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \int_{\Omega} G'_2 \cdot \sigma'. \quad (5.5.41)$$

Maintenant, multiplions (5.5.38) par $\tau' / 2\omega$ et intégrons sur Ω ,

$$\frac{\operatorname{We}}{4\omega} \frac{d}{dt} \|\tau'\|^2 + \frac{1}{2\omega} \|\tau'\|^2 = \frac{1}{2\omega} \int_{\Omega} \mathbf{H}'_2 : \tau' + \int_{\Omega} \mathbf{D}[\mathbf{u}'] : \tau'. \quad (5.5.42)$$

Additions (5.5.40), (5.5.41) et (5.5.42), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}'\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma'\|^2 + \frac{\operatorname{We}}{2\omega} \|\tau'\|^2 \right) + (1-\omega) [\|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}'\|^2] + \frac{1}{2\omega} \|\tau'\|^2 \\ = \int_{\Omega} \mathbf{F}'_2 \cdot \mathbf{u}' + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \int_{\Omega} G'_2 \cdot \sigma' + \frac{1}{2\omega} \int_{\Omega} \mathbf{H}'_2 : \tau'. \end{aligned} \quad (5.5.43)$$

Tout d'abord, nous estimons de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mathbf{F}'_2 \cdot \mathbf{u}' \right| &\leq c_5^1 (\|\mathbf{f}'\| \cdot \|\mathbf{u}'\| + \|\mathbf{u}'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_2 + 4\varepsilon^2 (1-\omega) \|\sigma'\| \cdot \|\mathbf{u}\|_3 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1 \\ &\quad + 4\varepsilon^2 \|\sigma'\| \cdot \|\mathbf{u}'\|_1 \cdot \|\sigma\|_2 + 4\varepsilon^4 \|\sigma'\| \cdot \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1 + 2\varepsilon^2 \|\sigma'\| \cdot \|\tau\|_2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1 \\ &\quad + 2\varepsilon^2 \alpha (1-\omega) \|\mathbf{u}'\|_1^2 \cdot \|\sigma\|_2 + 4\varepsilon^2 \|\sigma\|_2 \cdot \|\sigma'\| \cdot \|\mathbf{u}'\|_1 \\ &\quad + 2\varepsilon^2 \|\sigma'\| \cdot \|\sigma\|_2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1 + 2\varepsilon^2 \|\sigma\|_2 \cdot \|\tau'\| \cdot \|\mathbf{u}'\|_1). \end{aligned}$$

Soit $\delta > 0$. Nous pouvons trouver une constante c_5^2 indépendante de ε mais qui dépend de δ telle que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mathbf{F}'_2 \cdot \mathbf{u}' \right| &\leq \frac{1-\omega}{8} \|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \delta \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 + c_5^2 (\|\mathbf{f}'\|^2 + \|\mathbf{u}'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 \\ &\quad + \varepsilon^2 \|\tau\|_2^2 \cdot \|\sigma'\|^2 + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\tau'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 \\ &\quad + \varepsilon^4 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\sigma\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\mathbf{u}'\|_1 \cdot \|\sigma\|_2^2). \end{aligned} \quad (5.5.44)$$

Notons qu'on peut toujours utiliser le fait que $\varepsilon \leq 1$.

Par intégration par parties, nous trouvons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \sigma'] \cdot \sigma' \right| &= \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \sigma'^2 \right| \leq c_5^3 \|\mathbf{u}\|_3 \cdot \|\sigma'\|^2, \\ \left| \int_{\Omega} [(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \sigma] \cdot \sigma' \right| &\leq c_5^4 \|\nabla \mathbf{u}'\| \cdot \|\sigma\|_2 \cdot \|\sigma'\|, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \left| \int_{\Omega} G'_2 \cdot \sigma' \right| &\leq c_5^5 (\varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_3 \cdot \|\sigma'\|^2 + \varepsilon^2 \|\nabla \mathbf{u}'\| \cdot \|\sigma\|_2 \cdot \|\sigma'\|), \\ &\leq \frac{1-\omega}{4} \|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \frac{\delta}{2} \|\mathbf{u}\|_3^2 + c_5^6 (\varepsilon^4 \|\sigma'\|^4 + \varepsilon^4 \|\sigma'\|^2 \|\sigma\|_2^2). \end{aligned} \quad (5.5.45)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\omega} \int_{\Omega} \mathbf{H}'_2 : \tau' &= \frac{\text{We}}{2\omega} \int_{\Omega} (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \tau : \tau' + \frac{\text{We}}{4\omega} \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} \cdot \tau'^2 \\ &\quad + \frac{a\text{We}}{\omega} \int_{\Omega} (\tau' \cdot \tau) : \nabla \mathbf{u}' + \frac{a\text{We}}{\omega} \int_{\Omega} (\tau' \cdot \tau') : \nabla \mathbf{u} \end{aligned}$$

où les constantes $(c_5^i)_{i=1}^7$ sont indépendantes de ε .

Il existe une constante c_5^8 indépendante de ε telle que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\omega} \int_{\Omega} \mathbf{H}'_2 : \tau' \right| &\leq c_5^7 \left(\|\tau\|_2 \cdot \|\nabla \mathbf{u}'\| \cdot \|\tau'\| + \|\mathbf{u}\|_3 \cdot \|\tau'\|^2 + \|\mathbf{u}\|_3^2 \right), \\ &\leq \frac{1-\omega}{4} \|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \frac{\delta}{2} \|\mathbf{u}\|_3^2 + c_5^8 \left(\|\tau\|_2^2 \cdot \|\tau'\|^2 + \|\tau'\|^4 \right). \end{aligned} \quad (5.5.46)$$

Notons que δ est une constante entre 0 et 1 à choisir convenablement selon le besoin. En utilisant le lemme 5.5.3, l'estimation (5.5.36) découle de (5.5.43), (5.5.44), (5.5.45) et (5.5.46). \square

Lemme 5.5.7. *Sous les hypothèses (5.5.1) et (5.5.2), il existe une constante c_6 indépendante de ε telle que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\alpha} \frac{d}{dt} \left(\varepsilon^2 \|\nabla \sigma\|_1^2 \right) \\ \leq c_6 \left(\|\mathbf{f}\|_1^2 + \|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\text{div } \tau\|_1^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \|\text{div } \mathbf{u}\|_2^2 \right). \end{aligned} \quad (5.5.47)$$

Preuve.

Appliquons ∇ sur l'équation (5.5.5)₁, il vient

$$\nabla \sigma' + \varepsilon^{-2} \alpha \nabla \text{div } \mathbf{u} = \nabla G_2, \quad \text{dans } Q_T, \quad (5.5.48)$$

avec

$$\nabla G_2 = -\nabla \sigma \cdot \text{div } \mathbf{u} - \sigma \cdot \nabla \text{div } \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \sigma - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \sigma. \quad (5.5.49)$$

Multiplions (5.5.48) par $\varepsilon^2 \nabla \sigma / \alpha$ et intégrons sur Ω . Puis intégrons par parties le terme $\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \sigma \cdot \nabla \sigma$,

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \sigma \cdot \nabla \sigma = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} \cdot (\nabla \sigma)^2, \quad (5.5.50)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\alpha} \frac{d}{dt} \left(\varepsilon^2 \|\nabla \sigma\|^2 \right) &\leq \int_{\Omega} |\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}| \cdot |\nabla \sigma| + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \int_{\Omega} |\sigma| |\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}| |\nabla \sigma| + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{u}| \cdot |\nabla \sigma|^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}| \cdot |\nabla \sigma|^2 \\ &\leq c_6^1 \left(\|\nabla \sigma\| \cdot \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_1 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \|\mathbf{u}\|_3 \right). \end{aligned} \quad (5.5.51)$$

Appliquons de nouveau ∇ sur (5.5.48), puis multiplions par $\mathbf{D}^2 \sigma$ et intégrons sur Ω . Utilisons le même démarche que précédemment, nous avons

$$\frac{1}{2\alpha} \frac{d}{dt} \left(\varepsilon^2 \|\mathbf{D}^2 \sigma\|^2 \right) \leq c_6^2 \left(\|\nabla \sigma\|_1 \cdot \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \|\mathbf{u}\|_3 \right). \quad (5.5.52)$$

Utilisons le lemme 5.5.3 et les estimations (5.5.51) et (5.5.52), nous trouvons (5.5.47). \square

Lemme 5.5.8. *Supposons que les hypothèses (5.5.1) et (5.5.2) sont vérifiées. Il existe des constantes strictement positives c_7 , γ_1 et ω_0^1 ($0 < \omega_0^1 < 1$), indépendantes de ε telles que si $\omega \leq \omega_0^1$ alors*

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{We}}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\tau\|_2^2 \right) + \gamma_1 \|\tau\|_2^2 \\ \leq 3\omega^2 c_2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_2^2 + c_7 \left(\|\mathbf{f}\|_1^2 + \|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \|\tau\|_1^4 \right). \end{aligned} \quad (5.5.53)$$

Preuve.

Multiplions scalairement l'équation (5.5.7)₁ par τ dans $\mathbf{H}^2(\Omega)$ et intégrons sur Ω . Il existe une constante c_7^1 dépendant seulement de Ω telle que

$$\frac{\operatorname{We}}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\tau\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \|\tau\|_2^2 \leq 3\omega^2 \|\mathbf{u}\|_3^2 + c_7^1 \|\tau\|_2^4 \quad (5.5.54)$$

Utilisons le lemme 5.5.3,

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{We}}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\tau\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \|\tau\|_2^2 &\leq c_7^1 \|\tau\|_2^4 \\ &\quad + 3\omega^2 c_2 \left(\|\mathbf{f}\|_1^2 + \|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_2^2 + \|\operatorname{div} \tau\|_1^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 \right). \end{aligned} \quad (5.5.55)$$

Notons $c_7^2 = 3\omega^2 c_2$ et remarquons que cette constante est indépendante de ε . Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{We}}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\tau\|_2^2 \right) + \left(\frac{1}{2} - 3\omega^2 c_2 \right) \|\tau\|_2^2 &\leq c_7^1 \|\tau\|_2^4 + 3\omega^2 c_2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_2^2 \\ &\quad + c_7^2 \left(\|\mathbf{f}\|_1^2 + \|\nabla \mathbf{u}'\|^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 \right). \end{aligned} \quad (5.5.56)$$

Pour que cette estimation soit utilisable, il faut choisir les valeurs de ω telles que le coefficient de $\|\tau\|_2^2$ soit positif. Pour cela, choisissons ω_0^1 de la manière suivante

$$\omega_0^1 < (\sqrt{6c_2})^{-1}, \quad (5.5.57)$$

alors,

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} - 3\omega^2 c_2 > 0, \quad \text{pour } 0 < \omega \leq \omega_0^1. \quad (5.5.58)$$

□

Définissons les fonctions à valeurs réelles positives $t \longrightarrow z(t)$ et $t \longrightarrow w(t)$ par

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} \|\mathbf{u} + \mathbf{u}'\|^2 + \left((1 - \omega) + \frac{1}{2} \right) \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + (1 - \omega) \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2\alpha} \|\sigma\|_2^2 + \frac{\varepsilon^2}{2\alpha} \|\sigma'\|^2 + \frac{\operatorname{We}}{2} \|\tau\|_2^2 + \frac{\operatorname{We}}{4\omega} \|\tau'\|^2, \end{aligned} \quad (5.5.59)$$

$$w = \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 + \|\tau\|_2^2 + \|\tau'\|^2. \quad (5.5.60)$$

Dorénavant, la constante ω est fixée dans l'intervalle $]0, \omega_0^1]$ où ω_0^1 a été définie, par (5.5.57), dans le lemme 5.5.8.

Lemme 5.5.9. *Pour tout $\omega \in]0, \omega_0^1]$, il existe quatre constantes strictement positives $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ et \mathbf{a}_4 indépendantes de ε telles que*

$$z' + \mathbf{a}_1 w \leq \mathbf{a}_2 w (z + z^2) + \mathbf{a}_3 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_2^2 + \mathbf{a}_4 \mathfrak{Z}, \quad (5.5.61)$$

avec

$$\mathfrak{Z} = \|\mathbf{f}\|_1^2 + \|\mathbf{f}'\|^2. \quad (5.5.62)$$

Il nous reste à estimer le terme $\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_2^2$ qui apparait dans plusieurs estimations. Nous commençons par estimer $\operatorname{div} \mathbf{u}$ à l'intérieur de Ω .

5.6 Estimation de $\operatorname{div} \mathbf{u}$ à l'intérieur de Ω .

Lemme 5.6.1. *Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$. Sous les hypothèses (5.5.1) et (5.5.2), pour tout $\delta, 0 < \delta < 1$, il existe une constante c_8 indépendante de ε telle que*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\|\chi \nabla \mathbf{u}\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\chi \nabla \sigma\|^2 \right) + (1 - \omega) \|\chi \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \\ &\leq \frac{d}{dt} \left(\|\chi \nabla \mathbf{u}\|^2 + \varepsilon^2 \|\chi \nabla \sigma\|^2 \right) + (1 - \omega) \|\chi D^2 \mathbf{u}\|^2 + (1 - \omega) \|\chi \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \\ &\leq \delta \left(\|\mathbf{u}\|_3^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\sigma\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\sigma\|_2^2 + \|\tau\|_2^2 \right) \\ &\quad + c_8 \left(\|\mathbf{u}\|_1^2 + \|\mathbf{f}\|^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\tau\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 \right). \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

Preuve.

