



**HAL**  
open science

# Étude d'une classe d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires sur le groupe de Heisenberg

Houda Mokrani

► **To cite this version:**

Houda Mokrani. Étude d'une classe d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires sur le groupe de Heisenberg. Mathématiques [math]. Université de Rouen, 2009. Français. <NNT : >. <tel-00461835>

**HAL Id: tel-00461835**

**<https://theses.hal.science/tel-00461835v1>**

Submitted on 5 Mar 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# THÈSE

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE ROUEN

présentée par

Madame MOKRANI HOUDA

**Discipline** : Mathématiques  
**Spécialité** : Équations aux dérivées partielles

## Étude d'une classe d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires sur le groupe de Heisenberg

Date de soutenance : 7 Décembre 2009

### Composition du Jury

Président	:	MR. CLAUDE ZUILY ,	Professeur, Université de Paris 11
Rapporteurs	:	MME. HAJER BAHOURI,	Professeur, Faculté des Sciences de Tunis
		MR. SAMI MUSTAPHA,	Professeur, Université de Paris 6
Examineurs	:	MR. NORDINE MIR,	Professeur, Université de Rouen
		MR. LÉO GLANGETAS,	Professeur, Université de Rouen
Directeurs de Thèse	:	MR. CHAO-JIANG XU,	Professeur, Université de Rouen

Thèse préparée à l'Université de Rouen  
Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, UMR-CNRS 6085



# Remerciements

J'exprime ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, le professeur Xu Chao-Jiang, qui a su me guider pendant mon mémoire de DEA, puis pendant ma thèse. Je le remercie pour l'aide compétente qu'il m'a apportée, pour sa grande patience et son encouragement à finir ce travail.

Je remercie le professeur Claude Zuily, qui a accepté, et j'en suis très honorée, de présider cette thèse. Je remercie également les professeurs Hajer Bahouri et Sami Mustapha d'avoir rapporté sur ma thèse. Leurs remarques et leurs suggestions m'ont été très précieuses. Je suis très heureuse qu'ils aient tous les deux accepté de faire partie de mon jury.

Un merci particulier aux professeurs Nordine Mir et Léo Glangetas pour leurs nombreux conseils, leurs aides constantes, et qui m'ont fait un très grand plaisir d'être membre de mon jury, je les en remercie chaleureusement.

Je remercie les membres du laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem de Rouen, son Directeur Thierry de La Rue, Elise Janvresse d'avoir accepté de corriger une partie de ma thèse, Gérard Grancher pour sa disponibilité constante. Je voudrais exprimer aussi mes sincères remerciements aux professeurs Patricia Donato et Paul Raynaud de Fitte, qui m'ont soutenu dans les moments de doutes et m'ont toujours redonné confiance.

Une pensée particulière à Isabelle Lamitte, Edwige Auvray, Marguerite Losada et Marc Jolly, pour leurs disponibilités, leurs efficacités et leurs soutiens.

J'adresse tout mon respect à tous mes professeurs, particulièrement, mes professeurs qui m'ont enseigné en DEA ainsi que mes professeurs de la faculté des Sciences de Bizerte et surtout mon professeur Hajer Bahouri de la faculté de Tunis qui grâce à ses séminaires, j'ai découvert mon encadreur de thèse.

Tout le long de cette thèse, des liens se tissent, se consolident et se ramifient comme de très belles fractales, ma pensée est pour mes compagnants de route : Aïcha, Ouerdia, Islam, Karima, Manel, Nadira, Saturnin, Nicholas, Olivier, Jean-Charles, . . . .

Je dédie ma thèse à mes très chers parents, Youssef et Jamila, pour tout ce qu'ils m'ont apporté depuis toujours et de m'avoir soutenu dans les moments de joie et de tristesse. Sans doute, je n'oublie pas mes deux frères Hichem et Mohamed-Ali, mon cher époux Issa et mes chers amis Ghazi et Ali.

*Puis un maître dit, Parle-nous de l'Enseignement.*

*Il répondit :*

*Personne ne peut vous apprendre quoi que ce soit qui ne repose déjà au fond d'un demi-sommeil dans l'aube de votre connaissance.*

*Le maître qui marche parmi les disciples, à l'ombre du temple, ne donne pas de sa sagesse, mais plutôt de sa foi et de sa capacité d'amour.*

*S'il est vraiment sage, il ne vous invite pas à entrer dans la demeure de sa sagesse. Il vous conduit jusqu'au seuil de votre esprit.*

*L'astronome peut vous parler de son entendement de l'espace. Il ne peut vous donner son entendement.*

*Celui qui est versé dans la science des nombres peut décrire les régions du poids et de la mesure. Il ne peut vous y emmener.*

*Car la vision d'un être ne prête pas ses ailes à d'autres.*

*GIBRAN KHALIL GIBRAN*





# Study of a class of Semilinear Partial Differential Equations on the Heisenberg Group

## Abstract

The aim of this thesis is the study of a class of semi-linear sub-elliptic equations with a singular potential on the Heisenberg group  $\mathbb{H}^d$ . The nonlinear term in this equation is controlled by Sobolev's inequality and the singularity is controlled by Hardy's inequality. This problem is a generalization of the classical problem on the eucliden space  $\mathbb{R}^n$ .

The first results of this thesis is a sharp version of Hardy type inequality on the Heisenberg group, this is also a generalization of the classical Hardy inequality with a singular potential supported by an isolated point. The main results of this thesis is the existence of weak solution of Dirichlet problem for a semi-linear sub-elliptic equations with a singular potential on the Heisenberg group. The main tools are the variational methods, Rabinowitz's Theorem and Palais-Smale Theorem.

Key words : Heisenberg group, Hardy inequalities, Semilinear sub-elliptic equations, Singular potential.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Study of a class of Semilinear Partial Differential Equations on the Heisenberg Group</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>xiii</b>

## Chapitre 1

### Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^d$

1.1	Groupe de Lie . . . . .	1
1.1.1	L'application exponentielle . . . . .	3
1.2	Groupe de Carnot . . . . .	5
1.2.1	Groupe de Lie homogène . . . . .	5
1.2.2	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie homogène . . . . .	5
1.2.3	L'opérateur sous-Laplacien d'un groupe de Lie stratifié . . . . .	7
1.2.4	Distance de Carnot-Carathéodory . . . . .	8
1.3	Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^1$ . . . . .	10
1.4	Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^d$ . . . . .	12
1.4.1	Solution fondamentale du Sous-Laplacien . . . . .	15

## Chapitre 2

### Espaces de Sobolev

2.1	Espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	21
2.2	Espaces de Sobolev sur $\mathbb{H}^d$ . . . . .	23
2.2.1	Dilatation et masse de Dirac . . . . .	24
2.3	Inégalités géométriques sur $\mathbb{H}^d$ . . . . .	26
2.3.1	Inclusion compacte . . . . .	26
2.3.2	Inégalité de Poincaré sur $\mathbb{H}^d$ . . . . .	28

2.3.3	Inégalité de Sobolev sur $\mathbb{H}^d$ . . . . .	29
2.4	Remarques . . . . .	32

### Chapitre 3

#### Théorie de Littlewood-Paley sur $\mathbb{H}^d$

3.1	Théorie de Littlewood-Paley sur $\mathbb{H}^d$ . . . . .	35
3.1.1	Transformation de Fourier de fonctions radiales . . . . .	35
3.1.2	Décomposition de Littlewood-Paley . . . . .	37
3.2	Espaces de Besov sur $\mathbb{H}^d$ . . . . .	37
3.2.1	Définitions et propriétés . . . . .	38
3.2.2	Espace de Sobolev homogène via la décompositon dyadique . . . . .	40

### Chapitre 4

#### Inégalités de Hardy dans $\mathbb{H}^d$

4.1	Densité des fonctions régulières dans $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ . . . . .	46
4.1.1	Densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \{\tilde{w}\})$ dans $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ . . . . .	46
4.1.2	Densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \Sigma)$ dans $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ . . . . .	48
4.2	Singularité en un point de $\mathbb{H}^d$ . . . . .	48
4.2.1	Inégalité de Hardy dans $\mathbb{R}^d$ . . . . .	48
4.2.2	Inégalité de Hardy dans $\mathbb{H}^d$ pour $d > 1$ . . . . .	50
4.2.3	Inégalité de Hardy dans $\mathbb{H}^d$ pour $d \geq 1$ . . . . .	51
4.3	Singularité sur une hypersurface de $\mathbb{H}^d$ . . . . .	55
4.3.1	Substitution de $\rho_c$ et de $R_{\mathbb{H}^d}$ . . . . .	56
4.3.2	Le cas d'une sous variété de $\mathbb{H}^1$ . . . . .	59

### Chapitre 5

#### Théorie des points critiques

5.1	Introduction . . . . .	63
5.2	Le théorème du col . . . . .	65
5.2.1	Condition de Palais-Smale . . . . .	65
5.2.2	Lemme de déformation . . . . .	66
5.2.3	Le théorème du col . . . . .	69
5.3	Le théorème de Rabinowitz . . . . .	70
5.3.1	Le degré topologique de Brouwer . . . . .	71
5.3.2	Théorème de Rabinowitz . . . . .	72
5.3.3	Points critiques multiples . . . . .	74

---

5.4	Théorie spectrale d'un opérateur compact . . . . .	75
-----	--	----

**Chapitre 6****Problème de Dirichlet**

6.1	Rappel des résultats classiques . . . . .	77
6.2	Équation d'Euler-Lagrange . . . . .	80
6.3	La condition de Palais-Smale . . . . .	83
6.4	Étude spectrale du problème . . . . .	85
6.5	Point critique dans le cas où $0 < \lambda < \lambda_{1,\mu}$ . . . . .	87
6.6	Point critique dans le cas où $\lambda \geq \lambda_{1,\mu}$ . . . . .	88

**Annexe A**

---

**Bibliographie**



# Introduction

Notre thèse se situe dans le cadre de l'analyse des équations aux dérivées partielles semilinéaires sur le groupe de Heisenberg à structure variationnelle de type

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^d} u - a(z, s)u = f(u) & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{H}^d$  de bord  $\partial\Omega$  est régulier, et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction non linéaire. Rappelons que le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^d$  est le groupe  $\mathbb{R}^{2d+1}$  muni d'une loi de multiplication non commutative

$$(x, y, s) \circ (x', y', s') = (x + x', y + y', s + s' + 2(yx' - y'x)).$$

C'est un groupe de Lie homogène muni d'une structure de dilatations

$$\begin{aligned} \delta_a(x, y, s) &= (ax, ay, a^2s), \quad a > 0 \\ \delta_a &= -\delta_{|a|}, \quad a < 0, \end{aligned} \quad (2)$$

et dont la dimension homogène est égale à  $Q = 2d + 2$ . Le système de champs de vecteurs suivant

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j \partial_s, \quad Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j \partial_s, \quad j = 1, \dots, d \quad (3)$$

est invariant à gauche par rapport à la structure du groupe, il est aussi appelé système de champs de vecteurs horizontaux. L'algèbre de Lie de  $\mathbb{H}^d$  est engendrée par ce système, et vérifie :

$$[X_j, Y_j] = -4\partial_s \equiv -4S, \quad \text{et } [X_j, S] = [Y_j, S] = 0, \quad 1 \leq j \leq d.$$

Le Laplacien sur le groupe de Heisenberg  $\Delta_{\mathbb{H}^d}$  s'écrit

$$\Delta_{\mathbb{H}^d} = \sum_{j=1}^d (X_j^2 + Y_j^2). \quad (4)$$

La distance homogène sur  $\mathbb{H}^d$  est donnée par

$$d_{\mathbb{H}^d}(x, y, s; x', y', s') = \rho\left((x', y', s')^{-1} \circ (x, y, s)\right),$$

où

$$\rho(x, y, s) = (|x|^2 + |y|^2)^2 + |s|^2)^{1/4}. \quad (5)$$

Nous rappelons maintenant certains résultats obtenus dans le cas euclidien du problème (1) : en effet, soit  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ , et dont le bord  $\partial\Omega$  est régulier. Le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

est appelé le problème de Brézis et Nirenberg (voir [37]). L'exposant  $2^* = \frac{2d}{d-2}$  est indice critique pour les inclusions de Sobolev, dans le sens où l'injection  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^{2^*}(\Omega)$  est continue mais pas compacte. Dans [37], ils ont montré que si  $d \geq 4$  et  $0 < \lambda < \lambda_1$ , où  $\lambda_1$  est la première valeur propre de  $-\Delta$  dans  $\Omega$ , le problème (6) admet une solution positive, et que si  $d = 3$  et il existe une constante  $\lambda^*$  telle que pour  $0 < \lambda^* < \lambda < \lambda_1$ , le problème (6) admet une solution positive.

En ajoutant un potentiel singulier dans l'équation (6), on trouve le problème semiliénaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} = \lambda u + |u|^{2^*-2}u & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Si  $0 \in \Omega$ , le potentiel  $V(x) \equiv \frac{1}{|x|^2}$  est contrôlé par l'inégalité de Hardy suivante :

$$\left(\frac{d-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (8)$$

Jannelli a étudié le problème (7) dans son article [99] en 1999 où il a montré que si  $\mu \leq \bar{\mu} - 1$ , avec  $\bar{\mu} = \left(\frac{d-2}{2}\right)^2$ , alors le problème (7) admet une solution pour tout  $0 < \lambda < \lambda_1$ . En 2001, Ferrero et Gazzola ont montré dans leur article [71] que si  $d \geq 4$  et  $\mu \leq \bar{\mu} - 1$ , le problème (7) admet une solution non triviale pour tout  $\lambda > 0$  telle que  $\lambda \notin \sigma_\mu$ , où  $\sigma_\mu$  est le spectre de l'opérateur  $-\Delta - \frac{\mu}{|x|^2}$ . Par ailleurs, dans son papier [53] paru en 2006, J. Chen a obtenu un résultat incluant le cas où  $\lambda \in \sigma_\mu$ ,  $d \geq 7$  et  $0 \leq \mu < \bar{\mu} - 4$ . Il a montré que sous ces nouvelles hypothèses, le problème (7) admet une solution non triviale pour tout  $\lambda > 0$ .

Le cas sous-critique  $2 < p < 2^*$  se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} = \lambda u + |u|^{p-2}u & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

S. Weng et Y. Li [154] ont montré que si  $0 \leq \mu < \bar{\mu}$ , le problème (9) admet une solution non triviale pour tout  $\lambda > 0$  et une solution positive pour  $0 < \lambda < \lambda_1$ , où  $\lambda_1$  est la première valeur propre de l'opérateur  $-\Delta - \mu V$  et  $\bar{\mu}$  est la meilleure constante de l'inégalité de Hardy. Évidemment, l'historique que nous venons de tracer ci-dessus est loin d'être exhaustif, néanmoins il est à la base de notre travail dans cette thèse.

Quand on se place sur le groupe de Heisenberg, l'indice critique de l'inégalité de Sobolev est  $2^* \equiv \frac{2Q}{Q-2} = 2 + \frac{2}{d}$ , où  $Q$  est la dimension homogène sur  $\mathbb{H}^d$  (voir [103]). L'analogue

du Laplacien sur  $\mathbb{R}^d$  est le Laplacien sur le groupe de Heisenberg  $\Delta_{\mathbb{H}^d}$ , et il s'avère que l'analogie du potentiel  $V(x) = \frac{1}{|x|^2}$  est formulé dans l'article P. Baras et J. A. Goldstein [20] paru en 1984, et il est donné par une fonction radiale :

$$V(z, s) = \frac{|z|^2}{|z|^4 + s^2},$$

où  $z = (x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ,  $|z|^2$  est la norme euclidienne de  $z \in \mathbb{R}^{2d}$ . L'inégalité de Hardy usuelle (8) a une forme différente de celle donnée par Garofalo et Lanconelli dans leur article [80] paru en 1990 :

$$\left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^d} \frac{|z|^2}{|z|^4 + s^2} |u(z, s)|^2 dz ds \leq \int_{\mathbb{H}^d} |\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 dz ds, \quad \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{H}^d \setminus \{0\}), \quad (10)$$

où  $\nabla_{\mathbb{H}^d} = (X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_d)$  est le gradient sur  $\mathbb{H}^d$ .

Le premier résultat dans cette thèse est une amélioration de l'inégalité de Hardy sur le groupe de Heisenberg. Nous avons obtenu le théorème suivant :

**Théorème 0.0.1** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{H}^d$  avec  $0 \in \Omega$ . Pour tout  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , on a l'inégalité suivante :*

$$\left(\frac{d^2}{d+1}\right)^2 \int_{\Omega} \frac{|u(z, s)|^2}{\rho(z, s)^2} dz ds \leq \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (11)$$

La singularité du potentiel dans l'inégalité (11) est exactement analogue à celle du potentiel dans l'inégalité de Hardy classique (8), de plus elle est plus forte que celle dans l'inégalité (10).

La deuxième partie de la thèse est consacrée à l'étude du problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^d} u - \mu V u = \lambda u + |u|^{p-2} u & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

où  $2 < p < 2^*$  avec  $2^* \equiv \frac{2Q}{Q-2} = 2 + \frac{2}{d}$  est l'indice critique de l'inégalité de Sobolev et  $V$  est un potentiel positif admettant une singularité à l'origine, est contrôlé par l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega} V(z, s) |u(z, s)|^2 dz ds \leq \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En utilisant les inégalités de Hardy (10) et (11), le potentiel  $V$  peut prendre les valeurs suivantes :

$$V(z, s) = \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 \frac{|z|^2}{|z|^4 + s^2},$$

ou

$$V(z, s) = \left(\frac{d^2}{d+1}\right)^2 \frac{1}{\rho(z, s)^2}.$$

Le principal résultat de cette partie est le théorème suivant :

**Théorème 0.0.2** *Si  $0 \leq \mu < 1$ , alors pour tout  $\lambda > 0$ , le problème de Dirichlet semilinéaire (12) admet une solution non triviale dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ .*

L'existence des solutions est démontrée en utilisant la théorie des points critiques, puisque les solutions du problème (12) est précisément les points critiques de la fonctionnelle d'Euler-Lagrange associée :

$$I_{\mu,\lambda}(u) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ |\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 - \mu V(z, s) |u(z, s)|^2 \right] dz ds - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u(z, s)|^p dz ds - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u(z, s)|^2 dz ds, \quad (13)$$

pour tout  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ . Pour cela, on distingue deux cas. Dans le cas où  $0 < \lambda < \lambda_{1,\mu}$ , on montre que la fonctionnelle  $I_{\mu,\lambda}$  admet une valeur critique, et la démonstration est basée sur le théorème du col. Dans le cas où  $\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1}$  avec  $\lambda_k$  la  $k$ -ième valeur propre de l'opérateur  $-\Delta_{\mathbb{H}^d} - \mu V$ , on montre que la fonctionnelle  $I_{\mu,\lambda}$  satisfait les conditions du théorème du Rabinowitz.

Cette thèse est organisée de la façon suivante : nous commençons par rappeler quelques notions de groupe de Lie homogène et la définition du groupe de Heisenberg. Ceci fait l'objet du premier chapitre. Le second chapitre est un rappel de certaines inégalités géométriques sur le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^d$ , comme l'inégalité de Poincaré et les inclusions de Sobolev qui nous seront utiles au niveau du chapitre 6. On rappelle également au niveau du chapitre 3, la théorie de Littlewood-Paley et son utilité pour définir les espaces de Besov sur le groupe de Heisenberg et donner une démonstration de l'inégalité de Hardy dans  $H^s(\mathbb{H}^d)$  pour  $0 < s < \frac{Q}{2}$  au niveau du chapitre 4.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude des inégalités de Hardy sur le groupe de Heisenberg. On démontre ces inégalités en utilisant une intégration suivant un champ de vecteurs radial. On a aussi démontré l'inégalité de Hardy dans le cas où le potentiel admet une singularité sur sous variété. Dans le chapitre 6, nous étudions l'existence de solutions du problème de Dirichlet semilinéaire (12). Dans ce cadre, l'existence de solutions est liée aux propriétés géométriques de la fonctionnelle énergie et au paramètre  $\lambda$ . Pour cela, on a eu besoin d'étudier en premier lieu le problème spectral associé à l'opérateur  $-\Delta_{\mathbb{H}^d} - \mu V$  en s'inspirant de l'article de J. Chen [53]. L'étape suivante est de démontrer l'existence d'un minimum local de l'énergie en utilisant la théorie des points critiques comme les théorèmes du col et de Rabinowitz qu'on a rappelé au chapitre 5.





# Chapitre 1

## Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^d$

Le groupe de Heisenberg est un exemple particulier d'une large classe de groupes de Lie nilpotents, homogènes et stratifiés appelé souvent groupe de Carnot. La première partie de ce chapitre est un bref rappel des notions de géométrie de groupe de Lie et d'algèbre de Lie. Dans la deuxième partie, se concentre plus particulièrement sur les groupes de Heisenberg  $\mathbb{H}^1$  et  $\mathbb{H}^d$  et on se ramène aux références suivantes [46, 75, 95, 96, 144, 146] pour plus amples détails sur l'aspect géométrie et analyse sur le groupe de Heisenberg.

### 1.1 Groupe de Lie

**Définition 1.1.1** *Un groupe de Lie  $\mathbb{G}$  est une variété différentiable de classe  $C^\infty$  munie d'une loi de groupe  $\circ : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$  telle que les applications suivantes (produit et inversion)*

$$(x, y) \mapsto x \circ y \in \mathbb{G}, \quad x \mapsto x^{-1} \in \mathbb{G}$$

sont de classe  $C^\infty$ .

#### Exemples 1.1.2

1.  $(\mathbb{R}^n, +)$ ,  $S^1 \equiv \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ .
2.  $GL(n, \mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}); \det M \neq 0\}$  : le groupe linéaire réel des matrices inversibles de  $\mathbb{R}^n$  est un groupe de Lie réel.
3.  $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A^T A = I\}$  : le groupe orthogonal des endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  qui préservent le produit scalaire canonique.

**Définition 1.1.3 (Translations sur  $\mathbb{G}$ ).** *Une translation à gauche sur un groupe de Lie  $\mathbb{G}$  est le difféomorphisme défini par*

$$L_a : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G} \tag{1.1}$$

$$g \mapsto L_a g = a \circ g. \tag{1.2}$$

Une translation à droite est le difféomorphisme de  $\mathbb{G}$  défini par

$$\begin{aligned} R_a : \mathbb{G} &\rightarrow \mathbb{G} \\ g &\mapsto R_a g = g \circ a. \end{aligned} \quad (1.3)$$

**Remarque 1.1.4** Soient  $g$  et  $h$  deux éléments de  $\mathbb{G}$ , on a

$$\begin{aligned} L_g \circ L_h &= L_{g \circ h} \in \mathcal{C}^\infty, \quad R_g \circ R_h = R_{h \circ g} \in \mathcal{C}^\infty \\ L_g \circ L_{g^{-1}} &= R_g \circ R_{g^{-1}} = I_{\mathbb{G}}. \end{aligned}$$

**Définition 1.1.5 (Champs de vecteurs invariants à gauche)**

Soient  $\mathbb{G}$  est un groupe de Lie et  $L_a$  le difféomorphisme de  $\mathbb{G}$  donné par (1.1). On note par  $(L_a)_*$  la différentielle de  $L_a$  définie par

$$(L_a)_*(X_g) = (T_g L_a)(X), \quad \forall a, g \in \mathbb{G},$$

où  $T_g \mathbb{G}$  est l'ensemble des vecteurs tangents au point  $g \in \mathbb{G}$ . Un champ de vecteurs  $X$  est invariant à gauche si

$$(L_a)_*(X_g) = X_{a \circ g}, \quad \forall a, g \in \mathbb{G}.$$

Le théorème suivant nous donne une interprétation géométrique de la définition précédente.

**Théorème 1.1.6** Si  $\gamma$  est une courbe intégrale de  $X$  passant par l'élément neutre  $e$  à l'instant  $t = 0$ , alors le champ de vecteurs défini par  $X_g = \dot{\sigma}_g(0)$  avec  $\sigma_g(t) = g\gamma(t)$ , est invariant à gauche.

**Démonstration.** Soient  $a, g \in \mathbb{G}$ . On a

$$\begin{aligned} (L_a)_* X_g &= (L_a)_*(\dot{\sigma}_g(0)) = \frac{d}{dt} \left( L_a \circ \sigma_g(t) \right)_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left( a \circ g\gamma(t) \right)_{t=0} = \dot{\sigma}_{a \circ g}(0) = X_{a \circ g}. \end{aligned}$$

Donc le champ de vecteurs  $X_g$  est invariant à gauche □

**Définition 1.1.7** Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathbb{R}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  muni d'une loi interne bilinéaire  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , appelée le crochet de Lie tels que pour tous  $X, Y$  et  $Z$  éléments de  $\mathfrak{g}$ , on a :

- i)  $[X, Y] = -[Y, X]$  (antisymétrie),
- ii)  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  (l'identité de Jacobi).

**Remarques 1.1.8** Si  $X_1, \dots, X_m$  sont des éléments d'une algèbre de Lie, alors un système de générateurs de l'algèbre engendrée par  $\{X_1, \dots, X_m\}$ , que l'on note  $\text{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}$  est donné par les commutateurs

$$X_I := [X_{i_1}, [X_{i_2}, [X_{i_3}, \dots [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] \dots]]],$$

où  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}$  et  $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 1.1.9** Soient  $X$  et  $Y$  sont deux champs de vecteurs invariants à gauche. Pour tous  $a, g \in \mathbb{G}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} (L_a)_*(X_g + \lambda Y_g) &= (L_a)_*(X_g) + \lambda(L_a)_*(Y_g) = X_{aog} + \lambda Y_{aog} = (X + \lambda Y)_{aog}, \\ (L_a)_*([X, Y]_g) &= [(L_a)_*(X_g), (L_a)_*(Y_g)] = [X, Y]_{aog}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

**Définition 1.1.10 (Algèbre de Lie d'un groupe de Lie)**

Soit  $\mathbb{G}$  un groupe de Lie. L'ensemble de tous les champs de vecteurs invariants à gauche de  $\mathbb{G}$  muni de l'opération crochet de Lie est une algèbre de Lie, que l'on note  $L(\mathbb{G})$ .

**Théorème 1.1.11** Soit  $\mathbb{G}$  un groupe de Lie et  $L(\mathbb{G})$  son algèbre. Alors,

- i)  $L(\mathbb{G})$  est un espace vectoriel et l'application de  $L(\mathbb{G}) \rightarrow T_e\mathbb{G}$  qui à  $X \mapsto X_e$  est un isomorphisme entre  $L(\mathbb{G})$  et l'espace tangent  $T_e\mathbb{G}$  à  $\mathbb{G}$  en  $e$ . Par conséquent,  $\dim(L(\mathbb{G})) = \dim(T_e\mathbb{G}) = \dim(\mathbb{G})$ .
- ii) Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs invariants à gauche est invariant à gauche.

**Démonstration.** Soit  $e$  l'élément neutre de  $\mathbb{G}$ . Pour tout vecteur  $X_e \in T_e(\mathbb{G})$ , un champ de vecteurs  $X_a$  est défini par

$$X_a \equiv (L_a)_*X_e, \quad \forall a \in \mathbb{G}. \quad (1.5)$$

D'autre part, on a pour tout  $g \in \mathbb{G}$ ,

$$(L_g)_*X_a = (L_g)_*((L_a)_*X_e) = ((L_gL_a))_*X_e = (L_{g oa})_*X_e = X_{g oa}.$$

Donc, le champ de vecteurs  $X_a$  est invariant à gauche et  $X_a \in L(\mathbb{G})$ . Ainsi, pour tout élément de  $L(\mathbb{G})$  qui satisfait (1.5), on a un isomorphisme de  $T_e(\mathbb{G}) \rightarrow L(\mathbb{G})$ .  $\square$

### 1.1.1 L'application exponentielle

**Définition 1.1.12 (La courbe exponentielle  $\exp_X(t)$ )**

Soit  $\mathbb{G}$  un groupe de Lie et  $L(\mathbb{G})$  son algèbre de Lie. Soient  $X \in L(\mathbb{G})$  et  $\gamma(t)$  la courbe intégrale de  $X$  passant par l'élément neutre de  $\mathbb{G}$  à l'instant  $t = 0$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\exp_X$  l'application  $\exp_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}$  définie par  $\exp_X(t) \equiv \gamma(t)$  et qui vérifie

$$\begin{cases} \exp_X(0) &= e, \\ d_t \exp_X \left( \frac{d}{dr} \Big|_{r=t} \right) &= X_{\exp_X(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.6)$$

**Remarques 1.1.13** Soit  $f \in C^\infty(\mathbb{G}, \mathbb{R})$ . L'équation (1.6) est équivalente à

$$\left( \frac{d}{dr} \right)_{r=t} (f(\exp_X(r))) = X_{\exp_X(t)}(f).$$

En particulier quand  $t = 0$ , on a

$$\left( \frac{d}{dr} \right)_{r=0} (f(\exp_X(r))) = X_e(f).$$

**Proposition 1.1.14** Soit  $(\mathbb{G}, \circ)$  un groupe de Lie et  $L(\mathbb{G})$  son algèbre de Lie. Si  $X \in \mathfrak{g}$ , alors on a,

- i)  $\exp_X(r + s) = \exp_X(r) \circ \exp_X(s)$ , pour tous  $r, s \in \mathbb{R}$ .
- ii)  $\exp_X(-t) = (\exp_X(t))^{-1}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
- iii)  $\exp_X(0) = e$ .
- iv) Pour tout  $x \in L(\mathbb{G})$ , l'application définie par  $t \mapsto x \circ (\exp_X(t))$ , est l'unique courbe intégrale de  $X$  passant par  $x$  à l'instant  $t = 0$ .

**Définition 1.1.15 (L'application exponentielle)**

Soient  $(\mathbb{G}, \circ)$  un groupe de Lie et  $L(\mathbb{G})$  son algèbre de Lie. En utilisant les notations de la définition 1.1.12, on pose

$$\begin{aligned} \text{Exp} : L(\mathbb{G}) &\longrightarrow \mathbb{G} \\ X &\mapsto \text{Exp}(X) := \exp_X(1). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Cette application  $\text{Exp}$  est appelée l'application exponentielle associée au groupe de Lie  $\mathbb{G}$ .

**Proposition 1.1.16** Soit  $(\mathbb{G}, \circ)$  un groupe de Lie et  $L(\mathbb{G})$  son algèbre de Lie. Pour tout  $X \in L(\mathbb{G})$ , on a

- i)  $\text{Exp}(tX) = \exp_X(t)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,
- ii)  $\text{Exp}((r + s)X) = \text{Exp}(rX) \circ \text{Exp}(sX)$ , pour tous  $r, s \in \mathbb{R}$ .
- iii)  $\text{Exp}(-tX) = \left(\text{Exp}(tX)\right)^{-1}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**Démonstration.** Fixons  $t \in \mathbb{R}$ . On considère l'application définie par  $s \mapsto \gamma(s) \equiv \exp_X(st)$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Comme  $\gamma(0) = \exp_X(0) = e$  et

$$\dot{\gamma}(s) = tX_{\exp_X(st)} = tX_{\gamma(s)},$$

alors  $\gamma$  est la courbe intégrale de  $tX$  et d'après la définition 1.1.12, on a  $\gamma(s) = \exp_{tX}(s)$ . Par suite,  $\exp_X(st) = \exp_{tX}(s)$ , ainsi pour  $s = 1$ , on obtient  $\exp_X(t) = \exp_{tX}(1) = \text{Exp}(tX)$ . D'autre part, on a

$$\text{Exp}((r + s)X) = \exp_X(r + s) = \exp_X(r) \circ \exp_X(s) = \text{Exp}(rX) \circ \text{Exp}(sX),$$

et

$$\text{Exp}(-tX) = \exp_X(-t) = (\exp_X(t))^{-1} = (\text{Exp}(tX))^{-1}.$$

□

**Définition 1.1.17 (La formule de Campbell-Hausdorff)**

Soient  $\mathbb{G}$  un groupe de Lie et  $L(\mathbb{G}) = T_e\mathbb{G}$  son algèbre de Lie. Il existe un voisinage  $V$  de 0 dans  $L(\mathbb{G})$  et un voisinage  $U$  de  $e$  dans  $\mathbb{G}$  telle que la restriction de l'application exponentielle  $\text{Exp} : V \longrightarrow U$  soit un difféomorphisme. L'application inverse :  $U \longrightarrow V$  s'appelle le logarithme et s'écrit  $\text{Log}$ . Si deux éléments  $X$  et  $Y$  de  $L(\mathbb{G})$  sont suffisamment proches de l'origine, alors la formule de Campbell-Hausdorff donne l'expression de

$\text{Log}(\text{Exp}(X)\text{Exp}(Y))$  en tant que série entière dans l'algèbre de Lie engendrée par  $X$  et  $Y$  :

$$\begin{aligned} \text{Exp}(X)\text{Exp}(Y) = \text{Exp}\left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] + \frac{1}{12}[Y, [Y, X]] \right. \\ \left. + \frac{1}{24}[Y, [X, [Y, X]]] + \dots\right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Voir le papier de L.W. Tu [150] pour la démonstration de (1.8).

## 1.2 Groupe de Carnot

### 1.2.1 Groupe de Lie homogène

**Définition 1.2.1** Un groupe de Lie  $\mathbb{G}$  est homogène, s'il est muni d'une structure de groupe de Lie et d'une famille de dilatations  $\{\delta_a\}_{a>0}$  qui vérifie la propriété suivante : Il existe  $N$  entiers  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$  avec  $1 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_N$ , tel que

$$\delta_a : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}, \quad \delta_a(x_1, \dots, x_N) \equiv (a^{\sigma_1}x_1, \dots, a^{\sigma_N}x_N), \quad (1.9)$$

est un automorphisme de groupe pour tout  $a > 0$ .

En effet,  $\{\delta_a\}_{a>0}$  vérifie

$$\begin{aligned} \delta_a(x \circ y) &= \delta_a(x) \circ \delta_a(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{G}, \quad a > 0, \\ \delta_a(\delta_b(x)) &= \delta_{ab}(x) \quad \forall x \in \mathbb{G}, \quad a, b > 0, \\ (\delta_a)^{-1}(x) &= \delta_{a^{-1}}(x), \quad \forall x \in \mathbb{G}, \quad a > 0. \end{aligned}$$

Si on note  $e$  l'élément neutre de  $\mathbb{G}$ , alors  $\delta_a(e) = e$ , pour tout  $a > 0$ , implique que  $e = 0$ . La dimension homogène de  $\mathbb{G}$  par rapport à la dilatation (1.9) est donnée par la somme des exposants de la dilatation :  $Q = \sum_{j=1}^N \sigma_j$ .

### 1.2.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie homogène

Rappelons que les exposants  $\sigma_j$  de la dilatation  $\delta_a$  d'un groupe de Lie homogène  $\mathbb{G}$  satisfaisant  $1 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_N$  peuvent être regroupés en posant

$$\begin{cases} n_1 = \sigma_j & \text{pour } 1 \leq j \leq N_1, \\ n_2 = \sigma_j & \text{pour } N_1 < j \leq N_1 + N_2, \\ \vdots & \\ n_r = \sigma_j & \text{pour } N_1 + \dots + N_{r-1} < j \leq N_1 + \dots + N_{r-1} + N_r, \end{cases} \quad (1.10)$$

tels que

$$n_1 < n_2 < \dots < n_r, \quad N_1 + N_2 + \dots + N_r = N.$$

Soit  $(Z_1, \dots, Z_N)$  une base de  $L(\mathbb{G})$  l'algèbre de Lie de  $\mathbb{G}$ . Posons

$$\begin{aligned} V_1 &= \langle \{Z_j, 1 \leq j \leq N_1\} \rangle, \\ V_i &= \langle \{Z_j, N_1 + \dots + N_{i-1} < j \leq N_1 + \dots + N_{r-1} + N_i\} \rangle, \text{ pour } i = 2, \dots, r. \end{aligned}$$

Alors,

$$L(\mathbb{G}) = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r.$$

**Définition 1.2.2** *Un groupe de Lie  $\mathbb{G}$  est dit stratifié s'il est un groupe de Lie connexe et simplement connexe et si l'algèbre de Lie  $L(\mathbb{G})$  admet une stratification, i.e.,  $L(\mathbb{G}) = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$  où*

$$[V_1, V_{i-1}] = V_i, \quad 2 \leq i \leq r, \quad [V_1, V_r] = \{0\}.$$

**Définition 1.2.3** *Soient  $\mathbb{G}$  un groupe de Lie homogène et  $L(\mathbb{G})$  son algèbre de Lie. On définit la dilatation sur  $L(\mathbb{G})$  comme suit : Si  $X \in L(\mathbb{G})$  et  $(Z_1, \dots, Z_N)$  une base de  $L(\mathbb{G})$ , alors*

$$X = \sum_{j=1}^N c_j Z_j \Rightarrow \delta_a(X) = \sum_{j=1}^N c_j a^{\sigma_j} Z_j.$$

D'où la proposition suivante :

**Proposition 1.2.4** *Soit  $L(\mathbb{G})$  l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie homogène  $\mathbb{G}$ . La dilatation sur  $L(\mathbb{G})$  est un automorphisme d'algèbre de Lie de  $L(\mathbb{G})$  qui vérifie*

$$\delta_a([X, Y]) = [\delta_a(X), \delta_a(Y)], \quad \forall X, Y \in L(\mathbb{G}). \quad (1.11)$$

**Démonstration.** Soit  $(Z_1, \dots, Z_N)$  une base de  $L(\mathbb{G})$ . Si  $Z_i$  et  $Z_j$  sont homogènes de degré  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  respectivement, alors  $[Z_i, Z_j]$  est un champ de vecteurs homogène de degré  $\sigma_i + \sigma_j$ . En écrivant  $[Z_i, Z_j] = \sum_{k=1}^N c_k Z_k$  et  $\sigma_k = \sigma_i + \sigma_j$ , on a

$$\begin{aligned} \delta_a([Z_i, Z_j]) &= \delta_a\left(\sum_{k=1}^N c_k Z_k\right) = \sum_{k=1}^N c_k a^{\sigma_k} Z_k \\ &= a^{\sigma_i + \sigma_j} \sum_{k=1}^N c_k Z_k = a^{\sigma_i + \sigma_j} [Z_i, Z_j]. \end{aligned}$$

Posons maintenant  $X = \sum_{i=1}^N x_i Z_i$  et  $Y = \sum_{j=1}^N y_j Z_j$ , alors

$$\begin{aligned} \delta_a([X, Y]) &= \delta_a\left(\sum_{i,j=1}^N x_i y_j [Z_i, Z_j]\right) = \sum_{i,j=1}^N x_i y_j \delta_a([Z_i, Z_j]) \\ &= \sum_{i,j=1}^N x_i y_j a^{\sigma_i + \sigma_j} [Z_i, Z_j] = \left[ \sum_{i=1}^N c_i a^{\sigma_i} Z_i, \sum_{j=1}^N c_j a^{\sigma_j} Z_j \right] \\ &= [\delta_a(X), \delta_a(Y)]. \end{aligned}$$

□

**Définition 1.2.5** Soient  $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^N$  un groupe de Lie homogène et  $\{\delta_a\}_{a>0}$  une famille de dilatations de la forme

$$\delta_a(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(r)}) = (ax^{(1)}, a^2x^{(2)}, \dots, a^rx^{(r)}), \quad (1.12)$$

où  $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_i}$  pour  $i = 1, \dots, r$  et  $N_1 + N_2 + \dots + N_r = N$ . Notons par  $Z_i$  l'unique champ de vecteurs de  $L(\mathbb{G})$  qui coïncide avec  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  à l'origine pour  $i = 1, \dots, r$ . Si l'algèbre de Lie engendrée par  $(Z_1, \dots, Z_{N_1})$  est égale à  $L(\mathbb{G})$  l'algèbre de Lie de  $\mathbb{G}$ , alors on dit que  $\mathbb{G}$  est un groupe de Carnot homogène d'ordre  $r$ .

**Exemples 1.2.6** On munit le groupe  $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^2, \circ)$  d'une loi de composition définie par

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + x_1y_1), \\ (x_1, x_2)^{-1} &= (-x_1, -y_1 + x_1^2), \end{aligned}$$

et d'une famille de dilatation  $\{\delta_a\}_{a>0}$  définie par  $\delta_a(x_1, x_2) = (ax_1, a^2x_2)$ . Alors,  $\mathbb{G}$  est un groupe de Lie homogène. Notons par  $V_1$  l'espace engendré par le champ de vecteurs  $Z_1 = \partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2}$ . Comme le  $\text{rang}(V_1)(x) = 1 \neq 2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^2$ , le groupe  $\mathbb{G}$  n'est pas un groupe de Carnot.

