

Contribution à l'analyse et à la commande de systèmes non linéaires à commande échantillonnée

Laurent Burlion

▶ **To cite this version:**

Laurent Burlion. Contribution à l'analyse et à la commande de systèmes non linéaires à commande échantillonnée. Automatique / Robotique. Université Paris Sud - Paris XI, 2007. Français. NNT : . tel-00461750

HAL Id: tel-00461750
https://theses.hal.science/tel-00461750

Submitted on 5 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Paris-Sud
Ecole Doctorale STITS - Orsay

Thèse de Doctorat en Sciences

présentée par
Burlion Laurent

Titre :

Contribution à l'analyse et à la commande de systèmes non linéaires à commande échantillonnée

Soutenue devant la Commission d'examen :

- M. A. Astolfi : rapporteur
- M. J. Daafouz : président du jury
- M. C. Moog : rapporteur
- M^{me} F. Lamnabhi-Lagarrigue : directrice de thèse
- M. T. Ahmed-Ali : co-encadrant de thèse
- M. C. Prieur : examinateur

le 9 février 2007

Remerciements

Je souhaite d'abord remercier tous les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail : Jamal Daafouz président du jury, Alessandro Astolfi et Claude Moog rapporteurs de ma thèse ainsi que Christophe Prieur qui en a été examinateur.

Je remercie chaleureusement Madame Françoise Lamnabhi-Lagarrigue, Directeur de Recherche C.N.R.S, sous la direction de qui j'ai eu la chance de réaliser cette thèse. Ses qualités humaines et ses encouragements m'ont considérablement aidé tout au long de ces trois années. J'ai beaucoup de reconnaissance pour Madame Lamnabhi-Lagarrigue et je souhaite continuer à collaborer avec son équipe de recherche. J'adresse tous mes encouragements les plus chaleureux à Romain Postoyan qui commence actuellement une thèse dans l'équipe de Madame Lamnabhi-Lagarrigue et qui m'a aidé à corriger les coquilles du présent mémoire par sa relecture détaillée.

Je ne saurais comment remercier Tarek Ahmed-Ali, enseignant-chercheur à l'Ecole Nationale Supérieure des Etudes et Techniques de l'Armement qui a co-encadré mes travaux et dont les qualités scientifiques et humaines m'ont indéniablement permis de mener à bien cette thèse. Sa bonne humeur et l'amitié que nous avons tissée ensemble m'ont considérablement soutenu dans les moments de travail les plus intenses.

Je remercie d'autant plus mes encadrants Françoise Lamnabhi-Lagarrigue et Tarek Ahmed-Ali qu'ils ont accepté de diriger ma thèse dans des conditions d'éloignement géographique. En effet, j'occupe depuis Octobre 2003 un poste d'ingénieur d'études et d'expertise au Laboratoire de Recherches Balistiques et Aérodynamiques à Vernon (Eure).
A ce propos, je suis très sensible à la bienveillance de la Direction de cet établissement qui m'a permis de disposer du temps et des moyens pour mener à bien mes travaux de recherche et je remercie plus particulièrement Messieurs Philippe Juliot, Thierry Perard, Didier Gobillot et Thierry Marot, avec une pensée pour Christophe Montaz qui nous a quittés.
Je remercie tous mes collègues de travail pour l'excellente ambiance dans laquelle j'ai pu réaliser mes travaux et en particulier Jean-Pierre Nouaille dont j'ai partagé le bureau pendant près de deux ans.

Je remercie Monsieur Nicolas Seube, enseignant-chercheur à l'Ecole Nationale Supérieure des Etudes et Techniques de l'Armement qui m'a fait découvrir l'automatique non linéaire.

Je remercie vivement toute ma famille ainsi que tous mes amis de m'avoir tant soutenu et tant apporté au cours de ces dernières années. Je remercie d'autant plus mes parents, Clémence, Bertrand et Nicolas, qu'ils sont venus m'encourager à la soutenance de thèse malgré la distance et différentes contraintes.

J'ai aussi une pensée particulière pour mon défunt grand-père Louis Yvinec qui appréciait tant les Mathématiques.

Enfin, le dernier mais aussi le premier...
C'est dans le respect des convictions de chacun et sans vouloir heurter quiconque que je remercie de tout coeur Celui qui pour moi est le chemin, la vérité et la vie : le Seigneur Jésus Christ.

Résumé

A la frontière des systèmes non linéaires continus et discrets, la classe des systèmes non linéaires à commande échantillonnée est une classe de systèmes à part entière qui a stimulé et stimule toujours de nombreuses recherches. Le sujet est d'autant plus important qu'il a été trop souvent sous estimé au profit de la recherche sur les commandes continues alors que paradoxalement les commandes sont principalement implémentées numériquement sur les applications industrielles actuelles. S'appuyant sur les dernières recherches du domaine, cette thèse se veut à la fois une contribution à l'étude et à la synthèse de lois de commande échantillonnées pour certaines classes de systèmes non linéaires.

Table des matières

1 Introduction générale **5**
- 1.1 Présentation des thèmes des travaux de la thèse . . . 6
- 1.2 Présentation du mémoire . . . 9
- 1.3 Publications . . . 11

2 Table des notations **13**

3 Schéma d' Euler sur un retour dynamique de l'état **16**
- 3.1 Introduction . . . 16
  - 3.1.1 Exemple introductif et motivation . . . 16
- 3.2 Echantillonnage de commandes dynamiques . . . 18
  - 3.2.1 Emulation d'un retour statique de l'état . . . 18
  - 3.2.2 Cadre mathématique utilisé . . . 18
  - 3.2.3 Notre résultat principal . . . 21
    - 3.2.3.1 Remarque sur le cas linéaire . . . 26
- 3.3 Simulations et résultats numériques . . . 27
  - 3.3.1 Exemple 1 . . . 27
  - 3.3.2 Exemple 2 . . . 28
- 3.4 Conclusion . . . 29

4 Introduction aux approximations d'ordres supérieurs **32**
- 4.1 Introduction . . . 32
- 4.2 A propos de l'approximation de systèmes à commande échantillonnée . . . 33
- 4.3 Cadre mathématique des systèmes SPA stables . . . 35
  - 4.3.1 Quelques définitions et résultats issus de la littérature . . . 35
  - 4.3.2 Conséquence sur la structure des commandes d'ordre supérieur . . . 37
- 4.4 Utilisation des approximations à base de séries de Taylor-Lie . . . 39
  - 4.4.1 Notations . . . 39
  - 4.4.2 Quelques résultats sur la comparaison de contrôleurs . . . 40
  - 4.4.3 Quelques exemples illustratifs . . . 51
    - 4.4.3.1 Exemple 1 . . . 52
    - 4.4.3.2 Exemple 2 . . . 53

5 Procédure de Backstepping et échantillonnage **56**
5.1 Introduction . . . 56
5.2 Un résultat général . . . 57
5.2.1 Exemple 1 . . . 62
5.3 Cas des systèmes sous forme strict-feedback . . . 65
5.3.1 Algorithme basé sur la commande continue classique . . . 65
5.3.2 Algorithme basé sur un nouveau type de fonction de Lyapunov . . . 73
5.3.3 Exemple 2 . . . 80
5.4 Conclusion . . . 83

6 Procédure de Forwarding et échantillonnage **85**
6.1 Introduction . . . 85
6.2 Synthèse de la commande continue . . . 86
6.3 Synthèse de la commande échantillonnée . . . 89
6.4 Exemple . . . 98
6.4.1 Synthèse de la commande continue . . . 99
6.4.2 Synthèse de la commande échantillonnée . . . 100

7 Commande adaptative et échantillonnage **104**
7.1 Introduction . . . 104
7.2 Prérequis Mathématiques . . . 105
7.2.1 Notations . . . 105
7.2.2 Quelques outils Mathématiques préliminaires . . . 106
7.3 Synthèse de la commande adaptative . . . 109
7.4 Exemples et résultats numériques . . . 120
7.4.1 Exemple 1 . . . 120
7.4.2 Exemple 2 . . . 122
7.5 Conclusion . . . 126

8 Conclusion générale et perspectives **128**
8.1 Synthèse du travail réalisé . . . 128
8.2 Perspectives immédiates . . . 128
8.3 Problèmes ouverts et thèmes de recherches futures . . . 129

9 Résultats numériques **130**
9.1 Echantillonnage d'un retour dynamique de l'état : exemple 1 . . . 130
9.2 Echantillonnage d'un retour dynamique de l'état : exemple 2 . . . 132
9.3 Introduction aux ordres supérieurs : exemple 1 . . . 136
9.4 Introduction aux ordres supérieurs : exemple 2 . . . 139
9.5 Backstepping : exemple 1 . . . 141
9.6 Cas Strict-Feedback : exemple 2 . . . 144
9.7 Forwarding : exemple 1 . . . 148
9.8 Commande adaptative : exemple 1 . . . 151

9.9 Commande adaptative : exemple 2 154

Chapitre 1

Introduction générale

Ces dernières décennies ont été marquées par un très grand développement de l'automatique non linéaire dans la cadre des systèmes continus où la dynamique est non linéaire mais suffisamment différentiable. Nous pouvons raisonnablement affirmer que le sujet a été largement traité tant dans le domaine de la commande que de l'observation en présence de bruits et de paramètres inconnus ([55, 60, 64, 100, 101, 104, 109] pour n'en citer que quelques uns). De nos jours, c'est l'étude de phénomènes plus complexes (saturation, hystérésis, retard, dynamiques discontinues, contrôle des EDP etc...) qui occupe principalement la communauté scientifique qui fait de la recherche théorique dans le cadre de l'automatique non linéaire continue.
Parallèlement, de nombreux travaux ont été menés sur les systèmes non linéaires discrets : il a été mis en exergue que bien souvent les idées empruntées au cadre continu sont plus difficiles à mettre en oeuvre mais là encore la recherche a permis de résoudre beaucoup de problèmes [23, 24, 56, 75, 79, 114].
A la frontière du continu et du discret, les systèmes non linéaires à commande échantillonnée ont paradoxalement suscité moins de recherche. En effet, depuis plusieurs années, de nombreux chercheurs ont souligné que l'étude massive des systèmes non linéaires continus a d'abord été lancée alors que les moyens de commandes et d'asservissements anciens étaient analogiques. Cependant, depuis l'explosion industrielle des outils numériques, les commandes sont presque toujours implémentées numériquement dans la pratique et il est regrettable que la synthèse de la commande numérique de systèmes continus ne soit pas encore un sujet complètement mature. En effet, pendant très longtemps, l'émulation qui consiste à bloquer sur chaque période d'échantillonnage la commande synthétisée dans le cadre continu a été quasiment la seule technique utilisée. La technique d'émulation est intuitive et donne des résultats acceptables sous certaines conditions pour des fréquences d'échantillonnage très élevées [65]. Cependant, en pratique, les fréquences d'échantillonnage requises pour garantir les performances de la synthèse continue sont trop élevées et dépassent les capacités matérielles. Il était ainsi nécessaire que les systèmes à commande échantillonnée soient davantage étudiés.

Dans le cadre des systèmes linéaires, la synthèse de commandes échantillonnées est un sujet qui a été largement traité [29] et qui ne présente pas de complication majeure par rapport

à l'étude des systèmes linéaires discrets et continus. En effet, pour cette classe de systèmes le discrétisé exact, qui correspond à l'équation aux différences qui donne la loi suivie par la solution du système à chaque instants d'échantillonnage, peut être aisément déterminé. L'étude de la classe de systèmes linéaires à commande échantillonnée (notamment par l'usage de la transformée en z) a permis de montrer que la différence principale par rapport au cadre continu est l'apparition de zéros supplémentaires [116] lors de l'échantillonnage. De plus, le comportement du système à commande échantillonnée entre deux instants d'échantillonnage a pu être étudié [29]. Ainsi, l'analyse linéaire montre que l'échantillonnage change la structure d'un système et qu'il requiert des études supplémentaires par rapport au cas continu, c'est à dire par rapport à une simple émulation.
C'est d'ailleurs le changement de structure des systèmes par l'échantillonnage de la commande qui a fait l'objet des premiers travaux dans le domaine non linéaire. Depuis la fin des années 80, de nombreux chercheurs se sont intéressés aux principales notions rencontrées dans l'étude des systèmes non linéaires (commandabilité, linéarisation exacte, forme normale, degré relatif et dynamique des zéros) lorsque la commande est échantillonnée [7, 11, 14, 13, 43, 58, 80, 116]. A noter que ces notions sont aussi liées à l'ordre de l'approximation lorsque nous ne pouvons obtenir qu'une approximation du discrétisé exact.
Parallèlement, les premier travaux de synthèse de commande ont eu lieu pour des classes particulières de systèmes non linéaires à commande échantillonnée [10, 12, 26, 47, 49, 61, 87, 110, 111, 112]. Outre les techniques basées sur l'émulation (CTD : continuous-time design), la deuxième classe de méthodes qui prend véritablement en compte l'échantillonnage cherche dans un premier temps à déterminer ou à approximer le discrétisé-exact (DTD : Discrete Time Design). Dans un second temps, la synthèse de la commande est effectuée à partir des méthodes de synthèse de commandes de systèmes non linéaires discrets. La détermination du discrétisé exact se fera dans la majeure partie des cas via des approximations en supposant à nouveau la fréquence d'échantillonnage assez élevée pour que l'approximation soit bonne.
Ces dernières années, de nombreux travaux ont été effectués pour montrer sous quelles conditions une commande synthétisée sur une approximation du discrétisé exact garde ses propriétés une fois qu'elle est appliquée sur le système à commande échantillonnée : un nouveau cadre mathématique a d'ailleurs été instauré [85, 90]. Il permet de donner des conditions sur l'approximation du discrétisé exact et sur la commande utilisée pour conserver une propriété de stabilisation semi-globale pratique. De nombreuses études traitant différents problèmes de commande ont suivies [65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 84, 87, 88, 91]. C'est dans ce cadre mathématique que nous avons établi beaucoup de nos résultats dans la suite logique de ceux de [91].

1.1 Présentation des thèmes des travaux de la thèse

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à plusieurs thèmes relatifs à la commande échantillonnée de systèmes non linéaires.

Le premier thème que nous avons abordé est celui de l'échantillonnage d'une commande dynamique d'un système non linéaire. Nous avons alors affaire à un système hybride dans la mesure où la commande dynamique discrétisée est régie par une équation aux différences et où la dynamique du système pilotée par la commande échantillonnée est régie par une équation différentielle non linéaire. La classe de systèmes à commande dynamique échantillonnée est décrite dans [112] comme une sous-classe des systèmes impulsionnels et un théorème de convergence locale asymptotique pour les systèmes non linéaires est donné. Parallèlement, une autre équipe [49] s'est intéressée à la commande statique échantillonnée de systèmes non linéaires et a démontré que l'émulation d'une commande globalement asymptotiquement stabilisante garde sa propriété sous réserve d'hypothèses assez fortes. Nous avons alors travaillé sur l'unification de ces deux résultats et nous avons obtenu un théorème garantissant la convergence globale asymptotique au moyen d'une commande dynamique dont la dynamique est remplacée par une équation aux différences, la commande apparaissant alors comme une commande échantillonnée dans le système initial. L'équation aux différences choisie fut obtenue par un schéma de discrétisation d'Euler mais ceci est un choix préliminaire et d'autres types de schéma pourraient être appliqués par la suite. Ici, notre contribution est d'unifier les deux résultats de [112] et [49] ainsi que d'utiliser le formalisme des systèmes hybrides pour démontrer des résultats relatifs aux systèmes à commande échantillonnée.

Le second thème auquel nous nous sommes intéressés et qui a été beaucoup plus étoffé que le premier est celui de la synthèse de commandes échantillonnées à partir d'approximations de Taylor-Lie d'ordres supérieurs du discrétisé exact. Nous utilisons aussi la structure spécifique suivante pour déterminer une commande d'ordre r :

$$u_k^r(x) = u_c(x) + \sum_{i=1}^{r} T^i u_i(x)$$

u_c est la commande que nous synthétiserions dans un cadre continu et T est la période d'échantillonnage. Le choix d'utiliser des approximations de Taylor-Lie d'ordres supérieurs pour le discrétisé exact d'un système à commande échantillonnée ainsi qu'une structure de commande sous forme de séries de la période d'échantillonnage basée sur la commande continue se justifie par le nouveau cadre mathématique introduit par [85, 90]. Ce cadre donne des théorèmes très puissants qui permettent de conserver les propriétés d'une commande synthétisée sur une approximation du discrétisé exact (souvent incalculable) une fois qu'elle est appliquée sur le discrétisé exact. C'est notamment la propriété finale de stabilisation semi globale pratique asymptotique qui est visée pour le système à commande échantillonnée. Remarquons aussi qu'une méthode basée sur des approximations à base de séries de Taylor aux coefficients exprimés sous formes de dérivées de Lie est préférable [58] aux méthodes basées sur les séries de Volterra [39] et de Fliess [55], ou sur la linéarisation de Carleman [100, 108]. En effet, [58] montre qu'elle généralise l'exponentielle de matrice utilisée pour traiter le cas linéaire et qu'elle est simple d'usage pour étudier les discrétisés exacts associés à des systèmes non linéaires à commande échantillonnée.

Il s'agit aussi d'une méthodologie de synthèse de commande qui ajoute à la commande émulée des termes dépendants de la période d'échantillonnage afin de contrer la perte de performance occasionnée par l'échantillonnage d'une commande synthétisée en continu. Cette méthodologie a été introduite dans [91] et nous a inspiré des extensions.
Tout d'abord nous avons contribué à mettre en place les outils permettant d'apprécier le gain en précision et en vitesse de convergence lorsque nous augmentons l'ordre de la commande. Ensuite, nous avons élaboré de nouveaux algorithmes permettant de synthétiser des commandes d'ordre supérieur pour des classes de systèmes non linéaires bien spécifiques (strict-feedback et strict-feedforward). Alors que les approximations d'ordre supérieur modifient la structure des systèmes non linéaires (qui deviennent notamment non affines en la commande), nos travaux ont permis de s'affranchir de cette difficulté par la synthèse récursive des termes de la loi de commande. Nous avons alors notamment pu étendre le résultat de [87] qui s'était limité à l'approximation d'Euler afin de conserver la structure de la classe de systèmes non linéaires.

Enfin, le troisième thème auquel nous nous sommes intéressés est celui de la commande adaptative directe des systèmes non linéaires (mais linéairement paramétrés) à commande échantillonnée. La loi d'adaptation paramétrique étant régie par une équation aux différences nous sommes à nouveau dans le cadre du premier thème, mais cette fois-ci nous n'avons pas cherché à préserver une propriété de stabilisation globale asymptotique par échantillonnage ; cette fois, nous avons utilisé les outils développés dans le second thème pour synthétiser des commandes adaptatives afin de stabiliser semi globalement pratiquement asymptotiquement des systèmes non linéaires à paramètres inconnus et à commande échantillonnée. Partant d'une loi de commande synthétisable en continu et de la forme : $u_c(x, \widehat{\theta})$ avec pour loi d'adaptation paramétrique $\dot{\widehat{\theta}} = \psi_c(x, \widehat{\theta})$, nous avons montré que nous pouvions synthétiser des commandes de la forme :

$$u_k^r(x, \widehat{\Theta}_{r+1}) = u_c(x, \widehat{\theta}_1) + \sum_{i=1}^{r} T^i u_i(x, \widehat{\Theta}_{i+1})$$

où la loi d'adaptation s'écrit pour $i \in \{0, \ldots, r\}$,

$$\widehat{\theta}_{i+1}^{+} = \widehat{\theta}_{i+1} + \sum_{j=1}^{r+1-i} T^j \phi_{i+1,j}(x, \widehat{\Theta}_j)$$

sachant que le vecteur $\widehat{\Theta}_j = (\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \ldots, \widehat{\theta}_j)^T$ a été introduit par une sur-paramétrisation et que la loi d'adaptation continue discrétisée par un schéma d'Euler est retrouvée lorsque $r = 1$, i.e $\phi_{1,1}(x, \widehat{\theta}_1) = \psi_c(x, \widehat{\theta}_1)$.
Notre contribution est ainsi d'étendre les résultats relatifs à la commande adaptative basée sur l'approximation d'Euler [110, 111] et de généraliser les résultats de [47]. Par rapport à [47], la contribution réside dans le fait que la loi d'adaptation est bien synthétisée sur la base d'outils relatifs à une loi d'adaptation continue (et non discrète), notre méthode

ne s'applique pas seulement à des systèmes non linéaires linéarisables par bouclage et les contrôleurs sont d'ordre supérieur à 2.

1.2 Présentation du mémoire

Le mémoire de thèse est présenté comme suit :

- Dans le **troisième chapitre**, nous traitons le premier thème de nos travaux, à savoir celui de l'échantillonnage d'une commande dynamique. Nous commençons par rappeler un résultat portant sur le stabilisation asymptotique globale de systèmes non linéaires par retour statique de l'état émulé [49], puis nous introduisons le cadre mathématique des systèmes hybrides impulsionnels qui va être utilisé dans le cas où l'échantillonnage se fait sur une commande dynamique. Nous donnons ensuite le résultat principal de ce premier thème qui concerne la stabilisation asymptotique globale d'un système non linéaire par un retour d'état dynamique échantillonné. Deux exemples numériques sont enfin étudiés pour illustrer les conditions de notre résultat. Ce résultat a d'ailleurs été présenté à la conférence *NOLCOS 04*, Stuttgart 2004 [17] et un article a été publié dans la revue "*Journal of Nonlinear Analysis*" [18].

- Dans le **quatrième** chapitre, nous traitons le second thème de nos travaux, à savoir la synthèse de commandes échantillonnées à partir d'approximations de Taylor-Lie du discrétisé exact. Ce thème va s'étendre jusqu'au sixième chapitre inclus. Dans ce chapitre nous donnons le cadre mathématique et les quelques outils préliminaires qui vont servir à la synthèse de commandes échantillonnées des deux classes de systèmes non linéaires étudiées dans les deux chapitres suivants.
  Nous commençons donc par rappeler le nouveau cadre mathématique développé dans [84] qui permet de donner de manière rigoureuse un lien entre la synthèse d'une loi de commande échantillonnée sur une approximation du discrétisé exact et son application sur le discrétisé exact. Puis nous présentons les commandes d'ordre supérieurs synthétisées sur la base de la commande du système continu associé au système à commande échantillonnée et nous rappelons les principaux résultats de [91]. Enfin, nous donnons quelques propriétés qui permettent de montrer l'impact de l'ordre de la commande sur la précision et sur la vitesse de convergence. Deux exemples numériques sont ensuite traités.

- Dans le **cinquième** chapitre, nous nous intéressons à l'étude de la classe des systèmes non linéaires sous la forme "feedback" à commande échantillonnée. Nous commençons par donner un théorème général sur la synthèse de commandes échantillonnées pour cette classe de système : ce résultat a d'abord été présenté à la conférence "*IMACS World Congress*" [3], puis a été largement étoffé et a été récemment publié dans la revue "*International Journal of Control*" [19]. Un exemple numérique illustre le résultat. Ensuite, nous nous intéressons à la sous-classe des systèmes "strict-feedback"

et nous donnons deux nouveaux algorithmes constructifs de synthèse de la commande échantillonnée : le premier algorithme permet de gagner en précision lorsque l'ordre de la commande augmente alors que le second permet en plus d'avoir une meilleure vitesse de convergence. Un exemple numérique illustre le seconde algorithme.

– Dans le **sixième** chapitre, nous nous intéressons à la synthèse de commande échantillonnée des systèmes non linéaires sous la forme "strict-feedforward". Après un bref rappel de la synthèse de commande continue, nous présentons un nouvel algorithme de synthèse de la commande lorsque cette dernière est échantillonnée. Ce nouvel algorithme est déduit de la synthèse continue et de l'utilisation des approximations d'ordres supérieurs du discrétisé exact ; il permet un gain en précision lorsque l'ordre de la commande augmente. Un exemple numérique illustre notre démarche. Ce résultat récent n'a pas encore été publié.

– Dans le **septième** chapitre, nous traitons le troisième et dernier thème de nos travaux, à savoir la synthèse de commandes adaptatives échantillonnées à partir d'approximations de Taylor-Lie du discrétisé exact lorsque le système initial a un paramètre borné et inconnu. Nous commençons par donner deux résultats assez techniques qui seront utilisés dans notre théorème principal et qui déjà montrent l'intérêt d'utiliser une loi de commande dont les ordres supérieurs seront obtenus de manière récursive et qui montrent aussi qu'une sur-paramétrisation sera nécessaire, le paramètre inconnu n'apparaissant plus linéairement dans les ordres supérieurs de la série de Taylor-Lie approximant le discrétisé exact. Nous démontrons ensuite notre résultat principal qui donne une technique de synthèse de loi de commande adaptative basée à la fois sur la méthode de synthèse utilisée en continue et sur une approche récursive. Cette méthode est générale et pourra faire l'objet d'application à des classes particulières de systèmes non linéaires dans de futurs travaux. Deux exemples numériques sont donnés pour illustrer le théorème principal. Le second exemple montre comment la synthèse de commande pour des systèmes de la classe strict-feedback pourrait être obtenue dans de futurs travaux.
  Les premiers résultats [21] de ce dernier thème vont être présentés prochainement à la conférence *ECC 2007*.

– Dans le **huitième** chapitre, nous présentons brièvement la synthèse du travail réalisé, puis nous parlons des perspectives immédiates des travaux, et enfin nous présentons les problèmes ouverts qui pourraient faire l'objet de travaux de recherche et/ou susciter de nouvelles thèses.

A noter que le second chapitre donne un résumé des quelques notations utilisées fréquemment dans le rapport et que les courbes des simulations numériques associées aux différents exemples des chapitres trois à sept se situent dans le neuvième chapitre.

1.3 Publications

Plusieurs résultats présentés dans le rapport n'ont pas encore été publiés et de nouveaux articles sont en cours d'écriture. Cependant, nos premiers résultats ont fait l'objet d'articles de revues et de conférence :

Articles de revue :

- L. Burlion, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " On the Stabilization of Sampled-Data Nonlinear Systems by using Backstepping on the higher order approximate models ", International Journal of Control, vol. 79, no.9, Septembre, pp. 1087-1095, 2006.
- L. Burlion, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " On the Stability of a class of nonlinear hybrid systems ", Journal of Nonlinear Analysis, Décembre, 2006.

Articles de conférence :

- L. Burlion, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " On the Stability of a Class of NonLinear Hybrid Systems ", in Proc. of NOLCOS 04, Stuttgart, 2004.
- T. Ahmed-Ali, L. Burlion et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " On the stabilization of sampled-data systems by using higher order approximations of the exact discretized systems ", in Proc. of IMACS World Congress, Juillet, 2005.
- L. Burlion, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " On the adaptive control of Nonlinear Sampled-Data Systems ", accepté à la conférence ECC 2007.
- L. Burlion, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " Adaptive control redesign for some Nonlinear Sampled-Data Systems ", accepté à la conférence NOLCOS 07.

Articles soumis :

- L. Burlion, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " Adaptive control of Nonlinear Sampled-Data Systems ", en processus de révision après une première soumission à Automatica.

Chapitre 2

Table des notations

Nous utiliserons les notations (parfois spécifiques) suivantes qui seront pour la plupart définies puis utilisées tout au long de ce rapport de thèse :

$\mathbb{R}^{\geq 0}$	:	ensemble des nombres réels positifs ou nuls
$\mathbb{R}^{>0}$	:	ensemble des nombres réels strictement positifs
$\|z\|$	:	toute norme par exemple euclidienne d'un élément z d'un espace vectoriel normé de dimension finie
x^+	:	signifie $x((k+1)T)$ lorsque x désigne $x(kT)$
$\frac{\Delta V}{T}$	:	abbréviation de $\frac{V(x^+)-V(x)}{T}$ pour une fonction $V(x)$ donnée
F_T^e	:	notation du discrétisé exact associé à un système à commande échantillonnée
$\begin{pmatrix} n \\ i_0\ i_1\ \dots\ i_r \end{pmatrix}$	:	coefficient multinômial égal à $\left(n!/\left(\prod_{j=0}^{r} i_j\ !\right)\right)$
$L_f h(x)$	:	dérivée de Lie exprimée en x de h selon le champ de vecteur f i.e $\frac{d}{dt}\left[h(x(t))\right]\Big\vert_{\dot{x}=f(x)} = \frac{\partial h}{\partial x}\ .\ f(x)$
u^r	:	commande d'ordre r de la forme $\sum_{i=0}^{r} T^i u_i$
$\mathcal{O}(T^r)$	:	$R(T,y) = \mathcal{O}(T^r)$ quantité semi-globalement bornée par $T^r\gamma(y)$, γ étant de classe $\mathcal{K}_\infty$.

$Sign$	:	fonction signe. ($Sign(s > 0) = 1$ et $Sign(s < 0) = -1$)
Sat_r^p	:	fonction spécifique définie dans le chapitre 4 comme étant la fonction signe à T^r près et qui est p fois différentiable.
$\mathcal{K}$	:	classe des fonctions de $\mathbb{R}^{\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^{\geq 0}$, continues, nulles en 0 et strictement croissantes.
$\mathcal{K}_\infty$	:	sous-classe des fonctions de classe $\mathcal{K}$ et non bornées.
$\mathcal{KL}$	:	$\beta : \mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ est de classe $\mathcal{KL}$ si $\beta(., t)$ est de classe $\mathcal{K}$ pour tout $t \geq 0$ et si $\beta(s, .)$ est décroissante vers 0 pour tout $s > 0$.

Chapitre 3

Schéma d' Euler sur un retour dynamique de l'état

3.1 Introduction

L'émulation consiste à synthétiser une loi de commande continue qui est ensuite bloquée à chaque instant d'échantillonnage lorsqu'elle est appliquée à un système à commande échantillonnée. Cette méthode est très simple à mettre en oeuvre car elle se sert de la littérature abondante existant sur la commande continue des systèmes non linéaires et ne prend aucunement en compte l'échantillonnage.
Dans ce chapitre, nous proposons de généraliser un résultat [49] portant sur l'émulation d'un retour d'état statique stabilisant un système non linéaire au cas où la commande est un retour d'état dynamique. Il ne s'agit alors plus d'une simple émulation : en effet, la commande étant dynamique, il faut pouvoir exprimer en terme d'équation aux différences le comportement de la commande et nous devons alors utiliser le fomalisme des systèmes hybrides impulsionnels pour modéliser ce problème. En effet, nous sommes alors en présence d'un système hybride car la dynamique du système bouclé est composée d'une équation différentielle qui régit l'état du système et d'une équation aux différences qui régit la partie commande.

3.1.1 Exemple introductif et motivation

Plusieurs résultats portent sur la commande de systèmes non linéaires par des commandes échantillonnées. Cependant, le problème de la stabilisation par retour d'état dynamique a été peu abordé pour le moment : à notre connaissance, seul [112] a établi un résultat de stabilisation globale dans le cas linéaire et un résultat seulement de stabilisation locale en non linéaire.
Ce problème est de plus motivé par le fait que l'utilisation de commandes dynamiques est assez répandue et permet souvent de résoudre simplement des problèmes de synthèse de commande.
Par exemple, un retour d'état statique est difficilement envisageable dans le cas suivant

car une commande statique ne serait obtenue qu'implicitement :

$$\dot{x} = x^2 + 2u + sin(u)$$

Or, un retour d'état dynamique simplifie considérablement la synthèse de la loi de commande. En effet, si nous posons : $z_1 = x$ et $z_2 = x^2 + 2u + sin(u)$. Nous avons :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = 2z_1(z_1^2 + 2u + sin(u)) + (2 + cos(u))\dot{u} \end{cases} \tag{3.1}$$

Ainsi, la commande sera alors :

$$\dot{u} = \frac{1}{2 + cos(u)}(-c_1 z_1 - c_2 z_2 - 2z_1(z_1^2 + 2u + sin(u)))$$

Et finalement, le système bouclé est asymptotiquement stable :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 2u + sin(u) \\ \dot{u} = \frac{1}{2+cos(u)}(-c_1 x - c_2(x^2 + 2u + sin(u)) - 2x(x^2 + 2u + sin(u))) \end{cases} \tag{3.2}$$

Un tel système est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} := x^2 + g(x, u)u \\ \dot{u} = v \end{cases} \tag{3.3}$$

où $g(x, u) \neq 0$ lorsque $u \neq 0$. Ainsi, comme nous l'avons annoncé, lorsque la commande est échantillonnée, il est intéressant d'étudier des systèmes bouclés de la forme "hybride" suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x, u_k)u_k \\ u_{k+1} = h(u_k, x_k) \end{cases} \tag{3.4}$$

ce qui diffère de la forme usuelle des systèmes à commande échantillonnée : $\dot{x} = f(x) + g(x)u_k$ étudiés dans [49, 65]. De plus, il est à noter qu'un résultat postérieur à celui présenté dans ce chapitre a aussi utilisé l'échantillonnage de commandes dynamiques dans le cas où la synthèse de la loi de commande continue aboutit à une équation implicite [42].

Finalement, ce premier chapitre est organisé de la manière suivante : après avoir rappelé la motivation de ce thème de recherche, nous allons présenter un résultat portant sur la commande statique échantillonnée de systèmes non linéaires, puis nous allons introduire le formalisme des systèmes hybrides que nous allons utiliser pour démontrer notre nouveau résultat qui consiste à donner des conditions pour garantir la stabilité asymptotique globale par bouclage dynamique de l'état après échantillonnage de la commande. Nous conclurons ensuite par deux exemples numériques.

3.2 Echantillonnage de commandes dynamiques

3.2.1 Emulation d'un retour statique de l'état

Nous rappellons brièvement un résultat antérieur sur l'émulation d'un retour statique de l'état.

Nous considérons la classe de systèmes non linéaires suivantes

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{3.5}$$

où $x \in \mathbf{R}^n$, et $u \in \mathbf{R}^m$. Nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

A1 : Il existe une fonction $V : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^+$ et un contrôleur $u = u^C(x)$, K_C-Lipschitzien qui satisfait $\forall x \in \mathbf{R}^n$:

$$c_1\|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2\|x\|^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}[f(x) + g(x)u^C(x)] \leq -c_3\|x\|^2$$

A2 : f est f_1-Lipschitzienne.

A3 : il existe $g_1 > 0$ tel que $\|g\| \leq g_1$.

A4 : $\|\frac{dV}{dx}\| \leq c_4\|x\|$.

où c_1, c_2, c_3, c_4 sont des constantes strictement positives.
Dans ce cas, x tend asymptotiquement vers 0 (en vertu du principe de La Salle).

Considérons maintenant une commande émulée (i.e bloquée sur des intervalles de temps) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[, \quad u(t) = u^\Delta(\tau_k) = u^C(\tau_k), \quad \tau_k = k\tau, \quad \tau > 0$$

Théorème 3.2.1 *(Herrmann, Spurgeon et Edwards [49])*
Sous les hypothèses (A1-A4), il existe $\widehat{\tau}$ suffisamment petit tel que pour tout τ, $\tau < \widehat{\tau}$ le système (3.5) est (asymptotiquement) stable lorsque la commande est émulée.

3.2.2 Cadre mathématique utilisé

A présent, nous présentons le cadre mathématique des systèmes hybrides que nous allons employer pour démontrer notre résultat.

L'état x appartient à $X = \mathbb{R}^n$, et la commande appartient à $U = \mathbb{R}$.

Nous considérons donc la classe de systèmes à commande dynamique échantillonnée suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t), u_k)u_k & , t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[\\ u_{k+1} = h(u_k, x(\tau_k)) & , t = \tau_k, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où :

- $\{\tau_k, k \in \mathbb{N}; \tau_0 = 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < \tau_{k+1} < \ldots\}$ est un sous-ensemble non borné et fermé (τ_n converge vers $+\infty$ sans point d'accumulation fini) de $\mathbb{R}^+$ tel que $\tau = \sup_{k\in\mathbb{N}}(\tau_{k+1} - \tau_k)$ existe.
- $f : X \longrightarrow X$ est Lipschitzienne sur X, et $f(0) = 0$.
- $g : X \times U \longrightarrow X^U$ est bornée.
- $h : U \times X \longrightarrow U$ est Lipschitzienne vis à vis de sa composante en x et $h(\mathbf{.}, 0) = 0$.

Dans ce cas, la solution x existe, est unique pour une condition initiale donnée et est différentiable presque partout. Nous remarquons aussi que la fonction $u : t \longrightarrow u(t) = u_k,\ t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[,\ k \in \mathbb{N}$ est constante par morceaux et donc mesurable au sens de Lebesgue.

Nous considérons maintenant la classe de système impulsionnel suivante avec des impulsions à des instants fixés

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_c(x(t)) & , t \neq \tau_k \\ \Delta x(t) = x(t) - x(t^-) = f_d(x(t^-)) & , t = \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

où :

- $\{\tau_k, k \in \mathbb{N}; \tau_0 = 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < \tau_{k+1} < \ldots\}$ est un sous-ensemble non borné et fermé (τ_n converge vers $+\infty$ sans point d'accumulation fini) de $\mathbb{R}^+$ tel que $\tau = \sup_{k\in\mathbb{N}}(\tau_{k+1} - \tau_k)$ existe.
- $f_c : X \longrightarrow X$ est Lipschitzienne sur X, et $f(0) = 0$
- $f_d : X \longrightarrow X$, et $f_d(0) = 0$
- $x(t^-) \triangleq \lim_{s \longrightarrow t^-} x(s)$

Puisque f_c est Lipschitzienne, la solution x existe, est unique pour une condition initiale donnée ; de plus, les solutions sont continues à droite avec des limites à gauche qui existent pour chaque τ_k et sont différentiables presque partout.
Nous remarquons aussi que 0 est un équilibre vu que $f_c(0) = 0$ et $f_d(0) = 0$: afin de prouver qu'il est asymptotiquement stable, nous pouvons utiliser le théorème suivant :

Théorème 3.2.2 *(Ye, Michel et Hou [112])*
Considérons la classe de système impulsionnel décrite précédemment.

Supposons qu'il existe $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *tel que* $h(0) = 0$, $\phi \in \mathcal{K}, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{K}_\infty$, *et* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ *tels que* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$ *:*

$$\phi_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \phi_2(\|x\|)$$

$$V(x(t)) \leq h(V(x(\tau_k))), \quad \forall t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[$$

et qu'en plus :

$$DV(x(\tau_k)) \leq -\phi(\|x(\tau_k)\|)$$

où :

$$DV(x(\tau_k)) \triangleq \frac{1}{\tau_{k+1} - \tau_k}\Big[V(x(\tau_{k+1})) - V(x(\tau_k))\Big]$$

alors l'équilibre $x = 0$ *est uniformément asymptotiquement stable.*

Ce théorème est aisément étendu pour démontrer la stabilité asymptotique globale en rajoutant l'hypothèse $\lim_{\|x\|\to+\infty} \phi_i(x) = +\infty, \quad i \in \{1, 2\}$ (voir par exemple [60]).
Notons qu'il est seulement nécessaire que V n'augmente pas aux instants de sauts τ_k et qu'entre deux instants τ_k et τ_{k+1}, V soit seulement bornée par une fonction continue de $V(x(\tau_k))$ (Par exemple, h peut être croissante !).

Remarque :
La classe des systèmes à commande dynamique échantillonnée est incluse dans la classe des systèmes hybrides, une fois qu'on ajoute la commande à l'état. Alors, l'état devient (x, u) où la composante u est déterminée par :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_k \quad , t \in [\tau_{k-1}, \tau_k[, \ k \in \mathbb{N}^* \\ \dot{u}(t) &= 0 \quad , t \neq \tau_k \end{aligned}$$

Cette remarque permet d'appliquer aux systèmes à commande dynamique échantillonnée le théorème sur les systèmes impulsionnels énoncé précédemment :

Théorème 3.2.3
Considérons le classe de systèmes non linéaires à commande dynamique échantillonnée décrites précédemment.
Supposons qu'il existe $h \in \mathcal{C}[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$ *tel que* $h(0) = 0$, $\phi \in \mathcal{K}$, $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{K}^\infty$, *et* $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall u_k \in \mathbb{R}$ *:*

$$\phi_1(\|x\|, \|u_k\|) \leq V(x, u_k) \leq \phi_2(\|x\|, \|u_k\|)$$

$$V(x(t), u_k) \leq h(V(x(\tau_k), u_k)), \quad \forall t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[$$

et qu'en plus :

$$DV(x(\tau_k), u_k) \leq -\phi(\|x(\tau_k)\|, \|u_k\|)$$

où :

$$DV(x(\tau_k), u_k) \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{\tau_{k+1} - \tau_k}\Big[V(x(\tau_{k+1}), u_{k+1}) - V(x(\tau_k), u_k)\Big]$$

alors l'équilibre $(x, u_k) = 0$ *est (globalement) uniformément asymptotiquement stable.*

Preuve :
Elle est triviale en utilisant le théorème sur les systèmes impulsionnels et la remarque précédente. □

3.2.3 Notre résultat principal

Nous allons maintenant généraliser le théorème 3.2.1 en utilisant les outils développés précédemment.

Supposons que la période d'échantillonnage est variante dans le temps mais majorée. Nous considérons la classe de système suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x,u)u \\ \dot{u} = \alpha(x,u) \end{cases} \tag{3.6}$$

où $x \in \mathbf{R}^n$, et $u \in \mathbf{R}$. Nous effectuons les hypothèses suivantes :

B1 : Il existe une fonction $V : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ qui satisfait

$$\forall x, u, \quad c_1\|x\|^2 + c_2\|u\|^2 \;\leq\; V(x,u) \leq c_3\|x\|^2 + c_4\|u\|^2$$

B2 : f est f_1-Lipschitzienne.

B3 : Il existe $g_1 > 0$ tel que $\|g\| \leq g_1$.

B4 : $\forall x, y, u, v$:

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial u}(x,u) - \frac{\partial V}{\partial u}(y,v)\right\| \leq \; c_5(\|x-y\| + \|u-v\|)$$

$$\frac{\partial V}{\partial u}(0,0) = 0$$

B5 : La fonction $\alpha(x,u)$ joue le rôle d'un retour d'état dynamique tel que

$$\forall (x,u) \in X \times U, \quad \frac{\partial V}{\partial x}[f(x) + g(x,u)u] + \frac{\partial V}{\partial u}[\alpha(x,u)] \leq -\beta(\|x\|^2 + \|u\|^2) \tag{3.7}$$

De plus :

$$\forall x, y, u, v \quad \|\alpha(x,u) - \alpha(y,v)\| \ \leq \ \alpha_M(\|x-y\| + \|u-v\|)$$
$$\alpha(0,0) = 0$$

où $\beta, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \alpha_M$ sont des constantes strictement positives.
Dans ce cas, (x,u) tend asymptotiquement vers 0.

Nous lui associons le système à commande dynamique échantillonnée suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t),u_k)u_k \quad , t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[\\ u_{k+1} = u_k + (\tau_{k+1} - \tau_k)\alpha(u_k, x(\tau_k)) \quad , t = \tau_k, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.8}$$

où :$\{\tau_k, k \in \mathbb{N}; \tau_0 = 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < \tau_{k+1} < \ldots\}$ est un sous-ensemble non borné et fermé (τ_n converge vers $+\infty$ sans point d'accumulation fini) de $\mathbb{R}^+$ tel que $\tau = \sup_{k\in\mathbb{N}}(\tau_{k+1} - \tau_k)$ existe.
Les deux systèmes (3.6),(3.8) ont la même condition initiale à $t = 0$.
Ceci revient aussi lorsque τ est petit à approximer le retour d'état continu $u(.)$ par un schéma d'Euler qui donne $u_k(.)$.

Théorème 3.2.4
Sous les hypothèses (B1-B5), il existe τ_M suffisament petit tel que $\forall \tau < \tau_M$, le système (3.8) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve :

Nous avons :

$$\dot{V}(x,u_k) = \frac{\partial V}{\partial x}[f(x) + g(x,u_k)u_k] + 0 \qquad , \forall t \in]\tau_k, \tau_{k+1}[$$

Grâce à l' hypothèse B5,

$$\dot{V}(x,u_k) \ \leq \ -\beta(\|x\|^2 + \|u_k\|^2) - \frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{x,u_k}[\alpha(x,u_k)] \qquad , \forall t \in]\tau_k, \tau_{k+1}[\tag{3.9}$$

Nous employons une fonction W continue à droite telle que :

$$\forall t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[\ , \qquad W(t) = V(x(t),u_k) + \left[\int_0^{t-\tau_k} \frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{x(\tau_{k+1}),\alpha(x(\tau_k),u_k)s+u_k} ds\right] \alpha(x(\tau_k),u_k)$$

Remarque :

$$\forall k \in \mathbb{N} \ , \qquad W(\tau_k) = V(x(\tau_k),u_k) = V^+(\tau_k)$$

Bien que V est seulement continue à droite aux instants τ_k, nous avons choisi la fonction W de façon à ce qu'elle soit continue partout. En effet,

$$\begin{aligned} W(\tau_k^-) &= V(x(\tau_k), u_{k-1}) + \left[\int_0^{\tau_k-\tau_{k-1}} \frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{x(\tau_k),\alpha(x(\tau_{k-1}),u_{k-1})s+u_{k-1}} ds\right] \alpha(x(\tau_{k-1}), u_{k-1}) \\ &= V(x(\tau_k), u_{k-1}) + V(x(\tau_k), u_k) - V(x(\tau_k), u_{k-1}) \\ &= V(x(\tau_k), u_k) \\ &= W(\tau_k^+) = W(\tau_k) \end{aligned} \tag{3.10}$$

$\dot{W}$ existe presque partout $\forall t \in]\tau_k, \tau_{k+1}[$,

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &\leq -\beta(\|x\|^2 + \|u_k\|^2) - \frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{x,u_k}[\alpha(x, u_k)] \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{x(\tau_{k+1}),\alpha(x(\tau_k),u_k)(t-\tau_k)+u_k} \alpha(x(\tau_k), u_k) \\ &\leq -\beta(\|x\|^2 + \|u_k\|^2) - \frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{x,u_k}[\alpha(x, u_k) - \alpha(x(\tau_k), u_k)] \\ &\quad + \left(\frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{x(\tau_{k+1}),\alpha(x(\tau_k),u_k)(t-\tau_k)+u_k} - \frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{x,u_k}\right)\alpha(x(\tau_k), u_k) \\ &\leq -\beta(\|x\|^2 + \|u_k\|^2) + c_5(\|u_k\| + \|x\|)\|x - x(\tau_k)\| + \tau c_5 \alpha_M^2(\|x(\tau_k)\| + \|u_k\|)^2 \\ &\quad + c_5\alpha_M\|x(\tau_{k+1}) - x\|(\|x(\tau_k)\| + \|u_k\|) \end{aligned}$$

Cependant, $\forall t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$

$$\begin{aligned} x(t) - x(\tau_k) &= \int_{\tau_k}^t f(x(s)) + g(x(s), u_k)u_k ds \\ &= \int_{\tau_k}^t f(x(s) - x(\tau_k)) + [f(x(s)) - f(x(s) - x(\tau_k))] + g(x(s), u_k)u_k ds \end{aligned}$$

D'où,

$$\|x(t) - x(\tau_k)\| \leq (\tau_{k+1} - \tau_k)(f_1\|x(\tau_k)\| + g_1\|u_k\|) + \int_{\tau_k}^t f_1\|x(s) - x(\tau_k)\| ds$$

D'après l'inégalité de Gronwall :

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(\tau_k)\| &\leq (\tau_{k+1} - \tau_k)(f_1\|x(\tau_k)\| + g_1\|u_k\|)e^{f_1(t-\tau_k)} \\ &\leq \tau(f_1\|x(\tau_k)\| + g_1\|u_k\|)e^{f_1\tau} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nous avons donc : $(\|x(t) - x(\tau_k)\| \geq \|x(t)\| - \|x(\tau_k\|)$

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x(\tau_k)\| + \tau(f_1\|x(\tau_k)\| + g_1\|u_k\|)e^{f_1\tau} \\ &\leq (1 + \tau f_1 e^{f_1\tau})\ \|x(\tau_k)\| + (\tau g_1 e^{f_1\tau})\ \|u_k\| \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nous utilisons aussi le fait que,

$$\begin{aligned}\|x(t)-x(\tau_{k+1})\| &= \|x(t)-x(\tau_{k+1})+x(\tau_k)-x(\tau_k)\| \\ &\leq \|x(t)-x(\tau_k)\|+\|x(\tau_{k+1})-x(\tau_k)\| \\ &\leq 2\tau(f_1\|x(\tau_k)\|+g_1\|u_k\|)e^{f_1\tau} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Finalement, en utilisant (3.11),(3.12) et (3.13),nous obtenons :

$$\begin{aligned}\dot{W}(t) &\leq -\beta(\|x\|^2+\|u_k\|^2)+c_5(\|u_k\|+\|x\|)\|x-x(\tau_k)\|+\tau c_5\alpha_M^2(\|x(\tau_k)\|+\|u_k\|)^2 \\ &\quad +c_5\alpha_M\|x(\tau_{k+1})-x\|(\|x(\tau_k)\|+\|u_k\|) \\ &\leq \lambda_1(\tau)\|x(\tau_k)\|^2+\lambda_2(\tau)\|u_k\|^2+\lambda_3(\tau)\|x(\tau_k)\|\|u_k\| \\ &\leq \left(\lambda_1(\tau)+\frac{\lambda_3(\tau)}{2}\right)\|x(\tau_k)\|^2+\left(\lambda_2(\tau)+\frac{\lambda_3(\tau)}{2}\right)\|u_k\|^2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

où :

$$\lambda_1(\tau) = -\beta(1+\tau f_1e^{f_1\tau})^2+\tau c_5\left((1+\tau f_1e^{f_1\tau})f_1e^{f_1\tau}+\alpha_M^2+2\alpha_M f_1e^{f_1\tau}\right) \tag{3.15}$$

$$\lambda_2(\tau) = -\beta(1+\tau^2g_1^2e^{2f_1\tau})+\tau c_5\left((1+2\alpha_M)g_1e^{f_1\tau}+\alpha_M^2+\tau g_1^2e^{2f_1\tau}\right) \tag{3.16}$$

$$\lambda_3(\tau) = -2\beta\tau(1+\tau f_1e^{f_1\tau})g_1e^{f_1\tau}+\tau c_5\left(2\alpha_M^2+(2\alpha_M+1)(f_1+g_1)e^{f_1\tau}+2\tau f_1g_1e^{2f_1\tau}\right) \tag{3.17}$$

Ainsi, si :

$$\begin{cases} \lambda_1(\tau)+\frac{\lambda_3(\tau)}{2}<0 \\ \lambda_2(\tau)+\frac{\lambda_3(\tau)}{2}<0 \end{cases} \tag{3.18}$$

(remarque : ces deux inégalités prouvent l'existence de τ_M et donnent une borne inférieure de τ_M en pratique)

Il existe un nombre réel γ tel que $0<\gamma\leq -max\left(\lambda_1(\tau)+\frac{\lambda_3(\tau)}{2}\ ,\ \lambda_1(\tau)+\frac{\lambda_3(\tau)}{2}\right)$ et :

$$\dot{W}(t)\leq -\gamma(\|x_{\tau_k}\|^2+\|u_k\|^2) \tag{3.19}$$

Ainsi, par intégration et en utilisant le fait que $W(\tau_k)=V^+(\tau_k)=V(\tau_k)$ nous déduisons que

$$DV(x(\tau_k))=\frac{1}{\tau}[V(x(\tau_{k+1}))-V(x(\tau_k))]\leq -\gamma(\|x_{\tau_k}\|^2+\|u_k\|^2) \tag{3.20}$$

De plus, étant donné que : $\forall t \in]\tau_k, \tau_{k+1}[$,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \dot{W}(t) + \frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{x(\tau_{k+1}),\alpha(x(\tau_k),u_k)(t-\tau_k)+u_k} \alpha(x(\tau_k),u_k) \\
&\leq 0 + c_5\alpha_M\|u_k\|(\|x(\tau_k)\| + \|u_k\|) + c_5\alpha_M^2(\|x(\tau_k)\| + \|u_k\|)^2(t-\tau_k) \\
&\leq c_5\alpha_M\|u_k\|(\|x(\tau_k)\| + \|u_k\|) + c_5\alpha_M^2\tau(\|x(\tau_k)\| + \|u_k\|)^2 \\
&\leq c_5\alpha_M[\ (1+\alpha_M\tau)\|u_k\|^2 + (1+2\alpha_M\tau)\|u_k\|\|x(\tau_k)\| + \alpha_M\tau\ \|x(\tau_k)\|^2\ ] \\
&\leq c_5\alpha_M\left(\frac{3}{2} + 2\alpha_M\tau\right)(\|x(\tau_k)\|^2 + \|u_k\|^2) \\
&\leq \frac{1}{min\{c_1,c_2\}}c_5\alpha_M\left(\frac{3}{2} + 2\alpha_M\tau\right)V(x(\tau_k),u_k)
\end{aligned}$$

D'où, par intégration :

$$\forall t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[, \qquad V(x(t),u_k) \leq h(V(x(\tau_k),u_k))$$

avec :

$$h(V) = V + \frac{\tau}{min\{c_1,c_2\}}c_5\alpha_M\left(\frac{3}{2} + 2\alpha_M\tau\right)V$$

Nous terminons la preuve en invoquant le résultat du théorème 3.2.3. □

Les hypothèses de ce théorème sont assez fortes mais il faut garder en tête que le résultat lui même est très fort car nous obtenons une convergence asymptotique globale. Nous pouvons cependant relaxer certaines hypothèses du théorème 3.2.4 et obtenir le résultat moins fort suivant :

Théorème 3.2.5 *Sous les hypothèses du Théorème 3.2.4 mais prises dans les cas plus généraux où :*

$$\|\alpha_{0,0}\| := \alpha_0 \in \mathbb{R} \quad ; \quad \left\|\frac{\partial V}{\partial u}(0,0)\right\| := d_0 \in \mathbb{R}$$

il existe $\widetilde{\tau}_M$ suffisament petit tel que $\forall \tau < \widetilde{\tau}_M$, le système (3.8) converge globalement asymptotiquement vers un voisinage de l'origine.

Preuve :

La preuve est quasiment identique à la preuve précédente mais cette fois-ci l'expression

de $\dot{W}$ prend la forme suivante : $\dot{W}$ existe presque partout et vaut $\forall t \in]\tau_k, \tau_{k+1}[$,

$$\begin{aligned}
\dot{W}(t) &\leq -\beta(\|x\|^2 + \|u_k\|^2) - \frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{x,u_k}[\alpha(x,u_k)] \\
&\quad + \frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{x(\tau_{k+1}),\alpha(x(\tau_k),u_k)(t-\tau_k)+u_k} \alpha(x(\tau_k),u_k) \\
&\leq -\beta(\|x\|^2 + \|u_k\|^2) - \frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{x,u_k}[\alpha(x,u_k) - \alpha(x(\tau_k),u_k)] \\
&\quad + \left(\frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{x(\tau_{k+1}),\alpha(x(\tau_k),u_k)(t-\tau_k)+u_k} - \frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{x,u_k}\right)\alpha(x(\tau_k),u_k) \\
&\leq -\beta(\|x\|^2 + \|u_k\|^2) + (c_5\|u_k\| + c_5\|x\| + d_0)\|x - x(\tau_k)\| \\
&\quad + \tau c_5(\alpha_M\|x(\tau_k)\| + \alpha_M\|u_k\| + \alpha_0)^2 \\
&\quad + c_5\|x(\tau_{k+1}) - x\|(\alpha_M\|x(\tau_k)\| + \alpha_M\|u_k\| + \alpha_0)
\end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser à nouveau (3.11),(3.12) et (3.13), et les expressions des $\lambda_i' s$ de la preuve précédente et obtenir :

$$\begin{aligned}
\dot{W}(t) &\leq \left(\lambda_1(\tau) + \frac{\lambda_3(\tau)}{2}\right)\|x(\tau_k)\|^2 + \left(\lambda_2(\tau) + \frac{\lambda_3(\tau)}{2}\right)\|u_k\|^2 + \lambda_4(\tau)\|x(\tau_k)\| \\
&\quad + \lambda_5(\tau)\|u_k\| + \tau c_5\alpha_0^2
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
\lambda_4(\tau) &= (2c_5\alpha_0 + d_0)\tau f_1 e^{f_1\tau} + 2\tau c_5\alpha_M\alpha_0 \geq 0 \\
\lambda_5(\tau) &= (2c_5\alpha_0 + d_0)\tau g_1 e^{f_1\tau} + 2\tau c_5\alpha_M\alpha_0 \geq 0
\end{aligned}$$

Comme précédemment la négativité de $\dot{W}$ sera assurée lorsque : $\left(\lambda_1(\tau) + \frac{\lambda_3(\tau)}{2}\right) < 0$ et $\left(\lambda_2(\tau) + \frac{\lambda_3(\tau)}{2}\right) < 0$ mais à la différence qu'il faudra aussi être suffisamment loin de l'origine pour que $\dot{W}$ soit négatif ce qui donnera seulement une convergence vers un domaine défini par : $(\dot{W} \geq 0)$

3.2.3.1 Remarque sur le cas linéaire

Si nous considérons le système linéaire à commande dynamique échantillonnée suivant (la période d'échantillonnage est constante),

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_k & , t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[\\ u_{k+1} = u_k + \tau((C - I_m)u_k + Dx(\tau_k)) & , t = \tau_k = k\tau, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.21}$$

En intégrant la première équation, nous obtenons :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x(\tau_{k+1}) = e^{A\tau}x(\tau_k) + \left(\int_0^\tau e^{A(\tau-s)}Bds\right)u_k$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} x(\tau_{k+1}) \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = H(\tau) \begin{pmatrix} x(\tau_k) \\ u_k \end{pmatrix}$$

où :

$$H(\tau) = \begin{pmatrix} e^{A\tau} & \int_0^\tau e^{A(\tau-s)}Bds \\ (1-\tau)I_m + \tau C & \tau D \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si la matrice $H(\tau)$ est de Schur (i.e toutes ses valeurs propres sont dans le cercle unité). Cela signifie que τ doit être suffisamment petit pour que les valeurs propres $H(\tau)$ restent à l'intérieur du cercle unité. Nous remarquons que le Lemme 5.1 de [112] est un cas particulier de ce résultat quand $\tau = 1$.
Dans le cadre non linéaire, nous remarquons que $DV(x(\tau_k)) = \frac{1}{\tau}\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \dot{W}$ joue le rôle de $H(\tau)$ et ainsi notre résultat généralise le cas linéaire.