Appliquons ∇ à l'équation (5.5.3)₁,

$$\nabla \mathbf{u}' + (1 - \omega) \nabla (\mathbf{A}\mathbf{u}) + D^2\sigma = \nabla \mathbf{F}_2 + \nabla \mathbf{div} \tau, \quad \text{dans } Q_T, \quad (5.6.2)$$

avec

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{F}_2 &= \nabla \mathbf{f} - \nabla ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{(\alpha + \varepsilon^2 \sigma)^2} \left((1 - \omega) \nabla \sigma \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} + (\nabla \sigma)^2 - \varepsilon^2 w(\sigma) \cdot (\nabla \sigma)^2 - \nabla \sigma \cdot \mathbf{div} \tau \right) \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma} \left((1 - \omega) \sigma \cdot \nabla (\mathbf{A}\mathbf{u}) + \sigma \cdot D^2\sigma + \nabla (w(\sigma)) \cdot \nabla \sigma + w(\sigma) \cdot D^2\sigma - \sigma \cdot \nabla \mathbf{div} \tau \right). \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

Multiplions l'équation obtenue (5.6.2) par $\chi^2 \nabla \mathbf{u}$ et intégrons sur Ω . Intégrons par parties, il vient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\chi \nabla \mathbf{u}\|^2 + (1 - \omega) (\|\chi D^2 \mathbf{u}\|^2 + \|\chi \nabla \mathbf{div} \mathbf{u}\|^2) - \int_{\Omega} \chi^2 \nabla \sigma \cdot \Delta \mathbf{u} \\ &= \int_{\Omega} \chi^2 \nabla \mathbf{F}_2 : \nabla \mathbf{u} + \int_{\Omega} \chi^2 \cdot \nabla \mathbf{div} \tau : \nabla \mathbf{u} - 2 \int_{\Omega} \chi \cdot \nabla \chi \cdot D^2 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \chi \cdot \nabla \chi \cdot \nabla \mathbf{div} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2 \int_{\Omega} \chi \cdot \nabla \chi \cdot \nabla \sigma \cdot \nabla \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

Appliquons ∇ à l'équation (5.5.5)₁, il vient

$$\nabla \sigma' + \varepsilon^{-2} \alpha \Delta \mathbf{u} = \nabla G_2, \quad \text{dans } Q_T, \quad (5.6.5)$$

avec

$$\nabla G_2 = -\nabla \sigma \cdot \mathbf{div} \mathbf{u} - \sigma \cdot \nabla \mathbf{div} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \sigma - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \sigma. \quad (5.6.6)$$

Multiplions (5.6.5) par $\chi^2 \varepsilon^2 \nabla \sigma / \alpha$ et intégrons sur Ω .

$$\frac{\varepsilon^2}{2\alpha} \frac{d}{dt} \|\chi \nabla \sigma\|^2 + \int_{\Omega} \chi^2 \nabla \sigma \cdot \Delta \mathbf{u} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \int_{\Omega} \chi^2 \nabla G_2 \cdot \nabla \sigma. \quad (5.6.7)$$

Additions (5.6.4), (5.6.7), nous avons

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\chi \nabla \mathbf{u}\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\chi \nabla \sigma\|^2 \right) + (1 - \omega) \|\chi D^2 \mathbf{u}\|^2 + (1 - \omega) \|\chi \nabla \mathbf{div} \mathbf{u}\|^2 \\ &\leq \left| \int_{\Omega} \chi^2 \nabla \mathbf{F}_2 : \nabla \mathbf{u} \right| + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \left| \int_{\Omega} \chi^2 \nabla G_2 \cdot \nabla \sigma \right| + \int_{\Omega} \chi^2 |\nabla \mathbf{div} \tau| \cdot |\nabla \mathbf{u}| \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} |\nabla \chi| \cdot |\chi D^2 \mathbf{u}| \cdot |\nabla \mathbf{u}| + 2 \int_{\Omega} |\nabla \chi| \cdot |\chi \nabla \mathbf{div} \mathbf{u}| \cdot |\nabla \mathbf{u}| \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} |\chi| \cdot |\nabla \chi| \cdot |\nabla \sigma| \cdot |\nabla \mathbf{u}|. \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

Alors,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\chi \nabla \mathbf{u}\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\chi \nabla \sigma\|^2 \right) + \frac{(1-\omega)}{2} \|\chi D^2 \mathbf{u}\|^2 + \frac{(1-\omega)}{2} \|\chi \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \\ & \leq c_8^1 \|\mathbf{u}\|_1^2 + \frac{\delta}{4} \|\nabla \sigma\|^2 + \frac{\delta}{2} \|\nabla \operatorname{div} \tau\|^2 + \left| \int_{\Omega} \chi^2 \nabla \mathbf{F}_2 : \nabla \mathbf{u} \right| + \varepsilon^2 \left| \int_{\Omega} \chi^2 \nabla G_2 \cdot \nabla \sigma \right|. \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

Après calcul, nous obtenons les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \chi^2 \nabla \mathbf{F}_2 : \nabla \mathbf{u} \right| & \leq \frac{\delta}{4} (\|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2) + c_8^2 (\|\mathbf{f}\|^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 \\ & \quad + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\tau\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2), \end{aligned} \quad (5.6.10)$$

$$\varepsilon^2 \left| \int_{\Omega} \chi^2 \nabla G_2 \cdot \nabla \sigma \right| \leq \frac{\delta}{4} \|\mathbf{u}\|_3^2 + c_8^3 \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4. \quad (5.6.11)$$

L'estimation (5.6.1) découle de (5.6.9), (5.6.10) et (5.6.11). \square

Lemme 5.6.2. *Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$. Sous les hypothèses (5.5.1) et (5.5.2), pour tout δ , $0 < \delta < 1$, il existe une constante c_8 indépendante de ε telle que*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|\chi D^2 \mathbf{u}\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\chi D^2 \sigma\|^2 \right) + (1-\omega) \|\chi D^3 \mathbf{u}\|^2 + (1-\omega) \|\chi D^2 \operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \\ & \leq \delta \left(\|\mathbf{u}\|_3^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\sigma\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\sigma\|_2^2 + \|\tau\|_2^2 \right) + \frac{1}{2(1-\omega)} \|\tau\|_2^2 \\ & \quad + c_9 \left(\|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\tau\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 \right). \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

Preuve.

Nous utilisons un raisonnement analogue à celui fait dans le lemme 5.6.1 mais en dérivant deux fois par rapport aux variables d'espace. Appliquons ∇ à l'équation (5.6.2), puis multiplions l'équation obtenue par $\chi^2 \mathbf{D}^2 \mathbf{u}$ et intégrons sur Ω .

De la même manière, appliquons ∇ à l'équation (5.6.5), puis multiplions l'équation obtenue par $\varepsilon^2 \chi^2 \mathbf{D}^2 \sigma$ et intégrons sur Ω .

Nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\chi D^2 \mathbf{u}\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\chi D^2 \sigma\|^2 \right) + (1-\omega) \left(\|\chi D^3 \mathbf{u}\|^2 + \|\chi D^2 \operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \right) \\ & \leq \left| \int_{\Omega} \chi^2 \cdot D^2 \mathbf{F}_2 : D^2 \mathbf{u} \right| + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \left| \int_{\Omega} \chi^2 \cdot D^2 G_2 \cdot D^2 \sigma \right| + 2 \int_{\Omega} |\chi| \cdot |\nabla \chi| \cdot |D^2 \sigma| \cdot |D^2 \mathbf{u}| \\ & \quad + 2 \int_{\Omega} |\nabla \chi| \cdot |\chi D^3 \mathbf{u}| \cdot |D^2 \mathbf{u}| + 2 \int_{\Omega} |\nabla \chi| \cdot |\chi D^2 \operatorname{div} \mathbf{u}| \cdot |D^2 \mathbf{u}| \\ & \quad + \int_{\Omega} |\chi| \cdot |\nabla \operatorname{div} \tau| \cdot |\chi D^3 \mathbf{u}| + 2 \int_{\Omega} |\chi| \cdot |\nabla \chi| \cdot |\nabla \operatorname{div} \tau| \cdot |D^2 \mathbf{u}|. \end{aligned} \quad (5.6.13)$$

Alors,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\chi D^2 \mathbf{u}\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\chi D^2 \sigma\|^2 \right) + \frac{(1-\omega)}{2} \left(\|\chi D^3 \mathbf{u}\|^2 + \|\chi D^2 \operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \right) \\
& \leq c_9^1 \|\mathbf{u}\|_2^2 + \frac{\delta}{4} \|D^2 \sigma\|^2 + \frac{\delta}{2} \|\nabla \operatorname{div} \tau\|^2 + \frac{1}{(1-\omega)} \|\nabla \operatorname{div} \tau\|^2 + \frac{\delta}{2} \|\mathbf{u}\|_3^2 + \frac{\delta}{4} \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \\
& + c_9^2 \left(\|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\tau\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 \right).
\end{aligned} \tag{5.6.14}$$

□

5.7 Estimation de $\operatorname{div} \mathbf{u}$ sur $\partial\Omega$.

Soit $\{\mathcal{O}_j\}_{j=1}^N$ un nombre fini d'ouverts de \mathbb{R}^3 tel que

$$\bigcup_{j=1}^N \mathcal{O}_j \supset \partial\Omega.$$

Dans la suite, nous omettrons l'indice j et nous noterons \mathcal{O}_j par \mathcal{O} .

Nous choisissons une paramétrisation locale conforme $(\psi, \varphi) \rightarrow \lambda(\psi, \varphi)$ de la surface $\mathcal{O} \cap \partial\Omega$, c'est-à-dire une paramétrisation qui conserve les angles. Cette paramétrisation, appelée aussi un système de coordonnées isothermes [86], a les propriétés suivantes

$$\lambda_\psi \cdot \lambda_\varphi = 0, \quad |\lambda_\psi| = |\lambda_\varphi|,$$

où $\lambda_\psi \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial \psi}$, $\lambda_\varphi \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}$.

Soient $M(x)$ un point quelconque de $\mathcal{O} \cap \Omega$, P sa projection orthogonale sur la surface $\mathcal{O} \cap \partial\Omega$ de coordonnées locales $(\lambda(\psi, \varphi), 0)$, et soit $r = -\left| \overrightarrow{PM} \right|$.

Nous écrivons x de la manière suivante

$$x = \Lambda(\psi, \varphi, r) = \lambda(\psi, \varphi) + r \mathbf{n}(\lambda(\psi, \varphi)), \tag{5.7.1}$$

où $\mathbf{n}(\lambda(\psi, \varphi))$ est le vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω .

Utilisons les propriétés des coordonnées isothermes : nous pouvons définir un trièdre ortho-normé $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ par les relations

$$\mathbf{e}_1 \equiv \frac{\lambda_\psi}{|\lambda_\psi|}, \quad \mathbf{e}_2 \equiv \frac{\lambda_\varphi}{|\lambda_\varphi|}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{n} \circ \lambda \equiv \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2. \tag{5.7.2}$$

De plus, il existe des fonctions régulières $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ dépendant de (ψ, φ) telles que

$$(\mathbf{e}_3)_\psi = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \beta_1 \mathbf{e}_2, \quad (\mathbf{e}_3)_\varphi = \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2. \tag{5.7.3}$$

Soit $x = (x^1, x^2, x^3)$. Calculons ∂_{x^i} en fonction de ∂_ψ , ∂_φ et ∂_r pour réécrire les problèmes (5.5.3), (5.5.5) et (5.5.7) dans le nouveau système de coordonnées locales. Pour cela, calculons $(\text{Jac } \Lambda)^{-1}$, où $\text{Jac } \Lambda$ désigne la matrice jacobienne de l'application Λ .

D'une part,

$$\begin{aligned}\Lambda_\psi &= \lambda_\psi + (\mathbf{e}_3)_\psi r = (|\lambda_\psi| + r\alpha_1) \mathbf{e}_1 + r\beta_1 \mathbf{e}_2, \\ \Lambda_\varphi &= \lambda_\varphi + (\mathbf{e}_3)_\varphi r = r\alpha_2 \mathbf{e}_1 + (|\lambda_\varphi| + r\beta_2) \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathbf{J} \equiv \det(\text{Jac } \Lambda) &= (\Lambda_\psi \wedge \Lambda_\varphi) \cdot \mathbf{e}_3 \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ |\lambda_\psi| + r\alpha_1 & r\beta_1 & 0 \\ r\alpha_2 & |\lambda_\varphi| + r\beta_2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{A} & -\mathbf{C} & 0 \\ -\mathbf{B} & \mathbf{D} & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

avec des définitions évidentes de \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} .

Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \mathbf{AD} - \mathbf{BC} \\ &= |\lambda_\psi| |\lambda_\varphi| + (\alpha_1 |\lambda_\varphi| + \beta_2 |\lambda_\psi|) r + (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2) r^2.\end{aligned}$$

Notons qu'il faut choisir r suffisamment petit pour que $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^2$ soit strictement positif et que la transformation Λ définie par (5.7.1) soit régulière. Ainsi, pour \mathcal{O} suffisamment petit, Λ est un difféomorphisme de classe C^3 de $\mathcal{O} \cap \Omega$ sur son image : c'est ce que nous supposons dans la suite de ce paragraphe.

