



**HAL**  
open science

# Modélisations mathématiques d'un multi-matériau

Anne-Laure Bessoud

► **To cite this version:**

Anne-Laure Bessoud. Modélisations mathématiques d'un multi-matériau. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2009. Français. NNT: . tel-00461938

**HAL Id: tel-00461938**

**<https://theses.hal.science/tel-00461938>**

Submitted on 7 Mar 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ MONTPELLIER II**

— SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC —

# THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER II**

Spécialité : MATHÉMATIQUE  
Ecole Doctorale : INFORMATIONS, STRUCTURES ET SYSTÈMES

Présentée par

**Anne-Laure BESSOUD**

Sujet de la thèse :

**MODÉLISATIONS MATHÉMATIQUES  
D'UN MULTI-MATÉRIAU**

Soutenue le 19 Juin 2009 devant le jury composé de :

Mme Annie RAOULT	Rapporteur
M. Pierre SEPPECHER	Rapporteur
M. Thierry GALLOUET	Président
M. Hedy ATTOUCH	Examineur
M. André CHRYSOCHOOS	Examineur
M. Roberto PARONI	Examineur
Mme Françoise KRASUCKI	Co-directrice de Thèse
M. Gérard MICHAILLE	Co-directeur de Thèse

# Remerciements

Ce travail est l'aboutissement de huit années passées à l'Université Montpellier II et est en grande partie dû à la passion qu'ont su me transmettre certains enseignants, et je les en remercie du fond du coeur. Leur discours a éveillé ma curiosité me conduisant année après année à franchir les différentes étapes du parcours universitaire, jusqu'au doctorat. Ce parcours n'aurait bien sûr pas pu se faire dans de si bonnes conditions sans le soutien immense de ma famille. Tout d'abord celui de mes parents qui depuis toujours m'ont encouragée, et je tiens en particulier à adresser à mon père toute ma reconnaissance pour m'avoir toujours témoigné de sa fierté. De même, le soutien de mon frère, ma soeur et mes grand-parents a toujours été très précieux. Ces années n'auraient également pas été aussi belles sans la présence de Pedro à mes côtés. Depuis le début de cette aventure, il m'encourage dans mes choix, me soutient et me supporte dans les moments difficiles, je lui dois beaucoup. Je remercie sa famille, ses parents, ses soeurs, ou ma seconde famille, pour leur gentillesse et leur présence.

Je remercie les directions du LMGC et de l'IBM pour m'avoir donné les moyens de réaliser ce travail dans de si bonnes conditions. Je remercie également les directions du CUFR de Nîmes et du CIES pour m'avoir donné la chance d'exercer mon service en qualité de moniteur, me permettant de découvrir et apprécier le métier d'enseignant.

Je ne saurai jamais assez remercier Françoise Krasucki et Gérard Michaille, mes directeurs de thèse, non seulement pour l'encadrement dont ils m'ont fait bénéficier mais aussi pour tout leur soutien moral, leur disponibilité et leur générosité. Cette collaboration m'a beaucoup appris et m'a permis d'améliorer mes connaissances dans un plus large domaine. Je tiens également à exprimer toute mon amitié et ma reconnaissance à Pippo Geymonat et Françoise qui m'ont ouvert leur maison et accueillie de nombreuses fois pour travailler et partager aussi de très bons moments.

Je tiens à remercier Mme Annie Raoult, Professeur à l'Université Paris Descartes, et M. Pierre Seppecher, Professeur à l'Université de Toulon et du Var, d'avoir accepté de rapporter ce travail. Je remercie également M. Hedy Attouch, Professeur à l'Université Montpellier II, M. Thierry Gallouët, Professeur à l'Université de Provence Aix-Marseille I, M. André Chrysochoos, Professeur à l'Université Montpellier II, et M. Roberto Paroni, Professeur à l'Université de Sassari, d'avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes que je n'ai pas citées, mais qui se reconnaîtront, famille, amis, membres du LMGC ou personnels de l'université, qui ont contribué de près ou de loin, à l'élaboration de cette thèse.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>8</b>
1.1 Espaces de Sobolev . . . . .	8
1.2 Mesures de Young . . . . .	11
1.2.1 Introduction aux mesures de Young . . . . .	11
1.2.2 Mesures de Young générées par des gradients . . . . .	13
1.3 Généralités en élasticité . . . . .	14
1.3.1 Hyperélasticité . . . . .	15
1.3.2 Elasticité linéaire . . . . .	16
1.4 La méthode directe du calcul des variations en élasticité . . . . .	18
1.4.1 Principe de la méthode . . . . .	18
1.4.2 Quelques résultats utiles de relaxation . . . . .	20
1.5 $\Gamma$ -convergence . . . . .	21
1.6 Un lemme de diagonalisation . . . . .	23
<b>2 Une première approche du problème en élasticité linéaire isotrope</b>	<b>24</b>
2.1 1 <sup>er</sup> cas : la surface $S$ est plane, la direction privilégiée d'assemblage est $e_3$ . . . . .	26
2.1.1 Position du problème . . . . .	26
2.1.2 Etude asymptotique formelle . . . . .	28
2.1.3 Deux résultats de type Korn . . . . .	33
2.1.4 Convergences . . . . .	36
2.2 2 <sup>ème</sup> cas : la surface $S$ est quelconque, la direction privilégiée d'assemblage est $n$ . . . . .	42
2.2.1 Description du problème en coordonnées curvilignes . . . . .	42
2.2.2 Etude asymptotique formelle . . . . .	44
2.2.3 Deux résultats de type Korn . . . . .	45
2.2.4 Convergences . . . . .	47
2.3 Résolution numérique . . . . .	53
2.4 Une méthode de résolution par décomposition de domaine . . . . .	54
2.4.1 Principe de la méthode . . . . .	54
2.4.2 Un résultat de convergence dans le cas scalaire . . . . .	56
2.5 Une méthode de résolution avec pénalisation . . . . .	58
2.5.1 Présentation de la méthode . . . . .	58
2.5.2 Résolution du problème pénalisé . . . . .	59

<b>3</b>	<b>Modélisation dans un cadre plus général</b>	<b>63</b>
3.1	Le cas linéaire anisotrope . . . . .	64
3.1.1	Lemme de compacité . . . . .	66
3.1.2	$\Gamma$ -liminf . . . . .	67
3.1.3	$\Gamma$ -limsup . . . . .	67
3.1.4	Convergence forte . . . . .	68
3.2	Un modèle en élasticité non linéaire . . . . .	69
3.2.1	Lemme de compacité . . . . .	70
3.2.2	$\Gamma$ -liminf . . . . .	70
3.2.3	$\Gamma$ -limsup . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Modélisation d'un multi-matériau à liaison forte présentant des microstructures</b>	<b>75</b>
4.1	Une convergence variationnelle pour des fonctionnelles définies sur des espaces produit . . . . .	76
4.1.1	Une convergence variationnelle . . . . .	76
4.1.2	Convergence variationnelle des fonctions marginales . . . . .	78
4.2	Application : le matériau dans la couche mince subit des transformations de phase . . . . .	79
4.2.1	Reformulation du problème et résultat . . . . .	79
4.2.2	Lemme de compacité . . . . .	82
4.2.3	$\Gamma$ -liminf . . . . .	84
4.2.4	$\Gamma$ -limsup . . . . .	85
4.2.5	Reformulations du problème par les fonctionnelles marginales . . . . .	89
4.3	Formulation complète en terme de mesures de Young . . . . .	94
4.3.1	Reformulation du problème . . . . .	95
4.3.2	Relation entre la solution classique et la solution du problème limite formulé en terme de mesures de Young . . . . .	96
	A-L. Bessoud, Multi-materials with strong interface, à paraître au J. Math. Pures et Appl. . . . .	97
<b>5</b>	<b>Vers un modèle de plasticité dans la couche mince : la densité d'énergie du matériau rigide est à croissance d'ordre <math>p(\varepsilon)</math>, <math>p(\varepsilon) \rightarrow 1^+</math></b>	<b>121</b>
5.1	Description du problème . . . . .	123
5.2	Convergences variationnelles successives . . . . .	124
5.2.1	$\Gamma$ -convergence lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et $p$ fixé . . . . .	124
5.2.2	$\Gamma$ -convergence du modèle limite précédent quand $p \rightarrow 1$ . . . . .	131
5.3	$\Gamma$ -convergence pour $p(\varepsilon) \rightarrow 1$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ . . . . .	138
5.3.1	Position du problème et résultat . . . . .	138
5.3.2	Résultat de compacité . . . . .	140
5.3.3	$\Gamma$ -liminf . . . . .	142
5.3.4	$\Gamma$ -limsup . . . . .	143
5.4	Généralisation de 5.2.1 : les densités d'énergie $f$ et $g$ sont non convexes et à croissance d'ordres différents . . . . .	144
5.5	Exploitation numérique . . . . .	148
	<b>Conclusion</b>	<b>150</b>

# Introduction

Cette thèse est consacrée à la modélisation d'une structure composée de l'assemblage de deux solides  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  par l'intermédiaire d'une couche mince (d'épaisseur  $\approx \varepsilon$ ) très rigide (d'ordre  $\frac{1}{\varepsilon^m}$ ,  $m \geq 1$ ), où  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre. Le cas où la couche mince est constituée d'un matériau de faible rigidité (d'ordre  $\varepsilon$ ) a fait l'objet de nombreuses études, à commencer par les travaux de Goland et Reissner [48] en 1944, suivis, entre autres, de Brezis *et al.* [21], Destuynder *et al.* [33], Geymonat et Krasucki [42], Geymonat *et al.* [43], Licht et Michaille [58], Suquet [63], pour une approche mathématique du problème. L'objectif principal dans l'étude d'une telle structure est de modéliser le comportement de la couche mince intercalée entre les deux solides. De nombreux exemples illustrent une telle situation, notamment dans le domaine des matériaux composites. Afin d'améliorer les propriétés d'un matériau composite, il est courant d'y intégrer des fibres, plaques ou autres, constituées de matériaux jouant un rôle de renforcement. Il est alors nécessaire de développer des modèles rendant compte du comportement de ces "inclusions renforçantes".

De manière simplifiée d'un point de vue mécanique, on peut se ramener à un problème de transmission des contraintes entre trois corps élastiques où le corps intermédiaire est une couche mince. Mais à cause de la faible épaisseur de la couche d'une part, et des différences importantes entre les coefficients élastiques d'autre part, le calcul numérique de la solution est délicat. Une manière de surmonter ces difficultés est d'introduire un problème limite où la couche mince est remplacée par une surface matérielle qui rend compte de conditions de transmission entre les deux corps  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ .

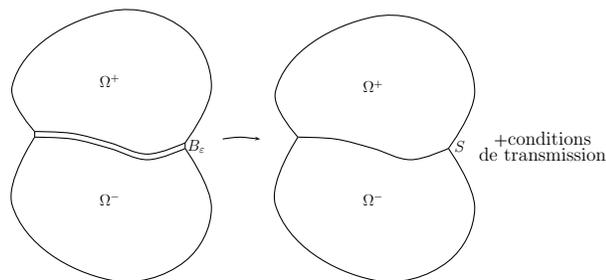


FIGURE 1 – De la configuration physique à la configuration limite.

D'un point de vue énergétique, cette surface  $S$  a une densité d'énergie surfacique qui est obtenue par passage à la limite à partir de la densité d'énergie volumique de la couche. L'énergie du système dans le problème limite est la somme des énergies correspondant aux deux corps  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  et d'une énergie de surface. L'étude de ce problème a déjà fait l'objet de plusieurs résultats. Dans Pham Huy et Sanchez-Palencia [51], on trouve une caractérisation de ces conditions de transmission dans le cas scalaire. Dans le problème limite, l'inconnue  $u$  satisfait les conditions de transmission à l'interface  $S$  entre les domaines  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  :

$$\begin{aligned} u^+ &= u^- \\ K^+ \frac{\partial u^+}{\partial n^+} + K^- \frac{\partial u^-}{\partial n^-} &= K \Delta_\tau u \end{aligned}$$

où  $u$  est la valeur commune de  $u^+$  et  $u^-$  sur  $S$ ,  $n^\pm$  la normale unitaire à la surface,  $K^\pm$ ,  $K$  des coefficients matériaux, et  $\Delta_\tau$  le Laplacien par rapport aux variables de la surface. Dans [22], Caillerie étudie ce problème dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope en identifiant les limites faibles lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  en fonction du taux de convergence  $m$  des coefficients élastiques. Il met en évidence différents problèmes limites, correspondant à différentes conditions de transmission, suivant les valeurs de  $m$ . Les valeurs  $m = 1$  et  $m = 3$  sont significatives et donnent respectivement à la limite un comportement de plaque en membrane et de plaque en flexion. On retrouve ces résultats dans Acerbi *et al.* [1], où les auteurs proposent deux modèles limites en identifiant par  $\Gamma$ -convergence, la limite de la fonctionnelle énergie lorsque  $m = 1$  et  $m = 3$  dans un cadre plus général non linéaire. Plus précisément, dans le cas de l'élasticité linéarisée,  $g$ , la densité d'énergie du matériau dans la couche rigide, notée  $B_\varepsilon$ , et  $f$ , la densité d'énergie dans le reste de la structure  $\Omega_\varepsilon$ , sont des fonctions du tenseur des déformations linéarisé  $e(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$  et l'énergie du système est donnée par la fonctionnelle

$$F_\varepsilon(u) := \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} f(e(u)) \, dx + \frac{1}{\varepsilon^m} \int_{B_\varepsilon} g(e(u)) \, dx.$$

Pour déterminer la position d'équilibre de la structure, on est amené à résoudre le problème de minimisation :

$$\min F_\varepsilon(u)$$

sur un sous-espace de  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , pour un certain  $p$ . En identifiant la  $\Gamma$ -limite de la suite de fonctionnelles  $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , ces auteurs retrouvent dans la fonctionnelle limite un terme d'énergie surfacique correspondant à une énergie de membrane pour  $m = 1$ , et à une énergie de flexion pour  $m = 3$ . En élasticité linéaire, lorsque la rigidité est d'ordre  $\frac{1}{\varepsilon}$ , le problème limite est un problème de transmission de type Ventcel, c'est-à-dire faisant intervenir un opérateur différentiel tangentiel d'ordre 2 sur  $S$ . Dans [56], [57], on trouve une étude du problème limite et de ces conditions de transmission pour une couche rigide entourant une partie d'un solide. D'un point de vue plus général, le problème de l'inclusion d'une couche mince rigide est un problème à perturbation régulière (contrairement au cas de la couche molle qui est un problème à perturbation singulière).

Dans un premier chapitre, nous rappelons brièvement quelques éléments de la théorie de l'élasticité justifiant la formulation mathématique des problèmes. En particulier, nous donnons les formulations faibles et locales d'un problème d'élasticité linéaire et rappelons le théorème de Lax-Milgram qui est essentiel dans la détermination de l'existence et l'unicité de la solution du problème. Nous introduisons ensuite la formulation en terme du problème de minimisation de l'énergie du système dans le cas de l'hyperélasticité et rappelons quelques

éléments de la méthode du calcul des variations pour la résolution de ce problème. Enfin, puisque l'étude de notre problème est liée à une analyse asymptotique lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, nous terminons ce chapitre avec quelques rappels concernant la  $\Gamma$ -convergence.

Au chapitre 2, nous commençons notre étude dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope. Dans le cadre d'une analyse asymptotique, suivant deux types géométriques d'inclusion liés à la surface  $S$  et à la direction d'assemblage, on identifie les problèmes limites lorsque la couche intermédiaire a une rigidité d'ordre  $\frac{1}{\varepsilon^m}$  pour  $m = 1, 3$ . On retrouve par la méthode des développements asymptotiques, puis par convergence faible, les problèmes avec une énergie de surface correspondant à une plaque/coque en membrane pour  $m = 1$ , et à une plaque/coque en flexion pour  $m = 3$ . On démontre de plus la convergence forte des solutions des problèmes initiaux vers les solutions des problèmes limites. Nous nous intéressons ensuite à des méthodes de résolution numérique du problème limite posé sur le domaine  $\Omega^+ \cup S \cup \Omega^-$  ( $S$  désigne la surface matérielle) pour  $m = 1$ . Les méthodes de résolution avec décomposition de domaine sont bien appropriées dans une telle situation. Nous en proposons une qui nous conduit à la résolution d'une équation sur  $S$ , pour laquelle nous démontrons la convergence super-linéaire de la méthode du gradient conjugué dans le scalaire. Nous étudions aussi une méthode avec pénalisation et montrons la convergence d'un algorithme de minimisation alterné avec couplage partiel tel celui proposé par Attouch *et al.* [8].

A partir du chapitre 3, on suppose que la rigidité dans la couche mince est d'ordre  $\frac{1}{\varepsilon}$  ( $m = 1$ ). En raisonnant par  $\Gamma$ -convergence, on obtient un modèle limite en élasticité linéaire anisotrope, analogue à celui obtenu au chapitre précédent dans le cas isotrope. On démontre de plus la convergence forte. On y étudie ensuite un problème d'élasticité non linéaire. On suppose que le matériau dans la couche subit des transitions de phase solide/solide et que les déformations dans le reste de la structure sont grandes. On obtient un premier modèle en identifiant la  $\Gamma$ -limite  $F$  de la fonctionnelle énergie  $F_\varepsilon$ , où  $f$  et  $g$  sont alors des fonctions non convexes du gradient  $\nabla u$ . La fonctionnelle  $F$  est la somme d'une énergie volumique (dans  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ ) est d'une énergie de surface qui est l'énergie de membrane proposée par Le Dret et Raoult dans [34] :

$$F(u) = \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} Qf(\nabla u) dx + \int_S Qg_0(\hat{\nabla}\gamma_S(u)) d\hat{x}, \quad (1)$$

où  $Qf$  et  $Qg_0$  sont les enveloppes quasi-convexes des fonctions  $f$  et  $g_0$ , et  $\gamma_S$  l'opérateur trace sur  $S$ .

Dans les deux derniers chapitres, on souhaite plus particulièrement modéliser des situations où la couche intermédiaire a un comportement très différent du reste de la structure, toujours dans le cadre d'une convergence variationnelle. Dans le chapitre 4, on reprend le problème non linéaire étudié précédemment. Si le matériau qui occupe la couche  $B_\varepsilon$  subit des transitions de phase solide/solide, il possède des microstructures qui ne sont pas prises en compte par la fonctionnelle (1). Pour obtenir des informations sur ces microstructures, on reformule l'énergie dans  $B_\varepsilon$  en terme de mesures de Young. L'énergie de la structure est alors donnée par une bifonctionnelle  $\mathcal{F}_\varepsilon$ , fonction d'un couple déplacement/mesure de Young  $(u, \mu)$ , et on définit un procédé de convergence variationnelle pour la suite  $(\mathcal{F}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . On obtient alors un modèle limite qui fournit une description microscopique des quantités  $Qg_0(\hat{\nabla}\gamma_S(u))$  et  $\hat{\nabla}\gamma_S(u)$ .

Enfin, dans le dernier chapitre, on s'intéresse aux phénomènes de discontinuité du déplacement lorsque le matériau dans la couche a une loi de comportement élasto-plastique. La densité d'énergie  $g$  est alors dite à croissance linéaire. Dans [52], Iosifescu *et al.* ont obtenu dans ce cas un premier modèle limite où le déplacement sur  $S$  est défini à un déplacement

rigide près. Avec une stratégie différente, on retrouve le même modèle mais le déplacement sur  $S$  y est défini de façon unique. En s'inspirant des méthodes d'approximation de Norton-Hoff, on étudie dans un premier temps le cas où  $g$  est à croissance d'ordre  $p$ ,  $p > 1$ . On obtient un premier modèle par  $\Gamma$ -convergence lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Alors, en passant à la limite quand  $p$  tend vers 1 dans ce modèle limite, on retrouve le modèle obtenu dans [52] lorsque  $g$  est à croissance linéaire. Cette stratégie est intéressante d'un point de vue numérique car elle permet de considérer le problème obtenu par le premier passage à la limite ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) comme une approximation régulière du modèle de [52] lorsque  $p$  est suffisamment proche de 1. Par contre, ce double passage à la limite n'est pas variationnel. On propose alors de prendre la fonction  $g$  à croissance d'ordre  $p(\varepsilon)$  qui tend vers 1 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Ainsi, on retrouve et améliore le modèle limite de [52], puisque l'on obtient la même fonctionnelle énergie en remarquant qu'avec ce procédé, le déplacement sur  $S$  est défini de façon unique.

Dans toute la thèse, les indices et exposants latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ , les indices et exposants grecs dans l'ensemble  $\{1, 2\}$ . On utilise la convention d'Einstein sur la sommation sur les indices répétés.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans ce premier chapitre, on introduit brièvement les éléments théoriques, mathématiques et mécaniques, utilisés pour la modélisation de problèmes d'élasticité dans un cadre général. Il s'agit de décrire simplement les notions qui interviennent dans les chapitres suivants, et en aucun cas d'en faire un exposé détaillé. Pour cela nous nous référons aux ouvrages cités. Les définitions et résultats sont le plus souvent énoncés dans le cadre mathématique correspondant à notre situation, mais certains le seront dans un cadre plus général afin de tenter de mettre en avant des notions plus abstraites. Pour tous les résultats donnés dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  quelconque, on ne tient évidemment pas compte de la convention portant sur les indices et exposants latins et grecs.

Ce chapitre se présente de la façon suivante. Une première partie est consacrée aux espaces de Sobolev. Nous y rappelons les principales définitions et propriétés. Dans la section 2, nous donnons quelques généralités sur la théorie de l'élasticité nous conduisant à la fonctionnelle énergie et au problème de minimisation associés. Les sections 3 et 4 présentent une brève description de la méthode directe du calcul des variations et de la  $\Gamma$ -convergence.

### 1.1 Espaces de Sobolev

Afin d'étudier les problèmes d'élasticité, il est nécessaire d'introduire quelques notations, définitions, et propriétés relatives aux espaces de Sobolev. Les espaces de Sobolev apparaissent naturellement avec la formulation variationnelle (faible) des problèmes aux limites. Dans toute cette section,  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  de frontière  $\partial\Omega$  Lipschitzienne. Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Pour toute fonction vectorielle  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\nabla v := \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq N}$  appartient à  $\mathbf{M}^{m \times N}$ , l'ensemble des matrices  $m \times N$ . Dans notre étude, on aura  $N = 2, 3$  et  $1 \leq m \leq 3$ .

**Définition 1.1.** Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ . L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est défini par

$$W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) : \nabla v \in L^p(\Omega, \mathbf{M}^{m \times N})\},$$

où la dérivée  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  est prise au sens des distributions. L'espace  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est muni de la norme

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)} = \left(\|v\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)}^p + \|\nabla v\|_{L^p(\Omega, \mathbf{M}^{m \times N})}^p\right)^{1/p}$$

ou de la norme équivalente  $\|v\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)} + \|\nabla v\|_{L^p(\Omega, \mathbf{M}^{m \times N})}$  si  $1 \leq p < +\infty$ ,

$$\|v\|_{W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)} = \max\{\|v\|_{\infty}; \|\nabla v\|_{\infty}\} \text{ si } p = +\infty.$$

On rappelle que pour toute fonction  $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ,  $\|f\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)} = \sum_{i=1}^m \|f_i\|_{L^p(\Omega)}$ . Par définition de la dérivée au sens des distributions,  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^p(\Omega)$  au sens des distributions équivaut à dire qu'il existe  $g_1, \dots, g_N \in L^p(\Omega)$  telles que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \int_{\Omega} v_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} g_j \cdot \varphi dx, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Lorsque  $p = 2$ , l'espace  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est noté  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  pour rappeler sa structure Hilbertienne. L'espace  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Cette définition est étendue en considérant les dérivées d'ordre supérieur.

**Définition 1.2.** Soient  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $1 \leq p \leq +\infty$ . L'espace de Sobolev  $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est défini par

$$W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) : D^\alpha v_i \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq s, \forall i = 1, \dots, m\},$$

où la dérivée  $D^\alpha v_i$  est prise au sens des distributions. Pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ ,

$$D^\alpha v_i = \frac{\partial^{|\alpha|} v_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

où  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ . L'espace  $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est muni de la norme

$$\|v\|_{W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)} = \left[ \sum_{\substack{0 \leq |\alpha| \leq s \\ 1 \leq i \leq m}} \|D^\alpha v_i\|_{L^p(\Omega)}^p \right]^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|v\|_{W^{s,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)} = \max_{\substack{0 \leq |\alpha| \leq s \\ 1 \leq i \leq m}} \|D^\alpha v_i\|_{\infty} \quad \text{si } p = +\infty.$$

Lorsque  $p = 2$ , l'espace  $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est également noté  $H^s(\Omega, \mathbb{R}^m)$ .

On notera parfois (chapitre 2),  $\|\cdot\|_{s,\Omega}$  la norme dans  $H^s(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ,  $s \in \mathbb{N}^*$ , et  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$  la norme dans  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ .

**Remarque 1.1.** Si  $v$  est une fonction scalaire,  $v : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , on note  $W^{s,p}(\Omega)$ .

**Définition 1.3.** Par définition,

- $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ;
- $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  dans  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ;
- $W_0^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  dans  $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ .

Pour tout  $1 \leq p < \infty$ , puisque  $\Omega$  a une frontière régulière, les éléments de  $W_0^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  sont en fait les éléments de  $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  dont la trace sur  $\partial\Omega$  est nulle.

Nous rappelons maintenant quelques propriétés générales des espaces de Sobolev.

**Théorème 1.1.** Soit  $s \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $1 \leq p < +\infty$ ,  $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est un espace de Banach. Lorsque  $p = 2$ ,  $W^{s,2}(\Omega, \mathbb{R}^m) = H^s(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est un espace de Hilbert.

**Proposition 1.1.** Soit  $s \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $1 < p < +\infty$ ,  $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est un espace réflexif.

**Théorème 1.2** (Meyers-Serrin). *Si  $1 < p < +\infty$ ,  $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) \cap W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est dense dans  $W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ .*

Le résultat principal de compacité dans les espaces de Sobolev est le théorème de Rellich-Kondrakov.

**Théorème 1.3** (Rellich-Kondrakov). *Pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ , l'inclusion canonique  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est compacte ; c'est-à-dire, toute partie bornée dans  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est relativement compacte dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ .*

Le théorème suivant est un résultat plus précis de compacité dû à Agmon [2].

**Théorème 1.4** (Agmon). *Soit  $s \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $r > 0$ , l'injection canonique de  $H^{s+r}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  dans  $H^s(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est compacte de classe de Carleman  $\mathcal{C}_t$ ,  $t > N/r$ .*

Un outil essentiel dans l'approche variationnelle des problèmes aux limites est l'inégalité de Poincaré.

**Théorème 1.5** (Inégalité de Poincaré). *Si  $\Omega$  est borné dans une direction, alors pour tout  $1 \leq p < +\infty$ , il existe une constante positive  $C_{p,N}(\Omega)$  telle que*

$$\|v\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)} \leq C_{p,N}(\Omega) \|\nabla v\|_{L^p(\Omega, \mathbf{M}^{m \times N})} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m). \quad (1.1)$$

**Théorème 1.6.** *Soit  $V$  un sous-espace vectoriel fermé de  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  tel que la seule fonction constante qui appartient à  $V$  est la fonction nulle. Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|v\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)} \leq C \|\nabla v\|_{L^p(\Omega, \mathbf{M}^{m \times N})} \quad \forall v \in V.$$

Une autre inégalité importante est l'inégalité de Korn qui fait intervenir le gradient symétrique  $e(v) := \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T)$ .

**Proposition 1.2** (Inégalité de Korn). *Soit  $\Gamma_0$  une partie de la frontière  $\partial\Omega$  telle que  $\text{mes}\Gamma_0 > 0$  (aussi notée  $|\Gamma_0| > 0$ ). Alors pour tout  $1 \leq p < +\infty$ , il existe une constante positive  $C_{p,N}(\Omega, \Gamma_0)$  telle que*

$$\|v\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)} \leq C_{p,N}(\Omega, \Gamma_0) \|e(v)\|_{L^p(\Omega, M_s^{m \times N})} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (1.2)$$

où  $M_s^{m \times N}$  est l'ensemble des matrices  $m \times N$  symétriques.

Il est important de rappeler que pour les problèmes aux limites avec condition de type Dirichlet, il est nécessaire de pouvoir donner un sens à la variable  $v$  sur la frontière  $\partial\Omega$ , ce qui n'est pas possible avec les fonctions qui appartiennent seulement à  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$  ; c'est la notion de trace dans les espaces de Sobolev dont nous rappelons la définition.

**Définition 1.4.** *Pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$  est dense dans  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  et l'application*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m) &\longrightarrow L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}^m) \\ v &\longmapsto \gamma(v) = v|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

qui à tout élément  $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$  associe sa restriction à  $\partial\Omega$ , peut être étendue par continuité en une application linéaire continue de  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  dans  $L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}^m)$ , toujours notée  $\gamma$ . L'application ainsi définie

$$\gamma : W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \longrightarrow L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}^m)$$

est appelée l'opérateur trace.

**Proposition 1.3** (Formule de Green). *Pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  et tout  $v \in W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , avec  $p, q > 1$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , on a*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx = - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(u_i) \gamma(v_i) (n \cdot e_j) d\Gamma$$

pour tout  $j = 1, \dots, N$ .

**Remarque 1.2.** *La plupart de ces théorèmes sont valables sous des hypothèses plus faibles pour  $\Omega$ .*

## 1.2 Mesures de Young

Il sera parfois intéressant de modéliser le problème d'élasticité dans l'espace des mesures de Young (voir chapitre 4). Nous exposons brièvement dans cette section quelques éléments de la théorie générale des mesures de Young. Dans le cadre de l'élasticité nous aurons besoin d'une classe particulière de mesures de Young : les mesures générées par des gradients.

### 1.2.1 Introduction aux mesures de Young

Pour une étude générale de la théorie des mesures de Young, nous renvoyons le lecteur à [11], [65] et [66]. Dans ce paragraphe,  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $E = \mathbb{R}^d$ ,  $d = m \times N$  de sorte que  $\mathbb{R}^d$  est canoniquement isomorphe à  $\mathbf{M}^{m \times N}$  l'espace des matrices  $m \times N$ .

**Définition 1.5.** *On appelle mesure de Young sur  $\Omega \times E$  toute mesure positive  $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega \times E)$  dont l'image  $\pi_{\Omega} \# \mu$  par la projection  $\pi_{\Omega}$  sur  $\Omega$  est la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}$  sur  $\Omega$ , i.e., pour tout ensemble Borélien  $B \subset \Omega$ ,*

$$\pi_{\Omega} \# \mu(B) := \mu(B \times E) = \mathcal{L}(B).$$

On note  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$  l'ensemble des mesures de Young sur  $\Omega \times E$ .

Considérons  $\mathcal{C}_b(\Omega; E)$  l'ensemble des fonctions de Carathéodory, c'est à dire les fonctions  $\psi$  vérifiant :

- i)  $(x, \lambda) \mapsto \psi(x, \lambda)$  est mesurable ;
- ii)  $x$  pp,  $\lambda \mapsto \psi(x, \lambda)$  est continue bornée ;
- iii)  $x \mapsto \|\psi(x, \cdot)\|_{\infty}$  est intégrable.

On munit  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$  de la topologie étroite qui est la topologie la plus faible rendant l'application

$$\psi \mapsto \int_{\Omega \times E} \psi d\mu$$

continue sur  $\mathcal{C}_b(\Omega; E)$ . Cette topologie induit la convergence étroite des mesures de Young définie par : soient  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de mesures dans  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$  et  $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega; E)$ , la suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge étroitement vers  $\mu$  si et seulement si

$$\forall \psi \in \mathcal{C}_b(\Omega; E), \int_{\Omega \times E} \psi(x, \lambda) d\mu_n \rightarrow \int_{\Omega \times E} \psi(x, \lambda) d\mu.$$

On note  $\mu_n \xrightarrow{\text{nar}} \mu$ .

L'espace  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$  est fermé dans  $\mathcal{M}(\Omega \times E)$  muni de la convergence étroite. De plus, la topologie associée à cette convergence est métrisable. Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Fubini.

**Théorème 1.7.** *Pour toute mesure de Young  $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega; E)$ , il existe une famille  $(\mu_x)_{x \in \Omega}$  de mesures de probabilités sur  $E$  telle que*

$$(i) \quad x \mapsto \int_E \psi(x, \lambda) d\mu_x \text{ est } \mathcal{L}\text{-mesurable,}$$

$$(ii) \quad \int_{\Omega \times E} \psi(x, \lambda) d\mu(x, \lambda) = \int_{\Omega} \left( \int_E \psi(x, \lambda) d\mu_x(\lambda) \right) dx$$

*pour toute fonction  $\psi$   $\mu$ -intégrable. La famille  $(\mu_x)_{x \in \Omega}$  est appelée la désintégrée de la mesure de Young  $\mu$  et on note  $\mu = \mu_x \otimes \mathcal{L}$ .*

Dans notre situation nous utiliserons une certaine classe de mesures de Young : les mesures de Young générées par des gradients de fonctions. Avant cela il est utile d'introduire les mesures de Young associées à une fonction. Soit  $u : \Omega \rightarrow E$  une fonction Borélienne. La mesure de Young  $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega; E)$  associée à la fonction  $u$  est la mesure  $\mu := \delta_{u(x)} \otimes \mathcal{L}$ . Elle agit sur  $\mathcal{C}_b(\Omega; E)$  de la manière suivante.

$$\forall \psi \in \mathcal{C}_b(\Omega; E), \quad \int_{\Omega \times E} \psi(x, \lambda) d\mu = \int_{\Omega} \psi(x, u(x)) dx.$$

Pour obtenir des propriétés de compacité, la notion de tension d'une suite de mesures de Young est essentielle.

**Définition 1.6.** *Une suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de mesures dans  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$  est dite tendue si*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon \subset E \text{ compact tel que } \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(\Omega \times (E \setminus K_\varepsilon)) < \varepsilon.$$

**Remarque 1.3.** *Il découle de cette définition, que toute suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de mesures de Young associée à une suite de fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée dans  $L^1(\Omega, E)$  est tendue.*

Le théorème de compacité suivant joue un rôle fondamental dans l'étude de la  $\Gamma$ -convergence de la fonctionnelle énergie dans l'espace des mesures de Young.

**Théorème 1.8** (Prokhorov). *Soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite tendue dans  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$ . Alors, il existe une sous-suite  $(\mu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  et  $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega; E)$  tels que*

$$\mu_{n_k} \xrightarrow{\text{nax}} \mu.$$

**Corollaire 1.1.** *Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions bornée dans  $L^p(\Omega, E)$ ,  $p > 1$ . Alors il existe une sous-suite non renommée et  $u \in L^p(\Omega, E)$  tels que  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^p(\Omega, E)$ . Soit  $\mu_n := \delta_{u_n} \otimes \mathcal{L}$ . Alors il existe  $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega; E)$  et une sous-suite tels que  $\mu_n \xrightarrow{\text{nax}} \mu$ . De plus on a*

$$u(x) = \int_E \lambda d\mu_x(\lambda).$$

La mesure de Young  $\mu$  est dite *générée* par la suite de fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En général,  $\mu$  n'est pas associée à une fonction.

La proposition qui suit est un résultat de semi-continuité inférieure pour les fonctions positives.

**Proposition 1.4.** *Soit  $\varphi : \Omega \times E \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction  $\mathcal{B}(\Omega) \otimes \mathcal{B}(E)$ -mesurable telle que  $\lambda \mapsto \varphi(x, \lambda)$  est sci pp  $x \in \Omega$ . Soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de mesures de Young dans  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$  qui converge étroitement vers  $\mu$  dans  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$ . Alors*

$$\int_{\Omega \times E} \varphi(x, \lambda) d\mu(x, \lambda) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \times E} \varphi(x, \lambda) d\mu_n(x, \lambda).$$

Rappelons la notion d'intégrabilité uniforme : une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , est dite *uniformément intégrable* si

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\{|f_n| > R\}} |f_n| = 0.$$

On peut étendre  $\mathcal{C}_b(\Omega; E)$ , l'ensemble des fonctions-test pour la convergence étroite de la façon suivante :

**Proposition 1.5.** *Soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de mesures de Young associée à une suite de fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge étroitement vers une mesure de Young  $\mu$ . D'autre part, soit  $\varphi : \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{B}(\Omega) \otimes \mathcal{B}(E)$ -mesurable telle que  $\lambda \mapsto \varphi(x, \lambda)$  est continue pp.  $x \in \Omega$ . Supposons de plus que  $x \mapsto \varphi(x, u_n(x))$  est uniformément intégrable. Alors*

$$\int_{\Omega \times E} \varphi(x, \lambda) d\mu(x, \lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(x, u_n(x)) dx.$$

## 1.2.2 Mesures de Young générées par des gradients

**Définition 1.7.** *Soit  $p > 1$ . Une mesure  $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega, E)$  est une  $W^{1,p}$ -mesure de Young si et seulement si il existe une suite de fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée dans  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  telle que*

$$\delta_{\nabla u_n(x)} \otimes \mathcal{L} \xrightarrow{\text{nar}} \mu.$$

Le résultat qui suit est important pour appliquer la proposition 1.5. Nous renvoyons à [37] pour une preuve de ce résultat.

**Proposition 1.6.** *Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  dont les gradients génèrent une  $W^{1,p}$ -mesure de Young  $\mu$ . Alors il existe une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  dont les gradients génèrent la même mesure de Young  $\mu$ , et telle que  $(|\nabla v_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$  est uniformément intégrable.*

Le théorème 1.9, dû à D. Kinderlehrer et P. Pedregal (cf. [53]), est un résultat fondamental. Il caractérise les  $W^{1,p}$ -mesures de Young.

**Théorème 1.9.** *Soit  $p > 1$ . Une mesure  $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega, E)$  est une  $W^{1,p}$ -mesure de Young si et seulement si il existe  $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  tel que :*

$$i) \quad \nabla u(x) = \int_E \lambda d\mu_x(\lambda),$$

ii) *pour toute fonction quasi-convexe  $\phi$  qui satisfait une condition de croissance d'ordre  $p$  on a*

$$\phi(\nabla u(x)) \leq \int_E \phi(\lambda) d\mu_x(\lambda) \text{ pp. } x \in \Omega,$$

$$iii) \quad \int_{\Omega \times E} |\lambda|^p d\mu(x, \lambda) < +\infty.$$

*La fonction  $u$  est appelée déformation sous-jacente à la mesure de Young  $\mu$ .*

### 1.3 Généralités en élasticité

Le modèle mathématique de l'élasticité tridimensionnelle est constitué d'un système de trois équations aux dérivées partielles "fortement non linéaires" posées sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , associées à des conditions aux limites. Afin de fixer les notations, nous rappelons brièvement quelques notions de mécanique des milieux continus. Pour une présentation plus détaillée, nous renvoyons à M. E. Gurtin [50], P.G. Ciarlet [26].

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un ouvert borné connexe de frontière  $\partial\Omega$  Lipschitzienne, configuration de référence d'un solide "non déformé".

Etant donnée une déformation  $\phi$ , on considère la configuration déformée  $\Omega^\phi := \phi(\Omega)$ . Tout point  $x^\phi := \phi(x)$  est la position dans la configuration déformée du point  $x \in \Omega$ . La matrice  $\nabla\phi(x)$  est appelée gradient de la déformation. Le principe de non interpénétrabilité de la matière et de préservation de l'orientation implique que  $\det \nabla\phi > 0$ .

A toute déformation  $\varphi$  est associé un déplacement  $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  défini par la relation

$$u(x) = \phi(x) - x.$$

Soit  $\mathbb{S}^2 := \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| = 1\}$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . L'un des résultats fondamentaux de la mécanique des milieux continus est le *principe des contraintes d'Euler-Cauchy*. Cet axiome, formulé dans la configuration déformée, postule l'existence d'un vecteur des contraintes  $t^\phi(x^\phi, n^\phi)$  qui dépend de  $x^\phi \in \Omega^\phi$  et de  $n^\phi \in \mathbb{S}^2$ , tel que les axiomes de l'équilibre des forces et de l'équilibre des moments soient satisfaits pour une densité de force volumique  $\Phi^\phi$  et une densité de force surfacique  $\varphi^\phi : \Gamma_\varphi^\phi \subset \Gamma^\phi \longrightarrow \mathbb{R}^3$  données. Une des conséquences principales de cet axiome est le théorème de Cauchy qui assure l'existence d'un champ de tenseurs symétriques  $T^\phi : \bar{\Omega}^\phi \longrightarrow \mathbf{M}^{3 \times 3}$  tel que

$$t^\phi(x^\phi, n) = T^\phi(x^\phi)n \text{ pour tout } x^\phi \in \Omega^\phi \text{ et tout } n \in \mathbb{S}^2,$$

et tel que

$$-\operatorname{div}^\phi T^\phi(x^\phi) = \Phi^\phi(x^\phi) \text{ pour tout } x^\phi \in \Omega^\phi, \quad (1.3)$$

$$T^\phi(x^\phi)n^\phi(x^\phi) = \varphi^\phi(x^\phi) \text{ pour tout } x^\phi \in \Gamma_\varphi^\phi, \quad (1.4)$$

où  $n^\phi(x^\phi)$  est la normale unitaire extérieure à  $\Gamma_\varphi^\phi$  au point  $x^\phi$ . Le tenseur des contraintes  $T^\phi$ , défini dans la configuration déformée, est appelé tenseur des contraintes de Cauchy. Les équations (1.3) et (1.4) peuvent être exprimées dans la configuration de référence en terme du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $T(x) := (\det \nabla\phi(x))T^\phi(x^\phi)\nabla\phi(x)^{-1}$ ,  $x^\phi = \phi(x)$  (voir [26]) :

$$-\operatorname{div}T(x) = \Phi(x) \text{ pour tout } x \in \Omega, \quad (1.5)$$

$$T(x)n(x) = \varphi(x) \text{ pour tout } x \in \Gamma_\varphi, \quad (1.6)$$

$n$  étant la normale unitaire extérieur à  $\Gamma_\varphi$ . Le champ de vecteurs  $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  est la densité volumique de force appliquée dans la configuration de référence associée à  $\Phi^\phi$ . De même,  $\varphi : \Gamma_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3$  est la densité surfacique de force appliquée dans la configuration de référence associée à  $\varphi^\phi$ . Ces équations d'équilibre dans la configuration de référence constituent un problème aux limites dont les inconnues sont les six composantes du tenseur des contraintes (compte tenu des relations de symétrie) et les trois composantes de la déformation, il faut

donc fournir des équations supplémentaires : ce sont les *lois de comportement*. La loi de comportement d'un matériau est la relation qui lie le tenseur des contraintes de Cauchy au gradient de la déformation.

Pour un matériau élastique, le tenseur des contraintes, en tout point de  $\bar{\Omega}$  est une fonction connue du gradient de la déformation ; c'est la *réponse* du matériau. De façon plus précise, un matériau est dit élastique s'il existe une application  $\hat{T} : \bar{\Omega} \times \mathbf{M}_+^{3 \times 3}$  ( $\mathbf{M}_+^{3 \times 3}$  est l'ensemble des matrices  $3 \times 3$  à déterminant strictement positif) telle que, pour toute déformation  $\phi$ , le premier tenseur de Piola-Kirchhoff vérifie :

$$T(x) = \hat{T}(x, \nabla \phi(x)) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Lorsque la *densité de masse* et la *réponse* d'un matériau occupant une configuration de référence  $\bar{\Omega}$  sont indépendantes de  $x$ , le matériau est dit *homogène*.

La réponse du matériau  $\hat{T}$  doit satisfaire à un axiome fondamental de la mécanique : le principe de l'indifférence matérielle. Le principe de l'indifférence matérielle exige que le vecteur des contraintes soit indépendant du repère dans lequel  $\hat{T}$  est calculé. Les contraintes sont intrinsèques, elles ne dépendent, a priori, que des distances relatives entre les points matériels, et non de l'orientation des vecteurs qui les joignent. Cela se traduit de la façon suivante :

$$\forall A \in \mathbf{M}_+^{3 \times 3}, \forall Q \in SO(3), \forall x \in \bar{\Omega}, \hat{T}(x, QA) = Q\hat{T}(x, A).$$

L'ensemble des réponses possibles d'un matériau élastique est donc limité par l'axiome de l'indifférence matérielle. La prise en compte des propriétés de symétrie matérielle va encore restreindre l'ensemble des réponses possibles pour un matériau donné. L'une de ces propriétés est l'isotropie. Un matériau élastique est dit *isotrope* au point  $x$  si sa réponse  $\hat{T}$  vérifie

$$\hat{T}(x, AQ) = \hat{T}(x, A)Q \quad \forall A \in \mathbf{M}_+^{3 \times 3}, Q \in SO(3).$$

Un matériau est alors dit isotrope, s'il est isotrope en tout point.

### 1.3.1 Hyperélasticité

Le tenseur des contraintes  $T(x)$  d'un matériau élastique est désormais noté  $T(x, \nabla \phi(x))$ . Supposons que le déplacement est imposé sur la partie  $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \Gamma_\varphi$  de la frontière. Nous obtenons finalement le problème aux limites :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} T(x, \nabla \phi(x)) = \Phi(x) & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ T(x, \nabla \phi(x))n = \varphi(x) & \text{pour tout } x \in \Gamma_\varphi, \\ \phi(x) = \phi_0(x) & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Dans le cas des matériaux *hyperélastiques* il existe une fonction

$$W : \bar{\Omega} \times \mathbf{M}_{s,+}^{3 \times 3} \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que  $W(x, \cdot)$  est dérivable pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ , et telle que

$$T(x, A) = \frac{\partial W}{\partial A}(x, A) \quad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega}, A \in \mathbf{M}_{s,+}^{3 \times 3}.$$

La fonction  $W$  est appelée densité d'énergie. Si les forces appliquées  $\Phi$  et  $\varphi$  sont conservatives, le problème peut être reformulé en un problème de minimisation d'une fonctionnelle : minimiser

l'énergie totale du système sur l'ensembles des déformations admissibles. L'énergie totale du système  $I$  est la fonctionnelle définie par

$$I(\psi) := \int_{\Omega} W(x, \nabla\phi(x))dx - L(\psi),$$

où  $L$  est le travail des forces appliquées.

La méthode directe du calcul des variations est un outil essentiel dans la résolution de ces problèmes de minimisation. Cette méthode fait appel de manière très importante à la notion de semi-continuité inférieure et de convexité, mais nous verrons qu'en particulier la notion de convexité pour la densité d'énergie  $W$  est incompatible avec le principe de l'indifférence matérielle. Une manière de surmonter ces difficultés est de considérer des notions plus faibles : les notions de poly-, quasi-, rang-1-convexité. Nous y reviendrons un peu plus loin.

Comme  $u(x) = x + \phi(x)$ , nous préférerons dans toute la suite de la thèse raisonner avec le déplacement  $u$  comme inconnue.

**Remarque 1.4.** *Il n'existe pas de théorème général d'existence de solutions pour le système (1.7), mais seulement des résultats partiels, valables dans certaines conditions, basés sur le théorème des fonctions implicites dans les espaces de Sobolev  $W^{m,p}$ , avec  $m \geq 2$  et  $p \geq 3$  (voir [26], [60]).*

### 1.3.2 Elasticité linéaire

Nous avons vu dans la partie précédente qu'un problème d'élasticité consiste à déterminer le champ des déplacements  $u(x)$  (ou champ des déformations  $\phi(x)$ ) et le champ des contraintes d'un matériau élastique qui occupe avant contrainte (donc avant déformation) un domaine  $\Omega$  borné de  $\mathbb{R}^3$ .

Dans l'hypothèse de linéarité, les contraintes (notées  $\sigma$ ) sont fonctions linéaires du tenseur linéarisé des déformations  $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ . On obtient alors le système d'équations suivant :

– Condition d'équilibre :

$$-\operatorname{div}\sigma(x) = \Phi(x) \quad \forall x \in \Omega; \quad (1.8)$$

– Loi de comportement :

$$\sigma(x) = ae(u(x)), \quad (1.9)$$

ou, composante par composante,  $\sigma_{ij}(x) = a_{ijkh}e_{kh}(u(x))$ , sous les hypothèses de symétrie et d'ellipticité suivantes :

$$\begin{cases} a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{khij} \\ \exists C > 0, a_{ijkh}\tau_{ij}\tau_{kh} \geq C\tau_{ij}\tau_{kh} \quad \forall \tau_{ij} = \tau_{ji}; \end{cases} \quad (1.10)$$

– Conditions aux limites

$$\begin{cases} u(x) = U(x) \text{ donné } \forall x \in \Gamma_0 \\ \sigma(x).n(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \Gamma_\varphi \end{cases} \quad (1.11)$$

avec l'hypothèse  $\operatorname{mes}\Gamma_0 > 0$ .

Pour simplifier l'exposé, supposons que le déplacement imposé sur  $\Gamma_0$  est nul ( $U = 0$ ). Considérons l'espace  $V := \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) : \gamma(v) = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ . La formulation variationnelle équivalente du problème (1.8)-(1.11) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (1.12)$$

où

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \sigma_{ij} e_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} a_{ijkh} e_{kh}(u) e_{ij}(v) dx,$$

et

$$L(v) := \int_{\Omega} \Phi_i v_i dx + \int_{\Gamma_{\varphi}} \varphi_i v_i d\Gamma.$$

Le résultat fondamental pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème d'élasticité linéaire est le théorème de Lax-Milgram.

**Théorème 1.10** (Lax-Milgram). *Soit  $V$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme associée  $\|\cdot\| := (\langle \cdot, \cdot \rangle)^{1/2}$ . Soit  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire qui satisfait i) et ii) :*

i)  *$a$  est continue, c'est-à-dire, il existe une constante  $M \in \mathbb{R}^+$  telle que*

$$\forall u, v \in V \quad |a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| ;$$

ii)  *$a$  est coercive, c'est-à-dire, il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que*

$$\forall v \in V \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2.$$

Alors, pour toute forme linéaire continue  $L$  sur  $V$ , il existe un unique  $u \in V$  tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

Sous les hypothèses de régularité sur le chargement  $\Phi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et  $\varphi \in L^2(\Gamma_{\varphi}, \mathbb{R}^3)$ , et en supposant de plus que les  $a_{ijkh}$  sont bornés, il est facile de voir que nous sommes dans les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram. Le problème (1.12) possède donc une solution unique. Ce raisonnement reste valable avec d'autres conditions aux limites moyennant éventuellement certaines hypothèses. Par exemple, lorsque  $\Gamma_0$  est vide, le solide n'est pas fixé, et est seulement soumis à un système de forces. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que ce système soit équivalent à un torseur nul. Ceci donne la condition nécessaire :

$$\int_{\Omega} \Phi \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot v \, d\Gamma = 0$$

pour tout déplacement rigide  $v$ . Dans ce cas-là, la solution du problème (1.12) est unique à un déplacement rigide près.

De plus, le problème (1.12) est équivalent au problème de minimisation

$$\min\{J(v) : v \in V\} \quad (1.13)$$

où  $J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$  est l'énergie du système. La fonctionnelle  $J$  est convexe, continue et coercive sur  $V$ .

## 1.4 La méthode directe du calcul des variations en élasticité

### 1.4.1 Principe de la méthode

Dans le cas de l'hyperélasticité, le problème revient à trouver les minimiseurs de l'énergie

$$I(u) := \int_{\Omega} W(\nabla u) dx,$$

$W$  étant la densité d'énergie du matériau, sur l'ensemble des déplacements admissibles  $V$ , qui est un espace réflexif en général, souvent inclus dans  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , pour un certain  $p$ . La méthode directe du calcul des variations, introduite par Hilbert puis développée par Tonelli, fournit un résultat d'existence pour de tels problèmes de minimisation et une méthode de résolution. Cette méthode fait appel de façon essentielle à la notion de semi-continuité inférieure de la fonctionnelle  $I$ . Nous rappelons ici brièvement le principe de cette méthode et quelques définitions et résultats que nous utiliserons dans les chapitres suivants. Pour une étude approfondie de la méthode directe du calcul des variations, nous renvoyons le lecteur à Dacorogna [29].

Le principe de la méthode est le suivant :

- Etant donnée une suite minimisante (une telle suite existe toujours), montrer que la suite est relativement compacte pour une topologie  $\tau$  sur l'espace considéré. Le plus souvent, ceci provient d'estimations obtenues grâce à une propriété de coercivité de la fonction  $W$ .
- Etablir la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle énergie relativement à cette topologie (i.e.  $\liminf_{n \in \mathbb{N}} I(u_n) \geq I(u)$  si  $u_n \xrightarrow{\tau} u$ ).

Alors, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite minimisante, on pourra en extraire une sous-suite qui converge (pour la topologie  $\tau$ ) vers un certain  $u$  qui est un minimiseur de  $I$ .

Dans le cas où  $W$  est convexe, moyennant des hypothèses de coercivité et de continuité, la méthode du calcul des variations assure l'existence d'une solution au problème

$$\min_{u \in V} \int_{\Omega} W(\nabla u) dx. \quad (\mathcal{P})$$

Mais l'hypothèse de convexité de  $W$  n'est pas réaliste d'un point de vue mécanique. En particulier, elle est incompatible avec le principe de l'indifférence matérielle. Si la condition de convexité est une condition suffisante de semi-continuité inférieure, elle n'est pas nécessaire, et il convient de considérer une classe plus large de fonctions  $W$ . Une condition nécessaire et suffisante est la quasiconvexité, notion introduite par Morrey [59] (pour  $W^{1,\infty}$  et étendue à  $W^{1,p}$  par Ball et Murat [13]). La fonction  $W$  est quasi-convexe si elle vérifie l'inégalité de quasi-convexité : pour tout ouvert borné de  $D$  inclus dans  $\mathbb{R}^3$  avec  $|\partial D| = 0$ ,

$$\forall A \in \mathbf{M}^{3 \times 3}, \forall \phi \in W_0^{1,p}(D, \mathbb{R}^3), W(A) \leq \frac{1}{|D|} \int_D W(A + \nabla \phi(x)) dx. \quad (1.14)$$

l'hypothèse de quasi-convexité est difficile à vérifier en pratique, à cause de son caractère non local. Deux autres notions importantes sont considérées : la rang-1-convexité et la polyconvexité. La rang-1-convexité est une notion plus faible, mais plus facile à vérifier. La fonction  $W$  est dite rang-1-convexe si

$$\forall \lambda \in [0, 1], A, A' \in \mathbf{M}^{3 \times 3}; \text{rang } \{A - A'\} \leq 1, W(\lambda A + (1 - \lambda)A') \leq \lambda W(A) + (1 - \lambda)W(A').$$

Cela signifie que la fonction  $W$  est convexe sur les segments dont les extrémités diffèrent d'une matrice de rang un. Mais cette propriété n'est pas équivalente à la quasi-convexité (voir Šverák [67]) et ne constitue donc qu'une condition nécessaire de semi-continuité inférieure. La poly-convexité, introduite par Ball, [10], est une notion plus forte. Toute fonction poly-convexe est quasi-convexe. La théorie, développée par Ball, qui utilise les fonctions poly-convexes, permet de donner des résultats d'existence et unicité de la solution pour le problème  $(\mathcal{P})$  tout en respectant les principes de la mécanique.

Toutefois, si la quasi-convexité est difficile à vérifier, elle n'est pas non plus une hypothèse toujours réaliste. Les matériaux qui présentent des changements de phase solide/solide, ont une densité d'énergie qui possède en général plusieurs puits de potentiels et ne sont donc pas quasi-convexes. Sans cette propriété de semi-continuité inférieure de la fonctionnelle  $I$ , le problème  $(\mathcal{P})$  ne possède pas de solution. Un procédé classique est alors de remplacer la fonctionnelle  $I$  par son enveloppe semi-continue inférieure (sci), par rapport à la topologie faible de  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  (i.e. la plus grande fonction sci inférieure ou égale à  $I$ ), qu'on note  $cl(I)$  : c'est la *relaxation*. Le problème relaxé  $cl(\mathcal{P})$  possède alors au moins une solution, et on a  $\inf_{u \in V} I(u) = \min_{u \in V} cl(I)(u)$ . Cette approche n'est pas la seule possible. Une autre alternative consiste à relaxer le problème dans l'espace des mesures de Young. Le principe est le même : on prend comme domaine de la fonctionnelle intégrale l'espace des mesures de Young  $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbf{M}^{3 \times 3})$  muni d'une topologie métrisable rendant les suites minimisantes compactes. On calcule alors l'enveloppe sci de  $I$  pour cette topologie. Les deux problèmes relaxés sont différents, mais peuvent être reliés (voir chapitre 4).

Le théorème abstrait de relaxation établit que si  $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est une fonction propre, définie sur un espace métrisable  $(X, d)$ , et s'il existe une suite minimisante  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$  est relativement compact (i.e. il existe une sous-suite qui converge dans  $X$ ), alors

- i)  $\inf_X F = \min_X cl(F)$  ;
- ii) toute valeur d'adhérence  $\bar{u}$  de  $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$  est solution de  $\min_X cl(F)$ , i.e.  $cl(F)(\bar{u}) = \min_X cl(F)$ .

Pour appliquer cette méthode à la fonctionnelle  $I$  dans l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  ou dans l'espace des mesures de Young, il faut faire des hypothèses de croissance sur la densité d'énergie  $W$ . Dans toute la suite, on dira que la densité d'énergie  $W$ , ou plus généralement, qu'une fonction  $W : \mathbf{M}^{m \times N} \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfait une condition de type  $(\mathcal{C}_p)$ ,  $p \geq 1$ , si

$$\begin{cases} \exists \alpha, \beta, C \in \mathbb{R}_*^+ \text{ tels que } \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbf{M}^{m \times N}, \alpha(|\lambda|^p - 1) \leq W(\lambda) \leq \beta(1 + |\lambda|^p), \\ |W(\lambda) - W(\lambda')| \leq C|\lambda - \lambda'| (1 + |\lambda|^{p-1} + |\lambda'|^{p-1}), \end{cases} \quad (1.15)$$

et on dira que la fonction  $W : \mathbf{M}^{m \times N} \rightarrow \mathbb{R}$ , vérifie une condition de croissance d'ordre  $p$  si

$$\exists \gamma \geq 0; \forall \lambda \in \mathbf{M}^{m \times N}, |W(\lambda)| \leq \gamma(1 + |\lambda|^p). \quad (1.16)$$

Sous ces hypothèses, la densité  $W$  ne respecte pas la contrainte  $\det(I + \nabla u) > 0$  presque partout dans  $\Omega$ , ni la condition  $W(\xi) \rightarrow +\infty$  quand  $\det \xi \rightarrow 0^+$ , qui traduit le principe mécanique suivant lequel il faut une énergie infinie pour réduire à zéro le volume d'une petite pièce d'un matériau. C'est pourquoi cette modélisation constitue une première approche des problèmes de l'élasticité non linéaire.

### 1.4.2 Quelques résultats utiles de relaxation

Afin de rendre cette introduction la plus complète possible, on rappelle maintenant les principaux résultats de relaxation dans  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  et  $\mathcal{Y}(\Omega, E)$ . On suppose que la fonction  $W$  satisfait une condition  $(\mathcal{C}_p)$ ,  $p \geq 1$ . Considérons la fonctionnelle  $I : L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définie par

$$I(u) := \begin{cases} \int_{\Omega} W(\nabla u) dx & \text{si } u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est l'ensemble des fonctions de  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  qui ont une trace nulle sur  $\Gamma_0$ .

#### Relaxation dans $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , $p > 1$

On commence par rappeler le résultat de relaxation dans  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ,  $p > 1$ .

**Théorème 1.11.** *Lorsque  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est muni de la convergence forte, l'enveloppe sci de la fonctionnelle  $I$  est la fonctionnelle  $\bar{I}$  définie par*

$$\bar{I}(u) := \begin{cases} \int_{\Omega} QW(\nabla u) dx & \text{si } u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $QW$  est l'enveloppe quasi-convexe de la fonction  $W$ , i.e., la plus grande fonction quasi-convexe inférieure ou égale à  $W$ .

L'inconvénient de cette stratégie est qu'elle fait intervenir  $QW$ , l'enveloppe quasi-convexe de la fonction  $W$ , ne présentant plus les puits de potentiels de  $W$ . La fonctionnelle  $\bar{I}$  ne fournit donc aucune information sur le comportement oscillatoire des gradients des suites minimisantes. La relaxation de la fonctionnelle  $I$  dans l'espace des mesures de Young muni de la convergence étroite va permettre de prendre en compte ces oscillations.

#### Relaxation dans $\mathcal{Y}(\Omega, E)$

Soient  $\nabla\mathcal{Y}(\Omega, E)$  et  $\mathcal{E}\nabla\mathcal{Y}(\Omega, E)$  les ensembles de mesures de Young définis par :

$$\mu \in \nabla\mathcal{Y}(\Omega, E) \Leftrightarrow \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, u_n \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \text{ telle que } \delta_{\nabla u_n} \otimes dx \xrightarrow{\text{nar}} \mu,$$

$$\mu \in \mathcal{E}\nabla\mathcal{Y}(\Omega, E) \Leftrightarrow \exists u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \text{ tel que } \mu = \delta_{\nabla u} \otimes dx.$$

Puisque  $u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est défini de façon unique par son gradient  $\nabla u \in L^p(\Omega, E)$ , l'application  $\nabla\mathcal{Y}(\Omega, E) \ni \mu \mapsto u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ,  $u$  défini par  $\nabla u(x) = \int_E \lambda d\mu_x(\lambda)$  est bien définie.

La reformulation du problème  $(\mathcal{P})$  en terme de mesures de Young nous conduit à considérer la fonctionnelle  $J : \mathcal{Y}(\Omega, E) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définie par

$$J(\mu) := \begin{cases} \int_{\Omega \times E} W(\lambda) d\mu(x, \lambda) & \text{si } \mu \in \mathcal{E}\nabla\mathcal{Y}(\Omega, E), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que lorsque  $\mu \in \mathcal{E}\nabla\mathcal{Y}(\Omega, E)$ , la fonctionnelle  $J$  est exactement la fonctionnelle  $I$ . Nous n'avons fait que réécrire le problème  $(\mathcal{P})$  qui est donc équivalent au problème

$$\inf\{J(\mu) : \mu \in \mathcal{Y}(\Omega, E)\}.$$

Considérons maintenant la fonctionnelle  $\bar{J} : \mathcal{Y}(\Omega, E) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définie par

$$\bar{J}(\mu) := \begin{cases} \int_{\Omega \times E} W(\lambda) d\mu(x, \lambda) & \text{si } \mu \in \nabla\mathcal{Y}(\Omega, E), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Théorème 1.12.** *Lorsque  $\mathcal{Y}(\Omega, E)$  est muni de la convergence étroite, l'enveloppe sci de la fonctionnelle  $J$  est la fonctionnelle  $\bar{J}$ . De plus,*

$$\inf_{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)} I(u) = \min_{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)} \bar{I}(u) = \min_{\mu \in \mathcal{Y}(\Omega, E)} \bar{J}(\mu),$$

et si  $\bar{\mu}$  minimise  $\bar{J}$ , alors la fonction  $\bar{u}$  définie par  $\nabla \bar{u} = \int_{\mathbf{M}^{m \times N}} \lambda d\bar{\mu}_x(\lambda)$  est un minimiseur de  $\bar{I}$ . Enfin, si  $u_n$  est un  $1/n$ -minimiseur de  $I$ , alors toute valeur d'adhérence (pour la convergence étroite) de la suite  $(\delta_{\nabla u_n(x)} \otimes dx)_{n \in \mathbb{N}}$  est un minimiseur de  $\bar{J}$ .

### Relaxation dans $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$

On termine cette section avec le résultat de relaxation dans  $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . On suppose que  $W$  satisfait une condition  $(\mathcal{C}_1)$ . Soit  $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$  l'ensemble des fonctions  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  intégrables (qui appartiennent à  $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ) telles que le gradient  $Du$  est une mesure (qui appartient à  $\mathcal{M}(\Omega, \mathbf{M}^{m \times N})$ ).

**Théorème 1.13.** *Lorsque  $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  est muni de la convergence forte, l'enveloppe sci de la fonctionnelle  $I$  est la fonctionnelle  $\bar{I}$  définie par*

$$\bar{I}(u) := \begin{cases} \int_{\Omega} QW(\nabla u) dx + \int_{\Omega} (QW)^{\infty} \left( \frac{D^s u}{|D^s u|} \right) |D^s u| & \text{si } u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^m), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $Du = \nabla u \mathcal{L}^N \llcorner \Omega + D^s u$ ,  $\nabla u \in L^1(\Omega, \mathbf{M}^{m \times N})$ , est la décomposition de Lebesgue-Nikodym de la mesure  $Du$  par rapport à la mesure de Lebesgue et  $(QW)^{\infty}$  est la fonction de récession de  $QW$ , définie pour tout  $a \in \mathbf{M}^{m \times N}$  par  $(QW)^{\infty}(a) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{QW(ta)}{t}$ .

Pour une preuve de ces théorèmes, nous renvoyons le lecteur à [9] et aux références qui y sont citées.

## 1.5 $\Gamma$ -convergence

La  $\Gamma$ -convergence, introduite par De Giorgi et Franzoni [46], est une notion de convergence sur l'espace des fonctions  $F$  définies sur un espace métrisable  $X$  et à valeur dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , rendant séquentiellement continues les applications

$$F \mapsto \min_X F, \quad F \mapsto \arg \min_X F.$$

Plus précisément, étant donné  $I_n, I : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , on souhaite définir une convergence  $F_n \rightarrow F$  qui, sous certaines hypothèses de compacité, entraîne la convergence des minima et des minimiseurs :

$$F_n \rightarrow F \implies \inf_X F_n \rightarrow \min_X F ;$$

$$F_n \rightarrow F, u_n \in \arg \min_X F_n \implies u_n \rightarrow u \in \arg \min_X F \text{ au moins pour une sous-suite.}$$

Cette notion est très importante dans notre situation. L'énergie de notre système est donnée par une fonctionnelle  $F_\varepsilon$ , où  $\varepsilon \rightarrow 0$  est un paramètre lié à l'épaisseur et la rigidité de la couche intermédiaire. Dans le cadre d'une analyse asymptotique, notre problème va être de trouver une fonctionnelle équivalente d'un point de vue variationnel, i.e., lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\min_X F \sim \inf_X F_\varepsilon ;$$

$$\bar{u} \in \arg \min_X F \sim u_\varepsilon \in \varepsilon - \arg \min_X F_\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0 ;$$

au sens d'une topologie convenable sur  $X$ .

Nous en rappelons la définition.

**Définition 1.8.** Soient  $(X, d)$  un espace métrisable,  $F_n, F : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . La suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge vers  $F$  en  $x \in X$  si et seulement si

i) pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $u$  dans  $X$ ,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(u_n) \geq F(u) ;$$

ii) il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $u$  dans  $X$ , telle que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(u_n) \leq F(u).$$

Si i) et ii) sont satisfaits pour tout  $x \in X$ , alors la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge vers  $F$  dans  $X$ .