3.3 Simulations et résultats numériques

Nous illustrons maintenant nos hypothèses et ainsi notre résultat par deux exemples numériques. A noter que pour nous placer dans les hypothèses relativement fortes de notre résultat, nous avons du nous restreindre à une étude semi-globale dans les exemples (même si notre résultat est global).

3.3.1 Exemple 1

$$\dot{x} = x^2 + 2u + sin(u)$$

En continu, l'utilisation d'un feedback dynamique sur le système non linéaire a permis d'obtenir le système bouclé globalement asymptotiquement stable (GAS) suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 2u + sin(u) \\ \dot{u} = \frac{1}{2+cos(u)}\big(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}(x^2 + 2u + sin(u)) - 2x(x^2 + 2u + sin(u))\big) \end{cases}$$

Nous utilisons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x,u) = z_1^2 + (z_2 + z_1)^2 := x^2 + (x + x^2 + 2u + sin(u))^2$$

Nous nous intéressons à l'ensemble :

$$\mathcal{K}_0 := \{x(0), u(0)/\forall t, x(t)^2 < K\}$$

Ainsi après quelques majorations,

$$x^2 + u^2 \leq V(x,u) \leq \frac{(5+3K)}{2}x^2 + \frac{15}{2}u^2$$

Nous avons :

$$\dot{V} = 2z_1(z_2) - (z_2 + z_1)^2 = -z_1^2 - z_2^2 = -V \leq -x^2 - u^2$$

Numériquement, pour $K = 10$, nous approximons très grossièrement $\mathcal{K}_0$ par le polygone passant par les points $((-2, 2); (-3.1, -3.1); (2.7, -2.7); (1.1, 1.1))$. Sur ce domaine les valeurs du temps d'échantillonnage maximal dépendent du point initial et le pire cas a lieu près de $(-2, 2)$ où $\tau < 0.4$ environ (voir les courbes 9.1-9.3).

De plus les hypothèses (B1-B5) du théorème 3.2.4 sont vérifiées pour

1. $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = \frac{5+3K}{2}$, $c_4 = \frac{15}{2}$
2. $f_1 = K$
3. $g_1 = 3$
4. $c_5 = \max\{6; 8K + 4\}$
5. $\beta = 1$ et $\alpha_M = \max\{\frac{1}{2} + \frac{21}{2}K + 3K^2; \frac{9}{2}\}$

Dans cet exemple, les inégalités suivantes (3.18) de notre Théorème 3.2.4 :

$$\begin{cases} \lambda_1(\tau) + \frac{\lambda_3(\tau)}{2} < 0 \\ \lambda_2(\tau) + \frac{\lambda_3(\tau)}{2} < 0 \end{cases}$$

sont satisfaites lorsque $\tau \leq 3.10^{-8}$ ce qui est très inférieur à ce que donne de manière plus empirique les simulations numériques. Cette valeur est très faible car c_5 et α_M sont très élevés.

3.3.2 Exemple 2

Nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - K_1 x_2 + u \\ \dot{u} = -2u - x_1 - x_2 - x_2^2 \end{cases} \tag{3.22}$$

où $K_1 > 0$.
Il n'est pas aisé de trouver une commande statique stabilisante mais nous allons montrer que la commande dynamique que nous avons choisie l'est et que le système bouclé satisfait les conditions de notre résultat. Nous utilisons ainsi la fonction de Lyapunov candidate V :

$$V(x_1, x_2, u) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1 + u)^2 + x_1^2$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -K_1 x_2^2 - (x_1 + u)^2 + 2x_1 u + 2x_1 x_2^2 \\ &= -(K_1 - 2x_1)x_2^2 - x_1^2 - u^2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Nous utiliserons comme norme la norme suivante : $\|x\| = |x_1| + |x_2|$.
Cet exemple satisfait les différentes hypothèses de notre théorème lorsque :

– nous nous intéressons à l'ensemble

$$\mathcal{K}_0 := \{x_1(0), x_2(0), u(0)/\forall t, |2x_1(t)| < K_1 + \beta_1 \ \ et \ \ |x_2(t)| < K_2\}$$

où $K_2, \beta_1 > 0$.
Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\beta_1 x_2^2 - x_1^2 - u^2 \leq -\min\{1;\beta_1\}(x_2^2 + x_1^2) - u^2 \\ &\leq -\frac{2}{3}\min\{1;\beta_1\}(|x_1| + |x_2|)^2 - u^2 \\ \beta &= \min\left\{1; \frac{2}{3}\beta_1\right\} \\ \alpha_M &= \max\{2; K_2 + 1\} \end{aligned}$$

parce que : ($\forall \ \ |x_2|, |y_2| < K_2$ et $\forall \ \ x_1, y_1, u, v$,
$|\alpha(x,u) - \alpha(y,v)| \leq 2|u-v| + |x_1 - y_1| + (K_2+1)|x_2 - y_2|$)

– $f_1 = max\{1; K_1 + K_2\}$; $g_1 = 2$
En effet, $\forall \ \ |x_2| < K_2$, $\forall \ \ x_1$, $\|f(x)\| = \left\| \begin{pmatrix} x_2^2 \\ x_1 - K_1 x_2 \end{pmatrix} \right\| \leq \ (K_2 + K_1)|x_2| + |x_1|$ et
$\forall \ \ x$, $\|g(x)\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \leq \ 2$

– nous utilisons : $c_1 = \frac{1}{2}$; $c_2 = \frac{1}{2}$; $c_3 = 2$; $c_4 = 1$; $c_5 = 1$

Numériquement : le système non linéaire bouclé est stable lorsque $\tau < 0.8$. (voir les courbes 9.4-9.9) ; ce résultat a été obtenu après quelques simulations où nous avons choisi pour $K_1 = 10$, $0 < \beta_1 \leq 9.6$, $K_2 = 0,4$ d'approximer $\mathcal{K}_0$ par $[-0.4, 0.4] \times [-0.4, 0.4] \times [-0.4, 0.4]$. Puis sur $\mathcal{K}_0$ nous avons pu constater que, pour cet exemple, le valeur maximale de la période d'échantillonnage ne dépendait pas du point considéré et nos courbes ont donc été réalisées avec pour conditions initiales $x_1(0) = 0.4$, $x_2(0) = 0.4$ et $u_0 = 0.4$.
Dans cet exemple, les inégalités suivantes (3.18) de notre théorème 3.2.4 :

$$\begin{cases} \lambda_1(\tau) + \frac{\lambda_3(\tau)}{2} < 0 \\ \lambda_2(\tau) + \frac{\lambda_3(\tau)}{2} < 0 \end{cases}$$

sont satisfaites lorsque $\tau \leq 0.01$. Notre théorème 3.2.4 donne donc une limite inférieure pour τ_M mais, à coup sûr (et ce pour les deux exemples) ne donne pas la plus haute valeur possible étant donné les différentes majorations effectuées dans la preuve.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthodologie et une technique de preuve de convergence asymptotique globale bien différente des techniques utilisées dans la suite de ce rapport de thèse. Nous nous appuyons sur des hypothèses très fortes qui nous permettent de nous contenter d'un schéma d'ordre 1 de discrétisation de la commande dynamique pour

conserver après échantillonnage sa propriété de convergence GAS.
Les méthodes basées sur des séries de Taylor-Lie adoptées dans les chapitres suivants pourraient aussi être utilisées pour synthétiser l'équation aux différences de la dynamique de la commande échantillonnée mais nous n'avons pas suivi ici cette démarche car nous nous sommes basés sur une méthodologie différente qui vise à garantir des résultats plus forts (stabilisation asymptotique globale (GAS) au lieu d'une stabilisation semi-globale pratique (SPA)). Ceci se fait aux prix d'hypothèses trop fortes comme l'ont montré les exemples numériques et notre résultat nécessite bien des extensions : il faudrait relaxer davantage les hypothèses utilisées tout en maintenant le type de stabilisation souhaitée (GAS).
Notre démarche a aussi le mérite d'utiliser un cadre hybride qui pourrait permettre d'étudier de plus près le comportement des systèmes non linéaires entre deux instants d'échantillonnage, ce problème n'étant pas abordable (par définition) par les méthodes basées sur le discrétisé exact : cette problématique n'a pas encore été étudiée en commande échantillonnée de systèmes non linéaires.

Chapitre 4

Introduction aux approximations d'ordres supérieurs

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous changeons désormais d'outils mathématiques et nous nous plaçons dans le cadre récemment mis en place par [85, 90]. Ce cadre mathématique donne des conditions (que nous allons rappeler) sur l'approximation du discrétisé exact et sur la structure de la commande à utiliser pour conserver une propriété de stabilisation semi-globale pratique. De nombreuses études traitant différents problèmes de commande ont suivies [65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 84, 87, 88, 91] et c'est dans ce cadre mathématique et dans la suite logique de ceux de [91] que nous allons établir tous les résultats des chapitres qui suivent.
[91] introduit une nouvelle méthode de synthèse de commande échantillonnée construite sur la synthèse de commande continue ; la commande recherchée est de la forme suivante :

$$u^r = u_c + \sum_{i=1}^{r} T^i u_i$$

il s'agit d'un 'redesign' de la commande continue qui unifie les méthodes basées sur les approximations d'ordre supérieur et sur l'émulation des commandes continues. En effet, la loi de commande a pour terme dominant la commande émulée u_c lorsque la période d'échantillonnage est suffisamment petite et possède des termes correctifs qui prennent en compte les approximations d'ordre supérieurs du discrétisé exact du système à commande échantillonnée.
Après avoir rappelé le cadre mathématique, nous allons donner quelques résultats qui permettront de montrer l'impact de l'ordre de la commande sur les performances d'un système non liénaire bouclé par une commande échantillonnée de ce type. Ces résultats motiveront les nouveaux algorithmes de synthèse de commande échantillonnée de systèmes non linéaires qui seront étudiés dans les chapitres suivants.

4.2 A propos de l'approximation de systèmes à commande échantillonnée

Etant donné un système non linéaire à commande échantillonnée de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u_k) & , \forall t \in [kT, (k+1)T[, k \in \mathbb{N} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Nous supposons que f est telle qu'une unique solution $x(t) := x(x_0, t)$ existe sur un intervalle de temps $I := [0, \tau[$ pour une condition initiale x_0 donnée.
Cette solution vérifie :

$$\forall t \in I, \qquad x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), u_k)\ ds$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, nous notons : $x_k := x(kT)$ et $x_{k+1} = x((k+1)T)$ et nous observons le lien suivant entre eux :

$$x((k+1)T) = x(kT) + \int_0^T f(x(kT+s), u_k)\ ds := F_T^e(x_k, u_k)$$

Nous appelons discrétisé exact du système à commande échantillonnée le système discret suivant :

$$x_{k+1} = F_T^e(x_k, u_k), \qquad x_0 = x(0)$$

Par souci de simplicité, nous noterons à présent cette équation aux différences sous la forme :

$$x^+ = F_T^e(x, u)$$

Mis à part le cas des systèmes linéaires ou les "cas d'école" de systèmes non linéaires intégrables "à la main", il est en général impossible de déterminer F_T^e, et il existe de nombreux schémas de discrétisation bien connus en analyse numérique qui permettent d'approximer F_T^e pour T suffisamment petit. Par exemple, nous avons recours au schéma d'Euler :

$$F_T^{euler}(x, u) = x + Tf(x, u)$$

ou à tout autre type de schémas numériques (Taylor,Runge Kutta,transformation bilinéaire etc)... D'une manière générale, notons ainsi l'équation aux différences obtenue en utilisant une approximation du discrétisé exact :

$$x^+ = F_T^a(x, u)$$

Pour ce système totalement connu, nous pouvons alors synthétiser des contrôleurs en empruntant les techniques existantes sur la stabilisation des systèmes non linéaires discrets. Cependant, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant (exemple simple pour lequel le discrétisé exact peut être déterminé), il n'est pas certain qu'une commande stabilisante

synthétisée sur l'approximation du discrétisé exact garde ses propriétés lorsque nous l'appliquons directement au discrétisé exact.

Exemple :

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \dot{x}_2 = x_3 \qquad \dot{x}_3 = u_k \tag{4.1}$$

Notons $x = [x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3]^T$, le discrétisé exact du système s'écrit :

$$x^+ = F_T^e(x,u) = \begin{pmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{T^3}{6} \\ \frac{T^2}{2} \\ T \end{pmatrix} u$$

Supposons que nous ne soyons pas capables de déterminer de manière explicite le discrétisé exact et que nous l'approximions par un schéma d'Euler du premier ordre :

$$x^+ = F_T^a(x,u) = x + T \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ u \end{pmatrix}$$

Si nous appliquons le contrôleur suivant :

$$u_T(x) := -\frac{x_1}{T^3} - \frac{3x_2}{T^2} - \frac{3x_3}{T}$$

alors :

$$F_T^e(x,u_T(x)) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{T}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2T} & \frac{-1}{2} & \frac{-T}{2} \\ \frac{-1}{T^2} & \frac{-3}{T} & -2 \end{pmatrix} \quad et \quad F_T^a(x,u_T(x)) = \begin{pmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & T \\ \frac{-1}{T^2} & \frac{-3}{T} & -2 \end{pmatrix}$$

Les polynômes caractéristiques associés aux 2 systèmes bouclés sont : $\chi_{F_T^a}(\lambda) = -\lambda^3$ et $\chi_{F_T^e}(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{5}{3}\lambda^2 + \frac{7}{3}\lambda - \frac{2}{3}$.
Ainsi les pôles de l'approximation du discrétisé exact bouclé sont tous nuls : le système pourrait donc être asymptotiquement stable quelque soit $T > 0$ d'après notre approximation. Cependant, en réalité, l'un des pôles du discrétisé exact bouclé est de l'ordre de grandeur de -2.644 et est donc instable.
La question qui se pose alors est la suivante : pouvait-on à partir de l'approximé (qui une fois bouclé est asymptotiquement stable) se douter que l'on pourrait avoir des problèmes sur le discrétisé exact en appliquant le même contrôleur ?
Il est vrai que plusieurs indices peuvent nous aider à deviner que quelque chose pourrait mal se passer :

- la commande n'est pas uniformément bornée vis à vis de la période d'échantillonnnage : en effet, quand T tend vers 0, la valeur du contrôleur $|u_T(x)|$ devient infinie pour $x \neq 0$
- nous pouvons montrer que la solution du système approximé bouclé :

$$x(kT) = \left(F_T^a(.,u_T(.)) \overbrace{\circ \ldots \circ}^{\text{k-1 compositions}} F_T^a(.,u_T(.)) \right)(x_0) := \phi(x_0, kT)$$

a un dépassement au départ qui devient infini quand T tend vers 0. (le couple (F_T^a, u_T) n'est pas SPA stable au sens que nous définirons dans le paragraphe suivant)

– même sans connaître le discrétisé exact, nous pourrions montrer à partir de considérations sur le schéma d'Euler que si x appartient à un compact et que $T \in]0, \widehat{T}[$, il existe $M > 0$ tel que :

$$\|F_e^T(x, u_T(x)) - F_T^a(x, u_T(x))\| \leq \frac{1}{T} M$$

nous avons donc un schéma d'approximation qui une fois bouclé n'est plus consistent (au sens classique de l'analyse numérique) à cause de la forme de la loi de commande et qui d'ailleurs explose quand T tend vers 0.

Après avoir soulevé ces différents problèmes, Nesic, Teel et Kokotovic [84] (ces outils ont été généralisés depuis dans [90]) ont introduit un cadre mathématique très rigoureux qui permet de synthétiser des lois de commande pour des systèmes à commande échantillonnée à partir de l'étude de leurs approximés moyennant des hypothèses à faire sur les lois de commande et les schémas d'approximation. Nous présentons ces travaux dans le paragraphe suivant.

4.3 Cadre mathématique des systèmes SPA stables

4.3.1 Quelques définitions et résultats issus de la littérature

Nous rappelons ici quelques définitions et résultats principalement inspirés de [85, 68] :

Définition 4.3.1.1 *Une fonction $\gamma : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ est dite de classe $\mathcal{K}$ si elle est continue, s'annule en 0 et est strictement croissante. Elle est de classe $\mathcal{K}_\infty$ si de plus elle est non bornée.*
Une fonction $\beta : \mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ est de classe $\mathcal{KL}$ si $\beta(., t)$ est de classe $\mathcal{K}$ pour tout $t \geq 0$ et $\beta(s, .)$ est décroissante vers 0 pour tout $s > 0$.

Nous considérons un système discret de la forme :

$$x^+ = F_T(x, u) \tag{4.2}$$

Définition 4.3.1.2 *: (Stabilité Semi-globale, Pratique et Asymptotique (SPA)) Nous disons que la paire (F_T, u_T) est (Semi-globalement Pratiquement et Asymptotiquement) SPA stable si il existe $\beta \in \mathcal{KL}$ telle que pour tout couple de réels strictement positifs (Δ_0, δ) il existe $T^* > 0$ tel que pour toute période d'échantillonnage $T \in]0, T^*[$ et pour toute condition initiale $x(0) = x_0$ où $\|x_0\| \leq \Delta_0$, les solutions de (4.2) où $u := u_T(x)$ vérifient :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \|x(k)\| \leq \beta(\|x_0\|, kT) + \delta \tag{4.3}$$

Il est possible de caractériser ce type de stabilité à l'aide de l'utilisation de fonctions de Lyapunov.

Théorème 4.3.1 *: Soit $\widehat{T} > 0$ fixé et soient deux fonctions continues et définies sur $\mathbb{R}^n$ lorsque $T \in]0, \widehat{T}[$, $V_T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u_T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe α_m, α_M de classe $\mathcal{K}_\infty$, α_0 de classe $\mathcal{K}$ telles que pour tout couple de réels stritement positifs (Δ, ν) il existe $T^* > 0$ avec $T^* \leq \widehat{T}$ telle que pour toute période d'échantillonnage $T \in]0, T^*[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| \leq \Delta$, nous avons :*

$$\begin{aligned} \alpha_m(\|x\|) &\leq V_T(x) \leq \alpha_M(\|x\|) \\ \frac{V_T(F_T(x, u_T(x)) - V_T(x)}{T} &\leq -\alpha_0(\|x\|) + \nu \end{aligned}$$

alors la paire (F_T, u_T) est SPA stable.

Remarque : c'est le théorème de La Salle qui permet de faire le lien entre α_0, ν et δ. En effet, $\delta := \alpha_0^{-1}(\nu)$.

Maintenant, une fois que la paire $(F_a^T, u_T(x))$ est SPA stable, nous allons voir qu'il faut imposer quelques hypothèses pour démontrer que (F_e^T, u_T) l'est aussi. Nous avons recours aux définitions suivantes :

Définition 4.3.1.3 *: (Fonction de Lyapunov SPA Stabilisante). Soit $\widehat{T} > 0$ fixé et soient deux fonctions continues et définies sur $\mathbb{R}^n$ lorsque $T \in]0, \widehat{T}[$, $V_T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u_T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telles qu' il existe trois fonctions $\alpha_0, \alpha_m, \alpha_M$ de classe $\mathcal{K}_\infty$ telles que pour tout couple de réels strictement positifs (Δ, ν) il existe $L > 0$ et $T^* \in]0, \widehat{T}\,]$ tels que pour toute période d'échantillonnage $T \in]0, T^*[$ et pour tous couples de vecteurs réels (x,y) tels que $\max(\|x\|, \|y\|) \leq \Delta$, les solutions de (4.2) vérifient :*

$$\alpha_m(\|x\|) \leq V_T(x) \leq \alpha_M(\|x\|) \tag{4.4}$$

$$\frac{V_T(F_T(x, u_T(x)) - V_T(x)}{T} \leq -\alpha_0(\|x\|) + \nu \tag{4.5}$$

$$|V_T(x) - V_T(y)| \leq L\|x - y\| \tag{4.6}$$

Nous disons alors que V_T est une fonction de Lyapunov SPA Stabilisante (SPAS) pour F_T.

Définition 4.3.1.4 *: (Consistence de l'approximation). F_T^a est dite consistente avec F_T^e si il existe ρ, ϕ_1, ϕ_2 de classe $\mathcal{K}_\infty$ telles que pour tout couple de réels strictement positifs Δ, Λ il existe $T^* > 0$ telle que pour toute période d'échantillonnage $T \in]0, T^*[$, pour tous les couples $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ avec $\|x\| \leq \Delta$ et $\|u\| \leq \Lambda$ nous avons :*

$$\|F_T^e(x, u) - F_T^a(x, u)\| \leq T\rho(T)(\phi_1(\|x\|) + \phi_2(\|u\|)) \tag{4.7}$$

Définition 4.3.1.5 *: (Contrôleur uniformément borné pour de faibles valeurs de T). Soit* $\widehat{T} > 0$ *fixé et* $T \in]0, \widehat{T}[$*. Un contrôleur* u_T *est dit uniformément borné pour de faibles valeurs de T si pour tout réel stritement positif* Δ *il existe* κ *de classe* $\mathcal{K}_\infty$ *et* $T^* > 0$ *avec* $T^* \leq \widehat{T}$ *tels que pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *avec* $\|x\| \leq \Delta$ *et* $T \in]0, T^*[$*, nous avons :*

$$\|u_T(x)\| \leq \kappa(\|x\|) \tag{4.8}$$

Théorème 4.3.2 *Supposons que* F_T^a *soit consistente avec* F_T^e*, qu'il existe une fonction de Lyapunov* V_T *SPAS pour* F_T^a *et que* u_T *soit uniformément bornée pour de faibles valeurs de T, alors* (u_T, F_T^e) *est SPA stable.*

Ce sont les propriétés (4.6), (4.7) et(4.8) qui permettent de faire recoller la propriété de stabilité (SPA) de F_T^a à F_T^e. Elles permettent simplement de majorer la différence $|V(F_e^T(x, u_T(x)) - V(F_a^T(x, u_T(x))|$ dans la preuve de manière pratique car il n'y a pas besoin de connaître $F_e^T(x, u_T(x)$: la seule chose à connaître est un schéma d'approximation consistent au sens de la définition ci-dessus.
Ce cadre Mathématique est très puissant : il permet d'utiliser des structures de commandes u_T et des schémas d'approximation numériques consistents qui n'ont pas de forme imposée au préablable et donne un théorème qui permet alors de revenir au discrétisé exact tout en évitant les situations désastreuses décrites dans les exemples précédents.

Citons quelques propriétés :

Proposition 4.3.3 *Etant donné un système continu :* $\dot{x} = f(x, u)$ *tel qu'il existe un contrôleur* $u_c(x)$*, une fonction* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *différentiable,* α_0 *de classe* $\mathcal{K}$*,* α_1, α_2 *de classe* $\mathcal{K}_\infty$ *tels que* $\forall x$*,*

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x\|) &\leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \\ \dot{V}(x) := \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u_c(x)) &\leq -\alpha_0(\|x\|) \end{aligned}$$

alors si nous considèrons le système associé émulé $\dot{x} = f(x, u_c(kT)), \forall t \in [kT, (k+1)T[, k \in \mathbb{N}$ *et son discrétisé exact* $F_T^e(x, u_c(x))$*, la paire* (F_T^e, u_c) *est SPA stable. Nous disons que l'émulation est 'SPA'.*

Proposition 4.3.4 *Considérons l'approximation d'Euler* F_T^{euler} *de* F_T^e*. Si nous pouvons trouver* u_T *telle que* (F_T^{euler}, u_T) *est SPA stable, alors* (F_T^e, u_T) *est SPA stable.*

4.3.2 Conséquence sur la structure des commandes d'ordre supérieur

Dans le cadre de nos travaux, nous nous intéressons aux schémas à un pas de discrétisation d'ordre supérieur et nous utilisons des lois de commande de la forme suivante :

$$u_T^r := u_c + \sum_{i=1}^{r} T^i u_i \tag{4.9}$$

En effet, une telle structure de loi de commande répond parfaitement aux critères qui permettront de stabiliser (au sens de la stabilité SPA) un système à commande échantillonnée. Désormais, nous considérons une approximation d'ordre supérieur de la forme suivante :

$$F_T^r(x,u) = F_T^e(x,u) + R(r,T,x,u)$$

où :

$$R(r,T,x,u) \leq T^{r+2}(\gamma_1(\|x\|) + \gamma_2(\|u\|)) \tag{4.10}$$

où γ_1, γ_2 sont de classe $\mathcal{K}_\infty$.

Définition 4.3.2.1 *: (Stabilité Semi-globale, Pratique et Asymptotique (SPA) à l'ordre r+2) Le système (4.2) est dit "SPA stable à l'ordre r+2" lorsqu'il existe $\beta \in \mathcal{KL}$ telle que tous réels strictement positifs (Δ_0) et η il existe $T^* > 0$ tel que pour toute période d'échantillonnage $T \in]0, T^*[$ et pour toute condition initiale $x(0) = x_0$ où $\|x_0\| \leq \Delta_0$, les solutions de (4.2) vérifient :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \|x(k)\| \leq \beta(\|x_0\|, kT) + T^{r+2}\eta \tag{4.11}$$

Théorème 4.3.5 *Supposons qu'il existe $\Delta, T^* > 0$, $\alpha_m, \alpha_M, \gamma$ de classe $\mathcal{K}_\infty$, α_r de classe $\mathcal{K}$, $V_T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $T \in]0, T^*[$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ avec $\|x\| \leq \Delta, \forall T \in]0, T^*[$, nous avons :*

$$\alpha_m(\|x\|) \leq V_T(x) \leq \alpha_M(\|x\|) \tag{4.12}$$

$$\frac{V_T(F_T^r(x, u_T^r(x)) - V_T(x)}{T} \leq -\alpha_r(\|x\|) + T^{r+1}\gamma(\|x\|) \tag{4.13}$$

$$|V_T(x) - V_T(y)| \leq L(\|x\| - \|y\|) \tag{4.14}$$

alors (u_T^r, F_T^e) est SPA stable à l'ordre ξ_r où $T^{\xi_r} = \alpha_r^{-1}(T^{r+1}) + \mathcal{O}(T^{\xi_r+1})$.

preuve : ce théorème est une conséquence directe du théorème 4.3.2 une fois que nous utilisons la structure de commande employée. En effet, une telle commande est toujours uniformément bornée pour de faibles valeurs de T et tout schéma de discrétisation à base de séries de Taylor-Lie est évidemment consistent (4.10). Enfin, nous concluons en invoquant le principe de La Salle.

4.4 Utilisation des approximations à base de séries de Taylor-Lie

Le problème de la discrétisation exacte (i.e de l'intégration de la trajectoire entre deux instants d'échantillonnage) dans le cadre d'un retour d'état peut être abordé par différentes méthodes basées sur les séries de Volterra [39], de Fliess [55], ou sur la linéarisation de Carleman [100, 108] mais l'utilisation de séries de Taylor avec des coefficients exprimés sous forme de dérivées de Lie est plus naturelle et plus simple quand la commande est constante entre deux instants d'échantillonnnage. C'est même l'extension directe de l'exponentielle matricielle que nous utiliserions pour étudier les systèmes linéaires [40].

4.4.1 Notations

Nous utilisons les notations suivantes d'indices multiples :
- $I_k := (i_0, \ldots, i_k)$
- $|I_k| := i_0 + \ldots + i_k$
- $\|I_k\| := \sum_{j=0}^{k} j \ . \ i_j$

Nous notons ainsi les coefficients multinômiaux :

$$\left(\begin{array}{c} n \\ i_0 \ i_1 \ \ldots \ i_r \end{array} \right) := \frac{n!}{i_0! \ldots i_r!}$$

Nous rappelons la formule du multinôme de Newton :

$$\left(\sum_{i=0}^{r} a_i \right)^n = \sum_{\substack{I_r \in \{0,1\}^{r+1} \\ |I_r| \ = \ n}} \frac{n!}{i_0! \ldots i_r!} a_0^{i_0} \ldots a_r^{i_r}$$

Nous rappelons la notation usuelle pour les dérivées de Lie (i.e dérivée d'une fonction le long d'un champ de vecteurs) :
- $L_f h(x) := \frac{d}{dt}\Big[h(x(t))\Big]_{\big|\dot{x}=f(x)} = \frac{\partial h}{\partial x} \ . \ f(x)$
- $L_g L_f h(x) := L_g\big(L_f h(x)\big)$

Définition 4.4.1.1 *Nous disons qu'une fonction $R(T,x)$ à valeurs réelles est de l'ordre de T^r et nous écrivons alors $R(T,x) = \mathcal{O}(T^r)$ si lorsque R est définie, il existe $\overline{T}, \Delta > 0, \gamma \in \mathcal{K}^\infty$ telles que :*

$$\forall \ T, x \quad \textit{tels que } T \in [0, \overline{T}], \|x\| \leq \Delta, \qquad \Longrightarrow \quad |R(T,x)| \leq T^r \gamma(\|x\|)$$

Définition 4.4.1.2 *Nous utilisons des commandes sous forme de séries de la période d'échantillonnage de la forme suivante :*

$$u = \sum_{i=0}^{+\infty} T^i u_i \tag{4.15}$$

Nous disons qu'une commande u de le forme précédente est d'ordre r et nous la notons u^r lorsque : $u_r \neq 0$ presque partout et $u_{i\geq r+1} = 0$ partout.

4.4.2 Quelques résultats sur la comparaison de contrôleurs

Nous commençons par rappeler le résultat suivant :

Théorème 4.4.1 *(Nesic et Grüne [91]) : Etant donné un système de dimension n à commande échantillonnée de la forme :*

$$\dot{x} = g_0(x) + g_1(x)u_k \tag{4.16}$$

où g_0 et g_1 sont analytiques et où le contrôleur $u_k := u^r = \sum_{j=0}^{r} T^j u_j$ est d'ordre r. Pour toute fonction V suffisamment différentiable, nous avons :

$$\frac{V(x^+) - V(x)}{T} = L_{g_0}V(x) + L_{g_1}V(x)\ u_0 + \sum_{s=1}^{r} T^s\ [L_{g_1}V(x)\ u_s + p_s(x, U_{s-1})] + G(r, T, x, u^r)$$

où

$$U_{s-1} := (u_0, \ldots, u_{s-1})$$
$$G(r, T, x, u^r(x)) := R(T, x) = \mathcal{O}(T^{r+1})$$
$$p_s(x, U_{s-1}) := \sum_{k=1}^{s} \sum_{i_0=0,\ldots,i_k=0}^{m=1} \frac{L_{g_{i_0}} \ldots L_{g_{i_k}} V(x)}{(k+1)!} \left(\sum_{\substack{|N|=|I_k| \\ \|N\|=s-k}} \binom{|I_k|}{n_0\ n_1\ \ldots\ n_r} \prod_{j=0}^{r} u_j^{n_j} \right)$$

Remarque : en utilisant $u_r = 0$ dans u^r, nous obtenons la relation suivante : $T^r p_r(x, U_{r-1}) + G(r, T, x, u^{r-1}(x)) = G(r-1, T, x, u^{r-1}(x))$ (il était donc nécessaire de faire dépendre G de r ce qui n'était pas fait dans les notations de [91]).

Preuve : nous jugeons utile de rappeler ici les grandes lignes de la preuve originale ([91]).

Par un développement en série de la période d'échantillonnage, nous avons :

$$V(x^+) := V(F_T^e(x,u)) = V(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_0=0,\ldots,i_k=0}^{m=1} L_{g_{i_0}} \ldots L_{g_{i_k}} V(x) \frac{T^{k+1}}{(k+1)!} u^{|I_k|}$$

(Remarquons que dans le cas où V n'est pas forcément de classe $\mathcal{C}^\infty$ nous pourrons nous contenter de pouvoir la dériver au plus r fois, moyennant un léger changement dans la preuve originale. Nous partirons alors de la série de Taylor-Lagrange :

$$\begin{aligned} V(x^+) &:= V(F_T^e(x,u)) \\ &= V(x) + \sum_{k=0}^{r} \sum_{i_0=0,\ldots,i_k=0}^{m=1} L_{g_{i_0}} \ldots L_{g_{i_k}} V(x) \frac{T^{k+1}}{(k+1)!} u^{|I_k|} \\ &+ \frac{T^{r+2}}{(r+1)!} \int_0^1 (1-s)^{r+1} \sum_{i_0=0,\ldots,i_{r+2}=0}^{m=1} L_{g_{i_0}} \ldots L_{g_{i_{r+2}}} V(x(sT)) u^{|I_{r+2}|} ds \end{aligned}$$

).

Nous utilisons à présent un contrôleur de la forme suivante : $u_k := \sum_{j=0}^{r} T^j u_j$. En utilisant la formule du multinôme de Newton, nous avons :

$$\left(\sum_{j=0}^{r} T^j u_j \right)^{|I_k|} = \sum_{|N|=|I_k|} \begin{pmatrix} |I_k| \\ n_0\ n_1\ \ldots\ n_r \end{pmatrix} T^{\|N_r\|} \cdot \prod_{j=0}^{r} u_j^{n_j}$$

Puis nous obtenons le résultat, en regroupant les termes selon les puissances similaires de T et en mettant dans le "reste" les termes d'ordre supérieur (i.e termes en $T^{i \geq r+2}$) .□

Par exemple, lorsque $r = 1$, nous obtenons :

$$\frac{\Delta V}{T} = L_{g_0} V(x) + L_{g_1} V(x) u_0 + T(L_{g_1} V(x) u_1 + p_1(x, u_0)) + \mathcal{O}(T^2)$$

Et, nous pouvons calculer l'expression explicite de p_1 :

$$p_1(x, u_0) := \frac{L_{g_0}^2 V(x) + (L_{g_1} L_{g_0} V(x) + L_{g_0} L_{g_1} V(x)) u_0 + L_{g_1}^2 V(x)\ u_0^2}{2!}$$

Remarque : plus l'ordre r augmente et plus les calculs vont être importants : il est alors nécessaire d'utiliser un outil de calcul formel type Maple par exemple.

Hypothèses sur la commande continue

Dans les propositions qui suivent, nous supposons qu'il existe une commande u_0 stabilisant le système continu associé à (4.16) telle qu' il existe une fonction de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ et trois fonctions $\alpha_0, \alpha_m, \alpha_M$ de classe $\mathcal{K}_\infty$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

- (i) $\alpha_m(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_M(\|x\|)$
- (ii) $\dot{V} = L_{g_0}V + L_{g_1}Vu_0 \leq -\alpha_0(\|x\|)$
- (iii) la solution x du système bouclé satisfait des spécifications en termes de régime transitoire, de bassin d'attraction et de vitesse de convergence qui font qu'elle converge asymptotiquement vers 0 d'autant plus vite , sans effet de peaking et sur un plus grand domaine que α_0 prend des grandes valeurs quelque soit x.

Proposition 4.4.2 ***(CNS)*** *Sous les hypothèses (i)-(iii), une commande u^r d'ordre r est "meilleure" (au sens de la vitesse de convergence) qu'une commande d'ordre $r-1$, $u^{r-1} = u^r - T^r u_r$ ssi $\forall x \neq 0$:*

$$u_r \left(L_{g_1}V + \int_0^1 \left.\frac{\partial G}{\partial u}\right|_{(r,T,x,u=u^r+s(-T^r u_r))} ds \right) < 0$$

Preuve :
Etant donné un correcteur u^r d'ordre r tel que :

$$\frac{V(x^+) - V(x)}{T} = \beta_{r-1}(x) + T^r(L_{g_1}Vu_r + p_r(x, U_{r-1})) + G(r, T, x, u^r)$$

Le même correcteur tronqué à l'ordre $r-1$ aurait donné :

$$\frac{V(x^+) - V(x)}{T} = \beta_{r-1}(x) + T^r(p_r(x, U_{r-1})) + G(r, T, x, u^r - T^r u_r)$$

Cette égalité peut aussi se réécrire ainsi :

$$\frac{V(x^+) - V(x)}{T} = \beta_{r-1}(x) + T^r(p_r(x, U_{r-1})) + G(r, T, x, u^r) - T^r u_r \int_0^1 \left.\frac{\partial G}{\partial u}\right|_{(r,T,x,u=u^r+s(-T^r u_r))} ds$$

Ainsi, le contrôleur d'ordre r, rend la quantité $\frac{V(x^+)-V(x)}{T}$ plus petite que le contrôleur d'ordre $r-1$ lorsque :

$$L_{g_1}Vu_r < -u_r \int_0^1 \left.\frac{\partial G}{\partial u}\right|_{(r,T,x,u=u^r+s(-T^r u_r))} ds$$

Ce qui correspond au résultat annoncé. A noter que plus la quantité $\frac{V(x^+)-V(x)}{T}$ est rendue faible et plus la vitesse de convergence est élevée.

G étant difficilement calculable, nous utiliserons généralement le résultat suivant :

Proposition 4.4.3 *Sous les hypothèses (i)-(iii), supposons que la commande u^r d'un ordre r fixé donne :*

$$\frac{V(x^+) - V(x)}{T} = -\alpha_r(T,x) + \widetilde{G}_r(T,x)$$

où $\widetilde{G}_r(T,x) = \mathcal{O}(T^{r+1})$. Alors, il existe $\Delta > 0$ et $\overline{T} > 0$ tel que pour tout $\|x\| \leq \Delta$ et pour toute période d'échantillonnage $T \in]0, \overline{T}]$, il existe γ de classe $\mathcal{K}$ tel que la commande d'ordre r fait décroître davantage la quantité $V(x^+) - V(x)$ que la commande d'ordre $r-1$ dès que :

$$\alpha_r(T,x) > \alpha_{r-1}(T,x) + \overline{T}^{2r+1}\gamma(\Delta) + T^r|P_r(x, U_{r-1})|$$

En ce sens, nous disons à nouveau que la commande d'ordre r est "meilleure" que la commande d'ordre $r-1$.

Si de plus, toujours à l'intérieur du domaine $\|x\| \leq \Delta$, nous avons :

$$\alpha_r(T,x) > \alpha_{r-1}(T,x) > 0 \tag{4.17}$$

alors $V(x)$ tend vers $0 + \mathcal{O}(T^{r+2})$ avec la commande d'ordre r et vers $0 + \mathcal{O}(T^{r+1})$ avec la commande d'ordre $r-1$. La précision sera alors d'autant meilleure que l'ordre r augmentera.

preuve :

Reprenons les calculs de la Proposition (4.4.2), étant donné que $G(r,T,x,u^r(x)) = \mathcal{O}(T^{r+1})$, les fonctions considérées étant analytiques, nous pouvons raisonnablement écrire qu'il existe $\Delta, \overline{T} > 0$ tels que pour $\|x\| \leq \Delta$ et $T \in [0, \overline{T}]$, il existe γ_1 de classe $\mathcal{K}$

$$|G(r,T,x,u^r) - G(r,T,x,u^r - T^r u_r)| \leq T^{r+1}.T^r.\gamma_1(\Delta)$$

Il existera donc γ de classe $\mathcal{K}$ telle que :

$$\left| u_r \int_0^1 \left.\frac{\partial G}{\partial u}\right|_{(r,T,x,u=u^r+s(-T^r u_r))} ds \right| \leq T^{r+1}\gamma(\Delta)$$

Remarquons que les notations se correspondent i.e nous avons un lien entre les 2 propositions moyennant l'utilisation du terme u_r qui a permis de passer de α_{r-1} à α_r :

$$\alpha_r(T,x) - \alpha_{r-1}(T,x) = T^r L_{g_1} V u_r + T^r P_r(x, U_{r-1})$$

$$\widetilde{G}_r(T,x) - \widetilde{G}_{r-1}(T,x) = T^r u_r \int_0^1 \left.\frac{\partial G}{\partial u}\right|_{(r,T,x,u=u^r+s(-T^r u_r))} ds - T^r P_r(x, U_{r-1})$$

la conclusion s'impose puisque l'inégalité de la proposition est satisfaite lorsque la différence $\alpha_r - \alpha_{r-1}$ est suffisamment grande. Quant à la deuxième partie de la proposition, il s'agit simplement d'appliquer la version discrète du théorème de La Salle.

Proposition 4.4.4 *(inspirée de [91] : "high gain controller redesign")*
Sous les hypothèses (i)-(iii), en considérant u_0 comme premier terme de la commande u^r d'ordre r du système à commande échantillonnée et où :

$$u_{1\leq j\leq r}(x) = -\gamma_j(V(x))(L_{g_1}V(x))$$

où les γ_j sont de classe $\mathcal{K}$. Nous obtenons :

$$\frac{V(x^+)-V(x)}{T} = -\alpha_0(\|x\|)+\sum_{s=1}^{r} T^s\ [-\gamma_s(V(x))(L_{g_1}V(x))^2+p_s(x,U_{s-1}(x))]+G(T,x,u^r(x))$$

Ainsi, en vertu de la Proposition 4.4.3, lorsque la quantité $\sum_{s=1}^{r} T^s\ \gamma_s(V(x))(L_{g_1}V(x))^2$ est suffisamment grande, cette commande u^r d'ordre r sous certaines conditions est meilleure (au sens de la de la vitesse de convergence) que la commande u_0 sur un certain domaine et pour une période d'échantillonnage suffisamment petite. Cette commande est la commande continue "redesignée" par Nesic et Grüne.

Remarque : des termes négatifs sont rajoutés dans les ordres supérieurs mais ne compensent pas forcément ces termes.

preuve : aisée en s'inspirant de la Proposition 4.4.3.

Proposition 4.4.5 *Sous les hypothèses (i)-(iii), supposons maintenant que g_0 et g_1 soient telles que les conditions (très particulières) suivantes soient satisfaites $\forall s \in \{1,r\}$:*

$$p_s(x,U_{s-1}) = L_{g_1}V(x)\ .\ \overline{p}_s(x,U_{s-1}) \tag{4.18}$$

et qu'il existe une commande u_0 d'ordre 0 et une fonction α_0 de classe $\mathcal{K}$ telles que :

$$L_{g_0}V + L_{g_1}Vu_0 < -\alpha_0(\|x\|)$$

Alors, l'équation (4.17) est satisfaite $\forall x > 0+\mathcal{O}(T^{r+1})$ lorsque nous utilisons la commande suivante :

$$\begin{cases} u_{r\geq s\geq 1}(x) = -\gamma\ |\overline{p}_s(x,U_{s-1}(x))|\ sign\big(L_{g_1}V(x)\big) \\ u_{i\geq r+1}(x) = 0 \end{cases}$$

avec $\gamma > 1$.

preuve : il suffit de remarquer que nous avons alors :

$$\frac{V(x^+)-V(x)}{T} = -\alpha_0(\|x\|)+\sum_{s=1}^{r} T^s\ [-\gamma|p_s(x,U_{s-1}(x))|+p_s(x,U_{s-1}(x))]+G(T,x,u^r(x))$$

cela signifie que :

$$\alpha_r(\|x\|) = \alpha_0(\|x\|)+\sum_{s=1}^{r} T^s\ [\gamma|p_s(x,U_{s-1}(x))|-p_s(x,U_{s-1}(x))]$$

est bien de classe $\mathcal{K}$ et que :

$$\alpha_r(\|x\|) - \alpha_{r-1}(\|x\|) = \gamma|p_s(x, U_{s-1}(x))| - p_s(x, U_{s-1}(x)) \geq 0$$

d'où le résultat de la proposition.

Remarque 1 :

L'usage de la fonction signe peut être intéressant mais celle-ci a la particularité de ne pas être dérivable autour de 0. Aussi pour notre étude, nous verrons que nous aurons besoin de commandes suffisamment dérivables (exemple du Backstepping) et nous serons amenés à utiliser la commande modifiée suivante :

$$\begin{cases} u_{r\geq s\geq 1} = -\gamma\ \overline{p}_s(x, U_{s-1})\ Sat_r^p\big(p_s(x, U_{s-1})\big) \\ u_{i\geq r+1} = 0 \end{cases} \tag{4.19}$$

avec $\gamma > 1$ et où Sat_r^p est définie comme toute fonction de T et de r satisfaisant : $\forall x \in \mathbb{R}$ $t.q$ $|x| \geq T^r$,

$$\begin{cases} Sat_r^p(x) = sign(x) + \mathcal{O}(T^r) \\ \frac{d}{dx}Sat_r^p(x) = .. = \frac{d^p}{dx^p}Sat_r^p(x) = 0 + \mathcal{O}(T^r) \end{cases}$$

Par exemple, pour T,r et p donnés, il suffit de choisir la fonction suivante :

$$Sat_r^p(x) = \begin{cases} sign(x), & \forall x \quad t.q \quad |x| \geq T^r \\ P_p(x), & \forall x \quad t.q \quad |x| \leq T^r \end{cases} \tag{4.20}$$

où P_p est un polynôme tel que :

$$\frac{d}{dx}P_p(z) = .. = \frac{d^p}{dx^p}P_p(z) = 0$$

en $z = -T^r$ et $z = T^r$.

Exemple : calculons $P_1(x)$.

Si nous le choisissons impaire, il ne doit plus satisfaire que 2 conditions tout en étant toujours de degré supérieur ou égal à 3. Nous cherchons : $P_1(x) = a_3x^3 + a_1x$. Les 2 conditions à satisfaire s'écrivent :

$$\begin{cases} a_3(T^r)^3 + a_1(T^r) = 1 \\ 3a_3(T^r)^2 + a_1 = 0 \end{cases}$$

En inversant la matrice nous obtenons finalement :

$$P_1(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{T^r}\right)^3 + \frac{3}{2}\ \frac{x}{T^r}$$

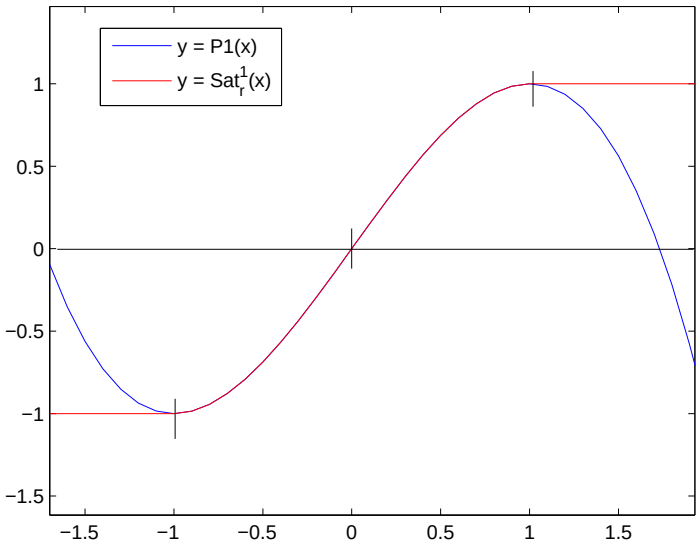


FIGURE 4.1 – tracé de Sat_r^1 si nous multiplions l'échelle des abscisses par T^r

De même, après quelques calculs nous aurions :

$$P_2(x) = \frac{3}{8}\left(\frac{x}{T^r}\right)^5 - \frac{5}{4}\left(\frac{x}{T^r}\right)^3 + \frac{15}{8}\,\frac{x}{T^r}$$

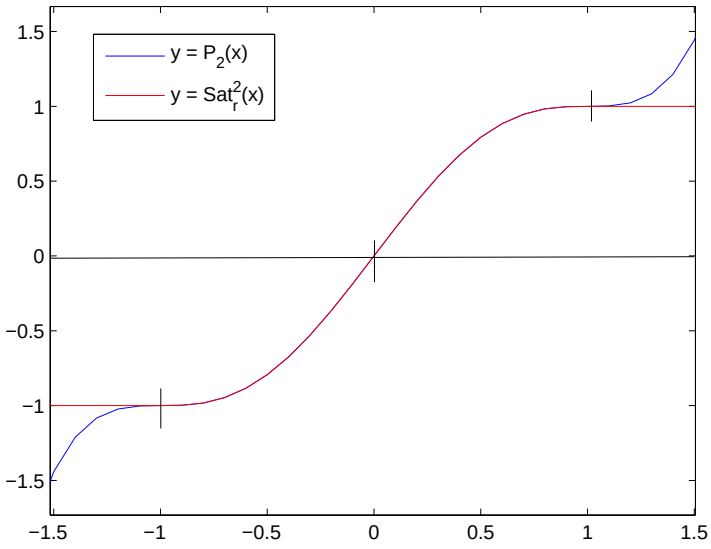


FIGURE 4.2 – tracé de Sat_r^2 si nous multiplions l'échelle des abcisses par T^r

Remarque 2 :
Si nous nous servons des fonctions Sat_r^p pour construire des fonctions de Lyapunov Lipschitziennes, il faudra imposer la condition supplémentaire suivante dans la recherche des P_i impaires : $P_i(T^r > x > 0) > 0$. D'ailleurs, cette condition est vérifiée pour les fonctions P_1 et P_2 que nous avons entièrement déterminées.

Remarque 3 :
Nous pouvons aussi rechercher une fonction non analytique mais vérifiant les propriétés demandées. Si nous considérons,

$$S(x) = -1 + \frac{2}{\int_{-1}^{1} exp\left(\frac{-1}{1-y^2}\right) dy} \int_{-1}^{x} exp\left(\frac{-1}{1-y^2}\right) dy$$

La fonction $x \longrightarrow S(\frac{x}{T^r})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, croissante, nulle en 0, vaut -1 en $x \leq -T^r$, vaut 1 pour $x \geq T^r$ et a toutes ses dérivées nulles en $-T^r$ et T^r. Ainsi, si nous considérons :

$$\widetilde{Sat}(x) = \begin{cases} S(\frac{x}{T^r}) & , \forall x, |x| \leq T^r \\ sign(x) & , \text{ailleurs} \end{cases}$$

la fonction $\widetilde{Sat}$ vérifie toutes les conditions requises (quelque soit p) mais son expression sous forme d'intégrale reste difficile à utiliser.

Remarque 4 :
L'hypothèse (4.18) est très forte mais nous allons voir déjà comment nous pouvons l'obtenir pour une classe de systèmes de dimension 1 et pour des fonctions de Lyapunov candidates bien choisies.
Nous considérons les systèmes monodimensionnels de la forme :

$$\dot{x} = f_1(x) + u_k \tag{4.21}$$

où f_1 est analytique.

Proposition 4.4.6 *Si nous considérons le discrétisé exact associé au système monodimensionnel (4.21) et la fonction de Lyapunov candidate :*

$$V(x) = Sat_{r+2}^{r+2}(x) \ . \ x$$

Alors, le développement de $V(x^+) - V(x)$ selon la formule du Théorème 4.4.1 conduit bien à mettre chaque p_i sous la forme : $p_i = L_{g_1} V \overline{p}_i$.

preuve : En appliquant le théorème de Nesic et Grüne, V étant l'identité sur $\mathbb{R}$, nous pouvons écrire x^+ sous la forme suivante :

$$x^+ = x + T(f_1(x) + u_0) + \sum_{i=1}^{r} T^{i+1}(u_i + \overline{p}_i(x, U_{i-1})) + \mathcal{O}(T^{r+2})$$

où : $U_{i-1} := (u_0, \ldots, u_{i-1})$ et où $g_0 := f_1$ et $g_1 := Id_{\mathbb{R}}$.
Si nous utilisons la fonction de Lyapunov candidate : $V(x) = Sat_{r+2}^{r+2}(x) \ . \ x$ alors, les calculs des dérivées successives de $V(x)$ sont largement simplifiés. En effet,

$$\begin{cases} \dot{V}(x) = \left(\frac{d}{dx}(Sat_{r+2}^{r+2}(x))x + Sat_{r+2}^{r+2}(x)\right)\dot{x} \\ \ddot{V}(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2}(Sat_{r+2}^{r+2}(x))x + 2\frac{d}{dx}(Sat_{r+2}^{r+2}(x))+\right)\dot{x}^2 + \left(Sat_{r+2}^{r+2}(x) + \frac{d}{dx}(Sat_{r+2}^{r+2}(x).x)\right)\ddot{x} \\ \vdots \\ V^{(r+2)}(x) = \frac{d^{r+2}}{dx^{r+2}}(Sat_{r+2}^{r+2}(x))x(\dot{x})^{r+2} + \ldots + \left(Sat_{r+2}^{r+2}(x) + \frac{d}{dx}(Sat_{r+2}^{r+2}(x).x)\right)x^{(r+2)} \end{cases}$$

Par une formule de Taylor-Lagrange, nous avons alors :

$$\frac{V(x^+) - V(x)}{T} = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{T^{i-1}}{i!} V^{(i)}(x) + \int_0^1 \frac{T^{r+1}}{(r+1)!}(1-s)^{r+1} V^{(r+2)}(x(s+kT))ds$$

Or, par définition, $\frac{d}{dx}(Sat_{r+2}^{r+2}(x)) = \ldots = \frac{d^{r+2}}{dx^{r+2}}(Sat_{r+2}^{r+2}(x)) = 0 + \mathcal{O}(T^{r+2})$.
Nous aurons donc la forme factorisée suivante : $\forall x$

$$\frac{V(x^+) - V(x)}{T} = Sat_{r+2}^{r+2}(x)(f_1(x) + u_0) + Sat_{r+2}^{r+2}(x)\sum_{i=1}^{r} T^i\left(u_i + \overline{p}_i(x, U_{i-1})\right) + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

(Si nous avions choisi par exemple, $V(x) = Sat^r_{r+2}(x)$ nous aurions pu avoir $\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}(Sat^r_{r+2}(x))$ discontinue en $-T^{r+2}$et T^{r+2} et ainsi $V^{(r+2)}$ non bornée).

Finalement, il est évident qu'en utilisant cette fonction V, chaque p_i se met bien ici sous la forme : $p_i = L_{g_1} V.\overline{p}_i$. $\square$.