### 1.2.3 L'opérateur sous-Laplacien d'un groupe de Lie stratifié

**Définition 1.2.7** Soient  $\mathbb{G}$  un groupe de Lie stratifié et  $L(\mathbb{G})$  son algèbre de Lie. S'il existe une stratification de  $L(\mathbb{G})$ , i.e.,  $L(\mathbb{G}) = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$ , où  $(Z_1, \dots, Z_m)$  forme une base de  $V_1$ , alors l'opérateur différentiel d'ordre 2,  $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^m Z_j^2$  est appelé sous-Laplacien de  $\mathbb{G}$ .

#### Définition 1.2.8 (Hypoellipticité)

On dit qu'un opérateur différentiel  $\mathcal{L}$  défini sur un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  est hypoelliptique dans  $\Omega$  si pour tout ouvert  $\Omega' \subseteq \Omega$  et pour tout  $f \in C^\infty(\Omega', \mathbb{R})$ , toute solution de l'équation  $\mathcal{L}u = f$  dans  $\Omega$ , (au sens des distributions) est de classe  $C^\infty(\Omega')$ .

#### Théorème 1.2.9 (Théorème d'Hörmander)

Soient  $Z_1, \dots, Z_m$  des champs de vecteurs à coefficients de classe  $C^\infty$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ . Si

$$\text{rang}(\text{Lie}\{Z_1, \dots, Z_m\})(x) = N, \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.13)$$

l'opérateur  $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^m Z_j^2$  est hypoelliptique dans  $\Omega$ .

**Remarque 1.2.10** La condition (1.13) se traduit ainsi : en chaque point de  $\Omega$ , on peut trouver  $N$  opérateurs différentiels linéairement indépendants parmi  $Z_1, \dots, Z_m$  et leurs commutateurs.

### 1.2.4 Distance de Carnot-Carathéodory

**Définition 1.2.11** Soit  $X = (X_1, \dots, X_m)$  une famille de champ de vecteurs dans  $\mathbb{R}^N$ . Un chemin absolument continu  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{G}$  est dit sous-unitaire si

$$\langle \gamma'(t), \xi \rangle^2 \leq \sum_{j=1}^m \langle X_j(\gamma(t)), \xi \rangle^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{G}, \quad \text{pour presque tout } t \in [0, T].$$

On définit ainsi la longueur d'un chemin absolument continu  $\gamma$  par :

$$l_{\mathbb{G}}(\gamma) = \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^m \langle \gamma'(t), X_j(\gamma(t)) \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

**Définition 1.2.12** Soient  $x$  et  $y$  deux points du groupe de Carnot homogène  $\mathbb{G}$ . La distance dite distance de Carnot-Carathéodory est définie par :

$$d_X(x, y) \equiv \inf \{ l_{\mathbb{G}}(\gamma); \gamma \text{ est sous unitaire de } x \text{ à } y \}. \quad (1.14)$$

**Proposition 1.2.13** Soit  $\mathbb{G}$  un groupe de Carnot homogène et  $d$  la distance de Carnot-Carathéodory associée à une famille  $(X_1, \dots, X_m)$  de champ de vecteurs invariant à gauche sur  $\mathbb{G}$ . Alors

$$d(x, y) = d(y^{-1} \circ x, 0), \quad \forall x, y \in \mathbb{G}, \quad (1.15)$$

$$d(x^{-1}, 0) = d(x, 0), \quad \forall x \in \mathbb{G}. \quad (1.16)$$

La démonstration de cette proposition est basée sur le lemme suivant :

**Lemme 1.2.14** Soit  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{G}$  un chemin sous-unitaire. Sous les hypothèses de la proposition 1.2.13,  $\alpha \circ \gamma$  est aussi un chemin sous-unitaire pour tout  $\alpha \in \mathbb{G}$ .

**Démonstration.** Notons par  $\Gamma = \alpha \circ \gamma$ , alors  $\dot{\Gamma}(t) = \mathcal{J}_{L_\alpha}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$ , pour presque tout  $t \in [0, T]$ , où  $\mathcal{J}_{L_\alpha}$  est la matrice Jacobienne de l'application  $L_\alpha$ , la translation à gauche par  $\alpha$  sur  $\mathbb{G}$ . Alors, pour tout  $\xi \in \mathbb{G}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \dot{\Gamma}(t), \xi \rangle^2 &= \langle \dot{\gamma}(t), \left( \mathcal{J}_{L_\alpha}(\gamma(t)) \right)^T \xi \rangle^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^m \langle X_j(\gamma(t)), \left( \mathcal{J}_{L_\alpha}(\gamma(t)) \right)^T \xi \rangle^2 = \sum_{j=1}^m \langle \mathcal{J}_{L_\alpha}(\gamma(t)) \cdot X_j(\gamma(t)), \xi \rangle^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^m \langle X_j(\alpha \circ \gamma(t)), \xi \rangle^2 \leq \sum_{j=1}^m \langle X_j(\Gamma(t)), \xi \rangle^2. \end{aligned}$$

On en déduit donc que  $\alpha \circ \gamma$  est un chemin sous-unitaire.

**Démonstration de la proposition 1.2.13.** Soient  $x \in \mathbb{G}$ ,  $y \in \mathbb{G}$  et  $\gamma$  un chemin sous-unitaire de  $x$  à  $y$ . Comme  $\alpha \circ \gamma$  est un chemin sous-unitaire qui lie  $\alpha \circ x$  et  $\alpha \circ y$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{G}$ , alors  $d(\alpha \circ x, \alpha \circ y) \leq d(x, y)$ . D'autre part comme  $x$ ,  $y$  et  $\alpha$  sont arbitraires, alors  $d(x, y) \leq d(\alpha \circ x, \alpha \circ y)$ . Ainsi on a montré que

$$d(\alpha \circ x, \alpha \circ y) = d(x, y), \quad \forall x, y, \alpha \in \mathbb{G}. \quad (1.17)$$

En remplaçant  $\alpha$  par  $y^{-1}$  dans (1.17), on obtient la première égalité de la proposition 1.2.13 et en posant  $x = 0$ , on obtient la deuxième égalité.  $\square$

**Proposition 1.2.15** *Soit  $d$  la distance de Carnot-Carathéodory associée à une famille de champ de vecteurs  $(X_1, \dots, X_m)$  dont les coefficients sont de classe  $C^\infty$ . Si les champs de vecteurs  $(X_j)_{1 \leq j \leq m}$  sont homogènes de degré 1 par rapport à la dilatation*

$$\delta_a : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}, \quad \delta_a(x_1, \dots, x_N) = (a^{\sigma_1} x_1, \dots, a^{\sigma_N} x_N),$$

où  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  sont des nombres réels positifs, alors

$$d(\delta_a(x), \delta_a(y)) = a d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{G}, \quad \forall a > 0. \quad (1.18)$$

Afin de démontrer cette proposition, on a besoin d'énoncer le lemme suivant :

**Lemme 1.2.16** *Sous les hypothèses de la proposition 1.2.15, soit  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{G}$  un  $X$ -chemin sous-unitaire, alors pour tout  $a > 0$ , le chemin*

$$\Gamma : [0, aT] \rightarrow \mathbb{G}, \quad \Gamma(t) \equiv \delta_a\left(\gamma\left(\frac{t}{a}\right)\right)$$

est un  $X$ -chemin sous-unitaire.

**Démonstration.** Pour tout  $\xi \in \mathbb{G}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \dot{\Gamma}(t), \xi \rangle^2 &= a^{-2} \langle \delta_a(\dot{\gamma}\left(\frac{t}{a}\right)), \xi \rangle^2 = a^{-2} \langle \dot{\gamma}\left(\frac{t}{a}\right), \delta_a(\xi) \rangle^2 \\ &\leq a^{-2} \sum_{j=1}^m \langle X_j(\gamma\left(\frac{t}{a}\right)), \delta_a(\xi) \rangle^2 = \sum_{j=1}^m \langle a^{-1} \delta_a(X_j(\gamma\left(\frac{t}{a}\right))), \xi \rangle^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^m \langle X_j\left(\delta_a\left(\gamma\left(\frac{t}{a}\right)\right)\right), \xi \rangle^2 \leq \sum_{j=1}^m \langle X_j(\Gamma(t)), \xi \rangle^2. \end{aligned}$$

**Démonstration de la proposition 1.2.15.** Soient  $x, y \in \mathbb{G}$  et  $\gamma$  un  $X$ -chemin sous-unitaire de  $x$  à  $y$ . D'après le lemme précédent,  $\Gamma(t) = \delta_a(\gamma(\frac{t}{a}))$  est un  $X$ -chemin sous-unitaire de  $\delta_a(x)$  à  $\delta_a(y)$ , alors on a

$$\begin{aligned} d(\delta_a(x), \delta_a(y)) &\leq l(\Gamma) = aT = al(\gamma) \\ &\leq a d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{G}, \quad \forall a > 0. \end{aligned}$$

En remplaçant  $x$  et  $y$  par  $\delta_{a^{-1}}(x)$  et  $\delta_{a^{-1}}(y)$  respectivement dans cette dernière inégalité, on obtient

$$d(x, y) \leq a^{-1} d(\delta_a(x), \delta_a(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{G}, \quad \forall a > 0.$$

La proposition 1.2.15 est ainsi démontrée.  $\square$

**Proposition 1.2.17** *Soient  $\mathbb{G}$  un groupe de Carnot homogène et  $d$  la distance de Carnot-Carathéodory. Pour tout  $x \in \mathbb{G}$  et pour tout  $r > 0$ , on définit les boules sur  $\mathbb{G}$  par*

$$B_d(x, r) \equiv \{y \in \mathbb{G}, d(x, y) < r\}.$$

Remarquons que  $B_d(x, r) = x \circ B_d(0, r)$ ,  $B(0, r) = \delta_r(B(0, 1))$ , pour  $r > 0$ , et que  $|B_d(x, r)| = r^Q |B_d(0, 1)|$ , où  $Q$  est la dimension homogène de  $\mathbb{G}$ .

### 1.3 Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^1$

Soit  $\mathbb{G}$  un sous groupe du groupe  $GL(3, \mathbb{R})$  défini par

$$\mathbb{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.19)$$

En le munissant de la loi de multiplication de matrices  $A$  et  $B$ ,  $\mathbb{G}$  est un groupe de Lie non commutatif. Rappelons que le commutateur de deux matrices de  $\mathbb{G}$  est défini par :

$$[A, B] = ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1b_2 - b_1a_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Définition 1.3.1** On définit une suite de groupes  $(\Gamma_n(\mathbb{G}))_{n \geq 1}$  par  $\Gamma_0(\mathbb{G}) = \mathbb{G}$ ,  $\Gamma_{n+1}(\mathbb{G}) = [\Gamma_n(\mathbb{G}), \mathbb{G}]$ . On dit que le groupe  $\mathbb{G}$  est nilpotent s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\Gamma_n(\mathbb{G}) = e_{\mathbb{G}}$ . Le plus petit entier  $n$  qui vérifie cette propriété est appelé classe de nilpotence de  $\mathbb{G}$ .

Dans notre cas,

$$\Gamma_1(\mathbb{G}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; k \in \mathbb{R} \right\},$$

et  $\Gamma_2(\mathbb{G}) = [\Gamma_1(\mathbb{G}), \mathbb{G}] = I_2 = e$ , par suite  $\mathbb{G}$  est nilpotent de classe 2. L'application bijective  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow GL(3, \mathbb{R})$  définie par

$$\phi(x, y, s) = \begin{pmatrix} 1 & x & s \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

induit une loi de groupes non commutative sur  $\mathbb{R}^3$  :

$$(x, y, s) \circ (x', y', s') = (x + x', y + y', s + s' + xy'). \quad (1.20)$$

L'élément neutre est  $e = (0, 0, 0)$  et l'inverse de  $(x, y, s)$  est le point  $(-x, -y, xy - s)$ .  $\mathbb{R}^3$  muni de la loi (1.20) est appelé le groupe de Heisenberg non symétrique de dimension 3, c'est un groupe de Lie.

**Proposition 1.3.2** Les champs de vecteurs

$$X = \partial_x, \quad Y = \partial_y + x\partial_s, \quad S = \partial_s$$

sont invariants à gauche par rapport à la loi de groupes de Lie (1.20) sur  $\mathbb{R}^3$ .

**Démonstration.** Notons  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  et  $x_3 = s$ . On définit la translation à gauche de  $\mathbb{G}$  par :

$$L_{(a_1, a_2, a_3)} = (a_1 + x_1, a_2 + x_2, a_3 + x_3 + a_1x_2).$$

Soit  $X$  un champ de vecteurs invariant à gauche, alors d'après la définition 1.1.5,  $X_a = (L_a)_* X_e$ ,  $\forall a \in \mathbb{G}$ , où  $X_e$  est la valeur du champ de vecteurs  $X$  à l'origine. En écrivant  $X_a$  en coordonnées locales, i.e.,  $X_a = \sum_i X_a^i \partial_{x_i}$ , on a

$$X_a^i = X_a(x_i) = (L_a)_* X_e(x_i) = X_e(x_i \circ L_a). \quad (1.21)$$

Soit  $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{G}$ , alors

$$\begin{aligned} (x_1 \circ L_a)(b) &= x_1(L_a b) = x_1(ab) = a_1 + b_1 = x_1(a) + x_1(b), \\ (x_2 \circ L_a)(b) &= x_2(L_a b) = x_2(ab) = a_2 + b_2 = x_2(a) + x_2(b), \\ (x_3 \circ L_a)(b) &= x_3(L_a b) = x_3(ab) = a_3 + b_3 + a_1 b_2 = x_3(a) + x_3(b) + x_1(a)x_2(b). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} x_1 \circ L_a &= x_1(a) + x_1, \\ x_2 \circ L_a &= x_2(a) + x_2, \\ x_3 \circ L_a &= x_3(a) + x_3 + x_1(a)x_2. \end{aligned}$$

Notons  $X_e = \lambda_1 \partial_{x_1} + \lambda_2 \partial_{x_2} + \lambda_3 \partial_{x_3}$ , alors

$$\begin{aligned} X_a^1 &= X_e(x_1(a) + x_1) = \lambda_1, \\ X_a^2 &= X_e(x_2(a) + x_2) = \lambda_2, \\ X_a^3 &= X_e(x_3(a) + x_3 + x_1(a)x_2) = \lambda_3 + x_1(a)\lambda_2. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} X &= \lambda_1 \partial_{x_1} + \lambda_2 \partial_{x_2} + (\lambda_3 + x_1 \lambda_2) \partial_{x_3} \\ &= \lambda_1 \partial_{x_1} + \lambda_2 (\partial_{x_2} + x_1 \partial_{x_3}) + \lambda_3 \partial_{x_3} \\ &= \lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 S, \end{aligned}$$

et l'algèbre de Lie de  $\mathbb{G}$  est générée par la famille de champs de vecteurs  $(X, Y, S)$ .  $\square$

Dans la suite nous allons voir comment ce modèle non symétrique peut être réduit à un modèle symétrique en utilisant un changement de coordonnées adéquat.

**Proposition 1.3.3** *En effectuant le changement de coordonnées suivant :*

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad \tau = 4s - 2x_1 x_2,$$

les champs de vecteurs  $X = \partial_{x_1}$ ,  $Y = \partial_{x_2} + x_1 \partial_s$ ,  $S = \partial_s$  deviennent

$$X = \partial_{y_1} - 2y_2 \partial_\tau, \quad Y = \partial_{y_2} + 2y_1 \partial_\tau, \quad S = 4\partial_\tau. \quad (1.22)$$

**Démonstration.** La démonstration est évidente si on remarque que

$$\partial_s = 4\partial_\tau, \quad \partial_{x_1} = \partial_{y_1} - 2y_2 \partial_\tau, \quad \partial_{x_2} = \partial_{y_2} - 2y_1 \partial_\tau.$$

$\square$

On considère le changement suivant :  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = x_2$  et  $\tau = -s$ . Alors les champs de vecteurs dans (1.22) s'écrivent :

$$X_1 = \partial_{x_1} + 2x_2\partial_s, \quad X_2 = \partial_{x_2} - 2x_1\partial_s, \quad X_3 = \partial_s.$$

On s'intéresse ensuite à la loi de groupe de Lie tels les champs de vecteurs  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  sont invariants à gauche. Rappelons que d'après la formule de Campbell-Hausdorff (1.1.17),

$$\text{Exp}^{-1}(\text{Exp}(x)\text{Exp}(y)) = x + y + \frac{1}{2}[x, y],$$

où  $x = x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 = (x_1, x_2, x_3)$ . En remarquant que  $[X_1, X_2] = -4X_3$  et que  $[X_1, X_3] = [X_2, X_3]$ , On a

$$\begin{aligned} x + y + \frac{1}{2}[x, y] &= (x_1 + y_1)X_1 + (x_2 + y_2)X_2 + (x_3 + y_3)X_3 \\ &+ \frac{1}{2}\left(x_1y_1[X_1, X_1] + (x_1y_2 - x_2y_1)[X_1, X_2] + x_2y_2[X_2, X_2]\right) \\ &= \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 - 2(x_1y_2 - x_2y_1)\right). \end{aligned}$$

On peut énoncer maintenant le résultat suivant :

**Proposition 1.3.4** *Les champs de vecteurs  $X_1 = \partial_{x_1} + 2x_2\partial_s$  et  $X_2 = \partial_{x_2} - 2x_1\partial_s$  sont invariants à gauche par rapport à la loi de groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^3$  :*

$$(x_1, x_2, s) \circ (x'_1, x'_2, s') = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, s + s' - 2(x_1x'_2 - x_2x'_1)). \quad (1.23)$$

Le groupe de Lie  $H^1 = (\mathbb{R}^3, \circ)$  est appelé le groupe de Heisenberg symétrique. L'élément neutre  $e = (0, 0, 0)$  et l'inverse d'un point  $(x_1, x_2, s)$  est  $(-x_1, -x_2, -s)$ .

## 1.4 Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^d$

Dans le cas où  $d \geq 1$ , on définit le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^d$  comme étant l'espace  $\mathbb{R}^{2d+1}$  muni de la loi de multiplication non commutative

$$(x, y, s) \circ (x', y', s') = (x + x', y + y', s + s' + 2(yx' - y'x)).$$

C'est un groupe de Lie homogène muni d'une structure de dilatations définie par

$$\delta_a(x, y, s) = (ax, ay, a^2s), \quad a > 0 \quad (1.24)$$

$$\delta_a = -\delta_{|a|}, \quad a < 0, \quad (1.25)$$

et dont la dimension homogène est égale à  $Q = 2d + 2$ . Les champs de vecteurs invariants à gauche

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j\partial_s, \quad Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j\partial_s, \quad (1.26)$$

aussi appelés champs de vecteurs horizontaux, engendrent l'algèbre de Lie. Les seuls commutateurs non triviaux étant

$$[X_j, Y_j] = -4\partial_s \equiv -4S, \text{ et } [X_j, S] = [Y_j, S] = 0, \quad 1 \leq j \leq d.$$

Ainsi, la décomposition de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  de  $\mathbb{H}^d$  est la suivante :

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 = \langle \{X_j, Y_j\}_{1 \leq j \leq d} \rangle \oplus \langle \{S\} \rangle. \quad (1.27)$$

Soient  $\xi = (x, y, s) \in \mathbb{R}^{2d+1}$  et  $d\xi$  est le volume de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^{2d+1}$ . La translation à gauche sur  $\mathbb{H}^d$  qui est définit par  $L_g(\xi) = g \circ \xi$ ,  $g, \xi \in \mathbb{H}^d$ , admet une différentielle

$$dL_g = \begin{pmatrix} I_{2d} & 0_{2d} & (2y_j)_{1 \leq j \leq d} \\ 0_{2d} & I_{2d} & (-2x_j)_{1 \leq j \leq d} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Comme  $d(L_g(\xi)) = |\det(L_g)|^{2d+1} d\xi = d\xi$ , alors  $d\xi$  est donc la mesure de Haar sur  $\mathbb{H}^d$ . Donc la mesure de Haar sur  $\mathbb{H}^d$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^{2d+1}$ , voir l'annexe A.

On dit qu'une courbe  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{H}^d$  est sous-unitaire s'il existe des fonctions mesurables  $h_j : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^d h_j(t) X_j(\gamma(t)) + h_{d+j}(t) Y_j(\gamma(t)),$$

et  $\sum_{j=1}^{2d} h_j^2(t) \leq 1$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ . Les champs de vecteurs  $X_j$  et  $Y_j$  engendrant l'algèbre de Lie, le théorème de Chow [28] assure que l'on peut toujours joindre deux points quelconques par une courbe sous-unitaire. On définit la distance de Carnot-Carathéodory par

$$d(x, y) = \text{Inf} \left\{ T > 0; \text{ il existe une courbe sous-unitaire } \gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{H}^d \right. \\ \left. \text{tels que } \gamma(0) = x, \gamma(T) = y \right\}.$$

Deux propriétés cruciales de cette distance sont l'invariance à gauche, i.e.,  $d(x \circ y, x \circ z) = d(y, z)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{H}^d$ , et l'homogénéité, i.e.,  $d(\delta_a(x), \delta_a(y)) = ad(x, y)$  pour tous  $x, y \in \mathbb{H}^d$  et  $a > 0$ . Notons aussi que  $d$  induit la topologie euclidienne usuelle sur  $\mathbb{H}^d$ . On renvoie par exemple à [28, 88] pour de plus amples détails sur les espaces de Carnot-Carathéodory.

Notons par  $z = x + iy$  et  $\xi = (z, s) \in \mathbb{H}^d$ . La distance entre deux points  $\xi = (z, s)$  et  $\xi' = (z', s') \in \mathbb{H}^d$  est définie par

$$d(\xi, \xi') = \rho((z', s')^{-1} \circ (z, s)),$$

où

$$\rho(z, s) = (|z|^4 + |s|^2)^{1/4} = ((|x|^2 + |y|^2)^2 + |s|^2)^{1/4}. \quad (1.29)$$

De plus,  $\rho$  est homogène de degré 1 par rapport à la dilatation (1.24) :

$$\rho(\delta_a(z, s)) = a\rho(z, s), \quad (z, s) \in \mathbb{H}^d.$$

Une notion intrinsèque de différentiabilité a été introduite par P. Pansu [132]. On dit qu'un homomorphisme de groupes  $L : (\mathbb{H}^d, \circ) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$  est homogène si  $L(\delta_a(x)) = aL(x)$  pour tous  $x \in \mathbb{H}^d$  et  $a > 0$ .

**Définition 1.4.1** Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{H}^d$ . On dit qu'une application  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est Pansu différentiable en  $x \in \Omega$  s'il existe un homomorphisme de groupes homogène  $L : (\mathbb{H}^d, \circ) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$  tel que

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x) - L(x^{-1} \circ y)}{d(y, x)} = 0.$$

L'application  $L$  est alors unique et l'on notera  $D_{\mathbb{H}^d}f(x)$ .

Cette notion de différentiabilité est étroitement liée aux dérivations le long des champs de vecteurs horizontaux  $X_j$  et  $Y_j$ . On note  $(e_1, \dots, e_{2d+1})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{2d+1}$ .

**Définition 1.4.2** Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{H}^d$ . On dit qu'une application  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en  $x \in \Omega$  le long de champ de vecteurs  $X_j$  (resp.  $Y_j$ ) si l'application  $a \mapsto f(x \circ \delta_a(e_j))$  (resp.  $a \mapsto f(x \circ \delta_a(e_{d+j}))$ ) est dérivable en  $a = 0$  et on notera  $X_j f(x)$  (resp.  $Y_j f(x)$ ) la dérivée correspondante.

**Lemme 1.4.3** Soient  $X_j$  et  $Y_j$  les champs de vecteurs définis dans (1.26). Si  $f = f(\rho)$  une fonction radiale de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{H}^d$ , alors

$$\begin{aligned} X_j f(\rho) &= \frac{f'(\rho)}{\rho^3} \left( |z|^2 x_j + y_j s \right), \\ Y_j f(\rho) &= \frac{f'(\rho)}{\rho^3} \left( |z|^2 y_j - x_j s \right), \quad (z, s) \in \mathbb{H}^d. \end{aligned} \quad (1.30)$$

**Remarque 1.4.4** Soit  $f$  un fonction différentiable en  $x \in \Omega$  le long de champ de vecteurs  $X_j$  et  $Y_j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, d\}$ . Le gradient de  $f$  en  $x$  est défini par

$$\nabla_{\mathbb{H}^d} f(x) = (X_1 f(x), \dots, X_d f(x), Y_1(x), \dots, Y_d f(x)),$$

la norme du gradient de  $f$  est donnée par

$$|\nabla_{\mathbb{H}^d} f(x)| = \left( \sum_{j=1}^d |X_j f(x)|^2 + |Y_j f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et le Laplacien sur  $\mathbb{H}^d$  est défini par  $\Delta_{\mathbb{H}^d}(f(x)) = \sum_{j=1}^d X_j^2 f(x) + Y_j^2 f(x)$ . Comme

$$\text{rang}(\text{Lie}\{X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_d\})(x) = 2d + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2d+1},$$

alors d'après le théorème d'Hörmander 1.2.9, le Laplacien  $\Delta_{\mathbb{H}^d}$  est hypoelliptique.

Un des liens entre la différentiabilité au sens de Pansu et la différentiabilité le long de champ de vecteurs  $X_j$  et  $Y_j$  est donné par la proposition suivante.

**Proposition 1.4.5** Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est Pansu différentiable en  $x \in \Omega$  alors  $f$  est différentiable en  $x \in \Omega$  le long de champ de vecteurs  $X_j$  et  $Y_j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, d\}$ , et

$$D_{\mathbb{H}^d} f(x) = \sum_{j=1}^d \alpha_j X_j f(x) + \beta_j Y_j f(x).$$

### 1.4.1 Solution fondamentale du Sous-Laplacien

Dans cette partie, on est dans le coeur de l'étude de l'opérateur Sous-Laplacien sur les groupes de Carnot homogènes de dimension homogène  $Q$ .

**Définition 1.4.6** Soit  $\mathbb{G}$  un groupe de Carnot homogène et soit  $\mathcal{L}$  l'opérateur sous-Laplacien sur  $\mathbb{G}$ . Une fonction  $\Gamma : \mathbb{G} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution fondamentale de  $\mathcal{L}$  si

- i)  $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{G} \setminus \{0\})$ ,
- ii)  $\Gamma \in L^1_{Loc}(\mathbb{G})$  et  $\Gamma(x) \rightarrow 0$  quand  $x$  tend vers l'infini,
- iii)  $\mathcal{L}(\Gamma) = -\text{Dirac}_0$ , où  $\text{Dirac}_0$  est la masse de Dirac à l'origine ;

$$\int_{\mathbb{G}} \Gamma(x) \mathcal{L}\varphi(x) dx = -\varphi(0), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{G}), x \in \mathbb{G}. \quad (1.31)$$

**Proposition 1.4.7** Soit  $\mathcal{L}$  l'opérateur sous-Laplacien sur  $\mathbb{G}$  un groupe de Carnot homogène. Si  $\Gamma$  est la solution fondamentale de  $\mathcal{L}$ , alors

$$\int_{\mathbb{G}} \Gamma(y^{-1} \circ x) \mathcal{L}\varphi(x) dx = -\varphi(y), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{G}), \forall x, y \in \mathbb{G}. \quad (1.32)$$

**Démonstration.** Le changement de variables  $z = y^{-1} \circ x$  donne

$$\int_{\mathbb{G}} \Gamma(y^{-1} \circ x) \mathcal{L}\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{G}} \Gamma(z) \mathcal{L}(\varphi)(y \circ z) dz. \quad (1.33)$$

Comme l'opérateur  $\mathcal{L}$  est invariant à gauche sur  $\mathbb{G}$ , alors  $\mathcal{L}(\varphi)(y \circ z) = \mathcal{L}(\varphi(y \circ z))$ . En remplaçant cette égalité dans (1.33) et en utilisant (1.31), on retrouve (1.32).  $\square$

**Définition 1.4.8** Soient  $\mathbb{G}$  un groupe de Carnot homogène et  $O$  un voisinage ouvert de l'origine. Soit  $J \in C_0^\infty(\mathbb{G}, \mathbb{R})$ ,  $J \geq 0$ , tels que  $\text{Supp}(J) \subset O$  et  $\int_{\mathbb{G}} J = 1$ . Pour tous  $\varepsilon > 0$  et  $x \in \mathbb{G}$ , on pose  $J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-Q} J(\delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(x))$ . Si  $u \in L^1_{Loc}(\mathbb{G})$ , alors

$$u_\varepsilon(x) \equiv (u * J_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{G}} u(y) J_\varepsilon(x \circ y^{-1}) dx = \int_{\delta_\varepsilon(O)} u(z^{-1} \circ x) J_\varepsilon(z) dz. \quad (1.34)$$

On dit que la fonction  $u_\varepsilon$  est la fonction régularisante de  $u$  associée au noyau  $J$ .

**Proposition 1.4.9** Soit  $\mathcal{L}$  l'opérateur sous-Laplacien sur  $\mathbb{G}$  un groupe de Carnot homogène. Soit  $u \in L^1_{Loc}(\mathbb{G})$  une solution faible de  $\mathcal{L}u = 0$  dans  $\mathbb{G}$ . Si  $u_\varepsilon$  est la fonction régularisante de  $u$ , alors

$$\mathcal{L}u_\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathbb{G}, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (1.35)$$

**Démonstration.** Notons que  $\text{Supp}(J_\varepsilon) \subset \delta_\varepsilon(O)$  et que

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{G}} u(y^{-1} \circ x) J_\varepsilon(y) dy.$$

Pour toute fonction test  $\varphi$ , on a d'après le théorème de Fubini-Tonnelli,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{G}} u_\varepsilon(x) \mathcal{L}\varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{G}} \mathcal{L}\varphi(x) \left[ \int_{\mathbb{G}} u(y^{-1} \circ x) J_\varepsilon(y) dy \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{G}} J_\varepsilon(y) \left[ \int_{\mathbb{G}} (\mathcal{L}\varphi)(x) u(y^{-1} \circ x) dx \right] dy \\ &= \int_{\mathbb{G}} J_\varepsilon(y) \left[ \int_{\mathbb{G}} (\mathcal{L}\varphi)(y \circ z) u(z) dz \right] dy = 0, \end{aligned}$$

car d'après le fait que  $\mathcal{L}u = 0$  dans  $\mathbb{G}$ , on a  $\int_{\mathbb{G}} (\mathcal{L}\varphi)(y \circ z) u(z) dz = 0$ . Comme l'opérateur autoadjoint  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$ , on déduit ainsi l'égalité (1.35).  $\square$

Grâce à la proposition 1.4.9, on peut montrer l'unicité de la solution fondamentale.

**Proposition 1.4.10** *Soit  $\mathcal{L}$  l'opérateur sous-Laplacien sur un groupe de Carnot homogène  $\mathbb{G}$ , alors la solution fondamentale de  $\mathcal{L}$  est unique.*

**Démonstration.** Soient  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux solutions fondamentales de  $\mathcal{L}$ . La fonction  $u = \Gamma - \Gamma'$  a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} u &\in L^1_{Loc}(\mathbb{G}), \quad u(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow \infty \\ \int_{\mathbb{G}} u(x) \mathcal{L}\varphi(x) dx &= 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{G}). \end{aligned}$$

En appliquant la proposition 1.4.9, on a  $\mathcal{L}u_\varepsilon = 0$  dans  $\mathbb{G}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ . Comme  $u_\varepsilon(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \infty$ , alors d'après le principe de maximum,  $u_\varepsilon = 0$  dans  $\mathbb{G}$ . D'autre part,  $u_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $L^1_{Loc}(\mathbb{G})$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , alors  $u = 0$  dans  $\mathbb{G}$ . On déduit ainsi l'unicité de la solution fondamentale.  $\square$

**Proposition 1.4.11** *Soit  $\mathcal{L}$  l'opérateur sous-Laplacien sur un groupe de Carnot homogène  $\mathbb{G}$ . Soit  $\Gamma$  la solution fondamentale de  $\mathcal{L}$  alors  $\Gamma(x^{-1}) = \Gamma(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$ .*

**Démonstration.** Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{G})$ , on définit pour  $x, y \in \mathbb{G}$

$$u(x) = - \int_{\mathbb{G}} \Gamma(y^{-1} \circ x) \mathcal{L}\varphi(y) dy$$

Pour  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{G})$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{G}} \mathcal{L}u(x) \psi(x) dx &= \int_{\mathbb{G}} u(x) \mathcal{L}\psi(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{G}} \mathcal{L}\varphi(y) \left[ \int_{\mathbb{G}} \Gamma(y^{-1} \circ x) \mathcal{L}\psi(x) dx \right] dy \\ &= \int_{\mathbb{G}} \mathcal{L}\varphi(y) \psi(y) dy. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que  $\mathcal{L}(u - \varphi) = 0$  dans  $\mathbb{G}$ . comme  $u - \varphi \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \infty$ , alors d'après le principe de maximum,  $u = \varphi$  dans  $\mathbb{G}$ . En particulier

$$\varphi(0) = u(0) = - \int_{\mathbb{G}} \Gamma(y^{-1}) \mathcal{L}\varphi(y) dy, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{G}).$$

Par suite l'application  $x \mapsto \Gamma(x^{-1})$  est une solution fondamentale de  $\mathcal{L}$ . L'unicité de la solution fondamentale implique que  $\Gamma(x^{-1}) = \Gamma(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$ .  $\square$

**Proposition 1.4.12** *Soit  $\mathcal{L}$  l'opérateur sous-Laplacien sur un groupe de Carnot homogène  $\mathbb{G}$ . Si  $\Gamma$  est la solution fondamentale de  $\mathcal{L}$  alors  $\Gamma$  est homogène de degré  $(2 - Q)$  :*

$$\Gamma(\delta_a(x)) = a^{2-Q}\Gamma(x), \quad \forall x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}, \quad a > 0. \quad (1.36)$$

**Démonstration.** Pour  $a > 0$  fixé, on pose  $\Gamma'(x) = a^{Q-2}\Gamma(\delta_a(x))$ ,  $\forall x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$ . On a  $\Gamma' \in C_0^\infty(\mathbb{G}) \cap L_{Loc}^1(\mathbb{G})$  et  $\Gamma'(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \infty$ . Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{G})$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{G}} \Gamma'(x) \mathcal{L}\varphi(x) dx &= a^{Q-2} \int_{\mathbb{G}} \Gamma(\delta_a(x)) \mathcal{L}\varphi(x) dx \\ &= a^{-2} \int_{\mathbb{G}} \Gamma(y) \mathcal{L}\varphi(\delta_{\frac{1}{a}}(x)) dy = \int_{\mathbb{G}} \Gamma(y) \mathcal{L}(\varphi(\delta_{\frac{1}{a}}(x))) dy \\ &= -\varphi(\delta_{\frac{1}{a}}(0)) = -\varphi(0). \end{aligned}$$

Donc  $\Gamma'$  est une solution fondamentale de  $\mathcal{L}$ . Comme la solution fondamentale est unique, on en déduit que  $\Gamma' = \Gamma$ .  $\square$

**Exemples 1.4.13** *La solution fondamentale du Laplacien usuel dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d > 2$  est donnée par  $E(x) = \frac{|x|^{2-d}}{(2-d)w_d}$ , où  $w_d$  désigne la mesure de la sphère unité de  $\mathbb{R}^d$ .*

**Démonstration.** Notons que la fonction  $F(x) = |x|^{2-d}$  est de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . De plus, on a

$$\Delta(F(x)) = F''(x) + \frac{d-1}{|x|}F'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Il résulte que  $\text{supp}(\Delta F) \subset \{0\}$ , et par suite  $\Delta F = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0$ . Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \Delta F, \varphi \rangle &= \langle F, \Delta \varphi \rangle = \int_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^{2-d} \Delta \varphi(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} |x|^{2-d} \Delta \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant justifiée par le théorème de convergence dominée, car  $|x|^{2-d} \Delta \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . On applique ensuite le théorème de Green pour le laplacien :

$$\begin{aligned} \int_{|x| > \varepsilon} |x|^{2-d} \Delta \varphi(x) dx &= \int_{|x|=\varepsilon} |x|^{2-d} \frac{\partial \varphi}{\partial d}(x) d\sigma_\varepsilon - \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x) \frac{\partial |x|^{2-d}}{\partial d} d\sigma_\varepsilon \\ &= I_\varepsilon + J_\varepsilon, \end{aligned}$$

avec  $d\sigma_\varepsilon = \varepsilon^{d-1} dw$  la mesure de Lebesgue sur  $S^{d-1}$  et  $\frac{\partial}{\partial d} = -\frac{1}{|x|} \sum_{j=1}^d x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Posons  $x = \varepsilon x'$  avec  $|x'| = 1$ . D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= -\varepsilon \int_{S^{d-1}} \sum_{j=1}^d x'_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\varepsilon x') dx' \longrightarrow 0, \\ J_\varepsilon &= (2-d) \int_{S^{d-1}} \varphi(\varepsilon x') dx' \longrightarrow (2-d)w_d, \end{aligned}$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On en déduit ainsi que  $\langle \Delta F, \varphi \rangle = (2-d)w_d \varphi(0)$ .  $\square$

**Exemples 1.4.14** La solution fondamentale du Laplacien  $\Delta_{\mathbb{H}^d}$  sur le groupe de Heisenberg est égale à  $c_d^{-1} \rho^{-2d}(z, s)$ , où  $\rho$  est la distance homogène définie dans (1.29) et

$$c_d^{-1} \equiv -4d(d+2) \int_{\mathbb{H}^d} |z|^2 (1+\rho^4)^{-\frac{d+4}{2}} dz ds. \quad (1.37)$$

**Démonstration.** Montrons tout d'abord que la constante  $c_d$  vérifie l'égalité (1.37). Soit  $\xi = (z, s) \in \mathbb{H}^d$  et notons par  $z^* = \frac{z}{\rho(\xi)}$  et  $s^* = \frac{s}{\rho(\xi)}$ . Le point  $\xi^* = (z^*, s^*)$  appartient alors à  $\Sigma \equiv \{\xi \in \mathbb{H}^d : \rho(\xi) = 1\}$ . D'après Folland et Stein [76], on a pour tout  $f \in L^1(\mathbb{H}^d)$ ,

$$\int_{\mathbb{H}^d} f(\xi) d\xi = \int_0^\infty \int_{\Sigma} r^{Q-1} f(r\xi^*) d\mu(\xi^*) dr, \quad (1.38)$$

où  $d\mu$  est la mesure de Radon sur la sphère  $\Sigma$ . Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |z^*|^2 d\mu &= (Q+2) \int_0^1 r^{Q+1} dr \int_{\Sigma} |z^*|^2 d\mu \\ &= (Q+2) \int_{\Sigma} r^{Q-1} \int_0^1 |rz^*|^2 d\mu dr = (Q+2) \int_{\rho(\xi) < 1} |z|^2 d\xi. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_{\rho(\xi) < 1} |z|^2 d\xi &= 2 \int_0^1 \int_{|z| < (1-s^2)^{\frac{1}{4}}} |z|^2 dz ds = 2w_{2d-1} \int_0^1 \int_0^{(1-s^2)^{\frac{1}{4}}} r^{2d+1} dr ds \\ &= \frac{2w_{2d-1}}{2d+2} \int_0^1 (1-s^2)^{\frac{2d+2}{4}} ds = \frac{w_{2d-1}}{2d+2} \int_0^1 (1-s)^{\frac{2d+2}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds \\ &= \frac{w_{2d-1}}{2d+2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{2d+6}{4})}{\Gamma(\frac{2d+8}{4})}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{\Sigma} |z^*|^2 d\mu = w_{2d-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{Q}{4})}{\Gamma(\frac{Q+2}{4})}. \quad (1.39)$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} c_d^{-1} &= -(Q-2)(Q+2) \int_{\mathbb{H}^d} |z|^2 (1+\rho^4(z, s))^{-\frac{d+4}{2}} dz ds \\ &= -(Q-2)(Q+2) \int_{\Sigma} |z^*|^2 d\mu \int_0^\infty \frac{r^{Q+1}}{(1+r^4)^{\frac{Q+6}{4}}} dr, \end{aligned}$$

avec

$$\int_0^\infty \frac{r^{Q+1}}{(1+r^4)^{\frac{Q+6}{4}}} dr = \int_0^\infty \frac{r^{-5}}{(1+r^{-4})^{\frac{Q+6}{4}}} dr.$$

En posant  $t = 1 + r^{-4}$ , on obtient

$$\int_0^\infty \frac{r^{Q+1}}{(1+r^4)^{\frac{Q+6}{4}}} dr = \frac{1}{4} \int_1^\infty t^{-\frac{Q+6}{4}} dt = \frac{1}{Q+2},$$

et par suite,

$$c_d^{-1} = (2-Q)w_{2d-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{Q}{4})}{\Gamma(\frac{Q+2}{4})}. \quad (1.40)$$

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\rho_\varepsilon = (\rho^4 + \varepsilon^4)^{\frac{1}{4}}$ . On a,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{H}^d}(\rho_\varepsilon^{-2d}) &= -2d\rho^3(\rho^4 + \varepsilon^4)^{-\frac{d+2}{2}} \Delta_{\mathbb{H}^d}(\rho) - 6d\rho^2(\rho^4 + \varepsilon^4)^{-\frac{d+2}{2}} |\nabla_{\mathbb{H}^d}(\rho)|^2 \\ &\quad + 4d(d+2)\rho^6(\rho^4 + \varepsilon^4)^{-\frac{d+4}{2}} |\nabla_{\mathbb{H}^d}(\rho)|^2. \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.4.3, on a

$$|\nabla_{\mathbb{H}^d}(\rho)|^2 = \frac{|z|^2}{\rho^2} \quad \text{et} \quad \Delta_{\mathbb{H}^d}(\rho) = (2d+1) \frac{|z|^2}{\rho^3},$$

par suite,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{H}^d}(\rho_\varepsilon^{-2d}) &= \left[ -2d(2d+1)(\rho^4 + \varepsilon^4) - 6d(\rho^4 + \varepsilon^4) + 4d(d+2)(\rho^4 + \varepsilon^4) \right. \\ &\quad \left. - 4d(d+2)\varepsilon^4 \right] |z|^2 (\rho^4 + \varepsilon^4)^{-\frac{d+4}{2}} \\ &= -4d(d+2)\varepsilon^4 |z|^2 (\rho^4 + \varepsilon^4)^{-\frac{d+4}{2}} \\ &= -4d(d+2)\varepsilon^4 |z|^2 \rho_\varepsilon^{-2(d+4)} \\ &= \varepsilon^{-2(d+1)} K(\phi_{\varepsilon^{-1}}), \end{aligned}$$

avec

$$K(z, s) = -4d(d+2) |z|^2 (\rho^4 + 1)^{-\frac{d+4}{2}}.$$

Par suite, pour  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{H}^d)$  on a

$$\begin{aligned} (\Delta_{\mathbb{H}^d} c_d \rho^{-2d}, \varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Delta_{\mathbb{H}^d} c_d \rho_\varepsilon^{-2d}, \varphi) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{H}^d} c_d \Delta_{\mathbb{H}^d}(\rho_\varepsilon^{-2d}) u(z, s) dz ds \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2d-2} c_d \int_{\mathbb{H}^d} K(\delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(z, s)) u(z, s) dz ds \\ &= c_d \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{H}^d} K(z, s) u(\varepsilon z, \varepsilon^2 s) dz ds \\ &= u(0, 0) c_d \int_{\mathbb{H}^d} K(z, s) dz ds = u(0, 0). \end{aligned}$$

□



# Chapitre 2

## Espaces de Sobolev sur le groupe de Heisenberg

### 2.1 Espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^d$

Cette section est un bref rappel des espaces de Sobolev dans le cas euclidien. Pour plus de détails, nous renvoyons aux articles [2, 12, 123].