Pour faciliter les calculs, notons par $y = (y^1, y^2, y^3) \equiv (\psi, \varphi, r)$. Alors,

$$\begin{aligned}\text{Jac } \Lambda &= (D_i \Lambda^j)_{ji}, \\ \text{Jac } (y) = (\text{Jac } \Lambda)^{-1} &= (\text{Jac } \Lambda^{-1}) \circ \Lambda = (a_{ij})_{ij},\end{aligned}$$

où $a_{ij} = a_{ij}(y) \in \mathbb{C}^2$ avec $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Notons que pour $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$([\nabla(\Lambda^{-1})^1] \circ \Lambda)^i = \left[\frac{1}{\mathbf{J}} (\Lambda_\varphi \wedge \mathbf{e}_3) \right]^i = \frac{1}{\mathbf{J}} (\mathbf{A} \mathbf{e}_1^i + \mathbf{B} \mathbf{e}_2^i) = a_{1i}, \quad (5.7.4)$$

$$([\nabla(\Lambda^{-1})^2] \circ \Lambda)^i = \left[\frac{1}{\mathbf{J}} (\mathbf{e}_3 \wedge \Lambda_\psi) \right]^i = \frac{1}{\mathbf{J}} (\mathbf{C} \mathbf{e}_1^i + \mathbf{D} \mathbf{e}_2^i) = a_{2i}, \quad (5.7.5)$$

$$([\nabla(\Lambda^{-1})^3] \circ \Lambda)^i = \left[\frac{1}{\mathbf{J}} (\Lambda_\psi \wedge \Lambda_\varphi) \right]^i = \mathbf{e}_3^i = a_{3i}. \quad (5.7.6)$$

De (5.7.4), (5.7.5) et (5.7.6), nous déduisons les conditions d'orthogonalité suivantes,

$$\sum_{i=1}^3 a_{1i} \cdot a_{3i} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 a_{2i} \cdot a_{3i} = 0. \quad (5.7.7)$$

Nous utilisons la convention d'Einstein pour simplifier l'écriture, par exemple dans

$$\partial_{x^j} = a_{ij} D_i = \sum_{i=1}^3 a_{ij} D_i, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \quad (5.7.8)$$

Soient une fonction scalaire f et un vecteur $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$, et notons $\tilde{f}(t, y) = f(t, \Lambda(y))$ et $\tilde{\mathbf{v}}(t, y) = \mathbf{v}(t, \Lambda(y))$.

Effectuons le changement de variables $x \rightarrow y$, nous obtenons les expressions suivantes.

1. Le vecteur gradient $\nabla_{x^i} \equiv \nabla$ de la fonction scalaire f est donné par

$$(\nabla f)^i = a_{ji} D_j \tilde{f}.$$

2. La divergence $\text{div}_{x^i} \equiv \text{div}$ du vecteur \mathbf{v} est donnée par

$$\text{div } \mathbf{v} = a_{ij} D_i \tilde{v}^j.$$

3. La matrice gradient $\nabla_{x^i} \equiv \nabla$ du vecteur \mathbf{v} est donnée par

$$(\nabla \mathbf{v})_{ij} = a_{ki} D_k \tilde{v}^j.$$

4. La transposée de la matrice gradient $(\nabla_{x^i})^T \equiv (\nabla)^T$ du vecteur \mathbf{v} est donnée par

$$(\nabla^T \mathbf{v})_{ij} = a_{kj} D_k \tilde{v}^i.$$

Nous définissons les fonctions

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(t, y) &\equiv \mathbf{u}(t, \Lambda(y)), & \tilde{\sigma}(t, y) &\equiv \sigma(t, \Lambda(y)), & \tilde{\tau}(t, y) &\equiv \tau(t, \Lambda(y)), \\ \tilde{\mathbf{F}}_2(t, y) &\equiv \mathbf{F}_2(t, \Lambda(y)), & \tilde{G}_2(t, y) &\equiv G_2(t, \Lambda(y)), & \tilde{\mathbf{H}}_2(t, y) &\equiv \mathbf{H}_2(t, \Lambda(y)), \\ \tilde{\mathbf{u}}_0(y) &\equiv \mathbf{u}_0(\Lambda(y)), & \tilde{\sigma}_0(y) &\equiv \sigma_0(\Lambda(y)), & \tilde{\tau}_0(y) &\equiv \tau_0(\Lambda(y)), \end{aligned}$$

pour $t \in [0, T]$ et $y \in U \equiv \Lambda^{-1}(\mathcal{O} \cap \Omega)$.

Nous pouvons réécrire les problèmes (5.5.3), (5.5.5) et (5.5.7) dans le nouveau système des coordonnées locales

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{u}^j + (1 - \omega)(\tilde{A}\mathbf{u})^j + a_{kj} D_k \tilde{\sigma} = \tilde{\mathbf{F}}_2^j + a_{ks} D_k \tilde{\tau}_{sj}, & \text{dans }]0, T[\times U, \\ \tilde{\sigma}' + \varepsilon^{-2} \alpha a_{kj} D_k \tilde{u}^j = \tilde{G}_2, & \text{dans }]0, T[\times U, \\ \text{We } \partial_t \tilde{\tau} + \tilde{\tau} = \tilde{\mathbf{H}}_2 + 2\omega(\tilde{\mathbf{D}}[\mathbf{u}]), & \text{dans }]0, T[\times U, \\ \tilde{\mathbf{u}} = 0, & \text{sur }]0, T[\times \partial U, \\ \tilde{\mathbf{u}}(0, y) = \tilde{\mathbf{u}}_0(y), & \text{dans } U, \\ \tilde{\sigma}(0, y) = \tilde{\sigma}_0(y), & \text{dans } U, \\ \tilde{\tau}(0, y) = \tilde{\tau}_0(y), & \text{dans } U, \end{array} \right. \quad (5.7.9)$$

où

$$(\widetilde{A}\mathbf{u})^j = -(\mathbf{a}_{ki} D_k(\mathbf{a}_{si} D_s \widetilde{u}^j) + \mathbf{a}_{kj} D_k(\mathbf{a}_{si} D_s \widetilde{u}^i)), \quad (5.7.10)$$

$$(\widetilde{D}[\mathbf{u}])_{ij} = \mathbf{a}_{ki} D_k \widetilde{u}^j + \mathbf{a}_{kj} D_k \widetilde{u}^i. \quad (5.7.11)$$

Dans le nouveau système de coordonnées locales, nous notons par D_t , $t = 1, 2$, les dérivées tangentielles sur la surface ∂U et par D_3 la dérivée normale à la surface.

Soit $\xi \in C_0^\infty(U)$. Nous avons les propriétés suivantes :

$$D_i(\mathbf{J} \mathbf{a}_{ij}) = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, 3, \quad (5.7.12)$$

et

$$\xi D_t \widetilde{\mathbf{u}} = 0, \quad \xi D_t D_r \widetilde{\mathbf{u}} = 0 \text{ sur } \partial U, \quad \text{pour } t, r = 1, 2. \quad (5.7.13)$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \xi^2 \sum_{i,j} \left(\sum_k \mathbf{a}_{ki} D_k D_t \widetilde{u}^j \sum_s \mathbf{a}_{si} D_s D_t \widetilde{u}^j \right) &= \mathbf{J} \xi^2 \sum_j \sum_{k,s} \mathbf{b}_{ks} D_k D_t \widetilde{u}^j D_s D_t \widetilde{u}^j \\ &\geq c \xi^2 |D_s D_t \widetilde{\mathbf{u}}|^2, \end{aligned} \quad (5.7.14)$$

où $B \equiv (\text{Jac } \Lambda)^{-1\text{T}} (\text{Jac } \Lambda)^{-1}$, avec $\mathbf{b}_{ij} = \sum_k \mathbf{a}_{ik} \cdot \mathbf{a}_{jk}$, est définie positive car la matrice jacobienne $(\text{Jac } \Lambda)$ est inversible.

Lemme 5.7.1. *Soit $\xi \in C_0^\infty(U)$. Sous les hypothèses (5.5.1) et (5.5.2), pour tout δ , $0 < \delta < 1$, il existe une constante c_{10} indépendante de ε telle que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_U \mathbf{J} \xi^2 |D_t \widetilde{\mathbf{u}}|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \int_U \mathbf{J} \xi^2 |D_t \widetilde{\sigma}|^2 \right) &+ (1 - \omega) \gamma_2 \int_U \mathbf{J} \xi^2 |D_t D_k \widetilde{\mathbf{u}}|^2 \\ &+ (1 - \omega) \gamma_3 \int_U \mathbf{J} \xi^2 |D_t (\mathbf{a}_{kj} D_k \widetilde{u}^j)|^2 \\ &\leq \delta \left(\|\mathbf{u}\|_3^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\sigma\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\sigma\|_2^2 + \|\tau\|_2^2 \right) \\ &+ c_{10} \left(\|\mathbf{u}\|_1^2 + \|\mathbf{f}\|^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\tau\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\sigma\|_2^4 \right), \end{aligned} \quad (5.7.15)$$

pour $t = 1, 2$ et $k = 1, 2, 3$. Les constantes γ_2 et γ_3 sont positives et indépendantes de ε .

Preuve.

Nous utilisons un raisonnement analogue à celui fait dans le lemme 5.6.1. Appliquons D_t ($t = 1, 2$) à l'équation (5.7.9)₁, puis multiplions l'équation obtenue par $\mathbf{J} \xi^2 D_t \widetilde{u}^j$ et intégrons sur U . De même manière, appliquons D_t ($t = 1, 2$) sur l'équation (5.7.9)₂, puis multiplions l'équation obtenue par $\varepsilon^2 \mathbf{J} \xi^2 D_t \widetilde{\sigma} / \alpha$ et intégrons sur U . Faisons une intégration par partie et utilisons (5.7.14), nous obtenons (5.7.15). □

Lemme 5.7.2. Soit $\xi \in C_0^\infty(U)$. Sous les hypothèses (5.5.1) et (5.5.2), pour tout δ , $0 < \delta < 1$, il existe une constante c_{11} indépendante de ε telle que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_U J \xi^2 |D_r D_t \tilde{\mathbf{u}}|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \int_U J \xi^2 |D_r D_t \tilde{\sigma}|^2 \right) + (1 - \omega) \gamma_2 \int_U J \xi^2 |D_r D_t D_k \tilde{\mathbf{u}}|^2 \\ + (1 - \omega) \gamma_3 \int_U J \xi^2 |D_r D_t (a_{sj} D_k \tilde{w}^j)|^2 \leq \delta \left(\|\mathbf{u}\|_3^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\sigma\|_2^2 + \|\tau\|_2^2 \right) \\ + c_{11} (\|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\tau\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\sigma\|_2^4), \end{aligned} \quad (5.7.16)$$

pour $r, t = 1, 2$ et $k = 1, 2, 3$. Les constantes γ_2 et γ_3 sont positives et indépendantes de ε .

Preuve.

Nous utilisons un raisonnement analogue à celui qui est fait dans le lemme 5.6.2. Appliquons $D_r D_t$ ($r, t = 1, 2$) à l'équation (5.7.9)₁, puis multiplions l'équation obtenue par $J \xi^2 D_r D_t \tilde{w}^j$ et intégrons sur U . De même manière, appliquons $D_r D_t$ ($r, t = 1, 2$) à l'équation (5.7.9)₂, puis multiplions l'équation obtenue par $\varepsilon^2 J \xi^2 D_r D_t \tilde{\sigma} / \alpha$ et intégrons sur U . Utilisons (5.7.13) et la relation suivante

$$\int_U J \xi^2 a_{mi} D_r D_t D_m \tilde{w}^i \cdot a_{ki} D_r D_t D_k \tilde{w}^j \geq c_{11} \int_U J \xi^2 |D_r D_t D_k \tilde{\mathbf{u}}|^2, \quad (5.7.17)$$

où $m, k = 1, 2, 3$ et $t, r = 1, 2$. Alors nous obtenons (5.7.16). \square

5.7.1 Estimation a priori des dérivées normales de $\operatorname{div} \mathbf{u}$ sur $\partial\Omega$

Prenons la dérivée normale de (5.5.5)₁ sur $\partial\Omega$ et puis multiplions par $2(1 - \omega)\varepsilon^2/\alpha$,

$$\frac{2}{\alpha} (1 - \omega) \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial n} \right) + 2(1 - \omega) \frac{\partial}{\partial n} (\operatorname{div} \mathbf{u}) = \frac{2}{\alpha} (1 - \omega) \varepsilon^2 \frac{\partial G_2}{\partial n}. \quad (5.7.18)$$

Multiplions scalairement l'équation (5.5.3)₁ par \mathbf{n} , nous obtenons

$$\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} - (1 - \omega) \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - (1 - \omega) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \nabla \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n} + \operatorname{div} \tau \cdot \mathbf{n}. \quad (5.7.19)$$

Additionnons (5.7.18) et (5.7.19), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{2}{\alpha} (1 - \omega) \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma'}{\partial n} + \frac{\partial \sigma}{\partial n} = -\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} + (1 - \omega) [\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n} \\ + \operatorname{div} \tau \cdot \mathbf{n} + \frac{2}{\alpha} (1 - \omega) \varepsilon^2 \frac{\partial G_2}{\partial n}. \end{aligned} \quad (5.7.20)$$

Notons que le terme $[\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]$ ne contient pas la dérivée normale $\partial^2 w^j / \partial n^2$. Dans le nouveau système de coordonnées locales, (5.7.20) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{2}{\alpha} (1 - \omega) \varepsilon^2 D_3 \tilde{\sigma}' + D_3 \tilde{\sigma} = -\tilde{\mathbf{u}}' \cdot \mathbf{e}_3 + (1 - \omega) [a_{ki} D_k (a_{si} D_s \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_3 - D_3 (a_{si} D_s \tilde{u}^i)] + \tilde{\mathbf{F}}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ + (a_{ks} D_k \tilde{\tau}^{s'}) \cdot \mathbf{e}_3 + \frac{2}{\alpha} (1 - \omega) \varepsilon^2 D_3 (\tilde{u}^i a_{si} D_s \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma} a_{si} D_s \tilde{u}^i). \end{aligned} \quad (5.7.21)$$