Proposition 4.4.7 *Supposons que u_0 est au moins de classe $\mathcal{C}^{r+1}$ et que $u_k := u^r$ est une commande d'ordre r vérifiant (4.19) alors considérant le discrétisé exact associé au système monodimensionnel (4.21) et la fonction de Lyapunov candidate :*

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

le développement de $V(x^+) - V(x)$ selon la formule du Théorème 4.4.1 conduit bien à mettre chaque p_i sous la forme : $p_i = L_{g_1} V \overline{p}_i$.

preuve : D'après le théorème 4.4.1 nous pouvons écrire :

$$\frac{(x^+)^2 - x^2}{T} = x f_1(x) + x\ u_0(x) + \sum_{s=1}^{r} T^s\ [x\ u_s(x) + p_s(x, U_{s-1}(x))] + G(r, T, x, u^r(x))$$

où

$$\begin{aligned}
&g_0(x) := f_1(x) \qquad \text{et} \qquad g_1(x) := 1\\
&U_{s-1}(x) := (u_0(x), \ldots, u_{s-1}(x))\\
&G(r, T, x, u^r(x)) := R(T, x) = \mathcal{O}(T^{r+1})\\
&p_s(x, U_{s-1}) := \sum_{k=1}^{s} \sum_{i_0=0,\ldots,i_k=0}^{m=1} \frac{L_{g_{i_0}} \ldots L_{g_{i_k}} V(x)}{(k+1)!} \left(\sum_{\substack{|N|=|I_k|\\ \|N\|=s-k}} \begin{pmatrix} |I_k| \\ n_0\ n_1\ \ldots\ n_r \end{pmatrix} \prod_{j=0}^{r} u_j^{n_j} \right)
\end{aligned}$$

Nous remarquons alors que :

$$p_s(x, U_{s-1}) := \frac{L^s_{g_0}\ V(x)}{(s+1)!} + \sum_{k=1}^{s} \sum_{\substack{i_0=0,\ldots,i_k=0\\ |I_k|\geq 1}}^{m=1} \frac{L_{g_{i_0}} \ldots L_{g_{i_k}} V(x)}{(k+1)!} \left(\sum_{\substack{|N|=|I_k|\\ \|N\|=s-k}} \begin{pmatrix} |I_k| \\ n_0\ n_1\ \ldots\ n_r \end{pmatrix} \prod_{j=0}^{r} u_j^{n_j}(x) \right)$$

Or, nous pouvons écrire $L^s_{g_0} V(x)$ sous la forme :

$$L^s_{g_0} V(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} L^{s-1}_{g_0} V(x) \right) f_1(x)$$

Donc, finalement $p_s(x, U_{s-1})$ peut se mettre sous la forme :

$$p_s(x, U_{s-1}) = p_{0s}(x) f_1(x) + \sum_{i=0}^{s-1} p_{is}(x, U_{s-1}) u_i(x)$$

Nous aurons donc :

$$\overline{p}_s(x, U_{s-1}(x)) = \begin{cases} p_{0s}(x)\frac{f_1(x)}{x} + \sum_{i=0}^{s-1} p_{is}(x, U_{s-1}(x))\frac{u_i(x)}{x} & \text{si } L_{g_1}V(x) := x \neq 0 \\ 0 & \text{si } L_{g_1}V(x) := x = 0 \end{cases}$$

Les $\overline{p}_s$' sont continus et existent : en effet, $\frac{f_1(x)}{x}, \frac{u_0}{x}$ et les $\frac{u_{s-1\geq i\geq 1}}{x}$ sont bornés sur tout voisinage fermé borné de l'origine. $\square$.

Proposition 4.4.8 *(Comparaison de la commande d'ordre r avec toute commande d'ordre inférieur) Sous les hypothèses (i)-(iii), supposons que l'hypothèse (4.18) soit vérifiée et qu'il existe une commande u_0 d'ordre 0, et une fonction α_0 de classe $\mathcal{K}$ telles que :*

$$L_{g_0}V + L_{g_1}Vu_0 < -\alpha_0(\|x\|)$$

Alors, la commande d'ordre r est 'meilleure' que toutes ses troncatures d'ordre inférieur $\forall x > 0 + \mathcal{O}(T^{r+1})$ lorsque nous utilisons la commande suivante :

$$\begin{cases} u_{r\geq s\geq 1}(x) := -\gamma sign(L_{g_1}V(x)) \left[|\widetilde{p}_s(x, u_0(x))| + \sum_{i=1}^{s-1} |u_i(x)\ \overline{p}_{s,i}(x, U_i(x))| \right] \\ u_{i\geq r+1}(x) = 0 \end{cases}$$

où l'expression des $\widetilde{p}_s$ et des $\overline{p}_{s,i}$ est donnée dans la preuve et où $\gamma > 1$.

preuve : Nous avons :

$$\frac{V(x^+) - V(x)}{T} = -\alpha_0(\|x\|) + \sum_{s=1}^{r} T^s\ L_{g_1}V(x)[u_s(x) + \overline{p}_s(x, U_{s-1}(x))] + G(T, x, u^r(x))$$

Etant donnée l'expression de p_s donnée dans le théorème 4.4.1, nous pouvons décomposer p_s et donc $\overline{p}_s$ de la façon suivante :

$$\overline{p}_s(x, U_{s-1}(x)) := \widetilde{p}_s(x, u_0(x)) + \sum_{i=1}^{s-1} u_i(x)\ \overline{p}_{s,i}(x, U_i(x))$$

Nous posons :

$$u_s(x) := -\gamma sign(L_{g_1}V(x)) \left[|\widetilde{p}_s(x, u_0(x))| + \sum_{i=1}^{s-1} |u_i(x)\ \overline{p}_{s,i}(x, U_i(x))| \right]$$

avec $\gamma > 1$. Nous notons

$$\Delta_s V(x) := V(F_T^e(x, u^s(x)) - V(x)$$

Si nous appliquons la commande d'ordre r, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_r V(x)}{T} &= -\alpha_0(\|x\|) - \sum_{s=1}^{r} T^s \Big[\gamma|L_{g_1}V(x)\widetilde{p}_s(x,u_0(x))| - L_{g_1}V(x)\widetilde{p}_s(x,u_0(x)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{s-1}\gamma|L_{g_1}V(x)\ u_i(x)\ \overline{p}_{s,i}(x,U_i(x))| - L_{g_1}V(x)u_i(x)\ \overline{p}_{s,i}(x,U_i(x))\Big] \\ &\quad + \mathcal{O}(T^{r+1}) \\ &:= -\alpha_r(\|x\|) + \mathcal{O}(T^{r+1})\end{aligned}$$

Si nous appliquons la commande d'ordre $0 \leq q < r$, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_q V(x)}{T} &= -\alpha_0(\|x\|) - \sum_{s=1}^{q} T^s \Big[\gamma|L_{g_1}V(x)\ \widetilde{p}_s(x,u_0(x))| - L_{g_1}V(x)\widetilde{p}_s(x,u_0(x)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{s-1}\gamma|L_{g_1}V(x)\ u_i(x)\ \overline{p}_{s,i}(x,U_i(x))| - L_{g_1}V(x)u_i(x)\ \overline{p}_{s,i}(x,U_i(x))\Big] \\ &\quad + \sum_{s=q+1}^{r} T^s \Big[\sum_{i=1}^{q} L_{g_1}V(x)u_i(x)\ \overline{p}_{s,i}(x,U_i(x))\Big] + 0 + \mathcal{O}(T^{r+1})\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall q \in \{0,\ldots,r-1\}$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_r V(x)}{T} - \frac{\Delta_q V(x)}{T} &= -\sum_{s=q+1}^{r}\sum_{i=1}^{q} T^s\ \gamma|L_{g_1}V(x)u_i(x)\ \overline{p}_{s,i}(x,U^i(x))| + \sum_{s=q+1}^{r} T^s \\ &\quad \times \Big[\sum_{i=q+1}^{s-1}\gamma|L_{g_1}V(x)u_i(x)\ \overline{p}_{s,i}(x,U_i(x))| \\ &\quad - L_{g_1}V(x)u_i(x)\ \overline{p}_{s,i}(x,U_i(x))\Big] + \mathcal{O}(T^{r+1}) \\ &\leq 0 + \mathcal{O}(T^{r+1})\end{aligned}$$

En ce sens, u^r est bien meilleure que toutes ses troncatures. Signalons de plus que α_r est de classe $\mathcal{K}$. Bien entendu à nouveau la fonction signe utilisée dans le contrôleur pourra être remplacée par nos fonctions Sat_r^p s'il faut dériver le contrôleur.

4.4.3 Quelques exemples illustratifs

Nous présentons à présent quelques exemples afin d'illustrer nos résultats. Ces exemples sont volontairement monodimensionnels afin d'alléger les calculs et de vérifier à coup sûr l'hypothèse (4.18). Des classes de systèmes de plus grandes dimensions seront présentées dans les chapitres suivants.

4.4.3.1 Exemple 1

$$\dot{x} = x^2 + u_k$$

Nous utilisons la fonction de Lyapunov : $V(x) = x^2$. Nous avons :

$$\frac{V(x^+) - V(x)}{T} = 2x(x^2 + u_0) + Tx(2u_1 + 2x^3 + 2xu_0) + T(x^4 + 2x^2u_0 + u_0^2) + \mathcal{O}(T^2)$$

Nous choisissons :

$$u_0 = -x - x^2 sign(x)$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\frac{V(x^+) - V(x)}{T} &= -2x^2 - 2(|x|x^2 - x^3) + Tx(2u_1 + 2x^3 - 2x^2 - 2x^3 sign(x)) \\ &\quad + Tx(x^3 - 2x^2 - 2x^3 sign(x) + x + 2x^2 sign(x) + x^3) + \mathcal{O}(T^2) \\ &= -2x^2 - 2(|x|x^2 - x^3) + Tx(2u_1 + 4x^3 - 4x^3 sign(x) - 4x^2 \\ &\quad + 2x^2 sign(x) + x) + \mathcal{O}(T^2)\end{aligned}$$

Nous choisissons alors :

$$u_1 = -\frac{\gamma}{2}|\overline{p}_1| sign(x)$$

avec $\overline{p}_1 := 4x^3 - 4x^3 sign(x) - 4x^2 + 2x^2 sign(x) + x$ et $\gamma > 1$.

Comparaison des contrôleurs :

Avec le contrôleur d'ordre 0 (i.e un contrôleur continu émulé/bloqué), nous avons :

$$\frac{V(x^+) - V(x)}{T} = -2x^2 - 2(|x|x^2 - x^3) + Tx\overline{p}_1 + \mathcal{O}(T^2)$$

Et avec le contrôleur d'ordre 1, nous avons :

$$\frac{V(x^+) - V(x)}{T} = -2x^2 - 2(|x|x^2 - x^3) + T(x\overline{p}_1 - \gamma|x\overline{p}_1|) + \mathcal{O}(T^2)$$

A un "$\mathcal{O}(T^2)$" près, le contrôleur d'ordre 1 fait décroître davantage V en un pas de temps pour une même condition initiale que le contrôleur d'ordre 0. Si la commande continue vérifie les hypothèses (i)-(iii), le contrôleur d'ordre 1 est donc plus performant que le contrôleur d'ordre 0 dans un voisinage de l'origine pour T suffisamment petit.

Résultats numériques : (Courbes 9.10-9.13)
Cet exemple a été simulé dans le dernier chapitre pour les données suivantes : $T = 0.1, \gamma = 2$.
Pour différentes conditions initiales, nous avons tracé la solution du système dynamique bouclé :

- en noir, lorsque la commande est continue $u := u_c$

- en pointillés bleus lorsque le système est commandé par la commande échantillonnée d'ordre 0, $u_k := u^0$
- en croix rouges lorsque le système est commandé par la commande échantillonnée d'ordre 1, $u_k := u^1$

Les résultats sont en accord avec la théorie mise en oeuvre dans ce chapitre : la commande d'ordre 1 est 'meilleure' que la commande d'ordre 0, au sens défini précédemment et elle reproduit davantage le comportement de la commande continue. Etant donnés les résultats, il semblerait que le domaine d'attraction soit élargi lorsque l'ordre de la commande augmente pour cette période d'échantillonnage.

4.4.3.2 Exemple 2

$$\dot{x} = \sin(x) + u_k$$

Nous utilisons la fonction de Lyapunov : $V(x) = x^2$. On a :

$$\frac{\Delta V}{T} = 2x(\sin(x) + u_0) + Tx(2u_1 + \sin(x)\cos(x) + \cos(x)u_0) + T(\sin(x) + u_0)^2 + \mathcal{O}(T^2)$$

Nous choisissons :

$$u_0 = -x - |\sin(x)|sign(x)$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{T} &= -2x^2 - 2(|x\sin(x)| - x\sin(x)) + Tx(2u_1 + \sin(x)\cos(x) - x\cos(x) \\ &\quad -|\sin(x)|\cos(x)sign(x)) + T(\sin(x) - sign(x)|\sin(x)| - x)^2 + \mathcal{O}(T^2)\end{aligned}$$

Nous choisissons alors :

$$u_1 = -\frac{\gamma}{2}|\overline{p}_1|sign(x)$$

avec :

$$\begin{cases} \overline{p}_1(x \neq 0) := & (1 - sign(x\sin(x)))\sin(x)\cos(x) - x\cos(x) + \frac{\sin^2(x)}{x}(1 - sign(x\sin(x)))^2 \\ & \qquad +x - 2(1 - sign(x\sin(x)))\sin(x) \\ \overline{p}_1(0) := 0 \end{cases}$$

et $\gamma > 1$.

Comparaison des contrôleurs :

Avec le contrôleur d'ordre 0 (i.e un contrôleur continu émulé/bloqué), nous avons :

$$\frac{V(x^+) - V(x)}{T} = -2x^2 - 2(|x\sin(x)| - x\sin(x)) + Tx\overline{p}_1 + \mathcal{O}(T^2)$$

Et avec le contrôleur d'ordre 1, nous avons :

$$\frac{V(x^+) - V(x)}{T} = -2x^2 - 2(|x\sin(x)| - x\sin(x)) + T(x\overline{p}_1 - \gamma|x\overline{p}_1|) + \mathcal{O}(T^2)$$

A un "$\mathcal{O}(T^2)$" près, le contrôleur d'ordre 1 fait décroître davantage V en un pas de temps pour une même condition initiale que le contrôleur d'ordre 0. Si la commande continue vérifie les hypothèses (i)-(iii), le contrôleur d'ordre 1 est donc plus performant que le contrôleur d'ordre 0 dans un voisinage de l'origine pour T suffisamment petit.

Résultats numériques : (courbes 9.14-9.16)
Cet exemple a été simulé dans le dernier chapitre pour les données suivantes : $T = 0.1, \gamma = 2$.
Pour différentes conditions initiales, nous avons tracé la solution du système dynamique bouclé :

- en continu, lorsque la commande est continue $u := u_c$
- en pointillés lorsque le système est commandé par la commande échantillonnée d'ordre 0, $u_k := u^0$
- en croix, lorsque le système est commandé par la commande échantillonnée d'ordre 1, $u_k := u^1$

Les résultats confirment la théorie mise en oeuvre dans ce chapitre : la commande d'ordre 1 est 'meilleure' que la commande d'ordre 0 au sens défini précédemment et reproduit davantage le comportement de la commande continue. Etant donnés les résultats, il semblerait que le domaine d'attraction soit élargi lorsque l'ordre de la commande augmente pour cette période d'échantillonnage.

Chapitre 5

Procédure de Backstepping et échantillonnage

5.1 Introduction

L'approximation par séries de Taylor-Lie du discrétisé exact pour un système sous forme triangulaire présente un inconvénient majeur : nous perdons la forme triangulaire (si utile à la synthèse de la commande continue) dès que le schéma est d'ordre r supérieur à 1 comme l'ont souligné Nesic et Teel dans [87] qui se sont alors restreints à un schéma d'Euler. Ceci pose un réel souci à première vue mais en utilisant une commande d'ordre r déterminée récursivement, nous allons montrer qu'il est tout de même possible de réaliser une procédure similaire au Backstepping pour un développement en série d'ordre r supérieur à 1.
L'idée générale des algorithmes consiste à changer la structure des pseudo-contrôleurs utilisés par la commande synthétisée en continu en les exprimant sous forme de séries de la période d'échantillonnage.
Dans ce chapitre c'est à partir de cette idée de base que nous avons pu obtenir un théorème général mais non constructif pour une classe de systèmes de la forme "feedback" (résultat publié dans [19]) et nous avons ensuite donné deux nouveaux algorithmes constructifs pour la synthèse de lois de commande d'ordre donné de systèmes de la classe strict-feedback : le premier algorithme est une généralisation classique du cas continu avec la démarche présentée dans [19] alors que le deuxième algorithme utilise les nouveaux concepts de fonctions Sat_p^r et de comparaisons de lois de commande introduits dans le chapitre précédent. Ce dernier algorithme offre une meilleure précision et permet sous certaines conditions de démontrer que la commande est d'autant meilleure que son ordre est élevé.
A noter que dans le cas strict-feedback, l'échantillonnage ne conserve pas le difféomorphisme utilisé par la commande continue et que nous pourrons seulement montrer que la première composante de l'état suit une consigne donnée avec une précision voulue exprimée en $\mathcal{O}(T^M)$: nous pouvons dire qu'une fois de plus l'échantillonnage a introduit une dynamique de zéros supplémentaire.

5.2 Un résultat général

Nous considérons la classe suivante de système non linéaire continu :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \tag{5.1}$$

où $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, et f,g sont des fonctions analytiques.
Nous supposons qu'il existe W définie positive et suffisamment différentiable, α_0 de classe $\mathcal{K}_\infty$, $c > 0$ et un pseudo contrôleur $\overline{\xi}_c$ tels que :

$$\dot{W}(\eta) = -\alpha_0(\eta) + \frac{\partial W}{\partial \eta} g(\eta)(\xi - \overline{\xi}_c)$$

Alors, posant $u_c = -c(\xi - \overline{\xi}_c) + \dot{\overline{\xi}}_c$ avec $c > 0$, nous avons aussi :

$$\frac{d}{dt}(\xi - \overline{\xi}_c) = -c(\xi - \overline{\xi}_c)$$

Ainsi, ξ tend exponentiellement vers $\overline{\xi}_c$ et donc η vers 0.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$ fixé et soit $T > 0$ la période d'échantillonnage de la commande échantillonnée du même système. Nous considérons donc à présent le système à commande échantillonnée suivant : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [kT, (k+1)T[$

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi \\ \dot{\xi} = u_k \end{cases} \tag{5.2}$$

Le discrétisé exact associé au système précédent s'écrit :

$$\begin{cases} \eta^+ = \eta + T(f(\eta) + g(\eta)\xi) + \sum_{i=2}^{r+1} \frac{T^i}{i!} \eta^{(i)}(kT) + G(r+1, T, \eta, \xi) \\ \xi^+ = \xi + Tu \end{cases} \tag{5.3}$$

où : $G(r+1, T, \eta, \xi) := \frac{T^{r+2}}{(r+1)!} \int_0^1 (1-s)^{r+1} \eta^{(r+2)}(sT) ds = \mathcal{O}(T^{r+2})$.
Le calcul des dérivées successives de η i.e le calcul explicite des $\eta^{(i)}$'s montre que ces dérivées peuvent s'exprimer en fonction de (η, ξ, u). Nous notons : $\eta^{(i)}(kT) := \Gamma_i(\eta, \xi, u)$.
Le discrétisé exact se réécrit alors sous la forme suivante :

$$\eta^+ = \eta + T(f(\eta) + g(\eta)\xi) + \sum_{i=1}^{r+1} \frac{T^i}{i!} \Gamma_i(\eta, \xi, u) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \tag{5.4}$$

$$\xi^+ = \xi + Tu \tag{5.5}$$

Théorème 5.2.1 *: Considérons le sous-système (5.4) et $\overline{T}$ vérifiant $0 < \overline{T} < \frac{1}{c}$ et tel que quel que soit $T \in]0, \overline{T}[$ et pour toute fonction $u^{r-1} : (\eta, \xi) \longmapsto \sum_{i=0}^{r-1} T^i u_i(\eta, \xi)$ suffisamment différentiable où $u_0 := u_c$, il existe $\overline{\xi}^r(\eta) = \sum_{i=0}^{r} T^i \, \overline{\xi}_i(\eta)$ (où $\overline{\xi}_i$ est un opérateur différentiel de $(u_0, \ldots, u_{i-1}, \overline{\xi}_0, \ldots, \overline{\xi}_{i-1})$) tel qu'en effectuant la substitution $\xi := \overline{\xi}^{\,r}$ dans (5.4), les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *il existe des fonctions* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+1} \in K^\infty$ *telles que* $\forall i \in \{1, \ldots, r+1\}$,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{W(\eta^+(\overline{\xi}^{\,i-1})) - W(\eta)}{T} & \leq & -\alpha_i(\eta) + \mathcal{O}(T^{i+1}) \\ \forall \eta, \qquad \alpha_i(\eta) & > & \alpha_{i-1}(\eta) \end{array}$$

2. *il existe* $M_\eta, M_\xi, \lambda_T > 0$ *tels que* $\forall \eta, \xi$ *tels que si*

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\eta) \leq M_\eta + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ |\xi - \overline{\xi}^{\,r}(\eta)| \leq M_\xi + \mathcal{O}(T^{r+2}) \end{array} \right.$$

alors nous avons :

$$\left\| \eta^+(\xi) - \eta^+(\overline{\xi}^{\,r}) \right\| \leq T\lambda_T |\xi - \overline{\xi}^{\,r}|(1 + |\xi - \overline{\xi}^{\,r}|)(1 + V(\eta)) + \mathcal{O}(T^{r+2})$$

où $V(\eta) := \ln(1 + W(\eta))$.

Alors, quel que soit $T \in]0, \overline{T}[$, *il existe un contrôleur* $u^r = \sum_{i=0}^{r} T^i u_i$ *(où* u_i *est un opérateur différentiel de* $(u_0, \ldots, u_{i-1}, \overline{\xi}_0, \ldots, \overline{\xi}_{i-1}$ *)) et* $M_0 > 0$ *tels que pour le système complet (5.4),(5.5) dont les conditions initiales vérifient*
$\eta_0 \in \{\eta \ , \ V(\eta) \leq M_0\}$ *et* $\xi_0 \in \{\xi \ , \ |\xi - \overline{\xi}^{\,r}(\eta_0)| \leq M_\xi\}$, *nous avons alors :*

1. $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\frac{V(\eta((k+1)T)) - V(\eta(kT))}{T} \leq -\alpha_r(\eta(kT)) + \lambda_T M_0(1+M_0)(1+M_\eta)(1-cT)^k + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

2.

$$\limsup_{k \longrightarrow +\infty} |\xi(kT) - \overline{\xi}^{\,r}(\eta(kT))| = \mathcal{O}(T^{r+2})$$

□

Quelques remarques :

- la dernière inégalité revient simplement à dire que $V(\eta(kT)) \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 + \mathcal{O}(T^{r+2})$
- toutes les notations indexées par T (type : c_T) représentent des grandeurs qui s'expriment en puissance de T (type : $c_T := \sum \frac{T^i}{i!} c_i$) et ne deviennent donc pas infinies lorsque T tend vers 0.
- dans l'hypothèse de ce théorème, $\overline{\xi}_i$ est un opérateur différentiel de $(u_0, \ldots, u_{i-1}, \overline{\xi}_0, \ldots, \overline{\xi}_{i-1})$, ce qui à première vue pourrait sembler inextricable. Cependant, il est tout à fait possible de synthétiser un contrôleur pour lequel les u_i sont des opérateurs différentiels de $(u_0, \ldots, u_{i-1}, \overline{\xi}_0, \ldots, \overline{\xi}_i)$. En effet, étant donné $\overline{\xi}_0$ on commencera par calculer u_0, puis il sera possible de calculer $\overline{\xi}_1$, puis u_1 sera ensuite déterminé et ainsi de suite : tout est calculé de manière récursive.
- les inégalités $\forall \eta, \alpha_i > \alpha_{i-1}$ signifient que $V(\eta(kT))$ décroît plus rapidement lorsque r augmente donc que la commande d'ordre r est meilleure que celles d'ordres inférieures au sens de la Proposition 4.4.3 lorsque les hypothèses (i)-(iii) du chapitre précédent sont vérifiées pour la commande continue.

Preuve : Nous commençons par fixer $T \in]0, \overline{T}[$.

– Etape 1. Synthèse du contrôleur
Nous considérons le sous système :

$$\begin{aligned}
\eta^+(\xi) &= \eta + T(f(\eta)+g(\eta)\xi) + \sum_{i=2}^{r+1}\frac{T^i}{i!}\Gamma_i(\eta,\xi,u) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\
&= \eta^+(\overline{\xi}^{\,r}) + Tg(\eta)(\xi-\overline{\xi}^{\,r}) + \sum_{i=2}^{r+1}\frac{T^i}{i!}\Big(\Gamma_i(\eta,\xi,u(\eta,\xi)) \\
&\quad -\Gamma_i(\eta,\overline{\xi}^{\,r},u(\eta,\overline{\xi}^{\,r}))\Big) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\
&= \eta^+(\overline{\xi}^{\,r}) + (\xi-\overline{\xi}^{\,r})\Bigg[Tg(\eta) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{r+1}\frac{T^i}{i!}\int_0^1 \frac{\partial\Gamma_i}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=(\eta,\overline{\xi}^{\,r}+s(\xi-\overline{\xi}),u(\eta,\overline{\xi}^{\,r}+s(\xi-\overline{\xi}^{\,r})))} ds\Bigg] \\
&\quad + \mathcal{O}(T^{r+2})
\end{aligned}$$

En utilisant une décomposition en puissance de T du contrôleur $u_T = \sum_{i=0}^{r} T^i u_i$, $\overline{\xi}^{\,r} = \sum_{i=0}^{r} T^i \overline{\xi}_i$, et $\eta^+(\xi)$, nous obtenons une expression de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\eta^+(\xi) &= \eta^+(\overline{\xi}^{\,r}) + Tg(\eta)(\xi-\overline{\xi}^{\,r}) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{r+1}\frac{T^i}{i!}\,G_i\Big(\eta,\xi,u_0(\eta,\xi),\ldots,u_{i-2}(\eta,\xi)\Big) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{r+1}\frac{T^i}{i!}\,H_i\Big(\eta,\overline{\xi}_0,\ldots,\overline{\xi}_{i-1},u_0(\eta,\overline{\xi}_0),\partial u_0(\eta,\overline{\xi}_0),\ldots,\partial^{i-2}u_0(\eta,\overline{\xi}_0),\ldots, \\
&\quad u_{i-3}(\eta,\overline{\xi}_0),\partial u_{i-3}(\eta,\overline{\xi}_0),u_{i-2}(\eta,\overline{\xi}_0)\Big) + \mathcal{O}(T^{r+2})
\end{aligned}$$

où H_i, G_i's sont suffisamment réguliers et obtenus par calcul. De plus, les mêmes types de décomposition donneront pour $\overline{\xi}^{\,r}(\eta^+)$ l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
(\overline{\xi}^{\,r})^+ &:= \overline{\xi}^{\,r}(\eta^+(\xi)) \\
&= \overline{\xi}^{\,r}(\eta) + \sum_{i=1}^{r+1}\frac{T^i}{i!}\,M_i\Big(\eta,\xi,u_0(\eta,\xi),\ldots,u_{i-2}(\eta,\xi)\Big) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r+1}\frac{T^i}{i!}\,N_i\Big(\eta,\overline{\xi}_0,\ldots,\overline{\xi}_{i-1},u_0(\eta,\overline{\xi}_0),\partial u_0(\eta,\overline{\xi}_0),\ldots,\partial^{i-2}u_0(\eta,\overline{\xi}_0),\ldots, \\
&\quad u_{i-3}(\eta,\overline{\xi}_0),\partial u_{i-3}(\eta,\overline{\xi}_0)\Big) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\
&= \overline{\xi}^{\,r}(\eta) + T\Delta\overline{\xi}^{\,r} + \mathcal{O}(T^{r+2}) \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

où M_i, N_i's sont suffisamment réguliers et aussi déduits des calculs.
Nous appliquons ainsi un contrôleur de la forme :

$$u = -c(\xi - \overline{\xi}^{\,r}) + \Delta\overline{\xi}^{\,r} \tag{5.7}$$

où $c > 0$ et est choisi tel que $cT < 1$.
Remarquons au passage que la décomposition en série de la commande donne :

$$\begin{aligned}
u_0 &= -c(\xi - \overline{\xi}_0) + M_1(\eta,\xi) + N_1(\eta,\overline{\xi}_0) = -c(\xi - \overline{\xi}_0) + \dot{\overline{\xi}}_0 = u_c \\
u_i &\overset{\forall i\in\{1,\dots,r\}}{=} c\overline{\xi}_i + M_i\Big(\eta,\xi,u_0(\eta,\xi),\dots,u_{i-2}(\eta,\xi)\Big) \\
&\quad + N_i\Big(\eta,\overline{\xi}_0,\dots,\overline{\xi}_{i-1},u_0(\eta,\overline{\xi}_0),\partial u_0(\eta,\overline{\xi}_0),\dots,\partial^{i-2}u_0(\eta,\overline{\xi}_0),\dots, \\
&\quad u_{i-3}(\eta,\overline{\xi}_0),\partial u_{i-3}(\eta,\overline{\xi}_0),u_{i-2}(\eta,\overline{\xi}_0)\Big)
\end{aligned}$$

ainsi, partant de $\overline{\xi}_0 = \overline{\xi}_c$, $u_0 = u_c$ nous devons ensuite calculer $\overline{\xi}_1$, puis nous calculons u_1, puis nous en déduisons $\overline{\xi}_2$ et nous obtenons ainsi chaque terme par récursivité.

– Etape 2. Preuve de la convergence

Considérons dans un premier temps : $\xi - \overline{\xi}^{\,r}$.
En calculant la différence $\xi^+ - (\overline{\xi}^{\,r})^+$ et en appliquant le contrôleur obtenu précédemment (5.7), nous obtenons :

$$\xi^+ - (\overline{\xi}^{\,r})^+ = (1 - cT)(\xi - \overline{\xi}^{\,r}(\eta)) + \mathcal{O}(T^{r+2})$$

Ainsi, puisque $0 < cT < c\overline{T} < 1$,

$$\xi(kT) - \overline{\xi}^{\,r}(\eta(kT)) = (1-cT)^k(\xi - \overline{\xi}^{\,r}(\eta_0)) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 + \mathcal{O}(T^{r+2}) \tag{5.8}$$

Considérons maintenant η.
Nous choisissons de considérer la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V(\eta) := \ln(1 + W(\eta))$$

Ce choix n'est pas anodin : nous utilisons cette fonction car elle présente la propriété intéressante d'être à dérivée bornée. En effet : $|\frac{\partial V}{\partial \eta}| \leq 1$

$$\begin{aligned}
\frac{V(\eta^+(\xi)) - V(\eta)}{T} &= \frac{1}{T}V\big(\eta^+(\xi) + \eta^+(\overline{\xi}^{\,r}) - \eta^+(\overline{\xi}^{\,r})\big) - \frac{1}{T}V(\eta) \\
&= \frac{V(\eta^+(\overline{\xi}^{\,r})) - V(\eta)}{T} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \frac{\partial V}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=\eta^+(\overline{\xi}^{\,r})+\tau(\eta^+(\xi)-\eta^+(\overline{\xi}^{\,r}))} d\tau\right)\frac{(\eta^+(\xi) - \eta^+(\overline{\xi}^{\,r}))}{T} \\
&\quad + \mathcal{O}(T^{r+1}) \\
&\leq -\alpha_r(\eta) + \lambda_T|\xi - \overline{\xi}^{\,r}|(1 + |\xi - \overline{\xi}^{\,r}|)(1 + V(\eta)) + \mathcal{O}(T^{r+1})
\end{aligned} \tag{5.9}$$

La dernière inégalité a été obtenue en supposant que :

$$V(\eta) \leq M_\eta + \mathcal{O}(T^{r+2}) \tag{5.10}$$
$$|\xi - \overline{\xi}^{\,r}(\eta)| \leq M_\xi + \mathcal{O}(T^{r+2}) \tag{5.11}$$

L'hypothèse (5.11) est d'ailleurs vérifiée en considérant à la fois (5.8) et l'hypothèse selon laquelle $\xi_0 \in \{\xi \ , \ |\xi - \overline{\xi}^{\,r}(\eta_0)| \leq M_\xi\}$.
En utilisant (5.9) et (5.8), nous définissons $\gamma_T \in K_\infty$ de la façon suivante :

$$\gamma_T(|\xi_0 - \overline{\xi}_0|) = \lambda_T|\xi_0 - \overline{\xi}_0|(1 + |\xi_0 - \overline{\xi}_0|)$$

En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$V(\eta((k+1)T)) - V(\eta(kT)) \leq (1-cT)^k T\gamma_T(|\xi_0 - \overline{\xi}_0|)(1 + V(\eta(kT))) + \mathcal{O}(T^{r+2})$$

d'où,

$$\frac{V(\eta((k+1)T)) + 1}{V(\eta(kT)) + 1} \leq 1 + (1-cT)^k T\gamma_T(|\xi_0 - \overline{\xi}_0|) + \mathcal{O}(T^{r+2})$$

$$\begin{aligned}
\ln(V(\eta((k+1)T)) + 1) &\leq \ln(V(\eta_0) + 1) + \sum_{j=0}^{k} \ln\big(1 + T\gamma_T(|\xi_0 - \overline{\xi}_0|)(1-cT)^j\big) \\
&\quad + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\
&\leq \ln(V(\eta_0) + 1) + \sum_{j=0}^{k} T\gamma_T(|\xi_0 - \overline{\xi}_0|)(1-cT)^j + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\
&\leq \ln(V(\eta_0) + 1) + \sum_{j=0}^{+\infty} T\gamma_T(|\xi_0 - \overline{\xi}_0|)(1-cT)^j + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\
&\leq \ln(V(\eta_0) + 1) + \frac{1}{c}\gamma_T(|\xi_0 - \overline{\xi}_0|) + \mathcal{O}(T^{r+2})
\end{aligned}$$

d'où, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$V(\eta(kT)) + 1 \leq \big(V(\eta_0) + 1\big)\exp\left(\frac{1}{c}\gamma_T(|\xi_0 - \overline{\xi}_0|)\right) + \mathcal{O}(T^{r+2})$$

Ainsi, si nous choisissons la constante M_0 telle que :

$$\big(M_0 + 1\big)\exp\left(\frac{1}{c}\gamma_T(|\xi_0 - \overline{\xi}_0|)\right) \leq M_\eta$$

l'hypothèse (5.10) sera toujours vérifiée i.e en prenant η_0 dans l'ensemble défini par $V(\eta_0) \leq M_0$, $V(\eta)$ satisfera toujours l'inégalité $V(\eta) \leq M_\eta$.
De plus, en utilisant cette dernière inégalité ainsi que l'inégalité (5.9), nous obtenons finalement le résultat souhaité i.e :

$$\frac{V(\eta((k+1)T)) - V(\eta(kT))}{T} \leq -\alpha_r(\eta(kT)) + \lambda_T M_0(1+M_0)(1+M_\eta)(1-cT)^k + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

□.

5.2.1 Exemple 1

Nous considérons l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \eta^2 + \xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \tag{5.12}$$

Une procédure de Backstepping classique donne la loi de commande suivante :

$$u_c(\eta, \xi) = -2\eta - \eta^2 - \xi - (2\eta + 1)(\xi + \eta^2)$$

Quand le contrôleur est émulé, [87] a utilisé un schéma d'Euler pour démontrer que les performances (en terme de rapidité et de bassin d'attraction notamment) de la loi de commande suivante étaient meilleures que celle de la commande continue émulée.

$$u_T^{Euler}(\eta, \xi) = u_c(\eta, \xi) - \frac{1}{2}T(\eta^2 + \xi - \eta + 2(\xi + \eta^2)^2)$$

Grâce à cette loi de commande, le système est (SPA) stabilisé sur une boule de rayon fixé (independant de T). Grâce à notre méthode, nous pouvons le stabiliser sur une boule d'un rayon dépendant de l'ordre de la commande et de T. Dans cette exemple, nous stabilisons le système sur $0 + \mathcal{O}(T^3)$:

Proposition 5.2.2 *En appliquant le Théorème 5.2.1, il existe* $0 < \overline{T} < 1$ *tel que pour tout* $T \in [0, \overline{T}]$*, il est possible de stabiliser semi-globalement le système (5.12) sur* $0 + \mathcal{O}(T^3)$ *en appliquant la loi de commande suivante :*

$$u^1 = -2\eta^3 - 2\eta^2 - 2\eta\xi - \eta - 2\xi + T\left(-\eta^4 + 2\eta^3 - 2\xi\eta^2 + \frac{3}{2}\eta^2 + 2\eta\xi - \xi^2 + \frac{1}{2}\xi\right)$$

– **Preuve :**

Le discrétisé exact de (5.12) s'écrit :

$$\begin{cases} \eta^+ = \eta + T(\eta^2 + \xi) + \frac{T^2}{2}(2\eta^3 + 2\eta\xi + u) + \mathcal{O}(T^3) \\ \xi^+ = \xi + Tu \end{cases} \tag{5.13}$$

notons : $\overline{\xi} = \overline{\xi}_0 + T\ \overline{\xi}_1$ and $u(\eta, \xi) = u_0(\eta, \xi) + Tu_1(\eta, \xi)$. Considérons le sous-système suivant :

$$\begin{aligned} \eta^+ &= \eta + T(\eta^2 + \overline{\xi}) + \frac{T^2}{2}(2\eta^3 + 2\eta\overline{\xi} + u(\eta, \overline{\xi})) + \mathcal{O}(T^3) \\ &= \eta + T(\eta^2 + \overline{\xi}_0) + \frac{T^2}{2}(2\overline{\xi}_1 + 2\eta^3 + 2\eta\overline{\xi}_1 + u_0(\eta, \overline{\xi}_0)) \\ &\quad + \mathcal{O}(T^3) \end{aligned}$$

Nous choisissons :

$$\begin{cases} \overline{\xi}_0 = -\eta^2 - \eta \\ 2\overline{\xi}_1 = -2\eta^3 - 2\eta\overline{\xi}_1 - u_0(\eta, \overline{\xi}_0) = 2\eta^2 - u_0(\eta, \overline{\xi}_0(\eta)) \end{cases}$$

Nous avons donc :

$$\eta^+ = (1-T)\eta + T(\xi - \overline{\xi}) + \frac{T^2}{2}\big(2\eta(\xi-\overline{\xi}) + u_0(\eta,\xi) - u_0(\eta,\overline{\xi})\big) + \mathcal{O}(T^3)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\overline{\xi}_0^{\,+} &= \overline{\xi}_0 + T\frac{\partial \overline{\xi}_0}{\partial \eta}\big(-\eta+\xi-\overline{\xi}\big) \\
&\quad + T^2\frac{\partial \overline{\xi}_0}{\partial \eta}\eta(\xi-\overline{\xi}) + \frac{T^2}{2}\frac{\partial \overline{\xi}_0}{\partial \eta}(u_0(\eta,\xi)-u_0(\eta,\overline{\xi})) + \frac{T^2}{2}\frac{\partial^2 \overline{\xi}_0}{\partial \eta^2}\big(-\eta+\xi-\overline{\xi}\big)^2 \\
&\quad + \mathcal{O}(T^3) \\
\overline{\xi}_1^{\,+} &= \overline{\xi}_1 + T\frac{\partial \overline{\xi}_1}{\partial \eta}\big(-\eta+\xi-\overline{\xi}\big) + \mathcal{O}(T^2)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
u_0 &= -(\xi-\overline{\xi}_0) + \frac{\partial \overline{\xi}_0}{\partial \eta}(-\eta+\xi-\overline{\xi}_0) \\
&= -2\eta^3 - 2\eta^2 - 2\eta\xi - \eta - 2\xi
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
2\overline{\xi}_1 &= 2\eta^2 - u_0(\eta, \overline{\xi}_0(\eta)) \\
&= 2\eta^2 + 2\eta^3 + 2\eta^2 + 2\eta(-\eta^2-\eta) + \eta + 2(-\eta^2-\eta) \\
&= -\eta
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
2u_1 &= 2\overline{\xi}_1 - 2\frac{\partial \overline{\xi}_0}{\partial \eta}\overline{\xi}_1 + 2\frac{\partial \overline{\xi}_0}{\partial \eta}\eta(\xi-\overline{\xi}_0) + \frac{\partial \overline{\xi}_0}{\partial \eta}(u_0(\eta,\xi)-u_0(\eta,\overline{\xi}_0)) \\
&\quad + \frac{\partial^2 \overline{\xi}_0}{\partial \eta^2}\big(-\eta+\xi-\overline{\xi}_0\big)^2 - 2\frac{\partial \overline{\xi}_1}{\partial \eta}(-\eta+\xi-\overline{\xi}) \\
&= 2\overline{\xi}_1 - (2\eta+1)\big(-2\overline{\xi}_1 - 2(\xi-\overline{\xi}_0)\big) - 2\big(-\eta+\xi-\overline{\xi}_0\big)^2 - (-\eta+\xi-\overline{\xi}) \\
&= -\eta - (2\eta+1)\big(\eta - 2(\xi+\eta+\eta^2)\big) - 2\big(\xi+\eta^2\big)^2 - (\xi+\eta^2) \\
&= -2\eta^4 + 4\eta^3 - 4\xi\eta^2 + 3\eta^2 + 4\eta\xi - 2\xi^2 + \xi
\end{aligned}$$

Nous en déduisons la loi de commande :

$$u^1 = u_0 + Tu_1 = -2\eta^3 - 2\eta^2 - 2\eta\xi - \eta - 2\xi + T\left(-\eta^4 + 2\eta^3 - 2\xi\eta^2 + \frac{3}{2}\eta^2 + 2\eta\xi - \xi^2 + \frac{1}{2}\xi\right)$$

.□

Nous avons déterminé une loi de commande d'ordre 1 et ceci nous a demandé des calculs assez lourds. Plus l'ordre augmente et plus les calculs vont être lourds ; aussi en utilisant le

logiciel Maple nous avons implémenté cet algorithme et obtenu la loi de commande d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} u^2 &= -2\eta^3 - 2\eta^2 - 2\eta\xi - \eta - 2\xi + T\left(-\eta^4 + 2\eta^3 - 2\xi\eta^2 + \frac{3}{2}\eta^2 + 2\eta\xi - \xi^2 + \frac{1}{2}\xi\right) \\ &\quad + T^2\left(\frac{1}{3}\eta\xi^2 + \frac{13}{6}\xi^2 + \frac{2}{3}\xi\eta^3 + \frac{3}{2}\eta^4 + \frac{1}{3}\eta^5 + \frac{1}{2}\eta^3 + \frac{11}{3}\xi\eta^2 + \frac{5}{6}\eta\xi + \frac{1}{6}\eta^2\right) \end{aligned}$$

Résultats numériques : (courbes 9.17-9.21)
Cet exemple a été simulé dans le dernier chapitre pour les données suivantes : $T = 0.5$,$c = 1$. Pour différentes conditions initiales, nous avons tracé la solution du système dynamique bouclé :

- en noir, lorsque la commande est continue $u := u_c$
- en pointillés bleus lorsque le système est commandé par la commande synthétisée par l'algorithme de Nesic/Teel [87] i.e $u_k := u_T^{Euler}$
- en croix rouges lorsque le système est commandé par la commande échantillonnée d'ordre 1, $u_k := u^1$

Les résultats confirment la théorie mise en oeuvre dans ce chapitre : notre commande d'ordre 1 est 'meilleure' que la commande u_T^{Euler} qui s'appuie sur un schéma d'Euler, au sens défini dans le chapitre précédent et elle reproduit davantage le comportement de la commande continue. De plus, pour la condition initiale de la dernière courbe, notre commande fonctionne toujours alors que la commande u_T^{Euler} n'est plus stabilisante ; il semblerait donc que nous ayons élargi le domaine d'attraction.

5.3 Cas des systèmes sous forme strict-feedback

Le résultat précédent donne un résultat général mais n'est pas constructif car l'obtention de la fonctionnelle $\overline{\xi}^{\,r}(u^{r-1}(.))$ est une hypothèse. Nous avons pu décliner un exemple pour appliquer notre résultat pour la simple raison que l'exemple était un système de dimension 2. Nous allons à présent donner des algorithmes construtifs pour une classe de systèmes plus restreinte mais applicables quelque soit la dimension des systèmes.

Nous adoptons les **notations** suivantes :
- $X_i := (x_1, \ldots, x_i) \in \mathbb{R}^i$ pour $1 \leq i \leq n$
- $(X_1^c)^{(i)} := (x_1^c, \dot{x}_1^c, \ldots, (x_1^c)^{(i)})$ pour tout $i \in \mathbb{N}$
- $U_i := (u_0, \ldots, u_i)$ pour $0 \leq i \leq r$
- $U_{i \geq r} := U_r$, $X_{i \geq n} := X_n$, $U_{i<0} = 0$

Nous considérons la classe suivante des systèmes sous forme strict-feedback avec une commande échantillonnée à la fréquence $1/T$: $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [kT, (k+1)T[$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(X_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(X_2) + x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(X_{n-1}) + x_n \\ \dot{x}_n = f_n(X_n) + u_k \end{cases} \tag{5.14}$$

où les champs de vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ sont analytiques.
Le but est de faire suivre à $x_1(t)$ la consigne $x_1^c(t)$. Nous allons proposer deux algorithmes pour résoudre ce problème de poursuite.

5.3.1 Algorithme basé sur la commande continue classique

Considérons le système non linéaire continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(X_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(X_2) + x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(X_{n-1}) + x_n \\ \dot{x}_n = f_n(X_n) + u \end{cases} \tag{5.15}$$

Nous souhaitons que $x_1(t)$ suive asymptotiquement la consigne $x_1^c(t)$. Une procédure clas-

sique de Backstepping conduit à utiliser des pseudo-contrôleurs déterminés récursivement :

$$\begin{cases} \overline{x}_2 = -f_1(X_1) - K_1\delta_1 + \dot{x}_1^c \\ \overline{x}_3 = -f_2(X_2) - \delta_1 - K_2\delta_2 + \dot{\overline{x}}_2 \\ \dots \\ \overline{x}_n = -f_{n-1}(X_{n-1}) - \delta_{n-2} - K_{n-1}\delta_{n-1} + \dot{\overline{x}}_{n-1} \end{cases}$$

où : $\delta_1 := x_1 - x_1^c$ et $\delta_{2\leq i\leq n-1} := x_i - \overline{x}_i$. Nous obtenons ensuite le contrôleur continu suivant :

$$u_c = -f_n(X_n) - \delta_{n-1} - K_n\delta_n + \dot{\overline{x}}_n$$

où $K_1 > 0, \dots, K_n > 0$ en utilisant la fonction de Lyapunov $V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2$. En effet, l'application du contrôleur donne :

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^{n} K_i\delta_i^2$$

Ainsi, les δ_i's tendent asymptotiquement vers 0.

Si maintenant nous considérons le même système muni d'une loi de commande $u := u_k$ échantillonnée à la fréquence $1/T$, en utilisant un contrôleur d'ordre r, $u_k := u^r = \sum_{i=0}^{r} T^i u_i$, le discrétisé exact sera de la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1^+ = x_1 + T(f_1(X_1) + x_2) + \sum_{i=2}^{r+1} T^i f_1^i(X_{i+1}, U_{i-n}) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ x_2^+ = x_2 + T(f_2(X_2) + x_3) + \sum_{i=2}^{r+1} T^i f_2^i(X_{i+2}, U_{i-n+1}) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_j^+ = x_j + T(f_j(X_j) + x_{j+1}) + \sum_{i=2}^{r+1} T^i f_j^i(X_{i+j}, U_{i+j-n-1}) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_{n-1}^+ = x_{n-1} + T(f_{n-1}(X_{n-1}) + x_n) + \sum_{i=2}^{r+1} T^i f_{n-1}^i(X_{i+n-1}, U_{i-2}) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ x_n^+ = x_n + T(f_n(X_n) + u_0) + \sum_{i=2}^{r+1} T^i(u_{i-1} + f_n^i(X_n, U_{i-2})) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \end{cases} \tag{5.16}$$

Théorème 5.3.1 *Considérons le système de la classe strict-feedback décrite précédemment et considérons $x_1^c(t)$ une consigne temporelle de la variable réelle x_1 suffisamment régulière (de dérivées successives $(x_1^c)^{(i)}(t)$). Pour r donné, il existe $\Delta_0 \geq 0, \overline{T} \geq 0$ tels que pour tous les $\|X_0\| \leq \Delta_0$ et $T \leq \overline{T}$, nous pouvons concevoir un contrôleur d'ordre r avec $u_0 = u_c$ tel que :*

$$\limsup_{k\longrightarrow+\infty} |x_1(kT) - x_1^c(kT)| = \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})$$

Preuve :

Etape 1 :

Notons : $\delta_2^r := \delta_{2,0} + \sum_{i=1}^{r} T^i \overline{x}_{2,i} + \mathcal{O}(T^{r+1})$

$$\begin{aligned}
\delta_1^+ &= \delta_1 + T\delta_2^r + T(f_1(X_1) - \dot{x}_1^c + \overline{x}_{2,0}) + \sum_{i=2}^{r+1} T^i \Bigg(\overline{x}_{2,i-1} - \frac{(x_1^c)^{(i)}}{i!} \\
&\quad + f_1^i(X_{i+1}, U_{i-n}) \Bigg) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\
&= (1 - TK_1(T))\delta_1 + T\delta_2^r + \sum_{i=2}^{r+1} T^i \Bigg(\overline{x}_{2,i-1} + K_1^{(i-1)} - \frac{(x_1^c)^{(i)}}{i!} \\
&\quad + f_1^i(X_{i+1}, U_{i-n}) \Bigg) + \mathcal{O}(T^{r+2})
\end{aligned}$$

Nous choisissons les $\overline{x}_{2,i}$ tels que

$$\begin{cases} \overline{x}_{2,0} = -f_1(X_1) - K_1(0)\delta_1 + \dot{x}_1^c \\ \overline{x}_{2,i-1} = -K_1^{(i-1)} + \frac{(x_1^c)^{(i)}}{i!} - f_1^i(X_{i+1}, U_{i-n}) \qquad , i \in \{2, r+1\} \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\delta_1^+ = (1 - TK_1(T))\delta_1 + T\delta_2^r + \mathcal{O}(T^{r+2})$$

Nous considérons maintenant la fonction suivante : $V_1(\delta_1) := \frac{1}{2}\delta_1^2$. Nous notons $\frac{\Delta V_1}{T} := \frac{V_1(\delta_1^+) - V_1(\delta_1)}{T}$
Nous avons alors :

$$\frac{\Delta V_1}{T} = \left(-K_1(T) + \frac{T}{2} K_1^2(T) \right) (\delta_1)^2 + \left((1 - TK_1(T))\delta_1 + \frac{T}{2}\delta_2^r \right) \delta_2^r + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

Nous donnerons l'expression de $K_1(T)$ à l'étape n.

Etape 2 :

Notons : $\delta_3^r := \delta_{3,0} + \sum_{i=1}^{r} T^i \overline{x}_{3,i} + \mathcal{O}(T^{r+1})$

$$\begin{aligned}
(\delta_2^r)^+ &= \delta_2^r + T\delta_3^r + T(f_2(X_2) - \dot{\overline{x}}_{2,0} + \overline{x}_{3,0}) + \sum_{i=2}^{r+1} T^i \Bigg(\overline{x}_{3,i-1} - \frac{(\overline{x}_{2,0})^{(i)}}{i!} \\
&\quad + f_2^i(X_{i+2}, U_{i-n+1}) \Bigg) - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r+1-i} \frac{T^{i+j}}{j!} \overline{x}_{2,i}^{(j)} + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\
&:= (1 - TK_2(T))\delta_2^r - T(1 - TK_{1,2}(T))\delta_1 + T\delta_3^r \\
&\quad + \sum_{i=2}^{r+1} T^i \Big(\overline{x}_{3,i-1} + p_{2,i}((X_1^c)^{(i+1)}, X_{i+2}, [U_{i-n+1}]^0) \Big) + \mathcal{O}(T^{r+2})
\end{aligned}$$

Nous choisissons les $\overline{x}_{3,i}$ tels que

$$\begin{cases} \overline{x}_{3,0} = -f_2(X_2) - \delta_1 - K_2(0)\delta_2 + \dot{\overline{x}}_{2,0} \\ \overline{x}_{3,i-1} = -p_{2,i}((X_1^c)^{(i+1)}, X_{i+2}, [U_{i-n+1}]^0) \qquad , i \in \{2, r+1\} \end{cases}$$

La présence du crochet $[U_{i-n+1}]^0(X_n)$ signifie que $p_{2,i}$ est un opérateur de $U_{i-n+1}(x)$. Plus généralement, nous notons :

$$[U_j]^k(X_n) := ([u_j]^k(x), [u_{j-1}]^{k+1}(x), \ldots, [u_0]^{k+j}(x))$$

où :

$$[u_j]^k(x) = (u_j(x), \partial u_j(x), \ldots, \partial^k u_j(x))$$

(remarque : $[U_{i-n+1}]^0(x) := ([u_{i-n+1}]^0(x), [u_{i-n}]^1(x), \ldots, [u_0]^{i-n+1}(x))$.
Du coup, nous avons :

$$(\delta_2^r)^+ = (1 - TK_2(T))\,\delta_2^r - T(1 - TK_{1,2}(T))\delta_1 + T\delta_3^r + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

Nous considérons la fonction suivante : $V_2(\delta_1, \delta_2^r) := V_1(\delta_1) + \frac{1}{2}(\delta_2^r)^2$.
Nous notons $\frac{\Delta V_2}{T} := \frac{V_2(\delta_1^+, (\delta_2^r)^+) - V_2(\delta_1, \delta_2^r)}{T}$
Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V_2}{T} &= \left(-K_1(T) + \frac{T}{2}K_1^2(T) + \frac{T}{2}(1 - TK_{1,2}(T))^2 \right) (\delta_1)^2 \\
&\quad + \left(-K_2(T) + \frac{T}{2}K_2^2(T) + \frac{T}{2} \right) (\delta_2^r)^2 + \frac{T}{2}(\delta_3^r)^2 \\
&\quad + \Big((1 - TK_2(T))\,\delta_2^r - T(1 - TK_{1,2}(T))\delta_1 \Big) \delta_3^r \\
&\quad + \Big(1 - TK_1(T) - (1 - TK_2(T))(1 - TK_{1,2}(T)) \Big) \delta_1 \delta_2^r + \mathcal{O}(T^{r+1})
\end{aligned}$$

Nous déterminerons $K_2(T)$ et $K_{1,2}(T)$ à l'étape n de ce cet algorithme.

Etape i = 3..n-1

Pour simplifier les notations nous notons : $\delta_1^r := \delta_1$. Notons : $\delta_{i+1}^r := \delta_{i+1,0} + \sum_{i=1}^{r} T^i \overline{x}_{i+1,i} + \mathcal{O}(T^{r+1})$

$$\begin{aligned}
(\delta_i^r)^+ &= \delta_i^r + T\delta_{i+1}^r + T(f_i(X_i) - \dot{\overline{x}}_{i,0} + \overline{x}_{i+1,0}) + \sum_{j=2}^{r+1} T^j \Bigg(\overline{x}_{i+1,j-1} - \frac{(\overline{x}_{i,0})^{(j)}}{j!} \\
&\quad + f_i^j(X_{i+j}, U_{j-n-1+i}) \Bigg) - \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r+1-j} \frac{T^{j+k}}{k!} \overline{x}_{i,j}^{(k)} + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\
&:= (1 - TK_i(T))\delta_i^r + \sum_{j=1}^{i-1} (-T)^{i-j}(1 - TK_{j,i}(T))\delta_j^r + T\delta_{i+1}^r \\
&\quad + \sum_{j=2}^{r+1} T^j \Big(\overline{x}_{i+1,j-1} + p_{i,j}((X_1^c)^{(j+i-1)}, X_{i+j}, [U_{j-n-1+i}]^0) \Big) + \mathcal{O}(T^{r+2})
\end{aligned}$$

Nous choisissons les $\overline{x}_{i+1,j}$ tels que

$$\begin{cases} \overline{x}_{i+1,0} = -f_i(X_i) - \delta_{i-1}^r - K_i(0)\delta_i^r + \dot{\overline{x}}_{i,0} \\ \overline{x}_{i+1,j-1} = -p_{i,j}((X_1^c)^{(j+1)}, X_{j+i}, [U_{j-n+i-1}]^0) \qquad , j \in \{2, r+1\} \end{cases}$$

Du coup, nous avons :

$$(\delta_i^r)^+ = (1 - TK_i(T))\delta_i^r + \sum_{j=1}^{i-1} (-T)^{i-j}(1 - TK_{j,i}(T))\delta_j^r + T\delta_{i+1}^r + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

Nous considérons la fonction suivante : $V_i(\delta_1, \delta_2^r, \ldots, \delta_i^r) := V_{i-1}(\delta_1^r, \delta_2^r, \ldots, \delta_{i-1}^r) + \frac{1}{2}(\delta_i^r)^2$.
Nous notons $\frac{\Delta V_i}{T} := \frac{V_i(\delta_1^+, (\delta_2^r)^+, \ldots, (\delta_i^r)^+) - V_i(\delta_1, \delta_2^r, \ldots, \delta_i^r)}{T}$
Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V_i}{T} &= \sum_{j=1}^{i} \Bigg(-K_j(T) + \frac{T}{2}(1 + K_j^2(T)) + \sum_{s=j+1}^{i} \frac{T^{2(s-j)-1}}{2}(1 - TK_{j,s}(T))^2 \Bigg)(\delta_j^r)^2 \\
&\quad + \sum_{p=1}^{i} \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{s=j+1}^{p-1} (-1)^{2p-j-s}\, T^{2p-j-s-1}(1 - TK_{j,p}(T))(1 - TK_{s,p}(T))\delta_j^r \delta_s^r \\
&\quad + \sum_{p=1}^{i} \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{p-j}\, T^{p-j-1}(1 - TK_p(T))(1 - TK_{j,p}(T))\delta_j^r \delta_p^r \\
&\quad + \sum_{p=1}^{i} (1 - TK_p(T))\delta_p^r \delta_{p+1}^r + \sum_{p=1}^{i} \sum_{j=1}^{p-1} (-T)^{p-j}(1 - TK_{j,p}(T))\delta_j^r \delta_{p+1}^r \\
&\quad - \frac{T}{2}(\delta_1^r)^2 + \frac{T}{2}(\delta_{i+1}^r)^2 + \mathcal{O}(T^{r+1})
\end{aligned}$$

Nous déterminerons $K_i(T)$ et les $K_{0\leq j<i,i}(T)$ à l'étape n de ce cet algorithme.