**Définition 2.1.1** *L'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  est l'espace des fonctions  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  telles que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a*

$$\|u\|_{k, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = \sup_{|\alpha| \leq k, x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^k |\partial^\alpha u(x)| < +\infty. \quad (2.1)$$

Equipé des semi-normes  $(\|\cdot\|_{k, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)})_{k \in \mathbb{N}}$ , l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  est un espace de Fréchet.

**Définition 2.1.2** *On note par  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  l'espace des formes linéaires continues sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . On dit que*

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \text{ si et seulement si } \langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

**Définition 2.1.3** *Soit  $s \in \mathbb{R}$ . On définit l'espace de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^d)$  par :*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d); \hat{u} \in L^2_{Loc}(\mathbb{R}^d) \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty\}.$$

Si  $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$  alors la transformation de Fourier de  $u$  s'écrit :

$$\mathcal{F}(u)(\xi) \equiv \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} u(x) dx.$$

**Définition 2.1.4** *On définit les espaces de Sobolev  $H^m(\mathbb{R}^d)$  où  $m \in \mathbb{N}$  par :*

$$H^m(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d), \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m\}.$$

On le munit de la norme naturelle :

$$\|u\|_{H^m} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

**Proposition 2.1.5** *L'espace  $H^m(\mathbb{R}^d)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  peut être défini par :*

$$H^m(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : (1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

et la norme définie par (2.2) est équivalente à

$$\|u\|_{H^m} := \left( \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

**Démonstration.** La démonstration de la proposition 2.1.5 s'appuie sur le lemme technique suivant :

**Lemme 2.1.6** *Pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $m \in \mathbb{N}$ , il existe deux constantes  $C_1(m, d) > 0$  et  $C_2(m, d) > 0$  telles que*

$$\begin{aligned} C_1(m, d)(1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2)^m &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \left( \prod_{i=1}^d |\xi_i|^{2\alpha_i} \right) \\ &\leq C_2(m, d)(1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2)^m, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Soit  $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$  telle que  $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$  pour tout  $|\alpha| \leq m$ . Le théorème de Plancherel nous assure que  $\mathcal{F}(D^\alpha u) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . D'autre part, comme  $D^\alpha u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ , alors  $\mathcal{F}(D^\alpha u) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . En utilisant le lemme 2.1.6, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha u|^2 dx &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^d |\xi_i|^{2\alpha_i} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq C_1(m, d) \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

On suppose maintenant que  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  telle que  $(1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , alors d'après le lemme 2.1.6, on a  $\prod_{i=1}^d |\xi_i|^{\alpha_i} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$  pour tout multi-indice  $\alpha$  tel que  $|\alpha| \leq m$ . Comme  $\mathcal{F}(D^\alpha u) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}$ , on déduit d'après le théorème de Plancherel, que  $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . En utilisant le lemme 2.1.6, on obtient :

$$\begin{aligned} C_2(m, d) \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi &\geq \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^d |\xi_i|^{2\alpha_i} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha u|^2 dx. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition. □

**Propriétés 2.1.7** *On énonce les propriétés suivantes :*

1) *Muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi,$$

l'espace de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^d)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , est un espace de Hilbert.

2) Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on a l'équivalence suivante :

$$u \in H^s(\mathbb{R}^d) \iff \forall \alpha, |\alpha| \leq k, D^\alpha u \in H^{s-k}(\mathbb{R}^d).$$

3) Si  $s = (1 - \theta)s_1 + \theta s_2$ ,  $\theta \in [0, 1]$ ,  $s_1 < s_2$  et  $u \in H^{s_2}(\mathbb{R}^d)$ , alors

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{H^{s_1}(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta} \|u\|_{H^{s_2}(\mathbb{R}^d)}^\theta.$$

4) Si  $s \in ]s_1, s_2[$  et  $u \in H^{s_2}(\mathbb{R}^d)$ , alors  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_\varepsilon$  tel que

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon \|u\|_{H^{s_2}(\mathbb{R}^d)} + C_\varepsilon \|u\|_{H^{s_1}(\mathbb{R}^d)}.$$

## 2.2 Espaces de Sobolev sur $\mathbb{H}^d$

Comme dans le cas euclidien, on rappelle quelques définitions concernant l'espace de Schwartz et l'espace de Sobolev sur le groupe de Heisenberg. On note par  $\mathcal{Z}$  la famille de champs de vecteurs définie par  $Z_j = X_j$ ,  $Z_{j+d} = Y_j$  pour  $j \in \{1, \dots, d\}$  et par  $\mathcal{Z}^\alpha = Z_{\alpha_1} \dots Z_{\alpha_k}$ , pour tout multi-indice  $\alpha$  de longueur  $k \geq 1$ .

**Définition 2.2.1** L'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$  est l'espace des fonctions  $u \in C^\infty(\mathbb{H}^d)$  telles que pour tous  $k, m \in \mathbb{N}$ ,

$$\|u\|_{k, \mathcal{S}(\mathbb{H}^d)}^* = \sup_{m \leq k, (z, s) \in \mathbb{H}^d} |\mathcal{Z}^m (|z|^2 - is)^k u(z, s)| < +\infty, \quad (2.4)$$

où  $\mathcal{Z}^m = \sum_{l=1}^m Z_{j_1} \dots Z_{j_l}$ ,  $j_l \in \{1, \dots, 2d\}$ .

**Proposition 2.2.2** Muni de la semi-norme

$$\|u\|_{k, \mathcal{S}(\mathbb{H}^d)}^* = \sup_{m \leq k} |\mathcal{Z}^m (|z|^2 + is)^k u(z, s)|,$$

l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$  est un espace de Fréchet.

**Définition 2.2.3** Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on note par  $H^k(\mathbb{H}^d)$  l'espace de Sobolev sur le groupe de Heisenberg d'ordre  $k$  défini par :

$$H^k(\mathbb{H}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{H}^d); \mathcal{Z}^\alpha u \in L^2(\mathbb{H}^d) \text{ pour tout } |\alpha| \leq k\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{H}^d)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\mathcal{Z}^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^2 < +\infty. \quad (2.5)$$

**Propriétés 2.2.4** On rappelle les propriétés suivantes :

1. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^k(\mathbb{H}^d)} = \sum_{l \leq k, j_m \in \{1, \dots, d\}} \left( Z_{j_1} \dots Z_{j_l} u, Z_{j_1} \dots Z_{j_l} v \right)_{L^2(\mathbb{H}^d)},$$

l'espace  $H^k(\mathbb{H}^d)$  est un espace de Hilbert.

2. Si  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  tel que  $k_1 \leq k_2$  alors  $H^{k_2}(\mathbb{H}^d)$  est continument inclus dans  $H^{k_1}(\mathbb{H}^d)$ .
3. Pour  $j \in \{1, \dots, d\}$ , le champ de vecteurs  $Z_j$  est un opérateur continu de  $H^k(\mathbb{H}^d)$  dans  $H^{k-1}(\mathbb{H}^d)$ .
4.  $H^{-k}(\mathbb{H}^d)$  est le dual de  $H^k(\mathbb{H}^d)$  : pour toute forme linéaire  $L$  continue sur  $H^k(\mathbb{H}^d)$ , il existe un unique  $u \in H^{-k}(\mathbb{H}^d)$  telle que  $L(v) = (u, v)$ ,  $\forall v \in H^k(\mathbb{H}^d)$ .
5. Soit  $s$  un réel positif. L'espace dual de  $H^s(\mathbb{H}^d)$  est l'espace  $H^{-s}(\mathbb{H}^d)$ .
6. On peut aussi caractériser les espaces de Sobolev via le calcul de Weyl [32, 42] et via la décomposition de Littlewood-Paley [19, 18].

### 2.2.1 Dilatation et masse de Dirac

Dans cette partie, on rappelle quelques propriétés de la masse de Dirac qui nous seront utiles dans le chapitre 4. Du fait que la dilatation anisotrope s'étend aux distributions  $u$  grâce à la formule de dualité suivante :

$$(\delta_a^* u, \varphi) = a^{-Q} (u, \varphi \circ \delta_{a^{-1}}), \quad \forall a > 0, \quad (2.6)$$

on est en mesure d'énoncer le lemme suivant :

**Lemme 2.2.5** *La masse de Dirac  $\delta_0$  est une distribution homogène de degré  $-Q$  où  $Q$  est la dimension homogène de  $\mathbb{H}^d$ .*

**Démonstration.** Une distribution  $u$  est dite homogène de degré  $\mu$  si  $\delta_a^* u = a^\mu u$ , alors d'après la formule (2.6), on déduit en que  $\delta_0$  est homogène de degré  $-Q$ .  $\square$

**Lemme 2.2.6** *Pour tous  $a \geq 1$  et  $s \geq 0$ , on a l'inégalité suivante :*

$$\|\delta_a^* u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)} \leq a^{s - \frac{Q}{2}} \|u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}. \quad (2.7)$$

**Démonstration.** Comme on peut retrouver l'inégalité (2.7) par interpolation pour  $s \geq 0$ , on montre le lemme 2.2.6 pour un entier  $k \in \mathbb{N}$ . En utilisant le fait que  $\mathcal{Z}^\alpha(\delta_a^* u) = a^{|\alpha|} \delta_a^*(\mathcal{Z}^\alpha u)$  pour tout  $a \geq 1$ , alors

$$\|\delta_a^* u\|_{H^k(\mathbb{H}^d)} = a^{-\frac{Q}{2}} \left( \|u\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^2 + \sum_{m=1}^k a^{2m} \|u\|_{H^m(\mathbb{H}^d)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq a^{k - \frac{Q}{2}} \|u\|_{H^k(\mathbb{H}^d)}.$$

Ainsi on remarque que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \|\delta_a^* u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)} = 0, \quad \text{si } 0 \leq s < \frac{Q}{2}.$$

$\square$

La proposition suivante est due à F. Vigneron [153],

**Proposition 2.2.7** *La masse de Dirac  $\delta_0$  n'appartient pas à  $H^{-\frac{Q}{2}}(\mathbb{H}^d)$ .*

**Démonstration.** Si  $\delta_0 \in H^{-\frac{Q}{2}}(\mathbb{H}^d)$ , alors l'inclusion  $H^{\frac{Q}{2}}(\mathbb{H}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^{2d+1})$  est continue. On va proposer un contre exemple afin de montrer que c'est impossible : soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d+1})$  supportée dans l'intervalle  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , égale à 1 près de l'origine et  $\rho$  est la distance homogène définie dans (1.29). La fonction définie par  $u = \log(-\log \rho)\varphi(\rho)$  n'est pas bornée au voisinage de l'origine mais  $u \in H^{\frac{Q}{2}}(\mathbb{H}^d)$ . En effet, en utilisant l'identité algébrique suivante :

$$\frac{d^n}{d\rho^n}(\log(-\log \rho)) = \frac{(-1)^{n+1}}{\rho^n \log \rho} P_n\left(\frac{1}{\log \rho}\right),$$

avec

$$P_1 = 1, \quad P_n(X) = (n+X)P_n(X) + X^2 P_n'(X),$$

on obtient

$$|Z^k u| \leq \frac{C_k}{\rho^k |\log \rho|} \tilde{\varphi}(\rho),$$

où  $\tilde{\varphi} = 1$  au voisinage du support de  $\varphi$ . Comme la norme de  $u$  dans  $H^k(\mathbb{H}^d)$  est contrôlée à une constante près par l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\rho^{Q-2k}}{|\log \rho|^2} \frac{d\rho}{\rho} = \int_{\log 2}^\infty e^{-(Q-2k)t} t^{-2} dt < \infty, \quad \text{si } k \leq \frac{Q}{2},$$

on en déduit que  $u \in H^{\frac{Q}{2}}(\mathbb{H}^d)$ . D'où la contradiction.  $\square$

Rappelons que dans le cas euclidien, la masse de Dirac  $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$  si  $s < -\frac{d}{2}$ . De plus, on a l'équivalence suivante :

$$\sum_{|\alpha| < N} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \in H^{-s}(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \forall \alpha, |\alpha| \leq s - \frac{d}{2}, c_\alpha = 0.$$

Dans le cas du groupe de Heisenberg, on a la proposition suivante :

**Proposition 2.2.8**

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|+\gamma < N} c_{\alpha,\beta,\gamma} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_s^\gamma \delta_0 \in H^{-s}(\mathbb{H}^d) \Leftrightarrow \forall (\alpha, \beta, \gamma), |\alpha| + |\beta| + 2\gamma \geq s - \frac{Q}{2}, \quad c_{\alpha,\beta,\gamma} = 0. \quad (2.8)$$

**Démonstration.** Si on note  $\tilde{u} = \sum_{|\alpha|+|\beta|+\gamma < N} c_{\alpha,\beta,\gamma} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_s^\gamma \delta_0$ , alors  $\tilde{u} \in H^{-s}(\mathbb{H}^d)$ . D'après la proposition 2.2.7, on a pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d+1})$ ,

$$\begin{aligned} |(\delta_{a^{-1}}^* \tilde{u}, \varphi)| &= a^Q |(\tilde{u}, \delta_a^* \varphi)| \leq a^Q \|\tilde{u}\|_{H^{-s}(\mathbb{H}^d)} \|\delta_a^* \varphi\|_{H^s(\mathbb{H}^d)} \\ &\leq C a^{s+\frac{Q}{2}} \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}. \end{aligned}$$

D'autre part, comme

$$\delta_{a^{-1}}^* (\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_s^\gamma \delta_0) = a^{|\alpha|+|\beta|+2\gamma} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_s^\gamma (\delta_{a^{-1}}^* \delta_0),$$

alors

$$\begin{aligned} |(\delta_{a^{-1}}^* \tilde{u}, \varphi)| &= \left| \sum_{|\alpha|+|\beta|+\gamma < N} c_{\alpha,\beta,\gamma} a^{Q+|\alpha|+|\beta|+2\gamma} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_s^\gamma \varphi(0) \right| \\ &\leq C a^{s+\frac{Q}{2}} \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\left| \sum_{|\alpha|+|\beta|+\gamma < N} c_{\alpha,\beta,\gamma} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_s^\gamma \varphi(0) \right| \leq C a^{s-\frac{Q}{2}-(|\alpha|+|\beta|+2\gamma)} \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}.$$

En faisant tendre  $a \rightarrow +\infty$ , on obtient d'après le lemme 2.2.6 que

$$|\alpha| + |\beta| + 2\gamma \geq s - \frac{Q}{2} \Rightarrow c_{\alpha,\beta,\gamma} = 0.$$

□

**Lemme 2.2.9** Notons par  $D_\mu$  l'ensemble des distributions homogènes de degré  $\mu$  sur le groupe de Heisenberg. On a

$$D_\mu \cap \bigcup_{s > \mu + \frac{Q}{2}} H^s(\mathbb{H}^d) = \{0\},$$

où  $Q = 2d + 2$  est la dimension homogène de  $\mathbb{H}^d$ .

**Démonstration.** Pour  $u \in D_\mu$ , on a  $\delta_a^* u = a^\mu u$ . Comme

$$a^\mu (u, \varphi) = (\delta_a^* u, \varphi) = a^{-Q} (u, \delta_{a^{-1}} \varphi),$$

alors  $(u, \varphi) = a^{Q+\mu} (u, \delta_{a^{-1}} \varphi)$ . Si de plus,  $u \in H^s(\mathbb{H}^d)$  pour  $s < 0$ , alors en vertu du lemme 2.2.6, il existe une constante  $C > 0$  telles que pour toute fonction test  $\varphi$  et tout  $a > 0$ ,

$$\begin{aligned} |(u, \varphi)| &= a^{Q+\mu} |(u, \delta_{a^{-1}} \varphi)| \\ &\leq a^{Q+\mu} \|u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)} \|\delta_{a^{-1}} \varphi\|_{H^{-s}(\mathbb{H}^d)} \\ &\leq C a^{\frac{Q}{2}+\mu-s} \|\varphi\|_{H^{-s}(\mathbb{H}^d)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

La proposition 2.2.8 implique que  $u = 0$  si  $\frac{Q}{2} + \mu < s$ . □

## 2.3 Inégalités géométriques sur $\mathbb{H}^d$

### 2.3.1 Inclusion compacte

Le théorème qui suit a été démontré par G. Folland et E. Stein [76]. La démonstration qu'on propose est due à Garafallo et Lanconelli [80].

**Théorème 2.3.1** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{H}^d$ . L'inclusion suivante

$$H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d) \subset L^p(\Omega), \quad 2 \leq p < 2 + \frac{2}{d} \quad (2.10)$$

est compacte.

**Démonstration.** Soit  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  et Soit  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{H}^d)$ , tels que  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\text{Supp}(\psi) \in \bar{B}_1$  et  $\int_{\mathbb{H}^d} \psi(z, s) dz ds = 1$ . Pour  $(z, s) = (x, y, s) \in \mathbb{H}^d$  et  $\varepsilon > 0$ , on pose  $\psi_\varepsilon(z, s) = \varepsilon^{-Q} \psi\left(\frac{1}{\varepsilon}z, \frac{1}{\varepsilon^2}s\right)$ , et on note  $u_\varepsilon(x, y, s) = \tilde{u} * \psi_\varepsilon(x, y, s)$ ,

$$u_\varepsilon(x, y, s) = \int_{\mathbb{H}^d} u(\zeta, \eta, \tau) \psi_\varepsilon((\zeta, \eta, \tau)^{-1} \circ (x, y, s)) d\zeta d\eta d\tau.$$

Puis on considère les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_j(\zeta, \eta, \tau) &= \zeta_j \psi(\zeta, \eta, \tau), \\ \beta_j(\zeta, \eta, \tau) &= \eta_j \psi(\zeta, \eta, \tau), \\ \gamma(\zeta, \eta, \tau) &= \tau \psi(\zeta, \eta, \tau), \\ \gamma^1(\zeta, \eta, \tau) &= \gamma((\zeta, \eta, \tau)^{-1}). \end{aligned}$$

Soit  $A$  est un ensemble borné dans  $H^1$  Pour  $u \in A$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} u_\varepsilon(x, y, s) &= - \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{H}^d} \left[ \alpha_{j,\varepsilon}((\zeta, \eta, \tau)^{-1} \circ (x, y, s)) X_j u(\zeta, \eta, \tau) \right. \\ &\quad \left. + \beta_{j,\varepsilon}((\zeta, \eta, \tau)^{-1} \circ (x, y, s)) Y_j u(\zeta, \eta, \tau) \right] d\zeta d\eta d\tau \\ &\quad - 2 \int_{\mathbb{H}^d} \varepsilon \gamma_\varepsilon(\zeta, \eta, \tau)^{-1} \circ (x, y, s) \partial_\tau u(\zeta, \eta, \tau) d\zeta d\eta d\tau. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Comme  $4S = -[X_j, Y_j]$ , alors

$$\begin{aligned} &- 2\varepsilon \int_{\mathbb{H}^d} \gamma_\varepsilon((\zeta, \eta, \tau)^{-1} \circ (x, y, s)) \partial_\tau u(\zeta, \eta, \tau) d\zeta d\eta d\tau \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{H}^d} X_j \left[ \gamma_\varepsilon((\zeta, \eta, \tau)^{-1} \circ (x, y, s)) \right] Y_j u(\zeta, \eta, \tau) d\zeta d\eta d\tau \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{H}^d} Y_j \left[ \gamma_\varepsilon((\zeta, \eta, \tau)^{-1} \circ (x, y, s)) \right] X_j u(\zeta, \eta, \tau) d\zeta d\eta d\tau. \end{aligned} \quad (2.12)$$

D'autre part, on a

$$X_j \left[ \gamma_\varepsilon((\zeta, \eta, \tau)^{-1} \circ (x, y, s)) \right] = \varepsilon^{-1} [X_j(\gamma_\varepsilon^1)]((x, y, s)^{-1} \circ (\zeta, \eta, \tau)). \quad (2.13)$$

L'égalité (2.13) reste valable si on remplace  $X_j$  par  $Y_j$ . En substituant (2.13) dans (2.12), puis dans (2.11) et en appliquant le théorème de Schwarz, on trouve

$$\left| \frac{d}{d\varepsilon} u_\varepsilon(x, y, s) \right| \leq C_A \left( \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{H}^d} \left[ (X_j u(\zeta, \eta, \tau))^2 + (Y_j u(\zeta, \eta, \tau))^2 \right] d\zeta d\eta d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_A \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc on en déduit que

$$\left| u_\varepsilon(z, s) - u(z, s) \right| = \left| \int_0^\varepsilon \frac{d}{d\rho} u_\rho(x, y, s) d\rho \right| \leq c \varepsilon \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

□

### 2.3.2 Inégalité de Poincaré sur $\mathbb{H}^d$

L'inégalité de Poincaré sur le groupe de Heisenberg a été démontré par D'Ambrosio [59, Théorème 2.12]. La démonstration suivante est due à Dou, Niu et Yuan [67, Lemme 2.3].

**Théorème 2.3.2** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{H}^d$  par rapport à l'une des directions de  $(z_1, \dots, z_{2d})$ , i.e., il existe  $R > 0$  et  $1 \leq j_0 \leq 2d$  tel que  $0 < r = |z_{j_0}| \leq R$  pour tout  $(z, s) \in \Omega$ . Pour tout  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , on a*

$$\int_{\Omega} |u(z, s)|^2 dz ds \leq 4R^2 \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 dz ds. \quad (2.14)$$

**Démonstration.** Comme  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \{(0, 0)\})$  est dense dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  ( Proposition 4.1.1), il suffit de prendre  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \{(0, 0)\})$ . Soit  $T(z, s) = (T_1(z, s), \dots, T_{2d}(z, s))$  un vecteur de classe  $C^1$  sur  $\Omega$  et on note  $\operatorname{div}_{\mathbb{H}^d} T = \sum_{j=1}^{2d} Z_j T_j$ . On a,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\operatorname{div}_{\mathbb{H}^d} T) |u|^2 dz ds &= -2 \int_{\Omega} \langle T, \nabla_{\mathbb{H}^d} u \rangle u dz ds \leq 2 \int_{\Omega} |\langle T, \nabla_{\mathbb{H}^d} u \rangle u| dz ds \\ &\leq 2 \left[ \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d} u|^2 dz ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{\Omega} |T|^2 |u|^2 dz ds \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d} u|^2 dz ds + \int_{\Omega} |T|^2 |u|^2 dz ds. \end{aligned}$$

Alors,

$$\int_{\Omega} \left( \operatorname{div}_{\mathbb{H}^d} T - |T|^2 \right) |u|^2 dz ds \leq \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d} u|^2 dz ds.$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , posons

$$T := T_\varepsilon = -\frac{1}{2} \frac{\nabla_{\mathbb{H}^d} r_\varepsilon}{r_\varepsilon}$$

où  $r_\varepsilon = (r^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$  et  $r = |z_{j_0}|$ . On a

$$\operatorname{div}_{\mathbb{H}^d} T_\varepsilon = -\frac{1}{2} \frac{1}{r_\varepsilon^2} [r_\varepsilon \Delta_{\mathbb{H}^d} r_\varepsilon - |\nabla_{\mathbb{H}^d} r_\varepsilon|^2].$$

Par suite,

$$\operatorname{div}_{\mathbb{H}^d} T_\varepsilon - |T_\varepsilon|^2 = -\frac{1}{2} \frac{\Delta_{\mathbb{H}^d} r_\varepsilon}{r_\varepsilon} + \frac{1}{4} \frac{|\nabla_{\mathbb{H}^d} r_\varepsilon|^2}{r_\varepsilon^2}.$$

Comme

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbb{H}^d} r_\varepsilon &= \frac{\nabla_{\mathbb{H}^d} r^2}{2r_\varepsilon} = \frac{r}{r_\varepsilon}, \quad |\nabla_{\mathbb{H}^d} r_\varepsilon|^2 = \frac{r^2}{r_\varepsilon^2} \\ \Delta_{\mathbb{H}^d} r_\varepsilon &= \frac{\Delta_{\mathbb{H}^d} r^2}{2r_\varepsilon} - \frac{\nabla_{\mathbb{H}^d} r^2}{2r_\varepsilon^2} \nabla_{\mathbb{H}^d} r_\varepsilon = \frac{1}{r_\varepsilon} - \frac{r^2}{r_\varepsilon^3}, \end{aligned}$$

ainsi,

$$\operatorname{div}_{\mathbb{H}^d} T_\varepsilon - |T_\varepsilon|^2 = -\frac{1}{2r_\varepsilon^2} + \frac{3r^2}{4r_\varepsilon^4},$$

et pour tout  $(z, s) \in \Omega$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{div}_{\mathbb{H}^d} T_\varepsilon - |T_\varepsilon|^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{r^2} \geq \frac{1}{4} \frac{1}{R^2}.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} [\operatorname{div}_{\mathbb{H}^d} T_\varepsilon - |T_\varepsilon|^2] |u|^2 dz ds \geq \frac{1}{4} \frac{1}{R^2} \int_{\Omega} |u|^2 dz ds,$$

par suite,

$$\frac{1}{4} \frac{1}{R^2} \int_{\Omega} |u|^2 dz ds \leq \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d} u|^2 dz ds.$$

**Une autre démonstration.** On présente une autre démonstration de l'inégalité de Poincaré basée sur le principe du maximum de Bony [31]. On considère le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^d} u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.15)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{H}^d$  dont le bord  $\partial\Omega$  est non caractéristique. Notons par  $\lambda_1$  la première valeur propre du problème (2.15). Si on suppose que  $\lambda_1 = 0$ , il existe alors une suite  $(u_j) \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  telles que  $\|\nabla_{\mathbb{H}^d} u_j\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$  et  $\|u_j\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . Comme l'inclusion de  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte, il existe  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  limite de la suite  $(u_j)$  qui vérifie

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \text{et} \quad -\Delta_{\mathbb{H}^d} u = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

Le Laplacien  $\Delta_{\mathbb{H}^d}$  étant hypoelliptique sur  $\Omega$  (voir [65, 100]), alors  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  et  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Et du fait que la famille de champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_d$  vérifie la condition d'Hörmander, on déduit d'après le principe du maximum de Bony, que  $u$  n'admet pas de maximum sur  $\Omega \setminus \partial\Omega$  et que le maximum se propage le long des courbes intégrales de  $X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_d$  à l'intérieur de  $\Omega$ . Or le bord  $\partial\Omega$  est non caractéristique pour le système de champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_d$ , alors pour tout point de  $\partial\Omega$ , il existe au moins un champ de vecteur de ce système transversale à  $\partial\Omega$ . Par suite, le maximum de  $u$  se propage le long de la courbe intégrale de ce vecteur, ce que veut dire que le maximum est atteint sur  $\Omega \setminus \partial\Omega$ , ce qui est impossible. Alors la seule possibilité est que le maximum soit atteint sur  $\partial\Omega$ . Comme  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ , alors  $u = 0$  sur  $\Omega$  et ceci est impossible car  $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . Par suite  $\lambda_1 > 0$ . On déduit donc que pour tout  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ ,  $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}^2$ .  $\square$

### 2.3.3 Inégalité de Sobolev sur $\mathbb{H}^d$

L'inégalité de Sobolev sur le groupe de Heisenberg a été démontrée par Jerison et Lee [103] et la démonstration qu'on propose est due à Danielli, Garofalo et Nhieu [60, Théorème 4.1]. On a besoin de rappeler quelques résultats préliminaires : on note par  $M(f)$  la fonction maximale d'une fonction  $f \in L^p(\mathbb{H}^d, \mathbb{C})$ ,  $1 < p < \infty$  définie par :

$$M(f)(\xi) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_\rho(\xi, r)|} \int_{B_\rho(\xi, r)} |f(\xi')| d\xi', \quad \forall \xi, \xi' \in \mathbb{H}^d. \quad (2.16)$$

Il existe une constante positive  $C = C(p, \mathbb{H}^d, \rho)$  telle que

$$\|M(f)\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{H}^d, \mathbb{C}).$$

Pour  $1 < \alpha < Q$ , l'opérateur d'intégration fractionnel est défini par :

$$I_\alpha(f(\xi)) := \int_{\mathbb{H}^d} \frac{f(\xi')}{\left(\rho(\xi'^{-1} \circ \xi)\right)^{Q-\alpha}} d\xi',$$

où  $\rho$  est la distance homogène sur  $\mathbb{H}^d$ .

**Proposition 2.3.3** *Soit  $f(\rho)$  une fonction radiale définie sur la boule  $B_\rho(0, r)$ . Si  $f(\rho) \in L^1(B_\rho(0, r))$ , alors*

$$\int_{B_\rho(0, r)} f(\rho)(\xi) d\xi = Q w_\rho \int_0^r \tau^{Q-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.17)$$

où  $w_\rho$  est la mesure de Lebesgue de  $B_\rho(0, 1)$ .

**Théorème 2.3.4** *Soient  $1 < p < \frac{Q}{\alpha}$  et  $q > p$  avec  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{Q}$ . Il existe une constante positive  $C = C(\alpha, p, \mathbb{H}^d, \rho)$  telle que  $\|I_\alpha(f)\|_{L^q(\mathbb{H}^d)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}$ , pour tout  $f \in L^p(\mathbb{H}^d)$ .*

**Démonstration.** Pour tous  $t > 0$  fixé et  $\xi \in \mathbb{H}^d$ , on peut écrire  $I_\alpha$  ainsi :

$$\begin{aligned} I_\alpha(f(\xi)) &= \left( \int_{\rho(\xi'^{-1} \circ \xi) \leq t} + \int_{\rho(\xi'^{-1} \circ \xi) \geq t} \right) |f(\xi')| (\rho(\xi'^{-1} \circ \xi))^{\alpha-Q} d\xi' \\ &=: I_\alpha^{(t)}(f)(\xi) + E_\alpha^{(t)}(f)(\xi). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder et l'égalité (2.17) à  $E_\alpha^{(t)}(f)$ , on obtient

$$\begin{aligned} E_\alpha^{(t)}(f)(\xi) &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \left( \int_{\rho(\xi'^{-1} \circ \xi) \geq t} (\rho(\xi'^{-1} \circ \xi))^{\frac{(\alpha-Q)p}{p-1}} d\xi' \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq C_1 \|f\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \left( \int_t^\infty \tau^{\frac{Q-1+(\alpha-Q)p}{p-1}} d\tau \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq C'_1 \|f\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} t^{\alpha-\frac{Q}{p}}. \end{aligned}$$

Puis en utilisant la décomposition dyadique,  $I_\alpha^{(t)}(f)$  s'écrit

$$\begin{aligned} I_\alpha^{(t)}(f)(\xi) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{2^{-k-1} < \frac{1}{t} \rho(\xi'^{-1} \circ \xi) \leq 2^{-k}\}} |f(\xi')| (\rho(\xi'^{-1} \circ \xi))^{\alpha-Q} d\xi' \\ &\leq C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2^k}\right)^{\alpha-Q} \int_{\{\rho(\xi'^{-1} \circ \xi) \leq 2^{-k}t\}} |f(\xi')| d\xi' \\ &\leq C'_2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2^k}\right)^{\alpha-Q} (2^{-k}t)^Q M(f)(\xi) \leq C_3 t^\alpha M(f)(\xi) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha}. \end{aligned}$$

En sommant les deux termes, on déduit que

$$I_\alpha(f(\xi)) \leq C(t^{\alpha - \frac{Q}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} + t^\alpha M(f)(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathbb{H}^d,$$

et pour tout  $t > 0$ . En particulier pour  $t = \left(\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}}{M(f)(\xi)}\right)^{\frac{p}{Q}}$ , on a

$$I_\alpha(f(\xi)) \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^{\frac{\alpha p}{Q}} (M(f)(\xi))^{1 - \frac{\alpha p}{Q}}.$$

Comme  $p = q(1 - \frac{\alpha p}{Q})$ , on déduit en appliquant (2.16) que

$$\begin{aligned} \|I_\alpha(f)\|_{L^q(\mathbb{H}^d)}^q &\leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^{\frac{\alpha p q}{Q}} \int_{\mathbb{H}^d} (M(f)(\xi))^p d\xi \\ &\leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^{\frac{\alpha p q}{Q}} \|f\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^p = C \|f\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^q. \end{aligned}$$

□

**Théorème 2.3.5** *Soit  $1 < p < Q$  où  $Q$  est la dimension homogène de  $\mathbb{H}^d$ . Il existe une constante positive  $C = C(p, \mathbb{H}^d)$  tel que pour  $q = \frac{Qp}{Q-p}$ , on a*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{H}^d)} \leq C \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \quad \text{pour tout } u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^d).$$

**Démonstration.** Soit  $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^d)$ . En utilisant la propriété (1.32) de la solution fondamentale  $\Gamma$ , on a pour tous  $\xi, \xi' \in \mathbb{H}^d$  :

$$u(\xi) = - \int_{\mathbb{H}^d} \Gamma(\xi^{-1} \circ \xi') \Delta_{\mathbb{H}^d} u(\xi') d\xi' = \int_{\mathbb{H}^d} (\nabla_{\mathbb{H}^d} \Gamma)(\xi^{-1} \circ \xi') \nabla_{\mathbb{H}^d} u(\xi') d\xi'.$$

En dehors de l'origine,  $\nabla_{\mathbb{H}^d} \Gamma = c_d \nabla_{\mathbb{H}^d} (\rho^{2-Q}) = (2-Q)c_d \rho^{1-Q} \nabla_{\mathbb{H}^d} (\rho)$  et comme  $\nabla_{\mathbb{H}^d} \rho$  est de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{H}^d \setminus \{0\}$ , homogène de degré 0 par rapport à la dilatation (1.24), on en déduit que  $|\nabla_{\mathbb{H}^d} \Gamma| \leq C \rho^{1-Q}$  où  $C > 0$  est une constante qui dépend uniquement de  $\Delta_{\mathbb{H}^d}$ . Par suite, on a

$$|u(\xi)| \leq C \int_{\mathbb{H}^d} (\nabla_{\mathbb{H}^d} u(\xi')) \rho^{1-Q}(\xi') d\xi' = C I_1(|\nabla_{\mathbb{H}^d} u|)(\xi).$$

En appliquant le théorème 2.3.4, on déduit que pour  $q$  tel que  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{Q}$ ,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{H}^d)} \leq C \|I_1(|\nabla_{\mathbb{H}^d} u|)\|_{L^q(\mathbb{H}^d)} \leq \|\nabla_{\mathbb{H}^d} f\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}.$$

□

## 2.4 Remarques

Rappelons que la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev dans le cas euclidien s'écrit

$$\|f\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}(\mathbb{R}^d)} \leq C_p(\mathbb{R}^d) \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad (2.18)$$

a été déterminée par Talenti [148] et Aubin [8, 9], pour  $1 \leq p < d$ .

$$C_p(\mathbb{R}^d) = \left(\frac{1}{d}\right)^{\frac{d-p}{dp}} \left[ \left(\frac{p-1}{d-p}\right)^{\frac{d}{q}} \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(\frac{d}{p})\Gamma(1+\frac{d}{q})\omega_{d-1}} \right]^{\frac{1}{d}}, \quad (2.19)$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma,  $\omega_{d-1}$  est l'aire de la sphère unité dans  $\mathbb{R}^d$  et  $q = p/(p-1)$ . Dans le cas où  $p = 2$ , les fonctions extrémales, modulo translations et dilatations, sont de la forme  $(1 + |x|^q)^{-\frac{d-2}{2}}$ . En particulier, les fonctions

$$u_\lambda(x) = [d(d-2)]^{\frac{1}{p-1}} \frac{\lambda^{\frac{d-2}{2}}}{(1 + \lambda^2 |x|^2)^{\frac{d-2}{2}}}, \quad \lambda > 0$$

de sorte que  $u_\lambda$  vérifie  $-\Delta u_\lambda = u_\lambda^p$  sur  $\mathbb{R}^d$ . L'analogie de cette inégalité sur le groupe de Heisenberg a été démontrée par Jerison et Lee [102].

**Théorème 2.4.1** *Pour tout  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ ,*

$$\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega, \mathbb{H}^d)}, \quad (2.20)$$

où  $2^* = 2 + \frac{2}{d}$  est l'indice critique de l'inégalité de Sobolev.

Les fonctions extrémales, modulo translations et dilatations, sont de la forme

$$e_\lambda(z, s) = \left[ \frac{\lambda^2}{\lambda^4 s^2 + (\lambda^2 |z|^2 + 1)^2} \right]^{\frac{d}{2}}, \quad \lambda > 0.$$

1. Le rôle clé joué par les groupes de Carnot est devenu évident suite aux idées exposées par E. M. Stein dans son discours au Congrès international des mathématiciens à Nice en 1970, avec un certain nombre d'articles importants. Voir par exemple l'article de S. Semmes [144] pour les aspects analytiques et géométriques du groupe de Heisenberg.
2. Folland [74] a démontré l'existence de la solution fondamentale du Laplacien pour des champs de vecteurs vérifiant la condition d'Hörmander, dans ce contexte on peut voir les travaux de Beals, Gaveau et Greiner [24] pour la représentation intégrale de la solution fondamentale du Laplacien sur les groupes d'ordre 2. Rappelons que la forme analytique de la condition d'Hörmander est apparue en 1967 dans son papier célèbre [97] où Hörmander a montré que c'est une condition suffisante pour qu'un opérateur différentiel d'ordre 2 soit hypoelliptique.
3. Les inclusions de Sobolev dans la section 2.3 sont des outils standards dans la résolution des équations aux dérivées partielles. Dans le contexte des champs de vecteurs vérifiant la condition d'Hörmander, on peut voir les résultats obtenus par Lu [115],

Capogna-Danielli-Garofalo [43] et Magnani [116] (voir aussi [90, 96, 161]). L'inégalité de Poincaré pour des champs de vecteurs vérifiant la condition d'Hörmander est due à Jerison [101]. Varopoulos [151] a présenté une preuve élégante dans le cas des groupes de Carnot, voir aussi [90, Proposition 11.17]. Les inégalités de Sobolev-Poincaré ont été traitées dans les articles de Capogna-Danielli-Garofalo [44, 45] et Lanconelli-Morbidelli [109].