Le système d'assertions i) et ii) est trivialement équivalent au système i) et ii') :

i) pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $u$  dans  $X$ ,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(u_n) \geq F(u) ;$$

ii) il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $u$  dans  $X$ , telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(u_n) = F(u).$$

La  $\Gamma$ -convergence est une convergence variationnelle au sens suivant : soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions,  $F_n : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , qui  $\Gamma$ -converge vers une fonction  $F : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite minimisante relativement compacte, alors toute valeur d'adhérence  $\bar{u}$  est un minimiseur de  $F$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \{F_n(u) : u \in X\} = F(\bar{u}).$$

La compacité de  $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$  joue un rôle essentiel. Sans compacité, il est inutile de chercher une  $\Gamma$ -limite. Plus la notion de convergence dans  $X$  est faible, plus on a de compacité, mais moins on a d'information. Le choix de la topologie est donc très important. La proposition qui suit donne une propriété importante que nous utiliserons dans certaines démonstrations au chapitre 4.

**Proposition 1.7.** *Si pour une suite de fonctions  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , il existe  $F$  telle que, de toute sous-suite de  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut extraire une sous-suite qui  $\Gamma$ -converge vers  $F$ , alors la suite entière  $\Gamma$ -converge vers  $F$ .*

Enfin, si  $G : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, et si la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge vers  $F$ , alors  $(F_n + G)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge vers  $F + G$ . Pour une étude plus détaillée de la  $\Gamma$ -convergence, voir [7], [20] et [30].

## 1.6 Un lemme de diagonalisation

Nous terminons ce chapitre par un lemme de diagonalisation que nous utiliserons très souvent dans les démonstrations.

**Lemme 1.1.** *Soit  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  une suite dans un espace topologique à base dénombrable de voisinages (par exemple métrisable) vérifiant*

- (i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{m,n} = a_m$  ;
- (ii)  $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = a$ .

*Alors, il existe une application croissante  $n \mapsto m(n)$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{m(n),n} = a.$$

Pour une preuve de ce résultat, voir [7].

## Chapitre 2

# Une première approche du problème en élasticité linéaire isotrope

Dans ce chapitre, nous regroupons des résultats obtenus dans le cadre de l'élasticité linéaire et constituant une première approche du problème. Le chapitre traite deux aspects bien distincts du problème. Dans la première partie, on étudie dans le cadre d'une analyse asymptotique, différentes situations en fonction de la rigidité de la couche intermédiaire et en fonction de sa nature géométrique. La deuxième partie concerne l'aspect numérique du problème.

Plus précisément, on peut considérer les deux types d'assemblage suivants (cf. fig 2) :

- $S$  est une surface développable et la direction privilégiée de l'assemblage est  $e_3$  ;
- $S$  est une surface développable ou non et la direction privilégiée de l'assemblage est  $n$ , la normale unitaire à la surface  $S$ .

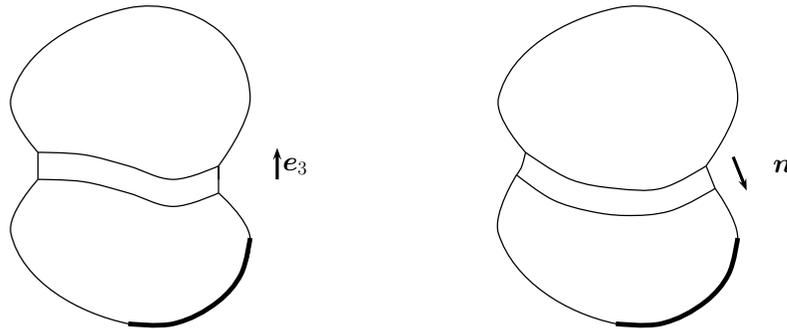


FIGURE 2.1 – Divers types de géométrie

Les modalités d'assemblage sont importantes et donnent lieu à trois modèles différents. Lorsque  $S$  est développable et la direction privilégiée de l'assemblage est  $e_3$ , l'énergie volumique de la couche mince est remplacée par une énergie de surface de type coque profonde (modèle

de Novozhilov-Donnell). Si  $S$  est une surface plane de direction normale  $e_3$ , l'énergie de la couche est remplacée par une énergie de surface de type plaque (Kirchhoff Love). Enfin, lorsque la surface  $S$  n'est pas nécessairement développable et que l'assemblage se fait dans la direction de la normale  $n$ , on obtient une énergie de surface de type coque (Kirchhoff Love). Dans [22], Caillerie étudie le comportement d'une structure élastique comprenant une inclusion d'épaisseur  $2\varepsilon$  de coefficients de Lamé  $\lambda_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$  tendant vers l'infini lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Plus précisément, il suppose que  $\lambda_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$  convergent vers l'infini en  $\frac{1}{\varepsilon^m}$ ,  $m \in \mathbb{R}^+$ , et met en évidence différents comportements dans le problème limite, en fonction des valeurs de  $m$  :

- si  $m < 1$ , la couche intermédiaire n'a aucune influence ;
- si  $m = 1$ , l'énergie volumique de la couche devient une énergie surfacique qui correspond à une énergie membranaire de type plaque ;
- si  $1 < m < 3$ , les déplacements dans la couche sont des déplacements rigides qui annulent cette énergie membranaire ;
- si  $m = 3$ , l'énergie volumique de la couche est remplacée par une énergie surfacique qui est une énergie de flexion ;
- si  $m > 3$ , les déplacements dans la couche sont des déplacements rigides.

Plus récemment, Chapelle et Ferent [25] ont étudié le problème d'une inclusion rigide de type coque et proposé une formulation variationnelle du couplage entre une coque et un milieu 3D plus faible qui l'entoure, pour justifier des techniques employées dans le cadre de la Méthode des Eléments Finis. Dans ce chapitre, nous étudions les assemblages correspondant au cas où  $S$  est plane (resp. quelconque) et la direction privilégiée est  $e_3$  (resp.  $n$ ), et les problèmes relatifs au cas où la rigidité dans la couche mince est d'ordre  $\frac{1}{\varepsilon^m}$ , pour  $m = 1, 3$ , qui sont les valeurs correspondant aux cas les plus significatifs. Nous suivons un raisonnement par convergence faible comme dans [22] et [25]. Lorsque  $m = 1$ , nous retrouvons le comportement d'une plaque/coque en membrane et lorsque  $m = 3$ , celui d'une plaque/coque en flexion, et nous démontrons en plus la convergence forte. Dans un premier temps, nous appliquons la méthode des développements asymptotiques afin d'identifier les problèmes limites, puis nous justifions ces modèles par des études de convergence. Au chapitre 3, nous retrouvons par  $\Gamma$ -convergence dans le cas anisotrope, un résultat analogue à celui obtenu pour les plaques avec  $m = 1$ .

D'un point de vue numérique, on rencontre des difficultés dans la résolution du problème initial à cause des différences importantes, aussi bien au niveau géométrique qu'au niveau des coefficients relatifs aux matériaux, entre la couche intermédiaire et le reste de la structure. Le passage à la limite nous conduit à un modèle "plus simple" où la couche mince est remplacée par une surface matérielle à laquelle est associée une énergie de surface qui correspond à des conditions de transmission non classiques. Dans [44] Geymonat *et al.* sont confrontés à une situation semblable dans le cas où la couche intermédiaire est "molle" (les conditions de transmission sont alors des conditions de type Robin-Fourier). Dans une telle configuration, les méthodes de décomposition de domaine apparaissent naturellement pour la résolution du problème limite. Nous verrons dans un premier temps une décomposition de domaine nous conduisant à un système linéaire sur la surface. Dans le cas scalaire, nous nous ramenons à un système de la forme  $(Id - \mathcal{K})\phi = F$ , et, par l'étude des propriétés de l'opérateur  $\mathcal{K}$ , on montre que la méthode du gradient conjugué converge de manière R-superlinéaire pour la résolution de ce système. Nous proposons ensuite une autre stratégie utilisant une méthode de pénalisation. Le problème pénalisé entre dans le cadre d'application de l'algorithme de minimisation alterné avec couplage partiel proposé dans [8].

Le chapitre est structuré de la façon suivante : les sections 1 et 2 sont consacrées à l'analyse

asymptotique du problème pour les deux types d'inclusion considérés. Dans la section 3, nous décrivons la méthode de résolution basée sur une décomposition de domaine pour le cas non isotrope, et démontrons la convergence de l'algorithme du gradient conjugué dans le cas scalaire. Enfin nous présentons la deuxième stratégie (avec pénalisation) et montrons la convergence de l'algorithme de minimisation alterné avec couplage partiel pour la résolution du problème pénalisé.

## 2.1 1<sup>er</sup> cas : la surface $S$ est plane, la direction privilégiée d'assemblage est $e_3$

### 2.1.1 Position du problème

Nous ne faisons pas de distinction entre  $\mathbb{R}^3$  et l'espace tridimensionnel Euclidien dont une base orthonormale est notée  $(e_1, e_2, e_3)$ . Pour tout vecteur  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , on note  $\hat{x} := (x_1, x_2)$ , pour toute fonction  $v = (v_1, v_2, v_3)$  à valeur dans  $\mathbb{R}^3$ , on note  $\hat{v}$  la fonction  $(v_1, v_2)$  à valeur dans  $\mathbb{R}^2$ , et  $\hat{\nabla}$  désigne l'opérateur gradient par rapport à  $\hat{x}$ ,  $\hat{e}(v)$  le gradient symétrique ayant pour coordonnées  $e_{\alpha\beta}(v)$ . On considère  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  deux domaines disjoints de  $\mathbb{R}^3$  (c'est-à-dire deux ouverts bornés connexes de frontières  $\partial\Omega^+$  et  $\partial\Omega^-$  Lipschitziennes). Soit  $S := \{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-\}^\circ$ . On suppose que  $S$  est un domaine de  $\mathbb{R}^2$  de mesure bidimensionnelle positive projetable dans le plan  $[x_3 = 0]$ . On considère la structure composée des deux solides assemblés par l'intermédiaire d'une couche mince d'épaisseur  $2\varepsilon$  rigide,  $B_\varepsilon$ , où  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre. Plus précisément, soient  $\Omega_\varepsilon^\pm := \{x^\varepsilon := x \pm \varepsilon e_3; x \in \Omega^\pm\}$  et  $B_\varepsilon := \{x + z e_3, -1 < z < 1, x \in S\}$ ,  $\Omega_\varepsilon := \Omega_\varepsilon^- \cup \Omega_\varepsilon^+ \cup B_\varepsilon$  est la configuration de référence de l'assemblage. La structure est fixée sur la partie de sa frontière  $\Gamma_{0,\varepsilon}$  qui est de mesure bidimensionnelle positive et telle que  $\text{dist}(\bar{\Gamma}_{0,\varepsilon}, \partial B_\varepsilon \cap \partial\Omega_\varepsilon) > 0$ . Son complémentaire  $\Gamma_{\varphi,\varepsilon} = \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_{0,\varepsilon}$  est libre de contrainte (de sorte que  $\partial S \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  n'est soumis à aucun effort). Enfin, la structure est soumise à une densité volumique de forces appliquées  $\Phi$ .

Les matériaux occupant  $\Omega_\varepsilon$  sont élastiques isotropes. On suppose que les matériaux dans  $\Omega_\varepsilon^\pm$  ont une rigidité d'ordre 1 alors que le matériau dans la couche mince a une rigidité d'ordre  $\frac{1}{\varepsilon^m}$ ,  $m \in \{1, 3\}$ . Soient  $\lambda_\varepsilon^\pm, \mu_\varepsilon^\pm$ , resp.  $\lambda_\varepsilon^s, \mu_\varepsilon^s$ , les constantes de Lamé des matériaux dans  $\Omega_\varepsilon^\pm$ , resp.  $B_\varepsilon$ , on a

$$\lambda_\varepsilon^\pm = \lambda^\pm, \mu_\varepsilon^\pm = \mu^\pm, \lambda_\varepsilon^s = \frac{1}{\varepsilon^m} \lambda^s, \mu_\varepsilon^s = \frac{1}{\varepsilon^m} \mu^s,$$

où  $\lambda^\pm, \lambda^s$  (resp.  $\mu^\pm, \mu^s$ ) sont du même ordre de grandeur.

Afin d'alléger les notations, nous noterons dans toute cette section  $v|_S$ , et  $v|_{\Gamma_0}$ , les traces respectives de  $v$  sur  $S$  et sur  $\Gamma_0$ , et pour simplifier l'exposé, nous supposons que  $S$  est inclus dans le plan  $[x_3 = 0]$  de sorte que  $B_\varepsilon := S \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$ .

La formulation variationnelle du problème s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in V^\varepsilon \text{ tel que quelque soit } v^\varepsilon \in V^\varepsilon \\ a_\varepsilon^-(u^\varepsilon, v^\varepsilon) + a_\varepsilon^+(u^\varepsilon, v^\varepsilon) + a_\varepsilon^s(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = L_\varepsilon(v^\varepsilon), \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où

$$a_\varepsilon^\pm(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon^\pm} (\lambda_\varepsilon^\pm e_{pp}^\varepsilon(u^\varepsilon) e_{qq}^\varepsilon(v^\varepsilon) + 2\mu_\varepsilon^\pm e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(v^\varepsilon)) dx^\varepsilon$$

et

$$a_\varepsilon^s(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} (\lambda_\varepsilon^s e_{pp}^\varepsilon(u^\varepsilon) e_{qq}^\varepsilon(v^\varepsilon) + 2\mu_\varepsilon^s e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(v^\varepsilon)) dx^\varepsilon$$

sont les formes bilinéaires classiques qui interviennent dans la formulation variationnelle des problèmes d'élasticité isotrope quasi-statiques,

$$L_\varepsilon(v^\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi_i v_i^\varepsilon dx^\varepsilon$$

est l'application linéaire associée au chargement, et

$$V^\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3); v|_{\Gamma_0} = 0\}$$

est l'ensemble des déplacements admissibles. L'espace  $V^\varepsilon$  est un Hilbert. Supposons que  $\Phi \in L^2(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3)$ , alors, d'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (2.1) possède une solution unique.

Afin d'étudier le comportement asymptotique de la solution du problème (2.1) lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, nous commençons par réécrire le problème dans un domaine fixe, c'est-à-dire indépendant de  $\varepsilon$ . Pour cela, nous suivons la stratégie de Ciarlet et Destuynder dans [28] qui consiste à opérer le changement de variable  $\pi^\varepsilon : x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \rightarrow x^\varepsilon = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon) \in \Omega_\varepsilon$  défini par

$$\begin{cases} \pi^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 - (1 - \varepsilon)) \in \Omega_\varepsilon^+, & \text{pour } x \in \Omega_{tr}^+ \\ \pi^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in B_\varepsilon, & \text{pour } x \in B \\ \pi^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 + (1 - \varepsilon)) \in \Omega_\varepsilon^-, & \text{pour } x \in \Omega_{tr}^- \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $\Omega_{tr}^\pm = \{x \pm e_3, x \in \Omega^\pm\}$ ,  $B = S \times ]-1, 1[$ ,  $S^\pm = S \times \{\pm 1\}$ . Afin de simplifier les notations, on identifie  $\Omega_{tr}^+$  avec  $\Omega^+$  et  $\Omega_{tr}^-$  avec  $\Omega^-$  et on note  $\Gamma_0$ , resp  $\Gamma_\varphi$ , l'image de  $\Gamma_{0,\varepsilon}$ , resp  $\Gamma_{\varepsilon,\varphi}$ . Enfin, on pose  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup B \cup S^+ \cup S^-$ . Pour toute fonction  $w$  définie sur  $\Omega$ ,  $w^+$ ,  $w^-$  et  $w^s$  désignent respectivement les restrictions de  $w$  à  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$  et  $B$ .

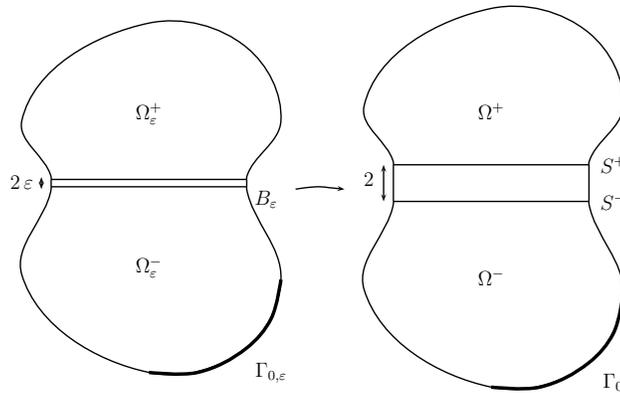


FIGURE 2.2 – Le problème posé sur un domaine fixe

Au champ de déplacement  $v^\varepsilon : \Omega_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^3$  on associe le champ de déplacement  $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  défini par  $v(\varepsilon, x) := v^\varepsilon(x^\varepsilon) = v^\varepsilon \circ \pi^\varepsilon(x)$ , on ne fait aucun changement d'échelle sur les champs de déplacements comme sur les densité de forces appliquées et sur les coefficients élastiques. Avec ce changement de variable, pour toute fonction dérivable  $\phi^\varepsilon$  définie dans  $B_\varepsilon$ , nous obtenons les relations suivantes

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\alpha^\varepsilon}(\phi^\varepsilon(x^\varepsilon)) &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi(x)) \\ \frac{\partial}{\partial x_3^\varepsilon}(\phi^\varepsilon(x^\varepsilon)) &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_3}(\phi(x))\end{aligned}$$

et

$$\int_{B_\varepsilon} \phi^\varepsilon(x^\varepsilon) dx^\varepsilon = \varepsilon \int_B \phi^\varepsilon \circ \pi^\varepsilon(x) dx \equiv \varepsilon \int_B \phi(x) dx.$$

Définissons pour toute fonction  $v$ , définie sur  $B$ , le tenseur des déformations linéarisées  $e(\varepsilon, v)$  par

$$\begin{aligned}e_{\alpha\beta}(\varepsilon; v) &:= \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta); \\ e_{\alpha 3}(\varepsilon; v) &:= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\partial_3 v_\alpha + \partial_\alpha v_3\right); \\ e_{33}(\varepsilon; v) &:= \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 v_3.\end{aligned}$$

Pour abrégier les notations, nous notons dans toute la suite de ce chapitre  $\partial_i$  la dérivée par rapport à  $x_i$ .

Sous ces hypothèses le problème (2.1) devient

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(\varepsilon) \in V \text{ tel que quelque soit } v \in V \\ a^-(u(\varepsilon), v) + a^+(u(\varepsilon), v) + \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} a^s(\varepsilon)(u(\varepsilon), v) = L(v) + \varepsilon L^s(v), \end{cases} \quad (2.3)$$

où

$$\begin{aligned}a^\pm(u, v) &= \int_{\Omega^\pm} \left( \lambda^\pm e_{pp}(u) e_{qq}(v) + 2\mu^\pm e_{ij}(u) e_{ij}^\varepsilon(v) \right) dx, \\ a^s(\varepsilon)(u, v) &= \int_B \left( \lambda^s e_{pp}(\varepsilon; u) e_{qq}(\varepsilon; v) + 2\mu^s e_{ij}(\varepsilon; u) e_{ij}(\varepsilon; v) \right) dx, \\ L(v) &= \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \Phi \cdot v \, dx, \quad L^s(v) = \int_B \Phi \cdot v \, dx,\end{aligned}$$

et  $V = \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) : v|_{\Gamma_0} = 0\}$ . Le problème (2.3) possède bien sur une solution unique  $u(\varepsilon)$ .

### 2.1.2 Etude asymptotique formelle

La structure polynomiale du problème (2.3) suggère le développement asymptotique formel de la solution  $u(\varepsilon)$  suivant :

$$u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots \quad (2.4)$$

En substituant (2.4) dans le problème (2.3) et en isolant les termes du même ordre en  $\varepsilon$ , on caractérise les champs de déplacement limites et les problèmes limites correspondants.

### Etude asymptotique formelle pour $m = 1$

On s'intéresse dans un premier temps au cas où la rigidité dans la couche intermédiaire est de l'ordre de  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Dans ce cas le problème posé sur le domaine fixe est :

$$\begin{cases} \text{trouver } u(\varepsilon) \in V \text{ tel que quelque soit } v \in V, \\ a^-(u(\varepsilon), v) + a^+(u(\varepsilon), v) + a_{\alpha\beta}^s(u(\varepsilon), v) \\ \quad + \frac{1}{\varepsilon} a_{3\alpha}^s(u(\varepsilon), v) + \frac{1}{\varepsilon^2} a_{33}^s(u(\varepsilon), v) = L(v) + \varepsilon L^s(v), \end{cases} \quad (2.5)$$

où

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}^s(u(\varepsilon), v) &= \int_B \left( \lambda^s e_{\sigma\sigma}(u(\varepsilon)) e_{\tau\tau}(v) + 2\mu^s e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) e_{\alpha\beta}(v) + \frac{\mu^s}{2} \partial_\alpha u_3(\varepsilon) \partial_\alpha v_3 \right) dx \\ a_{3\alpha}^s(u(\varepsilon), v) &= \int_B \left( \lambda^s (e_{\sigma\sigma}(u(\varepsilon)) e_{33}(v) + e_{33}(u(\varepsilon)) e_{\sigma\sigma}(v)) + \frac{\mu^s}{2} (\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \partial_\alpha v_3 + \partial_\alpha u_3(\varepsilon) \partial_3 v_\alpha) \right) dx \\ a_{33}^s(u(\varepsilon), v) &= \int_B \left( (\lambda^s + 2\mu^s) e_{33}(u(\varepsilon)) e_{33}(v) + \frac{\mu^s}{2} \partial_3 v_\alpha \partial_3 u(\varepsilon)_\alpha \right) dx. \end{aligned}$$

En insérant (2.4) dans (2.5), on obtient les problèmes à l'ordre  $\varepsilon^{-2}$ ,  $\varepsilon^{-1}$  et  $\varepsilon^0$  suivants :

$$\begin{aligned} P_{-2} &: a_{33}^s(u^0, v) = 0 \\ P_{-1} &: a_{33}^s(u^1, v) + a_{3\alpha}^s(u^0, v) = 0 \\ P_0 &: a^+(u^0, v) + a^-(u^0, v) + a_{\alpha\beta}^s(u^0, v) + a_{3\alpha}^s(u^1, v) + a_{33}^s(u^2, v) = L(v). \end{aligned}$$

Notons  $v^+$ ,  $v^-$  et  $v^s$  les restrictions de  $v$  à  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$  et  $B$ .

**Proposition 2.1.** *Le premier terme du développement asymptotique  $u^0$  est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^0 \in V_B^M \text{ tel que quelque soit } v \in V_B^M \\ a^-(u^0, v) + a^+(u^0, v) + a_M^s(u^0, v) = L(v), \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{pl,1})$$

où

$$a_M^s(u^0, v) = 2 \int_S \left( \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} e_{\sigma\sigma}(u^0) e_{\tau\tau}(v) + 2\mu^s e_{\alpha\beta}(u^0) e_{\alpha\beta}(v) \right) d\hat{x},$$

traduit le comportement en membrane de la plaque, et  $V_B^M$  l'ensemble des déplacements admissibles est défini par

$$V_B^M = \left\{ v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) : v^\pm \in H^1(\Omega^\pm, \mathbb{R}^3), e_{\alpha\beta}(v^s) \in L^2(B), L^2(B, \mathbb{R}^3) \ni \partial_3 v^s = 0, v_{|S^\pm}^\pm = v_{|S^\pm}^s, v_{|\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

*Démonstration.* La démonstration est composée de trois parties.

i) Le problème à l'ordre  $\varepsilon^{-2}$  est

$$\int_B \frac{\mu^s}{2} \partial_3 u_\alpha^0 \partial_3 v_\alpha dx + \int_B (\lambda^s + 2\mu^s) e_{33}(u^0) e_{33}(v) dx = 0.$$

On en déduit que

$$e_{33}(u^0) = 0, \quad \partial_3 u_\alpha^0 = 0 \text{ dans } B. \quad (2.6)$$

ii) Puisque  $e_{33}(u^0) = \partial_3 u_\alpha^0 = 0$ , le problème  $P_{-1}$  devient

$$\int_B \lambda^s e_{\sigma\sigma}(u^0) e_{33}(v) \, dx + \int_B (\lambda^s + 2\mu^s) e_{33}(u^1) e_{33}(v) \, dx + \int_B \frac{\mu^s}{2} \left( \partial_3 u_\alpha^1 \partial_3 v_\alpha + \partial_\alpha u_3^0 \partial_3 v_\alpha \right) dx = 0.$$

D'où

$$e_{33}(u^1) = -\frac{\lambda^s}{\lambda^s + 2\mu^s} e_{\sigma\sigma}(u^0) \quad (2.7)$$

$$\partial_3 u_\alpha^1 = -\partial_\alpha u_3^0 \quad (2.8)$$

dans  $B$ .

iii) En prenant dans  $P_0$ ,  $v$  tel que  $\partial_3 v = 0$  dans  $B$ , on obtient

$$\begin{aligned} a^-(u^0, v) + a^+(u^0, v) + \int_B \left( \lambda^s e_{\sigma\sigma}(u^0) e_{\tau\tau}(v) + 2\mu^s e_{\alpha\beta}(u^0) e_{\alpha\beta}(v) \right) dx \\ + \int_B \frac{\mu^s}{2} \left( \partial_3 u_\alpha^1 + \partial_\alpha u_3^0 \right) \partial_\alpha v_3 \, dx + \int_B \lambda^s e_{33}(u^1) e_{\tau\tau}(v) \, dx = L(v), \end{aligned}$$

et d'après (2.7) et (2.8), finalement

$$a^-(u^0, v) + a^+(u^0, v) + 2 \int_S \left( \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} e_{\sigma\sigma}(u^0) e_{\tau\tau}(v) + 2\mu^s e_{\alpha\beta}(u^0) e_{\alpha\beta}(v) \right) d\hat{x} = L(v).$$

L'espace  $V_B^M$  muni de la norme  $(\|v\|_{1,\Omega^+}^2 + \|v\|_{1,\Omega^-}^2 + \|\hat{e}(v)\|_{0,B}^2 + \|v\|_{0,B}^2 + \|\partial_3 v\|_{0,B}^2)^{1/2}$  est un Hilbert. Le problème  $\mathcal{P}_{pl,1}$  est bien posé et possède une solution unique.  $\square$

Notons que l'espace  $V_B^M$  est isomorphe à l'espace  $V_S^M := \{v \in H^1(\Omega^+ \cup S \cup \Omega^-, \mathbb{R}^3) : \hat{v}|_S \in H^1(S, \mathbb{R}^2), v|_{\Gamma_0} = 0\}$ .

Rappelons la décomposition classique du vecteur contrainte :  $\sigma.n := \sigma_T + \sigma_N.n$ ,  $n$  étant la normale unitaire extérieure à la surface considérée, alors  $[\sigma.n] := \sigma^+.n^+ + \sigma^-.n^-$  est le saut des contraintes normales, où  $n^+$  (resp.  $n^-$ ) désigne la normale unitaire extérieure de  $\Omega^+$  (resp.  $\Omega^-$ ). La formulation locale correspondante est le problème avec une condition de transmission de type Ventcel suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma^+ = \Phi^+ & \text{dans } \Omega^+ \\ -\operatorname{div} \sigma^- = \Phi^- & \text{dans } \Omega^- \\ \sigma_{ij}^+ = \lambda^+ (\operatorname{tr}(e(u)) \delta_{ij} + 2\mu^+ e_{ij}(u)) \\ \sigma_{ij}^- = \lambda^- (\operatorname{tr}(e(u)) \delta_{ij} + 2\mu^- e_{ij}(u)) \\ u^+ = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ u^- = 0 & \text{sur } \Gamma_0^- \\ \sigma^+.n^+ = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi^+ \\ \sigma^-.n^- = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi^- \end{cases} \quad (2.9)$$

avec la condition de transmission sur  $S$

$$\begin{cases} u^+ = u^- & \text{sur } S \\ [\sigma_T] = \text{div}_\tau \hat{\sigma} & \text{sur } S \\ [\sigma_N] = 0 & \text{sur } S, \end{cases} \quad (2.10)$$

où  $\hat{\sigma}_{\alpha\beta} := \tilde{A}_{\alpha\beta\sigma\tau}^s e_{\sigma\tau}(u) = \frac{4\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} e_{\sigma\sigma}(u^s) \delta_{\alpha\beta} + 4\mu^s e_{\alpha\beta}(u^s)$  avec  $u^s = u|_S^+ = u|_S^-$ .

### Etude asymptotique formelle pour $m = 3$

La rigidité dans la couche mince est de l'ordre de  $\frac{1}{\varepsilon^3}$ . Le problème (2.3) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{trouver } u(\varepsilon) \in V \text{ tel que quelque soit } v \in V, \\ a^-(u(\varepsilon), v) + a^+(u(\varepsilon), v) + \frac{1}{\varepsilon^2} a_{\alpha\beta}^s(u(\varepsilon), v) \\ \quad + \frac{1}{\varepsilon^3} a_{3\alpha}^s(u(\varepsilon), v) + \frac{1}{\varepsilon^4} a_{33}^s(u(\varepsilon), v) = L(v) + \varepsilon L^s(v). \end{cases} \quad (2.11)$$

On obtient les différents problèmes :

$$\begin{aligned} P_{-4} & : a_{33}^s(u^0, v) = 0 \\ P_{-3} & : a_{33}^s(u^1, v) + a_{3\alpha}^s(u^0, v) = 0 \\ P_{-2} & : a_{33}^s(u^2, v) + a_{3\alpha}^s(u^1, v) + a_{\alpha\beta}^s(u^0, v) = 0 \\ P_{-1} & : a_{33}^s(u^3, v) + a_{3\alpha}^s(u^2, v) + a_{\alpha\beta}^s(u^1, v) = 0 \\ P_0 & : a^+(u^0, v) + a^-(u^0, v) + a_{33}^s(u^4, v) + a_{3\alpha}^s(u^3, v) + a_{\alpha\beta}^s(u^2, v) = L(v). \end{aligned}$$

**Proposition 2.2.** *Le premier terme du développement asymptotique  $u^0$  est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_B^F \text{ tel que quelque soit } v \in V_B^F \\ a^-(u, v) + a^+(u, v) + a_F^s(u, v) = L(v), \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{pl,3})$$

où

$$a_F^s(u, v) = \frac{2}{3} \int_S \left( \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} \Delta_\tau u_3 \Delta_\tau v_3 + 2\mu^s \partial_{\alpha\beta} u_3 \partial_{\alpha\beta} v_3 \right) dx,$$

traduit le comportement en flexion de la plaque, et

$$V_B^F = \left\{ v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) : v_3^s \in H^2(B), \partial_3 v_i = e_{\alpha\beta}(v) = 0 \text{ dans } B, v|_{\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

L'opérateur  $\Delta_\tau$  désigne le Laplacien (tangentielle) par rapport à la variable  $\hat{x}$ .

*Démonstration.* La démonstration est divisée en quatre parties.

i) Les problèmes  $P_{-4}$  et  $P_{-3}$  sont identiques aux problèmes  $P_{-2}$  et  $P_{-1}$  du cas précédent. On en déduit directement

$$e_{33}(u^0) = 0, \quad \partial_3 u_\alpha^0 = 0 \text{ dans } B.$$

$$e_{33}(u^1) = -\frac{\lambda^s}{\lambda^s + 2\mu^s} e_{\sigma\sigma}(u^0) \quad (2.12)$$

$$\partial_3 u_\alpha^1 = -\partial_\alpha u_3^0, \quad \text{i.e. } u_\alpha^1 = -x_3 \partial_\alpha u_3^0 + \bar{u}^1(\hat{x}) \quad (2.13)$$

dans  $B$ .

ii) Le problème  $P_{-2}$  s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_B (\lambda^s + 2\mu^s) e_{33}(u^2) e_{33}(v) \, dx + \int_B \frac{\mu^s}{2} \left( \partial_3 u_\alpha^2 \partial_3 v_\alpha + \partial_\alpha u_3^1 \partial_3 v_\alpha + \partial_3 u_\alpha^1 \partial_\alpha v_3 \right) dx \\ & + \int_B \lambda^s \left( e_{\sigma\sigma}(u^1) e_{33}(v) + e_{33}(u^1) e_{\sigma\sigma}(v) \right) dx + \int_B \frac{\mu^s}{2} \partial_\alpha u_3^0 \partial_\alpha v_3 \, dx \\ & + \int_B \left( \lambda^s e_{\sigma\sigma}(u^0) e_{\tau\tau}(v) + 2\mu^s e_{\alpha\beta}(u^0) e_{\alpha\beta}(v) \right) dx = 0. \end{aligned}$$

En prenant  $v$  tel que  $\partial_3 v = 0$  dans  $B$ , on obtient  $e_{\alpha\beta}(u^0) = 0$  dans  $B$ , ce qui implique que  $e_{33}(u^1) = 0$ . On déduit ensuite de  $P_{-2}$  que

$$e_{33}(u^2) = -\frac{\lambda^s}{\lambda^s + 2\mu^s} e_{\sigma\sigma}(u^1) \quad (2.14)$$

$$\partial_3 u_\alpha^2 = -\partial_\alpha u_3^1 \quad (2.15)$$

dans  $B$ .

iii) Le problème  $P_{-1}$  a la même expression que  $P_{-2}$ . Considérons  $v$  tel que  $\partial_3 v = 0$  dans  $B$ . Alors, il vient

$$\int_B \left( \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} e_{\sigma\sigma}(\bar{u}^1) e_{\tau\tau}(v) + 2\mu^s e_{\alpha\beta}(\bar{u}^1) e_{\alpha\beta}(v) \right) dx = 0,$$

ce qui implique que  $\bar{u}^1 = 0$ , donc  $u_\alpha^1 = -x_3 \partial_\alpha u_3^0$ . En prenant alors  $v$  tel que  $e_{33}(v) = 0$  et  $v_\alpha = x_3 \phi_\alpha$ ,  $\phi$  indépendant de  $x_3$ , on obtient

$$\int_B \frac{\mu^s}{2} (\partial_3 u_\alpha^3 + \partial_\alpha u_3^2) \partial_3 v_\alpha \, dx = \int_B \left( \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} e_{\sigma\sigma}(u^1) e_{\tau\tau}(v) + 2\mu^s e_{\alpha\beta}(u^1) e_{\alpha\beta}(v) \right) dx,$$

soit encore

$$\begin{aligned} \int_B \frac{\mu^s}{2} (\partial_3 u_\alpha^3 + \partial_\alpha u_3^2) \phi_\alpha \, dx &= \int_B x_3^2 \left( \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} \partial_{\sigma\sigma} u_3^0 e_{\tau\tau}(\phi) + 2\mu^s \partial_{\alpha\beta} u_3^0 e_{\alpha\beta}(\phi) \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_S \left( \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} \partial_{\sigma\sigma} u_3^0 e_{\tau\tau}(\phi) + 2\mu^s \partial_{\alpha\beta} u_3^0 e_{\alpha\beta}(\phi) \right) dx. \end{aligned}$$

iv) Le problème  $P_0$ , pour  $v$  tel que  $\partial_3 v_i = e_{\alpha\beta}(v) = 0$  dans  $B$ , donne

$$a^-(u^0, v) + a^+(u^0, v) + \int_B \frac{\mu^s}{2} (\partial_3 u_\alpha^3 + \partial_\alpha u_3^2) \partial_\alpha v_3 \, dx = L(v),$$

d'où

$$a^-(u^0, v) + a^+(u^0, v) + \frac{2}{3} \int_S \left( \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} \partial_{\sigma\sigma} u_3^0 \partial_{\tau\tau} v_3 + 2\mu^s \partial_{\alpha\beta} u_3^0 \partial_{\alpha\beta} v_3 \right) dx = L(v).$$

L'espace  $V_B^F$  est un Hilbert (comme sous-espace vectoriel fermé d'un Hilbert) et le problème  $\mathcal{P}_{pl,3}$  possède une solution unique.  $\square$

Comme pour  $m = 1$ , l'espace  $V_B^F$  est isomorphe à l'espace  $V_S^F := \{v \in H^1(\Omega^+ \cup S \cup \Omega^-, \mathbb{R}^3) : v_{3|S} \in H^2(S), v_{|\Gamma_0} = 0\}$ .

La formulation locale correspondant au problème  $(\mathcal{P}_{pl,3})$  est le problème semblable au problème (2.9) avec la condition de transmission sur  $S$  :

$$\begin{cases} u^+ = u^- := u^s \\ e_{\alpha\beta}(u^s) = 0, \text{ les déplacements sont rigides sur } S \\ [\sigma_T] = 0 \\ [\sigma_N] = \frac{2}{3} \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} \Delta_\tau \Delta_\tau u_3^s + 2\mu^s \partial_{\alpha\beta\alpha\beta} u_3^s. \end{cases} \quad (2.16)$$

### 2.1.3 Deux résultats de type Korn

Afin d'étudier la convergence de la suite  $(u(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ , on est amené à démontrer l'inégalité de type Korn énoncée dans la proposition ci-dessous.

**Proposition 2.3.** *Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 := \|v\|_{1,\Omega^+}^2 + \|v\|_{1,\Omega^-}^2 + \|v\|_{1,B}^2 \leq C \left[ \|e(v)\|_{0,\Omega^+}^2 + \|e(v)\|_{0,\Omega^-}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|e(\varepsilon; v)\|_{0,B}^2 \right] \quad (2.17)$$

pour tout  $v \in V$ .

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons que cette inégalité n'est pas vraie ; il existe alors une suite  $\varepsilon^m \rightarrow 0$  et  $(v^m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $V$  telles que

$$\begin{aligned} \|v^m\|_{1,\Omega} &= 1 \text{ pour tout } m, \\ e_{ij}(v^m) &\rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega^\pm), \\ \frac{1}{\varepsilon} e_{ij}(\varepsilon_m; v^m) &\rightarrow 0 \text{ dans } L^2(B). \end{aligned}$$

La suite  $(v^m)_{m \in \mathbb{N}}$  étant bornée dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , on en déduit qu'il existe  $v \in V$  tel que, pour une sous-suite non renommée

$$\begin{aligned} v^m &\rightharpoonup v \quad \text{dans } H^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ v^m &\rightarrow v \quad \text{dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Or,  $e_{ij}(v^m) \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega^+)$ . D'après l'inégalité classique de Korn, cela entraîne que  $v^m \rightarrow 0 = v$  dans  $H^1(\Omega^+, \mathbb{R}^3)$ .

Par continuité de la trace sur  $S^+$ , on a  $v_{|S^+}^+ = v_{|S^+}^s = 0$ . D'autre part,  $\partial_3 v_3^m = \varepsilon e_{33}(\varepsilon_m; v^m) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$  et  $\partial_3 v_\alpha^m = \varepsilon_m (2e_{\alpha 3}(\varepsilon_m; v^m) - \partial_\alpha v_3^m) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$  entraînent que  $\partial_3 v = 0$  dans  $B$ , et donc  $v = 0$  dans  $B$ .

De même,  $e_{ij}(v) = 0$  dans  $\Omega^-$ , et par continuité de la trace sur  $S^-$ ,  $v_{|S^-}^- = v_{|S^-}^s = 0$ , ce qui implique que  $v = 0$  dans  $\Omega^-$ .

En fait,  $(v^m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $v = 0$  dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} v^m &\rightarrow v = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ e_{ij}(v^m) &\rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega^\pm), \\ e_{\alpha\beta}(v^m) &\rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(B), \\ \partial_3 v^m &\rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(B). \end{aligned}$$

Montrons que  $\partial_\alpha v_3^m \rightarrow 0 = \partial_\alpha v_3$  dans  $L^2(B)$ . Pour cela il suffit de montrer que

$$\begin{aligned}\partial_\alpha v_3^m &\rightarrow \partial_\alpha v_3 && \text{dans } H^{-1}(B), \\ \partial_{\alpha i} v_3^m &\rightarrow \partial_{\alpha i} v_3 && \text{dans } H^{-1}(B).\end{aligned}$$

La première convergence est une conséquence de la convergence  $v_3^m \rightarrow v_3$  dans  $L^2(B)$ . La relation  $\partial_3 v_3^m \rightarrow 0 = \partial_3 v_3$  dans  $L^2(B)$  implique que

$$\partial_{\alpha 3} v_3^m \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(B).$$

D'autre part,  $\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\beta}(v^m) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$  entraîne que  $\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{\alpha\beta}(v^m) \rightarrow 0$  dans  $H^{-1}(B)$ , et un rapide calcul montre que  $\partial_{\alpha\beta} v_3^m + \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{\alpha\beta}(v^m) \rightarrow 0$  dans  $H^{-1}(B)$ . En effet,

$$\partial_{11} v_3^m + \frac{1}{\varepsilon_m} \partial_3 e_{11}(v^m) = \partial_1(\partial_1 v_3^m + \frac{1}{\varepsilon_m} \partial_3 v_1^m) = \partial_1 e_{13}(\varepsilon_m, v^m) \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(B),$$

de même  $\partial_{22} v_3^m + \frac{1}{\varepsilon_m} \partial_3 e_{22}(v^m) \rightarrow 0$  dans  $H^{-1}(B)$ , et

$$\begin{aligned}\partial_{12} v_3^m + \frac{1}{\varepsilon_m} \partial_3 e_{12}(v^m) &= \frac{1}{2} \partial_1(\partial_2 v_3^m + \frac{1}{\varepsilon_m} \partial_3 v_2^m) + \frac{1}{2} \partial_2(\partial_1 v_3^m + \frac{1}{\varepsilon_m} \partial_3 v_1^m) \\ &= \partial_1 e_{23}(\varepsilon_m, v^m) + \partial_2 e_{13}(\varepsilon_m, v^m) \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(B).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\partial_{\alpha\beta} v_3^m \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(B),$$

et par conséquent,

$$\partial_\alpha v_3^m \rightarrow 0 = \partial_\alpha v_3 \text{ dans } L^2(B).$$

On a donc

$$v^m \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Omega, \mathbb{R}^3),$$

ce qui est absurde puisque  $\|v^m\|_{1,\Omega} = 1$  pour tout  $m$ . □

Introduisons l'espace  $\bar{V}$  défini par

$$\bar{V} := \left\{ v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) : v^\pm \in H^1(\Omega^\pm, \mathbb{R}^3), e_{\alpha\beta}(v^s) \in L^2(B), \partial_3 v^s \in L^2(B, \mathbb{R}^3), v_{|S^\pm}^\pm = v_{|S^\pm}^s, v_{|\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

Muni de la norme

$$\|v\|_{\bar{V}} := \left[ \|v\|_{1,\Omega^+}^2 + \|v\|_{1,\Omega^-}^2 + \|\hat{e}(v)\|_{0,B}^2 + \|v\|_{0,B}^2 + \|\partial_3 v\|_{0,B}^2 \right]^{1/2},$$

l'espace  $\bar{V}$  est complet. De plus,  $V_B^M$  est un sous-espace fermé de  $\bar{V}$ . En fait,  $V_B^M = \{v \in \bar{V} : \partial_3 v = 0\}$ .

On établit l'inégalité de type Korn dans  $\bar{V}$  suivante.

**Proposition 2.4.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|v\|_{\bar{V}} \leq C \left( \|e(v)\|_{0,\Omega^+}^2 + \|e(v)\|_{0,\Omega^-}^2 + \|e(\varepsilon; v)\|_{0,B}^2 \right)^{1/2} \quad (2.18)$$

pour tout  $v \in \bar{V}$ .

*Démonstration.* Supposons que cette inégalité n'est pas vraie. Alors il existe une suite  $\varepsilon^m \rightarrow 0$  et  $(v^m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $V$  tels que

$$\|v^m\|_{1,\Omega^+}^2 + \|v^m\|_{1,\Omega^-}^2 + \|\hat{e}(v^m)\|_{0,S}^2 + \|v\|_{0,B}^2 + \|\partial_3 v^m\|_{0,B}^2 = 1 \text{ pour tout } m,$$

$$e_{ij}(v^m) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega^\pm),$$

$$e_{ij}(\varepsilon_m; v^m) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(B).$$

La suite  $(v^m)_{m \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $\bar{V}$ , donc il existe  $v \in \bar{V}$  et une sous-suite non renommée telle que

$$v^m \rightharpoonup v \text{ faiblement dans } \bar{V}.$$

La convergence  $e_{ij}(v^m) \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega^+)$  implique que  $e_{ij}(v) = 0$  dans  $\Omega^+$ , et donc, d'après l'inégalité de Korn classique,  $v = 0$  dans  $\Omega^+$ .

Par hypothèse,  $e_{33}(\varepsilon_m; v^m) = \frac{1}{\varepsilon_m} \partial_3 v_3^m \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$ , donc  $\partial_3 v_3 = 0$  dans  $B$ , et par continuité de la trace sur  $S^+$ , on en déduit que  $v_3 = 0$  dans  $B$ . De même, par continuité de la trace  $\hat{v}_{|S^+}^s = \hat{v}_{|S^+}^+ = 0$ , et d'après l'inégalité (2.17),  $\varepsilon_m v^m \rightarrow 0$  dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , ce qui combiné avec  $e_{\alpha 3}(\varepsilon_m; v^m) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$  entraîne que  $\partial_3 v_\alpha^m \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$ . On en déduit que  $\partial_3 \hat{v} = 0$  dans  $B$  et donc  $\hat{v} = 0$  dans  $B$ .

Enfin, puisque  $e_{ij}(v^m) \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega^-)$ , on a  $e_{ij}(v) = 0$  dans  $\Omega^-$ , et par continuité de la trace  $v_{|S^-}^- = v_{|S^-}^s = 0$ , donc  $v = 0$  dans  $\Omega^-$ .

La suite  $(v^m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge donc faiblement vers 0 dans  $\bar{V}$ , et il est facile de voir qu'en fait elle converge fortement vers 0 dans  $\bar{V}$  ce qui est absurde puisque  $\|v^m\|_{\bar{V}} = 1$  pour tout  $m > 0$ . En effet,  $v^m \rightarrow v = 0$  dans  $L^2(\Omega^\pm, \mathbb{R}^3)$  et  $e_{ij}(v^m) \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega^\pm)$ , donc  $v^m \rightarrow 0$  dans  $H^1(\Omega^\pm, \mathbb{R}^3)$ . De même,  $e_{\alpha\beta}(v^m) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$ , et  $\partial_3 v_i \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$ . Il reste à montrer que  $v^m \rightarrow 0$  dans  $L^2(B, \mathbb{R}^3)$ . Pour tout  $x \in B$  on a

$$\begin{aligned} v^{s,m}(\hat{x}, x_3) &= v^{s,m}(\hat{x}, 1) - \int_{x_3}^1 \partial_3 v^{s,m}(\hat{x}, s) ds \\ &= v_{|S^+}^{+,m}(\hat{x}) - \int_{x_3}^1 \partial_3 v^{s,m}(\hat{x}, s) ds, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_B |v^{s,m}|^2 dx &\leq 2 \left[ \int_B |v_{|S^+}^{+,m}|^2 dx + \int_B \left( \int_{-1}^1 |\partial_3 v_{|S^+}^{s,m}| ds \right)^2 dx \right] \\ &\leq 4 \int_S |v_{|S^+}^{+,m}|^2 d\hat{x} + 4 \int_B |\partial_3 v^{s,m}|^2 dx \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . □

On peut maintenant étudier la convergence de la solution  $u(\varepsilon)$  du problème (2.3) pour  $m = 1, 3$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

## 2.1.4 Convergences

### Convergence faible pour $m = 1$

En prenant comme fonction test dans (2.5) la solution  $u(\varepsilon)$ , on obtient les estimations a priori suivantes :

**Lemme 2.1.** *La solution  $u(\varepsilon)$  du problème (2.5) vérifie les estimations suivantes :*

$$\|u(\varepsilon)\|_{\bar{V}} \leq C; \quad (2.19)$$

$$\|\varepsilon u(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \leq C; \quad (2.20)$$

$$\|e_{ij}(\varepsilon; u(\varepsilon))\|_{0,B} \leq C. \quad (2.21)$$

*Démonstration.* Ces estimations sont une conséquence directe des propriétés de coercivité et de continuité des formes bilinéaires, de l'inégalité de Korn, de l'inégalité (2.17) et des hypothèses sur le chargement.  $\square$

Le lemme 2.1 nous permet de déduire le résultat de convergence pour la suite  $u(\varepsilon)$ .

**Théorème 2.1.** *La suite  $(u(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  converge faiblement dans  $\bar{V}$  vers  $u^0$ , où  $u^0 \in V_B^M$  est la solution du problème  $(\mathcal{P}_{pl,1})$ .*

*Démonstration.* La démonstration consiste à montrer dans un premier temps qu'il existe  $u \in V_B^M$  limite faible dans  $\bar{V}$  de la suite  $(u(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ . On montre ensuite que  $u$  est la solution de  $(\mathcal{P}_{pl,1})$ .

*i)* D'après l'estimation (2.19), la suite  $(u(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  est bornée dans  $\bar{V}$  qui est complet. Il existe donc  $u \in \bar{V}$  tel que  $u(\varepsilon) \rightharpoonup u$  dans  $\bar{V}$ .

D'autre part, on déduit de (2.21) qu'il existe  $z_{ij} \in L^2(B)$  tel que

$$e_{ij}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \rightharpoonup z_{ij} \text{ dans } L^2(B)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} (\varepsilon \partial_\alpha u_3(\varepsilon) + \partial_3 u_\alpha(\varepsilon)) &= 2\varepsilon e_{\alpha 3}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(B); \\ \partial_3 u_3(\varepsilon) &= \varepsilon e_{33}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(B). \end{aligned}$$

Par définition de la convergence dans  $\bar{V}$ , on obtient que  $\partial_3 u_3 = 0$  dans  $B$ .

Il reste à montrer que  $\partial_3 u_\alpha = 0$  dans  $B$ . Considérons la suite  $(\varepsilon u(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ . De l'estimation (2.20), on déduit qu'il existe  $u^{-1} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  tel que

$$\varepsilon u(\varepsilon) := u^{-1}(\varepsilon) \rightharpoonup u^{-1} \text{ dans } H^1(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Or, par définition de la convergence dans  $\bar{V}$ ,  $u(\varepsilon) \rightharpoonup u$  dans  $H^1(\Omega^\pm, \mathbb{R}^3)$  donc nécessairement  $u^{-1} = 0$  dans  $\Omega^\pm$ .

Par continuité de la trace, on a  $u_{|S^\pm}^{-1,\pm} = u_{|S^\pm}^{-1,s}$ , ce qui implique que  $u_{|S^+}^{-1,s} = 0$ , et comme  $\partial_3 u^{-1}(\varepsilon) = \varepsilon \partial_3 u(\varepsilon) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B, \mathbb{R}^3)$ , on obtient  $u^{-1} = 0$  dans  $B$ . Donc

$$\varepsilon u(\varepsilon) \rightharpoonup 0 \text{ dans } H^1(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Ceci, combiné avec  $(\varepsilon \partial_\alpha u_3(\varepsilon) + \partial_3 u_\alpha(\varepsilon)) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$  entraîne que  $\partial_3 u_\alpha = 0$  dans  $B$ , et donc  $v \in V_B^M$ .

ii) Multiplions (2.5) par  $\varepsilon$  et passons à la limite en  $\varepsilon$ . Il vient

$$\int_B \frac{\mu^s}{2} z_{\alpha 3} \partial_3 v_\alpha \, dx + \int_B \lambda^s e_{\sigma\sigma}(u) e_{33}(v) \, dx + \int_B (\lambda^s + 2\mu^s) z_{33} e_{33}(v) \, dx = 0.$$

En prenant  $v$  tel que  $\partial_3 v_3 = 0$  dans  $B$ , on obtient

$$z_{\alpha 3} = 0,$$

et donc

$$z_{33} = -\frac{\lambda^s}{\lambda^s + 2\mu^s} e_{\sigma\sigma}(u).$$

On retrouve ainsi le résultat (2.7) obtenu par développement asymptotique.

En prenant dans (2.5)  $v$  tel que  $\partial_3 v = 0$  dans  $B$ , alors  $v \in V_B^M$  et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 on obtient

$$a^+(u, v) + a^-(u, v) + \int_S \left( \frac{4\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} e_{\sigma\sigma}(u) e_{\tau\tau}(v) + 4\mu^s e_{\alpha\beta}(u) e_{\alpha\beta}(v) \right) d\hat{x} = L(v).$$

Donc  $u = u^0$ , l'unique solution de  $(\mathcal{P}_{pl,1})$ . □

### Convergence forte pour $m = 1$

**Théorème 2.2.** *Sous les hypothèses précédentes, il existe une sous-suite de  $(u(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  non renommée qui converge fortement vers  $u^0$  dans  $\bar{V}$ .*

*Démonstration.* Soit  $(w^\eta)_{\eta>0}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)$  telle que

$$\begin{cases} w_\alpha^\eta \rightarrow -\partial_\alpha u_3^0 & \text{dans } L^2(S) \\ w_3^\eta \rightarrow z_{33} & \text{dans } L^2(S) \end{cases}$$

et soit  $(\phi^\eta)_{\eta>0} \subset \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  vérifiant  $\phi^\eta(x) = x_3 w^\eta(\hat{x})$  pour tout  $x \in B$ . Alors  $u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta \in V$ .

Posons

$$\begin{aligned} a(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta) &:= a^+(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta) \\ &+ a^-(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta) \\ &+ a_{\alpha\beta}^s(\varepsilon, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} a_{\alpha 3}^s(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2} a_{33}^s(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta). \end{aligned}$$

Par coercivité et d'après la proposition 2.4,

$$a(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta) \geq \|u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta\|_V^2. \quad (2.22)$$

Par un calcul élémentaire, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta) = \\ L(u^0) - a^+(u^0, u^0) - a^-(u^0, u^0) - \int_B (\lambda^s e_{\sigma\sigma}(u^0) e_{\tau\tau}(u^0) + 2\mu^s e_{\alpha\beta}(u^0) e_{\alpha\beta}(u^0)) dx \\ + \int_B \frac{\mu^s}{2} (w_\alpha^\eta + \partial_\alpha u_3^0)(w_\alpha^\eta + \partial_\alpha u_3^0) dx \\ - 2 \int_B \lambda^s z_{33} e_{\sigma\sigma}(u^0) dx + \int_B (\lambda^s + 2\mu^s)(w_3^\eta - 2z_{33})w_3^\eta dx. \end{aligned}$$

Or, de la convergence (forte) de la suite  $(w^\eta)_{\eta>0}$ , on déduit

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ \int_B \frac{\mu^s}{2} (w_\alpha^\eta + \partial_\alpha u_3^0)(w_\alpha^\eta + \partial_\alpha u_3^0) dx - 2 \int_B \lambda^s z_{33} e_{\sigma\sigma}(u^0) dx + \int_B (\lambda^s + 2\mu^s)(w_3^\eta - 2z_{33})w_3^\eta dx \right] \\ = \int_B \frac{\lambda^{s2}}{\lambda^s + 2\mu^s} e_{\sigma\sigma}(u^0) e_{\tau\tau}(u^0) dx. \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon \phi^\eta) = \\ L(u^0) - a^+(u^0, u^0) - a^-(u^0, u^0) - \int_S \left( \frac{4\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} e_{\sigma\sigma}(u^0) e_{\tau\tau}(u^0) + 4\mu^s e_{\alpha\beta}(u^0) e_{\alpha\beta}(u^0) \right) d\hat{x} = 0. \end{aligned}$$

On termine la démonstration grâce au lemme 1.1.  $\square$

**Remarque 2.1.** *Ce résultat peut être interprété comme une première estimation d'erreur :  $\|u(\varepsilon) - u^0\| = O(1) + O(\varepsilon)$ .*

### Convergence faible pour $m = 3$

Etudions maintenant la convergence de la solution du problème (2.11) lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. En prenant comme fonction test la solution  $u(\varepsilon)$ , on obtient les estimations a priori suivantes.

**Lemme 2.2.** *La solution  $u(\varepsilon)$  du problème (2.11) satisfait les estimations suivantes :*

$$\|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2 \leq C; \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \|e_{ij}(\varepsilon; u(\varepsilon))\|_{0,B}^2 \leq C. \quad (2.24)$$

*Démonstration.* Comme pour  $m = 1$ , ces estimations découlent des propriétés de coercivité et de continuité des formes bilinéaires, des hypothèses sur le chargement, et de l'inégalité de type Korn (2.17).  $\square$

**Théorème 2.3.** *La suite  $(u(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  converge faiblement dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  vers  $u^0$ , où  $u^0 \in V_B^F$  est la solution de  $(\mathcal{P}_{pl,3})$ .*

*Démonstration.* La démonstration est composée de six parties.

i) Des estimations (2.23)-(2.24) on déduit qu'il existe  $u \in V$  et  $z_{ij} \in L^2(B)$  tels que pour une sous-suite non renommée :

$$u(\varepsilon) \rightharpoonup u \text{ dans } H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \text{ et } u(\varepsilon) \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^3);$$

$$\frac{1}{\varepsilon} e_{ij}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \rightharpoonup z_{ij} \text{ dans } L^2(B) ;$$

et

$$e_{ij}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(B).$$

Par conséquent,  $\partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{33}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$  et  $\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) := \varepsilon(2e_{\alpha 3}(\varepsilon; u(\varepsilon)) - \partial_\alpha u_3(\varepsilon)) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$ , et donc  $\partial_3 u = 0$  dans  $B$ . De plus,  $e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) = e_{\alpha\beta}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$  entraîne que  $e_{\alpha\beta}(u) = 0$  dans  $B$ .

ii) Montrons que  $u \in V_B^F$ . Pour cela il ne reste qu'à vérifier que  $u_3 \in H^2(B)$ .

On sait que  $e_{\alpha 3}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$ , donc

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow -\partial_\alpha u_3 \text{ dans } L^2(B).$$

Soit  $\phi \in \mathcal{D}(S)$ . On a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B x_3 \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) \phi \, dx = \int_B x_3 z_{\alpha\beta} \phi \, dx, \quad (2.25)$$

Etudions  $\int_B x_3 \frac{1}{\varepsilon} \partial_\beta u_\alpha(\varepsilon) \phi \, dx$ .

$$\begin{aligned} \int_B x_3 \frac{1}{\varepsilon} \partial_\beta u_\alpha(\varepsilon) \phi \, dx &= \int_S \left( \int_{-1}^1 x_3 \frac{1}{\varepsilon} \partial_\beta u_\alpha(\varepsilon) \, dx_3 \right) \phi \, d\hat{x} \\ &= \int_S \partial_\beta \left( \int_{-1}^1 x_3 \frac{1}{\varepsilon} u_\alpha(\varepsilon) \, dx_3 \right) \phi \, d\hat{x} \\ &= - \int_S \left( \int_{-1}^1 x_3 \frac{1}{\varepsilon} u_\alpha(\varepsilon) \, dx_3 \right) \partial_\beta \phi \, d\hat{x} \\ &= - \int_S \left( \left[ \frac{x_3^2}{2} \frac{1}{\varepsilon} u_\alpha(\varepsilon) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{x_3^2}{2} \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \, dx_3 \right) \partial_\beta \phi \, d\hat{x} \\ &= - \frac{1}{2} \int_B \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \partial_\beta \phi \, dx + \int_B \frac{x_3^2}{2} \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \partial_\beta \phi \, dx \\ &\longrightarrow \frac{1}{2} \int_B \partial_\alpha u_3 \partial_\beta \phi \, dx - \int_B \frac{x_3^2}{2} \partial_\alpha u_3 \partial_\beta \phi \, dx = - \frac{2}{3} \int_S \partial_{\alpha\beta} u_3 \phi \, dx \end{aligned}$$

lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x_3 \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) \, dx_3 &\rightharpoonup \int_{-1}^1 x_3 z_{\alpha\beta} \, dx_3 \text{ dans } L^2(S) \\ \int_{-1}^1 x_3 \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) \, dx_3 &\rightharpoonup - \frac{2}{3} \partial_{\alpha\beta} u_3 \text{ dans } \mathcal{D}'(S) \end{aligned}$$

et, par unicité de la limite, on en déduit que

$$\int_{-1}^1 x_3 z_{\alpha\beta} \, dx_3 = - \frac{2}{3} \partial_{\alpha\beta} u_3 \text{ dans } L^2(S). \quad (2.26)$$

Ceci montre que  $\partial_{\alpha\beta} u_3 \in L^2(S)$ , et donc  $u_3 \in H^2(B)$  puisque  $u_3$  est indépendant de  $x_3$ .

iii) Multiplions (2.11) par  $\varepsilon^2$  et faisons tendre  $\varepsilon$  vers 0. Il vient

$$\int_B \frac{\mu^s}{2} z_{\alpha 3} \partial_3 v_\alpha \, dx + \int_B (\lambda^s z_{\sigma\sigma} + (\lambda^s + 2\mu^s) z_{33}) e_{33}(v) \, dx = 0 \quad \forall v \in V.$$

En prenant  $v$  tel que  $e_{33}(v) = 0$  on obtient

$$z_{\alpha 3} = 0,$$

d'où

$$z_{33} = -\frac{\lambda^s}{\lambda^s + 2\mu^s} z_{\sigma\sigma}.$$

iv) Multiplions (2.11) par  $\varepsilon$  et prenons  $v$  tel que dans  $B$ ,  $e_{33}(v) = 0$  et  $v_\alpha = x_3 \phi_\alpha$ ,  $\phi_\alpha \in \mathcal{D}(S)$ . En passant à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 et en utilisant (2.26), on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_B \frac{\mu^s}{2} e_{\alpha 3}(\varepsilon, u(\varepsilon)) \phi_\alpha \, dx &= - \int_B x_3 \left( \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} z_{\sigma\sigma} e_{\tau\tau}(\phi) + 2\mu^s z_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\phi) \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_S \left( \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} \partial_{\sigma\sigma} u_3 e_{\tau\tau}(\phi) + 2\mu^s \partial_{\alpha\beta} u_3 e_{\alpha\beta}(\phi) \right) dx. \end{aligned} \quad (2.27)$$

v) Montrons que  $z_{\alpha\beta} = -x_3 \partial_{\alpha\beta} u_3$ .

On a  $\partial_3 \frac{1}{\varepsilon} u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow -\partial_\alpha u_3$  dans  $L^2(B)$ , donc par continuité de l'opérateur  $\partial_\beta : L^2(B) \rightarrow H^{-1}(B)$ , on a  $\partial_\beta(\partial_3 \frac{1}{\varepsilon} u_\alpha(\varepsilon)) \rightarrow -\partial_{\alpha\beta} u_3$  dans  $H^{-1}(B)$  d'où

$$\frac{1}{2} (\partial_\beta(\partial_3 \frac{1}{\varepsilon} u_\alpha(\varepsilon)) + \partial_\alpha(\partial_3 \frac{1}{\varepsilon} u_\beta(\varepsilon))) = \partial_3 \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) \rightarrow -\partial_{\alpha\beta} u_3 \quad (2.28)$$

dans  $H^{-1}(B)$ .

D'autre part, puisque  $\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) \rightarrow z_{\alpha\beta}$ , par continuité de  $\partial_3 : L^2(B) \rightarrow H^{-1}(B)$ , on a

$$\partial_3 \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) \rightarrow \partial_3 z_{\alpha\beta} \text{ dans } H^{-1}(B).$$

Donc

$$\partial_{\alpha\beta} u_3 = -\partial_3 z_{\alpha\beta}.$$

L'inégalité a en fait lieu dans  $L^2(B)$  puisque  $u_3 \in H^2(B)$ . Par conséquent,  $z_{\alpha\beta} = -x_3 \partial_{\alpha\beta} u_3 + \bar{z}_{\alpha\beta}$ , où  $\bar{z}_{\alpha\beta}$  est indépendant de  $x_3$ .

En multipliant (2.11) par  $\varepsilon$  et en prenant  $v$  tel que  $\partial_3 v = 0$  dans  $B$ , le passage à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  donne

$$\int_B \left( \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} z_{\sigma\sigma} e_{\tau\tau}(\phi) + 2\mu^s z_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\phi) \right) dx = 0,$$

ce qui entraîne

$$\int_B x_3 \left( \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} \bar{z}_{\sigma\sigma} e_{\tau\tau}(\phi) + 2\mu^s \bar{z}_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\phi) \right) dx = 0.$$

Nécessairement,  $\bar{z}_{\alpha\beta} = 0$  et

$$z_{\alpha\beta} = -x_3 \partial_{\alpha\beta} u_3, \quad z_{33} = x_3 \frac{\lambda^s}{\lambda^s + 2\mu^s} \partial_{\sigma\sigma} u_3.$$

vi) En prenant comme fonction test dans (2.11)  $v \in V_B^F$ , on obtient, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,

$$a^+(u, v) + a^-(u, v) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_B \frac{\mu^s}{2} e_{\alpha 3}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \partial_\alpha v_3 \, dx = L(v),$$

et d'après (2.27) on obtient finalement

$$a^+(u, v) + a^-(u, v) + \frac{2}{3} \int_S \left( \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} \partial_{\sigma\sigma} u_3 \partial_{\tau\tau} v_3 + 2\mu^s \partial_{\alpha\beta} u_3 \partial_{\alpha\beta} v_3 \right) d\hat{x} = L(v).$$

Donc  $u = u^0$ , l'unique solution du problème  $(\mathcal{P}_{pl,3})$ .  $\square$

### Convergence forte pour $m = 3$

**Théorème 2.4.** *Sous les hypothèses précédentes, il existe une sous-suite de  $(u(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  non renommée qui converge fortement vers  $u^0$  dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\phi^\eta)_{\eta > 0} \subset \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  telle que

$$\begin{cases} \phi_\alpha^\eta(x) = 0 \, \forall x \in B, \\ \phi_3^\eta(x) = \frac{x_3^2}{2} w^\eta(\hat{x}) \, \forall x \in B, \end{cases}$$

où  $(w^\eta)_{\eta > 0}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{D}(S)$  qui vérifie  $w^\eta \rightarrow \partial_3 z_{33}$ , et soit  $\psi \in V$  tel que

$$\begin{cases} \psi_\alpha(x) = -x_3 \partial_\alpha u_3^0(\hat{x}) \, \forall x \in B, \\ \psi_3(x) = 0 \, \forall x \in B. \end{cases}$$

Alors,  $u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta \in V$ , et en posant

$$\begin{aligned} a(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta) := & \\ & a^+(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta) \\ & + a^-(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta) \\ & + \frac{1}{\varepsilon^2} a_{\alpha\beta}^s(\varepsilon, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta) \\ & + \frac{1}{\varepsilon^3} a_{3\alpha}^s(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta) \\ & + \frac{1}{\varepsilon^4} a_{33}^s(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta), \end{aligned}$$

par coercivité et d'après la proposition 2.17, on a

$$a(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta) \geq \|u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta\|_{1,\Omega}^2. \quad (2.29)$$

En passant à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans (2.29), on obtient

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta) \\ & = L(u^0) - a^+(u^0, u^0) - a^-(u^0, u^0) - \frac{2}{3} \int_S (\lambda^s \partial_{\sigma\sigma} u_3^0 \partial_{\tau\tau} u_3^0 + 2\mu^s \partial_{\alpha\beta} u_3^0 \partial_{\alpha\beta} u_3^0) d\hat{x} \\ & + \int_B x_3^2 (\lambda^s + 2\mu^s) w^\eta w^\eta \, dx + 2 \int_B \lambda^s x_3^2 \frac{\lambda^s}{\lambda^s + 2\mu^s} \partial_{\sigma\sigma} u_3^0 \partial_{\tau\tau} u_3^0 \, dx - 2 \int_B (\lambda^s + 2\mu^s) x_3^2 \lambda^s \partial_{\sigma\sigma} u_3^0 w^\eta \, dx. \end{aligned}$$

Puisque  $w^\eta \rightarrow \partial_3 z_{33} = \frac{\lambda^s}{\lambda^s + 2\mu^s} \partial_{\sigma\sigma} u_3^0$  dans  $L^2(S)$ , lorsque  $\eta \rightarrow 0$ , on obtient finalement

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta) \\ &= L(u^0) - a^+(u^0, u^0) - a^-(u^0, u^0) - \frac{2}{3} \int_S \left( \frac{\lambda^s}{2\lambda^s\mu^s + 2\mu^s} \partial_{\sigma\sigma} u_3^0 \partial_{\tau\tau} u_3^0 + 2\mu^s \partial_{\alpha\beta} u_3^0 \partial_{\alpha\beta} u_3^0 \right) d\hat{x} = 0. \end{aligned}$$

On conclut grâce au lemme de diagonalisation, lemme 1.1.  $\square$

## 2.2 2<sup>ème</sup> cas : la surface $S$ est quelconque, la direction privilégiée d'assemblage est $n$

Nous nous intéressons maintenant au cas où la surface  $S$  est quelconque et la direction privilégiée de l'assemblage est sa normale  $n$ . Pour cela nous commençons par rappeler les résultats obtenus par la méthode des développements asymptotiques dans [18], [62] et y référons le lecteur pour plus de détails.