Pour $t, r = 1, 2$ et $s = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}
a_{ki} D_k(a_{si} D_s \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_3 - D_3(a_{si} D_s \tilde{u}^i) &= a_{3i} D_3(a_{3i} D_3 \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_3 + a_{ti} D_t(a_{si} D_s \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_3 + a_{3i} D_3(a_{ti} D_t \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_3 \\
&\quad - D_3(a_{3i} D_3 \tilde{u}^i) - D_3(a_{ti} D_t \tilde{u}^i) \\
&= a_{3i} a_{3i} D_3 D_3 \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_3 + a_{3i} D_3(a_{3i}) D_3 \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_3 + a_{ti} D_t(a_{si} D_s \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_3 \\
&\quad + a_{3i} D_3(a_{ti} D_t \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_3 - a_{3i} D_3 D_3 \tilde{u}^i - D_3(a_{3i}) D_3 \tilde{u}^i \\
&\quad - D_3(a_{ti} D_t \tilde{u}^i).
\end{aligned} \tag{5.7.22}$$

Utilisons (5.7.7), nous avons

$$\begin{aligned}
a_{ki} D_k(a_{si} D_s \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_3 - D_3(a_{si} D_s \tilde{u}^i) &= a_{3i} D_3(a_{3i}) D_3 \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_3 + a_{ti} a_{ri} D_t D_r \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_3 + a_{ti} D_t(a_{si}) D_s \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_3 \\
&\quad + a_{3i} D_3(a_{ti}) D_t \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_3 - D_3(a_{3i}) D_3 \tilde{u}^i - D_3(a_{ti}) D_t \tilde{u}^i - \\
&\quad a_{ti} D_3 D_t \tilde{u}^i.
\end{aligned} \tag{5.7.23}$$

Lemme 5.7.3. *Pour tout δ , $0 < \delta < 1$, il existe des constantes c_{12} et c_{13} positives et indépendantes de ε telles que $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\mathbf{u}}$ vérifient,*

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon^2(1-\omega)}{\alpha} \frac{d}{dt} \left(\int_U J \xi^2 |D_3 \tilde{\sigma}|^2 \right) + \frac{1}{2} \int_U J \xi^2 |D_3 \tilde{\sigma}|^2 \\
\leq c_{12} \int_U J \xi^2 |D_t D_s \tilde{\mathbf{u}}|^2 + \delta \|\mathbf{u}\|_3^2 \\
+ c_{13} (\|\mathbf{u}\|_1^2 + \|\mathbf{u}'\|^2 + \|\mathbf{f}\|^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\tau\|_1^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4),
\end{aligned} \tag{5.7.24}$$

pour $t = 1, 2$ et $s = 1, 2, 3$.

Preuve.

Multiplions l'équation (5.7.20) par $J \xi^2 D_3 \tilde{\sigma} / \alpha$ et intégrons sur U . Nous remarquons que nous pouvons estimer tous les termes à droite de l'équation (5.7.22). En particulier, pour tout δ_1, δ_2 , avec $0 < \delta_i < 1$, il existe des constantes c_{12}^1 et c_{12}^2 positives et indépendantes de ε telles que

$$\left| \int_U J \xi^2 (a_{ti} a_{ri} D_t D_r \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_3) \cdot D_3 \tilde{\sigma} \right| \leq c_{12}^1 \int_U J \xi^2 |D_t D_r \tilde{\mathbf{u}}|^2 + \delta_1 \int_U J \xi^2 |D_3 \tilde{\sigma}|^2 \tag{5.7.25}$$

$$\left| \int_U J \xi^2 (a_{ti} D_3 D_t \tilde{u}^i) \cdot D_3 \tilde{\sigma} \right| \leq c_{12}^2 \int_U J \xi^2 |D_t D_3 \tilde{\mathbf{u}}|^2 + \delta_2 \int_U J \xi^2 |D_3 \tilde{\sigma}|^2. \tag{5.7.26}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
\left| \int_U J \xi^2 D_3(\tilde{u}^i a_{si} D_s \tilde{\sigma}) D_3 \tilde{\sigma} \right| &\leq \left| \int_U J \xi^2 (a_{si} D_3 \tilde{u}^i + \tilde{u}^i D_3 a_{si}) D_s \tilde{\sigma} D_3 \tilde{\sigma} \right| \\
&\quad + \frac{1}{2} \left| \int_U J \xi^2 \tilde{u}^i a_{si} D_s (D_3 \tilde{\sigma})^2 \right|,
\end{aligned}$$

or

$$\left| \int_U J \xi^2 \tilde{u}^i a_{si} D_s (D_3 \tilde{\sigma})^2 \right| = \left| \int_U J (D_3 \tilde{\sigma})^2 [\xi^2 D_s(\tilde{u}^i a_{si}) + 2\xi \tilde{u}^i a_{si} D_s \xi] \right|.$$

Donc,

$$\left| \varepsilon^2 \int_U \mathbf{J} \xi^2 D_3(\tilde{u}^i a_{si} D_s \tilde{\sigma}) D_3 \tilde{\sigma} \right| \leq c_{12}^3 \varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_3 \cdot \|\sigma\|_1^2.$$

□

Un raisonnement analogue à celui du lemme précédent en dérivant deux fois nous conduit au lemme suivant :

Lemme 5.7.4. *Pour tout δ , $0 < \delta < 1$, il existe des constantes c_{14}, \dots, c_{17} positives et indépendantes de ε telles que $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\mathbf{u}}$ vérifient,*

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon^2(1-\omega)}{\alpha} \frac{d}{dt} \left(\int_U \mathbf{J} \xi^2 |D_r D_3 \tilde{\sigma}|^2 \right) + \frac{1}{2} \int_U \mathbf{J} \xi^2 |D_r D_3 \tilde{\sigma}|^2 \\ & \leq \delta \|\mathbf{u}\|_3^2 + c_{14} \int_U \mathbf{J} \xi^2 |D_r D_t D_s \tilde{\mathbf{u}}|^2 \\ & \quad + c_{15} \left(\|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\tau\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 \right), \end{aligned} \quad (5.7.27)$$

pour $r, t = 1, 2; s = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon^2(1-\omega)}{\alpha} \frac{d}{dt} \left(\int_U \mathbf{J} \xi^2 |D_3 D_3 \tilde{\sigma}|^2 \right) + \frac{1}{2} \int_U \mathbf{J} \xi^2 |D_3 D_3 \tilde{\sigma}|^2 \\ & \leq \delta \|\mathbf{u}\|_3^2 + c_{16} \int_U \mathbf{J} \xi^2 |D_3 D_t D_s \tilde{\mathbf{u}}|^2 \\ & \quad + c_{17} \left(\|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\tau\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 \right), \end{aligned} \quad (5.7.28)$$

pour $t = 1, 2$ et $s = 1, 2, 3$.

Additionnons aux deux membres de l'équation (5.7.19) le terme $-(1-\omega)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, l'équation devient dans le nouveau système de coordonnées locales,

$$\begin{aligned} 2(1-\omega) D_3(a_{si} D_s \tilde{u}^i) &= -(1-\omega) [a_{ki} D_k(a_{si} D_s \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_3 - D_3(a_{si} D_s \tilde{u}^i)] + \tilde{\mathbf{u}}' \cdot \mathbf{e}_3 \\ & \quad + D_3 \tilde{\sigma} - \tilde{\mathbf{F}}_2 \cdot \mathbf{e}_3 - (a_{ks} D_k \tilde{\tau}^{s'}) \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (5.7.29)$$

Lemme 5.7.5. *Pour tout δ , $0 < \delta < 1$, $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\mathbf{u}}$ vérifient,*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha} \int_U \mathbf{J} \xi^2 |D_3 \tilde{\sigma}|^2 \right) + (1-\omega) \int_U \mathbf{J} \xi^2 |D_3(a_{si} D_s \tilde{u}^i)|^2 \\ & \leq c_{18} \int_U \mathbf{J} \xi^2 |D_t D_s \tilde{\mathbf{u}}|^2 + \delta \|\mathbf{u}\|_3^2 + c_{19} (\|\mathbf{u}\|_1^2 + \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 \\ & \quad + \|\tau\|_1^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4), \end{aligned} \quad (5.7.30)$$

pour $t = 1, 2$ et $s = 1, 2, 3$. Les constantes positives c_{18} et c_{19} ne dépendent pas de ε .

Preuve.

Il suffit de multiplier l'équation (5.7.29) par $J \xi^2 D_3(a_{si} D_s \tilde{u}^i)$, puis nous utilisons le lemme 5.7.3 pour estimer le terme $\int_U J \xi^2 |D_3 \tilde{\sigma}|^2$.

□

Des calculs analogues à ceux du lemme précédent mais en dérivant deux fois nous conduisent au lemme suivant :

Lemme 5.7.6. *Pour tout δ , $0 < \delta < 1$, $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\mathbf{u}}$ vérifient,*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha} \int_U J \xi^2 |D_r D_3 \tilde{\sigma}|^2 \right) + (1 - \omega) \int_U J \xi^2 |D_r D_3(a_{si} D_s \tilde{u}^i)|^2 \\ & \leq \delta \|\mathbf{u}\|_3^2 + c_{20} \int_U J \xi^2 |D_r D_t D_s \tilde{\mathbf{u}}|^2 \\ & + c_{21} \left(\|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\tau\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 \right), \end{aligned} \quad (5.7.31)$$

pour $r, t = 1, 2$ et $s = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha} \int_U J \xi^2 |D_3 D_3 \tilde{\sigma}|^2 \right) + (1 - \omega) \int_U J \xi^2 |D_3 D_3(a_{si} D_s \tilde{u}^i)|^2 \leq c_{22} \int_U J \xi^2 |D_3 D_t D_s \tilde{\mathbf{u}}|^2 + \delta \|\mathbf{u}\|_3^2 \\ & + c_{23} \left(\|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\tau\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 \right), \end{aligned} \quad (5.7.32)$$

pour $t = 1, 2$ et $s = 1, 2, 3$. Les constantes c_{20} à c_{23} ne dépendent pas de ε .

Nous allons maintenant déduire une estimation qui vient du problème de Stokes dans le nouveau système de cartes locales, en appliquant le résultat de Temam [96] qui est déjà mentionné dans le lemme 5.5.3.

Considérons le problème de Stokes suivant,

$$\begin{aligned} -(1 - \omega) \Delta[(\xi D_t \tilde{\mathbf{u}}) \circ \Lambda^{-1}] + \nabla[(\xi D_t \tilde{\sigma}) \circ \Lambda^{-1}] &= H \quad \text{dans } \mathcal{O} \cap \Omega, \\ \operatorname{div}[(\xi D_t \tilde{\mathbf{u}}) \circ \Lambda^{-1}] &= K \quad \text{dans } \mathcal{O} \cap \Omega, \\ (\xi D_t \tilde{\mathbf{u}}) \circ \Lambda^{-1} &= 0 \quad \text{sur } \partial(\mathcal{O} \cap \Omega), \end{aligned} \quad (5.7.33)$$

où $t = 1, 2$. Dans H et K sont regroupés les autres termes des équations (5.7.9)₁ et (5.7.9)₂ dans le nouveau système de cartes locales.

Nous avons le lemme suivant.

Lemme 5.7.7. *$\tilde{\mathbf{u}}$ satisfait l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} \int_U J \xi^2 |D_t D_s^2 \tilde{\mathbf{u}}|^2 &\leq c_{24} \int_U J \xi^2 |D_t D_s(a_{kj} D_k \tilde{w}^j)|^2 \\ &+ c_{25} (\|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \|\sigma\|_1^2 + \|\tau\|_2^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \|\mathbf{u}\|_3^2 \|\mathbf{u}\|_1^2), \end{aligned} \quad (5.7.34)$$

pour $t = 1, 2$ et $s = 1, 2, 3$. Les constantes positives c_{24} et c_{25} ne dépendent pas de ε .

Définissons les normes suivantes, pour des vecteurs \mathbf{u} ou des fonctions σ suffisamment régulières,

$$[\nabla \mathbf{u}]^2 = \|\chi \nabla \mathbf{u}\|^2 + \int_U J \xi^2 |D_t \tilde{\mathbf{u}}|^2, \quad (5.7.35)$$

$$[D^2 \mathbf{u}]^2 = \|\chi D^2 \mathbf{u}\|^2 + \int_U J \xi^2 |D_r D_t \tilde{\mathbf{u}}|^2, \quad (5.7.36)$$

$$[|\nabla \sigma|]^2 = \|\chi \nabla \sigma\|^2 + \int_U J \xi^2 |D_t \tilde{\sigma}|^2 + \int_U J \xi^2 |D_3 \tilde{\sigma}|^2, \quad (5.7.37)$$

$$[|D^2 \sigma|]^2 = \|\chi D^2 \sigma\|^2 + \int_U J \xi^2 |D_r D_t \tilde{\sigma}|^2 + \int_U J \xi^2 |D_r D_3 \tilde{\sigma}|^2 + \int_U J \xi^2 |D_3 D_3 \tilde{\sigma}|^2, \quad (5.7.38)$$

$$|||\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}|||^2 = \|\chi \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 + \int_U J \xi^2 |D_t (\mathfrak{a}_{si} D_s \tilde{u}^i)|^2 + \int_U J \xi^2 |D_3 (\mathfrak{a}_{si} D_s \tilde{u}^i)|^2, \quad (5.7.39)$$

$$\begin{aligned} |||D^2 \operatorname{div} \mathbf{u}|||^2 &= \|\chi D^2 \operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 + \int_U J \xi^2 |D_r D_t (\mathfrak{a}_{si} D_s \tilde{u}^i)|^2 + \int_U J \xi^2 |D_r D_3 (\mathfrak{a}_{si} D_s \tilde{u}^i)|^2 \\ &\quad + \int_U J \xi^2 |D_3 D_3 (\mathfrak{a}_{si} D_s \tilde{u}^i)|^2, \end{aligned} \quad (5.7.40)$$

où $r, t = 1, 2$ et $s = 1, 2, 3$. Notons que les normes $[\cdot]$, $|||\cdot|||$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes. La norme $[\cdot]$ ne contient pas la dérivée normale d'ordre 1 et vérifie $[\cdot] \leq C_\Omega \|\cdot\|_1$.