Etape n

Notons : $u^r := u_0 + \sum_{i=1}^{r} T^i u_i + \mathcal{O}(T^{r+1})$

$$\begin{aligned}
(\delta_n^r)^+ &= \delta_n^r + T(f_n(X_n) - \dot{\overline{x}}_{n,0} + u_0) + \sum_{j=2}^{r+1} T^j \Bigg(u_{j-1} - \frac{(\overline{x}_{n,0})^{(j)}}{j!} \\
&\quad + f_n^j(X_n, U_{j-2}) \Bigg) - \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r+1-j} \frac{T^{j+k}}{k!} \overline{x}_{n,j}^{(k)} + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\
&:= (1 - TK_n(T))\delta_n^r + \sum_{j=1}^{n-1} (-T)^{n-j}(1 - TK_{j,n}(T))\delta_j^r \\
&\quad + \sum_{j=2}^{r+1} T^j \Big(u_{j-1} + p_{n,j}((X_1^c)^{(j+n-1)}, X_n, [U_{j-2}]^0) \Big) + \mathcal{O}(T^{r+2})
\end{aligned}$$

Nous choisissons les u_j tels que

$$\begin{cases} u_0 = -f_{n-1}(X_{n-1}) - \delta_{n-2}^r - K_{n-1}(0)\delta_{n-1}^r + \dot{\overline{x}}_{n-1,0} \\ \overline{x}_{n,j-1} = -p_{n,j}((X_1^c)^{(j+1)}, X_n, [U_{j-2}]^0) \qquad , j \in \{2, r+1\} \end{cases}$$

Du coup, nous avons :

$$(\delta_n^r)^+ = (1 - TK_n(T))\delta_n^r + \sum_{j=1}^{n-1} (-T)^{n-j}(1 - TK_{j,n}(T))\delta_j^r + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

Nous considérons la fonction suivante : $V_n(\delta_1, \delta_2^r, \ldots, \delta_n^r) := V_{n-1}(\delta_1^r, \delta_2^r, \ldots, \delta_{n-1}^r) + \frac{1}{2}(\delta_n^r)^2$.
Nous notons $\frac{\Delta V_n}{T} := \frac{V_n(\delta_1^+, (\delta_2^r)^+, \ldots, (\delta_n^r)^+) - V_n(\delta_1, \delta_2^r, \ldots, \delta_n^r)}{T}$
Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V_n}{T} &= \sum_{j=1}^{n} \Bigg(-K_j(T) + \frac{T}{2}(1 + K_j^2(T)) + \sum_{s=j+1}^{n} \frac{T^{2(s-j)-1}}{2}(1 - TK_{j,s}^2(T))^2 \Bigg)(\delta_j^r)^2 \\
&\quad + \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{s=j+1}^{p-1} (-1)^{2p-j-s}\ T^{2p-j-s-1}(1 - TK_{j,p}(T))(1 - TK_{s,p}(T))\delta_j^r \delta_s^r \\
&\quad + \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{p-j}\ T^{p-j-1}(1 - TK_p(T))(1 - TK_{j,p}(T))\delta_j^r \delta_p^r \\
&\quad + \sum_{p=1}^{n-1} (1 - TK_p(T))\delta_p^r \delta_{p+1}^r + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{p-j}\ T^{p-j}(1 - TK_{j,p}(T))\delta_j^r \delta_{p+1}^r \\
&\quad - \frac{T}{2}(\delta_1^r)^2 + \mathcal{O}(T^{r+1})
\end{aligned}$$

Nous déterminons récursivement tous les $K_i(T) := K_i + \sum_{s=1}^{r} T^s K_i^{(s)}$ et les $K_{0\leq j<i,i}(T) := \sum_{s=0}^{r-i+j} T^s K_{j,i}^{(s)}$ pour $i \in \{1, n\}$ tels que :

$$\frac{\Delta V_n}{T} = -\sum_{i=1}^{n} K_i \,.\, (\delta_i^r)^2 + \mathcal{O}(T^{r+1}) \tag{5.17}$$

Ainsi, par application de la version discrète du théorème de La Salle nous obtenons le résultat escompté i.e tous les $\delta_i^r(k)$ tendent 'asymptotiquement' vers $0+\mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})$ et en particulier δ_1 ! La commande s'obtient de manière récursive, nous commençons par déterminer les $\delta_{i,0}$ puis nous obtenons u_0 qui ne dépend que de X_n, x_1^c (et ses dérivées) et des $\overline{x}_{i,0}$, (et qui au passage correspond bien à la commande continue prise aux instants kT), puis nous pouvons déterminer les $\overline{x}_{i,1}$ qui dépendent de u_0, puis nous déduisons u_1 qui ne dépend que de X_n, x_1^c (et ses dérivées) et des $\overline{x}_{i,0}, \overline{x}_{i,1}$, et ainsi de suite récursivement jusqu'à obtenir tous les termes de la commande. A noter que l'énoncé de ce théorème porte sur T borné et des conditions initiales dans un compact, ce qui est requis par les définitions de $\mathcal{O}(T^{r+2})$. Davantage de détails pourraient être donnés sur la façon d'obtenir Δ_0 en fonction de la dynamique du système bouclé mais nous ne le faisons pas ici (c'est très similaire à la fin de la preuve du théorème 5.2.1 et aux arguments classiques de [60]). □

Nous montrons sur un exemple la procédure récursive à suivre pour déterminer les $K_i(T)$, et les $K_{j,i}(T)$.
Fixons $r = 2, n = 3$; nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V_3}{T} &= \Big(- K_1(T) + \frac{T}{2}K_1^2(T) + \frac{T}{2}(1 - TK_{1,2}(T))^2 + \frac{T^3}{2}(1 - TK_{1,3}(T))^2 \Big)(\delta_1)^2 \\
&\quad + \Big(- K_2(T) + \frac{T}{2}(1 + K_2^2(T)) + \frac{T}{2}(1 - TK_{2,3}(T))^2 \Big)(\delta_2^2)^2 \\
&\quad + \Big(- K_3(T) + \frac{T}{2}(1 + K_3^2(T)) + \frac{T}{2} \Big)(\delta_3^2)^2 \\
&\quad + \Big(1 - TK_1(T) - (1 - TK_2(T))(1 - TK_{1,2}(T)) - T^2(1 - TK_{2,3})(1 - TK_{1,3}) \\
&\quad \Big)\delta_1\delta_2^2 + \Big(1 - TK_2(T) - (1 - TK_3(T))(1 - TK_{2,3}(T)) \Big)\delta_2^2\delta_3^2 \\
&\quad + \Big(- T(1 - TK_{1,2}(T)) + T(1 - TK_3(T))(1 - TK_{1,3}(T)) \Big)\delta_1\delta_3^2 + \mathcal{O}(T^3) \\
&= \Big(- K_1 + \frac{T}{2}(-2K_1^{(1)} + (K_1)^2 + 1) + \frac{T^2}{2}(-2K_1^{(2)} + 2K_1K_1^{(1)} - 2K_{1,2} + 1) \\
&\quad \Big)(\delta_1)^2 + \Big(- K_2 + \frac{T}{2}(-2K_2^{(1)} + (K_2)^2 + 2) + \frac{T^2}{2}(-2K_2^{(2)} + 2K_2K_2^{(1)} \\
&\quad -2K_{2,3}) \Big)(\delta_2^2)^2 + \Big(- K_3 + \frac{T}{2}(-2K_3^{(1)} + (K_3)^2 + 2) + \frac{T^2}{2}(-2K_3^{(2)} \\
&\quad +2K_3K_3^{(1)}) \Big)(\delta_3^2)^2 + \Big(T(-K_1 + K_2 + K_{1,2}) + T^2(K_{1,2}^{(1)} - K_1^{(1)} - K_2K_{1,2} - 1) \\
&\quad \Big)\delta_1\delta_2^2 + \Big(T(-K_2 + K_3 + K_{2,3}) + T^2(K_{2,3}^{(1)} - K_2^{(1)} - K_3K_{2,3}) \Big)\delta_2^2\delta_3^2 \\
&\quad + T^2 \Big(K_{1,2} - K_3 - K_{1,3} \Big)\delta_1\delta_3^2 + \mathcal{O}(T^3)
\end{aligned}$$

Or, nous souhaitons obtenir :

$$\frac{\Delta V_3}{T} = -K_1 \,.\, (\delta_1)^2 - K_2 \,.\, (\delta_2^2)^2 - K_3 \,.\, (\delta_3^2)^2 + \mathcal{O}(T^3)$$

Ainsi, en comparant les termes facteurs de T, nous en déduisons :

$$K_i^{(1)} = \frac{1 + (K_i)^2}{2} \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad , K_{1,2} = K_1 - K_2 \quad , K_{2,3} = K_2 - K_3$$

Puis, en comparant les termes facteurs de T^2, nous en déduisons :

$$\begin{cases} K_1^{(2)} = K_1 K_1^{(1)} - K_{1,2} + \frac{1}{2} = \frac{K_1^3+3K_1-2K_2+1}{2} \\ K_2^{(2)} = K_2 K_2^{(1)} - K_{2,3} = \frac{K_2^3+3K_2-2K_3}{2} \\ K_3^{(2)} = K_3 K_3^{(1)} = \frac{K_3^3+K_3}{2} \\ K_{1,2}^{(1)} = K_1^{(1)} + K_2 K_{1,2} + 1 = \frac{K_1^2-2K_2^2+2K_1K_2+3}{2} \\ K_{2,3}^{(1)} = K_2^{(1)} + K_3 K_{2,3} = \frac{K_2^2-2K_2^3+2K_2K_3+1}{2} \\ K_{1,3} = K_{1,2} - K_3 = K_1 - K_2 - K_3 \end{cases}$$

5.3.2 Algorithme basé sur un nouveau type de fonction de Lyapunov

Considérons à nouveau le système non linéaire continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(X_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(X_2) + x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(X_{n-1}) + x_n \\ \dot{x}_n = f_n(X_n) + u \end{cases} \tag{5.18}$$

Nous souhaitons que $x_1(t)$ suive asymptotiquement la consigne $x_1^c(t)$ mais nous tolérons une convergence semi-globale pratique (l'état du système continu part d'un compact donné et l'erreur finale est de l'ordre de $\mathcal{O}(T^{r+1})$) dans la synthèse de la commande continue.

Cette fois nous utilisons la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V = \sum_{i=1}^{n} Sat_{r+1}^1(\delta_i)\delta_i \tag{5.19}$$

Une procédure de Backstepping conduit alors à utiliser des pseudo-contrôleurs déterminés récursivement :

$$\begin{cases} \overline{x}_2 = -f_1(X_1) - K_1\delta_1 + \dot{x}_1^c \\ \overline{x}_3 = -f_2(X_2) - (K_2+1)\delta_2 + \dot{\overline{x}}_2 \\ \ldots \\ \overline{x}_n = -f_{n-1}(X_{n-1}) - (K_{n-1}+1)\,\delta_{n-1} + \dot{\overline{x}}_{n-1} \end{cases}$$

où : $\delta_1 := x_1 - x_1^c$ et $\delta_{2\leq i\leq n-1} := x_i - \overline{x}_i$ et qui permettent d'obtenir le contrôleur continu suivant :

$$u_c = -f_n(X_n) - \delta_{n-1} - K_n\delta_n + \dot{\overline{x}}_n$$

où $K_1 > 0, \ldots, K_n > 0$. En effet, l'application du contrôleur u_c donne alors :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\sum_{i=1}^{n} K_i Sat_{r+1}^1(\delta_i)(\delta_i) - \sum_{i=2}^{n}(|\delta_i| - Sign(\delta_{i-1})\delta_i) + \mathcal{O}(T^{r+1}) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} K_i|\delta_i| - \sum_{i=2}^{n}(|\delta_i| - Sign(\delta_{i-1})\delta_i) + \mathcal{O}(T^{r+1}) \end{aligned}$$

Ainsi, les δ_i tendent vers $0 + \mathcal{O}(T^{r+1})$. En particulier :

$$\limsup_{k\longrightarrow+\infty} |\delta_1(kT)| = \limsup_{k\longrightarrow+\infty} |x_1(kT) - x_1^c(kT)| = \mathcal{O}(T^{r+1})$$

Si maintenant nous considérons le même système mais avec une commande $u := u_k$ échantillonnée à la fréquence $1/T$, en utilisant un contrôleur d'ordre r, $u_k := u^r = \sum_{i=0}^{r} T^i u_i$, le discrétisé exact sera à nouveau de la forme (5.16), i.e :

$$\begin{cases} x_1^+ = x_1 + T(f_1(X_1) + x_2) + \sum_{i=2}^{r+1} T^i f_1^i(X_{i+1}, U_{i-n}) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ x_2^+ = x_2 + T(f_2(X_2) + x_3) + \sum_{i=2}^{r+1} T^i f_2^i(X_{i+2}, U_{i-n+1}) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_j^+ = x_j + T(f_j(X_j) + x_{j+1}) + \sum_{i=2}^{r+1} T^i f_j^i(X_{i+j}, U_{i+j-n-1}) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_{n-1}^+ = x_{n-1} + T(f_{n-1}(X_{n-1}) + x_n) + \sum_{i=2}^{r+1} T^i f_{n-1}^i(X_{i+n-1}, U_{i-2}) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ x_n^+ = x_n + T(f_n(X_n) + u_0) + \sum_{i=2}^{r+1} T^i (u_{i-1} + f_n^i(X_n, U_{i-2})) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \end{cases}$$

Le théorème suivant améliore le théorème vu précédemment et permet de comparer les commandes selon leur ordre :

Théorème 5.3.2 *Considérons le système de la classe strict-feedback décrite précédemment et considérons $x_1^c(t)$ une consigne temporelle de la variable réelle x_1 suffisamment régulière (de dérivées successives $(x_1^c)^{(i)}(t)$). Pour r donné, il existe $\Delta_0 \geq 0, \overline{T} \geq 0$ tels que pour tous les $\|X_0\| \leq \Delta_0$ et $T \leq \overline{T}$, nous pouvons concevoir un contrôleur d'ordre r avec $u_0 = u_c$ tel que :*

$$\limsup_{k\longrightarrow+\infty} |x_1(kT) - x_1^c(kT)| = \mathcal{O}(T^{r+1})$$

De plus, la commande u^r d'ordre r construite dans notre preuve est meilleure (au sens des Propositions 4.4.3 et 4.4.8) quand l'ordre r augmente lorsque les hypothèses (i)-(iii) du chapitre précédent sont vérifiées pour la commande continue.

Preuve *:*

Fixons $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma > 1$.

Etape 1 :

Notons : $\delta_2^r := \delta_{2,0} + \sum_{i=1}^{r} T^i \overline{x}_{2,i} + \mathcal{O}(T^{r+1})$

$$\begin{aligned}
\delta_1^+ &= \delta_1 + T\delta_2^r + T(f_1(X_1) - \dot{x}_1^c + \overline{x}_{2,0}) + \sum_{i=2}^{r+1} T^i \Bigg(\overline{x}_{2,i-1} - \frac{(x_1^c)^{(i)}}{i!} \\
&\quad + f_1^i(X_{i+1}, U_{i-n}) \Bigg) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\
&= (1 - TK_1(T))\delta_1 + T\delta_2^r + \sum_{i=2}^{r+1} T^i \Bigg(\overline{x}_{2,i-1} + K_1^{(i-1)} - \frac{(x_1^c)^{(i)}}{i!} \\
&\quad + f_1^i(X_{i+1}, U_{i-n}) \Bigg) + \mathcal{O}(T^{r+2})
\end{aligned}$$

Nous notons :

$$p_{1,i} := p_{1,i}((x_1^c)^{(i)}, X_{i+1}, U_{i-n}) = K_1^{(i-1)} - \frac{(x_1^c)^{(i)}}{i!} + f_1^i(X_{i+1}, U_{i-n})$$

Nous décomposons ce terme ainsi :

$$p_{1,i} := \widetilde{p}_{1,i}((x_1^c)^{(i)}, X_{i+1}, U_0(x)) + \sum_{s=1}^{i-n} u_s(x) f_{1,s}^i(X_{i+1}, U_s(x))$$

Nous choisissons les $\overline{x}_{2,i}$ tels que

$$\begin{cases} \overline{x}_{2,0} = -f_1(X_1) - K_1\delta_1 + \dot{x}_1^c \\ \overline{x}_{2,i-1} = -\gamma \; Sat_{r+2}^{r_1-i}(\delta_1) \sum\limits_{s=0}^{i-n} Sat_{r+2}^{r_1-i}(p_{1,i,s}^*) p_{1,i,s}^* \qquad , i \in \{2, r+1\} \end{cases}$$

où r_1 sera déterminé à la dernière étape et où :

$$\begin{cases} p_{1,i,0}^* = \widetilde{p}_{1,i}((x_1^c)^{(i)}, X_i, U_0(x)) \\ p_{1,i,s}^* = u_s(x) f_{1,s}^i(X_{i+1}, U_s(x)) \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\delta_1^+ = (1 - K_1 T)\delta_1 + T\delta_2 + \sum_{i=2}^{r+1} T^i \left(p_{1,i} - \gamma \; Sat_{r+2}^{r_1-i}(\delta_1) \sum_{s=0}^{i-n} Sat_{r+2}^{r_1-i}(p_{1,i,s}^*) p_{1,i,s}^* \right) + \mathcal{O}(T^{r+2})$$

Nous considérons maintenant la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V_1 = Sat_{r+2}^1(\delta_1)\delta_1$$

Nous notons $\frac{\Delta V_1}{T} := \frac{V_1(\delta_1^+) - V_1(\delta_1)}{T}$
Nous avons alors :

$$\frac{\Delta V_1}{T} = -K_1|\delta_1| + \delta_2 Sat_{r+2}^1(\delta_1) + \sum_{i=2}^{r+1} T^{i-1} \left(p_{1,i} Sign(\delta_1) - \gamma \sum_{s=0}^{i-n} |p_{1,i,s}^*| \right) + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

Etape 2 :

Notons $\overline{x}_{2,j}^{+} = \overline{x}_{2,j} + \sum_{i=1}^{r} \frac{T^i}{i!}\overline{x}_{2,j}^{(i)} + \mathcal{O}(T^{r+1})$

Notons aussi : $\delta_3^r := \delta_{3,0} + \sum_{i=1}^{r} T^i \overline{x}_{3,i} + \mathcal{O}(T^{r+1})$

$$\begin{aligned}
(\delta_2^r)^+ &= \delta_2^r + T\delta_3^r + T(f_2(X_2) - \dot{\overline{x}}_{2,0} + \overline{x}_{3,0}) + \sum_{i=2}^{r+1} T^i \Bigg(\overline{x}_{3,i-1} - \frac{(\overline{x}_{2,0})^{(i)}}{i!} \\
&\quad + f_2^i(X_{i+2}, U_{i-n+1}) \Bigg) - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r+1-i} \frac{T^{i+j}}{j!} \overline{x}_{2,i}^{(j)} + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\
&:= (1 - TK_2(T))\delta_2^r - T(1 - TK_{1,2}(T))\delta_1 + T\delta_3^r \\
&\quad + \sum_{i=2}^{r+1} T^i \Bigg(\overline{x}_{3,i-1} + p_{2,i}((X_1^c)^{(i+1)}, X_{i+2}, [U_{i-n+1}]^0(X_n)) \Bigg) + \mathcal{O}(T^{r+2})
\end{aligned}$$

La présence du crochet $[U_{i-n+1}]^0(X_n)$ signifie que $p_{2,i}$ est un opérateur de $U_{i-n+1}(x)$. Plus généralement, nous notons :

$$[U_j]^k(X_n) := ([u_j]^k(x), [u_{j-1}]^{k+1}(x), \ldots, [u_0]^{k+j}(x))$$

où :

$$[u_j]^k(x) = (u_j(x), \partial u_j(x), \ldots, \partial^k u_j(x))$$

(remarque : $[U_{i-n+1}]^0(x) := ([u_{i-n+1}]^0(x), [u_{i-n}]^1(x), \ldots, [u_0]^{i-n+1}(x))$.
Nous notons :

$$p_{2,i}((X_1^c)^{(i+1)}, X_{i+2}, [U_{i-n+1}]^0(X_n))$$

Nous décomposons le terme $p_{2,i}$ ainsi :

$$\begin{aligned}
p_{2,i} &:= \widetilde{p}_{2,i}((X_1^c)^{(i+1)}, X_{i+2}, [u_0]^{i-n+1}(X_n)) \\
&\quad + \sum_{s=1}^{i-n+1} ([u_s]^{i-n-1-s}(X_n))^T \; f_{2,s}^i((X_1^c)^{(i+1)}, X_{i+2}, [U_s]^{i-n+1-s}(X_n))
\end{aligned}$$

Nous choisissons les $\overline{x}_{3,i}$ tels que

$$\begin{cases}
\overline{x}_{3,0} = -f_2(X_2) - (K_2 + 1)\delta_2^r + \dot{\overline{x}}_{2,0} \\
\overline{x}_{3,i-1} = -\gamma \; Sat_{r+2}^{r_2-i}(\delta_2^r) \sum_{s=0}^{i-n+1} Sat_{r+2}^{r_2-i}(p_{2,i,s}^*) p_{2,i,s}^* \qquad , i \in \{2, r+1\}
\end{cases}$$

où r_2 sera déterminé à la dernière étape et où :

$$\begin{cases}
p_{2,i,0}^* = \widetilde{p}_{2,i}((X_1^c)^{(i+1)}, X_{i+2}, [U_0]^{i-n+1}(X_n)) \\
p_{2,i,s}^* = ([u_s]^{i-n+1-s})^T \; f_{2,s}^i((X_1^c)^{(i+1)}, X_{i+2}, [U_s]^{i-n+1-s}(X_n))
\end{cases}$$

De façon à obtenir :

$$\begin{aligned}(\delta_2^r)^+ &= (1-TK_2)\delta_2^r - T\delta_2^r + T\delta_3^r \\ &\quad + \sum_{i=2}^{r+1} T^i \left(p_{2,i} - \gamma\ Sat_{r+2}^{r_2-i}(\delta_2) \sum_{s=0}^{i-n+1} Sat_{r+2}^{r_2-i}(p_{2,i,s}^*) p_{2,i,s}^* \right) + \mathcal{O}(T^{r+2})\end{aligned}$$

Cette fois nous considérons : $V_2 := Sat_{r+2}^1(\delta_1)(\delta_1) + Sat_{r+2}^1(\delta_2^r)(\delta_2^r) := \sum_{i=1}^{2} Sat_{r+2}^1(\delta_i^r)(\delta_i^r)$.
Nous aurons :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V_2}{T} &= -\sum_{j=1}^{2} K_j|\delta_j^r| + Sat_1^{r+1}(\delta_2^r)\delta_3^r + \sum_{i=2}^{r+1}\sum_{j=1}^{2} T^{i-1}\left(p_{j,i} Sign(\delta_j) - \gamma \sum_{s=0}^{i-n+1+j} |p_{j,i,s}^*| \right) \\ &\quad -T(|\delta_2^r| - Sat_{r+2}^1(\delta_1)\delta_2^r) + \mathcal{O}(T^{r+1})\end{aligned}$$

Etape i = 3..n-1

Pour simplifier les notations nous notons : $\delta_1^r := \delta_1$.
Notons aussi $\overline{x}_{k,j}^+ = \overline{x}_{k,j} + \sum_{i=1}^{r} \frac{T^i}{i!}\overline{x}_{k,j}^{(i)} + \mathcal{O}(T^{r+1})$
et : $\delta_{i+1}^r := \delta_{i+1,0} + \sum_{j=1}^{r} T^i \overline{x}_{i+1,j} + \mathcal{O}(T^{r+1})$

$$\begin{aligned}(\delta_i^r)^+ &= \delta_i^r + T\delta_{i+1}^r + T(f_i(X_i) - \dot{\overline{x}}_{i,0} + \overline{x}_{i+1,0}) + \sum_{j=2}^{r+1} T^j \left(\overline{x}_{i+1,j-1} - \frac{(\overline{x}_{i,0})^{(j)}}{j!} \right. \\ &\quad \left. + f_i^j(X_{i+j}, U_{j-n-1+i}) \right) - \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r+1-j} \frac{T^{j+k}}{k!}\overline{x}_{i,j}^{(k)} + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ &:= (1-TK_i)\delta_i^r + T\delta_{i-1}^r + T\delta_{i+1}^r \\ &\quad + \sum_{j=2}^{r+1} T^j \left(\overline{x}_{i+1,j-1} + p_{i,j}((X_1^c)^{(i+j-1)}, X_{i+j}, [U_{j-n-1+i}]^0(X_n)) \right) + \mathcal{O}(T^{r+2})\end{aligned}$$

Nous décomposons le terme $p_{i,j}$ ainsi :

$$\begin{aligned}p_{i,j} &:= \widetilde{p}_{i,j}((X_1^c)^{(i+j-1)}, X_{i+j}, [U_0]^{j-n-1+i}(X_n)) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{j-n-1+i} ([u_s]^{j-n-1+i-s}(X_n))^T\ f_{i,s}^j((X_1^c)^{(i+j-1)}, X_{i+j}, [U_s]^{j-n-1+i-s}(X_n))\end{aligned}$$

Nous choisissons les $\overline{x}_{i+1,j}$ tels que

$$\begin{cases} \overline{x}_{i+1,0} = -f_i(X_i) - (K_i+1)\delta_i^r + \dot{\overline{x}}_{i,0} \\ \overline{x}_{i+1,j-1} = -\gamma\ Sat_{r+2}^{r_i-j}(\delta_i^r) \sum_{s=0}^{j-n-1+i} Sat_{r+2}^{r_i-j}(p_{i,j,s}^*) p_{i,j,s}^* \qquad , j \in \{2, r+1\} \end{cases}$$

où r_i sera déterminé à la dernière étape et où :

$$\left\{ \begin{array}{l} p^*_{i,j,0} = \widetilde{p}_{i,j}((X_1^c)^{(i+j-1)}, X_{i+j}, [U_0]^{j-n-1+i}(X_n)) \\ p^*_{i,j,s} = ([u_s]^{j-n-1+i-s}(X_n))^T \ f^j_{i,s}((X_1^c)^{(i+j-1)}, X_{i+j}, [U_s]^{j-n-1+i-s}(X_n)) \end{array} \right.$$

De façon à obtenir :

$$\begin{aligned} (\delta_i^r)^+ &= (1-TK_i)\delta_i^r - T\delta_i^r + T\delta_{i+1}^r \\ &\quad + \sum_{j=2}^{r+1} T^j \left(p_{i,j} - \gamma \ Sat_{r+2}^{r_i-j}(\delta_i) \sum_{s=0}^{j-n-1+i} Sat_{r+2}^{r_i-j}(p^*_{i,j,s}) p^*_{i,j,s} \right) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \end{aligned}$$

Nous considérons la fonction suivante : $V_i(\delta_1, \delta_2^r, \ldots, \delta_i^r) := V_{i-1}(\delta_1^r, \delta_2^r, \ldots, \delta_{i-1}^r) + Sat_{r+1}^{r+1}(\delta_i^r)\delta_i^r$.
Nous notons $\frac{\Delta V_i}{T} := \frac{V_i(\delta_1^+, (\delta_2^r)^+, \ldots, (\delta_i^r)^+) - V_i(\delta_1^r, \delta_2^r, \ldots, \delta_i^r)}{T}$
Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_i}{T} &= -\sum_{j=1}^{i} K_j |\delta_j^r| + Sat_{r+1}^{r+1}(\delta_i^r)\delta_{i+1}^r + \sum_{k=2}^{r+1}\sum_{j=1}^{i} T^{k-1} \left(p_{j,k} Sign(\delta_j) - \gamma \sum_{s=0}^{k-n-1+j} |p^*_{j,k,s}| \right) \\ &\quad - T\sum_{j=2}^{i} (|\delta_j^r| - Sat_{r+2}^1(\delta_{j-1})\delta_j^r) + \mathcal{O}(T^{r+1}) \end{aligned}$$

Etape n

Notons : $u^r := u_0 + \sum_{i=1}^{r} T^i u_i + \mathcal{O}(T^{r+1})$,ainsi que : $\overline{x}^+_{n,j} = \overline{x}_{n,j} + \sum_{i=1}^{r} \frac{T^i}{i!} \overline{x}^{(i)}_{n,j} + \mathcal{O}(T^{r+1})$

$$\begin{aligned} (\delta_n^r)^+ &= \delta_n^r + T(f_n(X_n) - \dot{\overline{x}}_{n,0} + u_0) + \sum_{j=2}^{r+1} T^j \Bigg(u_{j-1} - \frac{(\overline{x}_{n,0})^{(j)}}{j!} \\ &\quad + f_n^j(X_n, U_{j-2}) \Bigg) - \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r+1-j} \frac{T^{j+k}}{k!} \overline{x}^{(k)}_{n,j} + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ &:= (1 - TK_n(T))\delta_n^r + \sum_{j=1}^{n-1} (-T)^{n-j}(1 - TK_{j,n}(T))\delta_j^r \\ &\quad + \sum_{j=2}^{r+1} T^j \Big(u_{j-1} + p_{n,j}((X_1^c)^{(j+n-1)}, X_n, [U_{j-2}]^0) \Big) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \end{aligned}$$

Nous décomposons le terme $p_{n,j}$ ainsi :

$$\begin{aligned} p_{n,j} &:= \widetilde{p}_{n,j}((X_1^c)^{(j+n-1)}, X_n, [U]^{j-2}(X_n)) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{j-2} ([u_s]^{j-2-s}(X_n))^T \ f^j_{n,s}((X_1^c)^{(j+n-1)}, X_n, [U_s]^{j-2-s}(X_n)) \end{aligned}$$

Nous choisissons les $\overline{x}_{n+1,j}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = -f_n(X_n) - (K_n+1)\delta_n^r + \dot{\overline{x}}_{n,0} \\ u_{j-1} = -\gamma\ Sat_{r+2}^{r+3-j}(\delta_n^r) \sum_{s=0}^{j-2} Sat_{r+2}^{r+3-j}(p^*_{n,j,s})p^*_{n,j,s} \qquad , j \in \{2,r\} \\ u_r = -\gamma\ Sign(\delta_n^r) \sum_{s=0}^{r-1} |p^*_{n,r+1,s}| \end{array}\right.$$

où :

$$\left\{\begin{array}{l} p^*_{n,j,0} = \widetilde{p}_{n,j}((X_1^c)^{(j+n-1)}, X_n, [U_0]^{j-2}(X_n)) \\ p^*_{n,j,s} = ([u_s]^{j-2-s}(X_n))^T\ f^j_{n,s}((X_1^c)^{(j+n-1)}, X_n, [U_s]^{j-2-s}(X_n)) \end{array}\right.$$

Nous avons donc requis que u_r ne soit pas forcément différentiable, que u_{r-1} le soit 2 fois (car u_r dépend de ∂u_{r-1} et ce qui arrive dans le $\mathcal{O}(T^{r+1})$ dépend de $\partial^2 u_{r-1}$). Ainsi, u_j (pour $(j \in \{0,\ldots,r-1\})$ est dérivable $r+1-j$ fois. D'où :

$$r_j = r+1-j$$

u^r a aussi été obtenu de façon à avoir :

$$\begin{array}{rcl} (\delta_n^r)^+ & = & (1-TK_n)\delta_n^r - T\delta_n^r \\ & & +\sum_{j=2}^{r+1} T^j \left(p_{n,j} - \gamma\ Sat_{r+2}^{r+2-j}(\delta_n) \sum_{s=0}^{j-2-s} Sat_{r+2}^{r+2-j}(p^*_{n,j,s})p^*_{n,j,s} \right) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \end{array}$$

Nous considérons la fonction suivante :

$$V_n(\delta_1, \delta_2^r, \ldots, \delta_n^r) := V_{n-1}(\delta_1^r, \delta_2^r, \ldots, \delta_{n-1}^r) + Sat_{r+2}^1(\delta_n^r)\delta_n^r$$

Nous notons $\frac{\Delta V_n}{T} := \frac{V_n(\delta_1^+, (\delta_2^r)^+, \ldots, (\delta_n^r)^+) - V_n(\delta_1, \delta_2^r, \ldots, \delta_n^r)}{T}$
Nous avons alors :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\Delta V_n}{T} & = & -\sum_{j=1}^{n} K_j|\delta_j^r| + \sum_{k=2}^{r+1}\sum_{j=1}^{n} T^{k-1}\left(p_{j,k}Sign(\delta_j) - \gamma \sum_{s=0}^{k-n-1+j} |p^*_{j,k,s}| \right) \\ & & -T\sum_{j=2}^{n}(|\delta_j^r| - Sat_{r+2}^1(\delta_{j-1})\delta_j^r) + \mathcal{O}(T^{r+1}) \\ & \leq & -\sum_{j=1}^{n} K_j|\delta_j^r| + \mathcal{O}(T^{r+1}) \end{array}$$

Conclusion : la dernière inégalité résulte du fait que $\gamma > 1$; nous en déduisons que :

$$\limsup_{k\longrightarrow+\infty}|\delta_1(k)| = \limsup_{k\longrightarrow+\infty}|\delta_2^r(k)| = \ldots = \limsup_{k\longrightarrow+\infty}|\delta_i^r(k)| = \ldots = \limsup_{k\longrightarrow+\infty}|\delta_n^r(k)| = \mathcal{O}(T^{r+1})$$

A nouveau, le choix de Δ_0 résulte d'arguments basés sur les fonctions de Lyapunov [60].

Comparaison des commandes selon leur ordre :

Nous avons utilisé une fonction de Lyapunov qui dépendait de l'ordre de la commande dans la preuve précédente (les $\overline{x}_i$ étant d'ordre r) mais pour pouvoir comparer la commande d'ordre u^q (où $q \in \{0, \ldots, r-1\}$) avec la commande d'ordre r associée ($u^r = u^q + \sum_{j=q+1}^{r} T^j u_j$), il faut utiliser la même fonction de Lyapunov et nous choisissons donc celle qui fait apparaître les termes d'ordre r i.e celle qui est associée à la commande d'ordre r.
Nous utilisons donc :

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} Sat^1_{r+2}(\delta^r_j)(\delta^r_j)$$

Si nous appliquons la commande u^r, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_r V_n}{T} &= -\sum_{j=1}^{n} K_j|\delta^r_j| + \sum_{k=2}^{r+1}\sum_{j=1}^{n} T^{k-1}\left(p_{j,k}Sign(\delta_j) - \gamma \sum_{s=0}^{k-n-1+j}|p^*_{j,k,s}|\right) \\ &\quad -T\sum_{j=2}^{n}(|\delta^r_j| - Sat^1_{r+2}(\delta_{j-1})\delta^r_j) + \mathcal{O}(T^{r+1})\end{aligned}$$

Si nous appliquons la commande u^q (cette fois, $u_{q+1} = \ldots = u_r = 0$), nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_q V_n}{T} &= -\sum_{j=1}^{n} K_j|\delta^r_j| + \sum_{k=2}^{r+1}\sum_{j=1}^{n} T^{k-1}\left(p_{j,k}Sign(\delta_j) - \gamma \sum_{s=0}^{\min\{q,k-n-1+j\}}|p^*_{j,k,s}|\right) \\ &\quad -T\sum_{j=2}^{n}(|\delta^r_j| - Sat^1_{r+2}(\delta_{j-1})\delta^r_j) + \mathcal{O}(T^{r+1})\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\Delta_r V_n}{T} - \frac{\Delta_q V_n}{T} = -\gamma\sum_{k=2}^{r+1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1+\min\{q,k-n-1+j\}}^{k-n-1+j} T^{k-1}|p^*_{j,k,s}| + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

Conformément aux résultats du chapitre précédent, u^r est ' meilleure' que u^q (au sens des propositions 4.4.3 et 4.4.8) quand l'ordre r augmente lorsque les hypothèses (i)-(iii) du chapitre précédent sont vérifiées pour la commande continue.

5.3.3 Exemple 2

Nous nous intéressons à nouveau à l'exemple précédent :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \eta^2 + \xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases}$$

Le discrétisé exact s'écrit :

$$\begin{cases} \eta^+ = \eta + T(\eta^2 + \xi) + \frac{T^2}{2}(2\eta^3 + 2\eta\xi + u) + \mathcal{O}(T^3) \\ \xi^+ = \xi + Tu \end{cases}$$

Cette fois nous allons appliquer le théorème 5.3.2 et obtenir un résultat qui permet à coup sûr (si T est suffisamment petit et si x_0 est correctement choisi) de garantir une meilleure précision quand l'ordre de la commande augmente (tout comme dans l'exemple 1) mais aussi de garantir que toute commande d'un ordre donné est meilleure que les commandes associées d'ordres inférieurs (i.e est meilleure que ses troncatures d'ordres inférieures).

Etape 1 : ($V_1 = Sat_1^2(\eta)\eta$)

Posons : $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 + T\bar{\xi}_1$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_1}{T} &= Sign(\eta)\left(\eta^2 + \xi + \frac{T}{2}(2\eta^3 + 2\eta\xi + u)\right) + \mathcal{O}(T^2) \\ &= -cV_1 + Sign(\eta)(\xi - \bar{\xi}) + \frac{T}{2}(Sign(\eta)(2\eta^3 + 2\eta\xi + u_0) - |2\eta^3 + 2\eta\xi + u_0|) \\ &\quad + \mathcal{O}(T^2) \end{aligned}$$

avec :

1. $\bar{\xi}_0 := -c\eta - \eta^2$
2. $\bar{\xi}_1 := -\frac{\gamma}{2} Sat_1^2(\eta\Phi_1)\Phi_1$
3. $\Phi_1 := 2\eta^3 + 2\eta\xi + u_0$

avec $\gamma > 1$

Etape 2 :

$$\eta^+ = (1 - cT)\eta + T(\xi - \overline{\xi}) + \frac{T^2}{2}(2\overline{\xi}_1 + 2\eta^3 + 2\eta\xi + u_0) + \mathcal{O}(T^3)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \overline{\xi}_0^+ &= \overline{\xi}_0 - T(c + 2\eta)(-c\eta + \xi - \overline{\xi}) \\ &\quad -T^2\left((-c\eta + \xi - \overline{\xi})^2 + (c + 2\eta)\left(\overline{\xi}_1 + \eta^3 + \eta\xi + \frac{u_0}{2}\right)\right) + \mathcal{O}(T^3) \end{aligned}$$

$$\bar{\xi}_1^+ = \bar{\xi}_1 - \frac{T}{2} Sat_1^1(\eta\Phi_1)\frac{(\Phi_1^+ - \Phi_1)}{T} + \mathcal{O}(T^2)$$

D'où :

$$\begin{aligned} (\xi - \bar{\xi})^+ &= (\xi - \bar{\xi}) + Tu_0 + T(c + 2\eta)(-c\eta + \xi - \overline{\xi}) + T^2 u_1 \\ &\quad +T^2\left((-c\eta + \xi - \overline{\xi})^2 + (c + 2\eta)\left(\overline{\xi}_1 + \eta^3 + \eta\xi + \frac{u_0}{2}\right)\right) \\ &\quad +\frac{T^2}{2} Sat_1^1(\eta\Phi_1)\frac{(\Phi_1^+ - \Phi_1)}{T} + \mathcal{O}(T^3) \end{aligned}$$

Nous choisissons alors :

$$\begin{aligned} u_0 &= -(c+1)(\xi-\bar{\xi}_0)-(c+2\eta)(-c\eta+\xi-\overline{\xi}_0) \\ &= -(c+1)(\xi+c\eta+\eta^2)-(c+2\eta)(\xi+\eta^2) \end{aligned} \tag{5.20}$$

D'où :

$$\Phi_1 = -(2c+1)(\xi+\eta^2)-c(c+1)\eta$$

$$\begin{aligned} \frac{(\Phi_1^+-\Phi_1)}{T} &= (3c^3+4c^2+c)\eta+(8c^2+6c+1)\eta^2+(4c^2+4c+1)\xi+(4c+2)\eta\xi \\ &\quad +(4c+2)\eta^3-(2\eta+4c\eta+c+c^2)(\xi-\overline{\xi})+\mathcal{O}(T) \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} (\xi-\bar{\xi})^+ &= (1-cT)(\xi-\bar{\xi})-T(\xi-\bar{\xi})+T^2\Big[u_1-(1+2c+2\eta)\overline{\xi}_1 \\ &\quad +(-c\eta+\xi-\overline{\xi})^2+(c+2\eta)\left(\overline{\xi}_1+\eta^3+\eta\xi+\frac{u_0}{2}\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}Sat_1^1(\eta\Phi_1)\frac{(\Phi_1^+-\Phi_1)}{T}\Big]+\mathcal{O}(T^3) \\ &:= (1-(c+1)T)(\xi-\bar{\xi})+T^2(u_1+\Phi_2)+\mathcal{O}(T^3) \end{aligned}$$

En choisissant :

$$u_1 = -\gamma|\Phi_2|Sign(\xi-\bar{\xi}) \tag{5.21}$$

et en considérant $V_2 = Sat_1^2(\eta)+Sat_1^2(\xi-\bar{\xi})$. Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_2}{T} &= -cV_2+Sign(\eta)(\xi-\bar{\xi})-|\xi-\bar{\xi}|+\frac{T}{2}(Sign(\eta)(\Phi_1)-\gamma|\Phi_1|) \\ &\quad +T(Sign(\xi-\bar{\xi})\Phi_2-\gamma|\Phi_2|)+\mathcal{O}(T^2) \end{aligned}$$

Résultats numériques : (courbes 9.22-9.27)
Cet exemple a été simulé dans le dernier chapitre pour les données suivantes : $T = 0.2$,$c = 1.1$,$\gamma = 1.2$.
Pour différentes conditions initiales, nous avons tracé la solution du système dynamique bouclé :

- en continu, lorsque la commande est continue $u := u_c$
- en pointillés, lorsque le système est commandé par la commande échantillonnée d'ordre 0, $u_k := u^0$
- en croix, lorsque le système est commandé par la commande échantillonnée d'ordre 1, $u_k := u^1$

Les résultats confirment la théorie mise en oeuvre dans ce chapitre : la commande d'ordre 1 est 'meilleure' que la commande d'ordre 0, au sens défini dans le chapitre précédent et elle reproduit davantage le comportement de la commande continue. Etant donnés les résultats, il semblerait que, pour cette période d'échantillonnage, le domaine d'attraction soit élargi lorsque l'ordre de la commande augmente.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, par l'étude d'une classe particulière de systèmes non linéaires, nous avons illustré les propriétés qui ont démontrées dans le chapitre précédent pour comparer les commandes selon leur ordre.
La procédure classique de Backstepping a été généralisée mais l'échantillonnage a introduit des dynamiques de zéros supplémentaires qui nous obligent à nous satisfaire d'un résultat de stabilisation ou de poursuite portant finalement que sur la première composante de l'état : nous disons que le changement de coordonnées utilisé lors de la synthèse de la commande n'est plus un difféomorphisme.
Dans le chapitre suivant, nous allons étudier une autre classe de systèmes non linéaires pour laquelle le difféomorphisme est conservé.

Chapitre 6

Procédure de Forwarding et échantillonnage

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les systèmes non linéaires de la forme strict-feedforward à commande échantillonnée. Les systèmes strict-feedforward à commande continue appartiennent à la classe particulière des systèmes non linéaires sous forme feedforward pour lesquels il est possible de construire des lois de commande ainsi qu'une fonction de Lyapunov par un algorithme récursif [101, 102]. La mise en oeuvre de la commande demande cependant la résolution explicite de l'équation différentielle des sous-systèmes permettant de donner l'expression des difféomorphismes utilisés à chaque étape de la synthèse de la commande et c'est un obstacle majeur à l'utilisation de ce type de commande ; cependant des applications utilisant la procédure de Forwarding sont parfois possibles [76].
Dans ce chapitre, nous présentons un algorithme généralisant l'algorithme donnant la commande continue [102] pour stabiliser semi-globalement pratiquement asymptotiquement les systèmes de la forme strict-feedforward à commande échantillonnée.
Une fois de plus, nous synthétisons une loi de commande de la forme (4.9) dans la mesure où notre algorithme se sert véritablement de la commande continue comme première composante de la commande et non d'une technique de synthèse empruntée aux systèmes discrets [2].
Pour cette classe de système, le difféomorphisme a bien lieu sur tout l'état du système malgré l'échantillonnage (ce qui n'était pas toujours le cas pour les systèmes de la forme strict-feedback) et nous pouvons donc stabiliser l'état complet sur $0 + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})$ avec une commande d'odre r.
La principale hypothèse utilisée est de supposer que les approximations d'ordre supérieurs r du discrétisé exact sont localement commandables. Sinon, la difficulté algorithmique rencontrée par la synthèse de la commande continue trouve ici son équivalent dans la détermination des fonctions $H_{i,j}$.
Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler la méthode de synthèse de la commande continue puis nous donnons notre nouvel algorithme de synthèse de commande

échantillonnée d'ordre r. Enfin, nous illustrons ce nouveau résultat par un exemple.

6.2 Synthèse de la commande continue

Nous considérons la classe des systèmes strict-feedforward :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(X_2) + g_1(X_2)v \\ \dot{x}_2 = f_2(X_3) + g_2(X_3)v \\ \vdots \quad \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_n) + g_{n-1}(x_n)v \\ \dot{x}_n = v \end{cases} \tag{6.1}$$

où $X_i := (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, où les champs de vecteurs sont analytiques et où la commande $v := v_k$ est échantillonnée.
Nous commençons par rappeler la procédure de forwarding qui permet de stabiliser globalement ce système par une commande continue v_c.

Procédure de Forwarding pour une commande continue [101],[102]
La procédure de Forwarding est une procédure récursive qui à chaque étape ajoute un nouveau terme à la fonction de Lyapunov et à la commande. Nous rappelons ici les deux premières étapes de la procédure et plus brièvement les étapes suivantes.
Etape 1 :
Nous nous intéressons au sous-système :

$$\dot{x}_n = v_n$$

La commande sera $v_n := F_n(x_n) := -\beta\frac{x_n}{1+x_n^2}$ où $1 > \beta > 0$. (Nous avons homogénéisé le maximum de $|v_n|$ à 1, nous pourrions évidemment prendre une autre valeur et pour cela il suffirait de changer le sous-système en $\dot{x}_n = (1/\beta)v_n$). La fonction de Lyapunov de départ est la suivante : $V_n(x_n) = \frac{1}{2}x_n^2$
Nous avons alors : $\dot{V}_n = -\beta\frac{x_n^2}{1+x_n^2}$
Ainsi, x_n converge asymptotiquement vers 0 et converge même localement exponentiellement vers 0 (autrement dit la convergence vers 0 est exponentielle après un temps fini)

Etape 2 :
Nous nous intéressons au sous-système :

$$\begin{cases} \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_n) + g_{n-1}(x_n)(v_n + v_{n-1}) := h_{n-1}(x_n) + g_{n-1}(x_n)v_{n-1} \\ \dot{x}_n = F_n(x_n) + v_{n-1} \end{cases}$$

Nous définissons le difféomorphisme (global) suivant : $\phi_{n-1} : (X_{n-1}) \longrightarrow (z_{n-1}, x_n)$ où :

$$z_{n-1}(X_{n-1}) = x_{n-1} + H_{n-1}(x_n)$$

où $H_{n-1}(x_n) := \int_0^\infty h_{n-1}(\widetilde{x}_n(s))ds$ et où $\widetilde{x}_n$ est la solution de :

$$\dot{\widetilde{x}}_n = v_n(\widetilde{x}_n) \qquad \widetilde{x}_n(0) = x_n(t)$$

pour $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ fixé.
La propriété de difféomorphisme global (l'inverse est évidente à calculer) est obtenue car $\frac{\partial H_{n-1}(x_n)}{\partial x_n}$ existe et est continue pour tous les x_n. En effet, $\widetilde{x}_n$ converge asymptotiquement vers 0 et même exponentiellement vers 0 après un temps fini.

Une autre propriété intéressante à observer est que H_{n-1} vérifie :

$$h_{n-1}(x_n) + \frac{\partial H_{n-1}(x_n)}{\partial x_n} v_n(x_n) = 0$$

(ce qui veut dire que nous pouvons déterminer H_{n-1} soit en résolvant une équation différentielle et en faisant une intégration, soit en résolvant une équation aux dérivées partielles).
Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} \dot{z}_{n-1} = 0 + \left(\frac{\partial H_{n-1}(x_n)}{\partial x_n} + g_{n-1}(x_n)\right) v_{n-1} \\ \dot{x}_n = -\beta x_n + v_{n-1} \end{cases}$$

Utilisant alors : $V_{n-1}(X_{n-1}) = V_n(x_n) + \frac{1}{2}z_{n-1}^2 = V_n(x_n) + (x_{n-1} + H_{n-1}(x_n))^2$. Nous avons :

$$\dot{V}_{n-1} = \dot{V}_n + \left(x_n + z_{n-1}\left(\frac{\partial H_{n-1}(x_n)}{\partial x_n} + g_{n-1}(x_n)\right)\right) v_{n-1} := \dot{V}_n + \Gamma_{n-1}(z_{n-1}, x_n) v_{n-1}$$

Choisissant alors : $v_{n-1}(X_{n-1}) = -\beta \frac{\Gamma_{n-1}(z_{n-1}(X_{n-1}), x_n)}{1+(\Gamma_{n-1}(z_{n-1}(X_{n-1}), x_n))^2}$ Nous aurons :

$$\dot{V}_{n-1} = \dot{V}_n - \beta \frac{(\Gamma_{n-1})^2}{1 + (\Gamma_{n-1})^2} \leq 0$$

La partie droite s'annule ssi :

$$x_n = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_{n-1}(z_{n-1}, 0) = \frac{\partial H_{n-1}(0)}{\partial x_n} z_{n-1} = 0 \tag{6.2}$$

Etant donné que le linéarizé-tangent du système original est commandable et que cette propriété se conserve par difféomorphisme, nous avons $\frac{\partial H_{n-1}(0)}{\partial x_n} \neq 0$. D'où, l'équation (6.2) est satisfaite seulement lorsque $(z_{n-1}, x_n) = (0, 0)$. Ainsi, l'équilibre $(z_{n-1}, x_n) = (0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable et même localement exponentiellement stable.
Nous notons désormais : $F_{n-1}(X_{n-1}) := v_n(x_n) + v_{n-1}(X_{n-1})$.

Etape $j = n + 1 - i \in \{3, \ldots, n\}$:

Nous réitérons le procédure précédente en considérant le sous-système :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(X_{i+1}) + g_i(X_{i+1})v \\ \vdots \quad \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_n) + g_{n-1}(x_n)v \\ \dot{x}_n = v \end{cases}$$

que nous réécrivons ainsi lorsque $v = v_{i+1}(X_{i+1}) + v_i(x_i, X_{i+1})$:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = h_i(X_{i+1}) + g_i(X_{i+1})v_i \\ \dot{X}_{i+1} = F_{i+1}(X_{i+1}) + b_{i+1}v_i \end{cases}$$

Nous montrons que la fonction suivante est un difféomorphisme (global) :

$$\phi_i : (x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n) \longrightarrow (z_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

où :

$$z_i(x_i, X_{i+1}) = x_i + H_i(X_{i+1})$$

où $H_i(X_{i+1}) := \int_0^\infty h_i(\widetilde{X}_{i+1}(s))ds$ et où $\widetilde{X}_{i+1}$ est la solution de :

$$\dot{\widetilde{x}}_n = F_{i+1}(\widetilde{X}_{i+1}) \qquad , \widetilde{X}_{i+1}(0) = \widetilde{X}_{i+1}$$

A nouveau, H_i a été conçu pour satisfaire la propriété suivante :

$$h_i(X_{i+1}) + \frac{\partial H_i(X_{i+1})}{\partial X_{i+1}} F_{i+1}(\widetilde{X}_{i+1}) = 0$$

De sorte que nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{z}_i = 0 + \left(\frac{\partial H_{i+1}(X_{i+1})}{\partial X_{i+1}} b_{i+1} + g_i(X_{i+1}) \right) v_i \\ \dot{X}_{i+1} = F_{i+1}(X_{i+1}) + b_{i+1}v_i \end{cases}$$

utilisant la fonction de Lyapunov candidate :

$$V_i(X_i) = V_{i+1}(X_{i+1}) + \frac{1}{2}z_i^2 = V_{i+1}(X_{i+1}) + (x_i + H_i(X_{i+1}))^2$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \dot{V}_{i+1} + \left[\frac{\partial V_{i+1}}{\partial X_{i+1}} b_{i+1} + z_i \left(\frac{\partial H_{i+1}(X_{i+1})}{\partial X_{i+1}} b_{i+1} + g_i(X_{i+1}) \right) \right] v_i \\ &:= \dot{V}_{i+1} + \Gamma_i(z_i, X_{i+1}) v_i \end{aligned}$$

Choisissant alors : $v_i(X_i) = -\beta \frac{\Gamma_i(z_i(X_i), X_{i+1})}{1+(\Gamma_{n-1}(z_i(X_i), X_{i+1}))^2}$, nous aurons :

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{i+1} - \beta \frac{(\Gamma_i)^2}{1 + (\Gamma_i)^2} \leq 0$$

La partie droite s'annule ssi :

$$X_{i+1} = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_i(z_i, 0) = \frac{\partial H_i(0)}{\partial X_{i+1}} z_i = 0 \tag{6.3}$$

Etant donné que le linéarizé-tangent du système original est commandable et que cette propriété se conserve par difféomorphisme, nous avons $\frac{\partial H_i(0)}{\partial X_{i+1}} \neq 0$. D'où, l'équation (6.3) est satisfaite seulement lorsque $(z_i, X_{i+1}) = (0, 0)$. Ainsi, l'équilibre $(z_i, X_{i+1}) = (0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable et même localement exponentiellement stable.

Conclusion : à l'étape n, nous obtenons la loi de commande $v_c := \sum_{i=1}^{n} v_i$ qui stabilise globalement asymptotiquement le système en 0 et qui est même localement exponentiellement stable.

6.3 Synthèse de la commande échantillonnée

Intéressons nous maintenant au même système (6.1) lorsque la commande est échantillonnée. Nous notons : $x^+ := x((k+1)T), x := x(kT), v := v_k$
Le discrétisé exact du système (6.1) est sous la forme d'une série de puissances de la période d'échantillonnage et lorsqu'il est tronqué à un ordre $r+1$ donné, il s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^+ = x_1 + T(f_1(X_2) + g_1(X_2)v) + \sum_{i=2}^{r+1} \frac{T^i}{i!} f_1^i(X_2, v) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ x_2^+ = x_2 + T(f_2(X_3) + g_2(X_3)v) + \sum_{i=2}^{r+1} \frac{T^i}{i!} f_2^i(X_3, v) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_{n-1}^+ = x_{n-1} + T(f_{n-1}(x_n) + g_{n-1}(x_n)v) + \sum_{i=2}^{r+1} \frac{T^i}{i!} f_{n-1}^i(x_n, v) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ x_n^+ = x_n + Tv + 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

où $X_i := (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ et où les fonctions f_j^i sont de la forme suivante :

$$f_j^i(X_{j+1}, v) := \sum_{k=0}^{i} \mu_{j,k}^i(X_{j+1}) v^k \tag{6.5}$$

Théorème 6.3.1 *Supposons que la linéarisation du discrétisé exact tronqué à l'ordre $r+1$ soit commandable à l'origine, alors il existe $\overline{T} > 0, \Delta_0 > 0$ et une commande d'ordre r dont le premier terme est la commande continue précédente tels que pour toute période d'échantillonnage $T \leq \overline{T}$ et pour tout état initial $|X(0)| \leq \Delta_0$ l'état du système (6.4) tend vers $0 + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})$.*

preuve : Soit $\beta \in]0, 1[$, $\overline{T} > 0$ donnés et T $\in$ $[0, \overline{T}]$.