4. Les meilleures constantes des inégalités de Sobolev et de Moser-Trudinger ont été étudiées par plusieurs auteurs dans des contextes variés dans  $\mathbb{R}^d$  et dans la sphère  $\mathbb{S}^d$ . Elles jouent un rôle fondamental dans la résolution des problèmes géométriques, voir par exemple [1, 10, 27, 47, 79, 111]. Dans le cas du groupe de Heisenberg, La première percée importante est venue grâce aux travaux D. Jerison et J. Lee [102] sur la meilleure constante de l'inégalité de Sobolev. Ils ont montré que les fonctions extrémales sont images à constante près par les transformation de Cayley des solutions du problème de Yamabe sur la sphère  $\mathbb{S}^{2d+1}$ . S. Cohn et G. Lu ont donné la constante optimale de l'inégalité de Moser-Trudinger sur le groupe de Heisenberg [55, 56].



# Chapitre 3

## Théorie de Littlewood-Paley sur $\mathbb{H}^d$

Historiquement, la décomposition de Littlewood-Paley a été introduite dans les années 30 par J.E. Littlewood et R. Paley pour estimer la norme  $L^p$  des séries de Fourier trigonométriques. Leurs résultats se sont avérés très utiles dans l'étude mathématique des équations aux dérivés partielles. Dans ce chapitre, on rappelle les résultats classiques concernant la décomposition de Littlewood-Paley sur le groupe de Heisenberg. Cette dernière nous sera utile dans la démonstration de l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de Hardy sur  $\mathbb{H}^d$ .

### 3.1 Théorie de Littlewood-Paley sur $\mathbb{H}^d$

Afin d'introduire la théorie de Littlewood-Paley sur le groupe de Heisenberg, on a besoin de rappeler la définition de la transformation de Fourier. Pour plus de détails, se référer aux articles suivants [146, 124, 19, 18, 70, 83].

#### 3.1.1 Transformation de Fourier de fonctions radiales

Comme le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^d$  est non commutatif, la transformation de Fourier est définie à l'aide des représentations irréductibles unitaires de  $\mathbb{H}^d$ . Pour tout  $\lambda \neq 0$ , considérons l'espace de Hilbert défini par

$$\mathcal{H}_\lambda = \{F \text{ holomorphe sur } \mathbb{C}^n, \|F\|_{\mathcal{H}_\lambda} < \infty\},$$

où

$$\|F\|_{\mathcal{H}_\lambda}^2 = \left(\frac{2|\lambda|}{\pi}\right)^d \int_{\mathbb{C}^n} e^{-2|\lambda||\xi|^2} |F(\xi)|^2 d\xi. \quad (3.1)$$

On définit une représentation irréductible unitaire  $u^\lambda$  de  $\mathbb{H}^d$  dans  $U(\mathcal{H}_\lambda)$  par

$$\begin{aligned} u_{z,s}^\lambda F(\xi) &= F(\xi - \bar{z}) e^{i\lambda s + 2\lambda(\xi z - |z|^2/2)}, \text{ si } \lambda > 0 \\ &= F(\xi + z) e^{i\lambda s + 2\lambda(\xi \bar{z} - |z|^2/2)}, \text{ si } \lambda < 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, notons que les monômes

$$F_{\alpha,\lambda} := \frac{(\sqrt{2|\lambda|}\xi)^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}, \quad \alpha \in (\mathbb{N})^d, \quad (3.2)$$

forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_\lambda$ .

**Définition 3.1.1** La transformation de Fourier d'une fonction  $f \in L^1(\mathbb{H}^d)$  est donnée par

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{H}^d} f(z, s) u_{z,s}^\lambda dz ds,$$

où  $\mathcal{F}(f)(\lambda)$  est à valeurs dans les opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}_\lambda$ .

Soit  $\mathcal{A}$  l'espace de Hilbert de toutes les familles à paramètre  $\{A(\lambda)\}_{\lambda \neq 0}$  d'opérateurs sur  $\mathcal{H}_\lambda$  qui sont de Hilbert-Schmidt pour presque tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et qui sont munis de la norme

$$\|\{A(\lambda)\}\| = \left( \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \|A(\lambda)\|_{HS(\mathcal{H}_\lambda)}^2 |\lambda|^d d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Ainsi la transformation de Fourier se prolonge en isométrie de  $L^2(\mathbb{H}^d)$  sur  $\mathcal{A}$  et la formule de Plancherel s'écrit :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^2 := \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \sum_{\alpha \in (\mathbb{N}^d)^d} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(\lambda) F_{\alpha,\lambda}\|_{\mathcal{H}_\lambda}^2 |\lambda|^d d\lambda. \quad (3.3)$$

D'autre part, le produit scalaire de deux fonctions  $f$  et  $g$  dans  $L^2(\mathbb{H}^d)$  se formule comme suit :

$$(f, g)_{L^2(\mathbb{H}^d)} := \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \sum_{\alpha \in (\mathbb{N}^d)^d} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{f}(\lambda) F_{\alpha,\lambda}, \hat{g}(\lambda) F_{\alpha,\lambda})_{\mathcal{H}_\lambda} |\lambda|^d d\lambda. \quad (3.4)$$

La formule (3.4) s'étant pour  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{H}^d)$  et  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$ . De plus, on a

$$\mathcal{F}(f * g)(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda) \circ \mathcal{F}(g)(\lambda). \quad (3.5)$$

Dans le cas particulier des fonctions radiales i.e. de la forme  $f(z, s) = g(|z|, s)$ , on a la proposition suivante qui est démontrée dans [124] :

**Proposition 3.1.2** Soit  $f \in L^2(\mathbb{H}^d)$  une fonction radiale. La transformée de Fourier de  $f$  s'écrit

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) F_{\alpha,\lambda} = \mathcal{R}_{|\lambda|} F_{\alpha,\lambda},$$

et la transformée de Fourier inverse est défini par

$$f(z, s) = \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \sum_{m \geq 0} e^{-i\lambda s} e^{-|\lambda||z|^2} \mathcal{R}_m(\lambda) L_m^{d-1}(2|\lambda||z|^2) |\lambda|^d dz ds,$$

où

$$\mathcal{R}_m(\lambda) := \left( \binom{m+d-1}{m} \right)^{-1} \int_{\mathbb{H}^d} f(z, s) e^{i\lambda s} e^{-|\lambda||z|^2} L_m^{d-1}(2|\lambda||z|^2) dz ds,$$

et  $L_m^\beta$  désignent les polynômes de Laguerre de type  $\beta \in \mathbb{N}$  et de degré  $m \in \mathbb{N}$ , définis par

$$L_m^{(d)}(\tau) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} \binom{m+d}{m-k} \tau^k, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

### 3.1.2 Décomposition de Littlewood-Paley

Notons par  $C_0 = \{\tau \in \mathbb{R}; \frac{3}{4} \leq |\tau| \leq \frac{8}{3}\}$  et  $B_0 = \{\tau \in \mathbb{R}; |\tau| \leq \frac{4}{3}\}$ . Il existe deux fonctions radiales  $\mathcal{R}^* \in C_0^\infty(C_0)$  et  $\bar{\mathcal{R}}^* \in C_0^\infty(B_0)$  tels que

$$\bar{\mathcal{R}}^*(\tau) + \sum_{j \geq 0} \mathcal{R}(2^{-2j}\tau) = 1, \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \text{ et } \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}^*(2^{-2j}\tau) = 1, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^*, \quad (3.6)$$

et qui vérifient

$$\begin{aligned} |p - q| \geq 1 &\Rightarrow \text{supp} \mathcal{R}^*(2^{-2q}\cdot) \cap \text{supp} \mathcal{R}^*(2^{-2p}\cdot) = \emptyset, \\ q \geq 1 &\Rightarrow \text{supp} \bar{\mathcal{R}}^* \cap \text{supp} \mathcal{R}^*(2^{-2q}\cdot) = \emptyset. \end{aligned} \quad (3.7)$$

D'autre part, d'après la proposition 3.1.2, il existe deux fonctions radiales  $\varphi$  et  $\psi$  sur  $\mathbb{H}^d$  vérifiant

$$\mathcal{F}(\varphi)(\lambda)F_{\alpha,\lambda} = \mathcal{R}_{|\alpha|}(\lambda)F_{\alpha,\lambda} \text{ et } \mathcal{F}(\psi)(\lambda)F_{\alpha,\lambda} = \bar{\mathcal{R}}_{|\alpha|}^*(\lambda)F_{\alpha,\lambda},$$

où  $\mathcal{R}_m^*(\tau) = \mathcal{R}^*((2m+d)\tau)$  et  $\bar{\mathcal{R}}_m^*(\tau) = \bar{\mathcal{R}}^*((2m+d)\tau)$ .

On peut donc définir pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , une famille d'opérateurs  $\Delta_j : L^2(\mathbb{H}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{H}^d)$  par

$$\mathcal{F}(\Delta_j)(\lambda)F_{\alpha,\lambda} = \mathcal{R}_{|\alpha|}^j(\lambda)\hat{f}(\lambda)F_{\alpha,\lambda},$$

tels que

$$\Delta_{-1}f = f * \psi, \quad \dot{\Delta}_j f = f * \varphi_j, \quad \Delta_j f = f * \varphi_j, \quad \text{si } j \geq 0,$$

où  $\varphi_j(z, s) = 2^{Qj}\varphi_j(2^j z, 2^{2j}s)$  et  $\psi_j(z, s) = 2^{Qj}\psi_j(2^j z, 2^{2j}s)$  vérifient

$$\mathcal{F}(\varphi_j)(\lambda)F_{\alpha,\lambda} = \mathcal{R}_{|\alpha|}^*(\lambda)(2^{-2j}\lambda) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\psi_j)(\lambda)F_{\alpha,\lambda} = \bar{\mathcal{R}}_{|\alpha|}^*(\lambda)(2^{-2j}\lambda).$$

La série  $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j f$ , lorsqu'elle converge, s'appelle la décomposition de Littlewood-Paley de  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$  sur le groupe de Heisenberg. Posons  $\tilde{\varphi} = \varphi_{j-1} + \varphi_j + \varphi_{j+1}$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ . Pour tout  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{H}^d)$ , on a

$$f * \varphi_j = f * \varphi_j * \tilde{\varphi}. \quad (3.8)$$

D'autre part si  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{H}^d)$  alors  $f \in L^2(\mathbb{H}^d)$ , et par suite  $\|\dot{\Delta}_j f\|_{l^2(\mathbb{Z})} \in L^2(\mathbb{H}^d)$  (voir [19] pour plus de détails).

## 3.2 Espaces de Besov sur $\mathbb{H}^d$

L'outil essentiel dans l'étude des espaces de Besov est la décomposition dyadique définie dans la section précédente. On donne la définition des espaces de Besov homogènes et non homogènes comme dans [18, 16].

### 3.2.1 Définitions et propriétés

**Définition 3.2.1** Soient  $s \in \mathbb{R}$ , et  $1 \leq p, r \leq +\infty$  deux réels. L'espace de Besov non homogène sur le groupe de Heisenberg  $B_{p,r}^s(\mathbb{H}^d)$  est l'espace de distributions tempérées  $u$  telles que la série  $(\Delta_j u)_j$  est convergente dans  $L^p(\mathbb{H}^d)$  et dont la norme

$$\|u\|_{B_{p,r}^s(\mathbb{H}^d)} = \left( \sum_{j \geq -1} 2^{jrs} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^r \right)^{\frac{1}{r}} < +\infty. \quad (3.9)$$

De même, l'espace de Besov homogène sur le groupe de Heisenberg  $\dot{B}_{p,r}^s(\mathbb{H}^d)$  est l'espace de distributions tempérées  $u$  telles que la série  $(\dot{\Delta}_j u)_j$  est convergente dans  $L^p(\mathbb{H}^d)$  et dont la norme

$$\|u\|_{\dot{B}_{p,r}^s(\mathbb{H}^d)} = \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jrs} \|\dot{\Delta}_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^r \right)^{\frac{1}{r}} < +\infty. \quad (3.10)$$

**Lemme 3.2.2** On désigne par  $C'_0 = \{\tau, c_1 \leq |\tau| \leq c_1^{-1}\}$ ,  $0 < c_1 \leq \frac{1}{2}$  et  $B = \{\tau, |\tau| \leq b\}$ ,  $b > 1$ . Soient  $s \in \mathbb{R}$  et  $1 \leq p, r \leq +\infty$  deux réels. Soit  $(u_j)_{j \geq -1}$  une suite de fonctions de  $L^p(\mathbb{H}^d)$  vérifiant

$$\mathcal{F}(u_j)(\lambda) F_{\alpha,\lambda} = 1_{(2^{|\alpha|+d})^{-1} 2^{2j} C'_0}(\lambda) \mathcal{F}(u_j)(\lambda) F_{\alpha,\lambda} \text{ et } \sum_{j \geq -1} 2^{jrs} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^r < +\infty,$$

alors

$$u = \sum_{j \geq -1} u_j \in B_{p,r}^s(\mathbb{H}^d) \text{ et } \|u\|_{B_{p,r}^s(\mathbb{H}^d)} \leq c_s \left( \sum_{j \geq -1} 2^{jrs} \|u_j\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Si  $s > 0$  et  $(u_j)_j$  vérifie

$$\mathcal{F}(u_j)(\lambda) F_{\alpha,\lambda} = 1_{(2^{|\alpha|+d})^{-1} 2^{2j} B}(\lambda) \mathcal{F}(u_j)(\lambda) F_{\alpha,\lambda} \text{ et } \sum_{j \geq -1} 2^{jrs} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^r < +\infty,$$

alors

$$u = \sum_{j \geq -1} u_j \in B_{p,r}^s(\mathbb{H}^d) \text{ et } \|u\|_{B_{p,r}^s(\mathbb{H}^d)} \leq c_s \left( \sum_{j \geq -1} 2^{jrs} \|u_j\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

**Démonstration.** Il existe un entier  $N_0$  tel que

$$\text{si } |j - j'| \geq N_0 \Rightarrow (2m + d)^{-1} 2^j C_0 \cap (2m + d)^{-1} 2^{j'} C'_0 = \emptyset. \quad (3.11)$$

Pour  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^d) \subset \bigcap_{s,p,r} B_{p,r}^s(\mathbb{H}^d)$ , on a

$$\begin{aligned} (u_j, f)_{L^2(\mathbb{H}^d)} &= \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \sum_{\alpha \in (\mathbb{N})^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}(u_j)(\lambda) F_{\alpha,\lambda}, \mathcal{F}(f)(\lambda) F_{\alpha,\lambda}) \mathcal{H}_\lambda |\lambda|^d d\lambda \\ &= \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \sum_{\alpha \in (\mathbb{N})^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}(u_j)(\lambda) F_{\alpha,\lambda}, \sum_{|j-k| \leq N_0} \mathcal{F}(f)(\lambda) F_{\alpha,\lambda}) \mathcal{H}_\lambda |\lambda|^d d\lambda \\ &= \sum_{|j-k| \leq N_0} (u_j, \Delta_k f)_{L^2(\mathbb{H}^d)} \\ &\leq 2^{js} \|u_j\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \sum_{|j-k| \leq N_0} 2^{-js} \|\Delta_k f\|_{L^{\bar{p}}(\mathbb{H}^d)}, \end{aligned}$$

où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{\bar{p}} = 1$ . Pour  $\bar{r}$  tel que  $\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} = 1$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq -1} (u_j, f)_{L^2(\mathbb{H}^d)} &\leq \left( \sum_{j \geq -1} 2^{jrs} \|u_j\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^r \right)^{\frac{1}{r}} \left( \sum_{j \geq -1} \left( \sum_{|j-k| \leq N_0} 2^{-js} \|\Delta_k f\|_{L^{\bar{p}}(\mathbb{H}^d)} \right)^{\bar{r}} \right)^{\frac{1}{\bar{r}}} \\ &\leq C_{N_0} \left( \sum_{j \geq -1} 2^{jrs} \|u_j\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^r \right)^{\frac{1}{r}} \left( \sum_{j \geq -1} 2^{-j\bar{r}s} \|\Delta_k f\|_{L^{\bar{p}}(\mathbb{H}^d)}^{\bar{r}} \right)^{\frac{1}{\bar{r}}}. \end{aligned}$$

On en déduit ainsi que la série  $\sum_{j \geq -1} u_j$  converge dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{H}^d)$ . A partir de (3.11), on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} &= \left\| \sum_{|j-j'| < N_0} \Delta_j u_{j'} \right\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \leq \sum_{|j-j'| < N_0} \|u_{j'} * \varphi_j\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \\ &\leq C_1 \sum_{|j-j'| < N_0} \|u_{j'}\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}, \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} 2^{js} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} &\leq C_1 \sum_{|j-j'| < N_0} 2^{js} \|u_{j'}\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \\ &\leq C_2 \sum_{|j-j'| < N_0} 2^{j's} \|u_{j'}\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \\ &\leq (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} * (d_l)_{l \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

où  $c_k = 1_{[-N_0, N_0]}(k)$  et  $d_l = 1_{\mathbb{N}} 2^{ls} \|u_l\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}$ . En utilisant la convolution entre  $l^1(\mathbb{Z})$  et  $l^r(\mathbb{Z})$ , on obtient

$$\left\| \sum_{j \geq -1} u_j \right\|_{B_{p,r}^s(\mathbb{H}^d)} \leq C \left( \sum_{j' \geq -1} 2^{j'rs} \|u_{j'}\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Pour la démonstration de la deuxième partie du lemme, on a pour tout  $s > 0$ ,

$$\|u_j\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \leq C 2^{-js},$$

donc que  $\sum_{j \geq -1} u_j$  converge dans  $L^p(\mathbb{H}^d)$ . Il existe un entier  $N_1$  tel que

$$\text{si } j \geq j' + N_0 \Rightarrow (2m+d)^{-1} 2^j C_0 \cap (2m+d)^{-1} 2^{j'} B = \emptyset. \quad (3.12)$$

Par suite,

$$\begin{aligned} 2^{js} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} &\leq C_1 \sum_{j' > j - N_1} 2^{js} \|u_{j'}\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \\ &\leq C_2 \sum_{j' > j - N_1} 2^{(j-j')s} \|u_{j'}\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \\ &\leq (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} * (d_l)_{l \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

tels que  $c_k = 1_{[-N_1, +\infty[}(k) 2^{-ks}$  et  $d_l = 1_{\mathbb{N}} 2^{ls} \|u_l\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}$ . Le reste de la preuve est identique.

□

Comme dans le cas classique (voir [16]), on a les propriétés suivantes

### Propriétés 3.2.3

- i)  $B_{p,r}^s(\mathbb{H}^d)$  est un espace de Banach pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , et  $1 \leq p, r \leq +\infty$ ,
- ii) Le dual de  $B_{p,r}^s(\mathbb{H}^d)$  est  $B_{\bar{p},\bar{r}}^{-s}(\mathbb{H}^d)$ , avec  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{\bar{p}}$  et  $1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}}$ .

**Théorème 3.2.4** *Les inclusions suivantes sont continues :*

$$\begin{aligned} L^p(\mathbb{H}^d) &\subset B_{p,+\infty}^0(\mathbb{H}^d), \\ B_{p,1}^0(\mathbb{H}^d) &\subset L^p(\mathbb{H}^d), \\ B_{p,r}^{s'}(\mathbb{H}^d) &\subset B_{p,r}^s(\mathbb{H}^d), \text{ si } s \leq s', \\ B_{p,r}^s(\mathbb{H}^d) &\subset B_{p,r'}^s(\mathbb{H}^d), \text{ si } r \leq r', \\ B_{p,r}^s(\mathbb{H}^d) &\subset B_{p',r}^{s-Q(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})}(\mathbb{H}^d), \text{ si } p \leq p'. \end{aligned}$$

**Démonstration.** Les deux premières inégalités découlent au fait que

$$\|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} = \|u * \varphi_j\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \leq \|\varphi_j\|_{L^1(\mathbb{H}^d)} \|u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)},$$

Soit  $q$  tel que  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}$ . Grâce à (3.8), on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\Delta_j u\|_{L^{p'}(\mathbb{H}^d)} &= \|u * \varphi_j * \tilde{\varphi}_j\|_{L^{p'}(\mathbb{H}^d)} \\ &\leq \|u * \varphi_j\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \|\tilde{\varphi}_j\|_{L^q(\mathbb{H}^d)} \\ &\leq 2^{jQ(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \|\tilde{\varphi}_0\|_{L^q(\mathbb{H}^d)}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi la dernière inégalité.  $\square$

## 3.2.2 Espace de Sobolev homogène via la décompositon dyadique

Comme dans le cas classique, on va utiliser la décomposition dyadique pour décrire les espaces de Sobolev homogène sur  $\mathbb{H}^d$  [146]. Au paravant, rappelons la définition des espaces de Sobolev pour des indices négatifs.

**Définition 3.2.5** *Soit  $k \in \mathbb{N}$ . L'espace de Sobolev  $H^{-k}(\mathbb{H}^d)$  est l'espace de fonctions de  $\mathcal{S}'(\mathbb{H}^d)$  vérifiant*

$$\|u\|_{H^{-k}(\mathbb{H}^d)}^2 = \|(\Delta_{\mathbb{H}^d})^{-\frac{k}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^2 < \infty, \text{ si } k \text{ est pair}, \quad (3.13)$$

$$= \|(\Delta_{\mathbb{H}^d})^{-\frac{(k+1)}{2}} u\|_{H^1(\mathbb{H}^d)}^2 < \infty, \text{ si } k \text{ est impair} \quad (3.14)$$

**Théorème 3.2.6** *Soit  $k < \frac{Q}{2}$  où  $Q$  est la dimension homogène de  $\mathbb{H}^d$ . L'espace de Sobolev homogène  $\dot{H}^k(\mathbb{H}^d)$  est égale à l'espace de Besov  $\dot{B}_{2,2}^k(\mathbb{H}^d)$ .*

**Démonstration.** En vertu du fait que pour tout  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$ ,

$$\mathcal{F}\left((\Delta_{\mathbb{H}^d})^{k/2}u\right)(\lambda)F_{\alpha,\lambda} = (4|\lambda|(2|\alpha| + d))^{k/2}\mathcal{F}(u)(\lambda)F_{\alpha,\lambda}, \quad (3.15)$$

et de la formule de Plancherel (3.3), on a pour  $k > 0$  pair

$$\begin{aligned} \|u\|_{\dot{H}^k(\mathbb{H}^d)}^2 &= \|(\Delta_{\mathbb{H}^d})^{\frac{k}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^2 \\ &= \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \sum_{\alpha \in (\mathbb{N})^d} \int_{-\infty}^{+\infty} (4|\lambda|(2|\alpha| + d))^k \|\hat{u}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}\|_{\mathcal{H}_\lambda}^2 |\lambda|^d d\lambda. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{\dot{B}_{2,2}^k(\mathbb{H}^d)}^2 &= \sum_{j \geq -1} 2^{2jk} \|u * \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^2 \\ &= \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \sum_{\alpha \in (\mathbb{N})^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j \geq -1} 2^{2jk} |\mathcal{R}_{|\alpha|}(2^{-2j}\lambda)|^2 \|\hat{u}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}\|_{\mathcal{H}_\lambda}^2 |\lambda|^d d\lambda. \end{aligned}$$

En comparant les deux inégalités précédentes, on remarque que

$$2^{2jk} |\mathcal{R}_{|\alpha|}(2^{-2j}\lambda)|^2 \sim (|\lambda|(2|\alpha| + d))^k |\mathcal{R}_{|\alpha|}(2^{-2j}\lambda)|^2,$$

et grâce à (3.6), on déduit que

$$\sum_{j \geq -1} 2^{2jk} |\mathcal{R}_{|\alpha|}(2^{-2j}\lambda)|^2 \sim (|\lambda|(2|\alpha| + d))^k.$$

Dans le cas où  $k > 0$  est impair,

$$\|u\|_{\dot{H}^k(\mathbb{H}^d)}^2 = \|(\Delta_{\mathbb{H}^d})^{\frac{k-1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^2.$$

En utilisant la formule de Plancherel (3.3) et l'égalité (3.15), on peut écrire

$$\begin{aligned} \|u\|_{\dot{H}^k(\mathbb{H}^d)}^2 &= \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha \in (\mathbb{N})^d} 4|\lambda|(2|\alpha| + d) \|\mathcal{F}((\Delta_{\mathbb{H}^d})^{\frac{k-1}{2}}u)(\lambda)F_{\alpha,\lambda}\|_{\mathcal{H}_\lambda}^2 |\lambda|^d d\lambda \\ &= \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha \in (\mathbb{N})^d} (4|\lambda|(2|\alpha| + d))^k \|\hat{u}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}\|_{\mathcal{H}_\lambda}^2 |\lambda|^d d\lambda. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la même formule que dans le cas  $k$  pair.

Pour les indices négatifs, on considère seulement le cas pair. Comme  $\Delta_{\mathbb{H}^d}$  est un opérateur invariant à gauche sur  $\mathbb{H}^d$ , alors  $(\Delta_{\mathbb{H}^d})^{\frac{k}{2}}$  l'est aussi, et on a

$$(\Delta_{\mathbb{H}^d})^{\frac{k}{2}} \left( ((\Delta_{\mathbb{H}^d})^{-\frac{k}{2}}u) * \varphi \right) = u * \varphi,$$

d'où pour tout  $u \in H^{-k}(\mathbb{H}^d)$ ,

$$((\Delta_{\mathbb{H}^d})^{-\frac{k}{2}}u) * \varphi = (\Delta_{\mathbb{H}^d})^{-\frac{k}{2}}(u * \varphi). \quad (3.16)$$

D'autre part, pour  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$ , on a

$$\mathcal{F}((\Delta_{\mathbb{H}^d})^{\frac{-k}{2}} f)(\lambda) F_{\alpha,\lambda} = (-4|\lambda|(2|\alpha| + d))^{\frac{-k}{2}} \mathcal{F}(f)(\lambda) F_{\alpha,\lambda}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{-k}(\mathbb{H}^d)}^2 &= \|(\Delta_{\mathbb{H}^d})^{\frac{-k}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^2 \\ &= \sum_{j \geq -1} \|((\Delta_{\mathbb{H}^d})^{\frac{-k}{2}} u) * \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^2 \\ &= \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha \in (\mathbb{N}^d)} \sum_{j \geq -1} (4|\lambda|(2|\alpha| + d))^{-k} \|\mathcal{F}(u * \varphi)(\lambda) F_{\alpha,\lambda}\|_{\mathcal{H}_\lambda}^2 |\lambda|^d d\lambda \\ &= \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha \in (\mathbb{N}^d)} \sum_{j \geq -1} (4|\lambda|(2|\alpha| + d))^{-k} |\mathcal{R}_{|\alpha|}^*(2^{-2j}\lambda)|^2 \\ &\quad \|\mathcal{F}(u * \varphi)(\lambda) F_{\alpha,\lambda}\|_{\mathcal{H}_\lambda}^2 |\lambda|^d d\lambda \\ &\sim \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha \in (\mathbb{N}^d)} \sum_{j \geq -1} 2^{-2jk} \|\mathcal{F}(u * \varphi)(\lambda) F_{\alpha,\lambda}\|_{\mathcal{H}_\lambda}^2 |\lambda|^d d\lambda \\ &= \sum_{j \geq -1} 2^{-2jk} \|u * \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, la démonstration du théorème 3.2.6 est achevée.  $\square$

**Définition 3.2.7** Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$H^s(\mathbb{H}^d) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{H}^d), \|u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2 = \sum_{j \geq -1} 2^{2js} \|u * \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^2 < \infty \right\}. \quad (3.17)$$

Dans la suite, on propose une nouvelle démonstration de l'inclusion de Sobolev établie par Bahouri, Gérard et Xu [19], via la décomposition de dyadique des espaces de Besov sur  $\mathbb{H}^d$  :

**Théorème 3.2.8** Soient  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $0 < s < \frac{Q}{p}$ , où  $Q$  est la dimension homogène de  $\mathbb{H}^d$ . Alors, on a l'inclusion suivante

$$B_{p,p}^s(\mathbb{H}^d) \subset L^q(\mathbb{H}^d), \text{ avec } q = \frac{pQ}{Q - ps}. \quad (3.18)$$

est continue. De plus, on a

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{H}^d)} \leq C \|u\|_{B_{+\infty,+\infty}^{s-\frac{Q}{p}}(\mathbb{H}^d)}^{1-\frac{p}{q}} \|u\|_{B_{p,p}^s(\mathbb{H}^d)}^{\frac{p}{q}}. \quad (3.19)$$

**Démonstration.** Rappelons que

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{H}^d)}^q = q \int_0^{+\infty} \lambda^{q-1} \mu(|u| > \lambda) d\lambda,$$

où  $\mu(\cdot)$  est la mesure de Haar sur  $\mathbb{H}^d$ , égale à la mesure de Lebesgue, (voir l'annexe A pour plus de détails sur la mesure de Haar). Pour  $1 < A$ , on pose

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j \geq -1} \Delta_j u = \sum_{2^j < A} \Delta_j u + \sum_{2^j \geq A} \Delta_j u \\ &= u_{1,A} + u_{2,A}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|u_{1,A}\|_{L^\infty(\mathbb{H}^d)} &\leq \sum_{2^j < A} \|\Delta_j u\|_{L^\infty(\mathbb{H}^d)} \\ &\leq \sum_{2^j < A} 2^{-j(s-\frac{Q}{p})} 2^{j(s-\frac{Q}{p})} \|\Delta_j u\|_{L^\infty(\mathbb{H}^d)} \\ &\leq A^{-(s-\frac{Q}{p})} \|u\|_{B_{+\infty,+\infty}^{s-\frac{Q}{p}}}. \end{aligned}$$

En utilisant la relation

$$\mu(|u| > \lambda) \leq \mu(|u_{1,A}| > \frac{\lambda}{2}) + \mu(|u_{2,A}| > \frac{\lambda}{2}),$$

et en choisissant

$$A = A_\lambda = \left( \lambda [4C \|u\|_{B_{+\infty,+\infty}^{s-\frac{Q}{p}}}]^{-1} \right)^{\frac{p}{Q-ps}},$$

on a d'après l'inégalité de Tchebychev,

$$\mu(|u| > \lambda) \leq \mu(|u_{2,A}| > \frac{\lambda}{2}) \leq 2^p \lambda^{-p} \|u_{2,A}\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^p.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \|u_{2,A}\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^p &= \int_{\mathbb{H}^d} \left| \sum_{2^j \geq A_\lambda} \Delta_j u(z, s) \right|^p dz ds \\ &\leq \int_{\mathbb{H}^d} \left| \sum_{2^j \geq A_\lambda} 2^{j\epsilon} \Delta_j u(z, s) 2^{-j\epsilon} \right|^p dz ds \\ &\leq \left[ \sum_{2^j \geq A_\lambda} 2^{-j\epsilon p'} \right]^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{H}^d} \left| \sum_{2^j \geq A_\lambda} 2^{j\epsilon p} \Delta_j u(z, s) \right|^p dz ds \\ &\leq A_\lambda^{-\epsilon p} \sum_{2^j \geq A_\lambda} 2^{j\epsilon p} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^p. \end{aligned}$$

Ainsi, on a d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(\mathbb{H}^d)}^q &\leq C \int_0^{+\infty} \lambda^{q-p-1} A_\lambda^{-\epsilon p} \sum_{2^j \geq A_\lambda} 2^{j\epsilon p} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^p d\lambda \\
&\leq C \int_0^{+\infty} \lambda^{q-p-1} \left( \lambda [4C \|u\|_{B_{+\infty,+\infty}^{s-\frac{Q}{p}}(\mathbb{H}^d)}]^{-1} \right)^{\frac{-\epsilon p^2}{Q-ps}} \sum_{2^j \geq A_\lambda} 2^{j\epsilon p} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^p d\lambda \\
&\leq C \sum_{2^j \geq A_\lambda} \left( \int_0^{4C 2^{j(\frac{Q}{p}-s)} \|u\|_{B_{+\infty,+\infty}^{s-\frac{Q}{p}}}} \lambda^{q-p-1-\frac{\epsilon p^2}{Q-ps}} d\lambda \right) \\
&\quad \times \left( 4C \|u\|_{B_{+\infty,+\infty}^{s-\frac{Q}{p}}} \right)^{\frac{\epsilon p^2}{Q-ps}} 2^{j\epsilon p} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^p \\
&\leq C \|u\|_{B_{+\infty,+\infty}^{s-\frac{Q}{p}}}^{q-p} \sum_{2^j \geq A_\lambda} 2^{j(\frac{Q}{p}-s)(q-p)} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^p \\
&\leq C \|u\|_{B_{+\infty,+\infty}^{s-\frac{Q}{p}}}^{q-p} \sum_{j \geq -1} 2^{j s p} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}^p.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème. □

# Chapitre 4

## Inégalités de Hardy dans $\mathbb{H}^d$

Rappelons que l'inégalité de Hardy dans  $\mathbb{R}^d$  est donnée pour  $1 < p < d$ , par

$$\left(\frac{d-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx \leq \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d). \quad (4.1)$$

En effet, par argument de densité, on peut considérer  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  et on a

$$\begin{aligned} u(x)^p &= - \int_1^\infty \frac{d}{d\lambda} u^p(\lambda x) d\lambda \\ &= -p \int_1^\infty u^{p-1}(\lambda x) \langle x, \nabla u(\lambda x) \rangle d\lambda. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u|^p(x)}{|x|^p} dx &= -p \int_1^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u^{p-1}(\lambda x)}{|x|^p} \langle x, \nabla u(\lambda x) \rangle dx d\lambda \\ &= -p \int_1^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{d+1-p}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u^{p-1}(y)}{|y|^{p-1}} \frac{\partial u(y)}{\partial r} dy \\ &= -\frac{p}{d-p} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u^{p-1}(y)}{|y|^{p-1}} \frac{\partial u(y)}{\partial r} dy. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx \leq \frac{p}{d-p} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(y)|^p}{|y|^p} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u(y)}{\partial r} \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La détermination de la meilleure constante de l'inégalité de Hardy a fait l'objet de plusieurs travaux [21, 36, 62, 117, 118]. Notons que dans le cas  $p = 2$  dans l'inégalité (4.1), la meilleure constante de l'inégalité de Hardy dans  $\mathbb{R}^d$  est égale à  $\left(\frac{d-2}{2}\right)^2$ .

Sur le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^d$ , la distance à l'origine est remplacée par une grandeur équivalente à la distance de Carnot, qu'on a noté  $\rho$  dans le chapitre ???. L'inégalité de Hardy démontrée en premier lieu par N. Garofalo and E. Lanconelli [80] (voir aussi [127]) s'écrit,

$$\left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^d} \frac{|u(z, s)|^2}{\rho(z, s)^2} \psi(z, s) dz ds \leq \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^2, \quad (4.2)$$

où  $Q = 2d + 2$ ,  $\rho(z, s) = (|z|^2 + s^4)^{1/4}$ ,  $\psi(z, s) = \frac{|z|^2}{\rho(z, s)^2}$ ,  $(z, s) \neq (0, 0)$ , telles que  $0 \leq \psi(z, s) \leq 1$ ,  $\psi(0, s) = 0$  et  $\psi(z, 0) = 1$ .

Dans ce chapitre, on donne une nouvelle méthode pour démontrer l'inégalité de Hardy suivante :

$$C_{\mathbb{H}^d} \int_{\mathbb{H}^d} \frac{|u(z, s)|^2}{\rho(z, s)^2} dz ds \leq \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^2, \quad (4.3)$$

en faisant une intégration par parties par rapport à un champ de vecteurs radial spécifique à la structure de  $\mathbb{H}^d$  et en précisant à chaque fois la constante  $C_{\mathbb{H}^d}$ .

## 4.1 Densité des fonctions régulières dans $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$

La preuve de l'inégalité de Hardy que nous donnerons dans la suite nécessite de vérifier la densité des fonctions régulières dont le support évite un point ou une hypersurface de codimension plus grande que 2.

### 4.1.1 Densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \{\tilde{w}\})$ dans $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{H}^d$  et  $\tilde{w} \in \mathbb{H}^d$ . On montre au préalable la densité des fonctions régulières dont le support évite l'origine  $(0, 0)$ , on retrouve le résultat pour un point  $\tilde{w}$  par translation.

**Proposition 4.1.1** *Pour  $d \geq 1$ , l'espace  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \{(0, 0)\})$  est dense dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ .*

**Démonstration.** Comme  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  est la fermeture de  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d)$  par rapport à la norme (2.5), il suffit de montrer que l'espace

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d) \subset \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{H}^d)}^{\|\cdot\|_{H^1}}.$$

Soient  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d)$  et  $\varphi$  une fonction définie par

$$\varphi(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \eta \leq 1, \\ 1 & \text{si } \eta \geq 2. \end{cases} \quad (4.4)$$

Posons

$$u_\varepsilon(z, s) \equiv \varphi(\varepsilon^{-1}\rho(z, s)) u(z, s), \quad \varepsilon > 0 \text{ assez petit.}$$

On remarque que  $u_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{H}^d)$ . De plus,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_{\mathbb{H}^d}(u_\varepsilon - u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |\varphi(\varepsilon^{-1}\rho(z, s)) - 1|^2 |\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 dz ds \\ &\quad + \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d}(\varepsilon^{-1}\rho(z, s))|^2 |\varphi'(\varepsilon^{-1}\rho(z, s))|^2 |u(z, s)|^2 dz ds. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, on déduit que

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} |\varphi(\varepsilon^{-1}\rho(z, s)) - 1|^2 |\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 dz ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d}(\varepsilon^{-1}\rho(z, s))|^2 |\varphi'(\varepsilon^{-1}\rho(z, s))|^2 |u(z, s)|^2 dz ds \\ &= \varepsilon^{-2} \int_{\Omega} \frac{|z|^2}{\rho(z, s)^2} |\varphi'(\varepsilon^{-1}\rho(z, s))|^2 |u(z, s)|^2 dz ds \\ &\leq \varepsilon^{-2} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\varphi'\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\{(z, s); \varepsilon \leq \rho(z, s) \leq 2\varepsilon\}} dz ds \\ &\leq C\varepsilon^{-2} \varepsilon^{2d+2} \leq C\varepsilon^{2d}. \end{aligned}$$

On a démontré ainsi que  $\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)}^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ .  $\square$

La proposition suivante est due à F. Vigneron dans sa thèse [153]. Il généralise la densité pour des fonctions régulières dont le support évite un point qu'on note ici  $\tilde{w}$  :

**Proposition 4.1.2** *Pour  $0 \leq s < d + 1$ , l'espace  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \{\tilde{w}\})$  est dense dans  $H^s(\mathbb{H}^d)$ .*

**Démonstration.** On montre cette proposition pour  $s = k$  un entier car on peut retrouver le résultat par interpolation. Soit  $u$  appartenant à l'orthogonal de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d+1} \setminus \{\tilde{w}\})$  dans  $H^k(\mathbb{H}^d)$ . Alors, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d+1} \setminus \{\tilde{w}\})$ ,

$$(u, \varphi)_{H^k(\mathbb{H}^d)} = 0, \quad \text{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^{2d+1} \setminus \{\tilde{w}\}.$$

D'après la définition du produit scalaire (2.1.7), on peut écrire

$$(u, \varphi)_{H^k(\mathbb{H}^d)} = (\tilde{u}, \varphi)_{L^2(\mathbb{H}^d)}$$

avec

$$\tilde{u} = \sum_{0 \leq l \leq k, j_i \in \{1, \dots, 2d\}} Z_{j_l}^* \dots Z_{j_1}^* Z_{j_1} \dots Z_{j_l} u.$$

Le théorème de Schwartz entraîne que

$$\tilde{u} = \sum_{|\alpha|+|\beta|+\gamma} c_{\alpha, \beta, \gamma} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_s^\gamma \delta_{\tilde{w}}.$$

Par ailleurs,  $\tilde{u} \in H^{-k}(\mathbb{H}^d)$  et le terme  $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_s^\gamma$  est homogène de degré

$$\mu_{\alpha, \beta, \gamma} = -(2d + 2) - |\alpha| - |\beta| - 2\gamma.$$

D'après le lemme 2.2.9,

$$c_{\alpha, \beta, \gamma} = 0, \quad \text{si } |\alpha| + |\beta| + 2\gamma > k - (d + 1).$$

Comme  $k < (d + 1)$  alors les  $c_{\alpha, \beta, \gamma} = 0$ , par suite  $\tilde{u} = 0$ . Ainsi,

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{H}^d)}^2 = (\tilde{u}, u)_{L^2(\mathbb{H}^d)} = 0 \implies u = 0.$$

Si  $k = d + 1 \equiv \frac{Q}{2}$ , alors  $\tilde{u} = c_0 \delta_{\tilde{w}}$ . Or d'après la proposition 2.2.7,  $\delta_{\tilde{w}} \notin H^{-\frac{Q}{2}}(\mathbb{H}^d)$ . Donc  $\tilde{u} = 0$  et par suite  $u = 0$ . Ce qui achève la démonstration de la proposition 4.1.2.  $\square$

### 4.1.2 Densité de $C_0^\infty(\Omega \setminus \Sigma)$ dans $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$

La proposition suivante est due à H. Bahouri, J.-Y. Chemin et C.-J. Xu dans leur article ([17], Lemme 2.4).