Introduisons aussi les normes

$$[\mathbf{u}]_2^2 = [\nabla \mathbf{u}]^2 + [D^2 \mathbf{u}]^2,$$

$$[\sigma]_2^2 = [|\nabla \sigma|]^2 + [|D^2 \sigma|]^2,$$

$$|||\operatorname{div} \mathbf{u}|||_2^2 = |||\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}|||^2 + |||D^2 \operatorname{div} \mathbf{u}|||^2.$$

Remarquons que les normes $[\cdot]_2$, $|||\cdot|||_2$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes. La norme $[\cdot]_2$ ne contient pas les dérivées normales d'ordres 1 ou 2 et vérifie $[\cdot]_2 \leq C_\Omega \|\cdot\|_2$.

De façon à estimer $\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_2^2$, nous avons besoin d'un certain nombre d'estimations, données dans les lemmes 5.7.8 à 5.7.12 qui suivent. Le paramètre $\omega \in]0, \omega_0^1]$ est toujours fixé, avec ω_0^1 donné par la condition (5.5.57) dans le lemme 5.5.8.

Lemme 5.7.8. *Pour tout $\delta, 0 < \delta < 1$, nous avons l'inégalité suivante,*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left([\nabla \mathbf{u}]^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} [|\nabla \sigma|]^2 \right) + |||\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}|||^2 \\ &\leq \delta \left(\|\mathbf{u}\|_3^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\sigma\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\sigma\|_2^2 + \|\tau\|_2^2 \right) \\ &\quad + c_{26} (\|\mathbf{u}\|_1^2 + \|\mathbf{u}'\|^2 + \|\mathbf{f}\|^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\tau\|_1^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4), \end{aligned} \quad (5.7.41)$$

où c_{26} est une constante indépendante de ε .

Preuve.

Il suffit de calculer la combinaison suivante des inégalités précédentes :

$$(5.6.1) + c_{18}(5.7.15) + (1 - \omega)\gamma_2(5.7.30).$$

Nous remarquons que le terme

$$\int_U J \xi^2 |D_t D_k \tilde{\mathbf{u}}|^2$$

est éliminé. Nous obtenons (5.7.41). □

Lemme 5.7.9. *Pour $0 < \delta < 1$, nous avons l'inégalité suivante,*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(c_1 \|\mathbf{u}\|^2 + [\nabla \mathbf{u}]^2 + c_2 \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} |[\nabla \sigma]|^2 + \frac{\text{Wec}_3}{2\omega} \|\tau\|^2 + c_4 \|\mathbf{u}'\|^2 + c_5 \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma'\|^2 + \frac{\text{Wec}_6}{2\omega} \|\tau'\|^2 \right) \\ & \quad + \frac{c_7}{2\omega} \|\tau\|^2 + \frac{c_8}{2\omega} \|\tau'\|^2 + \|\nabla \text{div } \mathbf{u}\|^2 \\ & \leq \delta \left(\|\mathbf{u}\|_3^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\sigma\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\sigma\|_2^2 + \|\tau\|_2^2 \right) \\ & \quad + c_{27} \left(\|\mathbf{f}'\|^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \varepsilon^4 \|\sigma'\|^4 + \|\tau'\|^4 + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\mathbf{u}'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 \right. \\ & \quad + \varepsilon^2 \|\tau\|_2^2 \cdot \|\sigma'\|^2 + \|\tau'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\tau\|_2^2 \cdot \|\tau'\|^2 + \varepsilon^4 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\sigma\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\mathbf{u}'\|_1 \cdot \|\sigma\|_2^2 \\ & \quad \left. + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\tau\|_2^4 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\tau\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 + \|\tau\|_1^2 \right), \end{aligned} \tag{5.7.42}$$

où c_{27} et $(c_i)_{i=1}^8$ sont indépendantes de ε .

Preuve.

Nous faisons la somme de (5.5.9), (5.5.36) et (5.7.41). □

Lemme 5.7.10. *Pour tout δ , $0 < \delta < 1$, nous avons l'inégalité suivante,*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left([D^2 \mathbf{u}]^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} |[D^2 \sigma]|^2 \right) + \|\nabla D^2 \text{div } \mathbf{u}\|^2 \\ & \leq \delta \left(\|\mathbf{u}\|_3^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\sigma\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\sigma\|_2^2 + \|\tau\|_2^2 \right) \\ & \quad + c_{28}^1 \left(\|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\sigma\|_1^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \|\tau\|_2^2 \right), \end{aligned} \tag{5.7.43}$$

où c_{28}^1 est une constante indépendante de ε .

Preuve.

Il suffit de calculer :

$$(5.6.12) + c_{20}(1 + c_{22}c_{24})(5.7.16) + (1 - \omega)\gamma_2(5.7.31) + (5.7.32) + c_{22}(5.7.34).$$

□

Lemme 5.7.11. *Pour tout δ , $0 < \delta < 1$, nous avons l'inégalité suivante,*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left([D^2 \mathbf{u}]^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} |[D^2 \sigma]|^2 \right) + |||D^2 \operatorname{div} \mathbf{u}|||^2 \\ & \leq \delta \left(\|\mathbf{u}\|_3^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\sigma\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\sigma\|_2^2 + \|\tau\|_2^2 \right) \\ & + c_{28} \left(\|\mathbf{f}'\|^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \varepsilon^4 \|\sigma'\|^4 + \|\tau'\|^4 + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\mathbf{u}'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 \right. \\ & + \varepsilon^2 \|\tau\|_2^2 \cdot \|\sigma'\|^2 + \|\tau'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\tau\|_2^2 \cdot \|\tau'\|^2 + \varepsilon^4 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\sigma\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\mathbf{u}'\|_1 \cdot \|\sigma\|_2^2 \\ & \left. + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\tau\|_2^4 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\tau\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 + \|\tau\|_2^2 \right), \end{aligned} \quad (5.7.44)$$

où c_{28} est une constante indépendante de ε .

Preuve.

Utilisons (5.5.24) pour éliminer $\|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\sigma\|_1^2$. Il vient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left([D^2 \mathbf{u}]^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} |[D^2 \sigma]|^2 \right) + |||D^2 \operatorname{div} \mathbf{u}|||^2 \\ & \leq \delta \left(\|\mathbf{u}\|_3^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\sigma\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\sigma\|_2^2 + \|\tau\|_2^2 \right) \\ & + c_{28} \left(\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_1^2 + \|\operatorname{div} \tau\|^2 + \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 \right. \\ & \left. + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \|\tau\|_2^2 \right), \end{aligned} \quad (5.7.45)$$

où la constante positive c_{28} est indépendante de ε .

Pour éliminer les termes $\|\mathbf{u}'\|_1^2$ et de $\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_1^2$, nous utilisons respectivement (5.5.36) et (5.7.42). □

Lemme 5.7.12. *Pour $0 < \delta < 1$, nous avons l'inégalité suivante,*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(c_1 \|\mathbf{u}\|^2 + [\mathbf{u}]_2^2 + c_2 \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma\|_2^2 + \frac{\operatorname{Wec}_3}{2\omega} \|\tau\|^2 + c_4 \|\mathbf{u}'\|^2 + c_5 \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma'\|^2 + \frac{\operatorname{Wec}_6}{2\omega} \|\tau'\|^2 \right) \\ & + \frac{c_7}{2\omega} \|\tau\|^2 + \frac{c_8}{2\omega} \|\tau'\|^2 + |||\operatorname{div} \mathbf{u}|||^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \delta \left(\|\mathbf{u}\|_3^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\sigma\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\sigma\|_2^2 + \|\tau\|_2^2 \right) \\
&\quad + c_{29} \left(\|\mathbf{f}'\|^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \varepsilon^4 \|\sigma'\|^4 + \|\tau'\|^4 + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\mathbf{u}'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 \right. \\
&\quad + \varepsilon^2 \|\tau\|_2^2 \cdot \|\sigma'\|^2 + \|\tau'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\tau\|_2^2 \cdot \|\tau'\|^2 + \varepsilon^4 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\sigma\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\mathbf{u}'\|_1 \cdot \|\sigma\|_2^2 \\
&\quad \left. + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\tau\|_2^4 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\tau\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 + \|\tau\|_2^2 \right),
\end{aligned} \tag{5.7.46}$$

où c_{29} est une constante indépendante de ε .

Preuve.

Il suffit de faire la somme de (5.7.42) et (5.7.44). □

Le paramètre $\omega \in]0, \omega_0^1]$ est toujours fixé avec ω_0^1 donné par la condition (5.5.57) dans le lemme 5.5.8.

Lemme 5.7.13. *Soit $0 < \delta < 1$. Il existe une constante ω_0 , $0 < \omega_0 < \omega_0^1 < 1$, telle que si $\omega \leq \omega_0$, nous avons l'inégalité suivante,*

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left(c_1 \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u}\|_2^2 + c_2 \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma\|_2^2 + c_7 \|\tau\|_2^2 + c_4 \|\mathbf{u}'\|^2 + c_5 \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \|\sigma'\|^2 + \frac{\text{We}c_6}{2\omega} \|\tau'\|^2 \right) \\
&\quad + \frac{c_7}{2\omega} \|\tau\|^2 + \frac{c_8}{2\omega} \|\tau'\|^2 + \gamma_4 \|\text{div } \mathbf{u}\|_2^2 \\
&\leq \delta \left(\|\mathbf{u}\|_3^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\sigma\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\sigma\|_2^2 + \|\tau\|_2^2 \right) \\
&\quad + c_{29} \left(\|\mathbf{f}'\|^2 + \|\mathbf{f}\|_1^2 + \varepsilon^4 \|\sigma\|_2^4 + \varepsilon^4 \|\sigma'\|^4 + \|\tau'\|^4 + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1^2 \right. \\
&\quad + \varepsilon^2 \|\tau\|_2^2 \cdot \|\sigma'\|^2 + \|\tau'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}'\|_1^2 + \|\tau\|_2^2 \cdot \|\tau'\|^2 + \varepsilon^4 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\sigma\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\mathbf{u}'\|_1 \cdot \|\sigma\|_2^2 \\
&\quad \left. + \varepsilon^2 \|\sigma'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \varepsilon^2 \|\sigma\|_2^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\tau\|_2^4 + \|\mathbf{u}\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\tau\|_1^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u}'\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_3^2 \right),
\end{aligned} \tag{5.7.47}$$

où c_{29} est une constante indépendante de ε .

Preuve.

Il suffit de faire la somme suivante $c_{29}(5.5.53) + \gamma_1(5.7.46)$ alors nous obtenons (5.7.47) avec $\gamma_4 = \gamma_1 - 3\omega^2 c_{29} c_2$ où nous choisissons $\omega \leq \omega_0$ avec

$$\omega_0 < \left(\sqrt{6c_2(1 + c_{29})} \right)^{-1}, \tag{5.7.48}$$

après avoir remarqué que $\omega_0 < \omega_0^1$. □

Définissons la fonction à valeurs réelles positives $t \longrightarrow z_1(t)$ par

$$z_1 = z + \|\mathbf{u}\|_2^2, \tag{5.7.49}$$

où la fonction $t \longrightarrow z(t)$ a été définie en (5.5.59).

Lemme 5.7.14. *Il existe trois constantes strictement positives \mathbf{a}_5 , \mathbf{a}_6 et \mathbf{a}_7 indépendantes de ε , $\mathbf{a}_5 \geq 1$ et $\mathbf{a}_7 \leq 1$, telles que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, nous avons les inégalités suivantes,*

$$z_1' + \mathbf{w} \leq \mathbf{a}_5 \mathbf{w} \left[z_1 + z_1^2 \right] + \mathbf{a}_6 \mathfrak{Z}, \quad (5.7.50)$$

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{a}_7 z_1, \quad (5.7.51)$$

avec

$$\mathfrak{Z} = \|\mathbf{f}\|_1^2 + \|\mathbf{f}'\|^2. \quad (5.7.52)$$

Preuve.

Il suffit de faire la somme : $\mathbf{a}_3(5.7.47) + \gamma_4(5.5.61)$. Choisissons δ d'une manière convenable pour obtenir (5.7.50). Remarquons qu'on peut trouver une constante positive $\mathbf{a}_7^1 \geq 1$ telle que $z_1 \leq \mathbf{a}_7^1 \mathbf{w}$. Choisissons $\mathbf{a}_7 = 1/\mathbf{a}_7^1 \leq 1$.

□

5.8 Existence globale

Rappelons que

$$\begin{aligned} z_1(0) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0\|^2 + \left((1 - \omega) + \frac{1}{2} \right) \|\nabla \mathbf{u}_0\|^2 + (1 - \omega) \|\operatorname{div} \mathbf{u}_0\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2\alpha} \|\sigma_0\|^2 \\ &\quad + \frac{\operatorname{We}}{2} \|\tau_0\|_2^2 + [\mathbf{u}_0]_2^2 + \varepsilon^2 [\sigma_0]^2. \end{aligned} \quad (5.8.1)$$

Rappelons aussi que les constantes \mathbf{a}_5 , \mathbf{a}_6 et \mathbf{a}_7 ont été définies dans le lemme 5.7.14, et sont indépendantes de ε et de plus que la condition $\omega_0 < (\sqrt{6c_2(1 + c_{29})})^{-1}$, obtenue dans le lemme 5.7.13, est vérifiée.

Nous utiliserons deux lemmes dont les démonstrations se trouvent dans [97].

Lemme 5.8.1. *Soit $\partial\Omega$ de classe C^4 . Soit $(\mathbf{u}, \sigma, \tau)$ une solution du problème (5.3.1) sur \mathbb{Q}_T dans les ensembles de fonctions du théorème 5.4.1. Soit γ , $0 < \gamma \leq 1/2$. On suppose*

$$z_1(0) \leq \frac{\gamma}{\mathbf{a}_5}, \quad [\mathbf{f}]_{\infty,1,\infty}^2 + [\mathbf{f}']_{\infty,0,\infty}^2 < \frac{\mathbf{a}_7}{4\mathbf{a}_6\mathbf{a}_5} \gamma,$$

où les constantes \mathbf{a}_5 , \mathbf{a}_6 et \mathbf{a}_7 ont été définies dans le lemme 5.7.14.