Etape 1 :

Nous appliquons la commande suivante : $v = v_n(T, x_n)$.

$$x_n^+ = x_n + Tv_n(T, x_n)$$

Nous utilisons alors la fonction de Lyapunov candidate : $V_n = \frac{1}{2}(x_n)^2$ et nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V_n(x_n)}{T} &:= \frac{V_n(x_n^+) - V_n(x_n)}{T} \\ &= x_n v_n(T, x_n) + \frac{T}{2}(v_n(T, x_n))^2\end{aligned}$$

Nous choisissons :

$$v_n(T, x_n) = \frac{-\beta}{1+T^2}\frac{x_n}{1+x_n^2}$$

Et nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V_n(x_n)}{T} &= \frac{\beta}{1+T^2}\frac{x_n^2}{1+x_n^2}\left(-1 + \frac{T\beta}{2(1+T^2)(1+x_n^2)}\right) \\ &\leq -(1-\beta)\frac{\beta}{1+T^2}\frac{x_n^2}{1+x_n^2} \\ &:= -\alpha_{n,T}(x_n) \qquad (6.6)\end{aligned}$$

Donc, x_n tend globalement asymptotiquement vers 0. De plus, à partir d'un nombre K de pas fini $|x_n|$ devient inférieur à $M > 0$ et nous pouvons déterminer $N > 0$ tel que : $\forall k \geq K$, $\frac{\Delta V_n(x_n(k))}{T} \leq -NV_n(x_n(k))$ et nous obtenons une convergence exponentielle vers 0.

Si maintenant, nous développons en série de T notre contrôleur et que nous le tronquons à l'ordre r, nous notons :

$$v_n(T, x_n) = v_n^r(T, x_n) + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

avec :

$$v_n^r(T, x_n) = \sum_{i=0}^{r} T^i v_{n,i}(x_n)$$

(remarque : $v_{n,0}(x_n) = -\beta\frac{x_n}{1+x_n^2}$ est la première composante de notre contrôleur en continu). En appliquant non pas $v = v_n(T, x_n)$ au système mais $v = v_n^r(T, x_n)$, nous obtenons :

$$\frac{\Delta V_n(x_n)}{T} \leq -\alpha_{n,T}(x_n) + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

Nous notons : $F_n(T, x_n) = v_n(T, x_n)$ et $F_n^r(T, x_n) = v_n^r(T, x_n)$

Etape 2 :

Nous considérons le sous système suivant :

$$\begin{cases} x_{n-1}^+ = x_{n-1} + T(f_{n-1}(x_n) + g_{n-1}(x_n)v) + \sum_{i=2}^{r+2}\frac{T^i}{i!}f_{n-1}^i(x_n, v) + \mathcal{O}(T^{r+3}) \\ x_n^+ = x_n + Tv \end{cases}$$

Nous posons :

$$h_{n-1}(T,x_n) := f_{n-1}(x_n) + g_{n-1}(x_n)v_n(T,x_n) + \sum_{i=2}^{r+2}\frac{T^{i-1}}{i!}f_{n-1}^i(x_n,v_n(T,x_n))$$

Nous développons $h_{n-1}(T,x_n)$ en série de la période d'échantillonnage T et nous notons $h_{n-1}^r(T,x_n)$ sa troncature à l'ordre r+1, i.e nous avons :

$$h_{n-1}(T,x_n) := h_{n-1}^{r+1}(T,x_n) + \mathcal{O}(T^{r+2})$$

Nous allons chercher à stabiliser ce sous système avec v de la forme $v = v_n(T,x_n) + v_{n-1}(T,X_{n-1})$.
Nous utilisons le changement de variable suivant $\phi_{n-1,T} : (X_{n-1}) \longmapsto (z_{n-1}^{r+1}, x_n)$ où :

$$\begin{aligned} z_{n-1}^{r+1}(k) &= x_{n-1}(k) + H_{n-1}(T,x_n(k)) \\ &\triangleq x_{n-1}(k) + \sum_{j=0}^{+\infty} T h_{n-1}^{r+1}(T,\widetilde{x}_n(j)) \end{aligned}$$

où $\widetilde{x}_n(j)$ est la solution de l'équation aux différences suivante :

$$\begin{cases} \widetilde{x}_n(j+1) = \widetilde{x}_n(j) + TF_n(T,\widetilde{x}_n(j)) \\ \widetilde{x}_n(0) = x_n(k) \end{cases}$$

Nous remarquons que $\phi_{n-1,T}$ est un difféomorphisme global : l'inverse est triviale à déterminer et $\frac{\partial \phi_{n-1,T}}{\partial x} = \left[[1 \;\; \frac{\partial \phi_{n-1,T}}{\partial x_n}]; [1 \;\; 0]\right]$ existe et est continue. En effet, h_{n-1}^{r+1} est une somme de fonctions analytiques et d'après l'étape précédente $\widetilde{x}_n$ converge exponentiellement vers 0 après un nombre fini de pas.
Par construction, notons que H_{n-1} satisfait la propriété suivante :

$$T h_{n-1}^{r+1}(T,x_n) + H_{n-1}(T,x_n + TF_n(T,x_n)) - H_{n-1}(T,x_n) = 0 \tag{6.7}$$

Ceci signifie que si nous écrivons H_{n-1} sous la forme :

$$\begin{aligned} H_{n-1}(T,x_n) &= H_{n-1,0}(x_n) + \sum_{i=1}^{\infty} T^i H_{n-1,i}(x_n) \\ &= H_{n-1,0}(x_n) + \sum_{i=1}^{r+1} T^i H_{n-1,i}(x_n) + \mathcal{O}(T^{r+1}) \\ &:= H_{n-1}^{r+1}(T,x_n) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \end{aligned} \tag{6.8}$$

et si nous utilisons le fait que h_{n-1}^{r+1} est de la forme suivante :

$$h_{n-1}^{r+1}(T,x_n) = h_{n-1,0}(x_n, v_n^0(x_n)) + \sum_{i=1}^{r+1} T^i h_{n-1,i}(x_n, v_n^0(x_n), \ldots, v_n^i(x_n))$$

H_{n-1} étant suffisamment différentiable, la propriété (6.7) étant vraie $\forall T \in]0, \widehat{T}[$, alors les r+2 premières composantes de H_{n-1} (soit les composantes de H_{n-1}^{r+1}) vérifient :

$$\left\{\begin{array}{l} h_{n-1,0}(x_n, v_{n,0}(x_n)) + \frac{\partial H_{n-1,0}(x_n)}{\partial x_n} v_{n,0}(x_n) = 0 \\ h_{n-1,1}(x_n, v_{n,0}(x_n), v_{n,1}(x_n)) + \frac{\partial H_{n-1,1}(x_n)}{\partial x_n} v_{n,0}(x_n) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_{n-1,0}(x_n)}{\partial x_n^2}(v_{n,0}(x_n))^2 = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \\ h_{n-1,r+1}(x_n, \ldots, v_{n,r+1}(x_n)) + \frac{\partial H_{n-1,r+1}(x_n)}{\partial x_n} v_{n,0}(x_n) + \ldots + \frac{1}{(r+2)!}\frac{\partial^{r+2} H_{n-1,0}(x_n)}{\partial x_n^{r+2}}(v_{n,1}(x_n))^{r+2} = 0 \end{array}\right.$$

Nous remarquons au passage que $H_{n-1,i}(x_n)$ ne dépend que des i+1 premières composantes de la commande.

$$H_{n-1,i}(x_n) := H_{n-1,i}(x_n, v_{n,0}(x_n), \ldots, v_{n,i}(x_n)) \tag{6.9}$$

Nous remarquons aussi que $H_{n-1,0}(x_n)$ correspond à $H_{n-1}(x_n)$ utilisé par la commande continue.
Nous avons donc :

$$\begin{aligned} (z_{n-1}^{r+1})^+ &= x_{n-1}^+ + H_{n-1}(T, x_n^+) \\ &= x_{n-1} + T(f_{n-1}(x_n) + g_{n-1}(x_n)v) + \sum_{i=2}^{r+1} \frac{T^i}{i!} f_{n-1}^i(x_n, v) + H_{n-1}(T, x_n^+) \\ &\quad + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ &= x_{n-1} + H_{n-1}(T, x_n) - H_{n-1}(x_n + TF_n(T, x_n)) + Tg_{n-1}(x_n)v_{n-1} \\ &\quad + \sum_{i=2}^{r+1} \frac{T^i}{i!}(f_{n-1}^i(x_n, v_{n-1} + v_n) - f_{n-1}^i(x_n, v_n)) + H_{n-1}(T, x_n^+) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ &= z_{n-1}^{r+1} - H_{n-1}^{r+1}(T, x_n + TF_n^r(T, x_n)) + H_{n-1}^{r+1}(T, x_n + TF_n^r(T, x_n) + Tv_{n-1}) \\ &\quad + Tg_{n-1}(x_n)v_{n-1} + \sum_{i=2}^{r+1} \frac{T^i}{i!}(f_{n-1}^i(x_n, v_{n-1} + v_n^r) - f_{n-1}^i(x_n, v_n^r)) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ &= z_{n-1}^{r+1} + TG_{n-1}^r(T, x_n, v_{n-1})v_{n-1} + \mathcal{O}(T^{r+2}) \end{aligned}$$

C'est pourquoi, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l} (z_{n-1}^{r+1})^+ = z_{n-1}^{r+1} + TG_{n-1}^r(T, x_n, v_{n-1})v_{n-1} + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ x_n^+ = x_n + TF_n(T, x_n) + Tv_{n-1} = x_n + TF_n^r(T, x_n) + Tv_{n-1} + \mathcal{O}(T^{r+2}) \end{array}\right. \tag{6.10}$$

avec :

$$\begin{aligned} G_{n-1}^r(T, x_n, v_{n-1}) \triangleq\ & g_{n-1}(x_n) + \sum_{i=2}^{r+1} \frac{T^{i-1}}{i!} \int_0^1 \left.\frac{\partial f_{n-1}^i}{\partial \alpha}\right|_{(x_n, \alpha = v_n^r + v_{n-1}s)} ds \\ & + \int_0^1 \left.\frac{\partial H_{n-1}^{r+1}}{\partial \alpha}\right|_{(T, \alpha = x_n + TF_n^r(x_n) + Tv_{n-1}s)} ds + \mathcal{O}(T^{r+1}) \end{aligned} \tag{6.11}$$

(en indexant par r, nous entendons par là que G_{n-1}^r désigne la partie tronquée à l'ordre r de la série en T du terme de droite de (6.11). Remarque : le premier terme de G_{n-1}^r est :

$$G_{n-1,0}(x_n, v_{n-1}) = g_{n-1}(x_n) + \frac{\partial H_{n-1,0}(x_n)}{\partial x_n}$$

ce qui correspond à la composante utilisée par la commande continue.

La linéarisation du sous-système initial était commandable à l'origine et cette propriété est conservée par difféomorphisme. Par conséquent :

$$G^r_{n-1}(T,0,0) \neq 0$$

Nous utilisons à présent la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V^{r+1}_{n-1}(x_{n-1},x_n) = V_n(x_n) + \frac{1}{2}(z^{r+1}_{n-1})^2$$

Si nous considérons le sous-système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (z^{r+1}_{n-1})^+ = z^{r+1}_{n-1} + TG^r_{n-1}(T,x_n,v_{n-1})v_{n-1} \\ x^+_n = x_n + TF_n(T,x_n) + Tv_{n-1} \end{array} \right.$$

Nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V^{r+1}_{n-1}}{T} &= -\alpha_{n,T}(x_n) + \Gamma^r_{n-1}(T,x_n,z^{r+1}_{n-1},v_{n-1})v_{n-1} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{n-1}(T,x_n,z^{r+1}_{n-1},v_{n-1}) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left.\frac{\partial V_n}{\partial \alpha}\right|_{\alpha = x_n + TF_n(T,x_n) + Tv_{n-1}s} ds \\ &\quad + z^{r+1}_{n-1}G^r_{n-1}(T,x_n,v_{n-1}) + \frac{T}{2}[G^r_{n-1}(T,x_n,v_{n-1})]^2 v_{n-1} \end{aligned}$$

Si nous développons Γ^r_{n-1} en série de T, nous remarquons que le premier terme est le suivant :

$$\Gamma^r_{n-1,0}(x_n,z^{r+1}_{n-1},v_{n-1}) = \frac{1}{2}x_n + z^{r+1}_{n-1}G^r_{n-1,0}(x_n,v_{n-1})$$

ce qui correspond au terme utilisé par la commande continue.
Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V^{r+1}_{n-1}}{T} &= -\alpha_{n,T}(x_n) + \Gamma^r_{n-1}(T,x_n,z^{r+1}_{n-1},v_{n-1})v_{n-1} \\ &= -\alpha_{n,T}(x_n) + \Gamma^r_{n-1}(T,x_n,z^{r+1}_{n-1},0)v_{n-1} \\ &\quad + TR^r_{n-1}(T,x_n,z^{r+1}_{n-1},v_{n-1})v^2_{n-1} \end{aligned}$$

(Remarque : $\Gamma^r_{n-1,0}(x_n,z^{r+1}_{n-1},v_{n-1})$ ne dépendant pas de v_{n-1}, c'est donc en facteur de T qu'apparaît R^r_{n-1}).
avec :

$$R^r_{n-1}(T,x_n,z^{r+1}_{n-1},v_{n-1}) = \int_0^1 \left.\frac{\partial \Gamma^r_{n-1}}{\partial v}\right|_{\alpha=(T,x_n,z^{r+1}_{n-1},sTv_{n-1})} ds$$

Ainsi, inspirés par les travaux [72], nous choisissons la commande suivante :

$$v_{n-1}(x_n, z_{n-1}^{r+1}) = -\frac{\beta}{1+T^2(\rho_{n-1}^{r+1}(T,x_n,z_{n-1}^{r+1}))^2} \times \frac{\Gamma_{n-1}^r(T,x_n,z_{n-1}^{r+1},0)}{1+(\Gamma_{n-1}^r(T,x_n,z_{n-1}^{r+1},0))^2}$$

où $0<\beta<1$ et $\rho_{n-1}^{r+1}(T,x_n,z_{n-1}^{r+1}) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction $\mathcal{C}^k (k \geq 0)$ telle que

$$\max_{|v_{n-1}|\leq 1} |R_{n-1}^{r+1}(T,x_n,z_{n-1}^{r+1},v_{n-1})| \leq \rho_{n-1}^{r+1}(T,x_n,z_{n-1}^{r+1})$$

Remarque : par construction, notre contrôleur satisfait : $|v_{n-1}| \leq \frac{\beta}{2} < \beta$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V_{n-1}^{r+1}}{T} &= -\alpha_{n,T}(x_n) + \Gamma_{n-1}^r(T,x_n,z_{n-1}^{r+1},0)v_{n-1} + TR_{n-1}^r(T,x_n,z_{n-1}^{r+1},v_{n-1})v_{n-1}^2 \\
&\leq -\alpha_{n,T}(x_n) + \frac{\beta}{1+(\rho_{n-1}^{r+1}(T,x_n,z_{n-1}^{r+1}))^2} \frac{(\Gamma_{n-1}^r(T,x_n,z_{n-1}^{r+1},0))^2}{1+(\Gamma_{n-1}^r(T,x_n,z_{n-1}^{r+1},0))^2} \\
&\quad \times \left[-1+\frac{\beta T\rho_{n-1}^{r+1}(T,x_n,z_{n-1}^{r+1})}{(1+T^2(\rho_{n-1}^{r+1}(T,x_n,z_{n-1}^{r+1}))^2)(1+(\Gamma_{n-1}^r(T,x_n,z_{n-1}^{r+1},0))^2)}\right] \\
&\leq -\alpha_{n,T}(x_n) - (1-\beta)\tau_{n-1} \frac{(\Gamma_{n-1}^r(T,x_n,z_{n-1}^{r+1},0))^2}{1+(\Gamma_{n-1}^r(T,x_n,z_{n-1}^{r+1},0))^2} \\
&:= -\alpha_{n-1}(T,z_{n-1}^{r+1},x_n)
\end{aligned}$$

où :

$$\tau_{n-1} = \frac{\beta}{1+T^2(\rho_{n-1}^{r+1}(T,x_n,z_{n-1}^{r+1}))^2}$$

Par application de la version discrète du principe de La Salle nous déduisons la convergence globale asymptotique de $(x_n(k), z_{n-1}^{r+1}(k))$ vers l'ensemble invariant formé des couples x_n, z_{n-1}^{r+1} tels que :

$$\alpha_n(x_n) + (1-\beta)\tau_{n-1}(\Gamma_{n-1}^r(T,x_n,z_{n-1}^{r+1},0))^2 = 0$$

Ceci implique que $x_n(k) \longrightarrow 0$ et que $\Gamma_{n-1}^r(T,x_n=0,z_{n-1}^{r+1},0)=0$. Cependant, $\Gamma_{n-1}^r(T,0,z_{n-1}^{r+1},0) = 2TG_{n-1}^r(T,0,0)z_{n-1}^{r+1}$ et puisque $z_{n-1}^{r+1} = x_{n-1} + H_{n-1}^{r+1}(x_n=0) = x_{n-1}$ et que $G_{n-1}^r(T,0,0) \neq 0$, nous avons donc aussi $x_{n-1} \longrightarrow 0$.

Nous notons désormais : $F_n(T,x_n) + v_{n-1}(x_n, z_{n-1}^{r+1}) = F_{n-1}(T,X_{n-1})$

De plus, si nous revenons au discrétisé exact du système initial (6.10), à partir des calculs précédents et en appliquant simplement le même contrôleur tronqué à l'ordre r i.e en appliquant :

$$v_{n-1}(x_n, z_{n-1}^{r+1}) = v_{n-1}^r(x_n, z_{n-1}^{r+1}) + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

sur la même fonction de Lyapunov candidate, nous obtenons :

$$\frac{\Delta V_{n-1}^{r+1}}{T} \leq -\alpha_{n-1}(T, z_{n-1}^{r+1}, x_n) + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

Par application de la version discrète du principe de La Salle nous déduisons la convergence asymptotique de $x_n(k), z_{n-1}(k)$ vers l'ensemble invariant formé des couples x_n, z_{n-1} tels que :

$$\alpha_n(x_n) + (1-\beta)\tau_{n-1}(\Gamma_{n-1}^r(T, x_n, z_{n-1}^{r+1}, 0))^2 = 0 + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

Ceci implique que $x_n(k) \longrightarrow 0 + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})$ et que $\Gamma_{n-1}^r(T, x_n = 0 + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}}), z_{n-1}^{r+1}, 0) = 0 + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})$. Cependant, $\Gamma_{n-1}^r(T, 0 + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}}), z_{n-1}, 0) = \Gamma_{n-1}^r(T, 0, z_{n-1}^{r+1}, 0) + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}}) = 2TG_{n-1}^r(T, 0, 0)z_{n-1} + \mathcal{O}(T^{r+1})$ et puisque $z_{n-1}^{r+1} = x_{n-1} + H_{n-1}^{r+1}(x_n = 0 + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})) = x_{n-1} + H_{n-1}^{r+1}(x_n = 0) + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}}) = x_{n-1} + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})$ et que $G_{n-1}^r(0,0) \neq 0$, nous avons donc aussi $x_{n-1} \longrightarrow 0 + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})$.

Etape $i \in \{n-2, \ldots, 1\}$:

L'étape précédente se généralise aisément pour des sous-systèmes de dimension croissante. Nous considérerons le sous-système suivant :

$$\begin{cases} x_i^+ = x_i + T(f_i(X_{i+1}) + g_i(X_{i+1})v) + \sum_{j=2}^{r+1} \frac{T^j}{j!} f_i^j(X_{i+1}, v) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_{n-1}^+ = x_{n-1} + T(f_{n-1}(x_n) + g_{n-1}(x_n)v) + \sum_{i=2}^{r+1} \frac{T^i}{i!} f_{n-1}^i(x_n, v) + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ x_n^+ = x_n + Tv \end{cases}$$

Nous poserons :

$$h_i(T, X_{i+1}) = f_i(X_{i+1}) + g_i(X_{i+1})v_{i+1}(T, X_{i+1}) + \sum_{j=2}^{r+1} \frac{T^{j-1}}{j!} f_i^j(X_{i+1}, v_{i+1}(T, X_{i+1}))$$

et h_i^{r+1} sera sa troncature à l'ordre $r+1$. Nous utiliserons le changement de variable suivant et montrerons comme précédemment qu'il est correctement défini et qu'il s'agit d'un difféomorphisme global :

$$\begin{aligned} z_i^{r+1}(k) &= x_i(k) + H_i(T, X_{i+1}(k)) \\ &\stackrel{\Delta}{=} x_i(k) + \sum_{j=0}^{+\infty} T h_i^{r+1}(T, \widetilde{X}_{i+1}(j)) \end{aligned} \tag{6.12}$$

où $\widetilde{X}_{i+1}(j)$ est la solution de l'équation aux différences suivante :

$$\begin{cases} \widetilde{X}_{i+1}(j+1) = \widetilde{X}_{i+1}(j) + TF_{i+1}(T, \widetilde{X}_{i+1}(j)) \\ \widetilde{X}_{i+1}(0) = X_{i+1}(k) \end{cases}$$

Par construction, notons que H_i satisfait la propriété suivante :

$$Th_i^{r+1}(T, X_{i+1}) + H_i(T, X_{i+1} + TF_{i+1}(T, X_{i+1})) - H_i(T, X_{i+1}) = 0$$

Nous obtiendrons :

$$\begin{cases} (z_i^{r+1})^+ = z_{n-1}^{r+1} + TG_i^r(T, X_{i+1}, v_i)v_i + \mathcal{O}(T^{r+2}) \\ x_{i+1}^+ = X_{i+1} + TF_{i+1}(T, X_{i+1}) + Tb_{i+1}v_i = X_{i+1} + TF_{i+1}^r(T, X_{i+1}) + Tb_{i+1}v_i + \mathcal{O}(T^{r+2}) \end{cases}$$

avec $b_{i+1} = [0, \ldots, 0, 1]^T \in \mathbb{R}^{n-i}$ et :

$$\begin{aligned} G_i^r(T, X_{i+1}, v_i) &\triangleq g_i(X_{i+1}) + \sum_{j=2}^{r+1} \frac{T^{j-1}}{j!} \int_0^1 \left.\frac{\partial f_i^j}{\partial \alpha}\right|_{(X_{i+1}, \alpha = v_{i+1}^r + v_i s)} ds \\ &\quad + \int_0^1 \left.\frac{\partial H_i^{r+1}}{\partial \alpha}\right|_{(T, \alpha = X_{i+1} + TF_{i+1}^r(X_{i+1}) + Tb_{i+1}v_i s)} ds + \mathcal{O}(T^{r+1}) \end{aligned}$$

(en indexant par r, nous entendons par là G_i^r désigne la partie tronquée à l'ordre r de la série en T du terme de droite. Remarque : le premier terme de G_i^r est :

$$G_{i,0}(X_{i+1}, v_i) = g_i(X_{i+1}) + \frac{\partial H_{i,0}(X_{i+1})}{\partial X_{i+1}}$$

ce qui correspond à la composante utilisée par la commande continue.

La linéarisation du sous-système initial était commandable à l'origine et cette propriété est conservée par difféomorphisme. Par conséquent :

$$G_i^r(T, 0, 0) \neq 0$$

Nous utiliserons la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V_i^{r+1}(x_{n-1}, X_{i+1}) = V_{i+1}(X_{i+1}) + \frac{1}{2}(z_i^{r+1})^2$$

Si nous considérons le sous-système suivant :

$$\begin{cases} (z_i^{r+1})^+ = z_i^{r+1} + TG_i^r(T, X_{i+1}, v_i)v_i \\ X_{i+1}^+ = X_{i+1} + TF_{i+1}(T, X_{i+1}) + Tb_{i+1}v_i \end{cases}$$

Nous aurons :

$$\frac{\Delta V_i^{r+1}}{T} \leq -\alpha_{i+1,T}(X_{i+1}) + \Gamma_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, v_i)v_i$$

avec :

$$\begin{aligned} \Gamma_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, v_i) &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \left.\frac{\partial V_{i+1}}{\partial \alpha}\right|_{\alpha = X_{i+1} + TF_{i+1}(T, X_{i+1}) + Tb_{i+1}v_i s} ds\right)^T b_{i+1} \\ &\quad + z_i^{r+1} G_i^r(T, X_{i+1}, v_i) + \frac{T}{2}[G_i^r(T, X_{i+1}, v_i)]^2 v_i \end{aligned}$$

Si nous développons Γ_i^r en série de T, nous remarquons que le premier terme est le suivant :

$$\Gamma_{i,0}^r(X_{i+1}, z_i^{r+1}, v_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_{i+1}(X_{i+1})}{\partial X_{i+1}}\right)^T b_{i+1} + z_i^{r+1} G_{i,0}^r(X_{i+1}, v_i)$$

ce qui correspond au terme utilisé par la commande continue à l'étape i.
Nous pourrons alors écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V_i^{r+1}}{T} &\leq -\alpha_{i+1,T}(X_{i+1}) + \Gamma_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, v_i)v_i \\ &\leq -\alpha_{i+1,T}(X_{i+1}) + \Gamma_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, 0)v_i \\ &\quad + TR_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, v_i)v_i^2\end{aligned}$$

(Remarque : $\Gamma_{i,0}^r(X_{i+1}, z_i^{r+1}, v_i)$ ne dépendant pas de v_i, c'est donc en facteur de T qu'apparaît R_i^r).
avec :

$$R_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, v_i) = \int_0^1 \left.\frac{\partial \Gamma_i^r}{\partial v_i}\right|_{\alpha=(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, sTv_i)} ds$$

Ainsi, inspirés par les travaux [72], nous choisirons la commande suivante :

$$v_i(X_{i+1}, z_i^{r+1}) = -\frac{\beta}{1 + T^2(\rho_i^{r+1}(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}))^2} \times \frac{\Gamma_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, 0)}{1 + (\Gamma_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, 0))^2}$$

où $0 < \beta < 1$ et $\rho_i^{r+1}(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction $\mathcal{C}^k (k \geq 0)$ telle que

$$\max_{|v_i| \leq 1} |R_i^{r+1}(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, v_i)| \leq \rho_i^{r+1}(T, X_{i+1}, z_i^{r+1})$$

Remarque : par construction, notre contrôleur satisfait : $|v_i| \leq \frac{\beta}{2} < \beta$

Nous aurons alors :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V_i^{r+1}}{T} &= -\alpha_{i+1,T}(X_{i+1}) + \Gamma_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, 0)v_i + TR_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, v_i)v_i^2 \\ &\leq -\alpha_{i+1,T}(X_{i+1}) + \frac{\beta}{1 + (\rho_i^{r+1}(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}))^2} \frac{(\Gamma_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, 0))^2}{1 + (\Gamma_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, 0))^2} \\ &\quad \times \left[-1 + \frac{\beta T \rho_i^{r+1}(T, X_{i+1}, z_i^{r+1})}{(1 + T^2(\rho_i^{r+1}(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}))^2)(1 + (\Gamma_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, 0))^2)}\right] \\ &\leq -\alpha_{i+1,T}(X_{i+1}) - (1 - \beta)\tau_i \frac{(\Gamma_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, 0))^2}{1 + (\Gamma_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, 0))^2} \\ &:= -\alpha_i(T, z_i^{r+1}, X_{i+1})\end{aligned}$$

où :

$$\tau_i = \frac{\beta}{1 + T^2(\rho_i^{r+1}(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}))^2}$$

Par application de la version discrète du principe de La Salle nous déduirons la convergence globale asymptotique de $(X_{i+1}(k), z_i^{r+1}(k))$ vers l'ensemble invariant formé des couples X_{i+1}, z_i^{r+1} tels que :

$$\alpha_{i+1}(X_{i+1}) + (1-\beta)\tau_i(\Gamma_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, 0))^2 = 0$$

D'après les étapes précédentes $X_{i+1}(k) \longrightarrow 0$ et de plus $\Gamma_i^r(T, X_{i+1} = 0, z_i^{r+1}, 0) = 0$. Cependant, $\Gamma_i^r(T, 0, z_i^{r+1}, 0) = 2TG_i^r(T, 0, 0)z_i^{r+1}$ et puisque $z_i^{r+1} = x_i + H_i^{r+1}(X_{i+1} = 0) = x_i$ et que $G_i^r(T, 0, 0) \neq 0$, nous aurons donc aussi $x_i \longrightarrow 0$.

Nous noterons désormais : $F_{i+1}(T, X_{i+1}) + v_i(X_{i+1}, z_i^{r+1}) = F_i(T, X_i)$

De plus, si nous revenons au discrétisé exact du système initial (6.10), à partir des calculs précédents et en appliquant simplement le même contrôleur tronqué à l'ordre r , i.e en appliquant :

$$v_i(X_{i+1}, z_i^{r+1}) = v_i^r(X_{i+1}, z_i^{r+1}) + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

sur la même fonction de Lyapunov candidate, nous obtiendrons :

$$\frac{\Delta V_i^{r+1}}{T} \leq -\alpha_i(T, z_i^{r+1}, X_{i+1}) + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

Par application de la version discrète du principe de La Salle, nous déduisons la convergence asymptotique de $X_{i+1}(k), z_i(k)$ vers l'ensemble invariant formé des couples X_{i+1}, z_i tels que :

$$\alpha_{i+1}(X_{i+1}) + (1-\beta)\tau_i(\Gamma_i^r(T, X_{i+1}, z_i^{r+1}, 0))^2 = 0 + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

D'après les étapes précédentes, ceci implique que $X_{i+1}(k) \longrightarrow 0 + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})$ et de plus $\Gamma_i^r(T, X_{i+1} = 0 + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}}), z_i^{r+1}, 0) = 0 + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})$. Cependant, $\Gamma_i^r(T, 0 + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}}), z_i, 0) = \Gamma_i^r(T, 0, z_i^{r+1}, 0) + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}}) = 2TG_i^r(T, 0, 0)z_i + \mathcal{O}(T^{r+1})$ et puisque $z_i^{r+1} = x_i + H_i^{r+1}(X_{i+1} = 0 + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})) = x_i + H_i^{r+1}(X_{i+1} = 0) + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}}) = x_i + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})$ et que $G_i^r(0, 0) \neq 0$, nous aurons donc aussi $x_i \longrightarrow 0 + \mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})$.

Conclusion de la preuve : à la dernière étape, nous obtenons la commande d'ordre r qui stabilise l'état complet sur $\mathcal{O}(T^{\frac{r+1}{2}})$ et nous pouvons vérifier que la première composante de la commande est bien la commande continue.
Quant à Δ_0, il s'obtient par des arguments classiques [60].

6.4 Exemple

6.4.1 Synthèse de la commande continue

Soit le système suivant à commande continue :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \tag{6.13}$$

Etape 1 :

$$\dot{x}_2 = v_2$$
$$v_2 = -\beta \frac{x_2}{1 + x_2^2}$$

Etape 2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = v_2 + v_1 \end{cases}$$
$$h_1(x_2) = x_2 + x_2^2$$

Nous avons :

$$h_1(x_2) + \frac{\partial H_1(x_2)}{\partial x_2} v_2 = 0$$

D'où :

$$H_1(x_2) = \frac{12x_2 + 6x_2^2 + 4x_2^3 + 3x_2^4}{12\beta}$$

remarque : $z_1 = x_1 + H_1(x_2)$. Nous avons :

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 + \frac{\partial H_1(x_2)}{\partial x_2}(v_2 + v_1) = G_1(x_2)v_1$$

avec :

$$G_1(x_2) := \frac{1 + x_2 + x_2^2 + x_2^3}{\beta}$$

Considérons maintenant $V_1(X_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}z_1^2$; Nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\beta \frac{x_2^2}{1 + x_2^2} + (x_2 + G_1(x_2)z_1)v_1 \\ &= -\beta \frac{x_2^2}{1 + x_2^2} + \Gamma_1 v_1 \end{aligned}$$

Nous utilisons ainsi la commande :

$$v_1 = -\beta \frac{\Gamma_1}{1 + \Gamma_1^2}$$

Et nous obtenons :

$$\dot{V}_1 = -\beta \frac{x_2^2}{1 + x_2^2} - \beta \frac{\Gamma_1^2}{1 + \Gamma_1^2}$$

Au final, nous avons déterminé la loi de commande continue :

$$u_c := v_2 + v_1$$

6.4.2 Synthèse de la commande échantillonnée

Soit le système suivant sous forme strict-feedforward dont la commande est échantillonnée.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = u_k \end{cases} \tag{6.14}$$

Etape 1 :

$$x_2^+ = x_2 + Tv_2$$
$$v_2 = -\frac{\beta}{1+T^2}\frac{x_2}{1+x_2^2}$$

et son développement en séries à l'ordre 2 donne :

$$v_2^2 = -\beta\frac{x_2}{1+x_2^2} + T^2\beta\frac{x_2}{1+x_2^2} = v_2 + \mathcal{O}(T^3)$$

Considérant $V_2 := \frac{1}{2}x_2^2$, nous avons (lorsque $v := v_2$) :

$$\frac{\Delta V_2}{T} \leq -(1-\beta)\frac{\beta}{1+T^2}\frac{x_2^2}{1+x_2^2}$$

Etape 2 :

$$\begin{cases} x_1^+ = x_1 + T(x_2+x_2^2) + \frac{T^2}{2}(2x_2+1)(v_{20}+0+v_1) + \mathcal{O}(T^4) \\ x_2^+ = x_2 + Tv_2 + Tv_1 = x_2 + Tv_2^1 + Tv_1 + \mathcal{O}(T^3) \end{cases}$$

$$h_1^2 = x_2 + x_2^2 + \frac{T}{2}(2x_2+1)v_{20} + 0$$

Nous avons :

$$Th_1^2 + H_1(T, x_2+Tv_2) - H_1(x_2) = 0$$

Terme à terme, ceci s'écrit :

$$x_2 + x_2^2 - \beta\frac{\partial H_{1,0}}{\partial x_2}\frac{x_2}{1+x_2^2} = 0 \tag{6.15}$$
$$\frac{-\beta}{2}\frac{2x_2^2+x_2}{1+x_2^2} - \beta\frac{\partial H_{1,1}}{\partial x_2}\frac{x_2}{1+x_2^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_{1,0}}{\partial x_2^2}\left(\beta\frac{x_2}{1+x_2^2}\right)^2 = 0 \tag{6.16}$$
$$0 - \beta\frac{\partial H_{1,2}}{\partial x_2}\frac{x_2}{1+x_2^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_{1,1}}{\partial x_2^2}\left(\beta\frac{x_2}{1+x_2^2}\right)^2 + \beta\frac{\partial H_{1,0}}{\partial x_2}\frac{x_2}{1+x_2^2} = 0 \tag{6.17}$$

La résolution de (6.15) donne : $H_{1,0}(x_2) = \frac{1}{\beta}\left(x_2 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_2^3}{3} + \frac{x_2^4}{4}\right)$

Puis, la résolution de (6.16) donne : $H_{1,1}(x_2) = \frac{2x_2^2+x_2}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x_2^2) - \arctan(x_2)$

Puis, la résolution de (6.17) donne :
$H_{1,2}(x_2) = \frac{\beta}{8}\ln(1+x_2^2) + \frac{\beta}{8}\arctan(x_2) + H_{1,0}(x_2) + \frac{\beta}{4}\frac{(2x_2-1)}{1+x_2^2} + \frac{\beta}{4}\frac{(1-x_2)}{(1+x_2^2)^2}$ D'où :

$$H_1^2(T,x_2) = H_{1,0}(x_2) + TH_{1,1}^2(x_2) + T^2H_{1,2}(x_2)$$

Nous posons :

$$z_1^2 := x_1 + H_1^2(T,x_2)$$

$$\begin{aligned} G_1^1(T,x_2,v_1) &:= \frac{T}{2}(2x_2+1) + \frac{H_1^2(x_2+Tv_2^2+Tv_1) - H_1^2(x_2+Tv_2^2)}{Tv_1} + \mathcal{O}(T^3) \\ &= \frac{1+x+x_2^2+x^3}{\beta} + T\left[\frac{1+x_2}{2} + \frac{1}{\beta}\left(x_2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_2^2\right)v_1\right. \\ &\quad \left. -\frac{(1+2x_2+2x_2^2+3x_2^3)}{1+x_2^2}\right] + \mathcal{O}(T^2) \\ &:= G_{1,0} + TG_{1,1} + \mathcal{O}(T^2) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} (z_1^2)^+ = z_1^2 + TG_1^1(T,x_2,v_1)v_1 + \mathcal{O}(T^3) \\ x_2^+ = x_2 + Tv_2 + Tv_1 = x_2 + TF_2^1(x_2) + Tv_1 + \mathcal{O}(T^3) \end{array} \right.$$

Considérons alors : $V_1^2(X_1) = V_2(x_2) + \frac{1}{2}(z_1^2)^2$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{V_1^2(X_1^+) - V_1^2(X_1)}{T} &:= \frac{V_2(x_2^+) - V_2(x_2)}{T} + (x_2 + z_1G_1^1(T,x_2,v_1))v_1 \\ &\quad + \frac{T}{2}(1+G_1^1(T,x_2,v_1))^2)(v_1)^2 + Tv_2(x_2)v_1 + \mathcal{O}(T^2) \\ &= \frac{V_2(x_2^+) - V_2(x_2)}{T} + \Gamma_1^1(T,x_1,x_2,v_1)v_1 + \mathcal{O}(T^2) \\ &:= \frac{V_2(x_2^+) - V_2(x_2)}{T} + \Gamma_1^1(T,x_1,x_2,0)v_1 + TR_1^1(T,x_1,x_2,v_1)(v_1)^2 \\ &\quad + \mathcal{O}(T^2) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Gamma_1^1(T,x_1,x_2,0) &= x_2 + z_1G_1^1(T,x_2,0) + Tv_2 = x_2 + z_1G_{1,0} + T(z_1G_{1,1} + v_{2,0}) \\ &:= \Gamma_{1,0} + T\Gamma_{1,1} + \mathcal{O}(T^2) \end{aligned} \tag{6.18}$$

$$v_1 = -\frac{\beta}{1+T^2\rho_1^2} \quad \frac{\Gamma_1^1(T,x_1,x_2,0)}{1+(\Gamma_1^1(T,x_1,x_2,0))^2}$$

D'où :

$$v_1^2 = -\beta\left[\frac{\Gamma_{1,0}}{1+(\Gamma_{1,0})^2} - T\frac{\Gamma_{1,1}(-1+(\Gamma_{1,0})^2)}{(1+(\Gamma_{1,0})^2)^2} + T^2v_{1,2}\right] = v_1 + \mathcal{O}(T^3)$$

Ainsi, au final nous avons déterminé :

$$u_k := u^2 = v_2^2 + v_1^2 := u_c + Tu_1 + T^2u_2$$

Résultats numériques : (courbes 9.28-9.32)
Cet exemple a été simulé dans le dernier chapitre pour $\beta = 2$.
Pour différentes conditions initiales et périodes d'échantillonnage, nous avons tracé la solution du système dynamique bouclé :

- en continu, lorsque la commande est continue $u := u_c$
- en pointillés, lorsque le système est commandé par la commande échantillonnée d'ordre 0, $u_k := u^0$
- en croix, lorsque le système est commandé par la commande échantillonnée d'ordre 1, $u_k := u^2$

Les résultats confirment la théorie mise en oeuvre dans ce chapitre : la commande d'ordre 1 est 'meilleure' que la commande d'ordre 0, au sens défini dans les chapitres précédents, elle supprime de façon très notable les "broutements" occasionnés par l'émulation et elle reproduit davantage le comportement de la commande continue.

Chapitre 7

Commande adaptative et échantillonnage

7.1 Introduction

Nous nous intéressons maintenant au problème de la commande adaptative des systèmes non linéaires à commande échantillonnée. C'est un problème qui n'a pas été beaucoup abordé dans la littérature. Nous pouvons trouver quelques algorithmes qui utilisent le schéma d'Euler pour approximer le discrétisé exact associé au système à commande échantillonnée [110, 111] et sinon l'étude la plus approfondie à notre connaissance est celle de [47] dont nous proposons de généraliser les résultats : l'idée de base qui consiste à obtenir une bonne approximation par séries de Taylor-Lie du discrétisé exact et à introduire une sur-paramétrisation pour prendre en compte le changement de structure du système non linéaire à paramètres inconnus est similaire à la notre. Cependant, à la différence de [47], nous donnons un algorithme qui n'est pas seulement valable pour des systèmes non linéaires linéarizables par bouclage et nous construisons notre loi d'adaptation à partir d'outils empruntés à la commande adaptative de systèmes continus (et non discrets). Ce point est d'autant plus appréciable que pour beaucoup de classes de systèmes non linéaires, le problème de la commande adaptative est plus complexe en discret qu'en continu : c'est par exemple le cas des systèmes sous la forme strict-feedback [79].
A noter aussi, que plus récemment, tout en traitant un problème d'identification paramétrique dans [116], une sur-paramétrisation est utilisée pour prendre en compte la dynamique supplémentaire des zéros introduite par l'échantillonnage : l'idée de base est donc aussi la même.

Etant donnée une période d'échantillonnage fixée et connue $T > 0$, nous nous intéressons dans ce chapitre à la classe suivante de systèmes non linéaires à commande échantillonnée :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in [kT, (k+1)T[, \qquad \dot{x}(t) = f_0(x(t)) + F_0(x(t))\theta + g_1(x(t))u_k \qquad (7.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre constant inconnu et borné, $u_k \in \mathbb{R}$, et les champs de vecteurs f_0,F_0 et g_1 sont analytiques.
(Remarque : c'est par souci de simplification que nous avons choisi de nous restreindre aux cas où : $\theta \in \mathbb{R}$, et $u_k \in \mathbb{R}$. Cependant, nos résultats peuvent être directement généralisés pour des classes de systèmes où $\theta \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$ au prix de davantage de calcul et de notations plus "lourdes").

Pour une condition initiale x_0, la solution $t \longmapsto x(x_0, t)$ coïncide avec la solution du discrétisé exact à chaque instant d'échantillonnage de la commande $t = kT$, $k \in \mathbb{N}$. Notons la solution $x_k = x(x_0, kT)$. Le discrétisé exact associé au système (7.1) s'écrit :

$$x_{k+1} = x_k + \int_{kT}^{(k+1)T} f_0(x(s)) + F_0(x(s))\theta + g_1(x(s))u_k \, ds := F^e_{T,\theta}(x_k, u_k) \tag{7.2}$$

Dans ce chapitre, nous utilisons un développement en séries de Taylor-Lie pour approximer le discrétisé exact du système jusqu'à un ordre donné et nous donnons une nouvelle méthode de synthèse de commande adaptative sous forme de série de la période d'échantillonnage dont la loi d'adaptation est elle aussi définie par une équation aux différences.
En effet, partant d'une loi de commande synthétisable en continu et de la forme : $u_c(x, \widehat{\theta})$ avec pour loi d'adaptation paramétrique $\dot{\widehat{\theta}} = \psi_c(x, \widehat{\theta})$, nous montrons que nous pouvons synthétiser sous certaines conditions une commande de la forme :

$$u^r_k(x, \widehat{\Theta}_{r+1}) = u_c(x, \widehat{\theta}_1) + \sum_{i=1}^{r} T^i u_i(x, \widehat{\Theta}_{i+1})$$

où la loi d'adaptation s'écrit pour $i \in \{0, \ldots, r\}$,

$$\widehat{\theta}^+_{i+1} = \widehat{\theta}_{i+1} + \sum_{j=1}^{r+1-i} T^j \phi_{i+1,j}(x, \widehat{\Theta}_j)$$

sachant que le vecteur $\widehat{\Theta}_j = (\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \ldots, \widehat{\theta}_j)^T$ a été introduit par une sur-paramétrisation et que la loi d'adaptation continue discrétisée par un schéma d'Euler est retrouvée lorsque $r = 1$, i.e $\phi_{1,1}(x, \widehat{\theta}_1) = \psi_c(x, \widehat{\theta}_1)$. A noter que les termes facteurs de la période d'échantillonnage et de ses puissances sont obtenus par une méthode récursive que nous allons expliciter.

7.2 Prérequis Mathématiques

7.2.1 Notations

Dans les chapitre précédents, nous avons dit qu' une fonction réelle $R(T,x)$ est de l'ordre de T^{r+1} et nous avons écrit $R(T,x)=\mathcal{O}(T^{r+1})$ lorsqu'il existait $\overline{T},\Delta>0,\gamma\in\mathcal{K}_\infty$ tels que :

$$\forall\ T,x\quad \text{t.q } T\in[0,\overline{T}],\|x\|\leq\Delta,\qquad\Longrightarrow\quad |R(T,x)|\leq T^{r+1}\gamma(\|x\|)$$

Dans le cadre de système adaptatif, le reste dépendra du terme inconnu θ mais nous le supposerons borné et nous disons qu'une fonction réelle $R(T,x,\theta)$ est de l'ordre de T^{r+1} (et nous notons alors $R(T,x,\theta)=\mathcal{O}(T^{r+1})$) lorsqu'il existe $\overline{T},\Delta>0,\gamma_1\in\mathcal{K}_\infty$ tels que :

$$\forall\ T,x\quad \text{t.q } T\in[0,\overline{T}],\|x\|\leq\Delta,\qquad\Longrightarrow\quad |R(T,x,\theta)|\leq T^{r+1}\gamma_1(\|x\|)$$

Lorsque le système sera bouclé, le reste dépendra aussi de $\widetilde{\Theta}_{r+1}$ défini par la suite (mais qui restera borné) et nous écrirons à nouveau :

$$\forall\ T,x\quad \text{t.q } T\in[0,\overline{T}],\|x\|\leq\Delta,\qquad\Longrightarrow\quad |R(T,x,\theta,\widetilde{\Theta}_{r+1})|\leq T^{r+1}\gamma_1(\|x\|)$$

7.2.2 Quelques outils Mathématiques préliminaires

Proposition 7.2.1 *Etant donné un entier naturel r fixé, nous considérons le système (7.2) et un contrôleur de la forme (4.15). Alors, étant donné une fonction $V:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, il existe des fonctions p_{iks} suffisamment régulières telles que pour T suffisamment petit nous avons :*

$$\begin{aligned}\frac{V(x^+)-V(x)}{T} &= L_{f_0}V(x)+L_{F_0}V(x)\theta+L_{g_1}V(x)u_0+\sum_{s=1}^{r}T^s\Big(L_{g_1}V(x)u_s\\ &\quad+\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=0}^{k+1}p_{iks}[\partial V]^s(x,U_{s-1})\ \theta^i\Big)+G(T,x,\theta,u^r)\end{aligned}\tag{7.3}$$

où $G(T,x,\theta,u^r(x,\theta)):=R(T,x,\theta)=\mathcal{O}(T^{r+1})$
où $U_{s-1}:=(u_0,\ldots,u_{s-1})$
où l'expression des $p_{iks}[\partial V]^s$ est donnée dans la preuve. (la notation entre crochets signifie que p_{iks} est un opérateur différentiel de V, composé des $[\partial V]^s:=(\partial V,\partial^2V,\ldots,\partial^{s+1}V)$)

preuve : Etant donné une fonction analytique $V:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, nous pouvons l'écrire de la façon suivante en la décomposant en série de Taylor-Lie (cf le Théorème 3.1.5 de [55]) sachant que les calculs et les intégrales à calculer sont simplifiées par le simple fait que $u:=u_k$ est constant sur les intervalles séparant deux temps d'échantillonnage.
Pour T suffisamment petit :

$$V(x^+):=V(F^e_{T,\theta}(x,u))=V(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i_0=0,\ldots,i_k=0}^{m=1}L_{\widetilde{g}_{i_0}}\ldots L_{\widetilde{g}_{i_k}}V(x)\frac{T^{k+1}}{(k+1)!}u^{|I_k|}$$

où

$$\widetilde{g}_0:=\theta g_0:=\begin{cases}\theta(f_0\theta^{-1}+F_0) & ,\text{si}\ \ \theta\neq0\\ 0 & ,\text{si}\ \ \theta=0\end{cases}$$

et $\widetilde{g}_1 := g_1$. En regroupant les termes selon les puissances de θ, nous obtenons :

$$V(x^+) = V(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{(i_0,\ldots,i_k)\in\mathcal{J}_{ik}} L_{g_{i_0}} \ldots L_{g_{i_k}} V(x) \frac{T^{k+1}}{(k+1)!} \theta^i u^{k+1-i}$$

où $\mathcal{J}_{ik} := \{(i_0, \ldots, i_k) \in \{0,1\}^{k+1} \; ; \; |I_k| := k+1-i\}$.

Nous utilisons à présent le contrôleur : $u_k := u^r = \sum_{j=0}^{r} T^j u_j$. D'après la formule du multinôme de Newton :

$$u^{k+1-i} = \left(\sum_{j=0}^{r} T^j u_j \right)^{k+1-i} = \sum_{|N|=k+1-i} \left(\begin{array}{c} k+1-i \\ n_0 \; n_1 \; \ldots \; n_r \end{array} \right) u_0^{n_0} \ldots u_r^{n_r} T^{\|N\|}$$

D'où, $V(x^+)$

$$
\begin{aligned}
&= V(x) + T\Big(\theta L_{g_0}V(x) + L_{g_1}V(x)\sum_{j=0}^{r}T^j u_j\Big)\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{(i_0,\ldots,i_k)\in\mathcal{J}_{ik}} L_{g_{i_0}}\ldots L_{g_{i_k}}V(x)\tfrac{T^{k+1}}{(k+1)!}\theta^i \sum_{|N|=|I_k|}\begin{pmatrix} k+1-i \\ n_0\ n_1\ \ldots\ n_r\end{pmatrix} T^{\|N\|}\prod_{j=0}^{r}u_j^{n_j}\\
&= V(x) + T\Big(\theta L_{g_0}V(x) + L_{g_1}V(x)\sum_{j=0}^{r}T^j u_j\Big)\\
&+\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{s=0}^{r-k} T^{s+k+1}\left(\sum_{(i_0,\ldots,i_k)\in\mathcal{J}_{ik}}\tfrac{L_{g_{i_0}}\ldots L_{g_{i_k}}V(x)}{(k+1)!}\sum_{\substack{|N|=|I_k|\\ \|N\|=s}}\begin{pmatrix} k+1-i \\ n_0\ n_1\ \ldots\ n_r\end{pmatrix}\prod_{j=0}^{r}u_j^{n_j}\right)\theta^i\\
&+\mathcal{O}(T^{r+2})\\
&= V(x) + T\Big(\theta L_{g_0}V(x) + L_{g_1}V(x)\sum_{j=0}^{r}T^j u_j\Big)\\
&+\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{s=k}^{r} T^{s+1}\left(\sum_{(i_0,\ldots,i_k)\in\mathcal{J}_{ik}}\tfrac{L_{g_{i_0}}\ldots L_{g_{i_k}}V(x)}{(k+1)!}\sum_{\substack{|N|=|I_k|\\ \|N\|=s-k}}\begin{pmatrix} k+1-i \\ n_0\ n_1\ \ldots\ n_r\end{pmatrix}\prod_{j=0}^{r}u_j^{n_j}\right)\theta^i\\
&+\mathcal{O}(T^{r+2})\\
&= V(x) + T\Big(\theta L_{g_0}V(x) + L_{g_1}V(x)\sum_{j=0}^{r}T^j u_j\Big)\\
&+\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=0}^{k+1} T^{s+1}\left(\sum_{(i_0,\ldots,i_k)\in\mathcal{J}_{ik}}\tfrac{L_{g_{i_0}}\ldots L_{g_{i_k}}V(x)}{(k+1)!}\sum_{\substack{|N|=|I_k|\\ \|N\|=s-k}}\begin{pmatrix} k+1-i \\ n_0\ n_1\ \ldots\ n_r\end{pmatrix}\prod_{j=0}^{r}u_j^{n_j}\right)\theta^i\\
&+\mathcal{O}(T^{r+2})\\
&= V(x) + T\Big(\theta L_{g_0}V(x) + L_{g_1}V(x)u_0\Big)\\
&+\sum_{s=1}^{r} T^{s+1}\Big(L_{g_1}V(x)u_s + \sum_{k=1}^{s}\sum_{i=0}^{k+1} p_{iks}[\partial V]^s(x,U_{s-1})\ \theta^i\Big)+\mathcal{O}(T^{r+2})
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\frac{V(x^+)-V(x)}{T} &= \theta L_{g_0}V(x) + L_{g_1}V(x)u_0 + \sum_{s=1}^{r} T^s\Big(L_{g_1}V(x)u_s\\
&\quad +\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=0}^{k+1} p_{iks}[\partial V]^s(x,U_{s-1})\ \theta^i\Big)+\mathcal{O}(T^{r+1})
\end{aligned}
$$

où :

$$
p_{iks}[\partial V]^s(x,U_{s-1}) := \sum_{(i_0,\ldots,i_k)\in\mathcal{J}_{ik}}\frac{L_{g_{i_0}}\ldots L_{g_{i_k}}V(x)}{(k+1)!}\sum_{\substack{|N|=|I_k|\\ \|N\|=s-k}}\begin{pmatrix} k+1-i \\ n_0\ n_1\ \ldots\ n_r\end{pmatrix}\prod_{j=0}^{r}u_j^{n_j} \quad (7.4)
$$

□.

Par exemple, lorsque nous développons à l'ordre $r = 1$ la différence $\frac{V(x^+)-V(x)}{T}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{V(x^+)-V(x)}{T} &= \theta L_{g_0}V(x) + L_{g_1}V(x)u_0 + \frac{T}{2}\big[2L_{g_1}V(x)u_1 + L_{g_1}^2V(x)u_0^2 \\ &\quad + L_{g_0}L_{g_1}V(x)u_0\theta + L_{g_1}L_{g_0}V(x)u_0\theta + L_{g_0}^2V(x)\theta^2\big] + \mathcal{O}(T^2) \\ &= L_{f_0}V(x) + L_{F_0}V(x)\theta + L_{g_1}V(x)u_0 + \frac{T}{2}\big[2L_{g_1}V(x)u_1 + L_{g_1}^2V(x)u_0^2 \\ &\quad + L_{f_0}L_{g_1}V(x)u_0 + L_{F_0}L_{g_1}V(x)u_0\theta + L_{g_1}L_{f_0}V(x)u_0 \\ &\quad + L_{g_1}L_{F_0}V(x)u_0\theta + L_{f_0}^2V(x) + L_{f_0}L_{F_0}V(x)\theta + L_{F_0}L_{f_0}V(x)\theta \\ &\quad + L_{F_0}^2V(x)\theta^2\big] + \mathcal{O}(T^2)\end{aligned}$$

Ainsi, notre proposition donne à l'ordre $r = 1$ l'expression explicite suivante

$$\begin{aligned}\frac{V(x^+)-V(x)}{T} &= L_{f_0}V(x) + L_{F_0}V(x)\theta + L_{g_1}V(x)u_0 + T(L_{g_1}V(x)u_1 + p_{011}[\partial V]^1 \\ &\quad + p_{111}[\partial V]^1\theta + p_{211}[\partial V]^1\theta^2) + \mathcal{O}(T^2)\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}p_{011}[\partial V]^1 &= \frac{1}{2}L_{g_1}^2V(x)u_0^2 + \frac{1}{2}(L_{f_0}L_{g_1}V(x) + L_{g_1}L_{f_0}V(x))u_0 + \frac{1}{2}L_{f_0}^2V(x) \\ p_{111}[\partial V]^1 &= \frac{1}{2}(L_{F_0}L_{g_1}V(x) + L_{g_1}L_{F_0}V(x))u_0 + \frac{1}{2}(L_{f_0}L_{F_0}V(x) + L_{F_0}L_{f_0}V(x)) \\ p_{211}[\partial V]^1 &= \frac{1}{2}L_{F_0}^2V(x)\end{aligned}$$

Remarque : plus l'ordre augmente et plus les calculs vont être importants : il est alors nécessaire d'utiliser un outil de calcul formel type Maple par exemple.

7.3 Synthèse de la commande adaptative

Avant de donner l'algorithme de synthèse de la commande adaptative, nous devons changer la structure de la différence des fonctions de Lyapunov donnée par le théorème 7.2.1 afin d'obtenir une écriture utilisable en commande adaptative : ceci revient à introduire des termes en "$\widehat{\theta}$" à la place des termes inconnus en θ et d'extraire l'erreur $\widetilde{\theta} = \theta - \widehat{\theta}$ dont l'effet sera borné voir annulé par une loi de commande adaptative. θ apparaissant sous forme de puissance, une sur-paramétrisation est nécessaire. Finalement, nous commençons par prouver le résultat intermédiaire suivant :

Nous utilisons les notations suivantes de vecteurs lignes : $U_k := (u_0, \ldots, u_k)$, $\Theta_k = (\theta, \theta^2, \ldots, \theta^k)$, $\widehat{\Theta}_k = (\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \ldots, \widehat{\theta}_k)$, et $\widetilde{\Theta}_k = \Theta_k - \widehat{\Theta}_k$.