**Proposition 4.1.3** *Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{H}^d$  et  $\Sigma$  une sous variété de  $\Omega$  telle que  $\dim \Sigma \leq 2d - 1$ . Alors l'espace  $C_0^\infty(\Omega \setminus \Sigma)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ .*

**Démonstration.** Comme  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  est un espace de Hilbert, il suffit de montrer que l'espace orthogonal de  $C_0^\infty(\Omega \setminus \Sigma)$  dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  est  $\{0\}$ . Soit  $u$  dans cet espace. Alors pour tout  $v$  dans  $C_0^\infty(\Omega \setminus \Sigma)$ , on a

$$(u, v)_{L^2} + (\nabla_{\mathbb{H}^d} u, \nabla_{\mathbb{H}^d} v)_{L^2} = 0.$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\forall v \in C_0^\infty(\Omega \setminus \Sigma), \quad \langle u - \Delta_{\mathbb{H}^d} u, v \rangle = 0,$$

ce qui implique que  $\text{Supp}(u - \Delta_{\mathbb{H}^d} u) \subset \Sigma$ . Comme  $(u - \Delta_{\mathbb{H}^d} u)$  est inclu dans l'espace  $H^{-1}(\Omega)$  et qu'aucune distribution de  $H^{-1}(\Omega)$  ne peut être supportée dans une sous variété de dimension plus petite que  $(2d + 1) - 2$  alors  $u - \Delta_{\mathbb{H}^d} u = 0$  sur  $\Omega$ . Du fait que  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , alors en appliquant le produit scalaire dans  $L^2$  on déduit que  $u \equiv 0$ .  $\square$

## 4.2 Inégalité de Hardy avec la singularité en un point de $\mathbb{H}^d$

Avant de passer à l'étude de l'inégalité de Hardy sur le groupe de Heisenberg, on en propose une démonstration dans  $\mathbb{R}^d$ .

### 4.2.1 Inégalité de Hardy dans $\mathbb{R}^d$

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d > 2$  et  $H_0^1(\Omega)$  l'espace de Sobolev usuel.

**Théorème 4.2.1** *Pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ , on a l'inégalité suivante :*

$$\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \leq \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.5)$$

**Démonstration.** Comme  $C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$ , on considère une fonction  $u$  dans  $C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ . La preuve est basée sur une intégration par parties par rapport à un champs de vecteurs radial  $R$  :

$$R = \sum_{j=1}^d x_j \partial_{x_j},$$

avec  $R(|x|^{-2}) = -2|x|^{-2}$  et  $\operatorname{div}R = d$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x) R(|x|^{-2}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(R) \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} R(u^2(x)) dx. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{d}{2}\right) \int_{\Omega} \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} R(u^2(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \frac{u(x)}{|x|} \frac{x_j}{|x|} \partial_{x_j} u(x) dx. \end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\left(\frac{d}{2} - 1\right) \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} dx \leq \left( \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d |\partial_{x_j} u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit donc l'inégalité voulue :

$$\left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d |\partial_{x_j} u(x)|^2 dx \leq \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

□

**Théorème 4.2.2** Soit  $s \in [0, \frac{d}{2}[$ . Il existe une constante  $C$  telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}} dx \leq C \|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}^2, \forall u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d). \quad (4.6)$$

Rappelons que  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) = \dot{B}_{2,2}^s(\mathbb{R}^d)$  est l'espace de Besov homogène dans  $\mathbb{R}^d$  et que pour  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|u\|_{\dot{B}_{2,2}^s(\mathbb{R}^d)} = \left( \sum_{q \in \mathbb{Z}} 2^{2qs} \|\dot{\Delta}_q u\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour plus de détails sur les inclusions dans les espaces de Besov, on vous renvoie à [12].

**Démonstration.** Comme l'espace  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  est dense dans  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$  pour  $s < d/2$ , il suffit de montrer le théorème 4.2.2 pour  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ . En utilisant la décomposition de Littlewood-Paley dans  $\mathbb{R}^d$ , on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u|^2(x)}{|x|^{2s}} dx = \sum_{|q-q'| \leq 2} \langle \dot{\Delta}_q(|\cdot|^{-2s}), \dot{\Delta}_{q'}(u^2) \rangle.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}} dx &\leq \sum_{|q-q'|\leq 2} \left\| \langle 2^{q(d/2-2s)} \dot{\Delta}_q(|\cdot|^{-2s}), 2^{-q'(d/2-2s)} \dot{\Delta}_{q'}(u^2) \rangle \right\| \\ &\leq \| |\cdot|^{-2s} \|_{\dot{B}_{2,\infty}^{d/2-2s}} \| u^2 \|_{\dot{B}_{2,1}^{2s-d/2}}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.5.2 de l'article [12], on a  $|\cdot|^{-2s} \in \dot{B}_{2,\infty}^{d/2-2s}$  pour  $0 < 2s < d$  et il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\| u^2 \|_{\dot{B}_{2,1}^{2s-d/2}(\mathbb{R}^d)} \leq C \| u \|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}^2$ . Ce qui achève la démonstration du théorème.  $\square$

## 4.2.2 Inégalité de Hardy dans $\mathbb{H}^d$ pour $d > 1$

**Théorème 4.2.3** *Pour tous  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  et  $d > 1$ , on a l'inégalité suivante :*

$$(d-1)^2 \int_{\Omega} \frac{|u(z,s)|^2}{\rho(z,s)^2} dz ds \leq \| \nabla_{\mathbb{H}^d} u \|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.7)$$

**Démonstration.** Comme  $C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})$  est dense dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , on se restreint à démontrer l'inégalité (4.7) pour  $u \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ . La preuve est basée sur une intégration par parties par rapport à un champ de vecteurs radial  $R_{\mathbb{H}^d}$  adapté à la structure de  $\mathbb{H}^d$  :

$$R_{\mathbb{H}^d} = \sum_{j=1}^d (x_j \partial_{x_j} + y_j \partial_{y_j}) = \sum_{j=1}^d (x_j X_j + y_j Y_j),$$

En remarquant que  $R_{\mathbb{H}^d}(|z|^{-2}) = -2|z|^{-2}$  et  $\operatorname{div} R_{\mathbb{H}^d} = 2d$ , on a pour tout  $(z,s) \in \mathbb{H}^d$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{u^2(z,s)}{|z|^2} dz ds &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} R_{\mathbb{H}^d}(|z|^{-2}) dz ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(R_{\mathbb{H}^d}) \frac{u^2(z,s)}{|z|^2} dz ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{|z|^2} R(u^2(z,s)) dz ds. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (1-d) \int_{\Omega} \frac{u^2(z,s)}{|z|^2} dz ds &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{|z|^2} R(u^2(z,s)) dz ds \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \frac{u(z,s)}{|z|} \left( \frac{x_j}{|z|} X_j(u(z,s)) + \frac{y_j}{|z|} Y_j(u(z,s)) \right) dz ds. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} (d-1) \int_{\Omega} \frac{|u(z,s)|^2}{|z|^2} dz ds &\leq \int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^d |X_j(u(z,s))|^2 + |Y_j(u(z,s))|^2 dz ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left( \sum_{j=1}^d \frac{x_j^2 + y_j^2}{|z|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{|u(z,s)|}{|z|} dz ds \\ &\leq \left( \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d |X_j(u(z,s))|^2 + |Y_j(u(z,s))|^2 dz ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \frac{|u(z,s)|^2}{|z|^2} dz ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par suite, on en déduit que

$$(d-1)^2 \int_{\Omega} \frac{|u(z, s)|^2}{\rho(z, s)^2} dz ds \leq (d-1)^2 \int_{\Omega} \frac{|u(z, s)|^2}{|z|^2} dz ds \leq \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

□

### 4.2.3 Inégalité de Hardy dans $\mathbb{H}^d$ pour $d \geq 1$

Dans son article [58, Théorème 3.3], D'Ambrosio a montré l'inégalité de Hardy (4.7) et que la meilleure constante dans (4.7) appartient à l'intervalle  $[(d-1)^2, d^2]$ . Cependant, cette inégalité n'est valable que pour  $d > 1$ , c'est pour cela qu'on doit réfléchir sur le cas particulier  $d = 1$ . On obtient ainsi le théorème suivant,

**Théorème 4.2.4** *Pour tout  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , on a l'inégalité suivante :*

$$\left(\frac{d^2}{d+1}\right)^2 \int_{\Omega} \frac{|u(z, s)|^2}{\rho(z, s)^2} dz ds \leq \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.8)$$

**Remarques 4.2.5** *Notons que pour  $d > 1$ , on a  $(d-1)^2 < \left(\frac{d^2}{d+1}\right)^2$ . On a donc amélioré la constante de Hardy.*

**Démonstration.** Comme  $C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})$  est dense dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , on se restreint à démontrer l'inégalité (4.8) pour  $u \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ . Comme auparavant, la preuve est basée sur une intégration par parties par rapport à un champ de vecteurs radial qu'on note encore  $R_{\mathbb{H}^d}$  :

$$R_{\mathbb{H}^d} = 2s\partial_s + \sum_{j=1}^d (x_j\partial_{x_j} + y_j\partial_{y_j}) = \frac{s}{2d} \sum_{j=1}^d [Y_j, X_j] + \sum_{j=1}^d (x_j X_j + y_j Y_j),$$

avec  $R_{\mathbb{H}^d}(\rho(z, s)^{-2}) = -2\rho(z, s)^{-2}$  et  $\operatorname{div}(R_{\mathbb{H}^d}) = 2d + 2$ . On obtient ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{u^2(z, s)}{\rho(z, s)^2} dz ds &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} R_{\mathbb{H}^d}(\rho(z, s)^{-2}) u^2(z, s) dz ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(z, s)^{-2} R_{\mathbb{H}^d}(u^2(z, s)) dz ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(R_{\mathbb{H}^d}) \rho(z, s)^{-2} u^2(z, s) dz ds. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
-d \int_{\Omega} \frac{u^2(z, s)}{\rho(z, s)^2} dz ds &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \frac{u(z, s)}{\rho(z, s)} \left( \frac{x_j}{\rho(z, s)} X_j + \frac{y_j}{\rho(z, s)} Y_j \right) u(z, s) dz ds \\
&\quad - \frac{1}{2d} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d Y_j \left( \frac{s}{\rho^2(z, s)} \right) u(z, s) X_j u(z, s) dz ds \\
&\quad + \frac{1}{2d} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d X_j \left( \frac{s}{\rho^2(z, s)} \right) u(z, s) Y_j u(z, s) dz ds \\
&= \left(1 + \frac{1}{d}\right) \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \left( \frac{x_j u(z, s)}{\rho^2(z, s)} X_j(u(z, s)) + \frac{y_j u(z, s)}{\rho^2(z, s)} Y_j(u(z, s)) \right) dz ds \\
&\quad + \frac{1}{d} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \frac{s}{\rho^6(z, s)} \left( |z|^2 y_j - s x_j \right) u(z, s) X_j(u(z, s)) dz ds \\
&\quad - \frac{1}{d} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \frac{s}{\rho^6(z, s)} \left( |z|^2 x_j + s y_j \right) u(z, s) Y_j(u(z, s)) dz ds.
\end{aligned}$$

On a alors,

$$\begin{aligned}
&-d^2 \int_{\Omega} \frac{u^2(z, s)}{\rho^2(z, s)} dz ds \\
&= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \left( (d+1) - \frac{s^2}{\rho^4(z, s)} \right) \left( \frac{x_j u(z, s)}{\rho^2(z, s)} X_j(u(z, s)) + \frac{y_j u(z, s)}{\rho^2(z, s)} Y_j(u(z, s)) \right) dz ds \\
&\quad + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \frac{s|z|^2}{\rho^4(z, s)} \left( \frac{y_j u(z, s)}{\rho^2(z, s)} X_j(u(z, s)) - \frac{x_j u(z, s)}{\rho^2(z, s)} Y_j(u(z, s)) \right) dz ds \\
&= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \left( \left( (d+1) - \frac{s^2}{\rho^4(z, s)} \right) \frac{x_j}{\rho(z, s)} + \frac{s|z|^2}{\rho^4(z, s)} \frac{y_j}{\rho(z, s)} \right) \frac{u(z, s)}{\rho(z, s)} X_j(u(z, s)) dz ds \\
&\quad + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \left( \left( (d+1) - \frac{s^2}{\rho^4(z, s)} \right) \frac{y_j}{\rho(z, s)} - \frac{s|z|^2}{\rho^4(z, s)} \frac{x_j}{\rho(z, s)} \right) \frac{u(z, s)}{\rho(z, s)} Y_j(u(z, s)) dz ds. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
A(z, s) &= \sum_{j=1}^d \left\{ \left( \left( (d+1) - \frac{s^2}{\rho^4(z, s)} \right) \frac{x_j}{\rho(z, s)} + \frac{s|z|^2}{\rho^4(z, s)} \frac{y_j}{\rho(z, s)} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left( \left( (d+1) - \frac{s^2}{\rho^4(z, s)} \right) \frac{y_j}{\rho(z, s)} - \frac{s|z|^2}{\rho^4(z, s)} \frac{x_j}{\rho(z, s)} \right)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Le terme  $A(z, s)$  peut être ré-écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
A(z, s) &= \left( (d+1) - \frac{s^2}{\rho^4} \right)^2 \frac{|z|^2}{\rho^2(z, s)} + \frac{s^2|z|^4}{\rho^8(z, s)} \frac{|z|^2}{\rho^2(z, s)} \\
&= \frac{|z|^2}{\rho^2(z, s)} \left[ (d+1)^2 - 2(d+1) \frac{s^2}{\rho^4(z, s)} + \frac{s^4}{\rho^8(z, s)} + \frac{s^2|z|^4}{\rho^8(z, s)} \right] \\
&= \frac{|z|^2}{\rho^2(z, s)} \left[ (d+1)^2 - (2d+1) \frac{s^2}{\rho^4(z, s)} \right] \\
&= \frac{|z|^2}{\rho^6(z, s)} \left[ (d+1)^2(|z|^4 + s^2) - (2d+1)s^2 \right] \\
&= \frac{|z|^2}{\rho^6(z, s)} \left[ (d+1)^2|z|^4 + d^2s^2 \right] \\
&= \frac{|z|^2}{\rho^6(z, s)} \left[ (2d+1)|z|^4 + d^2(|z|^4 + s^2) \right] \\
&\leq (d+1)^2 \frac{|z|^2}{\rho^2(z, s)} \leq (d+1)^2.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à (4.9) implique que

$$\begin{aligned}
d^2 \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{\rho^2(z, s)} dz ds &\leq \left( \int_{\Omega} A(z, s) \frac{|u|^2}{\rho^2(z, s)} dz ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left( \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \left( |X_j(u(z, s))|^2 + |Y_j(u(z, s))|^2 \right) dz ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (d+1) \left( \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{\rho^2(z, s)} dz ds \right)^{\frac{1}{2}} \times \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration de l'inégalité (4.8).  $\square$

L'inégalité suivante a été démontrée par N. Garofalo et E. Lanconelli [80, Corollaire 2.1]. I. Kombe en propose une démonstration élégante dans [108, Théorème 3.1].

**Théorème 4.2.6** *Pour tout  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , on a*

$$d^2 \int_{\Omega} \frac{|z|^2}{|z|^4 + s^2} |u(z, s)|^2 dz ds \leq \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.10)$$

**Démonstration.** Grâce au théorème de densité (4.1.1), il suffit de démontrer le théorème pour  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d)$ . Posons  $u = \rho^\beta \varphi$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^*$  et soit  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d)$ . On a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 dz ds &= \beta^2 \int_{\Omega} \rho^{2\beta-2}(z, s) |\nabla_{\mathbb{H}^d}(\rho(z, s))|^2 \varphi^2(z, s) dz ds \\
&\quad + 2\beta \int_{\Omega} \rho^{2\beta-2}(z, s) \varphi(z, s) \nabla_{\mathbb{H}^d}(\rho(z, s)) \overline{\nabla_{\mathbb{H}^d}(\varphi(z, s))} dz ds \\
&\quad + \int_{\Omega} \rho^{2\beta}(z, s) |\nabla_{\mathbb{H}^d} \varphi(z, s)|^2 dz ds.
\end{aligned}$$

Comme  $|\nabla_{\mathbb{H}^d}(\rho(z, s))|^2 = \frac{|z|^2}{\rho^2(z, s)}$ , on obtient par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 dz ds &= \beta^2 \int_{\Omega} |z|^2 \varphi^2(z, s) dz ds - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta_{\mathbb{H}^d}(\rho^{2\beta}(z, s)) \varphi^2(z, s) dz ds \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho^{2\beta} |\nabla_{\mathbb{H}^d}(\varphi(z, s))|^2 dz ds. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\Delta_{\mathbb{H}^d}(\rho^{2\beta}(z, s)) = 2\beta(2\beta + 2d) |z|^2 \rho^{2\beta-4}(z, s)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 dz ds &= (-\beta^2 - 2d\beta) \int_{\Omega} \rho^{2\beta-4}(z, s) |z|^2 \varphi^2(z, s) dz ds + \int_{\Omega} \rho^{2\beta}(z, s) |\nabla_{\mathbb{H}^d} \varphi|^2 dz ds \\ &\geq (-\beta^2 - 2d\beta) \int_{\Omega} \rho^{2\beta-4}(z, s) |z|^2 \varphi^2(z, s) dz ds. \end{aligned}$$

Comme la fonction définie par  $f(\beta) = -\beta^2 - 2d\beta$  atteint son maximum en  $\beta = -d$ , alors

$$d^2 \int_{\Omega} \frac{|z|^2}{\rho^4(z, s)} |u(z, s)|^2 dz ds \leq \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 dz ds.$$

□

On propose dans la suite une version générale de l'inégalité de Hardy dans les espaces homogènes  $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$  qui est l'analogue de l'inégalité (4.2.2) dans le cas classique et qui requière l'introduction des espaces de Besov et la décomposition de Littlewood-Paley dans  $\mathbb{H}^d$ . Pour plus de détails, on se réfère aux articles [13, 14, 12].

**Théorème 4.2.7** *Soit  $s \in ]0, \frac{Q}{2}[$ . Il existe une constante  $C$  tel que pour  $u \in \dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ ,*

$$\int_{\mathbb{H}^d} \frac{|u(z, t)|^2}{\rho(z, t)^{2s}} dz dt \leq C \|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)}^2, \quad (z, t) \in \mathbb{H}^d. \quad (4.11)$$

**Démonstration.** En utilisant la décomposition de Littlewood-Paley dans  $\mathbb{H}^d$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^d} \frac{|u(z, t)|^2}{\rho(z, t)^{2s}} dz dt &\leq \sum_{|q-q'|\leq 2} \left| \langle \dot{\Delta}_q(\rho^{-2s}), \dot{\Delta}_{q'}(u^2) \rangle \right| \\ &\leq \sum_{|q-q'|\leq 2} \left| \langle 2^{q(Q/2-2s)} \dot{\Delta}_q(\rho^{-2s}), 2^{-q'(Q/2-2s)} \dot{\Delta}_{q'}(u^2) \rangle \right| \\ &\leq \|\rho^{-2s}\|_{\dot{B}_{2,\infty}^{Q/2-2s}(\mathbb{H}^d)} \|u^2\|_{\dot{B}_{2,1}^{2s-d/2}(\mathbb{H}^d)}. \end{aligned}$$

D'après [18, Théorème 12.12.4],  $\rho^{-2s} \in \dot{B}_{2,\infty}^{Q/2-2s}(\mathbb{H}^d)$ . De plus pour  $u \in \dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ , on a

$$u^2 \in \dot{B}_{2,1}^{2s-Q/2}(\mathbb{H}^d) \quad \text{et} \quad \|u^2\|_{\dot{B}_{2,1}^{2s-Q/2}} \leq C \|u\|_{\dot{H}^s}^2.$$

□

### 4.3 Inégalité de Hardy avec la singularité sur une hypersurface caractéristique de $\mathbb{H}^d$

On s'intéresse dans cette section à l'étude de l'inégalité de Hardy dans le cas d'une hypersurface caractéristique de  $\mathbb{H}^d$ . Pour plus de détails, on pourra consulter les articles [17, 16]. Soit  $\Sigma$  une hypersurface de  $\mathbb{H}^d$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On peut définir  $\Sigma$  au voisinage d'un point  $w_0$  à l'aide d'une fonction  $g : \mathbb{H}^d \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $\Sigma = g^{-1}(0)$  et telle que  $Dg(w_0) \neq 0$ . Notons par  $\mathcal{Z}$  la famille de champs de vecteurs vérifiant  $Z_j = X_j$  et  $Z_{j+d} = Y_j$  pour  $j \in 1, \dots, d$ .

**Définition 4.3.1** *Un point  $w_0$  est un point caractéristique de  $\Sigma$  si on a  $\mathcal{Z}|_{w_0} \subset T_{w_0}\Sigma$ , où  $T_{w_0}\Sigma$  est l'espace tangent à  $\Sigma$  au point  $w_0$ . On note  $\Sigma_c$  l'ensemble des points caractéristiques de  $\Sigma$ .*

Par souci de simplicité, on considère ici un cas particulier. Par translation sur le groupe de Heisenberg, on travaille au voisinage de  $w_0 = (0, 0, 0)$ . Ainsi, au voisinage de  $w_0$ , l'hypersurface  $\Sigma$  s'écrit

$$\Sigma = \{w = (x, y, s) \in \Omega; g(x, y, s) \equiv s - f(x, y) = 0\},$$

avec  $f(0, 0) = 0$  et  $Df(0, 0) = 0$ . Comme la matrice  $(Z_i Z_j g)_{1 \leq i, j \leq 2d}$  de rang  $r$  satisfait pour  $i \in \{1, \dots, d\}$  et  $j \neq i + d$  les égalités suivantes :

$$(Z_i Z_{i+d} g)(w_0) - (Z_{i+d} Z_i g)(w_0) = -2\partial_s g(w_0) = -2 \neq 0, \quad (4.12)$$

$$(Z_i Z_j g)(w_0) = (Z_j Z_i g)(w_0), \quad (4.13)$$

alors le rang de la matrice  $(Z_i Z_j g)_{1 \leq i, j \leq 2d}$  est au moins égal à  $d$  au point  $w_0$ . D'autre part, comme  $Z_j|_{w_0} \in T_{w_0}\Sigma$  alors  $\mathcal{L}_{Z_j}(Dg)(w_0) = D(Z_j g)(w_0) = \sum_{i=1}^{2d} (Z_i Z_j g)(w_0) dz_i$  et le rang de  $(Z_i Z_j g)_{1 \leq i, j \leq 2d}$  est ainsi égal au le rang de  $\mathcal{L}_{Z_j}(Dg)$  au point  $w_0$ . On considère maintenant

$$\Sigma_c = \{w \in \Omega; g(w) = 0, \nabla_{\mathbb{H}^d} g(w) = 0\}. \quad (4.14)$$

une sous variété de dimension  $(2d + 1) - r - 1$ ,  $r \geq 1$ .

#### **Théorème 4.3.2 (Bahouri-Chemin-Xu [16])**

*Soit une sous variété  $\Sigma_c$  de dimension  $2d - r$ ,  $r \geq 1$ . Il existe une constante  $\bar{\mu} > 0$  tel que pour tout  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , on a*

$$\bar{\mu} \int_{\Omega} \frac{u^2(w)}{\rho_c^2(w)} dw \leq \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (4.15)$$

avec

$$\rho_c(w) = (g^2(w) + |\nabla_{\mathbb{H}^d} g(w)|^4)^{1/4}. \quad (4.16)$$

### 4.3.1 Substitution de $\rho_c$ et de $R_{\mathbb{H}^d}$

Comme  $Z_i \Big|_{w_0} = \partial_{z_i}$  alors la famille des formes linéaires  $(D(Z_{j_l}g))_{1 \leq l \leq r}$  pour  $(j_l)_{1 \leq l \leq r} \in \{1, \dots, 2d\}^r$ , sont linéairement indépendantes au voisinage de  $w_0$ . De plus  $Z_i g$  ne dépend pas de  $s$  et  $Dg(w_0) = (ds, 0, 0)$ . Donc la famille de fonctions

$$(g, (Z_{j_1}g), \dots, (Z_{j_r}g)) \quad (4.17)$$

est une famille de  $r + 1$  fonctions indépendantes qui s'annulent sur  $\Sigma_c$ . D'où,

$$\Sigma_c = \{w \in \Omega; g(w) = (Z_{j_1}g)(w) = \dots = (Z_{j_r}g)(w) = 0\}.$$

**Lemme 4.3.3** *Il existe un couple de champ de vecteurs*

$$(Z_0, \bar{Z}_0) \in (\mathcal{Z} \setminus \{Z_{j_1}, \dots, Z_{j_r}\}) \times (\pm \mathcal{Z}),$$

tels que  $[Z_0, \bar{Z}_0] = 2\partial_s$  et  $D(\bar{Z}_0.g)(w_0) \neq 0$ .

**Démonstration.** Soient  $Z_0 \in \{Z_{j_1}, \dots, Z_{j_r}\}$  et  $\underline{Z}_0 \in \pm \mathcal{Z}$  tels que  $[Z_0, \underline{Z}_0] = 2\partial_s$ . Si  $\pm \underline{Z}_0 \in \{Z_{j_1}, \dots, Z_{j_r}\}$  alors la famille de fonctions (4.17) implique que  $D(\underline{Z}_0.g)(w_0) \neq 0$  et donc  $\bar{Z}_0 = \underline{Z}_0$ . Si  $\pm \underline{Z}_0 \notin \{Z_{j_1}, \dots, Z_{j_r}\}$ , alors du fait que  $(Z_0.(Z_0g))(w_0) - (\underline{Z}_0.(Z_0g))(w_0) = 2$ , on a soit  $D(\underline{Z}_0g)(w_0) \neq 0$  ou bien  $D(Z_0g)(w_0) \neq 0$ . Il suffit donc d'échanger le rôle de  $\underline{Z}_0$  et  $Z_0$ .  $\square$

**Lemme 4.3.4** *Soit  $\Omega$  un voisinage de  $w_0$ . Il existe une famille de fonctions  $(\alpha_l)_{1 \leq l \leq r}$  de classe  $C^\infty(\Omega)$  telle que  $Z_0.g = \sum_{l=1}^r \alpha_l(Z_{j_l}.g)$ .*

**Théorème 4.3.5 (Bahouri-Chemin-Xu [16])**

*Soit  $\Omega$  un voisinage de  $w_0$ , alors pour tout  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , on a*

$$\int_{\Omega} \frac{u^2(w)}{\rho_0^2(w)} dw \leq C \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (4.18)$$

avec

$$\rho_0(w) = (g^2(w) + (\bar{Z}_0.g)^4(w))^{1/4}. \quad (4.19)$$

**Lemme 4.3.6** *Soit  $\Omega$  un voisinage de  $w_0$ . Il existe deux fonctions  $\theta$  et  $\beta$  de classe  $C^\infty(\Omega)$  telle que  $\theta = 0$  sur  $\Sigma_c$ . Posons alors*

$$R_1 = 2g\partial_s + \beta(\bar{Z}_0.g)\tilde{Z}_0 \text{ où } \tilde{Z}_0 \equiv Z_0 - \sum_{l=1}^r \alpha_l(Z_{j_l}).$$

*De plus, le champ de vecteurs  $R_1$  vérifie  $R_1(\rho_0^4) = 4\rho_0^4$  et  $\operatorname{div}(R_1) = 3 + \theta$ .*

**Démonstration.** En utilisant la définition (4.19) de  $\rho_0$ , on obtient

$$R_1(\rho_0^4) = 2g(R_1g) + 4(\overline{Z}_0.g)^3(R_1(\overline{Z}_0.g)).$$

Comme  $\partial_s g = 1$ , alors  $R_1g = 2g$  et du fait que  $\partial_s(\overline{Z}_0.g) = 0$ , on a

$$R_1(\overline{Z}_0.g) = \beta(\overline{Z}_0.g)(\tilde{Z}_0.(\overline{Z}_0.g)).$$

D'autre part, on a  $\overline{Z}_0$  commute avec  $Z_{j_l}$  car  $Z_0 \notin (Z_{j_l})_{1 \leq l \leq r}$ , et par suite,

$$[\tilde{Z}_0, \overline{Z}_0] = [Z_0, \overline{Z}_0] + \sum_{l=1}^r [\alpha_l Z_l, \overline{Z}_0] = 2\partial_s - \sum_{l=1}^r (\overline{Z}_0.\alpha_l) Z_l,$$

Ainsi,

$$\tilde{Z}_0.(\overline{Z}_0.g) = \overline{Z}_0.(\tilde{Z}_0.g) + 2\partial_s g - \sum_{l=1}^r (\overline{Z}_0.\alpha_l)(Z_l.g) = 2 + \tilde{\theta},$$

où  $\tilde{Z}_0.g = 0$  et  $\tilde{\theta} \equiv -\sum_{l=1}^r (\overline{Z}_0.\alpha_l)(Z_l.g)$ . On en déduit que

$$R_1(\rho_0^4) = 4g^2 + 4(\overline{Z}_0.g)^4 \beta(2 + \tilde{\theta}),$$

et en choisissant  $\beta \equiv (2 + \tilde{\theta})^{-1}$ , on obtient  $R_1(\rho_0^4) = 4g^2 + 4(\overline{Z}_0.g)^4$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} R_1 &= 2\partial_s g + \beta \tilde{Z}_0.(\overline{Z}_0.g) + (\overline{Z}_0.g) \operatorname{div} \tilde{Z}_0 \\ &= 2 + \beta(2 + \tilde{\theta}) + (\overline{Z}_0.g) \operatorname{div} \tilde{Z}_0 = 3 + (\overline{Z}_0.g) \operatorname{div} \tilde{Z}_0, \end{aligned}$$

où  $\theta \equiv (\overline{Z}_0.g) \operatorname{div} \tilde{Z}_0$ .

**Démonstration du théorème 4.3.5 :**

D'après le lemme 4.3.6, on a  $R_1(\rho_0^{-2}) = -2\rho_0^{-2}$ . Par intégration par parties, on peut écrire

$$\int_{\Omega} \frac{u^2(w)}{\rho_0^2(w)} dw = \left(\frac{3}{2} + \theta\right) \int_{\Omega} \frac{u^2(w)}{\rho_0^2(w)} dw + \int_{\Omega} \frac{u(w)}{\rho_0^2(w)} R_1 u(w) dw.$$

En choisissant  $\theta$  telle que  $\|\theta\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{4}$ , on en déduit que

$$\int_{\Omega} \frac{u^2(w)}{\rho_0^2(w)} dw \leq 4 \int_{\Omega} \frac{u(w)}{\rho_0^2(w)} R_1 u(w) dw.$$

En utilisant le fait que  $[\tilde{Z}_0, \overline{Z}_0] = 2\partial_s - \sum_{l=1}^r (\overline{Z}_0.\alpha_l) Z_l$ , et en appliquant lemme 4.3.6, on écrit

$$\begin{aligned} R_1 &= 2g[\tilde{Z}_0, \overline{Z}_0] + g \sum_{l=1}^r (\overline{Z}_0.\alpha_l) Z_{j_l} + \beta(\overline{Z}_0.g) Z_0 - \beta(\overline{Z}_0.g) \sum_{l=1}^r \alpha_l Z_{j_l} \\ &= 2g[\tilde{Z}_0, \overline{Z}_0] + \sum_{k=1}^{2d} (\beta_k g + \gamma_k(\overline{Z}_0.g)) Z_k, \beta_k, \gamma_k \in C^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

D'où,  $\int_{\Omega} \frac{u(w)}{\rho_0^2(w)} R_1 u(w) dw = J_1 + J_2$ , où

$$J_1 = \sum_{k=1}^{2d} \int_{\Omega} \frac{u}{\rho_0} \frac{\beta_k g + \gamma_k(\bar{Z}_0 \cdot g)}{\rho_0} Z_k u dw \text{ et } J_2 = \int_{\Omega} \frac{u}{\rho_0^2} g[\tilde{Z}_0, \bar{Z}_0] u dw.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz à  $J_1$  et en utilisant le fait que  $\left| \frac{\beta_k g + \gamma_k(\bar{Z}_0 \cdot g)}{\rho_0} \right| \leq C_1$  car  $\Omega$  est à support borné, on déduit que

$$|J_1| \leq C_1 \left\| \frac{u}{\rho_0} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'autre part,  $J_2$  s'écrit sous la forme suivante :

$$J_2 = \int_{\Omega} \frac{u}{\rho_0^2} g \tilde{Z}_0(\bar{Z}_0 u) dw - \int_{\Omega} \frac{u}{\rho_0^2} g Z_0(\tilde{Z}_0 u) dw.$$

En effectuant une intégration par parties au premier terme de  $J_2$ , on a

$$\int_{\Omega} \frac{u}{\rho_0^2} g \tilde{Z}_0(\bar{Z}_0 \cdot u) dw = -K_1 - K_2,$$

avec

$$K_1 = \int_{\Omega} \frac{g}{\rho_0^2} (\tilde{Z}_0 u)(\bar{Z}_0 \cdot u) dw, \quad K_2 = \int_{\Omega} f \frac{u}{\rho_0} (\bar{Z}_0 \cdot u) dw \text{ et } f := \operatorname{div} \tilde{Z}_0 \frac{g}{\rho_0} + \rho_0 \tilde{Z}_0 \left( \frac{g}{\rho_0^2} \right).$$

A partir de la définition (4.19) de  $\rho_0$ , on déduit que  $|K_1| \leq C_2 \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}^2$  et si on suppose que  $\Omega \subset \rho_0^{-1}([0, 1])$ , alors  $|\operatorname{div} \tilde{Z}_0 \frac{g}{\rho_0}| \leq C_3$  sur  $\Omega$ . En utilisant le fait que  $\tilde{Z}_0 \cdot g = 0$ , on obtient

$$\tilde{Z}_0 \left( \frac{g}{\rho_0^2} \right) = \frac{2g}{\rho_0^5} |\tilde{Z}_0(\bar{Z}_0 \cdot u)| |\bar{Z}_0 \cdot g|^3 \leq C_3 \frac{g}{\rho_0^3} \leq \frac{C_3}{\rho_0},$$

et on en déduit que  $f$  est bornée sur  $\Omega$ . D'autre part, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve

$$|K_2| \leq C_4 \left\| \frac{u}{\rho_0} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi, on a

$$\int_{\Omega} \frac{u}{\rho_0^2} g \tilde{Z}_0(\bar{Z}_0 \cdot u) dw \leq C_5 \left[ \left\| \frac{u}{\rho_0} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)} \right] \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.20)$$

En effectuant une intégration par parties au second terme de  $J_2$ , on trouve

$$\int_{\Omega} \frac{u}{\rho_0^2} g Z_0(\tilde{Z}_0 \cdot u) dw = \int_{\Omega} \frac{g}{\rho_0^2} (\bar{Z}_0 \cdot u)(\tilde{Z}_0 \cdot u) dw + \int_{\Omega} \rho_0 (\bar{Z}_0 \cdot \frac{g}{\rho_0^2}) \frac{u}{\rho_0} (\tilde{Z}_0 \cdot u) dw.$$

Comme

$$\bar{Z}_0 \cdot \rho_0^4 = 2g \bar{Z}_0 \cdot g + 4(\bar{Z}_0 \cdot (\bar{Z}_0 \cdot g)) (\bar{Z}_0 \cdot g)^3 \text{ et } |\rho_0 \bar{Z}_0 \left( \frac{g}{\rho_0^2} \right)| \leq C_6 \text{ sur } \Omega,$$

on a

$$\int_{\Omega} \frac{u}{\rho_0^2} g Z_0(\tilde{Z}_0 \cdot u) dw \leq C_7 \left[ \left\| \frac{u}{\rho_0} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)} \right] \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.21)$$

Des inégalités (4.20) et (4.21), on déduit que

$$\int_{\Omega} \frac{u^2(w)}{\rho_0^2(w)} dw \leq C_8 \left[ \left\| \frac{u}{\rho_0} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)} \right] \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui achève la démonstration du théorème.  $\square$

**Remarque 4.3.7** La constante  $\bar{\mu}$  dépend de la dimension de  $\Sigma_c$ .

### 4.3.2 Le cas d'une sous variété de $\mathbb{H}^1$

Dans la suite, on présente une preuve du théorème 4.3.2 dans le cas d'une sous variété de  $\mathbb{H}^1$  en précisant la valeur de la constante  $\bar{\mu}$ . Dans ce cas, on a d'après (4.14)

$$\Sigma = \{(x, y, s) \in \mathbb{H}^1; s + 2xy = 0\} \text{ et } \Sigma_c = \{(x, 0, 0); x \in \mathbb{R}\}. \quad (4.22)$$

**Lemme 4.3.8** Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{H}^1$  et  $\Sigma_c$  l'hypersurface définie dans (4.22). Pour tout  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^1)$ , on a

$$\frac{2^2}{5 + 2^8} \int_{\Omega} \frac{u^2(w)}{\rho_c^2(w)} dw \leq \|\nabla_{\mathbb{H}^1} u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.23)$$

**Démonstration.** En effectuant le changement de variables suivants  $x' = x$ ,  $y' = y$ ,  $s' = s + 2xy$ , les champs de vecteurs  $X = \partial_x + 2y\partial_s$  et  $Y = \partial_y - 2x\partial_s$  s'écrivent

$$X' = \partial_{x'} + 4y'\partial_{s'} \text{ et } Y' = \partial_{y'}.$$

De même, la distance homogène (4.16) se transforme en

$$\rho_c(z', s') \equiv \rho_c(x', y', s') = ((4y')^4 + s'^2)^{1/4}. \quad (4.24)$$

Soit  $R_{\mathbb{H}^1}$  un champ de vecteurs radial défini par

$$R_{\mathbb{H}^1} = X'(s')Y' + 2^3 s' \partial_{s'} = 4y'Y' + 2^3 s' \partial_{s'} = 4y'Y' + 2s'[Y', X'],$$

En utilisant le lemme de densité 4.1.1 et en remarquant que  $R_{\mathbb{H}^1}(\rho_c^{-2}) = -8\rho_c^{-2}$  et  $\text{div}(R_{\mathbb{H}^1}) = 12$ , on a pour tout  $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^1 \setminus \{(0, 0)\})$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^1} \frac{u^2}{\rho_c^2} dz' ds' &= -\frac{1}{8} \int_{\mathbb{H}^1} u^2 R_{\mathbb{H}^1}(\rho_c^{-2}) dz' ds' - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}^1} \frac{u^2}{\rho_c^2} dz' ds' \\ &= \int_{\mathbb{H}^1} \frac{y'}{\rho_c^2} u Y' u dz' ds' - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}^1} Y' \left( \frac{s'}{\rho_c^2} \right) u X' u dz' ds' + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}^1} X' \left( \frac{s'}{\rho_c^2} \right) u Y' u dz' ds' \\ &= \int_{\mathbb{H}^1} \frac{y'}{\rho_c^2} u Y' u dz' ds' + \int_{\mathbb{H}^1} 2^8 \frac{y'^3 s'}{\rho_c^6} u X' u dz' ds' + \int_{\mathbb{H}^1} \left[ \frac{2y'}{\rho_c^2} - \frac{2y' s'^2}{\rho_c^6} \right] u Y' u dz' ds' \\ &= \int_{\mathbb{H}^1} \left[ \frac{3y'}{\rho_c} - \frac{2y' s'^2}{\rho_c^5} \right] \frac{u}{\rho_c} Y' u dz' ds' + \int_{\mathbb{H}^1} 2^8 \frac{y'^3 s'}{\rho_c^5} \frac{u}{\rho_c} X' u dz' ds'. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}^1} \frac{|u|^2}{\rho_c^2} dz' ds' \leq \left( \int_{\mathbb{H}^1} A(z', s') \frac{|u|^2}{\rho_c^2} dz' ds' \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla_{\mathbb{H}^1} u\|_{L^2(\Omega)(\mathbb{H}^1)},$$

où

$$\begin{aligned} A(z', s') &= \left[ \frac{3y'}{\rho_c} - 2 \frac{y' s'^2}{\rho_c^5} \right]^2 + 2^{16} \frac{y'^6 s'^2}{\rho_c^{10}} \\ &= 3^2 \frac{y'^2}{\rho_c^2} - 12 \frac{y'^2 (\rho_c^4 - 2^8 y'^4)}{\rho_c^6} + 4 \frac{y'^2 (\rho_c^4 - 2^8 y'^4)^2}{\rho_c^{10}} + 2^{16} \frac{y'^6 (\rho_c^4 - 2^8 y'^4)}{\rho_c^{10}} \\ &= \frac{y'^2}{\rho_c^2} \left[ 1 + 2^8 (4 + 2^8) \frac{y'^4}{\rho_c^4} + 2^8 (2^{10} - 2^{16}) \frac{y'^8}{\rho_c^8} \right] \\ &\leq \frac{1}{2^4} \left[ 1 + \frac{1}{2^8} 2^8 (4 + 2^8) \right] \leq \frac{1}{2^4} (5 + 2^8). \end{aligned}$$

□

## Remarques

Dans la plupart des articles qui traitent les inégalités de Hardy sur le groupe de Heisenberg, le potentiel utilisé est

$$V(z, s) = \frac{|z|^2}{\rho(z, s)^4} = \frac{|z|^2}{|z|^4 + s^2}, \quad (z, s) \in \mathbb{H}^d,$$

alors que le potentiel  $V^*(z, s) = \frac{1}{\rho(z, s)^2} \geq V(z, s)$  admet une singularité moins forte que le premier. Citons quelques exemples :

I. Kombe [107] a démontré des inégalités de Hardy sur le groupe de Heisenberg et sur les groupes de Carnot d'ordre 2.

**Théorème 4.3.9** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a pour tout  $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^d \setminus \{0\})$ ,*

$$\left( \frac{Q + \alpha - 2}{2} \right)^2 \int_{\mathbb{H}^d} \rho^\alpha \frac{|z|^2}{\rho^4} u^2 dz ds \leq \int_{\mathbb{H}^d} \rho^\alpha |\nabla_{\mathbb{H}^d} u|^2 dz ds. \quad (4.25)$$

**Théorème 4.3.10** *Soit  $\mathbb{G}$  un groupe de Carnot de dimension homogène  $Q \geq 3$  et de norme homogène  $N$ . Si  $u \in C_0^\infty(\mathbb{G} \setminus \{0\})$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $Q + \alpha - 2 > 0$ , alors,*

$$\int_{\mathbb{G}} N^\alpha |\nabla_{\mathbb{G}} u|^2 dx \geq \left( \frac{Q + \alpha - 2}{2} \right)^2 \int_{\mathbb{G}} N^\alpha \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} N|^2}{N^2} u^2 dx. \quad (4.26)$$

Remarquons que si  $\alpha = 0$  dans les deux théorèmes, on retrouve l'inégalité de Hardy (4.2.6) pour la constante optimale  $d^2$ .