Alors, on a

$$z_1(t) \leq \frac{\gamma}{\mathbf{a}_5}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Lemme 5.8.2. *Si la fonction z_1 est bornée sur $[0, T]$, indépendamment de ε , alors*

$$-\frac{\alpha}{2} \leq \varepsilon^2 \sigma(x, t) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Lemme 5.8.3. *Supposons que*

$$-\frac{\alpha}{2} \leq \varepsilon^2 \sigma(x, t) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad \text{sur } \overline{\Omega}. \quad (5.8.2)$$

Il existe une constante \mathbf{a}_9 indépendante de ε telle que

$$\|\mathbf{u}(t)\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\sigma(t)\|_2^2 + \|\tau(t)\|_2^2 \leq \mathbf{a}_9 \{z_1(t) + z_1^2(t) + \|\mathbf{f}(t)\|^2\}, \quad (5.8.3)$$

$\forall t \geq 0$.

Preuve.

D'après la définition de $z_1(t)$, nous avons

$$\|\mathbf{u}(t)\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\sigma(t)\|_2^2 + \|\tau(t)\|_2^2 \leq c_{30} (z_1(t) + \|A\mathbf{u}(t)\|^2), \quad (5.8.4)$$

où c_{30} est une constante indépendante de ε . Nous utilisons l'estimation (5.5.25) pour achever la démonstration. \square

5.8.1 Preuve du théorème d'existence globale 5.3.1

On suppose que

$$z_1(0) \leq \mathbf{a}_{10},$$

et

$$[\mathbf{f}]_{\infty,1,\infty}^2 + [\mathbf{f}']_{\infty,0,\infty}^2 \leq \mathbf{a}_{11},$$

où $\mathbf{a}_{10} = (2\mathbf{a}_5)^{-1}$ et $\mathbf{a}_{11} = \mathbf{a}_7(\mathbf{a}_5)^{-2}/8$, les constantes \mathbf{a}_5 et \mathbf{a}_7 ayant été définies dans le lemme 5.7.14.

D'après le lemme 5.8.2, on a

$$-\frac{\alpha}{2} \leq \inf_{\overline{\Omega}}(\varepsilon^2 \sigma_0) \leq \sup_{\overline{\Omega}}(\varepsilon^2 \sigma_0) \leq \frac{\alpha}{2},$$

Appliquons le lemme 5.8.3,

$$\|\mathbf{u}_0\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\sigma_0\|_2^2 + \|\tau_0\|_2^2 \leq \mathbf{a}_9 \{ \mathbf{a}_{10} + (\mathbf{a}_{10})^2 + \mathbf{a}_{11} \}.$$

Alors d'après le théorème 5.4.1, nous avons une solution de (5.3.1) sur $Q_{\mathbb{T}^*}$ telle que \mathbb{T}^* dépend seulement de Ω , α , ω , \mathbf{a}_5 , \mathbf{a}_7 , \mathbf{a}_{10} , et σ satisfait

$$-\frac{\alpha}{2} \leq \varepsilon^2 \sigma(x, t) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad \text{pour } (x, t) \in Q_{\mathbb{T}^*}.$$

Par suite, d'après le lemme 5.8.1

$$z_1(t) \leq \mathbf{a}_{10}, \quad \forall t \in [0, \mathbb{T}^*].$$

Appliquons de nouveau le lemme 5.8.2,

$$-\frac{\alpha}{2} \leq \varepsilon^2 \sigma(x, \mathbb{T}^*) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad (5.8.5)$$

Rappelons aussi le système d'équations vérifié par des écoulements des fluides incompressibles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(\mathbf{v}' + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) - (1 - \omega)\Delta\mathbf{v} + \nabla\pi = \alpha\mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{S}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{S} + \operatorname{We}\{\mathbf{S}' + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{S} + \mathbf{g}(\nabla\mathbf{v}, \mathbf{S})\} = 2\omega\mathbf{D}[\mathbf{v}], \\ \rho = \alpha, \\ \mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{v}(0, x) = \mathbf{v}_0(x), \\ \mathbf{S}(0, x) = \mathbf{S}_0(x), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma, \\ \text{sur } \Omega, \\ \text{sur } \Omega. \end{array} \quad (5.9.5)$$

Cette section consiste à démontrer que la solution du système (5.9.1), donnée par le théorème 5.3.1, tend vers la solution du système (5.9.5), donnée par le théorème 5.3.3, lorsque ε tend vers 0.

Preuve du théorème 5.3.4

D'après le théorème 5.3.1

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_2^2 + \|\varepsilon\sigma^\varepsilon\|_2^2 + \|\tau^\varepsilon\|_2^2 \leq \mathbf{b}_3, \quad (5.9.6)$$

et

$$\|\mathbf{u}'^\varepsilon\|_2^2 + \|\varepsilon\sigma'^\varepsilon\|_2^2 + \|\tau'^\varepsilon\|_2^2 \leq \mathbf{b}_4, \quad (5.9.7)$$

où \mathbf{b}_3 et \mathbf{b}_4 sont des constantes strictement positives et indépendantes de ε .

La suite $\{(\mathbf{u}^\varepsilon, \varepsilon\sigma^\varepsilon, \tau^\varepsilon)\}_\varepsilon$ est bornée de $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^2(\Omega)) \times L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^2(\Omega)) \times L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^2(\Omega))$, donc on peut en extraire une sous-suite, toujours notée $\{(\mathbf{u}^\varepsilon, \varepsilon\sigma^\varepsilon, \tau^\varepsilon)\}_\varepsilon$, convergeant vers $(\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{S})$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^2(\Omega)) \times L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^2(\Omega)) \times L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^2(\Omega))$ faible-étoile lorsque ε tend vers zéro.

De même, $\{(\mathbf{u}'^\varepsilon, \varepsilon\sigma'^\varepsilon, \tau'^\varepsilon)\}_\varepsilon$ est une suite bornée de $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\Omega)) \times L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\Omega)) \times L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\Omega))$, donc on peut en extraire aussi une sous-suite, toujours notée $\{(\mathbf{u}'^\varepsilon, \varepsilon\sigma'^\varepsilon, \tau'^\varepsilon)\}_\varepsilon$, convergeant vers $(\mathbf{v}', \mathbf{p}', \mathbf{S}')$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\Omega)) \times L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\Omega)) \times L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\Omega))$ faible-étoile quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Or, d'après un théorème de compacité (voir [85]), on peut aussi extraire de $\{(\mathbf{u}^\varepsilon, \varepsilon\sigma^\varepsilon, \tau^\varepsilon)\}_\varepsilon$ une sous-suite, notée toujours $\{(\mathbf{u}^\varepsilon, \varepsilon\sigma^\varepsilon, \tau^\varepsilon)\}_\varepsilon$, telle que pour tout $T > 0$

$$(\mathbf{u}^\varepsilon, \varepsilon\sigma^\varepsilon, \tau^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{S}) \text{ dans } C([0, T]; \mathbf{H}^{1+\nu}(\Omega)) \times C([0, T]; \mathbf{H}^{1+\nu}(\Omega)) \times C([0, T]; \mathbf{H}^{1+\nu}(\Omega)).$$

De plus, nous avons aussi, pour tout $T > 0$, $\{(\mathbf{u}'^\varepsilon, \varepsilon\sigma'^\varepsilon, \tau'^\varepsilon)\}_\varepsilon$ converge faible-étoile vers $(\mathbf{v}', \mathbf{p}', \mathbf{S}')$ dans $L^2(0, T, \mathbf{L}^2(\Omega)) \times L^2(0, T, \mathbf{L}^2(\Omega)) \times L^2(0, T, \mathbf{L}^2(\Omega))$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, ainsi que

$$(\mathbf{u}'^\varepsilon, \varepsilon\sigma'^\varepsilon, \tau'^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbf{v}', \mathbf{p}', \mathbf{S}') \text{ dans } L^2(0, T; \mathbf{H}^{1+\nu}(\Omega)) \times L^2(0, T; \mathbf{H}^{1+\nu}(\Omega)) \times L^2(0, T; \mathbf{H}^{1+\nu}(\Omega)).$$

D'après le théorème 5.4.1, la fonction $1/(\alpha + \varepsilon^2\sigma)$ est bornée, comprise entre $1/2\alpha$ et $2/\alpha$, donc

$$\frac{\varepsilon}{\alpha + \varepsilon^2\sigma} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Soit ϕ un vecteur de $C_c^\infty([0, T] \times \Omega)$ tel que $\operatorname{div} \phi = 0$. Multiplions (5.9.1)₁ scalairement par ϕ dans $L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, il vient

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}^\varepsilon, \phi \rangle + \langle (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{u}^\varepsilon, \phi \rangle - (1 - \omega) \left\langle \frac{1}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma^\varepsilon} \Delta \mathbf{u}^\varepsilon, \phi \right\rangle - (1 - \omega) \left\langle \frac{\varepsilon^2 \operatorname{div} \sigma^\varepsilon \cdot \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon}{(\alpha + \varepsilon^2 \sigma^\varepsilon)^2}, \phi \right\rangle \\ + \left\langle \frac{\varepsilon^2 \sigma^\varepsilon \operatorname{div} \sigma^\varepsilon}{(\alpha + \varepsilon^2 \sigma^\varepsilon)^2}, \phi \right\rangle = \langle \mathbf{f}, \phi \rangle + \left\langle \frac{1}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma^\varepsilon} \operatorname{div} \tau^\varepsilon, \phi \right\rangle - \left\langle \frac{\varepsilon^2}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma^\varepsilon} w(\sigma^\varepsilon) \nabla \sigma^\varepsilon, \phi \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.9.8)$$

où

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma^\varepsilon} \nabla \sigma^\varepsilon, \phi \right\rangle &= - \left\langle \frac{\sigma^\varepsilon}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma^\varepsilon}, \operatorname{div} \phi \right\rangle + \left\langle \frac{\varepsilon^2 \sigma^\varepsilon \operatorname{div} \sigma^\varepsilon}{(\alpha + \varepsilon^2 \sigma^\varepsilon)^2}, \phi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\varepsilon^2 \sigma^\varepsilon \operatorname{div} \sigma^\varepsilon}{(\alpha + \varepsilon^2 \sigma^\varepsilon)^2}, \phi \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.9.9)$$

et

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma^\varepsilon} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon, \phi \right\rangle &= - \left\langle \frac{\operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon}{\alpha + \varepsilon^2 \sigma^\varepsilon}, \operatorname{div} \phi \right\rangle + \left\langle \frac{\varepsilon^2 \operatorname{div} \sigma^\varepsilon \cdot \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon}{(\alpha + \varepsilon^2 \sigma^\varepsilon)^2}, \phi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\varepsilon^2 \operatorname{div} \sigma^\varepsilon \cdot \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon}{(\alpha + \varepsilon^2 \sigma^\varepsilon)^2}, \phi \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.9.10)$$

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$, l'équation (5.9.8) tend vers

$$\alpha \langle \mathbf{v}', \phi \rangle + \alpha \langle (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \phi \rangle - (1 - \omega) \langle \Delta \mathbf{v}, \phi \rangle = \alpha \langle \mathbf{f}, \phi \rangle + \langle \operatorname{div} \mathbf{S}, \phi \rangle, \text{ dans } \Omega,$$

et ceci est vrai pour tout $\phi \in C_c^\infty([0, T] \times \Omega)$ tel que $\operatorname{div} \phi = 0$. Donc il existe $\pi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ telle que

$$\alpha (\mathbf{v}' + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) - (1 - \omega) \Delta \mathbf{v} + \nabla \pi = \alpha \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{S}, \text{ dans } \Omega.$$

Soit φ une fonction de $C_c^\infty([0, T] \times \Omega)$. Multiplions (5.9.1)₂ scalairement par φ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$,

$$\varepsilon \langle \varepsilon \sigma'^\varepsilon, \varphi \rangle + \varepsilon \langle (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla) (\varepsilon \sigma^\varepsilon), \varphi \rangle + \varepsilon \langle \varepsilon \sigma^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon, \varphi \rangle = -\alpha \langle \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon, \varphi \rangle. \quad (5.9.11)$$

On a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \varepsilon \langle \varepsilon \sigma'^\varepsilon, \varphi \rangle + \varepsilon \langle (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla) (\varepsilon \sigma^\varepsilon), \varphi \rangle + \varepsilon \langle \varepsilon \sigma^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon, \varphi \rangle \} = -\alpha \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon, \varphi \rangle.$$

Donc

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{v}, \varphi \rangle = 0,$$

pour tout φ dans $C_c^\infty([0, T] \times \Omega)$. Donc $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ dans Ω .