Proposition 7.3.1 *Soit un entier naturel $r \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que nous appliquons au système (7.1) un contrôleur de la forme*

$$u^r(x, \widehat{\Theta}_{r+1}) := \sum_{i=0}^{r} T^i u_i(x, \widehat{\Theta}_{i+1})$$

où les u_i sont différentiables au moins $r+1-i$ fois et où $\forall i \in \{0, \ldots, r\}, \widehat{\theta}_i$ est de la forme récurrente suivante :

$$\widehat{\theta}_{i+1}^{+} := \widehat{\theta}_{i+1} + \sum_{j=1}^{r+1-i} T^j \psi_{i+1,j}(x, \widehat{\Theta}_j) \tag{7.5}$$

où les $\psi_{i+1,j}$ sont continues. Notons de manière équivalente : $(\widehat{\Theta}_{i+1}^T)^+ = \widehat{\Theta}_{i+1}^T + T\Psi_i(x, \widehat{\Theta}_{i+1})$ Alors, pour toute fonction $V^r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme :

$$V^r(x, \widehat{\Theta}_{r+1}) = \sum_{i=0}^{r} T^i V_i(x, \widehat{\Theta}_{i+1})$$

où chaque V_i est différentiable $r+2-i$ fois et où chaque u_i est différentiable $r+1-i$ fois, il existe des opérateurs P_s et Φ_r suffisamment réguliers tels que pour toute période d'échantillonnage T suffisamment petite nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V^r}{T} &= \sum_{s=0}^{r} T^s \Big(L_{g_1,0} V_0(x, \widehat{\theta}_1) u_s(x, \widehat{\Theta}_{s+1}) + P_s([U_{s-1}]^0, [\partial H_s]^0, [\Psi_s])(x, \widehat{\Theta}_{s+1}) \Big) \\ &\quad + \Big(\Phi_r([U_{r-1}]^0, [\partial H_r]^0, [\Psi_{r-1}])(x, \widehat{\Theta}_{r+1}) \Big)^T D_r(T) \widetilde{\Theta}_{r+1}^T + \overline{G}(T, x, \theta, \widetilde{\Theta}_{r+1}) \end{aligned}$$

où $\overline{G}(T, x, \theta, \widetilde{\Theta}_{r+1}) = \mathcal{O}(T^{r+1})$
où $[\partial H_r]^0 := [[\partial V_r]^0, \ldots, [\partial V_0]^r]$ et $D_r(T) = diag(1, T, T^2, \ldots, T^r)$
où $\Delta V^r := V^r(x^+, (\widehat{\Theta}_{r+1})^+) - V^r(x, \widehat{\Theta}_{r+1})$
où la manière d'obtenir chaque P_s ainsi que Φ_r est donnée dans la preuve.

preuve :

Notons :

$$u_i^* := u_i(x, (\widehat{\Theta}_{i+1})^+)$$

$$V_i^* := V_i(x, (\widehat{\Theta}_{i+1})^+)$$

Soit $i \in \{0, \ldots, r\}$, en appliquant la proposition 7.2.1 et nos hypothèses, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
T^i \frac{\Delta V_i}{T} &= T^i \Bigg[L_{(f_0,0)} V_i^* + L_{(F_0,0)} V_i^* \theta + L_{(g_1,0)} V_i^* u_0^* \\
&\quad + \sum_{s=1}^{r-i} T^s \Bigg(L_{(g_1,0)} V_i^* u_s^* + \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=0}^{k+1} p_{jks} [\partial V_i]^s (x, U_{s-1}^*)\ \theta^j \Bigg) \Bigg] \\
&\quad + T^i \left(\frac{V_i^* - V_i}{T} \right) + O(T^{r+1}) \\
&= T^i \Big[L_{(f_0,0)} V_i^* + L_{(F_0,0)} V_i^* \widehat{\theta}_1 + L_{(g_1,0)} V_i^* u_0^* \Big] \\
&\quad + \sum_{s=1}^{r-i} T^{s+i} \Bigg(L_{(g_1,0)} V_i^* u_s^* + \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=0}^{k+1} p_{jks} [\partial V_i]^s (x, U_{s-1}^*)\ \widehat{\theta}_j \Bigg) \\
&\quad + T^i L_{(F_0,0)} V_i^* \widetilde{\theta}_1 + \sum_{s=1}^{r-i} T^{s+i} \left(\sum_{k=1}^{s} \sum_{j=0}^{k+1} p_{jks} [\partial V_i]^s (x, U_{s-1}^*)\ \widetilde{\theta}_j \right) \\
&\quad + T^i \left(\frac{V_i^* - V_i}{T} \right) + \mathcal{O}(T^{r+1})
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Nous notons : $(\widehat{\Theta}_{i+1}^T)^+ = \widehat{\Theta}_{i+1}^T + \sum_{j=1}^{r} T^j \Psi_{i,j}(x, \widehat{\Theta}_j)$

Toute fonction à valeurs réelles de la forme $g(x, (\widehat{\Theta}_{i+1})^+)$ s'écrit comme un opérateur différentiel de g en $(x, \widehat{\Theta}_{i+1})$ ($\bigotimes$ désigne le produit tensoriel apparaissant dans la série de Taylor d'une fonction multivariable)

$$\begin{aligned}
g^* &:= g(x, (\widehat{\Theta}_{i+1})^+) := g \left(x, \widehat{\Theta}_{i+1} + \sum_{j=1}^{r} T^j \Psi_{i,j}(x, \widehat{\Theta}_j) \right) \\
&= g(x, \widehat{\Theta}_{i+1}) + \frac{\partial g(x, \widehat{\Theta}_{i+1})^T}{\partial \widehat{\Theta}_{i+1}} \left(\sum_{j=1}^{r} T^j \Psi_{i,j}(x, \widehat{\Theta}_j) \right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 g(x, \widehat{\Theta}_{i+1})}{\partial (\widehat{\Theta}_{i+1})^2}^T \left[\left(\sum_{j=1}^{r} T^j \Psi_{i,j}(x, \widehat{\Theta}_j) \right) \bigotimes \left(\sum_{j=1}^{r} T^j \Psi_{i,j}(x, \widehat{\Theta}_j) \right) \right] \\
&\quad + \ldots + \left[\frac{\partial^r g(x, \widehat{\Theta}_{i+1})}{\partial (\widehat{\Theta}_{i+1})^r} \right]^T \left[\bigotimes_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} T^j \Psi_{i,j}(x, \widehat{\Theta}_j) \right) \right] + \mathcal{O}(T^{r+1}) \\
&:= g(x, \widehat{\Theta}_{i+1}) + \sum_{j=1}^{r} T^j g_j [\partial g]^j (T, x, \widehat{\Theta}_j) + \mathcal{O}(T^{r+1})
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Ainsi, en utilisant l'expression des p_{iks}, (7.6) et (7.7), chaque $\frac{\Delta V_i}{T}$ se met sous la forme :

$$\begin{aligned}
T^i\tfrac{\Delta V_i}{T} = \quad & T^i.\Big\{ L_{(f_0,0_{i+1})}V_i + L_{(F_0,0_{i+1})}V_i\widehat{\theta}_1 + L_{(g_1,0_{i+1})}V_iu_0 + L_{(0,1_{i+1})}V_i\Psi_{i+1,1} \\
& +\sum_{s=1}^{r-i} T^sL_{(g_1,0_{i+1})}V_iu_s + \sum_{s=1}^{r-i} T^sM_{i,s}\Big[[\partial V_i]^s,[U_{s-1}]^0,\Psi_{s+1,1},\Psi_{s,2},\ldots,\Psi_{1,s+1}\Big](x,\widehat{\Theta}_{s+1}) \\
& +\sum_{s=1}^{r-i} T^s\Bigg(\sum_{j=0}^{r-i-s} T^jN_{i,s,j}\Big[[\partial V_i]^j,[U_{j-1}]^0,\Psi_{j+1,1},\Psi_{j,2},\ldots,\Psi_{1,j+1}\Big](x,\widehat{\Theta}_{i+j+1})\Bigg)\widetilde{\theta}_{s+1}\Big\} \\
& +L_{(F_0,0_{i+1})}V_i\widetilde{\theta}_1 + \mathcal{O}(T^{r+1-i})
\end{aligned}$$

où $0_{i+1} = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{i+1}$, $1_{i+1} = (1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^{i+1}$ et où comme dans le chapitre portant sur le Backstepping, nous notons :

$$[U_i]^0 := ([u_i]^0,[u_{i-1}]^1,\ldots,[u_0]^i)$$

avec :

$$[u_i]^k = (u_i,\partial u_i,\ldots,\partial^k u_i)$$

et où de même :

$$[\partial H_i]^0 := ([\partial V_i]^0,[\partial V_{i-1}]^1,\ldots,[\partial V_0]^i)$$

avec :

$$[\partial V_i]^k = (\partial V_i,\partial^2 V_i,\ldots,\partial^k V_i)$$

En sommant, nous obtenons finalement une expression de la forme

$$\begin{aligned}
\tfrac{\Delta V^r}{T} = \quad & L_{(f_0,0)}V_0 + L_{(F_0,0)}V_0\widehat{\theta}_1 + L_{(g_1,0)}V_0u_0(x,\widehat{\theta}_1) + L_{(0,1)}V_0\Psi_{1,1} + \sum_{s=1}^{r} T^sL_{(g_1,0)}V_0u_s(x,\widehat{\Theta}_{s+1}) \\
& +\sum_{s=1}^{r} T^sM_s\Big[[\partial H_s]^0,[\partial U_{s-1}]^0,\Psi_{s+1,1},\Psi_{s,2},\ldots,\Psi_{1,s+1}\Big](x,\widehat{\Theta}_{s+1}) \\
& +\sum_{s=1}^{r} T^s\Bigg(\sum_{j=0}^{r-s} T^jN_{s,j}\Big[[\partial H_j]^0,[\partial U_{j-1}]^0,\Psi_{j+1,1},\Psi_{j,2},\ldots,\Psi_{1,j+1}\Big](x,\widehat{\Theta}_{j+1})\Bigg)\widetilde{\theta}_{s+1} \\
& +L_{(F_0,0)}V_0\widehat{\theta}_1 + \mathcal{O}(T^{r+1}) \\
= \quad & \sum_{s=0}^{r} T^s\Big(L_{g_1,0}V_0(x,\widehat{\theta}_1)u_s(x,\widehat{\Theta}_{s+1}) + P_s([U_{s-1}]^0,[\partial H_s]^0,[\Psi_s])(x,\widehat{\Theta}_{s+1})\Big) \\
& +\Big(\Phi_r([U_{r-1}]^0,[\partial H_r]^0,[\Psi_{r-1}])(x,\widehat{\Theta}_{r+1})\Big)^T D_r(T)\widetilde{\Theta}_{r+1}^T + \mathcal{O}(T^{r+1})
\end{aligned}$$

(remarque : connaître Ψ_s et ses composantes issues d'une décomposition en série est équivalent ; d'où l'usage de la notation $[\Psi_s]$ à la place de $\Psi_{s+1,1},\Psi_{s,2},\ldots,\Psi_{1,s+1}$.)
NB : Remarquons au passage que $\Phi_r \in \mathbb{R}^{r+1}$ est de la forme suivante :

$$\Phi_r = \begin{pmatrix} \phi_{1,1}(x,\widehat{\Theta}_1) + T\phi_{1,2}(x,\widehat{\Theta}_2) + T^3\phi_{1,3}(x,\widehat{\Theta}_3) + \ldots + T^r\phi_{1,r+1}(x,\widehat{\Theta}_{r+1}) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \phi_{r,1}(x,\widehat{\Theta}_1) + T\phi_{r,2}(x,\widehat{\Theta}_2) \\ \phi_{r+1,1}(x,\widehat{\Theta}_1) \end{pmatrix} \tag{7.8}$$

Exemple : pour $r = 1$

$$V^1(x, \widehat{\Theta}_2) = V_0(x, \widehat{\Theta}_1) + TV_1(x, \widehat{\Theta}_2)$$

$$\begin{cases} \widehat{\theta}_1^+ = \widehat{\theta}_1 + T\psi_{1,1}(x, \widehat{\Theta}_1) + T^2\psi_{1,2}(x, \widehat{\Theta}_2) \\ \widehat{\theta}_2^+ = \widehat{\theta}_2 + T\psi_{2,1}(x, \widehat{\Theta}_1) \end{cases}$$

Après quelques calculs, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V^1}{T} &= L_{(f_0,0)}V_0(x, \widehat{\Theta}_1) + L_{(F_0,0)}V_0(x, \widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 + L_{(g_1,0)}V_0(x, \widehat{\Theta}_1)u_0(x, \widehat{\Theta}_1) \\
&+\frac{\partial V_0(x, \widehat{\Theta}_1)}{\partial \widehat{\theta}_1}(\psi_{1,1}(x, \widehat{\Theta}_1) + T\psi_{1,2}(x, \widehat{\Theta}_2)) + \frac{T}{2}\frac{\partial^2 V_0(x, \widehat{\Theta}_1)}{\partial(\widehat{\theta}_1)^2}(\psi_{1,1}(x, \widehat{\Theta}_1))^2 \\
&+T\frac{\partial V_1(x, \widehat{\Theta}_2)}{\partial \widehat{\theta}_1}(\psi_{1,1}(x, \widehat{\Theta}_1)) + T\frac{\partial V_1(x, \widehat{\Theta}_2)}{\partial \widehat{\theta}_2}(\psi_{1,2}(x, \widehat{\Theta}_1)) \\
&+T\Bigg[\left(\frac{\partial^2 V_0(x, \widehat{\Theta}_1)}{\partial \widehat{\theta}_1 \partial x}\right)(f_0(x) + \widehat{\theta}_1 F_0(x) + g_1(x)u_0(x, \widehat{\Theta}_1)) \\
&+\left(\frac{\partial V_0(x, \widehat{\Theta}_1)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_0(x, \widehat{\Theta}_1)}{\partial \widehat{\theta}_1}\right)g_1(x)\Bigg]\psi_{1,1}(x, \widehat{\Theta}_1) \\
&+\frac{T}{2}\Big[2L_{(g_1,0)}V_0(x, \widehat{\Theta}_1)u_1(x, \widehat{\Theta}_2) + L^2_{(g_1,0)}V_0(x, \widehat{\Theta}_1)u_0^2(x, \widehat{\Theta}_1) \\
&+L_{(f_0,0)}L_{(g_1,0)}V_0(x, \widehat{\Theta}_1)u_0(x, \widehat{\Theta}_1) + L_{(F_0,0)}L_{(g_1,0)}V_0(x, \widehat{\Theta}_1)u_0(x, \widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 \\
&+L_{(g_1,0)}L_{(f_0,0)}V_0(x, \widehat{\Theta}_1)u_0(x, \widehat{\Theta}_1) + L_{(g_1,0)}L_{(F_0,0)}V_0(x, \widehat{\Theta}_1)u_0(x, \widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 \\
&+L^2_{(f_0,0)}V(x, \widehat{\Theta}_1) + L_{(f_0,0)}L_{(F_0,0)}V_0(x, \widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 + L_{(F_0,0)}L_{(f_0,0)}V_0(x, \widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 \\
&+L^2_{(F_0,0)}V_0(x, \widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_2\Big] \\
&+T\Big[L_{(f_0,0)}V_1(x, \widehat{\Theta}_2) + L_{(F_0,0)}V_1(x, \widehat{\Theta}_2)\widehat{\theta}_1 + L_{(g_1,0)}V_1(x, \widehat{\Theta}_2)u_0(x, \widehat{\Theta}_2)\Big] \\
&+\Phi_1[V_0, V_1](T, x, \widehat{\Theta}_2, u_0(x, \widehat{\Theta}_1))^T D_1(T)\widetilde{\Theta}_2^T + \mathcal{O}(T^2)
\end{aligned}$$

où : $\Phi_1 := [\Phi_{11}, \Phi_{21}]$ avec :

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} &:= L_{(F_0,0)}V_0(x, \widehat{\Theta}_1) + \frac{T}{2}\Bigg[2\left(\frac{\partial^2 V_0(x, \widehat{\Theta}_1)}{\partial y \partial x}\right)F_0(x)\ \psi_{1,1}(x, \widehat{\Theta}_1) \\
&+2L_{(F_0,0)}V_1(x, \widehat{\Theta}_2) + (L_{(F_0,0)}L_{(g_1,0)} + L_{(g_1,0)}L_{(F_0,0)})V_0(x, \widehat{\Theta}_1)\ u_0(x, \widehat{\Theta}_1) \\
&+(L_{(f_0,0)}L_{(F_0,0)} + L_{(F_0,0)}L_{(f_0,0)})V_0(x, \widehat{\Theta}_1)\Bigg] \\
&:= \phi_{1,1} + T\phi_{1,2} \\
\Phi_{21} &:= \frac{1}{2}L^2_{(F_0,0)}V_0(x, \widehat{\Theta}_1) := \phi_{2,1}
\end{aligned}$$

Considérons le système (7.1) bouclé par une commande adaptative continue :

$$\dot{x} = f_0(x) + F_0(x)\theta + g_1(x)u_c(x,\widehat{\theta})$$

où : $\dot{\widehat{\theta}}(t) = \frac{\partial V(x,\widehat{\theta})}{\partial x}F_0(x) := \psi_c(x,\widehat{\theta}), \quad \widehat{\theta}(0) \in \mathbb{R}$.
Nous supposons que u_c et ψ_c sont telles qu'il existe $c > 0$ ainsi que deux fonctions à valeurs réelles : $V_0(x,\widehat{\theta})$ définie positive vis à vis de x (quelque soit la valeur de $\widehat{\theta}$) et $W_0(x,\widehat{\theta}) := V_0(x,\widehat{\theta}) + \frac{1}{2}\widetilde{\theta}^2$ tels que :

$$\dot{W}_0 \leq -cV_0(x,\widehat{\theta})$$

Autrement dit, la commande adaptative continue est globalement asymptotiquement stabilisante.

Théorème 7.3.2 *(synthèse de la commande adaptative)*
Considérons le système (7.1) bouclé par une commande adaptative échantillonnée. Supposons qu'il existe r fonctions $V_i(x,\widehat{\Theta}_{i+1})$ différentiables $r+2-i$ fois pour $i \in \{1,\ldots,r\}$ ainsi qu'une loi de commande de la forme $u^r(x,\widehat{\Theta}_{r+1},T) = \sum_{j=0}^{r} T^j u_j(x,\widehat{\Theta}_{j+1})$ déterminée récursivement à partir de $u_0 = u_c(x,\widehat{\theta}_1)$ tels que :

1.
$$\sum_{s=0}^{r} T^s\Big(L_{g_1,0}V_0(x,\widehat{\theta}_1)u_s(x,\widehat{\Theta}_{s+1}) + P_s([U_{s-1}]^0,[\partial H_s]^0,[\Phi_s])(x,\widehat{\Theta}_{s+1})\Big)$$
$$+ \quad \frac{T}{2}\Phi_{r-1}^T D_{r-1}\Phi_{r-1} \leq -c\sum_{i=1}^{r} T^i V_i(x,\widehat{\Theta}_{i+1}) \tag{7.9}$$

2. *la fonction suivante est positive et définie vis à vis de x (ou au moins vis à vis d'une de ses composantes $(x_1,...,x_n)$) quelque soit $\widehat{\Theta}_{r+1}$:*
$$V^r(x,\widehat{\Theta}_{r+1}) := V_0(x,\widehat{\Theta}_1) + \sum_{i=1}^{r} T^i V_i(x,\widehat{\Theta}_{i+1}) \tag{7.10}$$

3. *la loi d'adaptation est elle aussi déterminée récursivement par :*
$$\begin{cases} (\widehat{\Theta}_{r+1}^T)^+ = \widehat{\Theta}_{r+1}^T \quad si \quad V^r(x,\widehat{\Theta}_{r+1}) \leq \mathcal{O}(T^{r+1}) \\ (\widehat{\Theta}_{r+1}^T)^+ = \widehat{\Theta}_{r+1}^T + T\Phi_r(T,[U_{r-1}]^0,[\partial H_r]^0,[\Phi_{r-1}])(x,\widehat{\Theta}_{r+1}) \quad sinon \end{cases} \tag{7.11}$$
avec $\Phi_0 = \psi_c$.

Alors il existe $\Delta_0 > 0$ et $\overline{T} > 0$ tels que si $\|x_0\| \leq \Delta_0$ et $T \leq \overline{T}$ alors $V^r(x,\widehat{\Theta}_{r+1})$ tend asymptotiquement vers $0 + \mathcal{O}(T^{r+1})$.

Remarques : l'hypothèse (7.9) est la généralisation au cas adaptatif de l'hypothèse

(4.18) assez forte que nous avions déjà rencontrée dans le cas non adaptatif des chapitres précédents. Dans le cas le plus simple, elle pourra être aisément vérifiée pour des systèmes monodimensionnels (pour lesquels il suffira d'ailleurs de considérer $V^r = V^0$ i.e $V_1 = \ldots = V_r = 0$ comme dans l'exemple 1 de ce chapitre) et elle ne sera vérifiée que pour certaines classes de systèmes de plus grandes dimensions comme la classe des systèmes strict-feedback à paramètres inconnus : l'usage des $V_{i\geq 1}$ est une anticipation du fait que pour ces systèmes la fonction de V^r dépendra de $\widehat{\Theta}_{r+1}$ et le fait que nous ayons écrit que la fonction V^r sera définie positive vis à vis de x ou de certaines composantes de x quelque soit $\widehat{\Theta}_{r+1}$ est à nouveau une anticipation de ce que nous avions observé dans le cas non adaptatif où seul $x_1 - x_1^c$ tend vers $\mathcal{O}(T^{r+1})$ (les $|\delta_i|$ tendant tous vers $\mathcal{O}(T^{r+1})$ mais pas forcément les $x_{i\geq 0}$ le difféomorphisme n'étant plus assuré). L'exemple 2 de ce chapitre est une introduction au cas d'étude des systèmes strict-feedback à un paramètre inconnu.

preuve : Tout d'abord, nous remarquons que si la loi d'adaptation est de la forme

$$(\widehat{\Theta}_{r+1}^T)^+ = \widehat{\Theta}_{r+1}^T + T\Phi_r(T, [U_{r-1}]^0, [\partial H_r]^0, [\Phi_{r-1}])(x, \widehat{\Theta}_{r+1})$$

où Φ_r est telle que tous les $\widehat{\theta}_0, \ldots, \widehat{\theta}_{r+1}$ vérifient (7.5) alors nous pouvons écrire :
$\forall k \in \{1, r\}$

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{\Theta}_{k+1}^+ D_k(T)(\widehat{\Theta}_{k+1}^+)^T - \widehat{\Theta}_{k+1} D_k(T) \widehat{\Theta}_{k+1}^T}{2T} &= -\Phi_k\big(T, x, \widehat{\Theta}_{k+1}, U_{k-1}(x, \widehat{\Theta}_r)\big)^T D_k(T) \widetilde{\Theta}_{k+1}^T \\
&\quad + \frac{T}{2} \Phi_k\big(T, x, \widehat{\Theta}_{k+1}, U_{k-1}(x, \widehat{\Theta}_k)\big)^T D_k(T) \\
&\quad \times \Phi_k\big(T, x, \widehat{\Theta}_{k+1}, U_{k-1}(x, \widehat{\Theta}_k)\big) \\
&= -\Phi_k\big(T, x, \widehat{\Theta}_{k+1}, U_{k-1}(x, \widehat{\Theta}_r)\big)^T D_k(T) \widetilde{\Theta}_{k+1}^T \\
&\quad + \frac{T}{2} \Phi_{k-1}\big(T, x, \widehat{\Theta}_k, U_{k-2}(x, \widehat{\Theta}_{k-1})\big)^T D_{k-1}(T) \\
&\quad \times \Phi_{k-1}\big(T, x, \widehat{\Theta}_k, U_{k-2}(x, \widehat{\Theta}_{k-1})\big) + \mathcal{O}(T^{k+1})
\end{aligned} \tag{7.12}$$

(où par convention $u_{-1} = 0$). Ainsi, les termes facteurs de $T^{j\geq k+1}$ (qui comprennent les termes en $\widehat{\Theta}_{r+1\geq j>k+1}$) rentrent dans $\mathcal{O}(T^{k+1})$.
Ensuite, nous procédons par étapes pour démontrer notre résultat :

Etape 0 :

Considérons :

$$W^0(x, \widehat{\Theta}_1) := V^0(x, \widehat{\Theta}_1) + \frac{1}{2} \widetilde{\Theta}_1 D_0(T) \widetilde{\Theta}_1$$

Utilisant la propriété que satisfait u_0 en continu et le fait que $\Phi_0 = \phi_{1,1} = \psi_c$, nous

montrons que l'utilisation de la proposition 7.3.1 donne lorsque $r = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V^0(x,\widehat{\Theta}_1)}{T} &= L_{g_1,0}V_0(x,\widehat{\theta}_1)u_0(x,\widehat{\Theta}_1) + P_0\big(\widehat{\Theta}_1,x\big)+\Phi_0\big(T,x,\widehat{\Theta}_1\big)^T D_0(T)\widetilde{\Theta}_1 + \mathcal{O}(T)\\ &\leq -cV_0(x,\widehat{\Theta}_1) + \Phi_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widetilde{\theta}_1 + \mathcal{O}(T)\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\Delta W^0}{T} \leq -cV_0(x,\widehat{\Theta}_1)\underbrace{+\Phi_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widetilde{\theta}_1 - \Phi_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widetilde{\theta}_1}_{=0} + \mathcal{O}(T)$$

Etape 1 :

Nous considérons :

$$W^1(x,\widehat{\Theta}_2) := V^1(x,\widehat{\Theta}_2) + \frac{1}{2}\widetilde{\Theta}_2 D_1(T)\widetilde{\Theta}_2^T$$

Utilisant la proposition 7.3.1, nous calculons :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V^1(x,\widehat{\Theta}_2)}{T} &= \sum_{s=0}^{1} T^s\Big(L_{g_1,0}V_0(x,\widehat{\theta}_1)u_s(x,\widehat{\Theta}_{s+1}) + P_s\big(\widehat{\Theta}_{s+1},x,U_{s-1}(x,\widehat{\Theta}_s)\big)\Big)\\ &\quad +\Phi_1\big(T,x,\widehat{\Theta}_2,u_0(x,\widehat{\Theta}_1)\big)^T D_1(T)\widetilde{\Theta}_2^T + \mathcal{O}(T^2)\end{aligned}$$

A ce stade, P_1 est exprimé formellement en fonction de $[u_0]^1$,$\Phi_{2,1} := (\phi_{1,1},\phi_{2,1})$ et de $\phi_{1,2}$ i.e de Φ_1 et n'est donc pas encore connu. Cependant, Φ_1 peut être entièrement déterminé car il s'exprime en fonction de $[u_0]^1$ et de $\Phi_0 = \phi_{1,1}$. Nous en déduisons Φ_1 ce qui nous donne $\phi_{1,2}$ et $\phi_{2,1}$ et ainsi P_1. Puis nous montrons que :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta W^1}{T} &\leq -cV_0(x,\widehat{\Theta}_1) + T\Big(L_{g_1,0}V_0(x,\widehat{\theta}_1)u_1(x,\widehat{\Theta}_2) + P_1\big(\widehat{\Theta}_2,x,u_0(x,\widehat{\Theta}_1)\big)\Big)\\ &\quad \underbrace{+\Phi_1\widetilde{\Theta}_2^T - \Phi_1\widetilde{\Theta}_2^T}_{=0} + \frac{T}{2}(\Phi_0(x,\widehat{\Theta}_1))^2 + \mathcal{O}(T^2)\\ &\leq -cV^1(x,\widehat{\Theta}_2) + \mathcal{O}(T^2) \qquad (7.13)\end{aligned}$$

La dernière inégalité (7.14) étant obtenue grâce à l'hypothèse (7.9) vérifiée pour r=1 et qui permet alors de déterminer u_1 :

$$L_{g_1,0}V_0(x,\widehat{\theta}_1)u_1(x,\widehat{\Theta}_2) + P_1\big(\widehat{\Theta}_s,x,u_0(x,\widehat{\Theta}_1)\big)+\frac{1}{2}(\Phi_0(x,\widehat{\Theta}_1))^2 \leq -cV_1(x,\widehat{\Theta}_2) + \mathcal{O}(T)$$

Etape $k \in \{2,\ldots,r\}$ **:**

Nous considérons :

$$W^k(x,\widehat{\Theta}_{k+1}) := V^k(x,\widehat{\Theta}_{k+1}) + \frac{1}{2}\widetilde{\Theta}_{k+1} D_k(T)\widetilde{\Theta}_{k+1}^T$$

Utilisant la proposition 7.3.1, nous calculons :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V^k(x,\widehat{\Theta}_{k+1})}{T} &= \sum_{s=0}^{k} T^s\Big(L_{g_1,0}V_0(x,\widehat{\theta}_1)u_s(x,\widehat{\Theta}_{s+1}) + P_s\big(\widehat{\Theta}_{s+1},x,U_{s-1}(x,\widehat{\Theta}_s)\big)\Big)\\ &\quad +\Phi_k\big(T,x,\widehat{\Theta}_{k+1},U_{k-1}(x,\widehat{\Theta}_k)\big)^T D_k(T)\widetilde{\Theta}_{k+1}^T + \mathcal{O}(T^{k+1})\end{aligned}$$

A ce stade, P_k est exprimé formellement en fonction de $[U_k]^0\backslash\{u_k\}$ et Φ_k qui n'est pas encore complètement connu. Cependant, Φ_k peut être entièrement déterminé car il s'exprime en fonction de $[U_k]^0\backslash\{u_k\}$ et de Φ_{k-1}. Nous en déduisons Φ_k ce qui nous donne ainsi P_k. Puis nous montrons que :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta W^k}{T} &= \frac{\Delta V^{k-1}}{T} + T^k\Big(L_{g_1,0}V_0(x,\widehat{\theta}_1)u_k(x,\widehat{\Theta}_{k+1}) + P_k(x,\widehat{\Theta}_{k+1})\Big)\\ &\quad \underbrace{+\Phi_k\widetilde{\Theta}_{k+1}^T - \Phi_k\widetilde{\Theta}_{k+1}^T}_{=0} + \frac{T}{2}\Phi_{k-1}^T D_{k-1}\Phi_{k-1} + \mathcal{O}(T^{k+1})\\ &\leq -cV^k(x,\widehat{\Theta}_1) + \mathcal{O}(T^{k+1}) \qquad (7.14)\end{aligned}$$

La dernière inégalité (7.14) étant obtenue grâce à l'hypothèse (7.9) vérifiée pour r=k et qui permet alors de déterminer u_k connaissant $u_0,\ldots,u_{k-1}$.

Conclusion : à la dernière étape où k=r, nous obtenons enfin :

$$\frac{W^r(x^+,(\widehat{\Theta}_{r+1})^+) - W^r(x,\widehat{\Theta}_{r+1})}{T} \leq -cV^r(x,\widehat{\Theta}_{r+1}) + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

ce qui prouve que :

$$\limsup_{k\longrightarrow+\infty} V^r(x(kT),(\widehat{\Theta}_{r+1})_k) = 0 + \mathcal{O}(T^{r+1})$$

De plus, Δ_0 est obtenu par des outils classiques [60]. .□

Exemple : pour $r = 1$ Nous avons :

$$V^1(x,\widehat{\Theta}_2) = V_0(x,\widehat{\Theta}_1) + TV_1(x,\widehat{\Theta}_2)$$

et :

$$W^1(x,\widehat{\Theta}_2) = V^1(x,\widehat{\Theta}_2) + \frac{1}{2}(\widetilde{\theta}_1)^2 + \frac{T}{2}(\widetilde{\theta}_2)^2$$

la loi d'adaptation est la suivante (lorsque x est suffisamment grand sinon la loi d'adaptation est constante) :

$$\begin{cases}\widehat{\theta}_1^+ = \widehat{\theta}_1 + T\phi_{1,1}(x,\widehat{\Theta}_1) + T^2\phi_{1,2}(x,\widehat{\Theta}_2)\\ \widehat{\theta}_2^+ = \widehat{\theta}_2 + T\phi_{2,1}(x,\widehat{\Theta}_1)\end{cases}$$

Après quelques calculs, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta W^1}{T} &= L_{(f_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1) + L_{(F_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 + L_{(g_1,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)u_0(x,\widehat{\Theta}_1) \\
&\quad + \frac{\partial V_0(x,\widehat{\Theta}_1)}{\partial\widehat{\theta}_1}(\phi_{1,1}(x,\widehat{\Theta}_1) + T\phi_{1,2}(x,\widehat{\Theta}_2)) + \frac{T}{2}\frac{\partial^2 V_0(x,\widehat{\Theta}_1)}{\partial(\widehat{\theta}_1)^2}(\phi_{1,1}(x,\widehat{\Theta}_1))^2 \\
&\quad + T\frac{\partial V_1(x,\widehat{\Theta}_2)}{\partial\widehat{\theta}_1}(\phi_{1,1}(x,\widehat{\Theta}_1)) + T\frac{\partial V_1(x,\widehat{\Theta}_2)}{\partial\widehat{\theta}_2}(\phi_{1,2}(x,\widehat{\Theta}_1)) \\
&\quad + T\Bigg[\left(\frac{\partial^2 V_0(x,\widehat{\Theta}_1)}{\partial y\partial x}\right)(f_0(x) + \widehat{\theta}_1 F_0(x) + g_1(x)u_0(x,\widehat{\Theta}_1)) \\
&\quad + \left(\frac{\partial V_0(x,\widehat{\Theta}_1)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_0(x,\widehat{\Theta}_1)}{\partial y}\right)g_1(x)\Bigg]\phi_{1,1}(x,\widehat{\Theta}_1) \\
&\quad + \frac{T}{2}\Big[2L_{(g_1,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)u_1(x,\widehat{\Theta}_2) + L^2_{(g_1,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)u_0^2(x,\widehat{\Theta}_1) \\
&\quad + L_{(f_0,0)}L_{(g_1,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)u_0(x,\widehat{\Theta}_1) + L_{(F_0,0)}L_{(g_1,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)u_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 \\
&\quad + L_{(g_1,0)}L_{(f_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)u_0(x,\widehat{\Theta}_1) + L_{(g_1,0)}L_{(F_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)u_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 \\
&\quad + L^2_{(f_0,0)}V(x,\widehat{\Theta}_1) + L_{(f_0,0)}L_{(F_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 + L_{(F_0,0)}L_{(f_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 \\
&\quad + L^2_{(F_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_2\Big] \\
&\quad + T\Big[L_{(f_0,0)}V_1(x,\widehat{\Theta}_2) + L_{(F_0,0)}V_1(x,\widehat{\Theta}_2)\widehat{\theta}_1 + L_{(g_1,0)}V_1(x,\widehat{\Theta}_2)u_0(x,\widehat{\Theta}_2)\Big] \\
&\quad + \Phi_1[V_0,V_1](T,x,\widehat{\Theta}_2,u_0(x,\widehat{\Theta}_1))^T D_1(T)\widetilde{\Theta}_2^T \\
&\quad - \phi_{1,1}(x,\widehat{\Theta}_1)\widetilde{\Theta}_1 - T\phi_{1,2}(x,\widehat{\Theta}_2)\widetilde{\Theta}_1 + \frac{T}{2}(\phi_{1,1}(x,\widehat{\Theta}_1))^2 \\
&\quad - T\phi_{2,1}(x,\widehat{\Theta}_1)\widetilde{\Theta}_2^T + \mathcal{O}(T^2)
\end{aligned}$$

où : $\Phi_1 := [\Phi_{11}, \Phi_{21}]$ avec :

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} &:= L_{(F_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1) + \frac{T}{2}\Bigg[2\left(\frac{\partial^2 V_0(x,\widehat{\Theta}_1)}{\partial y\partial x}\right)F_0(x)\ \phi_{1,1}(x,\widehat{\Theta}_1) \\
&\quad + 2L_{(F_0,0)}V_1(x,\widehat{\Theta}_2) + (L_{(F_0,0)}L_{(g_1,0)} + L_{(g_1,0)}L_{(F_0,0)})V_0(x,\widehat{\Theta}_1)\ u_0(x,\widehat{\Theta}_1) \\
&\quad + (L_{(f_0,0)}L_{(F_0,0)} + L_{(F_0,0)}L_{(f_0,0)})V_0(x,\widehat{\Theta}_1)\Bigg] \\
\Phi_{21} &:= \frac{1}{2}L^2_{(F_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)
\end{aligned}$$

Le choix de la loi d'adaptation qui a fixé : $\Phi_{11} = \phi_{1,1} + T\phi_{1,2}$ et $\Phi_{21} = \phi_{2,1}$ permet donc de supprimer tous les termes en $\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2$. De plus, la condition (7.9) équivaut ici à l'existence de

$u_1(x,\widehat{\Theta}_2)$ telle que :

$$\begin{aligned}
0 \;\geq\; & cV_1(x,\widehat{\Theta}_2) + L_{(g_1,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)u_1(x,\widehat{\Theta}_2) + \frac{\partial V_0(x,\widehat{\Theta}_1)}{\partial\widehat{\theta}_1}\psi_{1,2}(x,\widehat{\Theta}_2) \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_0(x,\widehat{\Theta}_1)}{\partial(\widehat{\theta}_1)^2}(\psi_{1,1}(x,\widehat{\Theta}_1))^2 + \frac{\partial V_1(x,\widehat{\Theta}_2)}{\partial\widehat{\theta}_1}(\psi_{1,1}(x,\widehat{\Theta}_1)) + \frac{\partial V_1(x,\widehat{\Theta}_2)}{\partial\widehat{\theta}_2}(\psi_{1,2}(x,\widehat{\Theta}_1)) \\
& + \Bigg[\left(\frac{\partial^2 V_0(x,\widehat{\Theta}_1)}{\partial y\partial x}\right)(f_0(x) + \widehat{\theta}_1 F_0(x) + g_1(x)u_0(x,\widehat{\Theta}_1)) \\
& + \left(\frac{\partial V_0(x,\widehat{\Theta}_1)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_0(x,\widehat{\Theta}_1)}{\partial y}\right)g_1(x)\Bigg]\phi_{1,1}(x,\widehat{\Theta}_1) \\
& + \frac{1}{2}\Big[L^2_{(g_1,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)u_0^2(x,\widehat{\Theta}_1) + L_{(f_0,0)}L_{(g_1,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)u_0(x,\widehat{\Theta}_1) \\
& + L_{(F_0,0)}L_{(g_1,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)u_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 + L_{(g_1,0)}L_{(f_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)u_0(x,\widehat{\Theta}_1) \\
& + L_{(g_1,0)}L_{(F_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)u_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 + L^2_{(f_0,0)}V(x,\widehat{\Theta}_1) + L_{(f_0,0)}L_{(F_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 \\
& + L_{(F_0,0)}L_{(f_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 + L^2_{(F_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_2\Big] + L_{(f_0,0)}V_1(x,\widehat{\Theta}_2) \\
& + L_{(F_0,0)}V_1(x,\widehat{\Theta}_2)\widehat{\theta}_1 + L_{(g_1,0)}V_1(x,\widehat{\Theta}_2)u_0(x,\widehat{\Theta}_2) + \frac{1}{2}(\phi_{1,1}(x,\widehat{\Theta}_1))^2
\end{aligned}$$

Et finalement, vu que par hypothèse la commande continue vérifie :

$$\begin{aligned}
\dot{W} \;=\; & L_{(f_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1) + L_{(F_0,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)\widehat{\theta}_1 + L_{(g_1,0)}V_0(x,\widehat{\Theta}_1)u_0(x,\widehat{\Theta}_1) \\
& + \frac{\partial V_0(x,\widehat{\Theta}_1)}{\partial\widehat{\theta}_1}(\phi_{1,1}(x,\widehat{\Theta}_1) \\
=\; & -cV_0(x,\widehat{\theta}_1)
\end{aligned}$$

nous obtenons bien :

$$\frac{\Delta W^1}{T} \leq -cV^1(x,\widehat{\Theta}_2) + \mathcal{O}(T^2)$$

d'où :

$$\limsup_{k\longrightarrow+\infty} V^1(x(kT),(\widehat{\Theta}_2)_k) = \mathcal{O}(T^2)$$

7.4 Exemples et résultats numériques

7.4.1 Exemple 1

Nous considérons le système suivant où θ est un paramètre inconnu et où la commande est échantillonnée i.e $u := u_k$:

$$\dot{x} = x^2\theta + u_k$$

En continu, nous choisirions la fonction de Lyapunov candidate suivante

$$W^0 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\theta - \widehat{\theta})^2$$

qui nous permettrait alors de synthétiser la loi de commande suivante :

$$u_0(x, \widehat{\theta}) = -cx - \widehat{\theta}x^2$$

où $c > 0$ et avec pour loi d'adaptation :

$$\dot{\widehat{\theta}} = x^3$$

En effet, nous aurions alors :

$$\dot{W}^0 = x(x^2\theta + u_0) - \dot{\widehat{\theta}}(\theta - \widehat{\theta}) = -cx^2$$

Nous notons : $\widetilde{\Theta}_2 = [\theta - \widehat{\theta}_1; \theta^2 - \widehat{\theta}_2]^T$.
Si maintenant nous considérons le même système commandé par une commande échantillonnée à la fréquence $1/T$ avec $1 > T > 0$, en appliquant notre théorème 7.3.2, nous obtenons alors :

- pour $r = 0$, $u^0 = u_0(x, \widehat{\theta}_1)$ avec pour loi d'adaptation (lorsque x est suffisamment grand sinon la loi d'adaptation est constante) :

  $$\widehat{\theta}_1^+ = \widehat{\theta}_1 + Tx^3$$

  Nous obtenons :

  $$\frac{W_T^0(x^+) - W_T^0(x)}{T} = -cx^2 + \mathcal{O}(T)$$

  ce qui prouve que : $\limsup_{k \longrightarrow +\infty} |x(k)| = \mathcal{O}(\sqrt{T})$
- pour $r = 1$, $u^1 = u_0(x, \widehat{\theta}_1) + Tu_1(x, \widehat{\Theta}_2)$ et la loi d'adaptation est la suivante (lorsque x est suffisamment grand sinon la loi d'adaptation est constante) :

  $$\begin{cases} \widehat{\theta}_1^+ = \widehat{\theta}_1 + Tx^3 + T^2\phi_{1,2} \\ \widehat{\theta}_2^+ = \widehat{\theta}_2 + T\phi_{2,1} \end{cases}$$

Considérant : $W_T^1 := W^0 + \frac{T}{2}(\theta_2 - \widehat{\theta}_2)^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{W_T^1(x^+) - W_T^1(x)}{T} &= xu_0 + x^3\widehat{\theta}_1 + \frac{T}{2}(2xu_1 + u_0^2 + 4x^2u_0\widehat{\theta}_1 + 3x^4\widehat{\theta}_2) \\ &\quad +(x^3 + 2Tx^2u_0)\widetilde{\theta}_1 + \frac{3T}{2}x^4\widetilde{\theta}_2 - (x^3 + T\phi_{1,2})\widetilde{\theta}_1 \\ &\quad -T\phi_{2,1}\widetilde{\theta}_2 + \frac{T}{2}x^6 + \mathcal{O}(T^2)\end{aligned}$$

Appliquant notre théorème 7.3.2, nous choisissons ainsi la loi d'adaptation suivante (lorsque x est suffisamment grand sinon la loi d'adaptation est constante) : :

$$\begin{cases} \widehat{\theta}_1^+ = \widehat{\theta}_1 + Tx^3 + 2T^2x^2u_0 \\ \widehat{\theta}_2^+ = \widehat{\theta}_2 + \frac{3T}{2}x^4 \end{cases}$$

ainsi que u_1 tel que :

$$\begin{aligned}u_1(x, \widehat{\Theta}_2) = &\quad -\tfrac{1}{2x}\left(u_0^2(x, \widehat{\theta}_1) + 4x^2\widehat{\theta}_1u_0(x, \widehat{\theta}_1) + 3x^4\widehat{\theta}_2 + x^6\right) \\ = &\quad \tfrac{1}{2}\left(u_0(x, \widehat{\theta}_1) - 3x\widehat{\theta}_1u_0(x, \widehat{\theta}_1) - 3x^3\widehat{\theta}_2 - x^5\right)\end{aligned}$$

mais pour être certain que l'ordre améliore la convergence nous robustifions le contrôleur ainsi afin de mieux montrer l'apport de l'ordre lors de simulations numériques :

$$u_1(x, \widehat{\Theta}_2) = -\frac{1}{2}Sign(x)\left|u_0(x, \widehat{\theta}_1) - 3x\widehat{\theta}_1u_0(x, \widehat{\theta}_1) - 3x^3\widehat{\theta}_2 - x^5\right|$$

De façon à obtenir finalement :

$$\frac{W_T^1(x^+) - W_T^1(x)}{T} = -cx^2 + \mathcal{O}(T^2)$$

ce qui prouve que : $\limsup_{k \longrightarrow +\infty} |x(k)| = \mathcal{O}(T)$

Résultats numériques : (courbes 9.33-9.37)

Cet exemple a été simulé dans le dernier chapitre pour les données suivantes : $\widehat{\theta}_1(0) = 0.5, \widehat{\theta}_2(0) = 0.25, \theta = 0.6, c = 1, T = 0.5$.

Pour différentes conditions initiales, nous avons tracé la solution du système dynamique bouclé :

- en continu, lorsque la commande est continue $u := u_c$
- en pointillés, lorsque le système est commandé par la commande échantillonnée d'ordre 0, $u_k := u^0$
- en croix, lorsque le système est commandé par la commande échantillonnée d'ordre 1, $u_k := u^1$

Les résultats confirment la théorie mise en oeuvre dans ce chapitre : la commande d'ordre 1 est 'meilleure' que la commande d'ordre 0, au sens défini dans les chapitres précédents et elle reproduit davantage le comportement de la commande continue.

7.4.2 Exemple 2

Nous considérons le système suivant où θ est un paramètre inconnu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2\theta \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

Lorsque la commande est continue, nous utilisons l'algorithme de Backstepping à base de fonctions de lissages ("tuning function based Backstepping design" [64]) qui permet de faire du backstepping adaptatif sans avoir recours à une sur-paramétrisation. Cet algorithme consiste notamment à ne chercher à annuler le terme résiduel de la fonction de lyapunov en $\widetilde{\theta} := \theta - \widehat{\theta}$ qu'à la dernière étape de l'algorithme.

Commande continue :

Etape 1 :

$$W_1 := \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}\widetilde{\theta}^{\,2}$$

Après quelques calculs, nous obtenons :

$$\dot{W}_1 = -x_1^2 + x_1 z_2 + \widetilde{\theta}\left(x_1^3 + \dot{\widetilde{\theta}}\right)$$

où $z_2 := x_2 - \overline{x}_2(\widehat{\theta}) = x_2 + x_1 + x_1^2\ \widehat{\theta}$

Etape 2 :

$$W_2 := \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}\widetilde{\theta}^{\,2}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{W}_2 &= -x_1^2 + x_1 z_2 + z_2(u + (1 + 2x_1\widehat{\theta})(x_2 + x_1^2\theta) + x_1^2\dot{\widehat{\theta}}) + \widetilde{\theta}\left(x_1^3 + \dot{\widetilde{\theta}}\right) \\ &= -x_1^2 + x_1 z_2 + z_2(u + (1 + 2x_1\widehat{\theta})(x_2 + x_1^2\widehat{\theta}) + x_1^2\dot{\widehat{\theta}}) + \widetilde{\theta}\left(x_1^3 + z_2(x_1^2 + 2x_1^3\widehat{\theta}) + \dot{\widetilde{\theta}}\right) \end{aligned}$$

En choisissant :

$$\begin{cases} u = -z_2 - x_1 - (1 + 2x_1\widehat{\theta})(x_2 + x_1^2\widehat{\theta}) - x_1^2\dot{\widehat{\theta}} \\ \dot{\widehat{\theta}} = x_1^3 + z_2(x_1^2 + 2x_1^3\widehat{\theta}) \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$\dot{W}_2 = -x_1^2 - z_2^2$$

Nous en déduisons que x_1, z_2(et ainsi x_2) tendent globalement asymptotiquement vers 0.

Synthèse de la commande échantillonnée : si la commande est émulée, en utilisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = -z_2 - x_1 - (1 + 2x_1\widehat{\theta}_1)(x_2 + x_1^2\widehat{\theta}_1) - x_1^2(x_1^3 + z_2(x_1^2 + 2x_1^3\widehat{\theta}_1)) \\ \widehat{\theta}_1^+ = \widehat{\theta}_1 + T(x_1^3 + z_2x_1^2 + 2z_2x_1^3\widehat{\theta}_1) \end{array} \right.$$

avec : $z_2 = x_2 + x_1 + x_1^2\ \widehat{\theta}_1$ et $W_2 := \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}\widetilde{\theta}_1{}^2$, nous obtenons :

$$\frac{\Delta W_2}{T} := -x_1^2 - z_2^2 + \mathcal{O}(T)$$

Si maintenant , nous utilisons une commande d'ordre 1, nous obtenons :

Etape 1 :

$$W_1^2(T) = W_1 + \frac{T}{2}\widetilde{\theta}_2^2$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\Delta W_1^2}{T} & := & x_1(x_2 + x_1^2\theta) + \dfrac{T}{2}((x_2 + x_1^2\theta)^2 + x_1u_0 + 2x_1^2x_2\theta + 2x_1^4\theta^2) \\ & & + \dfrac{(\widetilde{\theta}_1^+)^2 - (\widetilde{\theta}_1)^2}{2T} + \dfrac{(\widetilde{\theta}_2^+)^2 - (\widetilde{\theta}_2)^2}{2} + \mathcal{O}(T^2) \\ & = & x_1x_2 + x_1^3\widehat{\theta}_1 + \dfrac{T}{2}(x_2^2 + 4x_1^2x_2\widehat{\theta}_1 + 3x_1^4\widehat{\theta}_2 + x_1u_0) \\ & & + \dfrac{(\widetilde{\theta}_1^+)^2 - (\widetilde{\theta}_1)^2}{2T} + \dfrac{(\widetilde{\theta}_2^+)^2 - (\widetilde{\theta}_2)^2}{2} + (x_1^3 + 2Tx_1^2x_2)\widetilde{\theta}_1 + \dfrac{3T}{2}x_1^4\widetilde{\theta}_2 + \mathcal{O}(T^2) \end{array}$$

Nous utilisons la loi d'adaptation suivante (lorsque x_1 et x_2 sont suffisamment grands sinon la loi d'adaptation est constante) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\theta}_1^+ = \widehat{\theta}_1 + T(x_1^3 + z_{2,0}x_1^2 + 2z_{2,0}x_1^3\widehat{\theta}_1) + T^2\phi_{1,2} \\ \widehat{\theta}_2^+ = \widehat{\theta}_2 + T\phi_{2,1} \end{array} \right.$$

où : $z_{2,0} := x_2 + x_1 + x_1^2\widehat{\theta}_1$. Ceci donne :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\Delta W_1^2}{T} & = & x_1x_2 + x_1^3\widehat{\theta}_1 + \dfrac{T}{2}(x_2^2 + 4x_1^2x_2\widehat{\theta}_1 + 3x_1^4\widehat{\theta}_2 + x_1u_0) \\ & & + \dfrac{T}{2}x_1^4(x_1 + z_{2,0} + 2z_{2,0}x_1\widehat{\theta}_1)^2 - \left(z_{2,0}x_1^2 + 2z_{2,0}x_1^3\widehat{\theta}_1 - 2Tx_1^2x_2 + \dfrac{T}{2}\phi_{1,2}\right)\widetilde{\theta}_1 \\ & & - T\left(\phi_{2,1} - \dfrac{3}{2}x_1^4\right)\widetilde{\theta}_2 + \mathcal{O}(T^2) \end{array}$$

Inspirés par le premier algorithme que nous avons obtenu dans un chapitre antérieur pour la classe des systèmes strict-feedback, nous posons alors :

$$\begin{aligned} z_2 &:= z_{2,0} + Tx_1 + \frac{T}{2}\Big(- x_1^3(\widehat{\theta}_1)^2 + 2x_1x_2\widehat{\theta}_1 + 3x_1^3\widehat{\theta}_2 + u_0\Big) \\ &\quad + \frac{T}{2}x_1^3(x_1 + z_{2,0} + 2z_{2,0}x_1\widehat{\theta}_1)^2 - \frac{T}{2}x_1(x_1 + 2x_1^2\widehat{\theta}_1)^2(\widehat{\theta}_2 - (\widehat{\theta}_1)^2) \end{aligned}$$

et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W_1^2}{T} &:= \left(-(1+T) + \frac{T}{2}(1+T)^2\right)x_1^2 + \left((1-T)x_1 + \frac{T}{2}z_2\right)z_2 \\ &\quad - \left(z_{2,0}x_1^2 + 2z_{2,0}x_1^3\widehat{\theta}_1 - 2Tx_1^2x_2 + \frac{T}{2}\phi_{1,2}\right)\widetilde{\theta}_1 - T\left(\phi_{2,1} - \frac{3}{2}x_1^4\right)\widetilde{\theta}_2 \\ &\quad - \frac{T}{2}(x_1^2 + 2x_1^3\widehat{\theta}_1)^2(\widehat{\theta}_2 - (\widehat{\theta}_1)^2) + \mathcal{O}(T^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^+ &= (1 - T + T^2)x_1 + Tz_2 + T(x_1^2\widetilde{\theta}_1) + \frac{T^2}{2}(u_0 + 2x_1^3\theta + 2x_1x_2\theta) \\ &\quad - \frac{T^2}{2}\Big(- x_1^3(\widehat{\theta}_1)^2 + 2x_1x_2\widehat{\theta}_1 + 3x_1^3\widehat{\theta}_2 + u_0\Big) \\ &\quad - \frac{T^2}{2}x_1^3(x_1 + z_{2,0} + 2z_{2,0}x_1\widehat{\theta}_1)^2 + \frac{T^2}{2}x_1(x_1 + 2x_1^2\widehat{\theta}_1)^2(\widehat{\theta}_2 - (\widehat{\theta}_1)^2) + \mathcal{O}(T^3) \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant u_0 par sa valeur et en remarquant aussi que $(\widetilde{\theta}_1)^2 := (\theta - \widehat{\theta}_1)^2 = \widetilde{\theta}_2 + \widehat{\theta}_2 - (\widehat{\theta}_1)^2 - 2\widehat{\theta}_1\widetilde{\theta}_1$, nous pourrons choisir u_1 de façon à obtenir une expression de la forme suivante pour z_2^+ :

$$z_2^+ = (1-T+T^2)z_2 - T(1-T)x_1 - T(x_1^2 + 2x_1^3\widehat{\theta}_1)\widetilde{\theta}_1 + T^2\gamma_1(X_2, \widehat{\Theta}_2)\widetilde{\theta}_1 + T^2\gamma_2(X_2, \widehat{\Theta}_1)\widetilde{\theta}_2 + \mathcal{O}(T^3)$$

Etape 2 :
Nous considérons alors : $V_2^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2(X_2, \widehat{\Theta}_2)$ et $W_2^2 = W_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W_2^2}{T} &:= -x_1^2 - z_2^2 - \frac{T}{2}(x_1^2 + 2x_1^3\widehat{\theta}_1)^2(\widehat{\theta}_2 - (\widehat{\theta}_1)^2) \\ &\quad + Tz_2\gamma_1(X_2, \widehat{\Theta}_2)\widetilde{\theta}_1 + Tz_2\gamma_2(X_2, \widehat{\Theta}_1)\widetilde{\theta}_2 + \frac{T}{2}(x_1^2 + 2x_1^3\widehat{\theta}_1)^2(\widetilde{\theta}_1)^2 \\ &\quad + T\left(2x_1^2x_2 - \frac{1}{2}\phi_{1,2}\right)\widetilde{\theta}_1 + T\left(\frac{3}{2}x_1^4 - \phi_{2,1}\right)\widetilde{\theta}_2 + \mathcal{O}(T^2) \\ &:= -x_1^2 - z_2^2 + Tz_2\gamma_1(X_2, \widehat{\Theta}_2)\widetilde{\theta}_1 + Tz_2\gamma_2(X_2, \widehat{\Theta}_2)\widetilde{\theta}_2 \\ &\quad + T\left(2x_1^2x_2 - \widehat{\theta}_1(x_1^2 + 2x_1^3\widehat{\theta}_1)^2 - \frac{1}{2}\phi_{1,2}\right)\widetilde{\theta}_1 + T\Big(\frac{3}{2}x_1^4 + \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1^3\widehat{\theta}_1)^2 \\ &\quad - \phi_{2,1}\Big)\widetilde{\theta}_2 + \mathcal{O}(T^2) \end{aligned}$$

En choisissant :

$$\begin{cases} \phi_{1,2}(x,\widehat{\Theta}_2) = 2z_{2,0}\gamma_1(x,\widehat{\Theta}_2) + 4x_1^2x_2 - 2\widehat{\theta}_1(x_1^2 + 2x_1^3\widehat{\theta}_1)^2 \\ \phi_{2,1}(x,\widehat{\Theta}_1) = z_{2,0}\gamma_2(x,\widehat{\Theta}_1) + \frac{3}{2}x_1^4 + \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1^3\widehat{\theta}_1)^2 \end{cases}$$

Nous obtenons finalement,

$$\frac{\Delta W_2^2}{T} = -x_1^2 - z_2^2 + \mathcal{O}(T^2) = -2V_2^2(x,\widehat{\Theta}_2) + \mathcal{O}(T^2)$$

Ainsi, $|x_1|$ et $|z_2|$ tendent vers $0 + \mathcal{O}(T^{r+1})$.