Y. Han et P. Niu ont démontré l'inégalité de Hardy associée aux champs de vecteurs

$$X_j = \partial_{x_j} + 2k y_j |z|^{2k-2} \partial_s, \quad X_{d+j} = \partial_{y_j} - 2k x_j |z|^{2k-2} \partial_s, \quad j = 1, \dots, d, \quad (4.27)$$

sachant que la famille des champs de vecteurs  $(X_j)_{1 \leq j \leq 2d}$  vérifient la condition d'Hörmander pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et qu'on note  $X = (X_1, \dots, X_{2d})$ , on énonce les théorèmes suivants :

**Théorème 4.3.11** [93]

Pour  $k > 1$  et  $1 < p < 2k + 2d$ , on a pour tout  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2d+1} \setminus \{0\})$ ,

$$c_p(k, d) \int \frac{|z|^{(2k-1)p}}{(|z|^{4k} + s^2)^{p/2}} |u|^p dz ds \leq \int |Xu(z, s)|^p dz ds. \quad (4.28)$$

On remarque que si  $k = 1$  et  $p = 2$ , on retrouve l'inégalité de Hardy (4.2.6) sur le groupe de Heisenberg et dans ce cas, la constante  $c_{1,2} = d^2$  pour le potentiel  $V(z, s) = \frac{|z|^2}{(|z|^4 + s^2)}$ .

**Théorème 4.3.12** [127]

Pour  $1 \leq p \leq Q$ , on a pour tout  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{H}^d \setminus \{0\})$ ,

$$\left(\frac{Q-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^d} \frac{|z|^p}{\rho^p} \frac{|u|^p}{(1+\rho)^p} dz ds \leq \int_{\mathbb{H}^d} |\nabla_{\mathbb{H}^d} u|^p dz ds. \quad (4.29)$$

Si  $p = 2$ , la constante optimale de cette inégalité est égale à  $(Q - 2/2)^2$  pour le potentiel  $V(z, s) = \frac{|z|^2}{\rho^2(1+\rho^2)} \leq \frac{|z|^2}{\rho^4}$ .



# Chapitre 5

## Méthodes Variationnelles dans la théorie des points critiques

### 5.1 Introduction

Les méthodes variationnelles sont des outils forts dans la résolution des problèmes non-linéaires et apparaissent dans plusieurs disciplines où les méthodes classiques échouent. La théorie des points critiques est liée aux problèmes variationnels : Pour un problème  $(\mathcal{P})$ , il existe une fonctionnelle  $I$  dont les points critiques sont des solutions de  $(\mathcal{P})$ . Cette approche variationnelle a été employée pour la résolution de l'équation de Laplace.

Soient  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\partial\Omega$  et  $\varphi$  une fonction continue sur  $\partial\Omega$ . On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

La fonctionnelle associée à ce problème s'écrit :

$$I(v) \equiv \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx, \quad K_0 \equiv \{v \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}), v = \varphi \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Si on trouve une fonction  $u \in K_0$  telle que  $I(u) \leq I(v)$  quand  $v \in K_0$ , alors  $u$  est solution du problème (5.1). Le fait de trouver une solution par ce procédé a été utilisé par Riemann, qui l'a appelé *principe de Dirichlet* dans sa thèse en 1851. Cependant Weierstrass a objecté en 1869 qu'il y a une faille dans le principe de Dirichlet : la borne inférieure

$$\alpha \equiv \inf_{u \in K_0} I(u),$$

peut ne pas être atteinte. Autrement dit, si le principe de Dirichlet donne un moyen élégant pour résoudre l'équation de Laplace, une première difficulté est de choisir l'ensemble  $K_0$  où on va minimiser la fonction  $I$ , et la difficulté est de montrer que la borne inférieure est atteinte. Dans le cas de cet exemple, il faudra remplacer dans la définition de  $K_0$ , l'espace  $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$  par l'espace de Hilbert obtenu en complétant  $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$  pour la norme :

$$\|v\| \equiv \left( \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 + |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'importantes contributions à la théorie des points critiques ont également été faites par des pionniers comme Lagrange, Legendre, Poincaré, etc [86, 149, 156]. En 1905, Poincaré a développé dans sa thèse, les idées de Hilbert sur le principe de Dirichlet et il a apporté une précieuse contribution au calcul des variations [119] en traitant un problème variationnel dont la solution correspondait ni à un minimum ni un maximum. Cette approche était reprise par Birkhoff en 1917 qui a réussi à formuler un principe minimax où des points critiques  $u$  sont telle que

$$I(u) \equiv \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{x \in A} I(x),$$

où  $\mathcal{A}$  est une famille particulière d'ensembles. La théorie du minimax a été élaborée à la fin de l'année 1920 et au début de l'année 1930 indépendamment par Morse, Ljusternik et Schnirelman. Ils ont étendu cette théorie à des fonctionnelles qui ne sont pas forcément quadratiques et ils ont étudié des fonctionnelles  $I$  de classe  $C^2$  sur des espaces de dimension fini. Leurs résultats contiennent tous les ingrédients de base des théorèmes minimax modernes, qui incarnent une idée de la compacité des fonctionnelles, introduite depuis 1960 par Palais, Smale et Rothe pour jouer un rôle dans la compacité locale des espaces de dimension infini. Ils ont étendu ces résultats aux espaces de Banach et de Hilbert au lieu de travailler seulement sur espaces de dimension fini ou des domaines bornés, voir [130, 143]. Ces contributions ont permis à des mathématiciens contemporains à obtenir des résultats importants qui forment une partie substantielle de la théorie moderne des points critiques. Ils ont également servi à résoudre de nombreux problèmes non linéaires : problèmes elliptiques, systèmes Hamiltoniens, équations d'onde non-linéaires, et d'autres.

Dans ce chapitre, on aborde les techniques de recherche de points critiques pour des fonctionnelles définies sur un espace de Banach [50, 57, 113, 121, 126, 131, 134].

**Définition 5.1.1** Soit  $E$  un espace de Banach et  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ . on dit que  $I$  est différentiable au sens de Gâteaux en  $u \in E$ , s'il existe  $l \in E'$  telle que dans chaque direction  $h \in E$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I(u + th) - I(u)}{t} = \langle l, h \rangle. \quad (5.2)$$

On dit que  $I$  est Fréchet différentiable en  $u$ , s'il existe une application linéaire continue  $L : E \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(u + h) - I(u)}{\|h\|_E} = \langle L(u), h \rangle. \quad (5.3)$$

**Proposition 5.1.2** Soit  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et Gâteaux différentiable en  $u \in E$  et on suppose que l'application  $v \mapsto L(v)$  est continue au voisinage de  $u$ . Alors  $I$  est Fréchet différentiable et sa dérivée coïncide avec  $I'(u)$ .

**Démonstration.** Soit l'application  $t \mapsto I(u + th)$  définie sur  $[0, 1]$  pour  $u \in E$  et  $h$  un point au voisinage de  $u$ . On peut écrire

$$I(u + h) = I(u) + \langle I'(u), h \rangle + \int_0^1 \langle I'(u + th) - I'(u), h \rangle dt. \quad (5.4)$$

Comme  $v \mapsto I'(v)$  est continue au voisinage de  $u$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  telle que

$$\|v - u\| < \delta \Rightarrow \|I'(v) - I'(u)\| < \varepsilon.$$

Par conséquent si  $\|h\| < \delta$ , on a pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$|\langle I'(u + th) - I'(u), h \rangle| \leq \|I'(u + th) - I'(u)\| \|h\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

□

**Définition 5.1.3** Soient  $E$  un espace de Banach et  $I \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ . Un point  $u$  est dit point critique de  $I$  si  $I'(u) = 0$  et  $c$  est dite valeur critique de  $I$ , s'il existe  $u \in E$  vérifiant  $I(u) = c$  et  $I'(u) = 0$ .

## 5.2 Le théorème du col

Le théorème du col (*Mountain Pass theorem*) est le premier théorème de construction de valeur critique. Il permet de trouver un nouveau point critique lorsqu'on connaît un minimum local (parfois une solution évidente) et si la fonctionnelle n'est pas minorée. Sa démonstration est basée sur la condition de Palais-Smale et sur un lemme de déformation [147].

### 5.2.1 Condition de Palais-Smale

On commence par définir ce que l'on entend par la condition de Palais-Smale. La condition d'origine qui apparaît dans les oeuvres de Palais et Smale et qui est connue dans la littérature [129, 130, 131, 145] par la condition  $C$ , est la suivante :

**Définition 5.2.1** Soient  $E$  un espace de Banach et  $I \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ . On dit que  $I$  vérifie la condition  $C$ , si pour tout ensemble  $S \subset E$  telle que la restriction  $I|_S$  est bornée mais la restriction de  $\|I'\|$  sur  $S$  n'est pas bornée en dehors de 0,  $I$  admet un point critique dans l'adhérence de  $S$ .

**Définition 5.2.2** Soient  $E$  un espace de Banach et  $I \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ . On dit que  $I$  vérifie la condition de Palais-Smale  $(PS)$ , si toute suite  $(u_n)_n$  de  $E$  telle que

$$(I(u_n))_n \text{ est bornée et } I'(u_n) \rightarrow 0 \text{ dans } E' \quad (5.5)$$

possède une sous suite convergente.

Lorsqu'on traite la théorie des points critiques abstraites, il nous faut en général une condition plus faible, introduite par Brézis, Coron et Nirenberg dans [34] :

**Définition 5.2.3** Soient  $E$  un espace de Banach et  $I \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ . On dit que  $I$  vérifie la condition de Palais-Smale  $(PS)_c$  au niveau  $c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , si toute suite  $(u_n)_n$  de  $E$  telle que

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ et } I'(u_n) \rightarrow 0 \text{ dans } E' \quad (5.6)$$

possède une sous suite convergente.

**Remarques 5.2.4** 1) La condition  $(PS)$  est plus forte que la condition  $C$ .

2) Si  $I$  vérifie  $(PS)_c$  alors l'ensemble  $K_c \equiv \{u \in E; I(u) = c \text{ et } I'(u) = 0\}$  est compact.

## 5.2.2 Lemme de déformation

On peut trouver le lemme de déformation dans de nombreuses références qui traitent les méthodes minimax dans la théorie des points critiques, en particulier l'article d'Ambrosetti-Rabinowitz [7]. Le point crucial dans l'existence des points critiques est la différence topologique entre les ensembles  $\{u \in E; I(u) < c\}$  et  $\{u \in E; I(u) \leq c\}$  pour certaines valeurs de  $c \in \mathbb{R}$ . En effet, les valeurs critiques sont des valeurs  $c$  pour les quelles on ne peut pas déformer pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, les ensembles  $A_{c+\varepsilon}$  en des ensembles  $A_{c-\varepsilon}$ , où  $A_c \equiv \{u \in E; I(u) \leq c\}$ .

**Exemples 5.2.5** Soit  $I(x, y) = x^2 - y^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . L'origine est le seul point critique. Pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, l'ensemble  $A_\varepsilon$  est connexe, alors que, l'ensemble  $A_{-\varepsilon}$  a deux composantes connexes.

L'idée de déformation de ces espaces est un outil basique dans la théorie de Morse [121]. Dans un espace de Banach  $E$ , on ne peut plus définir la notion du gradient qui repose sur l'identification de  $E$  et  $E^*$  par l'intermédiaire du produit scalaire. On remplace alors cette notion par celle de pseudo-gradient.

**Définition 5.2.6** Soient  $E$  un espace de Banach et  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ . Soit  $u \in E$ , on dit que  $v$  est pseudo-gradient pour  $I$  en  $u$ , si et seulement si

$$\begin{aligned} \|v\| &\leq 2 \min \{\|I'(u)\|_{E^*}, 1\} \\ \langle I'(u), v \rangle &\geq \min \{\|I'(u)\|_{E^*}, 1\} \|I'(u)\|_{E^*}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Notons  $E_r \equiv \{u \in E; I'(u) \neq 0\}$  l'ensemble des points réguliers de  $I$ . On dit qu'un champ de vecteurs  $X(\cdot)$  est pseudo-gradient pour  $I$  sur  $E$  si l'application  $u \mapsto X(u)$  est continue de  $E_r$  vers  $E$ , localement lipschitzienne sur  $E_r$  et pour tout  $u \in E_r$ ,  $X(u)$  est un pseudo-gradient pour  $I$  en  $u$ .

**Lemme 5.2.7** Soit  $E$  un espace de Banach. Si  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  une fonction non constante, alors il existe un champ de pseudo-gradient de  $I$  sur  $E_r$ .

**Démonstration.** On considère le cas où  $\dim E < +\infty$  et  $K_c = 0$ , alors  $E_r = E$ . Pour  $u \in E$ , considérons l'ensemble  $\Lambda(u)$  des vecteurs  $Y$  de  $E$  tels que

$$\begin{aligned} \|Y\| &< 2 \min \{\|I'(u)\|, 1\} \\ \langle I'(u), Y \rangle &> \min \{\|I'(u)\|, 1\} \|I'(u)\|. \end{aligned} \quad (5.8)$$

L'ensemble  $\Lambda(u)$  est non vide et ouvert, pour chaque  $u$  donné, choisissons alors un élément dans  $\Lambda(u)$  qu'on note  $Y_u$ . Comme  $I'$  est une application continue, il existe un voisinage  $W(u)$  de  $u$  dans  $E$ , tel que  $Y_u \in \Lambda(v)$  pour tout  $v \in W(u)$ . Considérons alors le recouvrement  $\cup_{u \in E} W(u)$ . En appliquant le théorème de Borel-Lebesgue, on peut extraire un recouvrement dénombrable  $W(u_i)$  tel que  $\cup_{i=1}^{+\infty} W(u_i) = E$ . Pour tout compact  $K$  de  $E_r$ ,  $K$  ne contient qu'un nombre fini de points  $u_i$ . La connaissance des points  $u_i$ , et donc de  $Y_{u_i}$  va alors nous permettre de construire les champs  $X(u)$  grâce à une partition de l'unité relative aux ouverts  $W(u_i)$ . Il existe des fonctions  $\varphi_i \in C_c^\infty(W(u_i))$  telle que  $\sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i(u) = 1$  sur  $E$ . Posons alors

$$X(u) = \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i(u) Y_{u_i}.$$

Il est clair que  $X \in C^\infty$  et que  $X(\cdot)$  vérifie les relations (5.7). Donc, on a construit un pseudo-gradient de  $I$  sur  $E$ .

On considère maintenant le cas général : on définit comme précédemment  $Y_u$  pour  $u \in E_r$ , on a alors le recouvrement  $E_r = \cup_{u \in E_r} W(u)$ . On ne peut pas invoquer le théorème de Borel-Lebesgue, en revanche on peut utiliser le résultat suivant :

**Lemme 5.2.8** *Soit  $V$  un espace métrique séparable. On peut extraire de tout recouvrement ouvert de  $V$ , un recouvrement localement fini  $V = \sum_{i \in I} W_i$ ,  $I \subset J$ , c'est à dire, tel que pour tout  $v \in V$ , il existe un voisinage  $U$  de  $v$  tel que  $U$  n'intersecte qu'un nombre fini des  $W_i$ .*

Considérons alors un recouvrement localement fini de  $E_r$  :  $E_r = \sum_{i \in I} W(u_i)$ . Il nous reste à construire une partition de l'unité subordonnée au recouvrement précédent. Considérons pour  $i \in I$ , la fonction  $\rho_i$  définie par

$$\rho_i = \text{dist}(u, E \setminus W(u_i))$$

On vérifie que  $\rho_i$  est lipschitzienne, de constante de Lipschitz inférieur à 1. Par ailleurs pour  $u$  donné, il n'existe qu'un indice  $i$  tels que  $\rho_i \neq 0$ . Posons alors

$$\varphi_i = \frac{\rho_i}{\sum_{j \in I} \rho_j}.$$

On vérifie que  $\sum_{i \in I} \varphi_i = 1$ , pour tout  $u \in E_r$ ,  $0 < \varphi_i \leq 1$  et que  $\varphi_i = 0$  en dehors de  $W(u_i)$ . Comme le recouvrement est localement fini, pour tout  $u \in E_r$ , il existe un voisinage  $U$  de  $u$  tel que  $\text{Card}\{j \in I, \rho_j \neq 0, v \in U\} = \text{cte}$ , et donc  $\varphi_i$  est localement lipschitzienne. On introduit ensuite

$$X(u) = \sum_{i \in I} \varphi_i(u) Y_{u_i},$$

et on vérifie que  $X$  est un pseudo-gradient pour  $I$ . □

### Lemme 5.2.9 (Lemme de déformation)

*Soient  $E$  un espace de Banach et  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  une fonction non constante satisfaisant la condition de Palais-Smale et  $c \in \mathbb{R}$  une valeur régulière de  $I$ . Alors, il existe un  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , l'application  $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$ , appelée flot associé à  $I$  satisfait aux conditions suivantes :*

- i) Pour tout  $u \in E$ ,  $\eta(0, u) = u$ ,
- ii) Pour tout  $t \in [0, 1]$  et  $I(u) \notin [c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0]$ , on a  $\eta(t, u) = u$ ,
- iii) Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\eta(t, \cdot)$  est un homéomorphisme de  $E$  dans  $E$ ,
- iv) Pour tout  $u \in E$  et  $t \in [0, 1]$ , la fonction  $t \mapsto I(\eta(t, u))$  est décroissante,
- v) Si  $K_c = \emptyset$  alors  $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$ ,
- vi) Si  $I$  est paire en  $u$  alors  $\eta(t, u)$  est impaire en  $u$ .

**Démonstration.** Comme  $I$  satisfait la condition de Palais-Smale et  $c$  n'est pas une valeur critique, il existe alors,  $\varepsilon_1 > 0$  et  $\delta > 0$  tels que

$$I(u) \in [c - \varepsilon_1, c + \varepsilon_1] \quad \text{et} \quad \|I'(u)\| \geq \delta.$$

Car sinon, il existe une suite  $(u_n)_n \subset E$  tels que

$$c - \frac{1}{n} \leq I(u_n) \leq c + \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad \|I'(u)\| \leq \frac{1}{n},$$

et comme  $I$  vérifie la condition  $(PS)_c$  alors  $c$  est une valeur critique de  $I$ . Posons  $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \frac{\delta^2}{8})$  et pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,

$$A = [I \leq c - \varepsilon_0] \cup [I \geq c + \varepsilon_0], \quad B = [c - \varepsilon \leq I \leq c + \varepsilon].$$

Alors  $A \cap B = \emptyset$  et la fonction  $\alpha(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$  est localement lipschitzienne et vérifie  $\alpha = 0$  sur  $A$  et  $\alpha = 1$  sur  $B$ . Notons aussi, que si  $I$  est paire, les ensembles  $A$  et  $B$  sont symétriques par rapport à l'origine et  $\alpha$  est paire. Soit  $V$  un champ de pseudo-gradient de  $I$ , que l'on choisira impaire si  $I$  est paire et posons

$$W(x) \equiv \alpha(x) \min\left(1, \frac{1}{\|V(x)\|}\right) V(x)$$

pour  $x \in E$ .  $W$  est localement lipschitzienne,  $\|W(x)\| \leq 1$  et que si  $I$  est paire,  $W$  est impaire. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(t, x) &= -W(\eta(t, x)), \\ \eta(0, x) &= x \end{cases} \quad (5.9)$$

D'après la théorie des équations différentielles ordinaires, ce problème admet une unique solution  $\eta(\cdot, x) \in C^1([0, 1], E)$ . De plus,  $\eta$  est localement lipschitzienne sur  $[0, 1] \times E$ ,  $\eta(t, \eta(s, x)) = \eta(t + s, x)$ , et que pour chaque  $t \in [0, 1]$ ,  $\eta(t, \cdot)$  est un homéomorphisme de  $E$  dans  $E$ . Si  $I(u) \notin [c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0]$  alors  $W(u) = 0$ , et l'unicité de la solution du problème (5.9) implique que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\eta(t, u) = u$ . Pour la propriété *iv*) du lemme 5.2.9, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(\eta(t, u)) &= \langle I'(\eta(t, u)), \frac{d\eta(t, u)}{dt} \rangle_{E', E} \\ &= -\alpha(\eta(t, u)) \min\left(1, \frac{1}{\|V(\eta(t, u))\|}\right) \langle I'(\eta(t, u)), V(\eta(t, u)) \rangle_{E', E} \\ &\leq -\alpha(\eta(t, u)) \min\left(1, \frac{1}{\|V(\eta(t, u))\|}\right) \|I'(\eta(t, u))\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Soit  $u \in A_{c+\varepsilon}$  et supposons que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $I(\eta(t, u)) \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ . On obtient à partir de (5.10),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(\eta(t, u)) &\leq -\frac{1}{4} \min\left(1, \frac{1}{\|V(\eta(t, u))\|}\right) \|V(\eta(t, u))\|^2 \\ &\leq \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{si } \|V(\eta(t, u))\| \geq 1, \\ -\frac{\delta^2}{4} & \text{si } \|V(\eta(t, u))\| < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\delta^2}{4} \leq I(u) - I(\eta(t, u)) \leq 2\varepsilon_0,$$

ce qui contredit le fait que  $\varepsilon_0 = \min\left(\varepsilon_1, \frac{\delta^2}{8}\right)$ .  $\square$

**Proposition 5.2.10** *Soient  $E$  un espace de Banach et  $\mathcal{B}$  une famille non vide de parties non vides de  $E$ . On suppose que pour chaque  $c \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$  assez petit, le folt  $\eta(1, \cdot)$  construit dans le lemme de déformation, respecte  $\mathcal{B}$  (*c-à-d* si  $A \in \mathcal{B}$ ,  $\eta(1, A) \in \mathcal{B}$ ). Si*

$$\tilde{c} \equiv \inf_{A \in \mathcal{B}} \sup_{v \in A} I(v) < \infty,$$

et  $I \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$  vérifie la condition de Palais-Smale alors  $\tilde{c}$  est une valeur critique de  $I$ .

**Démonstration.** Si  $\tilde{c}$  n'est pas une valeur critique de  $I$ , alors pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, on peut choisir  $A \in \mathcal{B}$  tel que

$$\tilde{c} \leq \sup_{v \in A} I(v) \leq \tilde{c} + \varepsilon.$$

Mais en posant  $B \equiv \eta(1, A)$ , on a d'une part  $B \in \mathcal{B}$ , et d'autre part  $B \subset A_{\tilde{c}-\varepsilon}$ , ce qui contredit la définition  $\tilde{c}$ .  $\square$

### 5.2.3 Le théorème du col

Le premier exemple de construction de valeur critique par le principe de min-max est le théorème du col énoncé par Rabinowitz [7]

**Théorème 5.2.11** *Soient  $E$  un espace de Banach et  $I \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$  vérifiant la condition de Palais-Smale (PS). On fait les hypothèses suivantes sur  $I$  :*

*i) il existe  $u_0 \in E$ ,  $R > 0$ , et  $a > 0$  tel que*

$$\|u - u_0\|_E = R \text{ alors } I(u) \geq I(u_0) + a, \quad (5.11)$$

*ii) il existe un point  $e \in E$  tels que*

$$\|u_0 - e\|_E > R \text{ et } I(e) < I(u_0) + a. \quad (5.12)$$

*Si  $I$  satisfait  $(PS)_c$  avec*

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(h(t)), \quad (5.13)$$

*où*

$$\Gamma = \{ h \in C([0, 1]; E); h(0) = u_0 \text{ et } h(1) = e \}, \quad (5.14)$$

*alors  $c$  est une valeur critique de  $I$  et  $c \geq a$ .*

**Démonstration.** Quitte à changer d'origine, et à soustraire une constante à  $I$ , on peut toujours supposer que  $u_0 = 0$  et  $I(u_0) = I(0) = 0$ . Montrons tout d'abord que  $c \geq a$  : Considérons un chemin  $h \in \Gamma$ . Comme  $h$  est continu, la fonction définie par  $\varphi(t) = \|h(t) - h(0)\|_E$  est aussi continue et vérifie  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(1) = \|e\|_E > R$ . Il existe donc, par le théorème des valeurs intermédiaires,  $t_0 \in [0, 1]$  tel que  $\varphi(t_0) = \|h(t_0) - h(0)\|_E = R$  et donc  $I(h(t_0)) \geq a$  d'après la propriété 5.11. Il en résulte que pour tout  $h \in \Gamma$ ,  $\max_{u \in h([0,1])} I(u) \geq a$ , et par conséquent,  $c \geq a$ . Afin de montrer que  $c$  est une valeur critique de  $I$ , on raisonne par l'absurde, et on suppose que  $c \notin K_c$ . Par la remarque 5.2.4, le complémentaire de  $K_c$  est un ouvert, il existe donc un nombre  $\varepsilon > 0$  tel que  $I$  n'admet pas de valeur critique dans  $[c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]$ . Montrons à l'aide du lemme de déformation que l'on aboutit à une contradiction. D'après le lemme de déformation, il existe, grâce à  $v$ , une rétraction de  $A_{c+\varepsilon}$  sur  $A_{c-\varepsilon}$ . On choisit  $\varepsilon$  suffisamment petit de sorte que les extrémités des chemins de  $\Gamma$ , c'est-à-dire,  $u_0$  et  $e$ , ne bougent pas au cours de la rétraction, car

$$I(u_0) = 0 < c - \varepsilon, \quad I(e) < c - \varepsilon$$

entraînent  $u_0 \in A_{c-\varepsilon}$  et  $e \in A_{c-\varepsilon}$ , et donc par *ii*),  $\eta(1, u_0) = u_0$  et  $\eta(1, e) = e$ .

Considérons un chemin  $h \in \Gamma$  tel que pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{a}{2}$ ,

$$\max_{u \in h([0,1])} I(u) \leq c + \varepsilon, \tag{5.15}$$

(il est toujours possible de trouver un tel chemin en raison de la définition de  $c$ ), et donc  $h$  est un chemin qui relie  $u_0$  à  $e$  dans  $A_{c+\varepsilon}$ . A l'aide de la déformation  $\eta$ , nous allons pousser ce chemin sur  $A_{c-\varepsilon}$ . Comme ni  $u_0$ , ni  $e$  ne bougent au cours de cette déformation, nous obtiendrons un nouveau chemin reliant  $u_0$  à  $e$ , mais cette fois-ci dans  $A_{c-\varepsilon}$ . Un tel chemin contredirait la définition de  $c$ , et ceci terminera le raisonnement par l'absurde. Plus précisément considérons le chemin définie par  $\psi(t) = \eta(1, h(t))$  alors  $\psi \in C([0, 1], E)$ .

On a bien

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \eta(1, h(0)) = \eta(1, u_0) = u_0, \\ \psi(1) &= \eta(1, h(1)) = \eta(1, e) = e, \end{aligned}$$

car  $h(0) = u_0$  et  $I(u_0) = 0 < \frac{a}{2} \leq c - \varepsilon_0$  implique que  $u_0 \in A_{c-\varepsilon}$ . Par conséquent,  $\psi \in \Gamma$  et  $\psi([0, 1]) \subset A_{c-\varepsilon}$ . et donc

$$\max_{u \in \psi([0,1])} I(u) \leq c - \varepsilon. \tag{5.16}$$

Ceci est contradictoire avec la définition de  $c$ , et termine la preuve du théorème 5.2.11  $\square$

### 5.3 Le théorème de Rabinowitz

Afin de démontrer le théorème de Rabinowitz, on a besoin d'énoncer les propriétés qui caractérisent le degré topologique. On peut consulter les références suivantes [78, 139] pour plus de détails.

### 5.3.1 Le degré topologique de Brouwer

Soit  $y \in \mathbb{R}^d$ ,  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  une application au moins continue et considérons l'équation

$$f(x) = y. \quad (5.17)$$

Comment peut-on s'assurer de manière "un peu pratique" qu'il existe au moins une solution  $x$  à (5.17). Il y a une réponse relativement simple dans le cas où  $f$  est linéaire : si le déterminant de  $f$  est non nul, alors il existe une solution (et même une seule) à (5.17), et ce pour tout  $y \in \mathbb{R}^d$ . Ceci n'est pas une condition nécessaire et suffisante : il peut exister des solutions, pour certains  $y$ , lorsque le déterminant de  $f$  s'annule ; dans ce cas, on peut cependant constater que ces solutions ne sont pas stables : si l'on perturbe un peu  $y$ , il peut ne plus exister de solution du tout.

Nous souhaitons ici développer un outil jouant, pour des applications non-linéaires, ce rôle du déterminant pour les applications linéaires : un réel, le "degré", qui indique par sa non-nullité que (5.17) a au moins une solution, et qui plus est une solution "stable". De manière évidente, ce degré dépendra de  $f$  et  $y$ , mais aussi de l'ensemble sur lequel on cherche les solutions à (5.17).

L'idée principale du degré est de "suivre" les solutions au fur et à mesure que l'on modifie  $f$ . On commence par partir d'une fonction  $f_0$  assez simple, pour laquelle on sait dire qu'il existe des solutions à  $f_0(x) = y$ , et on cherche à modifier continuellement cette fonction pour arriver à  $f$  (en terme précis, on utilise une homotopie entre  $f_0$  et  $f$ ), tout en suivant le devenir des solutions de (5.17) au cours de cette modification pour espérer en conserver au moins une jusqu'au bout, qui sera donc solution de  $f(x) = y$ .

Ceci n'est bien sûr pas faisable en général : les solutions que l'on suit peuvent sortir du domaine, ou bien disparaître tout simplement (prendre une parabole sur  $\mathbb{R}$  orientée vers le haut et ayant deux zéros, et la monter progressivement : à un moment donné, ses deux zéros se rejoignent, puis disparaissent). Dans notre construction du degré, il faudra donc éliminer ces deux situations. La première (fuite d'une solution par le bord du domaine concerné) sera évitée en ne regardant que des fonctions pour lesquelles les solutions éventuelles de  $f(x) = y$  restent éloignées du bord du domaine. La deuxième situation (disparition des solutions) sera réglée en collant à chaque solution de  $f(x) = y$  une étiquette (un signe) indiquant si elle est susceptible ou non de disparaître après s'être rassemblée avec une de ses consœurs.

#### Cas particulier : la dimension 1

En dimension  $d = 1$ , les choses sont toujours plus simples. Considérons la situation suivante : soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue qui ne s'annule ni en 0 ni en 1, et notons

$$\deg(f) = \frac{1}{2}(\text{sign}(f(1)) - \text{sign}(f(0))).$$

Si  $\deg(f) \neq 0$ , alors  $f(1)$  et  $f(0)$  ont des signes différents donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $x \in [0, 1]$  tel que  $f(x) = 0$ .

Si l'on souhaite un degré adapté à (5.17) (i.e. avec un second membre pas forcément nul) et qui prenne en compte l'ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}$  sur lequel on cherche les solutions, alors en

décomposant  $\Omega$  en ses composantes connexes  $\Omega = \cup_{i \in I]a_i, b_i[$ , on peut définir

$$\deg(f, \Omega, y) = \frac{1}{2} \sum_{i \in I} \left( \text{sign}(f(b_i) - y) - \text{sign}(f(a_i) - y) \right),$$

lorsque  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et ne s'annule pas sur  $\partial\Omega$ .

**Définition 5.3.1** Soient  $d \geq 1$  un entier et  $\mathcal{A}$  l'ensemble des triplets  $(f, \Omega, y)$  où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  et  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et telle que  $y \notin f(\partial\Omega)$ . Il existe une et une seule application  $\deg : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}$  appelé le degré topologique de Brouwer, qui vérifie les propriétés suivantes :

- i) Normalisation : si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  et  $y \in \mathbb{R}^d$  alors  $\deg(\text{Id}, \Omega, y) = 1$  et  $\deg(\text{Id}, \Omega, y) = 0$  si  $y \notin \bar{\Omega}$ .
- ii) Additivité : Si  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$  sont deux ouverts bornés disjoints de  $\mathbb{R}^d$  inclus dans  $\Omega$  tel que  $y \notin f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ , alors  $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y) + \deg(f, \Omega_2, y)$ .

**Proposition 5.3.2** Le degré topologique de Brouwer vérifie les propriétés suivantes :

- i) Si  $\deg(f, \Omega, y) \neq 0$  alors l'équation  $f(u) = y$  admet au moins une solution dans  $\Omega$ .
- ii) Pour tout  $z \in \mathbb{R}^d$ ,  $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f - z, \Omega, y - z)$ .
- iii) Soit  $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$  et  $r = \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) > 0$ . Si  $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $z \in \mathbb{R}^d$  sont tels que  $\sup_{\partial\Omega} (|g - f|) + |y - z| < r$ , alors  $\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, z)$ .

### Degré topologique pour les fonctions et valeurs régulières

Soit  $\mathcal{A}_1$  l'ensemble des  $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$  tels que  $f \in C^\infty(\bar{\Omega})^d$  et  $y$  est une valeur régulière de  $f$  (ce qui signifie que tout antécédent  $x \in \Omega$  de  $y$  par  $f$ , s'il en existe, est tel que  $f'(x)$  est inversible). On définit le degré topologique sur  $\mathcal{A}_1$  de la manière suivante :

$$\deg_1(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(J_f(x)) \in \mathbb{Z}. \quad (5.18)$$

Cette définition n'est pas évidente à manipuler sur les grosses perturbations de  $y$ . On donne donc une autre expression de  $\deg_1$ .

**Lemme 5.3.3** Soient  $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_1$  et  $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  une approximation de l'unité vérifiant  $\text{supp}\rho_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$ . Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,

$$\deg_1(f, \Omega, y) = \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x) dx.$$

Pour la démonstration de ce lemme, on peut consulter le cours [68].

### 5.3.2 Théorème de Rabinowitz

Le théorème de Rabinowitz est une version plus générale du théorème du col et il est dû à Ambrosetti et Rabinowitz [137]

**Théorème 5.3.4** Soit  $E$  un espace de Banach tel que  $E = Y \oplus X$ , et  $\dim Y < \infty$ . Si  $I \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$  et vérifie les conditions suivantes :

- i) il existe  $\rho, \alpha > 0$  tel que  $I|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \alpha$ ,
- ii) il existe un point  $e \in \partial B_1 \cap X$  et  $R > \rho$  tel que si

$$A \equiv (\bar{B}_R \cap Y) \oplus \{r e, 0 < r < R\}, \quad \text{alors } I|_{\partial A} \leq 0. \quad (5.19)$$

Si de plus,  $I$  vérifie la condition de Palais-Smale  $(PS)_c$  avec

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in A} I(h(u)), \quad (5.20)$$

où

$$\Gamma = \{h \in C(\bar{A}, E); h|_{\partial A} = id\}, \quad (5.21)$$

alors  $c$  est une valeur critique de  $I$  et  $c \geq \alpha$ .

**Remarques 5.3.5** Supposons que  $I|_Y \leq 0$  et qu'il existe un point  $e \in \partial B_1 \cap X$  et  $\bar{R} > \rho$  tel que

$$I(u) \leq 0, \quad \forall u \in Y \oplus \langle \{e\} \rangle \quad \text{et } \|u\| \geq \bar{R}.$$

Alors pour tout  $R$  assez grand,  $I|_{\partial A} \leq 0$ .

**Lemme 5.3.6** Si  $h \in \Gamma$ , alors  $h(A) \cap \partial B_\rho \cap X \neq \emptyset$ .

**Démonstration.** Notons par  $Pr$  la projection de  $E$  sur  $X$ . Montrer que  $h(A) \cap \partial B_\rho \cap X \neq \emptyset$  est équivalent à résoudre l'équation suivante :  
trouver  $u \in A$  tel que

$$Pr(h(u)) = 0 \quad \text{et} \quad \|u - Pr(h(u))\| = \rho.$$

Si  $u \in \bar{A}$ , alors  $u = y + re$  avec  $y \in \bar{B}_R \cap Y$  et  $0 \leq r \leq R$ . Considérons une fonction

$$\phi(r, y) = \left( \|(id - Pr)h(y + re)\|, Pr(h(y + re)) \right),$$

alors,  $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R} \times Y)$ . Comme  $h|_{\partial A} = id$  si  $u \in \partial A$ , alors

$$\phi(r, y) = (\|re\|, y) = (r, y).$$

En particulier,  $\phi(r, y) \neq (\rho, 0)$  car sinon  $(\rho, 0) \in \partial A$ .

De la propriété i) de 5.3.2, on a

$$\deg(\phi, A, (\rho, 0)) = \deg(id, A, (\rho, 0)) = 1,$$

et on déduit de la propriété ii), qu'il existe  $u \in A$  tel que  $\phi(u) = (\rho, 0)$ .

**Démonstration du théorème 5.3.4.**

Montrons tout d'abord que  $c \geq \alpha$ . la condition i) du théorème 5.3.4 implique que

$$\forall h \in \Gamma, \quad \max_{u \in \partial B_\rho \cap X} I(h(u)) \geq \alpha.$$

Soit  $w \in h(A) \cap \partial B_\rho \cap X$ , alors d'après le lemme 5.3.6,

$$\max_{u \in A} I(h(u)) \geq I(w) \geq \max_{u \in \partial B_\rho \cap X} I(h(u)) \geq \alpha,$$

et par conséquent  $c \geq \alpha$ .