Maintenant, on choisit ψ un tenseur (symétrique) de $C_c^\infty([0, T] \times \Omega)$. Multiplions (5.9.1)₃ par ψ dans $L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$,

$$\langle \tau^\varepsilon, \psi \rangle + \text{We} \left\{ \langle \tau'^\varepsilon, \psi \rangle + \langle (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla) \tau^\varepsilon, \psi \rangle + \langle \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \tau^\varepsilon), \psi \rangle \right\} = 2\omega \langle \mathbf{D}[\mathbf{u}^\varepsilon], \psi \rangle. \quad (5.9.12)$$

Puisque $(\mathbf{u}^\varepsilon, \tau^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbf{v}, \mathbf{S})$ dans $(C([0, T]; \mathbf{H}^{1+\nu}(\Omega))) \times (C([0, T]; \mathbf{H}^{1+\nu}(\Omega)))$,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \tau^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}, \psi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \tau^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \psi \rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}, \psi \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

alors

$$\langle \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \tau^\varepsilon), \psi \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \mathbf{g}(\nabla \mathbf{v}, \mathbf{S}), \psi \rangle \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)).$$

Pour ε tendant vers zéro, l'équation (5.9.12) tend vers l'équation

$$\langle \mathbf{S}, \psi \rangle + \text{We} \left\{ \langle \mathbf{S}, \psi \rangle + \langle (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{S}, \psi \rangle + \langle \mathbf{g}(\nabla \mathbf{v}, \mathbf{S}), \psi \rangle \right\} = 2\omega \langle \mathbf{D}[\mathbf{v}], \psi \rangle, \quad (5.9.13)$$

pour tout ψ dans $C_c^\infty([0, T] \times \Omega)$.

Donc,

$$\mathbf{S} + \text{We} \left\{ \mathbf{S}' + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{S} + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{v}, \mathbf{S}) \right\} = 2\omega \mathbf{D}[\mathbf{v}], \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.9.14)$$

Nous utilisons les conditions (5.9.3) et (5.9.4) pour obtenir la convergence des données initiales, pour ε tendant vers zéro.

Nous avons donc démontré la convergence du modèle faiblement compressible (5.9.1) vers le modèle incompressible (5.9.5).

Quatrième partie

Perspectives

La vérité de demain se nourrit par l'erreur d'hier.

ANTOINE DE SAINT-EXUPÉRY

Chapitre 6

Perspectives

LES résultats obtenus dans ce travail nous laissent entrevoir plusieurs pistes de recherche. De nombreuses questions peuvent être posées. Tout d'abord au sujet du modèle considéré et des résultats obtenus. Peut-on étendre ces résultats à des situations plus générales ?

Si l'existence globale des solutions fortes des équations de Navier-Stokes et des équations de type Oldroyd est toujours effectué sous condition de données initiales petites, l'amélioration de ces résultats ainsi que de l'ordre de petitesse de ces données initiales restent toujours possible et peuvent être des problèmes ouverts et très importants à aborder. Nous allons présenter diverses directions qui peuvent être des projets de travaux ultérieurs ainsi que des idées pouvant faire suite aux travaux réalisés dans cette thèse.

6.1 Étude mathématique d'écoulements de fluides viscoélastiques viscoélastiques, stationnaires et faiblement compressibles de type Oldroyd dans un polygone convexe ou non convexe

Le résultat obtenu dans le chapitre 4, pour un écoulement stationnaire avec vitesse donnée au bord nulle, peut être prolongé. Il peut être intéressant de considérer des écoulements stationnaires de fluides viscoélastiques faiblement compressibles dans un domaine borné convexe \mathbf{D} de \mathbb{R}^2 ayant un bord $\partial\mathbf{D}$ de forme polygonale. Les points délicats de ces nouvelles questions sont les suivants.

1. Il semble possible d'adapter le résultat obtenu pour un seul angle convexe au cas d'un polygone convexe. La construction d'une partition de l'unité va jouer un rôle assez important.
2. Rechercher un espace convenable dans lequel nous allons trouver notre solution. Un candidat pourrait être l'espace des fonctions dont la norme est définie par :

$$\|u\|_{k,p,\beta_j}^p = \sum_{i_j=0}^k \left\| r_j^{\beta_j - k + i_j} u \right\|_{i_j,p}^p,$$

où $r_j(x) = |x - x_j|$ est la distance au sommet $S_j(x_j)$ de l'ouvert polygonal convexe \mathbf{D} .

3. Savoir comment améliorer ce résultat dans le cas d'un domaine ayant à la fois des angles convexes et des angles concaves. Nous devons étudier le comportement de la solution dans les coins concaves.
4. Tous nos résultats sont obtenus sous la condition d'écoulements isothermes. Ces mêmes questions peuvent être abordés aussi dans le cas non isotherme. Nous pouvons suivre le même procédé que celui adopté dans ce travail pour écrire le champ de vitesse \mathbf{u} comme une somme de deux parties \mathbf{v} et $\nabla\varphi$, ainsi que la division de \mathbf{v} et φ en parties singulières et parties régulières. La température, elle-même, sera aussi traitée comme une somme de deux parties, l'une singulière et l'autre régulière. La méthode de découplage approprié de la partie elliptique et la partie hyperbolique facilite la résolution du problème. Des travaux, comme ceux de A.Novótny et M.Padula (par exemple [77]) et S.A.Nazarov, A.Novótny et K.Pileckas (cf. [80]) pourront nous être utiles.
5. Enfin, une étude d'écoulements *non stationnaires* de fluides viscoélastiques faiblement compressibles dans un polygone serait intéressante, en particulier l'étude de comportement de la singularité en fonction du temps.

6.2 Écoulements de fluides viscoélastiques, stationnaires, faiblement compressibles et non isothermes avec des conditions au bord de type "rentrantes-sortantes"

Les conditions de type "rentrantes-sortantes" (avec vitesse non nulle au bord) peuvent être posées dans des domaines singuliers à divers titres. Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, l'étude de la régularité des écoulements de fluides viscoélastiques faiblement compressibles dans un polygone convexe peut être aussi abordé. Ainsi que, le comportement des solutions dans un coin concave ou, plus généralement, dans un polygone quelconque. Nous pouvons nous inspirer, à ce niveau, des travaux réalisés par J.R.Kweon et R.B.Kellogg (cf. [51, 53, 55]) sur les équations de Stokes et Navier-Stokes et prolonger leur résultat, si possible et avec des conditions convenablement choisies, pour un écoulement de fluide viscoélastique de type Oldroyd. La vitesse du fluide vérifie un système de Lamé, tandis que la température vérifie une équation de Laplace.

6.3 Limite incompressible pour des écoulements de fluides viscoélastiques faiblement compressibles avec des conditions bien ou mal préparées

Dans le résultat d'existence globale pour le modèle d'évolution de fluides viscoélastiques faiblement compressibles avec des conditions au bord bien préparées, une question importante serait de comprendre s'il est possible d'enlever l'hypothèse de petitesse sur le paramètre ω lié aux viscosités. Le même problème, mais avec des conditions initiales mal préparées, est un problème non abordé jusqu'à maintenant. Des résultats avec des conditions initiales mal préparées ont été obtenus pour les équations de Navier-Stokes compressibles, notamment ceux de R.Danchin [19] dans l'espace tout entier, de B.Desjardins, E.Grenier, P.-L.Lions et N.Masmoudi [22] dans un domaine borné avec des conditions au bord sur la vitesse de type Dirichlet et ceux de D.Bresch, B.Desjardins, D.Gérard-Varet [14] dans le cas d'un cylindre. En s'inspirant de ces

travaux, une telle étude pour les équations décrivant un fluide viscoélastique de type Oldroyd dans un domaine borné avec donnée initiale mal préparée serait très intéressante et sans doute plus délicate.

Cinquième partie

Bibliographie et Index

L'important est de faire en sorte que tout soit aussi simple que possible mais pas plus simple.

ALBERT EINSTEIN

Bibliographie

- [1] R.A.ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] S.AGMON, A.DOUGLIS, L.NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I,II*, Com. Pure and Appl. Math. **XII**, pp. 623-727, 1959, **XVII**, pp. 35-92, 1964.
- [3] A.ALAZARD, *Low mach number flows and combustion*, Siam J. Math. Anal. **38**(4), pp. 1186-1213, 2006.
- [4] A.ALAZARD, *Low mach number limit of the full Navier-Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **180**, pp. 1-73, 2006.
- [5] S.BARIŞ, *Flow of an Oldroyd 6-constant fluid between intersecting planes, one of which is moving*, Acta Mechanica **147**, pp. 125-135, 2001.
- [6] J.BICO, *Des gouttes pointues ?*, La matière en mouvement, Textes et Documents pour la Classe **234**, pp 20-21, 2007.
- [7] F.BOYER AND P.FABRIE, *Out flow boundary conditions for the incompressible non-homogeneous Navier-Stokes equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **7**(2), pp. 219-250, 2007.
- [8] H.BREZIS, *Points fixes*, Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse **4**(11), pp. 1-23, 1964-1965.
- [9] H.BREZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [10] H.BEIRÃO DA VEIGA, *Existence results in Sobolev spaces for a stationary transport equation*, Ricerche di Matematica, Suppl. Vol. **XXXVI**, pp. 173-184, 1987.
- [11] H.BEIRÃO DA VEIGA, *An L^p theory for the n -dimensional, stationary, compressible Navier-Stokes equations, and the incompressible limit for compressible fluid. The equilibrium solutions*, Comm. in Math. Physics **109**, pp. 229-248, 1987.
- [12] H.BEIRÃO DA VEIGA, *On the singular limit for slightly compressible fluids*, Calc. Var. **2**, pp. 205-218, 1993.
- [13] H.BESSAIH, *Limite de modèles de fluides compressibles*, Portugaliae Mathematica **52**, Fasc. 4, pp. 441-463, 1995.
- [14] D.BRESCH, B.DESJARDINS and D.GÉRARD-VARET, *Rotating fluids in a cylinder*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **11**(1), pp. 47-82, 2004.
- [15] Z.CAI AND S.KIM, *A finite element method using singular functions for the Poisson equation : corner singularities*, Siam J. Numer. Anal. **39**(1), pp. 286-299, 2001.
- [16] Z.CAI, S.KIM and B.C.SHIN, *Solution methods for the Poisson equation with corner singularities : numerical results*, Siam J. Sci. Comput. **23**(2), pp. 672-682, 2001.
- [17] J.Y.CHEMIN and N.MASMOUDI, *About lifespan of regular solutions of equations related to viscoelastic fluids*, SIAM J. Math. Anal. **33**(1), pp. 84-112, 2001.

- [18] M.DAUGE, *Résultats de régularité, singularité et indice pour l'opérateur de Stokes dans un polygone*, Journées Equations aux dérivées partielles, NUMDAM, <http://www.numdam.org>, pp. 1-8, 1980.
- [19] R.DANCHIN, *Zero Mach number limit in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série **35**, pp. 27-75, 2002.
- [20] R.DANCHIN, *Zero Mach number limit for compressible flows with periodic boundary conditions*, Amer. J. Math., **124**(6), pp. 1153-1219, 2002.
- [21] B.DESJARDINS and E.GRENIER, *Low Mach number limit of viscous compressible flows in the whole space*, Proc. R. Soc. Lond. A **455**, pp. 2271-2279, 1999.
- [22] B.DESJARDINS, E.GRENIER, P.-L.LIONS and N.MASMOUDI, *Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions*, J. Math. Pures Appl. **78**, pp. 461-471, 1999.
- [23] P.DUTTO and A.NOVOVNÝ, *Physically reasonable solutions to steady compressible Navier-Stokes equations in 2d exterior domains with nonzero velocity at infinity*, J. Math. Fluid. Mech. **3**, pp. 99-138, 2001.
- [24] G.I.ESKIN, *General boundary value problems for equations of principal type in a plane domain with angular points*, Uspekhi Mat. Nauk **18**, pp. 241-242, 1963 (en russe).
- [25] G.I.ESKIN, *The conjugacy problem for equations of principal type with two independent variables*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. **21**, pp. 245-292, 1970 (en russe), Engl. transl. in : Trans. Moscow Math. Soc. **21**, pp. 263-316, 1970.
- [26] D.G.EBIN, *The motion of slightly compressible fluids viewed as a motion with strong constraining force*, Ann. of Math.(2) **105**, pp. 141-200, 1977.
- [27] P.FABRIE and C.GALUSINSKI, *The slightly compressible Navier-Stokes equations revisited*, Nonlinear Anal. **46**(8), Ser. A : Theory Methods, pp. 1165-1195, 2001.
- [28] M.FLUECK, *Résolution numérique d'un problème à deux fluides par une méthode d'éléments finis structurés*, Thèse no 900, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 1990.
- [29] E.FERNÁNDEZ-CARA, F.GUILLEN and R.ORTEGA, *Some theoretical results concerning non-newtonian fluids of the Oldroyd kind*, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa-Classe di Scienze, Ser. 4, **26**(1), pp. 1-29, 1998.
- [30] E.FEIREISL and A.NOVOVNÝ, *The low mach number limit for the full Navier-Stokes-Fourier system*, Arch. Rational Mech. Anal. **186**, pp. 77-107, 2007.
- [31] I.GALLAGHER, *Résultats récents sur la limite incompressible*, Séminaire Bourbaki, XX^{ème} année, novembre 2003, <http://www.math.polytechnique.fr/~gallagher>.
- [32] P.GRISVARD, G.IOOSS, *Problèmes aux limites unilatéraux dans des domaines non réguliers*, Journées Equations aux dérivées partielles, NUMDAM, <http://www.numdam.org>, pp. 1-26, 1976.
- [33] P.GRISVARD, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 1985.
- [34] P.GRISVARD, *Singularities in Boundary Value Problems*, Research Notes in Applied Mathematics, Masson, Springer-Verlag, 1992.
- [35] G.C.GEORGIOU and M.J.CROCHET, *Compressible viscous flow in slits with slip at the wall*, J. Rheol. **38**, pp. 639-654, 1994.
- [36] G.C.GEORGIOU and M.J.CROCHET, *Time-dependent compressible extrudate-swell problem with slip at the wall*, J. Rheol. **38**(6), p.p. 1745-1755, 1994.