NB : Expression plus explicite de la commande adaptative

Dans cet exemple, nous n'avons pas donné explicitement les expressions u_1,$\phi_{1,2}$ et $\phi_{2,1}$. En effet, les calculs sont très lourds et nous avons alors recours à un calculateur formel type Maple ; nous obtenons :

$$\begin{aligned} \phi_{1,2} \quad &:= 10x_2x_1^6(\widehat{\theta}_1)^4 + 8x_1^5\widehat{\theta}_1x_2^3 + \frac{93}{2}x_2^2x_1^6\widehat{\theta}_1 + 42x_1^8x_2^2(\widehat{\theta}_1)^3 + 54x_2x_1^{10}(\widehat{\theta}_1)^4 - x_2x_1^3\widehat{\theta}_1 \\ &+4x_1^5\widehat{\theta}_2 - 5x_1^6\widehat{\theta}_1\widehat{\theta}_2 - 14x_1^8(\widehat{\theta}_1)^3\widehat{\theta}_2 + 10x_1^6x_2^3(\widehat{\theta}_1)^2 + 3x_2x_1^4\widehat{\theta}_2 - 24x_1^7(\widehat{\theta}_1)^2\widehat{\theta}_2 \\ &+x_2x_1^4\widehat{\theta}_1^2 + 8x_2x_1^5\widehat{\theta}_1^3 + 72x_1^7x_2^2(\widehat{\theta}_1)^2 + 4x_1^2x_2^2\widehat{\theta}_1 - 2x_1^3 + 84x_2x_1^7\widehat{\theta}_1 + \frac{317}{2}x_2x_1^8(\widehat{\theta}_1)^2 \\ &+144x_2x_1^9(\widehat{\theta}_1)^3 + \frac{97}{2}x_1^8\widehat{\theta}_1 + 80x_1^{11}(\widehat{\theta}_1)^4 + \frac{37}{2}x_2x_1^6 + 106x_1^9(\widehat{\theta}_1)^2 + \frac{251}{2}x_1^{10}(\widehat{\theta}_1)^3 \\ &-9x_1^4\widehat{\theta}_1 + 10x_2^2x_1^5 - 14x_1^5(\widehat{\theta}_1)^2 + 24x_1^7(\widehat{\theta}_1)^4 + 22x_1^{12}(\widehat{\theta}_1)^5 + 14x_1^8(\widehat{\theta}_1)^5 \\ &-10x_2x_1^6(\widehat{\theta}_1)^2\widehat{\theta}_2 - 8x_2x_1^5\widehat{\theta}_1\widehat{\theta}_2 + \frac{3}{2}x_1^4x_2^3 + x_1x_2^2 + x_2x_1^2 + x_1^6(\widehat{\theta}_1)^3 + 10x_1^7 \end{aligned}$$

$$\phi_{2,1} := 6x_1^5\widehat{\theta}_1 + 5x_1^6(\widehat{\theta}_1)^2 + 3x_1^4x_2\widehat{\theta}_1 + x_1^3x_2 + 3x_1^4$$

$$\begin{aligned} u_1 \quad &:= -59x_2^2x_1^4\widehat{\theta}_1 - 240x_1^9x_2^2(\widehat{\theta}_1)^2 + 16(\widehat{\theta}_1)^2x_1^5\widehat{\theta}_2 - 32x_1^7\widehat{\theta}_1x_2^3 - 91x_2x_1^6(\widehat{\theta}_1)^2 \\ &-132x_1^{10}x_2^2(\widehat{\theta}_1)^3 - 16x_2x_1^3(\widehat{\theta}_1)^3 - 112x_2x_1^8(\widehat{\theta}_1)^4 - 432x_1^{11}x_2(\widehat{\theta}_1)^3 - 80x_1^5x_2^2(\widehat{\theta}_1)^2 \\ &+2x_1^2(\widehat{\theta}_1)^2x_2 - 2x_2x_1^7\widehat{\theta}_1 - 20x_1^4x_2^3(\widehat{\theta}_1)^2 + 80x_1^9(\widehat{\theta}_1)^2\widehat{\theta}_2 - 20x_2x_1^4(\widehat{\theta}_1)^4 + 44x_1^{10}(\widehat{\theta}_1)^3\widehat{\theta}_2 \\ &-6x_2x_1^2\widehat{\theta}_2 - 165x_1^8x_2^2\widehat{\theta}_1 - 16x_1^3\widehat{\theta}_1x_2^3 + 16x_2x_1^8(\widehat{\theta}_1)^2 - 276x_1^9x_2\widehat{\theta}_1 + 12x_2x_1^9(\widehat{\theta}_1)^3 \\ &-2x_2x_1^6\widehat{\theta}_2 - 168x_2x_1^7(\widehat{\theta}_1)^3 + 20(\widehat{\theta}_1)^3x_1^6\widehat{\theta}_2 - 36x_1^8x_2^3(\widehat{\theta}_1)^2 + 38x_1^8\widehat{\theta}_1\widehat{\theta}_2 - 60x_1^6x_2^2(\widehat{\theta}_1)^3 \\ &-12\widehat{\theta}_1x_1^4\widehat{\theta}_2 - 22x_2x_1^5\widehat{\theta}_1 - 497x_1^{10}x_2(\widehat{\theta}_1)^2 - 156x_1^12x_2(\widehat{\theta}_1)^4 + 4x_1x_2\widehat{\theta}_1 + 20x_1^{11}(\widehat{\theta}_1)^4 \\ &-168x_1^9(\widehat{\theta}_1)^4 + 16x_2x_1^3\widehat{\theta}_1\widehat{\theta}_2 + 32x_2x_1^7\widehat{\theta}_1\widehat{\theta}_2 + 20x_2x_1^4(\widehat{\theta}_1)^2\widehat{\theta}_2 + 36x_2x_1^8(\widehat{\theta}_1)^2\widehat{\theta}_2 \\ &+2x_1^2\widehat{\theta}_1 - 2x_1^3\widehat{\theta}_2 - 2x_2x_1^6 - 80x_1^{10}(\widehat{\theta}_1)^5 - 7x_1^6x_2^3 - 224x_1^{13}(\widehat{\theta}_1)^4 - 60x_1^{14}(\widehat{\theta}_1)^5 \\ &-38x_1^7x_2^2 - 63x_1^8x_2 - 318x_1^{11}(\widehat{\theta}_1)^2 - 16(\widehat{\theta}_1)^4x_1^5 - 20(\widehat{\theta}_1)^5x_1^6 - 9x_2x_1^4 + 6x_1^3(\widehat{\theta}_1)^2 \\ &-14x_2^2x_1^3 + 45x_1^6\widehat{\theta}_1 + 20x_1^7(\widehat{\theta}_1)^2 - 99x_1^8(\widehat{\theta}_1)^3 - 151x_1^{10}\widehat{\theta}_1 - 363x_1^{12}(\widehat{\theta}_1)^3 + 26x_1^9(\widehat{\theta}_1)^2 \\ &+44x_1^10(\widehat{\theta}_1)^3 + 10x_1^4(\widehat{\theta}_1)^3 - 3x_1^2x_2^3 - 2\widehat{\theta}_1x_2^2 - 32x_1^9 - 2x_1 - 2x_2 + 12x_1^5 - 6x_1^7 \end{aligned}$$

Résultats numériques : (courbes 9.38-9.41)
Cet exemple a été simulé dans le dernier chapitre pour les données suivantes : $\widehat{\theta}_1(0) = 0.4, \widehat{\theta}_2(0) = 0.16, \theta = 0.3, T = 0.05$.
Pour différentes conditions initiales, nous avons tracé la solution du système dynamique bouclé :

- en noir, lorsque la commande est continue $u := u_c$
- en pointillés bleus lorsque le système est commandé par la commande échantillonnée d'ordre 0, $u_k := u^0$
- en croix rouges lorsque le système est commandé par la commande échantillonnée d'ordre 1, $u_k := u^1$

Les résultats confirment la théorie mise en oeuvre dans ce chapitre : la commande d'ordre 1 est 'meilleure' que la commande d'ordre 0, au sens défini dans les chapitres précédents et elle reproduit davantage le comportement de la commande continue.

7.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle méthode de synthèse de commande adaptative pour des systèmes non linéaires à commande échantillonnée. La méthode utilisée est basée sur les outils introduits par les chapitres précédents et sur une sur-paramétrisation qui permet de pallier au changement de structure du système occasionné par les approximations d'ordre supérieur du discrétisé exact.
L'hypothèse (7.9) de notre théorème est particulièrement forte et peut être satisfaite pour certaines classes de systèmes non linéaires comme par exemple les systèmes sous la forme strict-feedback. L'exemple 2 illustre bien ce point mais l'étude plus détaillée de ces systèmes fera l'objet de travaux futurs. A noter que l'élimination de la sur-paramétrisation pourrait aussi être étudiée dans le cadre de ces futurs travaux.

Chapitre 8

Conclusion générale et perspectives

En conclusion, nous donnons une synthèse des principales contributions de la thèse, puis nous présentons les perspectives immédiates de la thèse à plus ou moins long terme et enfin nous présentons les problèmes connexes à cette thèse qui sont encore ouverts et qui à notre avis méritent d'être étudier.

8.1 Synthèse du travail réalisé

Ce travail de thèse présente des contributions dans plusieurs domaines et donne notamment :

- un nouveau résultat utilisant le formalisme des systèmes hybrides afin de traiter le problème stabilisation globale d'un système non linéaire par une commande dynamique implémentée numériquement.
- une nouvelle méthodologie pour améliorer les performances d'une commande échantillonnée lorsque l'ordre de l'approximation de Taylor-Lie augmente.
- de nouvelles méthodes de synthèse de commande échantillonnée lorsque le système est sous une forme strict-feedback.
- un nouvel algorithme de synthèse de commande échantillonnée lorsque le système est sous une forme strict-feedforward.
- une extension de résultats existants sur la synthèse de commande adaptative pour des systèmes non linéaires à commande échantillonnée.

8.2 Perspectives immédiates

Parmi les perspectives immédiates de la thèse, nous pouvons envisager dans nos prochains travaux de :

- généraliser les outils du premier chapitre à d'autres types de schéma de discrétisation de la commande dynamique et aussi de généraliser nos résultats au retour dynamique

de sortie.
- développer des outils formels pour implémenter nos nouveaux algorithmes et réaliser davantage d'applications pour montrer l'impact de l'ordre de la commande sur les résultats.
- utiliser les toutes nouvelles méthodes algébriques de [81] pour développer le discrétisé exact en séries de la période d'échantillonnage.
- écrire le théorème de synthèse de commande adaptative pour les systèmes non linéaires à paramètres inconnus sous la forme strict-feedback.

8.3 Problèmes ouverts et thèmes de recherches futures

Plusieurs problèmes abordés de près ou de loin dans le cadre de cette thèse pourraient être à l'origine de bon nombre de travaux de recherche :

- le problème de l'élimination de la sur-paramétrisation dans la synthèse de la commande adaptative de systèmes non linéaires à commande échantillonnée.
- le problème de commande échantillonnée par retour de sortie basé sur les approximations d'ordres supérieurs du discrétisé exact. En effet, le problème de commande par retour de sortie de systèmes à commande échantillonnée a fait l'objet de quelques travaux (citons par exemple [6, 8, 31, 61, 62]) mais aucune méthode n'utilise à ce jour les approximations d'ordre supérieur.
- le problème de la commande robuste des systèmes à commande échantillonnée demande à notre avis bien des développements et est donc largement ouvert.