### 2.2.1 Description du problème en coordonnées curvilignes

Nous reprenons les hypothèses faites dans la section précédente en supposant maintenant que la couche mince est de type coque et est obtenue par translation d'une surface générale 2D suivant la direction transversale normale. Plus précisément, soit  $\theta \in \mathcal{C}^2(\bar{S}; \mathbb{R}^3)$  une application injective telle que les vecteurs  $a_\alpha(\hat{x}) := \partial_\alpha \theta(\hat{x})$  forment la base covariante du plan tangent à la surface  $\omega := \theta(\bar{S})$  au point  $\theta(\hat{x})$ ; les deux vecteurs  $a^\alpha(\hat{x})$  du plan tangent, définis par la relation  $a^\alpha(\hat{x}) \cdot a_\beta(\hat{x}) = \delta_\beta^\alpha$ , forment la base contravariante. Soit  $a_3(\hat{x}) = a^3(\hat{x}) := \frac{a_1(\hat{x}) \wedge a_2(\hat{x})}{|a_1(\hat{x}) \wedge a_2(\hat{x})|}$  le vecteur normal unitaire à  $\omega$ . Les composantes covariantes et contravariantes  $a_{\alpha\beta}$  et  $a^{\alpha\beta}$  de la première forme fondamentale, les composantes covariantes, resp. mixtes,  $b_{\alpha\beta}$ , resp.  $b_\alpha^\beta$ , de la seconde forme fondamentale, et les symboles de Chrystoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$  de la surface  $\omega$  sont alors définis par

$$a_{\alpha\beta} := a_\alpha \cdot a_\beta, \quad a^{\alpha\beta} := a^\alpha \cdot a^\beta, \quad b_{\alpha\beta} := a^3 \cdot \partial_\beta a_\alpha, \quad b_\alpha^\beta := a^{\beta\sigma} b_{\alpha\sigma}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma := a^\sigma \cdot \partial_\beta a_\alpha.$$

Soit  $\Theta_\varepsilon^s : \bar{B}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application définie par

$$\Theta_\varepsilon^s(x^\varepsilon) := \theta(\hat{x}) + x_3^\varepsilon a_3(\hat{x}) \text{ pour tout } x^\varepsilon = (\hat{x}, x_3^\varepsilon) = (x_1, x_2, x_3^\varepsilon) \in \bar{B}_\varepsilon,$$

$\Theta_\varepsilon^s(\bar{B}_\varepsilon) \subset \mathbb{R}^3$  est la configuration de référence du domaine de type coque de surface moyenne  $\omega := \theta(\bar{S})$  et d'épaisseur  $2\varepsilon$ .

On suppose qu'il existe une immersion  $\Theta_\varepsilon : \bar{\Omega}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que

$$\Theta_\varepsilon := \begin{cases} \Theta_\varepsilon^\pm \text{ on } \bar{\Omega}_\varepsilon^\pm \\ \Theta_\varepsilon^s \text{ on } \bar{B}_\varepsilon \end{cases}, \quad \Theta_\varepsilon^\pm(S_\varepsilon^\pm) = \Theta_\varepsilon^s(S_\varepsilon^\pm),$$

où  $S_\varepsilon^\pm := S \times \{\pm\varepsilon\}$  et  $\Theta_\varepsilon^\pm : \bar{\Omega}_\varepsilon^\pm \rightarrow \mathbb{R}^3$  sont deux immersions sur  $\bar{\Omega}_\varepsilon^\pm$  définissant un système de coordonnées curvilignes sur  $\bar{\Omega}_\varepsilon^\pm$ .

On note

$$e_{i||j}^\varepsilon(v^\varepsilon) := \frac{1}{2} (\partial_j^\varepsilon v_i^\varepsilon + \partial_i^\varepsilon v_j^\varepsilon) - \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} v_p^\varepsilon$$

les composantes du tenseur des déformations linéarisées en coordonnées curvilignes, et  $g_i^\varepsilon, g^{i,\varepsilon}, g_{ij}^\varepsilon, g^{ij,\varepsilon}$  et  $\Gamma_{ij}^{p,\varepsilon}$  les quantités géométriques usuelles ( $g^\varepsilon := \det(g_{ij}^\varepsilon)$  où  $(g_{ij}^\varepsilon) := (\partial_i \Theta_\varepsilon \cdot \partial_j \Theta_\varepsilon)$  et  $(g^{ij,\varepsilon}) := (g_{ij}^\varepsilon)^{-1}$  sont respectivement les composantes covariantes et contravariantes du tenseur métrique associé à  $\Theta_\varepsilon$ ). Pour un matériau isotrope de constantes de Lamé  $\lambda_\varepsilon > 0$  et  $\mu_\varepsilon > 0$ , les composantes contravariantes du tenseur d'élasticité sont définies par  $A^{ijkl,\varepsilon} := \lambda_\varepsilon g^{ij,\varepsilon} g^{kl,\varepsilon} + \mu_\varepsilon (g^{ik,\varepsilon} g^{jl,\varepsilon} + g^{il,\varepsilon} g^{jk,\varepsilon})$ . La formulation variationnelle du problème de l'équilibre dans  $\Omega_\varepsilon$  en coordonnées curvilignes est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in V^\varepsilon \text{ tel que pour tout } v^\varepsilon \in V^\varepsilon \\ A_\varepsilon^-(u^\varepsilon, v^\varepsilon) + A_\varepsilon^+(u^\varepsilon, v^\varepsilon) + A_\varepsilon^s(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = L(v^\varepsilon), \end{cases} \quad (2.30)$$

où

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^\pm(u^\varepsilon, v^\varepsilon) &:= \int_{\Omega_\varepsilon^\pm} A_\pm^{ijkl,\varepsilon} e_{k||\ell}^\varepsilon(u^\varepsilon) e_{i||j}^\varepsilon(v^\varepsilon) \sqrt{g^{\pm,\varepsilon}} dx^\varepsilon, \\ A_\varepsilon^s(u^\varepsilon, v^\varepsilon) &:= \int_{B_\varepsilon} A_s^{ijkl,\varepsilon} e_{k||\ell}^\varepsilon(u^\varepsilon) e_{i||j}^\varepsilon(v^\varepsilon) \sqrt{g^{s,\varepsilon}} dx^\varepsilon, \end{aligned}$$

et  $V^\varepsilon := \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3) : v|_{\Gamma_0} = 0\}$ .

Sous ces hypothèses et celles faites sur le chargement dans la section précédente, le problème (2.30) possède une solution unique.

Pour étudier le comportement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  du problème (2.30), nous effectuons le même changement de variable que précédemment. Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, on associe aux fonctions  $A_\pm^{ijkl,\varepsilon}, g^{\pm,\varepsilon}, \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} : \overline{\Omega_\varepsilon^\pm} \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions  $A_\pm^{ijkl}, g^\pm, \Gamma_{ij}^p : \overline{\Omega^\pm} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$\begin{aligned} A_\pm^{ijkl}(x) &:= A_\pm^{ijkl,\varepsilon}(x^\varepsilon) \quad \text{pour tout } x^\varepsilon = \pi^\varepsilon(x) \in \overline{\Omega_\varepsilon^\pm}, \\ g^\pm(x) &:= g^{\pm,\varepsilon}(x^\varepsilon) \quad \text{pour tout } x^\varepsilon = \pi^\varepsilon(x) \in \overline{\Omega_\varepsilon^\pm}, \\ \Gamma_{ij}^p(x) &:= \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon}(x^\varepsilon) \quad \text{pour tout } x^\varepsilon = \pi^\varepsilon(x) \in \overline{\Omega_\varepsilon^\pm}, \end{aligned}$$

et on associe aux fonctions  $A_s^{ijkl,\varepsilon}, g^{s,\varepsilon}, \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} : \overline{B_\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions  $A_s^{ijkl}(\varepsilon), g^s(\varepsilon), \Gamma_{ij}^p(\varepsilon) : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$\begin{aligned} A_s^{ijkl}(\varepsilon)(x) &:= A_s^{ijkl,\varepsilon}(x^\varepsilon) \quad \text{pour tout } x^\varepsilon = \pi^\varepsilon(x) \in \overline{B_\varepsilon}, \\ g^s(\varepsilon)(x) &:= g^{s,\varepsilon}(x^\varepsilon) \quad \text{pour tout } x^\varepsilon = \pi^\varepsilon(x) \in \overline{B_\varepsilon}, \\ \Gamma_{ij}^p(\varepsilon)(x) &:= \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon}(x^\varepsilon) \quad \text{pour tout } x^\varepsilon = \pi^\varepsilon(x) \in \overline{B_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Plus précisément,

$$A_s^{ijkl}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^m} A_s^{ijkl}(0) + O(\varepsilon^{1-m}), \quad \text{et } A_s^{\alpha\beta\sigma 3}(\varepsilon) = A_s^{\alpha 333}(\varepsilon) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} A_s^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) &:= \lambda^s a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu^s (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}), \\ A_s^{\alpha\beta 33}(0) &:= \lambda^s a^{\alpha\beta}, \quad A_s^{\alpha 3\sigma 3}(0) := \mu^s a^{\alpha\sigma}, \quad A_s^{3333}(0) := \lambda^s + 2\mu^s, \\ A_s^{\alpha\beta\sigma 3}(0) &= A_s^{\alpha 333}(0) = 0. \end{aligned}$$

Enfin, pour tout  $v \in H^1(B, \mathbb{R}^3)$ , on définit le tenseur des déformations linéarisées  $e_{i||j}(\varepsilon; v)$  par

$$\begin{aligned} e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; v) &:= \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)v_p; \\ e_{\alpha||3}(\varepsilon; v) &:= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\partial_3 v_\alpha + \partial_\alpha v_3\right) - \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon)v_\sigma; \\ e_{3||3}(\varepsilon; v) &:= \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 v_3. \end{aligned}$$

Le problème posé sur le domaine fixe  $\Omega$  est alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(\varepsilon) \in V \text{ tel que quelque soit } v \in V \\ A^-(u(\varepsilon), v) + A^+(u(\varepsilon), v) + \varepsilon A^s(u(\varepsilon), v) = L(v), \end{cases} \quad (2.31)$$

où  $V := \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) : v|_{\Gamma_0} = 0\}$ , et

$$\begin{aligned} A^\pm(u, v) &:= \int_{\Omega^\pm} A_{\pm}^{ijk\ell}(x) e_{k||\ell}(u) e_{i||j}(v) \sqrt{g^\pm} \, dx, \\ A^s(u, v) &:= \int_B A_s^{ijk\ell}(\varepsilon) e_{k||\ell}(\varepsilon; u) e_{i||j}(\varepsilon; v) \sqrt{g^s(\varepsilon)} \, dx. \end{aligned}$$

## 2.2.2 Etude asymptotique formelle

On suppose le développement asymptotique formel *a priori* de la solution  $u(\varepsilon)$  de (2.31) :

$$u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots$$

### Le problème limite pour $m = 1$

Lorsque la rigidité du matériau dans la coque est de l'ordre  $\frac{1}{\varepsilon}$ , le problème limite obtenu par la méthode des développements asymptotiques est, (cf. [62]),

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^0 \in V_B^M \text{ tel que quelque soit } v \in V_B^M \\ A^-(u^0, v) + A^+(u^0, v) + A_M^s(u^0, v) = L(v), \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{cq,1})$$

où

$$V_B^M := \left\{ L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) : v^\pm \in H^1(\Omega^\pm, \mathbb{R}^3), \gamma_{\alpha\beta}(v^s) \in L^2(B), v_{|S^\pm}^\pm = v_{|S^\pm}^s, L^2(B, \mathbb{R}^3) \ni \partial_3 v^s = 0, v|_{\Gamma_0} = 0 \right\},$$

$$\begin{aligned} A_M^s(u^0, v) &:= 2 \int_S a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(u^0) \gamma_{\alpha\beta}(v) \sqrt{a} \, d\hat{x}, \\ \gamma_{\alpha\beta}(v) &:= \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma v_\sigma - b_{\alpha\beta} v_3, \end{aligned}$$

et

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{2\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + 2\mu^s a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}.$$

On retrouve le comportement membranaire de la coque à travers la forme bilinéaire  $A_M^s$ .

### Le problème limite pour $m = 3$

Considérons l'espace

$$V_B^F := \left\{ v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) : v_3^s \in H^2(B), \gamma_{\alpha\beta}(v^s) = 0, \partial_3 v^s = 0, v|_{\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

Le problème limite obtenu par la méthode des développements asymptotiques lorsque la rigidité de la coque intermédiaire est d'ordre  $\frac{1}{\varepsilon^3}$  est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^0 \in V_B^F \text{ tel que quelque soit } v \in V_B^F \\ A^-(u^0, v) + A^+(u^0, v) + A_F^s(u^0, v) = L(v), \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{cq,3})$$

où

$$A_F^s(u^0, v) := \frac{2}{3} \int_S a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(u^0) \rho_{\alpha\beta}(v) \sqrt{a} \, d\hat{x}$$

est la forme bilinéaire associée au comportement en flexion de la coque, et

$$\rho_{\alpha\beta}(u) := \partial_{\alpha\beta} u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma u_3 - b_{\alpha\beta} u_3 + b_\alpha^\sigma (\partial_\beta u_\sigma - \Gamma_{\beta\sigma}^\tau u_\tau) + b_\beta^\tau (\partial_\alpha u_\tau - \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma u_\sigma) + (\partial_\alpha b_\beta^\tau + \Gamma_{\alpha\sigma}^\tau b_\beta^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma b_\sigma^\tau) u_\tau.$$

Comme pour les plaques, l'espace  $V_B^F$  est complet et le problème  $(\mathcal{P}_{cq,3})$  possède une solution unique.

### 2.2.3 Deux résultats de type Korn

Pour étudier la convergence des solutions des problèmes (2.31) pour  $m \in \{1, 3\}$ , nous aurons besoin de l'inégalité de type Korn en coordonnées curvilignes suivante.

**Proposition 2.5.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour  $\varepsilon$  suffisamment petit*

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq C [\|e_{i\|j}(v)\|_{0,\Omega^+}^2 + \|e_{i\|j}(v)\|_{0,\Omega^-}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|e_{i\|j}(\varepsilon; v)\|_{0,B}^2]^{1/2} \quad \forall v \in V. \quad (2.32)$$

*Démonstration.* La démonstration est semblable à celle de la proposition (2.3) dans le cas des plaques. Supposons que cette inégalité n'est pas vraie. Alors il existe  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  et  $v^m \in V$  tels que

$$\begin{aligned} \|v^m\|_{1,\Omega} &= 1 \text{ pour tout } m, \\ e_{i\|j}(v^m) &\rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega^\pm), \\ \frac{1}{\varepsilon} e_{i\|j}(\varepsilon_m; v^m) &\rightarrow 0 \text{ dans } L^2(B). \end{aligned}$$

Il existe donc  $v \in V$  et une sous-suite non renommée tels que

$$\begin{aligned} v^m &\rightharpoonup v \quad \text{dans } H^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ v^m &\rightarrow v \quad \text{dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

et la convergence  $e_{i||j}(v^m) \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega^+)$  entraîne que  $v = 0$  dans  $\Omega^+$  (et même que  $v^m \rightarrow v = 0$  dans  $H^1(\Omega^+, \mathbb{R}^3)$ ).

De plus, on a

$$\begin{aligned} \partial_3 v_3^m &= \varepsilon_m e_{3||3}(\varepsilon_m; v^m) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(B), \\ \partial_3 v_\alpha^m &= \varepsilon_m (2e_{\alpha||3}(\varepsilon_m; v^m) - \partial_\alpha v_3^m + 2\Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon_m) v_\sigma^m) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(B), \end{aligned}$$

donc  $\partial_3 v = 0$  dans  $B$ , et par continuité de la trace sur  $S^+$ , on en déduit que  $v = 0$  dans  $B$ . Enfin, la convergence  $e_{i||j}(v^m) \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega^-)$  et la continuité de la trace sur  $S^-$  entraînent que  $v = 0$  dans  $\Omega^-$ .

On a alors

$$v^m \rightarrow 0 = v \text{ dans } H^1(\Omega^\pm, \mathbb{R}^3).$$

D'autre part,  $\frac{1}{\varepsilon_m} e_{\alpha||\beta}(\varepsilon_m; v^m) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$  implique que  $\frac{1}{\varepsilon_m} \partial_3 e_{\alpha||\beta}(\varepsilon_m; v^m) \rightarrow 0$  dans  $H^{-1}(B)$ , et d'après l'inégalité

$$\|\rho_{\alpha\beta}(v^m) + \frac{1}{\varepsilon_m} \partial_3 e_{\alpha||\beta}(\varepsilon_m; v^m)\|_{-1,B} \leq C [\|e_{i||j}(\varepsilon_m; v^m)\|_{0,B} + \varepsilon_m \|v_\alpha^m\|_{0,B} + \varepsilon_m \|v_3^m\|_{1,B}]$$

du théorème 5.2.1 dans [27] vol. 3, on obtient

$$\rho_{\alpha\beta}(v^m) \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(B),$$

et il est facile de montrer en adaptant la démonstration de la proposition (2.3) que

$$v^m \rightarrow 0 = v \text{ dans } H^1(B, \mathbb{R}^3).$$

La suite  $(v^m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge donc fortement vers 0 dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , ce qui contredit l'hypothèse  $\|v^m\|_{1,\Omega} = 1$  pour tout  $m$ .  $\square$

Introduisons l'espace  $\bar{V}$ , analogue de celui considéré pour les plaques,

$$\bar{V} := \left\{ v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) : v^\pm \in H^1(\Omega^\pm, \mathbb{R}^3), \gamma_{\alpha\beta}(v) \in L^2(B), \partial_3 v_i \in L^2(S), v_{|S^\pm}^\pm = v_{|S^\pm}^s, v_{|\Gamma_0} = 0 \right\},$$

muni de la norme  $\|\cdot\|_{\bar{V}}$  définie par

$$\|v\|_{\bar{V}} := \left[ \|e_{i||j}(v)\|_{0,\Omega^+}^2 + \|e_{i||j}(v)\|_{0,\Omega^-}^2 + \|v\|_{0,B}^2 + \|\gamma_{\alpha\beta}(v)\|_{0,B}^2 + \|\partial_3 v\|_{0,B}^2 \right]^{1/2}.$$

On montre facilement que l'espace  $\bar{V}$  est complet. Cette propriété est obtenue grâce à la présence de  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ . En général, on travaille dans un espace qui n'est a priori pas complet, cela dépend des conditions aux limites. On se place alors dans le complété qui est un espace abstrait, et il n'est pas toujours possible de caractériser la limite. C'est le cas dans [25] avec la formulation à deux champs proposée. Il est nécessaire de faire des hypothèses de régularité sur le complété de l'espace sur lequel sont définis les champs de déplacement admissibles pour la coque. L'espace  $V_B^M$  muni de cette norme est complet (comme sous-espace fermé d'un espace complet), le problème  $(\mathcal{P}_{cq,1})$  possède donc une solution unique.

On montre alors l'inégalité de type Korn suivante.

**Proposition 2.6.** *Il existe une constante  $C$  telle que pour  $\varepsilon$  suffisamment petit*

$$\|v\|_{\bar{V}} \leq C \left( \|e_{i||j}(v)\|_{0,\Omega^+}^2 + \|e_{i||j}(v)\|_{0,\Omega^-}^2 + \|e_{i||j}(\varepsilon; v)\|_{0,B}^2 \right)^{1/2} \quad (2.33)$$

pour tout  $v \in \bar{V}$ .

La démonstration est identique à la démonstration de la proposition 2.3.

## 2.2.4 Convergences

Pour toute fonction  $v$  définie p.p sur  $B = S \times ]-1, 1[$ , on définit sa moyenne  $\bar{v}$  par

$$\bar{v}(\hat{x}) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(\hat{x}, x_3) dx_3 \text{ pp } \hat{x} \in S.$$

### Convergence faible pour $m = 1$

**Lemme 2.3.** *Soit  $u(\varepsilon)$  la solution du problème (2.31) pour  $m = 1$ . Alors,*

$$\|u(\varepsilon)\|_{\bar{V}} \leq C ; \quad (2.34)$$

$$\|e_{i\|j}(\varepsilon; u(\varepsilon))\|_{0,B} \leq C ; \quad (2.35)$$

$$\|\varepsilon u(\varepsilon)\|_{1,B} \leq C. \quad (2.36)$$

*Démonstration.* Soit  $u(\varepsilon)$  la solution de (2.31). D'après les hypothèses sur le chargement et la coercivité des formes bilinéaires  $A^\pm$  et  $A^s$ , on a

$$\|e_{i\|j}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega^+}^2 + \|e_{i\|j}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega^-}^2 + \|e_{i\|j}(\varepsilon; u(\varepsilon))\|_{0,B}^2 \leq C,$$

donc d'après l'inégalité de type Korn (2.33) on a

$$\|v\|_{\bar{V}} \leq C,$$

et d'après l'inégalité de Korn classique en coordonnées curvilignes et l'inégalité de type Korn (2.32) on a

$$\|\varepsilon u(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \leq C.$$

□

**Théorème 2.5.** *La suite  $(u(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  converge faiblement dans  $\bar{V}$  vers  $u^0$ ,  $u^0 \in V_B^M$ , l'unique solution du problème  $(\mathcal{P}_{cq,1})$ .*

*Démonstration.* La démonstration est divisée en 6 parties.

i) D'après les estimations (2.34) et (2.36), on déduit qu'il existe une sous-suite non renommée et  $u \in \bar{V}$ ,  $u^{-1} \in V$ ,  $e_{i\|j} \in L^2(B)$  tels que

$$\begin{aligned} u(\varepsilon) &\rightharpoonup u \text{ dans } \bar{V}, \\ \varepsilon u(\varepsilon) &\rightharpoonup u^{-1} \text{ dans } H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \text{ et } \varepsilon u(\varepsilon) \rightarrow u^{-1} \text{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ e_{i\|j}(\varepsilon; u(\varepsilon)) &\rightharpoonup e_{i\|j} \text{ dans } L^2(B), \\ \partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{3\|3}(\varepsilon; u(\varepsilon)) &\rightarrow 0 \text{ dans } L^2(B). \end{aligned}$$

ii) Montrons que  $u^{-1} = 0$ . On a  $\varepsilon u(\varepsilon) := u^{-1}(\varepsilon) \rightharpoonup u^{-1}$  dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Or  $u(\varepsilon) \rightharpoonup u$  dans  $H^1(\Omega^\pm, \mathbb{R}^3)$ , donc nécessairement  $u^{-1}(\varepsilon) \rightarrow 0$  dans  $H^1(\Omega^\pm, \mathbb{R}^3)$ . Par continuité de la trace sur  $S^\pm$  on obtient  $u_{|S^\pm}^{-1,s} = u_{|S^\pm}^{-1,\pm} = 0$ , et comme  $\frac{1}{\varepsilon} e_{i\|j}(\varepsilon; u^{-1}(\varepsilon)) \rightharpoonup e_{i\|j}$  dans  $L^2(B)$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \partial_3 u_3^{-1}(\varepsilon) = \varepsilon e_{3\|3}(\varepsilon; u^{-1}(\varepsilon)) &\rightarrow 0 \text{ dans } L^2(B), \\ \partial_3 u_\alpha^{-1}(\varepsilon) = \varepsilon (2e_{\alpha\|3}(\varepsilon; u^{-1}(\varepsilon)) - \partial_\alpha u_3^{-1}(\varepsilon) + 2\Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) u_\sigma^{-1}(\varepsilon)) &\rightarrow 0 \text{ dans } L^2(B), \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\partial_3 u^{-1} = 0$  dans  $B$ , et donc finalement  $u^{-1} = 0$  dans  $B$ .

iii) Montrons que  $\partial_3 u = 0$  dans  $B$ . D'après (2.35) et *i*), on a

$$\begin{aligned} \partial_3 u_3(\varepsilon) &= \varepsilon e_{3\parallel 3}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(B); \\ \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) &= 2\varepsilon e_{\alpha\parallel 3}(\varepsilon; u(\varepsilon)) - \partial_\alpha(\varepsilon u_3(\varepsilon)) + 2\Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon)\varepsilon u_\sigma(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(B). \end{aligned}$$

Donc par définition de la convergence dans  $\bar{V}$ ,  $\partial_3 u(\varepsilon) \rightarrow \partial_3 u = 0$  dans  $L^2(B)$ , et  $u \in V_B^M$ .

iv) Les limites  $e_{\alpha\parallel\beta}$  satisfont  $e_{\alpha\parallel\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(u)$ .

Par définition, on peut écrire

$$\overline{e_{\alpha\parallel\beta}(\varepsilon; u(\varepsilon))} - \gamma_{\alpha\beta}(\overline{u(\varepsilon)}) = -\overline{\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma,2}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)} + \overline{\varepsilon x_3 b_\beta^\sigma |_\alpha u_\sigma(\varepsilon)} + \overline{\varepsilon x_3 b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} u_3(\varepsilon)},$$

où  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma,2}(\varepsilon) := \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(\varepsilon) - (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \varepsilon x_3 b_\beta^\sigma |_\alpha)$  satisfait  $\|\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma,2}(\varepsilon)\|_{0,\infty,\bar{B}} \leq C\varepsilon^2$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit.

D'autre part, puisque  $\|\bar{v}\|_{0,S} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|v\|_{0,B}$ , et  $\overline{x_3 v} = \frac{1}{2}(1 - x_3^2)\partial_3 v$ , on a  $\|\overline{x_3 v}\|_{0,S} \leq C\|\partial_3 v\|_{0,B}$ , d'où

$$\|\overline{e_{\alpha\parallel\beta}(\varepsilon; u(\varepsilon))} - \gamma_{\alpha\beta}(\overline{u(\varepsilon)})\|_{0,S} \leq C\varepsilon \left( \|\varepsilon u_\alpha(\varepsilon)\|_{0,B} + \|\partial_3 u_i(\varepsilon)\|_{0,B} \right),$$

qui tend vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Par définition de  $\|\cdot\|_{\bar{V}}$ ,  $\gamma_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) \rightarrow \gamma_{\alpha\beta}(u)$  dans  $L^2(B)$ , ce qui implique que  $\gamma_{\alpha\beta}(\overline{u(\varepsilon)}) \rightarrow \gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}) = \gamma_{\alpha\beta}(u)$  dans  $L^2(S)$  et donc

$$\overline{e_{\alpha\parallel\beta}} = \gamma_{\alpha\beta}(u) \text{ dans } L^2(S).$$

De plus, d'après le théorème 5.2.1 dans [26] vol.3,

$$\|\partial_3 e_{\alpha\parallel\beta}(\varepsilon; u(\varepsilon)) + \varepsilon \rho_{\alpha\beta}(u(\varepsilon))\|_{-1,B} \leq C\varepsilon \left( \|e_{i\parallel 3}(\varepsilon; u(\varepsilon))\|_{0,B} + \|\varepsilon u_\alpha(\varepsilon)\|_{0,B} + \|\varepsilon u_3(\varepsilon)\|_{1,B} \right).$$

Il est clair que le second membre tend vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Donc par continuité de l'opérateur  $\partial_3 : L^2(B) \rightarrow H^{-1}(B)$ , et puisque  $\varepsilon \rho_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) \rightarrow 0$  dans  $H^{-1}(B)$ , on en déduit que  $\partial_3 e_{\alpha\parallel\beta} = 0$ , et finalement

$$e_{\alpha\parallel\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(u) \text{ dans } L^2(S). \quad (2.37)$$

v) En multipliant (2.31) par  $\varepsilon$  et en passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , il vient

$$\int_B A^{\alpha\beta 33}(0) e_{\alpha\parallel\beta} \partial_3 v_3 \, dx + \int_B A^{\alpha 3 \sigma 3}(0) e_{\alpha\parallel 3} \partial_3 v_\alpha \, dx + \int_B A^{3333}(0) e_{3\parallel 3} \partial_3 v_3 \, dx = 0 \quad \forall v \in V.$$

On en déduit

$$e_{\alpha\parallel 3} = 0,$$

et

$$e_{3\parallel 3} = -\frac{\lambda^s}{\lambda^s + 2\mu^s} a^{\alpha\beta} e_{\alpha\parallel\beta}. \quad (2.38)$$

vi) Alors, en prenant comme fonction test dans (2.31)  $v$  indépendant de  $x_3$  dans  $B$ , le passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  donne

$$a^+(u, v) + a^-(u, v) + \int_B (A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) e_{\alpha\parallel\beta} \gamma_{\sigma\tau}(v) + A^{\sigma\tau 33}(0) e_{3\parallel 3} \gamma_{\sigma\tau}(v)) \, dx = L(v),$$

d'où, d'après (2.37) et (2.38),

$$a^+(u, v) + a^-(u, v) + 2 \int_S a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\sigma\tau}(v) \, d\hat{x} = L(v).$$

Par unicité de la solution, on en déduit que  $u = u^0$ .  $\square$

### Convergence forte pour $m = 1$

**Théorème 2.6.** *La suite  $(u(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  converge fortement vers  $u^0$  dans  $\bar{V}$ .*

*Démonstration.* La preuve est semblable à celle du théorème 2.2. Soit  $(w^\eta)_{\eta>0}$  une suite dans  $\mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)$  telle que

$$\begin{cases} w_\alpha^\eta \rightarrow -\partial_\alpha u_3^0 - 2b_\alpha^\tau u_\tau^0 & \text{dans } L^2(S), \\ w_3^\eta \rightarrow e_{3\|3} & \text{dans } L^2(S), \end{cases}$$

et soit  $(\phi^\eta)_{\eta>0}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  vérifiant  $\phi^\eta(x) = x_3 w^\eta(\hat{x})$  pour tout  $x \in B$ . Alors  $u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta \in V$ , et en posant

$$\begin{aligned} A(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta) &:= A^+(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta) \\ &\quad + A^-(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta) + \varepsilon A^s(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta), \end{aligned}$$

on a, par coercivité et d'après la proposition 2.6,

$$A(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta) \geq \|u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta\|_V^2.$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, il vient

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta) &= L(u^0) - A^+(u^0, u^0) - A^-(u^0, u^0) \\ &\quad - \int_B A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) \gamma_{\alpha\beta}(u^0) \gamma_{\sigma\tau}(u^0) \, dx - 2 \int_B A^{\alpha\beta 33}(0) e_{3\|3} \gamma_{\alpha\beta}(u^0) \, dx \\ &\quad + \int_B A^{\alpha 3 \sigma 3}(0) \left( \frac{1}{2} \partial_\sigma u_3 + b_\sigma^\tau u_\tau + \frac{1}{2} w_\sigma^\eta \right) \left( \frac{1}{2} \partial_\alpha u_3^0 + b_\alpha^\tau u_\tau + \frac{1}{2} w_\alpha^\eta \right) \, dx - \int_B A^{3333}(0) e_{3\|3} w_3^\eta \, dx. \end{aligned}$$

En passant à la limite en  $\eta$ , on obtient finalement

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\phi^\eta) \\ = L(u^0) - A^+(u^0, u^0) - A^-(u^0, u^0) - \int_B a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(u^0) \gamma_{\sigma\tau}(u^0) \, dx = 0, \end{aligned}$$

et on conclut à l'aide du lemme de diagonalisation, lemme 1.1.  $\square$

### Convergence faible pour $m = 3$

**Lemme 2.4.** *Soit  $u(\varepsilon)$  la solution du problème (2.31) pour  $m = 3$ . Alors,*

$$\|e_{i\|j}(u(\varepsilon))\|_{0, \Omega^+}^2 + \|e_{i\|j}(u(\varepsilon))\|_{0, \Omega^-}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|e_{i\|j}(\varepsilon; u(\varepsilon))\|_{0, S}^2 \leq C; \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \|e_{i\|j}(\varepsilon; u(\varepsilon))\|_{0, B}^2 \leq C. \quad (2.40)$$

*Démonstration.* Ces estimations sont une conséquence directe des hypothèses sur le chargement et de la coercivité des formes bilinéaires  $A^\pm$  et  $A^s$ .  $\square$

**Théorème 2.7.** *La suite  $(u(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  converge faiblement dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  vers  $u^0$ , où  $u_0 \in V_B^F$  est l'unique solution du problème  $(\mathcal{P}_{cq,3})$ .*

*Démonstration.* La démonstration est divisée en 5 parties.

i) D'après l'inégalité de type Korn (2.32), on déduit de l'estimation (2.39) que la suite  $(u(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  est bornée dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Il existe donc  $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et une sous-suite (non renommée) telle que  $u(\varepsilon) \rightharpoonup u$  dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . D'autre part, (2.40) implique que  $\partial_3 u_3(\varepsilon) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$ , donc nécessairement,  $\partial_3 u_3 = 0$ , et  $e_{\alpha\parallel 3}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$ , donc  $\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon(2e_{\alpha\parallel 3}(\varepsilon; u(\varepsilon)) - \partial_\alpha u_3(\varepsilon) + 2\Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)) \rightarrow 0$  dans  $L^2(B)$ , d'où  $\partial_3 u_\alpha = 0$ . Enfin, (2.40) entraîne que  $\gamma_{\alpha\beta}(u) = 0$ . Donc  $u \in \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) : \partial_3 v_i = \gamma_{\alpha\beta}(v) = 0 \text{ dans } B, \text{ et } v|_{\Gamma_0} = 0\}$ .

ii) L'estimation (2.40) permet aussi de déduire l'existence de  $z_{ij} \in L^2(B)$  tel que, pour une sous-suite,  $\frac{1}{\varepsilon}e_{i\parallel j}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \rightharpoonup z_{ij}$  dans  $L^2(B)$ .

iii) Montrons que  $u_3 \in H^2(B)$  (et donc  $u \in V_B^F$ ). D'après (2.40), on a

$$\frac{1}{\varepsilon}\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow -\partial_\alpha u_3 - 2b_\alpha^\sigma u_\sigma \text{ dans } L^2(B),$$

donc

$$u_\alpha^1(\varepsilon) := \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-1}^1 (1 - x_3^2) \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) dx_3 \rightarrow \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x_3^2 - 1) (\partial_\alpha u_3 + 2b_\alpha^\sigma u_\sigma) dx_3 = -\frac{2}{3} (\partial_\alpha u_3 + 2b_\alpha^\sigma u_\sigma)$$

dans  $L^2(S)$ . En fait, cette convergence a lieu dans  $H^1(S)$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_\beta^1(\varepsilon) + \partial_\beta u_\alpha^1(\varepsilon)) &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-1}^1 x_3 (\partial_\alpha u_\beta(\varepsilon) + \partial_\beta u_\alpha(\varepsilon)) dx_3 \\ &= \int_{-1}^1 x_3 \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\parallel\beta}(\varepsilon; u(\varepsilon)) dx_3 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^1 x_3 (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma(\varepsilon) + b_{\alpha\beta} u_3(\varepsilon)) dx_3 \\ &\quad - \int_{-1}^1 x_3^2 (b_\beta^\sigma|_\alpha u_\sigma(\varepsilon) + b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} u_3(\varepsilon)) dx_3. \end{aligned}$$

Le premier terme converge vers  $\int_{-1}^1 x_3 z_{\alpha\beta} dx_3$  faiblement dans  $L^2(S)$  et, avec une intégration par partie, on montre que le deuxième terme du membre de droite  $\frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^1 x_3 (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma(\varepsilon) + b_{\alpha\beta} u_3(\varepsilon)) dx_3 \rightarrow -\frac{2}{3} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma (\partial_\sigma u_3 + 2b_\sigma^\tau u_\tau)$  dans  $L^2(S)$ . Le dernier terme converge évidemment faiblement dans  $L^2(S)$ . La suite  $(u^1(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  est donc bornée dans  $H^1(S, \mathbb{R}^2)$ , et on en déduit que  $-\frac{2}{3} (\partial_\alpha u_3 + 2b_\alpha^\sigma u_\sigma) \in H^1(S)$ , et donc  $\partial_\alpha u_3 \in H^1(S)$ . D'où finalement  $u_3 \in H^2(S)$  et même  $u_3 \in H^2(B)$ .

iv) Multiplions le problème (2.31) par  $\varepsilon^2$  et faisons tendre  $\varepsilon$  vers 0. On obtient

$$\int_B A^{\alpha\beta 33}(0) z_{\alpha\beta} \partial_3 v_3 dx + \int_B A^{\alpha 3 \sigma 3}(0) z_{\alpha 3} \partial_\alpha v_3 dx + \int_B A^{3333}(0) z_{33} \partial_3 v_3 dx = 0$$

pour tout  $v \in V$ . On en déduit

$$\begin{aligned} z_{33} &= -\frac{\lambda^s}{\lambda^s + 2\mu^s} a^{\alpha\beta} z_{\alpha\beta}, \\ z_{\alpha 3} &= 0. \end{aligned}$$

En multipliant (2.31) par  $\varepsilon$  et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, il vient

$$\begin{aligned} \int_B A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) z_{\alpha\beta} e_{\sigma\tau}(v) dx + \int_B A^{\alpha\beta 33}(0) z_{33} \gamma_{\alpha\beta}(v) dx + \int_B (A^{\alpha\beta 33,1} z_{\alpha\beta} + A^{3333,1} z_{33}) \partial_3 v_3 dx \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B \left( \frac{1}{\varepsilon^2} A^{\alpha\beta 33}(0) e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \partial_3 v_3 + \frac{1}{\varepsilon} A^{\alpha 3\sigma 3}(0) e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; u(\varepsilon)) e_{\sigma\|\beta}(\varepsilon; v) \right) dx = 0 \end{aligned}$$

pour tout  $v \in V$ . En prenant  $v$  tel que  $\partial_3 v_3 = 0$  dans  $B$ , on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B \frac{1}{\varepsilon} A^{\alpha 3\sigma 3}(0) e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; u(\varepsilon)) e_{\sigma\|\beta}(\varepsilon; v) dx = - \int_B a^{\alpha\beta\sigma\tau} z_{\alpha\beta} \gamma_{\sigma\tau}(v) dx. \quad (2.41)$$

Montrons que  $\rho_{\alpha\beta}(u) \in L^2(B)$  et  $\rho_{\alpha\beta}(u) = -\partial_3 z_{\alpha\beta}$ . En effet, d'après le théorème 5.2.1 dans [27], on a

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; u(\varepsilon)) + \rho_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(B).$$

L'opérateur  $\partial_3 : L^2(B) \rightarrow H^{-1}(B)$  étant continu pour la convergence faible,  $\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \rightharpoonup z_{\alpha\beta}$  entraîne que  $\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \rightharpoonup \partial_3 z_{\alpha\beta}$  dans  $H^{-1}(B)$ , d'où  $\rho_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) + \partial_3 z_{\alpha\beta} \rightharpoonup 0$  dans  $H^{-1}(B)$ .

D'autre part,  $\rho_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) \rightharpoonup \rho_{\alpha\beta}(u)$  dans  $H^{-1}(B)$ , d'où  $\rho_{\alpha\beta}(u) = -\partial_3 z_{\alpha\beta}$  dans  $H^{-1}(B)$ . L'égalité a en fait lieu dans  $L^2(B)$  puisque  $u_3 \in H^2(B)$ . Soit  $\phi \in L^2(S)$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_B x_3 z_{\alpha\beta} \phi dx &= \int_S \left[ \frac{x_3^2}{2} z_{\alpha\beta} \right]_{x_3=-1}^{x_3=1} \phi d\hat{x} - \int_B \frac{x_3^2}{2} \partial_3 z_{\alpha\beta} \phi dx \\ &= \frac{1}{2} \int_B \partial_3 z_{\alpha\beta} \phi dx + \int_B \frac{x_3^2}{2} \rho_{\alpha\beta}(u) \phi dx \\ &= -\frac{2}{3} \int_S \rho_{\alpha\beta}(u) \phi d\hat{x} \end{aligned}$$

puisque  $u$  est indépendant de  $x_3$  dans  $B$ .

Revenons à (2.41), et prenons  $v$  tel que dans  $B$

$$\begin{cases} v_\alpha = \eta_\alpha - x_3 \theta_\alpha, \text{ où } \theta_\alpha := \partial_\alpha \eta_3 + 2b_\alpha^\sigma \eta_\sigma, \text{ avec } \eta \in H^1(S, \mathbb{R}^2) \times H^2(S) \text{ tel que } \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = \partial_3 \eta_i = 0 \\ v_3 = \eta_3. \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_B a^{\alpha\beta\sigma\tau} z_{\alpha\beta} \gamma_{\sigma\tau}(v) dx &= - \int_B x_3 a^{\alpha\beta\sigma\tau} z_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{2} (\partial_\sigma \theta_\tau + \partial_\tau \theta_\sigma) - \Gamma_{\sigma\tau}^\mu \theta_\mu \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_B a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\alpha\beta}(u) \left( \frac{1}{2} (\partial_\sigma \theta_\tau + \partial_\tau \theta_\sigma) - \Gamma_{\sigma\tau}^\mu \theta_\mu \right) dx. \end{aligned}$$

Posons  $\tilde{\gamma}_{\sigma\tau}(\theta) := \frac{1}{2} (\partial_\sigma \theta_\tau + \partial_\tau \theta_\sigma) - \Gamma_{\sigma\tau}^\mu \theta_\mu$ . Puisque  $z_{\alpha 3} = 0$ , l'identité (2.41) devient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_B A^{\alpha 3\sigma 3}(0) e_{\sigma\|\beta}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \frac{1}{2} \theta_\alpha dx = \frac{2}{3} \int_S a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\alpha\beta}(u) \tilde{\gamma}_{\sigma\tau}(\theta) dx. \quad (2.42)$$

v) Dans (2.31), prenons  $v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  tel que  $v_3^s \in H^2(B)$ ,  $\partial_3 v_i = \gamma_{\alpha\beta}(v) = 0$  dans  $B$ , et  $v|_{\Gamma_0} = 0$ . En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, il vient

$$A^+(u, v) + A^-(u, v) + \int_B a^{\alpha\beta\sigma\tau} z_{\alpha\beta} x_3 (b_\tau^\mu|_\sigma v_\mu + b_\sigma^\mu b_{\mu\tau} v_3) dx \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_B A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) e_{\sigma\|\beta}(\varepsilon; u(\varepsilon)) \left( \frac{1}{2} \partial_\alpha v_3 + b_\alpha^\tau v_\tau \right) dx = L(v).$$

En posant  $\frac{1}{2}\theta_\alpha := \frac{1}{2}\partial_\alpha v_3 + b_\alpha^\tau v_\tau$ , d'après (2.42), on obtient

$$A^+(u, v) + A^-(u, v) + \frac{2}{3} \int_S a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\alpha\beta}(u) \tilde{\gamma}_{\sigma\tau}(\theta) dx - \frac{2}{3} \int_S a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\alpha\beta}(u) (b_\tau^\mu|_\sigma v_\mu + b_\sigma^\mu b_{\mu\tau} v_3) dx = L(v),$$

et comme  $\tilde{\gamma}_{\sigma\tau}(\theta) - b_\tau^\mu|_\sigma v_\mu - b_\sigma^\mu b_{\mu\tau} v_3 = \rho_{\sigma\tau}(v)$ , on obtient finalement

$$A^+(u, v) + A^-(u, v) + \frac{2}{3} \int_S a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\alpha\beta}(u) \rho_{\sigma\tau}(v) dx = L(v), \quad (2.43)$$

c'est-à-dire,  $u = u^0$ , l'unique solution du problème  $(\mathcal{P}_{cq,3})$ .  $\square$

### Convergence forte pour $m = 3$

**Théorème 2.8.** *La suite  $(u(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  converge fortement vers  $u^0$  dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ .*

*Démonstration.* La démonstration est semblable aux démonstrations précédentes. Soit  $(\phi^\eta)_{\eta>0} \subset V$  telle que

$$\begin{cases} \phi_\alpha^\eta(x) = x_3^2 (b_\alpha^\sigma \partial_\sigma u_3^0(\hat{x}) + b_\alpha^\sigma b_\sigma^\tau u_\tau^0(\hat{x})) \quad \forall x \in B, \\ \phi_3^\eta(x) = \frac{x_3^2}{2} w^\eta(\hat{x}) \quad \forall x \in B, \end{cases}$$

où  $(w^\eta)_{\eta>0}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{D}(S)$  qui vérifie  $w^\eta \rightarrow \partial_3 z_{33}$  dans  $L^2(S)$ , et soit  $\psi \in V$  tel que

$$\begin{cases} \psi_\alpha(x) = -x_3 \partial_\alpha u_3^0(\hat{x}) \quad \forall x \in B, \\ \psi_3(x) = 0 \quad \forall x \in B. \end{cases}$$

Alors,  $u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta \in V$ , et avec le même raisonnement que précédemment, on montre que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta, u(\varepsilon) - u^0 - \varepsilon\psi - \varepsilon^2\phi^\eta) \\ = L(u^0) - A^+(u^0, u^0) - A^-(u^0, u^0) - \int_B x_3^2 a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\alpha\beta}(u^0) \rho_{\sigma\tau}(u^0) dx = 0.$$

En appliquant le lemme 1.1, on obtient le résultat grâce à la coercivité des formes bilinéaires.  $\square$

## 2.3 Résolution numérique

Dans le problème limite, la couche intermédiaire est remplacée par une surface matérielle qui rend compte de conditions de transmission particulières. Dans tous les cas, on a vu que les champs de déplacements limite peuvent être définis sur  $\Omega^+ \cup S \cup \Omega^-$  en considérant les espaces  $V_S^M$  et  $V_S^F$ . La configuration du problème est la suivante.

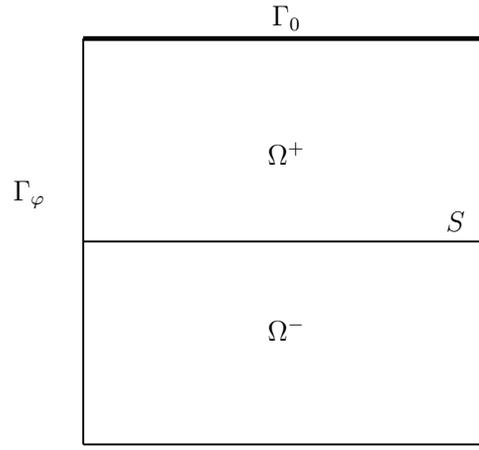


FIGURE 2.3 – illustration du problème

Les méthodes de résolution basées sur une décomposition de domaine apparaissent naturellement dans une telle configuration. On s'intéresse maintenant au cas où  $m = 1$ . Dans cette partie,  $\Omega$  désigne l'intérieur de  $\overline{\{\Omega^+ \cup \Omega^-\}}^\circ$  de frontière  $\partial\Omega$ ,  $\Gamma^\pm := \partial\Omega \cap \partial\Omega^\pm$ . La structure est bloquée sur la partie  $\Gamma_0$  de  $\partial\Omega$ . Le reste de la frontière  $\Gamma_\varphi := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$  est libre, et la structure est soumise aux efforts volumiques  $\Phi$ . On pose  $\Gamma_0^\pm := \Gamma_0 \cap \Gamma^\pm$  et  $\Gamma_\varphi^\pm := \Gamma_\varphi \cap \Gamma^\pm$ . On peut bien sûr considérer d'autres conditions aux limites.

Notons  $\hat{e}(v) := (e_{\alpha\beta}(v))_{\alpha\beta}$ , et  $A^\pm, \tilde{A}^s$  les tenseurs de l'élasticité associés aux formes bilinéaires  $a^\pm(.,.)$  et  $a_M^s(.,.)$  respectivement, et reprenons le problème (2.9) :

$$\begin{cases} -div \sigma^+ = \Phi^+ & \text{dans } \Omega^+ \\ -div \sigma^- = \Phi^- & \text{dans } \Omega^- \\ \sigma^+ = A^+ e(u) \\ \sigma^- = A^- e(u) \\ u^+ = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ u^- = 0 & \text{sur } \Gamma_0^- \\ \sigma^+ \cdot n^+ = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi^+ \\ \sigma^- \cdot n^- = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi^- \end{cases} \quad (2.44)$$

avec la condition de transmission sur  $S$

$$\begin{cases} u^+ = u^- & \text{sur } S \\ [\sigma_T] = \text{div}_\tau \hat{\sigma} & \text{sur } S \\ [\sigma_N] = 0 & \text{sur } S, \end{cases} \quad (2.45)$$

où  $\hat{\sigma}_{\alpha\beta} := \tilde{A}_{\alpha\beta\sigma\tau}^s e_{\sigma\tau}(u) = \frac{4\lambda^s \mu^s}{\lambda^s + 2\mu^s} e_{\sigma\sigma}(u^s) \delta_{\alpha\beta} + 4\mu^s e_{\alpha\beta}(u^s)$  avec  $u^s = u_{|S}^+ = u_{|S}^-$ .

Le problème (2.44) est équivalent au problème de minimisation

$$\min_{u \in V} \{J^+(u^+) + J^-(u^-) + H(u^s) - L^+(u^+) - L^-(u^-)\}, \quad (2.46)$$

où

$$\begin{aligned} J^\pm(u) &= \frac{1}{2} a^\pm(u, u), \\ H(u) &= \frac{1}{2} a_M^s(u, u), \\ L^\pm(u) &= \int_{\Omega^\pm} \Phi^\pm v \, dx, \end{aligned}$$

et  $V = \left\{ u = (u^+, u^-) : u^\pm \in H^1(\Omega^\pm, \mathbb{R}^3), u_{|S}^+ = u_{|S}^- := u^s, \hat{u}^s \in H^1(S, \mathbb{R}^2), u_{|\Gamma_0^\pm}^\pm = 0 \right\}$ .

## 2.4 Une méthode de résolution par décomposition de domaine

### 2.4.1 Principe de la méthode

La méthode proposée consiste à résoudre sur chaque domaine  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  un problème classique avec une condition de Dirichlet non homogène sur  $S$ . Afin de trouver la solution de notre problème initial, la donnée de Dirichlet devra elle-même vérifier (2.45). Pour simplifier les démonstrations, on suppose que  $\partial S \subset \Gamma_0$  afin d'obtenir dans la formulation faible de (2.45), un problème de Dirichlet homogène (voir (2.48)). Plus précisément, pour  $z \in H^1(S, \mathbb{R}^2) \times L^2(S)$ ,  $\Phi^+ \in L^2(\Omega^+)$  et  $\Phi^- \in L^2(\Omega^-)$ , considérons les problèmes définis sur  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  :

$$\begin{cases} -\text{div} \sigma^+ = \Phi^+ & \text{dans } \Omega^+, \\ \sigma^+ = A^+ e(u^+), \\ \sigma^+ \cdot n^+ = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi^+, \\ u^+ = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+, \\ u^+ = z & \text{sur } S, \end{cases} \quad (\mathcal{P}^+)$$

$$\begin{cases} -\text{div} \sigma^- = \Phi^- & \text{dans } \Omega^-, \\ \sigma^- = A^- e(u^-), \\ \sigma^- \cdot n^- = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi^-, \\ u^- = 0 & \text{sur } \Gamma_0^-, \\ u^- = z & \text{sur } S. \end{cases} \quad (\mathcal{P}^-)$$

Pour tout  $z \in L^2(S, \mathbb{R}^3)$ , les problèmes  $(\mathcal{P}^+)$  et  $(\mathcal{P}^-)$  possèdent une solution unique  $u^+(z) \in H^1(\Omega^+, \mathbb{R}^3)$  et  $u^-(z) \in H^1(\Omega^-, \mathbb{R}^3)$  respectivement. Si de plus  $z$  est solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_\tau \hat{\sigma} = -(\sigma_T^+(z) + \sigma_T^-(z)) & \text{sur } S, \\ \hat{\sigma}_{\alpha\beta} = \tilde{A}_{\alpha\beta\sigma\tau}^s e_{\sigma\tau}(z), \\ \hat{z} = 0 & \text{sur } \partial S, \\ \sigma_N^+(z) + \sigma_N^-(z) = 0 & \text{sur } S, \end{cases} \quad (2.47)$$

alors  $u^+(z)$  et  $u^-(z)$  seront solution du problème (2.44)-(2.45). Comme il y a existence et unicité de la solution du problème (2.44)-(2.45), le problème (2.47) possède une solution unique.

Les problèmes  $(\mathcal{P}^+)$  et  $(\mathcal{P}^-)$  étant linéaires par rapport aux données  $\Phi^\pm$  et  $z$ , les solutions  $u^+(z)$  et  $u^-(z)$  peuvent s'écrire :

$$u^+(z) = u_z^+ + u_0^+, \quad u^-(z) = u_z^- + u_0^-,$$

où  $u_0^\pm$  est solution de  $(\mathcal{P}^+)$  et  $(\mathcal{P}^-)$  lorsque  $z = 0$ , et  $u_z^\pm$  est solution de  $(\mathcal{P}^+)$  et  $(\mathcal{P}^-)$  lorsque  $\Phi = 0$ . Les contraintes  $\sigma_N$  et  $\sigma_T$  étant elles-mêmes linéaires, avec des notations évidentes on écrira :  $\sigma_T^\pm(z) = \sigma_{T,z}^\pm + \sigma_{T,0}^\pm$  et  $\sigma_N^\pm(z) = \sigma_{N,z}^\pm + \sigma_{N,0}^\pm$ .

Pour  $F \in H^{-1}(S, \mathbb{R}^2)$ , considérons le problème auxiliaire d'élasticité plane sur  $S$  :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_\tau \hat{\sigma} = F & \text{sur } S, \\ \hat{\sigma}_{\alpha\beta} = \tilde{A}_{\alpha\beta\sigma\tau}^s e_{\sigma\tau}(\hat{w}), \\ \hat{w} = 0 & \text{sur } \partial S. \end{cases} \quad (2.48)$$

Soit  $G : H^{-1}(S, \mathbb{R}^2) \longrightarrow H_0^1(S, \mathbb{R}^2)$  l'opérateur de Green qui à tout  $F \in H^{-1}(S, \mathbb{R}^2)$  associe l'unique solution  $\hat{w}$  du problème de Dirichlet homogène (2.48). Alors,  $z$  est solution de (2.47) si et seulement si

$$\begin{cases} \hat{z} = -G(\sigma_T^+(z) + \sigma_T^-(z)) \\ \sigma_N^+(z) + \sigma_N^-(z) = 0. \end{cases}$$

soit encore, en utilisant la décomposition précédente,

$$\begin{cases} \hat{z} + G(\sigma_{T,z}^+ + \sigma_{T,z}^-) = -G(\sigma_{T,0}^+ + \sigma_{T,0}^-), \\ \sigma_{N,z}^+ + \sigma_{N,z}^- = \sigma_{N,0}^+ + \sigma_{N,0}^-, \end{cases}$$

que l'on peut encore écrire de la forme

$$Az = F. \quad (2.49)$$

Avec les hypothèses sur les données, en écrivant les formulations variationnelles des problèmes, on montre que  $A$  est un opérateur auto-adjoint sur  $H^1(S, \mathbb{R}^2) \times L^2(S)$ .

Ce système d'équations est équivalent au problème initial (2.44)-(2.45) et donc possède une solution unique. On voit ainsi que résoudre  $(\mathcal{P}^+)$ ,  $(\mathcal{P}^-)$ , (2.47) revient à résoudre  $Az = F$ . On utilisera pour cela des méthodes itératives classiques de décomposition de domaine en les adaptant à ce cas non standard.

Dans [68], Winther s'intéresse à la convergence de la méthode du gradient conjugué pour la résolution d'un système linéaire de la forme

$$(Id + \mathcal{K})x = b,$$

dans un espace de Hilbert  $H$ , lorsque l'opérateur  $\mathcal{K}$  est un opérateur auto-adjoint compact et lorsque  $Id + \mathcal{K}$  est défini positif, en fonction de son degré de compacité mesuré par les produits de ses valeurs singulières.

Rappelons qu'un opérateur compact dans un Hilbert est dit de classe de Carleman  $\mathcal{C}_t$ ,  $0 < t < \infty$ , si la série de ses valeurs singulières à la puissance  $t$  est finie. Les classes  $\mathcal{C}_t$  pour les opérateurs compacts dans les espaces de Hilbert furent introduits par Neumann et Schatten en 1948 comme une extension des opérateurs de Hilbert-Schmidt ( $t = 2$ ). Pour une étude approfondie, voir [35]. Nous allons maintenant considérer une situation particulière où nous pouvons écrire l'opérateur  $A$  sous la forme  $Id + \mathcal{K}$  et utiliser ces résultats.

## 2.4.2 Un résultat de convergence dans le cas scalaire

Dans le cas où l'inconnue  $u$  n'est plus à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  mais à valeur dans  $\mathbb{R}$  (cas scalaire), le système d'équations aux dérivées partielles de l'élasticité linéaire (2.44) est remplacé par une unique équation aux dérivées partielles. Ceci peut être envisagé, par exemple, dans la modélisation de problèmes anti-plans de l'élasticité ou dans le cas de la thermique stationnaire.

### Position du problème

On note  $K^\pm > 0$  (resp.  $K^s > 0$ ) les coefficients matériau (par exemple, la conductivité dans le problème de thermique) dans  $\Omega^\pm$  (resp.  $\Omega^s$ ). Les équations locales analogues de (2.44) sont

$$\begin{cases} -K^+ \Delta u^+ = \Phi^+ & \text{dans } \Omega^+ \\ -K^- \Delta u^- = \Phi^- & \text{dans } \Omega^- \\ u^+ = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ u^- = 0 & \text{sur } \Gamma_0^- \\ K^+ \frac{\partial u^+}{\partial n^+} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi^+ \\ K^- \frac{\partial u^-}{\partial n^-} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi^- \end{cases} \quad (2.50)$$

avec la condition de transmission sur  $S$

$$\begin{cases} u^+ = u^- & \text{sur } S \\ K^+ \frac{\partial u^+}{\partial n^+} + K^- \frac{\partial u^-}{\partial n^-} = K^s \Delta_\tau u & \text{sur } S. \end{cases} \quad (2.51)$$

**Proposition 2.7.** *Dans le cas scalaire, le système (2.49) est de la forme*

$$(Id + \mathcal{K})z = F,$$

où  $\mathcal{K}$  est un opérateur auto-adjoint, tel que  $Id + \mathcal{K}$  est défini positif. De plus  $\mathcal{K}$  est compact de classe de Carleman  $\mathcal{C}_t$ ,  $t > 2/r$ ,  $1/4 < r \leq 1/2$ .

*Démonstration.* *i)* La méthode décrite précédemment nous conduit à résoudre les problèmes suivants : pour  $z \in H^1(S)$ ,  $\Phi^+ \in L^2(\Omega^+)$ ,  $\Phi^- \in L^2(\Omega^-)$ ,

$$\begin{cases} -K^+ \Delta u^+ = \Phi^+ & \text{dans } \Omega^+ \\ K^+ \frac{\partial u^+}{\partial n^+} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi^+ \\ u^+ = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ u^+ = z & \text{sur } S \end{cases} \quad \begin{cases} -K^- \Delta u^- = \Phi^- & \text{dans } \Omega^- \\ K^- \frac{\partial u^-}{\partial n^-} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi^- \\ u^- = 0 & \text{sur } \Gamma_0^- \\ u^- = z & \text{sur } S \end{cases}$$

plus le problème sur  $S$ ,

$$\begin{cases} -K^s \Delta_\tau z = -\left(K^+ \frac{\partial u^+(z)}{\partial n^+} + K^- \frac{\partial u^-(z)}{\partial n^-}\right) & \text{sur } S, \\ z = 0 & \text{sur } \partial S \end{cases} \quad (2.52)$$

qui possède une solution unique.

Alors,  $z$  est solution de (2.52) si et seulement si

$$z = -G\left(K^+ \frac{\partial u^+(z)}{\partial n^+} + K^- \frac{\partial u^-(z)}{\partial n^-}\right),$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$(Id + \mathcal{K})z = -F. \quad (2.53)$$

où

$$\mathcal{K}z = G\left(K^+ \frac{\partial u_z^+}{\partial n^+} + K^- \frac{\partial u_z^-}{\partial n^-}\right),$$

et

$$F = G\left(K^+ \frac{\partial u_0^+}{\partial n^+} + K^- \frac{\partial u_0^-}{\partial n^-}\right).$$

En écrivant les formulations variationnelles des problèmes définis sur chaque domaine, il est facile de voir que l'opérateur  $\mathcal{K}$  est auto-adjoint et vérifie  $Id + \mathcal{K}$  est défini positif.

*ii)* L'application  $z \mapsto \mathcal{K}z$  est linéaire continue de  $H_0^1(S)$  dans  $H_0^1(S) \cap H^{1+r}(S)$ , avec  $1/4 < r \leq 1/2$ .

En effet, d'après les résultats de Grisvard [49], puisque  $K^+ \frac{\partial u_z^+}{\partial n^+} + K^- \frac{\partial u_z^-}{\partial n^-} \in H^{-1/2}(S)$ , on obtient par interpolation que  $G\left(K^+ \frac{\partial u_z^+}{\partial n^+} + K^- \frac{\partial u_z^-}{\partial n^-}\right) \in H_0^1(S) \cap H^{1+r}(S)$  avec  $1/4 < r \leq 1/2$ . La valeur exacte de  $r$  dépend de la régularité de  $S$ . Si la frontière de  $S$  est régulière, alors  $r = 1/2$ . Dans le cas où la frontière est polygonale, la valeur de  $r$  dépend des angles.

*iii)* Montrons que l'opérateur  $\mathcal{K}$  est compact de classe de Carleman  $\mathcal{C}_t$ ,  $t > 2/r$ . Puisque  $S \subset \mathbb{R}^2$ , l'injection de  $H^{1+r}(S)$ ,  $1/4 < r \leq 1/2$ , dans  $H^1(S)$  est compacte de classe de Carleman  $\mathcal{C}_t$ ,  $t > 2/r$  (voir [2]). La composée d'un opérateur borné avec un opérateur de classe  $\mathcal{C}_t$  étant un opérateur de classe  $\mathcal{C}_t$ , on en déduit que  $\mathcal{K}$  est compact de classe de Carleman  $\mathcal{C}_t$ ,  $t > 2/r$ .  $\square$

La conséquence directe de la proposition 2.7 est le corollaire suivant.

**Corollaire 2.1.** *La méthode du gradient conjugué converge de manière R-superlinéaire pour la résolution de l'équation (2.53). De plus, on a l'estimation*

$$\|r_n\| \leq (\|A\|\|A^{-1}\|)^{1/2} \left(2\left(\frac{1}{n}\right)^{1/t} \|A^{-1}\| \|\mathcal{K}\|_t\right)^n \|r_0\|,$$

où  $r_n$  est le  $n$ -ième résidu,  $A := Id + \mathcal{K}$ ,  $t$  le degré de compacité correspondant à la classe  $\mathcal{C}_t$  de l'opérateur  $\mathcal{K}$  et

$$\|\mathcal{K}\|_t := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\sigma_j|^t\right)^{1/t},$$

où  $\{\sigma_j\}_{j=1}^{\infty}$  sont les valeurs propres de  $\mathcal{K}$ .

La convergence R-superlinéaire signifie que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|r_n\|} = 0$ . Ce résultat est intéressant car la convergence a lieu en dimension infinie, et donc a fortiori en dimension finie. La vitesse de convergence sera donc indépendante du maillage.

Le point fondamental dans cette stratégie est le gain de régularité pour  $z$  grâce à l'opérateur  $G$ . Ce résultat ne s'applique pas en élasticité isotrope, car l'opérateur qui permet de gagner de la régularité ( $\text{div}_\tau$ ) n'agit que sur les deux premières composantes de l'inconnue  $z$ .

**Remarque 2.2.** *Dans [44], qui considère le cas inverse où la couche intermédiaire est plus souple (cas du collage), la même stratégie conduit au système  $(Id + K\mathcal{A})z = F$ , où  $\mathcal{A} : L^2(S) \rightarrow H^{1/2}(S)$  n'est pas un opérateur auto-adjoint, mais est compact de classe  $\mathcal{C}_t$ , avec  $t > 4$ . On peut alors appliquer la méthode GMRES pour la résolution du système sur  $S$  avec une convergence Q-superlinéaire (i.e.,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|r_{n+1}\|}{\|r_n\|} = 0$ ) aussi bien dans le cas scalaire que dans le cas vectoriel.*

## 2.5 Une méthode de résolution avec pénalisation

### 2.5.1 Présentation de la méthode

Une autre possibilité pour la résolution du problème (2.46) est d'utiliser une méthode de pénalisation. Pour cela, introduisons les espaces de Hilbert  $V^\pm := \{v \in H^1(\Omega^\pm, \mathbb{R}^3) : \hat{v}|_S \in H^1(S, \mathbb{R}^2), v|_{\Gamma_0^\pm} = 0\}$ . La fonctionnelle  $H$  définit une norme équivalente dans  $H_0^1(S, \mathbb{R}^2)$  de sorte que  $v \mapsto |v|_S := (H(v) + \|v_3\|_{0,S}^2)^{1/2}$  est une norme sur  $V^s := H_0^1(S, \mathbb{R}^2) \times L^2(S)$ . Considérons le problème de minimisation

$$\min_{\substack{u^+ \in V^+ \\ u^- \in V^-}} \left\{ J^+(u^+) + J^-(u^-) + \frac{1}{2}H(u^+) + \frac{1}{2}H(u^-) - L^+(u^+) - L^-(u^-) \right. \\ \left. + \frac{1}{\eta}H(u^+ - u^-) + \frac{1}{\eta}\|u_3^+ - u_3^-\|_{0,S}^2 \right\}, \quad (2.54)$$

où  $\eta > 0$  est un paramètre positif. Les fonctionnelles  $J^\pm + \frac{1}{2}H : V^\pm \rightarrow \mathbb{R}$  sont convexes et coercives. Pour tout  $\eta > 0$ , le problème (2.54) possède une solution unique  $(u_\eta^+, u_\eta^-)$ .