Supposons que  $c$  n'est pas une valeur critique de  $I$ . D'après le lemme de déformation, on peut trouver un flot  $\eta \in C([0,1] \times E, E)$  tel que pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$ . En prenant  $\varepsilon_0 = \frac{\alpha}{2}$ , il existe  $h \in \Gamma$ , tel que

$$\max_{u \in A} I(h(u)) \leq c + \varepsilon.$$

Si  $u \in \partial A$ , alors on a de la condition *ii*) du théorème 5.3.4,

$$u = h(u), \quad \text{et} \quad I|_{\partial A} \leq 0 < c - \varepsilon_0.$$

Par conséquent  $I(u) \notin [c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0]$ . D'après la condition *ii*) du lemme de déformation, et le choix fixé sur  $\varepsilon_0$ ,  $\eta(1, h(u)) = u$  pour  $u \in \partial A$ . Par suite  $\eta(1, h(u)) \in \Gamma$ , ce qui implique que

$$c \leq \max_{u \in A} I(\eta(1, h(u))) \leq c - \varepsilon,$$

d'où la contradiction. □

**Remarques 5.3.7** 1. Le théorème du col est un cas particulier du théorème de Rabinowitz, en prenant  $Y = \{0\}$ .

2. Le lemme 5.3.6 exprime le fait que  $\partial A$  et la sphère de rayon  $\rho$  de  $X$  sont enlacés, de sorte que toute surface reposant sur  $\partial A$  rencontre cette sphère.

### 5.3.3 Points critiques multiples

**Théorème 5.3.8** Soient  $E$  un espace de Banach et  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  une fonction satisfaisant la condition de Palais-Smale. On suppose que  $I$  est paire et vérifie les conditions suivantes :

- i)*  $I(0) = 0$  et il existe  $\rho, \alpha > 0$  tel que  $I|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \alpha$ .
- ii)* Si  $X \subset E$  est de dimension finie, alors l'ensemble  $\{u \in X, I(u) \geq 0\}$  est borné.

Alors  $I$  possède une suite non bornée de valeurs critiques.

**Proposition 5.3.9** Sous les hypothèses du théorème 5.3.8 :

- i)* la suite  $(c_j)_j$  des points critiques est croissante et  $c_j \geq \alpha$ ,
- ii)*  $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j = +\infty$ .

## 5.4 Théorie spectrale d'un opérateur compact

Nous résumons dans cette section, les propriétés principales des opérateurs compacts qui nous seront utiles dans le chapitre suivant. Voir [33, 51] pour plus de détails.

**Définition 5.4.1** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. Un opérateur  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  est compact si  $T(B_E)$  est relativement compact et on désigne par  $\mathcal{K}(E, F)$  l'ensemble des opérateurs compacts et on pose  $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$ .

**Définition 5.4.2** Soit  $T \in \mathcal{L}(E)$ , l'ensemble résolvant est

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (T - \lambda I) \text{ est bijectif de } E \text{ sur } E\}.$$

Le spectre  $\sigma(T)$  est le complémentaire de  $\rho(T)$ .  $N(T - \lambda I)$  est l'espace propre associé à  $\lambda$ .

**Lemme 5.4.3** Soient  $T \in \mathcal{K}(E)$  et  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  une suite distincte telles que

$$\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\}, \forall n, \text{ et } \lambda_n \rightarrow \lambda.$$

Alors,  $\lambda = 0$ .

**Démonstration.** Soit  $\lambda_n$  une valeur propre de  $T$  et  $e_n \neq 0$  tel que  $(T - \lambda_n)e_n = 0$  et soit  $E_n = \langle \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \rangle$ . On montre que  $E_n \subset E_{n+1}$ ,  $E_n \neq E_{n+1}$ , pour cela, il suffit de vérifier que  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sont linéairement indépendants, pour tout  $n$ . Admettant que ceci est vrai jusqu'à l'ordre  $n$  et supposons que  $e_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ , alors

$$Te_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{n+1} e_i.$$

Par suite,  $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  et donc  $\alpha_i = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Ce qui est absurde. D'autre part on a  $(T - \lambda_n)E_n \subset E_{n-1}$ . En appliquant le théorème de Riez, on construit une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  telles que  $u_n \in E_n$ ,  $\|u_n\| = 1$  et  $\text{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$  pour  $n \geq 2$ . Soient  $2 \leq m < n$  de sorte que  $E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n$ . On a

$$\left\| \frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m} \right\| = \left\| \frac{Tu_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m} + u_n - u_m \right\| \geq \text{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Si  $\lambda_n \rightarrow \lambda \neq 0$  alors  $(Tu_n)_{n \geq 1}$  admet une sous suite convergente, ce qui contredit l'inégalité ci dessus.  $\square$

**Proposition 5.4.4** Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur autoadjoint. On pose

$$m = \inf_{\|u\|=1} \langle Tu, u \rangle \text{ et } M = \sup_{\|u\|=1} \langle Tu, u \rangle.$$

Alors,  $\sigma(T) \subset [m, M]$ .

**Démonstration.** Soit  $\lambda > M$ , montrons que  $\lambda \in \rho(T)$ .

On a  $\langle Tu, u \rangle \leq M\|u\|^2$ ,  $\forall u \in H$ . Par conséquent,

$$\langle \lambda u - Tu, u \rangle \geq (\lambda - M)\|u\|^2 = \alpha\|u\|^2, \quad \alpha > 0.$$

D'après le théorème de Lax-Milgram,  $(\lambda I - T)$  est bijectif.

Montrons que  $M \in \sigma(T)$ . Soit  $a(u, v) = \langle Mu - Tu, v \rangle$ , alors  $a(u, v)$  est une forme bilinéaire, symétrique positive. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$|\langle Mu - Tu, v \rangle| \leq \langle Mu - Tu, u \rangle^{\frac{1}{2}} \langle Mv - Tv, v \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in H.$$

En particulier,

$$\|Mu - Tu\| \leq c \langle Mu - Tu, u \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H.$$

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite telles que  $\|u_n\| = 1$  et  $\langle Tu_n, u_n \rangle \rightarrow M$ . Alors d'après l'inégalité précédente, on a  $\|Mu_n - Tu_n\| \rightarrow 0$ . Si  $u_n \in \rho(T)$  alors  $u_n = (MI - T)^{-1}(Mu_n - Tu_n) \rightarrow 0$ , ce qui contredit le fait que  $\|u_n\| = 1$ . Donc  $M \in \sigma(T)$ . En remplaçant  $T$  par  $-T$ , on obtient que  $m \in \sigma(T)$ .  $\square$

**Corollaire 5.4.5** Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur autoadjoint tel que  $\sigma(T) = \{0\}$ , alors  $T = 0$ .

**Démonstration.** D'après la proposition précédente, on a  $\langle Tu, u \rangle = 0$ ,  $\forall u \in H$ .

Alors,  $2\langle Tu, v \rangle = \langle T(u+v), u+v \rangle - \langle Tu, u \rangle - \langle Tv, v \rangle = 0$ ,  $\forall u, v \in H$ . Donc  $T = 0$ .  $\square$

**Théorème 5.4.6** Soit  $T$  un opérateur compact autoadjoint et  $E = H$  un espace de Hilbert séparable. Alors  $H$  admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de  $T$ .

**Démonstration.** Posons  $E_0 = N(T)$  et  $E_n = N(T - \lambda_n I)$  et montrons dans la suite que  $H$  est somme hilbertienne des  $(E_n)_{n \geq 0}$ .

Soient  $u \in E_m$  et  $v \in E_n$ ,  $m \neq n$ , alors

$$\langle Tu, v \rangle = \lambda_m \langle u, v \rangle = \langle u, Tv \rangle = \lambda_n \langle u, v \rangle,$$

donc  $\langle u, v \rangle = 0$  et par suite les  $(E_n)_{n \geq 0}$  sont deux à deux orthogonaux.

Soit  $F$  l'espace vectoriel engendré par les  $(E_n)_{n \geq 0}$ , vérifions que  $F$  est dense dans  $H$ .

On a  $T(F^\perp) \subset F^\perp$  : Soient  $u \in F^\perp$  et  $v \in F$ , alors  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle = 0$  car  $T(F) \subset F$ .

L'opérateur  $T_0 \equiv T|_{F^\perp}$  est compact autoadjoint et on a  $\sigma(T_0) = 0$  : supposons qu'on a  $\lambda \in \sigma(T_0) \setminus \{0\}$  alors  $\lambda$  est une valeur propre de  $T_0$ , donc il existe  $u \in F^\perp$ ,  $u \neq 0$  tel que  $T_0 u = \lambda u$ . Par conséquent,  $u \in F^\perp \cap E_n$  donc  $u = 0$ , ce qui est absurde.

D'après le corollaire 5.4.5, on a  $T_0 = 0$ , et par suite

$$F^\perp \subset N(T) \subset F \text{ et } F^\perp = \{0\}.$$

Donc  $F$  est dense dans  $H$ .  $\square$

# Chapitre 6

## Problème de Dirichlet pour des EDP semilinéaires sur le groupe de Heisenberg

### 6.1 Rappel des résultats classiques

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude du problème de Dirichlet semilinéaire sous critique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^d} u - \mu V u = \lambda u + |u|^{p-2} u & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

où  $V$  est un potentiel positif admettant une singularité sur  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{H}^d$ ,  $\lambda$  est une constante réelle et  $2 < p < 2^*$  avec  $2^* \equiv \frac{2Q}{Q-2} = 2 + \frac{2}{d}$  est l'indice critique de l'inégalité de Sobolev (2.4.1) :

$$\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|u\|_{H^1(\Omega, \mathbb{H}^d)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d).$$

Le potentiel  $V$  est contrôlé par l'inégalité de Hardy suivante :

$$\int_{\Omega} V(z, s) |u(z, s)|^2 dz ds \leq \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d). \quad (6.2)$$

On a vu dans le chapitre 4, que cette inégalité est valable pour

$$\begin{aligned} V(z, s) &= \frac{d^4}{(d+1)^2} \rho(z, s)^{-2} & \text{si } 0 \in \Omega, \\ V(z, s) &= d^2 \frac{|z|^2}{\rho(z, s)^4} & \text{si } 0 \in \Omega, \\ V(z, s) &= \bar{\mu} \rho_c(z, s)^{-2}, \end{aligned}$$

où  $\rho_c$  est la distance par rapport à une sous variété de co-dimension  $\geq 2$  et  $\bar{\mu}$  est une constante.

Rappelons que dans le cas classique, le potentiel  $V$  est donné par  $V(x) = \frac{1}{|x|^2}$ , et il est contrôlé par l'inégalité de Hardy :

$$\left(\frac{d-2}{2}\right)^2 \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \quad (6.3)$$

et que l'analogie du problème de Dirichlet (6.1) dans  $\mathbb{R}^d$ , s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} = \lambda u + |u|^{p-2}u & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$  est un ouvert borné contenant 0 et dont le bord  $\partial\Omega$  est régulier. On note par  $2^* = \frac{2d}{d-2}$  l'indice critique de l'inégalité de Sobolev classique et par  $\bar{\mu} = \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2$  la constante de Hardy dans  $\mathbb{R}^d$ .

Si  $\mu = 0$  et  $p = 2^*$ , on retrouve le cas traité dans l'article célèbre de Brézis et Nirenberg [37], à savoir le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

**Théorème 6.1.1** *Notons par  $\lambda_1$  la première valeur propre de  $-\Delta$  dans  $\Omega$ . Alors,*

- i) si  $d \geq 4$  et  $\lambda \in ]0, \lambda_1[$ , le problème (6.5) admet une solution positive,*
- ii) si  $d = 3$ , il existe une constante  $\lambda^* > 0$  telle que si  $\frac{1}{4}\lambda^* < \lambda < \lambda_1$ , le problème (6.5) admet une solution positive.*

Brézis et Nirenberg abordent le problème (6.5) via la recherche des points critiques non triviaux de la fonctionnelle d'Euler-Lagrange

$$I_{\lambda}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx.$$

Un autre point de vue consiste à trouver les points critiques de la fonctionnelle

$$J_{\lambda}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx$$

sur la sphère  $\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} = 1$ . Ils montrent que s'il existe  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$Q_{\lambda} = \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \lambda \|u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^{2^*}}^2} < S_0 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^{2^*}}^2} = \min_{u \in H_0^1(\mathbb{R}^d)} \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^{2^*}}^2},$$

alors le problème (6.5) admet une solution. En effet le lemme de Lieb montre que

$$S_{\lambda} = \inf_{\{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} = 1\}} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx \right)$$

est atteint sous la condition que  $S_\lambda < S_0$ . En utilisant une idée introduite par Aubin [8] dans le contexte de la conjecture du théorème de Yamabe, on estime  $Q_\lambda$  par des fonctions

$$u_\varepsilon(x) = \varphi(x) U_\varepsilon(x_0, x), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, x_0 \in \Omega, \varphi(x) \in H_0^1(\Omega),$$

où  $U_\varepsilon(x_0, x) = \frac{(\varepsilon d(d-2))^{(d-2)/4}}{(\varepsilon + |x - x_0|^2)^{(d-2)/2}}$  sont les fonctions extrémales de l'inégalité de Sobolev dans  $\mathbb{R}^d$ . Dans le cas  $d = 3$ , la difficulté de la démonstration provient du fait que l'injection  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^{2^*}(\Omega)$  est continue mais pas compacte et pour contourner cette difficulté, Brézis et Nirenberg introduisent une condition importante sur le niveau correspondant à l'énergie des suites de Palais-Smale qui garantit leur compacité relative. En fait, si  $(u_n)$  est une suite de Palais-Smale pour la fonctionnelle  $I_\lambda(u)$  satisfaisant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_\lambda(u_n) < \frac{1}{d} S_0^{d/2},$$

alors  $(u_n)$  est relativement compacte, ce qui entraîne l'existence des points critiques non triviaux de  $I_\lambda$  en utilisant un théorème d'Ambrosetti- Rabinowitz.

Si  $\mu > 0$  et  $\mathbf{p} = 2^*$ , on peut citer les résultats suivants :

### **Théorème 6.1.2 [99, Jannelli]**

Si  $d \geq 3$  et  $\mu \leq \bar{\mu} - 1$ , le problème (6.1) admet au moins une solution  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$  pour tout  $\lambda \in ]0, \lambda_1[$ ,  $\lambda_1$  étant la première valeur propre de l'opérateur  $-\Delta - \mu V$ .

L'outil de la démonstration de ce théorème est analogue à celui développé dans l'article [37], en montrant que s'il existe  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$  tel que

$$Q_{\lambda, \mu} = \frac{\int_\Omega [|\nabla u|^2 - \mu V(x)|u|^2] dx - \lambda \|u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^{2^*}}^2} < S = \min_{u \in H_0^1(\mathbb{R}^d)} \frac{\int_\Omega [|\nabla u|^2 - \mu V(x)|u|^2] dx}{\|u\|_{L^{2^*}}^2},$$

alors le problème (6.1) admet une solution. L'idée est d'estimer  $Q_{\lambda, \mu}$  par des fonctions

$$u_\varepsilon(x) = \varphi(x) U_\varepsilon(x), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \varphi(x) \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

avec  $U_\varepsilon(x) = C_\varepsilon \left( \varepsilon |x|^{\gamma'/\sqrt{\bar{\mu}}} + |x|^{\gamma/\sqrt{\bar{\mu}}} \right)^{-\sqrt{\bar{\mu}}}$ , où  $\gamma = \sqrt{\bar{\mu}} + \sqrt{\bar{\mu} - \mu}$  et  $\gamma' = \sqrt{\bar{\mu}} - \sqrt{\bar{\mu} - \mu}$ .

### **Théorème 6.1.3 [53, Chen]**

Si  $d \geq 7$  et  $0 \leq \mu < \bar{\mu} - 4$ , alors le problème (6.1) admet une solution non triviale pour tout  $\lambda > 0$ .

Dans le cas où  $2 < \mathbf{p} < 2^*$ , S. Weng et Y. Li [154] ont montré le théorème suivant,

**Théorème 6.1.4** Si  $0 \leq \mu < \bar{\mu}$ , le problème (6.1) admet une solution non triviale pour tout  $\lambda > 0$  et une solution positive pour  $\lambda \in ]0, \lambda_1[$ ,  $\lambda_1$  étant la première valeur propre de l'opérateur  $-\Delta - \mu V$  et  $\bar{\mu}$  la meilleure constante de Hardy dans (6.3).

L'outil de la démonstration de ces deux derniers théorèmes est basé, d'une part, sur l'étude spectrale de l'opérateur  $-\Delta - \frac{\mu}{|x|^2}$  avec la condition de Dirichlet au bord : le spectre

$\sigma_\mu$  est discret et contient une infinité de valeurs propres  $\lambda_k$  ( $k \geq 1$ ), telles que  $\lambda_k \rightarrow +\infty$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , et d'autre part sur la recherche des points critiques de la fonctionnelle

$$I_{\mu,\lambda}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 - \mu V(x)|u|^2] dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx.$$

Dans le cas où  $p = 2^*$ , la difficulté principale est le défaut de compacité, et pour y remédier, J. Chen utilise une forme déguisée de compacité : la condition de Palais-Smale (*PS*). Cette condition empêche les points critiques de  $I_{\mu,\lambda}$  de "fuir à l'infini". Cependant, la condition (*PS*) est trop forte, c'est à dire qu'il existe des suites non relativement compactes pour lesquelles  $I_{\mu,\lambda}$  reste bornée et sa dérivée tend vers zéro. Aussi,  $I_{\mu,\lambda}$  peut atteindre son minimum sans vérifier la condition (*PS*). En introduisant, alors, une condition plus faible notée (*PS*)<sub>c</sub>, J. Chen montre l'existence des solutions en appliquant un théorème de Rabinowitz.

On va utiliser dans ce chapitre, la théorie du point critique énoncée dans le chapitre 5 et pour cela on commence par étudier la fonctionnelle énergie associée au problème (6.1).

## 6.2 Équation d'Euler-Lagrange

On définit sur  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , la norme suivante

$$\|u\|_\mu = \left[ \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 - \mu V(z, s)|u(z, s)|^2 dz ds \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.6)$$

**Proposition 6.2.1** *Si  $0 \leq \mu < 1$ , la norme  $\|\cdot\|_\mu$  est équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)}$ .*

**Démonstration.** On a d'une part,

$$\begin{aligned} \|u\|_\mu &\leq \left( \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 dz ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)}. \end{aligned}$$

D'autre part, on constate grâce à l'inégalité de Hardy (6.2) et à l'inégalité de Poincaré (2.14) que :

$$\begin{aligned} \|u\|_\mu^2 &= \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 - \mu V(z, s)|u(z, s)|^2 dz ds \\ &\geq \int_{\Omega} (1 - \mu) |\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 dz ds \\ &\geq (1 - \mu) C_\Omega^2 \|u\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)}^2. \end{aligned}$$

□

La fonctionnelle d'énergie associée au problème (6.1) s'écrit

$$\begin{aligned} I_{\mu,\lambda}(u) &\equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 - \mu V(z, s)|u(z, s)|^2] dz ds \\ &\quad - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u(z, s)|^p dz ds - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u(z, s)|^2 dz ds, \end{aligned} \quad (6.7)$$

pour tout  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ .

**Proposition 6.2.2**  $I_{\mu,\lambda}$  est bien définie sur  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  et appartient à  $C^1(H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d); \mathbb{R})$ . De plus, on a pour tout  $v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ ,

$$\begin{aligned} \langle I'_{\mu,\lambda}(u), v \rangle &= \int_{\Omega} \left[ \nabla_{\mathbb{H}^d} u \overline{\nabla_{\mathbb{H}^d} v(z, s)} - \mu V(z, s) u(z, s) \overline{v(z, s)} \right] dz ds \\ &\quad - \int_{\Omega} |u(z, s)|^{p-2} u(z, s) \overline{v(z, s)} dz ds - \lambda \int_{\Omega} u(z, s) \overline{v(z, s)} dz ds. \end{aligned} \quad (6.8)$$

**Démonstration.**

i)  $I_{\mu,\lambda} : H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue : grâce à l'inégalité de Poincaré (2.14) et à l'inclusion compacte (2.3.1), on a

$$\begin{aligned} |I_{\mu,\lambda}(u)| &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| |\nabla_{\mathbb{H}^d} u(z, s)|^2 - \mu V(z, s) |u(z, s)|^2 \right| dz ds \\ &\quad + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u(z, s)|^p dz ds + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u(z, s)|^2 dz ds, \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|_{\mu}^2 + \frac{1}{p} \frac{C_{\Omega}^p}{(1-\mu)^{\frac{p}{2}}} \|u\|_{\mu}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)}^2. \end{aligned}$$

ii)  $I_{\mu,\lambda}$  est Gâteaux différentiable en  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  : soient  $u, v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  et  $f$  une fonction définie pour  $\theta \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} f(\theta) &:= |u + \theta v|^p = \left[ |u + \theta v|^2 \right]^{\frac{p}{2}} \\ &= \left[ |u|^2 + 2\theta u \bar{v} + \theta^2 |v|^2 \right]^{\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

Comme  $f'(\theta) = \frac{p}{2} |u + \theta v|^{p-2} [2u \bar{v} + 2\theta |v|^2]$ , alors

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{|u + \theta v|^p - |u|^p}{\theta} =: f'(0) = p |u|^{p-2} u \bar{v}.$$

D'autre part, on a par convexité,

$$|u + \theta v|^p \leq (1 - \theta) |u|^p + \theta |u + v|^p,$$

alors,

$$\frac{|u + \theta v|^p - |u|^p}{\theta} \leq |u + v|^p - |u|^p \in L^1(\Omega).$$

Grâce au théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \frac{|u + \theta v|^p - |u|^p}{\theta} dz ds = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \bar{v} dz ds,$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{I_{\mu,\lambda}(u + \theta v) - I_{\mu,\lambda}(u)}{\theta} &= \int_{\Omega} \left[ \nabla_{\mathbb{H}^d} u \overline{\nabla_{\mathbb{H}^d} v} - \mu V(z, s) u \bar{v} \right] dz ds \\ &\quad - \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \bar{v} dz ds - \lambda \int_{\Omega} u \bar{v} dz ds. \end{aligned}$$

Notons par

$$\langle l, v \rangle \equiv \int_{\Omega} \left[ \nabla_{\mathbb{H}^d} u \overline{\nabla_{\mathbb{H}^d} v} - \mu V(z, s) u \bar{v} \right] dz ds - \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \bar{v} dz ds - \lambda \int_{\Omega} u \bar{v} dz ds.$$

Grâce à l'inégalité de Hardy (6.2) et à l'inégalité de Poincaré (2.14), on a

$$\left| \int_{\Omega} \nabla_{\mathbb{H}^d} u \overline{\nabla_{\mathbb{H}^d} v} - \mu V(z, s) u \bar{v} dz ds \right| \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)} \|v\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)}.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left| \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \bar{v} dz ds + \lambda \int_{\Omega} u \bar{v} dz ds \right| \leq C' \left[ \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{L^p(\Omega)} + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right], \quad (6.9)$$

puis en utilisant l'inégalité de Sobolev (2.4.1) et l'inclusion compacte (2.10) sur (6.9), on déduit qu'il existe une constante  $c > 0$  tel que  $|\langle l, v \rangle| \leq c \|u\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)} \|v\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)}$ .

D'après la proposition (5.1.2),  $I_{\mu, \lambda}$  est Fréchet différentiable et sa dérivée est  $l = I'_{\mu, \lambda}(u)$ .  
□

**Définition 6.2.3** On dit que  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  est une solution faible du problème de Dirichlet (6.1), si pour tout  $v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , on a

$$\int_{\Omega} \left[ \nabla_{\mathbb{H}^d} u \overline{\nabla_{\mathbb{H}^d} v} - \mu V(z, s) u \bar{v} \right] dz ds - \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \bar{v} dz ds - \lambda \int_{\Omega} u \bar{v} dz ds = 0.$$

**Corollaire 6.2.4** D'après la définition (5.1.3) du chapitre 5, une solution faible du problème de Dirichlet (6.1) est un point critique de  $I_{\mu, \lambda}$  et on a

$$\int_{\Omega} \left[ \nabla_{\mathbb{H}^d} u \overline{\nabla_{\mathbb{H}^d} v} - \mu V(z, s) u \bar{v} \right] dz ds - \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \bar{v} dz ds - \lambda \int_{\Omega} u \bar{v} dz ds = 0,$$

pour tout  $v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ .

**Démonstration.** Soit  $u$  un point critique de  $I_{\mu, \lambda}$ . Si on prend  $v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d)$  dans l'égalité  $\langle I'_{\mu, \lambda}(u), v \rangle = 0$ , alors, d'après la définition 6.2.3,  $u$  est solution du problème au sens des distributions. Réciproquement, si  $u$  est une telle solution, c'est à dire si

$$\langle -\Delta_{\mathbb{H}^d} u - \mu V u, \varphi \rangle = \langle \lambda u + |u|^{p-2} u, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d),$$

on obtient

$$\int_{\Omega} \left[ \nabla_{\mathbb{H}^d} u \overline{\nabla_{\mathbb{H}^d} \varphi} - \mu V(z, s) u \bar{\varphi} \right] dz ds = \int_{\Omega} \left[ \lambda u \bar{\varphi} + |u|^{p-2} u \bar{\varphi} \right] dz ds,$$

et on conclut grâce à la densité de  $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d)$  dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ . □

### 6.3 La condition de Palais-Smale

Résoudre le problème de Dirichlet (6.1) est équivalent à trouver des points critiques de  $I_{\mu,\lambda}$ , c'est-à-dire des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange  $I_{\mu,\lambda}$ . Quand on minimise une telle fonctionnelle, l'ingrédient essentiel est la compacité relative, pour une certaine topologie, des suites minimisantes. La condition de Palais-Smale joue un rôle assez semblable pour des suites sur lesquelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle, et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition a priori, à vérifier au cas par cas sur chaque fonctionnelle, indépendamment de l'existence ou non de valeurs critiques. Elle sera par contre un ingrédient essentiel pour montrer cette existence dans un certain nombre de cas.

**Proposition 6.3.1** *Supposons que  $0 \leq \mu < 1$ ,  $\lambda > 0$  et  $c \in \mathbb{R}$ . Chaque suite  $\{u_n\}_n \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  qui vérifie*

$$I_{\mu,\lambda}(u_n) \rightarrow c \quad \text{et} \quad \|I'_{\mu,\lambda}(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega, \mathbb{H}^d)} \rightarrow 0, \quad (6.10)$$

est bornée dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ .

**Démonstration.** On utilise comme norme dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  la norme équivalente

$$\|u\|_\mu = \left( \int_\Omega \left[ |\nabla_{\mathbb{H}^d} u|^2 - \mu V(z, s)|u|^2 \right] dz ds \right)^{1/2} \approx \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}$$

Soit  $\{u_n\}_n \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  une suite qui vérifie les hypothèses de la proposition 6.3.1, alors

$$\frac{1}{2} \|u_n\|_\mu^2 - \frac{1}{p} \|u_n\|_{L^p(\Omega)}^p - \frac{\lambda}{2} \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow c, \quad (6.11)$$

et

$$\begin{aligned} \langle I'_{\mu,\lambda}(u_n), \varphi \rangle &:= \int_\Omega \left[ \nabla_{\mathbb{H}^d} u_n \nabla_{\mathbb{H}^d} \bar{\varphi} - \mu V(z, s) u_n \bar{\varphi} \right] dz ds - \int_\Omega (|u_n|^{p-2} u_n + \lambda u_n) \bar{\varphi} dz ds \\ &= o(1) \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

On suppose que  $\{u_n\}_n$  est non bornée dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , c.à.d.  $\|\nabla_{\mathbb{H}^d} u_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow +\infty$ , et on note  $w_n = \frac{u_n}{\|\nabla_{\mathbb{H}^d} u_n\|_{L^2(\Omega)}}$ . Comme  $\|\nabla_{\mathbb{H}^d} w_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ , il existe alors  $w \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  et une sous suite, notée encore  $\{w_n\}_n$  telle que  $w_n \rightharpoonup w$  dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ . D'autre part, on peut écrire pour  $q = 2\nu + 2^*(1 - \nu)$  avec  $0 < \nu < 1$ ,

$$\|w_n - w\|_{L^q(\Omega)}^q \leq \|w_n - w\|_{L^2(\Omega)}^{2\nu} \|w_n - w\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*(1-\nu)}.$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev (2.3.5) et l'inclusion compacte (2.3.1), on obtient

$$w_n \rightarrow w \quad \text{dans} \quad L^q(\Omega) \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq q < 2^*,$$

ce qui implique que pour  $2 < p < 2^*$ , on a la convergence suivante

$$\int_\Omega |w_n|^{p-2} w_n \bar{\varphi} dz ds \rightarrow \int_\Omega |w|^{p-2} w \bar{\varphi} dz ds, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d)$$

En divisant (6.12) par  $\|\nabla_{\mathbb{H}^d} u_n\|_{L^2(\Omega)}$ , on obtient pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d)$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \nabla_{\mathbb{H}^d} w_n \overline{\nabla_{\mathbb{H}^d} \varphi} - \mu V(z, s) w_n \overline{\varphi} \right] dz ds - \int_{\Omega} |u_n|^{p-2} w_n \overline{\varphi} dz ds - \lambda \int_{\Omega} w_n \overline{\varphi} dz ds \\ &= \frac{o(1)}{\|\nabla_{\mathbb{H}^d} u_n\|_{L^2(\Omega)}} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Par passage à la limite dans (6.13), il vient que pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d)$ ,

$$\int_{\Omega} \left[ \nabla_{\mathbb{H}^d} w \overline{\nabla_{\mathbb{H}^d} \varphi} - \mu V(z, s) w \overline{\varphi} \right] dz ds - \lambda \int_{\Omega} w \overline{\varphi} dz ds = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |u_n|^{p-2} w_n \overline{\varphi} dz ds,$$

et en remarquant que

$$\int_{\Omega} |w_n|^{p-2} w_n \overline{\varphi} dz ds = \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u_n\|_{L^2(\Omega)}^{2-p} \int_{\Omega} |u_n|^{p-2} w_n \overline{\varphi} dz ds,$$

on en déduit

$$\int_{\Omega} |w|^{p-2} w \overline{\varphi} dz ds = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d).$$

Alors  $w = 0$  dans  $\Omega$  et par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |w_n|^2 dz ds = \int_{\Omega} |w|^2 dz ds = 0.$$

D'autre part, en divisant (6.11) par  $\|\nabla_{\mathbb{H}^d} u_n\|_{L^2(\Omega)}^2$ , on obtient

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} [ |\nabla_{\mathbb{H}^d} w_n|^2 - \mu V(z, s) |w_n|^2 ] dz ds - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u_n|^{p-2} |w_n|^2 dz ds - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |w_n|^2 dz ds = o(1), \quad (6.14)$$

avec

$$o(1) = \frac{c}{\|\nabla_{\mathbb{H}^d} u_n\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Par passage à la limite dans (6.14), on obtient

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \mu V(z, s) |w_n|^2 dz ds = \frac{1}{p} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |u_n|^{p-2} |w_n|^2 dz ds. \quad (6.15)$$

En remplaçant  $\varphi$  par  $w_n$  dans (6.13), on trouve

$$1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \mu V(z, s) |w_n|^2 dz ds = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |u_n|^{p-2} |w_n|^2 dz ds, \quad (6.16)$$

et en multipliant (6.15) par  $p$ , on obtient de (6.16) et de l'inégalité de Hardy (6.2),

$$\begin{aligned} \frac{p}{2} - 1 &= \left(\frac{p}{2} - 1\right) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \mu V(z, s) |w_n|^2 dz ds \\ &\leq \left(\frac{p}{2} - 1\right) \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^d} w_n|^2 dz ds \\ &\leq \left(\frac{p}{2} - 1\right) \mu, \end{aligned}$$

ce qui est impossible car  $\mu < 1$  et  $p > 2$ . Par conséquent  $\{u_n\}_n$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ .

□

**Proposition 6.3.2** *Sous les hypothèses 6.3.1,  $\{u_n\}_n$  possède une sous suite convergente dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ .*

**Démonstration.** Comme  $\{u_n\}_n$  est une suite bornée dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , il existe  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  tel que pour tout  $2 < p < 2^*$ , on a

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d), \\ u_n &\rightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega), \\ |u_n|^{p-2}u_n &\rightarrow |u|^{p-2}u \text{ dans } L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega). \end{aligned}$$

Par passage à la limite dans (6.12), on a

$$\langle I'_{\mu,\lambda}(u), \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d).$$

Comme  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , alors

$$I'_{\mu,\lambda}(u_n) \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega, \mathbb{H}^d),$$

ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle I'_{\mu,\lambda}(u_n) - I'_{\mu,\lambda}(u), u_n - u \rangle = 0.$$

En écrivant la norme dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  comme suit :

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_\mu^2 &= \langle I'_{\mu,\lambda}(u_n) - I'_{\mu,\lambda}(u), u_n - u \rangle \\ &\quad + \int_\Omega (|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u) \overline{(u_n - u)} \, dzds + \lambda \int_\Omega |u_n - u|^2 \, dzds, \end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder à

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u) \overline{(u_n - u)} \, dzds \\ &\leq \| |u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u \|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

on obtient que  $\|u_n - u\|_\mu^2 \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow +\infty$ . □

Comme la suite  $\{u_n\}_n$  satisfait les propositions 6.3.1 et 6.3.2, alors la fonctionnelle  $I_{\mu,\lambda}$  vérifie la condition de Palais-Smale au niveau critique  $c$ .

## 6.4 Étude spectrale du problème

Comme dans le cas classique, on doit passer par l'étude spectrale de l'opérateur  $-\Delta_{\mathbb{H}^d} - \mu V$ , et on a le résultat suivant :

**Proposition 6.4.1** *Si  $0 \leq \mu < 1$ , alors il existe  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \rightarrow +\infty$ , tel que pour chaque  $k \geq 1$ , le problème de Dirichlet suivant*

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^d} \phi_k - \mu V \phi_k = \lambda_k \phi_k & \text{dans } \Omega \\ \phi_k|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

*admet une solution non triviale dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ . De plus,  $\{\phi_k\}_{k \geq 1}$  constitue une base orthonormale de l'espace de Hilbert  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ . La première valeur propre  $\lambda_{1,\mu} := \lambda_1$  est caractérisée par l'inégalité suivante :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{1,\mu}} \int_{\Omega} (|\nabla_{\mathbb{H}^d} u|^2 - \mu V |u|^2) dz ds, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d). \quad (6.18)$$

**Démonstration.** Notons par  $L_\mu = -\Delta_{\mathbb{H}^d} u - \mu V$  l'opérateur défini sur l'espace de Hilbert  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  muni de la norme  $\|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}$ . L'inégalité de Hardy (6.2) implique que

$$(L_\mu u, u)_{L^2(\Omega)} \geq (1 - \mu) \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)}^2 > 0 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d),$$

et

$$(L_\mu u, v) = (u, L_\mu v), \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d).$$

Donc  $L_\mu$  est un opérateur autoadjoint défini positif sur  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ . Le théorème de Lax-Milgram implique que pour tout  $g \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{H}^d)$ , le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} L_\mu u = g & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ . Comme  $H^{-1}(\Omega; \mathbb{H}^d)$  est l'espace dual de  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ , alors  $g \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{H}^d)$  et il existe  $C > 0$  tel que

$$|\langle g, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{H}^d),$$

muni de la norme

$$\|g\|_{H^{-1}(\Omega; \mathbb{H}^d)} = \sup_{\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)} \frac{|\langle g, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)}}.$$

Comme  $\Delta_{\mathbb{H}^d} : H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d) \rightarrow H^{-1}(\Omega; \mathbb{H}^d)$  est continue, alors l'opérateur inverse  $L_\mu^{-1}$  de  $L_\mu$  définit une application continue de  $H^{-1}(\Omega; \mathbb{H}^d)$  dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ .

En utilisant le fait que l'injection  $i : H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d) \rightarrow L^2(\Omega)$  est compacte et l'inclusion  $i^* : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega; \mathbb{H}^d)$  est continue, on déduit que l'opérateur  $K_\mu = L_\mu^{-1} \circ i^* \circ i : H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d) \rightarrow H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  est compact et autoadjoint. Ainsi d'après le corollaire 5.4.3 et le théorème 5.4.6 du chapitre 5,  $H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  admet une base orthonormale  $(\phi_k)_{k \geq 1}$  constituée de vecteurs propres de  $K_\mu$  associés à des valeurs propres  $(\eta_k)_{k \geq 1}$  telles que  $\eta_k > 0$  et  $\eta_k \rightarrow 0$ .

Par suite, on a  $L_\mu \phi_k = \lambda_k \phi_k$  avec  $\lambda_k = \frac{1}{\eta_k} \rightarrow +\infty$ .  $\square$

## 6.5 Existence d'un point critique dans le cas où $0 < \lambda < \lambda_{1,\mu}$

On va montrer que la fonctionnelle  $I_{\mu,\lambda}$  admet un point critique dans le cas où  $0 < \lambda < \lambda_{1,\mu}$ . La démonstration est basée sur le théorème du col du chapitre 5.

**Proposition 6.5.1**  $I_{\mu,\lambda}$  satisfait les conditions suivantes

- i) il existe  $R > 0$  et  $a > 0$  tel que  $\|u\|_\mu = R$  alors  $I_{\mu,\lambda}(u) \geq a$ ,
- ii) il existe  $e \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  tel que  $\|e\|_\mu > R$  et  $I_{\mu,\lambda}(e) < a$ .

Si  $I_{\mu,\lambda}$  satisfait  $(PS)_c$  avec

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\mu,\lambda}(h(t)), \quad (6.19)$$

où

$$\Gamma = \{ h \in C([0, 1]; H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)); h(0) = 0 \text{ et } h(1) = e \}, \quad (6.20)$$

alors  $c$  est une valeur critique de  $I_{\mu,\lambda}$  et  $c \geq a$ .

**Démonstration.** D'après la proposition (6.2.2),  $I_{\mu,\lambda} \in C^1(H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d); \mathbb{R})$  et  $I_{\mu,\lambda}(0) = 0$ . L'inégalité de Hardy (6.2) et l'inégalité de Sobolev (2.3.5) nous permettent d'écrire que pour tout  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$ ,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla_{\mathbb{H}^d} u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{(1-\mu)^{1/2}} \|u\|_\mu. \quad (6.21)$$

Donc on a pour  $\lambda \in ]0, \lambda_{1,\mu}[$ ,

$$\begin{aligned} I_{\mu,\lambda}(u) &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{1,\mu}}\right) \|u\|_\mu^2 - \frac{C_1}{p} \|u\|_\mu^p \\ &\geq C_1 \|u\|_\mu^2 \left( \frac{1}{2C_1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{1,\mu}}\right) - \frac{1}{p} \|u\|_\mu^{p-2} \right), \end{aligned}$$

où

$$C_1 = \left( \frac{C_\Omega}{(1-\mu)^{1/2}} \right)^p > 1.$$

Posons

$$R_0 = \left( \frac{p}{2C_1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{1,\mu}}\right) \right)^{\frac{1}{p-2}} > 0,$$

alors pour tout  $R$  tel que  $0 < R < R_0$ , on a

$$\inf_{\|u\|_\mu=R} I_{\mu,\lambda}(u) = a(R) > 0. \quad (6.22)$$

Ainsi  $I_{\mu,\lambda}$  satisfait la condition i) du théorème 6.5.1. Soit  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  telle que  $\|u\|_\mu = R > 0$ . Pour tout  $\theta > 0$ , on a

$$I_{\mu,\lambda}(\theta u) = \frac{\theta^2}{2} \int_\Omega [ |\nabla_{\mathbb{H}^d} u|^2 - \mu V(z, s) |u|^2 ] dz ds - \frac{\theta^p}{p} \int_\Omega |u|^p dz ds - \frac{\lambda \theta^2}{2} \int_\Omega |u|^2 dz ds. \quad (6.23)$$

Comme  $p > 2$ , on déduit de (6.23) que  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} I_{\mu,\lambda}(\theta u) = -\infty$ . Par suite, il existe  $\theta_1 > 0$  assez grand tel que pour  $e = \theta_1 u$ , on a  $\|e\|_\mu > R$ ,  $I_{\mu,\lambda}(\theta_1 u) < 0 < a(R)$ . Ainsi  $I_{\mu,\lambda}$  satisfait la condition *ii*) du théorème 6.5.1.