Chapitre 9

Résultats numériques

9.1 Echantillonnage d'un retour dynamique de l'état : exemple 1

$(x(0), u_0) = (-2, 2)$

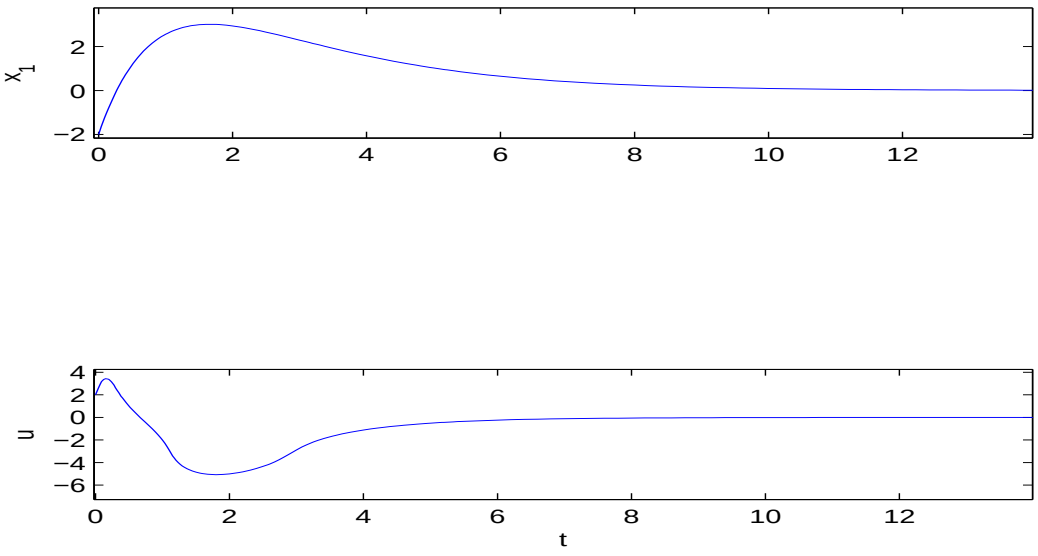


FIGURE 9.1 – commande continue

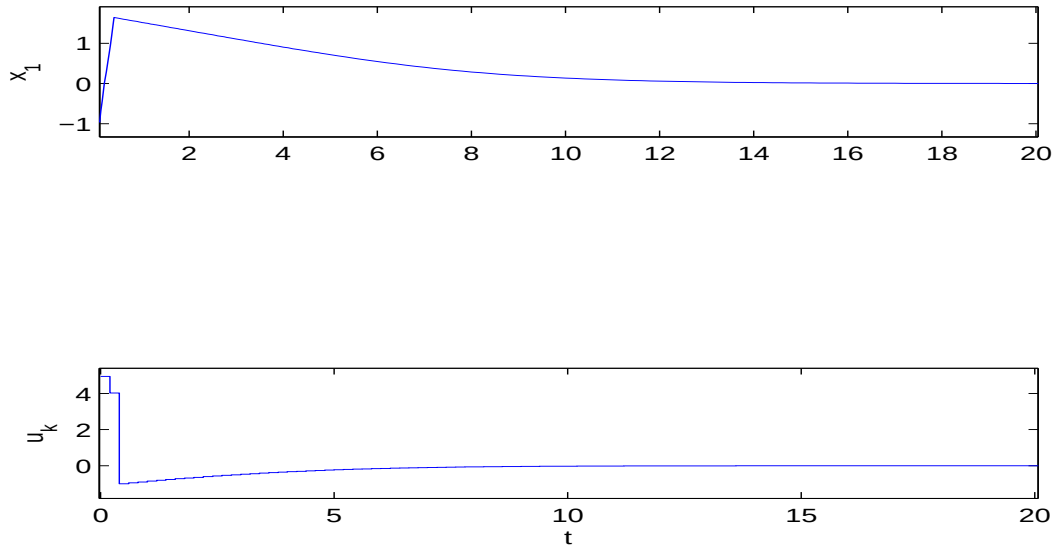


FIGURE 9.2 – $\tau = 0.2$

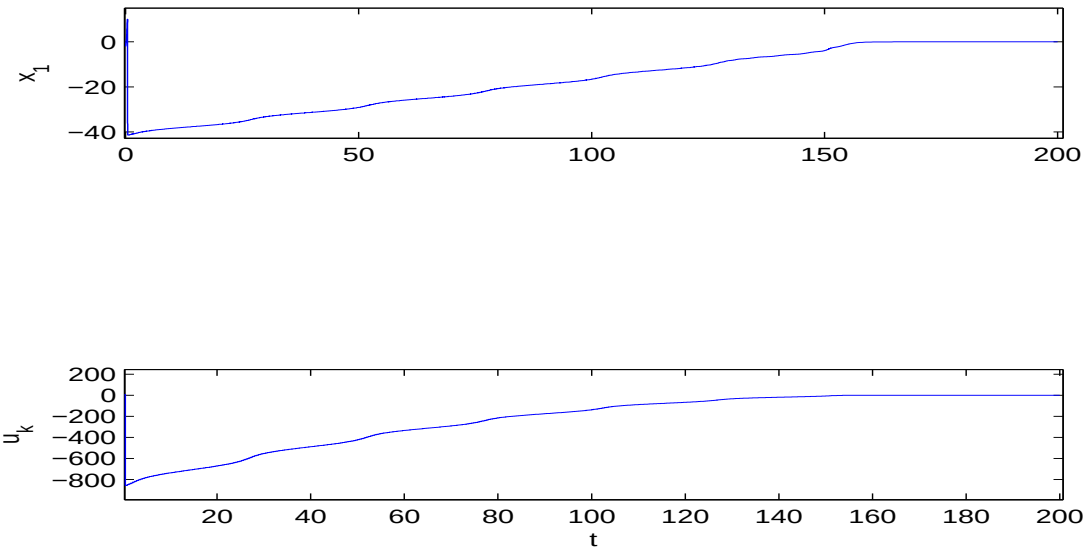


FIGURE 9.3 – $\tau = 0.4$

9.2 Echantillonnage d'un retour dynamique de l'état : exemple 2

$x_1(0) = 0.4, x_2(0) = 0.4, u_0 = 0.4$

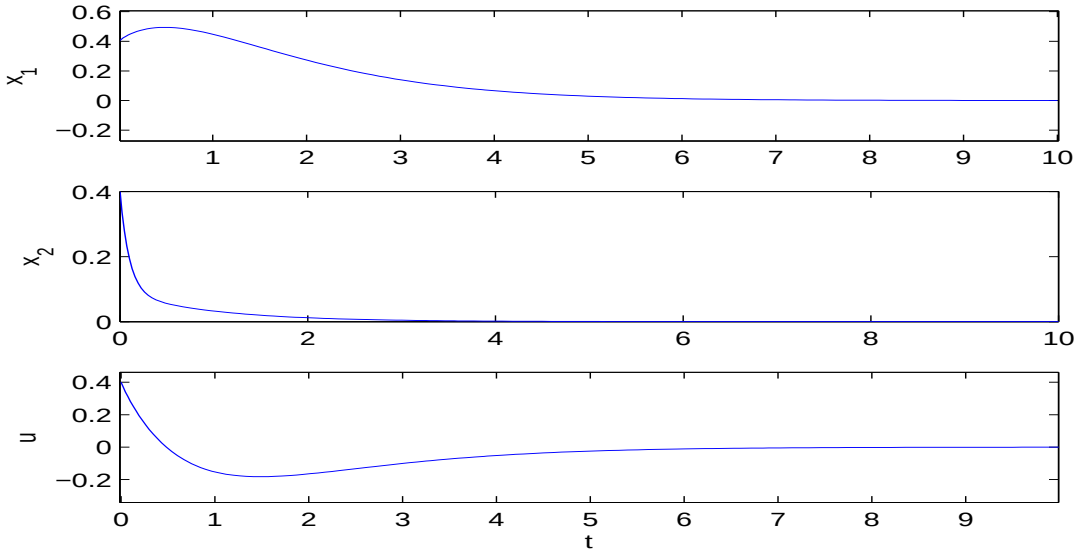


FIGURE 9.4 – commande continue

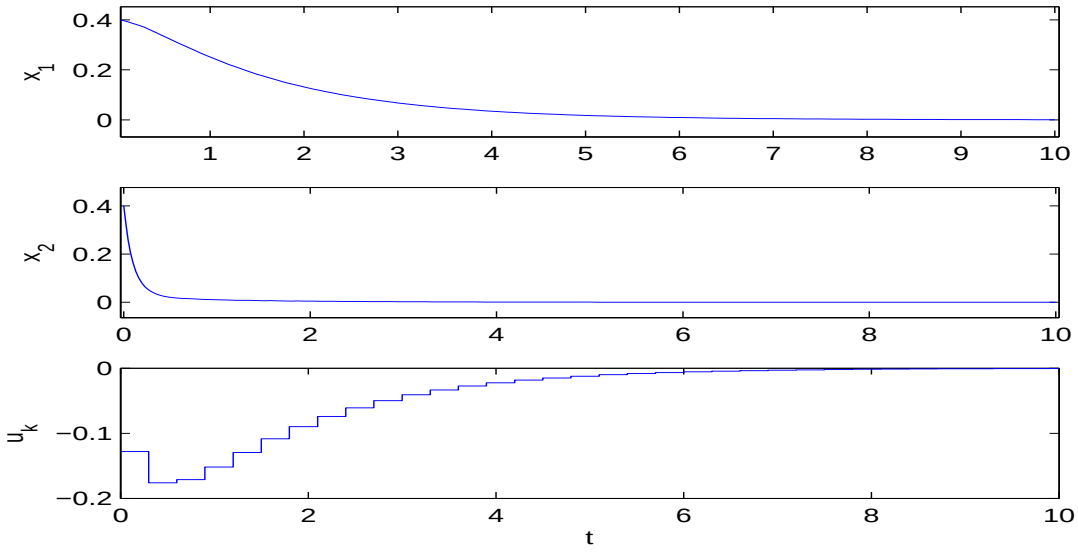


FIGURE 9.5 – $\tau = 0.3$

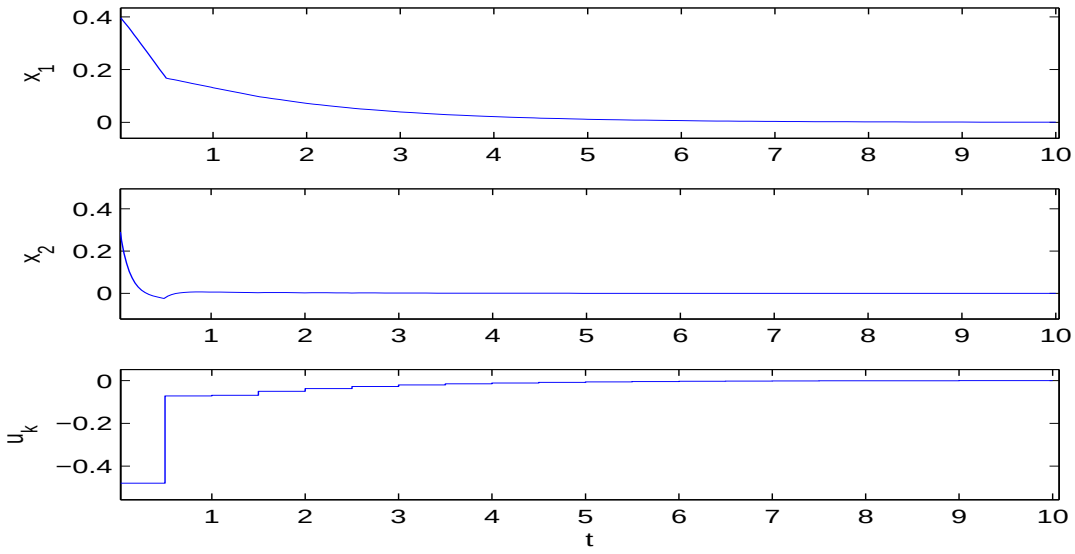


FIGURE 9.6 – $\tau = 0.5$

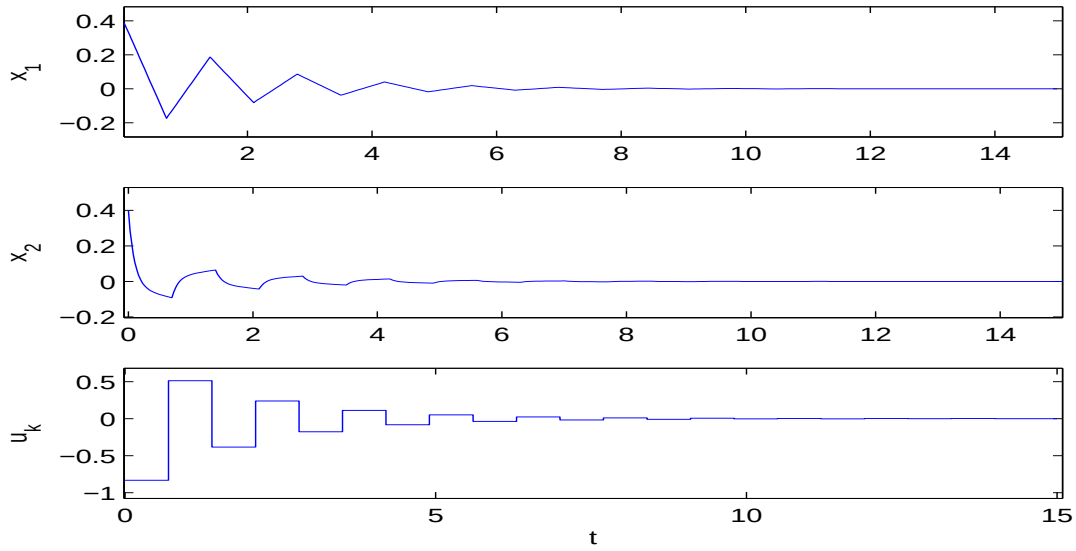


FIGURE 9.7 – $\tau = 0.7$

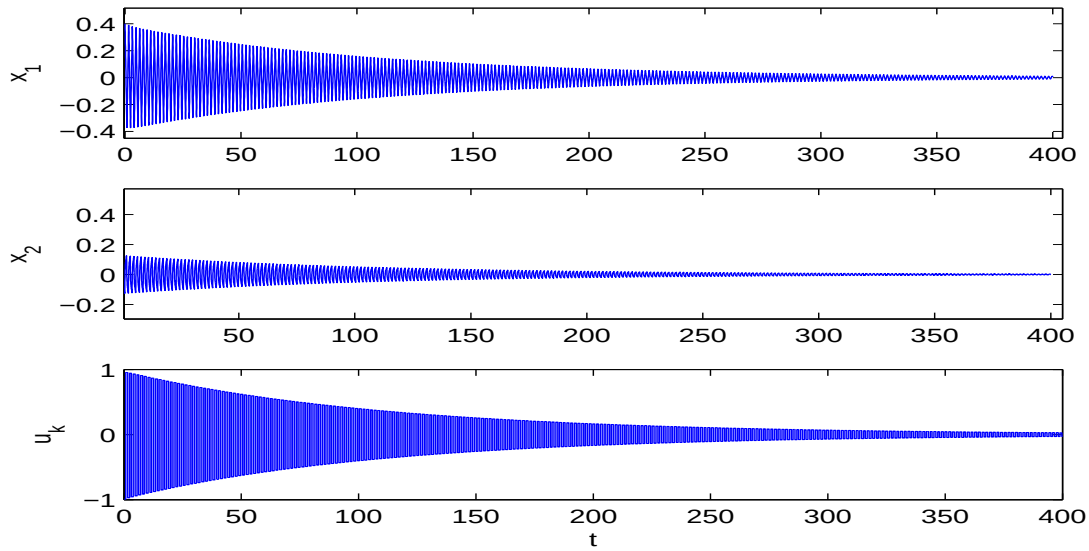


FIGURE 9.8 – $\tau = 0.79$

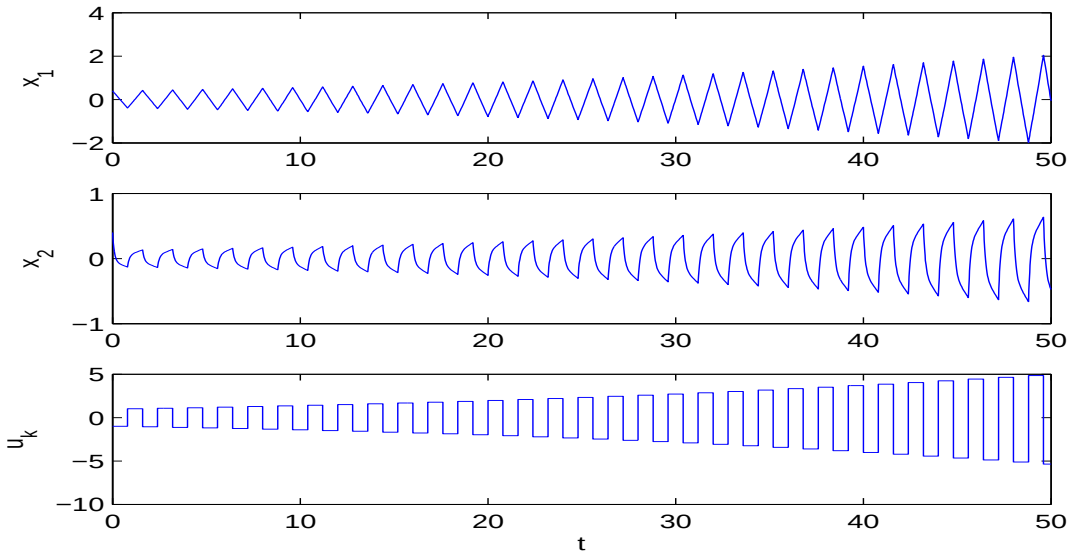


FIGURE 9.9 – $\tau = 0.8$

9.3 Introduction aux ordres supérieurs : exemple 1

$T = 0.1, \gamma = 2$

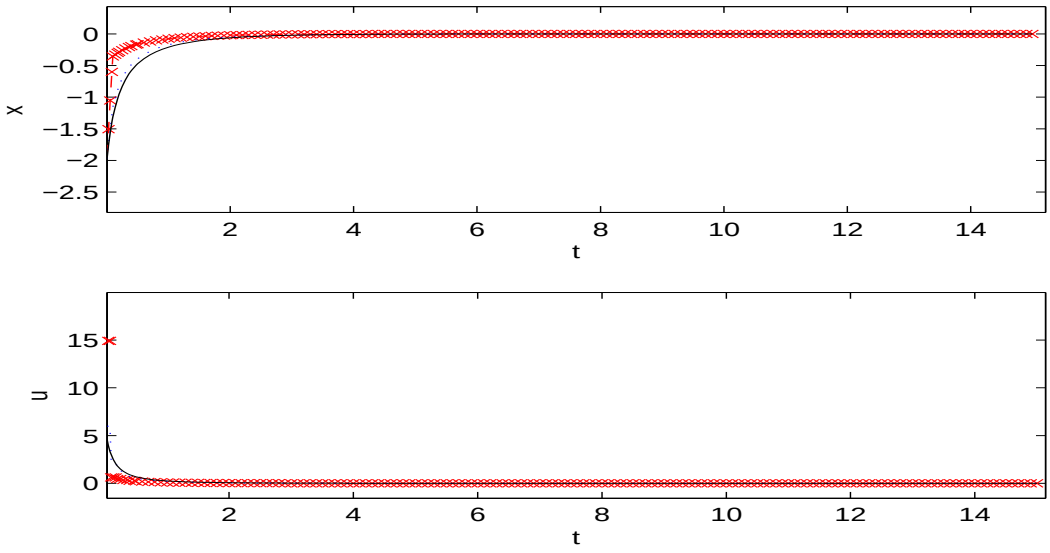


FIGURE 9.10 – $x(0) = -2$

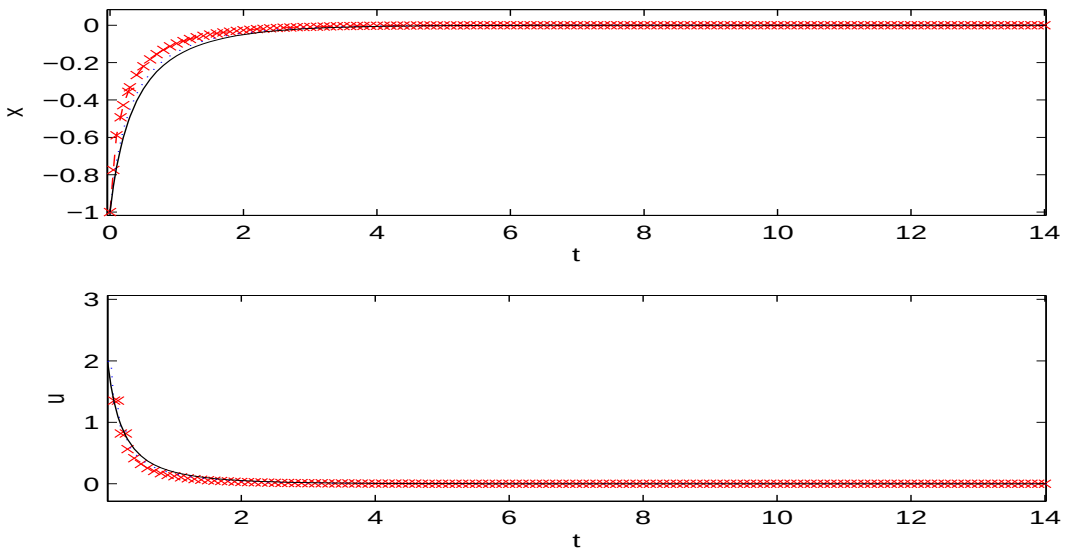


FIGURE 9.11 – $x(0) = -1$

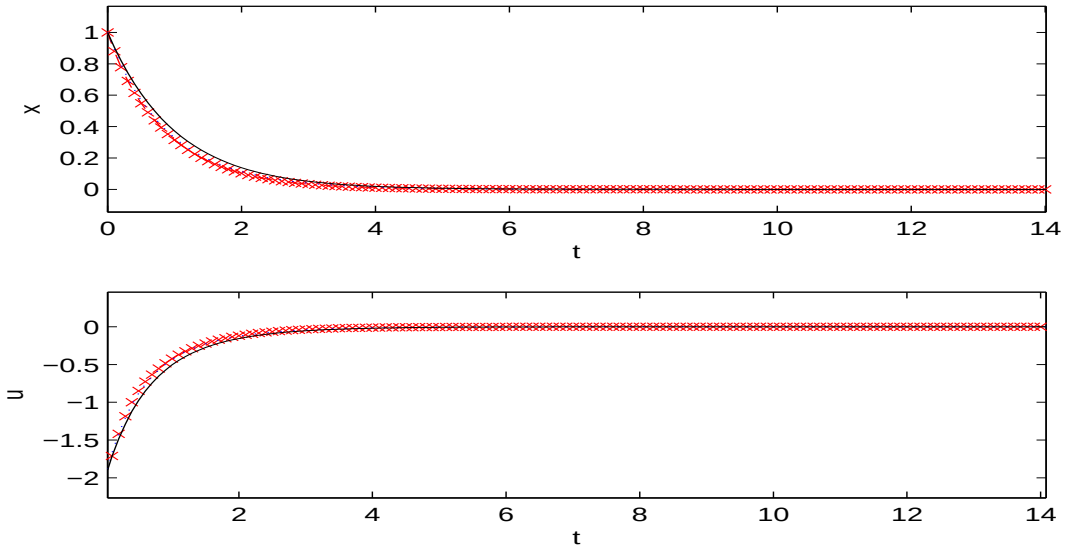


FIGURE 9.12 – $x(0) = 1$

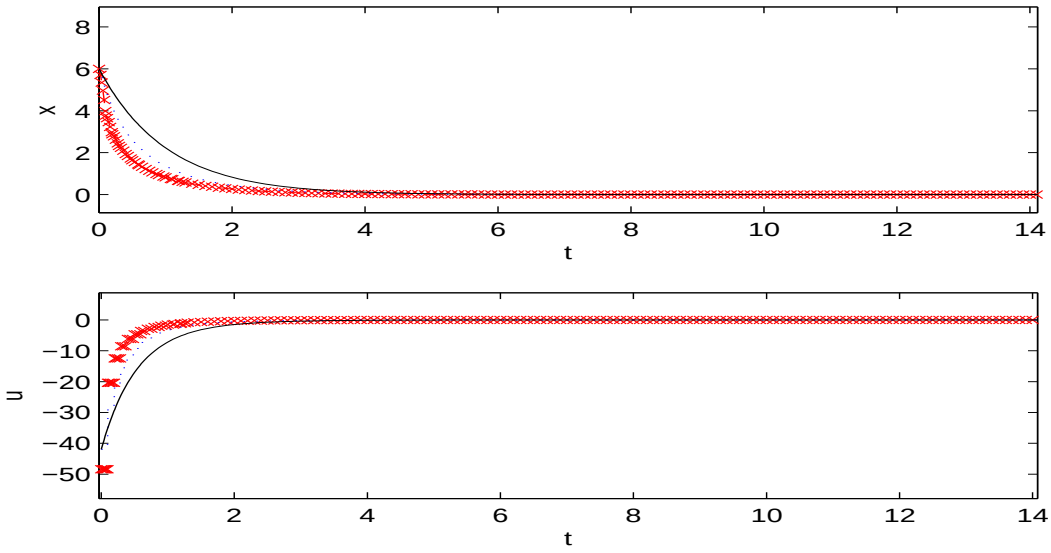


FIGURE 9.13 – $x(0) = 6$

9.4 Introduction aux ordres supérieurs : exemple 2

$T = 0.1, \gamma = 2$

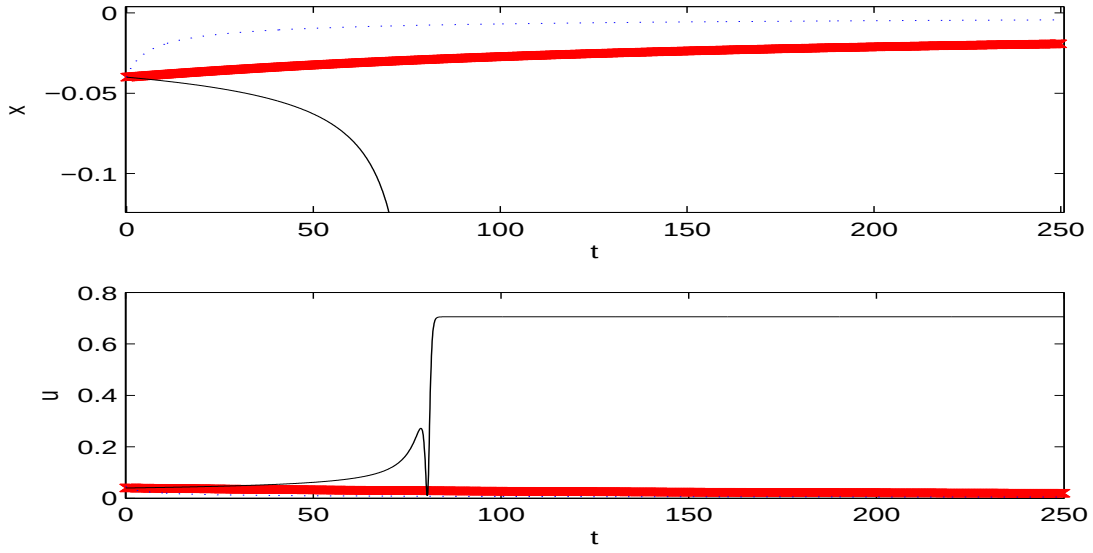


FIGURE 9.14 – $x(0) = -0.04$

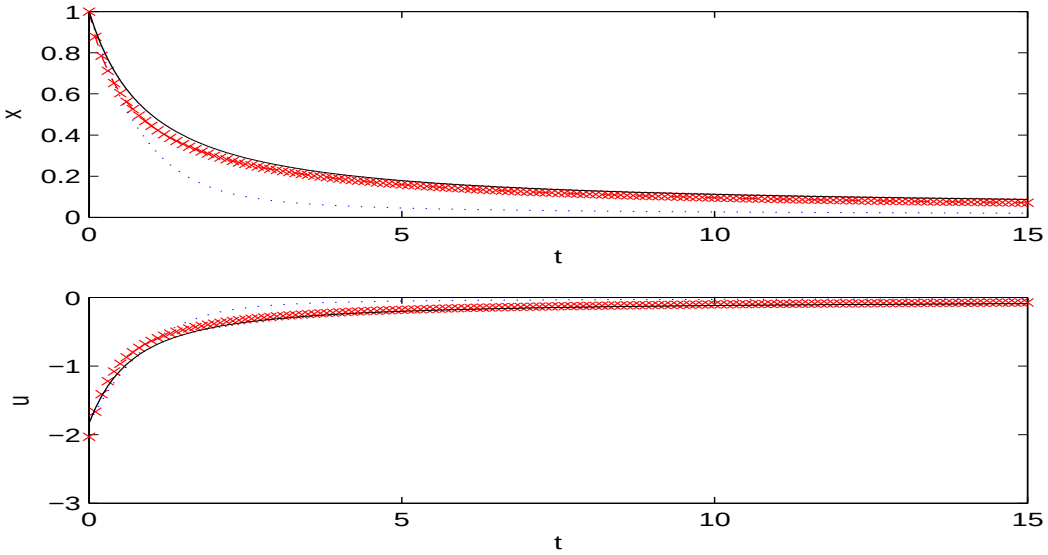


FIGURE 9.15 – $x(0) = 1$

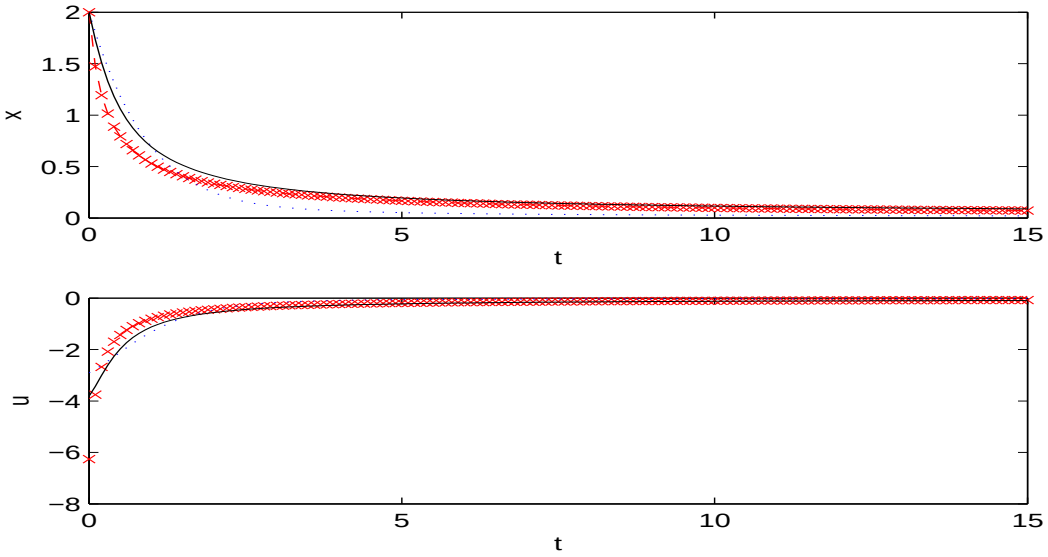


FIGURE 9.16 – $x(0) = 2$

9.5 Backstepping : exemple 1

$T = 0.5$,$c = 1$

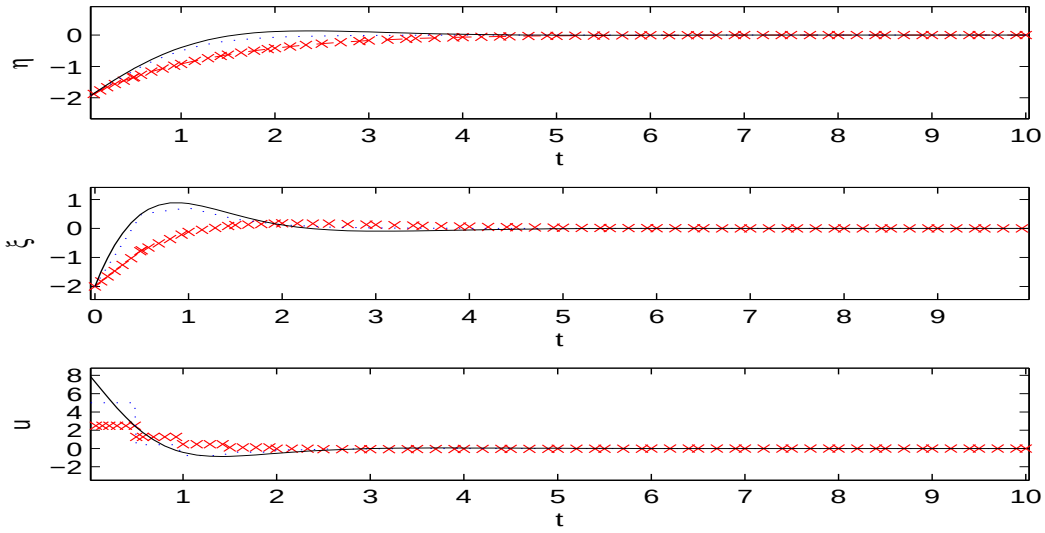


FIGURE 9.17 – $\eta(0) = \xi(0) = -2$

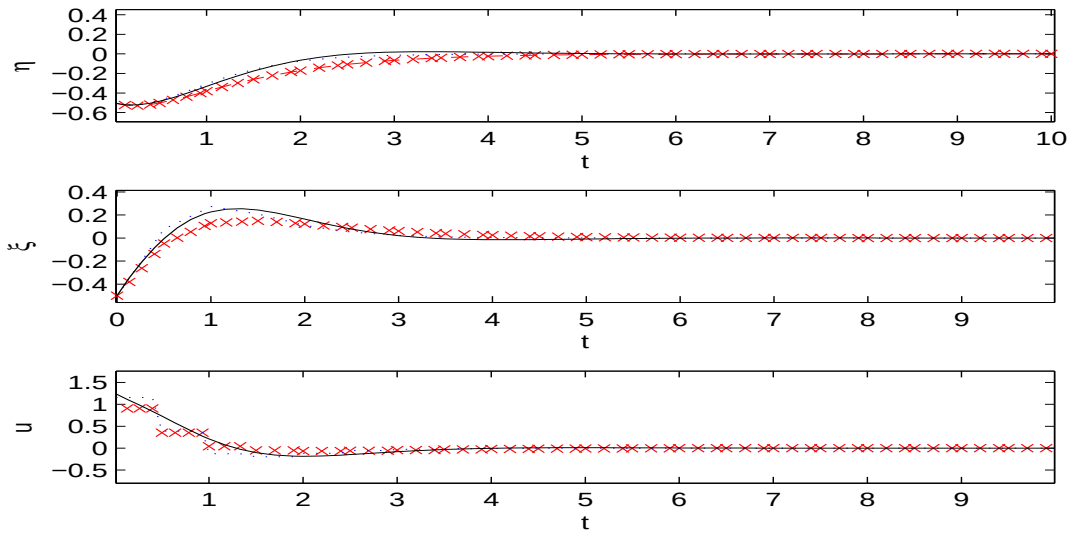


FIGURE 9.18 – $\eta(0) = \xi(0) = -0.5$

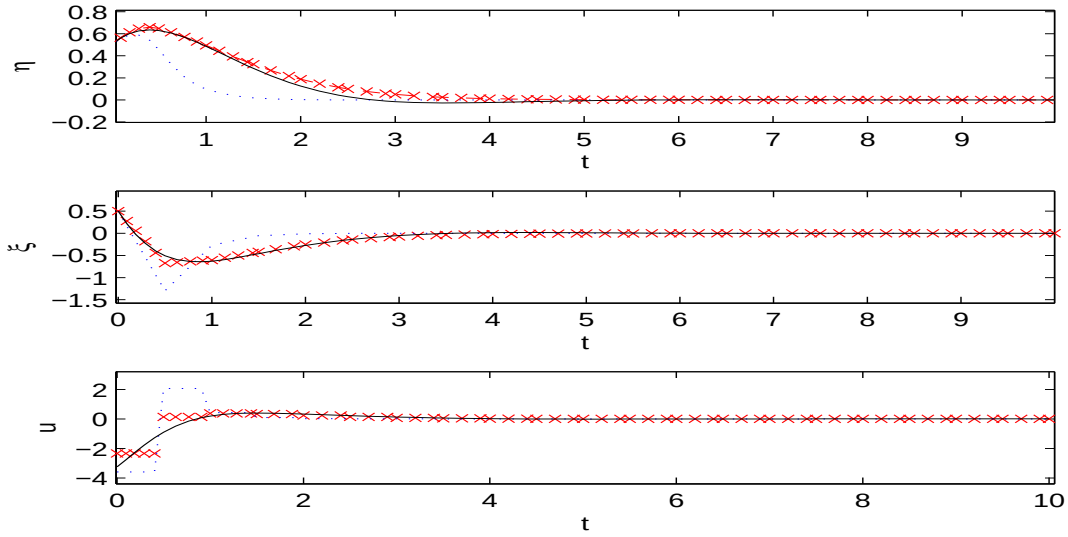


FIGURE 9.19 – $\eta(0) = \xi(0) = 0.5$

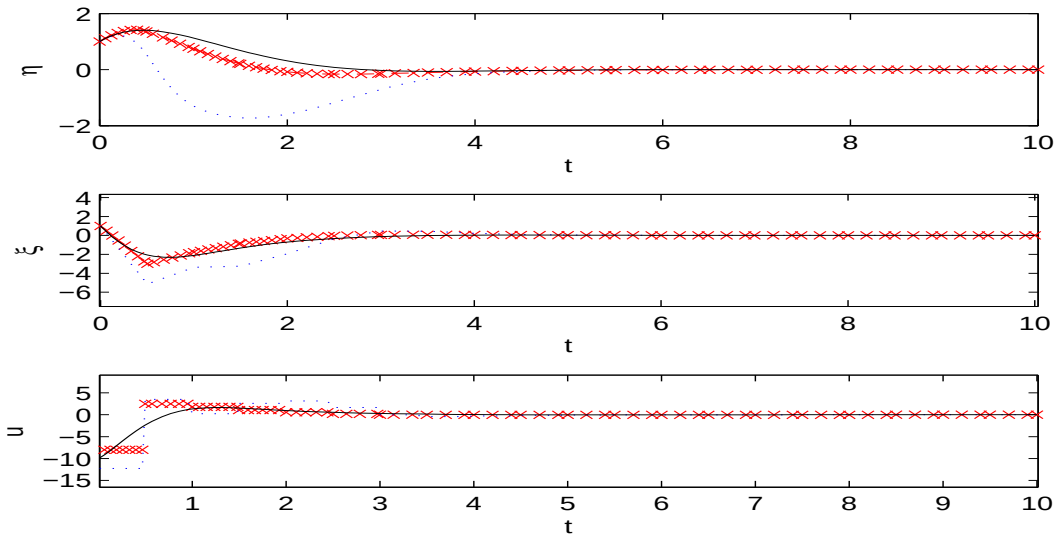


FIGURE 9.20 – $\eta(0) = \xi(0) = 1$

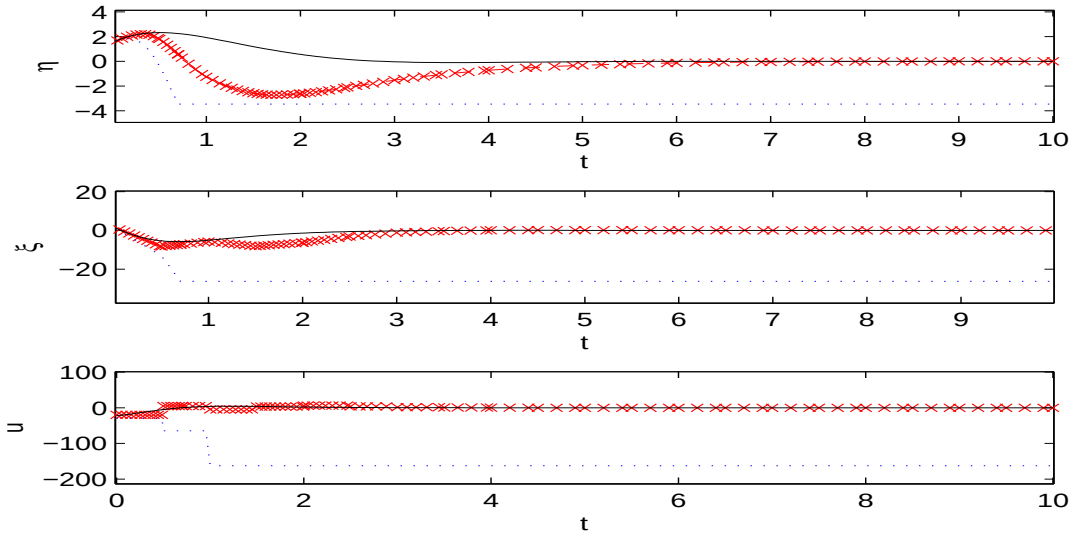


FIGURE 9.21 – $\eta(0) = \xi(0) = 1.5$

9.6 Cas Strict-Feedback : exemple 2

$T = 0.2$,$c = 1.1$,$\gamma = 1.2$

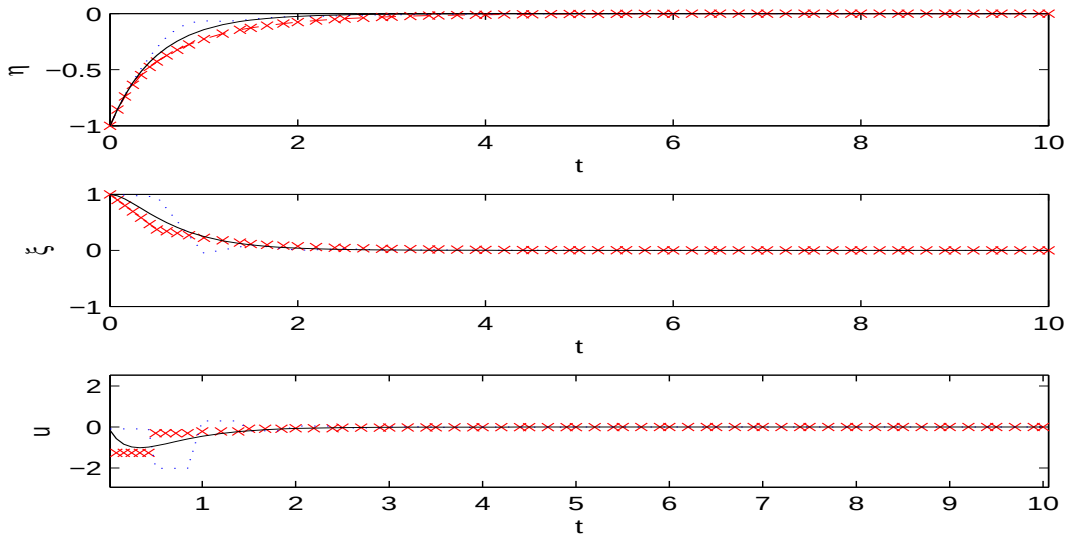


FIGURE 9.22 – $\eta(0) = -1, \xi(0) = 1$

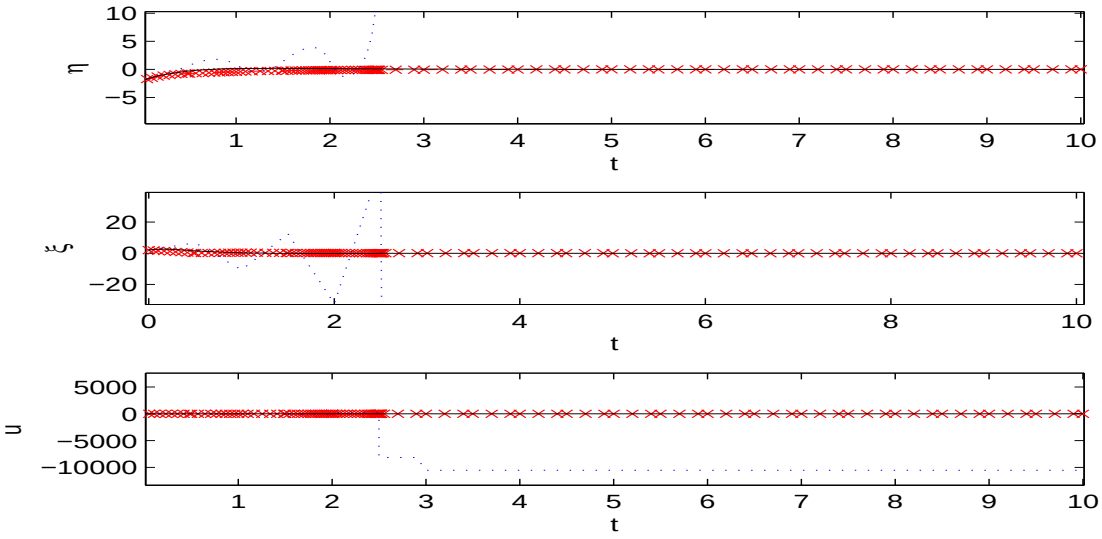


FIGURE 9.23 – $\eta(0) = -2, \xi(0) = 2$

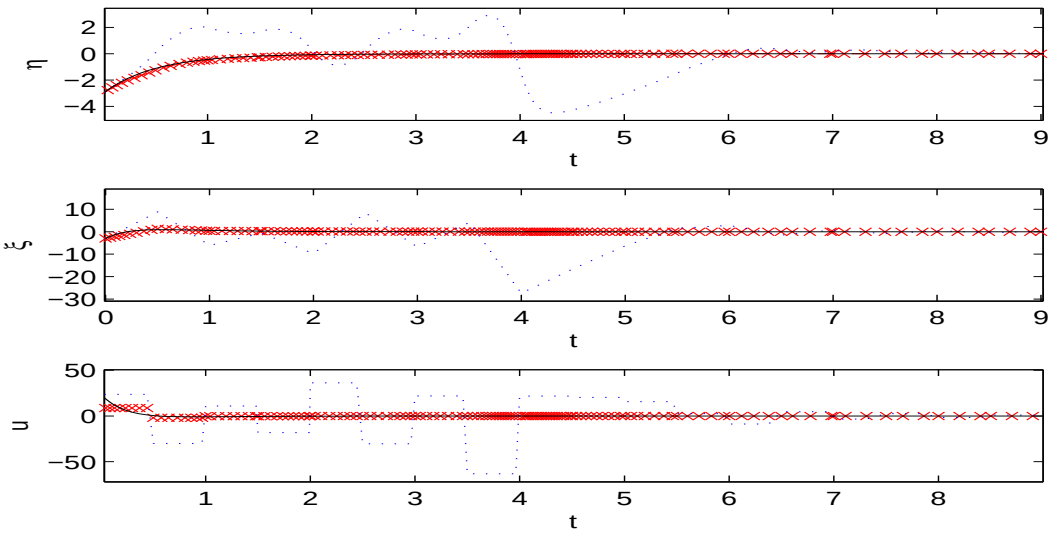


FIGURE 9.24 – $\eta(0) = \xi(0) = -3$

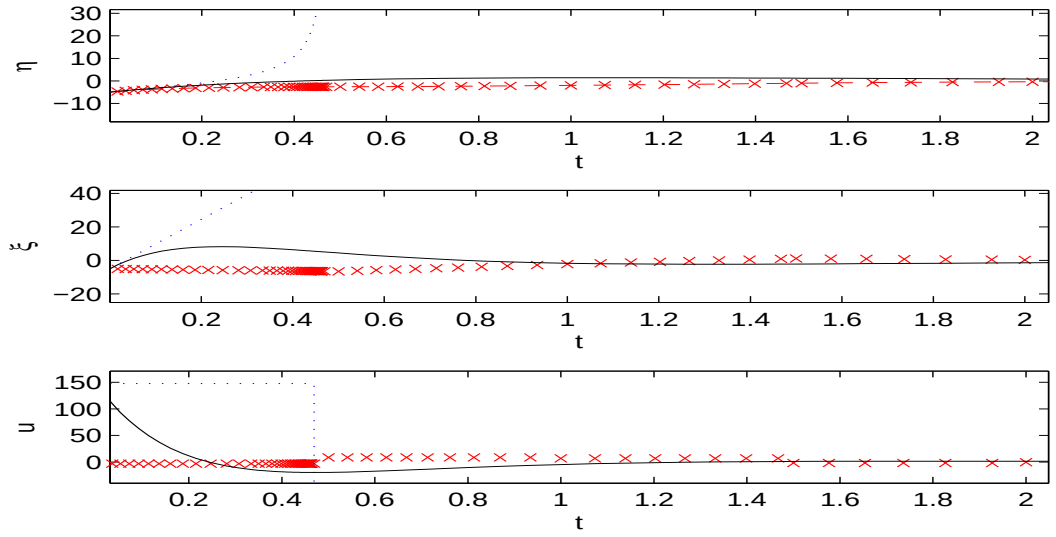


FIGURE 9.25 – $\eta(0) = \xi(0) = -5$

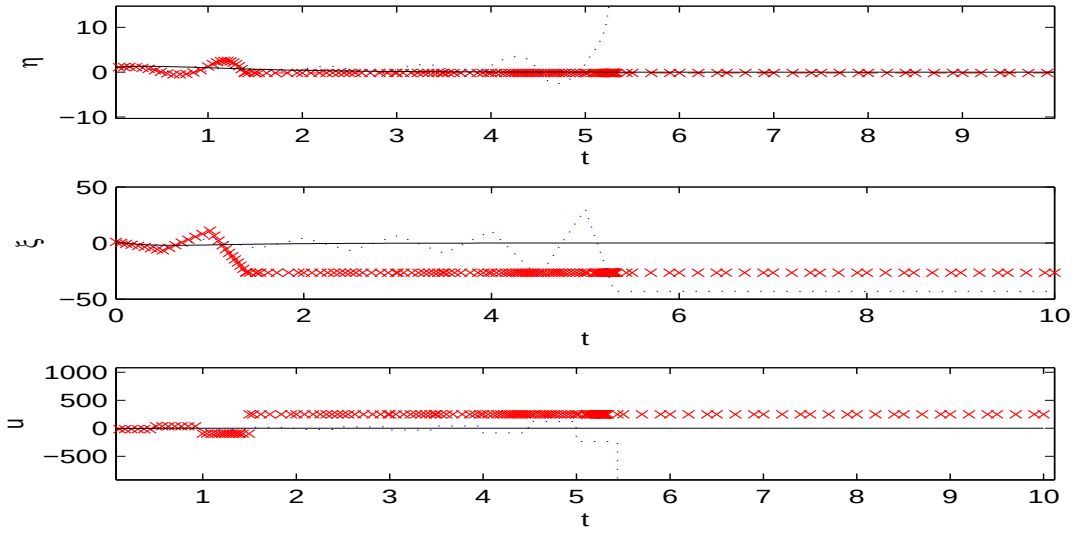


FIGURE 9.26 – $\eta(0) = \xi(0) = -5$

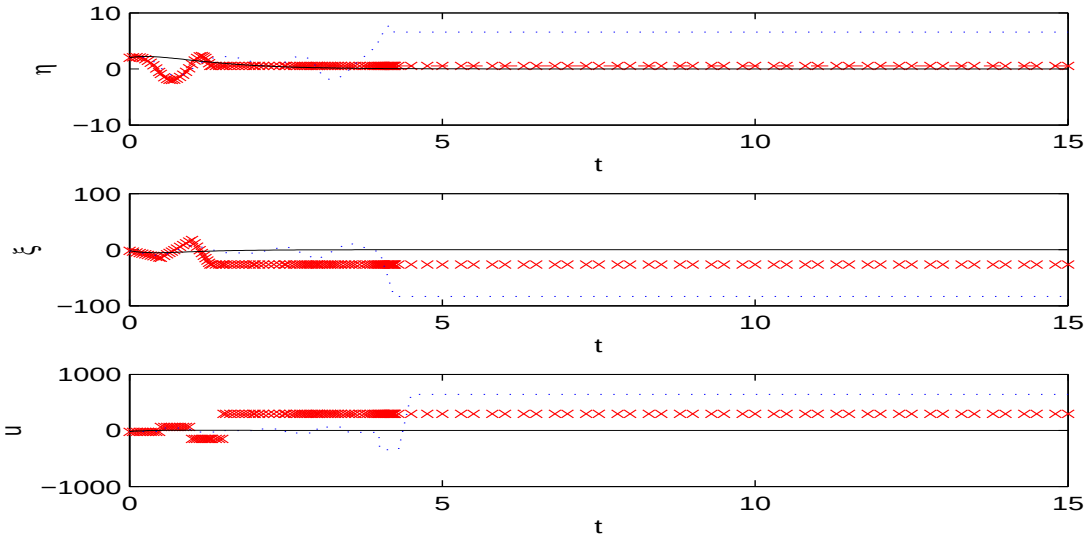


FIGURE 9.27 – $\eta(0) = 2, \xi(0) = -2$

9.7 Forwarding : exemple 1

$\beta = 2$ (les mêmes phénomènes s'observent dans chaque quadrant vis à vis des signes des valeurs des conditions initiales)

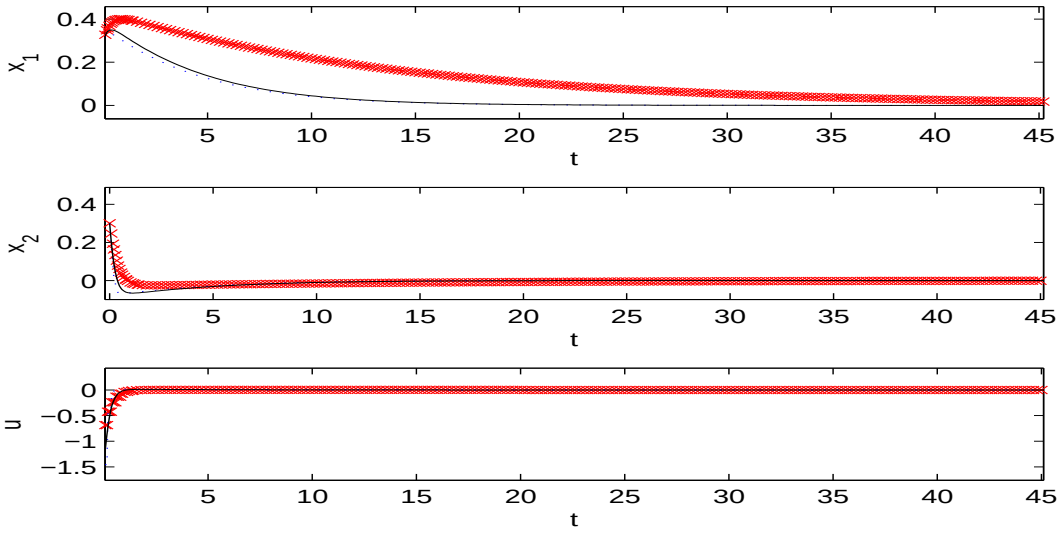


FIGURE 9.28 – $x_1(0) = x_2(0) = 0.3, T = 0.2$

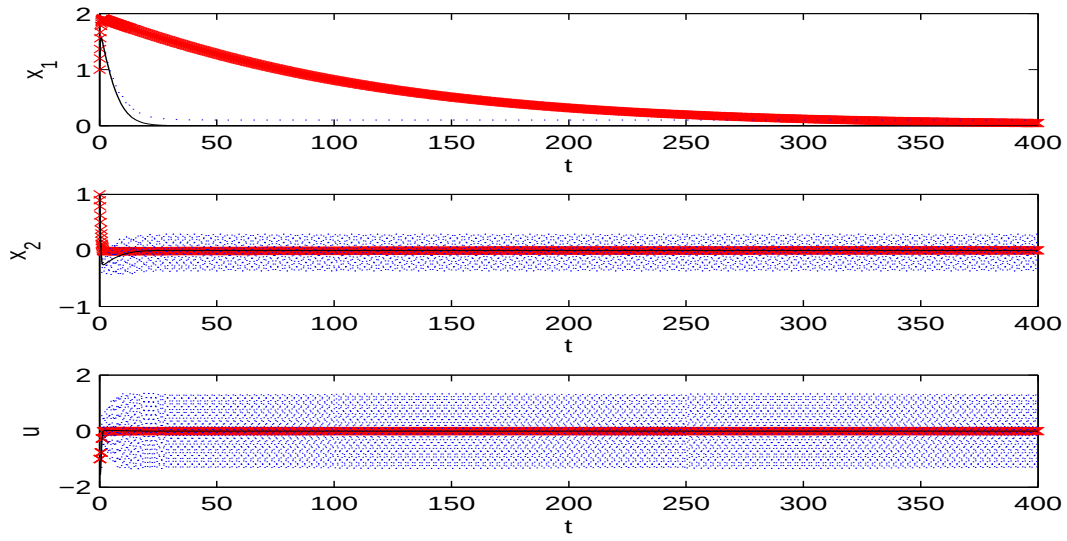


FIGURE 9.29 – $x_1(0) = x_2(0) = 1, T = 0.5$

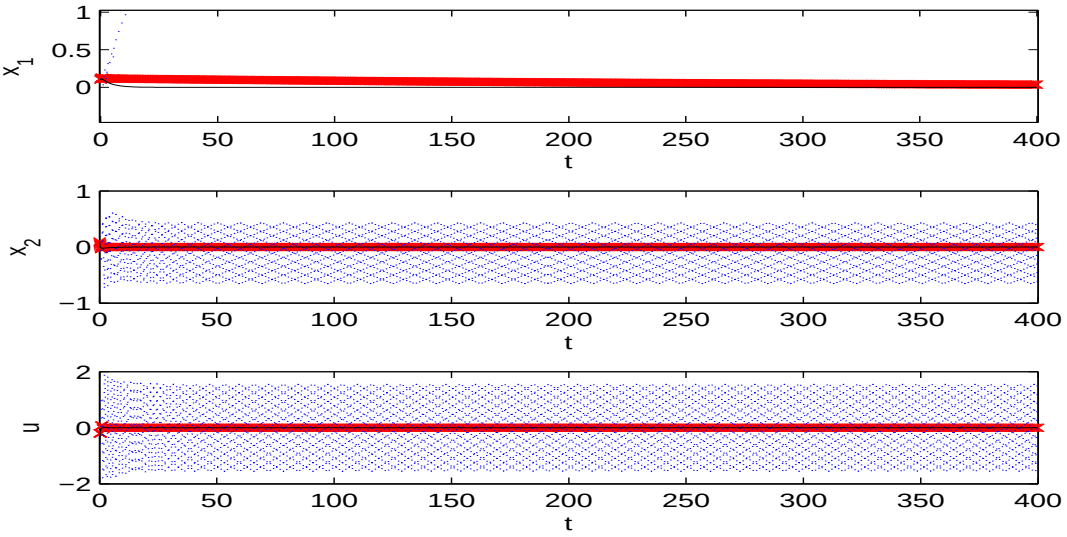


FIGURE 9.30 – $x_1(0) = x_2(0) = 0.1, T = 0.7$

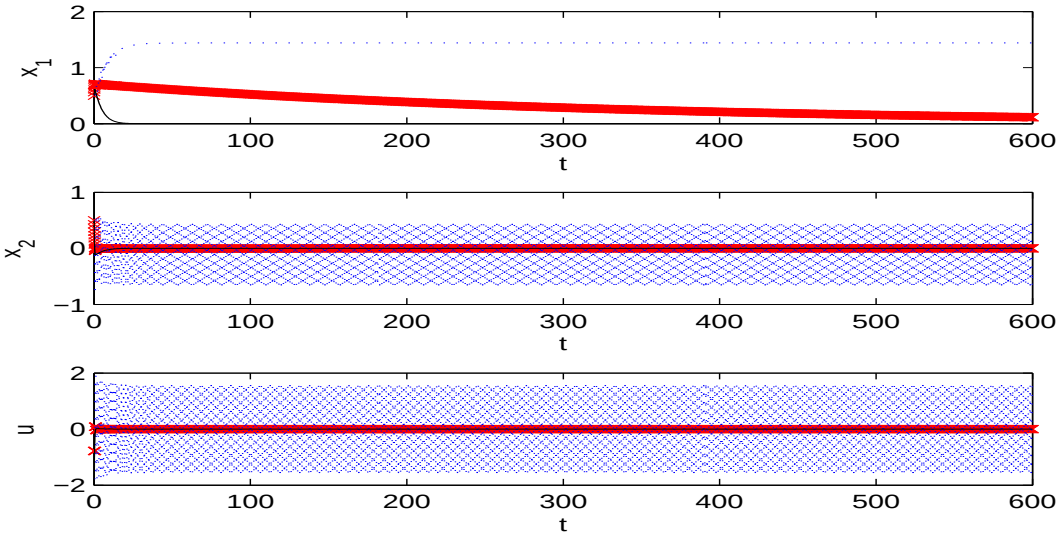


FIGURE 9.31 – $x_1(0) = x_2(0) = 0.5, T = 0.7$

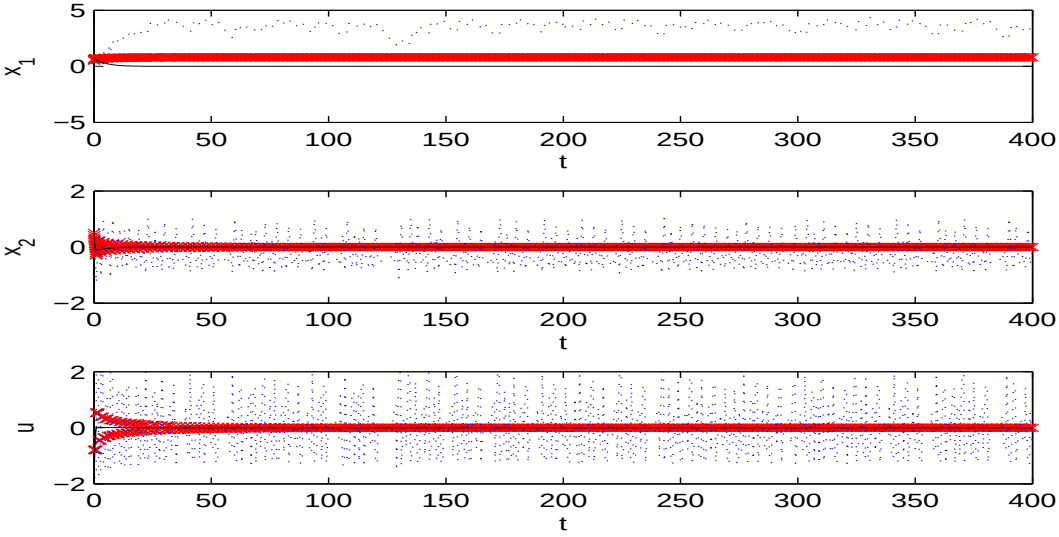


FIGURE 9.32 – $x_1(0) = x_2(0) = 0.5, T = 1$

9.8 Commande adaptative : exemple 1

Données : $\widehat{\theta}_1(0) = 0.5, \widehat{\theta}_2(0) = 0.25, \theta = 0.6, c = 1, T = 0.5$

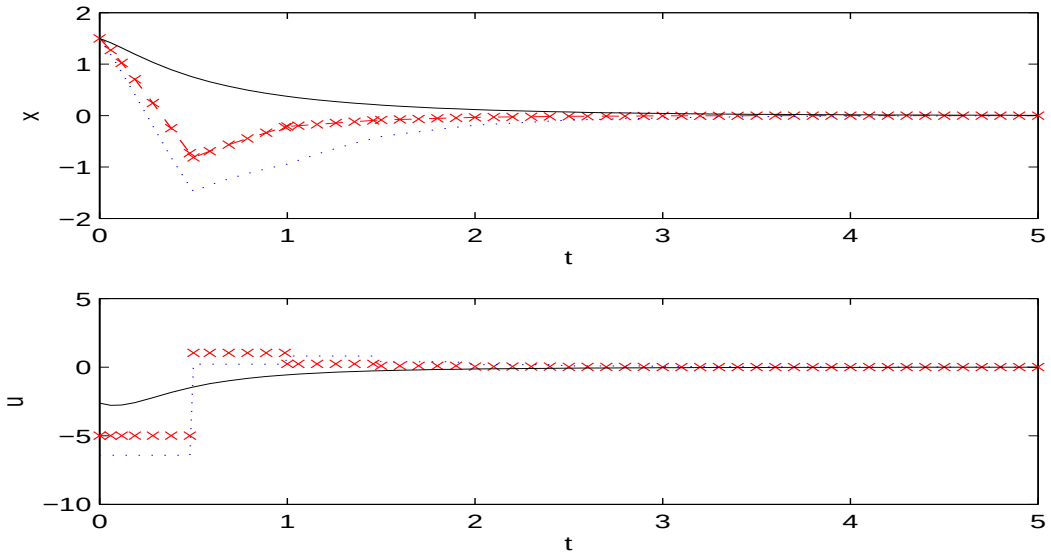


FIGURE 9.33 – $x(0) = 1.5$

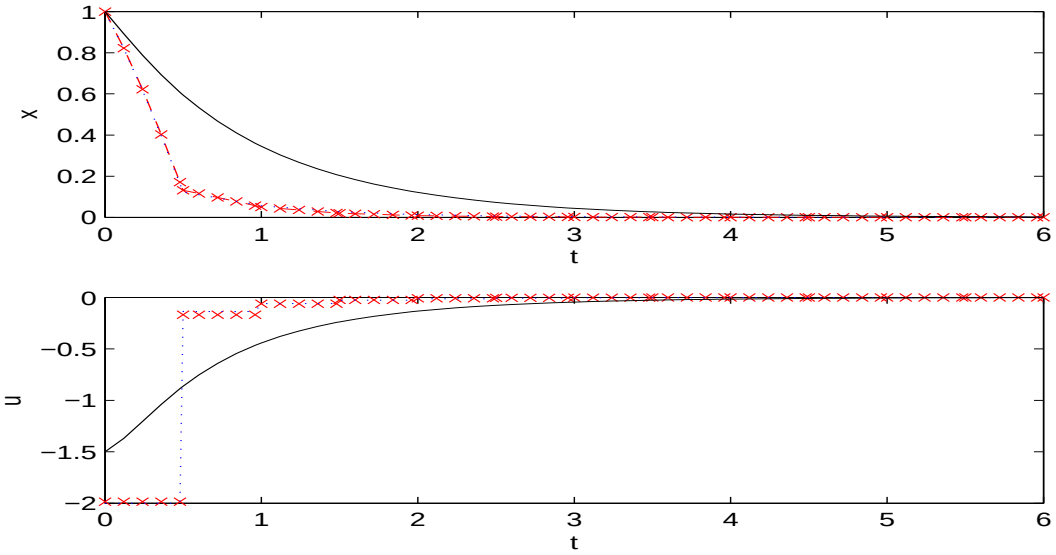


FIGURE 9.34 – $x(0) = 1$

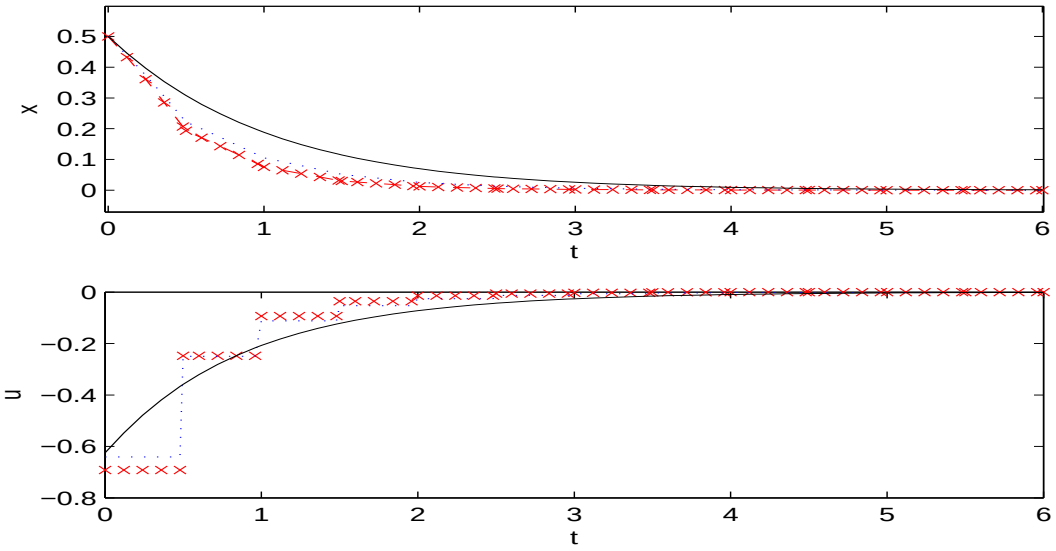


FIGURE 9.35 – $x(0) = 0.5$

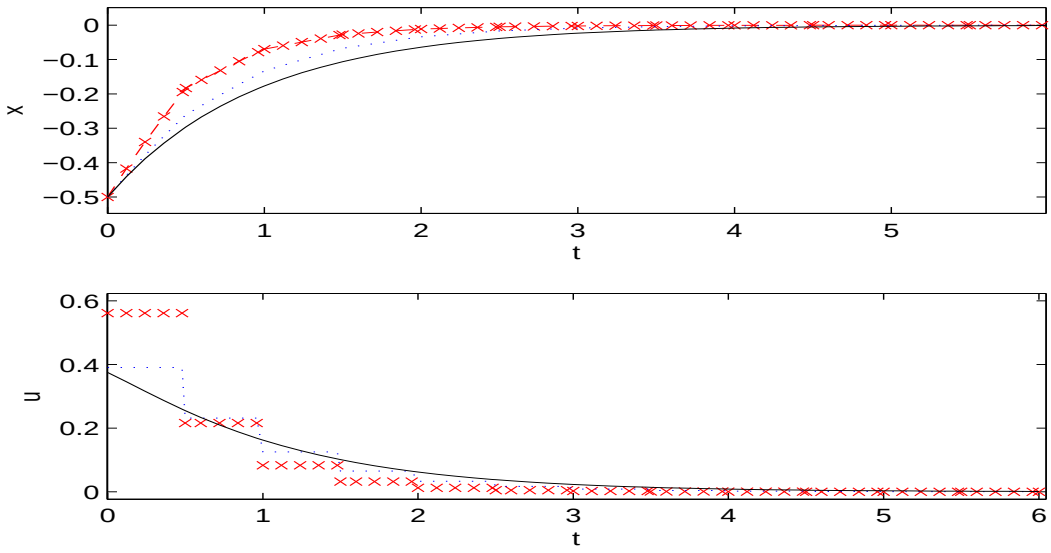


FIGURE 9.36 – $x(0) = -0.5$

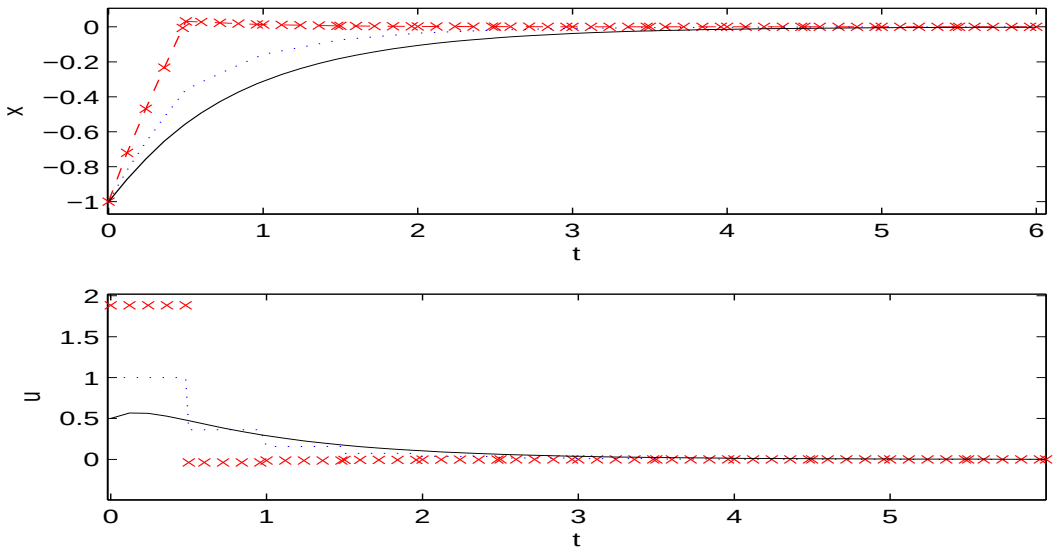


FIGURE 9.37 – $x(0) = -1$

9.9 Commande adaptative : exemple 2

Données : $\widehat{\theta}_1(0) = 0.4, \widehat{\theta}_2(0) = 0.16, \theta = 0.3, T = 0.05$

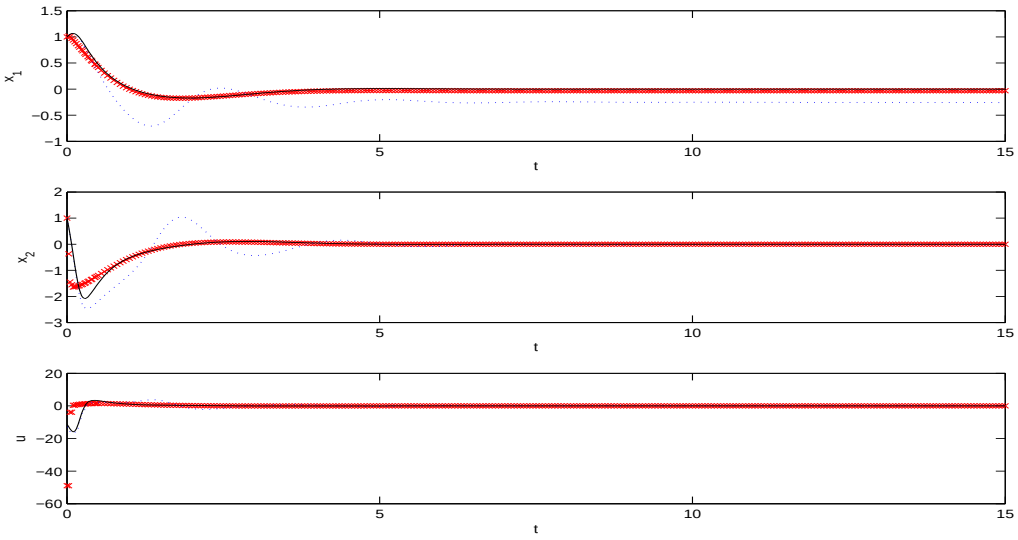


FIGURE 9.38 – $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$

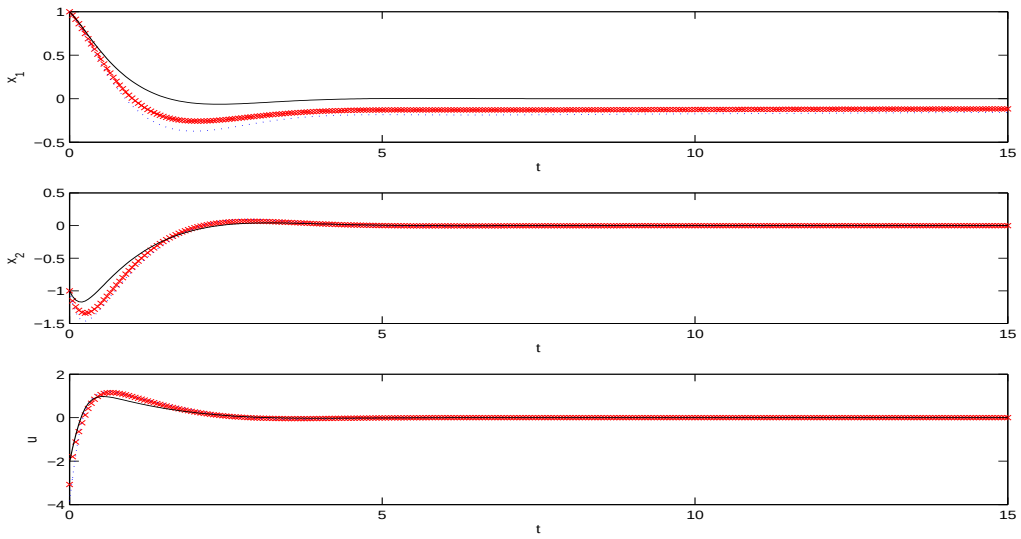


FIGURE 9.39 – $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$

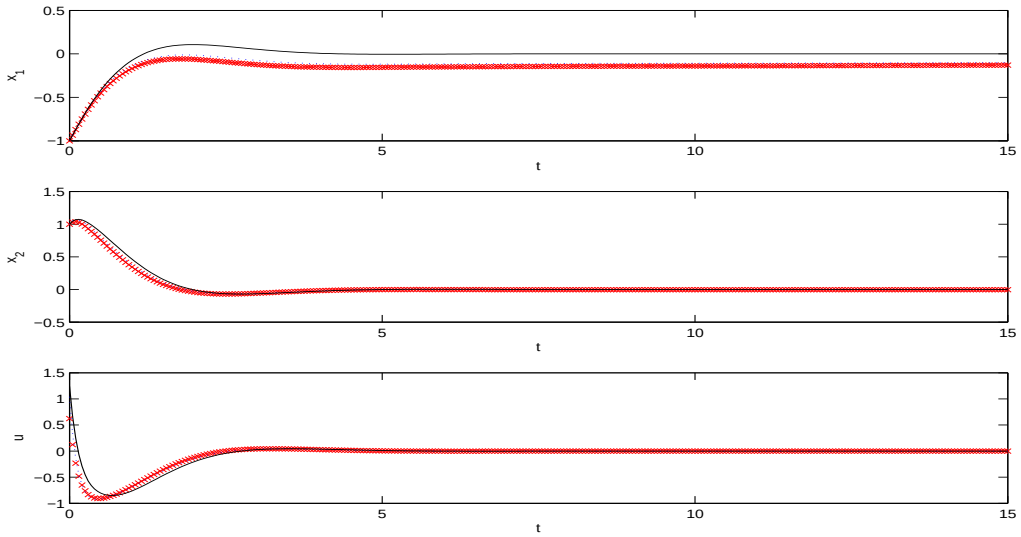


FIGURE 9.40 – $x_1(0) = -1, x_2(0) = 1$

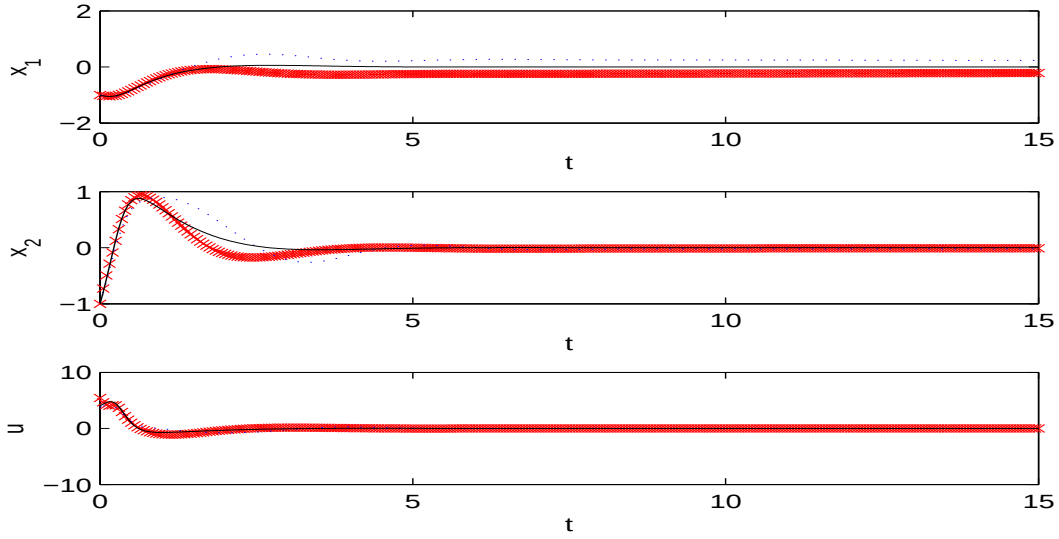


FIGURE 9.41 – $x_1(0) = -1, x_2(0) = -1$

Bibliographie

[1] V. Adelota et M. Guay, " Nonlinear sampled-data output feedback receding horizon control ", Journal of Process Control, no.15, pp 469-480, 2005.

[2] T. Ahmed-Ali, " Contrôleurs-Observateurs adaptatifs et robustes pour des systèmes non linéaires incertains ", Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1998.

[3] T. Ahmed-Ali, L. Burlion et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " On the stabilization of sampled-data systems by using higher order approximations of the exact discretized systems ", in Proc. of IMACS World Congress, July, 2005.

[4] S. Almer, U. Jönsson, C-Y. Kao et J. Mari, " Stability analysis of a class of PWM systems using sampled-data modeling ", in Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control, pp 4794-4799, 2003.

[5] S. Ammar and J.-C. Vidal, " On the preservation of observability under sampling ", Systems and Control Letters, 52, pp 7-15, 2004.

[6] S. Ammar, " Observability and observateur under sampling ", International Journal of Control, vol.79, no.9, pp 1039-1045, 2006.

[7] A. Arapostathis, B. Jakubczyk, H.-G. Lee, S. Marcus et E.D. Sontag, " The effect of sampling on linear equivalence and feedback linearization ", Systems and Control Letters, no.13, pp 373-381, 1989.

[8] M. Arcat et D. Nesic, " A framework for nonlinear sampled-data observer design via approximate discrete-time models and emulation ", Automatica, vol.40, pp 1931-1938, 2004.

[9] J.S. Baras et N.S. Patel, " Robust control of set-valued discrete-time dynamical systems ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.43, no.1, pp 61-75, 1998.

[10] J.P. Barbot, B. Maschke et G. Servettaz, " Nonlinear sampled-data control laws of a robot with flexible links ", in Proc. of the 5th International Conference on Advanced Robotics, Pisa, italy, pp 144-149, 1991.

[11] J.P. Barbot, S. Monaco, D. Normand-Cyrot et N. Pantalos, " Some comments about linearization under sampling ", in Proc. of the 31st Conference on Decision and Control, pp 2392-2397, 1992.

[12] J.P. Barbot, et N. Pantalos, " A sampled-data control scheme for stabilization of systems with unmodeled high-frequency dynamics ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.37, pp 285-288, 1992.

[13] J.P. Barbot, S. Monaco et D. Normand-Cyrot, " A sampled normal form for feedback linearization ", Math. of Control, Signal and Systems, no.9, pp. 162-188, 1996.

[14] Z. Bartosiewicz et E. Pawluszewicz, " Euler's discretization, dynamic equivalence and linearization of control systems ", International Journal of Control, pp. 773-781, 2005.

[15] W. Bian et M. French, " Stability of continuous-time nonlinear systems with digital controllers ", in Proc. of the 43rd Conference on Decision and Control, pp 2334-2339, 2004.

[16] R.W. Brockett et D. Liberzon, " Quantized feedback stabilization of linear systems ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.45, pp 1279-1289, 2000.

[17] L. Burlion, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " On the Stability of a Class of NonLinear Hybrid Systems ", in Proc. of NOLCOS 04, Stuttgart, 2004.

[18] L. Burlion, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " On the Stability of a class of nonlinear hybrid systems ", Journal of Nonlinear Analysis, Elsevier, Issue 12, pp. 2236-2247, Décembre, 2006.

[19] L. Burlion, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " On the Stabilization of Sampled-Data Nonlinear Systems by using Backstepping on the higher order approximate models ", International Journal of Control, vol. 79, no.9, September, pp. 1087-1095, 2006.

[20] L. Burlion, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " Adaptive control of Nonlinear Sampled-Data Systems ", soumis à Automatica.

[21] L. Burlion, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " On the adaptive control of Nonlinear Sampled-Data Systems ", accepté à ECC 07, KOS, Grèce, 2007.

[22] L. Burlion, T. Ahmed-Ali et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " Adaptive control redesign for some Nonlinear Sampled-Data Systems ", accepté à NOLCOS 07, 2007.

[23] C. Califano, S. Monaco et D. Normand-Cyrot, " On the discrete-time normal form ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.43, pp 1654-1658, 1998.

[24] C. Califano, S. Monaco et D. Normand-Cyrot, " On the problem of feedback linearization ", Systems and Control Letters, no.36, pp 61-67, 1999.

[25] M. Cantoni, " Necessity of sampled-data approximation result ", in Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control, pp 310-315, 2001.

[26] B. Castillo, S. Di Gennaro, S. Monaco et D. Normand-Cyrot, " On regulation under sampling ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.42, pp 864-868, 1997.

[27] T. Chen et B.A. Francis, " Input-output stability of sampled-data control systems ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.36, pp 50-58, 1991.

[28] T. Chen et B.A. Francis, " H2-Optimal sampled-data control ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.36, pp 387-397, 1991.

[29] T. Chen et B.A. Francis, " Optimal Sampled-data Control Systems ", Springer Verlag, London, 1995.

[30] A.M. Dabroom et H.K. Khalil, " Discrete time implementation of high-gain observers for numerical differentiation ", International Journal of Control, vol. 72, no.17, pp. 1523-1537, 1999.

[31] A.M. Dabroom et H.K. Khalil, " Output feedback sampled-data control of nonlinear systems using high-gain observers ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.46, pp 1712-1725, 2001.

[32] J. De Leon Morales, O. Huerta-Guevara, L. Dugard et J.M. Dion, " Discrete-time nonlinear control scheme for synchronous generator ", in Proc. of the 42nd Conference on Decision and Control, pp 5897-5902, 2003.

[33] G. De Nicolao, L. Magni and R. Scattolini, " Stabilizing receding-horizon control of nonlinear time-varying systems ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.43, no.7, pp 1030-1036, 1998.

[34] C. De Persis, " n-Bit stabilization of n-dimensional nonlinear systems in feedforward form ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.50, pp 299-311, 2005.

[35] D. Dochain et G. Bastin, " Adaptive identification and control algorithms for nonlinear bacterial growth systems ", Automatica, no.20, pp 621-634, 1984.

[36] G.E. Dullerud et B.A. Francis, " L1 analysis and design of sampled-data systems ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.37, pp 436-446, 1992.

[37] J.A. Farrell et A.N. Michel, " Estimates of asymptotic trajectory bounds in digital implementation of linear feedback control systems ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.34, no.12, pp 1319-1323, 1989.

[38] A. Feuer et G.C. Goodwin, " Generalized sample hold functions - Frequency domain analysis of robustness ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.39, no.5, pp 1042-1047, 1994.

[39] M. Fliess, M. Lamnabhi et F. Lamnabhi-Lagarrigue, " An algebraic approach to nonlinear functional expansions ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.30, no.8, pp 554-570, 1983.

[40] G.F. Franklin, J.D. Powell et M.L. Workman, " Digital control of dynamic systems ", New-York, Addison-Wesley, 1992.

[41] E. Fridman, A. Seuret et J.P. Richard, " Robust sampled-data stabilization of linear systems : an input delay approach ", Automatica, vol.40, pp 1441-1446, 2004.

[42] S.S. Ge et M.W.Spong, " Implicit controllers for classes of nonlinear systems ", in Proc. of the 16th IFAC World Congress, Prague, July, 2005.

[43] J.W. Grizzle et P.V. Kokotovic, " Feedback linearization of sampled-data systems ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.33, pp 857-859, 1988.

[44] L. Grüne, et P.E. Kloeden, " Higher order numerical schemes for affinely controlled nonlinear systems ", Numerische Mathatik, pp. 669-690, 2001.

[45] L. Grüne, D. Nesic et J. Pannek, " Model predictive control for nonlinear sampled-data Systems ", in Proc. of the 44th IEEE Conference on Decision and Control ECC-CDC 2005, 2005.

[46] L. Grüne, K. Worthmann et D. Nesic, " Continuous-time controller redesign for digital implementation : a trajectory based approach ", submitted, 2006.

[47] A.-M. Guillaume, G. Bastin et G. Campion, " Sampled-data adaptive control of a class of continuous nonlinear systems ", International Journal of Control, vol. 60, pp. 569-594, 1994.

[48] E. Gyurkovics et A.M. Elaiw, " Stabilization of sampled-data nonlinear systems by receding horizon control via discrete-time approximations ", Automatica, vol. 40, pp. 2017-2028, 2004.

[49] G. Herrmann, S.K. Spurgeon et C. Edwards, " Discretization of Sliding Mode based Control Schemes ", in Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control, pp 4257-4262, 1999.

[50] G. Herrmann, S.K. Spurgeon et C. Edwards, " Stability and performance recovery within discretized non-linear control systems ", in Proc. of the 42nd Conference on Decision and Control, pp 5985-5990, 2003.

[51] B. Hu et A.N. Michel, " Some qualitative properties of multirate digital control systems ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.44, pp 765-770, 1997.

[52] B. Hu, Z. Feng et A.N. Michel, " Quantized sampled-data feedback stabilization for linear and nonlinear control systems ", in Proc. of the 38th Conference on Decision and Control, pp 4392-4397, 1999.

[53] B. Hu et A.N. Michel, " Stability analysis of digital feedback control systems with time-varying sampling periods ", Automatica, vol.36, pp 897-905, 2000.

[54] A. Ilchmann, S. Townley et M. Thuto, " Adaptive sampled-data tracking for input-constrained exothermic chemical reaction models ", Systems and Control Letters, vol.54, pp 1149-1161, 2005.

[55] A. Isidori," Nonlinear control systems ", 3rd Ed. Springer Verlag London, 2002.

[56] I. Kanellakopoulos, " A discrete-time adaptive nonlinear system ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.39, pp 2362-2365, 1994.

[57] L. Karsenti, " Commande adaptative de systèmes non linéaires. Application en biotechnologie et en électronique de puissance ", Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1996.

[58] N. Kazantzis et C. Kravaris, " System-theoretic properties of sampled-data representations of non linear systems obtained via Taylor-Lie series ", International Journal of Control, vol. 67, pp. 997-1020, 1997.

[59] C.M. Kellet, H. Shim et A.R. Teel, " Further results on robustness of (possibly discontinuous) sample and hold feedback ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.49, pp 1081-1089, 2004.

[60] H.K. Khalil, " Nonlinear Systems " (1992), Mc Millan Publishing Company, New York.

[61] H.K. Khalil, " Performance recovery under output feedback sampled-data stabilization of a class of nonlinear systems ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.49, no.12, pp 2173-2184, 2001.

[62] H.K. Khalil, " Output feedback sampled-data stabilization of nonlinear systems ", in Proc. of the 2004 American Control Conference, pp 2397-2402, 2004.

[63] G. Kreisselmeier et T. Birkhölzer, " Numerical nonlinear regulator design ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.39, no.1, pp 33-46, 1994.

[64] M. Krstic, I. Kanellakopoulos et P.V.Kokotovic, " Nonlinear and adaptive control design ", Wiley, 1995.

[65] D.S. Laila, D. Nesic et A.R. Teel," Open and closed loop dissipation inequalities under sampling and controller emulation ", European Journal of Control, vol. 8, pp. 109-125, 2002.

[66] D.S. Laila et A. Astolfi," A note on discrete-time stabilization of Hamiltonian systems ", In Proc. of the NOLCOS 04, Stuttgart, pp 1247-1252, 2004.

[67] D.S. Laila," Design and Analysis of Nonlinear Sampled-Data Control Systems ", phD Thesis, pp. 1143-1156, 2005.

[68] D.S. Laila, D. Nesic et A. Astolfi," Sampled-data control of nonlinear systems ", Advanced topics in systems control theory II, lecture notes from FAP 2005, Editors : A. Loria,F. Lamnabhi-Lagarrigue and E. Panteley, pp 3-48, 2005.

[69] D.S. Laila et A. Astolfi," Discrete-time IDA-PBC design for separable of Hamiltonian systems ", In Proc. of the 16th IFAC World Congress, Prague, 2005.

[70] D.S. Laila et A. Astolfi," Discrete-time for time-varying robust stabilization for systems in power form ", In Proc. of the 16th IFAC World Congress, Prague, 2005.

[71] D.S. Laila et A. Astolfi," Input to state stability for discrete-time-varying systems with applications to robust stabilization of systems in power form ", Automatica, vol. 41, pp 1891-1903, 2005.

[72] W. Lin, " Further results on Global Stabilization of Discrete Nonlinear Systems ", Systems and Control Letters, no.29, pp 51-59, 1996.

[73] J.L. Mancilla-Aguilar et R.A. Garcia, " On the exponential stability of nonlinear sampled-data systems with time-varying sampling periods ", in Proc. of the American Control Conference, pp 1290-1295, 2002.

[74] I.M.Y. Mareels, H.B. Penfold et R.J. Evans, " Controlling nonlinear time-varying systems via Euler approximation ", Automatica, no.28, pp 681-696, 1992.

[75] F. Mazenc et H. Nijmeijer, " Forwarding in discrete-time nonlinear systems ", International Journal of Control, vol. 71, no.5, pp 823-835, 1998.

[76] F. Mazenc, R. Mahony et R. Lozano, " Forwarding control of a scale model autonomous helicopter : a lyapunov control design ",in Proc. of Conf. Decision Control, Hawaii, pp 3960-3965, 2003.

[77] R. Middleton et J. Freudenberg, " Non-pathological sampling for generalized sampled-data hold functions ", Automatica, vol.31, no.2, pp 315-319, 1995.

[78] S. Monaco et D. Normand-Cyrot, " A unified representation for nonlinear discrete-time and sampled dynamics ", Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control , vol.7, pp 477-503, 1997.

[79] S. Monaco, D. Normand-Cyrot et A. Madani, " A backstepping-like approach to adaptive Control in discrete-time ", European journal of Control, vol.6, pp 298-321, 2000.

[80] S. Monaco et D. Normand-Cyrot, " Issue on nonlinear digital control ", European Journal of Control, 7, pp 160-177, 2001.

[81] S. Monaco et D. Normand-Cyrot, " On the differential/difference representation of sampled dynamics ", in Proc. of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, pp 6596-6602, 2005.

[82] S. Monaco et D. Normand-Cyrot, " Some comments about normal forms under sampling ", in Proc. of the 2006 American Control conference , pp 1487-1492, 2006.

[83] D. Nesic, A.R. Teel et E. Sontag, " Formulas relating KL stability estimates of discrete-time and sampled-data nonlinear systems ", Systems and Control Letters, vol.38, pp 49-60, 1999.

[84] D. Nesic, A.R. Teel et P.V. Kokotovic, " On the design of a controller based on the discrete-time approximation of the nonlinear plant model ", in Proc. of the 1999 American Control Conference, pp 3474-3478, 1999.

[85] D. Nesic, A.R. Teel et P.V. Kokotovic, " Sufficient conditions for stabilization of sampled-data systems via discrete-time approximations ", Systems and Control Letters, vol.38, pp 259-270, 1999.

[86] D. Nesic et A.R. Teel, " Set stabilization of sampled-data nonlinear differential inclusions via their approximate discrete-time models ", in Proc. of the 39th Conference on Decision and Control, pp 2112-2117, 2000.

[87] D. Nesic et A.R. Teel, " Backstepping on the Euler approximate model for stabilization of sampled-data systems ", in Proc. of Conf. Decision Control, Orlando,FL, 2001.

[88] D. Nesic et D.S. Laila, " Input-to-state stabilization for nonlinear sampled-data systems via approximate discrete-time plant models ",in Proc. of IEEE Conference on Decision Control, Orlando,FL, pp 887-892, 2001.

[89] D. Nesic et D. Angeli, " Integral versions of ISS for sampled-data nonlinear systems via their approximate discrete-time models ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.47, pp 2033-2037, 2002.

[90] D. Nesic et A.R. Teel, " A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.49, no.7, pp 1103-1122, 2004.

[91] D. Nesic et L. Grüne, " Lyapunov based continuous-time nonlinear controller redesign for sampled-data implementation ", Automatica, vol.41, pp. 1143-1156, 2005.

[92] D. Nesic et L. Grüne, " A receding horizon control approach to sampled-data implementation of continuous-time controller ", Systems and Control Letters, vol.55, pp. 660-672, 2006.

[93] D. Nesic et A.R. Teel, " Stabilization of sampled-data nonlinear systems via Backstepping on their Euler approximate model ", à paraître dans Automatica, 2006.

[94] H.B. Penfold, I.M.Y. Mareels et R.J. Evans," A non-linear adaptive control algorithm based on Euler approximations ", in Proc. of the 29th Conference on Decision and Control, pp. 2712-2713, 1990.

[95] I.G. Polushin et H.J. Marquez, " On the sampled-data input-to-state stabilization of passive systems ", in Proc. of the American Control Conference, pp 3518-3522, 2002.

[96] I.G. Polushin et H.J. Marquez, " Multirate sampled-data stabilization of nonlinear systems ", in Proc. of the 2003 European Control Conference , Cambridge, 2003.

[97] C. Prieur, " Uniting local and global controllers with robustness to vanishing noise ", Math. of Control, Signal and Systems, no.14, pp. 143-172, 2001.

[98] M. Quincampoix et N. Seube, " Stabilisation of uncertain control systems through piecewise constant feedback ", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 218, pp 240-255, 1998.

[99] R. Sandoval-Rodriguez, C.T. Abdallah, et R.H. Byrne, " Effects of quantization, saturation and sampling time in multi output systems ", in Proc. of the 43rd Conference on Decision and Control, pp 4509-4514, 2004.

[100] S. Sastry, "Nonlinear Systems. Analysis, Stability and Control ", Springer, 1999.

[101] R. Sepulchre, M. Jankovic et P. Kokotovic, " Constructive Nonlinear Control ", Springer-Verlag, London, 1997.

[102] R. Sepulchre, M. Jankovic et P. Kokotovic, " Integrator forwarding : a new recursive nonlinear robust design ", Automatica, vol.33, pp 979-984, 1997.

[103] H. Shim et A.R. Teel, "Asymptotic controllability and observability imply semi-global practical asymptotic stabilizability by sampled-data output feedback ", Automatica, no.39, pp 441-454, 2003.

[104] J.J.E. Slotine et W. Li, " Applied nonlinear control ", Prentice Hall, New York, 1991.

[105] E.D. Sontag, " Smooth stabilization implies coprime factorization ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.34, pp 435-443, 1989.

[106] E.D. Sontag, " Comments on integral variants of ISS ", Systems and Control Letters, vol.34, pp 93-100, 1998.

[107] F. Sun, Z. Sun et P-Y. Woo, " Stable neural-network-based adaptive control for sampled-data nonlinear systems ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.9, pp 956-968, 1998.

[108] S.A. Svoronos, D. Papageorgiou et C. Tsiligiannis, " Discretization of nonlinear control systems via the Carleman linearization ", Chemical Engineering Science, vol.49, pp 3263-3267, 1994.

[109] V.I. Utkin, " Sliding modes in control optimization ", Springer Verlag, 1992.

[110] G.D. Warshaw, H.M. Schwartz et H. Asmer, " Stability and performance of sampled-data robot adaptive controllers ", in Proc. of the 1992 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp 95-104, 1992.

[111] G.D. Warshaw et H.M. Schwartz, " Sampled-data robot adaptive control with stabilizing compensation ", in Proc. of the 1994 American Control Conference, pp 602-608, 1994.

[112] H. Ye, A.N. Michel et L. Hou, " Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.43, no.4, pp 461-474, 1998.

[113] H. Ye, A.N. Michel et L. Hou, " Stability Analysis of Systems with Impulse Effects ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.43, pp 1719-1723, 1998.

[114] P.C. Yeh et P.V. Kokotovic, " Adaptive output feedback design for a class of nonlinear discrete-time systems ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.40, no.4, pp 1663-1668, 1995.

[115] J.I. Yuz, G.C. Goodwin et H. Garnier, " Generalized hold functions for fast sampling rates ", in Proc. of the 43rd Conference on Decision and Control, pp 1908-1913, 2004.

[116] J.I. Yuz et G.C. Goodwin, " On sampled-data models for nonlinear systems ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.50, pp 1477-1489, 2005.

[117] J.I. Yuz, " Sampled-data models for linear and nonlinear systems ", School Elect. Eng. Comput. Sci. Univ. Newcastle, Phd dissertation, 2005.

[118] Y. Zhang, C. Wen et Y.C. Soh, " Discrete-time robust backstepping adaptive control for nonlinear time-varying systems ", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.45, no.9, pp 1749-1755, 2000.

[119] J. Zhao et I. Kanellakopoulos, " Adaptive control of discrete-time strict feedback nonlinear systems ", in Proc. of American Control Conference, Albouquerque, NM, pp. 828-832, 1997.

[120] J. Zhao et I. Kanellakopoulos, " Discrete-time adaptive control of output-feedback nonlinear systems ", in Proc. of Conference on Decision and Control, pp 4326-4331, 1997.

[121] Y. Zheng, D.H Owens et S.A. Billings, " Slow sampling and stability of nonlinear sampled-data systems ", International Journal of Control, 51, pp 251-265, 1990.