**Proposition 2.8.** *Lorsque  $\eta \rightarrow 0$ , les solutions  $(u_\eta^+, u_\eta^-)$  convergent vers  $(\bar{u}^+, \bar{u}^-)$  la solution de (2.46).*

*Démonstration.* Le problème (2.54) est équivalent au problème

$$\begin{cases} u = (u_\eta^+, u_\eta^-) \in V^+ \times V^- \\ a^+(u_\eta^+, v^+) + a^-(u_\eta^-, v^-) + \frac{1}{2}a_M^s(u_\eta^+, v^+) + \frac{1}{2}a_M^s(u_\eta^-, v^-) + \frac{1}{\eta}a_M^s(u_\eta^+ - u_\eta^-, v^+ - v^-) \\ \quad + \frac{1}{\eta}\langle u_{\eta,3}^+ - u_{\eta,3}^-, v_3^+ - v_3^- \rangle_{0,S} = L^+(v^+) + L^-(v^-) \quad \forall v = (v^+, v^-) \in V^+ \times V^-, \end{cases} \quad (2.55)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{0,S}$  désigne le produit scalaire dans  $L^2(S)$ . Par coercivité des formes bilinéaires, la solution  $(u_\eta^+, u_\eta^-)$  de (2.55) satisfait les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \|(u_\eta^+, u_\eta^-)\|_{V^+ \times V^-} &\leq C, \\ \frac{1}{\eta}\|\hat{u}_\eta^+ - \hat{u}_\eta^-\|_{1,S} &\leq C, \\ \frac{1}{\eta}\|u_{\eta,3}^+ - u_{\eta,3}^-\|_{0,S} &\leq C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante positive. On en déduit qu'il existe  $(u^+, u^-) \in V^+ \times V^-$  tel que, pour une sous-suite non renommée,  $(u_\eta^+, u_\eta^-) \rightharpoonup (u^+, u^-)$  faiblement dans  $V^+ \times V^-$ . Des deux dernières estimations, on déduit que

$$\begin{aligned} \hat{u}_\eta^+ - \hat{u}_\eta^- &\rightarrow 0 \text{ dans } H^1(S, \mathbb{R}^2) \\ u_{\eta,3}^+ - u_{\eta,3}^- &\rightarrow 0 \text{ dans } L^2(S). \end{aligned}$$

Donc nécessairement,  $u_{|S}^+ = u_{|S}^-$  et  $u = (u^+, u^-) \in V$ . En prenant dans (2.55)  $v$  tel que  $v_{|S}^+ = v_{|S}^-$ , on obtient lorsque  $\eta$  tend vers zéro,

$$a^+(u^+, v^+) + a^-(u^-, v^-) + \frac{1}{2}a_M^s(u^+, v^+) + \frac{1}{2}a_M^s(u^-, v^-) = L^+(v^+) + L^-(v^-),$$

donc  $(u^+, u^-) = (\bar{u}^+, \bar{u}^-)$  est bien la solution de (2.46).  $\square$

Une résolution par décomposition de domaine du problème (2.54) conduit à un système semblable à celui obtenu dans la section précédente. On rencontre les mêmes inconvénients, la méthode ne présente donc pas d'intérêt. En revanche, on obtient un résultat de convergence en appliquant la méthode de minimisation alternée avec couplage partiel proposés par Attouch *et al.* dans [8]. Ceci fait l'objet de la section suivante.

## 2.5.2 Résolution du problème pénalisé

La méthode consiste à minimiser l'énergie du système couplé de façon alternée. Notons  $L_\eta$  la fonction définie sur  $V^+ \times V^-$  par  $L_\eta(v^+, v^-) := J^+(v^+) + J^-(v^-) + \frac{1}{2}H(v^+) + \frac{1}{2}H(v^-) - L^+(u^+) - L^-(u^-) + \frac{1}{\eta}H(v^+ - v^-) + \frac{1}{\eta}\|v_3^+ - v_3^-\|_{0,S}^2$ . La solution  $(u_\eta^+, u_\eta^-)$  du problème (2.54) satisfait de façon équivalente

$$(\bar{S}) \begin{cases} a^+(u_\eta^+, v) - L^+(v) + \frac{1}{2}a_M^s(u_\eta^+, v) + \frac{1}{\eta}a_M^s(u_\eta^+ - u_\eta^-, v) \\ \quad + \frac{1}{\eta}\langle u_{\eta,3}^+ - u_{\eta,3}^-, v_3 \rangle_{0,S} = 0 \quad \forall v \in V^+ \\ a^-(u_\eta^-, v) - L^-(v) + \frac{1}{2}a_M^s(u_\eta^-, v) + \frac{1}{\eta}a_M^s(u_\eta^+ - u_\eta^-, v) \\ \quad + \frac{1}{\eta}\langle u_{\eta,3}^+ - u_{\eta,3}^-, v_3 \rangle_{0,S} = 0 \quad \forall v \in V^-. \end{cases}$$

La formulation locale correspondante dans chaque domaine est :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma_\eta^\pm = \Phi^\pm \text{ dans } \Omega^\pm, \\ u^\pm = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\pm, \\ \sigma^\pm \cdot n^\pm = 0 \text{ sur } \Gamma_\varphi^\pm, \\ -(\frac{1}{2} + \frac{1}{\eta})\operatorname{div}_\tau \hat{\sigma}_\eta^\pm = -\sigma_{\eta,T}^\pm - \frac{1}{\eta}\operatorname{div}_\tau \hat{\sigma}_\eta^\mp \text{ sur } S, \\ \sigma_{\eta,N}^\pm + \frac{1}{\eta}(u_{\eta,3}^+ - u_{\eta,3}^-) = 0 \text{ sur } S. \end{cases}$$

A ce niveau, on ne peut donner aucun résultat concernant la résolution itérative de ce problème décomposé sur les domaines  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ . Il s'agit de problèmes d'élasticité avec des conditions de bord particulières au niveau de  $S$ , différents de ceux considérés dans la méthode précédente. En fait, en introduisant un terme d'ancrage dans chaque problème liant les solutions de ce problème entre deux étapes successives, on arrive à démontrer la convergence de la méthode.

L'algorithme consiste à découpler le problème variationnel (2.54) en résolvant alternativement un problème de minimisation dans  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  suivant le schéma ci-dessous : à l'étape  $n$ , soit  $(\mu_n, \nu_n) \in V^+ \times V^-$ , on cherche  $\mu_{n+1} \in V^+$  solution de

$$\mu_{n+1} = \arg \min_{v \in V^+} \{J^+(v) + \frac{1}{2}H(v) - L^+(v) + \frac{\alpha}{2}\|v - \mu_n\|_{V^+} + \frac{1}{\eta}H(v - \nu_n) + \frac{1}{2\eta}\|v_3 - \nu_{n,3}\|_{0,S}^2\}; \quad (2.56)$$

puis on calcule  $\nu_{n+1} \in V^-$  la solution de

$$\nu_{n+1} = \arg \min_{v \in V^-} \{J^-(v) + \frac{1}{2}H(v) - L^-(v) + \frac{\beta}{2}\|v - \nu_n\|_{V^-} + \frac{1}{\eta}H(\mu_{n+1} - v) + \frac{1}{2\eta}\|\mu_{n+1,3} - v_3\|_{0,S}^2\}. \quad (2.57)$$

où  $\alpha, \beta > 0$ . Les termes  $v \mapsto \frac{\alpha}{2}\|v - \mu_n\|_{V^+}$  et  $v \mapsto \frac{\beta}{2}\|v - \nu_n\|_{V^-}$  sont des termes d'ancrage et jouent un rôle essentiel dans la démonstration de la convergence de la suite engendrée par l'algorithme. Cela revient à modifier l'équation dans  $\Omega^+$  par une équation de la forme  $-(1 + \alpha)\operatorname{div}\sigma_{n+1}^+ = \Phi^+ - \alpha\operatorname{div}\sigma_n^+$ , et de même dans  $\Omega^-$ .

**Proposition 2.9.** *La suite  $((\mu_n, \nu_n))_{n \geq 1}$  converge faiblement dans  $V^+ \times V^-$  vers  $(u_\eta^+, u_\eta^-)$ .*

*Démonstration.* Soit  $((\mu_n, \nu_n))_{n \geq 1}$  la suite engendrée par l'algorithme. Alors, pour tout  $n \geq 1$  on a

$$(S) \begin{cases} a^+(\mu_{n+1}, v) - L^+(v) + \frac{1}{2}a_M^s(\mu_{n+1}, v) + \alpha a^+(\mu_{n+1} - \mu_n, v) \\ \quad + \frac{1}{\eta}a_M^s(\mu_{n+1} - \nu_n, v) + \frac{1}{\eta}\langle \mu_{n+1,3} - \nu_{n,3}, v_3 \rangle_{0,S} = 0 \quad \forall v \in V^+ \\ a^-(\nu_{n+1}, v) - L^-(v) + \frac{1}{2}a_M^s(\nu_{n+1}, v) + \beta a^-(\nu_{n+1} - \nu_n, v) \\ \quad + \frac{1}{\eta}a_M^s(\mu_{n+1} - \nu_{n+1}, v) + \frac{1}{\eta}\langle \mu_{n+1,3} - \nu_{n+1,3}, v_3 \rangle_{0,S} = 0 \quad \forall v \in V^-. \end{cases}$$

En suivant la méthode décrite dans [8], on obtient facilement que

$$L_\eta(\mu_{n+1}, \nu_{n+1}) + \frac{\alpha}{2}\|\mu_{n+1} - \mu_n\|_{V^+}^2 + \frac{\beta}{2}\|\nu_{n+1} - \nu_n\|_{V^-}^2 \leq L_\eta(\mu_n, \nu_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

La suite  $L_\eta(\mu_n, \nu_n)$  est donc décroissante quand  $n \rightarrow +\infty$ . De plus, on en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\mu_{n+1} - \mu_n\|_{V^+}^2 < \infty$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\nu_{n+1} - \nu_n\|_{V^-}^2 < \infty$ , d'où

$$\mu_{n+1} - \mu_n \rightarrow 0 \text{ dans } V^+; \quad (2.58)$$

$$\nu_{n+1} - \nu_n \rightarrow 0 \text{ dans } V^-. \quad (2.59)$$

On ne peut pas encore en déduire la convergence de la suite  $(\mu_n, \nu_n)$ . La monotonie de la dérivée de Gâteaux de  $J^+ + H - L$  associée aux équations des systèmes  $(\mathcal{S})$  et  $(\bar{\mathcal{S}})$  entraîne

$$\begin{aligned} \alpha a^+(\mu_{n+1} - \mu_n, \mu_{n+1} - u_\eta^+) &\leq \frac{1}{\eta} \left[ a_M^s(\mu_{n+1} - u_\eta^+, (u_\eta^+ - u_\eta^-) - (\mu_{n+1} - \nu_n)) \right. \\ &\quad \left. + \langle \mu_{n+1,3} - u_{\eta,3}^+, (u_{\eta,3}^+ - u_{\eta,3}^-) - (\mu_{n+1,3} - \nu_{n,3}) \rangle_{0,S} \right], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \alpha \|\mu_{n+1} - u_\eta^+\|_{V^+}^2 &\leq \alpha a^+(\mu_{n+1} - u_\eta^+, \mu_n - u_\eta^+) \frac{1}{\eta} \left[ a_M^s(\mu_{n+1} - u_\eta^+, (u_\eta^+ - u_\eta^-) - (\mu_{n+1} - \nu_n)) \right. \\ &\quad \left. + \langle \mu_{n+1,3} - u_{\eta,3}^+, (u_{\eta,3}^+ - u_{\eta,3}^-) - (\mu_{n+1,3} - \nu_{n,3}) \rangle_{0,S} \right]. \end{aligned}$$

De la même façon

$$\begin{aligned} \beta \|\nu_{n+1} - u_\eta^-\|_{V^-}^2 &\leq \beta a^-(\nu_{n+1} - u_\eta^-, \nu_n - u_\eta^-) \frac{1}{\eta} \left[ a_M^s(\nu_{n+1} - u_\eta^-, (u_\eta^- - u_\eta^+) - (\nu_{n+1} - \mu_{n+1})) \right. \\ &\quad \left. + \langle \nu_{n+1,3} - u_{\eta,3}^-, (u_{\eta,3}^- - u_{\eta,3}^+) - (\nu_{n+1,3} - \mu_{n+1,3}) \rangle_{0,S} \right], \end{aligned}$$

et au terme d'un calcul élémentaire mais un peu long, on obtient, en posant  $A_n := \frac{\alpha}{2} \|\mu_n - u_\eta^+\|_{V^+}^2 + \frac{\beta}{2} \|\nu_n - u_\eta^-\|_{V^-}^2 + \frac{1}{2\eta} |\nu_n - u_\eta^-|_S^2$ ,

$$\begin{aligned} A_{n+1} &+ \left[ \frac{\alpha}{2} \|\mu_{n+1} - \mu_n\|_{V^+}^2 + \frac{\beta}{2} \|\nu_{n+1} - u_\eta^-\|_{V^-}^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2\eta} \left[ |(\nu_n - u_\eta^-) - (\mu_{n+1} - u_\eta^+)|_S^2 + |(\mu_{n+1} - u_\eta^+) - (\nu_{n+1} - u_\eta^-)|_S^2 \right] \leq A_n. \end{aligned}$$

La suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\alpha}{2} \|\mu_n - u_\eta^+\|_{V^+}^2 + \frac{\beta}{2} \|\nu_n - u_\eta^-\|_{V^-}^2 + \frac{1}{2\eta} |\nu_n - u_\eta^-|_S^2 \right) \text{ existe.} \quad (2.60)$$

De plus,  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |(\nu_n - u_\eta^-) - (\mu_{n+1} - u_\eta^+)|_S^2 < +\infty$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |(\mu_{n+1} - u_\eta^+) - (\nu_{n+1} - u_\eta^-)|_S^2 < +\infty$ .

Par conséquent,

$$(\nu_n - u_\eta^-) - (\mu_{n+1} - u_\eta^+) \rightarrow 0 \text{ dans } V^s; \quad (2.61)$$

$$(\mu_{n+1} - u_\eta^+) - (\nu_{n+1} - u_\eta^-) \rightarrow 0 \text{ dans } V^s, \quad (2.62)$$

et  $\mu_n - \nu_n \rightarrow u_\eta^+ - u_\eta^-$  dans  $V^s$ .

On déduit de (2.60) que la suite  $(\mu_n, \nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $V^+ \times V^-$ , donc il existe  $(\bar{\mu}, \bar{\nu}) \in$

$V^+ \times V^-$  et une sous-suite  $(\mu_{n_\sigma}, \nu_{n_\sigma})$  tels que  $(\mu_{n_\sigma}, \nu_{n_\sigma}) \rightharpoonup (\bar{\mu}, \bar{\nu})$ . D'après (2.58)-(2.59), en passant à la limite dans  $(\mathcal{S})$  (pour notre sous-suite), on obtient

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a^+(\bar{\mu}, v) - L^+(v) + \frac{1}{2}a_M^s(\bar{\mu}, v) + \frac{1}{\eta}a_M^s(\bar{\mu} - \bar{\nu}, v) \\ \quad + \frac{1}{\eta}\langle \bar{\mu}_3 - \bar{\nu}_3, v_3 \rangle_{0,S} = 0 \quad \forall v \in V^+ \\ a^-(\bar{\nu}, v) - L^-(v) + \frac{1}{2}a_M^s(\bar{\nu}, v) + \frac{1}{\eta}a_M^s(\bar{\mu} - \bar{\nu}, v) \\ \quad + \frac{1}{\eta}\langle \bar{\mu}_3 - \bar{\nu}_3, v_3 \rangle_{0,S} = 0 \quad \forall v \in V^-. \end{cases}$$

On en déduit que  $(\bar{\mu}, \bar{\nu}) = (u_\eta^+, u_\eta^-)$  l'unique solution de (2.54). Il est facile de voir qu'en fait toute la suite  $(\mu_n, \nu_n)$  converge faiblement vers  $(\bar{u}^+, \bar{u}^-)$ .

En effet, soit  $(\mu, \nu)$  une valeur d'adhérence faible de la suite  $(\mu_n, \nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Plus précisément,

$$\begin{cases} \mu_{n_\sigma} \rightharpoonup \mu \text{ dans } V^+, \\ \nu_{n_\sigma} \rightharpoonup \nu \text{ dans } V^-. \end{cases}$$

La convergence forte (2.58) entraîne  $\mu_{n_\sigma+1} \rightharpoonup \mu$  et  $\mu_{n_\sigma+1} - \mu_{n_\sigma} \rightarrow 0$  dans  $V^+$ . De même on obtient  $\nu_{n_\sigma+1} \rightharpoonup \nu$  et  $\nu_{n_\sigma+1} - \nu_{n_\sigma} \rightarrow 0$  dans  $V^-$ . On conclut en passant à la limite dans  $(\mathcal{S})$  grâce à l'unicité de la solution de (2.54).  $\square$

## Chapitre 3

# Modélisation dans un cadre plus général

Nous reprenons dans ce chapitre, les hypothèses faites dans le cas des plaques au chapitre précédent, mais dans un cadre plus général. Nous y étudions le cas de l'élasticité anisotrope et proposons un premier modèle en élasticité non linéaire. L'analyse asymptotique est réalisée dans le cadre de la convergence variationnelle de la fonctionnelle énergie lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. La densité d'énergie  $W_\varepsilon$  associée au champ de déplacement  $v : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ , est définie par :

$$W_\varepsilon(x^\varepsilon, \nabla^\varepsilon v) = \begin{cases} f^+(\nabla^\varepsilon v) & \text{dans } \Omega_\varepsilon^+ \\ f^-(\nabla^\varepsilon v) & \text{dans } \Omega_\varepsilon^- \\ \frac{1}{\varepsilon}g(\nabla^\varepsilon v) & \text{dans } B_\varepsilon \end{cases}$$

où  $f^\pm$  et  $g$  sont les densités d'énergie des matériaux occupant  $\Omega^\pm$  et  $B_\varepsilon$  respectivement. La configuration de l'équilibre de la structure est alors donnée par le déplacement  $u^\varepsilon$ , solution, ou plus généralement, solution  $\varepsilon$ -approximante, du problème

$$\inf\{J_\varepsilon(v) : v \in W_{\Gamma_0, \varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3)\} \quad (3.1)$$

où  $J_\varepsilon(v) := \int_{\Omega_\varepsilon} W_\varepsilon(\nabla^\varepsilon v) dx^\varepsilon - L_\varepsilon(v)$  avec  $L_\varepsilon(v)$  représentant le travail des forces extérieures et  $W_{\Gamma_0, \varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3)$  est l'ensemble des fonctions de  $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3)$  qui ont une trace nulle sur  $\Gamma_{0, \varepsilon}$ . On souhaite étudier le comportement de  $u^\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, et identifier la  $\Gamma$ -limite du problème de minimisation ci-dessus. Pour cela, nous commençons par réécrire le problème dans un domaine fixe, en opérant le même changement de coordonnées  $\pi^\varepsilon$  qu'au chapitre 2. Ceci nous conduit à considérer la fonctionnelle énergie  $\mathcal{J}_\varepsilon$  définie sur  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , l'ensemble des fonctions de  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  qui ont une trace nulle sur  $\Gamma_0$ , par

$$\mathcal{J}_\varepsilon(v) = \int_{\Omega^-} f^-(\nabla v) dx + \int_{\Omega^+} f^+(\nabla v) dx + \int_B g(\hat{\nabla} v | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_3}) dx - L(v) - \varepsilon L^s(v). \quad (3.2)$$

Dans la première partie, nous procédons à l'étude de la  $\Gamma$ -convergence dans le cadre de l'élasticité linéaire anisotrope. Nous retrouvons à la limite une énergie de membrane sur  $S$  correspondant à des conditions de transmission de Ventcel. Nous démontrons ensuite la convergence forte dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  de la solution du problème initial vers la solution du problème limite. Dans la seconde partie, nous traitons un cas plus général en élasticité non linéaire pour lequel

le potentiel élastique est non convexe. C'est le cas, par exemple, lorsque le matériau dans la couche intermédiaire présente des transitions de phase solide/solide. Nous proposons alors un premier modèle limite en identifiant la  $\Gamma$ -limite classique dans l'espace de Sobolev approprié de la fonctionnelle énergie.

### 3.1 Le cas linéaire anisotrope

On suppose dans cette section que les matériaux occupant  $\Omega^\pm$  et  $B_\varepsilon$  obéissent à une loi de comportement linéaire anisotrope. La densité d'énergie  $W_\varepsilon$  est alors une fonction du gradient symétrique  $e(u)$  et le tenseur des contraintes  $\sigma^\varepsilon(x^\varepsilon)$  est donné par

$$\sigma^\varepsilon(x^\varepsilon) = \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial e}(x^\varepsilon, e(u^\varepsilon))$$

où  $W_\varepsilon$  est définie par

$$W_\varepsilon(x^\varepsilon, e) = \frac{1}{2}A(x^\varepsilon)e : e = \begin{cases} \frac{1}{2}A^+e : e & \text{dans } \Omega_\varepsilon^+ \\ \frac{1}{2}A^-e : e & \text{dans } \Omega_\varepsilon^- \\ \frac{1}{2\varepsilon}A^s e : e & \text{dans } B_\varepsilon \end{cases}$$

et  $A(x^\varepsilon)$  est le tenseur du quatrième ordre de l'hyperélasticité qui satisfait les propriétés usuelles de symétrie et positivité (1.10), ainsi que de régularité. Sous ces hypothèses, les densités d'énergie  $f^\pm$  et  $g$  satisfont une condition  $(C_2)$ , et le problème (3.1) possède une solution unique  $u^\varepsilon$ . La fonctionnelle énergie définie sur le domaine fixe est

$$\mathcal{J}_\varepsilon(v) : W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}a^+(v, v) + \frac{1}{2}a^-(v, v) + \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}^s(v, v) - L(v) + \frac{1}{2\varepsilon^2}a_{33}^s(v, v) + \frac{1}{2\varepsilon}a_{3\alpha}^s(v, v) - \varepsilon L^s(v), \quad (3.3)$$

où

$$a^\pm(v, v) := \int_{\Omega^\pm} A^\pm e(v) : e(v) \, dx$$

$$a_{\alpha\beta}^s(v, v) := \int_B A_{i\alpha h\beta}^s v_{i,\alpha} v_{h,\beta} \, dx$$

$$a_{3\alpha}^s(v, v) := 2 \int_B A_{i3h\alpha}^s v_{i,3} v_{h,\alpha} \, dx$$

$$a_{33}^s(v, v) := \int_B A_{i3h3}^s v_{i,3} v_{h,3} \, dx$$

$$L(v) := \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \Phi v \, dx + \int_{\Gamma_\varphi} \varphi v \, d\Gamma$$

$$L^s(v) := \int_B \Phi v \, dx.$$

Le problème (3.1) devient

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(\varepsilon) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \text{ tel que} \\ \mathcal{J}_\varepsilon(u(\varepsilon)) \leq \mathcal{J}_\varepsilon(v), \quad \forall v \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (3.4)$$

Ce problème possède évidemment une solution unique  $u(\varepsilon)$  qui satisfait

$$\begin{aligned} & a^+(u(\varepsilon), u(\varepsilon)) + a^-(u(\varepsilon), u(\varepsilon)) + a_{\alpha\beta}^s(u(\varepsilon), u(\varepsilon)) + \\ & \frac{1}{\varepsilon} a_{3\alpha}^s(u(\varepsilon), u(\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon^2} a_{33}^s(u(\varepsilon), u(\varepsilon)) = L(u(\varepsilon)) + \varepsilon L^s(u(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Considérons l'ensemble des déplacements admissibles

$$V_B := \{v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3); v_{i,3} = 0 \text{ in } B\},$$

et les fonctionnelles  $F_\varepsilon : L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $F : L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définies par

$$F_\varepsilon(v) := \begin{cases} \mathcal{J}_\varepsilon(v) & \text{si } v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$F(v) := \begin{cases} \frac{1}{2} a^+(v, v) + \frac{1}{2} a^-(v, v) - L(v) + \frac{1}{2} J_0^s(v) & \text{si } v \in V_B, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$J_0^s(v) := a_{\alpha\beta}^s(v, v) + Q^s(v)$$

avec

$$Q^s(v) := \inf_{\zeta \in L^2(B, \mathbb{R}^3)} \left( \int_B A_{i3h3}^s \zeta_i \zeta_h dx + 2 \int_B A_{i3h\alpha}^s \zeta_i v_{h,\alpha} dx \right). \quad (3.6)$$

**Proposition 3.1.** *La fonctionnelle  $J_0^s$  est une forme quadratique et satisfait pour tout  $v \in V_B$*

$$0 \leq J_0^s(v) \leq a_{\alpha\beta}^s(v, v). \quad (3.7)$$

*Par conséquent,  $J_0^s$  est convexe.*

*Démonstration.* Il est clair que pour tout  $v \in V_B$ ,  $Q_s(v) \leq 0$ , et donc, nécessairement,  $J_0^s(v) \leq a_{\alpha\beta}^s(v, v)$ . Expliciteons la forme  $Q_s(v)$  afin de démontrer que  $J_0^s$  est quadratique et positive. Puisque le tenseur  $M$  de composantes  $M_{ij} := A_{i3j3}^s$  est coercif, pour tout  $v \in V_B$ , le minimum est atteint dans (3.6) en  $\zeta = w(v)$  où

$$w_i(v) = -(M^{-1})_{ij} A_{j3h\alpha}^s v_{h,\alpha}. \quad (3.8)$$

Le champ de vecteurs  $w(v)$  est indépendant de  $x_3$ . On peut donc identifier  $w(v)$  à un élément de  $L^2(S, \mathbb{R}^3)$ . On obtient

$$Q^s(v) = - \int_B (M^{-1})_{ij} A_{i3h\alpha}^s v_{h,\alpha} A_{j3k\beta}^s v_{k,\beta} dx,$$

et on en déduit que  $J_0^s$  est bien une forme quadratique. D'autre part, la coercivité et les propriétés de symétrie de  $A^s$  entraînent que, il existe  $\kappa^s > 0$  tel que pour toute matrice  $\tau \in \mathbf{M}^{3 \times 3}$ ,

$$A^s \tau : \tau = A_{ijhk}^s \tau_{ij} \tau_{hk} = A^s \tau^* : \tau^* \geq \kappa^s \tau^* : \tau^* \geq 0. \quad (3.9)$$

Il vient ainsi,

$$\begin{aligned} 0 \leq \inf_{\tau_3 \in \mathbb{R}^3} A^s \tau : \tau &= A_{i\alpha h\beta}^s \tau_{i\alpha} \tau_{h\beta} + \inf_{\tau_3 \in \mathbb{R}^3} \left( A_{i3h3}^s \tau_{i3} \tau_{h3} + 2 A_{i3h\beta}^s \tau_{i3} \tau_{h\beta} \right) \\ &= A_{i\alpha h\beta}^s \tau_{i\alpha} \tau_{h\beta} - (M^{-1})_{ij} A_{i3h\alpha}^s \tau_{h\alpha} A_{j3k\beta}^s \tau_{k\beta}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Soit  $g_0 : \mathbf{M}^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie pour tout  $\hat{\tau} \in \mathbf{M}^{3 \times 2}$  par

$$g_0(\hat{\tau}) := A_{i\alpha h\beta}^s \tau_{i\alpha} \tau_{h\beta} - (M^{-1})_{ij} A_{i3h\alpha}^s \tau_{h\alpha} A_{j3k\beta}^s \tau_{k\beta}. \quad (3.11)$$

D'après (3.10), la fonction  $g_0$  est positive, ce qui implique que

$$J_0^s(v) = \int_B g_0(\hat{\nabla} v) dx \geq 0.$$

□

On munit  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  de la topologie forte. Le premier résultat de cette section est énoncé dans le théorème qui suit.

**Théorème 3.1.** *La suite  $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $F$ .*

Le théorème est la conséquence des deux propositions suivantes.

**Proposition 3.2** ( $\Gamma$ -liminf). *Pour tout  $v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et toute suite  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  qui converge fortement vers  $v$  dans  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , on a*

$$F(v) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon). \quad (3.12)$$

**Proposition 3.3** ( $\Gamma$ -limsup). *Pour tout  $v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , il existe une suite  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  qui converge fortement vers  $v$  dans  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  telle que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon) = F(v). \quad (3.13)$$

**Remarque 3.1.** *L'énergie  $F(v)$  coïncide exactement avec l'énergie correspondant au problème limite obtenu au chapitre 2. On retrouve bien le problème limite obtenu par l'étude de la convergence faible de la solution du problème*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_B \text{ tel que pour tout } v \in V_B \\ a^+(u, v) + a^-(u, v) + a_M^s(u, v) = L(v). \end{cases}$$

Avant de démontrer les propositions 3.2 et 3.3 aux paragraphes 3.1.2 et 3.1.3, nous commençons par établir le lemme de compacité qui nous permet de justifier l'ensemble des déplacements admissibles  $V_B$  et la topologie utilisée.

### 3.1.1 Lemme de compacité

**Lemme 3.1.** *Il existe  $u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $w \in L^2(B, \mathbb{R}^3)$  et une sous-suite de  $(u(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  (non renommée) telle que :*

- i)  $u(\varepsilon) \rightarrow u$  faiblement dans  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et fortement dans  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  ;
- ii)  $\frac{\partial u(\varepsilon)}{\partial x_3} \rightarrow 0$  fortement dans  $L^2(B, \mathbb{R}^3)$ , et donc  $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$  in  $B$  ;
- iii)  $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u(\varepsilon)}{\partial x_3} \rightarrow w$  faiblement dans  $L^2(B, \mathbb{R}^3)$ .

*Démonstration.* Grâce aux hypothèses de coercivité et continuité, on déduit de (3.5) les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2 &\leq C \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \left\| \frac{\partial u(\varepsilon)}{\partial x_3} \right\|_{0,B}^2 &\leq C \\ \left\| \hat{\nabla} u(\varepsilon) \right\|_{0,B}^2 &\leq C. \end{aligned}$$

L'assertion *i)* est une conséquence directe de la première estimation, de l'inégalité de Poincaré, et du théorème de Rellich-Kondrakov. Les deux autres proviennent directement des deux dernières estimations.  $\square$

**Remarque 3.2.** *En fait, ce résultat est valable pour toute suite d'énergie finie, i.e., toute suite  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  dans  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  telle que  $\sup_{\varepsilon>0} F_\varepsilon(v_\varepsilon) < +\infty$ .*

### 3.1.2 $\Gamma$ -liminf

On peut supposer que  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon) < +\infty$ , sinon l'inégalité (3.12) est triviale. Alors, d'après le lemme de compacité,  $v \in V_B$  et  $(\frac{1}{\varepsilon} \frac{v_\varepsilon}{\partial x_3})_{\varepsilon>0}$  converge faiblement vers un certain  $z$  dans  $L^2(B, \mathbb{R}^3)$ . Ecrivons

$$\mathcal{J}_\varepsilon(v_\varepsilon) = \hat{J}(v_\varepsilon, (\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3})) - L(v_\varepsilon) - \varepsilon L^s(v_\varepsilon),$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{J}(v, \zeta) &:= \frac{1}{2} a^+(v, v) + \frac{1}{2} a^-(v, v) + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}^s(v, v) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_B A_{i3j3}^s \zeta_i \zeta_j dx + \int_B A_{i3h\alpha}^s \zeta_i v_{h,\alpha} dx. \end{aligned}$$

Alors, par semi-continuité inférieure, il vient

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \hat{J}(v, z) - L(v) \geq F(v).$$

### 3.1.3 $\Gamma$ -limsup

Soit  $v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . On peut supposer  $F(v) < +\infty$  car sinon il n'y a rien à prouver. Donc  $v \in V_B$ . Soit  $(\omega^\eta)_{\eta>0}$  une suite dans  $\mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)$  qui converge fortement vers  $w(v)$ , (voir (3.8)), dans  $L^2(S, \mathbb{R}^3)$ , et soit  $(\phi^\eta)_{\eta>0} \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  telle que  $\phi^\eta(x) = x_3 \omega^\eta$  dans  $B$ . Posons  $v_\varepsilon^\eta = v + \varepsilon \phi^\eta$ . Alors,  $v_\varepsilon^\eta \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et  $v_\varepsilon^\eta \rightarrow v$  dans  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . De plus, on a

$$\begin{aligned} a^\pm(v_\varepsilon^\eta, v_\varepsilon^\eta) &= a^\pm(v, v) + 2\varepsilon a^\pm(\phi^\eta, v) + \varepsilon^2 a^\pm(\phi^\eta, \phi^\eta) \\ a_{\alpha\beta}^s(v_\varepsilon^\eta, v_\varepsilon^\eta) &= a_{\alpha\beta}^s(v, v) + 2\varepsilon a_{\alpha\beta}^s(\phi^\eta, v) + \varepsilon^2 a_{\alpha\beta}^s(\phi^\eta, \phi^\eta) \\ a_{3\alpha}^s(v_\varepsilon^\eta, v_\varepsilon^\eta) &= \varepsilon a_{3\alpha}^s(\phi^\eta, v) + \varepsilon^2 a_{3\alpha}^s(\phi^\eta, \phi^\eta) \\ a_{33}^s(v_\varepsilon^\eta, v_\varepsilon^\eta) &= \varepsilon^2 a_{33}^s(\phi^\eta, \phi^\eta). \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, il vient

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon^\eta) &= \frac{1}{2}a^+(v, v) + \frac{1}{2}a^-(v, v) - L(v) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ a_{\alpha\beta}^s(v, v) + 2 \int_B A_{i3h\alpha}^s \omega_i^\eta v_{h,\alpha} dx + \int_B A_{i3h3}^s \omega_i^\eta \omega_h^\eta dx \right\}, \end{aligned}$$

et en passant à la limite en  $\eta$ , puisque  $(\omega^\eta)_{\eta>0}$  converge fortement vers  $w(v)$  dans  $L^2(S, \mathbb{R}^3)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon^\eta) &= \frac{1}{2}a^+(v, v) + \frac{1}{2}a^-(v, v) - L(v) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ a_{\alpha\beta}^s(v, v) + 2 \int_B A_{i3h\alpha}^s w_i(v) v_{h,\alpha} dx + \int_B A_{i3h3}^s w_i(v) w_h(v) dx \right\} = F(v). \end{aligned}$$

D'après le lemme de diagonalisation, lemme 1.1, il existe une application  $\varepsilon \mapsto \eta(\varepsilon)$  telle que  $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  et telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon^{\eta(\varepsilon)}) = F(v).$$

### 3.1.4 Convergence forte

**Théorème 3.2.** *Sous ces hypothèses, il existe une sous-suite de  $(u(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  non renommée telle que  $u(\varepsilon) - u \rightarrow 0$  fortement dans  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ .*

*Démonstration.* La démonstration est semblable à celles du chapitre précédent. Elle repose sur l'introduction d'une suite d'éléments dans  $\mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)$  qui converge vers  $w(u)$  (voir (3.8)) dans  $L^2(S, \mathbb{R}^3)$ . Plus précisément, soit  $(\omega^\eta)_{\eta>0}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)$  qui converge fortement vers  $w(u)$  dans  $L^2(S, \mathbb{R}^3)$  et soit  $(\phi^\eta)_{\eta>0}$  une suite dans  $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  telle que  $\phi^\eta(x) = x_3 \omega^\eta(\hat{x})$  pour tout  $x$  dans  $B$ . Alors,  $u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^\eta \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et en posant

$$\begin{aligned} a(u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^\eta) &:= \\ & a^\pm(u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^\eta) \\ & + a_{\alpha\beta}^s(u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^\eta) \\ & + \frac{1}{\varepsilon} a_{3\alpha}^s(u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^\eta) \\ & + \frac{1}{\varepsilon^2} a_{33}^s(u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^\eta) \end{aligned}$$

On obtient en passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ a(u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^\eta, u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^\eta) \} &= \\ & -2 \int_S A_{i3k3}^s \omega_i^\eta (w_k - \omega_k^\eta) d\hat{x} - 2 \int_S A_{k\alpha i3}^s u_{k,\alpha} (w_i - \omega_i^\eta) d\hat{x}. \end{aligned}$$

Puisque la suite  $(\omega^\eta)_{\eta>0}$  converge fortement vers  $w(u)$  dans  $L^2(S, \mathbb{R}^3)$ , il vient

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \int_S A_{i3k3}^s \omega_i^\eta (w_k - \omega_k^\eta) d\hat{x} + \int_S A_{k\alpha i3}^s u_{k,\alpha} (w_i - \omega_i^\eta) d\hat{x} \right\} = 0.$$

On déduit alors du lemme 1.1 qu'il existe une application  $\varepsilon \mapsto \eta(\varepsilon)$  vérifiant  $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour laquelle on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^{\eta(\varepsilon)}, u(\varepsilon) - u - \varepsilon \phi^{\eta(\varepsilon)}) = 0.$$

On conclut grâce à la coercivité des formes bilinéaires.  $\square$

**Remarque 3.3.** *On peut remarquer que dans la démonstration de la convergence forte, on caractérise au passage la limite faible  $w$  introduite dans le lemme 3.1. En effet, on a  $w = w(u)$ .*

## 3.2 Un modèle en élasticité non linéaire

Dans cette section, nous nous intéressons au cas où le matériau dans la couche mince peut subir des transformations de phase solide/solide, et le reste de la structure, de grandes déformations. De telles transformations conduisent souvent à une microstructure caractéristique, liée à un mélange subtil des différentes phases. Un exemple typique est la transformation de phase austénite/martensite de certains solides cristallins, dont une caractéristique est la présence d'une interface séparant une phase homogène, austénite, et un mélange très fin couplé de l'autre phase, martensite. Dans [12], Ball et James ont mis en évidence que dans cette situation la densité d'énergie du matériau possède plusieurs puits de potentiels et n'est donc pas quasi-convexe. Nous reviendrons sur les caractéristiques de ces matériaux au chapitre suivant. Les fonctions  $f^\pm$  et  $g$  ne sont donc pas quasi-convexes, mais on suppose qu'elles satisfont une condition  $\mathcal{C}_p$ , avec  $p > 1$  (voir (1.15)). Pour simplifier les notations, on suppose que la condition  $\mathcal{C}_p$  est vérifiée avec les mêmes constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $C$  pour  $f^\pm$  et  $g$ . Il est important de noter une nouvelle fois que la condition de croissance majorante n'est pas admissible du point de vue de la mécanique. Dans [34] et [6], on trouve des résultats concernant le modèle de la membrane non linéaire prenant en compte la contrainte  $\det(I + \nabla u) > 0$ .

L'énergie du système définie sur le domaine fixe est donnée par la fonctionnelle  $F_\varepsilon : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$F_\varepsilon(v) := \begin{cases} \int_{\Omega^-} f^-(\nabla v) dx + \int_{\Omega^+} f^+(\nabla v) dx + \int_B g(\hat{\nabla} v | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_3}) dx \\ \quad - L(v) - \varepsilon L^s(v) & \text{si } v \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit  $g_0$  la fonction définie pour tout  $\hat{\lambda} \in \mathbf{M}^{3 \times 2}$  par

$$g_0(\hat{\lambda}) := \inf_{\xi \in \mathbb{R}^3} g(\hat{\lambda} | \xi). \quad (3.14)$$

Notons  $Qf^+$  (resp.  $Qf^-$ ,  $Qg_0$ ) l'enveloppe quasi-convexe de  $f^+$  (resp.  $f^-$ ,  $g_0$ ) et considérons la fonctionnelle  $F : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définie par

$$F(v) := \begin{cases} \int_{\Omega^-} Qf^-(\nabla v) dx + \int_{\Omega^+} Qf^+(\nabla v) dx + \int_B Qg_0(\hat{\nabla} v) dx - L(v) & \text{si } v \in V_B^p, \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases}$$

où  $V_B^p = \left\{ v \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3); \frac{\partial v}{\partial x_3} = 0 \text{ dans } B \right\}$ . Alors, le résultat principal de cette partie est le théorème suivant.

**Théorème 3.3.** *On munit  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  de la topologie forte. La suite  $(F_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $F$ .*

On démontre ce théorème en établissant les deux propositions relatives aux assertions i) et ii) de la définition de la  $\Gamma$ -convergence.

**Proposition 3.4** ( $\Gamma$ -liminf). *Pour tout  $v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et toute suite  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  qui converge fortement vers  $v$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , on a*

$$F(v) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon). \quad (3.15)$$

**Proposition 3.5** ( $\Gamma$ -limsup). *Pour tout  $v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , il existe une suite  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  qui converge fortement vers  $v$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  telle que*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq F(v). \quad (3.16)$$

Afin de démontrer ces deux propositions aux sections 3.2.2 et 3.2.3, nous commençons par établir un résultat de compacité pour les suites d'énergie finie.

### 3.2.1 Lemme de compacité

**Lemme 3.2.** *Soit  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  une suite d'énergie finie, c'est-à-dire telle que  $\sup_{\varepsilon>0} F_\varepsilon(v_\varepsilon) < +\infty$ . Alors il existe  $v \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $w \in L^p(B, \mathbb{R}^3)$  et une sous-suite de  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  (non renommée) tels que*

- i)  $v_\varepsilon \rightarrow v$  faiblement dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et fortement dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ;
- ii)  $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3} \rightarrow 0$  fortement dans  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$  et donc  $\frac{\partial v}{\partial x_3} = 0$  dans  $B$ ;
- iii)  $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3} \rightarrow w$  faiblement dans  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$ .

Ces estimations sont conséquences directes des propriétés de coercivité et continuité de  $f^+$ ,  $f^-$  et  $g$ , de l'inégalité de Poincaré et du théorème de Rellich-Kondrakov.

### 3.2.2 $\Gamma$ -liminf

On suppose que  $\sup_{\varepsilon>0} F_\varepsilon(v_\varepsilon) < +\infty$  car dans le cas contraire il n'y a rien à prouver. Par conséquent d'après le lemme de compacité,  $v$  appartient à  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial v}{\partial x_3} = 0$  dans  $B$ , i.e.  $v \in V_B^p$ . De plus,  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge faiblement vers  $v$  dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon) &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Omega^-} f^-(\nabla v_\varepsilon) dx + \int_{\Omega^+} f^+(\nabla v_\varepsilon) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_B g(\hat{\nabla} v_\varepsilon | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3}) dx - L(v_\varepsilon) - \varepsilon L^s(v_\varepsilon) \right) \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^-} f^-(\nabla v_\varepsilon) dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^+} f^+(\nabla v_\varepsilon) dx \\ &\quad + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g(\hat{\nabla} v_\varepsilon | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3}) dx - L(v) \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^-} Q f^-(\nabla v_\varepsilon) dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^+} Q f^+(\nabla v_\varepsilon) dx \\ &\quad + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g(\hat{\nabla} v_\varepsilon | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3}) dx - L(v). \end{aligned} \quad (3.17)$$

D'après les résultats de Le Dret et Raoult [34] sur la membrane, on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g(\hat{\nabla} v_\varepsilon | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3}) dx \geq \int_B Q g_0(\hat{\nabla} v) d\hat{x}. \quad (3.18)$$

Alors, d'après la semi-continuité inférieure des fonctions  $v \mapsto \int_{\Omega^\pm} Qf^\pm(\nabla v) dx$  et (3.18), on obtient

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \int_{\Omega^-} Qf^-(\nabla v) dx + \int_{\Omega^+} Qf^+(\nabla v) dx + \int_B Qg_0(\hat{\nabla} v) d\hat{x} - L(v).$$

### 3.2.3 $\Gamma$ -limsup

Considérons la fonctionnelle  $\tilde{F} : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définie par

$$\tilde{F}(v) := \begin{cases} \int_{\Omega^-} f^-(\nabla v) dx + \int_{\Omega^+} f^+(\nabla v) dx + \int_B g_0(\hat{\nabla} v) dx - L(v) \\ \text{si } v \in V_B^p, \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

Nous montrons d'abord que

$$\Gamma - \limsup F_\varepsilon \leq \tilde{F}.$$

Soit  $v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . On peut supposer que  $F(v) < +\infty$ , sinon il n'y a rien à démontrer. Donc  $v \in V_B^p$ . D'après les résultats de [5] concernant l'inversion de l'infimum avec le signe intégrale, on a

$$\int_B g_0(\hat{\nabla} v) dx = 2 \int_S g_0(\hat{\nabla} v) d\hat{x} = 2 \inf_{\xi \in \mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)} \int_S g(\hat{\nabla} v | \xi) d\hat{x}. \quad (3.19)$$

Soit  $\xi \in \mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)$ , et soit  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  tel que  $\phi(x) = x_3 \xi(\hat{x})$  pour tout  $x \in B$ . Posons

$$v_\varepsilon(x) := v(x) + \varepsilon \phi(x). \quad (3.20)$$

Il est clair que  $v_\varepsilon$  appartient à  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et converge fortement vers  $v$  dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(v_\varepsilon) &= \int_{\Omega^-} f^-(\nabla v_\varepsilon) dx + \int_{\Omega^+} f^+(\nabla v_\varepsilon) dx + \int_B g(\hat{\nabla} v_\varepsilon | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3}) dx - L(v_\varepsilon) - \varepsilon L^s(v_\varepsilon) \\ &= \int_{\Omega^-} f^-(\nabla v + \varepsilon \nabla \phi) dx + \int_{\Omega^+} f^+(\nabla v + \varepsilon \nabla \phi) dx \\ &\quad + \int_B g(\hat{\nabla} v + \varepsilon x_3 \hat{\nabla} \xi | \xi) dx - L(v_\varepsilon) - \varepsilon L^s(\varepsilon), \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon) = \int_{\Omega^-} f^-(\nabla v) dx + \int_{\Omega^+} f^+(\nabla v) dx + 2 \int_S g(\hat{\nabla} v | \xi) d\hat{x} - L(v). \quad (3.21)$$

En prenant l'infimum sur tous les  $\xi \in \mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)$  dans (3.21), d'après (3.19) on déduit que

$$\inf \left\{ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon) : v_\varepsilon \rightarrow v \text{ dans } L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \right\} \leq \tilde{F}(v)$$

i.e.,  $\Gamma - \limsup F_\varepsilon \leq \tilde{F}$ . On conclut en prenant l'enveloppe sci dans chaque membre grâce à la semi-continuité inférieure de  $\Gamma - \limsup F_\varepsilon$  et au lemme 3.3.

**Lemme 3.3.** *La fonctionnelle  $F$  est l'enveloppe sci de la fonctionnelle  $\tilde{F}$  pour la topologie forte de  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ .*

*Démonstration.* Notons encore  $\Omega$  l'ensemble  $\Omega^+ \cup S \cup \Omega^-$ , et  $\gamma_S$  l'opérateur trace de  $W^{1,p}(\Omega \setminus S, \mathbb{R}^3)$  dans  $L^p(S, \mathbb{R}^3)$ . Les espaces  $V_B^p$  et  $V^p := \{v \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) : \gamma_S(v) \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)\}$  sont isométriques. Alors, en posant  $f = f^+ 1_{\Omega^+} + f^- 1_{\Omega^-}$ , on peut également écrire la fonctionnelle  $\tilde{F}$  de la façon suivante :

$$\tilde{F}(v) := \begin{cases} \int_{\Omega} f(\nabla v) dx + 2 \int_S g_0(\hat{\nabla} \gamma_S(v)) d\hat{x} - L(v) & \text{si } v \in V^p, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans toute la preuve du lemme, on utilise cette formulation. On doit montrer que

$$F(v) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \tilde{F}(v_n) : v_n \rightarrow v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \right\}$$

ou, de façon équivalente, que pour tout  $v$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , on a :

- (i)  $\forall v_n \rightarrow v$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \tilde{F}(v_n) \geq F(v)$ ,
- (ii)  $\exists v_n \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  tel que  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \tilde{F}(v_n) \leq F(v)$ .

Notons que l'application  $v \mapsto L(v)$  étant continue pour la convergence forte dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , il suffit d'établir (i) et (ii) en omettant  $L$  dans la définition de  $F$  et  $\tilde{F}$ .

Montrons (i). Soit  $v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge fortement vers  $v$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  telle que  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \tilde{F}(v_n) < +\infty$ . Alors,  $v_n \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et  $\gamma_S(v_n) \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$ . De la coercivité de  $f$  et  $g_0$  (la coercivité de  $g_0$  provient directement de celle de  $g$ ), on déduit que  $v_n$  converge faiblement vers  $v$  dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et que  $\gamma_S(v_n)$  converge faiblement vers  $\gamma_S(v)$  dans  $W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \tilde{F}(v_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla v_n) dx + \liminf_{n \rightarrow +\infty} 2 \int_S g_0(\hat{\nabla} \gamma_S(v_n)) d\hat{x} \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} Qf(\nabla v_n) dx + \liminf_{n \rightarrow +\infty} 2 \int_S Qg_0(\hat{\nabla} \gamma_S(v_n)) d\hat{x} \\ &\geq F(v), \end{aligned}$$

d'après la semi-continuité inférieure de  $v \mapsto \int_{\Omega} Qf(\nabla v) dx$  et  $v \mapsto \int_S Qg_0(\hat{\nabla} \gamma_S(v)) d\hat{x}$  dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et  $W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  respectivement.

Montrons (ii). Soit  $v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  tel que  $F(v) < +\infty$ . D'après les résultats classiques de relaxation dans les espaces de Sobolev (voir [9]), on sait qu'il existe  $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  qui converge vers  $(v, \gamma_S(v))$  faiblement dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  et fortement dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3)$  telle que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx &= \int_{\Omega} Qf(\nabla v) dx \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S g_0(\hat{\nabla} v_n) d\hat{x} &= \int_S Qg_0(\hat{\nabla} \gamma_S(v)) d\hat{x}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Mais la condition  $\gamma_S(u_n) = v_n$  n'est a priori pas vérifiée. Afin qu'elle le soit, on va modifier  $u_n$  au voisinage de  $S$ . Or on peut supposer que  $(|\nabla u_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$  est uniformément intégrable. En effet, soit  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite dont les gradients génèrent la même mesure de Young  $\mu$  et telle que

$(|\nabla \tilde{u}_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$  est uniformément intégrable (proposition 1.6). Alors, d'après les propositions 1.4, 1.5 et les résultats standards de semi-continuité inférieure dans les espaces de Sobolev, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Qf(\nabla u) \, dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n) \, dx \\ &\geq \int_{\Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) \, d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla \tilde{u}_n) \, dx \\ &\geq \int_{\Omega} Qf(\nabla u) \, dx \end{aligned}$$

soit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla \tilde{u}_n) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n) \, dx = \int_{\Omega} Qf(\nabla u) \, dx.$$

Dans toute la suite, on continue de noter  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et on considère la fonction  $v_n$  aussi bien comme une fonction de  $W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  qu'une fonction de  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  telle que  $\frac{\partial v_n}{\partial x_3} = 0$ .

Soit  $\eta > 0$  destiné à tendre vers 0 et soit  $\Sigma_{\eta} := S \times (-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2})$ . On va modifier  $u_n$  dans  $\Sigma_{\eta}$  de sorte que la trace sur  $S$  de la nouvelle fonction soit égale à  $v_n$  et de façon à ce que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n) \, dx$  décroisse. Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$  telle que

$$\begin{aligned} \varphi_{\eta} &= 1 \text{ on } \Omega \setminus \Sigma_{2\eta}, \quad \varphi_{\eta} = 0 \text{ on } \Sigma_{\eta}, \quad 0 \leq \varphi_{\eta} \leq 1, \\ |\nabla \varphi_i| &\leq \frac{1}{\eta}. \end{aligned}$$

Posons

$$u_{n,\eta} = \varphi_{\eta}(u_n - v_n) + v_n. \quad (3.23)$$

Bien sûr  $u_{n,\eta}$  appartient à  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et  $\gamma_s(u_{n,\eta}) = v_n$ . De plus

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta}) \, dx &= \int_{\Sigma_{\eta}} f(\nabla u_{n,\eta}) \, dx + \int_{\Sigma_{2\eta} \setminus \Sigma_{\eta}} f(\nabla u_{n,\eta}) \, dx + \int_{\Omega \setminus \Sigma_{2\eta}} f(\nabla u_{n,\eta}) \, dx \\ &\leq \int_{\Sigma_{\eta}} f(\nabla v_n) \, dx + \int_{\Sigma_{2\eta} \setminus \Sigma_{\eta}} f(\nabla u_{n,\eta}) \, dx + \int_{\Omega} f(\nabla u_n) \, dx. \end{aligned}$$

Donc d'après la condition de croissance qui découle de (1.15),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta}) \, dx &\leq C \left( \eta + \frac{1}{\eta^p} \int_{\Sigma_{2\eta}} |u_n - v_n|^p \, dx + \int_{\Sigma_{2\eta}} (|\nabla u_n|^p) \, dx \right) \\ &\quad + \int_{\Omega} f(\nabla u_n) \, dx \end{aligned}$$

où  $C$  désigne différentes constantes positives dépendant de  $\beta, p$  and  $\Omega$ . En passant à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , On déduit de (3.22) :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta}) \, dx &\leq C \left( \eta + \frac{1}{\eta^p} \int_{\Sigma_{2\eta}} |u_- v|^p \, dx + \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Sigma_{2\eta}} (|\nabla u_n|^p) \, dx \right) \\ &\quad + \int_{\Omega} Qf(\nabla u) \, dx. \end{aligned}$$

Et comme  $\gamma_S(u) = v$ , on a l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\int_{\Sigma_{2\eta}} |u - v|^p dx \leq \eta^p \int_{\Sigma_{2\eta}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right|^p dx.$$

Donc, grâce à l'uniforme intégrabilité de  $(|\nabla u_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ , on obtient lorsque  $\eta \rightarrow 0$

$$\limsup_{\eta \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta}) dx \leq \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx.$$

On termine en diagonalisant (lemme 1.1) : il existe une application  $n \mapsto \eta(n)$  telle que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta(n)}) dx \leq \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx.$$

Il reste à montrer que la suite  $(\tilde{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\tilde{v}_n = u_{n,\eta(n)}$  converge fortement vers  $v$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . On déduit de (3.23) que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\tilde{v}_n - u|^p dx &= \int_{\Omega} |(1 - \varphi_{\eta(n)})(v_n - u_n) + u_n - v|^p dx \\ &\leq C \left( \int_{\Sigma_{2\eta(n)}} |u_n - v_n|^p dx + \int_{\Omega} |u_n - v|^p dx \right). \end{aligned}$$

En écrivant  $u_n - v_n = v - \gamma_S(v) + (u_n - v) + (\gamma_S(v) - v_n)$ , puisque  $u_n \rightarrow v$  fortement dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $v_n \rightarrow \gamma_S(v)$  fortement dans  $L^p(S, \mathbb{R}^3)$  et  $\eta(n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , il vient

$$\int_{\Sigma_{2\eta(n)}} |u_n - v_n|^p dx \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0,$$

d'où finalement  $\tilde{v}_n \rightarrow v$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . □

**Remarque 3.4.** Soit  $V_S^p = \left\{ v \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega^+ \cup S \cup \Omega^-, \mathbb{R}^3); \gamma_S(v) \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3) \right\}$ . Les espaces  $V_B^p$  et  $V_S^p$  étant isométriques, on peut bien sûr réécrire la fonctionnelle  $F$  de la façon suivante

$$F(v) := \begin{cases} \int_{\Omega^-} Qf^-(\nabla v) dx + \int_{\Omega^+} Qf^+(\nabla v) dx + 2 \int_S Qg_0(\hat{\nabla} v) dx - L(v) & \text{si } v \in V_S^p, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette modélisation présente un inconvénient dans le cas où les densités d'énergie ont plusieurs puits de potentiels car l'introduction de leurs enveloppes quasi-convexes efface toute information sur le comportement oscillatoire des suites minimisantes. Pour prendre en compte ce comportement oscillatoire, on va se placer dans l'espace des mesures de Young. C'est le modèle qui est proposé au chapitre suivant.

## Chapitre 4

# Modélisation d'un multi-matériau à liaison forte présentant des microstructures

Certains matériaux ou alliages (Cuivre Nickel, Titane Nickel, Titanate de Baryum, etc...) subissent des transformations de phase solide/solide au sens où il peuvent exister sous divers réseaux cristallins. De telles transformations de phase conduisent à la formation de microstructures correspondant à des mélanges très "fins" des différentes phases. Un exemple typique est la transformation martensitique où une interface plane sépare une phase homogène, l'austénite, d'une phase hétérogène faite d'empilements de fines couches constituées alternativement de deux variantes de martensite (twinned martensite). Plus précisément, l'austénite, qui est plus symétrique, constitue la phase stable (essentiellement présente) à température supérieure ou égale à la température dite température de transition. La martensite, elle, beaucoup moins symétrique, constitue la phase stable à température inférieure ou égale à la température de transition. Ainsi, à la température de transition, les deux phases coexistent. La martensite existe sous plusieurs réseaux cristallins se déduisant du seul réseau austénitique par un nombre fini de transformations géométriques. Ball et James [12] ont mis en évidence qu'à la température de transition, dans un milieu tridimensionnel, austénite et deux variantes de martensite peuvent coexister sous forme d'un empilement de fines couches de deux variantes de martensite (twinned martensite) présentant une interface plane avec un domaine austénitique. Bhattacharya et James [19] ont développé dans le cas des couches minces, une théorie prédisant des interfaces rectilignes entre un domaine membranaire constitué d'austénite et un autre domaine membranaire constitué d'une seule variante de martensite. Du point de vue de la modélisation, ceci se traduit par le fait que l'énergie du système n'atteint pas un minimum, et que les gradients des suites minimisantes oscillent de manière de plus en plus importante. Il en résulte que la densité d'énergie de tels matériaux n'est pas quasi-convexe. Un moyen de prendre en compte ces oscillations est de reformuler le problème en terme de mesures de Young. Dans le cas des membranes, des modèles asymptotiques ont été obtenus par  $\Gamma$ -convergence dans [55] et [40]. La structure étudiée ici correspond à l'assemblage de deux solides tridimensionnels par l'intermédiaire d'une couche mince rigide présentant des transitions de phase.

Nous reprenons dans ce chapitre le problème non linéaire étudié au chapitre précédent dans le cadre des espaces de Sobolev, et proposons une nouvelle étude asymptotique dans le cadre d'une convergence variationnelle faisant intervenir un couple de variables déplacement/mesure

de Young  $(u, \nu)$ . Ceci permet de prendre en compte le comportement oscillatoire de la suite  $(\nabla \bar{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  dans la couche mince. On obtient une nouvelle formulation  $(u, \nu) \mapsto \mathcal{F}(u, \nu)$  du problème en identifiant la limite variationnelle de la fonctionnelle énergie  $u \mapsto F_\varepsilon(u)$  réécrite  $(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \mapsto \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$ . On retrouve la fonctionnelle énergie  $F$  comme étant la fonction marginale  $u \mapsto \inf_\nu \mathcal{F}(u, \nu)$  de l'énergie  $\mathcal{F}$  lorsque l'on considère la mesure de Young  $\nu$  comme variable interne. En comparant les deux formulations variationnelles  $\bar{u} \in \operatorname{argmin}(F - L)$  et  $(\bar{u}, \bar{\nu}) \in \operatorname{argmin}(\mathcal{F} - L)$ , on obtient une représentation intégrale par rapport à la mesure de probabilité  $\bar{\nu}_{\hat{x}}$  sur l'ensemble  $\mathbf{M}^{3 \times 2}$  des matrices  $3 \times 2$ , des quantités macroscopiques  $\hat{\nabla} \gamma_S(\bar{u})$  et  $Qg_0(\hat{\nabla} \gamma_S(\bar{u}))$ . On peut considérer la variable  $\bar{\nu}$  comme la description microscopique de  $\hat{\nabla} \gamma_S(\bar{u})$  et  $Qg_0(\hat{\nabla} \gamma_S(\bar{u}))$ . On obtient également une autre formulation du problème en considérant l'autre fonction marginale  $\nu \mapsto \inf_u \mathcal{F}(u, \nu)$ .

Il est également intéressant de considérer le cas où l'ensemble de la structure est constituée de matériaux subissant des transitions de phase. Dans ce cas, le problème est entièrement formulé en terme de mesures de Young.

## 4.1 Une convergence variationnelle pour des fonctionnelles définies sur des espaces produit

Le problème décrit dans l'introduction de ce chapitre illustre une stratégie plus générale dans la modélisation des multi-matériaux : afin de prendre en compte différents phénomènes de convergence des suites minimisantes, qui sont des fonctions de Sobolev, on introduit une nouvelle variable, une mesure  $\nu$ , « liée » à la variable fonction de Sobolev  $u$  (mesures de Young, mesures de concentration,...), et une nouvelle fonctionnelle  $(u, \nu) \mapsto \mathcal{F}_\varepsilon(u, \nu)$ . Alors on identifie la limite  $\mathcal{F}$  pour une convergence variationnelle convenable. La fonction marginale de  $\mathcal{F}$  obtenue lorsque l'on considère la mesure  $\nu$  comme variable interne correspond à l'énergie limite du problème formulé dans le cadre Sobolev uniquement. On obtient aussi une autre formulation du problème en regardant la deuxième fonction marginale. Nous décrivons cette méthode dans un cadre abstrait, puis nous l'appliquerons à notre problème.

### 4.1.1 Une convergence variationnelle

Soient  $X, Y, \hat{Y}$ , trois espaces topologiques à base dénombrable, et  $\Theta$  une application de  $Y$  dans  $\hat{Y}$ . Soient  $\mathcal{F}_n : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $\mathcal{F} : X \times \hat{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , on souhaite définir une convergence  $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}$  telle que, pour une convergence convenable associée à l'opérateur  $\Theta$  et sous certaines hypothèses de compacité, on ait :

$$\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F} \Rightarrow \begin{cases} \inf_{X \times Y} \mathcal{F}_n \rightarrow \min_{X \times \hat{Y}} \mathcal{F} ; \\ \arg \min_{X \times Y} \mathcal{F}_n \ni (x_n, y_n) \rightarrow (x, \hat{y}) \in \arg \min_{X \times \hat{Y}} \mathcal{F} \\ \text{au moins pour une sous-suite,} \end{cases}$$

lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Pour cela on définit une notion de convergence associée à l'opérateur  $\Theta$  entre les éléments de  $Y$  et  $\hat{Y}$ , puis une notion de convergence entre les éléments de  $X \times Y$  et  $X \times \hat{Y}$ .

**Définition 4.1.** Soient  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $Y$  et  $\hat{y}$  un élément de  $\hat{Y}$ . On dit que  $y_n$   $\Theta$ -converge vers  $\hat{y}$  et on note

$$y_n \xrightarrow{\Theta} \hat{y}$$

si et seulement si il existe  $y \in Y$  tel que  $y_n \rightarrow y$  et  $\hat{y} = \Theta(y)$ .

Soient  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $X \times Y$  et  $(x, \hat{y}) \in X \times \hat{Y}$ . On dit que  $(x_n, y_n)$  converge vers  $(x, \hat{y})$  et on note

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{I \times \Theta} (x, \hat{y})$$

si et seulement si  $x_n$  converge vers  $x$ , et  $y_n$   $\Theta$ -converge vers  $\hat{y}$ .

On introduit alors la convergence variationnelle associée à la convergence  $\xrightarrow{I \times \Theta}$ .

**Définition 4.2.** On dit que  $\mathcal{F}_n$   $\Gamma_{X, Y, \hat{Y}}$ -converge vers  $\mathcal{F}$  et on écrit

$$\mathcal{F}_n \xrightarrow{\Gamma_{X, Y, \hat{Y}}} \mathcal{F}$$

si et seulement si pour tout  $(x, \hat{y}) \in X \times \hat{Y}$ , les deux propositions suivantes sont vérifiées :

$$(i) \forall (x_n, y_n) \in X \times Y \text{ tel que } (x_n, y_n) \xrightarrow{I \times \Theta} (x, \hat{y}), \mathcal{F}(x, \hat{y}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_n(x_n, y_n),$$

$$(ii) \exists (x_n, y_n) \in X \times Y \text{ tel que } (x_n, y_n) \xrightarrow{I \times \Theta} (x, \hat{y}), \mathcal{F}(x, \hat{y}) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_n(x_n, y_n).$$

Cette notion de convergence est très proche de la  $\Gamma$ -convergence. Lorsque  $Y = \{0\}$  et  $\hat{Y} = \{\hat{0}\}$ , c'est-à-dire quand  $\mathcal{F}_n$  et  $\mathcal{F}$  ne dépendent pas de  $y$  et  $\hat{y}$ , cette convergence correspond exactement à la  $\Gamma$ -convergence classique. Dans ce cas, on la notera  $\Gamma_X$ . Inversement, lorsque  $X = \{0\}$ , on la notera  $\Gamma_{Y, \hat{Y}}$ .

Nous montrons dans la proposition qui suit que la  $\Gamma_{X, Y, \hat{Y}}$ -convergence est bien une convergence variationnelle.

**Proposition 4.1.** Soit  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui  $\Gamma_{X, Y, \hat{Y}}$ -converge vers  $\mathcal{F}$  et soit  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $X \times Y$  telle que

$$\mathcal{F}_n(x_n, y_n) \leq \inf_{(x, y) \in X \times Y} \mathcal{F}_n(x, y) + \frac{1}{n}.$$

Supposons que  $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\}$  est relativement compacte pour la convergence  $\xrightarrow{I \times \Theta}$  définie ci-dessus. Alors, toute valeur d'adhérence  $(\bar{x}, \bar{\hat{y}}) \in X \times \hat{Y}$  minimise  $\mathcal{F}$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \{ \mathcal{F}_n(x, y) : (x, y) \in X \times Y \} = \mathcal{F}(\bar{x}, \bar{\hat{y}})$$

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle du théorème 12.1.1 dans [9]. Afin de permettre une lecture indépendante, nous la reproduisons ci-dessous.

Soient  $(\bar{x}, \bar{\hat{y}})$  une valeur d'adhérence de  $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\}$  et  $((x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite qui converge vers  $(\bar{x}, \bar{\hat{y}})$ . Posons

$$(\tilde{x}_m, \tilde{y}_m) := \begin{cases} (x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}) & \text{s'il existe } n \text{ tel que } m = \sigma(n) \\ (\bar{x}, \bar{\hat{y}}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,  $(\tilde{x}_m, \tilde{y}_m) \rightarrow (\bar{x}, \bar{\hat{y}})$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$  et d'après l'assertion (i) de la définition 4.2 on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{x}, \bar{\hat{y}}) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_n(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{X \times Y} \mathcal{F}_{\sigma(n)}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

D'autre part, soit  $(x, \hat{y}) \in X \times \hat{Y}$ . D'après l'assertion (ii) de la définition 4.2, il existe une suite  $((x'_n, y'_n))_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $(x, \hat{y})$  et vérifie

$$\mathcal{F}(x, \hat{y}) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_n(x'_n, y'_n) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_{\sigma(n)}(x'_{\sigma(n)}, y'_{\sigma(n)}). \quad (4.2)$$

En combinant (4.1) et (4.2), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{x}, \bar{\hat{y}}) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{X \times Y} \mathcal{F}_{\sigma(n)} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \inf_{X \times Y} \mathcal{F}_{\sigma(n)} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_{\sigma(n)}(x'_{\sigma(n)}, y'_{\sigma(n)}) \\ &\leq \mathcal{F}(x, \hat{y}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

ce qui montre que  $\mathcal{F}(\bar{x}, \bar{\hat{y}}) = \min_{X \times \hat{Y}} \mathcal{F}$ .