Posons

$$\Gamma = \{ h \in C([0, 1]; H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)); h(0) = 0 \text{ et } h(1) = e \},$$

alors, on a par continuité

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I_{\mu,\lambda}(h(t)) \geq a(R) > 0,$$

par suite  $c$  est un minimum local. Supposons que  $I_{\mu,\lambda}$  satisfait la condition de Palais-Smale  $(PS)_c$ , alors d'après le théorème 5.2.11 du chapitre 5,  $c > 0$  est une valeur critique et  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  est une solution non triviale du problème de Dirichlet (6.1).  $\square$

## 6.6 Existence d'un point critique dans le cas où $\lambda \geq \lambda_{1,\mu}$

On va montrer que la fonctionnelle  $I_{\mu,\lambda}$  admet un point critique dans le cas où  $\lambda \geq \lambda_{1,\mu}$ . La démonstration est basée sur le théorème de Rabinowitz 5.3.4 du chapitre 5.

Supposons que pour un entier  $k \geq 1$ , on ait  $\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1}$ , où  $\lambda_k$  est la  $k$  ième valeur propre de l'opérateur  $-\Delta_{\mathbb{H}^d} - \mu V$ . Soit  $Y = \langle \{\phi_1, \dots, \phi_k\} \rangle$ , où  $\phi_k$  est la fonction propre associée à  $\lambda_k$ , alors la proposition 6.4.1 implique que

$$H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d) = Y \bigoplus X, \quad X = \langle \{\phi_l; l > k\} \rangle.$$

On en déduit ainsi que

$$\int_{\Omega} [|\nabla_{\mathbb{H}^d} y|^2 - \mu V(z, s)|y|^2] dzds \leq \lambda_k \int_{\Omega} |y|^2 dzds, \quad \forall y \in Y \quad (6.24)$$

et

$$\int_{\Omega} [|\nabla_{\mathbb{H}^d} u|^2 - \mu V(z, s)|u|^2] dzds \geq \lambda_{k+1} \int_{\Omega} |u|^2 dzds, \quad \forall u \in X. \quad (6.25)$$

**Proposition 6.6.1** *Supposons que  $0 \leq \mu < 1$  et  $\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1}$ . Alors, il existe  $\rho, \alpha > 0$  tel que*

$$I_{\mu,\lambda} \Big|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \alpha, \quad \text{où } X = \langle \{\phi_l; l > k\} \rangle.$$

**Démonstration.** Supposons que  $0 \leq \mu < 1$  et  $\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1}$  et soit  $u \in X$ . En utilisant l'équation (6.25), l'inégalité de Hardy (6.2) et l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$\begin{aligned} I_{\mu,\lambda}(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla_{\mathbb{H}^d} u|^2 - \mu V(z, s)|u|^2] dzds - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dzds - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dzds \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda}{\lambda_{k+1}} \|u\|_\mu^2 - \frac{C_1}{p} \|u\|_\mu^p \\ &\geq C_1 \|u\|_\mu^2 \left( \frac{1}{2C_1} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda}{\lambda_{k+1}} - \frac{1}{p} \|u\|_\mu^{p-2} \right). \end{aligned}$$

Posons  $\rho_0 = \left( \frac{p}{2C_1} \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}} \right) \right)^{\frac{1}{p-2}} > 0$ , alors pour tout  $0 < \rho < \rho_0$ , on a

$$\inf_{\{u \in X; \|u\|_\mu = \rho\}} I_{\mu,\lambda}(u) = \alpha(\rho) > 0. \quad (6.26)$$

□

**Proposition 6.6.2** *Supposons que  $0 \leq \mu < 1$  et  $\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1}$ . Alors  $I_{\mu,\lambda}$  vérifie la condition ii) du théorème 5.3.4 du chapitre 5, où  $e = \phi_{k+1}$  et  $Y = \langle \{\phi_1, \dots, \phi_k\} \rangle$ .*

**Démonstration.** Soient  $e = \phi_{k+1}$  la  $(k+1)$ -ième fonction propre de l'opérateur  $L_\mu$  et  $y \in Y$ . On va montrer le résultat suivant :

$$I_{\mu,\lambda}(y + \theta\phi_{k+1}) \rightarrow -\infty \text{ quand } \theta \rightarrow +\infty, \quad (6.27)$$

Soit  $y = \sum_{i=1}^k \alpha_i \phi_i \in Y$ . D'après l'équation (6.24), on a

$$\begin{aligned} I_{\mu,\lambda}(y) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ |\nabla_{\mathbb{H}^d} y|^2 - \mu V(z, s) |y|^2 \right] dz ds - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |y|^p dz ds - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |y|^2 dz ds \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k} \|y\|_\mu^2 - \frac{1}{p} \|y\|_{L^p(\Omega)}^p \leq 0. \end{aligned}$$

Soit  $\theta \geq 1$ , alors

$$\begin{aligned} I_{\mu,\lambda}(y + \theta\phi_{k+1}) &= I_{\mu,\lambda}(y) + I_{\mu,\lambda}(\theta\phi_{k+1}) \\ &\quad + \int_{\Omega} \left[ \nabla_{\mathbb{H}^d}(y) \overline{\nabla_{\mathbb{H}^d}(\theta\phi_{k+1})} - \mu V(z, s) y \overline{(\theta\phi_{k+1})} \right] dz ds \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} y \overline{(\theta\phi_{k+1})} dz ds - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |y + \theta\phi_{k+1}|^p dz ds \\ &\quad + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |y|^p dz ds + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\theta\phi_{k+1}|^p dz ds \\ &= I_{\mu,\lambda}(y) + I_{\mu,\lambda}(\theta\phi_{k+1}) - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |y + \theta\phi_{k+1}|^p dz ds \\ &\quad + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |y|^p dz ds + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\theta\phi_{k+1}|^p dz ds. \end{aligned}$$

Comme  $I_{\mu,\lambda}(y) \leq 0$  et grâce à l'inégalité suivante

$$|a + b|^p \geq |a|^p + |b|^p - c_p(|a|^{p-1}|b| + |a||b|^{p-1}), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad p > 1, \quad (6.28)$$

on déduit que

$$\begin{aligned}
I_{\mu,\lambda}(y + \theta\phi_{k+1}) &\leq I_{\mu,\lambda}(\theta\phi_{k+1}) + c_p \int_{\Omega} (|y|^{p-1}|\theta\phi_{k+1}| + |y| |\theta\phi_{k+1}|^{p-1}) dz ds \\
&\leq \frac{\theta^2}{2} \left( \|\phi_{k+1}\|_{\mu}^2 - \lambda \|\phi_{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) - \frac{\theta^p}{p} \|\phi_{k+1}\|_{L^p(\Omega)}^p \\
&\quad + c_p \int_{\Omega} (|y|^{p-1}|\theta\phi_{k+1}| + |y| |\theta\phi_{k+1}|^{p-1}) dz ds \\
&\leq \frac{\theta^2}{2} \left\{ (\lambda_{k+1} - \lambda) \|\phi_{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{2\theta^{p-2}}{p} \|\phi_{k+1}\|_{L^p(\Omega)}^p \right. \\
&\quad \left. + 2c_p \int_{\Omega} (\theta^{-1}|y|^{p-1}|\phi_{k+1}| + \theta^{p-3}|y| |\phi_{k+1}|^{p-1}) dz ds \right\}.
\end{aligned}$$

Comme  $p > 2$  et  $\|\phi_{k+1}\|_{L^p(\Omega)}^p > 0$ , on conclut que

$$I_{\mu,\lambda}(y + \theta\phi_{k+1}) \rightarrow -\infty \text{ quand } \theta \rightarrow +\infty.$$

Donc  $I_{\mu,\lambda}$  vérifie la remarque 5.3.5 et par conséquent, on a montré la proposition 6.6.2.  $\square$

La proposition 6.6.1 et la proposition 6.6.2 impliquent que si  $0 \leq \mu < 1$  et  $\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1}$ , alors  $I_{\mu,\lambda}$  satisfait les conditions du théorème 5.3.4 du chapitre 5. Si de plus  $I_{\mu,\lambda}$  vérifie la condition de Palais-Smale pour

$$\begin{aligned}
c &= \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in A} I_{\mu,\lambda}(h(u)), \\
\text{et } A &\equiv (\bar{B}_T \cap Y) \oplus \{\theta e, 0 < \theta < T\},
\end{aligned}$$

alors  $I_{\mu,\lambda}$  admet une valeur critique  $c$  et par la suite,  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{H}^d)$  est un point critique, tel que  $I_{\mu,\lambda}(u) = c \geq \alpha > 0$ .

# Annexe A

## Mesure de Haar

Ceci est un rappel de la mesure de Haar, on renvoie par exemple à [30, 69, 155] pour de plus amples détails.

Si  $M$  est un espace topologique localement compact, on identifiera mesures de Radon positives sur  $X$  et formes linéaires positives sur l'espace vectoriel  $\mathcal{C}_c(M)$  des fonctions continues à support compact sur  $X$ . Supposons qu'un tel espace soit muni d'une action à gauche d'un groupe  $G$ ; si  $g \in G$ , notons  $L_g : M \rightarrow M$  la translation à gauche sur  $M$ . Une mesure  $\mu$  sur  $m$  est dite invariante à gauche si l'on a  $(L_g)_*\mu = \mu$ , pour tout  $g \in G$ . Cela revient à dire que

$$\int_M f(gx) d\mu(x) = \int_M f(x) d\mu(x),$$

pour toute fonction continue à support compact  $f$  sur  $M$  et tout  $g \in G$ . Cela s'applique en particulier lorsque  $M = G$ , muni de ses deux actions par translation à gauche et à droite.

**Théorème A.0.3** *Soit  $G$  un groupe topologique compact. Il existe une unique mesure de probabilité invariante à gauche sur  $G$ . Cette mesure est aussi invariante à droite.*

En fait, on peut démontrer que tout groupe topologique localement compact possède une mesure invariante à gauche, unique à un scalaire près, qu'on appelle mesure de Haar.

**Démonstration** Nous supposons que  $G$  est métrisable. L'espace de Banach  $\mathcal{C}(G)$  des fonctions continues sur  $G$  est alors séparable; fixons une suite  $(f_n)$  de fonctions continues sur  $G$  qui est dense dans sa boule unité. Munissons le dual de  $\mathcal{C}(G)$  de la topologie faible-\*, c'est-à-dire de la topologie de la convergence simple. Cette topologie est définie par les semi-normes  $\mu \mapsto |\mu(f_n)|$ , donc par la distance définie par :

$$d(\mu, \nu) = \sum_n 2^{-n} |(\mu - \nu)(f_n)|,$$

pour laquelle cette boule unité est compacte. Soit en effet une suite  $(\mu_i)$  de mesures vérifiant  $\|\mu_i\| \leq 1$  pour tout  $i$ . La suite  $(\mu_i(f_1))_i$  est alors bornée, donc admet une sous suite convergente  $(\mu_{\tau_1(i)}(f_1))$ . Par récurrence, il existe une fonction strictement croissante  $\tau_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que la suite  $(\mu_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(i)}(f_k))$  converge. Posons  $\tau_i = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_i(i)$ ; la suite  $(\mu_{\tau_1(i)}(f_k))$  converge pour tout entier  $k$ . Comme la suite  $(\mu_{\tau_1(i)})$  est équicontinue et qu'elle converge (simplement) sur la partie dense  $\{f_1, \dots\}$ , elle converge en tout point vers une

forme linéaire  $\mu$ , nécessairement de norme inférieure à 1. Cela montre que la suite  $(\mu_i)$  converge vers  $\mu$  pour la topologie faible-\*

En particulier, l'ensemble  $\mathcal{P}$  des mesures de probabilité sur  $G$ , muni de cette topologie, est une partie convexe et compacte de l'espace des mesures. L'application  $\varphi$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par

$$\varphi(\mu) = \sum_n 2^{-n} |\mu(f_n)|,$$

est continue, convexe, et même strictement convexe. Supposons en effet que  $\varphi(t\mu + (1-t)\nu) = t\varphi(\mu) + (1-t)\varphi(\nu)$  pour  $\mu, \nu \in \mathcal{P}$  et  $t \in [0, 1]$ . Alors,  $\mu(f_n)$  et  $\nu(f_n)$  sont de même signe pour tout  $n$ . Par suite, pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}(G)$ ,  $\mu(f_n)$  et  $\nu(f_n)$  sont de même signe. Cela entraîne que  $\mu$  et  $\nu$  sont proportionnelles, donc égales car ce sont des mesures de probabilité.

Le groupe  $G$  agit sur  $\mathcal{P}$  par translation à gauche et à droite, ces actions seront notées  $L$  et  $R$ . Posons alors pour  $\mu \in \mathcal{P}$ ,

$$\Phi(\mu) = \sup_{g \in G} \varphi((L_g)_*\mu).$$

La fonction  $\Phi$  est semi-continue inférieurement (comme sup de fonctions continues), convexe (comme sup de fonctions convexes). Comme  $\mathcal{P}$  est compact, l'ensemble des mesures  $\mu \in \mathcal{P}$  telles que  $\Phi(\mu) = \text{Inf}\Phi$  est une partie  $\mathcal{P}_0$ , convexe, compacte, non vide de  $\mathcal{P}$ . Par construction,  $\Phi$  est  $G$ -invariante :

$$\Phi((L_g)_*\mu) = \Phi(\mu)$$

pour tout  $g \in G$ . par suite,  $\mathcal{P}_0$  est stable par l'action de  $G$ .

Remarquons que l'application  $g \mapsto (L_g)_*\mu$  est continue. En effet, si  $f \in \mathcal{G}$  et si  $(g_n)$  est une suite d'éléments de  $G$  qui converge vers  $G$ ,

$$\int_G f(g_n x) d\mu(x) \longrightarrow \int_G f(gx) d\mu(x)$$

par convergence dominée. Comme  $G$  est compact, la borne supérieure qui définit  $\Phi$  est un maximum. Cela entraîne que  $\Phi$  est strictement convexe et donc  $\mathcal{P}_0$  est un singleton, d'où l'existence d'une mesure de probabilité invariante à gauche sur  $G$ .

Par le même argument,  $G$  possède des mesures de probabilité invariantes à droite. Soit ainsi  $\mu$  et  $\nu$  des mesures de probabilité invariantes, respectivement à gauche et à droite, sur  $G$  et soit  $f \in \mathcal{G}$ . On a

$$\int_{G \times G} f(yx) d\mu(x) d\nu(y) = \int_G \left( \int_G f(yx) d\mu(x) \right) d\nu = \int_G \mu(f) d\nu = \mu(f),$$

car  $\mu$  est invariante à gauche et  $\nu$  est de masse totale 1. De même, on a

$$\int_{G \times G} f(yx) d\mu(x) d\nu(y) = \int_G \left( \int_G f(yx) d\nu(x) \right) d\mu = \int_G \nu(f) d\mu = \nu(f),$$

car  $\nu$  est invariante à droite et  $\mu$  est de masse totale 1. Il en résulte que  $\mu = \nu$ . Cela prouve à la fois l'unicité d'une mesure de probabilité invariante à gauche (resp. à droite) sur  $G$  et

sa bi-invariance.

Lorsque  $G$  est un groupe de Lie, on peut utiliser la structure de variété de  $G$  pour décrire de manière commode une classe de mesures et en déduire une démonstration relativement simple de l'existence d'une mesure invariante à gauche sur  $G$ . Une structure de variété riemannienne sur une variété différentielle  $M$  est la donnée, pour tout point  $x \in M$ , d'un produit scalaire euclidien sur  $T_x M$ , de sorte que si  $X$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs locaux sur un ouvert  $U$  de  $M$ , la fonction de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $x \mapsto \langle X(x), Y(x) \rangle_x$  soit  $\mathcal{C}^\infty$ . Dans une carte  $(U, \varphi)$ , il existe des champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_n$  qui forment une base de  $T_x M$  en tout point  $x \in U$  (on a noté  $n = \dim M$ ), on dit que le fibré tangent est trivialisé. Alors, sur  $U$ , la structure riemannienne est donnée par l'application  $\mathcal{C}^\infty$   $g : U \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ , qui à  $x \in U$ , associe la matrice  $g_x$  du produit scalaire sur  $T_x M$  dans cette base. Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne et soit  $f$  une fonction à support compact, contenu dans l'image d'une paramétrisation  $(U, \varphi)$ . On a

$$\int_M f = \int_U f(\varphi(x)) [\det g_U(x)]^{\frac{1}{2}} dx_1 \cdots dx_n.$$

Si  $f$  est à support compact, on peut l'écrire comme somme finie de fonctions à support dans des ouverts de cartes. Cela permet d'intégrer de telles fonctions.

Supposons maintenant que  $G$  soit un groupe de Lie. Fixons un produit scalaire sur  $T_e G$ . On peut alors en déduire une structure riemannienne invariante à gauche sur  $G$  en utilisant la translation à droite pour obtenir un produit scalaire sur  $T_g G$ , pour  $g \in G$ . Il en résulte une mesure invariante à gauche sur  $G$ .

**Exemples A.0.4** Si  $G = (\mathbb{R}^n, +)$ , alors la mesure de Lebesgue est la mesure de Haar invariante à gauche sur  $G$ .

**Exemples A.0.5** Soit  $G = GL(n, \mathbb{R})$ . On note par  $dx$  le volume de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , et par  $L_g : x \mapsto gx$ , pour tous  $x, g \in G$ , la translation à gauche de  $G$ . Comme la différentielle  $d(L_g(x)) = |\det(g)|^n dx$ , alors  $|\det(g)|^n dx$  est la mesure de Haar invariante à gauche sur  $GL(n, \mathbb{R})$ .

**Exemples A.0.6** On note par  $G$  est le groupe des matrices réelles inversibles triangulaires inférieures.

$$x = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} \\ 0 & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} \\ 0 & 0 & x_{3,3} & \cdots & x_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} \in G. \quad (\text{A.1})$$

On a  $d(L_g(x)) = |g_{1,1}^n g_{2,2}^{n-1} \cdots g_{n-1,n-1}^2 g_{n,n}| dx$ , alors  $|g_{1,1}^n g_{2,2}^{n-1} \cdots g_{n-1,n-1}^2 g_{n,n}|^{-1} dx$  est la mesure de Haar invariante à gauche sur  $G$ .



# Bibliographie

- [1] D.R. Adams. A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives. *Ann. of Math.*, 128 :385–398, 1988.
- [2] R.A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, 1975.
- [3] J.A. Aguilar and I. Peral. Global behavior of the Cauchy problem for some critical nonlinear parabolic equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 31 :1270–1294, 2000.
- [4] W. Allegretto. Principal eigenvalues for indefinite-weight elliptic problems in  $\mathbb{R}^n$ . *Proc. Amer. Math. Soc.*, 116 :701–706, 1992.
- [5] W. Allegretto and Y.X. Huang. Eigenvalues of the indefinite weight  $p$ -Laplacian in weighted spaces. *Funk. Ekv.*, 38 :233–242, 1995.
- [6] W. Allegretto and Y.X. Huang. A Picone’s identity for the  $p$ -Laplacian and applications. *Nonlin. Anal.*, 32 :819–830, 1998.
- [7] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz. Dual variations methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis*, 14 :349–381, 1973.
- [8] T. Aubin. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl.*, 55 :269–296, 1976.
- [9] T. Aubin. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. *J. Diff. Géom.*, 11 :573–598, 1976.
- [10] T. Aubin. Meilleures constantes dans le théorème d’inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire. *J. Funct. Anal.*, 32 :148–174, 1979.
- [11] M. Badiale and G. Tarantello. A Sobolev-Hardy inequality with applications to a nonlinear elliptic equation arising in astrophysics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 163 :259–293, 2002.
- [12] H. Bahouri and J.Y. Chemin. *Fourier analysis and applications to nonlinear partial differential equations*. En préparation.
- [13] H. Bahouri, J.Y. Chemin, and I. Gallagher. Precised Hardy Inequalities on  $\mathbb{R}^d$  and on the Heisenberg group  $\mathbb{H}^d$ . *Séminaire équations aux dérivées partielles, Polytechnique*, 2004.
- [14] H. Bahouri, J.Y. Chemin, and I. Gallagher. Inégalités de Hardy précisées. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 341(2) :89–92, 2005.
- [15] H. Bahouri, J.Y. Chemin, and C.J. Xu. Trace and trace lifting theorems in weighted Sobolev spaces. *J. de l’institut de mathématiques de Jussieu*, 4 :509–552, 2005.

- [16] H. Bahouri, J.Y. Chemin, and C.J. Xu. *Phase Space Analysis of Partial Differential Equations*, volume 69 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, chapter Trace theorem on the Heisenberg group on homogeneous hypersurfaces, pages 1–15. 2007.
- [17] H. Bahouri, J.Y. Chemin, and C.J. Xu. Trace theorem on the Heisenberg group. *Ann. Inst. Fourier*, To appear.
- [18] H. Bahouri and I. Gallagher. Paraproduit sur le groupe de Heisenberg et applications. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 17(1) :69–105, 2001.
- [19] H. Bahouri, P. Gérard, and C.J. Xu. Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg. *J. Anal. Math.*, 82 :93–118, 2000.
- [20] P. Baras and J. A. Goldstein. The heat equation with a singular potential. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 284 :121–139, 1984.
- [21] G. Barbatis, S. Filippas, and A. Tertikas. A unified approach to improved  $L^p$  Hardy inequalities with best constants. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(6) :2169–2196, 2004.
- [22] R. Beals. Uniforms hypoelliptic Green’s functions. *J. Math. Pures Appl.*, 77 :209–248, 1998.
- [23] R. Beals. Green’s functions for some highly degenerate elliptic operators. *J. Funct. Anal.*, 165 :407–429, 1999.
- [24] R. Beals, B. Gaveau, and P. Greiner. The Green function of model step two hypoelliptic operators and the analysis of certain tangential Cauchy Riemann complexes. *Adv. Math.*, 121(2) :288–345, 1996.
- [25] R. Beals, B. Gaveau, and P. Greiner. On a geometric formula for the fundamental solution of subelliptic Laplacians. *Math.Nachr.*, 181 :81–163, 1996.
- [26] J. Bebernes and D. Eberly. *Mathematical Problems from Combustion Theory*, volume 83. Math. Sci., New York, 1989.
- [27] W. Beckner. Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality. *Ann. of Math.*, 138 :213–242, 1993.
- [28] A. Bellaïche. The tangent space in sub-Riemannian geometry. *Progress in Maths*, 144 :1–78, 1996.
- [29] J. Bergh and J. Löfström. *Interpolation spaces, An Introduction*. Springer, 1976.
- [30] V.I Bogachev. *Measure Theory*, volume 2. Springer, 2006.
- [31] J.M. Bony. Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérées. *Ann. Inst. Fourier*, 19 :227–304, 1969.
- [32] J.M. Bony and J.Y. Chemin. Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander. *Bull. Soc. math. France*, 122 :77–118, 1994.
- [33] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. 1999.
- [34] H. Brézis, J. M. Coron, and L. Nirenberg. Free vibrations for nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz. *Commun. Pure Appl. Math.*, 33(5) :667–684, 1980.
- [35] H. Brézis, L. Dupaigne, and A. Tesei. On a semilinear elliptic equation with inverse square potential. *Sel. math.*, 11 :1–7, 2005.

- 
- [36] H. Brezis and M. Marcus. Hardy's inequalities revisited. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, (1-2) :217–237, 1998.
- [37] H. Brézis and L. Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.*, 36 :437–477, 1983.
- [38] H. Brézis and L. Nirenberg. A minimization problem with critical exponent and non-zero data. In *Symmetry in nature, Scuola Superiore Pisa*, 1 :129–140, 1989.
- [39] H. Brézis and J.L. Vázquez. Blow-up solutions of some nonlinear elliptic equations. *Rev. Mat. Complut.*, 10 :443–469, 1997.
- [40] X. Cabré and Y. Martel. Existence versus explosion instantanée pour des équations de la chaleur linéaires avec potentiel singulier. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 329 :973–978, 1999.
- [41] A. Sánchez Calle. Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields. *Invent. Math.*, 78 :143–160, 1984.
- [42] C.E. Cancelier, J.Y. Chemin, and C.J. Xu. Calcul de Weyl et opérateurs sous-elliptiques. *Ann. Inst. Fourier*, 43(4) :1157–1178, 1993.
- [43] L. Capogna, D. Danielli, and N. Garofalo. An embedding theorem and the Harnack inequality for nonlinear subelliptic equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 18(9-10) :1765–1794, 1993.
- [44] L. Capogna, D. Danielli, and N. Garofalo. The geometric Sobolev embedding for vector fields and the isoperimetric inequality. *Comm. in Analysis and Geometry*, 2 :203–215, 1994.
- [45] L. Capogna, D. Danielli, and N. Garofalo. Capacitary estimates and the local behavior of solutions of nonlinear subelliptic equations. *Amer. J. Math.*, 118(6) :1153–1196, 1996.
- [46] L. Capogna, D. Danielli, S.D. Pauls, and J.T. Tyson. *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*. Birkhäuser-Verlag, Berlin, 2007.
- [47] L. Carleson and S. Y. Chang. On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser. *Bull. Sc. Math.*, 110 :113–127, 1986.
- [48] G. Cerami, S. Solimini, and M. Struwe. Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents. *J. Funct. Anal.*, 69 :289–306, 1986.
- [49] D.C. Chang and P. Greiner. Harmonic Analysis and Subriemannian Geometry on Heisenberg Groups. *Bull. Inst. Maths. Ac.*, 30(3) :153–190, 2002.
- [50] K.C. Chang. Morse theory on Banach space and its applications to partial differential equations. *Chin. Ann. of Math.*, 4B :381–399, 1983.
- [51] S.D. Chatterji. *Équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles*. 1998.
- [52] N. Chaudhuri and M. Ramaswamy. Existence of positive solutions of some semilinear elliptic equations with singular coefficients. *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A*, 131 :1275–1295, 2001.
- [53] J. Chen. Existence of solutions for a nonlinear PDE with an inverse square potential. *J. Differential Equations*, 195 :497–519, 2003.

- [54] J. Chen. On a semilinear elliptic equation with singular term and Hardy-Sobolev critical growth. *Math. Nachr.*, 208 :838–850, 2007.
- [55] W. Cohn and G. Lu. Best constants for Moser-Trudinger inequalities on the Heisenberg group. *Indiana Univ. Math. J.*, 50 :1567–1591, 2001.
- [56] W. Cohn and G. Lu. Best constants for Moser-Trudinger inequalities, fundamental solutions and one-parameter representation formulas on groups of Heisenberg type. *Acta Math. Sinica*, 18(2) :375–390, 2002.
- [57] C.C. Conley. Isolated invariant sets and the Morse index. Number 38. CBMS regional conf. Ser. in Math., 1978.
- [58] L. D’Ambrosio. Some Hardy Inequalities on the Heisenberg group. *Differential Equations*, 40(4) :552–564, 2004.
- [59] L. D’Ambrosio. Hardy-type inequalities related to degenerate elliptic differential operators. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 4(3) :451–486, 2005.
- [60] D. Danielli, N. Garofalo, and D.-M. Nhieu. Trace inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and applications. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, (2) :195–252, 1998.
- [61] E.B. Davies. *Heat Kernels and Spectral Theory*, volume 92. Cambridge Tracts in Mathematics, UK, 1989.
- [62] E.B. Davies. The Hardy constant. *Quart. J. Math. Oxford Ser.2*, 46(184) :417–431, 1995.
- [63] E.B. Davies. *Spectral theory and differential operators*. Number 42. UK, 1995.
- [64] A.S. de Castro. Bound states of the Dirac equation for a class of effective quadratic plus inversely quadratic potentials. *Ann. Physics*, 311 :170–181, 2004.
- [65] M. Derridj. Un problème aux limites pour une classe d’opérateurs du second ordre hypoelliptiques. *Ann. Inst. Fourier*, 21 :99–148, 1971.
- [66] J.W. Dold, V.A. Galaktionov, A.A. Lacey, and J. L. Vazquez. Rate of approach to a singular steady state in quasilinear reaction-diffusion equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 26 :663–687, 1998.
- [67] J. Dou, P. Niu, and Z. Yuan. A Hardy Inequality with Remainder Terms in the Heisenberg Group and the Weighted Eigenvalue Problem. *Journal of Inequalities and Applications*, 2007.
- [68] J. Droniou. *Degrés topologiques et applications*. Université Montpellier II, 2006.
- [69] J. Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie : Une introduction*. 2006.
- [70] J. Faraut and K. Harzallah. *Deux cours d’analyse harmonique*. Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1984. École d’été d’analyse harmonique de Tunis.
- [71] A. Ferrero and F. Gazzola. Existence of solutions for singular critical growth semilinear elliptic equations. *J. Differential Equations*, 177 :494–522, 2001.
- [72] S. Filippas, L. Moschini, and A. Tertikas. Sharp two-sided heat kernel estimates for critical Schrödinger operators in bounded domains. *Comm. Math. Phys.*, 273(1) :237–281, 2007.
- [73] G. Folland. A fundamental solution for a subelliptic operator. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79 :373–376, 1973.

- 
- [74] G. Folland. Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups. *Ark. Mat.*, 2(13) :161–207, 1975.
- [75] G. Folland. *Harmonic analysis in phase space*, volume 122. Princeton University Press, 1989.
- [76] G. Folland and E. Stein. Estimates for the  $\bar{\partial}_b$  complex and analysis on the Heisenberg group. *Comm. Pure Appl. Math.*, 27 :429–522, 1974.
- [77] G. Folland and E. Stein. *Hardy Spaces on Homogeneous Groups*, volume 28. Princeton University Press, 1982.
- [78] I. Fonseca and W. Gangbo. *Degree theory in analysis and applications*, volume 2. Oxford Science Publications, 1995.
- [79] L. Fontana. Sharp borderline Sobolev inequalities on compact Riemannian manifolds. *Comment. Math. Helvetic.*, 68 :415–454, 1993.
- [80] N. Garofalo and E. Lanconelli. Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 40(2) :313–356, 1990.
- [81] N. Garofalo and D. Vassilev. Regularity near the characteristic set in the non-linear Dirichlet problem and conformal geometry of sub-Laplacians on Carnot groups. *Math. Ann.*, 318 :453–516, 2000.
- [82] N. Garofalo and D. Vassilev. Symmetry properties of positive entire solutions of Yamabe-type equations on groups of Heisenberg type. *Duke Math. J.*, 106(3) :411–448, 2001.
- [83] D. Geller. Fourier analysis on the Heisenberg groups. volume 74, pages 1328–1331. Proceeding Nat Acad Sciences U.S.A, 1977.
- [84] N. Ghoussoub and C. Yuan. Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352 :5703–5743, 2000.
- [85] J. A. Goldstein and Q. S. Zhang. On a degenerate heat equation with a singular potential. *J. Funct. Anal.*, 186(2) :342–359, 2001.
- [86] H. Goldstine. *A history of the calculus of variations. From the 17th century through the 19th century*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [87] P.C. Greiner. A fundamental solution for a nonelliptic partial differential operator. *Canad. J. Math.*, 31 :1107–1120, 1979.
- [88] M. Gromov. *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, volume 144. Birkhäuser, Progress in Maths, in Sub-Riemannian Geometry edition, 1996.
- [89] P. Hajlasz. Pointwise hardy inequalities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127 :417–423, 1999.
- [90] P. Hajlasz and P. Koskela. Sobolev met Poincaré. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 145 :1–101, 2000.
- [91] A. El Hamidi and M. Kirane. Nonexistence results of solutions to systems of semilinear differential inequalities on the Heisenberg group. *Abstr. Appl. Anal.*, 2004 :155–164, 2004.

- [92] A. El Hamidi and A. Obeid. Systems of semilinear higher-order evolution inequalities on the Heisenberg group. *J. Math. Anal. Appl.*, 280 :77–90, 2003.
- [93] Y. Han and P. Niu. Hardy Sobolev type inequalities on the H-type group. *Manuscripta Math.*, 118 :235–252, 2005.
- [94] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Polya. *Inequalities*. Cambridge, 1952.
- [95] J. Heinonen. Calculus on carnot groups. volume 68, pages 1–31. Fall School in Analysis, 1995.
- [96] J. Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces*. Springer-Verlag, 2001.
- [97] L. Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, pages 147–171, 1967.
- [98] Y.X. Huang. Eigenvalues of the  $p$ -laplacian in  $\mathbb{R}^n$  with indefinite weight. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 36 :519–527, 1995.
- [99] Jannelli. The role played by space dimension in elliptic critical problems. *J. Differential Equations*, 156(2) :407–426, 1999.
- [100] D. Jerison. The Dirichlet problem for the Kohn-Laplacian on the Heisenberg group, Parts I and II. *J. Funct. Analysis*, 43 :97–142, 1981.
- [101] D. Jerison. The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander’s condition. *Duke Math. J.*, 53 :503–523, 1986.
- [102] D. Jerison and J.M. Lee. The Yamabe problem on CR manifolds. *J. Diff. Geom.*, 25 :167–197, 1987.
- [103] D. Jerison and J.M. Lee. Extremals for the sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem. *J. Amer. Math. Soc.*, 1 :1–13, 1988.
- [104] A. Kaplan. Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms. *Trans. Am. Math. Soc.*, 258 :147–153, 1980.
- [105] J.J. Kohn. Pseudo-differential operators and non-elliptic problem. pages 157–165, 1969.
- [106] I. Kombe. On the nonexistence of positive solutions to nonlinear degenerate parabolic equations with singular coefficients. 2005. to appear in Appl. Anal.
- [107] I. Kombe. Sharp hardy type inequalities on Carnot groups. 2005. Submitted.
- [108] I. Kombe. Sharp weighted Hardy-type and uncertainty principle inequality on Carnot groups. 2005. Submitted.
- [109] E. Lanconelli and D. Morbidelli. On the Poincaré inequality for vector fields. *Ark. Mat.*, 38(2) :327–342, 2000.
- [110] S. Lang. *Fundamentals of differential geometry*, volume 191. Springer-Verlag, 1999.
- [111] E.H. Lieb. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. *Ann. of Math.*, 118 :349–373, 1983.
- [112] P.L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1 :145–201, 1985.
- [113] L.A. Ljusternik and L.G. Schnirelmann. *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*. 1934.

- 
- [114] A. Loiudice. Improved inequalities on the Heisenberg group. *Nonlinear Analysis*, 62 :953–962, 2005.
- [115] G. Lu. Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander’s condition and applications. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 8(3) :367–439, 1992.
- [116] V. Magnani. Differentiability and area formula on stratified Lie groups. *Houston J. Math.*, 27(2) :297–323, 2001.
- [117] M. Marcus, V. J. Mizel, and Y. Pinchover. On the best constant for Hardy’s inequality in  $\mathbb{R}^n$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(8) :3237–3255, 1998.
- [118] T. Matskewich and P.E. Sobolevskii. The best possible constant in generalized Hardy’s inequality for convex domain in  $\mathbb{R}^n$ . *Nonlinear Anal.*, 28(9) :1601–1610, 1997.
- [119] J. Mawhin and M. Willem. Critical points of convex perturbations of some indefinite quadratic forms and semi-linear boundary value problems at resonance. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 3 :431–453, 1986.
- [120] P.D. Milman and Yu A. Semenov. Global heat kernel bounds via desingularizing weights. *J. Func. Anal.*, 212 :373–398, 2004.
- [121] J.W. Milnor. *Morse theory*. Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [122] H. Mokrani. Semi-linear sub-elliptic equations on the Heisenberg group with a singular potential. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 8(5) :1619–1636, 2009.
- [123] A. Munnier. Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles. Technical report, Institut Élie Cartan, Université Henri Poincaré, 2007-2008.
- [124] A.I. Nachman. The wave equation on the Heisenberg group. *Communications in Partial Differential Equations*, 7 :675–714, 1982.
- [125] A. Nagel, E. M. Stein, and S. Wainger. Balls and metrics defined by vector fields I. Basic properties. *Acta Math.*, 155 :103–147, 1985.
- [126] L. Nirenberg. Variational and topological methods in nonlinear problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 37 :267–302, 1981.
- [127] P. Niu, H. Zhang, and Y. Wang. Hardy type and Rellich type inequalities on the Heisenberg group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129(12) :3623–3630, 2001.
- [128] O.A. Olejnik and E.V. Radkevic. *Second order equations with non-negative characteristic form*. Plenum Press, 1973.
- [129] R.S. Palais. Morse theory on Hilbert manifolds. *Topology*, 2 :299–340, 1963.
- [130] R.S. Palais. Ljusternik-Schinrelman theory on Banach manifolds. *Topology*, 5 :115–132, 1966.
- [131] R.S. Palais and S. Smale. A generalized Morse theory. *Bull. Am. Math. Soc.*, 70 :165–171, 1964.
- [132] P. Pansu. Métriques de Carnot-Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1. *Ann. of Math.*, 129(1) :1–60, 1965.
- [133] S. Pohozaev. Eigenfunctions of the equation  $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ . *Soviet Math. Doklady*, 6 :1408–1411, 1965.

- [134] P.H. Rabinowitz. Variational methods for nonlinear eigenvalue problems. *CIME Ceremonese, Rome*, pages 140–195, 1974.
- [135] P.H. Rabinowitz. A note of the topological degree for potential operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 51 :483–492, 1975.
- [136] P.H. Rabinowitz. Some critical point theorems and applications to semilinear elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Pisa*, 5 :412–424, 1977.
- [137] P.H. Rabinowitz. Some critical point theorems and applications to semilinear elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Pisa*, 5 :215–223, 1978.
- [138] P.H. Rabinowitz. Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations. *Nonlinear Analysis, New York*, pages 161–177, 1978.
- [139] P.H. Rabinowitz. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. In *C.B.M.S*, volume 65 of *Conference Series in Mathematics*. AMS, 1986.
- [140] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume II. Academic Press, New York, 1979.
- [141] F. Rellich. *Perturbation theory of eigenvalue problems*. New York, 1969.
- [142] L.P. Rothschild and E.M. Stein. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. *Acta Math.*, 137 :247–320, 1976.
- [143] J.T. Schwartz. Generalizing the Ljusternik-Schinrelman theory of critical points. *Commun. Pure Appl. Math.*, 17 :307–315, 1964.
- [144] S. Semmes. An introduction to Heisenberg groups in analysis and geometry. *Notices Amer. Math. Soc.*, 50(6) :640–646, 2003.
- [145] S. Smale. Morse theory and nonlinear generalization of the Dirichlet problem. *Ann. Math.*, 17 :307–315, 1964.
- [146] E.M. Stein. *Harmonic Analysis. Real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*. Princeton University Press, 1993.
- [147] M. Struwe. *Variational methods : applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, volume 34. 2008.
- [148] G. Talenti. Best constant in Sobolev inequality. *Ann. Math. Pure Appl.*, 110 :353–372, 1976.
- [149] I. Todhunter. *A history of the calculus of variations during the nineteenth century*. Chelsea, 1962. reprint of the 1861 edition.
- [150] L.W. Tu. Une courte démonstration de la formule de Campbell-Hausdorff. *Journal of Lie Theory*, 14 :501–508, 2004.
- [151] N. Varopoulos. Fonctions harmoniques sur les groupes de Lie. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 304(17) :519–521, 1987.
- [152] J.L. Vazquez and E. Zuazua. The Hardy inequality and the asymptotic behavior of the heat equation with an inverse-square potential. *J. Funct. Anal.*, 173 :103–153, 2000.
- [153] F. Vigneron. *Localisation et décroissance des champs de la mécanique des fluides et des plasmas. Espaces fonctionnels associés à une famille de champs de vecteurs*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, France, 2006.

- 
- [154] S. Weng and Y. Li. Existence of solutions for a nonlinear elliptic Dirichlet boundary value problem with an inverse square potential. *Boundary Value Problems*, 2006 :1–7, 2006.
- [155] J.A. Woodhouse. *Harmonic analysis on commutative spaces*. Providence, American Mathematical Society, 2007.
- [156] R. Woodhouse. *A history of the calculus of variations in the eighteenth century*. Chelsea, New York, 1964. reprint of the 1910 edition.
- [157] C.J. Xu. On Harnack’s inequality for second-order degenerate elliptic operators. *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 10 :359–365, 1989.
- [158] C.J. Xu. Semilinear subelliptic equations and Sobolev inequality for vector fields satisfying Hörmander’s condition. *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 15 :183–192, 1994.
- [159] C.J. Xu. The Dirichlet problems for a class of semilinear sub-elliptic equations. *Nonlinear Anal.*, 37 :1039–1049, 1999.
- [160] H. Zhang and P. Niu. Hardy-type inequalities and Pohozaev-type identities for a class of pdegenerate subelliptic operators and applications. *Nonlinear Anal.*, 54 :165–186, 2003.
- [161] W. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions*, volume 120. Springer-Verlag, 1989.