- [37] C.GUILLOPÉ and J.-C.SAUT, *Global existence and one-dimensional nonlinear stability of shearing motions of viscoelastic fluids of Oldroyd type*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **24**(3) , pp. 369-401, 1990.
- [38] C.GUILLOPÉ and J.-C.SAUT, *Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law*, Nonlinear Anal. **15**(9), pp. 849-869, 1990.
- [39] C.GUILLOPÉ and J.-C.SAUT, *Existence and stability of steady flows of weakly viscoelastic fluids*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **119** A, pp. 137-158, 1991.
- [40] C.GUILLOPÉ and R.TALHOUK, *Steady flows of slightly compressible viscoelastic fluids of Jeffreys' type around an obstacle*, Diff. Int. Eq. **16**(11), pp. 1293-1320, 2003.
- [41] C.GUILLOPÉ, A.MNEIMNÉ AND R.TALHOUK, *Asymptotic behaviour, with respect to the isothermal compressibility coefficient, for steady flows of weakly compressible viscoelastic fluids*, Asymptot. Anal., **35**(2), pp. 127-150, 2003.
- [42] C.GUILLOPÉ, A.HAKIM AND R.TALHOUK, *Existence of steady flows of slightly compressible viscoelastic fluids of White-Metzner type around an obstacle*, Commun. Pure Appl. Anal., **4**(1), pp. 23-43, 2005.
- [43] M.G.GARRONI, V.A.SOLONNIKOV, M.A.VIVALDI, *Green function for the heat equation with oblique boundary conditions in an angle*, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa Classe di Scienze, Ser. 4, **25**(3-4), pp. 455-485, 1997.
- [44] J.HRON, J.MÁLEK, J.NEČAS and K.R.RAJAGOPAL, *Numerical simulations and global existence of solutions of two-dimensional flows of fluids with pressure and shear dependent viscosities*, Math. Comput. Simulation **61**(3-6), pp. 297-315, 2003.
- [45] J.L.IMPAGLIAZZO, *Résolution des équations de Navier-Stokes compressibles à l'aide de la méthode de décomposition*, Thèse de l'université de Toulon et du Var, 1997.
- [46] D.ISABEY, R.FODIL, et B.LOUIS, *Dynamique des Fluides Biologiques*, La houille blanche, no. 4, pp. 36-42, 2005.
- [47] H.ISOZAKI, *Singular limits for the compressible Euler equation in an exterior domain. II. Bodies in a uniform flow*, Osaka J. Math. **26**(2). pp. 399-410, 1998.
- [48] J.KIM and P.MOIN, *Large eddy simulation of turbulent channel flow ILLIAC 5 calculation*, NASA Center : Ames Research Center, 1980.
Page web : <http://www.nasa.gov/centers/ames/home/index.html>
- [49] R.B. KELLOGG, J.E.OSBORN, *A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon*, J. Funct. Anal. **21**, pp. 397-431, 1976.
- [50] J.R.KWEON and R.B.KELLOGG, *Compressible Navier-Stokes equations in a bounded domain with inflow boundary condition*, Siam J. Math. Anal. **28**(1), pp. 94-108, 1997.
- [51] J.R.KWEON and R.B.KELLOGG, *Smooth solution of the compressible Navier-Stokes equations in an unbounded domain with inflow boundary condition*, J. Math. Anal. Appl. **220**, pp. 657-675, 1998.
- [52] J.R.KWEON, *Compressible Stokes problem on nonconvex polygonal domains*, J. Diff. Eq. **176**(1), pp. 290-314, 2001.
- [53] J.R.KWEON, R.B.KELLOGG, *Compressible Stokes problem on nonconvex polygonal domains*, J. Diff. Eq. **176**, pp. 290-314, 2001.
- [54] J.R.KWEON, R.B.KELLOGG, *Regularity of solutions to the Navier-Stokes equations for compressible barotropic flows on a polygon*, Arch. Rat. Mech. Anal. **163**(1), pp. 35-64, 2002.

- [55] J.R.KWEON, R.B.KELLOGG, *Regularity of solutions to the Navier-Stokes system for compressible flows on a polygon*, Siam J. Math. Anal. **35**(6), pp. 1451-1485, 2004.
- [56] V.A.KOZLOV, V.G.MAZ'YA, J.ROSSMANN, *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*, AMS, Providence, RI, 1997.
- [57] V.A.KOZLOV, V.G.MAZ'YA, J.ROSSMANN, *Spectral Problems Associated with Corner Singularities of Solutions to Elliptic Equations*, AMS, Providence, RI, 2001.
- [58] V.A.KONDRAT'EV, *Boundary value problems for elliptic equations in conical regions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **153**, pp. 27-29, 1963 (en russe), Engl. transl. in : Soviet Math Dokl. **4**, pp. 1600-1611, 1963.
- [59] V.A.KONDRAT'EV, *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. **16**, pp. 209-292, 1967 (en russe).
- [60] A.KOKOTOV and B.PLAMENEVSKII, *On the asymptotics of solutions to the Neumann problem for hyperbolic systems in domains with conical points*, St. Petersburg Math. J. **16**, pp. 477-506, 2005.
- [61] S.KLAINERMAN and A.MAJDA, *Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids*, Comm. Pure Appl. Math. **34**(4), pp. 481-524, 1981.
- [62] S.KLAINERMAN and A.MAJDA, *Compressible and incompressible fluids*, Comm. Pure Appl. Math. **35**(5), pp. 629-651, 1982.
- [63] YA.B.LOPATINSKII, *On one type of singular integral equations*, Teoret. i Prikl. Mat. (Lwow) **2**, pp. 53-57, 1963 (en russe).
- [64] O.A.LADYZHENSKAYA and G.A.SEREGIN, *Regularity of solutions of two-dimensional equations in fluid dynamics models with nonlinear viscosity*, J. Math. Sci., **109**(5), pp. 1911-1927, 2002.
- [65] Z.LEI, *Global existence of classical solutions for some Oldroyd-B model via the incompressible limit*, Chin. Ann. Math. **27B**(5), pp. 565-580, 2006.
- [66] P.L.LIONS and N.MASMOUDI, *Incompressible limit for a viscous compressible fluid*, J. Math. Pures Appl. **77**(6), pp. 585-627, 1998.
- [67] P.L.LIONS and N.MASMOUDI, *Une approche locale de la limite incompressible*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **329**(5), pp. 387-392, 1999.
- [68] P.L.LIONS and N.MASMOUDI, *Global solutions for some Oldroyd models of non-Newtonian flows*, Chin. Ann. Math. **21B**(2), pp. 131-146, 2000.
- [69] A.MATSUMURA and T.NISHIDA, *Initial boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids*, Commun. Math. Phys. **89**, pp. 445-464, 1983.
- [70] J.MÁLEK, J.NEČAS and K.R.RAJAGOPAL, *Global analysis of solutions of the flows of fluids with pressure dependent viscosities*, Arch. Ration. Mech. **165**(3), pp. 243-269, 2002.
- [71] L.MOLINET and R.TALHOUK, *Existence and stability results for 3-D regular flows of viscoelastic fluids of White-Metzner type*, Nonlinear Anal. **58**, pp. 813-833, 2004.
- [72] L.MOLINET and R.TALHOUK, *On the global and periodic regular flows of viscoelastic fluids with a differential constitutive law*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. **11**, pp. 349-359, 2004.

- [73] S.MATUŠU-NEČASOVÁ, A.SEQUEIRA and J.VIDEMAN, *Existence of classical solutions for compressible viscoelastic fluids of Oldroyd type past an obstacle*, Math. Meth. Appl. Sci. **22**, pp. 449-460, 1999.
- [74] S.MONNIAUX, *Navier-Stokes equations in arbitrary domains : the Fujita-Kato scheme*, Math. Res. Lett. **13**(2-3), pp. 455-461, 2006.
- [75] S.NOVO, *Compressible Navier-Stokes model with inflow-outflow boundary conditions*, J. Math. Fluid Mech. **7**, pp. 485-514, 2005.
- [76] A.NOVOTNÝ, *Some remarks to the compactness of steady compressible isentropic Navier-Stokes equations via the decomposition method*, Comment. Math. Univ. Carolinae **37**(2), pp. 305-342, 1996.
- [77] A.NOVOTNÝ and M.PADULA, *Existence and uniqueness of stationary solutions for a viscous compressible heat-conducting fluid with large potential external forces*, Translated from Sibirs. Mat. Zh., **34**(5), pp. 120-146, 1993. Production Siberian Math. J., **34**(5), pp. 898-922, 1993.
- [78] A.NOVOTNÝ, M.PADULA, *Physically reasonable solutions to steady compressible Navier-Stokes equations in 3D-exterior domains ($v_\infty \neq 0$)*, Math. Ann. **308**, pp. 439-489, 1997.
- [79] A.NOVOTNÝ and K.PILECKAS, *Steady compressible Navier-Stokes equations with large potential forces via a method of decomposition*, Math. Meth. Appl. Sci. **21**, pp. 665-684, 1998.
- [80] S.A.NAZAROV, A.NOVOTNÝ, K.PILECKAS, *On steady compressible Navier-Stokes equations in plane domains with corners*, Math. Ann. **304**, pp. 121-150, 1996.
- [81] S.A.NAZAROV, M.SPECOVIUS-NEUGEBAUER, J.H.VIDEMAN, *Nonlinear artificial boundary conditions for the Navier-Stokes equations in an aperture domain*, Math. Nachr. **265**(1), pp. 24-67, 2004.
- [82] M.RENARDY, *Existence of slow steady flows of viscoelastic fluids with differential constitutive equations*, Z. Angew. Math. Mech. **65**(9), pp. 449-451, 1985.
- [83] M.RENARDY, *Mathematical Analysis of Viscoelastic Flows*, Siam Series In Applied Mathematics **73**, 2000.
- [84] O.REYNOLDS, *An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water in Parallel Channels Shall Be Direct or Sinuous and of the Law of Resistance in Parallel Channels*, Proceedings of the Royal Society of London **35**, pp. 84-99, 1883.
- [85] J.SIMON, *Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$* , Ann. Mat. Pura Appl. **146**(4), pp. 65-96, 1987.
- [86] M.SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 4, Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979.
- [87] G.SWEERS, *Hopf's lemma and two dimensional domains with corners*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, Suppl. **XXVIII**, pp. 383-419, 1997.
- [88] M.SLEMROD, *Constitutive relations for Rivlin-Ericksen fluids based on generalized rational approximation*, Arch. Ration. Mech. Anal. **146**(1), pp. 73-93, 1999.
- [89] M.SLEMROD, *Constitutive relations for monatomic gases based on a generalized rational approximation to the sum of the Chapman-Enskog expansion*, Arch. Ration. Mech. Anal. **150**, pp. 1-22, 1999. Journal for the History of Astronomy **25**, pp. 115-141, 1994.

- [90] H.SOHR, *The Navier-Stokes Equations. An Elementary Functional Analytic Approach*, Boston ; Basel ; Berlin ; Birkhäuser, 2001.
- [91] S.SCHOCHET, *The compressible Euler equations in a bounded domain : existence of solutions and the incompressible limit*, Comm. Math. Phys. **104**(1), pp 49-75, 1986.
- [92] R.TALHOUK, *Analyse mathématique de quelques écoulements de fluides viscoélastiques*, thèse de l'université Paris-Sud, Centre d'Orsay, no. d'ordre 3294, 1994.
- [93] R.TALHOUK, *Écoulements stationnaires de fluides viscoélastique faiblement compressibles*, C. R. Acad. Sc. Paris **320**, Série I, pp. 1025-1030, 1995.
- [94] R.TALHOUK, *Existence results for steady flow of weakly compressible viscoelastic fluids with a differential constitutive law*, Diff. Int. Eq. **12**, pp. 741-772, 1999.
- [95] R.TALHOUK, *Existence locale et unicité d'écoulements des fluides viscoélastique dans des domaines non bornés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328**(1), pp. 87-92, 1999.
- [96] R.TEMAM, *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, Revised Edition, 1984.
- [97] A.VALLI, *Periodic and stationary solutions for compressible Navier-Stokes equations via a stability method*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, Ser. 4, **10**(4), pp. 607-647, 1983.
- [98] M.VAN DYKE, *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press Stanford, California, 1982.
- [99] D.A.VOROTNIKOV and V.G.ZVYAGIN, *On the convergence of solutions of the regularized problem for motion equations of Jeffreys viscoelastic medium to solutions of the original problem*, J. Math. Sci., **144**(5), 2007.

Index thématique

Espaces de traces

Sobolev $W^{k-\frac{1}{q},q,\Gamma}(\Gamma)$, 67
Sobolev avec poids $\mathcal{V}_\xi^{k-\frac{1}{2},2}(\Gamma)$, 101

Espaces

Espace $\mathfrak{D}_\xi^{k,q}(\Omega)$, 108
Espace $\mathfrak{N}_\xi^{k,q}(\Omega)$, 108
Hölder avec poids $\Lambda_\xi^{m+\delta}(\Omega)$, 101
Lebesgue $L^p(\Omega)$, 144
Sobolev $H^k(\Omega)$, 67
Sobolev $W^{k,q}(\Omega)$, 67
Sobolev avec poids $\mathcal{V}_\xi^{k,p}(\Omega)$, 101

Modélisation

Dirichlet, 114
Equation de transport, 71
Fluide faiblement compressible, 66
Modèle compressible avec nombre de Mach, 144
Modèle compressible non stationnaire avec dimension, 140
Modèle compressible stationnaire avec dimension, 64
Modèle compressible stationnaire sans dimension, 65
Modèle incompressible, 146
Neumann, 109
Stokes, 111

Résultats principaux

Convergence, 147
Existence et unicité dans un domaine singulier, 103
Existence et unicité, 68
Existence globale, 145
Existence locale, 147
Transport dans un domaine singulier, 114

Symboles

Bord d'un domaine Γ , 64
Densité ρ , 64
Domaine Ω , 64
Nombre de Mach ε , 141
Nombre de Reynolds Re , 65
Nombre de Weissenberg We , 65
Pression p , 64
Tenseur des contraintes τ , 64
Vitesse \mathbf{u} , 64