En prenant  $(x, \hat{y}) = (\bar{x}, \bar{\hat{y}})$  dans (4.3), on obtient de plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{X \times Y} \mathcal{F}_{\sigma(n)} = \min_{X \times \hat{Y}} \mathcal{F}$ . Puisque toute sous-suite de  $\inf_{X \times Y} \mathcal{F}_n$  possède une sous-suite convergeant vers  $\min_{X \times \hat{Y}} \mathcal{F}$ , on a finalement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{X \times Y} \mathcal{F}_n = \min_{X \times \hat{Y}} \mathcal{F}$ .  $\square$

#### 4.1.2 Convergence variationnelle des fonctions marginales

Considérons les fonctions marginales  $F_n, F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $G_n : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , et  $G : \hat{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \inf_{y \in Y} \mathcal{F}_n(x, y) \quad , \quad F(x) = \inf_{\hat{y} \in \hat{Y}} \mathcal{F}(x, \hat{y}) \\ G_n(y) &= \inf_{x \in X} \mathcal{F}_n(x, y) \quad , \quad G(\hat{y}) = \inf_{x \in X} \mathcal{F}(x, \hat{y}) \end{aligned}$$

La convergence variationnelle des fonctionnelles  $\mathcal{F}_n$  entraîne la convergence variationnelle des marginales.

**Théorème 4.1.** *Supposons que la suite  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma_{X, Y, \hat{Y}}$ -converge vers  $\mathcal{F}$ . Supposons de plus, que pour toute suite  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n(x_n, y_n) < +\infty$ , il existe  $(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)})$  dans  $X \times Y$  et  $(x, \hat{y})$  dans  $X \times \hat{Y}$  tels que  $(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}) \xrightarrow{I \times \Theta} (x, \hat{y})$  (propriété de compacité). Alors,*

$$\begin{aligned} (i) \quad &F_n \xrightarrow{\Gamma_X} F \\ (ii) \quad &G_n \xrightarrow{\Gamma_{Y, \hat{Y}}} G \end{aligned}$$

*Démonstration.* Preuve de (i). En utilisant la proposition 1.7, on va montrer que de toute sous-suite de  $F_n$ , on peut extraire une sous-suite qui  $\Gamma_X$ -converge vers  $F$ . Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge vers  $x$  dans  $X$  et soit  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $Y$  telle que

$$\mathcal{F}_n(x_n, y_n) - \frac{1}{n} \leq \inf_{y \in Y} \mathcal{F}_n(x_n, y) := F_n(x_n). \quad (4.4)$$

On peut supposer que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} F_n(x_n) < +\infty$  de sorte que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n(x_n, y_n) < +\infty$ . Donc, par hypothèse, il existe une sous-suite  $(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)})$  et  $\hat{y}$  in  $\hat{Y}$  tels que  $x_{\sigma(n)}$  converge vers  $x$ , et  $y_{\sigma(n)}$   $\Theta$ -converge vers  $\hat{y}$ . De plus, comme  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma_{X, Y, \hat{Y}}$ -converge vers  $\mathcal{F}$ , on a

$$\mathcal{F}(x, \hat{y}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}).$$

Puisque d'après (4.4) on a  $F_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) \geq \mathcal{F}_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}) - \frac{1}{\sigma(n)}$ , il vient

$$F(x) \leq \mathcal{F}(x, \hat{y}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}).$$

Pour simplifier les notations, on écrit  $n$  plutôt que  $\sigma(n)$  dans la suite. Soit  $(\hat{y}_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\hat{Y}$  telle que

$$F(x) = \inf_{\hat{y} \in \hat{Y}} \mathcal{F}(x, \hat{y}) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(x, \hat{y}_p). \quad (4.5)$$

En combinant (i) et (ii) dans la définition 4.2, pour tout  $p$  fixé, il existe une suite  $((x_n^p, y_{p,n}))_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $X \times Y$  telle que

$$\begin{cases} x_n^p \rightarrow x \\ y_{p,n} \xrightarrow{\Theta} \hat{y}_p \end{cases}$$

et vérifiant

$$\mathcal{F}(x, \hat{y}_p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_n(x_n^p, y_{p,n}). \quad (4.6)$$

On déduit de (4.5) et (4.6) que

$$F(x) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_n(x_n^p, y_{p,n}).$$

On termine par une diagonalisation (lemme 1.1) : il existe une application  $n \mapsto p(n)$  qui satisfait  $p(n) \rightarrow +\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  pour laquelle on a

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_n(x_n^{p(n)}, y_{p(n),n}) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(x_n^{p(n)}).$$

La suite définie par  $x_n = x_n^{p(n)}$  satisfait alors l'assertion (ii) de la définition 4.2 ce qui achève la démonstration de (i). La preuve de l'assertion (ii) est similaire.  $\square$

## 4.2 Application : le matériau dans la couche mince subit des transformations de phase

### 4.2.1 Reformulation du problème et résultat

Nous reprenons le problème en modifiant légèrement la présentation :  $\Omega$ , configuration de référence de la structure, est un domaine de  $\mathbb{R}^3$ , et on pose  $\Omega^\pm = \Omega \cap [\pm x_3 > 0]$ , de sorte que  $S := \{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-\}^\circ$  (l'intérieur de l'intersection des frontières  $\partial\Omega^+$  et  $\partial\Omega^-$ ) est toujours inclus dans le plan  $[x_3 = 0]$ . Pour simplifier les démonstrations, on suppose que l'épaisseur de la couche mince est  $\varepsilon$ , et donc  $B_\varepsilon := S \times ]\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[$  est la configuration de référence du matériau de rigidité d'ordre  $\frac{1}{\varepsilon}$  et on pose  $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus B_\varepsilon$ , qui est la configuration de référence du matériau de rigidité d'ordre 1. On rappelle que la structure est fixée sur la partie  $\Gamma_0$  de la frontière et on suppose maintenant que  $\Gamma_0$  et  $\bar{S}$  sont d'intersection non vide. Ceci va nous permettre d'exploiter la deuxième fonction marginale de la fonctionnelle limite  $\nu \mapsto \inf_u \mathcal{F}(u, \nu)$ . A partir de maintenant, on n'opère que le changement de coordonnées  $(\hat{x}, x_3) = (\hat{x}, \varepsilon y_3)$  transformant  $(\hat{x}, x_3) \in B_\varepsilon$  en  $(\hat{x}, y_3) \in B := S \times ]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

Conformément à la définition 1.5, on introduit les ensembles de mesures de Young  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  et  $\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  suivants :

$$\begin{aligned} \mu \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B) &\Leftrightarrow \mu \in \mathbf{M}^+(B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}) \text{ et } P_B \# \mu = \mathcal{L}, \\ \nu \in \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S) &\Leftrightarrow \nu \in \mathbf{M}^+(S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}) \text{ et } P_S \# \nu = \hat{\mathcal{L}} \end{aligned}$$

où  $P_B\#\mu$  (resp.  $P_S\#\nu$ ) est l'image de la mesure  $\mu$  (resp.  $\nu$ ) par la projection  $P_B : B \times \mathbf{M}^{3 \times 3} \rightarrow B$  (resp.  $P_S : S \times \mathbf{M}^{3 \times 2} \rightarrow S$ ) et  $\mathcal{L}$  (resp.  $\hat{\mathcal{L}}$ ) la mesure de Lebesgue dans  $B$  (resp.  $S$ ). Pour toute mesure de probabilité  $\mathbf{P}$  sur  $\mathbf{M}^{3 \times 3}$  ou  $\mathbf{M}^{3 \times 2}$ , on note  $\text{bar}(\mathbf{P})$  son barycentre, i.e.  $\text{bar}(\mathbf{P}) = \int \lambda \, d\mathbf{P}(\lambda)$ .

On note  $\nabla\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  (resp.  $\hat{\nabla}\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ ) l'ensemble des mesures de Young générées par les gradients de fonctions de  $W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  (resp.  $W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$ ).

Afin de prendre en compte les oscillations de la suite  $(\nabla u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  dans la couche mince, on réécrit dans un premier temps l'énergie  $\frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} g(\nabla u) \, dx$  en terme de mesure de Young de sorte que le problème limite rend compte de microstructures bidimensionnelles. Puisque le comportement de la couche mince est très différent de celui du reste de la structure, on réécrit la fonctionnelle  $F_\varepsilon$  en terme de deux arguments :  $u$ , le déplacement dans  $\Omega$ , et  $v$ , le déplacement dans  $B_\varepsilon$ . Ceci nous conduit à considérer la fonctionnelle

$$\mathcal{G}_\varepsilon : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\mathcal{G}_\varepsilon(u, v) := \begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\nabla u) \, dx + \int_B g(\hat{\nabla}v | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_3}) \, dx & \text{si } (u, v) \in \mathcal{A}_\varepsilon, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\mathcal{A}_\varepsilon := \{(u, v) \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3) : 1_B r_\varepsilon u = v\}$  et  $r_\varepsilon u(\hat{x}, y_3) := u(\hat{x}, \varepsilon y_3)$  pour tout  $(\hat{x}, y_3) \in B$ .

On reformule alors la fonctionnelle  $\mathcal{G}_\varepsilon$  en terme d'un couple déplacement/mesure de Young en introduisant la fonctionnelle :

$$\mathcal{F}_\varepsilon : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u, \mu) := \begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\nabla u) \, dx + \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} g(\hat{\lambda} | \frac{1}{\varepsilon} \lambda_3) \, d\mu + I_\varepsilon(u, \mu) & \text{if } u \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

où

$$I_\varepsilon(u, \mu) := \begin{cases} 0 & \text{si } \mu = \delta_{\nabla v(x)} \otimes dx, v = 1_B r_\varepsilon u \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctionnelles  $\mathcal{G}_\varepsilon$  et  $\mathcal{F}_\varepsilon$  sont identiques dans leurs domaines et il est équivalent d'identifier la limite variationnelle de  $\mathcal{F}_\varepsilon$  et de  $F_\varepsilon$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \inf_{u \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)} \left( F_\varepsilon(u) - L(u) \right) &= \inf_{(u,v) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3)} \left( \mathcal{G}_\varepsilon(u, v) - L(u) \right) \\ &= \inf_{(u,\mu) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)} \left( \mathcal{F}_\varepsilon(u, \mu) - L(u) \right). \end{aligned}$$

Mais la formulation en termes de mesures de Young va permettre de décrire la microstructure à la limite (voir section 4.2.5).

Afin d'étudier la  $\Gamma_{X,Y,\hat{Y}}$ -convergence de la suite  $\mathcal{F}_\varepsilon$ , on définit l'opérateur

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B) &\rightarrow \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S) \\ \mu = \mu_x \otimes dx &\mapsto \nu = \left( \int_{-1/2}^{1/2} \hat{\mu}_{\hat{x},s} ds \right) \otimes d\hat{x} \end{aligned}$$

où  $\hat{\mu}_x = P_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \# \mu_x$ ,  $x \in \Omega$ , est la projection de la mesure  $\mu_x$  sur l'ensemble des matrices  $3 \times 2$  et  $\int_{-1/2}^{1/2} \hat{\mu}_{\hat{x},s} ds$  est la mesure de probabilité paramétrée par  $\hat{x} \in S$ , qui opère sur toute fonction  $\varphi \in C_0(\mathbf{M}^{3 \times 2})$  (l'espace des fonctions continues sur  $\mathbf{M}^{3 \times 2}$  qui tendent vers zéro à l'infini) de la façon suivante :

$$\left\langle \int_{-1/2}^{1/2} \hat{\mu}_{\hat{x},s} ds, \varphi \right\rangle := \int_{-1/2}^{1/2} \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \varphi(\hat{\lambda}) d\hat{\mu}_{\hat{x},s} ds.$$

Etant donné une suite  $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  dans l'espace  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  muni de la convergence étroite et  $\nu \in \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ , en accord avec la définition 4.1 on a

$$\mu_\varepsilon \xrightarrow{\Theta} \nu \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B) \text{ tel que } \begin{cases} \mu_\varepsilon \xrightarrow{\text{nar}} \mu \\ \nu = \Theta(\mu) \end{cases}$$

et pour  $(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$ , et  $(v, \nu)$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  :

$$(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \xrightarrow{I \times \Theta} (v, \nu) \Leftrightarrow \begin{cases} v_\varepsilon \rightarrow v \text{ dans } L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \\ \mu_\varepsilon \xrightarrow{\Theta} \nu. \end{cases}$$

Considérons la fonctionnelle définie par

$$\mathcal{F} : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\mathcal{F}(u, \nu) := \begin{cases} \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx + \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu + I(u, \nu) & \text{si } u \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \\ & \gamma_S(u) \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$I(u, \nu) := \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \in \hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S), \text{ bar}(\nu_{\hat{x}}) = \hat{\nabla} \gamma_S(u)(\hat{x}) \text{ pp dans } S. \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, en posant  $X = L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $Y = \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  et  $\hat{Y} = \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ , on a

**Théorème 4.2.** *La suite de fonctionnelles  $(\mathcal{F}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$   $\Gamma_{X,Y,\hat{Y}}$ -converge vers la fonctionnelle  $\mathcal{F}$ .*

Le résultat principal qui découle de ce théorème est énoncé dans le corollaire suivant :

**Corollaire 4.1.** *La suite  $(\mathcal{F}_\varepsilon - L)_{\varepsilon > 0}$   $\Gamma_{X,Y,\hat{Y}}$ -converge vers la fonctionnelle  $\mathcal{F} - L$ . De plus, si  $(\bar{u}_\varepsilon, \bar{\mu}_\varepsilon) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  est un  $\varepsilon$ -minimiseur de  $\mathcal{F}_\varepsilon - L$ , c'est-à-dire,*

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon, \bar{\mu}_\varepsilon) - L(\bar{u}_\varepsilon) \leq \varepsilon + \inf_{(u,\mu) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)} \left( \mathcal{F}_\varepsilon(u, \mu) - L(u) \right),$$

alors il existe une sous-suite de  $((\bar{u}_\varepsilon, \bar{\mu}_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  convergeant vers  $(\bar{u}, \bar{\nu})$  qui est un minimiseur de  $\inf_{(u,\nu) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} \left( \mathcal{F}(u, \nu) - L(u) \right)$ , et  $\gamma_S(\bar{u})$  appartient à  $W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  et pp  $\hat{x} \in S$   $\text{bar}(\bar{\nu}_{\hat{x}}) = \hat{\nabla} \gamma_S(\bar{u})(\hat{x})$ .

On montre alors que si  $(\bar{u}, \bar{\nu})$  est un minimiseur de  $\mathcal{F} - L$ ,  $\bar{u}$  est un minimiseur de  $F - L$ , l'énergie limite du problème classique, et on a la relation

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}\gamma_S(\bar{u})(\hat{x}) &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} \, d\bar{\nu}_{\hat{x}}; \\ Qg_0(\hat{\nabla}\gamma_S(\bar{u})(\hat{x})) &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}_{\hat{x}}.\end{aligned}$$

Ces résultats seront énoncés et démontrés dans la section 4.2.5. La démonstration du théorème 4.2 est constituée des deux propositions relatives aux assertions (i) et (ii') dans la définition de la  $\Gamma$ -convergence :

**Proposition 4.2** ( $\Gamma$ -liminf). *Soit  $(u, \nu) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ . Alors, pour toute suite  $((u_\varepsilon, \mu_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  d'éléments de  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  qui converge vers  $(u, \nu)$ , on a*

$$\mathcal{F}(u, \nu) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon).$$

**Proposition 4.3** ( $\Gamma$ -limsup). *Pour tout  $(u, \nu) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ , il existe une suite  $((u_\varepsilon, \mu_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  qui converge vers  $(u, \nu)$  et satisfait*

$$\mathcal{F}(u, \nu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon).$$

Ces deux propositions sont démontrées aux paragraphes 4.2.3 et 4.2.4 respectivement. Avant cela, on établit le résultat de compacité pour les suites  $((u_\varepsilon, \mu_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  d'énergie finie.

## 4.2.2 Lemme de compacité

**Lemme 4.1** (Compacité). *Soit  $((u_\varepsilon, v_\varepsilon, \mu_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  une suite dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  satisfaisant  $\sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon) < +\infty$ . Alors, il existe  $(u, v) \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$ ,  $\nu \in \hat{\nabla}\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  et une sous-suite non renommée tels que*

- i)  $u_\varepsilon \rightharpoonup u$  faiblement dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et fortement dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $v_\varepsilon \rightharpoonup v$  faiblement dans  $W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  et fortement dans  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$  ;*
- ii)  $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y_3} \rightarrow 0$  fortement dans  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y_3} = 0$  et  $v \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  ;*
- iii)  $\gamma_S(u) = v$  sur  $S$  où  $\gamma_S$  désigne l'opérateur trace de  $W^{1,p}(\Omega \setminus S, \mathbb{R}^3)$  dans  $L^p(S)$  ;*
- iv)  $(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \xrightarrow{I \times \Theta} (u, \nu)$ , avec  $\nu = \mathcal{A}(\mu)$  où  $\mu = (\hat{\mu}_x \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx$  et  $\hat{\mu} := \hat{\mu}_x \otimes dx$  est la mesure de Young générée par  $(\hat{\nabla}v_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ . De plus, on a la relation suivante :  $\text{bar}(\nu_{\hat{x}}) = \hat{\nabla}\gamma_S(u)(\hat{x})$  pp  $\hat{x} \in S$ .*

*Démonstration.* Preuve de *i)* et *ii)*. Les propositions *i)* *ii)* sont une conséquence directe des conditions de coercivité de  $f^\pm$  et  $g$ , de l'inégalité de Poincaré, du théorème de Rellich-Kondrakov et de l'isométrie entre  $W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  et  $\{v \in W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3) : \frac{\partial v}{\partial y_3} = 0\}$ .

Preuve de *iii)*. Puisque  $\sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) < +\infty$ ,  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{A}_\varepsilon$  et donc  $\gamma_S(u_\varepsilon) = \gamma_S(v_\varepsilon)$ . Les convergences  $u_\varepsilon \rightharpoonup u$  dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et  $v_\varepsilon \rightharpoonup v$  dans  $W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  et la continuité de l'opérateur trace de  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , respectivement  $W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$ , dans  $L^p(S, \mathbb{R}^3)$  donnent le résultat.

Preuve de *iv)*. Puisque  $\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon) < +\infty$ , on a  $\mu_\varepsilon = \delta_{\nabla v_\varepsilon(x)} \otimes dx$  et  $\sup_{\varepsilon > 0} \int_B |\nabla v_\varepsilon|^p dx < +\infty$  de sorte que les suites de mesures de Young  $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  et  $(\delta_{\nabla v_\varepsilon(x)} \otimes dx)_{\varepsilon > 0}$  sont tendues.

D'après le théorème de Prokhorov (théorème 1.8), on en déduit qu'il existe une sous-suite non renommée et  $\mu \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$ ,  $\hat{\mu} \in \mathcal{Y}_{3 \times 2}(B)$  tels que

$$\mu_\varepsilon = \delta_{\nabla v_\varepsilon(x)} \otimes dx \xrightarrow{\text{naf}} \mu, \quad \delta_{\hat{\nabla} v_\varepsilon(x)} \otimes dx \xrightarrow{\text{naf}} \hat{\mu}. \quad (4.7)$$

D'autre part, d'après *ii*),

$$\delta_{\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3}(x)} \otimes dx \xrightarrow{\text{naf}} \delta_{0_{\mathbb{R}^3}} \otimes dx. \quad (4.8)$$

En associant (4.7) et (4.8) on en déduit facilement que  $\mu_x = \hat{\mu}_x \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}$ , et en posant  $\nu = \nu_{\hat{x}} \otimes d\hat{x}$  où  $\nu_{\hat{x}} := \int_{-1/2}^{1/2} \hat{\mu}_{\hat{x},s} ds$ , on obtient finalement  $\mu_\varepsilon \xrightarrow{\Theta} \nu$ .

Nous montrons maintenant que  $\nu$  appartient à  $\hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ . Selon le théorème de caractérisation de Kinderlehrer-Pedregal (théorème 1.9), nous devons montrer les trois propositions suivantes :

(KP)<sub>1</sub> il existe  $w \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  tel que  $\text{bar}(\nu_{\hat{x}}) = \hat{\nabla} w(\hat{x})$  pp  $x \in S$  ;

(KP)<sub>2</sub>  $\int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} |\hat{\lambda}|^p d\nu_{\hat{x}} < +\infty$  pp  $x \in S$  ;

(KP)<sub>3</sub> pour toute fonction quasi-convexe  $\phi$  satisfaisant une condition de croissance d'ordre  $p$ ,

$$\phi(\mathbf{E}(\nu_{\hat{x}})) \leq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \phi(\hat{\lambda}) d\nu_{\hat{x}} \quad \text{pp } \hat{x} \in S.$$

*Preuve de (KP)<sub>1</sub>* : On déduit de *i*) et des propriétés classiques des mesures de Young que  $\hat{\nabla} v(x) = \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} d\hat{\mu}_x$  pp  $x \in B$  et comme  $\frac{\partial v}{\partial x_3} = 0$ ,

$$\hat{\nabla} v(\hat{x}) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} d\hat{\mu}_{\hat{x},s} ds = \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} d\nu_{\hat{x}}$$

pp  $\hat{x}$  dans  $S$  donc  $v$  est la fonction de Sobolev  $w$  qui convient.

*Preuve de (KP)<sub>2</sub>* : D'après la définition de  $\nu_{\hat{x}}$  et la semi-continuité des mesures de Young (proposition 1.4), on a

$$\begin{aligned} \int_S \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} |\hat{\lambda}|^p d\nu_{\hat{x}} d\hat{x} &= \int_B \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} |\hat{\lambda}|^p d\hat{\mu}_x dx \\ &= \int_B \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} |\hat{\lambda}|^p (d\hat{\mu}_x \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) dx \\ &= \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} |\hat{\lambda}|^p d\mu \leq \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} |\lambda|^p d\mu \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B |\nabla v_\varepsilon|^p dx \leq \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon) < +\infty \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} |\hat{\lambda}|^p d\nu_{\hat{x}}$  est finie pp  $\hat{x}$  dans  $S$ .

*Preuve de (KP)<sub>3</sub>* : Soit  $\phi : \mathbf{M}^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quasi-convexe vérifiant une condition de croissance d'ordre  $p$ . On définit la fonction  $\tilde{\phi} : \mathbf{M}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\tilde{\phi}(\lambda) = \phi(\hat{\lambda})$ . La fonction  $\tilde{\phi}$  est quasi-convexe et vérifie la même condition de croissance. Puisque  $\mu \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$ , pp  $x$

dans  $B$ , on a

$$\begin{aligned}\phi(\hat{\nabla}v(\hat{x})) = \tilde{\phi}(\nabla v(x)) &\leq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} \tilde{\phi}(\lambda) d\mu_x \\ &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} \phi(\hat{\lambda}) d\hat{\mu}_x \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}} = \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \phi(\hat{\lambda}) d\hat{\mu}_x\end{aligned}$$

et donc pp  $\hat{x}$  dans  $S$

$$\phi(\hat{\nabla}v(\hat{x})) = \int_{-1/2}^{1/2} \phi(\hat{\nabla}v(\hat{x})) ds \leq \int_{-1/2}^{1/2} \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \phi(\hat{\lambda}) d\hat{\mu}_{\hat{x},s} ds = \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \phi(\hat{\lambda}) d\nu_{\hat{x}}. \quad \square$$

### 4.2.3 $\Gamma$ -liminf

Démontrons la proposition 4.2. On suppose  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon) < +\infty$ . Par conséquent, d'après le lemme 4.1, on a

$$\begin{aligned}u &\in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3); \\ \nu &\in \hat{\nabla}\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S); \text{ bar}(\nu_{\hat{x}}) = \hat{\nabla}\gamma_S(u)(\hat{x}) \text{ pp } \hat{x} \in S.\end{aligned}$$

On en déduit que  $I(u, \nu) = 0$  et il suffit de montrer les deux estimations suivantes :

$$\int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g(\hat{\nabla}v_\varepsilon | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3}) dx; \quad (4.9)$$

$$\int_\Omega Qf(\nabla u) dx \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\nabla u_\varepsilon) dx. \quad (4.10)$$

*Preuve de (4.9) :* D'après la propriété de semi-continuité inférieure des mesures de Young et la proposition *iv*) du lemme 4.1, il vient

$$\begin{aligned}\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} g(\hat{\lambda} | \frac{1}{\varepsilon} \lambda_3) d\mu_\varepsilon &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} g_0(\hat{\lambda}) d\mu_\varepsilon \\ &\geq \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} g_0(\hat{\lambda}) d\mu \\ &= \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} g_0(\hat{\lambda}) d(\hat{\mu}_x \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx \\ &= \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu_{\hat{x}} \otimes d\hat{x} = \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu.\end{aligned}$$

*Preuve de (4.10) :* Soit  $\eta > \varepsilon$  fixé. On a

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f(\nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_\eta} f(\nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_\eta} Qf(\nabla u_\varepsilon) dx$$

et grâce à la semi-continuité inférieure de  $w \mapsto \int_{\Omega_\eta} Qf(\nabla w) dx$  pour la convergence faible dans  $W^{1,p}(\Omega_\eta, \mathbb{R}^3)$ , on déduit que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_\eta} Qf(\nabla u) dx.$$

On obtient le résultat en passant à la limite lorsque  $\eta \rightarrow 0$ .

#### 4.2.4 $\Gamma$ -limsup

Nous démontrons dans cette section la proposition 4.3. Pour cela nous aurons besoin du lemme de relaxation suivant :

**Lemme 4.2.** *Soient  $(u, \nu) \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  vérifiant  $\hat{\nabla} \gamma_S(u)(\hat{x}) = \text{bar}(\nu_{\hat{x}})$  pp  $\hat{x} \in S$  et une suite  $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  telle que  $u_n$  converge faiblement vers  $u$  dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $\delta_{\hat{\nabla} v_n(\hat{x})} \otimes dx \xrightarrow{\text{nar}} \nu$  dans  $\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  et*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx &= \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S g_0(\hat{\nabla} v_n) d\hat{x} &= \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Alors, il existe une suite  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui satisfait les mêmes conditions que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mais vérifie de plus  $\gamma_S(\tilde{u}_n) = v_n$ .

*Démonstration.* Le principe de la démonstration est le même que pour le lemme 3.3, chapitre 3. D'après les résultats classiques de relaxation (voir par exemple [9], théorème 11.2.1 et théorème 11.4.2.), une telle suite  $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  existe et on peut même supposer que  $(|\nabla u_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$  est uniformément intégrable. On va modifier la fonction  $u_n$  au voisinage de  $S$  afin qu'elle vérifie  $\gamma_S(u_n) = v_n$ . Comme au chapitre précédent, la fonction  $v_n$  est aussi bien considérée comme une fonction de  $W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  qu'une fonction de  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  telle que  $\frac{\partial v_n}{\partial x_3} = 0$ .

La coercivité de  $g_0$  entraîne que  $\int_S |\hat{\nabla} v_n|^p d\hat{x}$  est bornée, donc  $v_n$  converge fortement dans  $L^p(S, \mathbb{R}^3)$  vers une fonction  $v$  qui vérifie  $\hat{\nabla} v(\hat{x}) = \text{bar}(\nu_{\hat{x}})$  pp  $\hat{x} \in S$ . Alors, on a bien  $\gamma_S(u) = v$ . Soit  $\eta > 0$  destiné à tendre vers 0 et soit  $\Sigma_\eta := S \times (-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2})$ . On va modifier  $u_n$  dans  $\Sigma_\eta$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  telle que

$$\begin{aligned} \varphi_\eta &= 1 \text{ on } \Omega \setminus \Sigma_{2\eta}, \quad \varphi_\eta = 0 \text{ on } \Sigma_\eta, \quad 0 \leq \varphi_\eta \leq 1, \\ |\nabla \varphi_i| &\leq \frac{1}{\eta}. \end{aligned}$$

On pose

$$u_{n,\eta} = \varphi_\eta(u_n - v_n) + v_n. \quad (4.12)$$

Bien sûr  $u_{n,\eta}$  appartient à  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et  $\gamma_s(u_{n,\eta}) = v_n$ . De plus

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta}) dx &= \int_{\Sigma_\eta} f(\nabla u_{n,\eta}) dx + \int_{\Sigma_{2\eta} \setminus \Sigma_\eta} f(\nabla u_{n,\eta}) dx + \int_{\Omega \setminus \Sigma_{2\eta}} f(\nabla u_{n,\eta}) dx \\ &\leq \int_{\Sigma_\eta} f(\nabla v_n) dx + \int_{\Sigma_{2\eta} \setminus \Sigma_\eta} f(\nabla u_{n,\eta}) dx + \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx. \end{aligned}$$

Donc d'après la condition de croissance qui découle de (1.15),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta}) dx &\leq C \left( \eta + \frac{1}{\eta^p} \int_{\Sigma_{2\eta}} |u_n - v_n|^p dx + \int_{\Sigma_{2\eta}} (|\nabla u_n|^p) dx \right) \\ &\quad + \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx \end{aligned}$$

où  $C$  désigne différentes constantes positives dépendant de  $\beta, p$  and  $\Omega$ . En passant à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on déduit de (4.11) :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta}) \, dx &\leq C \left( \eta + \frac{1}{\eta^p} \int_{\Sigma_{2\eta}} |u - v|^p \, dx + \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Sigma_{2\eta}} (|\nabla u_n|^p) \, dx \right) \\ &+ \int_{\Omega} Qf(\nabla u) \, dx. \end{aligned}$$

Et comme  $\gamma_S(u) = v$ , on a l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\int_{\Sigma_{2\eta}} |u - v|^p \, dx \leq \eta^p \int_{\Sigma_{2\eta}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right|^p \, dx.$$

Donc, grâce à l'uniforme intégrabilité de  $(|\nabla u_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ , on obtient lorsque  $\eta \rightarrow 0$

$$\limsup_{\eta \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta}) \, dx \leq \int_{\Omega} Qf(\nabla u) \, dx.$$

On termine en diagonalisant (lemme 1.1) : il existe une application  $n \mapsto \eta(n)$  telle que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta(n)}) \, dx \leq \int_{\Omega} Qf(\nabla u) \, dx.$$

On montre de même que la suite  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\tilde{u}_n = u_{n,\eta(n)}$  converge fortement vers  $u$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Revenons à la démonstration de la proposition 4.3. Soit  $(u, \nu) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ . On veut montrer qu'il existe  $(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \xrightarrow{I \times \Theta} (u, \nu)$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  satisfaisant

$$\mathcal{F}(u, \nu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon).$$

On suppose bien sûr que  $\mathcal{F}(u, \nu) < +\infty$  donc  $(u, \nu) \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ . On sait qu'il existe  $v_n \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  tel que  $(|\hat{\nabla} v_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$  est uniformément intégrable et  $\delta_{\hat{\nabla} v_n(\hat{x})} \otimes d\hat{x} \xrightarrow{\text{nar}} \nu$  dans  $\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  (proposition 1.6). On a aussi

$$(\delta_{\hat{\nabla} v_n(\hat{x})} \otimes \delta_{\mathbb{R}^3}) \otimes dx \xrightarrow{\text{nar}} (\nu_{\hat{x}} \otimes \delta_{\mathbb{R}^3}) \otimes dx \quad (4.13)$$

dans  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Comme  $g_0$  vérifie une condition d'ordre  $p$ , on a (proposition 1.5)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S g_0(\hat{\nabla} v_n) \, d\hat{x} = \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\nu.$$

Mais on a vu au chapitre précédent que

$$\int_S g_0(\hat{\nabla} v_n) \, d\hat{x} = \inf_{\xi \in \mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)} \int_S g(\hat{\nabla} v_n | \xi) \, d\hat{x}.$$

Soit  $\xi_n \in \mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$\left| \int_S g(\hat{\nabla} v_n | \xi_n) \, d\hat{x} - \int_S g_0(\hat{\nabla} v_n) \, d\hat{x} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S g(\hat{\nabla} v_n | \xi_n) d\hat{x} = \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu. \quad (4.14)$$

Considérons la fonction  $v_{n,\varepsilon}$  de  $W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  définie par

$$v_{n,\varepsilon}(x) = v_n(\hat{x}) + \varepsilon x_3 \xi_n(\hat{x}).$$

Pour  $n$  fixé, on montre que

$$\mu_{n,\varepsilon} := \delta_{\nabla v_{n,\varepsilon}(x)} \otimes dx \xrightarrow{\text{nar}} (\delta_{\hat{\nabla} v_n(\hat{x})} \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx \quad (4.15)$$

dans  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En effet, posons  $\tilde{v}_n(x) := v_n(\hat{x})$ . Alors  $\nabla v_{n,\varepsilon} - \nabla \tilde{v}_n \rightarrow 0$  fortement dans  $L^p(B, \mathbf{M}^{3 \times 3})$ , donc  $\nabla v_{n,\varepsilon}$  et  $\nabla \tilde{v}_n$  génèrent la même mesure de Young  $(\delta_{\hat{\nabla} v_n(\hat{x})} \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx$  dans  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$ .

D'autre part, d'après le résultat classique de relaxation dans les espaces de Sobolev, il existe  $u_n \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  qui converge fortement vers  $u$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx = \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx \quad (4.16)$$

et on peut modifier  $u_n$  au voisinage de  $S$  de sorte que  $\gamma_S(u_n) = v_n$  (lemme 4.2). Soit  $\eta > \varepsilon$  et soit  $u_{n,\varepsilon,\eta}$  la fonction définie pour tout  $x$  de  $\Omega$  par

$$u_{n,\varepsilon,\eta}(\hat{x}, x_3) := \theta(x_3) v_{n,\varepsilon}(\hat{x}, \frac{x_3}{\varepsilon}) + (1 - \theta(x_3)) u_n(\hat{x}, x_3)$$

où  $\theta$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  telle que  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $|\frac{\partial \theta}{\partial x_3}| \leq \frac{1}{\eta - \varepsilon}$  et

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{in } B_\varepsilon \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus B_\eta. \end{cases}$$

Pour alléger les notations, on ne précise pas la dépendance pour  $\theta$  en  $\eta$  et  $\varepsilon$ . La fonction  $v_{n,\varepsilon,\eta}$  appartient à  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et  $r_\varepsilon u_{n,\varepsilon,\eta} = v_{n,\varepsilon}$  dans  $B$ . La fonction  $g$  étant localement Lipschitzienne (1.15), on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g(\hat{\nabla} v_{n,\varepsilon} | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_{n,\varepsilon}}{\partial x_3}) dx = \int_S g(\hat{\nabla} v_n | \xi_n) d\hat{x}. \quad (4.17)$$

Ecrivons

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f(\nabla u_{n,\varepsilon,\eta}) dx = \int_{\Omega \setminus B_\eta} f(\nabla u_n) dx + \int_{B_\eta \setminus B_\varepsilon} f(\nabla u_{n,\varepsilon,\eta}) dx. \quad (4.18)$$

On montre que  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\eta \setminus B_\varepsilon} f(\nabla u_{n,\varepsilon,\eta}) dx = 0$ . En effet, puisque

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} u_{n,\varepsilon,\eta} &= \theta(\hat{\nabla} v_n + x_3 \hat{\nabla} \xi_n) + (1 - \theta) \hat{\nabla} u_n \\ \frac{\partial u_{n,\varepsilon,\eta}}{\partial x_3} &= \frac{\partial \theta}{\partial x_3} (v_n - u_n) + x_3 \xi_n \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + \theta \xi_n + (1 - \theta) \frac{\partial u_n}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} & \left| \int_{B_\eta \setminus B_\varepsilon} f(\nabla u_{n,\varepsilon,\eta}) \, dx \right| \leq C \left( \int_{B_\eta \setminus B_\varepsilon} h(\xi_n, \hat{\nabla} \xi_n, \hat{\nabla} u_n, \hat{\nabla} v_n \frac{\partial u_n}{\partial x_3}) \, dx \right. \\ & + \left. \int_{B_\eta \setminus B_\varepsilon} \left| \frac{\partial \theta}{x_3} \right|^p |v_n - u_n|^p \, dx + \int_{B_\eta \setminus B_\varepsilon} |x_3 \xi_n \frac{\partial \theta}{x_3}|^p \, dx \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

où  $h$  est intégrable et ne dépend ni de  $\varepsilon$  ni de  $\eta$ . Le premier terme dans (4.19) converge donc vers 0 quand  $\varepsilon$  puis  $\eta$  tend vers 0. Estimons les deux autres termes. Comme  $\gamma_S(u_n) = v_n$ , l'inégalité de Poincaré entraîne

$$\begin{aligned} \int_{B_\eta \setminus B_\varepsilon} \left| \frac{\partial \theta}{x_3} \right|^p |v_n - u_n|^p \, dx & \leq \frac{1}{(\eta - \varepsilon)^p} \int_{B_\eta} |v_n - u_n|^p \, dx \\ & \leq \frac{\eta^p}{(\eta - \varepsilon)^p} \int_{B_\eta} |\nabla(v_n - u_n)|^p \, dx \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque  $\varepsilon$  puis  $\eta$  tend 0. D'autre part,

$$\int_{B_\eta \setminus B_\varepsilon} |x_3 \xi_n \frac{\partial \theta}{x_3}|^p \, dx \leq \frac{\eta^p}{(\eta - \varepsilon)^p} \int_{B_\eta} |\xi_n|^p \, dx$$

qui tend aussi vers 0. On obtient donc, en combinant (4.17), (4.18) et (4.19)

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_{n,\varepsilon,\eta}, \mu_{n,\varepsilon}) = \int_\Omega f(\nabla u_n) \, dx + \int_S g(\hat{\nabla} v_n | \xi_n) \, d\hat{x}.$$

On termine par une diagonalisation. Il existe une application  $\varepsilon \mapsto \eta(\varepsilon)$  vérifiant  $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et, en posant  $u_{n,\varepsilon} := u_{n,\varepsilon,\eta(\varepsilon)}$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_{n,\varepsilon}, \mu_{n,\varepsilon}) = \int_\Omega f(\nabla u_n) \, dx + \int_S g(\hat{\nabla} v_n | \xi_n) \, d\hat{x} \quad (4.20)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Il reste à montrer que  $u_{n,\varepsilon}$  converge fortement vers  $u_n$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . En revenant à la définition de  $u_{n,\varepsilon}$ , on peut écrire

$$\int_\Omega |u_{n,\varepsilon} - u_n|^p \, dx \leq \int_{B_{\eta(\varepsilon)}} |v_n + x_3 \xi_n - u_n|^p \, dx,$$

d'où le résultat.

En reprenant (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) et (4.20), on en déduit le schéma de convergence suivant :

$$\begin{aligned} \mu_{n,\varepsilon} & \xrightarrow{\text{nar}} (\delta_{\hat{\nabla} v_n(\hat{x})} \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx \xrightarrow{\text{nar}} (\nu_{\hat{x}} \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx; \\ u_{n,\varepsilon} & \rightarrow u_n \rightarrow u \text{ fortement dans } L^p(\Omega, \mathbb{R}^3); \\ \mathcal{F}_\varepsilon(u_{n,\varepsilon}, \mu_{n,\varepsilon}) & \rightarrow \int_\Omega f(\nabla u_n) \, dx + \int_S g(\hat{\nabla} v_n | \xi_n) \, d\hat{x} \\ & \rightarrow \int_\Omega Qf(\nabla u) \, dx + \int_S g_0(\hat{\lambda}) \, d\nu, \end{aligned}$$

où la première convergence a lieu pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  et la seconde pour  $n \rightarrow +\infty$ . Puisque l'ensemble  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  muni de la convergence étroite est à base dénombrable de voisinages (voir [23] proposition 2.3.1), en notant que  $\mathcal{A}((\nu_{\hat{x}} \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx) = \nu$ , on conclut en appliquant le lemme 1.1 à l'espace produit  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B) \times \mathbb{R}$ .

### 4.2.5 Reformulations du problème par les fonctionnelles marginales

Par l'étude des fonctions marginales de la fonctionnelle  $\mathcal{F}$ , on retrouve d'une part la fonctionnelle  $F$ , et donc la formulation du problème limite classique obtenu au chapitre 3 ; et on obtient d'autre part une autre formulation du problème où l'énergie de surface est relaxée en une condition de transmission sur  $S$ .

#### La formulation classique

Dans ce paragraphe, on retrouve le problème limite obtenu au chapitre 3 en montrant que la fonctionnelle énergie  $F$  est la fonction marginale de  $\mathcal{F}$  lorsque l'on considère la mesure de Young  $\nu$ , qui représente la microstructure de la couche intermédiaire, comme variable interne. On peut voir la formulation en terme de déplacement classique comme la version macroscopique du modèle obtenu dans ce chapitre.

Définissons les deux fonctionnelles

$$H_\varepsilon, H : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$H_\varepsilon(u) := \begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\nabla u) \, dx + \int_B g(\hat{\nabla} r_\varepsilon u | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial r_\varepsilon u}{\partial x_3}) \, dx & \text{si } u \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$H(u) := \begin{cases} \int_{\Omega} Qf(\nabla u) \, dx + \int_S Qg_0(\hat{\nabla} \gamma_S(u)) \, d\hat{x} & \text{si } u \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ & \gamma_S(u) \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est évident que quelque soit  $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,

$$H_\varepsilon(u) = \inf_{\mu \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)} \mathcal{F}_\varepsilon(u, \mu),$$

c'est-à-dire,  $H_\varepsilon$  est la fonction marginale associée à la fonctionnelle  $\mathcal{F}_\varepsilon$ . On montre dans la proposition suivante, que  $H$  est la fonction marginale associée à la fonctionnelle limite  $\mathcal{F}$ .

**Proposition 4.4.** *La fonction  $H$  est la fonction marginale associée à la fonctionnelle limite  $\mathcal{F}$  lorsque l'on considère la mesure de Young  $\nu$  comme variable interne, c'est-à-dire, pour tout  $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  on a*

$$H(u) = \inf_{\nu \in \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} \mathcal{F}(u, \nu).$$

*Démonstration.* Pour démontrer la proposition, nous introduisons les espaces suivants. Pour toute matrice  $\hat{A}$  de  $\mathbf{M}^{3 \times 2}$ , on définit  $\text{adm}(\hat{A})$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $\mathbf{M}^{3 \times 2}$  vérifiant :

$$\mathbf{P} \in \text{adm}(\hat{A}) \iff \begin{cases} \hat{A} = \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} \, d\mathbf{P} \\ \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} |\hat{\lambda}|^p \, d\mathbf{P} < +\infty \\ \phi(\hat{A}) \leq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \phi(\hat{\lambda}) \, d\mathbf{P} \end{cases}$$

pour toute fonction quasi-convexe  $\phi$  satisfaisant une condition de croissance d'ordre  $p$ . D'autre part, pour toute fonction  $u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  fixée telle que  $\gamma_S(u) \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$ , on considère  $\text{Adm}(u)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  défini par :

$$\nu \in \text{Adm}(u) \iff \begin{cases} \nu \in \hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S); \\ \text{bar}(\nu_{\hat{x}}) = \hat{\nabla} \gamma_S(u)(\hat{x}) \text{ pp } \hat{x} \in S. \end{cases}$$

La démonstration repose sur un lemme de localisation.

**Lemme 4.3.** *On a*

$$(i) \inf \left\{ \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\mathbf{P} : \mathbf{P} \in \text{adm}(\hat{A}) \right\} = Qg_0(\hat{A}) \text{ pour tout } \hat{A} \in \mathbf{M}^{3 \times 2};$$

$$(ii) \inf_{\nu \in \text{Adm}(u)} \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu = \int_S \inf_{\mathbf{P} \in \text{adm}(\hat{\nabla} \gamma_S(u)(\hat{x}))} \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\mathbf{P} \right) d\hat{x}.$$

*Démonstration du lemme 4.3. Preuve de (i).* Puisque  $Qg_0$  est quasi-convexe et satisfait une condition de croissance d'ordre  $p$ , pour tout  $\mathbf{P} \in \text{adm}(\hat{A})$  on a

$$\int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\mathbf{P} \geq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} Qg_0(\hat{\lambda}) d\mathbf{P} \geq Qg_0(\hat{A})$$

et donc  $\inf \left\{ \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\mathbf{P} : \mathbf{P} \in \text{adm}(\hat{A}) \right\} \geq Qg_0(\hat{A})$ . Montrons l'inégalité inverse. Posons  $\hat{Y} = ]0, 1]^2$ . Pour tout  $\psi \in W_0^{1,p}(\hat{Y}, \mathbb{R}^3)$  fixé, on définit la mesure de probabilité  $\mathbf{P}_\psi$  :

$$\mathbf{P}_\psi := \int_{\hat{Y}} \delta_{\hat{A} + \nabla \psi(\hat{y})} d\hat{y}$$

qui opère sur toute fonction continue  $\varphi : \mathbf{M}^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant une condition de croissance d'ordre  $p$  de la façon suivante :

$$\int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \varphi(\hat{\lambda}) d\mathbf{P}_\psi := \int_{\hat{Y}} \varphi(\hat{A} + \nabla \psi(\hat{y})) d\hat{y}.$$

Cette probabilité est admissible,  $\mathbf{P}_\psi \in \text{adm}(\hat{A})$ . En effet,

$$\int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} d\mathbf{P} = \int_{\hat{Y}} (\hat{A} + \nabla \psi(\hat{y})) d\hat{y} = \hat{A} + \int_{\hat{Y}} \nabla \psi(\hat{y}) d\hat{y} = \hat{A}$$

puisque  $\psi \in W_0^{1,p}(\hat{Y}, \mathbb{R}^3)$ . Evidemment,  $\int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} |\hat{\lambda}|^p d\mathbf{P} < +\infty$ , et pour toute fonction  $\phi$  quasi-convexe satisfaisant une condition de croissance d'ordre  $p$

$$\int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \phi(\hat{\lambda}) d\mathbf{P} = \int_{\hat{Y}} \phi(\hat{A} + \nabla \psi(\hat{y})) d\hat{y} \geq \phi(\hat{A}).$$

Par conséquent,

$$\mathcal{E}(\hat{A}) := \{\mathbf{P}_\psi : \psi \in W_0^{1,p}(\hat{Y}, \mathbb{R}^3)\} \subset \text{adm}(\hat{A}).$$

Il en découle que

$$\begin{aligned} \inf \left\{ \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\mathbf{P} : \mathbf{P} \in \text{adm}(\hat{A}) \right\} &\leq \inf \left\{ \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\mathbf{P} : \mathbf{P} \in \mathcal{E}(\hat{A}) \right\} \\ &= \inf_{\phi \in W_0^{1,p}(\hat{Y}, \mathbb{R}^3)} \int_{\hat{Y}} g_0(\hat{A} + \phi(\hat{y})) d\hat{y} \\ &= Qg_0(\hat{A}) \end{aligned}$$

par définition de l'enveloppe quasi-convexe pour les fonctions satisfaisant une condition de croissance d'ordre  $p$  (voir [29]).

*Preuve de (ii).* Puisque  $\nu \in \text{Adm}(u)$  entraîne  $\nu_{\hat{x}} \in \text{adm}(\hat{\nabla}\gamma_S(u)(\hat{x}))$ , on a

$$\inf_{\nu \in \text{Adm}(u)} \int_S \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu_{\hat{x}} d\hat{x} \geq \int_S \inf_{\mathbf{P} \in \text{adm}(\hat{\nabla}\gamma_S(u)(\hat{x}))} \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\mathbf{P} \right) d\hat{x}.$$

Inversement, pour tout  $\eta > 0$ , et  $\hat{x} \in S$ , soit  $\mathbf{P}_{\hat{x}}^\eta \in \text{adm}(\hat{\nabla}\gamma_S(u)(\hat{x}))$  tel que

$$\inf_{\mathbf{P} \in \text{adm}(\hat{\nabla}\gamma_S(u)(\hat{x}))} \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\mathbf{P} \right) \geq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\mathbf{P}_{\hat{x}}^\eta - \eta. \quad (4.21)$$

On peut supposer que l'application  $\hat{x} \mapsto \mathbf{P}_{\hat{x}}^\eta$  est mesurable (voir [24]). Posons  $\nu := \mathbf{P}_{\hat{x}}^\eta \otimes d\hat{x}$ . Puisque  $\mathbf{P}_{\hat{x}}^\eta \in \text{adm}(\hat{\nabla}\gamma_S(u)(\hat{x}))$ , la mesure  $\nu$  appartient à  $\text{Adm}(u)$ . Alors, (4.21) entraîne, puisque  $\eta$  est arbitraire,

$$\int_S \inf_{\mathbf{P} \in \text{adm}(\hat{\nabla}\gamma_S(u)(\hat{x}))} \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\mathbf{P} \right) d\hat{x} \geq \inf_{\nu \in \text{Adm}(u)} \int_S \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu_{\hat{x}} d\hat{x}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 4.3.  $\square$

*Retour à la démonstration de la proposition 4.4.* En appliquant les résultats du lemme 4.3 il vient

$$\begin{aligned} \inf_{\nu \in \mathcal{J}_{3 \times 2}(S)} \mathcal{F}(u, \nu) &= \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx + \inf_{\nu \in \text{Adm}(u)} \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu \\ &= \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx + \int_S \inf_{\mathbf{P} \in \text{adm}(\hat{\nabla}\gamma_S(u)(\hat{x}))} \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\mathbf{P} \right) d\hat{x} \\ &= \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx + \int_S Qg_0(\hat{\nabla}\gamma_S(u)) d\hat{x} \end{aligned}$$

donc  $H$  est la fonction marginale de la fonctionnelle  $\mathcal{F}$ .  $\square$

En combinant la proposition 4.4, le lemme 4.1 et le théorème 4.1, on retrouve le modèle non linéaire classique.

**Théorème 4.3.** *On munit l'espace  $X = L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  de la convergence forte. Alors, la suite de fonctionnelles  $(H_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$   $\Gamma_X$ -converge vers la fonctionnelle  $H$ . De plus, si  $\bar{u}_\varepsilon \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  est un  $\varepsilon$ -minimiseur de  $H_\varepsilon - L$ , c'est-à-dire,*

$$H_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) - L(\bar{u}_\varepsilon) \leq \varepsilon + \inf_{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)} \left( H_\varepsilon - L(u) \right),$$

*alors, il existe une sous-suite de  $(\bar{u}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  qui converge fortement dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et faiblement dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  vers un certain  $\bar{u}$  qui est une solution du problème non linéaire classique*

$$\inf_{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)} \left( H(u) - L(u) \right).$$

Soit  $(\bar{u}, \bar{\nu})$  une solution du problème  $\inf_{(u, \nu) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} (\mathcal{F}(u, \nu) - L(u))$ . On va voir qu'alors  $\bar{u}$  est une solution du problème non linéaire classique et que pour presque tout  $\hat{x}$  dans  $S$ ,  $\mathbf{E}\bar{\nu}_{\hat{x}}$ , le barycentre de la mesure  $\bar{\nu}_{\hat{x}}$ , fournit une description microscopique des quantités macroscopiques  $\hat{\nabla}\gamma_S(\bar{u})(\hat{x})$  et  $Qg_0(\hat{\nabla}\gamma_S(\bar{u})(\hat{x}))$ .

**Corollaire 4.2.** *Soit  $(\bar{u}, \bar{\nu})$  une solution de  $\inf_{(u, \nu) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} (\mathcal{F}(u, \nu) - L(u))$ , alors  $\bar{u}$  est une solution de  $\inf_{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)} (H(u) - L(u))$ . De plus, pour presque tout  $\hat{x}$  dans  $S$ , on a*

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}\gamma_S(\bar{u})(\hat{x}) &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} \, d\bar{\nu}_{\hat{x}}; \\ Qg_0(\hat{\nabla}\gamma_S(\bar{u})(\hat{x})) &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}_{\hat{x}}.\end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous commençons par montrer les deux inégalités. La première est immédiate puisque  $\bar{\nu} \in \text{Adm}(\bar{u})$ . De même, puisque  $\bar{\nu} \in \text{Adm}(\bar{u})$ , pour presque tout  $\hat{x}$  dans  $S$  on a

$$\begin{aligned}Qg_0(\hat{\nabla}\gamma_S(\bar{u})(\hat{x})) &\leq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} Qg_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}_{\hat{x}} \\ &\leq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}_{\hat{x}}.\end{aligned}$$

Pour démontrer l'inégalité inverse, nous devons localiser. Soit  $\hat{x}_0$  un point de  $S$  fixé, on considère le cylindre de  $\mathbb{R}^3$   $Q_\rho(\hat{x}_0) = \hat{Q}_\rho(\hat{x}_0) \times (-\rho, \rho)$ , où  $\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)$  est la boule de  $\mathbb{R}^2$  centrée en  $\hat{x}_0 \in S$  et de rayon  $\rho$ . On note  $\mathcal{F}_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0}$ ,  $\mathcal{F}^{\rho, \hat{x}_0}$ ,  $H_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0}$ ,  $H^{\rho, \hat{x}_0}$  les fonctionnelles  $\mathcal{F}_\varepsilon$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $H_\varepsilon$ ,  $H$  localisées en  $Q_\rho(\hat{x}_0)$ , où la contrainte  $u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  est remplacée par  $u \in \bar{u} + W_0^{1,p}(Q_\rho(\hat{x}_0), \mathbb{R}^3)$ . On montre facilement que  $(\bar{u}, \bar{\nu})$  restreint à  $Q_\rho(\hat{x}_0)$  est aussi une solution du problème localisé

$$\inf \left\{ \mathcal{F}^{\rho, \hat{x}_0}(u, \nu) : u \in L^p(Q_\rho(\hat{x}_0), \mathbb{R}^3), \nu \in \mathcal{Y}_{3 \times 2}(\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)) \right\}.$$

En suivant un raisonnement analogue à celui utilisé pour démontrer les théorèmes 4.2 et 4.3, on montre que  $\mathcal{F}_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0} \xrightarrow{\Gamma_{X, Y, \hat{Y}}} \mathcal{F}^{\rho, \hat{x}_0}$  et  $H_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0} \xrightarrow{\Gamma_X} H^{\rho, \hat{x}_0}$ . On déduit de la convergence variationnelle de  $H_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0}$  vers  $H^{\rho, \hat{x}_0}$ , qu'il existe une suite  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  qui converge fortement vers  $\bar{u}$  dans  $L^p(Q_\rho(\hat{x}_0), \mathbb{R}^3)$  telle que

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( H_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0}(u_\varepsilon) - L(u_\varepsilon) \right) \\ &= \int_{Q_\rho(\hat{x}_0)} Qf(\nabla \bar{u}) \, dx + \int_{\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)} Qg_0(\hat{\nabla}\gamma_S(\bar{u})) \, d\hat{x} - L(\bar{u}).\end{aligned}\tag{4.22}$$

D'autre part, d'après le théorème de Prokhorov,  $\mu_\varepsilon = \delta_{\nabla u_\varepsilon(x)} \otimes dx \xrightarrow{\Theta} \bar{\nu}$  où  $\bar{\nu}$  est une mesure de Young appartenant à  $\hat{\nabla}\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ . On déduit de la première convergence variationnelle  $\mathcal{F}_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0} \xrightarrow{\Gamma_{X, Y, \hat{Y}}} \mathcal{F}^{\rho, \hat{x}_0}$  que

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( H_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0}(u_\varepsilon) - L(u_\varepsilon) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \mathcal{F}_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0}(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon) - L(u_\varepsilon) \right) \\ &\geq \int_{Q_\rho(\hat{x}_0)} Qf(\nabla \bar{u}) \, dx + \int_{\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)} \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}_{\hat{x}} \right) d\hat{x} - L(\bar{u}) \\ &\geq \int_{Q_\rho(\hat{x}_0)} Qf(\nabla \bar{u}) \, dx + \int_{\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)} \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}_{\hat{x}} \right) d\hat{x} - L(\bar{u}).\end{aligned}\tag{4.23}$$

En combinant (4.22) et (4.23), on obtient donc

$$\int_{\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)} Qg_0(\hat{\nabla}\gamma_S(\bar{u})) d\hat{x} \geq \int_{\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)} \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\lambda) d\bar{\nu}_{\hat{x}} \right) d\hat{x}.$$

En prenant  $\hat{x}_0$  en dehors d'un sous-ensemble négligeable de  $S$ , en divisant chaque membre de l'inégalité par  $|\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)|$  et en faisant tendre  $\rho \rightarrow 0$ , on obtient  $Qg_0(\hat{\nabla}\gamma_S(\bar{u})(\hat{x}_0)) \geq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\lambda) d\bar{\nu}_{\hat{x}_0}$ . Ceci étant vrai pour tout  $\hat{x}_0$  en dehors d'un ensemble négligeable, on a

$$Qg_0(\hat{\nabla}\gamma_S(\bar{u})(\hat{x})) = \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\bar{\nu}_{\hat{x}} \text{ pp } \hat{x} \in S.$$

Il reste à montrer que  $\bar{u}$  est une solution du problème non linéaire classique. Grâce à l'inégalité que l'on vient de démontrer, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} Qf(\nabla\bar{u}) dx + \int_S Qg_0(\hat{\nabla}\gamma_S(\bar{u})) d\hat{x} - L(\bar{u}) = \mathcal{F}(\bar{u}, \bar{\nu}) - L(\bar{u}) \\ &= \inf_{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)} \left( \inf_{\nu \in \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} \mathcal{F}(u, \nu) - L(u) \right) \\ &= \inf_{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)} \left( H(u) - L(u) \right) \end{aligned}$$

donc  $\bar{u}$  est bien solution du problème limite classique.  $\square$

### Une autre fomulation du problème

On s'intéresse maintenant aux fonctions marginales obtenues lorsque l'on considère le déplacement  $u$  comme variable interne. Puisque  $\text{mes}(\Gamma_0 \cap \bar{S}) > 0$ , pour tout  $\nu \in \hat{\nabla}\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ , il existe une unique fonction  $u$  dans  $W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  qui vérifie  $u = 0$  sur  $\Gamma_0 \cap \bar{S}$ , définie pp  $\hat{x} \in S$  par  $u(\hat{x}) = \hat{\nabla}^{-1}(\text{bar}(\nu_{\hat{x}}))$ . Soit  $\nu$  une mesure appartenant à  $\hat{\nabla}\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  fixée. Considérons l'ensemble

$$W(\nu) := \left\{ u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) : \gamma_S(u)(\hat{x}) = \hat{\nabla}^{-1}(\text{bar}(\nu_{\hat{x}})) \text{ pp } \hat{x} \in S \right\}$$

et définissons la fonctionnelle  $G : \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$G(\nu) := \begin{cases} \inf_{u \in W(\nu)} \left( \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx - L(u) \right) + \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu & \text{si } \nu \in \hat{\nabla}\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,  $G := \inf_{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)} \mathcal{F}(u, \cdot)$ , c'est-à-dire,  $G$  est la fonction marginale de  $\mathcal{F}$  lorsque l'on considère  $u$  comme une variable interne. On peut aussi réécrire  $G$  comme la somme d'une énergie de volumique et d'une énergie de surface :

$$G(\nu) = \int_{\Omega} h(x, \text{bar}(\nu_{\hat{x}})) dx + \int_S \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu_{\hat{x}} \right) d\hat{x}$$

en prenant  $h := Qf \circ \nabla\bar{u}$  où  $\bar{u}$  est une solution de  $\inf_{u \in W(\nu)} \left( \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx - L(u) \right)$ .

D'après le théorème 4.1,  $G_\varepsilon := \inf_{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)} \mathcal{F}_\varepsilon(u, \cdot) \xrightarrow{\Gamma_{Y, \hat{Y}}} G$ . La formulation du modèle en terme de mesure de Young est donc donnée par le problème :  $\bar{\nu} \in \operatorname{argmin} G$ . En comparant cette formulation avec la formulation classique, on trouve que toute solution  $\bar{u}$  du problème classique est solution d'un problème variationnel de Dirichlet avec la condition sur  $S$  :  $\bar{u}(\hat{x}) = \hat{\nabla}^{-1}(\operatorname{bar}(\nu_{\hat{x}}))$  sur  $S$ . Ceci fait l'objet du corollaire qui suit.

**Corollaire 4.3.** *Soit  $(\bar{u}, \bar{\nu})$  une solution de  $\inf_{(u, \nu) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} (\mathcal{F}(u, \nu) - L(u))$ , alors  $\bar{u}$  est une solution du problème de Dirichlet*

$$\inf \left\{ \int_{\Omega \setminus S} Qf(\nabla u) \, dx - L(u) : u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), u(\hat{x}) = \hat{\nabla}^{-1}(\operatorname{bar}(\nu_{\hat{x}})) \text{ pp sur } S \right\}.$$

*Démonstration.* Puisque  $G_\varepsilon \Gamma_{Y, \hat{Y}}$ -converge vers  $G$ , il existe une suite  $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  d'éléments de  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  telle que  $\mu_\varepsilon \xrightarrow{\Theta} \bar{\nu}$  et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(\mu_\varepsilon) = \inf_{u \in W(\bar{\nu})} \left( \int_{\Omega} Qf(\nabla u) \, dx - L(u) \right) + \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}. \quad (4.24)$$

De plus,  $G_\varepsilon(\mu_\varepsilon) < +\infty$ , donc  $\mu_\varepsilon \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$ , et il existe  $u_\varepsilon \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  tel que  $\mu_\varepsilon = \delta_{\nabla(r_\varepsilon u_\varepsilon)} \otimes dx$  dans  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  et  $G_\varepsilon(\mu_\varepsilon) = \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$ . Donc  $\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon) < +\infty$  et d'après le lemme de compacité, lemme 4.1, il existe une sous-suite de  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  qui converge fortement vers un certain  $\bar{u}$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Alors, comme  $(\mathcal{F}_\varepsilon - L)_{\varepsilon > 0} \Gamma_{X, Y, \hat{Y}}$ -converge vers  $\mathcal{F} - L$ , on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(\mu_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon) - L(u_\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \mu_\varepsilon) - L(u_\varepsilon) \\ &\geq \int_{\Omega} Qf(\nabla \bar{u}) \, dx - L(\bar{u}) + \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu} \\ &\geq \int_{\Omega} Qf(\nabla \bar{u}) \, dx - L(\bar{u}) + \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

En combinant (4.24) et (4.25) on obtient

$$\inf_{u \in W(\bar{\nu})} \left( \int_{\Omega} Qf(\nabla u) \, dx - L(u) \right) = \int_{\Omega} Qf(\nabla \bar{u}) \, dx - L(\bar{u})$$

et le corollaire est démontré.  $\square$

On peut donc voir l'énergie de surface qui intervient dans la formulation classique :

$$\int_S Qg_0(\hat{\nabla} u) \, d\hat{x}$$

comme la relaxée de la condition de Dirichlet sur  $S$  :  $u(\hat{x}) = \hat{\nabla}^{-1}(\mathbf{E}\nu_{\hat{x}})$ . Ceci évoque la relaxation dans l'espace des fonctions  $BV$  (bounded variations), où les conditions de bord de type Dirichlet se traduisent par une énergie de surface sur la partie de la frontière considérée (voir [9]).

### 4.3 Formulation complète en terme de mesures de Young

Après avoir considéré le cas où seule la couche mince subit des transitions de phase solide/solide, qui correspond à une situation décrite par Battacharya and James [19], on s'intéresse au cas où toute la structure possède une microstructure.

### 4.3.1 Reformulation du problème

En suivant la démarche générale décrite dans ce chapitre, on reformule l'énergie  $F_\varepsilon$  en terme d'un couple de mesures de Young  $(\sigma, \mu)$  conduisant à la fonctionnelle  $(\sigma, \mu) \mapsto \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma, \mu)$  définie par

$$\mathcal{F}_\varepsilon : \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma, \mu) := \begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma + \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} g(\hat{\lambda} | \frac{1}{\varepsilon} \lambda_3) d\mu + \mathcal{I}_\varepsilon(\sigma, \mu) \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases} \quad \text{si } \sigma = \delta_{\nabla u(x)} \otimes dx,$$

où

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\sigma, \mu) := \begin{cases} 0 \text{ si } \mu = \delta_{\nabla v(x)} \otimes dx, v = 1_B r_\varepsilon u, \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases}$$

et  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega)$  est l'ensemble des mesures de Young définies sur  $\Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3}$  suivant la définition 1.5. On munit  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega)$  de la convergence étroite, et on définit alors la  $nar \times \Theta$ -convergence par :

Soient  $(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  et  $(\sigma, \nu) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times$ , alors

$$(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \xrightarrow{nar \times \Theta} (\sigma, \nu) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_\varepsilon \xrightarrow{nar} \sigma \text{ dans } \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \\ \mu_\varepsilon \xrightarrow{\Theta} \nu. \end{cases}$$

En prenant  $X = \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega)$ ,  $Y = \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  et  $\hat{Y} = \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ , on montre que

**Théorème 4.4.** *La suite de fonctionnelles  $(\mathcal{F}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$   $\Gamma_{X, Y, \hat{Y}}$ -converge vers la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  définie par*

$$\mathcal{F} : \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\mathcal{F}(\sigma, \nu) := \begin{cases} \int_{\Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma + \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu + \mathcal{I}(\sigma, \nu) \text{ si } \sigma \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega), \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases}$$

où

$$\mathcal{I}(\sigma, \nu) := \begin{cases} 0 \text{ si } \nu \in \hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S) \text{ et } \hat{\nabla}^{-1}(\mathbf{E}\nu_{\hat{x}}) = \gamma_S(\nabla^{-1}(\mathbf{E}\sigma_x)) \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

Une conséquence directe de ce théorème est le corollaire suivant.

**Corollaire 4.4.** *La suite  $(\mathcal{F}_\varepsilon - L)_{\varepsilon > 0}$   $\Gamma_{X, Y, \hat{Y}}$ -converge vers la fonctionnelle  $\mathcal{F} - L$ . De plus, si  $(\bar{\sigma}_\varepsilon, \bar{\mu}_\varepsilon) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  est un  $\varepsilon$ -minimiseur de  $\mathcal{F}_\varepsilon - L$ , alors il existe une sous-suite de  $((\bar{\sigma}_\varepsilon, \bar{\mu}_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  qui converge vers un certain  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu})$  qui est solution du problème*

$$\inf_{(\sigma, \nu) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} \left( \mathcal{F}(\sigma, \nu) - L(\sigma) \right),$$

et donc  $\hat{\nabla}^{-1}(\mathbf{E}\nu_{\hat{x}}) = \gamma_S(\nabla^{-1}(\mathbf{E}\sigma_x))$  pp  $x \in S$ .

### 4.3.2 Relation entre la solution classique et la solution du problème limite formulé en terme de mesures de Young

Soit  $\bar{u} \in \operatorname{argmin}(F - L)$  et soit  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu}) \in \operatorname{argmin}(\mathcal{F} - L)$ . Comme précédemment, on montre que cette nouvelle formulation donne une représentation intégrale des quantités macroscopiques  $\nabla \bar{u}$  et  $\hat{\nabla} \gamma_S(\bar{u})$  par rapport aux mesures de probabilité  $\bar{\sigma}_x$  et  $\bar{\nu}_{\hat{x}}$ .

**Proposition 4.5.** *Les minima des deux problèmes limite coïncident :*

$$\min_{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)} \{F(u) - L(u)\} = \min_{(\sigma, \nu) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} \{\mathcal{F}(\sigma, \nu) - L(\sigma)\}.$$

On en déduit le résultat suivant :

**Corollaire 4.5.** *Soit  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu})$  une solution de*

$$\inf_{(\sigma, \nu) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} (\mathcal{F}(\sigma, \nu) - L(\sigma)),$$

et  $\bar{u}$  (resp.  $\bar{v}$ ) l'unique élément de  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  (resp.  $W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$ ) tel que  $\nabla \bar{u}(x) = \mathbf{E} \bar{\sigma}_x$  pp  $x \in \Omega$  (resp.  $\hat{\nabla} \bar{v}(\hat{x}) = \mathbf{E} \bar{\nu}_{\hat{x}}$  pp  $\hat{x} \in S$ ). Alors,  $\gamma_S(\bar{u}) = \bar{\nu}$  presque partout sur  $S$  et  $\bar{u}$  est solution du problème  $\inf_{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)} (F(u) - L(u))$ . De plus, on a

$$\begin{aligned} \nabla \bar{u}(x) &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} \lambda \, d\bar{\sigma}_x \quad a.e \, x \in \Omega; \\ \hat{\nabla} \gamma_S(\bar{u})(\hat{x}) &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} \, d\bar{\nu}_{\hat{x}} \quad a.e \, \hat{x} \in S; \\ Qf(\nabla \bar{u}(x)) &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) \, d\bar{\sigma}_x \quad a.e \, x \in \Omega; \\ Qg_0(\hat{\nabla} \gamma_S(\bar{u})(\hat{x})) &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}_{\hat{x}} \quad a.e \, \hat{x} \in S. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Ces résultats ont fait l'objet d'un article à paraître dans Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. On retrouve l'article avec les démonstrations de ces résultats dans la section suivante.



# Multi-materials with strong interface: Young measures formulation

Anne Laure Bessoud \*

April 14, 2009

## Abstract

We propose a model of a multi-material with strong interface, whose thickness and stiffness are of order  $\varepsilon$  and  $\frac{1}{\varepsilon}$ , which encodes the gradient oscillations of the minimizing sequences. The stored strain energy of the structure is written in terms of Young measures variables and the new model is obtained by computing a suitable variational limit of the energy functional when  $\varepsilon$  tends to zero. We also obtain a microscopic description of the classical solution.

## Résumé

Nous proposons un modèle de multi-matériaux comprenant une interface rigide, dont l'épaisseur et la rigidité sont d'ordre  $\varepsilon$  et  $\frac{1}{\varepsilon}$ , et qui capte les oscillations des gradients des suites minimisantes. L'énergie élastique de la structure est décrite en terme de mesures de Young et le modèle est obtenu comme une limite variationnelle de cette énergie lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. Nous obtenons également une description microscopique de la solution classique.

AMS *subject classifications*: 49J45, 74N15, 35B40

*Keywords*: Micro structures, Young measures, Variational convergences,  $\Gamma$ -convergence.

---

\*LMGC, UMR-CNRS 5508 and ACIOM, UMR-CNRS 5149, Université Montpellier II, Case courrier 048, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5, bessoud@lmgc.univ-montp2.fr

# 1 Introduction

The problem of a multimaterial with a thin intermediate layer of high rigidity has been studied from a theoretical point of view in [1] and [6]. For a numerical study consult [7]. Assuming the thickness of the intermediate layer of order  $\varepsilon$ , and the stiffness of order  $\frac{1}{\varepsilon}$ , where  $\varepsilon$  is a small parameter, one way to obtain a variational model, is to study the  $\Gamma$ -limit of the stored strain energy when  $\varepsilon$  goes to zero. In this paper, we propose an asymptotic analysis of the problem when the materials are assumed to undergo reversible solid/solid phase transitions like in martensitic materials. In these conditions the gradient minimizing sequence develops fine scale oscillations which, according to Ball and James [5], model the microstructure experimentally observed. In order to take this oscillatory behavior into account we rewrite the problem in terms of Young measures. Young measures, introduced by L.C. Young [18], are one of the most efficient tools to characterize such oscillatory behavior.

Let  $\Omega$  be the reference configuration occupied by the structure and  $B_\varepsilon = S \times (0, \varepsilon) \subset \Omega$  the thin inclusion. The stored strain energy associated with a displacement field  $u$  is given by the functional

$$F_\varepsilon(u) := \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} f(\nabla u) \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} g(\nabla u) \, dx$$

and the equilibrium configuration of the structure is given by the displacement field  $\bar{u}_\varepsilon$ , solution or more generally  $\varepsilon$ -approximate solution of the problem

$$\inf\{F_\varepsilon(u) - L(u) : u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)\}$$

where  $L(u)$  is the work of the external loading and  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  is the set of functions in  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  with null trace on the part of the boundary  $\Gamma_0$ . Define the function  $g_0 : \mathbf{M}^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  by  $g_0(\lambda) := \inf_{\xi \in \mathbb{R}^3} g(\lambda|\xi)$ . The  $\Gamma$ -limit of  $F_\varepsilon$  when  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  is equipped with its weak topology is the functional given by

$$F(u) := \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx + \int_S Qg_0(\nabla(\gamma_S u)) d\hat{x}$$

for all Sobolev function  $u$  with smooth trace  $\gamma_S(u)$  on the two-dimensional interface  $S$ , where  $Qf$  (resp.  $Qg_0$ ) is the quasi-convex envelope of  $f$  (resp.  $g_0$ ), i.e., the greatest quasi-convex function less than or equal to  $f$  (resp.  $g$ ). But this formulation has the disadvantage to quasi-convexify the density functions  $f$  and  $g_0$  so that the limit problem does not provide any information on the oscillations of the gradient minimizing sequences. Indeed it is well known in phase transition theory that it is the total free energy which determines the microstructure and not its quasi-convex-envelope. Typically the infimum of the total free energy in martensitic materials is not attained while the minimum of the energy functional  $F$  is achieved. Thus  $F$  does not describe the microstructure. In order to make precise the oscillatory behavior of the gradient of  $\bar{u}_\varepsilon$ , we write the stored strain energy  $F_\varepsilon$  in terms of Young measures. Since the behavior of the displacement is very different in  $\Omega_\varepsilon$  and  $B_\varepsilon$ , we begin by rewriting

the problem in terms of two variables: the displacement  $u$  in  $\Omega_\varepsilon$ , and  $v$ , the rescaled function in  $B := S \times (0, 1)$  of the displacement in  $B_\varepsilon$ , leading to the functional  $(u, v) \mapsto \mathcal{G}_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega_\varepsilon} f(\nabla u) dx + \int_B g(\nabla v | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_3}) dx$ . Next we obtain a new formulation of the limit problem:  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu}) \in \operatorname{argmin} (\mathcal{F}(\sigma, \nu) - L(\sigma))$  by identifying the variational limit of the functional  $(\sigma, \mu) \mapsto \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma, \mu)$ , which is the Young measures formulation of the functional  $\mathcal{G}_\varepsilon(u, v)$ , where  $\sigma$  and  $\mu$  are the Young measures associated with the gradient of  $u$ , respectively  $v$ . In order to define a suitable (variational) convergence process on the sequence  $(\mathcal{F}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , we introduce a convergence notion on the Young measures spaces, domains of  $\mathcal{F}_\varepsilon$  and  $\mathcal{F}$ . We moreover show how the Young measures solutions in this formulation may be thought as a microscopic description of the classical solution. Indeed, comparing the two formulations  $\bar{u} \in \operatorname{argmin}(F(u) - L(u))$  and  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu}) \in \operatorname{argmin}(\mathcal{F}(\sigma, \nu) - L(\sigma))$ , by localization, we obtain integral representations with respect to the probability measures  $\bar{\sigma}_x$  and  $\bar{\nu}_{\hat{x}}$ , of significant macroscopic quantities involving  $\bar{u}$ :  $\nabla \bar{u}$  and  $\nabla \gamma_S(\bar{u})$  are the barycenter of  $\bar{\sigma}_x$  and  $\bar{\nu}_{\hat{x}}$ , and

$$\begin{aligned} Qf(\nabla \bar{u}(x)) &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\bar{\sigma}_x \text{ a.e } x \in \Omega; \\ Qg_0(\nabla \gamma_S(\bar{u})(\hat{x})) &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\bar{\nu}_{\hat{x}} \text{ a.e } \hat{x} \in S. \end{aligned}$$

The paper is organized as follows. In section 2 we recall briefly some results of the Young measures theory. Section 3 is devoted to the mechanical setting of the problem and we set up notation and terminology. In section 4, we introduce a concept of variational convergence and prove the variational convergence of the bifunctional  $\mathcal{F}_\varepsilon$  to the bifunctional  $\mathcal{F}$ . In the last section, we establish the previous integral representations between the solutions  $\bar{u}$  and  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu})$  of the two different formulations.

## 2 Basic notions on Young measures

In order to improve the reading of the paper, we begin with some basic recalls about Young measures theory. For a more detailed study, see [4], [16], [17] and references therein.

In all this section,  $\Omega$  is an open bounded subset of  $\mathbb{R}^N$  and  $E = \mathbb{R}^d$ ,  $d = m \times N$  so that  $\mathbb{R}^d$  is canonically isomorphic to the space  $\mathbf{M}^{m \times N}$  of  $m \times N$  matrices.

**Definition 1.** *We call Young measure on  $\Omega \times E$ , any positive measure  $\mu \in \mathbf{M}^+(\Omega \times E)$  whose image by the projection  $\pi_\Omega$  on  $\Omega$  is the Lebesgue measure  $\mathcal{L}$  on  $\Omega$ : for every Borel subset  $B$  of  $\Omega$*

$$\pi_{\Omega\#}\mu(B) := \mu(B \times E) = \mathcal{L}(B).$$

We denote by  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$  the set of all Young measures on  $\Omega \times E$  and equip  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$  with the narrow topology, that is the weakest topology which makes

the maps

$$\mu \mapsto \int_{\Omega \times E} \varphi d\mu$$

continuous, where  $\varphi$  runs through  $\mathcal{C}_b(\Omega; E)$  the space of Carathéodory integrands, namely the space of all functions  $\psi : \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B}(\Omega) \times \mathcal{B}(E)$  measurable and satisfying

- (i)  $\psi(x, \cdot)$  is bounded continuous on  $E$  for all  $x \in \Omega$ ;
- (ii)  $x \mapsto \|\psi(x, \cdot)\|$  is Lebesgue integrable.

This topology induces the narrow convergence of Young measures defined as follows: let  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence of measures in  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$  and  $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega; E)$ , then

$$\mu_n \xrightarrow{\text{nar}} \mu \iff \begin{cases} \forall \varphi \in \mathcal{C}_b(\Omega; E), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \times E} \varphi(x, \lambda) d\mu_n(x, \lambda) = \int_{\Omega \times E} \varphi(x, \lambda) d\mu(x, \lambda). \end{cases}$$

The following slicing property is a generalization of Fubini's theorem.

**Theorem 1.** *Let  $\mu$  be any Young measure in  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$ . There exists a family of probability measure  $(\mu_x)_{x \in \Omega}$  on  $E$ , unique up to equality  $\mathcal{L}$ -a.e. such that*

- (i)  $x \mapsto \int_E \psi(x, \Lambda) d\mu_x$  is  $\mathcal{L}$ -measurable,
- (ii)  $\int_{\Omega \times E} \psi(x, \Lambda) d\mu(x, \Lambda) = \int_{\Omega} \left( \int_E \psi(x, \Lambda) d\mu_x(\Lambda) \right) dx$

for each function  $\mu$ -integrable  $\psi$ . The family  $(\mu_x)_{x \in \Omega}$  is called a disintegration of the Young measure  $\mu$  and we write  $\mu = \mu_x \otimes \mathcal{L}$ .

Let us define the tightness notion for Young measures

**Definition 2.** *A subset  $\mathcal{H}$  of  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$  is said to be tight if*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{K}_\varepsilon \text{ compact subset of } E \text{ such that } \sup_{\mu \in \mathcal{H}} \mu(\Omega \times E \setminus \mathcal{K}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Theorem below may be considered as the parameterized version of the classical Prokhorov compactness theorem

**Theorem 2** (Prokhorov's compactness theorem). *Let  $(\mu^n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a tight sequence in  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$ . Then, there exists a subsequence  $(\mu^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  of  $(\mu^n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $\mu$  in  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$  such that*

$$\mu_{n_k} \xrightarrow{\text{nar}} \mu \text{ in } \mathcal{Y}(\Omega; E).$$

Let  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence of functions  $u_n : \Omega \rightarrow E$  and consider the sequence of their associated Young measures  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\mu_n = \delta_{u_n(x)} \otimes \mathcal{L}$ . If  $\mu_n \xrightarrow{\text{nar}} \mu$  in  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$ , the Young measure  $\mu$  is said to be *generated by* the sequence of functions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . In general,  $\mu$  is not associated with a function.

The next proposition is a semicontinuity result related to non negative functions.

**Proposition 1.** *Let  $\varphi : \Omega \times E \rightarrow [0, +\infty]$  be a  $\mathcal{B}(\Omega) \otimes \mathcal{B}(E)$  measurable function such that  $\lambda \mapsto \varphi(x, \lambda)$  is lsc for a.e.  $x$  in  $\Omega$ . Let moreover  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence of Young measures in  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$  narrowly converging to some Young measure  $\mu$  in  $\mathcal{Y}(\Omega; E)$ . Then*

$$\int_{\Omega \times E} \varphi(x, \lambda) d\mu(x, \lambda) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \times E} \varphi(x, \lambda) d\mu_n(x, \lambda).$$

Let us recall the notion of uniform integrability: a sequence  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  is said to be *uniformly integrable* if

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{|f_n| > R} |f_n| = 0.$$

One may extend the set  $\mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{R}^m)$  of test functions related to the narrow convergence as follows:

**Proposition 2.** *Let  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence of Young measures associated with a sequence of functions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , narrowly converging to some Young measure  $\mu$ . On the other hand let  $\varphi : \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$  be a  $\mathcal{B}(\Omega) \otimes \mathcal{B}(E)$  measurable function such that  $\lambda \mapsto \varphi(x, \lambda)$  is continuous for a.e.  $x$  in  $\Omega$ . Assume moreover that  $x \mapsto \varphi(x, u_n(x))$  is uniformly integrable. Then*

$$\int_{\Omega \times E} \varphi(x, \lambda) d\mu(x, \lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(x, u_n(x)) dx.$$

We end this section with the following result which is fundamental in order to apply Proposition 2. For a proof, we refer the reader to [10], [15].

**Proposition 3.** *Let  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a bounded sequence in  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  whose gradients generate a  $W^{1,p}$ -Young measure  $\mu$ . Then there exists another sequence  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , whose gradients generate the same Young measure  $\mu$ , and such that  $(|\nabla v_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$  is uniformly integrable.*

### 3 Problem statement and notations

We make no difference between  $\mathbb{R}^3$  and the three dimensional Euclidean physic space whose an orthogonal base is denoted by  $(e_1, e_2, e_3)$ . We consider a domain  $\Omega$  with a  $C^1$  boundary  $\Gamma$ . Let  $\Omega^\pm = \Omega \cap [\pm x_3 > 0]$ , and let  $S := \{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-\}^\circ$ . We assume that  $S$  has a positive  $\mathcal{H}^2$ -measure and. To shorten the proofs we have assumed that  $S$  is included in the plane  $[x_3 = 0]$  but we could treat the problem with a more general geometry (see fig.1). The set  $\Omega$  is the physical reference configuration of the assembly of the two adherents and the thin adhesive. More precisely, given a small dimensionless parameter  $\varepsilon$  and a global characteristic length  $h$  (for example the diameter of  $\Omega$ ), the set  $B_\varepsilon = \{x + \varepsilon z e_3 : 0 < z < h, x \in S\}$  is the reference configuration occupied by a strong material (whose stiffness is of order  $\frac{1}{\varepsilon}$ ) while  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon$  is the reference configuration occupied by a material with stiffness of order 1 (see figure 1).

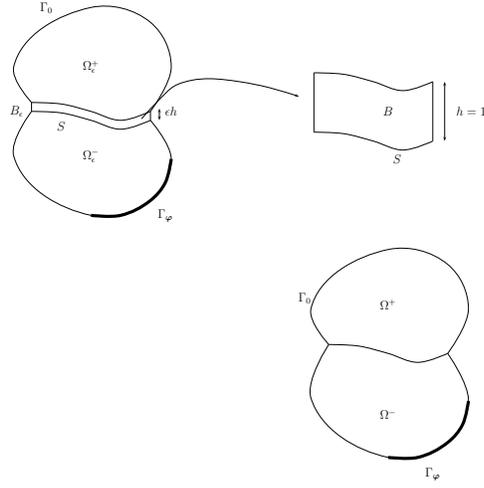


Figure 1: Bonded assembly - Left: the physical configuration-Right: the rescaled layer - Below: the limit configuration.

The structure is clamped on a part  $\Gamma_0$  of  $\Gamma$  with a positive  $\mathcal{H}^2$ -measure, the complementary part of  $\Gamma_0$  is traction free and we assume that  $\mathcal{H}^1(\Gamma_0 \cap \bar{S}) > 0$ . Obviously one can there consider other type of boundary conditions (e.g. a combination of some components of the stress vector and of the displacement). Moreover the structure is submitted to applied body forces  $\Phi$ . In the sequel, we assume  $h = 1$ .

Classically, the work of the exterior loading is given by  $L : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,

$$L(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi \cdot u \, dx.$$

The soft and the strong materials are modeled as hyperelastic and the bulk energy densities  $f, g$  of the two materials occupying  $\Omega_\varepsilon$  and  $B_\varepsilon$  satisfy a  $(C_p)$  condition with  $p > 1$ :

$$\begin{cases} \exists \alpha, \beta, C \in \mathbb{R}^+ \text{ s. t. } \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbf{M}^{3 \times 3}, \\ \alpha |\lambda|^p \leq f(\lambda) \leq \beta(1 + |\lambda|^p), \text{ idem for } g; \\ |f(\lambda) - f(\lambda')| \leq C |\lambda - \lambda'| (1 + |\lambda|^{p-1} + |\lambda'|^{p-1}), \text{ idem for } g. \end{cases} \quad (1)$$

(To shorten notation, we assume that  $(C_p)$  is satisfied with the same constants  $\alpha, \beta$  and  $C$ .)

Since we have assumed that the materials undergo reversible solid-solid phase transitions, the density  $f$  and  $g$  are assumed to be non convex and to entail a multi-well structure. In this context, the stored strain energy functional associ-

ated with a displacement field  $u$  is given by

$$F_\varepsilon(u) := \int_{\Omega_\varepsilon} f(\nabla u) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} g(\nabla u) dx.$$

Let us define the function  $g_0 : \mathbf{M}^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  for every  $\hat{\lambda} \in \mathbf{M}^{3 \times 2}$  by  $g_0(\hat{\lambda}) := \inf_{\xi \in \mathbb{R}^3} g(\hat{\lambda}|\xi)$ . In [6], we proved the  $\Gamma$ -convergence of  $F_\varepsilon$  to the functional  $F : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  where

$$F(u) := \begin{cases} \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx + \int_S Qg_0(\hat{\nabla} u) dx & \text{if } u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \\ & \text{with } \gamma_S(u) \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3), \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and  $\gamma_S$  denotes the trace operator from  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  into  $L^p(S, \mathbb{R}^3)$ .

In order to work in a domain independent of  $\varepsilon$  we operate the usual change of scale  $(\hat{x}, x_3) = (\hat{x}, \varepsilon y_3)$  transforming  $(\hat{x}, x_3) \in B_\varepsilon$  into  $(\hat{x}, y_3) \in B := S \times (0, 1)$ . Before introducing the Young measures formulation, since the behavior of the displacement is very different in  $\Omega_\varepsilon$  and  $B_\varepsilon$ , we write the energy functional in terms of two arguments, the displacement  $u$  in  $\Omega_\varepsilon$ , and  $v$  the rescaled function in  $B$  of the displacement in  $B_\varepsilon$ , and consider

$$\mathcal{G}_\varepsilon : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\mathcal{G}_\varepsilon(u, v) := \begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\nabla u) dx + \int_B g(\hat{\nabla} v | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_3}) dx + I_\varepsilon(u, v) \\ & \text{if } u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where, for all  $(u, v) \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$

$$I_\varepsilon(u, v) := \begin{cases} 0 & \text{if } 1_B r_\varepsilon u = v \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and  $r_\varepsilon u(\hat{x}, y_3) := u(\hat{x}, \varepsilon y_3)$ . Let us now introduce some notations we will use in the sequel.

Let  $\mathbf{M}^{3 \times 3}$  and  $\mathbf{M}^{3 \times 2}$  denote the sets of  $3 \times 3$  and  $3 \times 2$  matrices with real entries. Considering the space  $\mathbf{M}^{3 \times 3}$  as the product  $\mathbf{M}^{3 \times 2} \times \mathbb{R}^3$ , we will denote the first coordinate in  $\mathbf{M}^{3 \times 2}$  of any element  $\lambda$  of  $\mathbf{M}^{3 \times 3}$  by  $\hat{\lambda}$ .

Following definition 1 we consider the following sets of Young measures  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega)$ ,  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  and  $\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  :

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) &\Leftrightarrow \sigma \in \mathbf{M}^+(\Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3}) \text{ and } P_\Omega \# \sigma = \mathcal{L}, \\ \mu \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B) &\Leftrightarrow \mu \in \mathbf{M}^+(B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}) \text{ and } P_B \# \mu = \mathcal{L}, \\ \nu \in \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S) &\Leftrightarrow \nu \in \mathbf{M}^+(S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}) \text{ and } P_S \# \nu = \hat{\mathcal{L}} \end{aligned}$$

where  $P_\Omega \# \sigma$  (resp.  $P_B \# \mu$  and  $P_S \# \nu$ ) denotes the projection measure of  $\sigma$  (resp.  $\mu$  and  $\nu$ ) by the projection  $P_\Omega : \Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3} \rightarrow \Omega$  (resp.  $P_B : B \times \mathbf{M}^{3 \times 3} \rightarrow B$ ) and  $P_S : S \times \mathbf{M}^{3 \times 2} \rightarrow S$ ) and  $\mathcal{L}$  (resp.  $\hat{\mathcal{L}}$ ) the Lebesgue measure on  $\Omega$  (resp.  $S$ ) that we sometimes write  $dx$  (resp.  $d\hat{x}$ ). We write the slicing decomposition  $\sigma = \sigma_x \otimes dx$ ,  $\mu = \mu_x \otimes dx$  and  $\nu = \nu_{\hat{x}} \otimes d\hat{x}$  for  $\sigma$ ,  $\mu$  and  $\nu$ , where  $\sigma_x$  and  $\mu_x$  are probability measures on  $\mathbf{M}^{3 \times 3}$ , and  $\nu_{\hat{x}}$  is a probability measure on  $\mathbf{M}^{3 \times 2}$ . In all the paper,  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega)$ ,  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  and  $\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  are equipped with the narrow convergence.

For every probability measure  $\mathbf{P}$  on  $\mathbf{M}^{3 \times 3}$  or  $\mathbf{M}^{3 \times 2}$ , we write  $\mathbf{EP}$  for its barycenter, i.e.  $\mathbf{EP} = \int \lambda d\mathbf{P}(\lambda)$ .

We will denote by  $\nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega)$  (resp.  $\nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  and  $\hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ ) the set of Young measures generated by gradients of  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ -Sobolev functions (resp.  $W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  and  $W_{S \cap \Gamma_0}^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$ ). We will also consider the set of Young measures  $\hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(B) := \{\mu \in \mathcal{Y}(B; \mathbf{M}^{3 \times 2}) : \exists v_n \in W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3) \text{ s.t. } \delta_{\nabla v_n} \otimes dx \xrightarrow{\text{narrow}} \mu\}$ .

In order to take the fine microstructure of the two materials occupying  $\Omega_\varepsilon$  and  $B_\varepsilon$  into account, we reformulate the energy functional in terms of Young measures. For a general study of fine mixture consult [5]. In [8] mixture like austenite/martensite was predicted for thin films and a mathematical model was proposed in [11], [14]. This leads us to consider the functional  $\mathcal{F}_\varepsilon$  defined as follows

$$\mathcal{F}_\varepsilon : \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma, \mu) := \begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma + \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} g(\hat{\lambda} | \frac{1}{\varepsilon} \lambda_3) d\mu + \mathcal{I}_\varepsilon(\sigma, \mu) & \text{if } \sigma = \delta_{\nabla u(x)} \otimes dx, \\ +\infty \text{ otherwise,} & \end{cases}$$

where

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\sigma, \mu) := \begin{cases} 0 \text{ if } \mu = \delta_{\nabla v(x)} \otimes dx, v = 1_B r_\varepsilon u, \\ +\infty \text{ otherwise.} \end{cases}$$

For every  $\sigma \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega)$ , there exists a unique  $u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , denoted by  $\nabla^{-1} \mathbf{E}\sigma$ , such that  $\nabla u(x) = \mathbf{E}\sigma(x)$  for a.e  $x \in \Omega$ . In order to shorten notations, we still denote by  $L$  the work of the exterior loading in the Young measures formulation, which is then given by

$$L : \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$L(\sigma) = \begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi \cdot \nabla^{-1} \mathbf{E}\sigma dx \text{ if } \sigma \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega), \\ +\infty \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Note that, in its domain, the functional  $\mathcal{F}_\varepsilon$  is nothing but the functional  $\mathcal{G}_\varepsilon$ , and from the strict variational point of view, it is equivalent to identify the

variational limit of  $F_\varepsilon$  and that of  $\mathcal{G}_\varepsilon$ . Indeed we have

$$\begin{aligned} \inf_{u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)} (F_\varepsilon(u) - L(u)) &= \inf_{(u,v) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3)} (\mathcal{G}_\varepsilon(u, v) - L(u)) \\ &= \inf_{(\sigma, \mu) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)} (\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma, \mu) - L(\sigma)). \end{aligned}$$

But we want to point out that the Young measure formulation is well-adapted for capturing oscillations of the gradient minimizing sequences contrary to the formulations in terms of Sobolev functions.

## 4 The variational convergence

Let consider the functional  $\mathcal{F}$  defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S) &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \mathcal{F}(\sigma, \nu) &:= \begin{cases} \int_{\Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma + \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu + \mathcal{I}(\sigma, \nu) & \text{if } \sigma \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega), \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned}$$

where

$$\mathcal{I}(\sigma, \nu) := \begin{cases} 0 & \text{if } \nu \in \hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S) \text{ and } \hat{\nabla}^{-1}(\mathbf{E}\nu_{\hat{x}}) = \gamma_S(\nabla^{-1}(\mathbf{E}\sigma_x)) \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In order to establish a variational convergence of the sequence  $(\mathcal{F}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  to  $\mathcal{F}$ , we introduce a notion of convergence between  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  and  $\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  that we denote by  $\Theta$ -convergence. To this end, we define the map  $\Theta$  as follows:

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B) &\longrightarrow \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S) \\ \mu = \mu_x \otimes dx &\mapsto \nu = \left( \int_0^1 \hat{\mu}_{\hat{x}, s} ds \right) \otimes d\hat{x} \end{aligned}$$

where  $\hat{\mu}_x = P_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \# \mu_x$ ,  $x \in \Omega$ , is the projection of the measure  $\mu_x$  on the set  $\mathbf{M}^{3 \times 2}$  of  $3 \times 2$  matrices, and  $\int_0^1 \hat{\mu}_{\hat{x}, s} ds$  is the probability measure parametrized by  $\hat{x} \in S$ , which acts on all  $\varphi \in C_0(\mathbf{M}^{3 \times 2})$  as follows:

$$\left\langle \int_0^1 \hat{\mu}_{\hat{x}, s} ds, \varphi \right\rangle := \int_0^1 \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \varphi(\hat{\lambda}) d\hat{\mu}_{\hat{x}, s} ds.$$

Given a sequence  $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  in the space  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  equipped with the narrow convergence and  $\nu$  in  $\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ , we define the  $\Theta$ -convergence of  $\mu_\varepsilon$  to  $\nu$  as follows

$$\mu_\varepsilon \xrightarrow{\Theta} \nu \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B) \text{ s.t. } \begin{cases} \mu_\varepsilon \xrightarrow{\text{nar}} \mu \\ \nu = \Theta(\mu) \end{cases}$$

and, for  $((\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  in  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$ , and  $(\sigma, \nu)$  in  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ , the  $nar \times \Theta$ -convergence by

$$(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \xrightarrow{nar \times \Theta} (\sigma, \nu) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_\varepsilon \xrightarrow{nar} \sigma \text{ in } \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \\ \mu_\varepsilon \xrightarrow{\Theta} \nu. \end{cases}$$

We are now in a position to define the  $\Gamma_{nar \times \Theta}$ -convergence.

**Definition 3.** We say that  $\mathcal{F}_\varepsilon$   $\Gamma_{nar \times \Theta}$ -converges to  $\mathcal{F}$  and we write

$$\mathcal{F}_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_{nar \times \Theta}} \mathcal{F}$$

iff for all  $(\sigma, \mu) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$ , both following assertions hold:

- (i)  $\forall (\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  s.t.  $(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \xrightarrow{nar \times \Theta} (\sigma, \nu)$ ,  $\mathcal{F}(\sigma, \nu) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$ ,
- (ii)  $\exists (\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  s.t.  $(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \xrightarrow{nar \times \Theta} (\sigma, \nu)$ ,  $\mathcal{F}(\sigma, \nu) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$ .

The proposition below establishes the variational nature of the  $\Gamma_{nar \times \Theta}$ -convergence.

**Proposition 4.** Assume that  $(\mathcal{F}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$   $\Gamma_{nar \times \Theta}$ -converges to  $\mathcal{F}$  and let  $((\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  be a sequence of  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  satisfying

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \leq \inf\{\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma, \mu) : (\sigma, \mu) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)\} + \varepsilon.$$

Assume furthermore that  $\{(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$  is relatively compact for the convergence  $\xrightarrow{nar \times \Theta}$  defined above. Then any cluster point  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu}) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  is a minimizer of  $\mathcal{F}$  and

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) : (\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)\} = \mathcal{F}(\bar{\sigma}, \bar{\nu})$$

*Proof.* The proof is similar to that of Theorem 12.1.1 in [3]. For the seek of completeness we reproduce it.

Let  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu})$  be a cluster point of  $\{(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ ,  $((\sigma_{\tau(\varepsilon)}, \mu_{\tau(\varepsilon)}))_{\varepsilon>0}$  a subsequence of  $\{(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$  converging to  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu})$  and set

$$(\tilde{\sigma}_\eta, \tilde{\nu}_\eta) := \begin{cases} (\sigma_{\tau(\varepsilon)}, \mu_{\tau(\varepsilon)}) & \text{if there exists } \varepsilon \text{ such that } \eta = \tau(\varepsilon) \\ (\bar{\sigma}, \bar{\nu}) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then  $(\tilde{\sigma}_\eta, \tilde{\nu}_\eta) \xrightarrow{nar \times \Theta} (\bar{\sigma}, \bar{\nu})$  when  $\eta \rightarrow 0$  and according to (i) in definition 3 we have

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{\sigma}, \bar{\nu}) &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\tilde{\sigma}_\varepsilon, \tilde{\nu}_\varepsilon) &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_{\tau(\varepsilon)}(\sigma_{\tau(\varepsilon)}, \mu_{\tau(\varepsilon)}) \\ &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)} \mathcal{F}_{\tau(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Let now  $(\sigma, \nu)$  be any element of  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$ . According to (ii) in definition 3 there exists a sequence  $((\varsigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  converging to  $(\sigma, \nu)$  and satisfying

$$\mathcal{F}(\sigma, \nu) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\varsigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_{\tau(\varepsilon)}(\varsigma_{\tau(\varepsilon)}, \mu_{\tau(\varepsilon)}). \quad (3)$$

Combining (2) and (3) we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{\sigma}, \bar{\nu}) &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)} \mathcal{F}_{\tau(\varepsilon)} \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)} \mathcal{F}_{\tau(\varepsilon)} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_{\tau(\varepsilon)}(\varsigma_{\tau(\varepsilon)}, \mu_{\tau(\varepsilon)}) \leq \mathcal{F}(\sigma, \nu), \end{aligned}$$

which proves  $\mathcal{F}(\bar{\sigma}, \bar{\nu}) = \min_{\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} \mathcal{F}$ . Taking  $(\sigma, \nu) = (\bar{\sigma}, \bar{\nu})$  in the last inequality gives  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \mathcal{F}_{\tau(\varepsilon)} = \min \mathcal{F}$ . Since all subsequence of  $\inf \mathcal{F}_\varepsilon$  possesses a subsequence converging to  $\min \mathcal{F}$ , we finally obtain

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)} \mathcal{F}_\varepsilon = \min_{\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} \mathcal{F}.$$

□

Before establishing the  $\Gamma_{nar \times \Theta}$ -convergence, we prove the following compactness lemma:

**Lemma 1.** *Let  $((\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  be a sequence in  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  satisfying  $\sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) < +\infty$ . Then there exist a subsequence not relabelled  $((\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ ,  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$ , and  $(\sigma, \nu) \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  such that*

$$i) \quad \sigma_\varepsilon = \delta_{\nabla u_\varepsilon} \otimes dx, \quad \mu_\varepsilon = \delta_{\nabla v_\varepsilon} \otimes dx \quad \text{and} \quad v_\varepsilon = 1_B r_\varepsilon u_\varepsilon;$$

$$ii) \quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3} \rightarrow 0 \quad \text{strongly in } L^p(B, \mathbb{R}^3);$$

$$iii) \quad (\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \xrightarrow{nar \times \Theta} (\sigma, \nu), \quad \text{with } \nu = \Theta(\mu), \quad \text{where } \mu = (\hat{\mu}_x \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx \quad \text{and} \\ \hat{\mu} := \hat{\mu}_x \otimes dx \quad \text{is the Young measure generated by } (\hat{\nabla} v_\varepsilon)_{\varepsilon > 0};$$

$$iv) \quad \hat{\nabla}^{-1}(\mathbf{E} \nu_{\hat{x}}) = \gamma_S(\nabla^{-1}(\mathbf{E} \sigma_x)).$$

*Proof.* Proof of *i)* and *ii)*: Since  $\sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) < +\infty$ , there exists  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  such that  $\sigma_\varepsilon = \delta_{\nabla u_\varepsilon} \otimes dx$ , and  $\mu_\varepsilon = \delta_{\nabla v_\varepsilon} \otimes dx$ , with  $v_\varepsilon = 1_B r_\varepsilon u_\varepsilon$ .

Moreover, from the coerciveness properties of  $f$  and  $g$ , we deduce that

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon>0} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^p dx &< +\infty; \\ \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^p dx &< +\infty; \\ \sup_{\varepsilon>0} \int_B |\hat{\nabla} v_\varepsilon|^p dx &< +\infty; \\ \sup_{\varepsilon>0} \int_B \left| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3} \right|^p dx &< +\infty; \end{aligned}$$

thus  $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3} \rightarrow 0$  strongly in  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$ .

Proof of *iii*): The sequences  $(\nabla u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  and  $(\nabla v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  are bounded in  $L^1(\Omega, \mathbf{M}^{3 \times 3})$  and  $L^1(B, \mathbf{M}^{3 \times 3})$  respectively, so that the sequences  $(\sigma_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  and  $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  are tight. From Prokhorov's theorem, we deduce that there exists two subsequences not relabelled,  $\sigma \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega)$  and  $\mu \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  such that

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon &= \delta_{\nabla u_\varepsilon} \otimes dx \xrightarrow{\text{nar}} \sigma \text{ in } \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega); \\ \mu_\varepsilon &= \delta_{\nabla v_\varepsilon} \otimes dx \xrightarrow{\text{nar}} \mu \text{ in } \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B). \end{aligned}$$

The sequence  $(\hat{\nabla} v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  is also bounded in  $L^1(B, \mathbf{M}^{3 \times 2})$  thus there exists  $\hat{\mu} \in \hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(B)$  and a subsequence not relabelled such that

$$\delta_{\hat{\nabla} v_\varepsilon} \otimes dx \xrightarrow{\text{nar}} \hat{\mu} := \hat{\mu}_x \otimes dx.$$

Moreover, from *ii*)  $\delta_{\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3}} \otimes dx \xrightarrow{\text{nar}} \delta_{0_{\mathbb{R}^3}} \otimes dx$ , thus  $\mu_x = \hat{\mu}_x \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}$ , and considering  $\nu = \nu_{\hat{x}} \otimes d\hat{x}$  where  $\nu_{\hat{x}} = \int_0^1 \hat{\mu}_{\hat{x},s} ds$  we have  $\nu = \Theta(\mu)$  et  $\mu_\varepsilon \xrightarrow{\Theta} \nu$ .

We prove now that  $\nu \in \hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ . According to the Kinderlehrer-Pedregal characterization theorem (see [12], [13]), we have to establish the following three assertions:

- (KP<sub>1</sub>)  $\exists w \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  such that  $\mathbf{E}\nu_{\hat{x}} = \hat{\nabla} w(\hat{x})$  a.e  $\hat{x} \in S$ ;
- (KP<sub>2</sub>)  $\int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda}^p d\nu_{\hat{x}} < +\infty$  a.e  $\hat{x} \in S$ ;
- (KP<sub>3</sub>) for every quasiconvex function  $\phi$  satisfying a growth condition of order  $p$ ,

$$\phi(\mathbf{E}\nu_{\hat{x}}) \leq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \phi(\hat{\lambda}) d\nu_{\hat{x}} \quad \text{a.e } \hat{x} \in S.$$

Proof of (KP<sub>1</sub>):  $(\nabla v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  is bounded in  $L^p(B, \mathbf{M}^{3 \times 3})$ , thus there exists  $v \in W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  and a subsequence not relabeled such that  $v_\varepsilon \rightarrow v$  strongly in  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$  and weakly in  $W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$ . Since  $\mu_\varepsilon \xrightarrow{\text{nar}} \mu$ , we obtain

$$\hat{\nabla} v(x) = \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} d\hat{\mu}_x \quad \text{a.e } x \in B.$$

Moreover, since  $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3} \rightarrow 0$  strongly in  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$ , we have  $\frac{\partial v}{\partial x_3} = 0$ ,  $v \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$ , and we can write

$$\hat{\nabla} v(\hat{x}) = \int_0^1 \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} d\hat{\mu}_{\hat{x},s} ds = \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} d\nu_{\hat{x}} \quad \text{a.e } \hat{x} \in S.$$

Proof of (KP<sub>2</sub>): clearly, by definition of  $\nu_{\hat{x}}$  and from the lower semi-continuity of  $\mu \mapsto \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} |\lambda|^p d\mu$ , one has

$$\begin{aligned} \int_S \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} |\hat{\lambda}|^p d\nu_{\hat{x}} d\hat{x} &= \int_B \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} |\hat{\lambda}|^p d\hat{\mu}_x dx \\ &= \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} |\hat{\lambda}|^p d\mu \\ &\leq \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} |\lambda|^p d\mu \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B |\nabla v_\varepsilon|^p dx \\ &\leq \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) < +\infty \end{aligned}$$

so that  $\int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} |\hat{\lambda}|^p d\nu_{\hat{x}} < +\infty$  a.e  $\hat{x} \in S$ .

Proof of (KP<sub>3</sub>): Let  $\phi : \mathbf{M}^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  be a quasi-convex function satisfying a growth condition of order  $p$  and let  $\tilde{\phi} : \mathbf{M}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$  defined by  $\tilde{\phi}(\lambda) = \phi(\hat{\lambda})$ . It is easily seen that  $\tilde{\phi}$  is quasi-convex and satisfies a growth condition of order  $p$ . Since  $\mu \in \nabla \mathcal{J}_{3 \times 3}(B)$ , we have

$$\phi(\hat{\nabla} v(\hat{x})) = \tilde{\phi}(\nabla v(\hat{x})) \leq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} \tilde{\phi}(\lambda) d\mu_x = \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \phi(\hat{\lambda}) d\hat{\mu}_x \quad \text{a.e } \hat{x} \in S$$

so that for a.e  $\hat{x} \in S$

$$\phi(\hat{\nabla} v(\hat{x})) = \int_0^1 \phi(\hat{\nabla} v(\hat{x})) ds \leq \int_0^1 \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \phi(\hat{\lambda}) d\hat{\mu}_{\hat{x},s} ds = \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \phi(\hat{\lambda}) d\nu_{\hat{x}}.$$

Proof of *iv*): We know that  $\mathbf{E}\nu_{\hat{x}} = \hat{\nabla} v(\hat{x})$  a.e  $\hat{x} \in S$ . Since  $(\nabla u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  is bounded in  $L^p(\Omega, \mathbf{M}^{3 \times 3})$ , there exists  $u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  and a subsequence not relabeled such that  $u_\varepsilon \rightarrow u$  strongly in  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  and weakly in  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , and

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} \lambda d\sigma_x = \mathbf{E}\sigma_x.$$

In order to establish that  $\hat{\nabla}^{-1}(\mathbf{E}\nu_{\hat{x}}) = \gamma_S(\nabla^{-1}(\mathbf{E}\sigma_x))$  a.e  $\hat{x} \in S$ , we just have to show that  $v = \gamma_S(u)$  almost everywhere on  $S$ . The equality  $v_\varepsilon(\hat{x}, x_3) = u_\varepsilon(\hat{x}, \varepsilon x_3)$  a.e. in  $B$  implies that  $\gamma_S(v_\varepsilon) = \gamma_S(u_\varepsilon)$ . Thus the result follows from the continuity of the trace operator from  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  into  $L^p(S, \mathbb{R}^3)$  and from  $W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  into  $L^p(S, \mathbb{R}^3)$  and the weak convergences  $v_\varepsilon \rightharpoonup v$  in  $W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  and  $u_\varepsilon \rightharpoonup u$  in  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ .  $\square$

Let us equip the space  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  with the  $nar \times \Theta$ -convergence, we claim that the sequence  $(\mathcal{F}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$   $\Gamma_{nar \times \Theta}$ -converges to the functional  $\mathcal{F}$ . The proof consists in establishing the next two propositions.

**Proposition 5.** *Let  $(\sigma, \nu)$  be any pair in  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ . Then for every  $((\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  in  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  converging to  $(\sigma, \nu)$ , we have*

$$\mathcal{F}(\sigma, \nu) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon).$$

*Proof.* We can assume  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) < +\infty$  otherwise there is nothing to prove. Then from lemma 1, there exists a subsequence not relabelled such that:

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon &= \delta_{\nabla u_\varepsilon} \otimes dx, \quad \mu_\varepsilon = \delta_{\nabla v_\varepsilon} \otimes dx, \quad v_\varepsilon = 1_{Br_\varepsilon} u_\varepsilon, \\ \sigma &\in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega), \\ u_\varepsilon &\rightarrow u \text{ strongly in } L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \text{ and weakly in } W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ v_\varepsilon &\rightarrow v \text{ strongly in } L^p(B, \mathbb{R}^3) \text{ and weakly in } W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3), \\ \nu &\in \hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S) \text{ and } \hat{\nabla}^{-1}(\mathbf{E}\nu_{\hat{x}}) = \gamma_S(\nabla^{-1}(\mathbf{E}\sigma_x)). \end{aligned}$$

This implies that  $\mathcal{I}(\sigma, \nu) < +\infty$  and it suffices to establish the following two inequalities:

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma_\varepsilon \geq \int_{\Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma \quad (4)$$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} g(\hat{\lambda} | \frac{1}{\varepsilon} \lambda_3) d\mu_\varepsilon \geq \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu \quad (5)$$

Proof of (4): take  $\eta > \varepsilon$ . Using the lower semi-continuity property of Young measures, we get

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma_\varepsilon \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\eta \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma_\varepsilon \geq \int_{\Omega_\eta \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma,$$

and letting  $\eta \rightarrow 0$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma_\varepsilon \geq \int_{\Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma.$$

Proof of (5): as above, thanks to assertion *iii*) from lemma 1, and to the lower semi-continuity property of Young measures, we have

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} g(\hat{\lambda} | \frac{1}{\varepsilon} \lambda_3) d\mu_\varepsilon &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} g_0(\hat{\lambda}) d\mu_\varepsilon \\ &\geq \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} g_0(\hat{\lambda}) d\mu \\ &= \int_{B \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} g_0(\hat{\lambda}) (d\hat{\mu}_x \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx \\ &= \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu, \end{aligned}$$

so that  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \geq \mathcal{F}(\sigma, \nu)$ , which ends the proof of Proposition 5.  $\square$

**Proposition 6.** *For every  $(\sigma, \nu) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  there exists a sequence  $((\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  in  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  converging to  $(\sigma, \nu)$  such that*

$$\mathcal{F}(\sigma, \nu) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon).$$

*Proof.* We can assume  $\mathcal{F}(\sigma, \nu) < +\infty$  otherwise there is nothing to prove. Thus we have  $(\sigma, \nu) \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  and  $\hat{\nabla}^{-1}(\mathbf{E}\nu_{\hat{x}}) = \gamma_S(\nabla^{-1}(\mathbf{E}\sigma_x))$ . This implies that there exists  $u_n \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  and  $v_n \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  such that  $(|\nabla u_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(|\hat{\nabla} v_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$  are uniformly integrable, and

$$\sigma_n := \delta_{\nabla u_n} \otimes dx \xrightarrow{nar} \sigma \text{ in } \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega), \quad (6)$$

$$\nu_n := \delta_{\hat{\nabla} v_n} \otimes d\hat{x} \xrightarrow{nar} \nu \text{ in } \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S). \quad (7)$$

Note that we also have

$$(\delta_{\hat{\nabla} v_n} \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx \xrightarrow{nar} (\nu_{\hat{x}} \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx \quad (8)$$

in  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  when  $n \rightarrow +\infty$ .

Since  $f$  and  $g$  satisfy a  $(C_p)$  condition,  $f(\nabla u_n)$  and  $g_0(\hat{\nabla} v_n)$  are uniformly integrable, so that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx = \int_{\Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma, \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S g_0(\hat{\nabla} v_n) d\hat{x} = \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu. \quad (10)$$

We show in the lemma below that we can modify  $u_n$  near  $S$  in order that  $\gamma_S(u_n) = v_n$  almost everywhere on  $S$ .

**Lemma 2.** *Let  $(\sigma, \nu) \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  with  $\gamma_S(\nabla^{-1}(\mathbf{E}\sigma_x)) = \hat{\nabla}^{-1}(\mathbf{E}\nu_{\hat{x}})$  a.e  $\hat{x} \in S$ . Consider a sequence  $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  in  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  satisfying  $\delta_{\nabla u_n(x)} \otimes dx \xrightarrow{nar} \sigma$  in  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega)$  and  $\delta_{\hat{\nabla} v_n(\hat{x})} \otimes d\hat{x} \xrightarrow{nar} \nu$  in  $\mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  and*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx &= \int_{\Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S g_0(\hat{\nabla} v_n) d\hat{x} &= \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu. \end{aligned} \quad (11)$$

*Then there exists a sequence  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfying the same conditions fulfilled by  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and additionally  $\gamma_S(\tilde{u}_n) = v_n$ .*

*Proof.* Note that sequences  $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  satisfying (11) exist (see [12], [3] theorem 11.4.2). Furthermore one may assume  $(|\nabla u_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$  is uniformly integrable. Indeed, consider the sequence  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  whose gradients generate the same Young measure  $\sigma$  and such that  $(|\nabla \tilde{u}_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$  is uniformly integrable (see proposition 3). In what follows, we still denote by  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  the sequence  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . We are going to modify the function  $u_n$  on a neighborhood of  $S$  so that the new

function satisfies  $\gamma_S(u_n) = v_n$  almost everywhere on  $S$ . In the sequel,  $v_n$  will be indifferently considered as a function in  $W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  or in  $W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  with  $\frac{\partial v_n}{\partial x_3} = 0$ .

From the coerciveness property satisfied by  $f$  and  $g_0$  respectively,  $\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx$  and  $\int_S |\hat{\nabla} v_n|^p d\hat{x}$  are bounded, thus  $u_n$ , resp.  $v_n$ , strongly converges in  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , resp. in  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$ , to a function  $u$ , resp.  $v$ , satisfying

$$\begin{aligned}\nabla u(x) &= \mathbf{E}\sigma_x \\ \hat{\nabla} v(\hat{x}) &= \mathbf{E}\nu_{\hat{x}}.\end{aligned}$$

Thus  $\gamma_S(u) = v$  almost everywhere on  $S$ .

Let  $\eta > 0$  intended to go to 0 and set  $\Sigma_{\eta} := S \times (-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2})$ . We are going to modify  $u_n$  on  $\Sigma_{\eta}$  so that the trace on  $S$  of the new function be equal to  $v_n$ , and in such a way to decrease  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx$ . Let  $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$  satisfying

$$\begin{aligned}\varphi_{\eta} &= 1 \text{ on } \Omega \setminus \Sigma_{2\eta}, \quad \varphi_{\eta} = 0 \text{ on } \Sigma_{\eta}, \quad 0 \leq \varphi_{\eta} \leq 1, \\ |\nabla \varphi_{\eta}| &\leq \frac{1}{\eta}\end{aligned}$$

and define

$$u_{n,\eta} = \varphi_{\eta}(u_n - v_n) + v_n. \quad (12)$$

Clearly  $u_{n,\eta}$  belongs to  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  and  $\gamma_S(u_{n,\eta}) = v_n$ . Moreover

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta}) dx &= \int_{\Sigma_{\eta}} f(\nabla u_{n,\eta}) dx + \int_{\Sigma_{2\eta} \setminus \Sigma_{\eta}} f(\nabla u_{n,\eta}) dx + \int_{\Omega \setminus \Sigma_{2\eta}} f(\nabla u_{n,\eta}) dx \\ &\leq \int_{\Sigma_{\eta}} f(\nabla v_n) dx + \int_{\Sigma_{2\eta} \setminus \Sigma_{\eta}} f(\nabla u_{n,\eta}) dx + \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx.\end{aligned}$$

Thus, from the growth condition in (1),

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta}) dx &\leq C \left( \eta + \frac{1}{\eta^p} \int_{\Sigma_{2\eta}} |u_n - v_n|^p dx + \int_{\Sigma_{2\eta}} (|\nabla u_n|^p) dx \right) \\ &\quad + \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx\end{aligned}$$

where, from now on,  $C$  denotes various positive constants depending only on  $\beta$ ,  $p$  and  $\Omega$ . Letting  $n \rightarrow +\infty$ , from (11) we obtain

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta}) dx &\leq C \left( \eta + \frac{1}{\eta^p} \int_{\Sigma_{2\eta}} |u - v|^p dx + \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Sigma_{2\eta}} (|\nabla u_n|^p) dx \right) \\ &\quad + \int_{\Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma.\end{aligned}$$

But since  $\gamma_S(u) = v$  on  $S$ , the following Poincaré inequality holds

$$\int_{\Sigma_{2\eta}} |u - v|^p dx \leq \eta^p \int_{\Sigma_{2\eta}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right|^p dx$$

so that, letting  $\eta \rightarrow 0$ , from the uniform integrability of  $(|\nabla u_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$  it comes

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta}) \, dx \leq \int_{\Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) \, d\sigma.$$

We conclude by a diagonalization argument (see lemma 11.1.1 in [3]): there exists an application  $n \mapsto \eta(n)$  such that  $\eta(n) \rightarrow 0$  when  $n \rightarrow +\infty$  and

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta(n)}) \, dx \leq \int_{\Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) \, d\sigma.$$

Such argument is valid because the set  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega)$  endowed with the narrow topology is metrizable (see [9], proposition 2.3.1).

Let now  $\tilde{u}_n := u_{n,\eta(n)}$ . It remains to show that the sequences  $(\nabla \tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(\nabla u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  generate the same Young measure. Indeed

$$\{x : \nabla \tilde{u}_n \neq \nabla u_n\} \subset \Sigma_{2\eta(n)}$$

which tends to a zero measure set when  $n \rightarrow +\infty$ .  $\square$

*Proof of Proposition 6 continued.* In what follows we denote the function  $\tilde{u}_n$  introduced in lemma 2 by  $u_n$ . According to a classical interchange argument between infimum and integrals (see [2]) we can write

$$\int_S g_0(\hat{\nabla} v_n) \, d\hat{x} = \inf_{\xi \in \mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)} \int_S g(\hat{\nabla} v_n | \xi) \, d\hat{x}.$$

Let  $\xi_n \in \mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)$  satisfying

$$\left| \int_S g(\hat{\nabla} v_n | \xi_n) \, d\hat{x} - \int_S g_0(\hat{\nabla} v_n) \, d\hat{x} \right| \leq \frac{1}{n},$$

then

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S g(\hat{\nabla} v_n | \xi_n) \, d\hat{x} = \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\nu. \quad (13)$$

Consider the function  $v_{n,\varepsilon} \in W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  defined by:

$$v_{n,\varepsilon}(\hat{x}, x_3) := v_n(\hat{x}) + \varepsilon x_3 \xi_n(\hat{x}).$$

Then

$$\mu_{n,\varepsilon} := \delta_{\nabla v_{n,\varepsilon}(x)} \otimes dx \stackrel{nar}{=} (\delta_{\hat{\nabla} v_n(\hat{x})} \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx \quad (14)$$

in  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  when  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Indeed set  $\tilde{v}_n(x) := v_n(\hat{x})$ . Since  $\nabla \tilde{v}_n - \nabla v_{n,\varepsilon} \rightarrow 0$  strongly in  $L^p(B, \mathbf{M}^{3 \times 3})$  when  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\nabla v_{n,\varepsilon}$  and  $\nabla \tilde{v}_n$  generate the same Young measure  $(\delta_{\hat{\nabla} v_n(\hat{x})} \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx$  in  $\mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$ .

Define the function  $u_{n,\varepsilon}$  by:

$$u_{n,\varepsilon}(\hat{x}, x_3) = \begin{cases} T_{-\varepsilon} u_n + \frac{\varepsilon}{2} \xi_n(\hat{x}) & \text{in } \Omega_{\varepsilon}^+ \\ v_n(\hat{x}) + x_3 \xi_n(\hat{x}) & \text{in } B_{\varepsilon} \\ T_{\varepsilon} u_n - \frac{\varepsilon}{2} \xi_n(\hat{x}) & \text{in } \Omega_{\varepsilon}^- \end{cases}$$

where  $T_{\pm\varepsilon}$  operates on every function  $u$  as  $T_{\pm\varepsilon}u(\hat{x}, x_3) = u(\hat{x}, x_3 \pm \frac{\varepsilon}{2})$  for every  $x \in \Omega_{\varepsilon}^{\pm}$ .

From the local Lipschitz property satisfied by  $g$ , clearly

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g(\hat{\nabla} v_{n,\varepsilon} | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_{n,\varepsilon}}{\partial x_3}) dx = \int_S g(\hat{\nabla} v_n | \xi_n) d\hat{x}.$$

On the other hand, from the local Lipschitz property satisfied by  $f$ , for every fixed  $n \in \mathbb{N}$ , one obtains

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\varepsilon}} f(\nabla u_{n,\varepsilon}) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\varepsilon}^+} f(\nabla(T_{-\varepsilon}u_n)) dx + \int_{\Omega_{\varepsilon}^-} f(\nabla(T_{\varepsilon}u_n)) dx \\ &= \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Let us now show that  $\nabla u_{n,\varepsilon}$  and  $\nabla u_n$  generate the same Young measure. Indeed

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{n,\varepsilon} - \nabla u_n| dx = \int_{\Omega_{\varepsilon}} |\nabla u_{n,\varepsilon} - \nabla u_n| dx + \int_{B_{\varepsilon}} |\nabla u_{n,\varepsilon} - \nabla u_n| dx,$$

and using Hölder inequality,

$$\begin{aligned} \int_{B_{\varepsilon}} |\nabla u_{n,\varepsilon} - \nabla u_n| dx &= \int_{B_{\varepsilon}} |\nabla(v_n - x_3 \xi_n) - \nabla u_n| dx \\ &\leq |B_{\varepsilon}|^{1-\frac{1}{p}} \left( \int_{B_{\varepsilon}} |\nabla(v_n - x_3 \xi_n) - \nabla u_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}; \end{aligned}$$

which tends to 0 when  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On the other hand, writing

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} |\nabla u_{n,\varepsilon} - \nabla u_n| dx \leq \int_{\Omega_{\varepsilon}^+} |\nabla T_{-\varepsilon}u_n - \nabla u_n| dx + \int_{\Omega_{\varepsilon}^-} |\nabla T_{\varepsilon}u_n - \nabla u_n| dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_{\varepsilon}} |\xi_n| dx,$$

one can easily see that  $\int_{\Omega_{\varepsilon}} |\nabla u_{n,\varepsilon} - \nabla u_n| dx$  tends to 0 when  $\varepsilon \rightarrow 0$ . We deduce

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{n,\varepsilon} - \nabla u_n| dx \rightarrow 0 \text{ when } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (16)$$

thus  $\nabla u_{n,\varepsilon}$  and  $\nabla u_n$  generate the same Young measure.

Finally, we can write

$$\begin{aligned} \sigma_{n,\varepsilon} &= \delta_{\nabla u_{n,\varepsilon}(x)} \otimes dx \xrightarrow{nar} \delta_{\nabla u_n(x)} \otimes dx \xrightarrow{nar} \sigma, \\ \mu_{n,\varepsilon} &\xrightarrow{nar} (\delta_{\hat{\nabla} v_n(\hat{x})} \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx \xrightarrow{nar} (\nu_{\hat{x}} \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx, \\ \mathcal{F}_{\varepsilon}(\sigma_{n,\varepsilon}, \mu_{n,\varepsilon}) &\rightarrow \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx + \int_S g(\hat{\nabla} v_n | \xi_n) d\hat{x} \\ &\rightarrow \int_{\Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma + \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu, \end{aligned}$$

where in the previous three lines the first arrow indicates the convergence when  $\varepsilon \rightarrow 0$  and the second one when  $n \rightarrow +\infty$ .

We conclude by noting that  $\Theta((\nu_{\hat{x}} \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx) = \nu$ , and by using the same kind of diagonalization argument as in lemma 2: there exists an application  $\varepsilon \mapsto n(\varepsilon)$  such that  $n(\varepsilon) \rightarrow +\infty$  when  $\varepsilon \rightarrow 0$  and

$$\begin{cases} (\sigma_{n(\varepsilon), \varepsilon}, \mu_{n(\varepsilon), \varepsilon}) \xrightarrow{\text{nar}} ((\sigma, \nu_{\hat{x}} \otimes \delta_{0_{\mathbb{R}^3}}) \otimes dx), \\ \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_{n(\varepsilon), \varepsilon}, \mu_{n(\varepsilon), \varepsilon}) \rightarrow \int_{\Omega \times \mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) d\sigma + \int_{S \times \mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) d\nu = \mathcal{F}(\sigma, \mu). \end{cases}$$

□

We state now our main result.

**Theorem 3.** *The sequence  $(\mathcal{F}_\varepsilon - L)_{\varepsilon > 0}$   $\Gamma_{\text{nar} \times \Theta}$ -converges to the functional  $\mathcal{F} - L$ . Furthermore, if  $(\bar{\sigma}_\varepsilon, \bar{\mu}_\varepsilon) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)$  is a  $\varepsilon$ -minimizer of  $\mathcal{F}_\varepsilon - L$ , i.e satisfies*

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\bar{\sigma}_\varepsilon, \bar{\mu}_\varepsilon) - L(\bar{\sigma}_\varepsilon) \leq \varepsilon + \inf_{(\sigma, \mu) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 3}(B)} (\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma, \mu) - L(\sigma)),$$

then there exists a subsequence of  $((\bar{\sigma}_\varepsilon, \bar{\mu}_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  converging to  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu})$  which is a minimizer of  $\inf_{(\sigma, \nu) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} (\mathcal{F}(\sigma, \nu) - L(\sigma))$ . Moreover  $\hat{\nabla}^{-1}(\mathbf{E}\nu_{\hat{x}}) = \gamma_S(\nabla^{-1}(\mathbf{E}\sigma_x))$  for a.e  $x \in S$ .

*Proof.* The proof is a straightforward consequence of Lemma 1, Propositions 5 and Proposition 6. Indeed,  $L$  is easily seen to be a  $\text{nar} \times \Theta$ -continuous perturbation of  $\mathcal{F}_\varepsilon$ , so that  $\mathcal{F}_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_{\text{nar} \times \Theta}} \mathcal{F} \implies \mathcal{F}_\varepsilon - L \xrightarrow{\Gamma_{\text{nar} \times \Theta}} \mathcal{F} - L$ . □

## 5 Relationship between the solution in the displacement formulation and that in the Young measure formulation

Let  $\bar{u} \in \text{argmin}(F - L)$  and let  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu}) \in \text{argmin}(\mathcal{F} - L)$ . We will show that the Young measure formulation furnishes an integral representation with respect to the probability measures  $\bar{\sigma}_x$  and  $\bar{\nu}_x$  of the macroscopic quantities  $\nabla \bar{u}$  and  $\hat{\nabla} \gamma_S(\bar{u})$ . In the next proposition, we establish that the minima of the two limit problems, the one written in terms of Sobolev functions and the other written in terms of Young measures, are the same.

**Proposition 7.** *The minima of the two limit problems coincide, ie*

$$\min_{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)} \{F(u) - L(u)\} = \min_{(\sigma, \nu) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} \{\mathcal{F}(\sigma, \nu) - L(\sigma)\}.$$

*Proof.* The proof is a straightforward consequence of the  $\Gamma$ -convergence of  $F_\varepsilon$  to  $F$ , and the  $\Gamma_{\text{nar} \times \Theta}$ -convergence of  $\mathcal{F}_\varepsilon$  to  $\mathcal{F}$ . □

**Corollary 1.** *Let  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu})$  be a minimizer of*

$$\inf_{(\sigma, \nu) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} (\mathcal{F}(\sigma, \nu) - L(\sigma)),$$

and  $\bar{u}$  (resp.  $\bar{v}$ ) be the unique element of  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  (resp.  $W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$ ) such that  $\nabla \bar{u}(x) = \mathbf{E} \bar{\sigma}_x$  a.e  $x \in \Omega$  (resp.  $\hat{\nabla} \bar{v}(\hat{x}) = \mathbf{E} \bar{\nu}_{\hat{x}}$  a.e  $\hat{x} \in S$ ). Then,  $\gamma_S(\bar{u}) = \bar{v}$  almost everywhere on  $S$ , and  $\bar{u}$  solves the problem  $\inf_{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)} (F(u) - L(u))$ . Moreover, one has

$$\begin{aligned} \nabla \bar{u}(x) &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} \lambda \, d\bar{\sigma}_x \text{ a.e } x \in \Omega; \\ \hat{\nabla} \gamma_S(\bar{u})(\hat{x}) &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} \, d\bar{\nu}_{\hat{x}} \text{ a.e } \hat{x} \in S; \\ Qf(\nabla \bar{u}(x)) &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) \, d\bar{\sigma}_x \text{ a.e } x \in \Omega; \\ Qg_0(\hat{\nabla} \gamma_S(\bar{u})(\hat{x})) &= \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}_{\hat{x}} \text{ a.e } \hat{x} \in S. \end{aligned} \tag{17}$$

*Proof.* We begin by proving the four equalities. Let  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu})$  be a minimizer of  $\min \{ \mathcal{F}(\sigma, \nu) : (\sigma, \nu) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S) \}$ . Then  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu}) \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$  and  $\gamma_S(\nabla^{-1}(\mathbf{E} \bar{\sigma}_x)) = \nabla^{-1}(\mathbf{E} \bar{\nu}_{\hat{x}})$ , so that there exists  $\bar{u} \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  and  $\bar{v} \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  satisfying

$$\nabla \bar{u}(x) = \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} \lambda \, d\bar{\sigma}_x(\lambda) \text{ a.e } x \in \Omega, \tag{18}$$

$$\hat{\nabla} \bar{v}(\hat{x}) = \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} \, d\bar{\nu}_{\hat{x}}(\hat{\lambda}) \text{ a.e } \hat{x} \in S, \tag{19}$$

and  $\bar{v} = \gamma_S(\bar{u})$  a.e on  $S$ . Thus, the first two equalities hold. On the other hand, since  $Qf$  and  $Qg_0$  are quasi-convex,

$$Qf \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} \lambda \, d\bar{\sigma}_x(\lambda) \right) \leq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} Qf(\lambda) \, d\bar{\sigma}_x(\lambda) \leq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) \, d\bar{\sigma}_x(\lambda), \tag{20}$$

$$Qg_0 \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} \, d\bar{\nu}_{\hat{x}}(\hat{\lambda}) \right) \leq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} Qg_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}_{\hat{x}}(\hat{\lambda}) \leq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}_{\hat{x}}(\hat{\lambda}). \tag{21}$$

In order to prove the converse inequalities, we use a localization argument. Let  $\hat{x}_0 \in S$  be a fixed point,  $Q_\rho(\hat{x}_0) = \hat{Q}_\rho(\hat{x}_0) \times (-\rho, \rho)$  the cylinder of  $\mathbb{R}^3$ , where  $\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)$  is the ball of  $\mathbb{R}^2$  centered at  $\hat{x}_0$ . Writing  $\mathcal{F}_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0}$ ,  $\mathcal{F}^{\rho, \hat{x}_0}$ ,  $F_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0}$ , and  $F^{\rho, \hat{x}_0}$  for the functionals  $\mathcal{F}_\varepsilon$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $F_\varepsilon$ , and  $F$  localized at  $Q_\rho(\hat{x}_0)$ , and replacing the constraint  $u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  by the constraint  $u \in \bar{u} + W_0^{1,p}(Q_\rho(\hat{x}_0), \mathbb{R}^3)$ , one can easily see that  $x \mapsto \bar{\sigma}_x$  and  $\hat{x} \mapsto \bar{\nu}_{\hat{x}}$  restricted to  $Q_\rho(\hat{x}_0)$  and  $\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)$  respectively, are such that  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu})$  is also a minimizer of the localized problem

$$\inf \left\{ \mathcal{F}^{\rho, \hat{x}_0}(\sigma, \nu) : \sigma \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(Q_\rho(\hat{x}_0)), \nu \in \mathcal{Y}_{3 \times 2}(\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)) \right\}.$$

On the other hand, analysis similar to that in the proofs of Theorem 3 and of Theorem 3 in [6] shows that  $\mathcal{F}_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0} \xrightarrow{\Gamma_{nar} \times \Theta} \mathcal{F}^{\rho, \hat{x}_0}$  and  $F_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0} \xrightarrow{\Gamma} F^{\rho, \hat{x}_0}$ . From the  $\Gamma$ -convergence of  $F_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0}$ , there exists a sequence  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  strongly converging to  $\bar{u}$  in  $L^p(Q_\rho(\hat{x}_0), \mathbb{R}^3)$  such that

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( F_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0}(u_\varepsilon) - L(u_\varepsilon) \right) \\ &= \int_{Q_\rho(\hat{x}_0)} Qf(\nabla \bar{u}) \, dx + \int_{\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)} Qg_0(\hat{\nabla} \gamma_S(\bar{u})) \, d\hat{x} - L(\bar{u}). \end{aligned} \quad (22)$$

Moreover, according to the Prokhorov compactness theorem,  $\sigma_\varepsilon = \delta_{\nabla u_\varepsilon(x)} \otimes dx \xrightarrow{nar} \bar{\sigma}$  and  $\mu_\varepsilon = \delta_{\nabla u_\varepsilon(x)} \otimes dx \xrightarrow{\Theta} \bar{\nu}$  where  $\bar{\sigma} \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega)$  and  $\bar{\nu} \in \hat{\nabla} \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)$ . Now, from the  $\Gamma_{nar \times \Theta}$ -convergence, we obtain

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( F_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0}(u_\varepsilon) - L(u_\varepsilon) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \mathcal{F}_\varepsilon^{\rho, \hat{x}_0}(\sigma_\varepsilon, \mu_\varepsilon) - L(\sigma_\varepsilon) \right) \\ & \geq \int_{Q_\rho(\hat{x}_0)} \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) \, d\bar{\sigma}_x \right) dx + \int_{\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)} \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}_{\hat{x}} \right) d\hat{x} - L(\bar{\sigma}) \\ & \geq \int_{Q_\rho(\hat{x}_0)} \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) \, d\bar{\sigma}_x \right) dx + \int_{\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)} \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}_{\hat{x}} \right) d\hat{x} - L(\bar{\sigma}). \end{aligned} \quad (23)$$

Collecting (22), (23), we deduce

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\rho(\hat{x}_0)} Qf(\nabla(\bar{u})) \, dx \geq \int_{Q_\rho(\hat{x}_0)} \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) \, d\bar{\sigma}_{\hat{x}} \right) dx, \\ & \int_{\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)} Qg_0(\hat{\nabla} \gamma_S(\bar{u})) \, d\hat{x} \geq \int_{\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0)} \left( \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}_{\hat{x}} \right) d\hat{x}. \end{aligned}$$

By choosing  $\hat{x}_0$  outside a suitable  $\mathcal{H}^2$ -negligible subset of  $S$  (take  $\hat{x}_0$  a Lebesgue point of each two integrands in each two members), dividing respectively the two members of each inequality by  $\mathcal{H}^3(Q_\rho(\hat{x}_0))$  and  $\mathcal{H}^2(\hat{Q}_\rho(\hat{x}_0))$  and letting  $\rho \rightarrow 0$ , we obtain

$$\begin{aligned} Qf(\nabla \bar{u}(\hat{x}_0)) & \geq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 3}} f(\lambda) \, d\bar{\sigma}_{\hat{x}_0}, \\ Qg_0(\hat{\nabla} \gamma_S(\bar{u})(\hat{x}_0)) & \geq \int_{\mathbf{M}^{3 \times 2}} g_0(\hat{\lambda}) \, d\bar{\nu}_{\hat{x}_0}, \end{aligned}$$

which completes the proof of the last two equalities.

It is easy to see that  $\bar{u}$  is a minimizer of  $\mathcal{F}$ . Indeed, according to the last two equalities in (17) we have

$$\begin{aligned} F(\bar{u}) - L(\bar{u}) &= \mathcal{F}(\bar{\sigma}, \bar{\nu}) - L(\bar{\sigma}) \\ &= \min_{(\sigma, \nu) \in \mathcal{Y}_{3 \times 3}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{3 \times 2}(S)} (\mathcal{F} - L) \\ &= \min_{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)} (F - L) \end{aligned}$$

□

**Acknowledgements:** I would like to thank Françoise Krasucki and Gérard Michaille for their precious support and for all the fruitful discussions we had.

## 6 References

1. E. Acerbi, G. Buttazzo, D. Percivale. *Thin inclusions in linear elasticity: a variational approach*. J. reine angew. Math. **386** (1988), 99-115.
2. O. Anza Hafsá, J. P. Mandallena. *Interchange of infimum and integral*. Calc. Var. **18** (2003), 433-449.
3. H. Attouch, G. Buttazzo, G. Michaille. *Variational analysis in Sobolev and BV space: application to PDEs and Optimization*. MPS-SIAM Book Series on Optimization 6, December 2005.
4. J.M. Ball. *A version of the fundamental theorem for Young measures*. PDE's and Continuum Models of Phase Transitions. M. Rascle, D. Serre, M. Slemrod eds. Lecture Notes in Physics **344**, Springer Verlag, New York, (1989) 207-215.
5. J.M. Ball, R.D. James. *Fine phase mixtures as minimizers of energy*. Arch. Rat. Mech. Anal. **100** (1987) 13-52.
6. A.L. Bessoud, F. Krasucki, G. Michaille. *Multimaterial with strong interface: variational modelings*. To appear in Asymptotic Analysis.
7. A. L. Bessoud, F. Krasucki. *GMRES Algorithm for Multi-Materials with Strong Interface*. C. R. Acad. Sc. Paris, s I, Vol 343, (2006), 297-282.
8. K. Bhattacharya, R.D. James. *A theory of thin films of martensitic materials with applications to microactuators*. J. Mech. Phys. Solids **47** (1999), 531-576.
9. C. Castaing, P. Raynaud de Fitte, M. Valadier. *Young measures on topological spaces with applications in control theory and probability theory*. Mathematics and Its Applications, Kluwer, The Netherlands (2004).
10. I. Fonseca, S. Müller, P. Pedregal. *Analysis of concentration and oscillation effects generated by gradients*. Siam J. Math. Anal. **29** (1998), no 3, 736-756.
11. L. Freddi, R. Paroni. *The energy density of thin film via dimension reduction*. Interfaces and free boundaries, Vol. 6, (2004), 439-459.
12. D. Kinderlehrer, P. Pedregal. *Characterization of Young measures generated by gradients*. Arch. Rational Mech. Anal. **119** (1991), 329-365.
13. D. Kinderlehrer, P. Pedregal. *Gradient Young measures generated by sequences in Sobolev spaces*. J. Geom. Anal. **4** (1994), no.1, 59-90.
14. M. L. Leghmizi, C. Licht, G. Michaille. *The nonlinear membrane model: a Young measure and varifold formulation*. ESAIM: COCV, Vol. 11, (July 2005), 449-472.

15. P. Pedregal. *Parametrized measures and variational principle*. Birkhäuser, Boston 1997.
16. M. Valadier. *Young measures*. Methods of Nonconvex Analysis (A. Cellina ed.), Lecture Notes in Math. **1446**, Springer-Verlag, Berlin (1990) 152-188.
17. M. Valadier *A course on Young measures* Workshop di Teoria della Misura e Analisi Reale, Grado, September 19-October 2, 1993, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **26** suppl. (1994), 349-394.
18. L.C. Young *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory* W.B. Saunders Co., 1969.

## Chapitre 5

# Vers un modèle de plasticité dans la couche mince : la densité d'énergie du matériau rigide est à croissance d'ordre $p(\varepsilon)$ , $p(\varepsilon) \rightarrow 1^+$

On souhaite prendre en compte dans ce dernier chapitre, le cas où le matériau constituant la couche intermédiaire suit une loi de comportement pseudo-plastique, le reste de la structure étant toujours occupé par un matériau élastique. Dans ce cas, la densité d'énergie  $g$  du matériau dans la couche a une croissance linéaire, alors que la densité d'énergie  $f$  a une croissance d'ordre  $q > 1$ . Nous nous heurtons alors à deux nouvelles difficultés mathématiques : les fonctions  $f$  et  $g$  ont des croissances d'ordres différents, et la fonction  $g$  est à croissance linéaire, ce qui implique qu'il faut travailler dans un espace prenant en compte d'éventuelles discontinuités dans les champs de déplacement. D'un point de vue mécanique, il est raisonnable de modéliser le comportement de la couche rigide dans le cadre des petites perturbations. Dans ce cas, la densité d'énergie  $g$  est une fonction du gradient symétrique  $e(u)$ . Avec les mêmes notations qu'au chapitre précédent, l'énergie de la structure est alors donnée par la fonctionnelle définie sur  $LD(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap W^{1,q}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3)$  par :

$$J_\varepsilon(u) := \int_{\Omega_\varepsilon} f(\nabla u) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_B g(e(u)) dx,$$

où  $LD(\Omega, \mathbb{R}^3)$  est l'ensemble des fonctions  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  intégrables (qui appartiennent à  $L^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ) telles que le gradient symétrique  $e(u)$  appartient à  $L^1(\Omega, \mathbf{M}_s^{3 \times 3})$ . La configuration d'équilibre de la structure est donnée par le problème d'optimisation

$$\inf \{ J_\varepsilon(u) - L(u) : u \in LD(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap W^{1,q}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3) \}. \quad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

Introduisons  $BD(S, \mathbb{R}^2)$  l'espace des fonctions  $u : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  intégrables telles que  $e(u) \in \mathcal{M}(S, \mathbf{M}_s^{2 \times 2})$  est une mesure sur  $S$ . Dans [52], Iosifescu *et al.* ont étudié le comportement asymptotique de la solution  $u_\varepsilon$  de  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$  dans le cadre de la  $\Gamma$ -convergence. Lorsque  $g$  est convexe, ils obtiennent le problème limite suivant :

$$\inf \{ J(u) - L(u) : u \in W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3); \gamma_S(\hat{u}) \in BD(S, \mathbb{R}^2) \} \quad (\mathcal{P})$$

où  $J(u) := \int_{\Omega} Qf(\nabla u)dx + \int_S g_0(E(\gamma_S(\hat{u})), g_0(E(\gamma_S(\hat{u})))$  est une mesure scalaire qui définit une énergie de surface, et la fonction  $g_0$  est définie par  $g_0(\xi) = \inf_{(\hat{\lambda}, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3} g\left(\frac{\xi}{\hat{\lambda}} \mid \frac{\hat{\lambda}}{\lambda_3}\right)$   $\forall \xi \in \mathbf{M}_s^{2 \times 2}$ . Dans ce modèle, la trace  $\gamma_S(\hat{u})$  de  $\hat{u}$  sur  $S$  est obtenue à un déplacement rigide près. Il est intéressant d'étudier l'influence sur le modèle limite des deux solides qui entourent la couche rigide en fonction de la valeur de  $q$ . En effet, par définition de la trace,  $\gamma_S(\hat{u}) \in W^{1-1/q, q}(S, \mathbb{R}^2)$  et lorsque  $q > 3$ , l'espace  $W^{1-1/q, q}(S, \mathbb{R}^2)$  est un sous-espace de l'espace des fonctions continues Höldériennes  $\mathcal{C}_b^{0, 1-3/q}(S, \mathbb{R}^2)$ . Or, considérée comme une fonction de  $BD(S, \mathbb{R}^2)$ , le gradient de  $\gamma_S(\hat{u})$  (qui est une mesure) a la structure suivante :  $E(\gamma_S(\hat{u})) = E_a(\gamma_S(\hat{u})) d\hat{x} + [\gamma_S(\hat{u})] \otimes_s n_{\gamma_S(\hat{u})} \mathcal{H}^1 \llcorner J_{\gamma_S(\hat{u})} + C_{\gamma_S(\hat{u})}$  (voir [3]). Donc dans ce cas, le terme  $[\gamma_S(\hat{u})] \otimes_s n_{\gamma_S(\hat{u})} \mathcal{H}^1 \llcorner J_{\gamma_S(\hat{u})}$  qui modélise les sauts dans  $S$  est nul. Pour  $q = 3$ , les fonctions de  $W^{1-1/3, 3}(S, \mathbb{R}^2)$  appartiennent à l'espace  $VMO(S, \mathbb{R}^2)$  (vanishing mean oscillation) et donc  $\gamma_S(\hat{u})$  est borné (voir [39]).

Nous proposons dans ce chapitre une méthode alternative, inspirée des méthodes de régularisation de Norton-Hoff, en considérant une loi en puissance d'ordre  $p$ , où  $p$  est un paramètre destiné à tendre vers 1. Ces modèles avec loi en puissance ont été introduits par Ramberg et Osgood pour modéliser des alliages d'aluminium ([61]) et sont aujourd'hui souvent utilisés pour approcher les lois de comportement élasto-plastiques (voir Temam [64], Bensoussan et Frehse [14]). Dans Suquet [63], l'étude est faite dans le cadre d'une analyse asymptotique d'un multi-matériau dont la couche mince est occupée par un matériau de faible rigidité (d'ordre  $\varepsilon$ ) et dont le comportement est donné par la loi en puissance :  $\sigma^\varepsilon = \varepsilon K |e(u^\varepsilon)|^{p-2} e(u^\varepsilon)$ . Notre idée consiste à étudier dans un premier temps, le problème lorsque la densité d'énergie  $g$  est à croissance d'ordre  $p$ , pour  $1 < p \leq q$  fixé. Nous obtenons un premier modèle limite par  $\Gamma$ -convergence lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Puis, afin d'obtenir un modèle qui rend compte des discontinuités possibles du déplacement dans la couche lorsque celle-ci est occupée par un matériau élasto-plastique, on étudie la  $\Gamma$ -convergence de ce problème limite lorsque  $p$  tend vers 1. On retrouve ainsi le problème limite ( $\mathcal{P}$ ).

Plus précisément, on se place dans le cadre des petites perturbations. Afin de ne pas ajouter les difficultés supplémentaires liées à la relaxation, on suppose que  $f$  et  $g$  sont des fonctions convexes de  $e(u)$ , et on suppose que  $f$  est à croissance d'ordre 2. On obtient un premier modèle en identifiant la  $\Gamma$ -limite  $\mathcal{F}$  de la fonctionnelle énergie  $\mathcal{F}_\varepsilon : W_{\Gamma_0}^{1, p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1, p}(B, \mathbb{R}^3)$  définie, après un changement d'échelle approprié, par

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u, v) := \int_{\Omega_\varepsilon} f(e(u))dx + \int_B g\left(\frac{e_{\alpha\beta}(v)}{\frac{1}{\varepsilon}e_{\alpha 3}(v)} \mid \frac{\frac{1}{\varepsilon}e_{\alpha 3}(v)}{\frac{1}{\varepsilon^2}e_{33}(v)}\right) dx.$$

La fonctionnelle limite  $\mathcal{F}$  est alors définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &: W_{\Gamma_0}^{1, 2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1, p}(S, \mathbb{R}^3) \\ \mathcal{F}(u, v) &:= \int_{\Omega} f(e(u))dx + \int_S g_0(e(v))d\hat{x} \end{aligned}$$

avec la relation  $\gamma_S(\hat{u}) = \hat{v}$ . On étudie alors le comportement de la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  lorsque  $p$  tend vers 1. Pour cela, on pose  $h_p := g_0$  et on renomme  $\mathcal{G}_p$  la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  qui est alors définie sur le domaine indépendant de  $p$  :  $W_{\Gamma_0}^{1, 2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times BD(S, \mathbb{R}^2)$ . En supposant que  $h_p$  converge simplement vers une fonction  $h$ , on montre que la fonctionnelle  $\mathcal{G}$  définie sur

$W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \text{BD}(S, \mathbb{R}^2)$  par

$$\mathcal{G}(u, v) := \int_{\Omega} f(e(u))dx + \int_S h(Ev)$$

est la  $\Gamma$ -limite de  $\mathcal{G}_p$ . Cette stratégie est intéressante d'un point de vue numérique. En effet, on peut considérer le premier modèle limite obtenu pour  $p$  fixé comme une approximation régulière du modèle de [52], quand  $p$  est suffisamment proche de 1. Par contre, d'un point de vue modélisation, ce procédé de convergence n'est pas variationnel et on ne peut pas conclure à la convergence des minimiseurs et des minima. Ceci nous conduit, dans la deuxième partie, à étudier le problème où la croissance de la densité d'énergie  $g$  varie avec  $\varepsilon$  :  $g$  est à croissance d'ordre  $p(\varepsilon)$ , où  $p(\varepsilon) \rightarrow 1$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On retrouve le modèle limite obtenu par les deux convergences précédentes. Le problème ( $\mathcal{P}$ ) est aussi bien la limite variationnelle quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  du problème avec  $g$  à croissance linéaire que du problème avec  $g$  à croissance d'ordre  $p$  qui tend vers 1 lorsque l'épaisseur de la couche tend vers 0. Mais cette dernière stratégie fournit un meilleur modèle car les déplacements sur  $S$  sont définis de façon unique.

## 5.1 Description du problème

Dans tout ce chapitre, les fonctions à valeur dans  $\mathbb{R}^3$  sont notées  $v = (v^1, v^2, v^3)$  et  $\hat{v} = (v^1, v^2)$ . On suppose que  $\Omega$  est un domaine cylindrique de  $\mathbb{R}^3$ , i.e.,  $\Omega = S \times ]-r, r[$ , avec  $r > \varepsilon$  de façon à ce que  $B_\varepsilon = S \times ]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[ \subset \subset \Omega$ . La partie  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon$  est occupée par un matériau élastique, sa densité d'énergie  $f$  satisfait une condition de croissance d'ordre 2, alors que  $g$ , la densité d'énergie du matériau dans la couche intermédiaire est à croissance d'ordre  $p$ ,  $1 < p \leq 2$ . Plus précisément, on suppose que  $f$  et  $g$  vérifient respectivement, une condition  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_p$  (voir 1.15). Dans [54], mais pour une autre problématique, l'auteur propose un modèle plus réaliste physiquement en considérant la trace du tenseur  $e(u)$  et sa partie déviatorique  $e^D(u)$ . La condition de croissance  $\alpha(|\xi|^p - 1) \leq g(\xi) \leq \beta(1 + |\xi|^p)$  est alors remplacée par une relation du type : il existe  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $c_i > 0$ ,  $1 \leq i \leq 4$  telles que, pour tout  $\xi \in \mathbf{M}_s^{3 \times 3}$

$$c_0 + c_1 |\text{tr}(\xi)|^2 + c_2 |\xi^D|^p \leq g(\xi) \leq c_3 |\text{tr}(\xi)|^2 + c_4 |\xi^D|^p.$$

Les espaces analogues aux espaces de Sobolev utilisés dans cette situation sont donnés dans [45].

L'énergie du système est donnée par la fonctionnelle

$$F_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} f(e(u))dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} g(e(u))dx$$

et, sous les hypothèses habituelles sur le chargement, l'application  $u \mapsto L(u)$  est continue sur  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , et par la méthode directe du calcul des variations, le problème

$$\inf \{ F_\varepsilon(u) - L(u); u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap W^{1,2}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3) \}, \quad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

possède une solution  $u_\varepsilon$ .

On opère le même changement de coordonnées qui transforme  $(\hat{x}, x_3) \in B_\varepsilon$  en  $(\hat{x}, \frac{x_3}{\varepsilon}) \in B$ , et on réécrit le problème en terme des deux variables  $u$  et  $v$ , où  $v$  est défini par :

$$\hat{v}(\hat{x}, x_3) = \hat{u}(\hat{x}, \varepsilon x_3); v^3(\hat{x}, x_3) = \varepsilon u^3(\hat{x}, \varepsilon x_3) \quad \forall x \in B.$$

Ce choix pour  $v$  permet de préserver la structure du tenseur linéarisé des déformations et d'obtenir ainsi des estimations intéressantes pour les suites d'énergie finie dans le cadre de l'élasticité linéarisée. En revanche, cette mise à l'échelle n'est pas adaptée dans le cadre non linéaire classique (voir [36]).

L'énergie interne du système est alors donnée par la fonctionnelle  $\mathcal{F}_\varepsilon$  définie par

$$\mathcal{F}_\varepsilon : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u, v) := \begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon} f(e(u)) \, dx + \int_B g\left(\left(\frac{e_{\alpha\beta}(v)}{\frac{1}{\varepsilon}e_{\alpha 3}(v)} \mid \frac{\frac{1}{\varepsilon}e_{\alpha 3}(v)}{\frac{1}{\varepsilon^2}e_{33}(v)}\right)\right) \, dx & \text{si } (u, v) \in \mathcal{A}_\varepsilon \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où l'ensemble  $\mathcal{A}_\varepsilon$  est caractérisé par

$$(u, v) \in \mathcal{A}_\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap W^{1,2}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3) \\ v \in W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3) \\ \hat{v}(\hat{x}, x_3) = \hat{u}(\hat{x}, \varepsilon x_3); \quad v^3(\hat{x}, x_3) = \varepsilon u^3(\hat{x}, \varepsilon x_3) \quad \forall x \in B. \end{cases}$$

On étend toute fonction  $w \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3)$  sur  $S \times ]\pm r, \pm 2r \mp \frac{\varepsilon}{2}[$  par réflexion, de façon à ce que l'extension  $\tilde{w}$  appartienne à  $W^{1,2}(S \times ]\pm \frac{\varepsilon}{2}, \pm 2r \mp \frac{\varepsilon}{2}[, \mathbb{R}^3)$  et satisfasse

$$\int_{S \times ]\pm \frac{\varepsilon}{2}, \pm 2r \mp \frac{\varepsilon}{2}[} |\nabla \tilde{w}|^2 \, dx \leq 2 \int_{\Omega_\varepsilon^\pm} |\nabla w|^2 \, dx. \quad (5.1)$$

Enfin, on définit pour tout  $w \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3)$  son  $\varepsilon$ -translaté  $T_\varepsilon w$  élément de  $W^{1,2}(\Omega \setminus S, \mathbb{R}^3)$  en posant

$$T_\varepsilon w(\hat{x}, x_3) := \begin{cases} \tilde{w}(\hat{x}, x_3 + \frac{\varepsilon}{2}) & \text{dans } \Omega^+ \\ \tilde{w}(\hat{x}, x_3 - \frac{\varepsilon}{2}) & \text{dans } \Omega^-. \end{cases}$$

## 5.2 Convergences variationnelles successives

### 5.2.1 $\Gamma$ -convergence lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et $p$ fixé

On est maintenant en mesure d'étudier le comportement de la solution  $u_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Considérons l'ensemble des déplacements admissibles

$$\mathcal{A} := \{(u, v) \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3); \quad v^3 = 0; \quad \gamma_S(\hat{u}) = \hat{v}\},$$

et soit  $\mathcal{F}$  la fonctionnelle définie par

$$\mathcal{F} : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\mathcal{F}(u, v) := \begin{cases} \int_{\Omega} f(e(u)) \, dx + \int_S g_0(\hat{e}(v)) \, d\hat{x} & \text{si } (u, v) \in \mathcal{A} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La densité d'énergie  $g_0 : \mathbf{M}_s^{2 \times 2} \longrightarrow \mathbb{R}$  est la fonction convexe définie pour tout  $\xi \in \mathbf{M}_s^{2 \times 2}$  par

$$g_0(\xi) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^3} g\left(\frac{\xi}{\lambda} \mid \frac{\hat{\lambda}}{\lambda_3}\right),$$

et vérifie la propriété suivante :

**Lemme 5.1.** *Pour tout  $\zeta \in \mathbf{M}^{3 \times 2}$ ,*

$$g_0(\hat{\zeta}^*) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^3} g((\zeta|\lambda)^*). \quad (5.2)$$

*Démonstration.* Soit  $\zeta \in \mathbf{M}^{3 \times 2}$ , alors

$$\begin{aligned} \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^3} g((\zeta|\lambda)^*) &= \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^3} g \left( \begin{array}{ccc} \zeta_{11} & \frac{1}{2}(\zeta_{12} + \zeta_{21}) & \frac{1}{2}(\zeta_{31} + \lambda_1) \\ \frac{1}{2}(\zeta_{12} + \zeta_{21}) & \zeta_{22} & \frac{1}{2}(\zeta_{32} + \lambda_2) \\ \frac{1}{2}(\zeta_{31} + \lambda_1) & \frac{1}{2}(\zeta_{32} + \lambda_2) & \lambda_3 \end{array} \right). \\ &= \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^3} g \left( \begin{array}{c|c} \hat{\zeta}^* & \hat{\lambda} \\ \hline \hat{\lambda} & \lambda_3 \end{array} \right) \\ &:= g_0(\hat{\zeta}^*). \end{aligned}$$

□

**Théorème 5.1.** *On munit  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3)$  de la convergence forte. La suite  $(\mathcal{F}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $\mathcal{F}$ .*

**Corollaire 5.1.** *La suite de fonctionnelles  $(\mathcal{F}_\varepsilon - L)_{\varepsilon>0}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $\mathcal{F} - L$ . De plus, si  $(\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3)$  est un minimiseur de  $\mathcal{F}_\varepsilon - L$ , alors, pour une sous-suite,  $((\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  converge fortement vers  $(\bar{u}, \bar{v})$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3)$  qui est un minimiseur de  $\mathcal{F} - L$ .*

On démontre le théorème 5.1 par l'intermédiaire des deux propositions suivantes

**Proposition 5.1** ( $\Gamma$ -liminf). *Pour tout  $(u, v) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3)$  et toute suite  $((u_\varepsilon, v_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  qui converge fortement dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3)$  vers  $(u, v)$ ,*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \geq \mathcal{F}(u, v).$$

**Proposition 5.2** ( $\Gamma$ -limsup). *L'espace  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3)$  étant muni de la convergence forte, pour tout  $(u, v) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3)$  on a*

$$(\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon)(u, v) \leq \mathcal{F}(u, v). \quad (5.3)$$

Avant de démontrer les propositions 5.1 et 5.2, on établit un résultat de compacité pour les suites d'énergie finie.

### Lemme de compacité

**Lemme 5.2.** *Soit  $((u_\varepsilon, v_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  une suite dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3)$  telle que  $\sup_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) < +\infty$ . Alors, il existe une sous-suite non renommée et  $(u, v) \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  tels que*

- i)  $u_\varepsilon \rightarrow u$  fortement dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et faiblement dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ;*
- ii)  $v_\varepsilon \rightarrow v$  fortement dans  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$  et faiblement dans  $W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$ ;*
- iii)  $v^3 = 0$  et  $\frac{\partial v}{\partial x_3} = 0$  donc  $v \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$ ;*

- iv)  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{e}(v_\varepsilon) dx_3 \rightharpoonup e(v)$  dans  $L^p(S, \mathbf{M}_s^{2 \times 2})$  ;  
v)  $\gamma_S(\hat{u}) = \hat{v}$ .

*Démonstration.* Puisque  $\sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) < +\infty$ ,  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{A}_\varepsilon$  et on a les estimations suivantes :

$$\int_{\Omega} |e(u_\varepsilon)|^p dx \leq C, \quad (5.4)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |e(u_\varepsilon)|^2 dx \leq C, \quad (5.5)$$

$$\int_B |e_{\alpha\beta}(v_\varepsilon)|^p dx \leq C, \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_B |e_{\alpha 3}(v_\varepsilon)|^p dx \leq C, \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_B \left| \frac{\partial v_\varepsilon^3}{\partial x_3} \right|^p dx \leq C. \quad (5.8)$$

*Preuve de i).* En combinant l'estimation (5.4) avec l'inégalité de Korn et le théorème de Rellich-Kondrakov, on déduit qu'il existe  $u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et une sous-suite (non renommée)  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  qui converge vers  $u$  fortement dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et faiblement dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ .

Pour toute fonction  $w \in W^{1,2}(\Omega \setminus S, \mathbb{R}^3)$ , on rappelle que  $[w]$  désigne le saut de  $w$  à travers  $S$ , et  $w|_S^\pm$  la trace sur  $S$  de  $w$  considéré comme un élément de  $W^{1,2}(\Omega^\pm, \mathbb{R}^3)$ . D'après (5.5), (5.1), et l'inégalité de Korn, on a

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\Omega \setminus S} |\nabla(T_\varepsilon u_\varepsilon)|^2 dx \leq 2 \sup_{\varepsilon > 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx < +\infty.$$

Par conséquent, quitte à extraire une sous-suite,  $(T_\varepsilon u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  converge faiblement vers une fonction  $z$  dans  $W^{1,2}(\Omega \setminus S, \mathbb{R}^3)$ . Or quelque soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus S, \mathbb{R}^3)$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus S} u \cdot \varphi dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus S} u_\varepsilon \cdot \varphi dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus S} u_\varepsilon \cdot T_{-\varepsilon} \varphi dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus S} T_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \varphi dx \\ &= \int_{\Omega \setminus S} z \cdot \varphi dx. \end{aligned}$$

Donc  $u = z$  pp sur  $S$  et  $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus S, \mathbb{R}^3)$ . De plus, pour tout  $\theta \in C_c^\infty(S)$ , en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} 2 \int_{B_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u_\varepsilon) \cdot \theta dx &= \int_{S+\frac{\varepsilon}{2}e_3} \theta \cdot u_{\varepsilon,+}^\alpha d\hat{x} - \int_{S-\frac{\varepsilon}{2}e_3} \theta \cdot u_{\varepsilon,-}^\alpha d\hat{x} - \int_{B_\varepsilon} u_\varepsilon^3 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} dx \\ &= \int_S [T_\varepsilon u_\varepsilon^\alpha] \cdot \theta d\hat{x} + I_\varepsilon \end{aligned} \quad (5.9)$$

où  $u_{\varepsilon, \pm}^{\alpha}$  est la trace de  $u_{\varepsilon}^{\alpha}$  sur  $S \pm \frac{\varepsilon}{2}e_3$  et  $I_{\varepsilon} := - \int_{B_{\varepsilon}} u_{\varepsilon}^3 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_{\alpha}} dx$ . Estimons  $I_{\varepsilon}$ .

$$\begin{aligned} |I_{\varepsilon}| &= \left| \int_{B_{\varepsilon}} u_{\varepsilon}^3 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_{\alpha}} dx \right| \leq C \int_{B_{\varepsilon}} |u_{\varepsilon}^3| dx \\ &\leq C |B_{\varepsilon}|^{1-\frac{1}{p}} \left( \int_{B_{\varepsilon}} |u_{\varepsilon}^3|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \varepsilon^{1-\frac{1}{p}} |S| \left( \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}^3|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Alors, en passant à la limite dans (5.9), d'après (5.7) et la convergence de  $T_{\varepsilon}u_{\varepsilon}$ , on obtient

$$\int_S [u^{\alpha}] \cdot \theta \, d\hat{x} = 0$$

donc  $[u^{\alpha}] = 0$  pp sur  $S$ .

De la même façon, on a

$$\int_{B_{\varepsilon}} e_{33}(u_{\varepsilon}) \cdot \theta \, dx = \int_S [T_{\varepsilon}u_{\varepsilon}^3] \cdot \theta \, d\hat{x}.$$

Le second membre tend vers zéro et le premier tend évidemment vers  $\int_S [u^3] \cdot \theta \, d\hat{x}$ . Par conséquent  $[u^3] = 0$  pp sur  $S$ . On a donc  $[u] = 0$ , ce qui entraîne que  $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ .

*Preuve de ii).* Montrons que  $v_{\varepsilon}$  est borné dans  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$ . D'après (5.6), (5.7), (5.8),

$$\int_B |e(v)|^p dx \leq C, \quad (5.10)$$

et d'après l'inégalité de Korn, si on montre que  $v_{\varepsilon}$  est borné dans  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$ , on pourra en déduire que  $v_{\varepsilon}$  est borné dans  $W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  et converge fortement dans  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$ .

On a

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon}^{\alpha}(\hat{x}, \pm|x_3|) &= u_{\varepsilon}^{\alpha}(\hat{x}, \pm\varepsilon|x_3|) = u_{\varepsilon}^{\alpha}(\hat{x}, \pm\varepsilon/2) - \int_{\pm\varepsilon|x_3|}^{\pm\varepsilon/2} \frac{\partial u_{\varepsilon}^{\alpha}}{\partial x_3}(\hat{x}, s) ds \\ &= (T_{\varepsilon}u_{\varepsilon}^{\alpha})_{|S}^{\pm}(\hat{x}) - \int_{\pm\varepsilon|x_3|}^{\pm\varepsilon/2} \frac{\partial u_{\varepsilon}^{\alpha}}{\partial x_3}(\hat{x}, s) ds. \end{aligned}$$

Alors, en ajoutant ces deux égalités intégrées sur  $S \times ]0, \pm\frac{1}{2}[$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_B |v_{\varepsilon}^{\alpha}(\hat{x}, x_3)|^p dx &\leq \frac{1}{2} \int_S (|(T_{\varepsilon}u_{\varepsilon}^{\alpha})_{|S}^{+}(\hat{x})|^p + |(T_{\varepsilon}u_{\varepsilon}^{\alpha})_{|S}^{-}(\hat{x})|^p) d\hat{x} + C\varepsilon^{p-1} \int_{B_{\varepsilon}} \left| \frac{\partial u_{\varepsilon}^{\alpha}}{\partial x_3} \right|^p dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_S (|(T_{\varepsilon}u_{\varepsilon}^{\alpha})_{|S}^{+}(\hat{x})|^p + |(T_{\varepsilon}u_{\varepsilon}^{\alpha})_{|S}^{-}(\hat{x})|^p) d\hat{x} + C\varepsilon^{p-1} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_{\varepsilon}^{\alpha}}{\partial x_3} \right|^p dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_S (|(T_{\varepsilon}u_{\varepsilon}^{\alpha})_{|S}^{+}(\hat{x})|^p + |(T_{\varepsilon}u_{\varepsilon}^{\alpha})_{|S}^{-}(\hat{x})|^p) d\hat{x} + C\varepsilon^{p-1} \|u_{\varepsilon}\|_{W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)}^p. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre est borné ( $T_{\varepsilon}u_{\varepsilon} \rightarrow u$  dans  $W^{1,2}(\Omega \setminus S, \mathbb{R}^3)$ ) et le second tend vers zéro quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Donc  $v_{\varepsilon}^{\alpha}$  est borné dans  $L^p(B)$ .

De la même façon, on a

$$v_{\varepsilon}^3(\hat{x}, \pm|x_3|) = \varepsilon u_{\varepsilon}^3(\hat{x}, \pm\varepsilon|x_3|) = \varepsilon (T_{\varepsilon}u_{\varepsilon}^3)_{|S}^{\pm}(\hat{x}) + \int_{\pm\frac{1}{2}}^{\pm|x_3|} \frac{\partial v_{\varepsilon}^3}{\partial x_3}(\hat{x}, s) ds,$$

donc

$$\int_B |v_\varepsilon^3(\hat{x}, x_3)|^p dx \leq \frac{\varepsilon^p}{2} \int_S (|(T_\varepsilon u_\varepsilon^+)|_S(\hat{x})|^p + |(T_\varepsilon u_\varepsilon^-)|_S(\hat{x})|^p) d\hat{x} + C \int_B \left| \frac{\partial v_\varepsilon^3}{\partial x_3} \right|^p dx, \quad (5.11)$$

qui tend vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Donc  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée dans  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$  et il existe  $v \in W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  vérifiant  $v^3 = 0$  tel que, pour une sous-suite,  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge vers  $v$  faiblement dans  $W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  et fortement dans  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$ .

*Preuve de iii).* Il suffit de montrer que  $\frac{\partial v}{\partial x_3} = 0$ , le reste résulte de l'isométrie entre  $W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  et  $\{v \in W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3) : \frac{\partial v}{\partial x_3} = 0\}$ . Ceci est une conséquence directe des estimations (5.7) et (5.8) combinées avec  $v^3 = 0$ .

*Preuve de iv).* C'est une conséquence immédiate de ii), de l'estimation (5.6) et de l'inégalité de Hölder.

*Preuve de v).* D'après la continuité de la trace et les convergences établies au i) et ii), comme  $\gamma_S(\hat{u}_\varepsilon) = \gamma_S(\hat{v}_\varepsilon)$ , on a  $\gamma_S(\hat{u}) = \hat{v}$ .  $\square$

### Preuve de la proposition 5.1 ( $\Gamma$ -liminf)

Démontrons la proposition 5.1. On suppose que  $\liminf_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) < +\infty$ . D'après le lemme de compacité, lemme 5.2,  $(u, v) \in \mathcal{A}$  et

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{e}(v_\varepsilon) dx_3 \rightharpoonup \hat{e}(v) = e(v) \text{ dans } L^p(S, \mathbf{M}_s^{2 \times 2}).$$

D'autre part,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(e(u_\varepsilon)) dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g((\hat{\nabla} v | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_3})^*) dx.$$

Avec les mêmes arguments qu'au chapitre 4, proposition 4.2, puisque  $f$  est convexe, on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(e(u_\varepsilon)) dx \geq \int_\Omega f(e(u)) dx. \quad (5.12)$$

De plus, d'après le lemme 5.1 et l'inégalité Jensen,

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g((\hat{\nabla} v_\varepsilon | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_3})^*) dx &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g_0(\hat{e}(v_\varepsilon)) dx \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S g_0\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{e}(v_\varepsilon) dx_3\right) d\hat{x} \\ &\geq \int_S g_0(e(v)) d\hat{x}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

En regroupant (5.12) et (5.13), on obtient finalement

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \geq \mathcal{F}(u, v). \quad (5.14)$$

**Preuve de la proposition 5.2 ( $\Gamma$ -limsup)**

Considérons l'ensemble  $\tilde{\mathcal{A}} := \{(u, v) \in \mathcal{A} : \gamma_S(u) \in C^1(\bar{S}, \mathbb{R}^3)\}$  et la fonctionnelle  $\tilde{\mathcal{F}} : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définie par :

$$\tilde{\mathcal{F}}(u, v) := \begin{cases} \int_{\Omega} f(e(u)) dx + \int_S g_0(e(v)) d\hat{x} & \text{si } (u, v) \in \tilde{\mathcal{A}} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et montrons que  $(\Gamma - \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_{\varepsilon})(u, v) \leq \tilde{\mathcal{F}}(u, v)$ . On suppose que  $\tilde{\mathcal{F}}(u, v) < +\infty$ . Alors  $(u, v) \in \tilde{\mathcal{A}}$ .

Soit  $\xi \in \mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)$ . On pose

$$\begin{cases} v_{\varepsilon}^{\alpha}(\hat{x}, x_3) := v^{\alpha}(\hat{x}) + \varepsilon x_3 \xi^{\alpha}(\hat{x}) \\ v_{\varepsilon}^3(\hat{x}, x_3) := \varepsilon u^3(\hat{x}, 0) + \varepsilon^2 x_3 \xi^3(\hat{x}) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u_{\varepsilon}(\hat{x}, x_3) = u(\hat{x}, x_3 - \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2} \xi(\hat{x}) & \text{dans } \Omega_{\varepsilon}^+ \\ u_{\varepsilon}^{\alpha}(\hat{x}, x_3) = v_{\varepsilon}^{\alpha}(\hat{x}, \frac{x_3}{\varepsilon}) & \text{dans } B_{\varepsilon} \\ u_{\varepsilon}^3(\hat{x}, x_3) = \frac{1}{\varepsilon} v_{\varepsilon}^3(\hat{x}, \frac{x_3}{\varepsilon}) & \text{dans } B_{\varepsilon} \\ u_{\varepsilon}(\hat{x}, x_3) = u(\hat{x}, x_3 + \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\varepsilon}{2} \xi(\hat{x}) & \text{dans } \Omega_{\varepsilon}^- \end{cases}$$

Alors,  $(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon})$  vérifie :  $u_{\varepsilon} \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap W^{1,2}(\Omega_{\varepsilon}, \mathbb{R}^3)$ ,  $v_{\varepsilon} \in W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  et  $\hat{v}(\hat{x}, x_3) = \hat{u}(\hat{x}, \varepsilon x_3)$ ,  $v^3(\hat{x}, x_3) = \varepsilon u^3(\hat{x}, \varepsilon x_3)$  pour tout  $x \in B$ . De plus,  $v_{\varepsilon} \rightarrow v$  dans  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$ . Puisque les fonctions  $f$  et  $g$  sont localement Lipschitziennes, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g \left( \frac{e_{\alpha\beta}(v_{\varepsilon})}{\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(v_{\varepsilon})} \middle| \frac{\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(v_{\varepsilon})}{\frac{1}{\varepsilon^2} e_{33}(v_{\varepsilon})} \right) dx = \int_S g \left( \frac{e_{\alpha\beta}(v)}{\xi^{\alpha} + \frac{\partial u^3}{\partial x_{\alpha}}(\hat{x}, 0)} \middle| \frac{\xi^{\alpha} + \frac{\partial u^3}{\partial x_{\alpha}}(\hat{x}, 0)}{\xi^3} \right) d\hat{x},$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\varepsilon}} f(e(u_{\varepsilon})) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Omega_{\varepsilon}^+} f(e(u(\hat{x}, x_3 - \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2} \xi)) dx + \int_{\Omega_{\varepsilon}^-} f(e(u(\hat{x}, x_3 + \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\varepsilon}{2} \xi)) dx \right] \\ &= \int_{\Omega} f(e(u)) dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) = \int_{\Omega} f(e(u)) dx + \int_S g((\hat{\nabla} w | \xi)^*) d\hat{x}, \quad (5.15)$$

où  $w = (\hat{v}, u|_S^3)$ . En suivant le même procédé de découpe qu'au chapitre 3, lemme 3.3, on peut modifier  $u_{\varepsilon}$  en une fonction, toujours notée  $u_{\varepsilon}$ , qui a une trace nulle sur  $\Gamma_0$ , de façon que  $(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) \in \mathcal{A}_{\varepsilon}$  et qu'on ait encore  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) = \int_{\Omega} f(e(u)) dx + \int_S g((\hat{\nabla} w | \xi)^*) d\hat{x}$ .

De plus, on sait que

$$\int_S g_0(e(v)) d\hat{x} = \int_S g_0(\hat{e}(v)) d\hat{x} = \inf_{\xi \in \mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)} \int_S g((\hat{\nabla} v | \xi)^*) d\hat{x}.$$

En prenant l'inf sur tous les  $\xi \in \mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)$  dans (5.15) et d'après le lemme 5.1, on obtient

$$\inf_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\limsup \mathcal{F}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}); (u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) \rightarrow (u, v)\} \leq \tilde{\mathcal{F}}(u, v),$$

i.e.,  $\Gamma - \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon \leq \tilde{\mathcal{F}}$ .

On termine en prenant l'enveloppe sci dans chaque membre de l'inégalité. En effet, on montre dans le lemme 5.3 ci-après que  $\mathcal{F}$  est l'enveloppe sci de la fonctionnelle  $\tilde{\mathcal{F}}$ . D'après la propriété de semi-continuité inférieure de  $\Gamma - \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon$  on obtient alors

$$\Gamma - \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon \leq \mathcal{F}. \quad (5.16)$$

**Lemme 5.3.** *Lorsque  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3)$  est muni de la convergence forte, la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est l'enveloppe semi-continue inférieure de  $\tilde{\mathcal{F}}$ .*

*Démonstration.* On rappelle qu'il faut établir que pour tout  $(u, v) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3)$ , on a les deux assertions suivantes :

$$\forall (u_n, v_n) \rightarrow (u, v) \text{ dans } L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3), \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{F}}(u_n, v_n) \geq \mathcal{F}(u, v) \quad (5.17)$$

$$\exists (u_n, v_n) \rightarrow (u, v) \text{ dans } L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3), \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{F}}(u_n, v_n) \leq \mathcal{F}(u, v) \quad (5.18)$$

Soit  $(u_n, v_n) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3)$  une suite qui converge fortement vers  $(u, v)$  telle que  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{F}}(u_n, v_n) < +\infty$ . Alors,  $(u_n, v_n) \in \tilde{\mathcal{A}}$ . La coercivité de  $f$  et  $g_0$  entraîne que  $(u_n, v_n)$  converge faiblement vers  $(u, v)$  dans  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$ . Bien sûr  $v^3 = 0$ , et par continuité de la trace  $\gamma_S(\hat{u}) = \hat{v}$ . Donc  $(u, v) \in \mathcal{A}$  et on peut écrire

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{F}}(u_n, v_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(e(u_n)) dx + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_S g_0(e(v_n)) d\hat{x} \\ &\geq \int_{\Omega} f(e(u)) dx + \int_S g_0(e(v)) d\hat{x} \\ &= \mathcal{F}(u, v). \end{aligned}$$

Montrons la deuxième assertion (5.18). Les fonctions  $f$  et  $g$  étant localement Lipschitziennes, il nous suffit de montrer que pour tout  $(u, v) \in \mathcal{A}$ , il existe une suite d'éléments dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  qui converge fortement vers  $(u, v)$  dans  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$ . Pour cela, on régularise par convolution.

Considérons le cylindre  $\tilde{\Omega} := \tilde{S} \times ]-r, r[$ , où  $\tilde{S}$  contient strictement  $S$ . On étend  $u \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  en une fonction  $\tilde{u} \in \tilde{\Omega}$  par l'opérateur d'extension par réflexion de  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  dans  $W^{1,2}(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ . De même, on étend  $v$  en une fonction  $\tilde{v}$  sur  $\tilde{S}$  par l'opérateur extension de  $W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  dans  $W^{1,p}(\tilde{S}, \mathbb{R}^3)$ . Puisque  $\hat{v} = \gamma_S(\hat{u})$ ,  $\hat{\tilde{v}} = \gamma_{\tilde{S}}(\hat{\tilde{u}})$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{S}, \mathbb{R}^3)$  telle que  $\text{spt } \varphi \supset \supset S$  et  $\varphi = 1$  dans  $S$ . Pour tout  $\delta > 0$ , on choisit  $\eta(\delta)$  suffisamment petit pour que  $\varphi = 1$  dans  $S + B_{\eta(\delta)}$  et

$$\|\hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi \tilde{u}) - (\varphi \tilde{u})\|_{W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)} < \delta, \quad (5.19)$$

$$\|\hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi \tilde{v}) - (\varphi \tilde{v})\|_{W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)} < \delta, \quad (5.20)$$

où  $\hat{\rho}_{\eta(\delta)}$  est un noyau de convolution standard dans  $\mathbb{R}^2$ . On peut noter que le gain de régularité pour la fonction  $\tilde{u}$  concerne seulement la variable  $\hat{x}$ . Posons  $u_\delta := \hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi \tilde{u})$ . Alors,  $u_\delta \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et  $\gamma_S(u_\delta) \in C^\infty(\tilde{S}, \mathbb{R}^3)$ . De plus, d'après (5.19),  $u_\delta \rightarrow u$  fortement dans  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . De même, soit  $v_\delta := \hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi \tilde{v})$ . Alors,  $v_\delta \in C^\infty(\tilde{S}, \mathbb{R}^3)$  et  $\hat{v}_\delta = \gamma_S(\hat{u}_\delta)$ ,  $v_\delta^3 = 0$ .

Enfin,  $v_\delta \rightarrow v$  fortement dans  $W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$ . La fonction  $u_\delta$  n'est a priori pas à trace nulle sur  $\Gamma_0$ , mais comme évoqué précédemment, on peut modifier  $u_\delta$  par troncature au voisinage de  $\Gamma_0$  de façon à ce que la nouvelle fonction ait la même trace sur  $\partial\Omega$  que sa limite faible et satisfasse (5.19). Ainsi,  $(u_\delta, v_\delta) \in \tilde{\mathcal{A}}$  et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{F}}(u_\delta, v_\delta) = \mathcal{F}(u, v).$$

□

### 5.2.2 $\Gamma$ -convergence du modèle limite précédent quand $p \rightarrow 1$

On cherche maintenant la limite variationnelle du modèle précédent (le modèle limite obtenu quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) quand  $p$  tend vers 1. Pour toute fonction  $v$  définie sur  $S$  et à valeur dans  $\mathbb{R}^2$ , on note  $e(v)$  le tenseur linéarisé des déformations appartenant à  $\mathbf{M}_s^{2 \times 2}$ . Pour mettre en évidence la dépendance en  $p$  de la fonction  $g_0$ , on note  $h_p$  la fonction  $g_0$  définie au paragraphe 5.2.1. On suppose que la fonction convexe  $h_p : \mathbf{M}_s^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction positivement homogène de degré  $p$ . Elle satisfait donc la propriété de coercivité et de croissance :

$$\forall \xi \in \mathbf{M}_s^{2 \times 2}, \quad \alpha |\xi|^p \leq h_p(\xi) \leq \beta |\xi|^p. \quad (5.21)$$

On fait les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$\exists h : \mathbf{M}_s^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ tel que } h_p \rightarrow h \text{ simplement dans } \mathbf{M}_s^{2 \times 2} \text{ quand } p \rightarrow 1 \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \exists a > 0 \text{ tel que pour } p \text{ suffisamment proche de } 1, \forall \xi \in \mathbf{M}_s^{2 \times 2} \text{ avec } |\xi| \geq a, \\ h_p(\xi) \geq h(\xi). \end{aligned} \quad (5.23)$$

La fonction  $h$  est donc convexe positivement homogène de degré 1 et vérifie

$$\forall \xi \in \mathbf{M}_s^{2 \times 2}, \quad \alpha |\xi| \leq h(\xi) \leq \beta |\xi|. \quad (5.24)$$

Par exemple, étant donné une fonction  $h$  convexe positivement homogène de degré 1, on peut prendre pour  $h_p$  la fonction  $\xi \mapsto (h(\xi))^p$ . La fonction  $h_p$  ainsi définie, converge simplement vers  $h$  et  $\forall \xi \in \mathbf{M}_s^{2 \times 2}$

$$\frac{\alpha}{2} |\xi|^p \leq \alpha^p |\xi|^p \leq h(\xi)^p \leq \beta^p |\xi|^p \leq 2\beta |\xi|^p$$

si  $p$  suffisamment proche de 1. De plus, la condition d'équi-coercivité (5.22) est clairement satisfaite. L'application  $p$ -norme  $\xi \mapsto |\xi|^p$  vérifie aussi toutes ces conditions quelque soit  $p$ .

Introduisons l'espace des fonctions à "déformation bornée" :

$$\text{BD}(S, \mathbb{R}^2) := \{v \in L^1(S, \mathbb{R}^2) : e(v) \in \mathcal{M}(S, \mathbf{M}_s^{2 \times 2})\}.$$

On renomme la fonctionnelle  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}_p$ , pour mettre en évidence la dépendance en  $p$ , mais afin d'étudier la convergence dans un espace fixe (indépendant de  $p$ ), la fonctionnelle  $\mathcal{G}_p$  est définie sur  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \text{BD}(S, \mathbb{R}^2)$ . Plus précisément,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_p : W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \text{BD}(S, \mathbb{R}^2) &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \mathcal{G}_p(u, v) &:= \begin{cases} \int_{\Omega} f(e(u)) dx + \int_S h_p(e(v)) d\hat{x} & \text{si } (u, v) \in \mathcal{B}_p, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{B}_p := \{(u, v) \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(S, \mathbb{R}^2); \gamma_S(\hat{u}) = v\}.$$

Le second résultat important de cette première partie est le théorème ci-dessous.

**Théorème 5.2.** *Lorsque  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times BD(S, \mathbb{R}^2)$  est muni de la convergence faible, la suite  $(\mathcal{G}_p)_{p \in [1,2]}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $\mathcal{G}$  définie par*

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times BD(S, \mathbb{R}^2) &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \mathcal{G}(u, v) &:= \begin{cases} \int_{\Omega} f(e(u))dx + \int_S h(Ev) & \text{si } (u, v) \in \mathcal{B}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{B} := \{(u, v) \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times BD(S, \mathbb{R}^2); \gamma_S(\hat{u}) = v\}.$$

**Corollaire 5.2.** *La suite de fonctionnelles  $(\mathcal{G}_p - L)_{p \in [1,2]}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $\mathcal{G} - L$ . De plus, si  $(\bar{u}_p, \bar{v}_p) \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times BD(S, \mathbb{R}^2)$  est un minimiseur de  $\mathcal{G}_p - L$ , alors, quitte à extraire une sous-suite,  $((\bar{u}_p, \bar{v}_p))_{p \in [1,2]}$  converge faiblement dans  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times BD(S, \mathbb{R}^2)$  vers un minimiseur de  $\mathcal{G} - L$ .*

L'intégrale  $\int_S h(Ev)$  de la mesure  $Ev \in \mathcal{M}(S, \mathbf{M}_s^{2 \times 2})$  est définie par

$$\int_S h(Ev) := \int_S h(E^a v)dx + \int_S h^\infty\left(\frac{E^s v}{|E^s v|}\right)|E^s v|$$

où  $Ev = E^a v \, d\hat{x} + E^s v$  est la décomposition de Lebesgue-Nikodym de la mesure  $Ev$  par rapport à la mesure bidimensionnelle de Lebesgue, et  $h^\infty$  est la fonction de récession de  $h$  définie pour tout  $\xi \in \mathbf{M}_s^{2 \times 2}$  par  $h^\infty(\xi) := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{h(t\xi)}{t}$ . La partie singulière  $E^s v$  de la mesure prend en compte les discontinuités ou sauts possibles de  $v$ . On trouve une étude détaillée de la structure du gradient des fonctions de  $BD$  dans [3]. On démontre le théorème (5.2) par l'intermédiaire des deux propositions ci-après, dont la preuve est donnée après avoir établi le lemme de compacité pour les suites d'énergie finie.

**Proposition 5.3** ( $\Gamma$ -liminf). *Pour tout  $(u, v) \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times BD(S, \mathbb{R}^2)$  et toute suite  $((u_p, v_p))_{p \in [1,2]}$  qui converge faiblement vers  $(u, v)$  dans  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times BD(S, \mathbb{R}^2)$ ,*

$$\liminf_{p \rightarrow 1} \mathcal{G}_p(u_p, v_p) \geq \mathcal{G}(u, v). \quad (5.25)$$

**Proposition 5.4** ( $\Gamma$ -limsup). *Pour tout  $(u, v) \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times BD(S, \mathbb{R}^2)$ , il existe une suite  $((u_p, v_p))_{p \in [1,2]}$  faiblement convergente vers  $(u, v)$  dans  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times BD(S, \mathbb{R}^2)$ , telle que*

$$\limsup_{p \rightarrow 1} \mathcal{G}_p(u_p, v_p) \leq \mathcal{G}(u, v). \quad (5.26)$$

### Lemme de compacité

**Lemme 5.4.** *Soit  $((u_p, v_p))_{p \in ]1,2]}$  une suite dans  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times BD(S, \mathbb{R}^2)$  telle que  $\sup_{p \in ]1,2]} \mathcal{G}_p(u_p, v_p) < +\infty$ . Alors, il existe  $(u, v) \in \mathcal{B}$  et une sous-suite non renommée telle que  $(u_p, v_p) \rightharpoonup (u, v)$  faiblement dans  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times BD(S, \mathbb{R}^2)$  quand  $p \rightarrow 1$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\sup_{p \in ]1,2]} \mathcal{G}_p(u_p, v_p) < +\infty$ ,  $(u_p, v_p) \in \mathcal{B}_p$  et

$$\mathcal{G}_p(u_p, v_p) = \int_{\Omega} f(e(u_p)) dx + \int_S h_p(e(v_p)) d\hat{x}.$$

On déduit de la coercivité de  $f$  qu'il existe une sous-suite non renommée et  $u \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  tels que  $u_p \rightharpoonup u$  dans  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . De plus, la coercivité de  $h$  et l'hypothèse (5.23) entraînent

$$\begin{aligned} \sup_{p \in ]1,2]} \int_S |e(v_p)| d\hat{x} &= \sup_{p \in ]1,2]} \left[ \int_{|e(v_p)| < a} |e(v_p)| d\hat{x} + \int_{|e(v_p)| \geq a} |e(v_p)| d\hat{x} \right] \\ &\leq \sup_{p \in ]1,2]} \left[ a|S| + \frac{1}{\alpha} \int_S h_p(e(v_p)) d\hat{x} \right] < +\infty. \end{aligned} \quad (5.27)$$

D'autre part, puisque  $(u_p, v_p) \in \mathcal{B}_p$ ,  $\gamma_S(\hat{u}_p) = v_p$ . Par continuité de la trace,  $v_p = \gamma_S(\hat{u}_p) \rightharpoonup \gamma_S(\hat{u})$  fortement dans  $L^2(S, \mathbb{R}^2)$ . Ceci entraîne que la suite  $(v_p)_{p \in ]1,2]}$  est bornée dans  $L^2(S, \mathbb{R}^2)$ , donc dans  $L^1(S, \mathbb{R}^2)$ . La suite  $(v_p)_{p \in ]1,2]}$  est bornée dans  $BD(S, \mathbb{R}^2)$ , par conséquent, il existe une sous-suite non renommée et  $v \in BD(S, \mathbb{R}^2)$  tels que  $v_p \rightharpoonup v$  (dans  $BD(S, \mathbb{R}^2)$ ). Par unicité de la limite, nécessairement  $\gamma_S(\hat{u}) = v$ , donc  $(u, v) \in \mathcal{B}$ .  $\square$

### Preuve de la proposition 5.3 ( $\Gamma$ -liminf)

Avant de démontrer la proposition 5.3, on établit deux lemmes plus généraux.

**Lemme 5.5.** *Soit  $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  un noyau de convolution standard. Alors, pour tout  $V \in L^p(\mathbb{R}^2, \mathbf{M}_s^{2 \times 2})$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} h_p(V(\hat{x})) d\hat{x} \geq \int_{\mathbb{R}^2} h_p((\rho \star V)(\hat{x})) d\hat{x}. \quad (5.28)$$

La preuve repose sur des résultats standards et est laissée au lecteur.

**Lemme 5.6.** *Soit  $V_p \in L^p(S, \mathbf{M}_s^{2 \times 2})$ . Supposons que la mesure  $\mu_p := V_p d\hat{x} \xrightarrow{*} \mu$  dans  $\mathcal{M}(S, \mathbf{M}_s^{2 \times 2})$  et que la mesure  $|\mu_p| := |V_p| d\hat{x} \xrightarrow{*} \nu$  dans  $\mathcal{M}^+(S)$ . Alors, pour tout ouvert  $\omega$  inclus dans  $S$  tel que  $\nu(\partial\omega) = 0$ , on a*

$$\liminf_{p \rightarrow 1} \int_{\omega} h_p(V_p) d\hat{x} \geq h\left(\int_{\omega} d\mu\right). \quad (5.29)$$

*Démonstration.* D'après l'inégalité de Jensen,

$$\int_{\omega} h_p(V_p) d\hat{x} \geq |\omega| h_p\left(\frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} V_p d\hat{x}\right) = |\omega|^{1-p} h_p\left(\int_{\omega} V_p d\hat{x}\right)$$

et il reste à montrer que

$$\liminf_{p \rightarrow 1} h_p\left(\int_{\omega} V_p d\hat{x}\right) \geq h\left(\int_{\omega} d\mu\right). \quad (5.30)$$

On peut supposer que  $|\int_{\omega} d\mu| > 0$ , sinon  $\int_{\omega} d\mu = 0$  et (5.30) est triviale. Comme  $\nu(\partial\omega) = 0$ ,  $\lim_{p \rightarrow 1} \int_{\omega} V_p d\hat{x} = \int_{\omega} d\mu$  (cf corollaire 4.2.1 dans [9]). Donc pour tout  $0 < \sigma < |\int_{\omega} d\mu|$ , il existe  $p_0 \in ]1, 2]$  tel que

$$\forall p, 1 < p \leq p_0, \left| \int_{\omega} V_p d\hat{x} \right| \geq \sigma.$$

La fonction  $h_p$  étant homogène de degré  $p$ , on peut écrire

$$h_p \left( \int_{\omega} V_p d\hat{x} \right) = \left( \frac{\sigma}{a} \right)^p h_p \left( \frac{a}{\sigma} \int_{\omega} V_p d\hat{x} \right)$$

et d'après (5.23), comme  $\left| \frac{a}{\sigma} \int_{\omega} V_p d\hat{x} \right| \geq a$ ,

$$\begin{aligned} \liminf_{p \rightarrow 1} h_p \left( \int_{\omega} V_p d\hat{x} \right) &= \liminf_{p \rightarrow 1} \left( \frac{\sigma}{a} \right)^p h_p \left( \frac{a}{\sigma} \int_{\omega} V_p d\hat{x} \right) \\ &\geq \liminf_{p \rightarrow 1} \left( \frac{\sigma}{a} \right)^{p-1} h \left( \int_{\omega} V_p d\hat{x} \right) \\ &\geq h \left( \int_{\omega} d\mu \right), \end{aligned}$$

d'après la semi-continuité inférieure de  $h$ . □

Nous sommes en mesure de démontrer la proposition 5.3. On peut bien sûr supposer que  $\liminf_{p \rightarrow 1} \mathcal{G}_p(u_p, v_p) < +\infty$ . Donc d'après le lemme de compacité 5.4,  $(u, v) \in \mathcal{B}$ . De plus,

$$\liminf_{p \rightarrow 1} \mathcal{G}_p(u_p, v_p) \geq \int_{\Omega} f(e(u)) dx + \liminf_{p \rightarrow 1} \int_S h_p(e(v_p)) d\hat{x},$$

et il reste à montrer

$$\liminf_{p \rightarrow 1} \int_S h_p(e(v_p)) d\hat{x} \geq \int_S h(Ev). \quad (5.31)$$

Afin d'appliquer le lemme 5.6, nous procédons par localisation. Soit  $\delta > 0$ , et soit  $\hat{\rho}_{\delta} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  un noyau de convolution. Considérons  $\theta_{\delta} \in C_c^{\infty}(S)$  une fonction telle que  $0 \leq \theta_{\delta} \leq 1$  et  $\theta_{\delta} \rightarrow 1$  pp sur  $S$ . Quitte à extraire une sous-suite,  $\hat{\rho}_{\delta} \star \theta_{\delta} |e(v_p)| d\hat{x} \rightarrow \nu_{\delta}$  dans  $\mathcal{M}^+(S)$  et  $\mu_p := \hat{\rho}_{\delta} \star \theta_{\delta} e(v_p) d\hat{x} \rightarrow \hat{\rho}_{\delta} \star \theta_{\delta} Ev$  dans  $\mathcal{M}(S, \mathbf{M}_s^{2 \times 2})$  quand  $p \rightarrow 1$ .

Soit  $\tilde{S} \subset S$ , une réunion finie de cubes de  $\mathbb{R}^2$ . Pour  $\eta > 0$ , on considère  $(\omega_i)_{i \in I_{\eta}}$  une famille finie d'ouverts deux à deux disjoints inclus dans  $\tilde{S}$  tels que  $|\omega_i| < \eta$ , et  $|\tilde{S} \setminus \bigcup_{i \in I_{\eta}} \omega_i| = 0$ . Considérons aussi la famille  $(\tilde{\omega}_{\eta})_{i \in I_{\eta}}$  telle que

$$\begin{aligned} |\tilde{S} \setminus \bigcup_{i \in I_{\eta}} \tilde{\omega}_i| &\leq \eta; \\ \tilde{\omega}_i &\subset \omega_i; \\ \nu_{\delta}(\partial \tilde{\omega}_i) &= 0. \end{aligned}$$

Une telle famille existe (voir le lemme 4.2.1 dans [9]) et dépend de  $\delta$ . D'après le lemme 5.5 et

la propriété d'homogénéité de la fonction  $h_p$ , on peut écrire

$$\begin{aligned}
\liminf_{p \rightarrow 1} \int_S h_p(e(v_p)) d\hat{x} &\geq \liminf_{p \rightarrow 1} \int_{\tilde{S}} \theta_\delta^p h_p(e(v_p)) d\hat{x} \\
&= \liminf_{p \rightarrow 1} \int_{\mathbb{R}^2} h_p(\theta_\delta e(v_p)) d\hat{x} \\
&\geq \liminf_{p \rightarrow 1} \int_{\mathbb{R}^2} h_p(\hat{\rho}_\delta \star \theta_\delta e(v_p)) d\hat{x} \\
&= \liminf_{p \rightarrow 1} \int_{\tilde{S}} h_p(\hat{\rho}_\delta \star \theta_\delta e(v_p)) d\hat{x} \\
&\geq \liminf_{p \rightarrow 1} \sum_{i \in I_\eta} \int_{\tilde{\omega}_i} h_p(\hat{\rho}_\delta \star \theta_\delta e(v_p)) d\hat{x}.
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 5.6, on obtient

$$\begin{aligned}
\liminf_{p \rightarrow 1} \int_S h_p(e(v_p)) d\hat{x} &\geq \liminf_{p \rightarrow 1} \sum_{i \in I_\eta} \int_{\tilde{\omega}_i} h_p(\hat{\rho}_\delta \star \theta_\delta e(v_p)) d\hat{x} \\
&\geq \sum_{i \in I_\eta} h\left(\int_{\tilde{\omega}_i} (\hat{\rho}_\delta \star \theta_\delta Ev)\right) \\
&\geq \sum_{i \in I_\eta} |\omega_i| h\left(\frac{1}{|\omega_i|} \int_{\omega_i} \hat{\rho}_\delta \star \theta_\delta Ev\right) - L|\hat{\rho}_\delta \star \theta_\delta Ev|(\tilde{S} \setminus \bigcup_{i \in I_\eta} \tilde{\omega}_i).
\end{aligned}$$

Le premier terme du second membre est une somme de Riemann. Puisque de plus,  $\hat{\rho}_\delta \star \theta_\delta Ev$  est une fonction régulière, en passant à la limite quand  $\eta \rightarrow 0$ , il vient

$$\liminf_{p \rightarrow 1} \int_S h_p(e(v_p)) d\hat{x} \geq \int_{\tilde{S}} h(\hat{\rho}_\delta \star \theta_\delta Ev) d\hat{x}.$$

En remarquant que  $\hat{\rho}_\delta \star \theta_\delta Ev \rightharpoonup Ev$  dans  $\mathcal{M}(S, \mathbf{M}^{3 \times 2})$ , en passant à la limite lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , on déduit du lemme 2.1 de [32] que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\tilde{S}} h(\hat{\rho}_\delta \star \theta_\delta Ev) d\hat{x} = \int_{\tilde{S}} h(Ev).$$

Ceci étant vrai quelque soit  $\tilde{S} \subset S$ , on obtient finalement (5.31) ce qui conclut la démonstration de la proposition 5.3.

#### Preuve de la proposition 5.4 ( $\Gamma$ -limsup)

On suppose que  $\mathcal{G}(u, v) < +\infty$  de sorte que  $(u, v) \in \mathcal{B}$ . On décompose une fois de plus la démonstration en deux parties, la deuxième correspondant à un procédé de relaxation. Supposons que  $v \in C^1(\tilde{S}, \mathbb{R}^2)$ , et soit  $\tilde{\mathcal{B}}$ , le sous-ensemble de  $\mathcal{B}$  défini par

$$\tilde{\mathcal{B}} := \{(u, v) \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times C^1(\tilde{S}, \mathbb{R}^2); \gamma_S(\hat{u}) = v\}.$$

Considérons la fonctionnelle  $\tilde{\mathcal{G}} : W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \text{BD}(S, \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définie par

$$\tilde{\mathcal{G}}(u, v) := \begin{cases} \int_{\Omega} f(e(u)) dx + \int_S h(e(v)) d\hat{x} & \text{si } (u, v) \in \tilde{\mathcal{B}} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque  $v \in C^1(\tilde{S}, \mathbb{R}^2)$ , pour  $p$  suffisamment proche de 1, on a

$$\begin{aligned} |h_p(e(v(x)))| &\leq \beta \|e(v)\|_\infty^p \\ &\leq C(1 + \|e(v)\|_\infty). \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée et (5.22),

$$\lim_{p \rightarrow 1} \left( \int_\Omega f(e(u)) dx + \int_S h_p(e(v)) d\hat{x} \right) = \int_\Omega f(e(u)) dx + \int_S h(e(v)) d\hat{x},$$

d'où finalement

$$\inf_{p \rightarrow 1} \{ \limsup \mathcal{G}_p(u_p, v_p) : (u_p, v_p) \rightharpoonup (u, v) \} \leq \tilde{\mathcal{G}}(u, v). \quad (5.32)$$

Bien sûr, (5.32) est vérifiée quelque soit  $(u, v) \in \mathcal{B}$ .

On a montré que

$$\Gamma - \limsup_{p \rightarrow 1} \mathcal{G}_p \leq \tilde{\mathcal{G}},$$

et on obtient (5.26) en prenant l'enveloppe sci pour la topologie faible de  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \text{BD}(S, \mathbb{R}^2)$  dans chaque membre de l'inégalité. En effet, on montre dans le lemme 5.7 ci-après, que  $\mathcal{G}$  est la régularisée sci de  $\tilde{\mathcal{G}}$  pour la topologie faible de  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \text{BD}(S, \mathbb{R}^2)$ .

**Lemme 5.7.** *L'espace  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \text{BD}(S, \mathbb{R}^2)$  est muni de la convergence faible. Alors,  $\mathcal{G}$  est l'enveloppe sci de la fonctionnelle  $\tilde{\mathcal{G}}$ .*

*Démonstration.* Notons  $cl(\tilde{\mathcal{G}})$  l'enveloppe sci de la fonctionnelle  $\tilde{\mathcal{G}}$ . L'inégalité  $cl(\tilde{\mathcal{G}}) \geq \mathcal{G}$  est immédiate. Soit  $(u, v) \in \mathcal{B}$ . Pour montrer que  $\mathcal{G} \geq cl(\tilde{\mathcal{G}})$ , il suffit de trouver une suite  $((u_\delta, v_\delta))_{\delta > 0} \subset \tilde{\mathcal{B}}$  telle que

$$\begin{cases} u_\delta \rightharpoonup u \text{ in } W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3); \\ v_\delta \rightarrow v \text{ in } L^1(S, \mathbb{R}^2); \\ \int_\Omega f(e(u_\delta)) dx \rightarrow \int_\Omega f(e(u)) dx; \\ \int_S h(e(v_\delta)) d\hat{x} \rightarrow \int_S h(Ev); \end{cases}$$

lorsque  $\delta \rightarrow 0$ .

Pour cela, on applique la même méthode de régularisation par convolution qu'au lemme 5.3. On considère le cylindre  $\tilde{\Omega} := \tilde{S} \times ]-r, r[$ , où  $\tilde{S}$  contient strictement  $S$ . On étend par réflexion la fonction  $u$  en une fonction  $\tilde{u} \in W^{1,2}(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ . Soit  $\gamma_{\tilde{S}}$  l'opérateur trace de  $W^{1,2}(\tilde{\Omega}^\pm, \mathbb{R}^3)$  dans  $L^2(\tilde{S}, \mathbb{R}^3)$ . On étend  $v$  en une fonction  $\tilde{v}$  qui appartient à  $\text{BD}(\tilde{S}, \mathbb{R}^2)$  en posant  $\tilde{v} = \gamma_{\tilde{S}}(\hat{u})$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{S}, \mathbb{R}^3)$  telle que  $\text{spt} \varphi \supset \supset S$  et  $\varphi = 1$  dans  $S$ . Pour  $\delta > 0$ , on choisit  $\eta(\delta)$  suffisamment petit pour que  $\varphi = 1$  dans  $S + B_{\eta(\delta)}$ , où  $B_{\eta(\delta)}$  est la boule ouverte de  $\mathbb{R}^2$  centrée en 0 et de rayon  $\eta(\delta)$ , et pour tout noyau de convolution  $\hat{\rho}_{\eta(\delta)}$  de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\|\hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi \tilde{u}) - (\varphi \tilde{u})\|_{W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)} < \delta, \quad (5.33)$$

$$\|\hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi \tilde{v}) - (\varphi \tilde{v})\|_{L^1(S, \mathbb{R}^2)} < \delta, \quad (5.34)$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} h(\hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi E \tilde{v})) - \int_{\mathbb{R}^2} h(\varphi E \tilde{v}) \right| < \delta. \quad (5.35)$$

L'estimation (5.35) résulte directement de la convergence étroite de la mesure  $h(\hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi E\tilde{v}))$  vers la mesure  $h(\varphi E\tilde{v})$  dans  $M^+(\mathbb{R}^2)$ , voir par exemple, le lemme 5.2, chapitre II et la remarque 5.1 dans [64], ou, puisque  $h$  est positivement homogène de degré 1, le théorème de continuité de Reshetnyak (Theorem 2.39 dans [4]). En posant  $u_\delta := \hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi \tilde{u})$ ,  $u_\delta \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  vérifie  $\gamma_S(u_\delta) \in C^\infty(\bar{S}, \mathbb{R}^3)$ . De plus, (5.33) entraîne  $u_\delta \rightarrow u$  fortement dans  $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et puisque  $f$  est localement Lipschitzienne,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(e(u_\delta)) \, dx = \int_{\Omega} f(e(u)) \, dx.$$

De même qu'au lemme 5.3, on peut modifier  $u_\delta$  de façon à ce que  $u_\delta$  soit de trace nulle sur  $\Gamma_0$ . Il est facile d'autre part, de voir que  $v_\delta := \hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi \tilde{v}) \rightarrow v$  fortement dans  $L^1(S, \mathbb{R}^2)$  et vérifie  $v_\delta = \gamma_S(\hat{u}_\delta) \in C^\infty(\bar{S}, \mathbb{R}^2)$ , donc  $(u_\delta, v_\delta) \in \tilde{\mathcal{B}}$ . Soit  $r > 0$  tel que  $\text{spt}\varphi \subset S + B_r(0)$  et notons  $S_{2r} = S + B_{2r}(0)$ . On choisit  $r > 0$  tel que la mesure  $|\varphi E\tilde{v}|$  ne charge pas  $\partial S_{2r}$  (voir lemme 4.2.1 dans [9]). Notons qu'également  $|\varphi E\tilde{v}|$  et  $|E\tilde{v}|$  ne chargent pas  $\partial S$  (car  $\tilde{v}$  n'a pas de saut à travers  $\partial S$  et la partie Cantorienne  $C\tilde{v}$  ne charge pas non plus  $\partial S$ ). D'après (5.35), on peut écrire

$$\begin{aligned} \left| \int_S h(e(v_\delta)) \, d\hat{x} - \int_S h(Ev) \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^2} h(\hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi E\tilde{v})) - \int_{\mathbb{R}^2} h(\varphi E\tilde{v}) \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus S} h(\hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi E\tilde{v})) \, d\hat{x} + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus S} |h(\varphi E\tilde{v})| \right| \\ &\leq \delta + \left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus S} h(\hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi E\tilde{v})) \, d\hat{x} + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus S} |h(\varphi E\tilde{v})| \right| \\ &\leq \delta + \left| \int_{S_{2r} \setminus S} h(\hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi E\tilde{v})) \, d\hat{x} + \int_{S_{2r} \setminus S} |h(\varphi E\tilde{v})| \right|. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{S_{2r} \setminus S} |h(\varphi E\tilde{v})| &\leq \beta |\varphi E\tilde{v}|(S_{2r} \setminus S) \\ &\leq C |E\tilde{v}|(S_{2r} \setminus S). \end{aligned}$$

De plus, puisque  $h(\hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi E\tilde{v})) \xrightarrow{\text{na}} h(\varphi E\tilde{v})$  et  $|\varphi E\tilde{v}|(\partial S_{2r}) = |\varphi E\tilde{v}|(\partial S) = 0$ , on a

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \int_{S_{2r} \setminus S} h(\hat{\rho}_{\eta(\delta)} \star (\varphi E\tilde{v})) \, d\hat{x} \right| &= |h(\varphi E\tilde{v})|(S_{2r} \setminus S) \\ &\leq C |E\tilde{v}|(S_{2r} \setminus S), \end{aligned}$$

d'où

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left| \int_S h(e(v_\delta)) \, d\hat{x} - \int_S h(Ev) \right| \leq C |E\tilde{v}|(S_{2r} \setminus S).$$

En faisant tendre  $r$  vers 0, on obtient

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_S h(e(v_\delta)) \, d\hat{x} = \int_S h(Ev).$$

□

Ces deux convergences successives nous permettent de retrouver le modèle limite obtenu dans [52] lorsque la densité d'énergie  $g$  est à croissance linéaire. D'autre part, la convergence variationnelle de  $(\mathcal{G}_p)_{p \in ]1,2]}$  vers  $\mathcal{G}$  suggère que pour  $p$  suffisamment proche de 1, le modèle limite obtenu pour  $1 < p \leq 2$  peut être considéré comme une approximation régulière du modèle de [52], ce qui, d'un point de vue numérique est très intéressant.

### 5.3 $\Gamma$ -convergence pour $p(\varepsilon) \rightarrow 1$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Afin d'obtenir un modèle limite valable d'un point de vue variationnel, on suppose maintenant que la densité d'énergie du matériau qui occupe la couche intermédiaire a une croissance qui tend vers 1 lorsque l'épaisseur de la couche tend vers zéro.

#### 5.3.1 Position du problème et résultat

On note désormais  $g_{p(\varepsilon)}$  la densité d'énergie dans  $B_\varepsilon$ . On suppose que  $g_{p(\varepsilon)}$  est une fonction convexe, positivement homogène de degré  $p(\varepsilon)$  à croissance d'ordre  $p(\varepsilon)$ , avec  $1 < p(\varepsilon) \leq 2$  et  $p(\varepsilon) \rightarrow 1$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. On suppose de plus, que  $g_{p(\varepsilon)}$  converge simplement vers une fonction  $g$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , où  $g$  (évidemment convexe positivement homogène de degré 1) est à croissance linéaire. De façon plus précise, on suppose qu'il existe  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $L$ , trois constantes positives telles que pour tout  $\xi \in \mathbf{M}^{3 \times 3}$

$$\alpha|\xi|^{p(\varepsilon)} \leq g_{p(\varepsilon)}(\xi) \leq \beta|\xi|^{p(\varepsilon)}; \quad (5.36)$$

$$\alpha|\xi| \leq g(\xi) \leq \beta|\xi|; \quad (5.37)$$

$$|g_{p(\varepsilon)}(\xi) - g_{p(\varepsilon)}(\xi')| \leq L|\xi - \xi'| (1 + |\xi|^{p(\varepsilon)-1} + |\xi'|^{p(\varepsilon)-1}). \quad (5.38)$$

Pour simplifier, les constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $L$  sont supposées les mêmes que celles qui interviennent dans tout ce qui précède.

Considérons les fonctions  $h_{p(\varepsilon)}$  et  $h$ , de  $\mathbf{M}_s^{2 \times 2}$  à valeur dans  $\mathbb{R}^+$ , définies par

$$h_{p(\varepsilon)}(\xi) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^3} g_{p(\varepsilon)} \left( \frac{\xi}{\hat{\lambda}} \mid \frac{\hat{\lambda}}{\lambda_3} \right),$$

et

$$h(\xi) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^3} g \left( \frac{\xi}{\hat{\lambda}} \mid \frac{\hat{\lambda}}{\lambda_3} \right).$$

On suppose qu'il existe  $a > 0$  tel que

$$\forall |\xi| \geq a, \quad h_{p(\varepsilon)}(\xi) \geq h(\xi). \quad (5.39)$$

On peut prendre par exemple  $g_{p(\varepsilon)}(\xi) := h(\hat{\xi})^{p(\varepsilon)} + \Psi_{p(\varepsilon)}(\xi_{i3})$ , où  $h$  est une fonction de  $\mathbf{M}_s^{2 \times 2}$  dans  $\mathbb{R}^+$ , convexe, positivement homogène de degré 1, vérifiant (5.24) et  $\Psi_{p(\varepsilon)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction convexe, positivement homogène de degré  $p(\varepsilon)$ , telle que

$$\alpha|\xi_{i3}|^{p(\varepsilon)} \leq \Psi_{p(\varepsilon)}(\xi_{i3}) \leq \beta|\xi_{i3}|^{p(\varepsilon)},$$

et convergeant simplement vers une fonction  $\Psi$  lorsque  $p(\varepsilon) \rightarrow 1$ . La fonction  $g$  est alors donnée par  $\xi \mapsto h(\hat{\xi}) + \Psi(\xi_{i3})$ .

On opère le même changement d'échelle sur les champs de déplacement dans  $B_\varepsilon$  :

$$\hat{v}(\hat{x}, x_3) = \hat{u}(\hat{x}, \varepsilon x_3); \quad v^3(\hat{x}, x_3) = \varepsilon u^3(\hat{x}, \varepsilon x_3) \quad \forall x \in B. \quad (\mathcal{R})$$

Sous ces hypothèses, l'énergie interne de la structure est donnée par la fonctionnelle  $\mathcal{F}_\varepsilon : L^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^1(B, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u, v) := \begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon} f(e(u)) dx + \int_B g_{p(\varepsilon)}((\hat{\nabla}v|_{\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_3}})^*) dx & \text{si } (u, v) \in \mathcal{A}_\varepsilon \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où l'ensemble des déplacements admissibles est caractérisé par

$$(u, v) \in \mathcal{A}_\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} u|_{\Omega_\varepsilon} \in W^{1,2}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3) \\ v \in W^{1,p(\varepsilon)}(B, \mathbb{R}^3) \\ (u, v) \text{ satisfait la condition } (\mathcal{R}). \end{cases}$$

On établit dans le théorème 5.3 ci-dessous, le résultat de  $\Gamma$ -convergence de la suite  $(\mathcal{F}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ .

**Théorème 5.3.** *Lorsque  $L^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^1(B, \mathbb{R}^3)$  est muni de la convergence forte, la suite  $(\mathcal{F}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $\mathcal{F} : L^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^1(S, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*

$$\mathcal{F}(u, v) := \begin{cases} \int_{\Omega} f(e(u)) dx + \int_S h(Ev) & \text{si } (u, v) \in \mathcal{A} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$(u, v) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} u \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \\ v^3 = \frac{\partial v^i}{\partial x_3} = 0 \text{ et } \hat{v} \in BD(S, \mathbb{R}^2) \\ \gamma_S(\hat{u}) = \hat{v}. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement le corollaire :

**Corollaire 5.3.** *Lorsque  $L^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^1(B, \mathbb{R}^3)$  est muni de la convergence forte, la suite de fonctionnelles  $(\mathcal{F}_\varepsilon - L)_{\varepsilon>0}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $\mathcal{F} - L$ . De plus, si  $(\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon) \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^1(B, \mathbb{R}^3)$  est un minimiseur de  $\mathcal{F}_\varepsilon - L$ , alors il existe une sous-suite de  $((\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  qui converge vers  $(\bar{u}, \bar{v})$  un minimiseur de  $\mathcal{F} - L$ .*

On démontre le théorème 5.3 à l'aide des deux propositions suivantes :

**Proposition 5.5.** *Pour tout  $(u, v) \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^1(B, \mathbb{R}^3)$  et toute suite  $((u_\varepsilon, v_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  qui converge fortement vers  $(u, v)$  dans  $L^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^1(B, \mathbb{R}^3)$ ,*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \geq \mathcal{F}(u, v). \quad (5.40)$$

**Proposition 5.6.** *Pour tout  $(u, v) \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^1(S, \mathbb{R}^3)$ , il existe une suite  $((u_\varepsilon, v_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  convergeant fortement vers  $(u, v)$  dans  $L^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^1(B, \mathbb{R}^3)$  telle que*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq \mathcal{F}(u, v). \quad (5.41)$$

On démontre ces propositions en adaptant les démonstrations des deux convergences de la section précédente.

### 5.3.2 Résultat de compacité

**Lemme 5.8.** Soit  $((u_\varepsilon, v_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  une suite dans  $L^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^1(B, \mathbb{R}^3)$  telle que  $\sup_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) < +\infty$ . Alors, il existe  $(u, v) \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times BD(B, \mathbb{R}^3)$  et une sous-suite non renommée tels que

- i)  $u_\varepsilon \rightarrow u$  fortement dans  $L^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ;
- ii)  $v_\varepsilon \rightarrow v$  fortement dans  $L^1(B, \mathbb{R}^3)$  et faiblement dans  $BD(B, \mathbb{R}^3)$ ,  $v^3 = 0$ ;
- iii)  $\frac{\partial v}{\partial x_3} = 0$ , et  $\hat{v} \in BD(S, \mathbb{R}^2)$ ;
- iv)  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{e}(v_\varepsilon) dx_3 \xrightarrow{*} Ev$  dans  $\mathcal{M}(S, \mathbf{M}_s^{2 \times 2})$ ;
- v)  $\gamma_S(\hat{u}) = \hat{v}$ .

*Démonstration.* Puisque  $\sup_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) (= \sup_{\varepsilon>0} F_\varepsilon(u_\varepsilon)) < +\infty$ ,  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{A}_\varepsilon$  et on a les estimations suivantes :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |e(u_\varepsilon)| dx \leq C; \quad (5.42)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} |e(u_\varepsilon)|^{p(\varepsilon)} dx \leq C. \quad (5.43)$$

*Preuve de i).* D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} |e(u_\varepsilon)| dx &\leq |B_\varepsilon|^{1-\frac{1}{p(\varepsilon)}} \left( \int_{B_\varepsilon} |e(u_\varepsilon)|^{p(\varepsilon)} dx \right)^{\frac{1}{p(\varepsilon)}} \\ &\leq |S|^{1-\frac{1}{p(\varepsilon)}} \varepsilon^{1-\frac{1}{p(\varepsilon)}} \varepsilon^{\frac{1}{p(\varepsilon)}} C \\ &\leq C\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Donc la suite  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée dans  $BD(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . On en déduit qu'il existe  $u \in BD(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et une sous-suite non renommée tels que  $u_\varepsilon \rightarrow u$  fortement dans  $L^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et faiblement dans  $BD(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Pour montrer que  $u \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , on procède comme pour le lemme 5.2 : on montre que la suite  $(T_\varepsilon u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge faiblement vers un certain  $z$  dans  $W^{1,2}(\Omega \setminus S, \mathbb{R}^3)$ , puis que  $u = z$  et  $[u] = 0$  pp sur  $S$ . Nous ne reproduisons donc pas la démonstration et renvoyons au lemme 5.2.

*Preuve de ii).* Puisque  $\sup_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) < +\infty$ , on a

$$\int_B \left| \left( \frac{e_{\alpha\beta}(v_\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(v_\varepsilon)} \mid \frac{\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(v_\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon^2} e_{33}(v_\varepsilon)} \right) \right|^{p(\varepsilon)} dx \leq C.$$

Ceci implique

$$\int_B \left| \left( \frac{e_{\alpha\beta}(v_\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(v_\varepsilon)} \mid \frac{\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(v_\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon^2} e_{33}(v_\varepsilon)} \right) \right| dx \leq C, \quad (5.45)$$

et donc

$$\int_B |e(v_\varepsilon)| dx \leq C. \quad (5.46)$$

Montrons que  $v_\varepsilon$  est borné dans  $L^1(B, \mathbb{R}^3)$ . Comme  $T_\varepsilon u_\varepsilon$  est borné dans  $W^{1,2}(\Omega \setminus S, \mathbb{R}^3)$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_B |v_\varepsilon^\alpha| dx &\leq \frac{1}{2} \int_S (|(T_\varepsilon u_\varepsilon^\alpha)^+| + |(T_\varepsilon u_\varepsilon^\alpha)^-|) d\hat{x} + \int_{B_\varepsilon} \left| \frac{\partial u_\varepsilon^\alpha}{\partial x_3} \right| dx \\ &\leq C + \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon| dx \\ &\leq C + |\Omega|^{1 - \frac{1}{p(\varepsilon)}} \left( \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(\varepsilon)} dx \right)^{\frac{1}{p(\varepsilon)}} \\ &\leq C + K |\Omega|^{1 - \frac{1}{p(\varepsilon)}} \left( \int_\Omega |e(u_\varepsilon)|^{p(\varepsilon)} dx \right)^{\frac{1}{p(\varepsilon)}}, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Korn (puisque  $p(\varepsilon) > 1$ ). En écrivant

$$\int_\Omega |e(u_\varepsilon)|^{p(\varepsilon)} dx = \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u_\varepsilon)|^{p(\varepsilon)} dx + \int_{B_\varepsilon} |e(u_\varepsilon)|^{p(\varepsilon)} dx,$$

d'après l'inégalité de Hölder et (5.43), on déduit que  $v_\varepsilon^\alpha$  est borné dans  $L^1(B)$ . De même,

$$|u_\varepsilon^3(\hat{x}, \pm|x_3|)| \leq |(T_\varepsilon u_\varepsilon^3)^\pm(\hat{x})| + \int_{\pm|x_3|}^{\pm\varepsilon/2} \left| \frac{\partial u_\varepsilon^3}{\partial x_3}(\hat{x}, t) \right| dt.$$

Par conséquent, d'après (5.43), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} |u_\varepsilon^3(\hat{x}, x_3)| dx &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_S (|(T_\varepsilon u_\varepsilon^3)^+(\hat{x})| + |(T_\varepsilon u_\varepsilon^3)^-(\hat{x})|) d\hat{x} + \varepsilon \int_{B_\varepsilon} \left| \frac{\partial u_\varepsilon^3}{\partial x_3} \right| dx \\ &\leq C\varepsilon + C\varepsilon^2, \end{aligned} \tag{5.47}$$

d'où

$$\int_B |v_\varepsilon^3(\hat{x}, x_3)| dx = \varepsilon \int_B |u_\varepsilon^3(\hat{x}, \varepsilon x_3)| dx \leq C\varepsilon(1 + \varepsilon).$$

et  $v_\varepsilon^3$  converge fortement vers 0 dans  $L^1(B)$ . La suite  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée dans  $L^1(B, \mathbb{R}^3)$ , et donc, avec (5.46), bornée dans  $BD(B, \mathbb{R}^3)$ . On en déduit qu'il existe  $v \in BD(B, \mathbb{R}^3)$  avec  $v^3 = 0$  tel que  $v_\varepsilon \rightarrow v$  fortement dans  $L^1(B, \mathbb{R}^3)$  et faiblement dans  $BD(B, \mathbb{R}^3)$ .

*Preuve de iii).* On déduit de (5.45) les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_B |e_{\alpha 3}(v_\varepsilon)| dx &\leq C\varepsilon; \\ \int_B |e_{33}(v_\varepsilon)| dx &\leq C\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Or  $v^3 = 0$ , donc nécessairement,  $\frac{\partial v}{\partial x_3} = 0$ , et  $\hat{v} \in BD(S, \mathbb{R}^2)$ .

*Preuve de iv).* D'après ii), la proposition iv) est immédiate.

*Preuve de v).* Soit  $\theta$  une fonction régulière,  $\theta \in C_c^\infty(S)$ . Pour tout  $x_3 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,

$$v_\varepsilon^\alpha(\hat{x}, \pm|x_3|) \theta(\hat{x}) = (T_\varepsilon u_\varepsilon^\alpha)^\pm(\hat{x}) \theta(\hat{x}) - \int_{\pm\varepsilon|x_3|}^{\pm\varepsilon/2} \frac{\partial u_\varepsilon^\alpha}{\partial x_3}(\hat{x}, t) \theta(\hat{x}) dt$$

d'où

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_S v_\varepsilon^\alpha(\hat{x}, x_3) \theta(\hat{x}) d\hat{x} dx_3 = \frac{1}{2} \int_S ((T_\varepsilon u_\varepsilon^\alpha)^+ + (T_\varepsilon u_\varepsilon^\alpha)^-)(\hat{x}) \theta(\hat{x}) d\hat{x} dx_3 + I_\varepsilon. \quad (5.48)$$

Le premier membre de (5.48) tend clairement vers  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_S v^\alpha(\hat{x}) \theta(\hat{x}) dx = \int_S v^\alpha(\hat{x}) \theta(\hat{x}) d\hat{x}$  et le premier terme du second membre tend vers  $\int_S \gamma_S(u^\alpha)(\hat{x}) \theta(\hat{x}) d\hat{x}$ .

Estimons  $I_\varepsilon = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_S \int_{\varepsilon x_3}^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\partial u_\varepsilon^\alpha}{\partial x_3}(\hat{x}, t) \theta(\hat{x}) dt d\hat{x} dx_3$ .

$$\begin{aligned} - \int_S \int_{\varepsilon x_3}^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\partial u_\varepsilon^\alpha}{\partial x_3}(\hat{x}, t) \theta(\hat{x}) dt d\hat{x} &= - \int_S \int_{\varepsilon x_3}^{\frac{\varepsilon}{2}} [2e_{\alpha 3}(u_\varepsilon) - \frac{\partial u_\varepsilon^3}{\partial x_3}](\hat{x}, t) \theta(\hat{x}) dt d\hat{x} \\ &= - \int_S \int_{\varepsilon x_3}^{\frac{\varepsilon}{2}} 2e_{\alpha 3}(u_\varepsilon)(\hat{x}, t) \theta(\hat{x}) dt d\hat{x} - \int_S \int_{\varepsilon x_3}^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha}(\hat{x}) u_\varepsilon^3(\hat{x}, t) dt d\hat{x} \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$|I_\varepsilon| \leq C \int_{B_\varepsilon} [|e_{\alpha 3}(u_\varepsilon)| + |u_\varepsilon^3|] dx$$

qui tend vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Finalement, on obtient

$$\int_S v^\alpha \theta d\hat{x} = \int_S \gamma_S(u^\alpha) \theta d\hat{x}$$

ce qui implique que  $v^\alpha = \gamma_S(u^\alpha)$  pp sur  $S$ .  $\square$

### 5.3.3 $\Gamma$ -liminf

On suppose que  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) < +\infty$ . D'après le lemme de compacité 5.8,  $(u, v) \in \mathcal{A}$ .

Comme précédemment, on montre que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(e(u_\varepsilon)) dx \geq \int_\Omega f(e(u)) dx. \quad (5.49)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g_{p(\varepsilon)} \left( \frac{e_{\alpha\beta}(v_\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(v_\varepsilon)} \middle| \frac{\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(v_\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon^2} e_{33}(v_\varepsilon)} \right) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B h_{p(\varepsilon)}(\hat{e}(v_\varepsilon)) dx \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S h_{p(\varepsilon)} \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{e}(v_\varepsilon) dx_3 \right) d\hat{x}. \end{aligned}$$

Alors, en reprenant la démonstration de la proposition 5.3, le lemme 5.5 avec  $V := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{e}(v_\varepsilon) dx_3$  et le lemme 5.6 avec  $Vp := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{e}(v_\varepsilon) dx_3$ , on obtient

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S h_{p(\varepsilon)} \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{e}(v_\varepsilon) dx_3 \right) d\hat{x} \geq \int_S h(Ev). \quad (5.50)$$

En combinant (5.49) et (5.50), il vient

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \geq \int_\Omega f(e(u)) dx + \int_S h(Ev) = \mathcal{F}(u, v).$$

### 5.3.4 $\Gamma$ -limsup

Montrons la proposition 5.6. On suppose que  $\mathcal{F}(u, v) < +\infty$ , donc  $(u, v) \in \mathcal{A}$ . Considérons l'ensemble  $\tilde{\mathcal{A}} := \{(u, v) \in \mathcal{A}; \gamma_S(u) \in C^1(S, \mathbb{R}^3)\}$  et la fonctionnelle  $\tilde{\mathcal{F}} : L^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^1(S, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définie par

$$\tilde{\mathcal{F}}(u, v) := \begin{cases} \int_{\Omega} f(e(u)) \, dx + \int_S h(e(v)) \, d\hat{x} & \text{si } (u, v) \in \tilde{\mathcal{A}} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si  $(u, v) \in \tilde{\mathcal{A}}$ , alors, quelque soit  $\xi \in \mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)$ , en posant

$$\begin{cases} v_{\varepsilon}^{\alpha}(\hat{x}, x_3) = v^{\alpha}(\hat{x}) + \varepsilon x_3 \xi^{\alpha}(\hat{x}) \\ v_{\varepsilon}^3(\hat{x}, x_3) = \varepsilon u^3(\hat{x}, 0) + \varepsilon^2 x_3 \xi^3(\hat{x}) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u_{\varepsilon}(\hat{x}, x_3) = u(\hat{x}, x_3 - \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2} \xi(\hat{x}) & \text{dans } \Omega_{\varepsilon}^{+} \\ u_{\varepsilon}^{\alpha}(\hat{x}, x_3) = v_{\varepsilon}^{\alpha}(\hat{x}, \frac{x_3}{\varepsilon}) & \text{dans } B_{\varepsilon} \\ u_{\varepsilon}^3(\hat{x}, x_3) = \frac{1}{\varepsilon} v_{\varepsilon}^3(\hat{x}, \frac{x_3}{\varepsilon}) & \text{dans } B_{\varepsilon} \\ u_{\varepsilon}(\hat{x}, x_3) = u(\hat{x}, x_3 + \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\varepsilon}{2} \xi(\hat{x}) & \text{dans } \Omega_{\varepsilon}^{-} \end{cases}$$

comme pour la proposition 5.2, on peut modifier  $u_{\varepsilon}$  au voisinage de  $\Gamma_0$  afin que  $(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) \in \mathcal{A}_{\varepsilon}$ . La fonction  $g_{p(\varepsilon)}$  étant localement Lipschitzienne, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g_{p(\varepsilon)} \left( \left. \frac{e_{\alpha\beta}(v_{\varepsilon})}{\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(v_{\varepsilon})} \right| \frac{\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(v_{\varepsilon})}{\frac{1}{\varepsilon^2} e_{33}(v_{\varepsilon})} \right) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g_{p(\varepsilon)} \left( \left. \frac{e_{\alpha\beta}(v)}{\xi^{\alpha} + \frac{\partial u^3(\hat{x}, 0)}{\partial x_{\alpha}}} \right| \frac{\xi^{\alpha} + \frac{\partial u^3(\hat{x}, 0)}{\partial x_{\alpha}}}{\xi^3} \right).$$

Or d'après le lemme 5.1,

$$\begin{aligned} \int_B g_{p(\varepsilon)} \left( \left. \frac{e_{\alpha\beta}(v)}{\xi^{\alpha} + \frac{\partial u^3(\hat{x}, 0)}{\partial x_{\alpha}}} \right| \frac{\xi^{\alpha} + \frac{\partial u^3(\hat{x}, 0)}{\partial x_{\alpha}}}{\xi^3} \right) dx &= \int_B g_{p(\varepsilon)} \left( \left( \left. \frac{\frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}}}{\frac{\partial u^3(\hat{x}, 0)}{\partial x_{\alpha}}} \right| \frac{\xi^{\alpha}}{\xi^3} \right)^* \right) dx \\ &= \int_B g_{p(\varepsilon)}((\hat{\nabla} w | \xi)^*) dx \end{aligned}$$

où on a posé  $w := (\hat{v}, u|_S^3)$ . De plus, on a

$$\begin{aligned} |g_{p(\varepsilon)}((\hat{\nabla} w | \xi)^*)| &\leq \beta |(\hat{\nabla} w | \xi)^*|^{p(\varepsilon)} \\ &\leq C(1 + \|(\hat{\nabla} w | \xi)^*\|_{\infty}) \end{aligned}$$

qui appartient à  $L^1(S)$ . Comme  $g_{p(\varepsilon)}$  converge simplement vers  $g$ , d'après le théorème de convergence dominée, on déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g_{p(\varepsilon)} \left( \left. \frac{e_{\alpha\beta}(v_{\varepsilon})}{\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(v_{\varepsilon})} \right| \frac{\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(v_{\varepsilon})}{\frac{1}{\varepsilon^2} e_{33}(v_{\varepsilon})} \right) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B g_{p(\varepsilon)}((\hat{\nabla} w | \xi)^*) dx \\ &= \int_B g((\hat{\nabla} w | \xi)^*) dx \\ &= \int_S g((\hat{\nabla} w | \xi)^*) d\hat{x}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(e(u_\varepsilon)) \, dx = \int_{\Omega} f(e(u)) \, dx$$

( $f$  localement Lipschitzienne), d'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = \int_{\Omega} f(e(u)) \, dx + \int_S g((\hat{\nabla} w | \xi)^*) \, d\hat{x}.$$

En prenant l'inf parmi tous les  $\xi \in \mathcal{D}(S, \mathbb{R}^3)$ , on obtient finalement

$$\inf \left\{ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) : (u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rightarrow (u, v) \right\} \leq \tilde{\mathcal{F}}(u, v)$$

soit,  $\Gamma$ - $\limsup \mathcal{F}_\varepsilon \leq \tilde{\mathcal{F}}$ . On conclut en prenant l'enveloppe sci dans chaque membre. En effet, d'après le lemme 5.7,  $\mathcal{F}$  est la régularisée sci de la fonctionnelle  $\tilde{\mathcal{F}}$ .

## 5.4 Généralisation de 5.2.1 : les densités d'énergie $f$ et $g$ sont non convexes et à croissance d'ordres différents

On peut considérer ce problème d'un point de vue un peu plus général : les fonctions  $f$  et  $g$  sont des fonctions non convexes du gradient  $\nabla u$  et à croissance d'ordres différents. Plus précisément,  $f$  et  $g$  vérifient une condition  $\mathcal{C}_q$  et  $\mathcal{C}_p$  respectivement,  $1 < p \leq q$ . Après le changement de variable transformant  $B_\varepsilon$  en  $B$ , on est amené à considérer la fonctionnelle  $\mathcal{F}_\varepsilon$  définie par

$$\mathcal{F}_\varepsilon : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u, v) := \begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\nabla u) \, dx + \int_B g(\hat{\nabla} v | \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_3}) \, dx & \text{si } (u, v) \in \mathcal{A}_\varepsilon \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où l'ensemble  $\mathcal{A}_\varepsilon$  est caractérisé par

$$(u, v) \in \mathcal{A}_\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap W^{1,q}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3) \\ v \in W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3) \\ v(\hat{x}, x_3) = \hat{u}(\hat{x}, \varepsilon x_3) \quad \forall x \in B. \end{cases}$$

En reprenant les notations des chapitres précédents, on a le résultat suivant :

**Théorème 5.4.** *On munit  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3)$  de la convergence forte. La suite  $(\mathcal{F}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  définie par*

$$\mathcal{F} : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\mathcal{F}(u, v) := \begin{cases} \int_{\Omega} Qf(\nabla u) \, dx + \int_S Qg_0(\hat{\nabla} v) \, d\hat{x} & \text{si } (u, v) \in \mathcal{A} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$\mathcal{A} := \{(u, v) \in W_{\Gamma_0}^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3); \gamma_S(u) = v\}.$$

*Démonstration.* En reprenant la démonstration du lemme 5.2, on obtient facilement que

**Lemme 5.9.** *Pour toute suite  $((u_\varepsilon, v_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3)$  telle que  $\sup_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) < +\infty$ , il existe une sous-suite non renommée et  $(u, v) \in W_{\Gamma_0}^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$  tels que*

- i)  $u_\varepsilon \rightarrow u$  fortement dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et faiblement dans  $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ;*
- ii)  $v_\varepsilon \rightarrow v$  fortement dans  $L^p(B, \mathbb{R}^3)$  et faiblement dans  $W^{1,p}(B, \mathbb{R}^3)$ ;*
- iii)  $\frac{\partial v}{\partial x_3} = 0$ , donc  $v \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$ ;*
- iv)  $\gamma_S(u) = v$  donc  $v \in L^q(S, \mathbb{R}^3)$ .*

La difficulté principale dans la démonstration de la  $\Gamma$ -convergence est dans la preuve du lemme de relaxation à cause de la différence entre les ordres de croissance de  $f$  et  $g$ .

En effet, concernant la démonstration de l'assertion (i) dans la définition de la  $\Gamma$ -convergence, en adaptant les démonstrations des propositions 5.1 et 3.4, on montre que pour toute suite  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rightarrow (u, v)$  fortement dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(B, \mathbb{R}^3)$ , on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \geq \mathcal{F}(u, v).$$

Pour l'assertion (ii), en suivant la méthode utilisée dans la proposition 5.2, on obtient

$$\Gamma - \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon \leq \tilde{\mathcal{F}},$$

où la fonctionnelle  $\tilde{\mathcal{F}}$  est définie par

$$\tilde{\mathcal{F}} : L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(u, v) := \begin{cases} \int_{\Omega} f(\nabla u) \, dx + \int_S g_0(\hat{\nabla} v) \, d\hat{x} & \text{si } (u, v) \in \mathcal{A} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On termine la démonstration en prenant l'enveloppe sci dans chaque membre de l'inégalité. En effet, on montre que l'enveloppe sci de la fonctionnelle  $\tilde{\mathcal{F}}$ , lorsque  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3)$  est muni de la topologie forte, est la fonctionnelle  $\mathcal{F}$ .

**Lemme 5.10.** *Lorsque  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3)$  est muni de la topologie forte, la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est l'enveloppe sci de la fonctionnelle  $\tilde{\mathcal{F}}$ .*

*Démonstration.* Il faut montrer que pour tout  $(u, v) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3)$ , on a :

$$\forall (u_n, v_n) \rightarrow (u, v) \text{ dans } L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{F}}(u_n, v_n) \geq \mathcal{F}(u, v) \quad (5.51)$$

$$\exists (u_n, v_n) \rightarrow (u, v) \text{ dans } L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3) \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{F}}(u_n, v_n) \leq \mathcal{F}(u, v) \quad (5.52)$$

Soit  $(u_n, v_n) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3)$  convergeant fortement vers  $(u, v)$  tel que  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{F}}(u_n, v_n) < +\infty$ . Alors,  $(u_n, v_n) \in \mathcal{A}$ . La coercivité de  $f$  et  $g_0$  implique que  $(u_n, v_n)$  converge faiblement vers  $(u, v)$  dans  $W_{\Gamma_0}^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)$  et par continuité de la trace, on a  $\gamma_S(u) = v$ . Donc

$(u, v) \in \mathcal{A}$ , et on peut écrire

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{F}}(u_n, v_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_S g_0(\hat{\nabla} v_n) d\hat{x} \\
&\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} Qf(\nabla u_n) dx + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_S Qg_0(\hat{\nabla} v_n) d\hat{x} \\
&\geq \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx + \int_S Qg_0(\hat{\nabla} v) d\hat{x} \\
&= \mathcal{F}(u, v)
\end{aligned}$$

Montrons maintenant (5.52). on suppose dans un premier temps que  $(u, v) \in W_{\Gamma_0}^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,q}(S, \mathbb{R}^3)$  (i.e.,  $v$  assez régulier) et vérifie  $\gamma_S(u) = v$ . On veut montrer que

$$\exists (u_n, v_n) \rightarrow (u, v) \text{ dans } L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^p(S, \mathbb{R}^3) \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{F}}(u_n, v_n) \leq \mathcal{F}(u, v).$$

Soit  $\eta > 0$  destiné à tendre vers 0. D'après la théorie de la relaxation, on sait qu'il existe une suite  $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $W_{\Gamma_0}^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,q}(S, \mathbb{R}^3)$  telle que

$$\begin{cases}
u_n \rightharpoonup u \text{ dans } W_{\Gamma_0}^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3), \text{ et } (|\nabla u_n|^q)_{n \in \mathbb{N}} \text{ uniformément intégrable;} \\
v_n \rightharpoonup v \text{ dans } W^{1,q}(S, \mathbb{R}^3); \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx = \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx; \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S (4\beta\eta | \cdot|^q + g_0)(\hat{\nabla} v_n) d\hat{x} = \int_S Q(4\beta\eta | \cdot|^q + g_0)(\hat{\nabla} v) d\hat{x}.
\end{cases} \quad (5.53)$$

On introduit la petite perturbation régularisante  $4\beta\eta |\cdot|^q$  pour égaler les conditions de croissance,  $\eta$  étant destiné à tendre vers 0. La contrainte  $\gamma_S(u_n) = v_n$  n'est a priori pas vérifiée. Comme précédemment, on va modifier  $u_n$  au voisinage de  $S$  pour que cette contrainte soit satisfaite. Reconsidérons les ouverts  $\Sigma_\eta := S \times ]-\eta, \eta[$  et  $\Sigma_{2\eta} := S \times ]-2\eta, 2\eta[$  et  $(\varphi_\eta)_{\eta > 0}$  une suite de fonctions dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  vérifiant

$$\begin{aligned}
\varphi_\eta &= 1 \text{ dans } \Omega \setminus \Sigma_{2\eta}, \quad \varphi_\eta = 0 \text{ dans } \Sigma_\eta, \quad 0 \leq \varphi_\eta \leq 1, \\
|\nabla \varphi_\eta| &\leq \frac{1}{\eta}.
\end{aligned}$$

On définit  $u_{n,\eta}$  par :

$$u_{n,\eta} := \varphi_\eta(u_n - v_n) + v_n,$$

de sorte que  $u_{n,\eta} \in W_{\Gamma_0}^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et vérifie  $\gamma_S(u_{n,\eta}) = v_n$ .

D'après la condition de croissance vérifiée par  $f$ , on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta}) dx &= \int_{\Omega \setminus \Sigma_{2\eta}} f(\nabla u_n) dx + \int_{\Sigma_{2\eta} \setminus \Sigma_\eta} f(\nabla u_{n,\eta}) dx + \int_{\Sigma_\eta} f(\nabla v_n) dx \\
&\leq \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx + \beta \int_{\Sigma_\eta} (1 + |\nabla v_n|^q) dx + \beta \int_{\Sigma_{2\eta} \setminus \Sigma_\eta} (1 + |\nabla v_n|^q) dx \\
&\quad + C \left[ \int_{\Sigma_{2\eta}} |\nabla u_n|^q dx + \frac{1}{\eta^q} \int_{\Sigma_{2\eta}} |u_n - v_n|^q dx \right] \\
&= \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx + 4\eta\beta \int_S |\hat{\nabla} v_n|^q dx + C \left[ \eta + \int_{\Sigma_{2\eta}} |\nabla u_n|^q dx + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\eta^q} \int_{\Sigma_{2\eta}} |u_n - v_n|^q dx \right]
\end{aligned}$$

où  $C$  désigne différentes constantes indépendantes de  $n$  et  $\eta$ . D'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\nabla u_{n,\eta}) dx + \int_S g_0(\hat{\nabla} v_n) d\hat{x} &\leq \int_{\Omega} f(\nabla u_n) dx + \int_S (4\beta\eta |^q + g_0)(\hat{\nabla} v) d\hat{x} \\ &\quad + C \left[ \eta + \int_{\Sigma_{2\eta}} |\nabla u_n|^q dx + \frac{1}{\eta^q} \int_{\Sigma_{2\eta}} |u_n - v_n|^q dx \right]. \end{aligned}$$

Et d'après (5.53), il vient

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{F}}(u_{n,\eta}, v_n) &\leq \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx + \int_S Q(4\beta\eta |^q + g_0)(\hat{\nabla} v) d\hat{x} \\ &\quad + C \left[ \eta + \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Sigma_{2\eta}} |\nabla u_n|^q dx + \frac{1}{\eta^q} \int_{\Sigma_{2\eta}} |u - v|^q dx \right]. \end{aligned}$$

Or  $\gamma_S(u) = v$  pp sur  $S$ , donc d'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\int_{\Sigma_{2\eta}} |u - v|^q dx \leq \eta^q \int_{\Sigma_{2\eta}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right|^q dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{F}}(u_{n,\eta}, v_n) &\leq \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx + \int_S Q(4\beta\eta |^q + g_0)(\hat{\nabla} v) d\hat{x} \\ &\quad + C \left[ \eta + \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Sigma_{2\eta}} |\nabla u_n|^q dx + \int_{\Sigma_{2\eta}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right|^q dx \right]. \quad (5.54) \end{aligned}$$

Avant de passer à la limite quand  $\eta \rightarrow 0$ , on établit le résultat suivant :

**Lemme 5.11.** *Soit  $\eta > 0$ . Alors, pour tout  $\zeta \in \mathbf{M}^{3 \times 2}$ ,*

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} Q(\eta |^q + g_0)(\zeta) = Qg_0(\zeta).$$

*Démonstration.* Pour  $\eta$  suffisamment petit, on a

$$\eta|\zeta|^q + g_0(\zeta) \leq |\zeta|^q + g_0(\zeta) \in L^1(S, \mathbb{R}^3).$$

De plus, puisque

$$\begin{aligned} Q(\eta |^q + g_0)(\zeta) &= \inf_{\phi \in C_c^\infty(D)} \frac{1}{|D|} \int_D (\eta |^q + g_0)(\zeta + \hat{\nabla} \phi) d\hat{x}, \\ Qg_0(\zeta) &= \inf_{\phi \in C_c^\infty(D)} \frac{1}{|D|} \int_D g_0(\zeta + \hat{\nabla} \phi) d\hat{x}, \end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \inf_{\phi \in C_c^\infty(D)} \frac{1}{|D|} \int_D (\eta |^q + g_0)(\zeta + \hat{\nabla} \phi) d\hat{x} \right) \\ &= \inf_{\eta > 0} \left( \inf_{\phi \in C_c^\infty(D)} \frac{1}{|D|} \int_D (\eta |^q + g_0)(\zeta + \hat{\nabla} \phi) d\hat{x} \right) \\ &= \inf_{\phi \in C_c^\infty(D)} \left( \inf_{\eta > 0} \frac{1}{|D|} \int_D (\eta |^q + g_0)(\zeta + \hat{\nabla} \phi) d\hat{x} \right) \\ &= \inf_{\phi \in C_c^\infty(D)} \left( \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{|D|} \int_D (\eta |^q + g_0)(\zeta + \hat{\nabla} \phi) d\hat{x} \right). \end{aligned}$$

On conclut par le théorème de convergence dominée.  $\square$

*Retour à la démonstration du lemme 5.10.* La suite  $(|\nabla u_n|^q)_{n \in \mathbb{N}}$  étant uniformément intégrable, d'après le lemme 5.11 et en appliquant une nouvelle fois le théorème de convergence dominée, on obtient en passant à la limite quand  $\eta \rightarrow 0$  dans (5.54),

$$\begin{aligned} \limsup_{\eta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{F}}(u_{n,\eta}, v_n) &\leq \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_S Q(2\beta\eta | \cdot|^q + g_0)(\hat{\nabla} v) d\hat{x} \\ &= \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx + \int_S Qg_0(\hat{\nabla} v) d\hat{x}. \end{aligned}$$

En appliquant alors le lemme de diagonalisation 1.1, il existe une application  $n \mapsto \eta(n)$  telle que  $\eta(n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et en posant  $\tilde{u}_n := u_{n,\eta(n)}$ , on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{u}_n, v_n) \leq \mathcal{F}(u, v). \quad (5.55)$$

Il reste à montrer que pour tout  $(u, v) \in \mathcal{A}$ , il existe  $(u_\delta, v_\delta) \in \mathcal{A}$ , tel que  $v_\delta \in W^{1,q}(S, \mathbb{R}^3)$  et tel que

$$\begin{aligned} u_\delta &\rightarrow u \text{ in } W_{\Gamma_0}^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3); \\ v_\delta &\rightarrow v \text{ in } W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3); \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} Qf(\nabla u_\delta) dx &= \int_{\Omega} Qf(\nabla u) dx; \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_S Qg_0(\hat{\nabla} v_\delta) d\hat{x} &= \int_S Qg_0(\hat{\nabla} v) d\hat{x}. \end{aligned}$$

Pour cela, il suffit d'appliquer le même raisonnement que pour l'élasticité linéarisée en régularisant par convolution. □

□

## 5.5 Exploitation numérique

On a vu dans la première partie de ce chapitre que le deuxième passage à la limite ( $p \rightarrow 1$  après  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) montre que la fonctionnelle  $\mathcal{G}_p$  peut être considérée comme une approximation régulière de la fonctionnelle  $\mathcal{G}$ . Dans cette dernière section, on souhaite simplement donner une application concrète de ce résultat. La démonstration de la convergence lorsque  $p$  tend vers 1 à la section 5.2.2 s'adapte très facilement au cas où les fonctions  $f$ ,  $h_p$  et  $h$  sont des fonctions des gradients  $\nabla u$  et  $\hat{\nabla} \gamma_S(u)$ .

Par exemple, supposons que la fonctionnelle  $\mathcal{G}$  est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times \text{BD}(S, \mathbb{R}^2) &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \mathcal{G}(u, v) &:= \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_S |Dv| & \text{si } (u, v) \in \mathcal{B}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

et que l'on souhaite résoudre le problème de minimisation

$$\min_{(u,v) \in \mathcal{B}} \mathcal{G}(u, v) - L(u). \quad (5.56)$$

On peut alors approcher la fonctionnelle  $\mathcal{G}$  par la fonctionnelle  $\mathcal{G}_p$  définie par

$$\mathcal{G}_p : W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\mathcal{G}_p(u, v) := \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{p} \int_S |\nabla v|^p & \text{si } (u, v) \in \mathcal{B}_p, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et résoudre, pour  $p$  suffisamment proche de 1, le problème de minimisation

$$\min_{(u,v) \in \mathcal{B}_p} \mathcal{G}_p(u, v) - L(u). \quad (5.57)$$

Lorsque  $p$  est voisin de 1, les méthodes du Lagrangien augmenté sont couramment utilisées pour la résolution d'un tel système. On va voir que les algorithmes décrits dans [47], [38], pour la résolution du problème du  $p$ -Laplacien convergent pour la résolution du problème (5.57) (en dimension finie).

Soient  $V := \{v \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) : \gamma_S(v) \in W^{1,p}(S, \mathbb{R}^3)\}$ ,  $W := L^p(S, \mathbf{M}^{3 \times 2})$ , et considérons les fonctions  $F : W \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G : V \rightarrow \mathbb{R}$  définies par  $F(\xi) := \frac{1}{p} \int_S |\xi|^p d\hat{x}$  et  $G(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - L(v)$ . Le problème (5.57) est équivalent au problème

$$\min_{u \in V} \{F(Bu) + G(u)\} \quad (5.58)$$

où l'opérateur  $B$  est l'opérateur  $\hat{\nabla}$ . Le problème (5.58) admet une solution. L'opérateur  $B$  est linéaire continu de  $V$  dans  $W$  et injectif.

La fonction  $F$  satisfait les propriétés suivantes (voir [38]) :

- (i)  $\lim_{|\xi|_p \rightarrow +\infty} \frac{F(\xi)}{|\xi|_p} = +\infty$  ;
- (ii)  $\forall \xi, \lambda \in L^p(S, \mathbf{M}^{3 \times 2})$ ,  $(F'(\lambda) - F'(\xi), \lambda - \xi) \geq \frac{\alpha |\lambda - \xi|_p^2}{(|\xi|_p + |\lambda|_p)^{2-p}}$  ;
- (iii)  $\forall \xi, \lambda \in L^p(S, \mathbf{M}^{3 \times 2})$ ,  $|F'(\lambda) - F'(\xi)|_p \leq \beta |\lambda - \xi|_p^{p-1}$  ;

et est convexe propre sci sur  $W$ . De plus, la fonction  $G$  est convexe propre sci sur  $V$ . Bien sûr,  $V$  et  $H$  ne sont pas des espaces de Hilbert. Mais en considérant le problème discrétisé, on se place dans un espace de dimension finie et sous ces hypothèses, la solution de (5.58) est unique, et l'algorithme du Lagrangien augmenté converge vers la solution  $u$  du problème.

# Conclusion

La modélisation des multi-matériaux obtenus par l'assemblage de deux solides par l'intermédiaire d'une couche mince donne lieu à de nombreux problèmes et fournit un vaste domaine d'étude. Dans cette thèse, nous avons considéré différentes situations donnant lieu à différentes manières d'aborder le problème, mais ce, toujours dans le cadre d'une analyse asymptotique, le but étant de "remplacer" le problème initial par un problème limite où la couche mince, source de nombreuses difficultés, est remplacée par une surface matérielle. Dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope au chapitre 1, nous nous sommes intéressés à l'influence de la géométrie de la couche mince dans les deux situations correspondant aux cas significatifs pour la rigidité. Nous avons retrouvé des résultats déjà connus en les renforçant par des arguments de convergence forte. Les résultats obtenus par la méthode des développements asymptotiques et par convergence faible ont fait l'objet d'une publication aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences ([18]). Du point de vue numérique, la configuration du problème limite nous a conduit à rechercher des méthodes de résolution par décomposition de domaine ou par résolution alternée. Les résultats de convergence de la méthode de résolution par décomposition de domaine dans le cas scalaire ont également fait l'objet d'une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences ([15]). A partir de ces résultats, on peut envisager une étude plus approfondie de l'algorithme afin de donner, entre autres, des estimations d'erreur puis réaliser des essais numériques permettant de valider ces résultats.

Comme nous l'avons remarqué précédemment, les modèles limites obtenus dans le cadre de l'élasticité non linéaire ne constituent qu'une première étape, les conditions de croissance majorantes n'étant pas admissibles du point de vue de la mécanique. Les résultats proposés au chapitre 3 ont fait l'objet d'une parution ([16]), de même que la première partie du chapitre 4 ([17]). Dans [41] et [31], les auteurs proposent de dériver des modèles à petits paramètres (respectivement l'épaisseur et le chargement) où le potentiel général  $W$  ne vérifie pas nécessairement ces hypothèses. Dans [31], sous des hypothèses respectant les conditions  $\det(I + \nabla u) > 0$  et  $W(\xi) \rightarrow +\infty$  quand  $\det \xi \rightarrow 0$ , Dal Maso *et al.* ont obtenu le modèle de l'élasticité linéaire tri-dimensionnelle comme  $\Gamma$ -limite du modèle non linéaire. Reprenons les notations du chapitre 1, paragraphe 1.3.1. Soit  $\phi$  une déformation. D'après le principe de l'indifférence matérielle on peut exprimer  $W(x, \nabla \phi)$  en terme du tenseur de Green-St-Venant  $\frac{1}{2}(\nabla \phi^T \nabla \phi - I)$ , cela signifie que l'on peut écrire  $W(x, \nabla \phi) = V(x, \frac{1}{2}(\nabla \phi^T \nabla \phi - I))$  où la fonction  $V$  est définie sur  $\Omega \times \mathbf{M}_s^{3 \times 3}$ . Soit  $\eta > 0$  un petit paramètre. En partant du principe que puisque  $u = 0$  est une configuration d'équilibre lorsqu'il n'y a pas de chargement extérieur, il est naturel d'attendre des petits déplacements (d'ordre  $\eta$ ) pour des chargements extérieurs petits (d'ordre  $\eta$ ), ces auteurs se ramènent à considérer la fonctionnelle  $I_\eta(u) := \frac{1}{\eta^2} \int_\Omega V(x, \eta e(u) + \frac{1}{2} \eta^2 \nabla u^T \nabla u) dx$ . Alors en supposant que l'unique minimiseur de  $V(x, \cdot)$  est 0, que la configuration de référence n'est pas précontrainte, et sous quelques hypothèses de régularité autour de 0, ils montrent que la suite  $(I_\eta)_{\eta > 0}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $I(u) := \int_\Omega A(x) e(u) e(u) dx$  lorsque  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$

est muni de la convergence faible, où  $A(x)$  est le tenseur de l'élasticité. Ces résultats constituent une justification supplémentaire du modèle de l'élasticité linéaire. En revenant à notre problème, avec cette idée de justification, il serait intéressant d'étudier le cas d'une multi-structure comprenant une couche mince rigide et de voir si l'on retrouve le modèle limite obtenu au chapitre 3 dans le cadre de l'élasticité linéaire. Dans ce cas, on doit considérer deux paramètres :  $\varepsilon$  et  $\eta$ ; et une difficulté supplémentaire apparaît après le changement d'échelle dans la structure du gradient de  $u$  dans  $B$ .

Pour rendre l'étude réalisée au chapitre 5 pour le cas où le matériau dans la couche mince est à croissance d'ordre  $p(\varepsilon)$  (qui tend vers 1 lorsque l'épaisseur tend vers 0) plus réaliste du point de vue de la mécanique, il serait intéressant de raisonner sur les espaces fonctionnels particuliers, adaptés à l'étude des matériaux de type Norton-Hoff, et étudiés par Geymonat et Suquet [45] :

$$X_{p,r} = \{\sigma = (\sigma_{ij}), \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \sigma_{ij}^D \in L^p(\Omega), 1 \leq i, j \leq 3, Tr(\sigma) \in L^r(\Omega)\}$$

$$\Sigma_{p,r} = \{\sigma \in X_{p,r}, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \in L^p(\Omega) \ i = 1, \dots, 3\}$$

avec  $1 \leq p, r < +\infty$ .

L'étude ou la modélisation dans le cadre de l'élasticité de structures telles que les multi-matériaux conduisent à de nombreux problèmes aussi bien mathématiques que mécaniques. Nous avons tenté dans ce travail de considérer différentes situations provenant de différentes hypothèses sur la nature des matériaux et proposé une formulation mathématique permettant de modéliser les phénomènes associés. Le cadre mathématique adopté pour obtenir des modèles limites nécessite généralement des hypothèses qui ne respectent pas certains principes mécaniques mais il permet d'étudier des problèmes mathématiques nouveaux, tout en apportant une première réponse au problème mécanique considéré.

# Table des figures

1	De la configuration physique à la configuration limite. . . . .	4
2.1	Divers types de géométrie . . . . .	24
2.2	Le problème posé sur un domaine fixe . . . . .	27
2.3	illustration du problème . . . . .	53

# Bibliographie

- [1] E. Acerbi, G. Buttazzo, and P. Percivale. Thin inclusions in linear elasticity : a variational approach. *J. Reine Angew. Math.*, 386 :99–115, 1988.
- [2] S. Agmon. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 15 :119–147, 1962.
- [3] L. Ambrosio, A. Coscia, and G. Dal Maso. Fine properties of functions in bd. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 139 :201–238, 1997.
- [4] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford University Press, 2000.
- [5] O. Anza-Hafsa and J. P. Mandallena. Interchange of infimum and integral. *Calc. Var.*, 18 :433–449, 2003.
- [6] O. Anza-Hafsa and J-P. Mandallena. The nonlinear membrane energy : variational derivation under the constraint " $\det \nabla u > 0$ ". *Bull. Sci. Math.*, 132 :272–291, 2008.
- [7] H. Attouch. *Variational convergence for functions and operators*. Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1985.
- [8] H. Attouch, J. Bolte, P. Redont, and A. Soubeyran. Alternating proximal algorithms for weakly coupled convex minimization problems. applications to dynamical games and PDE's. *J. Convex Anal.*, 15 :485–506, 2008.
- [9] H. Attouch, G. Buttazzo, and G. Michaille. *Variational analysis in Sobolev and BV space : application to PDEs and Optimization*. MPS-SIAM Book Series on Optimization, 2005.
- [10] J.M. Ball. Convexity conditions and existence theorem in nonlinear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 63 :337–403, 1977.
- [11] J.M. Ball. A version of the fundamental theorem for Young measures. In M. Rascle, D. Serre, and M. Slemrod, editors, *PDE s and Continuum Models of Phase Transitions*, volume 359 of *Lecture Notes in Physics*, pages 3–16. Springer-Verlag, 1989.
- [12] J.M. Ball and R.D. James. Fine phas mixtures as minimizers of energy. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 100 :13–52, 1987.
- [13] J.M. Ball and F. Murat.  $W^{1,p}$  quasiconvexity and variational problems for multiple integrals. *J. Funct. Anal.*, 58 :225–253, 1984.
- [14] A. Bensoussan and J. Frehse. Asymptotic behaviour of Norton-Hoff's law in plasticity theory and  $H^1$  regularity. In J.L. Lions and C. Baiocchi, editors, *Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications*, volume 29 of *Research Notes in Applied Mathematics*. Masson, Paris, 1993.
- [15] A-L. Bessoud and F. Krasucki. GMRES algorithm for multi-materials with strong interface. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris, s I*, 343 :297–282, 2006.

- [16] A-L. Bessoud, F. Krasucki, and G. Michaille. Multi materials with strong interface : variational modelings. *Asymptot. Anal.*, 1 :1–19, 2009.
- [17] A-L. Bessoud, F. Krasucki, and G. Michaille. A relaxation procedure for bifunctionals of displacement-Young measure state variables : a model of multi-material with micro-structured strong interface. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, to appear.
- [18] A-L. Bessoud, F. Krasucki, and M. Serpilli. Plate-like and shell-like inclusions with high rigidity. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris, s I*, 346 :697–702, 2008.
- [19] K. Bhattacharya and R.D. James. A theory of thin films of martinsitic materials with applications to microactuators. *J. Mech. Phys. Solids*, 47 :531–576, 1999.
- [20] A. Braides.  *$\Gamma$ -convergence for beginners*. Oxford University Press, 2002.
- [21] H. Brezis, L.A. Caffarelli, and A. Friedman. Reinforcement problems for elliptic equations and variational inequalities. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 123 :219–246, 1980.
- [22] D. Caillerie. The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2 :251–270, 1980.
- [23] C. Castaing, P. Raynaud de Fitte, and M. Valadier. *Young measure on topological spaces with applications in control theory and probability theory*. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [24] C. Castaing and M. Valadier. *Convex analysis and measurable multifunctions*, volume 590 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, 1977.
- [25] D. Chapelle and A. Ferent. Modeling of the inclusion of a reinforcing sheet whithin a 3d medium. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 13 :573–595, 2002.
- [26] P.G. Ciarlet. *Elasticité tridimensionnelle*. Masson, 1986.
- [27] P.G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity*. North Holland, 2000.
- [28] P.G. Ciarlet and P. Destuynder. A justification of the two-dimensional linear plate model. *J. Mécanique*, 18 :315–344, 1979.
- [29] B. Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Springer-Verlag, 1989.
- [30] DalMaso. *An Introduction to Gamma-convergence*. Birkhäuser, 1993.
- [31] G. DalMaso, M. Negri, and D. Percivale. Linearized elasticity as  $\Gamma$ -limit of finite elasticity. *Set-Valued Anal.*, 10 :165–183, 2002.
- [32] F. Demangel and R. Temam. Convex functions of a measure and applications. *Indiana Univ. Math. J.*, 33, 1984.
- [33] P. Destuynder, F. Michavila, F. Santos, and Y. Ousset. Some theoritaical aspects in computational analysis of adhesive lap joints. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 35 :1237–1262, 1992.
- [34] H. Le Dret and A. Raoult. The non linear membrane model as variational limit in nonlinear three-dimensional elasticity. *J. Math. Pures Appl.*, 73 :549–578, 1995.
- [35] N. Dunford and J.T. Schwartz. *Linear Operators, Part II : Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space*. Wiley interscience, New-York, 1963.
- [36] I. Fonseca and G. Francfort. On the inadequacy of the scaling of linear elasticity for 3d-2d asymptotics in a nonlinear setting. *J. Math. Pures Appl.*, 80 :547–562, 2001.
- [37] I. Fonseca, S. Müller, and P. Pedregal. Analysis of concentration and oscillation effects generated by gradients. *Siam J. Math. Anal.*, 119 :329–365, 1998.

- [38] M. Fortin and R. Glowinski. *Méthodes de Lagrangien Augmenté Applications à la résolution de problèmes aux limites*. Dunod, 1982.
- [39] M. Franciosi. A condition implying boundedness and VMO for a function  $f$ . *Studia Math.*, 123, 1997.
- [40] L. Freddi and R. Paroni. The energy density of martensitic thin films via dimension reduction. *Interfaces and Free Boundaries*, 6 :439–459, 2004.
- [41] G. Friesecke, R. D. James, and S. Müller. A theorem on geometric rigidity and the derivation of nonlinear plate theory from the three-dimensional elasticity. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45 :1461–1506, 2002.
- [42] G. Geymonat and F. Krasucki. A limit problem of a soft thin joint. In G. Talenti et E. Vesentini P. Marcellini, editor, *Partial Differential Equations and Applications*. Marcel Dekker, New-York, 1996.
- [43] G. Geymonat, F. Krasucki, and S. Lenci. Mathematical analysis of a bounded joint with a soft thin adhesive. *Math. Mech. Solids*, 4 :201–225, 1999.
- [44] G. Geymonat, F. Krasucki, D. Marini, and M. Vidrascu. A domain decomposition method for a bounded structure. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 8 :1387–1402, 1998.
- [45] G. Geymonat and P. Suquet. Functional Spaces for Norton-Hoff Materials. *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, 8 :206–222, 1986.
- [46] E. De Giorgi and T. Franzoni. Su un tipo de convergenza variazionale. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 58 :842–850, 1975.
- [47] R. Glowinski and A. Marrocco. Sur l’approximation par éléments finis d’ordre un et la résolution par pénalisation-dualité d’une classe de problèmes de dirichlet non linéaires. *Revue Française d’Automatique Informatique Recherche Opérationnelle, Analyse Numérique*, R-2 :41–76, 1975.
- [48] M. Goland and E. Reissner. The stresses in cemented joints. *J. Appl. Mech. ASME*, 11 :A17–A27, 1944.
- [49] P. Grisvard. *Singularities in Boundary Value Problems*. Masson-Springer Verlag, 1992.
- [50] M. E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, 1981.
- [51] Hung Pham Huy and Enrique Sanchez-Palencia. Phénomènes de transmission à travers des couches minces de conductivité élevée. *J. Math. Anal. Appl.*, 47 :284–309, 1974.
- [52] O. Iosifescu, P. Juntharee, C. Licht, and G. Michaille. A mathematical model of a pseudo-plastic welding adhesive. *Analysis and Applications*, page to appear.
- [53] D. Kinderlehrer and P. Pedregal. Characterization of Young measures generated by gradients. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 119 :329–365, 1991.
- [54] D. Knees. *Regularity results for quasilinear elliptic systems of power-law growth in nonsmooth domains. Boundary, transmission and crack problems*. PhD thesis, Universität de Stuttgart, 2005.
- [55] M. L. Leghminzi, C. Licht, and G. Michaille. The nonlinear membrane model : a Young measure and varifold formulation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 11 :449–472, 2005.
- [56] K. Lemrabet. *Etude de divers problèmes aux limites de Ventcel d’origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers*. PhD thesis, Université Houari Boumediène d’Alger, 1987.

- [57] K. Lemrabet. Problèmes de ventcel pour le système de l'élasticité dans un domaine de  $\mathbb{R}^3$ . *C. R. Acad. Sc. Paris, s I*, 304 :151–154, 1987.
- [58] C. Licht and G. Michaille. A modelling of elastic adhesive bounded joints. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 7(2) :711–740, 1997.
- [59] C.B. Morrey. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [60] R.W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity : on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, A328 :567–583, 1972.
- [61] W.R. Osgood and W. Ramberg. Description of stress-strain curves by three parameters. Technical report, NACA Technical Note 902, National Bureau of Standards, Washington, 1943.
- [62] M. Serpilli. *Contributions à la modélisation des structures minces et d'assemblages multicouches*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2008.
- [63] P. Suquet. Discontinuities and plasticity. In J. J. Moreau and P. D. Panagiotopoulos, editors, *Non-Smooth Mechanics and Applications*, CISM Courses and Lectures, pages 280–340. Springer-Verlag, Wien, 1988.
- [64] R. Temam. *Problèmes Mathématiques en Plasticité*. Gauthier-Villars, 1983.
- [65] M. Valadier. Young measures. In *Methods of Non Convex Analysis*, volume 1446 of *Lect. Notes in Math.*, pages 152–188. Springer-Verlag, 1990.
- [66] M. Valadier. A course on Young measures. *Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste*, 26 :349–394, 1994.
- [67] V. Šverák. Rank-one-convexity does not imply quasi-convexity. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 120A :185–187, 1992.
- [68] R. Winther. Some superlinear convergence result for the conjugate gradient method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 17 :14–17, 1980.